



HAL
open science

Approche multi-échelle du comportement mécanique des structures en béton armé - Application aux enceintes de confinement des centrales nucléaires

Martin David

► To cite this version:

Martin David. Approche multi-échelle du comportement mécanique des structures en béton armé - Application aux enceintes de confinement des centrales nucléaires. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT: . pastel-00765705

HAL Id: pastel-00765705

<https://pastel.hal.science/pastel-00765705>

Submitted on 18 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat

présentée par

Martin DAVID

pour obtenir le grade de

Docteur de l'École Polytechnique

Spécialité : Mécanique

Approche multi-échelle du comportement mécanique des
structures en béton armé – Application aux enceintes
de confinement des centrales nucléaires

Thèse soutenue à l'École Polytechnique le 19 juin 2012,
devant le jury composé de :

Claudia COMI	Prof. Politecnico di Milano	Rapporteur
Hélène DUMONTET	Prof. UPMC	Rapporteur
Frédéric DUFOUR	Prof. INP Grenoble	Examineur
Pierre LABBÉ	Dr., EDF	Examineur
Pierre SUQUET	Directeur de recherche, LMA	Examineur
Jean-Jacques MARIGO	Prof. École Polytechnique	Directeur de thèse
Éric LORENTZ	Dr., EDF R&D	Encadrant industriel

Laboratoire de Mécanique des Solides
École Polytechnique
91120 Palaiseau, France

Résumé

Cette thèse développe une stratégie multi-échelle pour représenter le comportement mécanique des armatures et des câbles de précontrainte dans une structure en béton armé. Cette stratégie est déclinée en plusieurs étapes, permettant d'intégrer progressivement de nouveaux phénomènes physiques dans la modélisation. Le premier modèle asymptotique développé permet de représenter le comportement élastique effectif d'hétérogénéités périodiquement réparties sur une surface. Il combine un comportement d'interface élastique et un comportement de membrane. Un second modèle asymptotique s'intéresse ensuite au comportement de fibres rigides réparties sur une surface, et susceptibles de glisser par rapport au volume environnant. Ces modèles présentent l'avantage d'induire moins de concentrations de contraintes que les modèles de barres utilisés classiquement. Ils sont implantés dans le code éléments finis *Code_Aster*, et validés par rapport à des simulations tridimensionnelles de référence. Leur interaction avec une fissure présente dans le béton est étudiée. Enfin, cette stratégie permet de modéliser des essais expérimentaux réalisés sur une portion d'enceinte de confinement à l'échelle 1.

Mots-clés : Analyse asymptotique, séparation d'échelle, liaison acier-béton, enceinte de confinement

Abstract

This thesis develops a multi-scale strategy to describe the mechanical behaviour of steel reinforcements and prestressing tendons in a reinforced concrete structure. This strategy is declined in several steps, which allow gradual integration of new physical phenomena. The first asymptotic model represents the effective elastic behaviour of heterogeneities periodically distributed on a surface. It combines an elastic interface behaviour and a membrane behaviour. A second asymptotic model then focuses on the behaviour of rigid fibers distributed on a surface, which may slide with respect to the surrounding volume. These models induce less stress concentrations than the usual truss models. They are implemented in the finite element code *Code_Aster*, and validated with respect to reference three-dimensional simulations. Their interaction with a macroscopic crack is studied. Finally, this strategy allows the modeling of experimental tests carried out on a portion of a containment building in real scale.

Keywords: Asymptotic analysis, scale separation, steel-concrete bond, containment building

Remerciements

Je remercie tout d'abord Jean-Jacques Marigo d'avoir accepté de diriger ce travail de thèse. Sa disponibilité, sa curiosité et sa forte exigence intellectuelle sont pour beaucoup dans la réussite de ce projet. Je le remercie de ses très nombreux conseils et encouragements tout au long de ces trois ans.

Je remercie également Éric Lorentz de s'être beaucoup investi dans cette thèse, de la définition du sujet à l'exploitation industrielle des résultats de cette thèse, en passant par l'implémentation numérique des modèles. Les nombreuses discussions que nous avons eues, dépassant souvent le cadre de cette thèse, ont été particulièrement enrichissantes.

Enfin, je remercie Sylvie Michel-Ponnelle pour son soutien constant, sa bonne humeur, et sa patience. Les débouchés industriels de cette thèse, concernant en particulier la modélisation de la maquette PACE et l'intégration des développements dans *Code_Aster*, n'auraient pas été possibles sans son aide.

Je remercie Claudia Comi et Hélène Dumontet d'avoir accepté d'examiner ce travail, et d'avoir pris le temps de rédiger des rapports détaillés. Je remercie également Pierre Suquet d'avoir bien voulu présider le jury de la thèse, ainsi que Pierre Labbé et Frédéric Dufour d'avoir accepté de participer au jury. Leurs multiples éclairages apportés à ce travail de thèse ont été très instructifs et valorisants.

Je salue également toute l'équipe du département AMA, et en particulier le groupe T64, dans lequel règne une bonne humeur communicative qui a grandement contribué à la réussite de ces trois années de thèse. Je remercie en particulier Renaud, Jean-Michel et Saïd pour les discussions impromptues que nous avons eues, et les conseils qu'ils m'ont prodigués.

Je remercie l'équipe de développement de *Code_Aster*, qui, par le biais de discussions souvent animées, s'est toujours montrée très disponible pour répondre à mes interrogations.

Je remercie la direction du département AMA de EDF R&D, en particulier François Waeckel, Pierre Badel, Erwan Galenne et Frédéric Hasnaoui, pour leur soutien et leurs nombreux conseils sur le plan professionnel. Je remercie également Pierre pour l'intérêt constant qu'il m'a manifesté depuis mes débuts en stage chez EDF.

Bien que peu présent à l'École Polytechnique au cours de ces trois années, je tiens tout de même à remercier Alexandra Joly, Christiane Périam et Christine Ferret qui m'ont beaucoup aidé dans les démarches administratives liées à cette thèse. Je remercie également Patrick Le Tallec, directeur du laboratoire, qui a beaucoup soutenu ce travail.

Je remercie également mes co-thésards Sam, Jérôme, Alexandre, Ophélie, Loïc, Christelle, Dina, Dzifa et Paul pour tous les bons moments que nous avons partagés, et je souhaite bon courage à tous ceux qui sont embarqués dans la même aventure!

*Tout ceci est confus et pourtant, parfaitement ordonné.
Chercherait-on à nous cacher quelque chose ?*

*Turf
La nef des fous*

Introduction

Dans le cadre de son activité de production d'électricité, EDF doit justifier auprès de l'État de la sûreté de ses moyens de production. Cette justification doit être apportée non seulement au moment de la construction des ouvrages, mais également tout au long de leur vie. Les infrastructures majeures telles que les barrages hydro-électriques et les centrales nucléaires font ainsi l'objet d'un suivi régulier, qui comporte deux aspects. Tout d'abord, les ouvrages sont auscultés périodiquement afin de contrôler leur vieillissement. Lorsque des anomalies sont observées, l'exploitant est tenu, soit de justifier de la sûreté de l'installation, soit de mettre en œuvre des mesures correctives pour remédier à ces anomalies. Par ailleurs, le suivi des ouvrages nécessite de réévaluer périodiquement leur dimensionnement. Ces réévaluations incluent d'une part l'évolution des connaissances scientifiques et techniques depuis leur construction, et d'autre part l'évolution des normes de sûreté. Ainsi, suite à l'accident nucléaire de Fukushima en mars 2011, l'Autorité de Sûreté Nucléaire (ASN) a demandé à EDF de procéder à des Évaluations Complémentaires de Sûreté (ECS). Ces évaluations visent d'une part à contrôler le bon dimensionnement des centrales, et d'autre part à évaluer l'ampleur des marges existant vis-à-vis de possibles dépassements des critères de sûreté. Elles ont permis d'identifier un certain nombre de modifications permettant d'améliorer le niveau de sûreté des installations.

Les enceintes de confinement constituent un élément important de la sûreté des centrales nucléaires. Ces enceintes sont des coques en béton armé précontraint de plusieurs dizaines de mètres de hauteur, qui remplissent la fonction d'étanchéité de l'installation. Elles sont placées autour du circuit primaire, et sont conçues pour résister à une pression interne de 5 à 6 bars absolus. Le rôle des enceintes est de confiner les produits radioactifs en dernier ressort, si les barrières que constituent la gaine des crayons combustibles et l'enveloppe du circuit primaire sont rompues. Le critère de sûreté d'une enceinte de confinement impose que, en cas d'accident de type APRP (Accident par Perte de Réfrigérant Primaire), moins de 1,5 % de la masse de gaz contenue dans l'enceinte fuie en une journée. On vérifie en pratique lors des arrêts décennaux des réacteurs que le débit de fuite ne dépasse pas 1,125 % de la masse de gaz contenue. Or après 20 à 30 ans de fonctionnement, le débit de fuite de certaines enceintes se rapproche de ce critère. Des travaux de grande ampleur doivent alors être mis en œuvre pour améliorer l'étanchéité de ces enceintes. La compréhension et la prévision du débit de fuite des enceintes constituent donc un enjeu majeur pour EDF.

La modélisation du débit de fuite d'une enceinte de confinement est un problème complexe, qui met en jeu de nombreux phénomènes. Cette fuite est liée d'une part à la porosité du béton, et d'autre part à l'apparition de fissures au sein de la structure. Ces deux types de fuite peuvent évoluer plus ou moins bien en fonction du vieillissement du béton et des essais décennaux réalisés sur les enceintes. On s'intéresse ici en particulier au débit de fuite transitant par les fissures, qui est essentiellement gouverné par leur ouverture. Les facteurs influant sur cette ouverture sont les contraintes mécaniques appliquées sur la structure, le retrait et le fluage du béton, ainsi que l'interaction des armatures et des câbles de précontrainte avec le béton. Ces derniers sont susceptibles de limiter le débit de fuite en reliant les lèvres des fissures, et constituent donc un élément important de l'étanchéité des enceintes. Cet effet dépend d'une part du comportement des armatures et des câbles de précontrainte, et d'autre part du comportement de la liaison acier-béton.

L'une des difficultés de la modélisation des structures en béton armé réside dans le choix d'une échelle de description adéquate. Si cette échelle est trop fine, la simulation est très coûteuse en temps de calcul, et n'est pas adaptée à une utilisation dans un contexte industriel. Si cette échelle est trop grossière, la simulation ne permet pas d'avoir accès à des informations locales, telles que des ouvertures de fissures, et ne répond donc pas aux besoins. Une enceinte de confinement mesure 1,2 m d'épaisseur. Les barres d'armature présentes dans la structure ont un diamètre de 2 cm, et un espacement de 20 cm, tandis que les câbles de précontrainte présentent un diamètre de 8 cm, et un espacement de 40 cm. L'échelle qui semble la plus adéquate pour décrire l'ouverture des fissures est donc de l'ordre de 5 à 10 cm. À cette échelle, on ne peut pas représenter les barres d'armature et les câbles de précontrainte de façon tridimensionnelle. On doit donc avoir recours à des modèles simplifiés.

Les modèles utilisés classiquement dans la littérature pour modéliser les barres d'armature et les câbles de précontrainte sont des modèles linéiques, présentant un comportement de barre ou de poutre. Ces modèles ne sont pas complètement satisfaisants, car ils posent des problèmes d'ordre mathématique et d'ordre numérique. Sur le plan mathématique, leur interaction avec le volume environnant n'a pas de sens variationnel, ce qui se traduit par une légère dépendance au maillage des résultats. Sur le plan numérique, ces modèles induisent des concentrations de contraintes parasites dans le volume, qui tendent à endommager très rapidement le béton environnant.

On se propose dans cette thèse de construire de nouveaux modèles permettant de représenter les armatures et les câbles de précontrainte dans les structures en béton armé. Ces modèles sont développés en utilisant une méthode d'analyse asymptotique, qui consiste à étudier le comportement asymptotique de modèles dans la limite de certains paramètres. Cette méthode est utilisée classiquement en mécanique des fluides pour l'étude des couches limite, et en mécanique des structures pour l'homogénéisation du comportement de matériaux microstructurés. On intègre dans cette étude une possible dégradation de la liaison acier-béton, ainsi que l'interaction des armatures et des câbles de précontrainte avec les fissures présentes dans la structure. Ceci nous permet de développer une stratégie de modélisation du comportement mécanique et de l'étan-

chéité d'une structure industrielle de grande taille, telle qu'une enceinte de confinement de centrale nucléaire. Ces travaux sont présentés de la façon suivante.

Dans le premier chapitre, on présente le contexte industriel et scientifique de ce travail. On explique le principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire, ainsi que les différents dispositifs de sûreté de ces installations. On décrit en particulier le rôle de l'enceinte de confinement du réacteur. Ensuite, on présente les différentes approches proposées dans la littérature pour modéliser le comportement des structures en béton armé. Ceci comprend d'une part la modélisation du béton, et d'autre part la modélisation des armatures et des câbles de précontrainte au sein de la structure. On souligne les avantages et les limites des différentes approches.

Dans le second chapitre, on construit un premier modèle asymptotique général. Ce modèle est basé sur l'hypothèse que des hétérogénéités — telles que des barres d'acier — sont réparties de façon dense sur une surface au sein de la structure. Le modèle asymptotique développé combine un comportement d'interface élastique et un comportement de membrane. Le comportement de cette interface est encadré à l'aide d'arguments variationnels classiques. On démontre que ce modèle est généralement instable, ce qui rend son utilisation délicate en pratique. Enfin, le caractère général de ce modèle est illustré par son application à divers exemples. On montre en particulier que, dans le cas de barres d'armature, on peut le réduire à un comportement de *membrane anisotrope* qui s'avère stable.

Dans le troisième chapitre, on développe un second modèle limite en se basant sur des hypothèses différentes. On suppose que les hétérogénéités sont des fibres très rigides, réparties de façon dense sur une surface, et susceptibles de glisser par rapport au volume environnant. Ce modèle est plus spécifiquement adapté à la modélisation des armatures et des câbles de précontrainte dans une structure de génie civil. Le modèle limite obtenu combine un comportement de membrane à rigidité uniaxiale, et une loi cohésive reliant cette membrane au volume environnant. Il est appelé modèle de *grille avec décohesion*. Pour utiliser ce modèle, on propose une loi d'adhérence acier-béton simple et réaliste, permettant de modéliser la décohesion des armatures et des câbles de précontrainte par rapport au béton. Cette loi d'adhérence est validée par des comparaisons avec des essais d'arrachement issus de la littérature. Le modèle de grille avec décohesion et le modèle de membrane anisotrope sont ensuite implantés dans le code éléments finis *Code_Aster*. Cette mise en œuvre est réalisée de façon modulaire, avec d'une part des éléments de membrane anisotrope, et d'autre part des éléments d'interface à formulation mixte. Enfin, on valide ces modèles asymptotiques en les comparant à des simulations tridimensionnelles de référence.

Dans le dernier chapitre, on propose une stratégie de modélisation permettant d'appréhender l'étanchéité d'une enceinte de confinement avec un coût de calcul limité. On propose tout d'abord un outil de calcul de débit de fuite à travers une fissure, basé sur le profil laminaire de Hagen-Poiseuille. Ce modèle est implanté dans le code éléments finis *Code_Aster* par le biais d'une analogie thermique, et validé par comparaison avec le code de calcul industriel ÉCREVISSE, dédié à cette problématique dans un cadre géométrique plus restrictif. On modélise ensuite le comportement mécanique d'une fissure

traversante dans une enceinte de confinement à l'aide du modèle de grille avec décohesion développé précédemment. On montre que les câbles de précontrainte et la qualité de la liaison acier-béton ont une influence non négligeable sur l'ouverture de la fissure, ainsi que sur le débit de fuite. On montre également que le modèle de grille avec décohesion permet d'estimer l'ouverture des fissures de façon précise avec un coût de calcul limité. Enfin, on modélise l'essai expérimental PACE 1450, consistant à soumettre une portion représentative d'enceinte de confinement à une forte pression interne. On montre que l'on est capable de prédire de façon raisonnable l'ouverture des fissures dans le béton. En revanche, la modélisation du débit de fuite est encore trop sommaire pour donner des résultats satisfaisants.

Table des matières

Introduction	1
Unités et notations	9
1 Contextes industriel et scientifique	11
1.1 La sûreté des centrales nucléaires	11
1.1.1 La production électro-nucléaire en France	11
1.1.2 Principe de fonctionnement d'un réacteur à eau pressurisée	12
1.1.3 Principes de sûreté	14
1.1.4 Le rôle de l'enceinte de confinement	14
1.2 La modélisation des structures en béton armé	18
1.2.1 L'invention du béton armé moderne	18
1.2.2 La modélisation du béton	18
1.2.3 La modélisation des armatures et des câbles de précontrainte	20
1.3 Problématique de la thèse	21
2 Modèle asymptotique général pour des hétérogénéités localisées sur une surface	23
2.1 Contexte de l'étude	23
2.1.1 Principes de l'analyse asymptotique	23
2.1.2 Description du problème considéré	25
2.1.3 Travaux sur le comportement d'une couche mince homogène	30
2.1.4 Travaux sur le comportement d'une surface d'hétérogénéités	34
2.1.5 Démarche proposée dans ce chapitre	35
2.2 La séparation d'échelles	36
2.2.1 Le problème étudié	36
2.2.2 Séparation des échelles de longueur	38
2.2.3 La décomposition des champs	41
2.3 Résolution itérative des problèmes intérieurs et extérieurs	46
2.3.1 Le problème intérieur d'ordre 0	46
2.3.2 Le problème extérieur d'ordre 0	46
2.3.3 Le problème intérieur d'ordre 1	49
2.3.4 Le problème extérieur d'ordre 1	55

2.4	Comportement effectif de l'interface	58
2.4.1	Propriétés des conditions de transmission	58
2.4.2	Encadrement du comportement de l'interface	61
2.4.3	Le comportement effectif des hétérogénéités à l'ordre 1	69
2.4.4	Formulation variationnelle du problème effectif exact à l'ordre 1	71
2.5	Applications du modèle	74
2.5.1	Couche homogène d'épaisseur constante	75
2.5.2	Réseau orthogonal de fissures circulaires coplanaires	79
2.5.3	Réseau hexagonal d'inclusions sphériques élastiques	83
2.5.4	Réseaux d'armatures	85
2.6	Conclusions sur le modèle asymptotique général	89
3	Modèle asymptotique dédié aux armatures et aux câbles de précontrainte	95
3.1	Construction du modèle	96
3.1.1	Le problème étudié	96
3.1.2	La séparation d'échelles	102
3.1.3	Résolution des problèmes intérieurs	107
3.1.4	Résolution du problème global	114
3.1.5	Applications du modèle limite	119
3.2	Modélisation de la liaison acier-béton	123
3.2.1	Phénoménologie de la liaison	123
3.2.2	Principaux modèles de la littérature	125
3.2.3	Proposition d'un modèle empirique simple	128
3.2.4	Validation et recalage du modèle	134
3.3	Implantation numérique	135
3.3.1	Choix de modélisation	135
3.3.2	Éléments de grille et de membrane	136
3.3.3	Éléments d'interface à formulation mixte	140
3.4	Validation numérique des modèles limite	147
3.4.1	Modélisation d'une plaque en flexion	147
3.4.2	Modélisation d'une extraction d'armatures	151
3.5	Conclusions sur le modèle de grille avec décohesion	155
4	Application à la modélisation des enceintes de confinement	159
4.1	Modélisation du débit de fuite	160
4.1.1	Approches proposées dans la littérature	160
4.1.2	Proposition d'un modèle simplifié	164
4.1.3	Implantation et validation	168
4.2	Modélisation d'une fissure traversante	171
4.2.1	Le problème étudié	171
4.2.2	Modélisation et discrétisation du problème	172
4.2.3	Résultats et analyse	176
4.2.4	Influence de la modélisation des câbles	179

4.3	Modélisation des essais de Karlsruhe	183
4.3.1	Le programme expérimental	183
4.3.2	Modélisation et discrétisation	187
4.3.3	Résultats de la simulation et analyse	191
4.4	Conclusions sur la stratégie de modélisation	195
Conclusion		197
Bibliographie		202
	Généralités	202
	Modélisation du béton et des structures	204
	Analyse asymptotique	207
	La liaison acier-béton	209
	Les écoulements dans les fissures	211

Unités et Notations

Les grandeurs physiques sont exprimées dans les unités du système international. La principale exception concerne la pression, qui sera parfois exprimée de façon absolue en bars. Rappelons que $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

On utilise les notations suivantes. Les vecteurs et la plupart des tenseurs du second ordre sont notés en caractères gras (comme \mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$). Les tenseurs d'ordre trois ou quatre, et certains tenseurs d'ordre 2, sont notés en lettres majuscules sans sérif (comme \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D}). Leurs composantes sont écrites en caractères ordinaires (comme v_i , ε_{ij} , A_{ijkl} pour les composantes de \mathbf{v} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ et \mathbf{A}). Les simple et double contractions d'indices sont désignées par des points, et on utilise la convention de sommation implicite des indices répétés. Par exemple, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ correspond à $u_i v_i$, $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$ correspond à $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$, $\mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}$ correspond au tenseur du second ordre dont les composantes ij s'écrivent $A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ et $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}$ correspond à $A_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{kl}$.

Pour un champ f susceptible d'être discontinu à la traversée d'un plan Γ , de vecteur normal \mathbf{e}_1 , on note $f^+(\mathbf{x}')$ et $f^-(\mathbf{x}')$ (ou $f|^\pm(\mathbf{x}')$ pour éviter de possibles confusions) les limites de f , lorsqu'elles sont bien définies, au point \mathbf{x}' de Γ de chaque côté de Γ .

$$f^+(\mathbf{x}') = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1 > 0}} f(\mathbf{x}) \quad f^-(\mathbf{x}') = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1 < 0}} f(\mathbf{x})$$

On introduit également le saut $\llbracket f \rrbracket$ et la moyenne \bar{f} de f sur Γ .

$$\llbracket f \rrbracket = f^+ - f^- \quad \bar{f} = \frac{1}{2} (f^+ + f^-)$$

Chapitre 1

Contextes industriel et scientifique

1.1 La sûreté des centrales nucléaires

1.1.1 La production électro-nucléaire en France

Les centrales nucléaires jouent un rôle important dans la production d'électricité en France. D'après les statistiques du commissariat général au développement durable [4], 75 % de la production d'énergie électrique en France est assurée par les centrales nucléaires. Ceci résulte d'une politique d'indépendance énergétique initiée après la seconde guerre mondiale, et confirmée suite aux chocs pétroliers de 1973 et 1979.

Les premiers réacteurs nucléaires civils construits en France sont développés par EDF et le CEA au lendemain de la seconde guerre mondiale. Ces réacteurs sont appelés réacteurs UNGG, pour Uranium Naturel-Graphite-Gaz. Neuf réacteurs sont ainsi construits entre les années 50 et 70. En 1969, suite à un accident à la centrale nucléaire de Saint-Laurent, le choix est fait d'abandonner cette filière, et d'adopter la technologie des réacteurs à eau pressurisée (REP) développée par l'entreprise américaine Westinghouse.

La construction du premier réacteur à eau pressurisée débute en 1971 sur le site de Fessenheim. En tout, 58 réacteurs de ce type seront construits en France entre 1971 et 1999, ce qui représente la construction de plus de deux réacteurs par an en moyenne. Ce cycle de construction prend fin à la fin des années 90. En 2007, la construction d'un réacteur à eau pressurisée de troisième génération, appelé EPR, pour European Pressurized Reactor, est lancée sur le site de Flamanville. Son raccordement au réseau est prévu en 2016.

Parmi les 58 réacteurs nucléaires de puissance fonctionnant en France, on distingue plusieurs conceptions différentes, appelées paliers. Les premiers réacteurs appartiennent aux paliers CP0 et CPY. Ils sont 34 en France, répartis sur 9 sites, et développent chacun 900 MW de puissance électrique. D'autres réacteurs de plus forte puissance, appartenant aux paliers P4 et P'4, sont construits par la suite. Il existe 20 réacteurs de ce type, répartis sur 8 sites, qui produisent chacun 1300 MW de puissance électrique. Enfin, 4 réacteurs du palier N4, répartis sur 2 sites, développent 1450 MW de puissance électrique. La répartition géographique des réacteurs nucléaires est présentée sur la Figure 1.1. On

rappelle dans le tableau suivant les différents paliers, leur puissance électrique, le nombre de réacteurs correspondant et leur période de construction.

Paliers	Puissance (MWe)	Nb. de réacteurs	Période de construction
CP0 et CPY	900	34	1971–1987
P4 et P'4	1300	20	1977–1993
N4	1450	4	1984–1999
EPR	1600	1	2007–

1.1.2 Principe de fonctionnement d'un réacteur à eau pressurisée

Il existe plusieurs technologies de réacteurs nucléaires, qui se distinguent par l'utilisation de différents types de *caloporteur* et de *modérateur*. Le caloporteur est le fluide qui évacue la puissance dégagée par les réactions nucléaires. Il peut s'agir par exemple d'eau légère, d'eau bouillante, de gaz ou de sodium. Le modérateur ralentit les neutrons produits par les réactions de fission, et facilite ainsi le déclenchement de nouvelles réactions de fission. Selon les réacteurs, le modérateur peut être de l'eau légère, de l'eau lourde ou du graphite. Précisons qu'il existe également des réacteurs dits à *neutrons rapides*, qui se distinguent des autres réacteurs par l'absence de modérateur.

On présente ici la technologie des réacteurs à eau pressurisée, qui constitue l'ensemble du parc électro-nucléaire en fonctionnement en France. Ces réacteurs utilisent de l'eau légère à la fois comme caloporteur et comme modérateur. Le schéma de fonctionnement d'un réacteur à eau pressurisée est présenté sur la Figure 1.2. Il se compose d'un cœur, d'un circuit primaire, d'un circuit secondaire, d'un alternateur et d'un circuit de refroidissement tertiaire. Ces différents éléments permettent de transformer successivement l'énergie des noyaux atomiques en énergie thermique, puis en énergie mécanique, et enfin en énergie électrique.

Le cœur du réacteur est le lieu où se produisent les réactions nucléaires. Ce cœur est placé dans une cuve en acier, et comporte plusieurs centaines de crayons combustibles. Ces crayons font 1 cm de diamètre et plusieurs mètres de long. Ils se composent de gaines en alliage de zirconium, dans lesquelles sont placées les pastilles de combustible nucléaire. Les réactions de désintégration des matières fissiles se produisent dans ces crayons. Elles dégagent une forte chaleur, qui est absorbée par l'eau circulant entre les crayons.

Le circuit primaire sert essentiellement à extraire cette énergie thermique du cœur du réacteur. Il est rempli d'eau liquide, pressurisée à 155 bar, et dont la température varie entre 280 et 330 °C. La forte pression permet à l'eau de rester liquide à cette température. Le circuit primaire se compose de la cuve principale du réacteur, de 3 ou 4 générateurs de vapeur, de 3 ou 4 pompes et d'un pressuriseur. Le nombre de pompes et de générateurs de vapeur dépend de la puissance du réacteur. L'eau du circuit primaire s'échauffe dans le cœur du réacteur et se refroidit dans les générateurs de vapeur. Les pompes font circuler l'eau dans le circuit primaire, avec un débit variant entre 10 et 20 m³/s selon la puissance du réacteur. La pression de l'eau dans le circuit est réglée par le pressuriseur.

Le circuit secondaire permet de transformer l'énergie thermique fournie par le circuit primaire en énergie mécanique. Il se compose de plusieurs générateurs de vapeur, de

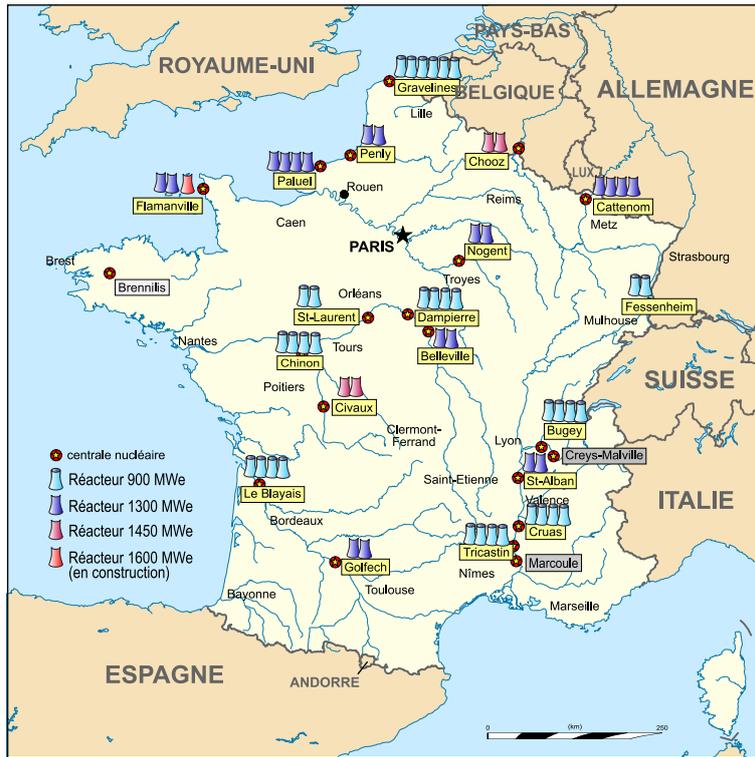


FIGURE 1.1 – Localisation des 58 réacteurs nucléaires en fonctionnement en France, et de l'EPR de Flamanville en construction.

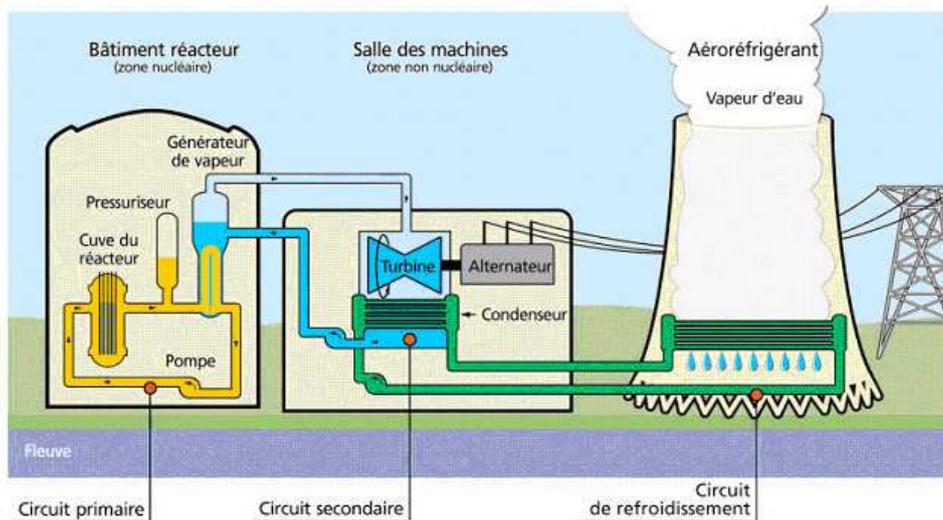


FIGURE 1.2 – Principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire.

plusieurs turbines, de condenseurs et de pompes. Dans ce circuit, l'eau subit un cycle thermodynamique en quatre temps. (1) L'eau du circuit secondaire absorbe la chaleur du circuit primaire dans les générateurs de vapeur, et se vaporise. La pression à la sortie des générateurs de vapeur est de 55 bars. (2) Cette vapeur d'eau sous pression est injectée dans les turbines, qui produisent de l'énergie mécanique. (3) À la sortie des turbines, la vapeur est condensée au contact du circuit de refroidissement tertiaire. (4) Enfin, l'eau liquide est réinjectée dans les générateurs de vapeur par les pompes pour suivre un nouveau cycle.

La turbine à vapeur est reliée par un arbre à un alternateur, qui transforme l'énergie mécanique en énergie électrique. Cette énergie électrique est ensuite injectée dans le réseau de transport d'électricité pour être distribuée aux consommateurs.

Le circuit de refroidissement tertiaire permet d'évacuer la chaleur résiduelle du circuit secondaire. Il relie les condenseurs de ce circuit à une source froide externe. Cette source est constituée d'eau disponible naturellement dans l'environnement, telles qu'une rivière ou la mer, complétées au besoin par une tour aérorefrigérante. Dans ce dernier cas, le refroidissement est obtenu par vaporisation d'eau au sein de la tour.

1.1.3 Principes de sûreté

La sûreté d'un réacteur nucléaire repose sur trois éléments, qui doivent être maîtrisés en toutes circonstances. Ces trois fonctions de sûreté sont les suivantes : la réactivité du cœur doit être contrôlée, le combustible doit être refroidi, et les produits de fission doivent rester confinés. Lorsque ces trois conditions sont remplies, le réacteur est sûr. Ces fonctions doivent donc être assurées non seulement en situation de fonctionnement normal, mais également en cas d'évènement accidentel.

Pour assurer ces différentes fonctions dans toutes les situations, on a recours à la notion de *défense en profondeur*. Cette stratégie consiste à combiner plusieurs niveaux de protection indépendants, chacun étant capable d'assurer les trois fonctions de sûreté. On distingue trois niveaux de protection successifs. En régime de fonctionnement normal, les fonctions de sûreté sont assurées par les dispositifs habituels. La réactivité du cœur est contrôlée par l'opérateur, le combustible est refroidi par l'eau circulant dans le circuit primaire, et les produits de fission sont confinés dans les gaines des crayons combustibles. Si un évènement imprévu intervient, et que l'un des dispositifs habituels échoue, le réacteur est en situation d'incident. Dans ce cas, des systèmes dits *de protection* suppléent aux dispositifs habituels, afin d'assurer la sûreté du réacteur. Si ces systèmes de protection sont eux-même mis en défaut, le réacteur est en situation d'accident. Des systèmes dits *de sauvegarde* prennent alors le relais, et permettent d'assurer les trois fonctions de sûreté. Un évènement imprévu ne peut ainsi avoir de conséquences que si les trois lignes de défense sont mises en défaut.

1.1.4 Le rôle de l'enceinte de confinement

Les produits radioactifs stockés dans le cœur du réacteur sont des produits toxiques, qui peuvent avoir de graves conséquences sur l'homme et l'environnement. Le confine-



FIGURE 1.3 – Enceinte de confinement d'un EPR de Taishan lors de la mise en place du dôme.



FIGURE 1.4 – Enceinte de confinement de l'EPR en construction sur le site de Flamanville.

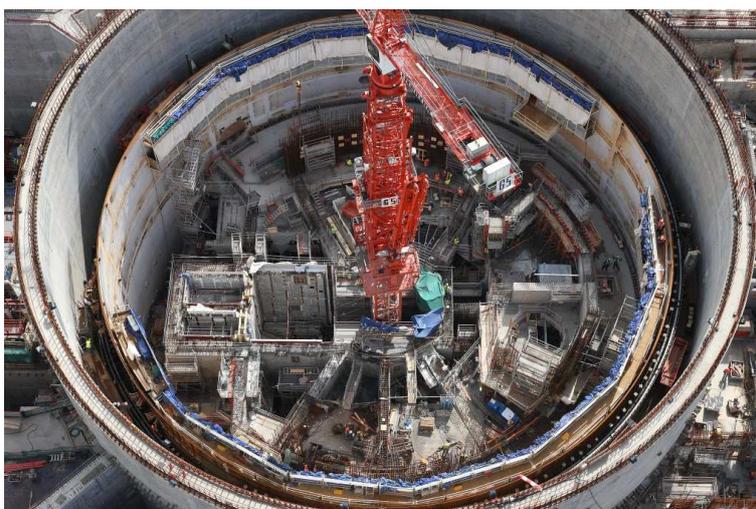


FIGURE 1.5 – Vue de la double enceinte de l'EPR de Flamanville en construction.

ment des matières radioactives constitue donc un élément essentiel de la sûreté d'un réacteur. Pour assurer ce confinement, le réacteur compte trois barrières de confinement étanches. Les pastilles combustibles sont tout d'abord placées dans des gaines étanches en alliage de zirconium, qui empêchent la libération de produits radioactifs dans le circuit primaire. Ensuite, le circuit primaire dans son ensemble est un circuit étanche, qui peut retenir les produits radioactifs. Enfin, l'ensemble du circuit primaire est placé dans une enceinte étanche en béton, qui peut résister à une forte pression interne. Ainsi, les produits radioactifs ne peuvent être libérés dans l'environnement que si les trois barrières de confinement sont rompues.

Les 58 réacteurs nucléaires civils en exploitation en France comportent donc tous une enceinte de confinement. Le principe de conception de ces enceintes a évolué progressivement depuis les années 70. Les premiers réacteurs des paliers CP0 et CPY possèdent une enceinte de confinement simple, constituée de béton armé précontraint. Sur la face interne de l'enceinte est placé un liner métallique de 6 mm d'épaisseur. Le béton armé assure la résistance mécanique de la structure, tandis que le liner assure son étanchéité. Cette conception a évolué avec les réacteurs des paliers P4, P'4 et N4. Ces réacteurs possèdent une double enceinte de confinement. L'enceinte interne est constituée de béton armé précontraint, et l'enceinte externe de béton armé. Le rôle de la première enceinte est d'assurer le confinement des produits de fission, tandis que la seconde protège le réacteur d'éventuelles agressions externes. Pour améliorer l'étanchéité de cette double enceinte, un dispositif de récupération des fuites est placé dans l'espace entre-enceintes. En revanche, ces enceintes ne comportent pas de liner métallique. Pour l'EPR actuellement en construction, le choix a été fait de combiner le principe d'une double enceinte avec un liner métallique. L'enceinte interne est ainsi recouverte d'un liner métallique sur sa face interne, afin d'améliorer son étanchéité.

Lors de la conception d'un réacteur nucléaire, un certain nombre d'accidents particu-

lièrement pénalisants sont étudiés. L'exploitant du réacteur doit pouvoir justifier auprès de l'autorité de sûreté de la résistance du réacteur vis-à-vis de tous ces accidents. L'accident le plus pénalisant pour l'enceinte de confinement est la rupture d'un élément du circuit primaire. Cet accident est appelé APRP, pour Accident par Perte du Réfrigérant Primaire. Dans les conditions normales de fonctionnement, le circuit primaire est sous pression à 155 bar et près de 300 °C. Si le circuit perd son étanchéité, la pression redescend à 1 bar, et l'eau du circuit primaire se met à bouillir instantanément. Une forte quantité de vapeur d'eau est alors dégagée, qui doit rester confinée dans l'enceinte. En parallèle, des dispositifs de sauvegarde assurent les autres fonctions de sûreté : les barres de contrôle du cœur sont automatiquement abaissées pour stopper le réacteur, et des circuits d'injection de sûreté (RIS) injectent de l'eau liquide dans le cœur du réacteur pour le refroidir. Des circuits d'aspersion de l'enceinte (EAS) permettent également de refroidir l'enceinte dans son ensemble, et de diminuer la pression de vapeur confinée.

Pour les paliers P4, P'4 et N4, le Décret d'Autorisation de Création (DAC) des réacteurs impose que, lorsque l'enceinte interne est soumise à une pression de 5,3 bar, la fuite de gaz dans l'espace entre-enceintes n'excède pas 1,5 % de la masse de gaz contenue par jour. Le débit de fuite de l'enceinte est mesuré avant sa mise en service, puis tous les dix ans, lors des *essais décennaux*. Pour tenir compte d'une éventuelle dégradation de l'étanchéité de l'enceinte entre deux visites décennales, le critère d'étanchéité à respecter est ramené à 75 % du critère officiel, soit 1,125 % de la masse de gaz contenu. Par ailleurs, les essais décennaux sont réalisés avec de l'air sec à 20 °C, tandis que le gaz confiné en situation d'accident APRP est un mélange air-vapeur chauffé à près de 200 °C. On considère cependant que le taux de fuite en accident APRP est inférieur au taux de fuite mesuré lors des essais décennaux. En effet, la vapeur dégagée dans l'enceinte en situation d'accident se condense partiellement en traversant le mur de l'enceinte, ce qui diminue le débit de fuite. La critère d'étanchéité vérifié lors des essais décennaux par l'ASN est donc que le débit de fuite mesuré pendant 24 h n'excède pas 1,125 % de la masse de gaz contenue en air sec.

En pratique cependant, le débit de fuite mesuré sur certaines enceintes se rapproche du critère d'étanchéité. Ceci constitue un sujet de préoccupation majeur pour EDF, car l'enceinte de confinement d'un réacteur ne peut pas être remplacée. Il est donc nécessaire de procéder à des travaux de réparation de grande ampleur sur les enceintes. Ces travaux consistent par exemple à recouvrir la surface interne de l'enceinte par des matériaux polymères étanches, qui limitent le débit de fuite à travers la paroi. Ceci représente une charge très importante, car au delà du simple coût de mise en œuvre, les travaux de réparation peuvent entraîner l'indisponibilité d'une unité de production pendant plusieurs mois. La compréhension de ces phénomènes de fuite constitue donc un enjeu majeur pour EDF. Deux questions en particulier sont de première importance. Tout d'abord, peut-on prédire l'évolution de l'étanchéité d'une enceinte à long terme ? Ceci permettrait prévoir les travaux de réparation à l'avance, et donc de limiter l'indisponibilité des unités de production. De la même façon, peut-on prédire par la simulation l'efficacité des différents revêtements envisageables ? Ceci permettrait d'opter pour les revêtements les plus efficaces et les plus pérennes, et donc de limiter l'impact des travaux sur le fonctionnement

des réacteurs.

Le débit de fuite à travers une structure en béton armé est cependant un phénomène difficile à appréhender, pour plusieurs raisons que l'on expose ici. Tout d'abord, le béton est un matériau hétérogène au comportement complexe. Il présente des phénomènes de retrait au jeune âge, d'endommagement, et de fluage à long terme. La simple modélisation du béton est donc délicate. De plus, la structure comprend des armatures et des câbles de précontrainte, qui constituent autant d'hétérogénéités au sein du béton, et qui ont une grande influence sur son comportement mécanique et sur son étanchéité. Enfin, le chemin de fuite d'un gaz à travers une telle structure est difficile à décrire : il peut suivre le trajet tortueux d'une fissure, passer par les micro-porosités du béton ou se propager le long d'une barre d'acier. Tous ces phénomènes rendent délicate la prédiction de l'étanchéité des enceintes à long terme.

1.2 La modélisation des structures en béton armé

1.2.1 L'invention du béton armé moderne

L'invention du ciment moderne par Louis Vicat en 1818 ouvre la voie à une très large utilisation du béton dans la construction. Le béton est fabriqué à partir de ciment, de sables, de graviers et d'eau. Il présente ainsi le double avantage d'être composé de matériaux disponibles en abondance, et de pouvoir être mis en forme librement. Il est utilisé au XIX^e siècle pour fabriquer des *pierres factices moulées* employées dans la construction. Le béton présente cependant un défaut majeur : il résiste mal à la traction.

Pour compenser cette faible résistance du béton en traction, plusieurs entrepreneurs tentent d'incorporer des barres d'acier au béton à partir des années 1870. Cette technologie devient mature à partir des années 1890, avec l'invention de méthodes de calcul rationnelles de la tenue mécanique des structures en béton armé. L'utilisation de ce matériau se développe alors progressivement, et le premier règlement français de calcul du béton armé est publié en 1906. À partir des années 20, le béton armé prend une place prédominante dans la construction, qu'il conserve encore aujourd'hui.

Pour concevoir des ouvrages plus audacieux, Freyssinet développe à partir des années 20 la technologie du béton précontraint, consistant à tendre des barres d'acier au cœur de la structure pour exercer un effort de compression sur le béton. Cet effort de compression évite l'apparition de fissures de traction dans le béton, et permet de développer des ouvrages de plus grande taille.

1.2.2 La modélisation du béton

La modélisation d'une structure en béton armé nécessite de modéliser d'une part le comportement du béton, et d'autre part le comportement des armatures et des câbles de précontrainte au sein de la structure. On présente tout d'abord les principales approches proposées dans la littérature pour modéliser l'endommagement du béton.

Le béton est un matériau qui s'endommage facilement en traction, et plus difficilement en compression. Cet endommagement se traduit par l'apparition de fissures au sein du

matériau, qui dégradent sa rigidité et créent des déformations irréversibles. Les modèles de comportement du béton tentent de modéliser de la façon la plus fidèle possible cette dégradation du comportement mécanique du béton. Une première approche consiste à modéliser l’endommagement du béton par le biais d’un comportement volumique adoucissant. Les fissures sont alors modélisées par une concentration de l’endommagement dans certaines zones. Il est cependant démontré qu’une modélisation *locale* d’un comportement adoucissant pose des problèmes de dépendance au maillage : comme l’énergie est dissipée au sein d’éléments volumiques, plus on diminue la taille des éléments, plus l’énergie dissipée est faible. Cette difficulté a été soulignée par de nombreux auteurs, parmi lesquels Bažant *et al.* [17] et Benallal *et al.* [18]. Dans la limite d’éléments de taille infinitésimale, on peut donc rompre une structure sans dépenser d’énergie, ce qui n’a pas de sens physique. Ceci est à l’origine du développement de différents modèles non-locaux, qui empêchent la localisation de l’endommagement dans des domaines de trop petite taille. Cette non-localité peut être imposée de façon explicite, en moyennant localement certaines quantités physiques, ou de façon implicite, en introduisant dans l’énergie un terme pénalisant la concentration de l’endommagement. Le principal défaut de ces approches est qu’elles nécessitent un maillage relativement fin pour décrire convenablement les bandes de localisation de l’endommagement. Ces modèles sont utilisés par de nombreux auteurs, parmi lesquels on peut citer Pijaudier-Cabot et Bažant [29], Peerlings *et al.* [28], Comi [19], Dufour *et al.* [20] et Lorentz et Godard [26].

Une seconde approche consiste à modéliser l’apparition des fissures avec un modèle de zone cohésive, qui relie le saut de déplacement à travers la fissure à une force d’adhésion entre les lèvres. Le point délicat de cette approche est qu’il est difficile de représenter dans le modèle toutes les trajectoires de fissures possibles. Face à cette difficulté, deux solutions sont possibles. On peut soit postuler *a priori* le trajet des fissures, qui peut être évident dans certains cas, soit adapter le modèle en fonction de leur propagation. La première approche est de loin la plus simple, mais elle ne permet pas de prédire le trajet des fissures. La seconde méthode est plus séduisante, mais également plus délicate à mettre en œuvre. L’adaptation du modèle peut être réalisée soit en modifiant le maillage au cours de la propagation de fissure, comme proposé par Ingraffea et Saouma [22], soit en utilisant la méthode XFEM pour introduire une cinématique d’ouverture de fissure dans un maillage donné. Ces deux approches font actuellement l’objet de nombreuses recherches, visant à les rendre à la fois robustes et performantes pour des simulations de fissures tridimensionnelles. Elles ne sont donc pas encore complètement adaptées à une utilisation dans un contexte industriel.

Enfin, il existe une approche hybride, consistant à modéliser des fissures indépendamment dans chaque élément fini. Plusieurs modèles entrent dans ce cadre, tels que les modèles de type *smearred crack*, ainsi que les modèles basés sur des *éléments à discontinuité intégrée*, appelés E-FEM. On peut interpréter ce type d’approche comme un modèle d’endommagement local orthotrope dont le comportement dépend de la taille de maille, ou comme un modèle d’interface cohésive sans connexité des fissures. Comparés aux modèles d’endommagement non-locaux, ces modèles représentent la fissuration de façon localisée. Il est donc plus facile d’en déduire un trajet de fissuration et une ou-

verture de fissure. *A contrario*, l'indépendance de ces modèles à la taille de maille n'est qu'approximative. Cette approche est développée en particulier par Rabczuk *et al.* [30], Jendele et Červenka [24] et Oliver *et al.* [27].

1.2.3 La modélisation des armatures et des câbles de précontrainte

Les structures de génie civil comprennent souvent un grand nombre de renforts, permettant de pallier la faible résistance du béton à la traction. Parmi ces renforts, on compte des barres d'armature passives, et éventuellement des câbles de précontrainte. Les barres d'armature sont des barres cylindriques en acier, de quelques centimètres de diamètre. La surface de ces barres présente généralement de nombreuses *nervures*, permettant d'améliorer leur adhérence au béton environnant. On parle alors d'armatures à *haute adhérence* (HA). Les câbles de précontrainte sont des câbles en acier de plusieurs centimètres de diamètre. Ils sont placés dans des gaines au sein de la structure, afin d'être tendus après la prise du béton. Les gaines sont ensuite injectées soit à la graisse, soit au coulis de ciment. La géométrie de ces composants est donc relativement compliquée, et leur modélisation à l'échelle d'une structure complète est délicate. On présente ici les principaux modèles utilisés dans la littérature pour les représenter.

Une première solution est de modéliser les armatures et les câbles de précontrainte en trois dimensions, en simplifiant légèrement leur géométrie. On représente ainsi généralement les barres et les câbles par des cylindres lisses, en négligeant les nervures des barres et les gaines des câbles. Cette échelle de description particulièrement fine permet d'avoir accès aux champs de contraintes et de déplacement au voisinage des barres et des câbles. Cependant, les structures de taille usuelle comprennent généralement plusieurs dizaines de barres d'armatures. Comme les barres sont à section cylindrique, il faut un grand nombre d'éléments finis pour décrire leur géométrie, et cette approche aboutit à un coût de calcul prohibitif. Cette modélisation doit donc être réservée à des modélisations de petite taille, comprenant un nombre limité de barres d'armature et de câbles de précontrainte.

Une autre solution consiste à modéliser les barres et les câbles par des éléments linéiques. Leur comportement est alors modélisé par un modèle de barre ou de poutre. Le modèle de barre est caractérisé par une simple rigidité d'élongation, et l'énergie mécanique de la barre s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{barre}} = \frac{1}{2} \int_{\ell} \frac{\pi d^2}{4} E_A \varepsilon_L^2 d\ell$$

Dans cette relation, d est le diamètre de la barre d'acier, E_A le module d'Young de l'acier, et ε_L la déformation longitudinale de la barre. Cette énergie correspond à l'énergie mécanique d'une barre en traction simple. Le modèle de poutre est très similaire, et ajoute à l'énergie de traction une énergie de flexion de la barre. Ces modèles sont largement utilisés dans la littérature pour modéliser le comportement de structures de génie civil en 2D et en 3D. On peut citer par exemple les travaux de Rabczuk *et al.* [30], Jendele et Červenka [25], Jason *et al.* [23] et Ibrahimbegovic *et al.* [21]. Dans certains cas, les éléments barre sont liés au béton par une loi d'interface spécifique, modélisant une éventuelle dégradation de la liaison acier-béton.

Cette modélisation est séduisante, car elle correspond bien à l'idée que l'on se fait de la géométrie d'une barre d'armature ou d'un câble de précontrainte. Pour les modélisations bidimensionnelles, le modèle de barre donne des résultats satisfaisants. En revanche, en trois dimensions, il pose des problèmes sur le plan mathématique et sur le plan numérique. Sur le plan mathématique, l'interaction entre un élément filaire et un volume tridimensionnel n'a pas de sens variationnel. Ceci est dû à la structure de l'espace de Sobolev \mathcal{H}^1 : dans cet espace, la valeur du champ de déplacement le long d'une ligne n'est pas définie. Ceci se traduit numériquement par une certaine dépendance des résultats à la finesse du maillage, soulignée par Lorentz [10]. De plus, ces modèles linéiques induisent des concentrations de contraintes parasites dans le volume environnant. Lorsque le comportement du béton est modélisé par un modèle d'endommagement, le volume proche des éléments linéiques est endommagé très facilement, et l'acier perd son adhérence au béton. Ce problème de concentration des contraintes est souligné en particulier par Jason *et al.* [23]. Les modèles de barre et de poutre ne sont donc pas si bien adaptés à la modélisation de structures tridimensionnelles, en particulier lorsqu'on s'intéresse aux champs de déformation et de contraintes à l'échelle locale.

Enfin, il existe une modélisation moins détaillée, dans laquelle les armatures sont représentées par un comportement homogénéisé sur une surface. On considère un ensemble de barres d'acier de même diamètre, régulièrement réparties sur un plan. L'énergie mécanique de ces barres au sein de la structure est calculée de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_{\text{grille}} = \frac{1}{2} \int_S \frac{\pi d^2}{4e} E_A \varepsilon_L^2 \, dS$$

Dans cette relation, d est le diamètre des barres d'acier, e leur espacement, E_A le module d'Young de l'acier, et ε_L la déformation longitudinale des barres. L'ensemble de ces armatures est donc modélisé par un comportement de membrane anisotrope, qui ne présente de rigidité que dans la direction des barres. Contrairement au modèle de barre évoqué précédemment, ce modèle est bien posé sur le plan mathématique, et pose moins de difficultés numériques. Cette modélisation est utilisée en particulier par Jendele et Červenka sous le nom *d'armatures réparties* (smeared reinforcements) [25]. Dans la suite, ce modèle sera appelé modèle de *grille*

1.3 Problématique de la thèse

On se propose de développer dans cette thèse une stratégie permettant de représenter le comportement mécanique des armatures et des câbles de précontrainte dans une structure en béton armé. Cette stratégie est déclinée en plusieurs étapes, permettant d'intégrer progressivement de nouveaux phénomènes physiques dans la modélisation. On s'intéresse tout d'abord au comportement élastique de ces composants, avant de prendre en compte leur glissement par rapport au béton, puis d'étudier leur interaction avec des fissures macroscopiques présentes dans la structure. L'objectif final de ces développements est la modélisation du comportement mécanique et de l'étanchéité d'une structure en béton armé précontraint, telle qu'une enceinte de confinement de centrale nucléaire.

Dans le second chapitre, on s'intéresse au comportement mécanique élastique des barres d'armature dans une structure en béton. On développe un modèle asymptotique permettant de représenter leur comportement par un modèle homogénéisé sur une surface. Ce modèle est basé sur des hypothèses géométriques peu contraignantes, qui lui confèrent un caractère très général. En revanche, ce modèle n'est valable que dans un cadre de comportement élastique.

Dans le troisième chapitre, on développe un second modèle asymptotique plus spécifiquement adapté à la représentation des armatures et des câbles de précontrainte. Ce modèle prend en compte la tension des câbles, ainsi qu'une possible dégradation de la liaison acier-béton. Il intègre donc une physique plus riche que le modèle précédent, et permet d'envisager la modélisation du comportement de structures de génie civil réelles.

Enfin, on montre dans le quatrième chapitre que ce modèle est compatible avec la modélisation d'autres phénomènes, tels que la fissuration du béton et les écoulements de fluide dans les fissures. Il s'avère donc tout à fait adapté à une utilisation dans un contexte industriel. Cette stratégie de modélisation est finalement utilisée pour modéliser le comportement mécanique et l'étanchéité d'une portion d'enceinte de confinement à l'échelle 1.

Chapitre 2

Modèle asymptotique général pour des hétérogénéités localisées sur une surface

2.1 Contexte de l'étude

2.1.1 Principes de l'analyse asymptotique

La *physique*, comprise dans son sens le plus général, vise à construire des *modèles mathématiques*, qui représentent le mieux possible le monde qui nous entoure. Ces modèles mathématiques comprennent dans leur formulation un certain nombre de paramètres, qui peuvent être de différents types : ceux peuvent être par exemple des paramètres physiques, liés au comportement du modèle, des paramètres géométriques, liés à la forme de l'objet étudié, voire des paramètres numériques, liés à une certaine discrétisation du modèle. De la même façon que l'on étudie le comportement limite de fonctions en certains points, on peut s'intéresser à la forme que prennent les modèles dans la limite de certains paramètres. L'étude de tels problèmes porte le nom d'*analyse asymptotique*.

Ce type de problème apparaît dans de nombreux domaines scientifiques, souvent sans rapport direct. On peut en citer quelques exemples. Un champ d'application emblématique de l'analyse asymptotique est l'étude des couches limite en mécanique des fluides [47]. On peut expliquer grossièrement le principe de la façon suivante : les écoulements de fluide sont caractérisés par une compétition entre deux phénomènes, que sont la viscosité du fluide et son inertie. Selon la dimension de l'écoulement, les propriétés physiques et la vitesse du fluide, l'un ou l'autre de ces phénomènes peut devenir prédominant, ce qui donne lieu à des écoulements de nature très différente. Lorsque l'inertie du fluide domine, l'écoulement est de type turbulent, tandis que lorsque la viscosité domine, l'écoulement est laminaire. En pratique, à l'échelle humaine, les écoulements sont généralement turbulents, et la viscosité du fluide est globalement négligeable. Pourtant, à proximité des parois de l'écoulement, le gradient de vitesse dans le fluide est très important : on ne peut alors plus négliger la viscosité du fluide. Pour décrire ce type d'écoulement, on doit

donc faire appel à deux modèles distincts. Un premier modèle, qui néglige la viscosité du fluide, permet de décrire l'essentiel de l'écoulement, hors du voisinage des parois. Le second modèle en revanche prend en compte la viscosité du fluide, et permet de décrire l'écoulement au voisinage des parois, dans une zone qu'on appelle *couche limite*. Le modèle complet est alors obtenu en reliant les deux modèles, par le biais de la méthode des *développements asymptotiques raccordés*. Sur le plan théorique, on peut considérer chacun de ces deux modèles comme une limite du modèle réel dans un certain domaine.

L'analyse asymptotique apparaît aussi dans l'étude des schémas numériques pour la simulation. Un problème étudié par de nombreux auteurs consiste ainsi à démontrer qu'un modèle discrétisé, lorsqu'on fait tendre le pas de discrétisation vers zéro, converge vers le modèle continu [5]. On peut citer par exemple les schémas numériques d'intégration en temps, ou les méthodes de discrétisation en espace, telles que la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies. En étudiant la vitesse de convergence des modèles discrétisés vers le modèle continu, on peut alors identifier le schéma numérique le plus performant.

Enfin, on peut citer comme dernier exemple les modèles de poutre et de plaque en mécanique de structures. Très souvent, les structures que l'on cherche à modéliser sont très élancées dans une ou plusieurs directions. Il peut s'agir de poteaux, de colonnes, de murs, ou de voûtes. La modélisation de telles structures en 3D nécessite souvent de gros moyens de calcul, peu cohérents avec le comportement très simple de ces structures. Dès les débuts de la mécanique des structures, les ingénieurs ont donc élaboré des modèles simplifiés, qui permettent de représenter le comportement de telles structures de façon simplifiée. Ces modèles peuvent être construits soit de façon empirique, en se basant sur l'intuition de l'ingénieur, soit avec l'aide de l'analyse asymptotique. On procède alors de la manière suivante : on se donne comme paramètre l'épaisseur de la structure considérée, et on étudie l'évolution du comportement mécanique de cette structure lorsque son épaisseur tend vers zéro. Ce comportement limite constitue en général une bonne approximation du comportement réel de la structure.

L'analyse asymptotique constitue ainsi un outil très utile dans le développement et l'étude des modèles numériques. Cependant, cette approche n'est pas exempte de tout reproche. Tout d'abord, on doit insister sur le fait que les modèles limite obtenus par analyse asymptotique dépendent largement du choix de paramètres fait par le modélisateur. Ainsi, selon les paramètres que l'on fait varier, le modèle limite obtenu peut changer du tout au tout. Il ne faut donc pas minorer l'importance du choix des paramètres considérés pour l'analyse asymptotique. De plus, on ne contrôle pas *a priori* l'erreur que l'on fait en utilisant un modèle limite au lieu du modèle complet. Un modèle limite peut se révéler absolument non pertinent en pratique, car très éloigné du modèle complet. Au delà de la simple construction de modèles limite, il est donc très important de valider ces modèles simplifiés par des comparaisons avec un modèle complet. Enfin, un modèle limite obtenu par analyse asymptotique n'est pas toujours bien posé, même si le modèle initial était bien formulé. Plus précisément, rien n'assure que l'on conserve l'existence et l'unicité de la solution du modèle. Il est donc très important de vérifier que le modèle limite obtenu reste bien posé.

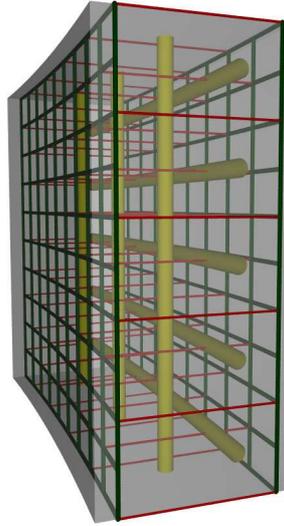


FIGURE 2.1 – Schéma de ferrailage d'une paroi d'enceinte de confinement de centrale nucléaire. Les armatures sont représentées en vert, les câbles de précontrainte en jaune et les épingles qui maintiennent les armatures en rouge.

L'analyse asymptotique ne constitue donc pas une méthode infaillible. Il faut davantage la voir comme une méthode de construction et de justification de modèles simplifiés. Il est nécessaire de garder un regard critique sur les modèles limite construits de cette manière, en étudiant leur stabilité, et en les validant par rapport à des simulations plus détaillées, voire par rapport à des expériences. Ces limites de l'analyse asymptotique seront illustrées par différents exemples étudiés dans le cadre de cette thèse.

2.1.2 Description du problème considéré

On cherche donc à construire un modèle limite pertinent, capable de représenter le comportement mécanique des barres d'armatures et des câbles de précontrainte dans une structure de génie civil de grande taille. Pour fixer les idées, on considère une enceinte de confinement de centrale nucléaire à double paroi. La hauteur et le diamètre d'une telle structure sont de l'ordre de 50 mètres, et l'épaisseur des deux parois de l'ordre de 1,2 mètres. L'enceinte externe est constituée de béton armé, tandis que l'enceinte interne est faite de béton armé précontraint. La structure du mur de l'enceinte interne est montrée sur la Figure 2.1. Elle comporte deux nappes d'armatures, situées à une dizaine de centimètres des faces interne et externe de l'enceinte, ainsi que des câbles de précontrainte horizontaux et verticaux au cœur du mur. Tous ces éléments sont maintenus en place lors du coulage du béton par un système d'épingles, qui sont des barres d'acier de faible diamètre.

Les armatures sont organisées selon un motif orthogonal, avec des barres horizontales et verticales. Ces barres sont en acier, font 2 cm de diamètre et sont espacées de

20 cm. Elles ont pour rôle de contrôler une éventuelle fissuration apparaissant sur les faces interne et externe de la paroi. Les câbles de précontrainte sont également organisés selon un motif orthogonal, avec des câbles verticaux rectilignes, et des câbles horizontaux qui font le tour de l'enceinte. Les câbles de précontrainte sont des câbles en acier tressé de 8,4 cm de diamètre. Ils sont placés dans des gaines en acier d'une quinzaine de centimètres de diamètre, et de 0,5 à 2 mm d'épaisseur. Lorsque le béton est coulé, les gaines en acier préservent des vides dans le béton, qui permettent d'introduire les câbles de précontrainte. Ceux-ci sont mis en tension après quelques semaines, une fois que le béton a durci. Les gaines sont ensuite injectées au coulis de ciment¹. Ce coulis protège les câbles de la corrosion, et évite la présence de vides dans le béton, qui seraient néfastes pour l'étanchéité de la structure. L'objectif des câbles de précontrainte est de mettre le béton en compression, afin de limiter l'ouverture d'éventuelles fissures dans le béton. Lors de la conception de l'enceinte, le nombre et la tension des câbles est dimensionnée pour que, même en cas d'accident de type APRP, le béton ne se retrouve jamais en tension. Ainsi, même si des fissures apparaissent lors de la construction de l'enceinte, elles doivent être refermées par la précontrainte. Les câbles horizontaux permettent de créer une contrainte de compression orthoradiale dans le fût de l'enceinte. Ils sont situés au milieu de la paroi en béton, et sont répartis verticalement tous les 40 cm. Les câbles verticaux permettent de créer une contrainte de compression verticale sur le béton. Pour ne pas entrer en contact avec les câbles horizontaux, ils sont situés plus proches de la face interne de la paroi, et sont répartis approximativement tous les mètres. Le schéma de construction du dôme supérieur est similaire, mais un peu plus compliqué en raison de sa double courbure.

Pour construire des modèles limite pertinent, il nous faut tout d'abord identifier les principaux paramètres associés au comportement mécanique des armatures et des câbles de précontrainte. À ce stade, on identifie grossièrement les barres d'armature et les câbles de précontrainte à des barres cylindriques, réparties dans le volume de la structure (voir Figure 2.2). Le comportement mécanique de ces composants est défini par un grand nombre de paramètres, que sont par exemple le diamètre des barres d'armature, le coefficient de Poisson de l'acier, la rugosité de surface des barres, l'épaisseur de l'enrobage de béton, etc. Parmi tous ces paramètres, on en retient essentiellement trois, qui semblent les plus importants. Ces paramètres sont le diamètre d des barres, leur espacement relatif e et le module d'Young E_A de l'acier. Les autres paramètres sont considérés *a priori* moins influents sur le comportement mécanique des armatures et des câbles de précontrainte. Pour pouvoir raisonner en termes d'ordres de grandeur, il est préférable d'adimensionner ces paramètres. On introduit donc l'épaisseur L de la paroi en béton armé, et le module d'Young E_B du béton. On peut alors former les rapports adimensionnels suivants :

$$\frac{d}{e} \quad \frac{e}{L} \quad \frac{E_B}{E_A}$$

Ces rapports sont respectivement le diamètre des barres rapporté à leur espacement, l'espacement des barres rapporté à la taille de la structure, et le module d'Young du

1. Le coulis de ciment est composé de ciment, d'eau et d'éventuels adjuvants. Sa viscosité est ajustée de sorte à faciliter son injection dans les gaines.

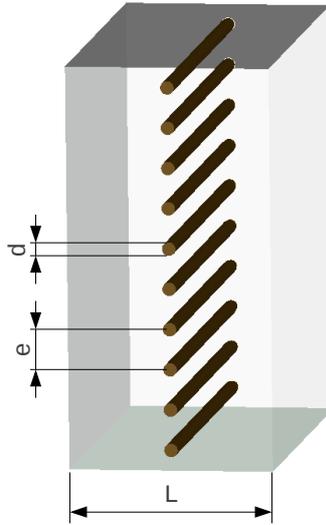


FIGURE 2.2 – Paramètres géométriques considérés pour l’analyse asymptotique. d est le diamètre des barres d’acier, e leur espacement, et L l’épaisseur du mur en béton armé.

béton rapporté au module d’Young de l’acier. Ces rapports sont définis de telle manière qu’ils sont tous plus ou moins petits devant 1. Par exemple, si l’on considère les barres d’armature présentes dans la paroi d’une enceinte de confinement, ces rapports prennent les valeurs approximatives suivantes :

$$\frac{d}{e} \approx \frac{1}{10} \quad \frac{e}{L} \approx \frac{1}{6} \quad \frac{E_B}{E_A} \approx \frac{1}{7}$$

De même, si l’on considère les câbles de précontrainte horizontaux, on a :

$$\frac{d}{e} \approx \frac{1}{5} \quad \frac{e}{L} \approx \frac{1}{3} \quad \frac{E_B}{E_A} \approx \frac{1}{7}$$

Tous ces paramètres sont à l’évidence petits devant 1, sans être réellement négligeables. On peut donc se demander comment évoluerait le comportement mécanique des barres d’acier si l’on faisait tendre l’un ou l’autre de ces paramètres vers zéro. À ce stade, la variété des choix possibles est très grande : on peut faire varier un seul de ces paramètres, ou plusieurs à la fois. On peut représenter ce choix par des trajectoires dans l’*espace des paramètres* (voir Figure 2.3). Dans cet espace abstrait, le modèle réel constitue un point dont les coordonnées sont définies par la valeur réelle des paramètres. À chaque hypothèse de variation des paramètres correspond une trajectoire dans cet espace, qui aboutit à un modèle limite spécifique. Parmi ces modèles limite, très peu sont réellement pertinents. On se contentera donc de faire une étude qualitative des différentes alternatives possibles, afin de juger de leur pertinence respective. Ceci permettra de justifier les choix faits dans le cadre de cette thèse.

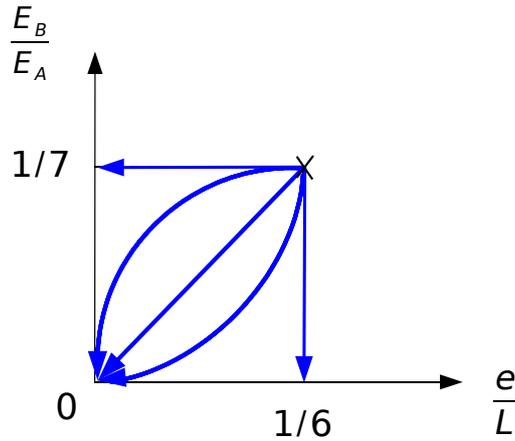


FIGURE 2.3 – Représentation de différentes trajectoires possibles dans l’espace des paramètres $\left(\frac{e}{L}, \frac{E_B}{E_A}\right)$. Chacune de ces trajectoires aboutit à un modèle limite différent.

Considérons tout d’abord chacun de ces paramètres indépendamment, en commençant par le paramètre d/e , qui est le rapport entre le diamètre des barres et leur espacement. Supposons que l’on fasse tendre ce paramètre vers zéro, en gardant les autres paramètres constants. Dans cette limite, les barres d’acier deviennent semblables à des fils, de diamètre négligeable. Comme le module d’Young de l’acier ne varie pas, la rigidité des barres devient négligeable. On peut donc s’attendre à ce que, dans la limite $d/e \rightarrow 0$, les barres d’acier n’aient plus d’influence sur le comportement de la structure. Le modèle limite correspondant est donc très simple : il s’agit du modèle initial, où les barres d’acier ont disparu, remplacées par du béton. En régime élastique, ce modèle n’est pas très éloigné de la réalité, car les armatures d’une structure en béton armé influent très peu sur le comportement de la structure. Bien que l’acier soit sept fois plus rigide que le béton, il ne constitue au mieux que quelques pour cent du volume de la structure. Il ne représente donc pas plus de 20 % de sa rigidité d’ensemble, ce qui n’est pas très important. En revanche, en régime non-linéaire, les armatures jouent un rôle mécanique crucial en limitant l’ouverture des fissures. Il n’est donc pas très raisonnable de négliger leur influence sur le comportement de la structure.

Une autre possibilité est de faire tendre le rapport E_B/E_A vers zéro, c’est-à-dire de considérer que la rigidité de l’armature est très grande devant celle du béton. Dans cette limite, les barres d’armatures constituent des inclusions rigides à l’intérieur de la structure. En particulier, aucun allongement des barres d’armature n’est permis, ce qui contraint très fortement les déformations de la structure. Le modèle limite correspond donc à une structure élastique, à l’intérieur de laquelle se trouvent des inclusions rigides. Selon les théorèmes classiques de l’élasticité, le problème mécanique d’équilibre d’une telle structure est un problème bien posé, qui admet une unique solution. Cependant, d’après les arguments développés précédemment, ce modèle n’est pas du tout représentatif du

comportement réel d'une structure en béton armé. En effet, la rigidité d'une structure réelle dans un régime élastique est essentiellement due à la rigidité du béton, et non aux barres d'armatures. Ce modèle limite n'est donc pas pertinent par rapport à la réalité.

Enfin, on peut faire tendre le rapport e/L vers zéro. Dans ce cas, l'espacement inter-armatures et le diamètre propre des armatures tendent tous deux vers 0, tandis que leur module d'Young reste constant. Géométriquement, les armatures forment alors une nappe dense de barres de petite taille à l'échelle de la structure. Il est plus difficile de prédire quel peut être le comportement limite d'un tel système. Ce problème fera l'objet d'une analyse asymptotique complète, menée dans ce chapitre. Nous verrons que, dans la limite $e/L \rightarrow 0$, les armatures n'ont pas d'influence sur le comportement de la structure. On retrouve ici le même résultat que dans la limite $d/e \rightarrow 0$. Cependant, il nous a paru intéressant de pousser l'analyse asymptotique au-delà du simple modèle limite, en cherchant à identifier l'influence dominante des barres sur la structure. Nous démontrons donc dans ce chapitre que cette influence est proportionnelle au ratio e/L , et que l'on peut construire un modèle effectif du comportement des barres d'acier. Ce modèle combine un comportement de membrane et un comportement d'interface élastique. Le principal intérêt de ce modèle est qu'il permet de décrire le comportement effectif de tous types d'hétérogénéités périodiquement réparties sur une surface.

Dans les trois cas précédents, nous avons fait varier les paramètres indépendamment les uns des autres. Mais on peut également envisager de les faire évoluer simultanément. La variété des modèles limite que l'on peut construire est alors très grande, et il est nécessaire de faire le tri parmi ceux-ci. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les modélisations filaires sont source de dépendance au maillage, et de concentrations de contraintes. On choisit donc de ne pas faire tendre le paramètre d/e vers zéro. Il nous reste donc deux paramètres, que sont le rapport de l'espacement des barres sur la taille de la structure e/L , et le rapport de rigidités E_B/E_A . Pour nous aider à choisir le passage à la limite le plus pertinent, on peut faire une estimation de la rigidité des barres d'acier dans la structure. Si l'on note N_{barres} le nombre de barres, la rigidité de l'ensemble des barres d'acier est de l'ordre de :

$$R_{\text{barres}} = N_{\text{barres}} \frac{E_A \pi d^2}{4}$$

On peut reformuler cette relation en termes de nos trois paramètres, et l'on obtient :

$$R_{\text{barres}} \propto \frac{e}{L} \left(\frac{d}{e} \right)^2 \left(\frac{E_B}{E_A} \right)^{-1}$$

Si l'on veut que notre modèle limite soit pertinent, il est préférable que la rigidité de l'ensemble des barres d'armature reste inchangée dans le passage à la limite. Si l'on conserve le paramètre d/e inchangé, il faut donc que les paramètres e/L et E_B/E_A restent proportionnels lors du passage à la limite. On choisit donc de faire tendre vers zéro E_B/E_A et e/L proportionnellement. La construction du modèle limite correspondant n'est pas évidente, et fera l'objet du prochain chapitre. Ce passage à la limite est relativement intéressant pour deux raisons : tout d'abord, il permet de prendre en compte une éventuelle

décohésion des barres d'acier par rapport au béton, qui est un phénomène important du comportement des structures en béton armé. De plus, les paramètres de ce modèle limite peuvent être calculés de façon entièrement analytique, ce qui facilite beaucoup sa mise en œuvre dans un contexte industriel. Le modèle limite obtenu combine un modèle de membrane anisotrope et un modèle d'interface cohésive. Le comportement de membrane modélise la rigidité des barres d'acier, tandis que le modèle d'interface cohésive modélise un possible glissement des barres d'acier par rapport au béton. La construction, l'implantation et la validation de ce modèle sont présentées dans le Chapitre 3.

2.1.3 Travaux sur le comportement d'une couche mince homogène

Comportement d'une couche très isolante ou très souple

Les premiers travaux d'analyse asymptotique portant sur le comportement de couches minces au sein d'un milieu continu sont réalisés à partir des années 70. En 1970, Sanchez-Palencia étudie le comportement thermique limite d'une couche mince homogène de faible conductivité [65]. Il démontre que, si la conductivité du matériau composant la couche mince est proportionnelle à l'épaisseur de cette couche, alors, dans la limite d'une couche d'épaisseur nulle, les conditions de transmission à travers cette couche sont de type Robin : le champ de température est discontinu à travers la couche, tandis que le flux thermique traversant la couche reste continu, et proportionnel au saut de température. La couche constitue donc une sorte d'*isolant thermique* au sein du milieu continu. Notons ℓ l'épaisseur de la couche, et $\lambda_T(\ell)$ le coefficient de conductivité thermique dans la couche (voir Figure 2.4). Comme la conductivité de la couche est proportionnelle à son épaisseur, on peut réécrire ce dernier coefficient sous la forme $\lambda_T(\ell) = \ell \lambda_T^r$. Si l'on note T le champ de température dans le matériau, \mathbf{q} le flux thermique, et \mathbf{n} la normale à la couche mince, les conditions de transmission deviennent dans la limite $\ell \rightarrow 0$:

$$[[\mathbf{q}]] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\lambda_T^r [[T]]$$

La première relation impose la conservation du flux de chaleur traversant l'interface, et la seconde constitue la loi de conduction thermique à travers l'interface.

À partir des années 90, ces résultats ont été adaptés à l'élasticité par Klarbring [57], Licht et Michaille [61], Geymonat *et al.* [53] et Benveniste et Miloh [36]. Ces auteurs se sont intéressés au comportement asymptotique d'une couche mince élastique très souple, c'est-à-dire dont la rigidité est proportionnelle à son épaisseur. Dans ce contexte, on note \mathbf{u} le champ de déplacement dans le matériau, $\boldsymbol{\sigma}$ le champ de contraintes, ℓ l'épaisseur de la couche de matériau souple et (λ, μ) les coefficients de Lamé caractérisant le comportement mécanique de cette couche. Si l'on suppose que ces paramètres évoluent proportionnellement à l'épaisseur ℓ de la couche, ils se mettent sous la forme :

$$\lambda(\ell) = \ell \lambda^r \quad \mu(\ell) = \ell \mu^r$$

Dans la limite $\ell \rightarrow 0$, on démontre que les conditions de transmission à travers la couche sont de type Robin, c'est-à-dire que la couche se comporte comme une interface élastique.

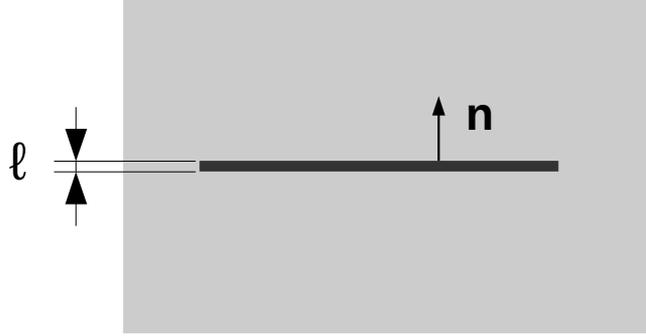


FIGURE 2.4 – Problème classique du comportement d’une couche mince homogène Γ , d’épaisseur ℓ et de normale \mathbf{n} .

Les contraintes sont continues à travers l’interface, tandis que le champ de déplacement est discontinu. Le saut de déplacement est alors proportionnel à la contrainte appliquée sur l’interface. Plus précisément, le comportement de l’interface obéit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= (\lambda^r + 2\mu^r) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t} &= \mu^r \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{t} \quad \forall \mathbf{t} \perp \mathbf{n} \end{aligned}$$

La première relation s’interprète comme une condition d’équilibre de l’interface, et les deux dernières comme des relations de comportement. La seconde relation caractérise le comportement de l’interface dans des sollicitations de traction, et la troisième son comportement dans des sollicitations de cisaillement. On remarque que la rigidité de l’interface dans ces deux modes de sollicitation n’est pas identique, en raison d’un effet de Poisson dans la couche mince. Notons également que ce modèle peut être assimilé à une densité uniforme de ressorts à l’interface. En termes mathématiques, Geymonat *et al.* [53] ont démontré que, dans la limite $\ell \rightarrow 0$, la solution du problème mécanique réel converge, au sens faible comme au sens fort, vers la solution du problème limite.

Comportement d’une couche très conductrice ou très rigide

Par ailleurs, à partir du milieu des années 70, Huy et Sanchez-Palencia d’une part [55], et Simonenko d’autre part [68, 69, 70], se sont intéressés indépendamment au comportement thermique asymptotique d’une couche mince de conductivité élevée. Cette analyse est fondée sur l’hypothèse que la conductivité de la couche est inversement proportionnelle à son épaisseur, et peut donc s’écrire $\lambda_T(\ell) = \ell^{-1} \lambda_T^r$. Sous ces hypothèses, dans la limite $\ell \rightarrow 0$, les conditions de transmission à l’interface sont de type Ventcel (cf. [59, 72]) : la température est continue à la traversée de l’interface, tandis que le flux de

chaleur est discontinu. Cette discontinuité du flux de chaleur est due à l'existence d'un flux de chaleur *transitant dans l'interface*. Ce flux de chaleur d'interface \mathbf{q}^Γ est proportionnel au gradient de température le long de l'interface. Le comportement de l'interface s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \llbracket T \rrbracket &= 0 \\ \llbracket \mathbf{q} \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= -\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{q}^\Gamma) \\ \mathbf{q}^\Gamma &= -\lambda_T^r \mathbf{grad}_\Gamma(T) \end{aligned}$$

La première relation s'interprète comme une condition d'admissibilité cinématique, la seconde comme une condition de conservation du flux de chaleur, et la dernière comme la relation de comportement de la couche mince. Les opérateurs différentiels $\operatorname{div}_\Gamma$ et \mathbf{grad}_Γ sont respectivement la divergence d'un flux transitant dans la couche mince, et le gradient d'une quantité définie sur la couche mince. Leur définition sera précisée dans la suite des développements.

Ces résultats ont été adaptés à l'élasticité par Caillerie [44], Ciarlet [46], puis Bessoud *et al.* [37, 38, 39] et Benveniste et Miloh [36]. Ces auteurs se sont intéressés au comportement asymptotique d'une couche mince élastique de grande rigidité. On reprend donc l'exemple mécanique précédent d'une couche homogène d'épaisseur ℓ , et on fait l'hypothèse que les coefficients de Lamé (λ, μ) dans la couche sont inversement proportionnels à son épaisseur. Ils peuvent donc se mettre sous la forme suivante :

$$\lambda(\ell) = \ell^{-1} \lambda^r \quad \mu(\ell) = \ell^{-1} \mu^r$$

On démontre alors que les conditions de transmission à travers l'interface Γ sont toujours de type Ventcel : le champ de déplacement est continu à travers l'interface, tandis que le champ de contrainte est discontinu. Cette discontinuité du champ de contraintes est due à des contraintes membranaires transitant dans l'interface, qui sont elles-même proportionnelles aux déformations membranaires de l'interface. Si l'on note $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ les contraintes membranaires existant dans l'interface, le comportement asymptotique de la couche mince rigide s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket &= 0 \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} &= -\mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}^\Gamma) \\ \boldsymbol{\sigma}^\Gamma &= \frac{2\lambda^r \mu^r}{\lambda^r + 2\mu^r} \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{u}^0) \mathbf{1}_\Gamma + 2\mu^r \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) \end{aligned}$$

La première relation constitue une condition d'admissibilité cinématique, la seconde une condition d'équilibre entre les efforts appliqués sur l'interface et les efforts transitant dans l'interface, tandis que la dernière constitue la relation de comportement élastique de l'interface. Cette dernière relation fait intervenir les opérateurs différentiels $\operatorname{div}_\Gamma$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma$, qui sont respectivement la divergence d'un champ de vecteurs défini sur la surface Γ , et la déformation membranaire du même champ de vecteurs. Ces opérateurs ne font intervenir que les dérivées surfaciques du champ de vecteur, et le cas échéant la courbure de

la surface. Leur définition sera précisée dans la suite des développements. Le tenseur $\mathbf{1}_\Gamma$ est le tenseur d'ordre deux symétrique de projection sur la surface Γ . Sur le plan mécanique, ce comportement est tout à fait similaire au comportement mécanique d'une membrane plongée au sein d'un milieu continu, dont le comportement est caractérisé par les coefficients de Lamé $\left(\frac{2\lambda^r\mu^r}{\lambda^r+2\mu^r}, \mu^r\right)$.

Certains auteurs, tels Bessoud *et al.* [38, 39] et Benveniste et Miloh [36], se sont également intéressés au comportement asymptotique d'une couche mince *super-rigide*, c'est-à-dire dont la rigidité varie comme ℓ^{-3} . Dans ce cas, dans la limite $\ell \rightarrow 0$, cette couche se comporte comme une plaque (ou une coque) inextensible : le champ de déplacement est continu à travers l'interface, celle-ci présente une rigidité de flexion et ses déformations membranaires sont nulles. Ce modèle limite un peu particulier n'a de sens que pour des matériaux à contraste de rigidité extrêmement important.

Comportement général d'une couche mince

Entre ces modèles limite de couches minces souple et rigide, on peut se demander quel serait le comportement asymptotique d'une couche mince quelconque, dont la rigidité ne dépendrait pas de son épaisseur. La première analyse asymptotique complète sur ce sujet a été réalisée par Bövik dans les années 90 [43], qui s'est intéressé au comportement asymptotique d'une couche élastique mince, isotrope et courbe. Un problème similaire a été étudié par Abdelmoula *et al.* [31], qui démontrent que, dans la limite d'une couche très mince, des singularités d'énergie infinie peuvent apparaître sur les bords de la couche. Enfin, Benveniste et Miloh [35] ont généralisé l'étude de ce problème à des comportements anisotropes plus complexes sur des couches de géométrie courbe.

Les résultats obtenus par ces auteurs peuvent être résumés de la façon suivante. Dans la limite $\ell \rightarrow 0$, la couche mince *disparaît* : les champs de contrainte et de déplacements deviennent continus à la traversée de l'interface, et tout se passe donc comme si la couche n'existait pas. Pour identifier le comportement effectif de l'interface, il ne suffit donc pas d'identifier un simple modèle limite. Il faut effectuer un développement asymptotique complet de la réponse du modèle pour identifier le comportement dominant de l'interface. Il apparaît alors que l'influence de la couche mince sur le reste de la structure varie linéairement avec son épaisseur. On dit que l'influence de l'interface est *d'ordre 1*. À cet ordre, on démontre que les champs de déplacement et de contraintes sont discontinus à la traversée de l'interface, et dépendent linéairement de la déformation du milieu continu environnant. On peut alors construire un modèle effectif du comportement de l'interface, qui reproduit exactement son comportement *jusqu'à l'ordre 1*.

L'approche présentée Bövik, Benveniste et Miloh présente cependant quelques limites. Tout d'abord, la forme présentée du comportement effectif de l'interface est particulièrement complexe, ce qui ne facilite pas son analyse ni son implantation. De plus, la question de la stabilité du modèle d'interface proposé ne semble pas abordée par les auteurs, bien qu'il s'agisse là d'une question cruciale pour l'implantation numérique du modèle. Cette question sera étudiée plus en détails dans la suite de ce chapitre.

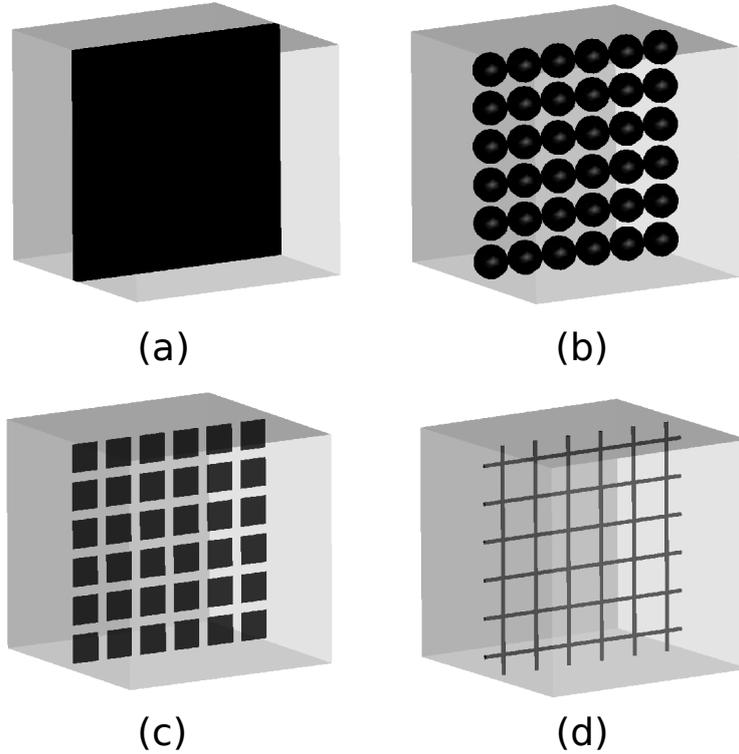


FIGURE 2.5 – Exemples de milieux contenant des hétérogénéités périodiquement réparties sur une surface. (a) Couche mince homogène (b) Cavités sphériques (c) Microfissuration périodique d’un matériau (d) Armatures en acier dans du béton

2.1.4 Travaux sur le comportement d’une surface d’hétérogénéités

L’analyse asymptotique du comportement effectif d’hétérogénéités périodiquement réparties sur une surface a fait l’objet de beaucoup moins de travaux. Nguetseng et Sanchez-Palencia sont les premiers à s’intéresser à ce type de problème à partir des années 80 [64, 67]. Ils étudient en particulier les effets de concentration de contraintes susceptibles de se produire au voisinage des hétérogénéités. Abdelmoula *et al.* étudient par la suite le comportement effectif d’un composite fibré microfissuré, et proposent la première analyse complète de ce type de défauts [32]. Ces travaux sont ensuite complétés par Marigo et Pideri, qui étudient le comportement effectif de microfissures réparties sur une surface [62], puis par Geymonat *et al.*, qui proposent une première implantation numérique du modèle [52].

La principale difficulté de ce type d’étude réside dans la description des champs mécaniques au voisinage des hétérogénéités. En effet, pour pouvoir faire tendre la taille des hétérogénéités vers zéro, il est nécessaire de séparer la description géométrique de

ces hétérogénéités, à l'échelle locale, de celle de l'ensemble de la structure. On utilise pour cela la méthode de *séparation d'échelle*, qui a été utilisée par Sanchez-Palencia [66], Léné [60], Andrieux *et al.* [34], Suquet [71], Devries *et al.* [48], Briane [42] et Michel *et al.* [63] à partir des années 80 pour étudier le comportement mécanique de matériaux microstructurés tridimensionnels, ou de matériaux quasi-périodiques. En séparant une échelle de description microscopique de l'échelle macroscopique, cette méthode permet d'identifier un *comportement effectif limite*, qui caractérise le comportement mécanique de ce type de matériaux aux grandes échelles. Dans le cas d'une surface d'hétérogénéités, cette méthode permet de décrire les champs mécaniques au voisinage de cette surface, tout en faisant tendre la taille des hétérogénéités vers zéro.

Cependant, à distance de cette surface, le matériau est homogène, et peut être décrit par une seule échelle de coordonnées spatiales. Il est donc nécessaire d'établir des conditions de raccord entre la surface hétérogène, et le volume homogène environnant. Ces conditions de raccord sont établies en utilisant la méthode des *développement asymptotiques raccordés*, qui a été introduite pour la première fois par Nguetseng et Sanchez-Palencia dans ce contexte [64, 67]. Ces auteurs ont démontré qu'on observe entre ces deux régions des effets de couche limite, équivalents à ceux étudiés par Dumontet dans les matériaux composites [49], et par Ladevèze, puis Bilteryst et Marigo sur le bord des structures fines et élancées [58, 40].

En utilisant ce type de description, Abdelmoula *et al.*, puis Marigo et Pideri démontrent que l'influence des hétérogénéités sur l'ensemble de la structure est proportionnelle à leur taille [32, 62]. Cette influence se caractérise par une discontinuité des champs de déplacement et de contraintes à travers la surface d'hétérogénéités. Ces discontinuités varient linéairement en fonction de la déformation du milieu continu environnant, et peuvent être déterminées en résolvant des problèmes mécaniques élémentaires à l'échelle d'un motif périodique d'hétérogénéités. Le point délicat de ces approches est qu'elles obligent à résoudre successivement deux problèmes mécaniques à l'échelle de la structure : un premier problème homogène, où l'on néglige la présence des hétérogénéités, puis un second qui permet de prendre en compte l'influence de ces hétérogénéités au premier ordre. Ceci complique significativement la mise en œuvre des calculs numériques.

2.1.5 Démarche proposée dans ce chapitre

On se propose donc d'améliorer cette approche en construisant un modèle d'interface effective. Ce modèle permet de résoudre un problème mécanique à l'échelle de la structure en une seule fois. Ce modèle effectif reproduit correctement le comportement mécanique de la surface d'hétérogénéités *jusqu'à l'ordre 1*. Il est donc aussi précis que l'approche par résolution itérative. De plus, il est basé sur une formulation énergétique, ce qui facilite son analyse, ainsi que son implantation dans un code de calcul éléments finis. Ce modèle combine deux comportements relativement classiques : un comportement de type membrane, qui induit un saut de contrainte à l'interface, et un comportement d'interface élastique, qui induit un saut de déplacement. La principale difficulté posée par ce modèle est qu'il n'est généralement pas stable : on démontre que l'un des deux comportements est généralement instable, ce qui pose des problèmes en termes d'implantation numérique.

Ce modèle est développé de la façon suivante. Dans la deuxième section, on détaille la formulation du problème mécanique, on explique le principe de la méthode de séparation d'échelles et on reconstruit les équations de la mécanique pour notre problème à deux échelles. Dans la troisième section, on résout itérativement ces différentes équations, et l'on montre que l'influence des hétérogénéités est proportionnelle à leur taille. Dans la quatrième section, on analyse les problèmes microscopiques qui caractérisent le comportement effectif des hétérogénéités, et on construit une *énergie effective d'interface*. On propose un encadrement de cette énergie d'interface, et on démontre qu'elle n'est généralement pas définie positive. Puis on construit un problème couplé, *exact à l'ordre 1*, qui décrit l'interaction entre le volume homogène et les hétérogénéités. Enfin, la dernière section permet d'appliquer le modèle proposé à différents exemples. On applique cette approche au cas plus simple d'une couche homogène, et on établit ainsi la cohérence de notre modèle effectif avec les modèles d'interfaces dites souple et rigide proposés dans la littérature. On applique également notre méthode à des hétérogénéités plus complexes, telles que des fissures, des inclusions élastiques et des barres cylindriques. On démontre ainsi que l'on peut représenter le comportement effectif de barres d'armature dans une structure en béton armé par un simple modèle de membrane.

2.2 La séparation d'échelles

2.2.1 Le problème étudié

Considérons un corps tridimensionnel, donc la configuration de référence est $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Le comportement du matériau est linéaire élastique, caractérisé par le tenseur de rigidité $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ et par la masse volumique $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ étant le vecteur position. À l'exception du voisinage de la surface Γ , située dans le plan $x_1 = 0$, le corps est homogène, avec un tenseur de rigidité $\mathbf{A} = \mathbf{A}^m$ et une densité $\rho = \rho^m$. Ce matériau est appelé la *matrice*. À proximité du plan Γ , le corps contient des hétérogénéités qui forment un réseau périodique, caractérisé par les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} . Les champs de paramètres matériaux \mathbf{A} et ρ sont donc \mathbf{a} - et \mathbf{b} -périodiques au voisinage de Γ . Les hétérogénéités peuvent être de différents types : il peut s'agir d'inclusions élastiques, d'inclusions rigides, voire de vides dans le matériau, comme des cavités ou des fissures. Tous ces types d'hétérogénéités présentent au final un comportement homogénéisé très similaire. Cependant, pour simplifier la présentation, nous nous intéresserons essentiellement au cas où le comportement élastique du matériau est régulier, c'est-à-dire que le tenseur de rigidité \mathbf{A} ne présente pas de valeurs propres nulles ou infinies. Ceci exclut en particulier l'étude du comportement d'éventuels vides dans le matériau, d'inclusions parfaitement rigides ou de matériaux incompressibles. Notons que l'étude des fissures et des cavités est plus largement détaillée dans l'article de Marigo et Pideri [62].

L'épaisseur de la couche hétérogène est notée ℓ . Les vecteurs de périodicité \mathbf{a} et \mathbf{b} et l'épaisseur de la couche ℓ sont supposés être bien plus petits que la structure dans son ensemble. La frontière $\partial\Omega$ du corps est séparée en deux parties $\partial_F\Omega$ et $\partial_u\Omega$. Une densité de forces de surface \mathbf{F} est appliquée sur $\partial_F\Omega$, tandis qu'un champ de déplacement \mathbf{u}^d est

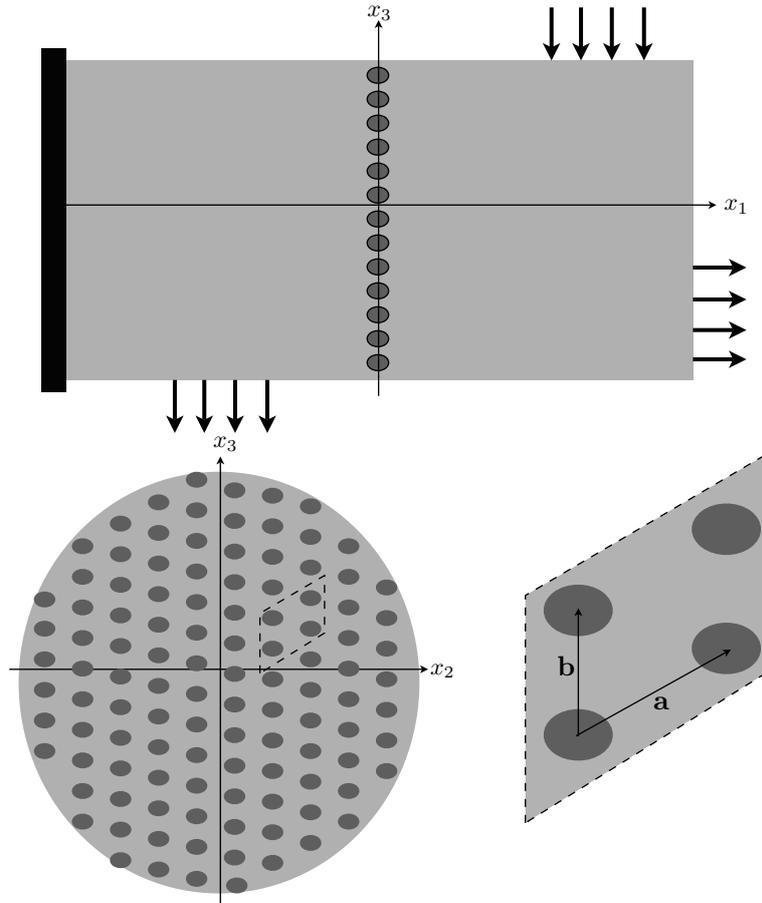


FIGURE 2.6 – Le problème élastique linéaire standard, avec forces et déplacements imposés. Les hétérogénéités sont situées à proximité du plan Γ , et sont disposées selon un réseau périodique, caractérisé par les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} .

imposé sur $\partial_u \Omega$ (voir Figure 2.6). Le corps est également soumis à une gravité uniforme \mathbf{g} . Dans ce cadre, l'équilibre du corps est gouverné par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^d & \text{sur } \partial_u \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Ces équations correspondent respectivement à la relation de comportement, à l'équation d'équilibre et aux conditions limite en contrainte et en déplacement. Ce problème est un problème élasto-statique linéaire classique, et nous savons par des théorèmes classiques que, pourvu que les données \mathbf{F} et \mathbf{u}^d soient suffisamment régulières, il admet une unique solution d'énergie finie. De plus, le champ de déplacement solution est l'unique minimum

de la fonctionnelle énergie potentielle

$$\mathcal{P}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dS,$$

sur l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3, \mathbf{w} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}.$$

2.2.2 Séparation des échelles de longueur

L'objectif de la séparation d'échelle est d'identifier un comportement effectif pour une microstructure donnée. Cette microstructure est supposée périodique, ou quasi-périodique, et l'idée est de construire le comportement limite de ce matériau lorsque la taille de la microstructure tend vers zéro. Dans cet objectif, il est nécessaire de donner une définition claire de la microstructure. On introduit donc les paramètres de longueur suivants : la taille de la structure complète est notée H , tandis que la taille d'un motif périodique est notée h . Comme notre modèle décrit une grande variété d'hétérogénéités, il est difficile de donner une définition générale de ces paramètres, mais en pratique, H est la plus petite dimension de la structure complète, tandis que h est la plus grande dimension d'un motif d'hétérogénéité, c'est-à-dire le maximum de ℓ , $\|\mathbf{a}\|$ et $\|\mathbf{b}\|$. Dans toute la suite, le rapport entre ces deux échelles est noté $\eta = h/H$, qui est donc un petit paramètre sans dimension.

Un point clé dans la séparation d'échelle est de séparer proprement la description de la microstructure de celle de la structure complète. Cette séparation peut être introduite de la façon suivante. Le volume Ω peut être séparé en deux parties : le *domaine extérieur* homogène, éloigné de la surface Γ , et le *domaine intérieur*, au voisinage de la surface Γ . Le domaine extérieur (qui sera au final identifié à $\Omega \setminus \Gamma$) est homogène, et peut donc être décrit classiquement par un unique système de coordonnées macroscopique. Inversement, le domaine intérieur hétérogène doit être décrit par un système de coordonnées à deux échelles, pour pouvoir décrire les hétérogénéités. Dans cette région, comme la microstructure est périodique, la position d'un point peut être définie par deux données indépendantes : la position du motif périodique auquel le point appartient, et sa position relative dans le motif. La première donnée est notée \mathbf{x}_i , et décrit le centre géométrique du motif. C'est un vecteur, qui prend des valeurs discrètes, et vérifie par définition $\mathbf{x}_i \in \Gamma$. On peut voir ce vecteur comme la *position macroscopique du point* (voir Figure 2.7).

Si la position réelle du point physique est donnée par le vecteur position \mathbf{X} , la différence $\mathbf{X} - \mathbf{x}_i$ est un petit vecteur, décrivant la position relative du point à l'intérieur du motif périodique. En introduisant le rapport d'échelles η , on définit la position du point dans le motif périodique par :

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\eta} (\mathbf{X} - \mathbf{x}_i) \tag{2.2}$$

Par définition, $\mathbf{y} \in \mathbb{R} \times \mathbb{Y}$, avec \mathbb{Y} la section transverse du motif périodique. Ce volume est appelé la *cellule périodique*, et sera notée \mathbb{Y} par la suite. Notons que la cellule périodique

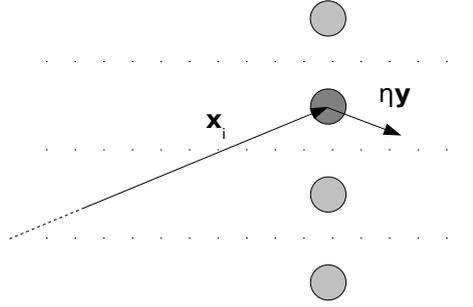


FIGURE 2.7 – Séparation des coordonnées dites macroscopiques et microscopiques. Les coordonnées macroscopiques \mathbf{x}_i décrivent le centre du motif périodique, et les coordonnées microscopiques $\eta\mathbf{y}$ décrivent la position relative du point dans la cellule périodique.

n'est pas bornée dans la direction transverse. Le vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ prend des valeurs continues, et détermine la position relative du point dans la cellule élémentaire. Comme la microstructure est périodique, cette position relative est définie modulo les deux vecteurs \mathbf{a}/η et \mathbf{b}/η , et nous avons :

$$\mathbf{y} + \frac{1}{\eta}(n\mathbf{a} + m\mathbf{b}) \equiv \mathbf{y} \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$$

Cette relation signifie que les champs physiques doivent être \mathbf{a}/η - et \mathbf{b}/η -périodiques par rapport à la variable \mathbf{y} . Les champs respectant cette propriété de périodicité seront dits *\mathbf{y}' -périodiques* dans la suite.

La position réelle \mathbf{X} d'un point à proximité de l'interface est donnée par le couple $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) \in \Gamma \times \mathbb{Y}$, \mathbf{x}_i prenant des valeurs discrètes et \mathbf{y} prenant des valeurs continues périodiques. Notons que \mathbf{x}_i et \mathbf{y} sont tous les deux de l'ordre de H , ce qui simplifiera les développements par la suite. Lorsque η tend vers zéro, la microstructure devient très fine, et les valeurs prises par \mathbf{x}_i deviennent dense dans l'ensemble continu Γ . Ceci justifie que l'on considère \mathbf{x}_i comme un paramètre continu, noté \mathbf{x}' dans la suite des développements. Avec cette approximation, la position d'un point est définie par deux paramètres continus indépendants, ce qui peut s'écrire :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{x}' + \eta\mathbf{y} \tag{2.3}$$

Notons que, lorsque la microstructure n'est pas périodique, il est bien plus difficile de définir rigoureusement les échelles microscopiques et macroscopiques. Pourtant, on ne voit pas ce qui empêcherait de définir un comportement effectif aux grandes échelles. Il s'agit là d'un point difficile de la théorie de l'homogénéisation, qui a été étudié par plusieurs auteurs [42, 45].

Par la suite, nous utiliserons les deux systèmes de coordonnées, suivant le domaine auquel on s'intéresse :

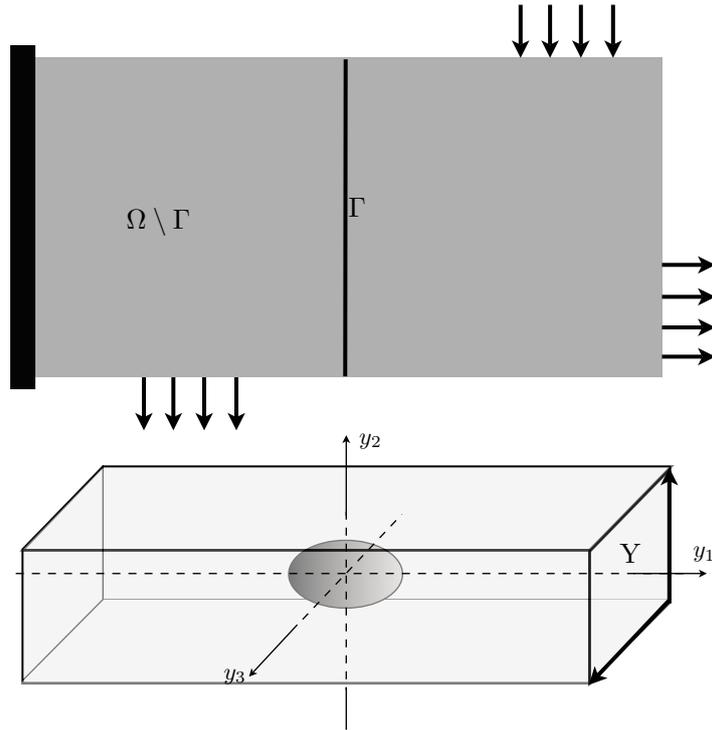


FIGURE 2.8 – Le problème original est séparé en un problème microscopique et un problème macroscopique. À l'échelle macroscopique, les hétérogénéités se réduisent à une simple interface, tandis qu'à l'échelle microscopique, les hétérogénéités forment un réseau infini périodique. La cellule périodique \mathbb{Y} est bornée dans les directions y_2 et y_3 , mais infinie dans la direction y_1 .

1. À l'échelle macroscopique, un point du domaine extérieur $\Omega \setminus \Gamma$ est défini par les coordonnées macroscopiques cartésiennes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, avec la base orthonormale associée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. La coordonnée x_1 décrit la distance (signée) d'un point au plan Γ , tandis que les deux autres coordonnées décrivent le plan tangent. Notons que \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 ne sont pas nécessairement alignés avec \mathbf{a} et \mathbf{b} . Un point $(0, x_2, x_3)$ de Γ sera identifié à $\mathbf{x}' = (x_2, x_3)$.
2. À l'échelle microscopique, un point du domaine intérieur $\Gamma \times \mathbb{Y}$ est caractérisé par les coordonnées macroscopiques $\mathbf{x}' = (x_2, x_3)$ et les coordonnées microscopiques $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, qui sont déduites des coordonnées macroscopiques à proximité de l'interface via la relation (2.2). Les coordonnées périodiques $\mathbf{y}' = (y_2, y_3)$ décrivent la position relative d'un point dans le plan tangent, tandis que y_1 décrit la distance d'un point au plan moyen Γ .

2.2.3 La décomposition des champs

Décomposition des champs physiques

Les champs de déplacement et de contrainte solutions de (2.1) dépendent du paramètre η , et seront donc notés \mathbf{u}^η et $\boldsymbol{\sigma}^\eta$ dans la suite. En suivant la méthode de séparation d'échelle, les champs physiques sont décomposés en séries entières du paramètre η . On distingue deux types de décompositions, suivant que l'on considère les champs physiques dans le domaine intérieur ou dans le domaine extérieur. On suppose donc que les champs peuvent se décomposer de la façon suivante :

Décomposition dans le domaine extérieur

$$\mathbf{u}^\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \eta\mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + \eta^2\mathbf{u}^2(\mathbf{x}) + \dots \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\eta(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}) + \eta\boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x}) + \eta^2\boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x}) + \dots \quad (2.5)$$

Notons que les champs \mathbf{u}^i et $\boldsymbol{\sigma}^i$ sont définis dans tout le domaine extérieur $\Omega \setminus \Gamma$, bien que ces développements ne soient pas une bonne approximation des champs réels au voisinage de Γ .

Décomposition dans le domaine intérieur

$$\mathbf{u}^\eta(\mathbf{X}) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \eta\mathbf{v}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \eta^2\mathbf{v}^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \dots \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\eta(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \eta\boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \eta^2\boldsymbol{\tau}^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \dots \quad (2.7)$$

Les champs \mathbf{v}^i et $\boldsymbol{\tau}^i$ sont définis sur le domaine intérieur $\Gamma \times \mathbb{Y}$, et sont \mathbf{y}' -périodiques.

On peut démontrer que² le premier ordre non nul dans ces différents développements est toujours l'ordre 0. Les termes indicés par 0 correspondent à la limite des champs lorsque le paramètre η tend vers zéro ; les termes indicés par 1 correspondent quant à eux à la composante des champs physiques dont l'amplitude varie linéairement avec le paramètre η , et ainsi de suite. Ces développements peuvent donc se comprendre comme une sorte de développement de Taylor du comportement du modèle en fonction du paramètre η . Comme η est un petit paramètre, on peut s'attendre à ce que la contribution des termes d'ordre élevé sur le comportement global de la structure soit négligeable. On peut donc chercher à identifier un comportement effectif des hétérogénéités en étudiant la forme des premiers termes du développement. Dans le cadre de cette étude, on s'intéressera essentiellement à l'ordre 1, car l'influence des hétérogénéités sur le comportement de la structure s'avèrera proportionnelle à η dans la limite $\eta \rightarrow 0$. Notons cependant que, à l'instar des séries de Taylor, on ne sait pas démontrer *a priori* que ces séries convergent. On restera donc prudent dans l'utilisation de telles sommes infinies, en précisant que leur écriture reste avant tout formelle.

2. On peut vérifier que les termes d'ordres négatifs sont nuls. Inversement, si les séries ne commencent qu'à l'ordre 1, les conditions limites ne peuvent pas être vérifiées.

Décomposition des équations

Après avoir décomposé les champs physiques en séries entières du paramètre η , il reste à établir les équations de la mécanique auxquelles satisfont les différents termes de ces développements. Introduisons donc les deux types de développements dans le problème élastique (2.1). Pour les développements intérieurs, il est nécessaire de reformuler les opérateurs différentiels en termes des coordonnées macroscopiques et microscopiques. En utilisant la relation (2.3), on peut reformuler l'opérateur gradient de la façon suivante :

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}} \rightarrow \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{y}}$$

Cette règle est très générale, et peut être appliquée à tous les opérateurs différentiels du premier ordre. Par exemple, si $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la partie symétrique du gradient, on obtient

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\cdot) + \frac{1}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\cdot),$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ sont respectivement les parties symétriques du gradient par rapport aux coordonnées macroscopiques et microscopiques. En termes de composantes, $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ s'écrit classiquement

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes_s \mathbf{e}_j,$$

où les indices latins varient de 1 à 3, et $\mathbf{e}_i \otimes_s \mathbf{e}_j$ est le produit dyadique symétrisé $\mathbf{e}_i \otimes_s \mathbf{e}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)$. En revanche, $\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_\beta + \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} \mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_\alpha$$

On reconnaît dans les premiers termes de cette équation la déformation membranaire de Γ , qui aura une grande influence sur le comportement mécanique des hétérogénéités. On introduit donc le tenseur des déformations membranaires

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_\beta, \quad (2.8)$$

de sorte que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{v}) + \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} \mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_\alpha. \quad (2.9)$$

L'opérateur divergence peut être réécrit de la même façon :

$$\mathbf{div}(\cdot) \rightarrow \mathbf{div}_{x'}(\cdot) + \frac{1}{\eta} \mathbf{div}_y(\cdot)$$

L'opérateur \mathbf{div}_y s'écrit classiquement en composantes

$$\mathbf{div}_y \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i,$$

tandis que $\mathbf{div}_{x'}$ s'écrit

$$\mathbf{div}_{x'}\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial\tau_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_i = \frac{\partial\tau_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\beta + \frac{\partial\tau_{1\alpha}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_1.$$

On reconnaît dans le premier terme de cette somme la divergence d'un flux d'interface. On introduit donc l'opérateur

$$\mathbf{div}_\Gamma\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial\tau_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\beta, \quad (2.10)$$

de sorte que $\mathbf{div}_{x'}$ s'écrit

$$\mathbf{div}_{x'}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{div}_\Gamma\boldsymbol{\tau} + \frac{\partial\tau_{1\alpha}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_1. \quad (2.11)$$

Ainsi, dans le domaine intérieur, l'équation d'équilibre et la relation de comportement s'écrivent formellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{+\infty} (\eta^i \mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\tau}^i) + \eta^{i-1} \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^i)) + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \\ \sum_{i=0}^{+\infty} \eta^i \boldsymbol{\tau}^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{A} : (\eta^i \boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}^i) + \eta^{i-1} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^i)) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Gamma \times \mathbb{Y} \quad (2.12)$$

Pour les développements extérieurs, comme seules les coordonnées macroscopiques \boldsymbol{x} interviennent, l'équilibre et la relation de comportement s'écrivent simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{+\infty} \eta^i \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^i) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0} \\ \sum_{i=0}^{+\infty} \eta^i \boldsymbol{\sigma}^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \eta^i \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \quad (2.13)$$

En identifiant les puissances de η , on obtient une suite d'équations qui sont détaillées dans les tableaux suivants.

Équations d'équilibre

Ordre	Domaine extérieur $\Omega \setminus \Gamma$	Domaine intérieur $\Gamma \times \mathbb{Y}$
-1	<i>aucune</i>	$\mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0}$
0	$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0}$	$\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\tau}^0) + \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^1) + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$
$i \geq 1$	$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^i) = \mathbf{0}$	$\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\tau}^i) + \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^{i+1}) = \mathbf{0}$

Relations de comportement

Ordre	Domaine extérieur $\Omega \setminus \Gamma$	Domaine intérieur $\Gamma \times \mathbb{Y}$
-1	<i>aucune</i>	$\mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^0) = \mathbf{0}$
$i \geq 0$	$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i)$	$\boldsymbol{\tau}^i = \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}^i) + \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^{i+1})$

De même, les conditions limite se décomposent de la façon suivante.

Conditions limite

Ordre	Conditions de Dirichlet	Conditions de Neumann
0	$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$
$i \geq 1$	$\mathbf{u}^i = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$

Remarque 1. *On omet volontairement les conditions limite qui s'appliquent sur le domaine intérieur, c'est-à-dire sur $\partial\Gamma \cap \partial_u\Omega$ et $\partial\Gamma \cap \partial_F\Omega$. Ces conditions limite n'ont pas d'influence à l'ordre 1 pourvu que les forces extérieures \mathbf{F} et les déplacements imposés \mathbf{u}^d soient suffisamment lisses dans ces régions. L'identification de l'influence de ces conditions limite nécessiterait une séparation d'échelle supplémentaire entre les hétérogénéités réparties sur Γ , et celles situées sur le bord de cette surface.*

Conditions de raccord

Nous devons maintenant établir des conditions de raccord entre les développements intérieurs et extérieurs. Pour cela, on s'appuie sur le fait que ces développements sont tous deux valables dans des régions intermédiaires. En effet, les champs \mathbf{u}^i et $\boldsymbol{\sigma}^i$ du domaine extérieur constituent une bonne approximation des champs physiques tant que l'on ne s'approche pas trop des hétérogénéités, c'est-à-dire tant que $|x_1| \gg h$. Inversement, les champs \mathbf{v}^i et $\boldsymbol{\tau}^i$ du domaine intérieur constituent une approximation pertinente des champs physiques à proximité des hétérogénéités, lorsque $|x_1| \ll H$. Ces développements

sont donc tous deux valables dans des régions intermédiaires, situées de part et d'autre de la surface Γ , et caractérisées par la double contrainte $h \ll |x_1| \ll H$.

Dans le domaine extérieur, en introduisant le paramètre $\eta = h/H$, on peut réécrire cette contrainte sous la forme $\eta H \ll |x_1| \ll H$. Pour fixer les idées, on peut choisir par exemple $x_1 \approx \pm\sqrt{\eta}H$, de sorte que les inégalités sont vérifiées dès que $\eta \ll 1$. Réciproquement, dans le domaine intérieur, comme $x_1 = \eta y_1$, les régions intermédiaires sont caractérisées par $H \ll |y_1| \ll H/\eta$, et l'on choisit de prendre $y_1 \approx \pm H/\sqrt{\eta}$. Ainsi, lorsque $\eta \rightarrow 0$, on a simultanément $x_1 \rightarrow 0^\pm$ et $y_1 \rightarrow \pm\infty$. En d'autres termes, les champs du domaine extérieur au voisinage de Γ sont raccordés avec les champs du domaine intérieur à l'infini.

Pour établir les conditions de raccord, on introduit le développement de Taylor des champs du domaine extérieur à proximité de Γ :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^i(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^{i\pm}(\mathbf{x}') + x_1 \left. \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial x_1} \right|^\pm(\mathbf{x}') + \frac{x_1^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{\partial x_1^2} \right|^\pm(\mathbf{x}') + \mathcal{O}(x_1^3) \\ \boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\sigma}^{i\pm}(\mathbf{x}') + x_1 \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial x_1} \right|^\pm(\mathbf{x}') + \frac{x_1^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial x_1^2} \right|^\pm(\mathbf{x}') + \mathcal{O}(x_1^3)\end{aligned}$$

Puisque nous avons $x_1 = \eta y_1$, on peut réécrire les développements précédents sous la forme :

$$\mathbf{u}^i(\eta y_1, \mathbf{x}') = \mathbf{u}^{i\pm}(\mathbf{x}') + \eta y_1 \left. \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial x_1} \right|^\pm(\mathbf{x}') + \eta^2 \frac{y_1^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{\partial x_1^2} \right|^\pm(\mathbf{x}') + \mathcal{O}(\eta^3 y_1^3) \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i(\eta y_1, \mathbf{x}') = \boldsymbol{\sigma}^{i\pm}(\mathbf{x}') + \eta y_1 \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial x_1} \right|^\pm(\mathbf{x}') + \eta^2 \frac{y_1^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial x_1^2} \right|^\pm(\mathbf{x}') + \mathcal{O}(\eta^3 y_1^3) \quad (2.15)$$

Dans les régions intermédiaires, les développements intérieurs et extérieurs sont tous deux valables, donc les sommes infinies (2.4) et (2.6) sont égales. En utilisant la relation (2.14), on obtient dans la limite $\eta \rightarrow 0$ (les arguments sont temporairement omis) :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^0 + \eta \mathbf{v}^1 + \eta^2 \mathbf{v}^2 + \mathcal{O}(\eta^3) &= \mathbf{u}^{0\pm} + \eta \left(\mathbf{u}^{1\pm} + y_1 \left. \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1} \right|^\pm \right) \\ &\quad + \eta^2 \left(\mathbf{u}^{2\pm} + y_1 \left. \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial x_1} \right|^\pm + \frac{y_1^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}^0}{\partial x_1^2} \right|^\pm \right) + \mathcal{O}(\eta^3 y_1^3)\end{aligned}$$

Comme on a choisi $y_1 \approx \pm H/\sqrt{\eta}$, lorsque $\eta \rightarrow 0$, on a simultanément $y_1 \rightarrow \pm\infty$. En identifiant dans l'égalité précédente les trois premières puissances de η , on obtient donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{0\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \\ \mathbf{u}^{1\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\mathbf{v}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - y_1 \left. \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1} \right|^\pm(\mathbf{x}') \right) \\ \mathbf{u}^{2\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\mathbf{v}^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - y_1 \left. \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial x_1} \right|^\pm(\mathbf{x}') - \frac{y_1^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}^0}{\partial x_1^2} \right|^\pm(\mathbf{x}') \right)\end{aligned}$$

En introduisant les développements (2.5), (2.7) et (2.15), on obtient de même :

$$\begin{aligned}\sigma^{0\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \tau^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \\ \sigma^{1\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\tau^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - y_1 \left. \frac{\partial \sigma^0}{\partial x_1} \right|^\pm(\mathbf{x}') \right) \\ \sigma^{2\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\tau^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - y_1 \left. \frac{\partial \sigma^1}{\partial x_1} \right|^\pm(\mathbf{x}') - \frac{y_1^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \sigma^0}{\partial x_1^2} \right|^\pm(\mathbf{x}') \right)\end{aligned}$$

Dans les identités précédentes, les membres de gauche dépendent de \mathbf{x}' , tandis que ceux de droite dépendent de \mathbf{x}' et \mathbf{y}' . Pour que les conditions de raccord soient identiquement respectées, les champs \mathbf{v}^i et τ^i ne doivent donc pas dépendre de \mathbf{y}' dans les régions intermédiaires. On pourra vérifier dans la suite des développements que cette contrainte est respectée (cf. Section 2.3.3). Notons également que les termes d'ordre élevé sont couplés avec tous les ordres précédents, ce qui rend les conditions de raccord très vite complexes. Cependant, dans la suite des développements, on s'intéressera essentiellement aux deux premiers ordres, qui suffisent à caractériser un comportement effectif des hétérogénéités.

2.3 Résolution itérative des problèmes intérieurs et extérieurs

Nous avons donc établi les équations d'équilibre et les relations de comportement dans les domaines intérieurs et extérieurs, ainsi que les conditions de raccord entre les deux domaines. En utilisant ces équations, on peut résoudre le problème complet de façon itérative, en commençant par l'ordre 0, et en étudiant alternativement le problème intérieur à proximité des hétérogénéités, et le problème extérieur à l'échelle de la structure.

2.3.1 Le problème intérieur d'ordre 0

Au sein d'un motif d'hétérogénéité, la relation de comportement d'ordre -1 peut s'écrire $\mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^0) = \mathbf{0}$. Comme la rigidité du matériau est définie positive, elle est inversible, et l'on a donc $\boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^0) = \mathbf{0}$. Cette relation signifie que \mathbf{v}^0 est un mouvement de corps rigide à l'échelle d'une cellule périodique. Comme \mathbf{v}^0 est \mathbf{y}' -périodique, \mathbf{v}^0 ne peut être qu'une translation uniforme à l'échelle de la cellule, et ne dépend donc pas de \mathbf{y} . La valeur de cette translation dépend en revanche de \mathbf{x}' , et reste inconnue à cette étape. Elle sera déterminée par le problème extérieur d'ordre 0.

2.3.2 Le problème extérieur d'ordre 0

En utilisant le résultat précédent, on peut à présent résoudre le problème extérieur d'ordre 0. Dans le domaine extérieur, la relation de comportement et l'équation d'équilibre d'ordre 0 s'écrivent respectivement $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$ et $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0}$, tandis que les conditions limite d'ordre 0 s'écrivent $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$ sur $\partial_F \Omega$, et $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^d$ sur $\partial_u \Omega$.

Nous devons à présent identifier une possible influence des hétérogénéités sur le problème extérieur d'ordre 0. Cette influence peut se traduire par des sauts de déplacement ou de contraintes à travers l'interface Γ . Pour identifier ces éventuels sauts, on utilise les conditions de raccord établies entre les problèmes intérieurs et extérieurs. Ces conditions de raccord pour le déplacement s'écrivent à l'ordre 0

$$\mathbf{u}^{0\pm}(\mathbf{x}') = \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}),$$

et comme \mathbf{v}^0 est une simple translation uniforme à l'échelle de la cellule, on obtient

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}') = \mathbf{u}^{0+}(\mathbf{x}') = \mathbf{u}^{0-}(\mathbf{x}') \quad \text{sur } \Gamma.$$

Ainsi, les déplacements d'ordre 0 sont continus à la traversée de l'interface Γ :

$$[[\mathbf{u}^0]] = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma$$

Déterminons à présent le saut de contrainte. Les conditions de raccord d'ordre 0 s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}^{0\pm}(\mathbf{x}') = \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y})$$

L'équation d'équilibre s'écrit à l'ordre -1 , $\mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0}$. En intégrant la divergence du champ de contrainte sur la section transverse Y , on obtient avec le théorème d'Ostrogradsky :

$$\begin{aligned} \int_Y \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) d\mathbf{y}' &= \int_Y \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}^0}{\partial y_1} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^0}{\partial y_\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha \right) d\mathbf{y}' \\ &= \frac{\partial}{\partial y_1} \int_Y \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 d\mathbf{y}' + \int_{\partial Y} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{n} d\ell \end{aligned}$$

Dans la relation précédente, \mathbf{n} est la normale sortante au bord de la section transverse Y . En utilisant les conditions de périodicité sur $\boldsymbol{\tau}^0$ et l'équation d'équilibre, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \int_Y \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_1 d\mathbf{y}' = \mathbf{0}$$

Enfin, en introduisant la notation

$$\langle f \rangle_Y(\mathbf{x}', y_1) = \frac{1}{\text{mesure}(Y)} \int_Y f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) d\mathbf{y}', \quad (2.16)$$

l'équation précédente s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \langle \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_Y = \mathbf{0}.$$

Ceci signifie que la contrainte moyenne $\langle \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_Y$ est indépendante de y_1 (mais dépend de \mathbf{x}'). Notons bien que ceci n'est vrai qu'en moyenne, car $\boldsymbol{\tau}^0$ n'est pas uniforme au sein d'un motif périodique, comme on le verra par la suite. En particulier, ce résultat

signifie que la moyenne des contraintes dans les limites $y_1 \rightarrow \pm\infty$ sont les mêmes. Par conséquent, les conditions de raccord s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}^{0+}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\sigma}^{0-}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1 = \langle \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_Y(\mathbf{x}')$$

On en déduit que la contrainte d'ordre 0 est continue à la traversée de l'interface :

$$[[\boldsymbol{\sigma}^0]] \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma$$

Nous avons démontré que les hétérogénéités n'introduisent ni saut de déplacement ni saut de contrainte à travers l'interface. Pour être complet, il faudrait démontrer également que les hétérogénéités n'introduisent pas d'effets de bord, tels que des forces linéiques sur le bord $\partial\Gamma$ de la surface. Ceci demanderait d'étudier le comportement mécanique des hétérogénéités qui se trouvent au voisinage de $\partial\Gamma$, ce qui alourdirait beaucoup la démonstration. On admet donc que les hétérogénéités n'introduisent pas non plus d'effets de bord à l'ordre 0.

Ainsi, la surface où se trouvent les hétérogénéités se comporte à l'ordre 0 comme une interface parfaite : elle assure la continuité de la contrainte normale $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$ et du déplacement \mathbf{u}^0 à travers l'interface. La structure se comporte donc comme si elle était entièrement homogène, et le système d'équations régissant son comportement à l'ordre 0 peut s'écrire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \rho^* \mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \Omega \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^d & \text{sur } \partial_u \Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

En conclusion, les hétérogénéités n'ont pas d'influence sur la structure à l'ordre 0. Ce résultat a été précédemment établi par plusieurs travaux, et peut être compris de la façon suivante : lorsque l'épaisseur de la couche hétérogène contenant les hétérogénéités tend vers 0, sa rigidité propre devient négligeable. Ainsi, on devine que l'influence de cette couche hétérogène devrait être proportionnelle à son épaisseur. Il faut donc pousser notre analyse jusqu'à l'ordre 1 pour identifier le comportement effectif de la surface.

Cependant, on doit insister sur le fait que ce résultat est une conséquence directe des hypothèses que nous avons faites sur le comportement du matériau. Nous avons supposé que la rigidité des hétérogénéités ne dépend pas de leur taille. Bien que cette hypothèse soit assez naturelle, on pourrait la remettre en question. Dans des travaux précédents concernant l'étude d'une couche mince homogène, plusieurs auteurs ont fait l'hypothèse que le comportement des hétérogénéités dépend de η . En particulier, si la rigidité du matériau est proportionnelle à η ou η^{-1} — c'est-à-dire si la couche est très souple, ou très rigide, comparé au volume environnant — la couche a une influence sur le comportement de la structure à l'ordre 0. Dans le dernier cas, la couche se comporte comme une membrane, tandis que dans le premier cas, elle se comporte comme une interface élastique. Ces modèles sont très intéressants, car ils sont très simples à implanter, mais il ne sont pas adaptés à la description d'hétérogénéités plus complexes. Nous verrons dans la dernière section que notre modèle couvre davantage d'applications, tout en restant cohérent avec ces modèles.

2.3.3 Le problème intérieur d'ordre 1

Formulation du problème

Nous avons vu précédemment que le champ de déplacement intérieur \mathbf{v}^0 est une simple translation à l'échelle de la microstructure. Pour caractériser plus précisément le comportement des hétérogénéités, il est donc nécessaire d'étudier le terme suivant dans le développement asymptotique. Dans le domaine intérieur, l'équation d'équilibre d'ordre -1 s'écrit $\mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0}$, tandis que la relation de comportement d'ordre 0 s'écrit $\boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{A}:(\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^1))$. Comme $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}') = \mathbf{u}^0(0, \mathbf{x}')$ sur Γ , cette dernière devient :

$$\boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{A}:(\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^1)) \quad (2.18)$$

Les champs intérieurs \mathbf{v}^1 et $\boldsymbol{\tau}^0$ sont reliés aux champs extérieurs \mathbf{u}^0 et $\boldsymbol{\sigma}^0$ via les conditions de raccord :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{1\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\mathbf{v}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - y_1 \left. \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1} \right|^\pm(\mathbf{x}') \right) \\ \boldsymbol{\sigma}^{0\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Nous avons établi dans la section précédente que la surface Γ présente un comportement d'interface parfaite à l'ordre 0. Comme les forces de volume et le comportement élastique de la matrice sont réguliers (car uniformes) au voisinage de cette surface, la solution du problème extérieur d'ordre 0 (2.17) est régulière. En particulier, le gradient de la transformation $\partial \mathbf{u}^0 / \partial \mathbf{x}$ est continu à la traversée de Γ . On peut donc identifier les limites du gradient de cette transformation à gauche et à droite de Γ , en écrivant

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1} \right|^+(\mathbf{x}') = \left. \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1} \right|^-(\mathbf{x}') = \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \mathbf{x}'),$$

de sorte que la condition de raccord en déplacement devient

$$\mathbf{u}^{1\pm}(\mathbf{x}') = \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\mathbf{v}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - y_1 \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \mathbf{x}') \right).$$

De même, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{0\pm}$ est continue à la traversée de Γ :

$$\boldsymbol{\sigma}^{0+}(\mathbf{x}') = \boldsymbol{\sigma}^{0-}(\mathbf{x}') = \boldsymbol{\sigma}^0(0, \mathbf{x}')$$

La condition de raccord en contrainte peut donc s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}^0(0, \mathbf{x}') = \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y})$$

Le problème d'équilibre intérieur à l'ordre 1 peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{A}:(\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^1)) \quad \text{dans } \Gamma \times \mathbb{Y} \\ \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Gamma \times \mathbb{Y} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v}^1 \text{ et } \boldsymbol{\tau}^0 \text{ sont } \mathbf{y}'\text{-périodiques} \end{array} \right.$$

Notons que l'on n'utilise qu'une partie des conditions de raccord dans la formulation de ce problème. On verra dans la suite des développements que les autres conditions sont vérifiées automatiquement. Les paramètres de chargement de ce problème sont la prédéformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{u}^0)$, et la contrainte exercée aux bords du domaine $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$. Ces chargements sont prédéterminés par la résolution du problème extérieur d'ordre 0 (2.17).

On choisit de reformuler ce problème, en effectuant le changement de variable suivant :

$$\hat{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{v}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + y_1 \frac{\partial u_1^0}{\partial x_\alpha}(0, \mathbf{x}') \mathbf{e}_\alpha$$

À l'instar de \mathbf{v}^1 , ce champ de déplacement est bien \mathbf{y}' -périodique. On peut réexprimer la relation de comportement en fonction de ce nouveau champ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^0 &= \mathbf{A} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^1)) \\ &= \mathbf{A} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{u}^0) - \frac{\partial u_1^0}{\partial x_\alpha}(\mathbf{x}') \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1)) \\ &= \mathbf{A} : (\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1)) \end{aligned}$$

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$ est le tenseur des déformations membranaires de l'interface, introduit dans (2.9).

Les conditions de raccord en contrainte sont inchangées. En revanche, les conditions de raccord en déplacement deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{1\pm} &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\hat{\mathbf{v}}^1 - y_1 \frac{\partial u_1^0}{\partial x_\alpha}(0, \mathbf{x}') \mathbf{e}_\alpha - y_1 \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \mathbf{x}') \right) \\ &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} (\hat{\mathbf{v}}^1 - y_1 \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_1 - 2y_1 \varepsilon_{1\alpha}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_\alpha) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ces conditions de raccord ne font intervenir que la déformation du milieu environnant. Le changement de variable a donc permis d'éliminer la rotation de corps rigide de l'interface, qui n'a pas d'influence sur le comportement mécanique des hétérogénéités. Le champ de déplacement $\hat{\mathbf{v}}^1$ s'interprète donc comme un champ de déplacement *pivoté* à l'échelle de la cellule élémentaire.

Le problème mécanique d'ordre 1 dans le domaine intérieur s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{A} : (\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1)) \quad \text{dans } \Gamma \times \mathbb{Y} \\ \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Gamma \times \mathbb{Y} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \hat{\mathbf{v}}^1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}^0 \quad \text{sont} \quad \mathbf{y}'\text{-périodiques} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Ce problème est un problème élastique posé sur le domaine infini $\Gamma \times \mathbb{Y}$. Ce type de problème a déjà été étudié par Sanchez-Palencia et Dumontet [49, 67]. Il admet une solution unique pour $\boldsymbol{\tau}^0$, et unique à une translation près pour $\hat{\mathbf{v}}^1$, cette translation étant une fonction indéterminée de \mathbf{x}' . En raison de la périodicité des champs vis-à-vis de \mathbf{y}' ,

et de l'homogénéité du comportement de la cellule lorsque $|y_1| \rightarrow \infty$, la contrainte $\boldsymbol{\tau}^0$ dans la cellule converge de façon exponentielle vers $\boldsymbol{\sigma}^0$ lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$. Les conditions limite pour la contrainte sont donc entièrement respectées.

On peut de même démontrer que les conditions de raccord en déplacement (2.19) sont bien posées. Pour cela, intéressons-nous à la forme du champ de déplacement :

$$\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = \hat{\boldsymbol{v}}^1(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) - y_1 \varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}^0)(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{e}_1 - 2y_1 \varepsilon_{1\alpha}(\boldsymbol{u}^0)(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{e}_\alpha \quad (2.21)$$

Si l'on calcule la déformation de ce champ de déplacement par rapport à la variable \boldsymbol{y} , on obtient

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\boldsymbol{v}}^1) - \varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}^0) \boldsymbol{e}_1 \otimes_s \boldsymbol{e}_1 - 2\varepsilon_{1\alpha}(\boldsymbol{u}^0) \boldsymbol{e}_\alpha \otimes_s \boldsymbol{e}_1,$$

où l'on omet la dépendance spatiale des champs. En passant à la limite $y_1 \rightarrow \pm\infty$, on obtient :

$$\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\boldsymbol{v}}) = \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\boldsymbol{v}}^1) \right) - \varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}^0) \boldsymbol{e}_1 \otimes_s \boldsymbol{e}_1 - 2\varepsilon_{1\alpha}(\boldsymbol{u}^0) \boldsymbol{e}_\alpha \otimes_s \boldsymbol{e}_1$$

Or la relation de comportement du problème intérieur d'ordre 1 (2.20) peut s'écrire $\boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\boldsymbol{v}}^1) = \mathbf{A}^{-1} : \boldsymbol{\tau}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0)$. Comme on a $\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\boldsymbol{v}}) &= \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^0) - \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) - \varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}^0) \boldsymbol{e}_1 \otimes_s \boldsymbol{e}_1 - 2\varepsilon_{1\alpha}(\boldsymbol{u}^0) \boldsymbol{e}_\alpha \otimes_s \boldsymbol{e}_1 \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Le champ de déplacement $\hat{\boldsymbol{v}}$ converge donc exponentiellement vers deux mouvements de corps rigide distincts lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$. En raison des conditions de périodicité, ces mouvements de corps rigide ne peuvent être que de simples translations, qui ne dépendent que de \boldsymbol{x}' . Ainsi, la limite qui apparaît dans les conditions de raccord (2.19) est bien finie, et ne dépend pas de \boldsymbol{y}' . Ces conditions de raccord sont donc bien posées, et seront utilisées dans la formulation du problème extérieur d'ordre 1. Notons cependant que, comme les champs de déplacement solution de (2.20) ne sont uniques qu'à une translation près, seule la différence entre ces deux translations est bien définie. Comme pour le problème intérieur d'ordre 0, la valeur exacte de ces translations sera déterminée par le problème extérieur d'ordre 1.

Remarque 2. *Dans le cas où la cellule élémentaire est homogène, la solution du problème intérieur à l'ordre 1 est triviale. On peut vérifier en effet que le champ de déplacement*

$$\hat{\boldsymbol{v}}^1(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = y_1 \varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}^0)(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{e}_1 + 2y_1 \varepsilon_{1\alpha}(\boldsymbol{u}^0)(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{e}_\alpha, \quad (2.22)$$

constitue l'unique solution (à une translation près) du système d'équations (2.20). D'après la relation de comportement du système (2.20), le champ de contrainte dans la cellule élémentaire est homogène, et égal à $\boldsymbol{\sigma}^0$.

Les problèmes élémentaires

Les paramètres de chargement de ce problème intérieur sont donc $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$ et $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$, qui sont respectivement la déformation membranaire de l'interface, et la contrainte exercée sur l'interface à l'ordre 0. Chacun de ces paramètres de chargement compte trois composantes indépendantes. On compte donc au total six modes de chargement indépendants de la cellule élémentaire. Comme ce problème est linéaire, le principe de superposition est valable. Il suffit donc de résoudre six problèmes élémentaires posés sur la cellule élémentaire \mathbb{Y} pour connaître son comportement quel que soit le chargement extérieur. Considérons tout d'abord les problèmes élémentaires associés aux forces exercées sur l'interface. On note \mathbf{V}^i et \mathbf{T}^i les champs de déplacement et de contrainte solution du $i^{\text{ème}}$ problème élémentaire, qui s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{T}^i = \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{V}^i) & \text{dans } \mathbb{Y} \\ \mathbf{div}_y(\mathbf{T}^i) = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{Y} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\delta}^i \\ \mathbf{V}^i \text{ et } \mathbf{T}^i \text{ sont } \mathbf{y}'\text{-périodiques} \end{cases} \quad (2.23)$$

Dans ces équations, $\boldsymbol{\delta}^i$ est le symbole de kronecker usuel, qui s'écrit en composantes δ_j^i , et qui vaut 1 si et seulement si $i = j$. De même, on note $\mathbf{W}^{\alpha\beta}$ et $\mathbf{S}^{\alpha\beta}$ les champs de déplacement et de contrainte solution du problème élémentaire $(\alpha\beta)$, associé aux déformations membranaires de la surface Γ , qui s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{S}^{\alpha\beta} = \mathbf{A} : (\mathbf{I}^{\alpha\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{W}^{\alpha\beta})) & \text{dans } \mathbb{Y} \\ \mathbf{div}_y(\mathbf{S}^{\alpha\beta}) = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{Y} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{S}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}^{\alpha\beta} \text{ et } \mathbf{S}^{\alpha\beta} \text{ sont } \mathbf{y}'\text{-périodiques} \end{cases} \quad (2.24)$$

Dans ce système, $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ est le tenseur du second ordre défini par $\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \boldsymbol{\delta}^\alpha \otimes_s \boldsymbol{\delta}^\beta$. Par symétrie du tenseur $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$, les problèmes $(\alpha\beta)$ et $(\beta\alpha)$ sont identiques, et il existe donc bien trois problèmes élémentaires indépendants associés aux déformations membranaires de l'interface.

Chacun des six problèmes élémentaires admet une solution unique pour le champ de déplacement, à une translation uniforme près. Pour bloquer cette translation, on peut imposer une contrainte arbitraire sur le déplacement d'ensemble. En utilisant les conditions de raccord du champ de déplacement (2.19), on peut imposer par exemple que la moyenne des limites en $\pm\infty$ soit nulle. Ceci revient à imposer simplement :

$$\begin{aligned} \lim_{y_1 \rightarrow \infty} (\mathbf{V}^i(y_1, \mathbf{y}') + \mathbf{V}^i(-y_1, \mathbf{y}')) &= \mathbf{0} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \infty} (\mathbf{W}^{\alpha\beta}(y_1, \mathbf{y}') + \mathbf{W}^{\alpha\beta}(-y_1, \mathbf{y}')) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

En utilisant ces solutions élémentaires, la solution générale du problème intérieur d'ordre 1 peut s'écrire

$$\tilde{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{V}^i(\mathbf{y})\sigma_{1i}^0(0, \mathbf{x}') + \mathbf{W}^{\alpha\beta}(\mathbf{y})\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^0)(0, \mathbf{x}') + \check{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}'), \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{T}^i(\mathbf{y})\sigma_{1i}^0(0, \mathbf{x}') + \mathbf{S}^{\alpha\beta}(\mathbf{y})\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^0)(0, \mathbf{x}'), \quad (2.26)$$

où la convention de sommation implicite est utilisée. Dans (2.25), $\check{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}')$ représente la translation qui reste inconnue à cette étape, et qui sera déterminée par le problème extérieur d'ordre 1.

Les grandeurs caractéristiques

On introduit à présent quelques grandeurs caractéristiques du comportement mécanique du problème intérieur, qui s'avèreront pertinentes dans la suite des développements. Intéressons-nous tout d'abord aux conditions de raccord en déplacement (2.19), qui s'écrivent :

$$\mathbf{u}^{1\pm} = \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} (\tilde{\mathbf{v}}^1 - y_1 \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_1 - 2y_1 \varepsilon_{1\alpha}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_\alpha)$$

Dans le problème extérieur d'ordre 1, le saut du champ de déplacement \mathbf{u}^1 à travers la surface Γ joue un rôle important. On introduit donc la grandeur $\mathbf{d}(\tilde{\mathbf{v}}^1) = \llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket / H$, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} H\mathbf{d}(\tilde{\mathbf{v}}^1) &= \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} (\tilde{\mathbf{v}}^1 - y_1 \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_1 - 2y_1 \varepsilon_{1\alpha}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_\alpha) \\ &\quad - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} (\tilde{\mathbf{v}}^1 - y_1 \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_1 - 2y_1 \varepsilon_{1\alpha}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_\alpha) \end{aligned} \quad (2.27)$$

La longueur H est ici introduite pour que \mathbf{d} soit un vecteur sans dimension.

Cette définition de \mathbf{d} fait intervenir des déformations non membranaires du problème d'ordre 0. On peut donc chercher à réexprimer cette relation en termes de $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$ et $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$. La relation de comportement dans le domaine extérieur à l'ordre 0 s'écrit $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$, d'où

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^0 \\ \sigma_{\alpha 1}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1111}^* & A_{11\beta 1}^* \\ A_{\alpha 111}^* & A_{\alpha 1\beta 1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^0) \\ 2\varepsilon_{\beta 1}(\mathbf{u}^0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11\gamma\delta}^* \varepsilon_{\gamma\delta}(\mathbf{u}^0) \\ A_{\alpha 1\gamma\delta}^* \varepsilon_{\gamma\delta}(\mathbf{u}^0) \end{pmatrix}.$$

Si l'on introduit le tenseur symétrique du second ordre \mathbf{C}^m , inverse du tenseur $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}^m \cdot \mathbf{e}_1$, on peut inverser la relation précédente pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^0) \\ 2\varepsilon_{\delta 1}(\mathbf{u}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^m & C_{1\gamma}^m \\ C_{\delta 1}^m & C_{\delta\gamma}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^0 - A_{11\alpha\beta}^* \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^0) \\ \sigma_{\gamma 1}^0 - A_{\gamma 1\alpha\beta}^* \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^0) \end{pmatrix}$$

Le second terme s'écrit en notation condensée $\mathbf{C}^m \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 - \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)) \cdot \mathbf{e}_1$. On peut donc réécrire (2.27) sous la forme :

$$\begin{aligned} H\mathbf{d}(\tilde{\mathbf{v}}^1) &= \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} (\tilde{\mathbf{v}}^1 - y_1 \mathbf{C}^m \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 - \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)) \cdot \mathbf{e}_1) \\ &\quad - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} (\tilde{\mathbf{v}}^1 - y_1 \mathbf{C}^m \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 - \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)) \cdot \mathbf{e}_1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Par linéarité de \mathbf{d} , on a immédiatement

$$\mathbf{d}(\hat{\mathbf{v}}^1) = \mathbf{d}(\mathbf{V}^i)\sigma_{1i}^0 + \mathbf{d}(\mathbf{W}^{\alpha\beta})\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^0), \quad (2.29)$$

avec

$$\begin{aligned} Hd(\mathbf{V}^i) &= \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} (\mathbf{V}^i(y_1, \mathbf{y}') - \mathbf{V}^i(-y_1, \mathbf{y}') - 2y_1 \mathbf{C}^m \cdot \boldsymbol{\delta}^i), \\ Hd(\mathbf{W}^{\alpha\beta}) &= \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} (\mathbf{W}^{\alpha\beta}(y_1, \mathbf{y}') - \mathbf{W}^{\alpha\beta}(-y_1, \mathbf{y}') + 2y_1 \mathbf{C}^m \cdot (\mathbf{A}^m : \mathbf{I}^{\alpha\beta}) \cdot \mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

On peut noter ici que \mathbf{d} ne dépend pas d'une éventuelle translation de la cellule de base. Cette grandeur caractéristique de la cellule élémentaire est donc entièrement déterminée par la résolution des problèmes élémentaires au sein de la cellule périodique.

Une autre grandeur caractéristique pertinente du comportement de la cellule élémentaire est la moyenne de $\boldsymbol{\tau}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0$ sur la cellule de base. On introduit donc la notation

$$\langle f \rangle_{\mathbb{Y}} = \frac{1}{H \text{ mesure}(\mathbb{Y})} \int_{\mathbb{Y}} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad (2.30)$$

où la longueur caractéristique H de la structure est introduite de sorte que $\langle f \rangle_{\mathbb{Y}}$ a la même dimension physique que f . Notons également que $\langle f \rangle_{\mathbb{Y}}$ est bien définie lorsque f décroît exponentiellement vers zéro avec $|y_1|$. On définit donc

$$\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\boldsymbol{\tau}^0) = \langle \boldsymbol{\tau}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle_{\mathbb{Y}}. \quad (2.31)$$

Comme $\boldsymbol{\tau}^0$ converge exponentiellement vers $\boldsymbol{\sigma}^0$ lorsque $|y_1| \rightarrow \infty$, la relation précédente est bien définie. Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ présente *a priori* six composantes indépendantes, mais on peut montrer que seules les composantes de membrane sont non nulles. En effet, en intégrant l'équation d'équilibre $\mathbf{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{0}$ sur \mathbb{Y} , et en utilisant la périodicité des champs $\boldsymbol{\tau}^0$ en \mathbf{y}' , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \langle \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Comme $\boldsymbol{\tau}^0$ tend vers $\boldsymbol{\sigma}^0$ à l'infini, on en déduit

$$\langle \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_{\mathbb{Y}}(y_1) = \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1, \quad \forall y_1 \in \mathbb{R}.$$

En intégrant par rapport à y_1 , on obtient le résultat escompté.

$$\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\boldsymbol{\tau}^0) \cdot \mathbf{e}_1 = \langle \boldsymbol{\tau}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle_{\mathbb{Y}} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

Ainsi, seules les composantes $\sigma_{\alpha\beta}^\Gamma$ du tenseur $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ sont non nulles. Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ s'interprète donc comme une contrainte de membrane, qui transite dans l'interface homogénéisée. Ceci apparaîtra plus clairement dans le problème extérieur d'ordre 1 détaillé dans la section suivante.

Exprimons à présent $\boldsymbol{\sigma}^0$ en fonction de $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$. Le lien est évident pour les composantes (1*i*). Pour les composantes membranaires ($\alpha\beta$) en revanche, on utilise la relation de comportement

$$\varepsilon_{\gamma\delta}(\mathbf{u}^0) = S_{\gamma\delta\alpha\beta}^m \sigma_{\alpha\beta}^0 + S_{\gamma\delta 11}^m \sigma_{11}^0 + 2 S_{\gamma\delta 1\theta}^m \sigma_{1\theta}^0,$$

avec S^m le tenseur de souplesse d'ordre 4 inverse de A^m . On peut alors inverser cette relation en

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = K_{\alpha\beta\gamma\delta}^m (\varepsilon_{\gamma\delta}(\mathbf{u}^0) - S_{\gamma\delta 11}^m \sigma_{11}^0 - 2 S_{\gamma\delta 1\theta}^m \sigma_{1\theta}^0),$$

où K^m est un tenseur d'ordre 4, de composantes $K_{\alpha\beta\gamma\delta}^m$, inverse du tenseur d'ordre 4 dont les composantes sont $S_{\alpha\beta\gamma\delta}^m$. En introduisant la relation précédente dans (2.31), on montre alors que, pour les problèmes élémentaires :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\mathbf{T}^1) &= \langle \mathbf{T}^1 - \boldsymbol{\delta}^1 \otimes_s \boldsymbol{\delta}^1 + K^m : S^m : (\boldsymbol{\delta}^1 \otimes_s \boldsymbol{\delta}^1) \rangle_{\mathbb{Y}} \\ \boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\mathbf{T}^\alpha) &= \langle \mathbf{T}^\alpha - 2 \boldsymbol{\delta}^1 \otimes_s \boldsymbol{\delta}^\alpha + 2 K^m : S^m : (\boldsymbol{\delta}^1 \otimes_s \boldsymbol{\delta}^\alpha) \rangle_{\mathbb{Y}} \\ \boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\mathbf{S}^{\alpha\beta}) &= \langle \mathbf{S}^{\alpha\beta} - K^m : \mathbf{I}^{\alpha\beta} \rangle_{\mathbb{Y}} \end{aligned}$$

Comme $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\boldsymbol{\tau}^0)$ est une fonction linéaire de son argument, on en déduit dans le cas général

$$\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\boldsymbol{\tau}^0) = \boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\mathbf{T}^i) \sigma_{1i}^0 + \boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\mathbf{S}^{\alpha\beta}) \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (2.33)$$

où l'on utilise la convention de sommation implicite.

Remarque 3. *Dans le cas où la cellule élémentaire est homogène, on peut calculer analytiquement le saut de déplacement et la contrainte membranaire. En utilisant le champ de déplacement (2.22) calculé pour la cellule homogène, et les conditions de raccord en déplacement (2.19), on démontre facilement que $\mathbf{d}(\hat{\mathbf{v}}^1) = \mathbf{0}$. De même comme le champ de contrainte est homogène et égal à $\boldsymbol{\sigma}^0$ dans la cellule élémentaire, d'après la définition (2.31), on a directement $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0}$.*

2.3.4 Le problème extérieur d'ordre 1

Les hétéronénéités n'apparaissent donc pas dans le comportement de la structure à l'ordre 0, mais elles ont une influence à l'ordre 1. L'objectif de cette section est de construire ce problème, et d'étudier l'influence des hétérogénéités sur la solution.

À l'ordre 1, la relation de comportement s'écrit $\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1)$ et l'équation d'équilibre $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^1) = \mathbf{0}$, ces deux relations étant valables dans $\Omega \setminus \Gamma$. Les conditions limite s'écrivent $\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur $\partial_F \Omega$ et $\mathbf{u}^1 = \mathbf{0}$ sur $\partial_u \Omega$. Pour compléter le système d'équations, il nous faut donc identifier de possibles conditions de saut à travers Γ . Comme pour le problème d'ordre 0, on utilise les conditions de raccord entre les problèmes intérieur et extérieur. À l'ordre 1, par définition de \mathbf{d} , le saut de déplacement est donné par :

$$\llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket(\mathbf{x}') = H \mathbf{d}(\hat{\mathbf{v}})(\mathbf{x}') \quad (2.34)$$

D'autre part, la condition de raccord en contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^{1\pm} = \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left(\boldsymbol{\tau}^1 - y_1 \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1} \right|^\pm \right)$$

En raison des propriétés de régularité du problème extérieur d'ordre 0 (2.17), la quantité $\partial \boldsymbol{\sigma}^0 / \partial x_1$ est continue à travers l'interface Γ . On peut donc identifier les limites à gauche et à droite de la surface :

$$\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1} \right|^+ (\mathbf{x}') = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1} \right|^+ (\mathbf{x}') = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1} (0, \mathbf{x}')$$

Le saut de contrainte est donc donné par

$$[[\boldsymbol{\sigma}^1]](\mathbf{x}') = \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \left(\boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{x}', y_1, \mathbf{y}') - \boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{x}', -y_1, \mathbf{y}') - 2y_1 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1} (0, \mathbf{x}') \right),$$

et, en moyennant sur la section transverse \mathbf{Y} de la cellule \mathbb{Y} , on obtient

$$[[\boldsymbol{\sigma}^1]](\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1 = \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \left(\langle \boldsymbol{\tau}^1 \rangle_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}', y_1) - \langle \boldsymbol{\tau}^1 \rangle_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}', -y_1) - 2y_1 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1} (0, \mathbf{x}') \right) \cdot \mathbf{e}_1. \quad (2.35)$$

En utilisant l'équation d'équilibre d'ordre 0

$$\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\tau}^0) + \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^1) + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0},$$

en intégrant sur le volume $[-y_1, y_1] \times \mathbf{Y}$ de la cellule \mathbb{Y} et en utilisant le théorème d'Ostrogradsky, on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\langle \boldsymbol{\tau}^1 \rangle_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}', y_1) - \langle \boldsymbol{\tau}^1 \rangle_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}', -y_1) \right) \cdot \mathbf{e}_1 \\ & + \int_{-y_1}^{y_1} \left(\langle \mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\tau}^0) \rangle_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}', y_1) + \langle \rho \rangle_{\mathbf{Y}}(y_1) \mathbf{g} \right) dy_1 = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

où l'on utilise la condition de périodicité de $\boldsymbol{\tau}^1$. En combinant (2.35) et (2.36), on obtient (les arguments des fonctions sont temporairement omis)

$$[[\boldsymbol{\sigma}^1]] \cdot \mathbf{e}_1 + \lim_{y_1 \rightarrow \infty} \int_{-y_1}^{y_1} \left\langle \mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\tau}^0) + \rho \mathbf{g} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_1 \right\rangle_{\mathbf{Y}} dy_1 = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Par définition de $\mathbf{div}_{x'}$, on a :

$$\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^0)$$

Avec l'équation d'équilibre d'ordre 0, $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0}$, on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_1 = -\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\sigma}^0) - \rho^m \mathbf{g}$$

En introduisant cette relation dans (2.37), on obtient :

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}^1 \rrbracket(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1 + H \operatorname{div}_{\mathbf{x}'} \langle \boldsymbol{\tau}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle_{\mathbb{Y}}(\mathbf{x}') + H \langle \rho - \rho^m \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

Enfin, en utilisant (2.11), (2.31) et (2.32), la relation précédente s'écrit :

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}^1 \rrbracket(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1 + H \operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{\Gamma}(\boldsymbol{\tau}^0)(\mathbf{x}') + H \langle \rho - \rho^m \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

Remarque 4. Cette équation peut s'interpréter comme une équation d'équilibre de la surface Γ , considérée comme une membrane : $H \boldsymbol{\sigma}^{\Gamma}(\boldsymbol{\tau}^0)$ est le tenseur des contraintes membranaires, $H \langle \rho - \rho^m \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g}$ est le poids de la membrane et $\llbracket \boldsymbol{\sigma}^1 \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1$ est la résultante des forces appliquées par le volume environnant sur la surface.

Pour compléter l'étude de ce problème, il faudrait identifier les effets de bord qui sont susceptibles d'apparaître sur le bord $\partial\Gamma$ de la surface d'hétérogénéités. Pour ce faire, il faudrait étudier en détails le comportement des hétérogénéités qui se situent sur ce bord. On pourrait ainsi démontrer que les contraintes membranaires transitant dans l'interface exercent une densité linéique de force sur le bord $\partial\Gamma$. Pour éviter d'étudier ce type d'effets, on supposera dans la suite des développements que $\partial\Gamma \subset \partial_u\Omega$. Les efforts linéiques qui apparaissent sur le bord de Γ sont ainsi repris par le bâti, et n'influent pas sur le comportement de la structure.

Le système complet d'équations pour le problème extérieur d'ordre 1 est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1) \quad \text{in } \Omega \setminus \Gamma \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^1) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \setminus \Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial_F\Omega \\ \mathbf{u}^1 = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial_u\Omega \\ \llbracket \mathbf{u}^1 \rrbracket = H \mathbf{d}(\boldsymbol{v}^1) \quad \text{sur } \Gamma \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}^1 \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 + H \operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{\Gamma}(\boldsymbol{\tau}^0) + H \langle \rho - \rho^m \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Les champs $\mathbf{d}(\boldsymbol{v}^1)$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\Gamma}(\boldsymbol{\tau}^0)$ qui interviennent dans les conditions de saut sont déterminés par (2.27) et (2.31). On constate que l'influence des hétérogénéités se traduit par un saut de déplacement \mathbf{d} et une contrainte membranaire $\boldsymbol{\sigma}^{\Gamma}$. En vertu de (2.29) et (2.33), tous deux mettent en jeu la déformation membranaire de la surface $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\mathbf{u}^0)$, la contrainte exercée sur la surface $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$, et les solutions $(\mathbf{V}^i, \mathbf{T}^i)$ et $(\mathbf{W}^{\alpha\beta}, \mathbf{S}^{\alpha\beta})$ des six problèmes élémentaires posés sur la cellule périodique \mathbb{Y} .

Remarque 5. Ce problème d'ordre 1 n'admet généralement pas de solution d'énergie finie. En effet, les conditions de saut à travers Γ créent plusieurs types de singularités au bord de la surface Γ . D'une part, le flux des contraintes membranaires qui débouche sur le bord $\partial\Gamma$ induit une densité linéique de forces qui s'exerce sur le domaine extérieur. D'autre part, le saut de déplacement n'est généralement pas nul au bord $\partial\Gamma$, ce qui est contradictoire avec la notion de milieu continu. Ces deux types d'effets créent des singularités d'énergie infinie au bord de Γ . Ces effets de bords singuliers, qui sortent du cadre de

la présente étude, ont été étudiés dans [32] en deux dimensions. On se focalisera dans la suite sur les problèmes élémentaires (2.23) et (2.24) et sur les conditions de saut (2.34) et (2.38).

Remarque 6. Lorsque le volume est entièrement homogène, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{A} = \mathbf{A}^m$ et $\rho = \rho^m$ partout, nous avons démontré dans la remarque 3 que le saut de déplacement et la contrainte membranaire sont nuls. Ainsi, la solution du problème d'ordre 1 est simplement $\mathbf{u}^1 = \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{0}$. De même, on pourrait démontrer que tous les termes suivants des développements asymptotiques disparaissent. Dans ce cas, \mathbf{u}^0 et $\boldsymbol{\sigma}^0$ sont les solutions exactes du problème réel.

2.4 Comportement effectif de l'interface

Dans cette section, on étudie en détails les conditions de transmission à l'interface, et l'on propose une interprétation du comportement effectif des hétérogénéités en termes d'une énergie de surface.

2.4.1 Propriétés des conditions de transmission

Nous avons démontré dans les sections précédentes que la surface d'hétérogénéités introduit à l'ordre 1 un saut de déplacement à travers la surface Γ , ainsi qu'un saut de contrainte lié à l'existence d'une contrainte membranaire transitant dans la surface. Ce saut de déplacement et cette contrainte membranaire sont liés à la déformation de membrane $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$ de la surface, ainsi qu'à l'effort $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$ exercé sur la surface à l'ordre 0. Les relations correspondantes (2.29) et (2.33) s'écrivent ainsi en composantes

$$d_i(\hat{\mathbf{v}}^1) = d_i(\mathbf{V}^j)\sigma_{1j}^0 + d_i(\mathbf{W}^{\gamma\delta})\varepsilon_{\gamma\delta}(\mathbf{u}^0), \quad (2.40)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^\Gamma(\boldsymbol{\tau}^0) = \sigma_{\alpha\beta}^\Gamma(\mathbf{T}^i)\sigma_{1i}^0 + \sigma_{\alpha\beta}^\Gamma(\mathbf{S}^{\gamma\delta})\varepsilon_{\gamma\delta}(\mathbf{u}^0), \quad (2.41)$$

où l'on utilise la convention de sommation implicite, où les indices latins varient de 1 à 3 et les indices grecs de 2 à 3. On peut réécrire ces relations de façon condensée en introduisant 4 tenseurs :

$$\mathbf{d}(\hat{\mathbf{v}}^1) = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) \quad (2.42)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) \quad (2.43)$$

Les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} , \mathbf{P} et \mathbf{N} sont respectivement d'ordre 2, 3, 3 et 4. Ils sont définis en composantes par :

$$L_{ij} = d_i(\mathbf{V}^j) \quad M_{i\alpha\beta} = d_i(\mathbf{W}^{\alpha\beta}) \quad (2.44)$$

$$P_{\alpha\beta i} = \sigma_{\alpha\beta}^\Gamma(\mathbf{T}^i) \quad N_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sigma_{\alpha\beta}^\Gamma(\mathbf{S}^{\gamma\delta}) \quad (2.45)$$

Les tenseurs \mathbf{M} et \mathbf{P} sont sans dimension, \mathbf{N} a la dimension d'une contrainte et \mathbf{L} la dimension de l'inverse d'une contrainte. En raison des symétries des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\boldsymbol{\tau}^0)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$, ces tenseurs présentent un certain nombre de symétries dites mineures :

$$M_{i\alpha\beta} = M_{i\beta\alpha} \quad P_{\alpha\beta i} = P_{\beta\alpha i}$$

$$N_{\alpha\beta\gamma\delta} = N_{\beta\alpha\gamma\delta} = N_{\alpha\beta\delta\gamma}$$

En raison de ces symétries mineures, les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} , \mathbf{P} et \mathbf{N} présentent chacun *a priori* 9 composantes indépendantes, ce qui représente au total 36 coefficients indépendants.

On se propose à présent d'introduire la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\tau}^0, \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{y}) : \mathbf{S}(\mathbf{y}) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbf{S}^m : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \rangle_{\mathbb{Y}} \quad (2.46)$$

Tous les champs dépendent ici implicitement de la variable \mathbf{x}' , et \mathbf{S} et \mathbf{S}^m sont les tenseurs de souplesse d'ordre 4, inverses des tenseurs de rigidité \mathbf{A} et \mathbf{A}^m . De plus, $\boldsymbol{\tau}^0$ (resp. $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0$) est le champ de contrainte dans la cellule périodique lorsque la contrainte dans le domaine extérieur, au voisinage de l'interface, est égale à $\boldsymbol{\sigma}^0$ (resp. $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$). Notons que l'intégrale sur la cellule périodique infinie \mathbb{Y} est ici bien définie, car $\boldsymbol{\tau}^0$ et $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0$ convergent exponentiellement respectivement vers $\boldsymbol{\sigma}^0$ et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$ lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$, et $\mathbf{S} = \mathbf{S}^m$ dès que l'on se trouve hors du domaine hétérogène.

Cette fonctionnelle peut s'interpréter comme l'énergie microscopique de la surface d'hétérogénéités : le premier terme $\boldsymbol{\tau}^0 : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0$ correspond à l'énergie mécanique microscopique du domaine intérieur, à laquelle on soustrait l'énergie mécanique $\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbf{S}^m : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$ portée par le domaine extérieur. On peut également définir cette fonctionnelle du point de vue du domaine extérieur, avec la proposition suivante.

Proposition 1. *Soient $\tilde{\mathbf{v}}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ (resp. $\tilde{\mathbf{v}}^1$ et $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0$) les champs de déplacement et de contraintes créés dans la cellule élémentaires par une contrainte d'interface $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$ et une déformation membranaire $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$ (resp. $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{e}_1$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^0)$). La fonctionnelle \mathcal{E} s'exprime alors en fonction du saut de déplacement et de la contrainte membranaire de la façon suivante :*

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\tau}^0, \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{d}(\tilde{\mathbf{v}}^1) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) : \boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0) \right) \quad (2.47)$$

On peut faire quelques commentaires sur ce résultat avant de le démontrer. Le premier terme de la somme correspond au travail des forces qui s'exercent sur l'interface lors de l'apparition d'un saut de déplacement, tandis que le second terme correspond au travail des contraintes membranaires lors d'une déformation de l'interface. La fonctionnelle \mathcal{E} peut donc s'interpréter du point de vue du domaine extérieur comme l'énergie mécanique cédée à la surface d'hétérogénéités.

Démonstration. Démontrons donc ce résultat à partir de la définition (2.46) de la fonctionnelle \mathcal{E} . En utilisant les relations de comportement d'ordre 0 dans le domaine intérieur

$\boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{A} : (\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1))$, et dans le domaine extérieur $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$, cette relation peut se mettre sous la forme :

$$2\mathcal{E}(\boldsymbol{\tau}^0, \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0) = \langle (\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1)) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \rangle_{\mathbb{Y}}$$

Par définition de $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$ (2.8), on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) = \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) + \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^0)\mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_1 + 2\varepsilon_{1\alpha}(\mathbf{u}^0)\mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_\alpha$$

En introduisant cette relation dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}(\boldsymbol{\tau}^0, \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0) &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) : (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0) \rangle_{\mathbb{Y}} \\ &\quad + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) : (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0) \rangle_{\mathbb{Y}} \\ &\quad + \langle (\boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) - \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^0)\mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_1 - 2\varepsilon_{1\alpha}(\mathbf{u}^0)\mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_\alpha) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \rangle_{\mathbb{Y}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Comme $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$ est homogène au sein de la cellule périodique, d'après la définition (2.31), le premier terme de cette somme s'écrit simplement $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) : \boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0)$. Le second terme de la somme peut être intégré par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Y}} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) : (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0) \, d\mathbf{y} &= \int_{\partial\mathbb{Y}} \hat{\mathbf{v}}^1 \cdot (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &\quad - \int_{\mathbb{Y}} \hat{\mathbf{v}}^1 \cdot \operatorname{div}_y (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

En vertu des conditions de périodicité, et de la convergence exponentielle de $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^0$ vers $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$ lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$, le premier terme est nul. De plus, d'après la condition d'équilibre d'ordre -1 dans le domaine intérieur $\operatorname{div}_y \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0 = \mathbf{0}$, le second terme est nul également. Le second terme de (2.48) est donc identiquement nul. Enfin, le dernier terme de (2.48) se met sous la forme $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \rangle_{\mathbb{Y}}$, où $\hat{\mathbf{v}}^1$ est définie par :

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - y_1 \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^0)(\mathbf{x}')\mathbf{e}_1 - 2y_1 \varepsilon_{1\alpha}(\mathbf{u}^0)(\mathbf{x}')\mathbf{e}_\alpha$$

Comme $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$ est homogène au sein de la cellule périodique, on peut intégrer ce dernier terme exactement, d'où

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \rangle_{\mathbb{Y}} = \frac{1}{H \operatorname{mesure}(\mathbb{Y})} \int_{\partial\mathbb{Y}} \hat{\mathbf{v}}^1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{n} \, dS$$

En vertu de la périodicité de $\hat{\mathbf{v}}^1$, comme $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$ est homogène dans la cellule, seules les faces de \mathbb{Y} situées en $y_1 = \pm\infty$ contribuent à cette intégrale. Avec la définition (2.27) de \mathbf{d} , on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \rangle_{\mathbb{Y}}(\mathbf{x}') &= \frac{1}{H} \lim_{y_1 \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}', y_1, \mathbf{y}') - \hat{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}', -y_1, \mathbf{y}')) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{d}(\hat{\mathbf{v}}^1)(\mathbf{x}') \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

L'introduction de ce dernier résultat dans (2.48) conclut la démonstration. \square

Finalement, on peut exprimer cette énergie d'interface en fonction des tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} , \mathbf{N} et \mathbf{P} , qui caractérisent le comportement effectif des hétérogénéités. Avec les relations (2.42), (2.43) et (2.47), on obtient simplement :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\boldsymbol{\tau}^0, \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0) &= \frac{1}{2} \left((\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) + (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) \right. \\ &\quad \left. + \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) : \mathbf{P} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{e}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^0) \right) \end{aligned}$$

Or on sait que, par construction, la forme bilinéaire \mathcal{E} est symétrique. Les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} , \mathbf{N} et \mathbf{P} présentent donc un certain nombre de symétries supplémentaires. Ces symétries sont dites majeures, car elles sont dues à l'existence d'une énergie mécanique élastique sous-jacente au comportement effectif de l'interface. En utilisant la relation précédente, ces conditions de symétrie s'écrivent en termes de composantes :

$$L_{ij} = L_{ji} \quad P_{\alpha\beta i} = -M_{i\alpha\beta} \quad N_{\alpha\beta\gamma\delta} = N_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (2.49)$$

Les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} présentent donc une symétrie supplémentaire, tandis que le tenseur \mathbf{P} est entièrement lié au tenseur \mathbf{M} . On peut donc éliminer le tenseur \mathbf{P} de nos équations. Avec ces nouvelles symétries, le nombre de composantes indépendantes des tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} devient respectivement 6, 9 et 6. Le comportement effectif des hétérogénéités est ainsi entièrement caractérisé par 21 coefficients indépendants dans le cas général. Naturellement, ce nombre peut être largement réduit si les hétérogénéités présentent des symétries à l'échelle locale. En tenant compte de ces symétries majeures, on peut réécrire l'énergie d'interface sous la forme suivante :

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\tau}^0, \tilde{\boldsymbol{\tau}}^0) = \frac{1}{2} \left((\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{L} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{e}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^0) \right) \quad (2.50)$$

De même, on peut réécrire les relations (2.42) et (2.43) sous la forme :

$$\mathbf{d}(\tilde{\mathbf{v}}^1) = \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) + \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\boldsymbol{\tau}^0) = -(\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) \quad (2.52)$$

Remarque 7. *Si la cellule périodique présente des symétries, le nombre de coefficients indépendants caractérisant le comportement effectif de l'interface diminue beaucoup. Par exemple, si les deux plans normaux aux vecteurs de base \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 sont des plans de symétrie, le comportement de l'interface est caractérisé par seulement 9 coefficients indépendants. Si, de plus, les hétérogénéités sont laissées invariantes par une rotation de $\pi/2$ autour de \mathbf{e}_1 , le nombre de coefficients indépendants est réduit à 6.*

2.4.2 Encadrement du comportement de l'interface

Formulation énergétique du problème intérieur

On se propose à présent de construire un encadrement du comportement effectif de l'interface. On étudie pour cela le problème mécanique intérieur d'ordre 1 (2.20) dans

une cellule élémentaire, et on le reformule en termes de minimisation d'une fonctionnelle énergétique. On rappelle que ce problème intérieur s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{A} : (\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1)) \quad \text{dans } \mathbb{Y} \\ \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbb{Y} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \hat{\mathbf{v}}^1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}^0 \quad \text{sont } \mathbf{y}'\text{-périodiques} \end{array} \right.$$

Les champs $\hat{\mathbf{v}}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^0$ sont des champs de déplacement et de contrainte dans la cellule élémentaire, qui sont généralement inhomogènes et dépendent donc de \mathbf{y} . Le chargement de ce problème mécanique intérieur est déterminé par $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$ et $\boldsymbol{\sigma}^0$, qui sont homogènes au sein de la cellule, et qui sont liés par la relation de comportement $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$. Comme la cellule est infinie dans la direction \mathbf{e}_1 , les champs de déplacement et de contrainte solution du système précédent n'appartiennent pas nécessairement aux espaces $H^1(\mathbb{Y})$ et $L^2(\mathbb{Y})$. De fait, comme évoqué dans la Section 2.3.3, les champs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1)$ et de contrainte $\boldsymbol{\tau}^0$ convergent exponentiellement vers une valeur finie lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$, et ne sont donc pas de carré sommable. On introduit donc le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}^1(\mathbf{y}) &= \hat{\mathbf{v}}^1(\mathbf{y}) - y_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{11}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_1 - 2y_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{1\alpha}(\mathbf{u}^0) \mathbf{e}_\alpha \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}^0(\mathbf{y}) &= \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\sigma}^0 \end{aligned}$$

D'après les résultats de la Section 2.3.3, le champ de contrainte $\hat{\boldsymbol{\tau}}^0$ converge exponentiellement vers $\mathbf{0}$ lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$. Il appartient donc à $L^2(\mathbb{Y})$. De même, le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1)$ converge exponentiellement vers $\mathbf{0}$, et appartient donc à $L^2(\mathbb{Y})$. On en déduit³ que le champ de déplacement $\hat{\mathbf{v}}^1$ appartient à $H^1(\mathbb{Y})$ ³. Comme évoqué dans la Remarque 2, ces champs de déplacement et de contrainte sont nuls si la cellule élémentaire est homogène. Ils s'interprètent donc comme des *correcteurs* des champs de déplacement et de contrainte, liés à la présence d'hétérogénéités dans la cellule élémentaire. En utilisant ces nouveaux champs, on peut reformuler le problème intérieur de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\tau}}^0 = (\mathbf{A} - \mathbf{A}^m) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) + \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) \quad \text{dans } \mathbb{Y} \\ \mathbf{div}_y(\hat{\boldsymbol{\tau}}^0) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbb{Y} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \hat{\boldsymbol{\tau}}^0 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{v}}^1 \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\tau}}^0 \quad \text{sont } \mathbf{y}'\text{-périodiques} \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Ce problème mécanique intérieur est un problème élastique en milieu infini avec précontrainte. Notons cependant que le terme de précontrainte $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^m) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$ n'est non-nul qu'au sein des hétérogénéités.

3. Il faut cependant noter que $\hat{\mathbf{v}}^1$ converge vers des valeurs finies en $y_1 = \pm\infty$, et n'est donc que localement de carré intégrable.

On souhaite à présent reformuler ce problème sous une forme énergétique. On introduit donc la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{v}}^1) = \frac{1}{2} \left\langle \left(\varepsilon_y(\hat{\mathbf{v}}^1) + \varepsilon_\Gamma(\mathbf{u}^0) \right) : \mathbf{A} : \left(\varepsilon_y(\hat{\mathbf{v}}^1) + \varepsilon_\Gamma(\mathbf{u}^0) \right) - \varepsilon(\mathbf{u}^0) : \mathbf{A}^m : \varepsilon(\mathbf{u}^0) \right\rangle_{\mathbb{Y}} - \mathbf{d}(\hat{\mathbf{v}}^1) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \quad (2.54)$$

On reconnaît dans le premier terme l'énergie d'interface \mathcal{E} définie dans la section précédente, et dans le second un travail échangé avec le volume entourant l'interface. En utilisant la définition (2.27) de $\mathbf{d}(\hat{\mathbf{v}}^1)$, cette fonctionnelle s'exprime de façon équivalente en termes de $\hat{\mathbf{v}}^1$:

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{v}}^1) = \frac{1}{2} \left\langle \left(\varepsilon_y(\hat{\mathbf{v}}^1) + \varepsilon(\mathbf{u}^0) \right) : \mathbf{A} : \left(\varepsilon_y(\hat{\mathbf{v}}^1) + \varepsilon(\mathbf{u}^0) \right) - \varepsilon(\mathbf{u}^0) : \mathbf{A}^m : \varepsilon(\mathbf{u}^0) \right\rangle_{\mathbb{Y}} - \left(\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \quad (2.55)$$

Le premier terme de cette fonctionnelle est fini si et seulement si le champ de déplacement $\hat{\mathbf{v}}^1$ appartient à l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{Y})^3$. Par ailleurs, on peut démontrer que si $\hat{\mathbf{v}}^1 \in H^1(\mathbb{Y})^3$, alors $\hat{\mathbf{v}}^1$ converge vers une translation uniforme lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$. Le second terme de la fonctionnelle est donc également fini. L'espace de définition de cette fonctionnelle est donc :

$$\mathcal{C}_{\mathbb{Y}} = \{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in H^1(\mathbb{Y})^3, \mathbf{w} \text{ est } \mathbf{y}'\text{-périodique} \}$$

On peut alors démontrer la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit $\varepsilon(\mathbf{u}^0)$ et $\boldsymbol{\sigma}^0$ des tenseurs symétriques du second ordre, liés par la relation de comportement $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \varepsilon(\mathbf{u}^0)$. Résoudre le système d'équations (2.53) dans la cellule périodique \mathbb{Y} revient à chercher le minimum de la fonctionnelle $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{v}}^1)$ sur l'espace $\mathcal{C}_{\mathbb{Y}}$. De plus, ce minimum est unique à une translation près.*

Démonstration. Soit $(\hat{\mathbf{v}}^1, \hat{\boldsymbol{\tau}}^0)$ une solution du système (2.53). On cherche à démontrer que $\mathcal{L}'(\hat{\mathbf{v}}^1)(\mathbf{w}) = 0$, quel que soit $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}$, $\mathcal{L}'(\hat{\mathbf{v}}^1)$ étant la dérivée de Gâteaux de \mathcal{L} en $\hat{\mathbf{v}}^1$, c'est-à-dire la forme linéaire définie sur \mathcal{C} par $\mathcal{L}'(\hat{\mathbf{v}}^1)(\mathbf{w}) = \frac{d}{dh} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{v}}^1 + h\mathbf{w})|_{h=0}$. On a donc :

$$\mathcal{L}'(\hat{\mathbf{v}}^1)(\mathbf{w}) = \left\langle \varepsilon_y(\mathbf{w}) : \mathbf{A} : \left(\varepsilon_y(\hat{\mathbf{v}}^1) + \varepsilon(\mathbf{u}^0) \right) \right\rangle_{\mathbb{Y}} - \left(\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \mathbf{w} - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \mathbf{w} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}$$

En introduisant $\boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{A} : (\varepsilon_y(\hat{\mathbf{v}}^1) + \varepsilon(\mathbf{u}^0))$, et en intégrant par parties le premier terme, on obtient :

$$\mathcal{L}'(\hat{\mathbf{v}}^1)(\mathbf{w}) = \int_{\partial\mathbb{Y}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{n} \, dS - \left(\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \mathbf{w} - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \mathbf{w} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 - \int_{\mathbb{Y}} \mathbf{w} \cdot \operatorname{div}_y \boldsymbol{\tau}^0 \, dy$$

En utilisant la périodicité des champs \mathbf{w} et $\boldsymbol{\tau}^0$, et en introduisant le correcteur en contrainte $\hat{\boldsymbol{\tau}}^0 = \boldsymbol{\tau}^0 - \boldsymbol{\sigma}^0$, ceci s'écrit :

$$\mathcal{L}'(\hat{\mathbf{v}}^1)(\mathbf{w}) = \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \mathbf{w} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}^0 \cdot \mathbf{e}_1 - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \mathbf{w} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}^0 \cdot \mathbf{e}_1 - \int_{\mathbb{Y}} \mathbf{w} \cdot \operatorname{div}_y \hat{\boldsymbol{\tau}}^0 \, d\mathbf{y}$$

En utilisant les équations d'équilibre du système (2.53), comme \mathbf{w} est borné dans \mathbb{Y} , on obtient directement $\mathcal{L}'(\hat{\mathbf{v}}^1)(\mathbf{w}) = 0$. Toute solution du système d'équations (2.53) est donc un point stationnaire de la fonctionnelle \mathcal{L} . Réciproquement, on peut démontrer de la même manière que tout point stationnaire de cette fonctionnelle est une solution du système (2.53). Les deux problèmes sont donc équivalents. Enfin, cette fonctionnelle est convexe de son argument, et même strictement convexe si l'on identifie les champs de déplacement identiques à une translation près. Comme cette fonctionnelle est coercive sur son domaine de définition, et que ce domaine n'est pas vide, son minimum existe et est unique. \square

Introduction d'une énergie complémentaire

Nous avons donc reformulé le problème mécanique sur la cellule élémentaire (2.53) en termes d'une minimisation de la fonctionnelle énergétique \mathcal{L} sur l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles. On souhaite à présent construire la formulation duale, qui consiste à minimiser une fonctionnelle complémentaire sur l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles. Pour cela, on utilise la transformée de Legendre-Fenchel, qui permet de reformuler une fonction en termes de la quantité duale de son argument. Considérons par exemple l'énergie interne volumique e_i définie par :

$$e_i(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)) : \mathbf{A} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0))$$

On peut alors définir une énergie duale e_i^* par :

$$e_i^*(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)) : \mathbf{A} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)) \right)$$

Comme e_i est une fonction strictement convexe et coercive, la borne supérieure est atteinte en un unique point, qui est $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{A} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0))$. On obtient donc :

$$e_i^*(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$$

Dans cette relation, \mathbf{S} est le tenseur de souplesse, inverse du tenseur \mathbf{A} . Notons que cette énergie duale est également convexe. Comme l'énergie interne e_i est convexe, on peut l'exprimer via la transformée de Legendre-Fenchel inverse :

$$e_i(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \right)$$

Cette transformée nous permet de reformuler le problème du minimum de la fonctionnelle \mathcal{L} . En introduisant cette dernière relation dans (2.55), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{v}}^1) = & \left\langle \sup_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)) - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \right) \right\rangle_{\mathbb{Y}} \\ & - \left(\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Au lieu de chercher la borne supérieure sur la contrainte $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ ponctuellement, on peut la chercher sur tous les champs de contrainte $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})$ appartenant à un espace qui reste à préciser. On écrit donc formellement :

$$\begin{aligned} \inf_{\hat{\mathbf{v}}^1 \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{v}}^1) = & \inf_{\hat{\mathbf{v}}^1 \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}} \sup_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})} \left\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)) - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \right\rangle_{\mathbb{Y}} \\ & - \left(\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Si l'on admet que l'on peut permuter la recherche des bornes inférieure et supérieure (voir Ekeland et Témam [6]), on obtient :

$$\begin{aligned} \inf_{\hat{\mathbf{v}}^1 \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{v}}^1) = & \sup_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})} \inf_{\hat{\mathbf{v}}^1 \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}} \left(\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) \rangle_{\mathbb{Y}} - \left(\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \right) \\ & + \left\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \right\rangle_{\mathbb{Y}} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dans cette relation, les termes de la première ligne dépendent linéairement de $\hat{\mathbf{v}}^1$, tandis que ceux de la seconde n'en dépendent pas. Par conséquent, par linéarité de $\mathcal{C}_{\mathbb{Y}}$, tous les champs $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})$ pour lesquels la première ligne n'est pas nulle correspondent à une borne inférieure égale à $-\infty$, et ne sont donc pas pertinents dans la recherche de la borne supérieure. On s'intéresse donc uniquement aux champs de contrainte $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ qui vérifient :

$$0 = \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) \rangle_{\mathbb{Y}} - \left(\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}$$

En intégrant par partie le premier terme, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{H \text{ mesure}(\mathbb{Y})} \int_{\partial \mathbb{Y}} \hat{\mathbf{v}}^1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n} \, dS - \left(\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \hat{\mathbf{v}}^1 \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \\ & - \frac{1}{H \text{ mesure}(\mathbb{Y})} \int_{\mathbb{Y}} \hat{\mathbf{v}}^1 \cdot \mathbf{div}_y \tilde{\boldsymbol{\tau}} \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Pour que cette somme soit nulle quel que soit le champ de déplacement $\hat{\mathbf{v}}$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{Y}}$, il faut que les termes volumiques et surfaciques soient nuls indépendamment. On en déduit trois conditions sur le champ de contraintes $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$. Tout d'abord, pour que l'intégrale volumique soit nulle, on doit avoir $\mathbf{div}_y \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}$ dans tout le volume. Par ailleurs, pour que l'intégrale

de bord soit nulle, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ doit être \mathbf{y}' -périodique, et doit converger vers $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$ lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$. Sous ces trois conditions, la relation (2.56) s'écrit :

$$\begin{aligned} \inf_{\hat{\boldsymbol{v}}^1 \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}} \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{v}}^1) &= \sup_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})} \left\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \right\rangle_{\mathbb{Y}} \\ &= - \inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})} \left\langle \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbf{S}^m : \boldsymbol{\sigma}^0 - (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\sigma}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \right\rangle_{\mathbb{Y}} \end{aligned}$$

Cette dernière relation est bien définie si et seulement si $\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\sigma}^0$ appartient à $L^2(\mathbb{Y})$. On peut donc définir l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles $\mathcal{C}_{\mathbb{Y}}^*$ par :

$$\mathcal{C}_{\mathbb{Y}}^* = \left\{ \boldsymbol{\tau} \mid (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}^0) \in L^2(\mathbb{Y})^6, \tau_{ij} = \tau_{ji}, \mathbf{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1, \right. \\ \left. \boldsymbol{\tau} \text{ est } \mathbf{y}'\text{-périodique} \right\}$$

On a alors

$$\inf_{\hat{\boldsymbol{v}}^1 \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}} \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{v}}^1) = - \inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}^*} \mathcal{L}^*(\tilde{\boldsymbol{\tau}}),$$

où \mathcal{L}^* est la fonctionnelle duale de \mathcal{L} , définie sur $\mathcal{C}_{\mathbb{Y}}^*$ par :

$$\mathcal{L}^*(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \left\langle \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbf{S}^m : \boldsymbol{\sigma}^0 - (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\sigma}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \right\rangle_{\mathbb{Y}}$$

Notons que comme $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ est en équilibre, on a $\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle_{\mathbb{Y}} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, d'où :

$$\mathcal{L}^*(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \frac{1}{2} \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbf{S}^m : \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle_{\mathbb{Y}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\mathbf{u}^0) \quad (2.57)$$

Cette relation s'interprète assez simplement. Le premier terme correspond à l'énergie interne \mathcal{E} de l'interface, définie dans la section précédente. Elle se compose de l'énergie mécanique microscopique de la cellule, à laquelle on retranche l'énergie mécanique portée par le volume de part et d'autre de l'interface. Notons que ces deux quantités sont infinies, mais que leur différence est finie. Le second terme quant à lui correspond à un travail, dû au fait que l'on impose la déformation membranaire $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\mathbf{u}^0)$ de l'interface.

On peut noter que la fonctionnelle \mathcal{L}^* est strictement convexe de son argument. Comme elle est coercive, et définie sur un ensemble non vide, elle présente un unique minimum, et on a :

$$\boldsymbol{\tau}^0 = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Y}}^*} \mathcal{L}^*(\tilde{\boldsymbol{\tau}})$$

Construction de l'encadrement

Nous avons donc reformulé le problème mécanique intérieur (2.53) en termes de minimisation d'une fonctionnelle \mathcal{L} sur l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles $\mathcal{C}_{\mathbb{Y}}$, et en terme de minimisation d'une fonctionnelle duale \mathcal{L}^* sur

l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles \mathcal{C}^* . Ces deux formulations vont nous permettre de construire un encadrement du comportement de l'interface.

Intéressons-nous tout d'abord à la minimisation de la fonctionnelle primale \mathcal{L} . Comme le champ de déplacement réel $\hat{\boldsymbol{v}}^1$ est un minimiseur de \mathcal{L} , et que le champ de déplacement uniformément nul est un champ de déplacement admissible, on a :

$$\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{v}}^1) \leq \mathcal{L}(\mathbf{0})$$

En utilisant la définition (2.54) de la fonctionnelle \mathcal{L} et les expressions (2.50) et (2.51) de l'énergie d'interface \mathcal{E} et du saut de déplacement \boldsymbol{d} , le premier terme de cette inégalité s'écrit :

$$\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{v}}^1) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) - (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0)$$

D'autre part, en utilisant la relation (2.55), $\mathcal{L}(\mathbf{0})$ s'écrit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^0) : \langle \mathbf{A} - \mathbf{A}^m \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^0)$$

En reportant ces deux relations dans l'inégalité précédente, on obtient directement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) - (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) \\ \leq \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^0) : \langle \mathbf{A} - \mathbf{A}^m \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^0) \end{aligned} \quad (2.58)$$

On peut procéder de même pour la fonctionnelle duale \mathcal{L}^* . Dans ce cas, le champ de contrainte réel $\boldsymbol{\tau}^0$ est l'unique minimiseur de \mathcal{L}^* . Comme d'autre part le champ de contrainte uniforme $\boldsymbol{\sigma}^0$ est un champ de contrainte admissible, on a :

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\tau}^0) \leq \mathcal{L}^*(\boldsymbol{\sigma}^0)$$

En utilisant la définition (2.57) de la fonctionnelle \mathcal{L}^* , et les expressions (2.50) et (2.52) de l'énergie d'interface \mathcal{E} et de la contrainte membranaire $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$, le premier terme s'écrit :

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\tau}^0) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) + (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0)$$

D'autre part, en utilisant la même définition (2.57), $\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\sigma}^0)$ s'écrit :

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\sigma}^0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^0 : \langle \mathbf{S} - \mathbf{S}^m \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\sigma}^0$$

En introduisant ces deux relations dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) + (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\boldsymbol{u}^0) \\ \leq \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^0 : \langle \mathbf{S} - \mathbf{S}^m \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\sigma}^0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Les inégalités (2.58) et (2.59) sont valables pour tous les types d'hétérogénéités, et pour tout chargement extérieur $(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0), \boldsymbol{\sigma}^0)$ vérifiant la relation de comportement $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$. Sous leur forme générale, ces inégalités ne sont pas très explicites. Pour leur donner plus de sens, on peut s'intéresser à la forme de ces inégalités dans certains cas. Ainsi, si l'on considère une situation où $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) = \mathbf{0}$, les inégalités (2.58) et (2.59) s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} -(\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) &\leq \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) : \langle \mathbf{A} - \mathbf{A}^m \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \\ (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) &\leq \boldsymbol{\sigma}^0 : \langle \mathbf{S} - \mathbf{S}^m \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\sigma}^0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi un encadrement du tenseur \mathbf{L} :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) : \langle \mathbf{A}^m - \mathbf{A} \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \leq (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1) \leq \boldsymbol{\sigma}^0 : \langle \mathbf{S} - \mathbf{S}^m \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (2.60)$$

De même, si l'on considère le cas où $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, on obtient un encadrement du tenseur \mathbf{N} :

$$\boldsymbol{\sigma}^0 : \langle \mathbf{S}^m - \mathbf{S} \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\sigma}^0 \leq \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) \leq \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) : \langle \mathbf{A} - \mathbf{A}^m \rangle_{\mathbb{Y}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \quad (2.61)$$

Remarque 8. *Cet encadrement du comportement de l'interface est très semblable à celui qui est obtenu classiquement en homogénéisation tridimensionnelle. On démontre en effet par le même type d'arguments que le comportement homogénéisé \mathbf{A}^h d'une microstructure tridimensionnelle est inférieur à l'estimateur dit de Voigt, qui est une moyenne de la rigidité sur la cellule élémentaire, et supérieur à l'estimateur dit de Reuss, qui correspond à la moyenne de la souplesse sur la cellule élémentaire :*

$$(\langle \mathbf{A}^{-1} \rangle)^{-1} \leq \mathbf{A}^h \leq \langle \mathbf{A} \rangle$$

Interprétation de l'encadrement des tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N}

Ces inégalités présentent plusieurs intérêts. Tout d'abord, comme le comportement effectif des hétérogénéités est entièrement caractérisé par les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} , l'encadrement de ces tenseurs permet de borner l'influence de ces hétérogénéités sur le comportement global de la structure. Ainsi, si le comportement dans la cellule élémentaire \mathbb{Y} est homogène, les encadrements (2.60) et (2.61) impliquent que les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} sont nuls : les *hétérogénéités* n'ont aucune influence sur le comportement de la structure. Plus généralement, plus le comportement des hétérogénéités dans la cellule élémentaire est *proche* du comportement de la matrice, plus les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} sont faibles, et donc moins les hétérogénéités ont d'influence sur la structure.

De plus, ces inégalités permettent généralement de prédire le signe des tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} , et donc le caractère positif ou négatif de l'énergie d'interface. Supposons par exemple que les hétérogénéités se composent de simples inclusions homogènes, de géométrie quelconque, et que les comportements élastiques de la matrice et de l'inclusion sont isotropes. Supposons également que les coefficients de Poisson de la matrice et de l'inclusion sont identiques, et que le module d'Young de l'inclusion est supérieur à celui de la matrice. Dans ce cas, le tenseur $\langle \mathbf{A} - \mathbf{A}^m \rangle_{\mathbb{Y}}$ est positif quelle que soit la géométrie de l'inclusion,

tandis que le tenseur $\langle \mathbf{S} - \mathbf{S}^m \rangle_{\mathbb{Y}}$ est négatif. En reportant ceci dans les inégalités (2.60) et (2.61), on démontre que le tenseur \mathbf{N} est positif, tandis que le tenseur \mathbf{L} est négatif. Inversement, si le module d'Young de l'inclusion est plus faible que celui de la matrice, on démontre de même que le tenseur \mathbf{L} est positif, tandis que le tenseur \mathbf{N} est négatif. En d'autres termes, il semble que l'énergie de l'interface ne puisse jamais être définie positive, quels que soient la géométrie de l'inclusion et son comportement. Nous verrons pourtant dans la suite des développements que le signe de ces tenseurs a une grande importance dans la stabilité du comportement effectif des hétérogénéités.

2.4.3 Le comportement effectif des hétérogénéités à l'ordre 1

Dans la section 2.3, nous avons développé une résolution itérative du problème complet, où nous résolvons alternativement les équations de la mécanique dans les domaines intérieurs et extérieurs. En pratique, cette méthode peut être implantée de la façon suivante :

1. On résout les six problèmes élémentaires (2.23) et (2.24) dans le domaine intérieur. Ces problèmes sont résolus une fois pour toutes, et on en déduit les composantes des tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} .
2. On résout le problème extérieur d'ordre 0 (2.17), dans lequel les hétérogénéités n'apparaissent pas. On obtient les champs \mathbf{u}^0 et $\boldsymbol{\sigma}^0$ dans le domaine extérieur.
3. On extrait de ce problème la contrainte appliquée à l'interface $\boldsymbol{\sigma}^0(0, \mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_1$, ainsi que la déformation de l'interface $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\mathbf{u}^0)(0, \mathbf{x}')$. En utilisant les relations (2.51) et (2.52), on en déduit le saut de déplacement et la contrainte membranaire sur la surface Γ , qui constitueront le chargement du problème extérieur d'ordre 1.
4. Enfin, on résout le problème extérieur d'ordre 1 (2.39), qui constitue la correction des champs mécaniques dans le domaine extérieur, due à la présence des hétérogénéités.

Cette approche n'est pas vraiment satisfaisante pour plusieurs raisons. Premièrement, cela signifie qu'il faut résoudre deux fois un problème mécanique dans le domaine extérieur, la solution du premier fournissant les données du second. De plus, le chargement du problème extérieur d'ordre 1 (2.39) est lié à la divergence d'un flux d'interface, qui dépend lui-même de la déformation de la surface Γ . Les données du problème extérieur d'ordre 1 font donc intervenir des dérivées surfaciques du second ordre, qui ne sont en général pas bien représentées par les modélisations numériques classiques. Enfin, le problème extérieur d'ordre 1 présente des effets de bords d'énergie infinie, qui rendent la simulation de ces problèmes délicate. Nous présentons donc ici une méthode qui permet d'échapper à ces problèmes. Elle consiste à construire un unique problème mécanique sur le domaine extérieur, qui est une combinaison des deux premiers problèmes mécaniques extérieurs, et dont la solution \mathbf{U}^{η} admet le même développement à l'ordre 1 en η que la solution du problème réel \mathbf{u}^{η} . Ce nouveau problème, posé sur le domaine extérieur, peut donc être vu comme un problème effectif, exact à l'ordre 1. On démontre que ce problème admet une formulation variationnelle, et que la solution \mathbf{U}^{η} constitue le point stationnaire d'une fonctionnelle énergétique. Cette énergie est la somme de l'énergie potentielle

usuelle, et d'une énergie de surface définie sur la surface Γ , qui traduit le comportement mécanique effectif des hétérogénéités.

Considérons donc le problème qui consiste à trouver le champ de déplacement \mathbf{U} et le champ de contrainte $\boldsymbol{\Sigma}$ solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \Omega \\ \mathbf{U} = \mathbf{u}^d & \text{sur } \partial_u \Omega \\ \llbracket \mathbf{U} \rrbracket = h \left(\mathbf{L} \cdot (\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1) + \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\overline{\mathbf{U}}) \right) & \text{sur } \Gamma \\ \llbracket \boldsymbol{\Sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 + h \operatorname{div}_\Gamma \left(-(\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\overline{\mathbf{U}}) \right) + h \langle \rho - \rho^m \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.62)$$

Notons que les sauts de \mathbf{U} et $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_1$ dépendent des valeurs moyennes de la contrainte normale et des déformations de membrane de l'interface, c'est-à-dire de $\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\overline{\mathbf{U}})$. Ces quantités sont en effet généralement discontinues au travers de l'interface. Comme $h = \eta H$, si l'on considère η comme un petit paramètre du modèle, la solution de (2.62) dépend de ce petit paramètre. En explicitant cette dépendance sous la forme $(\mathbf{U}^\eta, \boldsymbol{\Sigma}^\eta)$, supposons que la solution puisse être développée en termes de puissances de η comme suit :

$$\mathbf{U}^\eta = \sum_{i=0}^{\infty} \eta^i \mathbf{U}^i \quad \boldsymbol{\Sigma}^\eta = \sum_{i=0}^{\infty} \eta^i \boldsymbol{\Sigma}^i$$

En insérant ces développements dans le système d'équations ci-dessus, et en identifiant les différentes puissances de η , on obtient immédiatement que le système d'équations à l'ordre 0 est celui du problème extérieur (2.17) d'ordre 0. En particulier, on a $\llbracket \mathbf{U}^0 \rrbracket = \mathbf{0}$ et $\llbracket \boldsymbol{\Sigma}^0 \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ sur Γ . Ceci signifie que $\mathbf{U}^0 = \mathbf{u}^0$ et $\boldsymbol{\Sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0$. De la même manière, comme \mathbf{u}^0 et $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$ sont continus à travers Γ , on a $\overline{\mathbf{u}^0} = \mathbf{u}^0$ et $\overline{\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1} = \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$. Le système d'équations à l'ordre 1 est donc celui du problème extérieur (2.39), (2.51) et (2.52) d'ordre 1. On a ainsi $\mathbf{U}^1 = \mathbf{u}^1$ et $\boldsymbol{\Sigma}^1 = \boldsymbol{\sigma}^1$. Le couple $(\mathbf{U}^\eta, \boldsymbol{\Sigma}^\eta)$ admet donc le même développement jusqu'à l'ordre 1 en η que la solution $(\mathbf{u}^\eta, \boldsymbol{\sigma}^\eta)$ du problème réel (2.1). La solution de ce problème effectif constitue donc une estimation pertinente de la solution du problème réel. Notons cependant que les termes d'ordre supérieur du développement sont *a priori* différents. Le système d'équations (2.62) peut donc être interprété comme *un problème effectif exact à l'ordre 1*.

Au lieu de résoudre successivement des problèmes mécaniques à l'ordre 0 et à l'ordre 1, on peut donc se contenter de résoudre le problème effectif (2.62). Les avantages de cette formulation sont les suivants : (i) le problème mécanique porte sur un corps homogène, séparé en deux par une surface à travers laquelle les champs physiques sont discontinus, l'information relative à la nature des hétérogénéités étant portée par les conditions de transmission à travers l'interface ; (ii) le problème peut être résolu en une unique étape ; (iii) la solution de ce problème n'est pas singulière, et se trouve même plus régulière que celle du problème réel, comme souligné dans la section suivante ; (iv) l'implantation d'un tel problème dans un code éléments finis nécessite simplement le développement

d'éléments d'interface adaptés ; (v) le dernier avantage de cette formulation est qu'elle revient à chercher le point stationnaire d'une fonctionnelle énergétique, c'est-à-dire que le problème (2.62) est de type variationnel. La principale difficulté est que cette fonctionnelle énergétique est en général *non convexe*, car la positivité des tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} n'est pas garantie, comme démontré précédemment.

Remarque 9. *Notons que l'introduction de $\overline{\mathbf{U}}$ et $\overline{\mathbf{\Sigma}}$ dans le système d'équations (2.62) est assez arbitraire. Leur remplacement par $(\mathbf{U}^+, \mathbf{\Sigma}^+)$ ou $(\mathbf{U}^-, \mathbf{\Sigma}^-)$ dans (2.62) aboutit tout de même à une solution exacte à l'ordre 1 en η . En d'autres termes, il n'y a pas unicité du problème effectif exact à l'ordre 1. Le principal intérêt de l'introduction de $\overline{\mathbf{U}}$ et $\overline{\mathbf{\Sigma}}$ dans la formulation est qu'elle préserve une certaine symétrie entre les deux faces de la surface Γ .*

Remarque 10. *On pourrait démontrer que ce problème effectif est inchangé lorsque $\partial\Gamma \not\subset \partial_u\Omega$. En d'autres termes, et contrairement au problème extérieur d'ordre 1 (2.39), ce problème effectif ne présente pas d'effets de bord singuliers : la membrane n'induit pas de forces linéiques sur le bord $\partial\Gamma$ de la surface d'hétérogénéités, et le saut de déplacement au travers de Γ est également nul sur ce bord. La solution de ce problème effectif apparaît donc comme plus régulière que la solution du problème extérieur d'ordre 1, ce qui est une propriété très intéressante.*

Remarque 11. *Cette formulation est similaire à d'autres problèmes effectifs formulés dans des contextes très différents. Dans le domaine de la simulation des écoulements visqueux, plusieurs auteurs se sont intéressés à la formulation de conditions limite effectives pour des frontières irrégulières, ce qui donne lieu à des problèmes très similaires [33, 56]. Dans le domaine de la simulation des ondes, des équations similaires apparaissent dans la formulation de conditions limite absorbantes idéales [50, 54]. Ces conditions limites artificielles permettent de modéliser le comportement de milieux infinis pour un coût de calcul modéré.*

2.4.4 Formulation variationnelle du problème effectif exact à l'ordre 1

On montre dans cette section que le problème (2.62) est de type variationnel, c'est-à-dire que sa solution constitue le point stationnaire d'une fonctionnelle énergétique. On cherche donc à identifier une telle fonctionnelle, qui comprend une énergie définie sur la surface Γ . La forme de cette formulation dépend du caractère inversible du tenseur \mathbf{L} . On étudie tout d'abord le cas général où \mathbf{L} est inversible, avant de s'intéresser au cas d'un tenseur \mathbf{L} non-inversible.

Supposons donc que \mathbf{L} est inversible, et définissons l'ensemble \mathcal{C} des champs de déplacement cinématiquement admissibles par :

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \mid \mathbf{w} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3, (\overline{w_2}, \overline{w_3}) \in H^1(\Gamma)^2, \mathbf{w} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial_u\Omega \right\} \quad (2.63)$$

$H^1(D)$ constitue l'espace de Sobolev des fonctions qui appartiennent à $L^2(D)$, et dont la dérivée première au sens des distributions appartient également à $L^2(D)$. L'ensemble

\mathcal{C} est un espace affine, dont l'espace linéaire associé, noté \mathcal{C}_0 , est constitué des fonctions de même régularité que \mathcal{C} qui vérifient $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ sur $\partial_u \Omega$. Introduisons l'énergie potentielle \mathcal{P}_{eff} comme la fonctionnelle définie sur \mathcal{C} par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - h \int_{\Gamma} \langle \rho - \rho^* \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}' \\ &\quad + \frac{h}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{[\![\mathbf{w}]\!] }{h} - \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\bar{\mathbf{w}}) \right) \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\frac{[\![\mathbf{w}]\!] }{h} - \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\bar{\mathbf{w}}) \right) \, d\mathbf{x}' \\ &\quad + \frac{h}{2} \int_{\Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\bar{\mathbf{w}}) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\bar{\mathbf{w}}) \, d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (2.64)$$

Les hypothèses de régularité faites sur \mathbf{w} sont nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w})$ soit fini. Démontrons tout d'abord que $\mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w})$ est fini quel que soit $\mathbf{w} \in \mathcal{C}$. Comme $\mathbf{w} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3$, l'énergie élastique du volume $\Omega \setminus \Gamma$ est bien finie. D'autre part, pour que l'énergie élastique de la surface Γ soit finie, il suffit que $[\![\mathbf{w}]\!]$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{w}})$ appartiennent à $L^2(\Gamma)$. Comme \mathbf{w} appartient à $H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3$, les traces \mathbf{w}^+ et \mathbf{w}^- associées à \mathbf{w} de chaque côté de la surface Γ appartiennent à $H^{1/2}(\Gamma)$. Ceci assure que $[\![\mathbf{w}]\!] \in H^{1/2}(\Gamma)$, et comme on a $H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$, on a bien $[\![\mathbf{w}]\!] \in L^2(\Gamma)$. Par ailleurs, par définition de \mathcal{C} , on a $(\bar{w}_2, \bar{w}_3) \in H^1(\Gamma)^2$, et donc $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{w}}) \in L^2(\Gamma)$. $\mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w})$ est donc bien fini quel que soit $\mathbf{w} \in \mathcal{C}$. Réciproquement, si \mathbf{w} ne présente pas les régularités de \mathcal{C} , $\mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w})$ n'est pas fini.

Les trois premiers termes dans la définition de \mathcal{P}_{eff} sont les termes usuels de l'énergie potentielle d'un corps homogène élastique, tandis que les deux derniers constituent la contribution *effective* des hétérogénéités. En particulier, le dernier terme correspond à une énergie de surface élastique, et se compose de deux contributions : l'une est associée à un comportement d'interface élastique, dont la rigidité serait \mathbf{L}^{-1} , et la seconde est associée à un comportement élastique de membrane, dont la rigidité serait \mathbf{N} . Ces deux comportements sont couplés par le biais du tenseur \mathbf{M} , qui est généralement non nul. La particularité de cette formulation est que l'énergie de surface n'est pas nécessairement coercive, car les signes des tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} ne sont pas toujours positifs. Le signe de ces tenseurs dépend en effet de la rigidité relative des inclusions par rapport à la matrice. Démontrons à présent le résultat fondamental suivant :

Proposition 3. *Supposons que la frontière $\partial\Gamma$ de Γ est incluse dans la partie de frontière qui est encastrée, c'est-à-dire que $\partial\Gamma \subset \partial_u \Omega$, et supposons que le tenseur \mathbf{L} est inversible. Soit \mathbf{U} un champ de déplacement cinématiquement admissible, et $\boldsymbol{\Sigma}$ le champ des contraintes associé, c'est-à-dire $\mathbf{U} \in \mathcal{C}$ et $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})$. Alors, le couple $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Sigma})$ est solution du problème effectif exact à l'ordre 1 (2.62) si et seulement si \mathbf{U} rend stationnaire la fonctionnelle énergie \mathcal{P}_{eff} sur \mathcal{C} .*

Démonstration. La démonstration restera formelle, les questions de régularité sortant du domaine de notre étude. Soit $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Sigma})$ une solution du problème (2.62), avec $\mathbf{U} \in \mathcal{C}$. On cherche à démontrer que $\mathcal{P}'_{\text{eff}}(\mathbf{U})(\mathbf{w}) = 0$, quel que soit $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_0$, $\mathcal{P}'_{\text{eff}}(\mathbf{U})$ constituant la dérivée de Gâteaux de \mathcal{P}_{eff} en \mathbf{U} , c'est-à-dire la forme linéaire définie sur \mathcal{C}_0

par $\mathcal{P}'_{\text{eff}}(\mathbf{U})(\mathbf{w}) = \frac{d}{dh} \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{U} + h\mathbf{w})|_{h=0}$. On doit donc démontrer l'égalité variationnelle suivante :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dS \\
&\quad - \int_{\Omega} \rho^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - h \int_{\Gamma} \langle \rho - \rho^* \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}' \\
&\quad + h \int_{\Gamma} \left(\frac{\llbracket \mathbf{U} \rrbracket}{h} - \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{U}}) \right) \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\frac{\llbracket \mathbf{w} \rrbracket}{h} - \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{w}}) \right) \, d\mathbf{x}' \\
&\quad + h \int_{\Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{U}}) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{w}}) \, d\mathbf{x}' \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{C}_0
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Soit $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_0$. En multipliant l'équation d'équilibre de (2.62) par \mathbf{w} et en intégrant sur $\Omega \setminus \Gamma$, on obtient :

$$0 = - \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\mathbf{div} \boldsymbol{\Sigma} + \rho^* \mathbf{g}) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}$$

En intégrant par partie, et en utilisant le fait que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ sur $\partial_u \Omega$ et que $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$ sur $\partial_F \Omega$, on obtient :

$$0 = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dS - \int_{\Omega} \rho^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_1 \rrbracket \, d\mathbf{x}' \tag{2.66}$$

Comme le saut d'un produit de champs s'écrit $\llbracket fg \rrbracket = \llbracket f \rrbracket \bar{g} + \bar{f} \llbracket g \rrbracket$, l'intégrale sur Γ devient :

$$\int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{e}_1 \rrbracket \, d\mathbf{x}' = \int_{\Gamma} (\llbracket \mathbf{w} \rrbracket \cdot \overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1 + \overline{\mathbf{w}} \cdot \llbracket \boldsymbol{\Sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1) \, d\mathbf{x}'$$

En vertu des conditions de saut de $\boldsymbol{\Sigma}$ dans (2.62), la seconde partie de l'intégrale devient :

$$\int_{\Gamma} \overline{\mathbf{w}} \cdot \llbracket \boldsymbol{\Sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 \, d\mathbf{x}' = -h \int_{\Gamma} \mathbf{div}_{\Gamma} (-\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{U}})) \cdot \overline{\mathbf{w}} \, d\mathbf{x}' - h \int_{\Gamma} \langle \rho - \rho^m \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} \cdot \overline{\mathbf{w}} \, d\mathbf{x}'$$

En intégrant par parties le terme divergence, en utilisant l'hypothèse $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ sur $\partial_u \Omega$ et les symétries de \mathbf{N} , on obtient :

$$\int_{\Gamma} \overline{\mathbf{w}} \cdot \llbracket \boldsymbol{\Sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 \, d\mathbf{x}' = +h \int_{\Gamma} (-\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{M} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{U}}) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{w}}) \, d\mathbf{x}' - h \int_{\Gamma} \langle \rho - \rho^m \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} \cdot \overline{\mathbf{w}} \, d\mathbf{x}'$$

Ainsi, l'équation (2.66) devient :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dS - \int_{\Omega} \rho^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - h \int_{\Gamma} \langle \rho - \rho^* \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}' \\
&\quad + h \int_{\Gamma} \left((\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \left(\frac{\llbracket \mathbf{w} \rrbracket}{h} - \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{w}}) \right) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{U}}) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{w}}) \right) \, d\mathbf{x}'
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Comme \mathbf{L} est supposé inversible, la condition de saut sur \mathbf{U} de (2.62) se lit :

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\frac{\llbracket \mathbf{U} \rrbracket}{h} - \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}(\overline{\mathbf{U}}) \right) \tag{2.68}$$

L'insertion de (2.68) dans (2.67) donne (2.65), ce qui achève la démonstration de la première implication. Par ailleurs, la démonstration de la réciproque, c'est-à-dire que si $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Sigma})$ vérifie (2.65), alors $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Sigma})$ est solution de (2.62), ne présente pas de difficulté. \square

Remarque 12. *L'hypothèse que $\partial\Gamma \subset \partial_u\Omega$ joue un rôle important dans la démonstration de la proposition précédente, car elle permet d'éliminer les termes de bord dans l'intégration par parties du terme divergence sur Γ . Dans le cas général, il faudrait démontrer que cette densité linéique de forces apparaissant sur $\partial\Gamma$ est bien nulle (cf. remarque 10).*

Considérons à présent le cas où \mathbf{L} n'est pas inversible. Soit $\text{Ker } \mathbf{L}$ et $\text{Im } \mathbf{L}$ le noyau et l'image de l'opérateur \mathbf{L} . Comme \mathbf{L} est symétrique, la condition de saut de \mathbf{U} dans (2.62) implique que $\llbracket \mathbf{U} \rrbracket - h \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\overline{\mathbf{U}})$ doit appartenir à $\text{Im } \mathbf{L}$, et doit donc être orthogonal à $\text{Ker } \mathbf{L}$. Cette condition constitue une relation cinématique qui doit être introduite dans la définition de \mathcal{C} . Ainsi, \mathcal{C} est à présent défini par :

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3, (\overline{w_2}, \overline{w_3}) \in H^1(\Gamma)^2, \mathbf{w} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial_u\Omega, \right. \\ \left. \llbracket \mathbf{w} \rrbracket - h \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\overline{\mathbf{w}}) \in \text{Im } \mathbf{L} \text{ sur } \Gamma \right\}$$

La restriction $\tilde{\mathbf{L}}$ de \mathbf{L} à l'espace orthogonal de $\text{Ker } \mathbf{L}$ est inversible, et la condition de saut de \mathbf{U} dans (2.62) peut s'écrire :

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1 = \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \cdot \left(\frac{\llbracket \mathbf{U} \rrbracket}{h} - \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\overline{\mathbf{U}}) \right)$$

Comme la démonstration de la proposition 3 reste valable jusqu'à (2.68), cette proposition reste valable, pourvu que l'on remplace \mathbf{L}^{-1} par $\tilde{\mathbf{L}}^{-1}$ dans la définition de \mathcal{P}_{eff} .

Remarque 13. *Du point de vue mathématique, le fait que les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} puissent être négatifs a des conséquences importantes : (i) ni l'existence, ni l'unicité du point stationnaire de \mathcal{P}_{eff} sur \mathcal{C} n'est assurée ; (ii) un point stationnaire de \mathcal{P}_{eff} sur \mathcal{C} ne constitue pas nécessairement un minimum local de la fonctionnelle \mathcal{P}_{eff} , qui peut par ailleurs ne pas admettre de minimum du tout. Cependant, une analyse mathématique réalisée récemment par Bonnaillie-Noël et al. [41] dans un contexte simplifié suggère que, bien que (2.62) soit un problème de point selle, il admet généralement une unique solution, excepté pour un ensemble dénombrable de paramètres du modèle. Il reste cependant à vérifier que ce résultat reste vrai dans notre contexte.*

2.5 Applications du modèle

Nous avons construit un modèle d'interface homogénéisée, permettant d'identifier et de simuler le comportement mécanique effectif d'hétérogénéités périodiquement réparties sur une surface. Le point fort de ce modèle est qu'il permet de décrire le comportement d'une très grande variété d'hétérogénéités. On se propose donc d'appliquer ce modèle à

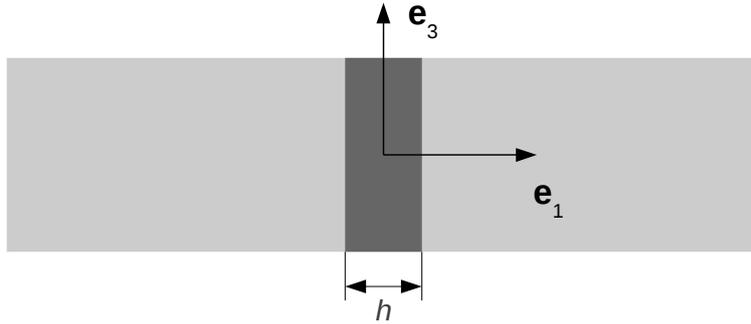


FIGURE 2.9 – Comportement mécanique asymptotique d’une couche mince homogène d’épaisseur h .

l’étude de différents exemples. On s’intéresse tout d’abord au cas très simple d’une couche homogène d’épaisseur constante, pour lequel le comportement effectif peut être calculé de façon analytique. On confronte ainsi notre modèle effectif à d’autres modèles étudiés précédemment dans la littérature. Ensuite, on étudie d’autres types d’hétérogénéités, pour lesquels les problèmes élémentaires n’admettent pas de solution analytique. On étudie en particulier le comportement d’un réseau de micro-fissures, d’inclusions élastiques sphériques, ainsi que de différents motifs d’armatures. Ces nombreux exemples permettent de souligner le large champ d’applications de ce modèle.

Dans les exemples considérés ci-dessous, on suppose que les hétérogénéités sont constituées de simples inclusions élastiques homogènes. On suppose également que les comportements élastiques de la matrice et de l’inclusion sont isotropes, de coefficients de Lamé respectifs (λ^m, μ^m) , (λ^i, μ^i) , ou, de façon équivalente, de modules d’Young et de coefficients de Poisson (E^m, ν^m) et (E^i, ν^i) . Ces coefficients satisfont les inégalités usuelles : $3\lambda^m + 2\mu^m > 0$, $\mu^m > 0$, $E^m > 0$, $-1 < \nu^m < 1/2$ pour la matrice, $3\lambda^i + 2\mu^i \geq 0$, $\mu^i \geq 0$, $E^i \geq 0$, $-1 \leq \nu^i \leq 1/2$ pour l’inclusion. Le cas limite $E^i = 0$ correspond au cas où l’hétérogénéité du matériau est due à des vides ou à des fissures dans la matrice. Ce type d’hétérogénéité n’a pas été pris en compte dans la construction de notre modèle effectif. On peut cependant démontrer qu’il aboutit au même type de comportement, sous réserve que les fissures ne séparent pas la matrice en deux parties disjointes (voir [62] pour plus de détails). Dans toute cette section, le comportement effectif des hétérogénéités sera essentiellement dicté par la différence entre les comportements élastiques de la matrice et de l’inclusion. La différence entre la valeur d’un coefficient élastique dans une inclusion et dans la matrice sera donc notée par un double crochet (par exemple $[[\mu]] = \mu^i - \mu^m$).

2.5.1 Couche homogène d’épaisseur constante

Comportement effectif exact à l’ordre 1

On s’intéresse ici au comportement d’une couche mince homogène, d’épaisseur constante $h = \eta H$, qui a été largement étudié dans la littérature (voir Figure 2.9). Les vecteurs

de périodicité (\mathbf{a}, \mathbf{b}) sont ici quelconques. On en déduit que les champs mécaniques doivent être invariants des coordonnées (y_2, y_3) . La cellule élémentaire peut donc être réduite à la droite réelle \mathbb{R} , l'inclusion se trouvant dans l'intervalle $(-H/2, +H/2)$. Les champs dans le domaine intérieur dépendent donc uniquement de la coordonnée y_1 , et l'on a :

$$(\lambda(y_1), \mu(y_1)) = \begin{cases} (\lambda^m, \mu^m) & \text{if } |y_1| > H/2 \\ (\lambda^i, \mu^i) & \text{if } |y_1| < H/2 \end{cases}$$

Les solutions des 6 problèmes élémentaires (2.23) et (2.24) peuvent être calculées de façon analytique. En particulier, dans le problème (2.23), l'équation d'équilibre s'écrit $\partial \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{e}_1 / \partial y_1 = \mathbf{0}$. Avec la condition de raccord en contrainte $\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\delta}^i$, on obtient immédiatement $\mathbf{T}^i \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\delta}^i$ uniformément dans la cellule. Par ailleurs, comme les champs ne dépendent que de la variable y_1 , on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{V}^i) = \frac{\partial V_1^i}{\partial y_1} \mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_1 + \frac{\partial V_\alpha^i}{\partial y_1} \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_1$$

Comme le comportement des matériaux est isotrope, la relation de comportement s'écrit $\mathbf{T}^i = \lambda \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{V}^i) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{V}^i)$, où $\mathbf{1}$ est le tenseur du second ordre de diagonale unité, de composantes $1_{ij} = \delta_j^i$. La relation de comportement s'écrit donc en termes de composantes :

$$\begin{aligned} T_{11}^i &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_1^i}{\partial y_1} = \delta_1^i \\ T_{1\alpha}^i &= \mu \frac{\partial V_\alpha^i}{\partial y_1} = \delta_\alpha^i \\ T_{\alpha\beta}^i &= \lambda \frac{\partial V_1^i}{\partial y_1} \end{aligned}$$

Notons que l'on omet ici la dépendance des champs à la variable y_1 . On démontre alors facilement que :

$$\mathbf{T}^i(y_1) = \delta_1^i \mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_1 + 2\delta_\alpha^i \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_1 + \begin{cases} \frac{\lambda^m}{\lambda^m + 2\mu^m} \delta_1^i \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_\alpha & \text{si } |y_1| > H/2 \\ \frac{\lambda^i}{\lambda^i + 2\mu^i} \delta_1^i \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_\alpha & \text{si } |y_1| < H/2 \end{cases}$$

Le champ de contrainte est donc homogène par morceaux. De même, la dérivée du champ de déplacement par rapport à la variable y_1 s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{V}^i}{\partial y_1}(y_1) = \begin{cases} \frac{\delta_1^i}{\lambda^m + 2\mu^m} \mathbf{e}_1 + \frac{\delta_\alpha^i}{\mu^m} \mathbf{e}_\alpha & \text{si } |y_1| > H/2 \\ \frac{\delta_1^i}{\lambda^i + 2\mu^i} \mathbf{e}_1 + \frac{\delta_\alpha^i}{\mu^i} \mathbf{e}_\alpha & \text{si } |y_1| < H/2 \end{cases}$$

Le champ de déplacement est donc linéaire par morceaux dans la cellule périodique. En utilisant la définition (2.44) du tenseur \mathbf{L} , et la définition (2.27) du saut de déplacement \mathbf{d} , on en déduit :

$$\mathbf{L} = \left[\frac{1}{\lambda + 2\mu} \right] \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \left[\frac{1}{\mu} \right] (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (2.69)$$

De même, avec la définition (2.45) du tenseur \mathbf{P} , la définition (2.31) de la contrainte de membrane $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ et la relation de symétrie majeure (2.49), on obtient l'expression du tenseur \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = - \left[\left[\frac{\nu}{1-\nu} \right] \right] \mathbf{e}_1 \otimes (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (2.70)$$

On peut résoudre de la même façon les problèmes élémentaires (2.24) associés aux déformations membranaires de l'interface. On démontre alors que les contraintes dans la cellule élémentaire sont :

$$S_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(y_1) = \begin{cases} \frac{2\mu^m\lambda^m}{\lambda^m+2\mu^m} \delta_\beta^\alpha \delta_\delta^\gamma + 2\mu^m I_{\alpha\beta\gamma\delta} & \text{si } |y_1| > H/2 \\ \frac{2\mu^i\lambda^i}{\lambda^i+2\mu^i} \delta_\beta^\alpha \delta_\delta^\gamma + 2\mu^i I_{\alpha\beta\gamma\delta} & \text{si } |y_1| < H/2 \end{cases}$$

Dans ces relations, $I_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta + \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta)$ est l'opérateur identité sur l'espace vectoriel des tenseurs symétriques du second ordre. Encore une fois, les champs de contrainte $\mathbf{S}^{\alpha\beta}$ sont constants par morceaux. En utilisant la définition (2.45) du tenseur \mathbf{N} et la définition (2.31) de la contrainte de membrane $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$, on obtient :

$$N_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left[\left[\frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu} \right] \right] \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + [2\mu] I_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.71)$$

Nous avons donc calculé l'expression analytique des tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} , qui caractérisent le comportement effectif de la couche homogène. Le tenseur \mathbf{L} est généralement inversible, sauf dans les cas particuliers où $[\lambda+2\mu] = 0$ ou $[\mu] = 0$. Dans le cas général, le signe de \mathbf{L} dépend du signe de ces coefficients. Le tenseur de couplage \mathbf{M} dépend uniquement des coefficients de Poisson des deux matériaux, et disparaît lorsque l'inclusion et la matrice présentent le même coefficient de Poisson. Le couplage entre le comportement de membrane et le comportement d'interface élastique peut donc s'interpréter comme un effet de Poisson. En revanche, le signe de \mathbf{N} n'est pas évident à ce stade. Notons également que, dans le cas où l'inclusion présente le même comportement que la matrice, les trois tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} sont nuls, ce qui signifie que le saut de déplacement et le saut de contrainte à travers l'interface sont nuls.

Considérons à présent le cas particulier où la matrice et l'inclusion ont le même coefficient de Poisson, c'est-à-dire quand $\nu^m = \nu^i = \nu \in (-1, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ tandis que les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} s'écrivent :

$$\mathbf{L} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \left[\left[\frac{1}{E} \right] \right] \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2(1+\nu) \left[\left[\frac{1}{E} \right] \right] (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$$

$$N_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{[E]}{1+\nu} \left(I_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right)$$

Dans ces expressions, \mathbf{L} et \mathbf{N} ont des signes opposés. Si $[E] > 0$, c'est-à-dire si l'inclusion est plus rigide que la matrice, \mathbf{N} est positif tandis que \mathbf{L} est négatif. Inversement, si l'inclusion est plus souple que la matrice, \mathbf{L} devient positif tandis que \mathbf{N} est négatif. On retrouve ici le résultat démontré précédemment dans la Section 2.4.2, qui suggère que le comportement effectif de l'interface n'est généralement pas stable.

Comportement limite d'une couche rigide

Il est également intéressant de démontrer que notre modèle est cohérent avec les autres modèles décrits classiquement dans la littérature pour des interfaces rigides ou souples. Cette démonstration ne peut qu'être formelle, dans la mesure où nous avons construit notre modèle sur l'hypothèse que le comportement des matériaux ne dépendait pas de η . Considérons tout d'abord le cas où l'inclusion est beaucoup plus rigide que la matrice, c'est-à-dire lorsque $E^i \gg E^m$. On peut alors introduire le rapport $\theta = E^m/E^i$ comme un petit paramètre sans dimension. Si l'on introduit $E^i = \theta^{-1}E^m$ dans (2.69–2.71), on constate que les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{M} restent bornés lorsque $\theta \rightarrow 0$, tandis que \mathbf{N} n'est pas borné. La partie divergente de \mathbf{N} s'écrit :

$$N_{\alpha\beta\gamma\delta} = \theta^{-1} \frac{E^m}{1+\nu^i} I_{\alpha\beta\gamma\delta} + \theta^{-1} \frac{E^m \nu^i}{(1+\nu^i)(1-\nu^i)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + O_{\theta=0}(\theta^0)$$

En d'autres termes, la contrainte membranaire devient prédominante sur le saut de déplacement. Formellement, si θ est de l'ordre de η , la contrainte de membrane apparaît à l'ordre 0 au lieu de l'ordre 1. De plus, la contrainte membranaire ne dépend que des composantes membranaires de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\bar{\mathbf{U}})$. Le saut de contraintes s'écrit alors :

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}^0 \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 + h \mathbf{div}_\Gamma \left(\frac{E^i}{1+\nu^i} \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0) + \frac{E^i \nu^i}{(1+\nu^i)(1-\nu^i)} \mathbf{div}_\Gamma(\mathbf{u}^0) (\mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes_s \mathbf{e}_3) \right) = \mathbf{0}$$

Dans ce cas, on peut construire un *modèle effectif, exact à l'ordre 0 en η* , où l'interface se comporte comme une membrane. L'énergie effective (2.64) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - h \int_{\Gamma} \langle \rho - \rho^* \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}' \\ &\quad + \frac{h E^i}{2(1+\nu^i)} \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{w}) + \frac{\nu^i}{1-\nu^i} (\mathbf{div}_{x'} \mathbf{w})^2 \right) d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

Les déplacements sont continus à travers Γ , et l'ensemble des champs cinématiquement admissibles devient :

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \mid \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3, (w_2, w_3) \in H^1(\Gamma)^2, \mathbf{w} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}$$

Ce modèle est cohérent avec le modèle dit *rigide* décrit dans la littérature [55, 36, 37], où la condition de transmission à travers l'interface est de type Ventcel.

Comportement limite d'une couche souple

Inversement, on peut considérer le cas où l'inclusion est beaucoup plus souple que la matrice. Ceci correspond au cas où $\theta \rightarrow \infty$. Suivant la démarche précédente, lorsque $\theta \rightarrow \infty$, \mathbf{M} et \mathbf{N} restent bornés, tandis que \mathbf{L} n'est pas borné :

$$\mathbf{L} = \frac{\theta(1+\nu^i)(1-2\nu^i)}{E^m(1-\nu^i)} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{2\theta(1+\nu^i)}{E^m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + O_{\theta \rightarrow \infty}(\theta^0)$$

En d'autres termes, le saut de déplacement devient prédominant sur la contrainte de membrane. Formellement, si θ est de l'ordre de η^{-1} , le saut de déplacement apparaît à l'ordre 0 au lieu de l'ordre 1. Qui plus est, ce saut de déplacement ne dépend que des forces appliquées sur l'interface $\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1$. Le saut de déplacement s'écrit donc :

$$\llbracket \mathbf{u}^0 \rrbracket = h \left(\frac{\sigma_{11}^0}{\lambda^i + 2\mu^i} \mathbf{e}_1 + \frac{\sigma_{12}^0}{\mu^i} \mathbf{e}_2 + \frac{\sigma_{13}^0}{\mu^i} \mathbf{e}_3 \right)$$

Dans ce cas, on peut construire un *modèle effectif, exact à l'ordre 0 en η* , dans lequel l'interface se comporte comme une interface élastique. Ainsi, l'énergie potentielle (2.64) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - h \int_{\Gamma} \langle \rho - \rho^* \rangle_{\mathbb{Y}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}' \\ &\quad + \frac{1}{2h} \int_{\Gamma} ((\lambda^i + 2\mu^i) \llbracket w_1 \rrbracket^2 + \mu^i \llbracket w_2 \rrbracket^2 + \mu^i \llbracket w_3 \rrbracket^2) \, d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

Comme cette fonctionnelle ne dépend pas des déformations membranaires de l'interface, l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles devient :

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \mid \mathbf{w} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3, \mathbf{w} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}$$

Ce modèle est cohérent avec le modèle dit *souple* décrit dans la littérature [36, 53], dans lequel l'interface est remplacée par une densité uniforme de ressorts. Notons que dans ces deux cas limites, la fonctionnelle retrouve son caractère défini positif, que l'on avait perdu dans le cas général.

2.5.2 Réseau orthogonal de fissures circulaires coplanaires

L'intérêt principal de cette formulation ne réside pas dans l'étude de couches homogène : elle permet de décrire une bien plus grande variété d'hétérogénéités. On peut s'intéresser par exemple au comportement d'un réseau de micro-fissures circulaires. Notons que, dans la construction de notre modèle effectif, nous avons explicitement exclu le cas où la rigidité du matériau est localement nulle dans la cellule élémentaire. Cependant, comme souligné dans une publication récente [62], l'étude de ce type d'hétérogénéités ne pose pas de difficultés, à condition que la matrice reste connectée à l'échelle de la cellule périodique. À cette restriction près, ce type d'hétérogénéités présente le même comportement effectif.

Supposons que les micro-fissures se situent dans le plan $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, et ont pour rayon rh , h étant la distance entre deux fissures voisines (voir Figure 2.10). Notre approche est valable tant que les micro-fissures ne séparent pas la structure en deux morceaux, ce qui impose $0 \leq r < 1/\sqrt{2}$. Les vecteurs de périodicité à l'échelle de la structure sont alors $\mathbf{a} = h\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{b} = h\mathbf{e}_3$. À l'échelle microscopique, la cellule élémentaire est $\mathbb{Y} =$

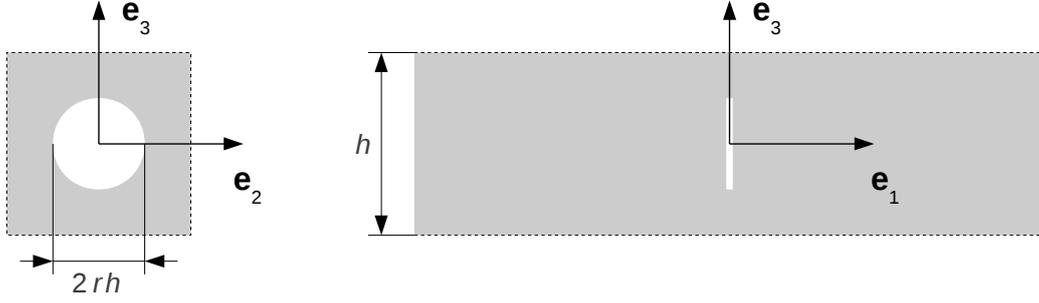


FIGURE 2.10 – Cas où les hétérogénéités sont constituées de micro-fissures circulaires, distribuées dans le plan $y_1 = 0$ selon un réseau orthogonal. Les pointillés représentent les plans de symétrie du motif périodique.

$\mathbb{R} \times (-H/2, H/2)^2$, et contient une fissure décrite par le disque $\mathcal{D} = \{(0, \mathbf{y}') \mid \|\mathbf{y}'\| < rH\}$, de vecteur normal unité \mathbf{e}_1 (voir Figure 2.10).

Les six problèmes élémentaires (2.23) et (2.24) doivent être légèrement modifiés en raison de la présence de la fissure. En particulier, les champs de déplacement \mathbf{V}^i et $\mathbf{W}^{\alpha\beta}$ sont susceptibles d'être discontinus à travers \mathcal{D} , et l'on ajoute une contrainte de bord libre $\mathbf{T}^i \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{S}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ sur les lèvres de la fissure. Ainsi, les problèmes élémentaires (2.23) liés à la contrainte d'interface $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{e}_1$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}^i = \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{V}^i) \quad \text{dans } \mathbb{Y} \\ \mathbf{div}_y(\mathbf{T}^i) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbb{Y} \\ \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \quad \text{sur } \mathcal{D} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\delta}^i \\ \mathbf{V}^i \text{ et } \mathbf{T}^i \text{ sont } \mathbf{y}'\text{-périodiques} \end{array} \right. \quad (2.72)$$

Tandis que ceux liés à la déformation membranaire de l'interface $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}^0)$ (2.24) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}^{\alpha\beta} = \mathbf{A} : (\mathbf{I}^{\alpha\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{W}^{\alpha\beta})) \quad \text{dans } \mathbb{Y} \\ \mathbf{div}_y(\mathbf{S}^{\alpha\beta}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbb{Y} \\ \mathbf{S}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \quad \text{sur } \mathcal{D} \\ \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{S}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}^{\alpha\beta} \text{ et } \mathbf{S}^{\alpha\beta} \text{ sont } \mathbf{y}'\text{-périodiques} \end{array} \right. \quad (2.73)$$

La solution de ce dernier système d'équations est triviale. En effet, comme la fissure est parallèle au plan Γ , elle n'est pas affectée par les déformations membranaires. On peut donc vérifier que le champ de déplacement

$$\mathbf{W}^{\alpha\beta}(\mathbf{y}) = -\frac{\lambda^m}{\lambda^m + 2\mu^m} \delta_\beta^\alpha y_1 \mathbf{e}_1, \quad (2.74)$$

est solution du système d'équations (2.73). En introduisant ce champ de déplacement dans la relation de comportement du système d'équations (2.73), on constate que $\mathbf{S}^{\alpha\beta}\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ dans toute la cellule. Les conditions limite en contrainte sont donc respectées. Comme d'autre part les champs de déplacement et de contrainte sont \mathbf{y}' -périodiques, le champ de déplacement (2.74) est l'unique solution du système (2.73), à une translation près. En utilisant les définitions (2.44) et (2.45) des tenseurs \mathbf{M} et \mathbf{N} , on démontre que les tenseurs \mathbf{M} et \mathbf{N} sont nuls. La surface Γ ne présente donc pas de rigidité de membrane.

En revanche, le tenseur \mathbf{L} est généralement non nul, mais on peut démontrer qu'il présente un certain nombre de symétries. En effet, comme la cellule de base est laissée invariante par les symétries par rapports aux plans $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, le tenseur \mathbf{L} doit présenter les mêmes invariances. On en déduit que tous les coefficients hors diagonale du tenseur \mathbf{L} sont nulles. Comme, de plus, la cellule périodique est laissée invariante par une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe \mathbf{e}_1 , on a également $L_{22} = L_{33}$. Le comportement effectif des micro-fissures est donc caractérisé par seulement deux coefficients indépendants, que sont L_{11} et $L_{22} = L_{33}$. Comme de plus E^m est le seul paramètre de rigidité du problème, on peut écrire le tenseur \mathbf{L} sous la forme suivante :

$$\mathbf{L} = \frac{s_t}{E^m} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{s_c}{E^m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$$

Dans cette relation, s_t et s_c sont des coefficients sans dimension, qui dépendent uniquement du coefficient de Poisson ν^m de la matrice, et du rapport r entre le rayon des fissures et leur distance mutuelle. On peut démontrer que s_t et s_c sont des fonctions positives croissantes de r , variant de 0 à $+\infty$ lorsque r varie de 0 à $1/\sqrt{2}$. Lorsque $r = 1/\sqrt{2}$, la fissure sépare la cellule élémentaire en deux parties, la matrice n'est plus connectée, et notre modèle n'est plus valable : la surface d'hétérogénéités devient une surface libre. Comme $\langle \rho - \rho^* \rangle_{\mathbb{Y}} = 0$, les conditions de saut dans (2.62) deviennent :

$$[[\mathbf{U}]] = h \frac{s_t}{E^m} \Sigma_{11} \mathbf{e}_1 + h \frac{s_c}{E^m} \Sigma_{\alpha 1} \mathbf{e}_\alpha \quad [[\boldsymbol{\Sigma}]] \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$

Ces conditions de saut correspondent à une condition de transmission de type Robin, où le saut de déplacement est proportionnel à la contrainte appliquée à l'interface. En d'autres termes, ce réseau de micro-fissures se comporte comme une densité surfacique de ressorts, dont les rigidités normales et tangentielles sont respectivement égales à $E^m/s_t h$ et $E^m/s_c h$. Notons cependant que le comportement effectif d'un réseau de micro-fissures ne se réduit pas toujours à un comportement d'interface élastique. D'autres exemples étudiés dans [62], où l'on modifie simplement l'orientation des fissures, montrent que le comportement effectif est généralement plus compliqué.

Suivant les résultats précédents, le potentiel effectif s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{v}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{E^m}{s_t h} [[v_1]]^2 + \frac{E^m}{s_c h} [[v_\alpha]] [[v_\alpha]] \right) \, d\mathbf{x}' \\ & - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dS - \int_{\Omega} \rho^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

En vertu de la positivité des coefficients s_t et s_c , cette fonctionnelle est strictement convexe. De plus, comme \mathbf{M} et \mathbf{N} sont nuls, \mathcal{P}_{eff} ne fait pas intervenir les déformations de membrane $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma$ de Γ , et $\mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{v})$ est fini si et seulement si \mathbf{v} appartient à $H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3$. De ce fait, l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles est simplement :

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3, \mathbf{v} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}$$

Comme \mathcal{P}_{eff} est coercif et (strictement) convexe sur \mathcal{C} , il existe un unique champ de déplacement \mathbf{U} qui rend stationnaire la fonctionnelle \mathcal{P}_{eff} sur \mathcal{C} . De plus, \mathbf{U} est le minimum global de \mathcal{P}_{eff} sur \mathcal{C} .

Le comportement effectif des fissures est caractérisé par les coefficients sans dimension (s_t, s_c) . À notre connaissance, il n'existe pas de solution analytique aux problèmes élémentaires (2.72). Ces coefficients doivent donc être calculés numériquement, en utilisant par exemple la méthode des éléments finis. Cependant, avant de résoudre numériquement les problèmes élémentaires (2.72), il est nécessaire de prendre quelques précautions. Premièrement, la solution des problèmes élémentaires n'est unique qu'à une translation près. Pour obtenir une solution numérique, il est donc nécessaire de bloquer cette translation. Ceci peut être réalisé simplement, en imposant le déplacement d'un unique noeud du maillage éléments finis, qui peut être choisi arbitrairement. Par ailleurs, la cellule élémentaire est infinie dans la direction \mathbf{e}_1 , tandis que la méthode des éléments finis standard s'appuie sur des domaines bornés. Cependant, comme la dépendance des champs aux variables \mathbf{y}' décroît exponentiellement lorsque y_1 tend vers $\pm\infty$, la cellule élémentaire peut être artificiellement bornée dans cette direction sans grande influence sur les résultats obtenus. Quelques essais numériques montrent que réduire la taille de la cellule élémentaire dans la direction y_1 à $6H$, c'est-à-dire six fois la taille de l'inclusion, est suffisant pour obtenir une très bonne approximation de la solution.

Nous avons donc calculé numériquement les valeurs des paramètres (s_t, s_c) , pour plusieurs valeurs du rayon de la fissure allant de 0 à $1/\sqrt{2}$, et pour un coefficient de Poisson de 0,3. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

r	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
s_t	0,0	0,0042	0,037	0,134	0,35	0,96	2,25
s_c	0,0	0,0047	0,043	0,156	0,41	1,11	2,52

On constate que s_t et s_c restent très faibles tant que la fissure est petite, mais qu'ils évoluent très vite au voisinage de $1/\sqrt{2} \approx 0,707$. Ce comportement était attendu, car lorsque $r \rightarrow 1/\sqrt{2}$, le réseau de micro-fissures périodiques se transforme en une unique fissure macroscopique, de souplesse infinie.

Le comportement effectif d'un réseau de fissures coplanaires est donc très simple : il se réduit à un comportement d'interface élastique, caractérisé par seulement deux coefficients indépendants. Ces coefficients peuvent être identifiés numériquement, via des simulations éléments finis à l'échelle d'un motif périodique. Notons cependant que ce modèle ne tient pas compte d'éventuelles conditions de contact entre les lèvres des micro-fissures. Il n'est donc réellement valable que si les lèvres des fissures sont écartées, ce qui est généralement le cas tant que l'on exerce une contrainte de traction perpendiculairement à l'interface (c'est-à-dire $\Sigma_{11} > 0$).

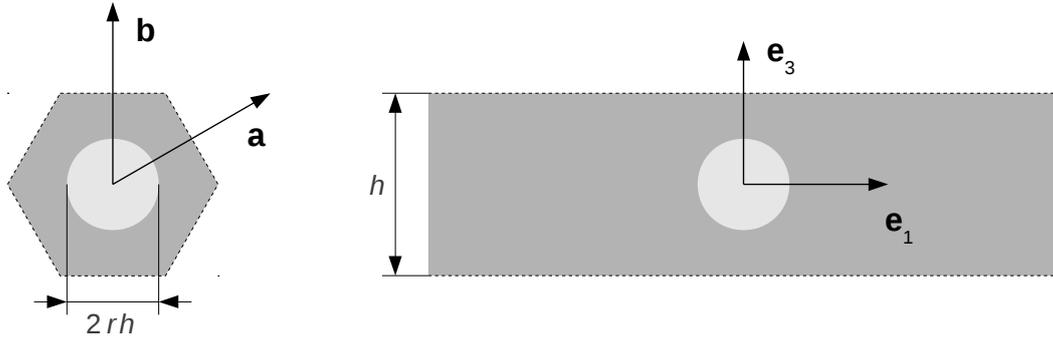


FIGURE 2.11 – Cas où les hétérogénéités sont des inclusions sphériques élastiques, distribuées dans le plan Γ selon un motif hexagonal.

Remarque 14. *L'introduction d'une condition supplémentaire de contact entre les lèvres des micro-fissures induit une non-linéarité du problème intérieur d'ordre 1 (2.20). Or la prise en compte de non-linéarités à l'échelle locale pose une grosse difficulté : si le problème mécanique dans le domaine intérieur n'est pas linéaire, le principe de superposition n'est plus valable, on ne peut plus introduire les problèmes élémentaires, et la définition même des tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} n'a plus de sens. La détermination du comportement effectif des hétérogénéités se complique alors beaucoup.*

2.5.3 Réseau hexagonal d'inclusions sphériques élastiques

On analyse ici un second exemple non trivial, où l'hétérogénéité est due à une distribution périodique d'inclusions sphériques élastiques dans le plan $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Ces inclusions sphériques sont distribuées sur la surface Γ suivant un motif hexagonal (voir Figure 2.11). Le rayon d'une inclusion est rh , avec h la distance entre deux inclusions. On suppose que les inclusions élastiques sont disjointes, ce qui s'écrit $0 \leq r < 1/2$. Les vecteurs périodiques à l'échelle macroscopique sont donc $\mathbf{a} = h(\sqrt{3}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/2$ et $\mathbf{b} = h\mathbf{e}_3$. À l'échelle microscopique, on peut choisir pour \mathbb{Y} un hexagone régulier, de centre $\mathbf{0}$. Ainsi, la cellule élémentaire est $\mathbb{Y} = \mathbb{R} \times \mathbb{Y}$, et contient une inclusion élastique correspondant à la boule $\mathcal{D} = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y}\| < rh\}$.

Contrairement à l'exemple précédent des fissures coplanaires, aucun des problèmes élémentaires n'est trivial. En revanche, les symétries de la cellule périodique induisent un certain nombre de symétries sur les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} . En particulier, la cellule élémentaire est laissée invariante par les symétries par rapport aux plans $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} doivent donc présenter les mêmes invariances. On en déduit que \mathbf{L} est un tenseur diagonal, que les seules composantes non nulles du tenseur \mathbf{M} sont M_{122} et M_{133} , et que les composantes non nulles du tenseur \mathbf{N} sont N_{2222} , N_{2233} , N_{2323} , N_{3333} et leurs composantes symétriques. Par ailleurs, la cellule élémentaire est également invariante par rotation de $\pi/3$ autour de l'axe \mathbf{e}_1 . On en déduit que $L_{22} = L_{33}$ et $M_{122} = M_{133}$. De manière moins évidente, on démontre également que $N_{2222} =$

$N_{3333} = N_{2233} + 2N_{2323}$. Si l'on introduit les paramètres sans dimension λ_M et μ_M , tels que $N_{2233} = E^m \lambda_M$ et $N_{2323} = E^m \mu_M$, on constate que \mathbf{N} s'interprète comme une rigidité isotrope de membrane, de coefficients de Lamé $E^m \lambda_M$ et $E^m \mu_M$. Les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} peuvent donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L} = \frac{s_t}{E^m} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{s_c}{E^m} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{M} = c \mathbf{e}_1 \otimes (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\ N_{\alpha\beta\gamma\delta} = E^m \lambda_M \delta_\beta^\alpha \delta_\delta^\gamma + 2E^m \mu_M I_{\alpha\beta\gamma\delta} \end{array} \right. \quad (2.75)$$

Les cinq paramètres s_t , s_c , c , λ_M et μ_M sont des paramètres sans dimension, qui suffisent à caractériser le comportement effectif des inclusions sphériques. Ils dépendent du rayon relatif r des inclusions, du rapport de rigidités $\theta = E^m/E^i$, et des coefficients de Poisson de la matrice et de l'inclusion ν^m et ν^i . Les paramètres s_t et s_c caractérisent respectivement la souplesse de l'interface dans des sollicitations de traction et de cisaillement, tandis que les coefficients λ_M et μ_M caractérisent la rigidité de membrane de l'interface. Le coefficient c est généralement non-nul, et traduit un couplage entre les déformations membranaires, et le saut de déplacement au travers de l'interface. Ces coefficients sont calculés numériquement dans le cas où $r = 3/8$, en supposant que l'inclusion est dix fois plus souple que la matrice, et que les coefficients de Poisson de la matrice et de l'inclusion sont tous deux égaux à 0,3. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Paramètre	s_t	s_c	c	λ_M	μ_M
Valeur	0,44	1,51	0,043	-0,11	-0,13

La valeur de ces différents paramètres nous informe sur le comportement effectif de ce type d'hétérogénéités. On constate tout d'abord que les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} sont respectivement positif et négatif. En termes d'énergie effective de surface, l'énergie de membrane est donc négative, tandis que l'énergie d'interface élastique est positive. Ceci est cohérent avec les résultats obtenus dans l'étude d'une couche homogène d'épaisseur constante : lorsque les hétérogénéités sont plus souples que la matrice, le comportement effectif de membrane est instable, tandis que le comportement effectif d'interface élastique est stable. On constate par ailleurs que les coefficients de plus grande amplitude sont s_c , puis s_t . L'effet principal de ces hétérogénéités est donc d'introduire une souplesse en cisaillement de l'interface Γ , et dans une moindre mesure une souplesse en traction. Les coefficients λ_M et μ_M sont plus petits en valeur absolue. Le comportement effectif de membrane des hétérogénéités a donc moins d'influence sur le comportement de la structure. Enfin, bien que les coefficients de Poisson de la matrice et de l'inclusion soient identiques, le coefficient c est faible, mais non nul. Le couplage entre les comportements d'interface élastique et de membrane ne se réduit donc pas toujours à un simple effet de Poisson, mais peut être dû à des effets de *structure* à l'échelle microscopique.

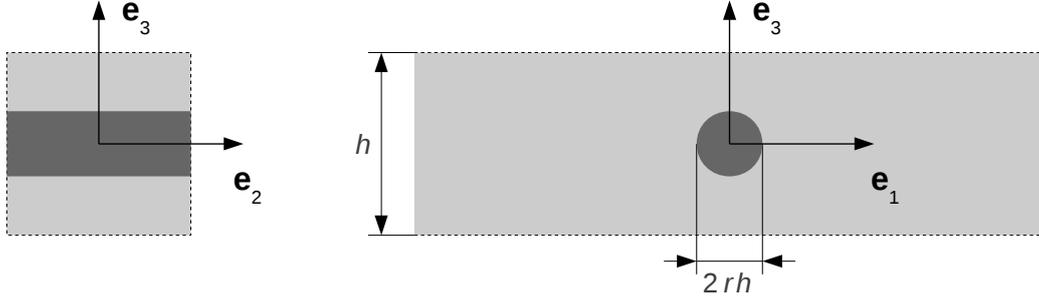


FIGURE 2.12 – Réseau de barres cylindriques unidirectionnelles, de rayon rh et d'axe \mathbf{e}_2 , réparties périodiquement dans la direction \mathbf{e}_3 avec un pas h .

2.5.4 Réseaux d'armatures

Armatures unidirectionnelles

Pour en revenir au sujet qui nous intéresse, on peut s'intéresser au comportement effectif de barres d'armature dans une structure en béton. Étudions donc le comportement d'un réseau de barres unidirectionnelles dans un volume homogène (voir Figure 2.12). Ces barres sont des cylindres, de rayon rh et d'axe \mathbf{e}_2 . Elles sont périodiquement distribuées dans la direction \mathbf{e}_3 , avec un espacement h . On suppose que ces barres sont disjointes, ce qui s'écrit $0 \leq r < 1/2$. Les vecteurs périodiques à l'échelle macroscopique sont donc $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{b} = h \mathbf{e}_3$, avec α une constante arbitraire. À l'échelle microscopique, les champs physiques sont donc indépendants de y_2 , et la cellule périodique peut être réduite au domaine $\mathbb{Y} = \mathbb{R} \times (-H/2, H/2)$ dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. L'armature est située dans le domaine $\mathcal{D} = \{(y_1, y_3) \mid \|\mathbf{y}\| < rH\}$, de sorte que :

$$(\lambda(y_1, y_3), \mu(y_1, y_3)) = \begin{cases} (\lambda^m, \mu^m) & \text{si } \mathbf{y} \notin \mathcal{D} \\ (\lambda^i, \mu^i) & \text{si } \mathbf{y} \in \mathcal{D} \end{cases}$$

Encore une fois, les plans $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ sont des plans de symétrie de la cellule élémentaire. Comme dans les exemples précédents, on en déduit que le tenseur \mathbf{L} est diagonal, que les seules composantes non nulles du tenseur \mathbf{M} sont M_{122} et M_{133} , et que les composantes non nulles du tenseur \mathbf{N} sont N_{2222} , N_{2233} , N_{2323} , N_{3333} et leurs composantes symétriques. En revanche, la cellule périodique ne présente ici pas d'autres invariances. Les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{s_i}{E^m} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \\ \mathbf{M} &= c_\alpha \mathbf{e}_1 \otimes (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) \\ \mathbf{N} &= E^m R_{\alpha\beta} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) \otimes (\mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\beta) + 4E^m G (\mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_3) \otimes (\mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

Précisons ici que les indices répétés trois fois sont implicitement sommés, les indices grecs variant de 1 à 2 et les indices latins de 1 à 3. La souplesse du comportement d'interface

élastique est caractérisée par les trois paramètres (s_1, s_2, s_3) , le couplage entre le saut de déplacement et les déformations membranaires est caractérisé par les deux paramètres (c_2, c_3) , et le comportement de membrane de l'interface est caractérisé par le tenseur symétrique du second ordre \mathbf{R} , ainsi que par le scalaire G . Ce dernier caractérise la rigidité de cisaillement du comportement de membrane, tandis que le tenseur \mathbf{R} caractérise les rigidités uniaxiales dans les directions \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 , ainsi qu'un couplage entre ces deux directions. Le comportement homogénéisé du réseau de barres est donc caractérisé par neuf coefficients indépendants. Précisons ici que tous ces paramètres sont sans dimension, et dépendent du rayon relatif des barres d'armature r , du rapport de rigidité $\theta = E^m/E^i$, ainsi que des coefficients de Poisson ν^m et ν^i .

Ces coefficients sont calculés numériquement, on considérant que la matrice est un béton courant, et que les barres sont constituées d'un acier standard. On se place donc dans la situation où $r = 1/20$, $E^m = 30$ GPa, $\nu^m = 0,22$, $E^i = 200$ GPa et $\nu^i = 0,3$. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant.

Paramètre	s_1	s_2	s_3	c_2	c_3								
Valeur	-0,0085	-0,028	-0,022	-0,0013	-0,00052								
<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">R_{22}</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">R_{33}</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">R_{23}</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">G</td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">0,045</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">0,010</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">0,0032</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">0,0047</td> </tr> </table>						R_{22}	R_{33}	R_{23}	G	0,045	0,010	0,0032	0,0047
R_{22}	R_{33}	R_{23}	G										
0,045	0,010	0,0032	0,0047										

D'après le signe de ces coefficients, on constate que le tenseur \mathbf{L} est défini négatif, tandis que le tenseur \mathbf{N} est défini positif. Ceci est cohérent avec les résultats que nous avons obtenu dans le cas d'une couche homogène : lorsque les inclusions sont plus rigides que la matrice, le comportement d'interface élastique tend à être instable, tandis que le comportement de membrane est stable. On observe également que ces coefficients varient en valeur absolue de 1 ‰ à 5 ‰, et sont donc toujours petits devant 1. Ceci signifie que, dans un régime linéaire, les armatures en acier ont peu d'influence sur le comportement des structures en béton armé. Ceci s'explique de la façon suivante : bien que les armatures soient plus rigides que le béton, leur proportion volumique est également très faible. Leur influence sur le comportement de la structure est donc limitée.

Réseau d'armatures orthogonales

En pratique, les armatures forment rarement un réseau de barres unidirectionnelles. Dans les structures en béton armé, les armatures sont généralement disposées selon un motif orthogonal, et forment ainsi un treillis de barres. On se propose donc d'étudier le comportement mécanique effectif de ce second motif de ferrailage. Les barres d'armatures sont toujours des cylindres, de rayon rh . On distingue les barres horizontales, d'axe \mathbf{e}_2 , et les barres verticales, d'axe \mathbf{e}_3 . Les barres verticales et horizontales sont distribuées périodiquement suivant les directions \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 , avec un même espacement h . Sur chantier, les barres de ferrailage horizontales et verticales peuvent être soudées, ligaturées, ou simplement mises en contact. Pour simplifier notre étude, on suppose ici que les barres d'armatures sont légèrement décalées d'une distance $\pm ph$ dans la direction \mathbf{e}_1 , de sorte que les barres d'armature verticales et horizontales ne rentrent pas en contact. On évite ainsi

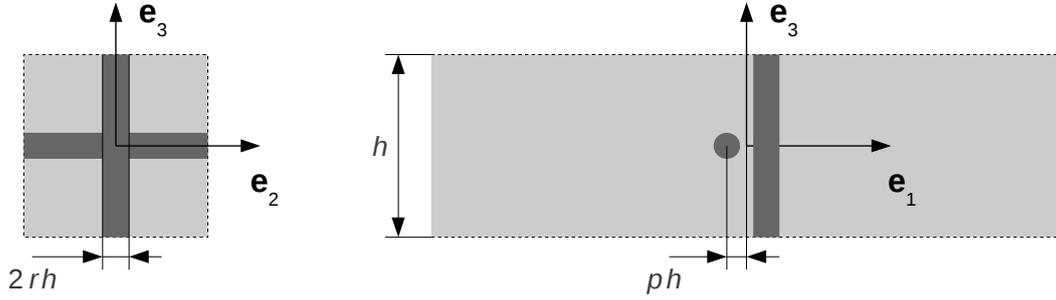


FIGURE 2.13 – Réseau de barres cylindriques organisées selon un motif orthogonal.

l'apparition de singularités de contraintes localement. Pour que les armatures ne rentrent pas en contact, on doit avoir $0 \leq r < p$ et $r < 1/2$. Les vecteurs de périodicité à l'échelle macroscopique sont simplement $h\mathbf{e}_2$ et $h\mathbf{e}_3$, et on peut choisir comme volume élémentaire périodique le volume $\mathbb{Y} = \mathbb{R} \times (-H/2, H/2)^2$ (voir Figure 2.13). Les armatures horizontales et verticales sont situées dans les domaines $\mathcal{D}_h = \{\mathbf{y} \mid (y_1 + pH)^2 + y_3^2 < r^2 H^2\}$ et $\mathcal{D}_v = \{\mathbf{y} \mid (y_1 - pH)^2 + y_2^2 < r^2 H^2\}$. Le comportement du matériau dans le volume élémentaire périodique s'écrit donc :

$$(\lambda(\mathbf{y}), \mu(\mathbf{y})) = \begin{cases} (\lambda^m, \mu^m) & \text{si } \mathbf{y} \notin \mathcal{D}_h \cup \mathcal{D}_v \\ (\lambda^i, \mu^i) & \text{si } \mathbf{y} \in \mathcal{D}_h \cup \mathcal{D}_v \end{cases}$$

Comme dans l'exemple précédent, le motif périodique est laissé invariant par les symétries par rapport aux plans $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{s'_i}{E^m} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \\ \mathbf{M} &= c'_\alpha \mathbf{e}_1 \otimes (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) \\ \mathbf{N} &= E^m R'_{\alpha\beta} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) \otimes (\mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\beta) + 4E^m G' (\mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_3) \otimes (\mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

En plus de ces symétries, la cellule périodique est laissée invariante par une transformation un peu particulière, qui compose symétrie plane par rapport au plan $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, et rotation de $\pi/2$ par rapport à l'axe \mathbf{e}_1 . Les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} doivent donc être laissés invariants par cette transformation. On en déduit $s'_2 = s'_3$, $c'_2 = c'_3$ et $R'_{22} = R'_{33}$. Le comportement effectif du réseau d'armatures orthogonales est donc caractérisé par seulement six coefficients indépendants, que sont s'_1 , s'_α , c'_α , $R'_{\alpha\alpha}$, R'_{23} et G' . Ces six coefficients sont sans dimension, et dépendent du rayon relatif r des armatures, de l'excentrement p , du rapport de rigidités $\theta = E^m/E^i$ et des coefficients de Poisson ν^m et ν^i .

Ces coefficients sont calculés numériquement, on considérant que l'acier et le béton ont des comportements standards, soit pour le béton $E^m = 30$ GPa et $\nu^m = 0,22$, et pour l'acier $E^i = 200$ GPa et $\nu^i = 0,3$. Les paramètres géométriques choisis sont $r = 0,05$ et $p = 0,06$. Les valeurs obtenues pour les coefficients sont présentées dans le tableau suivant.

Paramètre	s'_1	s'_α	c'_α	$R'_{\alpha\alpha}$	R'_{23}	G'
Valeur	-0,017	-0,050	-0,0018	0,056	0,0064	0,0094

On retrouve un comportement très semblable à l'exemple précédent. On constate que les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{N} sont respectivement négatif et positif, ce qui se traduit par un comportement d'interface élastique instable. On observe également que les valeurs des coefficients restent petites devant 1, ce qui traduit une influence des armatures sur le comportement de la structure relativement faible. En comparant les valeurs des coefficients calculées pour cet exemple et le précédent, on observe également un phénomène intéressant. On constate numériquement que :

$$\begin{array}{lll} s'_1 \approx 2s_1 & s'_\alpha \approx s_2 + s_3 & c'_\alpha \approx c_2 + c_3 \\ R'_{\alpha\alpha} \approx R_{22} + R_{33} & R'_{23} \approx 2R_{23} & G' \approx 2G \end{array}$$

En d'autres termes, le comportement du réseau d'armatures orthogonales est quasiment identique à la superposition du comportement de deux réseaux rectilignes perpendiculaires. Ceci signifie que l'interaction entre les réseaux d'armatures verticales et horizontales est négligeable dans le comportement effectif de la nappe d'armature. Ce résultat n'était pas vraiment attendu, dans la mesure où les armatures verticales et horizontales sont presque en contact.

Modèle simplifié de membrane

On peut chercher à quantifier plus précisément l'influence d'une nappe d'armature sur le comportement d'une structure en béton armé. Intéressons-nous tout d'abord au comportement d'interface élastique de la nappe d'armatures. Si l'on néglige le tenseur de couplage \mathbf{M} , le saut de déplacement dans le problème effectif (2.62) est alors donné par :

$$[[\mathbf{U}]] = h \mathbf{L} \cdot (\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_1)$$

Si l'on considère l'exemple d'une nappe d'armatures orthogonales, la plus grande composante du tenseur \mathbf{L} en valeur absolue est s'_α/E^m . La souplesse de l'interface peut donc être estimée à hs'_α/E^m . Pour fixer les idées, on suppose que la nappe d'armatures présente un espacement h de 20 cm entre les barres d'acier. On en déduit que la nappe d'armature présente une souplesse du même ordre qu'une couche de béton d'une épaisseur de hs'_α , soit 1 cm. À l'échelle d'une enceinte de confinement de 1,20 mètres d'épaisseur, ce comportement d'interface élastique semble donc assez négligeable. De la même façon, on peut quantifier l'influence du comportement de membrane de la nappe d'armature. En négligeant toujours le terme de couplage, ainsi que le poids propre des armatures, le saut de contrainte dans le problème effectif (2.62) s'écrit :

$$[[\boldsymbol{\Sigma}]] \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{div}_\Gamma (h \mathbf{N} : \varepsilon_\Gamma(\overline{\mathbf{U}})) = \mathbf{0}$$

Dans cette relation, le tenseur $h\mathbf{N}$ s'interprète comme une rigidité de membrane. La plus grande composante du tenseur \mathbf{N} est $E^m R_{\alpha\alpha}$. La rigidité de membrane des armatures est donc de l'ordre de $hE^m R_{\alpha\alpha}$, ce qui correspond approximativement à la rigidité d'une

couche de béton d'une épaisseur de $hR_{\alpha\alpha}$, soit 1 cm. Si l'on rapporte cette grandeur à l'épaisseur d'une enceinte de confinement, on peut de toute évidence négliger le comportement des barres d'armature.

Dans une première approche, on pourrait donc se contenter de négliger l'influence des barres d'armature sur le comportement de la structure. Ceci revient à considérer que les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{M} et \mathbf{N} sont nuls dans la formulation du problème effectif (2.62), qui devient alors identique au problème mécanique d'ordre 0 dans le domaine extérieur (2.17). Cependant, en pratique, les armatures jouent un grand rôle dans le comportement d'une telle structure, en limitant l'ouverture des fissures qui peuvent apparaître dans le béton. Pour modéliser ce type d'effets, c'est le comportement de membrane qui est le plus pertinent. On peut donc choisir de simplifier notre problème effectif, en identifiant les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{M} à zéro, et en ne conservant que le tenseur \mathbf{N} . On choisit également de négliger le poids propre des armatures. Les conditions de transmission dans le problème effectif (2.62) s'écrivent alors :

$$[[\mathbf{U}]] = \mathbf{0} \quad [[\boldsymbol{\Sigma}]] \cdot \mathbf{e}_1 + \operatorname{div}_\Gamma (h \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{U})) = \mathbf{0}$$

Le saut de déplacement devient donc continu au travers de la nappe d'armature, tandis que le saut de contrainte reste discontinu. Ce saut de contrainte est dû à la rigidité de membrane de la nappe d'armatures. Ce comportement de membrane est caractérisé par le tenseur de rigidité $h\mathbf{N}$, dont les composantes ont été calculées précédemment. Les champs de déplacement cinématiquement admissibles (2.63) pour ce problème sont donc les suivants :

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \mid \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3, (w_2, w_3) \in H^1(\Gamma)^2, \mathbf{w} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}$$

L'énergie potentielle effective (2.64) de ce problème devient par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dS - \int_{\Omega} \rho^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \\ & + \frac{h}{2} \int_{\Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{w}) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

Cette formulation présente de multiples avantages. Tout d'abord, comme le tenseur \mathbf{N} est défini positif, la fonctionnelle \mathcal{P}_{eff} est strictement convexe. Le point stationnaire de cette fonctionnelle sur l'ensemble \mathcal{C} des champs de déplacement cinématiquement admissibles est donc unique, et constitue le minimum global de \mathcal{P}_{eff} sur \mathcal{C} . Par ailleurs, cette formulation s'appuie sur des éléments de membrane, qui sont simples à implanter, et relativement courants dans les codes de calcul éléments finis. Notons cependant que le comportement de la membrane est anisotrope, ce qui complique légèrement la formulation du comportement.

2.6 Conclusions sur le modèle asymptotique général

Nous avons donc construit une approche asymptotique générale, qui permet de décrire le comportement effectif de tous types d'hétérogénéités périodiquement réparties sur une

surface. De précédents travaux publiés dans la littérature ont démontré que la présence de ce type d'hétérogénéités induit une correction d'ordre 1 sur les champs mécaniques au sein de la structure. Cette correction est due à l'apparition de sauts du champ de déplacement et du champ de contraintes au travers de l'interface, qui sont proportionnels à la déformation de membrane de la surface, et à la contrainte appliquée sur l'interface. Ce comportement effectif peut être complètement identifié en résolvant six problèmes mécaniques élémentaires à l'échelle d'un motif périodique d'hétérogénéités. Une première façon de modéliser ces hétérogénéités consiste donc à résoudre successivement deux problèmes mécaniques au niveau de la structure : la première fois avec un corps entièrement homogène, et la seconde en prenant en compte les sauts de déplacement et de contraintes induits par la présence des hétérogénéités. Cette approche, bien que robuste, n'est pas très adaptée à une implantation dans un cadre industriel.

On propose ici de reformuler le comportement effectif de la surface d'hétérogénéités dans un cadre énergétique. Ceci permet de résoudre un unique problème mécanique effectif, dont la solution est identique à la solution du problème réel jusqu'à l'ordre 1 en η . Dans ce cadre, le comportement effectif des hétérogénéités se traduit par une énergie de surface, qui combine une énergie d'interface élastique et une énergie de membrane. Cette formulation énergétique simplifie l'analyse du comportement de l'interface, ainsi que son implantation dans un code de calcul éléments finis. On construit un encadrement du comportement de cette interface, qui permet de démontrer que l'énergie de l'interface n'est généralement pas définie positive. Ceci constitue le principal défaut de cette formulation : en raison de ces mauvaises propriétés, on ne peut pas démontrer l'unicité de la solution du problème mécanique, et l'on peut s'attendre à voir apparaître des instabilités à proximité de la surface d'hétérogénéités.

Enfin, ce modèle est appliqué à différents exemples. On étudie le comportement d'une couche mince homogène, et on démontre ainsi que notre modèle est cohérent avec les modèles d'interfaces souple et rigide proposés dans la littérature. Pour illustrer le large champ d'application de ce modèle, on étudie également le comportement de microfissures localisées sur une surface, ainsi que de cavités sphériques élastiques. Enfin, pour revenir à notre problème initial, on s'intéresse au comportement mécanique effectif de plusieurs motifs d'armatures, comprenant des armatures parallèles, et des armatures croisées. Pour ce type d'hétérogénéités, le comportement de membrane s'avère stable, tandis que le comportement d'interface élastique est instable. On propose de restreindre le modèle effectif de comportement des armatures à un simple modèle de membrane, qui constitue le comportement le plus intéressant d'une nappe d'armatures. Ceci permet de reconstruire un modèle d'interface stable, qui assure une certaine robustesse des simulations numériques.

Cette démarche peut être facilement étendue à d'autres problèmes très similaires. On peut citer tout d'abord la question de la représentation des câbles de précontrainte, que l'on a peu abordée dans ce chapitre. La particularité des câbles de précontrainte est qu'ils sont mis en traction après durcissement du béton, de sorte que l'acier est pré-déformé par rapport au béton environnant. L'analyse asymptotique du comportement mécanique de ces câbles aboutit à un modèle très similaire : les câbles n'ont pas d'influence sur le

comportement de la structure à l'ordre 0, et induisent à l'ordre 1 un saut de déplacement et un saut de contraintes à travers la nappe de câbles. La principale différence apparaît dans la formulation du problème mécanique intérieur d'ordre 1 (2.20), et dans la décomposition de ce problème intérieur en problèmes élémentaires (2.25) et (2.26) (voir pages 50 et 53) : comme les câbles sont pré-déformés, les champs physiques dans la cellule élémentaire sont des fonctions affines, et non linéaires, de la déformation membranaire et de la contrainte appliquée à l'interface. De ce fait, le saut de déplacement (2.29) et la contrainte membranaire (2.33) sont également des fonctions affines de la déformation membranaire et de la contrainte d'interface. Ceci modifie très peu la formulation énergétique du comportement effectif de l'interface, qui est simplement affectée d'un terme linéaire supplémentaire associé à cette pré-déformation. En particulier, la définition des tenseurs L , M et N , ainsi que les questions de stabilité du comportement effectif de l'interface ne sont pas modifiées.

Cette approche peut également être étendue à d'autres phénomènes similaires, tels que des phénomènes de diffusion thermique, d'électro-statique, de magnéto-statique ou de propagations d'ondes. En effet, tous ces phénomènes reposent sur des systèmes d'équations différentielles très similaires. La principale limite de cette approche concerne les phénomènes de propagation d'ondes, pour lesquels la longueur d'onde des vibrations doit être bien plus grande que la taille des hétérogénéités : en effet, dans le cas contraire, on est susceptible de voir apparaître des phénomènes de diffraction, qui ne peuvent être modélisés par ce type de modèle effectif.

Enfin, on peut étudier de la même façon le comportement asymptotique d'hétérogénéités réparties sur le bord d'une structure, qu'il s'agisse d'une surface libre, d'un encastrement, ou d'un joint entre deux matériaux différents. On peut démontrer que les modèles effectifs correspondants sont très similaires, et même souvent plus simples : lorsque les hétérogénéités sont réparties sur un bord libre, leur comportement est équivalent à celui d'une membrane, tandis que lorsqu'elles forment un encastrement, leur comportement équivaut à celui d'une interface élastique. Ces problèmes pourront faire l'objet d'études ultérieures.

Plusieurs problèmes restent cependant ouverts. Tout d'abord, nous avons fait l'hypothèse que la surface sur laquelle les hétérogénéités sont réparties est plane. Or en pratique, les nappes d'armatures et les câbles de précontrainte sont souvent répartis sur des surfaces courbes. Il serait donc intéressant de voir si ce modèle effectif reste valable lorsque la surface des hétérogénéités présente une certaine courbure. *A priori*, si l'on fait l'hypothèse que la courbure de cette surface ne varie pas avec la taille des hétérogénéités, on peut penser que ce modèle effectif reste exact jusqu'à l'ordre 1 en η . Il reste cependant à le démontrer rigoureusement.

Par ailleurs, nous avons démontré que le comportement effectif de l'interface est généralement instable. Ceci constitue une limitation importante du modèle, qui a plusieurs conséquences. D'une part, la fonctionnelle énergétique du problème mécanique global n'est généralement pas convexe, et l'existence et l'unicité d'un point stationnaire de cette fonctionnelle ne sont pas assurées. D'autre part, ce comportement peut générer des in-

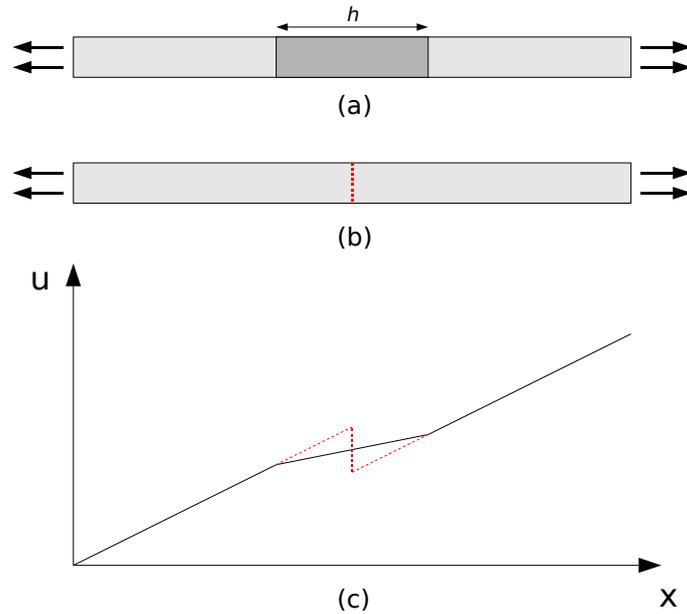


FIGURE 2.14 – Comportement effectif d’une inclusion dans une barre unidimensionnelle. (a) Géométrie réelle de l’inclusion. (b) Modèle effectif identifié. (c) Comparaison des champs de déplacement dans la barre pour les deux modèles. Si l’inclusion est plus rigide que le reste de la barre, le modèle effectif d’interface présente une rigidité négative.

stabilités à proximité de la surface d’hétérogénéités, qui ne semblent pas avoir de sens physique. Cette déficience du modèle peut être expliquée assez simplement : si l’on étudie le comportement mécanique d’une inclusion dans une barre unidimensionnelle (voir Figure 2.14), on constate que son comportement effectif est instable dès que l’inclusion est plus rigide que le reste de la barre. On peut penser que ces mauvaises propriétés sont dues à la *condensation* du comportement effectif de l’inclusion sur une interface d’épaisseur *nulle*. Pour remédier à ce problème, on pourrait donc envisager de reformuler le comportement effectif des hétérogénéités sur une interface d’épaisseur finie. Ce problème pourra faire l’objet de travaux ultérieurs.

Enfin, ce modèle repose sur l’hypothèse que le comportement des hétérogénéités et de la matrice est élastique. Cette hypothèse est assez pénalisante, et souvent peu représentative des applications réelles. Si l’on reprend l’exemple d’une structure en béton armé, les phénomènes qui nous intéressent mettent en jeu la fissuration du béton, la décohésion des armatures, voire la plastification de l’acier, qui sont autant de phénomènes non-linéaires. Le modèle effectif développé apparaît ici peu adapté aux besoins industriels. Une première amélioration de ce type de modèle pourrait consister en la prise en compte de non-linéarités localisées au voisinage des hétérogénéités. On pourrait par exemple s’inspirer des méthodes type FE^2 , qui consistent à résoudre numériquement en parallèle un problème mécanique à l’échelle globale, et une multitude de problèmes

mécaniques non-linéaires à l'échelle locale [51]. Le principal défaut de ces approches est qu'elles sont généralement coûteuses en temps de calcul, et donc pas forcément adaptées à une utilisation dans un contexte industriel.

Chapitre 3

Modèle asymptotique dédié aux armatures et aux câbles de précontrainte

Introduction

On se propose dans ce chapitre de développer un second modèle limite, plus spécifiquement adapté à la description des armatures et des câbles de précontrainte dans une structure en béton. L'objectif est que ce modèle soit aussi simple que possible, permette de modéliser à la fois les barres d'armatures et les câbles de précontrainte, et permette de prendre en compte un éventuel glissement des armatures et des câbles de précontrainte par rapport au béton.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la première section, on présente le cadre théorique de ce modèle. On s'intéresse au comportement de fibres cylindriques rigides, réparties sur une surface, et liées au volume environnant par une loi de glissement spécifique. On étudie la limite de ce modèle lorsque l'espacement des fibres tend vers zéro, et lorsque la rigidité des fibres tend vers l'infini. Le modèle limite obtenu combine un comportement de membrane anisotrope, dit modèle de *grille*, et une loi de glissement entre cette grille et le volume environnant.

Dans la seconde section, on se propose de construire un modèle d'interface acier-béton pertinent. On décrit tout d'abord les phénomènes qui régissent le comportement de cette liaison, ainsi qu'un certain nombre de travaux publiés dans la littérature sur ce sujet. En s'inspirant de ces travaux, on propose un modèle d'interface relativement simple, qui relie le saut de déplacement à une contrainte de cisaillement. Ce modèle est implanté, et validé par des comparaisons avec des essais expérimentaux.

Dans la troisième section, on détaille l'implantation numérique de ces modèles dans le code éléments finis *Code_Aster*. La rigidité membranaire des armatures et des câbles de précontrainte est modélisée par de simples éléments de membrane, ce qui ne pose pas de difficultés particulières. Par ailleurs, la décohésion de l'acier par rapport au béton est modélisée par une interface cohésive, reliant les éléments de membrane au volume envi-

ronnant. Ce comportement est implanté par le biais d'éléments d'interface à formulation mixte. On détaille les choix de discrétisation faits pour ces éléments.

Enfin, dans la dernière section, on cherche à valider les deux modèles asymptotiques développés dans le cadre de cette thèse. On procède pour cela à des comparaisons avec des simulations tridimensionnelles détaillées. On étudie en particulier deux problèmes mécaniques, que sont la flexion d'une plaque en béton armé dans un régime élastique, ainsi qu'un essai d'extraction d'armatures hors d'une plaque en béton armé. On démontre ainsi que ces modèles limite donnent des résultats très similaires aux simulations de référence.

3.1 Construction du modèle

3.1.1 Le problème étudié

Description géométrique du problème

Pour construire ce modèle, on se place dans le cadre d'une géométrie simplifiée : on étudie le comportement d'un corps Ω borné, séparé en deux par un plan Γ . Sur ce plan sont réparties des fibres cylindriques unidirectionnelles. L'espacement entre les fibres est noté e , le diamètre des fibres d , et le volume de l'ensemble des fibres \mathcal{F} . Le reste du volume $\Omega \setminus \mathcal{F}$ est appelé génériquement la *matrice*. On définit un repère orthonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, tel que \mathbf{e}_1 décrit la normale au plan Γ , et \mathbf{e}_2 correspond à l'orientation des fibres. Dans ce repère, le plan Γ est défini par l'équation implicite $x_1 = 0$. De même, le domaine d'une fibre infinie est défini par l'ensemble :

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \mathbf{x} \mid x_1^2 + (x_3 - ne)^2 \leq \frac{d^2}{4} \right\} \quad n \in \mathbb{Z}$$

L'indice n décrit la position de la fibre dans la direction \mathbf{e}_3 . Ainsi, le domaine réel \mathcal{F} des fibres peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_i \cap \Omega$$

Les chargements appliqués sur le corps Ω sont les suivants. Le corps est soumis à une gravité uniforme \mathbf{g} , ainsi qu'à des forces et des déplacements imposés sur sa frontière. La frontière $\partial\Omega$ du corps est ainsi partitionnée en deux parties $\partial_F\Omega$ et $\partial_u\Omega$, sur lesquelles sont respectivement imposés des forces extérieures \mathbf{F} et des déplacements \mathbf{u}^d . On suppose que ces champs sont suffisamment réguliers pour ne pas introduire de singularités. Par ailleurs, la frontière $\partial\mathcal{F}$ du volume des fibres est également partitionnée en trois parties $\partial_I\mathcal{F}$, $\partial_F\mathcal{F}$ et $\partial_u\mathcal{F}$. Ces parties sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \partial_I\mathcal{F} &= \partial\mathcal{F} \setminus \partial\Omega \\ \partial_F\mathcal{F} &= \partial\mathcal{F} \cap \partial_F\Omega \\ \partial_u\mathcal{F} &= \partial\mathcal{F} \cap \partial_u\Omega \end{aligned}$$

L'ensemble $\partial_I \mathcal{F}$ constitue donc l'interface entre les fibres et la matrice, $\partial_F \mathcal{F}$ représente la section des fibres qui est soumise à une force imposée, et $\partial_u \mathcal{F}$ la section des fibres qui est soumise à un déplacement imposé. Précisons que l'interface $\partial_I \mathcal{F}$ est conventionnellement orientée des fibres vers la matrice, et que le vecteur \mathbf{n} est donc un vecteur normal unitaire extérieur aux fibres.

Le champ de déplacement dans le volume Ω est noté \mathbf{u} , et le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$. En raison d'un possible glissement des fibres, le champ de déplacement est susceptible d'être discontinu à l'interface fibre-matrice. On utilise donc la notation suivante le long de cette interface :

$$[[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega \setminus \mathcal{F}}} \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}) - \lim_{\substack{\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}}} \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_I \mathcal{F}$$

Cette quantité représente le déplacement relatif de la matrice par rapport à la fibre. En revanche, pour des raisons d'équilibre, le vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ est continu au travers de l'interface. Il correspond à l'effort surfacique exercé par la matrice sur la fibre.

Comportement des matériaux

On suppose que la matrice et les fibres présentent un comportement homogène, linéaire élastique et isotrope. On note les coefficients de Lamé de la matrice et des fibres respectivement (λ^m, μ^m) et (λ^f, μ^f) , les tenseurs de rigidité respectifs \mathbf{A}^m et \mathbf{A}^f , et les masses volumiques respectives ρ^m et ρ^f . Rappelons qu'un tenseur de rigidité \mathbf{A} s'écrit en termes des coefficients de Lamé $A_{ijkl} = \lambda \delta_j^i \delta_l^k + \mu (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j)$, et que les coefficients de Lamé vérifient les inégalités usuelles $3\lambda + 2\mu > 0$ et $\mu > 0$. Ces inégalités assurent en particulier que le tenseur de rigidité \mathbf{A} est défini positif. La relation de comportement dans la matrice s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \mathcal{F}$$

Pour modéliser une éventuelle précontrainte des câbles, on suppose que les fibres sont initialement en traction dans la direction \mathbf{e}_2 , avec une déformation axiale ε_p . Par souci de simplicité, on suppose que cette précontrainte est uniforme. La relation de comportement du matériau qui compose les fibres s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^f : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \varepsilon_p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \quad \text{dans} \quad \mathcal{F}$$

On considère par ailleurs que l'interface fibre-matrice présente un comportement non-linéaire et irréversible, indépendant de la vitesse de chargement. L'état physique de l'interface à un instant donné est déterminé par le saut de déplacement $[[\mathbf{u}]]$ à l'instant courant, et par toute l'histoire de cette interface. Cette histoire est résumée sous la forme d'un ensemble de variables internes, regroupées formellement dans un vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Le comportement mécanique de cette interface est caractérisé par une énergie mécanique interne ψ , et par la puissance dissipée ϕ sur cette interface.

L'énergie d'interface ψ caractérise l'énergie mécanique stockée à l'interface. Elle dépend uniquement de l'état de l'interface, c'est-à-dire du saut de déplacement et des variables internes. Elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: les états pour lesquels l'énergie d'interface est infinie ne sont pas physiquement admissibles, tandis que les autres *coûtent* une énergie $\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a})$. On introduit de ce fait l'espace \mathcal{Q}_ψ des états physiquement admissibles :

$$\mathcal{Q}_\psi = \left\{ (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \mid \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) < +\infty \right\}$$

En particulier, on fait l'hypothèse que le comportement de l'interface interdit l'interpénétration des fibres et de la matrice. On a donc :

$$\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) = +\infty \quad \forall \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a} \text{ tels que } \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} < 0$$

On suppose que cette énergie interne est semi-continue inférieure, continue dans le domaine des états admissibles \mathcal{Q}_ψ , et convexe par rapport à chacun de ses deux arguments. Cette dernière propriété s'écrit :

$$\begin{cases} \zeta \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) + (1 - \zeta) \psi(\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \mathbf{a}) \geq \psi(\zeta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket + (1 - \zeta) \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \mathbf{a}) \\ \zeta \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) + (1 - \zeta) \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \tilde{\mathbf{a}}) \geq \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \zeta \mathbf{a} + (1 - \zeta) \tilde{\mathbf{a}}) \end{cases} \quad \forall \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}, \zeta \in (0, 1)$$

De ce fait, le domaine \mathcal{Q}_ψ est fermé, et convexe par rapport à $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ et \mathbf{a} séparément. On définit les sous-gradients de l'énergie interne ψ par rapport à $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ et \mathbf{a} de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{rev}} \in \partial_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \iff \psi(\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \mathbf{a}) - \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \geq \mathbf{F}_{\text{rev}} \cdot (\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket - \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \quad \forall \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket \quad (3.1)$$

$$\mathbf{A}_{\text{rev}} \in \partial_{\mathbf{a}} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \iff \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \tilde{\mathbf{a}}) - \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \geq \mathbf{A}_{\text{rev}} \cdot (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \quad \forall \tilde{\mathbf{a}} \quad (3.2)$$

Les quantités \mathbf{F}_{rev} et \mathbf{A}_{rev} sont les quantités duales de $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ et \mathbf{a} , de sorte que l'on a au cours d'une transformation :

$$d\psi = \mathbf{F}_{\text{rev}} \cdot d\llbracket \mathbf{u} \rrbracket + \mathbf{A}_{\text{rev}} \cdot d\mathbf{a}$$

Ces forces thermodynamiques sont donc associées à une variation d'énergie interne dans le matériau, *a priori* réversible. En vertu de la convexité de l'énergie interne par rapport à chacun de ses arguments, les ensembles $\partial_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a})$ et $\partial_{\mathbf{a}} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a})$ ne sont jamais vides. Notons également que, lorsque ψ est dérivable, \mathbf{F}_{rev} et \mathbf{A}_{rev} sont les dérivées partielles de l'énergie interne.

On s'intéresse à présent à la dissipation d'énergie qui peut se produire à l'interface. La puissance dissipée est notée ϕ . Elle dépend des flux $(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}})$, et éventuellement de l'état courant $(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \in \mathcal{Q}_\psi$. Cette puissance dissipée est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$: lorsque le flux $(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}})$ est physiquement admissible, la puissance dissipée est finie, tandis que lorsque le flux $(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}})$ n'est pas admissible, la puissance dissipée ϕ vaut conventionnellement $+\infty$. On introduit également l'espace des flux admissibles, qui dépend *a priori* de l'état de l'interface :

$$\mathcal{Q}_\phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) = \left\{ (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}) \mid \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) < +\infty \right\}$$

On fait à présent l'hypothèse que le comportement du matériau est indépendant de la vitesse de chargement. Pour ce type de matériau, l'énergie dissipée au cours d'un trajet de chargement ne doit pas dépendre de la vitesse de chargement. On en déduit que la puissance dissipée est une fonction positivement homogène de degré 1 par rapport à ses deux premiers arguments :

$$\phi(\zeta \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \zeta \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) = \zeta \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^+$$

La puissance dissipée prend donc la forme d'un *cône* dans l'espace des flux $(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}})$, et est égale à zéro pour des flux nuls. On fait également l'hypothèse que la puissance dissipée est une fonction semi-continue inférieure, et continue dans l'espace des flux et des états admissibles $\mathcal{Q}_\phi \times \mathcal{Q}_\psi$. On suppose également qu'elle est convexe de ses deux premiers arguments, ce qui s'écrit :

$$\zeta \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) + (1 - \zeta) \psi(\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \tilde{\mathbf{a}}) \geq \psi(\zeta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket + (1 - \zeta) \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \zeta \mathbf{a} + (1 - \zeta) \tilde{\mathbf{a}}) \\ \forall \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}, \zeta \in (0, 1)$$

Ceci a plusieurs conséquences. Tout d'abord, l'espace des flux et des états admissibles $\mathcal{Q}_\phi \times \mathcal{Q}_\psi$ est un domaine fermé. De plus, à état fixé, l'espace des flux admissibles $\mathcal{Q}_\phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a})$ est un domaine convexe. Enfin, on peut définir les sous-gradients de la puissance dissipée par rapport aux flux. On introduit donc les grandeurs \mathbf{F}_{irr} et \mathbf{A}_{irr} , duales des flux $(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}})$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{irr}} \in \partial_{\dot{\mathbf{u}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}), \\ \mathbf{A}_{\text{irr}} \in \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}), \end{cases}$$

qui vérifient

$$\phi(\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \tilde{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) - \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \geq \mathbf{F}_{\text{irr}} \cdot (\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket - \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket) + \mathbf{A}_{\text{irr}} \cdot (\tilde{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{a}}) \quad \forall \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \tilde{\mathbf{a}}. \quad (3.3)$$

Les grandeurs \mathbf{F}_{irr} et \mathbf{A}_{irr} sont des forces thermodynamiques associées aux flux $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$ et $\dot{\mathbf{a}}$, en ce sens que la puissance dissipée dans le matériau s'écrit :

$$\phi = \mathbf{F}_{\text{irr}} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket + \mathbf{A}_{\text{irr}} \cdot \dot{\mathbf{a}}$$

Ces forces sont dites irréversibles, car l'énergie dissipée dans le matériau ne peut être récupérée.

Il reste à présent à établir les équations qui relient les forces thermodynamiques \mathbf{F}_{rev} , \mathbf{F}_{irr} , \mathbf{A}_{rev} et \mathbf{A}_{irr} aux forces appliquées sur l'interface. On fait pour cela l'hypothèse que, en situation d'équilibre, l'énergie *complète* du système doit être minimale. Cette énergie comprend : l'énergie mécanique interne de l'interface, l'énergie dissipée au niveau de l'interface et l'énergie cédée au volume environnant. On définit donc :

$$\mathcal{P}_{\text{eff}}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}, \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \tilde{\mathbf{a}}) = \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket + \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}) + \phi(\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \tilde{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) - \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

Les quantités $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ et \mathbf{a} désignent l'état courant de l'interface, et les quantités $\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket$ et $\tilde{\mathbf{a}}$ une variation *virtuelle* de cet état. Le premier terme désigne l'énergie mécanique interne

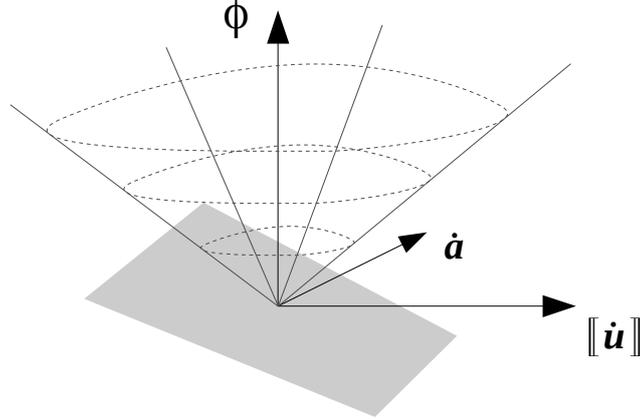


FIGURE 3.1 – La puissance dissipée ϕ (ou potentiel de dissipation) forme un cône dans l'espace des flux $([\dot{\mathbf{u}}], \dot{\mathbf{a}})$. Les sous-gradients de ce potentiel sont les hyperplans tangents à ce cône.

modifiée par cette variation d'état, le second désigne la dissipation associée à cette variation d'état, et le troisième l'énergie mécanique cédée au volume environnant. En raison des propriétés de convexité de l'énergie interne ψ et de la dissipation ϕ , le potentiel effectif \mathcal{P}_{eff} est une fonction convexe de $[\mathbf{u}]$ et $\tilde{\mathbf{a}}$ séparément. On cherche donc à minimiser ce potentiel effectif. L'état $([\mathbf{u}], \mathbf{a})$ de l'interface est un état stable si et seulement si $([\tilde{\mathbf{u}}], \tilde{\mathbf{a}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est un minimum local de \mathcal{P}_{eff} . On doit donc avoir :

$$\exists \zeta \in \mathbb{R}^{+*} \quad \mathcal{P}_{\text{eff}}([\mathbf{u}], \mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \min_{\substack{\|[\tilde{\mathbf{u}}]\| \leq \zeta \\ \|\tilde{\mathbf{a}}\| \leq \zeta}} \mathcal{P}_{\text{eff}}([\mathbf{u}], \mathbf{a}, [\tilde{\mathbf{u}}], \tilde{\mathbf{a}})$$

Une condition nécessaire — mais non suffisante — pour que ceci soit vrai est que les sous-gradients de cette quantité par rapport à $[\tilde{\mathbf{u}}]$ et $\tilde{\mathbf{a}}$ soient nuls. On en déduit :

$$\exists \begin{cases} \mathbf{F}_{\text{rev}} \in \partial_{\mathbf{u}}\psi([\mathbf{u}], \mathbf{a}) \\ \mathbf{A}_{\text{rev}} \in \partial_{\mathbf{a}}\psi([\mathbf{u}], \mathbf{a}) \\ \mathbf{F}_{\text{irr}} \in \partial_{\dot{\mathbf{u}}}\phi([\dot{\mathbf{u}}], \dot{\mathbf{a}}, [\mathbf{u}], \mathbf{a}) \\ \mathbf{A}_{\text{irr}} \in \partial_{\dot{\mathbf{a}}}\phi([\dot{\mathbf{u}}], \dot{\mathbf{a}}, [\mathbf{u}], \mathbf{a}) \end{cases} \quad \text{tels que} \quad \begin{cases} \mathbf{F}_{\text{rev}} + \mathbf{F}_{\text{irr}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{A}_{\text{rev}} + \mathbf{A}_{\text{irr}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.4)$$

Les deux relations du système de droite s'interprètent comme des conditions d'équilibre thermodynamique du système. La première relation signifie que les efforts $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ appliqués sur l'interface sont équilibrés par des contraintes dites *réversibles* $\mathbf{F}_{\text{rev}} \in \partial_{\mathbf{u}}\psi$, et des contraintes *irréversibles* $\mathbf{F}_{\text{irr}} \in \partial_{\dot{\mathbf{u}}}\phi$. La notion de contraintes réversibles et irréversibles repose sur le fait que les premières sont associées à une variation de l'énergie interne ψ , tandis que les secondes ne traduisent qu'une dissipation d'énergie. La seconde relation est une réécriture de la première pour les forces thermodynamiques. Comme il n'y a pas d'action externe sur les processus internes, le premier membre de la relation est nul. Cette

relation traduit donc un équilibre thermodynamique entre l'énergie mécanique stockée dans le matériau, et la puissance dissipée par des processus microscopiques. On peut également réécrire ces relations de façon plus formelle :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \in \partial_{\mathbf{u}} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) + \partial_{\dot{\mathbf{u}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \\ \mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{a}} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) + \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \end{cases}$$

On reconnaît ici le formalisme classique des matériaux standard généralisés, avec ϕ le potentiel de dissipation du matériau. Ce formalisme a été initialement proposé par Moreau pour les comportements de frottement, de plasticité et de viscosité [11, 12]. Il est ensuite repris par Halphen et Nguyen pour décrire les comportements de plasticité avec écrouissage [8], puis par Frémond pour l'étude d'un comportement d'interface adhérente [7]. L'étude de comportements d'interface plus compliqués, couplant adhérence et frottement, a été réalisée par Raous [14], puis par Talon et Curnier plus récemment [15]. La notion de *matériau standard généralisé* repose sur deux éléments. Tout d'abord, un matériau est dit *standard* si son potentiel de dissipation ϕ ne dépend pas de l'état du matériau, mais seulement des flux. D'autre part, le formalisme est dit *généralisé* dans la mesure où les potentiels ψ et ϕ ne sont pas nécessairement réguliers, ce qui oblige à introduire les sous-gradients de ces potentiels (voire les gradients généralisés lorsque les potentiels ne sont pas convexes, cf. Clarke [3]). Lorsque le potentiel de dissipation ϕ dépend de l'état du matériau, on parle parfois de matériau *quasi-standard* généralisé. Ce formalisme permet de modéliser une grande variété de phénomènes d'interface, comme des comportements *plastiques*, associés à des glissements irréversibles, des comportements *endommageables*, caractérisés par une perte de rigidité de l'interface, ou des comportements de *friction*.

Remarque 15. *Dans la construction que nous avons faite de ce formalisme, nous avons défini le potentiel de dissipation comme la puissance dissipée dans le matériau. Précisons que ceci n'est vrai que lorsque le comportement est indépendant de la vitesse de chargement. Dans le cas général, la dissipation s'écrit seulement $\mathbf{F}_{\text{irr}} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket + \mathbf{A}_{\text{irr}} \cdot \dot{\mathbf{a}}$.*

Remarque 16. *Les hypothèses que nous avons faites ne permettent pas de modéliser un éventuel frottement de type Coulomb à l'interface, pour lequel la force d'adhérence tangentielle dépend de la contrainte normale. En effet, dans ce cas, la dissipation ne peut être définie comme une fonction continue du seul saut de déplacement. Pour y remédier, il faut considérer la dissipation comme une fonction de la contrainte normale $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, ce qui complique sensiblement l'étude du modèle limite.*

Remarque 17. *Le formalisme des matériaux standards généralisés repose sur une distinction précise entre l'énergie mécanique stockée, et l'énergie dissipée dans un matériau. Cette distinction n'est pas forcément évidente pour le modélisateur. Une énergie mécanique bloquée dans le matériau peut ainsi être interprétée comme une énergie dissipée, ou comme une énergie mécanique non restituable. On peut donner comme exemple les deux formulations équivalentes suivantes :*

$$\begin{cases} \psi(x) = kx \\ \phi(\dot{x}) = \mathcal{I}(\dot{x} \geq 0) \end{cases} \quad \begin{cases} \psi(x) = 0 \\ \phi(\dot{x}) = \mathcal{I}(\dot{x} \geq 0) + k\dot{x} \end{cases}$$

Dans ces relations, \mathcal{I} est la fonction indicatrice, qui vaut zéro si son argument est vrai, et l'infini sinon. De ce fait, une même loi mécanique peut être formulée de plusieurs manières dans le cadre des matériaux standards généralisés : il n'y a pas unicité de la formulation.

Formulation du problème réel

Au final, le problème mécanique étudié peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{F} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^f : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \varepsilon_p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \quad \text{dans } \mathcal{F} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \in \partial_{\mathbf{u}} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) + \partial_{\dot{\mathbf{u}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \quad \text{sur } \partial_I \mathcal{F} \\ \mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{a}} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) + \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{a}) \quad \text{sur } \partial_I \mathcal{F} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{F} \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho^f \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{F} \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial_I \mathcal{F} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \quad \text{sur } \partial_F \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^d \quad \text{sur } \partial_u \Omega \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Les quatre premières équations sont les relations de comportement de la matrice, des fibres, et de l'interface fibre-matrice. Les trois relations suivantes sont les conditions d'équilibre des forces dans la matrice, dans les fibres, et à l'interface fibre-matrice. Enfin, les deux dernières relations définissent les conditions limite du problème. Le comportement de la structure dans son ensemble est généralement non-linéaire, irréversible, voire adoucissant. Il n'est donc pas possible de démontrer en toute généralité l'existence, et l'unicité de la solution du système (3.5). On restera donc prudent dans l'écriture de ce problème, en supposant qu'il admet au moins localement un équilibre stable.

L'étude de ce problème nécessite de définir un état initial, et un historique de chargement dans l'intervalle $(0, t)$. On supposera donc la structure est initialement *saine*, c'est-à-dire que toutes les variables internes à l'interface fibre-matrice sont initialement nulles. De plus, on fait l'hypothèse que les chargements mécaniques $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}^d(\mathbf{x}, t)$ et $\varepsilon_p(t)$ sont des fonctions continues du temps. Dans la suite des développements, on omettra la dépendance des champs à la variable t pour alléger les notations.

3.1.2 La séparation d'échelles

Choix des paramètres

La formulation de ce problème mécanique fait intervenir trois petits paramètres sans dimension, que sont le rapport e/L entre l'espacement des fibres et la taille de la structure, le rapport e/d entre le diamètre des fibres et leur espacement et le rapport E^m/E^f entre la rigidité de la matrice et la rigidité des fibres. Suivant les arguments développés au chapitre précédent (voir Section 2.1.2), on fait l'hypothèse que les ratios e/L et E^m/E^f

restent proportionnels, et tendent tous deux vers zéro. Dans cette limite, les fibres sont de plus en plus rigides, et forment une nappe dense sur la surface Γ . Ce choix de paramètres constitue l'hypothèse fondamentale du modèle limite développé dans cette section.

On définit comme précédemment le petit paramètre sans dimension η comme le rapport e/L , et on suppose que le module d'Young des fibres est inversement proportionnel à ce petit paramètre. Comme les grandeurs λ^f , μ^f et \mathbf{A}^f sont toutes proportionnelles au module d'Young, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} E^f(\eta) &= \eta^{-1} E^{rf} & \mathbf{A}^f(\eta) &= \eta^{-1} \mathbf{A}^{rf} \\ \lambda^f(\eta) &= \eta^{-1} \lambda^{rf} & \mu^f(\eta) &= \eta^{-1} \mu^{rf} \end{aligned}$$

Les grandeurs E^{rf} , \mathbf{A}^{rf} , λ^{rf} et μ^{rf} sont des grandeurs *régularisées*, qui ont la même dimension que les grandeurs physiques E^f , \mathbf{A}^f , λ^f et μ^f , mais ne dépendent pas du petit paramètre η .

Comme la rigidité des fibres est inversement proportionnelle au paramètre η , on peut s'attendre à ce que les contraintes dans les fibres varient comme η^{-1} . Il est préférable que cet état de contrainte soit cohérent avec les conditions limite imposées sur le bord de ces fibres. On suppose donc que les forces exercées sur le bord $\partial_F \mathcal{F}$ des fibres se décomposent en deux parties : une partie régulière, qui ne dépend pas du paramètre η , et une partie proportionnelle à η^{-1} . L'effort \mathbf{F}^η imposé sur le bord $\partial_F \Omega$ se décompose donc de la façon suivante :

$$\mathbf{F}^\eta = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \Omega \setminus \partial_F \mathcal{F} \\ \eta^{-1} T^d(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_2 + \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \mathcal{F} \end{cases} \quad (3.6)$$

Les solutions du système (3.5) dépendent du paramètre η . Pour souligner cette dépendance, les champs de déplacement, de contraintes et de variables internes solutions de ce système sont notés à partir de maintenant \mathbf{u}^η , $\boldsymbol{\sigma}^\eta$ et \mathbf{a}^η .

Séparation d'échelles

Pour passer à la limite $\eta \rightarrow 0$, on reprend la méthode de séparation d'échelle développée au chapitre précédent (voir Section 2.2.2). On distingue un domaine intérieur, situé à proximité de la surface Γ , du domaine extérieur, identifié à $\Omega \setminus \Gamma$. Le domaine extérieur est décrit par une seule échelle de longueur, via les coordonnées macroscopiques cartésiennes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. *A contrario*, dans le domaine intérieur, on utilise un système de coordonnées à deux échelles, qui permet de décrire la géométrie variable des fibres. La position d'un point donné est ainsi définie par sa position macroscopique \mathbf{x}' sur le plan Γ , et par sa position relative \mathbf{y} dans une cellule périodique élémentaire. Le lien entre la position réelle \mathbf{X} d'un point dans le domaine intérieur et ses coordonnées macroscopiques et microscopiques est donné par la relation suivante :

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}' + \eta \mathbf{y}$$

Les champs du domaine intérieur dépendent donc seulement des variables $(\mathbf{x}', \mathbf{y})$, où $\mathbf{x}' \in \Gamma$ désigne les coordonnées macroscopiques, et \mathbf{y} désigne les coordonnées microscopiques

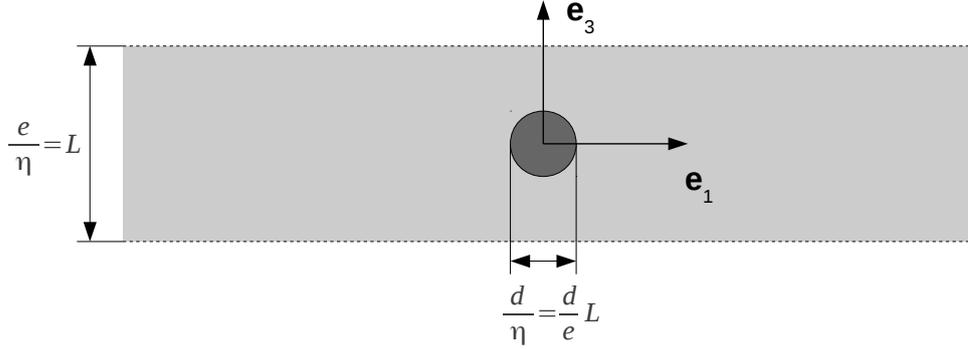


FIGURE 3.2 – Cellule périodique bidimensionnelle \mathbb{Y} , de hauteur e/η et centrée sur une fibre de diamètre d/η . Les conditions de périodicité sont indiquées par des pointillés.

à l'échelle d'un motif périodique. Comme les fibres sont toutes orientées dans la même direction, le motif des fibres est invariant dans la direction \mathbf{e}_2 . On peut donc restreindre le motif périodique \mathbb{Y} au domaine bidimensionnel $\mathbb{R} \times (-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2})$ dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ (voir Figure 3.2). Dans ce domaine, le volume de la fibre est défini par l'ensemble :

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Y}} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Y} \mid \|\mathbf{y}\| \leq \frac{d}{2e} L \right\}$$

À l'échelle de la cellule périodique \mathbb{Y} , l'interface fibre-matrice correspond au bord $\partial\mathcal{F}_{\mathbb{Y}}$ de ce domaine.

Décomposition des champs

Suivant la méthode de séparation d'échelle, on décompose les champs physiques en séries entières du paramètre η . On distingue les développements asymptotiques des champs de déplacement et de contrainte dans les domaines intérieur et extérieur. Dans le domaine extérieur, les développements asymptotiques s'écrivent de la façon suivante :

$$\mathbf{u}^\eta(\mathbf{X}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \eta \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + \eta^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) + \dots \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\eta(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}) + \eta \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x}) + \eta^2 \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x}) + \dots \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \quad (3.8)$$

En revanche, dans le domaine intérieur, nous avons fait l'hypothèse que la rigidité des fibres était inversement proportionnelle au paramètre η . On peut donc s'attendre à ce que les contraintes dans les fibres varient comme η^{-1} lorsque le paramètre η tend vers zéro. On choisit donc de développer les champs de déplacement, de contraintes et de variables internes dans le domaine intérieur de la façon suivante :

$$\mathbf{u}^\eta(\mathbf{X}) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \eta \mathbf{v}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \eta^2 \mathbf{v}^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \dots \quad \text{dans } \mathbb{Y} \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\eta(\mathbf{X}) = \eta^{-1} \boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \eta \boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \dots \quad \text{dans } \mathbb{Y} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{a}^\eta(\mathbf{X}) = \mathbf{a}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \eta \mathbf{a}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \eta^2 \mathbf{a}^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \dots \quad \text{sur } \partial\mathcal{F}_{\mathbb{Y}} \quad (3.11)$$

On fait également l'hypothèse que le champ de contraintes $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ est nul dans la matrice.

Décomposition des équations

Il nous faut à présent identifier les équations vérifiées par les différents termes de ces développements. Ces équations dérivent des conditions d'équilibre, des relations de comportement de la matrice, des fibres et de l'interface fibre-matrice, et des conditions limite sur le bord du domaine. Considérons tout d'abord les équations qui concernent le domaine extérieur. Dans ce domaine, la condition d'équilibre s'écrit simplement $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^\eta) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0}$, la relation de comportement $\boldsymbol{\sigma}^\eta = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\eta)$, et les conditions limite $\mathbf{u}^\eta = \mathbf{u}^d$ sur $\partial_u \Omega$ et $\boldsymbol{\sigma}^\eta \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$ sur $\partial_F \Omega$. En substituant dans ces équations les développements (3.7-3.8), et en identifiant les différentes puissances de η , on obtient le système d'équations suivant :

Équations du domaine extérieur

Ordre	Équilibre	Comportement	CL sur $\partial_u \Omega$	CL sur $\partial_F \Omega$
0	$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$	$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^d$	$\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$
$i \geq 1$	$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^i) = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i)$	$\mathbf{u}^i = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$

Dans le domaine intérieur, suivant les résultats de la Section 2.2.3 du chapitre précédent, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\sigma}^\eta) + \frac{1}{\eta} \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^\eta) + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

Dans cette relation, les opérateurs $\mathbf{div}_{x'}$ et \mathbf{div}_y s'écrivent en composantes :

$$\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\sigma}^\eta) = \frac{\partial \sigma_{i\alpha}^\eta}{\partial x_\alpha} \mathbf{e}_i \quad \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^\eta) = \frac{\partial \sigma_{ij}^\eta}{\partial y_j} \mathbf{e}_i$$

Par ailleurs, l'équation d'équilibre de l'interface fibre-matrice s'écrit $\llbracket \boldsymbol{\sigma}^\eta \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. En introduisant les développements (3.8) dans ces équations, et en identifiant les différentes puissances de η , on obtient les conditions d'équilibre suivantes :

Conditions d'équilibre du domaine intérieur

Ordre	Équilibre du volume $\mathbb{Y} \setminus \partial \mathcal{F}_\mathbb{Y}$	Équilibre de l'interface $\partial \mathcal{F}_\mathbb{Y}$
-2	$\mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^{-1}) = \mathbf{0}$	<i>aucune</i>
-1	$\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\tau}^{-1}) + \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\tau}^{-1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$
0	$\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\tau}^0) + \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^1) + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$	$\llbracket \boldsymbol{\tau}^0 \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$
$i \geq 1$	$\mathbf{div}_{x'}(\boldsymbol{\tau}^i) + \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^{i+1}) = \mathbf{0}$	$\llbracket \boldsymbol{\tau}^i \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$

Les conditions d'équilibre du volume sont valables dans la fibre $\mathcal{F}_\mathbb{Y}$, et dans la matrice

$\mathbb{Y} \setminus \mathcal{F}_{\mathbb{Y}}$. On rappelle que, dans la matrice, le champ de contrainte $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ est supposé nul. La condition d'équilibre d'ordre -1 s'écrit donc $\mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0}$ dans la matrice, et la condition d'ordre -2 est toujours vraie. Parallèlement, la condition d'équilibre de l'interface à l'ordre -1 implique simplement $\boldsymbol{\tau}^{-1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur le bord de la fibre.

Les relations de comportement volumiques dans la fibre et dans la matrice s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\eta = \mathbf{A}^m : \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{u}^\eta) + \frac{1}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^\eta) \right) & \text{dans } \Gamma \times (\mathbb{Y} \setminus \mathcal{F}_{\mathbb{Y}}) \\ \boldsymbol{\sigma}^\eta = \eta^{-1} \mathbf{A}^{\text{rf}} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{u}^\eta) + \frac{1}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^\eta) \right) & \text{dans } \Gamma \times \mathcal{F}_{\mathbb{Y}} \end{cases}$$

Dans ces relations, les opérateurs $\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ s'écrivent en composantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}) &= \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_\beta + \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} \mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_\alpha \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}) &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes_s \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

En introduisant les développements asymptotiques dans ces équations, et en identifiant les différentes puissances de η , on obtient les relations de comportement suivantes :

Relations de comportement volumiques dans le domaine intérieur

Ordre	Comportement de la fibre $\mathcal{F}_{\mathbb{Y}}$	Comportement de la matrice
-2	$\mathbf{0} = \mathbf{A}^{\text{rf}} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^0)$	<i>aucune</i>
-1	$\boldsymbol{\tau}^{-1} = \mathbf{A}^{\text{rf}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}^0) + \varepsilon_p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^1))$	$\mathbf{0} = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^0)$
$i \geq 0$	$\boldsymbol{\tau}^i = \mathbf{A}^{\text{rf}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}^{i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^{i+2}))$	$\boldsymbol{\tau}^i = \mathbf{A}^m : (\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}^i) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^{i+1}))$

Enfin, la relation de comportement de l'interface fibre-matrice s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\eta \cdot \mathbf{n} \in \partial_{\mathbf{u}} \psi(\llbracket \mathbf{u}^\eta \rrbracket, \mathbf{a}^\eta) + \partial_{\dot{\mathbf{u}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}}^\eta \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}^\eta, \llbracket \mathbf{u}^\eta \rrbracket, \mathbf{a}^\eta) \\ \mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{a}} \psi(\llbracket \mathbf{u}^\eta \rrbracket, \mathbf{a}^\eta) + \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}}^\eta \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}^\eta, \llbracket \mathbf{u}^\eta \rrbracket, \mathbf{a}^\eta) \end{cases}$$

On cherche à déterminer ce que devient ce comportement lorsque le paramètre η tend vers zéro. Si l'on reprend les définitions des sous-gradients (3.1) et (3.2), la première relation signifie :

$$\exists (\mathbf{F}_{\text{rev}}^\eta, \mathbf{F}_{\text{irr}}^\eta) \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\eta \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_{\text{rev}}^\eta + \mathbf{F}_{\text{irr}}^\eta \\ \mathbf{F}_{\text{rev}}^\eta \cdot (\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket - \llbracket \mathbf{u}^\eta \rrbracket) \leq \psi(\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket, \mathbf{a}^\eta) - \psi(\llbracket \mathbf{u}^\eta \rrbracket, \mathbf{a}^\eta) \quad \forall \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket \\ \mathbf{F}_{\text{irr}}^\eta \cdot (\llbracket \tilde{\dot{\mathbf{u}}} \rrbracket - \llbracket \dot{\mathbf{u}}^\eta \rrbracket) \leq \phi(\llbracket \tilde{\dot{\mathbf{u}}} \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}^\eta, \llbracket \mathbf{u}^\eta \rrbracket, \mathbf{a}^\eta) - \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}}^\eta \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}^\eta, \llbracket \mathbf{u}^\eta \rrbracket, \mathbf{a}^\eta) \quad \forall \llbracket \tilde{\dot{\mathbf{u}}} \rrbracket \end{cases}$$

Vérifions que ceci reste vrai lorsque η tend vers zéro, et que $(\llbracket \dot{\mathbf{u}}^\eta \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}^\eta, \llbracket \mathbf{u}^\eta \rrbracket, \mathbf{a}^\eta)$ tend vers $(\llbracket \dot{\mathbf{v}}^0 \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}^0, \llbracket \mathbf{v}^0 \rrbracket, \mathbf{a}^0)$. On sait que le domaine des flux et des états admissibles $\mathcal{Q}_\phi \times \mathcal{Q}_\psi$

est fermé. On en déduit que la limite $([\dot{\mathbf{v}}^0], \dot{\mathbf{a}}^0, [\mathbf{v}^0], \mathbf{a}^0)$ est un état admissible. Or on sait également que les potentiels ψ et ϕ sont continus dans l'espace $\mathcal{Q}_\phi \times \mathcal{Q}_\psi$. Si l'on fait l'hypothèse que les grandeurs $\mathbf{F}_{\text{rev}}^\eta$ et $\mathbf{F}_{\text{irr}}^\eta$ convergent vers une certaine limite lorsque le paramètre η tend vers zéro, on peut donc passer à la limite dans les inéquations précédentes. On en déduit :

$$\boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{n} \in \partial_{\mathbf{u}}\psi([\mathbf{v}^0], \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\mathbf{u}}}\phi([\dot{\mathbf{v}}^0], \dot{\mathbf{a}}^0, [\mathbf{v}^0], \mathbf{a}^0)$$

Sous les mêmes conditions, on démontre que l'on peut passer à la limite dans la seconde relation, et on obtient finalement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{n} \in \partial_{\mathbf{u}}\psi([\mathbf{v}^0], \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\mathbf{u}}}\phi([\dot{\mathbf{v}}^0], \dot{\mathbf{a}}^0, [\mathbf{v}^0], \mathbf{a}^0) \\ \mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{a}}\psi([\mathbf{v}^0], \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\mathbf{a}}}\phi([\dot{\mathbf{v}}^0], \dot{\mathbf{a}}^0, [\mathbf{v}^0], \mathbf{a}^0) \end{cases}$$

Pour compléter les équations précédentes, on a besoin de relier les champs mécaniques du domaine intérieur à ceux du domaine extérieur. On utilise pour cela les conditions de raccord établies au chapitre précédent, et qui restent toujours valables (cf. Section 2.2.3). En particulier, les conditions de raccord en déplacement et en contraintes à l'ordre 0 s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{0\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \\ \boldsymbol{\sigma}^{0\pm}(\mathbf{x}') &= \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \end{aligned}$$

On rappelle que les champs $\mathbf{u}^{0\pm}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{0\pm}$ constituent la limite des champs de déplacement et de contrainte de part et d'autre de la surface Γ .

Nous avons reformulé toutes les équations qui régissent le comportement de notre problème, dans le domaine intérieur comme dans le domaine extérieur. On peut à présent procéder à la construction du modèle limite, en procédant en deux étapes. Tout d'abord, on résout les équations mécaniques dans le domaine intérieur. On calcule le champ de déplacement d'ordre 0, puis le champ de contrainte d'ordre -1 dans la fibre, et enfin le comportement de l'interface fibre-matrice. Ensuite, on résout les équations mécaniques à l'échelle de la structure. En particulier, on établit les conditions de transmission à travers l'interface Γ , et on étudie l'influence des conditions limite au bord de Γ .

3.1.3 Résolution des problèmes intérieurs

Calcul du champ de déplacement d'ordre 0

On détermine tout d'abord la forme du champ de déplacement d'ordre 0 dans le domaine intérieur. Les relations de comportement d'ordre -2 et -1 dans la fibre et dans la matrice s'écrivent $\mathbf{A}^{\text{f}} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^0) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{A}^{\text{m}} : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^0) = \mathbf{0}$. Comme les tenseurs de rigidité \mathbf{A}^{f} et \mathbf{A}^{m} sont inversibles, on en déduit que $\boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^0) = \mathbf{0}$ dans la fibre et dans la matrice. Le champ de déplacement \mathbf{v}^0 prend donc la forme de deux mouvements de corps rigide dans la fibre et dans la matrice, qui sont *a priori* différents. Dans la matrice,

la condition de périodicité par rapport à la coordonnée y_3 empêche toute rotation. Le champ de déplacement dans la matrice est donc une simple translation. Or les conditions de raccord en déplacement s'écrivent à l'ordre 0 :

$$\mathbf{u}^{0\pm}(\mathbf{x}') = \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y})$$

On en déduit :

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{u}^{0+}(\mathbf{x}') = \mathbf{u}^{0-}(\mathbf{x}') \quad \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times (\mathbb{Y} \setminus \mathcal{F}_{\mathbb{Y}}) \quad (3.12)$$

Ce faisant, on démontre également que le champ de déplacement \mathbf{u}^0 dans le domaine extérieur est continu à travers l'interface Γ .

Dans la fibre, le champ de déplacement \mathbf{v}^0 prend la forme d'un déplacement de corps rigide :

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{u}^{\mathcal{F}}(\mathbf{x}') + \omega(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{y} \quad \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times \mathcal{F}_{\mathbb{Y}} \quad (3.13)$$

Les deux fonctions $\mathbf{u}^{\mathcal{F}}(\mathbf{x}')$ et $\omega(\mathbf{x}')$ suffisent à décrire le champ de déplacement dans la fibre à l'échelle du motif périodique : $\mathbf{u}^{\mathcal{F}}(\mathbf{x}')$ décrit le déplacement de l'axe de la fibre, tandis que $\omega(\mathbf{x}')$ décrit la rotation propre de la fibre autour de son axe. La forme de ce champ de déplacement sera précisée dans la suite des développements en étudiant l'interface fibre-matrice.

Remarque 18. *La rotation propre ω des fibres correspond à une rotation de grande amplitude. En effet, si l'on réécrit le champ de déplacement (3.13) en fonction des vraies coordonnées \mathbf{X} , on a :*

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{u}^{\mathcal{F}}(\mathbf{x}') + \frac{1}{\eta} \omega(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{X} - \mathbf{x}')$$

La rotation réelle des fibres est donc ω/η , et tend vers l'infini lorsque η tend vers zéro.

Calcul du champ de contraintes dans la fibre

On cherche à présent à déterminer la forme du champ de contrainte $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ dans la fibre. La condition d'équilibre volumique s'écrit $\mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^{-1}) = \mathbf{0}$ dans la fibre, et $\boldsymbol{\tau}^{-1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ à l'interface fibre-matrice. De plus, la relation de comportement dans la fibre s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}^{-1} = \mathbf{A}^{\text{rf}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{v}^0) + \varepsilon_p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^1))$$

En introduisant dans cette dernière relation le champ de déplacement (3.13), on obtient :

$$\boldsymbol{\tau}^{-1} = \mathbf{A}^{\text{rf}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{x'}(\mathbf{u}^{\mathcal{F}}) + \mathbf{grad}_{\Gamma}(\omega) \otimes_s (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{y}) + \varepsilon_p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^1))$$

Précisons que l'opérateur \mathbf{grad}_{Γ} est le gradient d'une quantité scalaire sur la surface Γ , et s'écrit en composantes :

$$\mathbf{grad}_{\Gamma}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} \mathbf{e}_{\alpha}$$

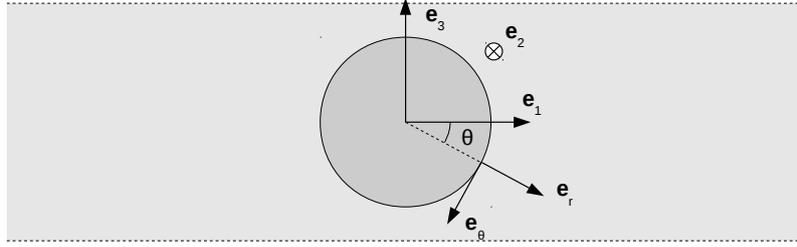


FIGURE 3.3 – Système de coordonnées polaires associées à la géométrie cylindrique de la fibre. L'angle θ est compté positivement dans le sens indirect, de sorte que les vecteurs $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_2)$ forment un repère orthonormal direct.

Le problème mécanique intérieur dans les fibres peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}^{-1} = \mathbf{A}^{\text{rf}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}'}(\mathbf{u}^{\mathcal{F}}) + \mathbf{grad}_\Gamma(\omega) \otimes_s (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{y}) + \varepsilon_p \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v}^1)) \\ \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^{-1}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Gamma \times \mathcal{F}_Y \\ \boldsymbol{\tau}^{-1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma \times \partial \mathcal{F}_Y \end{cases} \quad (3.14)$$

Les données de ce problème sont le déplacement $\mathbf{u}^{\mathcal{F}}$, la rotation propre ω et la prédéformation ε_p des fibres. On cherche à déterminer en fonction de ces grandeurs le champ de contraintes $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ et le champ de déplacement \mathbf{v}^1 dans les fibres.

Pour simplifier la formulation de ce problème, on opère un changement de variable. On introduit donc le champ de déplacement $\hat{\mathbf{v}}^1$, défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) &= \hat{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - (y_3)^2 \frac{\partial \omega}{\partial x_3}(\mathbf{x}') \mathbf{e}_1 \\ &\quad - \left(y_1 \frac{\partial u_1^{\mathcal{F}}}{\partial x_2}(\mathbf{x}') + y_3 \frac{\partial u_2^{\mathcal{F}}}{\partial x_3}(\mathbf{x}') + y_3 \frac{\partial u_3^{\mathcal{F}}}{\partial x_2}(\mathbf{x}') \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad - \left(y_3 \frac{\partial u_3^{\mathcal{F}}}{\partial x_3}(\mathbf{x}') + y_1 \frac{\partial u_1^{\mathcal{F}}}{\partial x_3}(\mathbf{x}') - y_1 y_3 \frac{\partial \omega}{\partial x_3}(\mathbf{x}') \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Précisons que la définition de $\hat{\mathbf{v}}^1$ n'a pas de rapport avec celle utilisée au chapitre précédent. En substituant ce champ de déplacement dans la relation de comportement du système (3.14), on obtient :

$$\boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{A}^{\text{rf}} : \left(\left(\frac{\partial u_2^{\mathcal{F}}}{\partial x_2}(\mathbf{x}') + \varepsilon_p \right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2}(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \otimes_s (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{y}) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\hat{\mathbf{v}}^1) \right) \quad (3.15)$$

On introduit ici des coordonnées polaires (r, θ) , et les vecteurs unitaires associés $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$, définis par :

$$\begin{aligned} y_1 &= r \cos(\theta) & \mathbf{e}_r &= \cos(\theta) \mathbf{e}_1 - \sin(\theta) \mathbf{e}_3 \\ y_3 &= -r \sin(\theta) & \mathbf{e}_\theta &= -\sin(\theta) \mathbf{e}_1 - \cos(\theta) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Le rayon r constitue la distance d'un point quelconque par rapport à l'axe de la fibre, et θ est l'angle polaire compté négativement dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Ainsi, le repère $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_2)$ est un repère orthonormal direct associé à la géométrie cylindrique de la fibre (voir Figure 3.3). En utilisant ce nouveau repère, la relation (3.15) s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{A}^{\text{rf}} : \left(\left(\frac{\partial u_2^{\mathcal{F}}}{\partial x_2}(\mathbf{x}') + \varepsilon_p \right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + r \frac{\partial \omega}{\partial x_2}(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_\theta + \varepsilon_y(\tilde{\mathbf{v}}^1) \right) \quad (3.16)$$

On reconnaît dans cette relation une déformation axiale, et une torsion des fibres. On peut donc chercher le champ de contraintes dans les fibres sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 2r\gamma(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_\theta \quad (3.17)$$

On peut vérifier que ce champ de contraintes vérifie les conditions d'équilibre du système d'équations (3.14). En introduisant ce champ de contraintes dans la relation de comportement (3.16), on obtient :

$$T(\mathbf{x}') = E^{\text{rf}} \left(\frac{\partial u_2^{\mathcal{F}}}{\partial x_2}(\mathbf{x}') + \varepsilon_p \right) \quad (3.18)$$

$$\gamma(\mathbf{x}') = \mu^{\text{rf}} \frac{\partial \omega}{\partial x_2}(\mathbf{x}') \quad (3.19)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = -\nu^{\text{f}} r \left(\frac{\partial u_2^{\mathcal{F}}}{\partial x_2}(\mathbf{x}') + \varepsilon_p \right) \mathbf{e}_r + \tilde{\mathbf{v}}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y})$$

Ces champs de déplacement et de contrainte constituent donc l'unique solution du système (3.14), à un mouvement de corps rigide des fibres près, noté $\tilde{\mathbf{v}}^1$. L'état de contrainte dans les fibres à l'ordre -1 combine une traction et une torsion. La traction des fibres est proportionnelle à leur déformation axiale, tandis que la torsion est proportionnelle au gradient de la rotation propre. Le champ de déplacement étudié $\tilde{\mathbf{v}}^1$ dérive d'un simple effet de Poisson, à des mouvements de corps rigide près.

On introduit à présent deux quantités, que sont la contrainte moyenne à l'ordre -1 dans la cellule périodique $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$, et le couple des efforts de torsion dans la fibre \mathbf{c}^Γ . Nous verrons dans la suite des développements que la contrainte moyenne $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ apparaît naturellement dans la formulation du problème macroscopique. On la définit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\mathbf{x}') = \frac{1}{L^2} \int_{\mathcal{F}_Y} \boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (3.20)$$

Le préfacteur $1/L^2$ donne à cette quantité la dimension d'une contrainte. En utilisant la relation (3.17) on peut exprimer cette contrainte moyenne en fonction de la traction $T(\mathbf{x}')$ dans la fibre :

$$\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\mathbf{x}') = \frac{\pi d^2}{4e^2} T(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.21)$$

Enfin, avec la relation (3.18), on peut exprimer cette contrainte en fonction de la déformation axiale de la fibre :

$$\boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\mathbf{x}') = \kappa_m \left(\frac{\partial u_2^{\mathcal{F}}}{\partial x_2}(\mathbf{x}') + \varepsilon_p \right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.22)$$

Le paramètre κ_m est un coefficient de rigidité, qui vaut :

$$\kappa_m = \frac{\pi d^2}{4e^2} E^{\text{rf}} = \frac{\pi d^2}{4eL} E^{\text{f}}$$

On définit également le couple \mathbf{c}^Γ de la façon suivante :

$$\mathbf{c}^\Gamma(\mathbf{x}') = \frac{1}{L^2} \int_{\mathcal{F}_\mathbb{Y}} \mathbf{y} \wedge (\boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_2) \, d\mathbf{y}$$

En reprenant la relation (3.17), on peut exprimer ce couple en fonction du cisaillement dans la fibre :

$$\mathbf{c}^\Gamma(\mathbf{x}') = \frac{\pi d^4 L^2}{32e^4} \gamma(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \quad (3.23)$$

Avec la relation (3.19), on peut également l'exprimer en fonction de la rotation propre ω :

$$\mathbf{c}^\Gamma(\mathbf{x}') = \kappa_t \frac{\partial \omega}{\partial x_2}(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2$$

Dans cette relation, le coefficient de rigidité κ_t vaut :

$$\kappa_t = \frac{\pi d^4 L^2}{32e^4} \mu^{\text{rf}} = \frac{\pi d^4 L}{32e^3} \mu^{\text{f}}$$

Comportement de l'interface fibre-matrice

Pour compléter l'analyse du domaine intérieur, il reste à étudier le comportement de l'interface fibre-matrice. Le comportement de cette interface s'écrit à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{n} \in \partial_{\mathbf{u}} \psi(\llbracket \mathbf{v}^0 \rrbracket, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\mathbf{u}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{v}}^0 \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}^0, \llbracket \mathbf{v}^0 \rrbracket, \mathbf{a}^0) \\ \mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{a}} \psi(\llbracket \mathbf{v}^0 \rrbracket, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{v}}^0 \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}^0, \llbracket \mathbf{v}^0 \rrbracket, \mathbf{a}^0) \end{cases} \quad (3.24)$$

On fait l'hypothèse que le comportement de l'interface interdit l'interpénétration des fibres et de la matrice. Si l'on considère le champ de déplacement d'ordre 0 dans la fibre (3.13) et dans la matrice (3.12), on a :

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{u}^0(0, \mathbf{x}') & \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times (\mathbb{Y} \setminus \mathcal{F}_\mathbb{Y}) \\ \mathbf{u}^{\mathcal{F}}(\mathbf{x}') + r\omega(\mathbf{x}') \mathbf{e}_\theta & \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times \mathcal{F}_\mathbb{Y} \end{cases}$$

La condition de non-interpénétration s'écrit donc :

$$(\mathbf{u}^0(0, \mathbf{x}') - \mathbf{u}^{\mathcal{F}}(\mathbf{x}')) \cdot \mathbf{e}_r \geq 0 \quad \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times \partial \mathcal{F}_\mathbb{Y}$$

Comme le vecteur normal \mathbf{e}_r décrit tout le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, les fibres ne peuvent glisser que dans la direction \mathbf{e}_2 . On introduit donc le glissement ξ des fibres par rapport à la matrice dans la direction \mathbf{e}_2 , défini par :

$$\mathbf{u}^{\mathcal{F}}(\mathbf{x}') = \mathbf{u}^0(0, \mathbf{x}') + \xi(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2$$

Le champ de déplacement d'ordre 0 dans le domaine intérieur s'écrit donc :

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{u}^0(0, \mathbf{x}') & \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times (\mathbb{Y} \setminus \mathcal{F}_{\mathbb{Y}}) \\ \mathbf{u}^0(0, \mathbf{x}') + \xi(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 + r\omega(\mathbf{x}') \mathbf{e}_\theta & \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times \mathcal{F}_{\mathbb{Y}} \end{cases} \quad (3.25)$$

Le saut de déplacement à l'interface fibre matrice vaut donc :

$$\llbracket \mathbf{v}^0 \rrbracket(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = -\xi(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 - \frac{d}{2} \omega(\mathbf{x}') \mathbf{e}_\theta \quad \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times \partial\mathcal{F}_{\mathbb{Y}} \quad (3.26)$$

Ce saut de déplacement, exprimé dans la base locale de l'interface $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_2)$, est indépendant de la variable \mathbf{y} . Comme le comportement de l'interface ne dépend que de ce saut de déplacement, on en déduit que, au sein d'un motif périodique, tous les points de l'interface ont vécu la même histoire de chargement. De ce fait, les variables internes d'interface $\mathbf{a}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y})$ ne dépendent pas non plus de la variable \mathbf{y} .

On s'intéresse à présent à l'équilibre mécanique des fibres. La condition d'équilibre à l'ordre -1 s'écrit $\mathbf{div}_{\mathbf{x}'}(\boldsymbol{\tau}^{-1}) + \mathbf{div}_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0}$. D'après l'expression (3.17) de $\boldsymbol{\tau}^{-1}$, on en déduit :

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + r \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \mathbf{e}_\theta + \mathbf{div}_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

En intégrant sur la section $\mathcal{F}_{\mathbb{Y}}$ d'une fibre, et en utilisant le théorème d'Ostrogradsky, on obtient :

$$\frac{\pi d^2 L^2}{4e^2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \int_{\partial\mathcal{F}_{\mathbb{Y}}} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r \, dl = \mathbf{0}$$

On en déduit que la seule composante de $\boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r$ qui est non nulle en moyenne sur le bord de la fibre est $\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r$. En introduisant la contrainte moyenne $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ définie par (3.21), ceci s'écrit aussi :

$$L \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}^\Gamma) + \left(\frac{1}{L} \int_{\partial\mathcal{F}_{\mathbb{Y}}} \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r \, dl \right) \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

L'opérateur différentiel \mathbf{div}_Γ constitue la divergence d'un flux d'interface, et s'écrit en composantes :

$$\mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial \tau_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} \mathbf{e}_\beta$$

Par ailleurs, on peut étudier l'équilibre de la fibre dans un mouvement virtuel de rotation. En prenant le produit scalaire de la relation (3.27) avec le champ de déplacement virtuel $r \mathbf{e}_\theta$, et en intégrant sur la section transverse de la fibre $\mathcal{F}_{\mathbb{Y}}$, on obtient :

$$\int_{\mathcal{F}_{\mathbb{Y}}} r^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \, dS + \int_{\mathcal{F}_{\mathbb{Y}}} r \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{div}_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\tau}^0) \, dS = 0$$

En intégrant par parties cette relation, comme le champ de déplacement $r \mathbf{e}_\theta$ est un mouvement de corps rigide, on obtient :

$$\frac{\pi d^4 L^4}{32e^4} \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + \int_{\partial\mathcal{F}_{\mathbb{Y}}} r \mathbf{e}_\theta \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r \, dl = 0$$

En introduisant le couple \mathbf{c}^Γ défini par (3.23), on obtient :

$$L \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{c}^\Gamma) + \frac{d}{2L} \int_{\partial\mathcal{F}_Y} \mathbf{e}_\theta \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r \, dl = 0 \quad (3.29)$$

Dans cette relation, l'opérateur différentiel $\operatorname{div}_\Gamma$ constitue toujours la divergence d'un flux d'interface, et s'écrit en composantes :

$$\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{c}^\Gamma) = \frac{\partial c_\alpha^\Gamma}{\partial x_\alpha}$$

Les relations (3.28) et (3.29) relient la contrainte membranaire $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ et le couple transmis par les fibres \mathbf{c}^Γ à la contrainte d'interface $\boldsymbol{\tau}^0 \mathbf{e}_r$. Pour compléter l'analyse du domaine intérieur, on reformule le comportement de l'interface en fonction des nouveaux degrés de liberté des fibres ξ et ω . On introduit à cette fin deux nouveaux potentiels Ψ et Φ , définis par :

$$\begin{cases} \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) = \frac{\pi d}{e} \psi \left(-\xi \mathbf{e}_2 - \frac{d}{2} \omega \mathbf{e}_\theta, \mathbf{a}^0 \right) \\ \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) = \frac{\pi d}{e} \phi \left(-\dot{\xi} \mathbf{e}_2 - \frac{d}{2} \dot{\omega} \mathbf{e}_\theta, \dot{\mathbf{a}}^0, -\xi \mathbf{e}_2 - \frac{d}{2} \omega \mathbf{e}_\theta, \mathbf{a}^0 \right) \end{cases} \quad (3.30)$$

Par définition, ces potentiels présentent les mêmes propriétés que ψ et ϕ : ils sont tous deux semi-continus inférieurs, et continus sur l'espace des états et des flux physiquement admissibles. De plus, Ψ est convexe séparément par rapport au couple (ξ, ω) , et par rapport à \mathbf{a}^0 , tandis que Φ est convexe par rapport aux flux $(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0)$. On peut donc définir les sous-gradients de ces potentiels par rapport à ces arguments. Les sous-gradients du potentiel Ψ s'écrivent :

$$\partial_\xi \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) \qquad \partial_\omega \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) \qquad \partial_{\mathbf{a}} \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0)$$

De même, les sous-gradients du potentiel Φ sont notés :

$$\partial_{\dot{\xi}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) \qquad \partial_{\dot{\omega}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) \qquad \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0)$$

Dans la condition d'équilibre en glissement (3.28), seule la composante $\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r$ de la contrainte d'interface intervient. En reprenant l'expression (3.24) du comportement de l'interface, et l'expression (3.26) du saut de déplacement, on démontre que :

$$-\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r \in \frac{\partial \llbracket \mathbf{v}^0 \rrbracket}{\partial \xi} \cdot \partial_{\mathbf{u}} \psi(\llbracket \mathbf{v}^0 \rrbracket, \mathbf{a}^0) + \frac{\partial \llbracket \dot{\mathbf{v}}^0 \rrbracket}{\partial \dot{\xi}} \cdot \partial_{\dot{\mathbf{u}}} \phi(\llbracket \dot{\mathbf{v}}^0 \rrbracket, \dot{\mathbf{a}}^0, \llbracket \mathbf{v}^0 \rrbracket, \mathbf{a}^0)$$

En utilisant les définitions (3.30) et la formule de dérivation des fonctions composées, on en déduit :

$$-\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r \in \frac{e}{\pi d} \partial_\xi \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \frac{e}{\pi d} \partial_{\dot{\xi}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0)$$

Comme les grandeurs ξ , ω et \mathbf{a}^0 sont homogènes au sein de la cellule périodique, on peut intégrer cette relation sur le bord $\partial\mathcal{F}_Y$ de la fibre. En utilisant la relation (3.28), on obtient la première équation de la relation de comportement homogénéisée :

$$L \operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}^\Gamma) \in \partial_\xi \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\xi}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) \quad (3.31)$$

On procède ensuite de même pour la condition d'équilibre en rotation (3.29). Dans cette relation, c'est la composante $\mathbf{e}_\theta \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r$ de la contrainte d'interface qui intervient. Avec l'expression (3.26) du saut de déplacement, on reformule donc la première équation du système (3.24) sous la forme :

$$-\frac{d}{2} \mathbf{e}_\theta \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_r \in \frac{\partial[[\mathbf{v}^0]]}{\partial\omega} \cdot \partial_{\mathbf{u}} \psi([[\mathbf{v}^0]], \mathbf{a}^0) + \frac{\partial[[\dot{\mathbf{v}}^0]]}{\partial\dot{\omega}} \cdot \partial_{\dot{\mathbf{u}}} \phi([[\dot{\mathbf{v}}^0]], \dot{\mathbf{a}}^0, [[\mathbf{v}^0]], \mathbf{a}^0)$$

En réinjectant cette relation dans (3.29), et en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient la seconde équation de la relation de comportement homogénéisée :

$$L \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{c}^\Gamma) \in \partial_\omega \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\omega}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) \quad (3.32)$$

Enfin, on reformule la dernière relation du système (3.24) en fonction des nouveaux potentiels Ψ et Φ sous la forme suivante :

$$\mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{a}} \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) \quad (3.33)$$

Au final, si l'on rassemble les relations (3.31), (3.32) et (3.33), le comportement homogénéisé de l'interface fibre-matrice s'écrit :

$$\begin{cases} L \operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}^\Gamma) \in \partial_\xi \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\xi}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) \\ L \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{c}^\Gamma) \in \partial_\omega \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\omega}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) \\ \mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{a}} \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) \end{cases} \quad (3.34)$$

Ce système d'équations traduit un équilibre entre l'énergie Ψ stockée à l'interface, la puissance Φ dissipée à l'interface et le travail fourni par le volume environnant. La première relation s'interprète comme une condition d'équilibre dans un mouvement virtuel de glissement des fibres, la seconde dans un mouvement de rotation des fibres, et la dernière au cours d'une évolution des variables internes. Les potentiels Ψ et Φ constituent ainsi respectivement l'énergie interne et la puissance dissipée du modèle d'interface homogénéisé.

3.1.4 Résolution du problème global

On peut à présent procéder à la résolution du problème global à l'ordre 0. À cet ordre, la condition d'équilibre s'écrit $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0}$, et la relation de comportement $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0)$. Les conditions limite s'écrivent $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^d$ sur $\partial_u \Omega$ et $\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$ sur $\partial_F \Omega$. Pour compléter le système d'équations, il reste à identifier d'éventuels saut de

déplacement et de contraintes à travers la surface Γ , ainsi que l'effet des conditions limite sur le bord de la surface.

Nous avons démontré précédemment avec la relation (3.12) que le champ de déplacement \mathbf{u}^0 est continu à travers la surface Γ . Établissons à présent la forme d'un éventuel saut de contraintes à travers la surface Γ . On utilise pour cela les conditions de raccord en contraintes à l'ordre 0 :

$$\boldsymbol{\sigma}^{0\pm}(\mathbf{x}') = \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y})$$

Le champ de contrainte $\boldsymbol{\tau}^0$ n'est pas homogène à l'échelle d'un motif élémentaire. Cependant, il obéit à la condition d'équilibre d'ordre -1 $\mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) = \mathbf{0}$ dans la matrice. En intégrant cette relation sur la surface $\mathbb{Y} \setminus \mathcal{F}_{\mathbb{Y}}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{Y} \setminus \mathcal{F}_{\mathbb{Y}}} \mathbf{div}_y(\boldsymbol{\tau}^0) dS = \mathbf{0}$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky et la condition de périodicité en y_3 , la relation précédente s'écrit :

$$L \left(\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 - \lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{e}_1 \right) = \int_{\partial \mathcal{F}_{\mathbb{Y}}} \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{n} d\ell$$

En utilisant la relation (3.28) et les conditions de raccord en contrainte, on obtient finalement :

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}^0 \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 + L \mathbf{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\sigma}^{\Gamma}) = \mathbf{0}$$

La contrainte est donc discontinue au travers de l'interface Γ . Cette discontinuité est due à l'existence de contraintes membranaires $\boldsymbol{\sigma}^{\Gamma}$ transisant dans l'interface. En revanche, on peut remarquer que le couple \mathbf{c}^{Γ} transmis par les fibres n'induit pas de saut de contraintes à travers l'interface.

Pour compléter cette analyse du problème extérieur d'ordre 0, il reste à étudier les effets de bord susceptibles d'apparaître sur le bord $\partial\Gamma$ de la surface Γ . Pour cela, on distingue la partie du bord $\partial_u\Gamma$ qui est soumise à des déplacements imposés, de la partie complémentaire $\partial_F\Gamma$ qui est soumise à des forces imposées. Les conditions limite en déplacement dans le problème réel (3.5) s'écrivent :

$$\mathbf{u}^{\eta}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}^d(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X} \in \partial_u\Omega$$

En reprenant la décomposition (3.9) du champ de déplacement dans le domaine intérieur¹, et en passant à la limite $\eta \rightarrow 0$, on obtient :

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x}') \quad \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \partial_u\Gamma \times \mathbb{Y}$$

1. Notons que la validité des développements intérieurs au bord du domaine est contestable, car des effets de couche limite peuvent apparaître sur ce bord. Ce résultat est donc sujet à caution.

Or on a démontré que le champ de déplacement d'ordre 0 dans la domaine intérieur est de la forme (3.25) :

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{u}^0(0, \mathbf{x}') & \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times (\mathbb{Y} \setminus \mathcal{F}_{\mathbb{Y}}) \\ \mathbf{u}^0(0, \mathbf{x}') + \xi(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 + r\omega(\mathbf{x}') \mathbf{e}_\theta & \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in \Gamma \times \mathcal{F}_{\mathbb{Y}} \end{cases}$$

On en déduit simplement :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^0(0, \mathbf{x}') = \mathbf{u}^d(\mathbf{x}') \\ \xi(\mathbf{x}') = 0 \\ \omega(\mathbf{x}') = 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{x}' \in \partial_u \Gamma$$

Les conditions limite en déplacement sur le bord $\partial_u \Gamma$ de la surface interdisent donc le glissement et la rotation des fibres.

De même, on peut s'intéresser aux conditions limite susceptibles d'apparaître sur le bord $\partial_F \Gamma$. Les conditions limite en contraintes du problème réel (3.5) sont précisées dans la relation (3.6). Elles s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}^\eta \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \Omega \setminus \partial_F \mathcal{F} \\ \eta^{-1} T^d(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_2 + \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \mathcal{F} \end{cases}$$

Par ailleurs, l'état de contrainte dans le domaine intérieur à l'ordre -1 est donné par la relation (3.17), et s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dans } \Gamma \times (\mathbb{Y} \setminus \mathcal{F}_{\mathbb{Y}}) \\ T(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 2r\gamma(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_\theta & \text{dans } \Gamma \times \mathcal{F}_{\mathbb{Y}} \end{cases}$$

Si l'on fait l'hypothèse que les développements du domaine intérieur restent valable sur le bord de la structure, on peut rapprocher cette relation de la précédente. En identifiant ces deux relations à l'ordre -1 en η , on obtient :

$$\begin{cases} T(\mathbf{x}') = T^d(\mathbf{x}') \\ \gamma(\mathbf{x}') = 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{x}' \in \partial_F \Gamma$$

En utilisant les relations (3.21) et (3.23), ceci s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\Gamma(\mathbf{x}') = \frac{\pi d^2}{4e^2} T^d(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{c}^\Gamma(\mathbf{x}') = \mathbf{0} \end{cases} \quad \forall \mathbf{x}' \in \partial_F \Gamma$$

Les efforts appliqués sur le bord de la structure induisent une contrainte membranaire $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ non nulle dans la nappe de fibres. En revanche, ils n'exercent pas de couple de torsion sur la section des fibres. Le couple \mathbf{c}^Γ est donc nul sur le bord $\partial_F \Gamma$. Précisons que ce résultat n'est pas général, car il dépend de la forme (3.6) des efforts extérieurs appliqués.

En rassemblant toutes les équations établies jusqu'ici, le problème complet peut s'écrire à l'ordre 0 :

Conditions d'équilibre

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}^0 \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 + L \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}^\Gamma) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.35)$$

Relations de comportement

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}^\Gamma = \kappa_m \left(\frac{\partial(u_2^0 + \xi)}{\partial x_2} + \varepsilon_p \right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{c}^\Gamma = \kappa_t \frac{\partial \omega}{\partial x_2}(\mathbf{x}') \mathbf{e}_2 & \text{sur } \Gamma \\ L \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}^\Gamma) \in \partial_\xi \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\xi}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) & \text{sur } \Gamma \\ L \mathbf{div}_\Gamma(\mathbf{c}^\Gamma) \in \partial_\omega \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\omega}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) & \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{a}} \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.36)$$

Conditions limite en déplacement

$$\begin{cases} \llbracket \mathbf{u}^0 \rrbracket = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^d & \text{sur } \partial_u \Omega \\ \xi = 0 & \text{sur } \partial_u \Gamma \\ \omega = 0 & \text{sur } \partial_u \Gamma \end{cases} \quad (3.37)$$

Conditions limite en contraintes

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^\Gamma = \frac{\pi d^2}{4e^2} T^d \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \text{sur } \partial_F \Gamma \\ \mathbf{c}^\Gamma(\mathbf{x}') = \mathbf{0} & \text{sur } \partial_F \Gamma \end{cases} \quad (3.38)$$

On rappelle que les potentiels Ψ et Φ sont définis analytiquement par :

$$\begin{cases} \Psi(\xi, \omega, \mathbf{a}^0) = \frac{\pi d}{e} \psi \left(-\xi \mathbf{e}_2 - \frac{d}{2} \omega \mathbf{e}_\theta, \mathbf{a}^0 \right) \\ \Phi(\dot{\xi}, \dot{\omega}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \omega, \mathbf{a}^0) = \frac{\pi d}{e} \phi \left(-\dot{\xi} \mathbf{e}_2 - \frac{d}{2} \dot{\omega} \mathbf{e}_\theta, \dot{\mathbf{a}}^0, -\xi \mathbf{e}_2 - \frac{d}{2} \omega \mathbf{e}_\theta, \mathbf{a}^0 \right) \end{cases} \quad (3.39)$$

De même, les rigidités κ_m et κ_t sont définies par :

$$\kappa_m = \frac{\pi d^2}{4eL} E^f \quad \kappa_t = \frac{\pi d^4 L}{32e^3} \mu^f \quad (3.40)$$

Les inconnues de ce problème sont le champ de déplacement \mathbf{u}^0 dans la matrice, le glissement ξ des fibres, leur rotation propre ω et les variables internes \mathbf{a}^0 de l'interface fibre-matrice. Les grandeurs conjuguées de ces inconnues sont le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans la matrice, les contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ transmises par les fibres et le couple \mathbf{c}^Γ porté par les fibres. Les nombreuses équations de ce système s'interprètent assez simplement. Les équations (3.35) correspondent respectivement à l'équilibre des forces dans la matrice, et à travers la surface Γ . Le système (3.36) rassemble les relations de comportement de la matrice, de la nappe de fibres et de l'interface fibre-matrice. Le comportement de la nappe de fibres est caractérisé par une rigidité κ_m d'élongation, et une rigidité κ_t de torsion des fibres. Par ailleurs, le comportement de l'interface est caractérisé par une énergie interne Ψ , et un potentiel de dissipation Φ . Le système (3.37) rassemble les conditions limite en déplacement. On précise ici que le saut de déplacement à travers la surface Γ est nul. Par ailleurs, en plus des conditions limite usuelles sur le champ de déplacement, le glissement et la rotation des fibres sont interdits sur le bord $\partial_u \Gamma$. Enfin, le système (3.38) rassemble les conditions limite en contraintes. En plus des conditions limite usuelles sur le bord $\partial_F \Omega$, les contraintes exercées sur la section des fibres induisent une contrainte membranaire dans la nappe de fibres. En revanche, le couple exercé sur les fibres au bord du domaine est nul.

On peut remarquer que les conditions limite sur les bords $\partial_u \Gamma$ et $\partial_F \Gamma$ de la surface n'induisent pas de rotation des fibres. Ceci ne signifie pas pour autant que la rotation des fibres est négligeable : si le comportement en glissement de l'interface fibre-matrice est anisotrope, il peut introduire un couplage entre le glissement ξ des fibres et leur rotation ω . Dans ce cas, un simple glissement des fibres peut les faire pivoter.

Ce modèle présente plusieurs avantages. Tout d'abord, les paramètres Ψ , Φ , κ_m et κ_t qui caractérisent le comportement de ce modèle peuvent être calculés analytiquement via les relations (3.39) et (3.40). De ce point de vue, ce modèle est plus simple à mettre en œuvre que le modèle asymptotique développé au chapitre précédent, qui nécessitait de résoudre des problèmes élémentaires au sein d'une cellule périodique pour identifier le comportement effectif des hétérogénéités. De plus, ce modèle permet de prendre en compte une éventuelle non-linéarité du comportement de l'interface fibre-matrice, qui était supposée parfaitement adhérente dans le chapitre précédent.

La contrepartie de ces avantages est que ce modèle a une portée moindre que le précédent : il n'est adapté qu'à la description du comportement mécanique de fibres rigides cylindriques réparties sur une surface, tandis que le modèle général permettait d'étudier le comportement effectif d'une grande variété d'hétérogénéités (cf. Section 2.5). De plus, le modèle présenté ici n'est exact qu'à l'ordre 0 en η , tandis que le modèle asymptotique général est exact à l'ordre 1. On peut donc s'attendre à ce qu'il soit moins précis que le modèle général dans un régime élastique.

3.1.5 Applications du modèle limite

Comportement de grille adhérente

On peut s'intéresser à présent à divers exemples d'application de ce modèle. Considérons tout d'abord la situation où les fibres sont parfaitement adhérentes à la matrice. Dans ce cas, l'énergie d'interface et le potentiel de dissipation s'écrivent :

$$\begin{cases} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = \mathcal{I}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0}) \\ \phi(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket) = \mathcal{I}(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \mathbf{0}) \end{cases}$$

On en déduit que le glissement ξ , la rotation ω et le couple \mathbf{c}^Γ des fibres sont nuls. En revanche, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}^\Gamma$ n'est pas toujours nulle. Le modèle limite devient alors :

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}^0 \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 + L \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}^\Gamma) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \boldsymbol{\sigma}^\Gamma = \kappa_m \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \varepsilon_p \right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \text{sur } \Gamma \\ \llbracket \mathbf{u}^0 \rrbracket = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^d & \text{sur } \partial_u \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial_F \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^\Gamma = \frac{\pi d^2}{4e^2} T^d \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \text{sur } \partial_F \Gamma \end{cases} \quad (3.41)$$

Le problème mécanique d'ordre 0 devient un simple problème élastique, où la surface Γ se comporte comme une membrane anisotrope prédéformée. Cette membrane ne présente de rigidité que dans la direction des fibres, et cette rigidité s'exprime sous la forme analytique suivante :

$$L \kappa_m = \frac{\pi d^2}{4e} E^f \quad (3.42)$$

On reconnaît dans cette relation le rapport de la section des fibres sur leur espacement, multiplié par le module d'Young. Le comportement de la matrice n'a donc aucune influence sur le comportement homogénéisé des fibres. Ce modèle est appelé modèle de *grille*, en raison de la rigidité uniaxiale des fibres. Notons que l'on retrouve ici un comportement d'interface identique au modèle `GRILLE_MEMBRANE` existant dans *Code_Aster*.

On peut reformuler ce comportement dans un cadre énergétique. On introduit pour cela la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} + \frac{L}{2} \int_{\Gamma} \kappa_m \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \varepsilon_p \right)^2 \, d\mathbf{x}' - \int_{\Omega} \rho^* \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dS - L \int_{\partial_F \Gamma} \frac{\pi d^2}{4e^2} T^d \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_2 \, dl \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette fonctionnelle les énergies mécaniques de déformation de la matrice et des fibres, ainsi que le travail des forces extérieures sur ce système. Comme le tenseur de rigidité de la matrice \mathbf{A}^m , et le paramètre de rigidité des fibres κ_m sont définis positifs, cette fonctionnelle est convexe. On définit également l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \mid \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3, w_2 \in H^1(\Gamma), \mathbf{w} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}$$

Les hypothèses faites sur la régularité de ces champs de déplacement sont exactement celles nécessaires pour que la fonctionnelle \mathcal{P}_{eff} soit bien définie. En utilisant des arguments variationnels classiques, on peut démontrer que résoudre le problème (3.41) revient à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\mathbf{u}^0 = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{C}} \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{w})$$

On peut démontrer que la fonctionnelle \mathcal{P}_{eff} est coercive, et strictement convexe sur l'espace \mathcal{C} . On en déduit que le minimum de cette fonctionnelle existe, et est unique.

Remarque 19. *De curieux effets de bord peuvent se manifester sur le bord de la surface soumis à des efforts imposés $\partial_F \Gamma$. Supposons par exemple que l'on modélise une nappe de câbles de précontrainte au sein d'une structure, et que ces câbles débouchent sur un bord à surface libre. Dans ce cas, d'après la dernière relation du système (3.41), la contrainte transissant dans les câbles est nulle sur le bord de la structure. Pourtant, en pratique, les câbles sont justement tendus à partir du bord de la structure par un dispositif d'ancrage. Ce modèle ne permet donc pas de représenter finement les phénomènes mécaniques se produisant à proximité des ancrages.*

Comportement de grille avec décohésion

Dans le cas général, notre modèle intègre un possible glissement des fibres par rapport à la matrice, ainsi qu'une rotation propre des fibres. Cette rotation peut être activée de deux manières : soit par des conditions limite spécifiques sur le bord de la structure, soit par une dissymétrie du comportement de l'interface fibre-matrice, qui introduit un couplage entre le glissement des fibres et leur rotation. Cependant, on peut penser que cette cinématique de torsion des fibres a peu d'influence sur le comportement d'une structure de génie civil, et il semble donc raisonnable de la négliger. Un premier argument allant dans ce sens est que, parmi les sollicitations classiques de ce type de structure (traction, flexion, torsion, fissuration, etc.), aucune n'induit directement de torsion sur les barres d'armature et les câbles de précontrainte. *A contrario*, si l'on observe l'état de surface de l'acier (voir Figure 3.4), on constate qu'il présente généralement des reliefs en forme de vrille. Il est donc possible que ces reliefs induisent un couplage entre le glissement et la rotation des fibres. Ce couplage est cependant difficile à estimer. Considérant que la rotation propre des barres d'acier est très largement ignorée dans la littérature, on



FIGURE 3.4 – Illustration de l'état de surface d'une barre d'armature (haut) et d'un câble en acier tressé (bas).

choisit de négliger ce comportement. Le problème limite devient le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^0) + \rho^m \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\
 \llbracket \boldsymbol{\sigma}^0 \rrbracket \cdot \mathbf{e}_1 + L \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}^\Gamma) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma \\
 \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0) \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\
 \boldsymbol{\sigma}^\Gamma = \kappa_m \left(\frac{\partial(u_2^0 + \xi)}{\partial x_2} + \varepsilon_p \right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad \text{sur } \Gamma \\
 L \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}^\Gamma) \in \partial_\xi \Psi(\xi, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\xi}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \mathbf{a}^0) \quad \text{sur } \Gamma \\
 \mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{a}} \Psi(\xi, \mathbf{a}^0) + \partial_{\dot{\mathbf{a}}} \Phi(\dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \mathbf{a}^0) \quad \text{sur } \Gamma \\
 \llbracket \mathbf{u}^0 \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma \\
 \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^d \quad \text{sur } \partial_u \Omega \\
 \xi = 0 \quad \text{sur } \partial_u \Gamma \\
 \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \quad \text{sur } \partial_F \Omega \\
 \boldsymbol{\sigma}^\Gamma = \frac{\pi d^2}{4e^2} T^d \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad \text{sur } \partial_F \Gamma
 \end{array} \right. \quad (3.43)$$

La rigidité κ_m des fibres reste inchangée, et les potentiels Ψ et Φ sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Psi(\xi, \mathbf{a}^0) = \frac{\pi d}{e} \psi(-\xi \mathbf{e}_2, \mathbf{a}^0) \\
 \Phi(\dot{\xi}, \dot{\mathbf{a}}^0, \xi, \mathbf{a}^0) = \frac{\pi d}{e} \phi(-\dot{\xi} \mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{a}}^0, -\xi \mathbf{e}_2, \mathbf{a}^0)
 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Ce modèle est appelé *modèle de grille avec décohésion*. Il modélise à la fois le comportement mécanique des fibres, et leur possible glissement par rapport à la matrice. Ce modèle semble le plus pertinent pour modéliser le comportement des armatures et des câbles de précontrainte dans une structure en béton armé. Ce modèle sera donc implanté, et validé dans la suite de ce chapitre.

Comportement d'un treillis d'armatures

Dans la construction de ce modèle, nous avons supposé que les fibres rigides étaient réparties de façon parallèle sur la surface Γ . Or en pratique, dans les structures de génie civil, les barres d'armature sont organisées en treillis orthogonaux. On peut donc se demander si le modèle de grille avec décohéssion reste pertinent dans ce contexte. Ceci dépend essentiellement de la manière dont les armatures qui se croisent sont liées. Considérons tout d'abord la situation où les armatures sont en simple contact, voire légèrement espacées. Dans ce cas, si l'on revient à l'analyse des champs mécanique faite dans le domaine intérieur (cf. Section 3.1.3), chaque barre présente un mouvement propre de corps rigide, et se trouve liée au béton environnant par la loi d'interface acier-béton standard. Les barres d'acier n'interagissent donc pas, et coulissent chacune dans leur direction propre. Le comportement du treillis d'armatures correspond donc à la surperposition de deux modèles de grille avec décohéssion. Ce modèle reste donc tout à fait pertinent.

En revanche, si les barres d'acier sont liées entre elles — soudées, ou ligaturées par exemple — le comportement du treillis est compliqué par une loi d'adhésion spécifique entre les barres d'armature. Dans ce cas, le modèle de grille avec décohéssion n'est plus directement valable. L'étude asymptotique doit être adaptée pour prendre en compte cette nouvelle interaction, et le modèle limite correspondant peut être sensiblement plus compliqué.

Extensions du modèle

Plusieurs phénomènes ont été négligés dans la construction de ce modèle, qui pourront faire l'objet de travaux ultérieurs. Tout d'abord, on a fait l'hypothèse que le comportement des fibres reste toujours élastique. Or, dans le domaine du génie civil, lorsque les sollicitations exercées sur une structure dépassent un certain seuil, les armatures en acier sont susceptibles de plastifier. Il serait donc utile d'intégrer ce phénomène dans la formulation du modèle limite. Le point délicat est que la traction dans les fibres tend vers l'infini lorsque le paramètre η tend vers zéro. De ce fait, si l'on suppose que les fibres présentent un comportement élasto-plastique, toutes les fibres plastifient dans la limite $\eta \rightarrow 0$. Pour aboutir à un modèle limite pertinent, il faut donc faire évoluer le domaine de comportement élastique de ces fibres en fonction du paramètre η , ce qui complique un peu les développements.

Par ailleurs, on a fait tacitement l'hypothèse que la contrainte normale $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ n'avait pas d'influence sur le comportement de l'interface fibre-matrice (cf. Remarque 16). Cette influence est appelée *effet de confinement* dans la littérature, et n'est pas toujours négligeable : elle peut se traduire par une augmentation notable de la résistance de la liaison acier-béton. La prise en compte de cet effet de confinement dans l'analyse asymptotique est assez délicate, car il relie le saut de déplacement tangentiel à la contrainte normale $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{n}$. Or cette contrainte normale ne peut pas être déterminée simplement lorsqu'on étudie le comportement mécanique des fibres dans le domaine intérieur (cf. Section 3.1.3). La prise en compte de ce type d'effet reste donc un problème ouvert.

3.2 Modélisation de la liaison acier-béton

3.2.1 Phénoménologie de la liaison

Nous avons développé un modèle de *grille avec décohesion*, qui permet de modéliser le comportement mécanique des armatures et des câbles de précontrainte dans une structure en béton armé. Ce modèle intègre un possible glissement de l'acier par rapport au béton. On se propose donc de développer une loi d'adhérence acier-béton réaliste, afin de pouvoir implanter ce modèle. Dans cette section, on présente la phénoménologie de cette liaison, ainsi qu'un certain nombre de travaux publiés dans la littérature sur ce sujet. On propose ensuite un modèle d'adhérence acier-béton à la fois simple et pertinent, représentatif du comportement d'une telle interface. Ce modèle est validé par des comparaisons avec des résultats expérimentaux.

Le modèle de grille avec décohesion permet de modéliser indifféremment des armatures ou des câbles de précontrainte. La loi d'adhérence acier-béton peut donc traduire une interaction de type armature-béton, ou de type câble-béton. Étant donné la différence d'état de surface entre une armature et un câble, illustrée sur la Figure 3.4, on peut s'attendre à ce que le comportement de ces deux interfaces soit assez différent. Dans ce chapitre, on se concentrera sur l'adhérence des armatures au béton, qui a fait l'objet de nombreux travaux de recherche depuis les années 60. *A contrario*, la question de l'adhérence des câbles est moins abordée dans la littérature, car elle a moins d'influence sur la tenue mécanique des structures.

Le béton est un matériau qui tend à fissurer assez facilement, en raison de sa forte hétérogénéité et des phénomènes de retrait au jeune âge. Le principal rôle des armatures dans une structure en béton est de limiter l'ouverture de ces fissures. Pour que cet effet soit efficace, il faut d'une part que l'armature présente une résistance mécanique suffisante, et d'autre part que cette armature soit bien ancrée dans le béton. Le glissement des armatures par rapport au béton est limité par l'usage d'armatures à *haute adhérence* (HA), qui présentent de nombreuses nervures. Ces nervures sont autant de points d'ancrage de l'armature dans le béton, et augmentent ainsi de façon importante la résistance de la liaison acier-béton (voir Figure 3.5).

Le comportement mécanique de cette liaison a été étudié expérimentalement par de nombreux auteurs. Les essais réalisés pour la caractériser sont de deux types : il s'agit d'essais d'extraction d'armatures, ou de traction de tirants en béton armé. L'essai le plus simple est l'essai d'extraction (dit *pull-out test*). Cet essai consiste à couler une barre d'armature dans un bloc de béton, puis à extraire progressivement la barre d'acier du béton (voir Figure 3.6). La courbe force-déplacement obtenue est directement liée à l'adhérence de la liaison acier-béton. Ce type d'essai a été réalisé par de nombreux auteurs. On peut citer les essais de Eligehausen *et al.* [82], La Borderie et Pijaudier-Cabot [74], Daoud *et al.* [80], Bamonte *et al.* [73], Ouglova [85] et Butler *et al.* [75]. L'un des enjeux de ces campagnes expérimentales est d'identifier les paramètres influents sur le comportement de la liaison acier-béton. Parmi ces paramètres, on compte la taille de la barre d'acier, l'état de compression du béton (dit *confinement*), le type d'agrégats présents dans le béton, ainsi qu'une éventuelle corrosion de la barre d'acier. Notons que

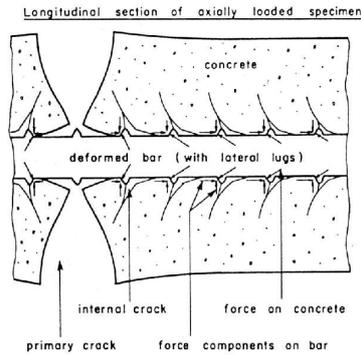


FIGURE 3.5 – Effet d’une armature haute adhérence sur l’ouverture d’une fissure (d’après Goto [83]).

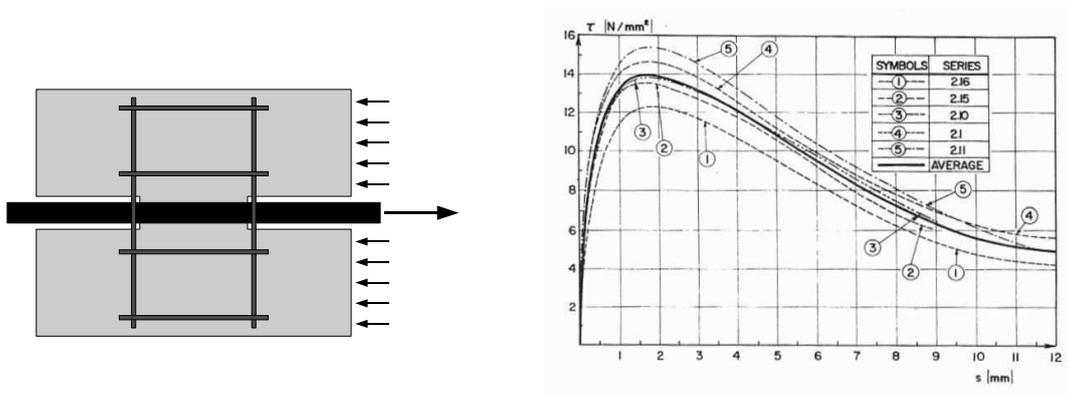


FIGURE 3.6 – Schéma de principe d’un essai d’extraction, et courbes force-glissement correspondantes (d’après Eligehausen [82]).

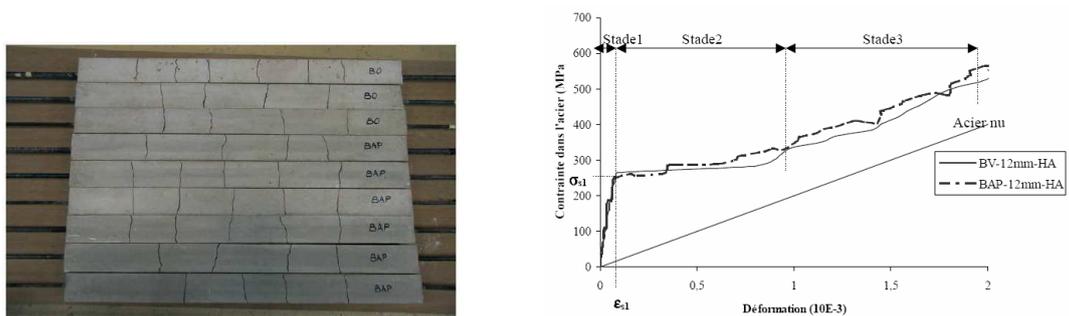


FIGURE 3.7 – Exemples de tirants fissurés, et courbes contrainte-déformation correspondantes (d’après Clément [76]).

la résistance de l'interface acier-béton est elle-même assez aléatoire : un même essai d'extraction répété plusieurs fois peut aboutir à des résultats variant de plus de 20 %.

Le second type d'essai usuel est la mise en traction de tirants. Ces tirants sont des barres de béton d'une longueur de 1 à 3 mètres, pour une dizaine de centimètres d'épaisseur (voir Figure 3.7). Ces tirants sont à section carrée ou cylindrique, et sont armés par des barres d'acier dans le sens de la longueur. Lorsque la traction exercée sur le tirant dépasse un certain seuil, des fissures perpendiculaires apparaissent dans le béton. Au niveau de ces fissures, les armatures reprennent les efforts de traction, et limitent ainsi la perte de rigidité de la structure. Cet effet est appelé *rigidification* dans la littérature (ou *tension stiffening*). Le comportement de la liaison acier-béton influe ainsi beaucoup sur l'ouverture et l'espacement des fissures. Des essais de ce type ont été menés par Goto [83], Clément [76] et Daoud [79].

Depuis les travaux de Goto [83] et Eligehausen *et al.* [82], la phénoménologie de la liaison acier-béton est assez bien connue. L'interface acier-béton présente deux phases de comportement (voir Figure 3.8) : une première phase durcissante, et une seconde adoucissante. Tant que le glissement de l'acier par rapport au béton n'est pas trop important, le comportement de la liaison reste durcissant. Au niveau microscopique, des fissures de cisaillement sont initiées le long de la barre d'acier par les nervures, et se propagent à 45°. Ces fissures prennent ainsi la forme de cônes dans le béton. Si le glissement à l'interface augmente au-delà d'un certain seuil, le béton mis en compression par les nervures commence à céder. La contrainte de cisaillement à l'interface est alors maximale, et le comportement de la liaison commence à s'adoucir. Par la suite, si le glissement augmente encore, le béton au contact de l'acier est progressivement fragmenté. La liaison présente alors une contrainte de cisaillement résiduelle, due au frottement entre l'acier et le béton fragmenté.

3.2.2 Principaux modèles de la littérature

De nombreux modèles ont été publiés dans la littérature pour tenter de reproduire ce comportement de la liaison acier-béton. Les premiers modèles développés à partir des années 60 sont assez empiriques. Ils tentent simplement de reproduire les courbes d'extraction observées expérimentalement. Dans cette catégorie, on peut citer les modèles de Rehm [86], Tepfers [88] puis Eligehausen *et al.* [82]. Ce dernier modèle est un des plus reconnus. Dans un régime de sollicitation monotone, il s'exprime de la façon suivante (voir Figure 3.9) :

$$\tau(\xi) = \begin{cases} \tau_{\max} \left(\frac{\xi}{\xi_1} \right)^\alpha & \text{si } 0 \leq \xi < \xi_1 \\ \tau_{\max} & \text{si } \xi_1 \leq \xi < \xi_2 \\ \tau_{\max} - (\tau_{\max} - \tau_f) \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} & \text{si } \xi_2 \leq \xi < \xi_3 \\ \tau_f & \text{si } \xi_3 \leq \xi \end{cases}$$

Dans cette relation, τ est la contrainte de cisaillement à l'interface acier-béton, ξ est le glissement relatif de l'acier par rapport au béton et ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , τ_{\max} , τ_f et α sont

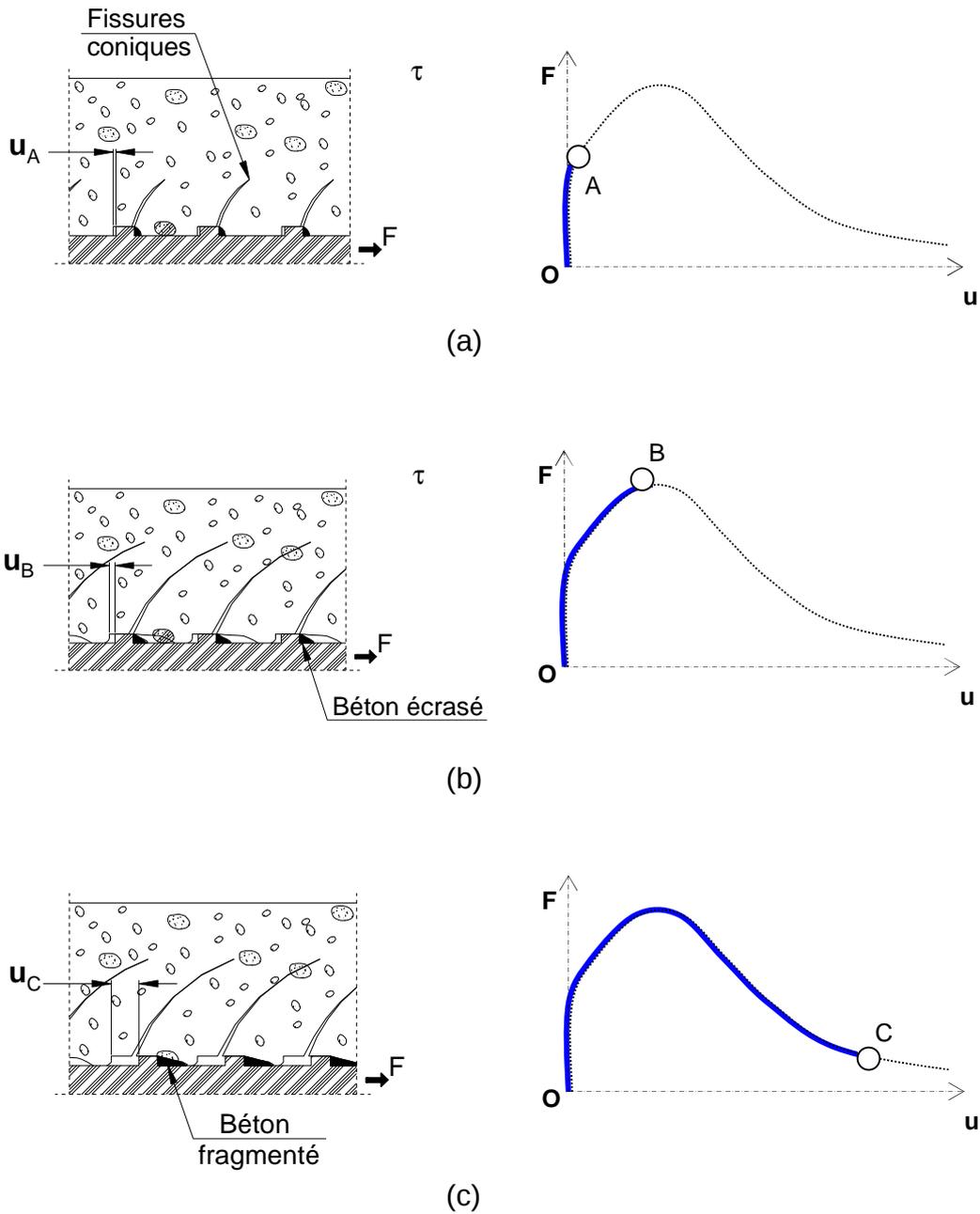


FIGURE 3.8 – Étapes successives de la dégradation de la liaison acier-béton. (a) Tout d’abord, les nervures initient des fissures de cisaillement en forme de cônes dans le béton, (b) puis le béton mis en compression par les nervures commence à céder, (c) et enfin, le béton au contact de l’armature est fragmenté. (D’après Dominguez [81])

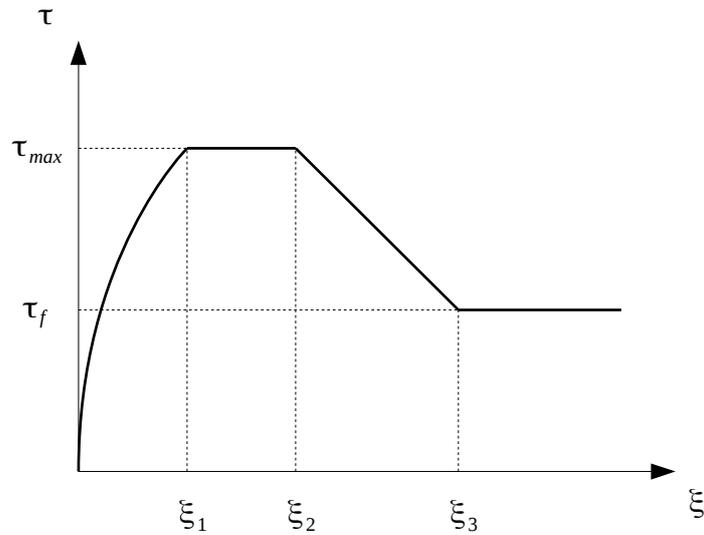


FIGURE 3.9 – Loi d’adhérence acier-béton proposée par Eligehausen dans un régime de sollicitation monotone [82].

six paramètres qui caractérisent le comportement de l’interface. Ce modèle reproduit plus ou moins la forme d’une courbe d’extraction expérimentale, et peut être identifié assez simplement en menant un simple essai d’extraction. D’autres modèles plus élaborés ont également été proposés dans des régimes de sollicitation non monotone, que l’on ne détaille pas ici.

Ces modèles présentent l’avantage d’être relativement simples, et de comporter un minimum de paramètres. *A contrario*, leur formulation diffère beaucoup des théories usuelles de la mécanique des milieux continus. Plusieurs auteurs ont donc tenté de reformuler une loi d’interface acier-béton en s’inspirant des formalismes de l’endommagement et de la plasticité. Clément [76] propose ainsi dans les années 80 un comportement d’interface s’inspirant du modèle de béton de Mazars [13], tandis que Cox [77, 78] propose dans les années 90 une formulation dans un cadre de plasticité non associée. Plus récemment, d’autres modèles d’interface couplant plasticité et endommagement ont été proposés par Dominguez [81], puis Richard [87]. Ces modèles sont très riches, car ils permettent de prendre en compte de nombreux phénomènes, tels l’effet de confinement, ou l’énergie dissipée lors de sollicitations cycliques. *A contrario*, ces modèles comportent de nombreux paramètres, qui ne sont généralement pas liés à des quantités physiques simples. L’utilisation de ces modèles est donc délicate en pratique. Notons que le seul modèle de liaison acier-béton actuellement implanté dans *Code_Aster* a été développé dans le cadre de la thèse de Dominguez [81]. Cette loi de comportement d’interface porte le nom de JOINT_BA [84].

3.2.3 Proposition d'un modèle empirique simple

On se propose de développer un modèle d'interface relativement simple, qui permette de modéliser de façon raisonnable le comportement d'une liaison armature-béton. Cette loi d'interface doit obéir à plusieurs contraintes : elle doit être formulée dans un cadre thermodynamique, être caractérisée par un nombre limité de paramètres, et être facile à implanter dans un code de calcul éléments finis. Nous avons vu dans la section précédente que la cinématique la plus importante de cette interface est le glissement tangentiel de l'acier par rapport au béton. La loi d'interface sera donc exprimée essentiellement en fonction de ce glissement.

On suppose que le comportement de l'interface est caractérisé par une unique variable interne, notée a . Cette variable interne correspond au glissement maximum de la liaison sur toute son histoire. Elle est donc définie par :

$$a(t) = \max_{\hat{t} \leq t} |\xi(\hat{t})|$$

Par ailleurs, on suppose que la liaison acier-béton ne fait que dissiper de l'énergie. L'énergie interne est donc nulle, sauf pour les états physiquement non admissibles, pour lesquels elle est infinie. Ces états non admissibles correspondent soit à une interpénétration des surfaces, soit au cas où le glissement ξ excède la variable interne a . On définit donc :

$$\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, a) = \mathcal{I}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \geq 0) + \mathcal{I}(|\xi| \leq a)$$

Dans cette relation, rappelons que ξ est le glissement des fibres dans la direction \mathbf{e}_2 , et s'écrit donc :

$$\xi = -\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_2$$

Le comportement de l'interface acier-béton est déterminé par la puissance dissipée à l'interface. On écrit cette puissance (ou potentiel de dissipation) sous la forme suivante :

$$\phi(\dot{a}, a) = \tau(a) \dot{a} + \mathcal{I}(\dot{a} \geq 0)$$

Le premier terme exprime la puissance dissipée lorsque le glissement à l'interface augmente, et le second traduit l'irréversibilité de la variable interne a . Le système complet s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, a) = \mathcal{I}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \geq 0) + \mathcal{I}(|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_2| \leq a) \\ \phi(\dot{a}, a) = \tau(a) \dot{a} + \mathcal{I}(\dot{a} \geq 0) \end{cases} \quad (3.45)$$

On peut vérifier que ces potentiels obéissent aux hypothèses faites dans la section précédente (cf. Section 3.1.1) : l'énergie interne ψ est l'indicatrice d'un domaine convexe pour chaque variable. Elle est donc continue sur ce domaine, et convexe de chacun de ses arguments. De même, le potentiel de dissipation ϕ est une fonction positivement homogène de degré 1 par rapport au flux \dot{a} . Il est positif et continu par rapport à la variable interne a si et seulement si la fonction $\tau(a)$ est positive et continue. Ce choix de potentiels vérifie donc les hypothèses de la section précédente si et seulement si la fonction $\tau(a)$ est positive

et continue. De plus, on peut réexprimer le comportement de cette interface en fonction des sous-gradients. On reprend pour cela la forme (3.4) du comportement de l'interface :

$$\exists \begin{cases} \mathbf{F}_{\text{rev}} \in \partial_{\mathbf{u}}\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, a) \\ A_{\text{rev}} \in \partial_a\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, a) \\ A_{\text{irr}} \in \partial_{\dot{a}}\phi(\dot{a}, a) \end{cases} \quad \text{tels que} \quad \begin{cases} \mathbf{F}_{\text{rev}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ A_{\text{rev}} + A_{\text{irr}} = 0 \end{cases}$$

Le comportement normal de l'interface s'écrit donc

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_{\text{rev}}$$

où $\mathbf{F}_{\text{rev}} \in \partial_{\mathbf{u}}\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, a)$. En distinguant selon le signe de $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n}$, on en déduit :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{si } \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} > 0 \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \leq 0 & \text{si } \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$$

On reconnaît là une condition de contact unilatéral classique. De la même façon, on obtient pour la composante tangentielle :

$$\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{F}_{\text{rev}}$$

L'énergie interne ψ dépend de la différence $|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_2| - a$. En utilisant les définitions de \mathbf{F}_{rev} et A_{rev} , on en déduit :

$$|\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{F}_{\text{rev}}| + A_{\text{rev}} = 0$$

On a donc $|\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}| = -A_{\text{rev}}$. Dans le cas où $|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_2| < a$, on a $A_{\text{rev}} = 0$. On en déduit que la contrainte de cisaillement à l'interface est nulle. En revanche, si $|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_2| = a$, cette contrainte n'est pas nulle. Dans ce cas, la seconde relation de comportement de l'interface s'écrit $A_{\text{rev}} + A_{\text{irr}} = 0$. On a donc :

$$|\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}| = A_{\text{irr}}$$

En distinguant selon le signe de \dot{a} , on démontre au final que :

$$\begin{cases} |\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}| = 0 & \text{si } |\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_2| < a \\ |\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}| \leq \tau(a) & \text{si } |\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_2| = a \text{ et } \dot{a} = 0 \\ |\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}| = \tau(a) & \text{si } |\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_2| = a \text{ et } \dot{a} > 0 \end{cases}$$

La forme générique d'une telle loi de comportement est montrée sur la Figure 3.10. Pour une valeur de a donnée, la contrainte est nulle tant que le glissement est inférieur à a . Si le glissement atteint ce seuil, la contrainte est bornée par $\tau(a)$. Ensuite, le glissement ne peut continuer à croître que si la contrainte de cisaillement atteint la contrainte critique $\tau(a)$. On peut qualifier cette loi de *loi d'adhésion à décharge verticale*. En ce sens, elle est similaire à la loi d'interface adhésive proposée par Talon et Curnier [15].

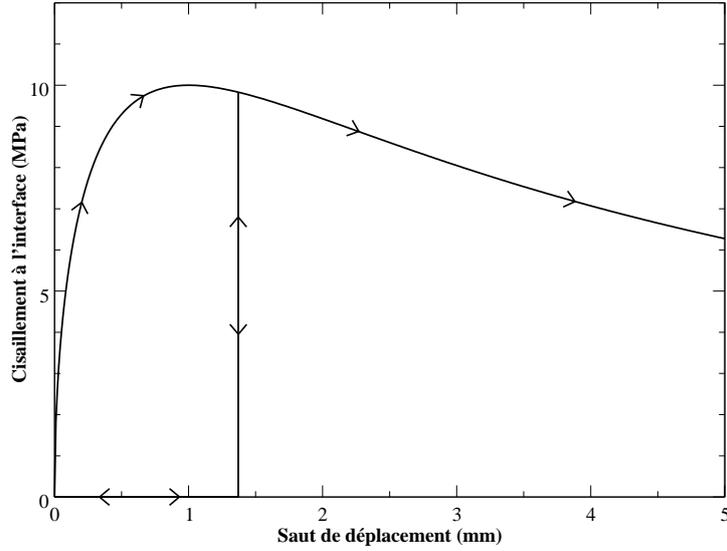


FIGURE 3.10 – Loi d’adhérence acier-béton considérée. Cette loi présente un comportement tout d’abord durcissant, puis adoucissant pour des glissements plus importants. La décharge s’effectue à contrainte nulle.

Il reste finalement à choisir la forme de la courbe $\tau(a)$. Notons que cette courbe n’est pas nécessairement monotone, elle doit juste être positive et continue. On propose la loi d’adhésion suivante, qui s’inspire du modèle de Eligehausen présenté précédemment :

$$\tau(a) = \tau_0 \frac{(a/a_0)^\alpha}{(1 + a/a_0)^{\alpha+\beta}} \quad (3.46)$$

La forme de cette loi est présentée sur la Figure 3.10. Cette loi d’interface comporte quatre paramètres, que sont a_0 , τ_0 , α et β . Les deux premiers paramètres permettent de dimensionner la loi, tandis que les deux derniers fixent la forme de la loi. Si les paramètres α et β sont positifs, cette loi présente une phase durcissante, suivi d’une phase adoucissante. Plus précisément, si l’on se place dans un régime de faibles glissements, avec $a \ll a_0$, on a :

$$\tau(a) \sim \tau_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^\alpha$$

Le paramètre α détermine donc la forme de la loi pour de faibles glissements. Pour que cette loi soit représentative du comportement réel d’une interface acier-béton, on choisira $0 < \alpha < 1$. Ceci assure que le cisaillement soit nul pour un glissement nul, et que la pente initiale de la loi soit infinie. Inversement, lorsque $a \gg a_0$, la loi d’interface s’écrit :

$$\tau(a) \sim \tau_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\beta}$$

Le paramètre β dicte donc la forme de la loi lorsque le glissement devient grand. Il est préférable de choisir ce paramètre positif, pour que la loi d'adhérence présente une phase adoucissante.

La loi d'adhérence acier-béton est caractérisée par un point où le cisaillement à l'interface est maximal. On note τ_m et a_m le cisaillement et le glissement correspondant à ce maximum de résistance. Ces grandeurs s'expriment en termes des paramètres $(a_0, \tau_0, \alpha, \beta)$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_m = a_0 \frac{\alpha}{\beta} \\ \tau_m = \tau_0 \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta}} \end{cases} \quad (3.47)$$

En pratique, ces grandeurs sont plus simples à définir pour l'utilisateur que a_0 et τ_0 . Les paramètres que l'on considère pour la loi d'adhérence sont donc $(a_m, \tau_m, \alpha, \beta)$. En réinjectant (3.47) dans (3.46), la loi d'adhérence s'exprime en fonction de ces nouveaux paramètres :

$$\tau(a) = \tau_m (\alpha + \beta)^{\alpha+\beta} \frac{(a/a_m)^\alpha}{(\alpha a/a_m + \beta)^{\alpha+\beta}}$$

On montre sur les Figures 3.11 et 3.12 l'influence des paramètres α et β sur la forme de la courbe, lorsque a_m et τ_m sont fixés. On observe que le paramètre α influe à la fois sur les parties durcissante et adoucissante de la loi. Lorsque le paramètre α est proche de zéro, le comportement de la loi est initialement très rigide, tandis que lorsqu'il est proche de 1, la loi est beaucoup plus souple. Par ailleurs, le paramètre β influe essentiellement sur la partie adoucissante de la loi. Lorsqu'il est proche de zéro, la loi d'adhérence décroît lentement après le pic, tandis que lorsque β est très grand, la loi décroît rapidement. Les paramètres de cette loi ainsi que leur domaine de variation sont précisés dans le tableau ci-dessous :

Paramètre	Domaine	Unité	Nature du paramètre
a_m	\mathbb{R}^{+*}	m	Déplacement au pic
τ_m	\mathbb{R}^{+*}	Pa	Contrainte au pic
α	$]0, 1[$	<i>rien</i>	Croissance initiale de la loi
β	\mathbb{R}^{+*}	<i>rien</i>	Décroissance finale de la loi

On peut à présent proposer une méthode d'identification des paramètres de la loi d'adhérence proposée. On suppose que l'on connaît la forme expérimentale d'une loi d'adhérence acier-béton. En identifiant le point de résistance maximale de cette loi, on détermine les paramètres a_m et τ_m . Ensuite, il reste à identifier les paramètres de forme α et β . Comme α est le seul paramètre à influencer sur la partie durcissante de la loi, on peut l'identifier indépendamment du paramètre β . Enfin, une fois les paramètres a_m , τ_m et α connus, on identifie le paramètre β sur la partie adoucissante de la loi d'adhérence. Ainsi, les quatre paramètres de cette loi peuvent être déterminés à partir d'une courbe expérimentale sans avoir recours à des méthodes de recalage complexes.

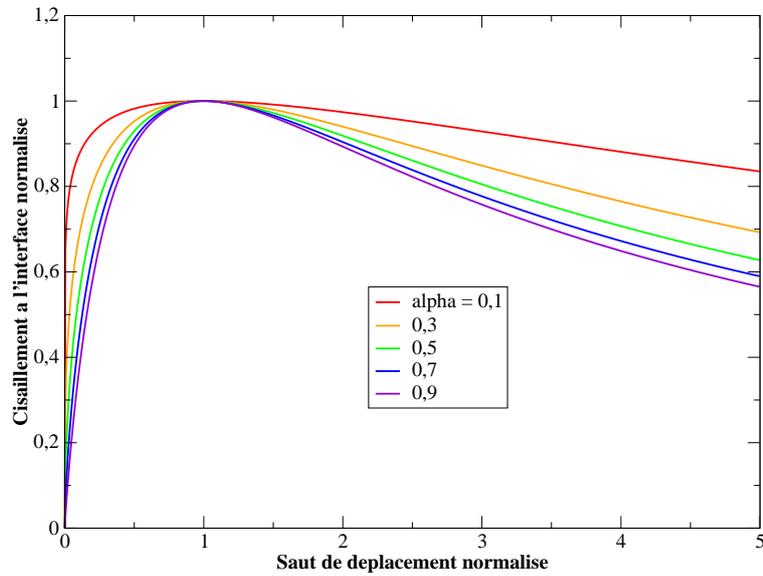


FIGURE 3.11 – Dépendance de la loi d’adhérence acier-béton au paramètre α . La position du maximum (δ_m, τ_m) de la courbe est fixée, et le paramètre β vaut 1.

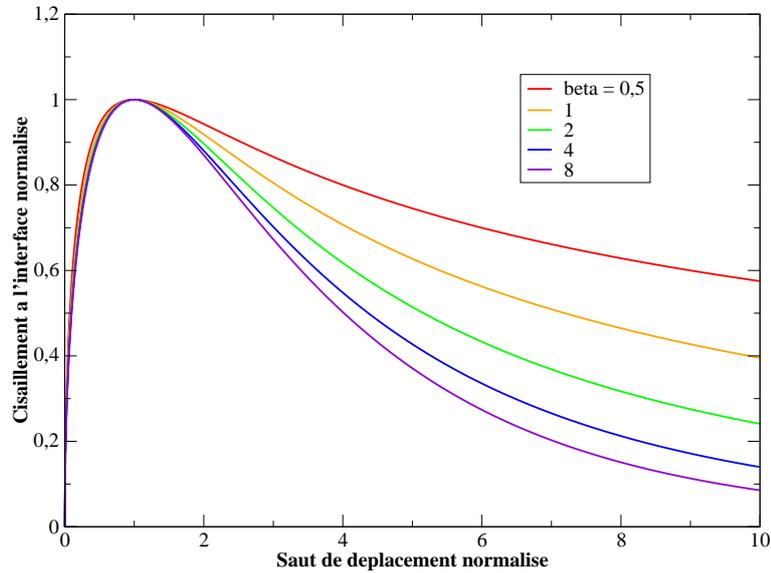


FIGURE 3.12 – Dépendance de la loi d’adhérence acier-béton au paramètre β . La position du maximum (δ_m, τ_m) de la courbe est fixée, et le paramètre α vaut 0,5.

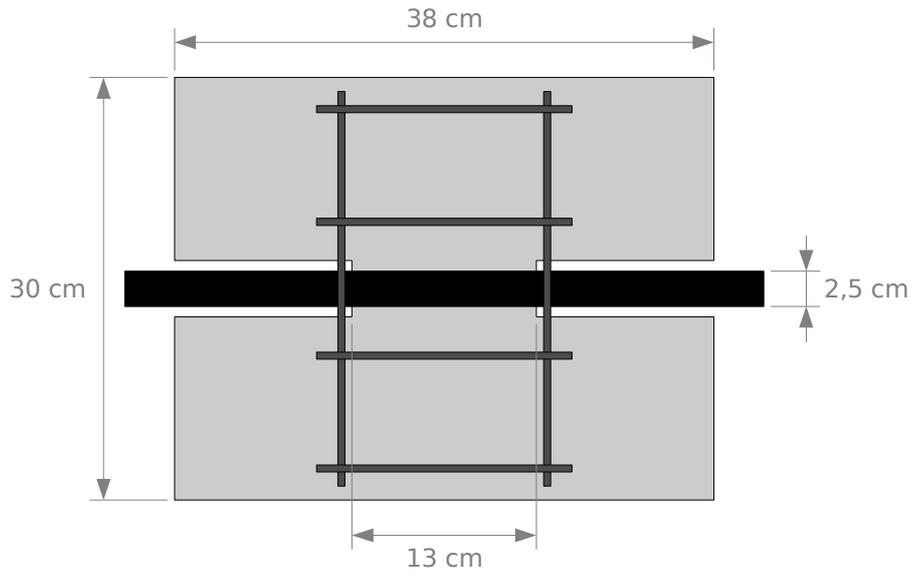


FIGURE 3.13 – Dimensions de l'essai d'extraction de Eligehausen *et al.* [82].

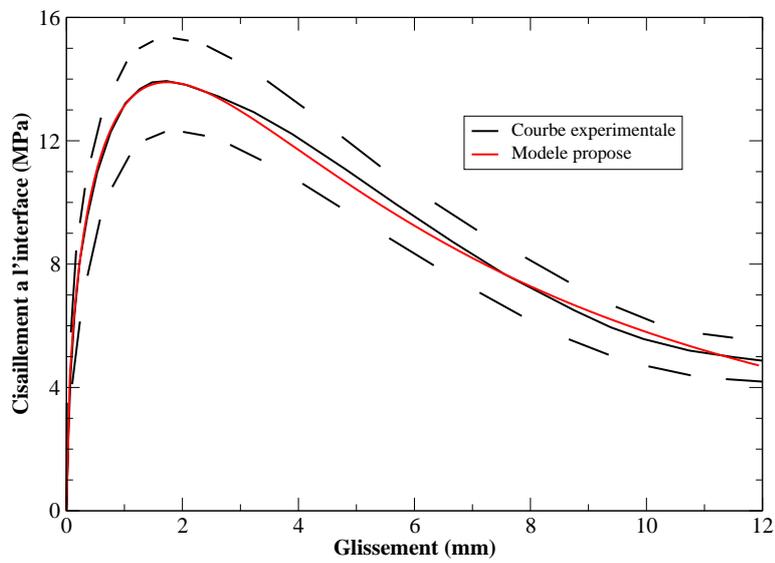


FIGURE 3.14 – Comparaison entre le modèle proposé (rouge) et les résultats expérimentaux de Eligehausen *et al.* [82] (noir). La moyenne des essais expérimentaux est indiquée en trait noir continu, et leur dispersion en pointillés.

3.2.4 Validation et recalage du modèle

On souhaite valider la pertinence de ce modèle en le comparant à des essais expérimentaux d'extraction d'armatures. On s'intéresse pour cela à un essai de Eligehausen [82], décrit par Cox et Herrmann [78] et Dominguez [81]. Cet essai est conçu pour étudier le comportement de la liaison acier-béton dans une structure fortement armée. Les dimensions de l'essai sont indiquées sur la Figure 3.13. La barre d'acier considérée est une armature à haute adhérence, de diamètre 2,5 cm, et la taille du bloc de béton est d'une trentaine de centimètres. La longueur d'ancrage de l'acier dans le béton est limitée à 13 cm, ce qui permet d'extraire entièrement la barre d'acier sans qu'elle plastifie. Une force de traction est appliquée sur la section de la barre, et une force de compression opposée est exercée sur le massif de béton.

La moyenne et la dispersion des résultats expérimentaux dans un régime de sollicitation monotone est présentée sur la Figure 3.14. Le maximum de résistance de la liaison est obtenu pour un glissement de 1,7 mm, et une contrainte de cisaillement de 14 MPa. Connaissant ces valeurs, on peut estimer l'ordre de grandeur des déformations subies par le béton et l'acier lors de cet essai. Les contraintes dans le béton sont maximales à proximité de la barre d'acier, où elles valent au plus 14 MPa. Le module d'Young du béton étant de l'ordre de 30 GPa, on en déduit que les déformations du béton sont inférieures à $5 \cdot 10^{-4}$. Comme la dimension du specimen est de l'ordre de 30 cm, les déplacements relatifs dans le béton sont inférieurs à 0,2 mm, et sont donc négligeables devant le glissement de la barre d'acier. De même, on démontre que les contraintes dans la barre d'acier ne peuvent dépasser 300 MPa. Comme le module d'Young de l'acier est de l'ordre de 200 GPa, on en déduit que les déformations de la barre sont inférieures à $1,5 \cdot 10^{-3}$. La longueur d'ancrage étant de 13 cm, les déplacements relatifs dans l'acier au niveau de la liaison sont inférieurs à 0,2 mm. On peut donc considérer l'acier et le béton comme des matériaux rigides dans le cadre de cet essai, et le glissement à l'interface est uniforme le long de la barre.

La loi d'adhérence peut donc être identifiée directement à partir des courbes expérimentales, en utilisant la méthode de recalage proposée précédemment. Les résultats expérimentaux et le modèle recalé sont présentés sur la Figure 3.14. La valeur des paramètres recalés est précisée dans le tableau suivant :

Paramètre	a_m	τ_m	α	β
Valeur	1,74 mm	13,9 MPa	0,5	2,5

On constate que le modèle est superposé aux résultats expérimentaux dans la phase durcissante. Dans la phase adoucissante, les courbes restent proches, mais diffèrent légèrement. En particulier, lorsque le glissement devient très important, le modèle décroît plus rapidement que la courbe expérimentale. On remarque par ailleurs que le modèle reste toujours dans la plage d'incertitude des résultats expérimentaux. L'erreur de modèle est donc inférieure aux incertitudes sur le comportement de la liaison. Le modèle de liaison acier-béton est donc validé dans un régime de sollicitations monotones. La question des sollicitations non monotones n'est pas abordée ici, et pourra faire l'objet d'études ultérieures.

3.3 Implantation numérique

3.3.1 Choix de modélisation

Nous avons à notre disposition deux modèles asymptotiques, permettant de représenter le comportement mécanique des armatures et des câbles de précontrainte dans une structure en béton armé. Le premier modèle, développé au Chapitre 2 (cf. Section 2.5.4), permet de décrire le comportement élastique d'armatures répartis sur une surface. Ce modèle présente un simple comportement de membrane anisotrope, dont les caractéristiques sont identifiées via des calculs mécaniques préalables sur une cellule périodique. On peut penser que ce modèle est assez précis dans un régime élastique, tant que les barres restent adhérentes au béton. En revanche, ce modèle ne permet pas de prendre en compte une éventuelle dégradation de la liaison acier-béton. Le second modèle, développé au début de ce chapitre (cf. Section 3.1), est plus complet. Il permet de décrire le comportement mécanique effectif des armatures et des câbles de précontrainte, ainsi qu'une éventuelle dégradation de la liaison acier-béton. Ce modèle combine un comportement de grille avec une loi d'interface cohésive, qui permet un glissement de l'acier par rapport au béton. Contrairement au modèle de membrane anisotrope, les caractéristiques de ce modèle sont calculées analytiquement. Ce modèle est donc beaucoup plus simple à mettre en œuvre. Inversement, comme il n'est précis qu'à l'ordre 0 en η , on s'attend à ce qu'il soit moins précis que le modèle de membrane anisotrope dans un régime élastique.

On souhaite implanter ces deux modèles dans le code éléments finis *Code_Aster*, afin de les valider numériquement et de les utiliser pour des simulations de structures réelles. L'implantation du modèle de membrane ne pose pas de difficulté : elle peut être réalisée en utilisant des éléments de membrane standards, qui sont présentés dans la section suivante. En revanche, le modèle de grille avec décohesion peut être implanté de plusieurs façons. On peut faire le choix, soit d'implanter séparément des éléments de grille et des éléments d'interface grille-béton, soit d'implanter des éléments de grille avec glissement.

La première approche peut être qualifiée de modulaire : les éléments de membrane et d'interface membrane-béton sont conçus comme des *modules*, qui peuvent être implantés et utilisés indépendamment. Cette approche permet de mutualiser l'usage de différents types d'éléments, et donc de limiter la variété des éléments présents dans le code. De plus, cela facilite la validation du code de calcul, en limitant le nombre de lignes de codes à vérifier. *A contrario*, cette approche limite les possibilités d'optimisation.

La seconde approche nécessite d'implanter des éléments finis spécifiques du modèle développé. Ceci permet d'optimiser l'implantation de ces éléments, et de limiter le nombre des degrés de liberté. En revanche, cela alourdit d'autant la mise en œuvre dans le code de calcul.

Suivant ces arguments, on choisit de privilégier l'approche modulaire, qui rend les éléments développés relativement génériques, mais un peu moins performants. L'implantation du modèle de grille avec décohesion est donc réalisée par le biais d'éléments de membrane anisotrope, et d'éléments d'interface à formulation mixte. Les éléments de membrane modélisent la rigidité des barres d'armature et des câbles de précontrainte,

tandis que les éléments d'interface modélisent une possible décohésion de l'acier par rapport au béton.

3.3.2 Éléments de grille et de membrane

On présente ici l'implantation des éléments de membrane réalisée dans *Code_Aster*. On se donne une surface Γ , supposée plane, ainsi qu'un comportement de membrane anisotrope, défini par le tenseur de rigidité \mathbf{N} (voir Figure 3.15). Si l'on introduit la base orthonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, telle que \mathbf{e}_1 décrit la normale au plan Γ , et $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ le plan tangent, ce tenseur s'écrit en composantes :

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\alpha\beta\gamma\delta} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta) \otimes (\mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_\delta)$$

Les indices grecs varient comme précédemment entre 2 et 3. Pour éviter toute ambiguïté, on indique explicitement les sommes sur les indices dans cette section. Rappelons que le tenseur \mathbf{N} présente deux symétries mineures et une symétrie majeure, qui s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta\gamma\delta} &= N_{\beta\alpha\gamma\delta} & N_{\alpha\beta\gamma\delta} &= N_{\alpha\beta\delta\gamma} \\ N_{\alpha\beta\gamma\delta} &= N_{\gamma\delta\alpha\beta} \end{aligned}$$

Dans le cas d'un modèle de membrane anisotrope, les coefficients du tenseur \mathbf{N} sont obtenus par résolution de problèmes mécaniques élémentaires au sein d'une cellule périodique. En revanche, dans le cas d'un modèle de grille, le tenseur \mathbf{N} s'exprime analytiquement. Lorsque les barres d'acier sont disposées de façon parallèle, le tenseur \mathbf{N} s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \kappa_m (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \\ &= \frac{\pi d^2}{4eL} E^f (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

On rappelle que d , e , L et E^f sont respectivement le diamètre des barres d'acier, leur espacement, la taille globale de la structure² et le module d'Young de l'acier.

L'implantation de l'élément de membrane nécessite de calculer l'énergie mécanique stockée dans un élément fini. Cette énergie mécanique élémentaire s'écrit :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \int_e \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}) : \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}' \quad (3.48)$$

On se donne un élément fini de surface, linéaire ou quadratique. Il peut s'agir d'un triangle à trois ou six nœuds, ou d'un quadrangle à quatre ou huit nœuds (voir Figure 3.16). La position géométrique des nœuds de l'élément est notée \mathbf{x}'_n , avec n le numéro du nœud. La position d'un point au sein de l'élément est déterminée par ses coordonnées dans l'espace de référence, notées \mathbf{z}' . L'élément fini est caractérisé par ses fonctions de formes,

2. Précisons que la taille globale de la structure n'intervient pas réellement dans la rigidité de la membrane. Elle est introduite pour rendre le tenseur \mathbf{N} homogène à une contrainte.

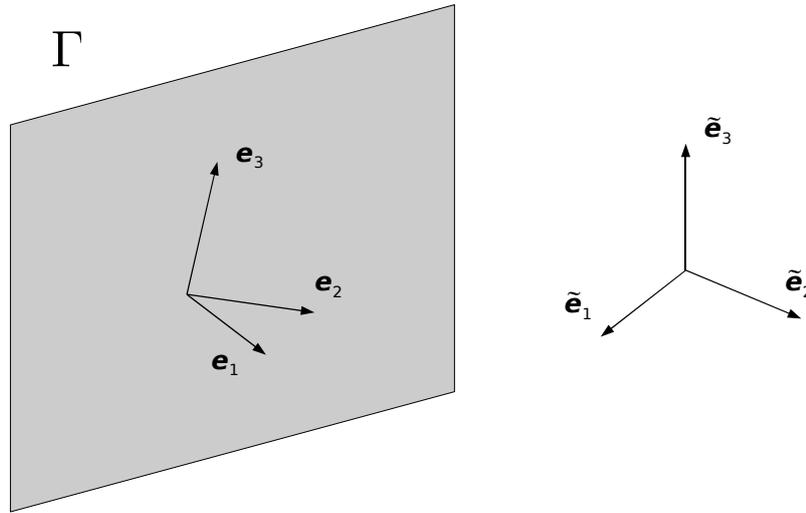


FIGURE 3.15 – Repères associés au comportement de la membrane anisotrope. Le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est un repère orthonormal, où \mathbf{e}_1 est orthogonal, et $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sont tangents au plan Γ . Les degrés de liberté des nœuds sont définis dans un repère global distinct $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$, qui n'est pas lié à la géométrie du plan Γ .

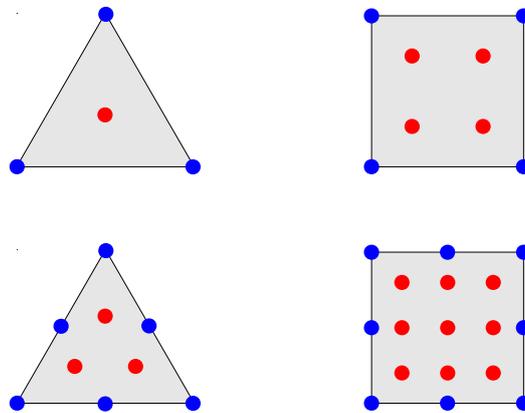


FIGURE 3.16 – Choix de discrétisation pour les éléments de membrane. Les éléments implantés sont les triangles et quadrangles linéaires et quadratiques. Les nœuds des éléments sont indiqués en bleu, et les points de Gauss en rouge.

notées $\chi_n(\mathbf{z}')$, et définies dans l'espace de référence. Ces fonctions de forme valent 1 sur le nœud n , et sont nulles sur tous les autres. Pour les éléments finis isoparamétriques, la transformation géométrique de l'espace de référence vers l'espace réel s'écrit en termes des fonctions de forme et de la position des nœuds :

$$\mathbf{x}' = \sum_n \mathbf{x}'_n \chi_n(\mathbf{z}')$$

Dans cette section, les indices latins n et m désignent le numéro d'un nœud, et varient parmi l'ensemble des nœuds de l'élément. On peut définir le jacobien de cette transformation, qui s'écrit :

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}') = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{z}'}(\mathbf{z}') = \sum_n \mathbf{x}'_n \frac{\partial \chi_n}{\partial \mathbf{z}'}(\mathbf{z}') \quad (3.49)$$

Les degrés de liberté de l'élément fini sont les déplacements des nœuds, exprimés dans la base globale $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$. Ces déplacements sont rassemblés dans une matrice \mathbf{U} , définie par :

$$U_{in} = \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}'_n)$$

Cette matrice est de dimension $3 \times N$, avec N le nombre de nœuds de l'élément fini. Le champ de déplacement dans l'élément s'écrit en termes de ces degrés de liberté et des fonctions de forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}') = \sum_{in} U_{in} \chi_n(\mathbf{z}') \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (3.50)$$

On peut à présent exprimer la déformation membranaire $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u})$ en fonction des degrés de liberté de l'élément. Cette déformation s'exprime en composantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_\beta$$

Or, d'après la relation (3.50), on a :

$$\begin{aligned} u_\alpha(\mathbf{x}') &= \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}') \\ &= \sum_{in} U_{in} \chi_n(\mathbf{z}') \mathbf{e}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i \end{aligned}$$

Si l'on note \mathbf{R} la matrice de rotation du repère local $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vers le repère global $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$, qui s'écrit en composantes $R_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j$, cette dernière relation s'écrit :

$$u_\alpha(\mathbf{x}') = \sum_{in} R_{\alpha i} U_{in} \chi_n(\mathbf{z}') \quad (3.51)$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \sum_\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\gamma} \frac{\partial z_\gamma}{\partial x_\beta}$$

En introduisant le jacobien défini par (3.49), cette dernière relation s'écrit :

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \sum_\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\gamma} J_{\gamma\beta}^{-1} \quad (3.52)$$

Avec les relations (3.51) et (3.52), on peut écrire la déformation membranaire sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u}) = \sum_{in} R_{\alpha i} U_{in} \frac{\partial \chi_n}{\partial z_\gamma} J_{\gamma\beta}^{-1} \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_\beta$$

On introduit un tenseur \mathbf{B} du quatrième ordre, défini de la façon suivante :

$$B_{\alpha\beta in}(\mathbf{z}') = \sum_\gamma R_{\alpha i} \frac{\partial \chi_n}{\partial z_\gamma}(\mathbf{z}') J_{\gamma\beta}^{-1}(\mathbf{z}')$$

À l'aide de ce tenseur, on peut exprimer la déformation membranaire sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma(\mathbf{u})(\mathbf{z}') = \sum_{in} B_{\alpha\beta in}(\mathbf{z}') U_{in} \mathbf{e}_\alpha \otimes_s \mathbf{e}_\beta$$

En réintroduisant dans l'énergie mécanique (3.48), on obtient :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \int_e \left(\sum_{ijnm\alpha\beta\gamma\delta} U_{in} B_{\alpha\beta in}(\mathbf{z}') N_{\alpha\beta\gamma\delta} B_{\gamma\delta jm}(\mathbf{z}') U_{jm} \right) d\mathbf{x}'$$

On peut écrire cette relation sous la forme condensée suivante :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \int_e \mathbf{U} : \mathbf{B}^\top(\mathbf{z}') : \mathbf{N} : \mathbf{B}(\mathbf{z}') : \mathbf{U} d\mathbf{x}' \quad (3.53)$$

En général, cette intégrale n'est pas calculable analytiquement. On utilise donc un schéma d'intégration numérique, basé sur une famille de points de Gauss. On se donne un ensemble de points de Gauss, d'abscisse \mathbf{z}'_g , et de poids ρ_g . On réexprime tout d'abord la relation précédente dans l'espace de référence :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \int_e \mathbf{U} : \mathbf{B}^\top(\mathbf{z}') : \mathbf{N} : \mathbf{B}(\mathbf{z}') : \mathbf{U} \det(\mathbf{J})(\mathbf{z}') d\mathbf{z}'$$

Puis on applique le schéma d'intégration aux points de Gauss :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \sum_g \mathbf{U} : \mathbf{B}^\top(\mathbf{z}'_g) : \mathbf{N} : \mathbf{B}(\mathbf{z}'_g) : \mathbf{U} \det(\mathbf{J})(\mathbf{z}'_g) \rho_g$$

Le choix de la famille de points de Gauss utilisée répond à une double contrainte : il faut d'une part que l'erreur d'intégration soit inférieure à l'erreur de discrétisation liée à la taille de l'élément, et d'autre part que l'énergie interne intégrée numériquement soit définie positive. Les familles de points de Gauss adaptées aux différents éléments de surface sont indiquées sur la Figure 3.16.

L'énergie interne est ainsi exprimée en fonction des degrés de liberté \mathbf{U} de l'élément. On peut ensuite calculer le vecteur des forces internes nodales sous la forme $\partial \mathcal{E}_e / \partial \mathbf{U}$, et la matrice tangente du comportement $\partial^2 \mathcal{E}_e / \partial \mathbf{U}^2$. Ceci conclut l'implantation des éléments de membrane anisotrope.

3.3.3 Éléments d'interface à formulation mixte

Formulation énergétique du comportement de l'interface

On décrit à présent l'implantation des éléments d'interface permettant de représenter le glissement de l'acier par rapport au béton. Nous avons développé dans la Section 3.2 une loi d'interface reproduisant le comportement d'une liaison acier-béton classique. Cette loi est formulée dans le cadre des matériaux quasi-standards généralisés, par le biais d'une énergie interne ψ et d'un potentiel de dissipation ϕ . On rappelle que ces potentiels s'écrivent :

$$\begin{cases} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, a) = \mathcal{I}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \geq 0) + \mathcal{I}(|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{e}_2| \leq a) \\ \phi(\dot{a}, a) = \tau(a) \dot{a} + \mathcal{I}(\dot{a} \geq 0) \end{cases}$$

La forme de la loi d'adhérence acier-béton est déterminée par la courbe $\tau(a)$, que l'on choisit sous la forme suivante :

$$\tau(a) = \tau_0 \frac{(a/a_0)^\alpha}{(1 + a/a_0)^{\alpha+\beta}}$$

On a par ailleurs démontré dans la Section 3.1 que la loi d'adhérence *homogénéisée* entre la grille d'armature et le béton dérive directement de la loi d'adhérence *microscopique* entre l'acier et le béton. Cette loi d'adhérence effective est caractérisée par une énergie interne Ψ et un potentiel de dissipation Φ , qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \Psi(\xi, a) = \mathcal{I}(|\xi| \leq a) \\ \Phi(\dot{a}, a) = \frac{\pi d}{e} \tau(a) \dot{a} + \mathcal{I}(\dot{a} \geq 0) \end{cases}$$

Ces potentiels sont exprimés en termes du glissement ξ des fibres à l'instant courant, et du glissement maximal atteint a . La fonction \mathcal{I} est la fonction indicatrice, qui est nulle lorsque son argument est vrai, et infinie sinon. La forme de l'énergie interne impose que le glissement courant reste toujours inférieur au glissement maximal atteint. Par ailleurs, le potentiel de dissipation est composé de deux termes : le premier détermine la puissance dissipée à l'interface, et le second impose l'irréversibilité du glissement maximal a .

La formulation de ce comportement d'interface n'est pas idéale, car le potentiel de dissipation dépend de l'état courant du matériau. En termes d'implantation numérique, il est préférable de reformuler ce comportement sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} \Psi(\xi, a) = \mathcal{I}(|\xi| \leq a) + \Pi(a) \\ \Phi(\dot{a}) = \mathcal{I}(\dot{a} \geq 0) \end{cases}$$

L'énergie $\Pi(a)$ désigne une énergie mécanique stockée à l'interface grille-béton. Elle s'écrit :

$$\Pi(a) = \frac{\pi d}{e} \int_0^a \tau(\tilde{a}) d\tilde{a}$$

Ainsi, l'énergie mécanique cédée à l'interface n'apparaît plus comme une énergie dissipée, mais comme une énergie stockée irréversiblement. Ceci ne change cependant rien au comportement mécanique de l'interface, qui reste strictement identique. L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet de formuler le problème mécanique global comme la minimisation d'une énergie mécanique sous contrainte d'inégalités, plutôt que comme la minimisation d'une énergie incrémentale. *A contrario*, cette formulation présente un défaut notable : comme le comportement $\tau(a)$ est adoucissant, l'énergie interne Ψ n'est pas convexe par rapport à la variable interne a . On ne peut donc pas définir les sous-gradients de l'énergie interne.

Choix de la formulation

La loi d'interface considérée n'autorise le glissement des barres et des câbles de pré-contrainte que dans la direction des fibres. Cette loi d'interface présente donc une rigidité infinie dans les autres directions. Or une formulation d'interface *standard*, basée sur une formulation en déplacements, ne peut pas reproduire ce type de comportement rigide. On a donc le choix entre se contenter d'une rigidité finie, ou avoir recours à une formulation mixte.

La première approche est une approche dite de *pénalisation*. Elle consiste à remplacer la rigidité infinie du comportement d'interface par une rigidité très grande. L'avantage de cette approche est qu'elle permet une formulation du comportement d'interface relativement simple. L'inconvénient est qu'elle fait intervenir un paramètre de pénalisation qui doit être choisi judicieusement : il doit être suffisamment grand pour que le comportement de l'interface soit quasi-rigide, mais pas trop pour que le conditionnement du problème étudié reste acceptable. La détermination de ce paramètre est donc assez délicate.

Une seconde solution est d'avoir recours à une formulation mixte, qui fait intervenir non seulement les sauts de déplacement à l'interface, mais également des multiplicateurs de Lagrange. Ces degrés de liberté additionnels permettent d'imposer par dualisation le comportement rigide de l'interface. *A contrario*, la principale difficulté de cette formulation réside dans le choix de l'espace de discrétisation des multiplicateurs de Lagrange. On reprend ici l'approche proposée par Lorentz [10], elle-même basée sur les travaux théoriques de Fortin [10]. Cette formulation était initialement conçue pour une interface reliant deux volumes ; on l'adapte ici à la description d'une interface entre une membrane et un volume.

On considère donc le potentiel mécanique suivant :

$$\mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^f, \xi, a) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}}_{(1)} + \underbrace{\frac{L}{2} \int_{\Gamma} \kappa_m \left(\frac{\partial u_2^f}{\partial x_2} \right)^2 \, d\mathbf{x}'}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Gamma} \Pi(a) \, d\mathbf{x}'}_{(3)} - \underbrace{\mathcal{W}(\mathbf{u})}_{(4)}$$

On reconnaît dans ce potentiel : (1) l'énergie mécanique stockée dans le volume Ω ,

(2) l'énergie mécanique associée à un comportement de grille sur la surface Γ , (3) l'énergie mécanique stockée à l'interface entre la grille et le volume ainsi que (4) le travail des efforts extérieurs. La recherche d'une solution stable pour ce problème revient à chercher un minimum local de cette fonctionnelle sous la triple contrainte :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^f = \mathbf{u} + \xi \mathbf{e}_2 \\ |\xi| \leq a \\ \dot{a} \geq 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

On choisit de traiter la contrainte $\mathbf{u}^f = \mathbf{u} + \xi \mathbf{e}_2$ par dualisation. On introduit donc des multiplicateurs de Lagrange, notés $\boldsymbol{\zeta}$, ainsi que le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^f, \xi, a, \boldsymbol{\zeta}) = \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^f, \xi, a) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\zeta} \cdot (\mathbf{u}^f - \mathbf{u} - \xi \mathbf{e}_2) d\mathbf{x}'$$

Si l'espace des multiplicateurs de Lagrange est *juste de la bonne taille*, chercher un point stationnaire du potentiel \mathcal{P}_{eff} sous la triple contrainte (3.54) revient à chercher un point stationnaire du lagrangien \mathcal{L} sous la double contrainte :

$$\begin{cases} |\xi| \leq a \\ \dot{a} \geq 0 \end{cases}$$

Le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange est délicat, car il dépend des conditions limite imposées sur le bord de la surface Γ . On préfère donc choisir un espace de multiplicateurs légèrement plus petit, et ajouter au lagrangien un terme de pénalisation. On introduit donc le *lagrangien augmenté* suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^f, \xi, a) = \mathcal{P}_{\text{eff}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^f, \xi, a, \boldsymbol{\zeta}) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\zeta} \cdot (\mathbf{u}^f - \mathbf{u} - \xi \mathbf{e}_2) d\mathbf{x}' \\ + \frac{k}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u} - \xi \mathbf{e}_2|^2 d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (3.55)$$

L'intérêt de cette formulation est le suivant : les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\zeta}$ assurent que la relation $\mathbf{u}^f = \mathbf{u} + \xi \mathbf{e}_2$ est vérifiée *en moyenne*, tandis que le terme de pénalisation limite l'apparition d'oscillations autour de cette moyenne. Le paramètre de pénalisation k est donc un paramètre numérique, qui doit être fixé par l'utilisateur.

Implantation du modèle

Pour implanter ce modèle, on doit choisir l'espace de discrétisation des déplacements \mathbf{u} et \mathbf{u}^f , des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\zeta}$, du glissement ξ et de la variable interne a . Les éléments considérés sont le pentaèdre quadratique à 18 nœuds, et l'hexaèdre quadratique à 20 nœuds (voir Figure 3.17). Ces éléments sont dits *dégénérés*, car les nœuds des faces supérieures et inférieures sont confondus géométriquement. Les nœuds de l'une des faces portent les degrés de liberté de déplacement \mathbf{u} du volume, et ceux de l'autre face portent

les degrés de liberté de déplacement \mathbf{u}^f de la grille. Ce choix assure la conformité du champ de déplacement avec les éléments adjacents, qui sont des éléments de volume et de surface quadratiques. Pour des raisons qui seront explicitées plus tard, le glissement ξ et la variable interne a sont discrétisés sur une famille de points de Gauss. Il reste donc à déterminer l'espace de discrétisation des multiplicateurs de Lagrange, et la famille de points de Gauss adéquate.

Pour être bien posé, le problème de la stationnarité du lagrangien ne doit être ni sur-contraint, ni sous-contraint. La première condition est appelée classiquement condition inf-sup, ou condition LBB (Ladyzenskaya-Babuška-Brezzi). Elle s'écrit sous la forme générique suivante :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \quad \int_{\Gamma} \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}' \geq \alpha \sqrt{\int_{\Gamma} |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}' \int_{\Gamma} |\boldsymbol{\zeta}|^2 \, d\mathbf{x}'} \quad \forall (\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}, h) \in \mathcal{C}^h \times \mathbb{R}$$

L'espace \mathcal{C}^h est l'espace des champs de déplacement \mathbf{u} et des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\zeta}$ discrétisés. Schématiquement, cette condition impose qu'il n'existe pas de champ dans l'espace des multiplicateurs de Lagrange qui soit orthogonal à tout l'espace sur lequel porte la contrainte.

Dans notre cas, la contrainte dualisée s'écrit :

$$\mathbf{u}^f = \mathbf{u} + \xi \mathbf{e}_2$$

Elle relie le saut de déplacement $\mathbf{u}^f - \mathbf{u}$ au glissement ξ . Le saut de déplacement est discrétisé aux nœuds. Il est donc continu sur l'ensemble du maillage, et quadratique sur chaque élément fini. Par ailleurs, le glissement ξ est discrétisé aux points de Gauss, c'est-à-dire sur un nuage de points. Pour examiner la condition inf-sup, on se place dans un cadre simplifié : on suppose que le glissement ξ est fixé en chaque point de Gauss par la loi de comportement. La contrainte dualisée s'applique donc uniquement sur le saut de déplacement $\mathbf{u}^f - \mathbf{u}$, qui est dit P2-continu. D'après les travaux de Bathe et Brezzi [2], trois espaces de multiplicateurs de Lagrange vérifient la condition inf-sup : il s'agit des espaces P2-continu, P1-continu et P0-discontinu. En revanche, l'espace P1-discontinu viole la condition inf-sup.

L'espace P2-continu n'est pas très satisfaisant, car il est aussi grand que l'espace des sauts de déplacement. Dans ce cas, si l'on impose une condition limite d'encastrement sur le bord de l'interface, les conditions d'encastrement sont redondantes avec les conditions dualisées à l'interface. Ce choix n'est donc pas très robuste. Par ailleurs, d'après les travaux de Lorentz [10], l'espace P0-discontinu pose des problèmes d'implantation, et donne des résultats moins bons que l'espace P1-continu. On choisit donc les multiplicateurs de Lagrange dans l'espace des fonctions P1-continues. En pratique, les degrés de liberté des multiplicateurs de Lagrange sont portés par les nœuds milieux des arêtes dégénérées (voir Figure 3.17).

Enfin, on doit choisir les familles de points de Gauss qui portent les degrés de liberté de glissement, et sur laquelle les intégrations numériques sont réalisées. Cette fois-ci, la contrainte est que le problème de stationnarité du lagrangien ne soit pas sous-contraint.

Ceci implique en particulier que le terme de pénalisation présent dans le lagrangien augmenté (3.55) doit être coercif. Les plus petites familles de points de Gauss respectant cette contrainte comprennent respectivement quatre et neuf points de Gauss pour le pentaèdre et l'hexaèdre quadratiques. Notons que ces familles diffèrent de celles proposées par Lorentz [10] pour des éléments d'interface liant deux volumes. En effet, dans ce cas, la rigidité du volume environnant suffit à assurer la coercivité de la formulation, ce qui n'est pas le cas du modèle de grille.

On peut faire une dernière remarque sur ces choix de discrétisation. Le terme de pénalisation du lagrangien augmenté (3.55) tend à minimiser l'écart entre le saut de déplacement discrétisé aux nœuds, et le glissement discrétisé aux points de Gauss. Or le nombre de points de Gauss au sein de chaque élément est trop important pour que cet écart puisse être réduit à zéro. Le paramètre de pénalisation k doit donc être choisi assez grand pour rendre la formulation coercive, mais pas trop afin d'introduire une certaine *souplesse* dans la vérification de la contrainte $\mathbf{u}^f = \mathbf{u} + \xi \mathbf{e}_2$ en chaque point de Gauss. On précisera la valeur adéquate de ce paramètre dans le paragraphe suivant.

Résolution du problème à l'échelle locale

On a fait le choix de discrétiser le glissement ξ et la variable interne a aux points de Gauss. Ceci permet d'éliminer ces degrés de liberté du problème global en les *condensant* au sein de chaque élément. Dans ce paragraphe, on se propose donc de calculer le glissement ξ et le glissement maximal a en fonction des autres paramètres \mathbf{u} , \mathbf{u}^f et $\boldsymbol{\zeta}$. Rendre stationnaire le lagrangien (3.55) par rapport à ξ et a revient à rendre stationnaire la quantité

$$\Pi(a) + \boldsymbol{\zeta} \cdot (\mathbf{u}^f - \mathbf{u} - \xi \mathbf{e}_2) + \frac{k}{2} |\mathbf{u}^f - \mathbf{u} - \xi \mathbf{e}_2|^2,$$

par rapport à ξ et a en chaque point de Gauss, sous la double contrainte :

$$\begin{cases} |\xi| \leq a \\ a \geq 0 \end{cases}$$

En retirant les termes qui ne dépendent pas de ξ et a , la fonction f à rendre stationnaire s'écrit aussi :

$$f(\xi, a) = \Pi(a) - \xi (\boldsymbol{\zeta} - k(\mathbf{u}^f - \mathbf{u})) \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{k}{2} \xi^2$$

Pour simplifier les écritures, on introduit le paramètre de chargement s , défini par :

$$s(\mathbf{u}, \mathbf{u}^f, \boldsymbol{\zeta}) = (\boldsymbol{\zeta} - k(\mathbf{u}^f - \mathbf{u})) \cdot \mathbf{e}_2$$

La fonction f s'écrit donc :

$$f(\xi, a) = \Pi(a) - s \xi + \frac{k}{2} \xi^2$$

On peut se placer dans la situation où $\xi \geq 0$, quitte à inverser l'orientation du vecteur \mathbf{e}_2 . On peut distinguer différents cas, selon que l'on se trouve en phase de décharge $\xi < a$,

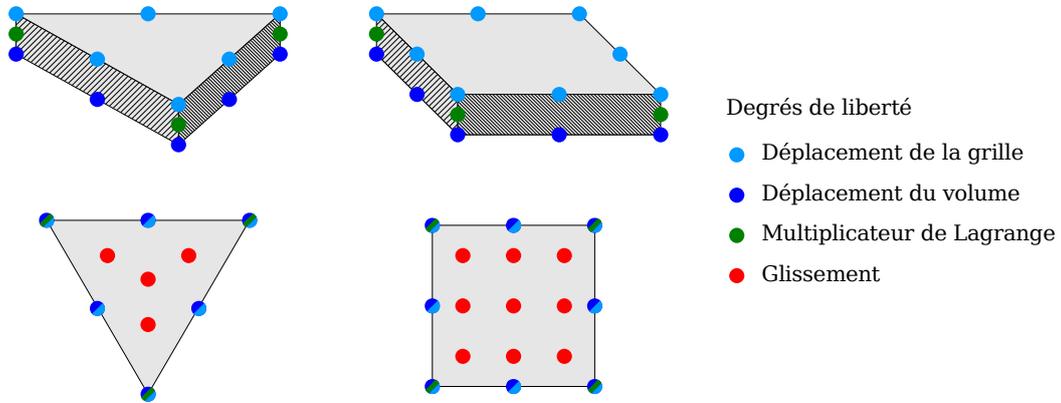


FIGURE 3.17 – Choix de discrétisation pour les éléments mixtes d’interface. Les éléments implantés sont le pentaèdre et l’hexaèdre quadratiques dégénérés. Les nœuds des faces supérieures et inférieures portent les degrés de liberté de déplacement de la grille et du volume environnant, les nœuds milieux des arêtes dégénérées portent les multiplicateurs de Lagrange, et le glissement est porté par une famille de points de Gauss sur la surface.

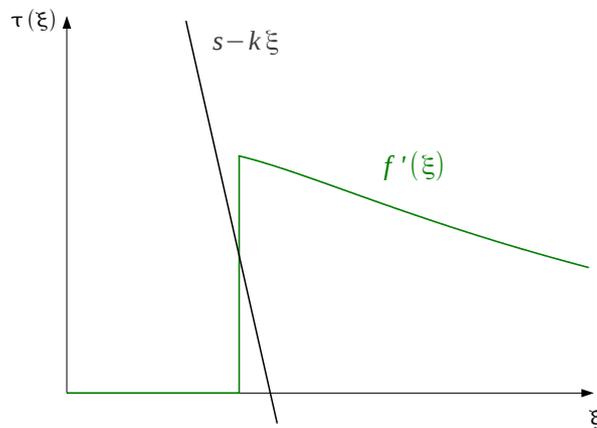


FIGURE 3.18 – Problème local résolu à l’échelle du point de Gauss. On détermine l’intersection entre la courbe $f'(\xi)$ et la droite d’équation $s - k\xi$.

de glissement bloqué $\xi = a$, ou de dissipation d'énergie $\dot{a} > 0$. En situation de décharge, l'équation à résoudre est :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, a) = k \xi - s = 0$$

Lorsque le glissement est bloqué, on a tout simplement $\xi = a$. Enfin, lorsque l'interface dissipe de l'énergie, on a $a = \xi$, et l'équation à résoudre est :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, \xi) + \frac{\partial f}{\partial a}(\xi, \xi) = 0$$

En introduisant la loi d'adhésion $\tau(a)$, qui vérifie

$$\tau(a) = \frac{d\Pi}{da}(a),$$

l'équation précédente se met sous la forme

$$\tau(\xi) + k \xi - s = 0.$$

Dans tous les cas, résoudre la stationnarité de la fonction $f(\xi, a)$ revient à chercher un point d'intersection entre la droite d'équation $s - k \xi$ et une courbe $f'(\xi)$, définie par :

$$f'(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi < a \\ [0, \tau(a)] & \text{si } \xi = a \\ \tau(\xi) & \text{si } \xi > a \end{cases}$$

L'interprétation graphique de ce problème est présentée sur la Figure 3.18. On constate que ce point d'intersection est unique si la droite d'équation $s - k \xi$ décroît plus vite que la courbe $\tau(\xi)$. Ceci impose que le paramètre de pénalisation k soit plus grand que la plus grande pente négative de $\tau(\xi)$. En pratique, si a_m et τ_m sont le glissement et le cisaillement au maximum de la courbe $\tau(a)$, on recommande de choisir k dans l'intervalle suivant :

$$10 \frac{\tau_m}{a_m} \leq k \leq 1000 \frac{\tau_m}{a_m}$$

Précisons que les résultats numériques dépendent généralement très peu de ce paramètre.

En régime de décharge ou de glissement bloqué, l'intersection de la courbe $f'(\xi)$ avec la droite $s - k \xi$ peut être déterminée analytiquement. En revanche, en régime dissipatif, ce problème doit être résolu numériquement à l'aide d'une méthode de Newton. L'implantation de cette méthode ne pose pas de problème particulier, et l'algorithme de Newton converge en quelques itérations. Au final, le problème local permet de calculer en chaque point de Gauss le glissement ξ et le glissement maximal a en fonction de $s = (\zeta - k(\mathbf{u}^f - \mathbf{u})) \cdot \mathbf{e}_2$.

Résolution du problème global

Il reste à présent à écrire la condition de stationnarité du lagrangien (3.55) en fonction des degrés de liberté globaux \mathbf{u} , \mathbf{u}^f et $\boldsymbol{\zeta}$. Ces conditions s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) : \mathbf{A}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} - \mathcal{W}(\tilde{\mathbf{u}}) - \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\zeta} \, d\mathbf{x}' - k \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u}^f - \mathbf{u} - \xi(s) \mathbf{e}_2) \, d\mathbf{x}' &= 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \\ L \int_{\Gamma} \kappa_m \frac{\partial \tilde{u}_2^f}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^f}{\partial x_2} \, d\mathbf{x}' + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}^f \cdot \boldsymbol{\zeta} \, d\mathbf{x}' + k \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}^f \cdot (\mathbf{u}^f - \mathbf{u} - \xi(s) \mathbf{e}_2) \, d\mathbf{x}' &= 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{u}}^f \\ \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \cdot (\mathbf{u}^f - \mathbf{u} - \xi(s) \mathbf{e}_2) \, d\mathbf{x}' &= 0 \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \end{aligned}$$

Dans ces relations, le glissement ξ est une fonction non-linéaire du paramètre s , défini par $s = (\boldsymbol{\zeta} - k(\mathbf{u}^f - \mathbf{u})) \cdot \mathbf{e}_2$. Ce problème est un problème de point-selle non-linéaire, qui peut être résolu classiquement par une méthode de Newton. Nous verrons dans les exemples ci-après que cet algorithme de Newton global converge lui aussi en quelques itérations.

3.4 Validation numérique des modèles limite

On souhaite à présent valider la pertinence des deux modèles asymptotiques proposés. Dans cet objectif, on compare le comportement de ces modèles simplifiés avec des modélisations tridimensionnelles détaillées. On considère deux tests de validation différents, permettant de valider le comportement élastique des deux modèles simplifiés, ainsi que la modélisation de la décohésion de l'interface acier-béton avec le modèle de grille. Le premier essai concerne la flexion élastique d'une plaque en béton armé, tandis que le second correspond à l'extraction d'une nappe d'armatures.

3.4.1 Modélisation d'une plaque en flexion

Le problème étudié

On s'intéresse tout d'abord au comportement en flexion d'une plaque en béton armé. La géométrie du problème étudié est indiquée sur la Figure 3.19. Cette plaque de béton a une épaisseur de 16 cm, une longueur de 80 cm et une largeur supposée grande par rapport aux autres dimensions. Elle comporte deux nappes d'armatures unidirectionnelles, situées de part et d'autre de la plaque. Les barres d'armatures ont un diamètre de 20 mm. Elles sont disposées à 6 cm de part et d'autre du plan moyen de la plaque, et espacées de 10 cm dans le sens de la largeur. L'enrobage de béton autour des armatures est donc de 1 cm. La plaque de béton armé est encadrée à une extrémité, et soumise à un effort de flexion à l'autre, qui vaut 4000 N.m/m. Cet effort de flexion est modélisé par un effort normal variant linéairement dans l'épaisseur de la plaque. Les comportements du béton et de l'acier sont supposés élastiques, et l'interface acier-béton est parfaitement adhérente. Le module d'Young du béton est de 30 GPa, pour un coefficient de Poisson de 0,22, et le module d'Young de l'acier de 200 GPa, pour un coefficient de Poisson de 0,3.

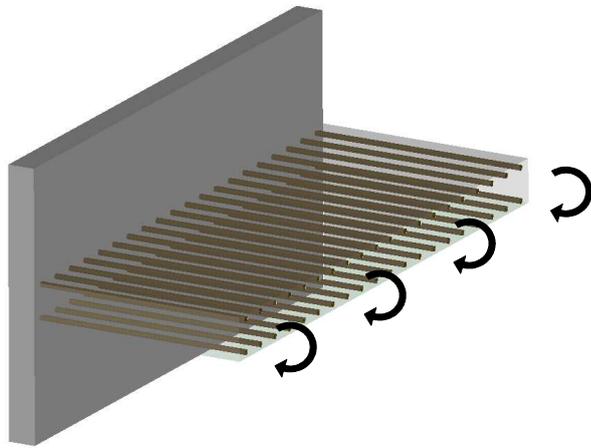


FIGURE 3.19 – Sollicitation en flexion d'une plaque en béton armé.

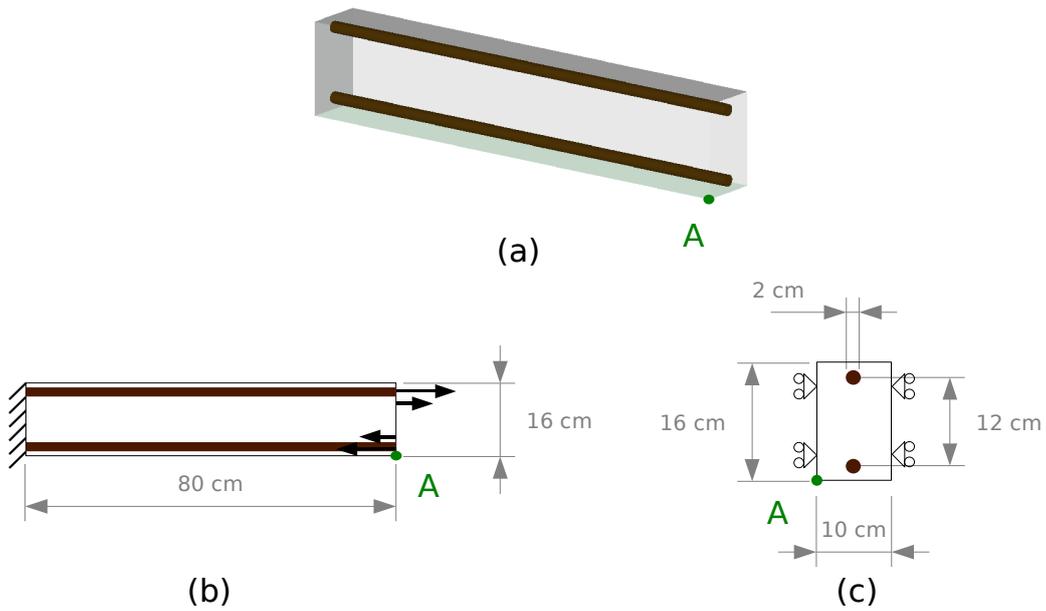


FIGURE 3.20 – Élément de plaque modélisé. (a) Représentation du motif périodique simulé comprenant deux barres d'armatures. (b) Vue longitudinale de la plaque et efforts appliqués. (c) Section transverse de la plaque, avec conditions de périodicité. Le point de référence pour le déplacement est le point A.

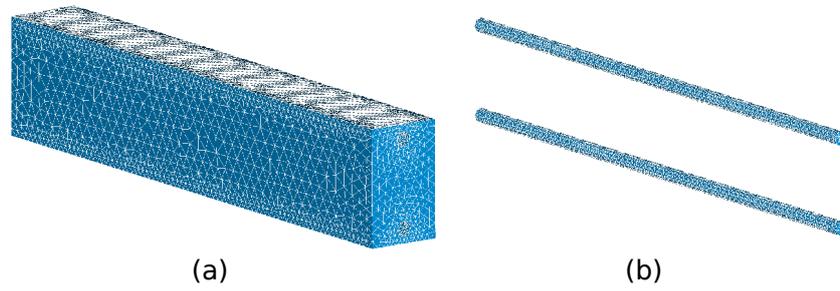


FIGURE 3.21 – Maillage de la plaque en flexion pour la solution de référence avec (a) le béton et (b) les barres d’acier modélisées en 3D. Le maillage comporte 290 000 nœuds.

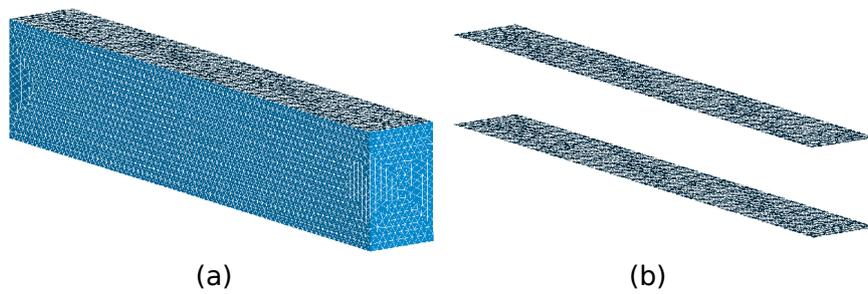


FIGURE 3.22 – Maillage de la plaque en flexion pour les modèles simplifiés avec (a) le béton et (b) les barres d’acier modélisées par des éléments de surface. Le maillage comporte 145 000 nœuds.

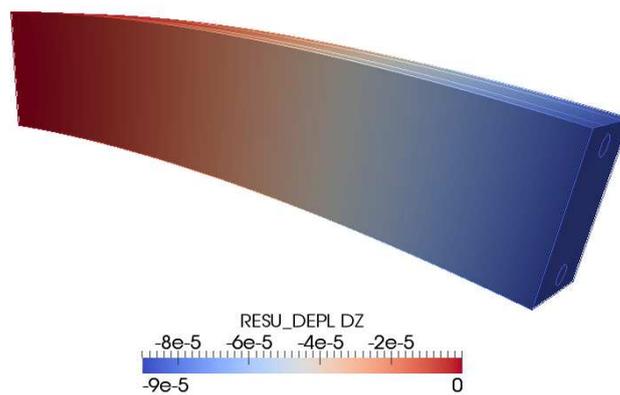


FIGURE 3.23 – Déformée de la solution de référence, amplifiée d’un facteur 1000. Les couleurs indiquent le déplacement vertical.

Modélisation et discrétisation du problème

Comme la plaque est très large, les champs mécaniques sont quasiment périodiques dans cette direction. On ne modélise donc qu'un simple motif périodique de la plaque, qui comprend deux barres d'acier (voir Figure 3.20). Ceci rend le coût de calcul d'une solution de référence abordable pour ce problème. On compare quatre modélisations différentes. Une première modélisation, dans laquelle les barres d'armature sont représentées en 3D, fournit la solution de référence (voir Figure 3.21). Dans la seconde modélisation, on néglige entièrement la rigidité des armatures. On modélise donc le comportement en flexion d'une plaque de béton non armé. Pour la troisième modélisation, on représente les nappes d'armatures supérieure et inférieure par un modèle de grille adhérente, dont la rigidité est calculée de façon analytique. Enfin, la dernière modélisation fait appel à un modèle de membrane anisotrope. Le comportement de cette membrane est déterminé par des calculs élémentaires à l'échelle d'une barre d'acier. Suivant les résultats de la Section 2.5.4, cette rigidité s'écrit :

$$e \mathbf{N} = e E_B R_{\alpha\beta} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) \otimes (\mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\beta) + 4e E_B G (\mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_3) \otimes (\mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_3)$$

Les indices grecs sont implicitement sommés sur $\{2, 3\}$, \mathbf{e}_2 constitue la direction des barres d'acier. De plus, e est l'espacement entre les barres d'acier, E_B le module d'Young du béton et les coefficients $R_{\alpha\beta}$ et G sont sans dimension. La valeur de ces coefficients est précisée dans le tableau ci-dessous.

Paramètre	R_{22}	R_{33}	R_{23}	G
Valeur	0,182	0,041	0,013	0,019

Le maillage utilisé pour le modèle de référence comporte 205 000 tétraèdres quadratiques, et 290 000 nœuds. De même, le maillage utilisé pour les trois modèles simplifiés comporte 100 000 tétraèdres quadratiques, et 144 000 nœuds. Les quatre problèmes à résoudre sont donc des problèmes élastiques, comportant chacun entre 400 000 et 900 000 degrés de liberté. Pour résoudre ces problèmes, on utilise le solveur direct MUMPS, disponible dans *Code_Aster*.

Résultats obtenus et analyse

La déformée obtenue pour la solution de référence est présentée sur la Figure 3.23. La grandeur physique que l'on compare entre les différentes modélisations est le déplacement vertical en bout de plaque, au point A (voir Figure 3.20). Dans le tableau ci-dessous, on présente le déplacement vertical obtenu pour les diverses modélisations, ainsi que l'écart relatif des modélisations simplifiées à la solution de référence.

Modèle	Déplacement vertical (μm)	Écart relatif (%)
Modèle de référence	-87,1	
Modèle sans armatures	-119,0	36,6
Modèle de grille	-84,0	-3,6
Modèle de membrane	-87,3	0,2

Les résultats sont tout à fait conformes à ce que l'on pouvait attendre. La modélisation la plus simple, qui consiste à ne pas modéliser les armatures du tout, est très grossière. L'erreur relative sur le déplacement vertical en bout de plaque dépasse 30 %, ce qui n'est pas acceptable. Lorsque les armatures sont modélisées par un modèle de grille, l'erreur sur le déplacement est inférieure à 5 %. Enfin, le modèle de membrane anisotrope donne d'excellents résultats, le déplacement vertical étant correctement estimé à 0,2 % près. Dans un régime de comportement élastique, le modèle de membrane est donc beaucoup plus précis que le modèle de grille, l'erreur relative par rapport à la solution de référence étant diminuée d'un facteur 10. Ce résultat était attendu, dans la mesure où la rigidité du modèle de grille est calculée de façon analytique, tandis que celle du modèle de membrane est déduite de calculs élémentaires à l'échelle d'une cellule périodique. Cependant, on note que le modèle de grille ne donne pas de si mauvais résultats eu égard à sa simplicité.

Les modèles de grille et de membrane sont donc validés dans un régime de comportement élastique. Le modèle de grille s'avère moins précis que le modèle de membrane, mais il présente l'avantage d'être beaucoup plus simple à mettre en œuvre. Il est donc mieux adapté à une utilisation dans un contexte d'ingénierie. Pour compléter la validation de ces modèles, il reste à valider le modèle de grille avec décohésion dans un régime de comportement non-linéaire.

3.4.2 Modélisation d'une extraction d'armatures

Le problème étudié

Le second test de validation correspond à l'extraction d'une nappe d'armature hors d'un massif de béton. On considère une plaque en béton de 20 cm d'épaisseur, au milieu de laquelle se trouve une nappe d'armatures (voir Figure 3.24). La plaque fait 1 m de long, et est supposée très large. La nappe d'armatures se compose de barres en acier de 2 cm de diamètre, organisées selon un motif orthogonal, et espacées de 20 cm. Pour simplifier la simulation 3D du problème, on évite le contact entre les barres d'armatures en les séparant de 4 mm dans le sens de l'épaisseur de la plaque. La plaque est maintenue sur un bord. Sur le bord opposé, on applique un effort de traction sur la section des barres d'acier. L'effort exercé augmente progressivement de 0 à 100 kN par barre d'acier.

Le béton et l'acier présentent un comportement linéaire élastique, tandis que la liaison acier-béton est susceptible de se dégrader. Le module d'Young du béton est de 30 GPa, pour un coefficient de Poisson de 0,22, et le module d'Young de l'acier de 200 GPa, pour un coefficient de Poisson de 0,3. La liaison acier-béton se comporte suivant la loi proposée dans la Section 3.2. On rappelle que, dans un régime de sollicitation monotone, cette loi présente la forme suivante :

$$\tau(\xi) = \tau_0 \frac{(\xi/a_0)^\alpha}{(1 + \xi/a_0)^{\alpha+\beta}}$$

Les paramètres de cette loi sont δ_0 , τ_0 , α et β , ou de façon équivalente δ_m , τ_m , α et β , où δ_m et τ_m sont le déplacement et le cisaillement au pic de résistance de la liaison. Les valeurs des paramètres choisies pour ce test de validation sont indiquées dans le tableau suivant :

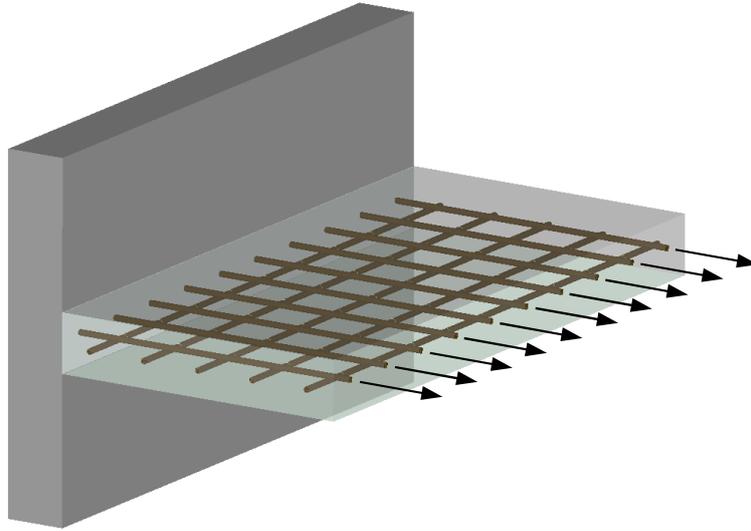


FIGURE 3.24 – Extraction d’une nappe d’armatures hors d’une plaque en béton armé.

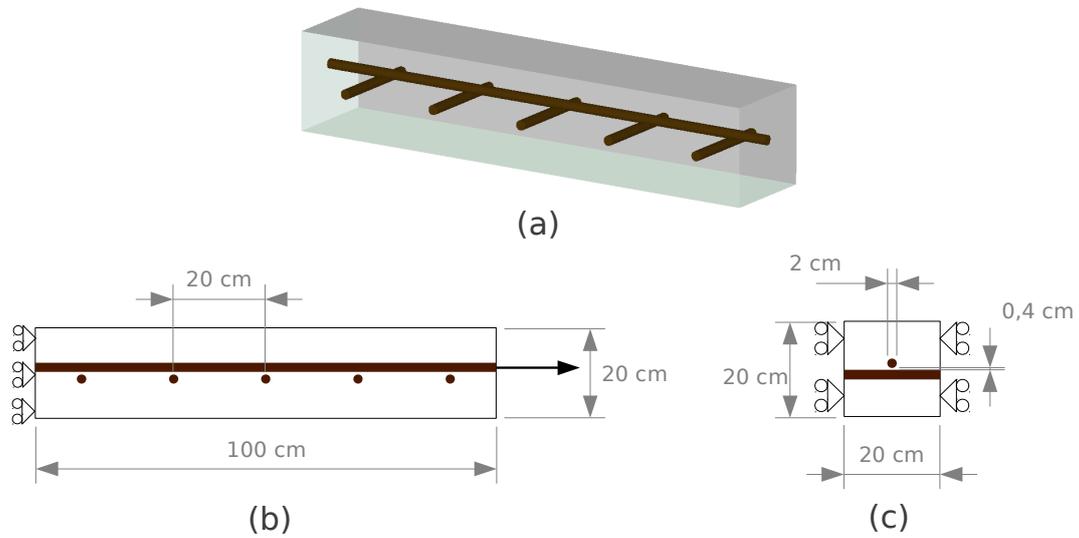


FIGURE 3.25 – Élément de plaque modélisé. (a) Représentation du motif périodique simulé, comprenant une barre d’armature orientée dans la longueur, et 5 barres d’armatures perpendiculaires. (b) Vue longitudinale de la plaque. (c) Section transverse de la plaque, avec conditions de périodicité.

Paramètre	a_m	τ_m	α	β
Valeur	1 mm	10 MPa	0,7	1

Physiquement, les phénomènes auxquels on s'attend sont les suivants : les efforts de traction exercés sur les armatures sont redistribués dans l'ensemble de la plaque par le biais de la liaison acier-béton. Tant que les efforts exercés sur les armatures ne sont pas très importants, les efforts transmis par la liaison acier-béton restent modérés, et l'acier reste adhérent au béton. Cependant, à mesure que l'on augmente l'effort de traction, des micro-fissures apparaissent dans le béton au voisinage de l'acier, et le béton s'endommage progressivement. On observe alors un glissement relatif de l'acier par rapport au béton, qui peut atteindre 0,1 à 1 mm. Cette décohésion des armatures par rapport au béton s'initie au bord de la plaque, et progresse à l'intérieur du béton à mesure que l'on augmente l'effort de traction. Notons que l'on exclut ici une possible fissuration transverse de la plaque de béton, ainsi qu'une éventuelle plastification de l'acier susceptibles de se produire pour de forts chargements.

Modélisation et discrétisation du problème

On a fait l'hypothèse que la plaque était très large. Comme le chargement de traction est le même sur toutes les barres, on peut supposer que les champs mécaniques sont périodiques dans cette direction. On ne modélise donc qu'une rangée d'armatures dans le sens de la largeur, et l'on impose des conditions de périodicité sur le bord de l'élément de plaque (voir Figure 3.25). Dans le sens de la longueur, on modélise 5 barres d'armature, réparties tous les 20 cm. Une liaison glissière est imposée sur un bord. Sur le bord opposé, on applique un effort de traction sur la section de l'armature longitudinale.

Cet essai est modélisé de deux manières. Une première modélisation 3D fournit la solution de référence pour ce problème. Dans cette modélisation, les barres d'acier sont représentées en trois dimensions, et l'interface entre l'acier et le béton est modélisée par des éléments d'interface à formulation mixte. Le maillage utilisé pour cette modélisation est montré sur la Figure 3.26. Il comporte 78 000 tétraèdres quadratiques, 6 000 pentaèdres quadratiques dégénérés à l'interface acier-béton, et 120 000 nœuds au total.

La seconde modélisation est une modélisation simplifiée, dans laquelle les armatures sont modélisées par un modèle de grille avec décohésion. On modélise ainsi la rigidité mécanique des armatures dans les deux directions, ainsi que leur glissement dans le sens de la longueur. La rigidité des armatures est modélisée par des éléments de grille, et leur glissement par des éléments d'interface à formulation mixte, qui relie la grille au volume de béton. Les paramètres de ce modèle sont identifiés analytiquement à l'aide des formules (3.42) et (3.44) développées dans la Section 3.1. Le maillage utilisé pour cette modélisation est montré sur la Figure 3.27. Il comporte 5 000 hexaèdres quadratiques, 500 hexaèdres quadratiques dégénérés à l'interface grille-béton, et 26 000 nœuds. Le nombre de degrés de liberté pour cette modélisation est donc diminué d'un facteur cinq par rapport à la modélisation de référence.

Pour ces deux modélisations, le problème mécanique à résoudre consiste à minimiser l'énergie mécanique du système sous contraintes. Le chargement sur les barres d'acier

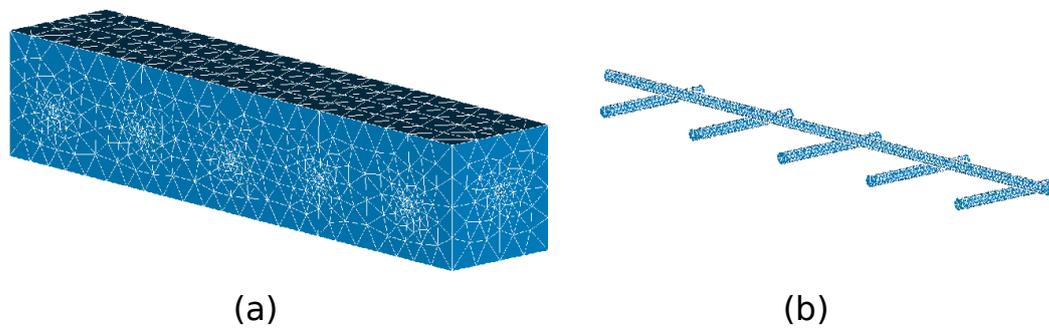


FIGURE 3.26 – Maillage de l'élément de plaque pour la solution de référence, avec (a) le béton, et (b) les barres d'acier modélisées en 3D. L'interface entre l'acier et le béton est modélisée par des éléments d'interface dégénérés. Le maillage comporte 120 000 nœuds.

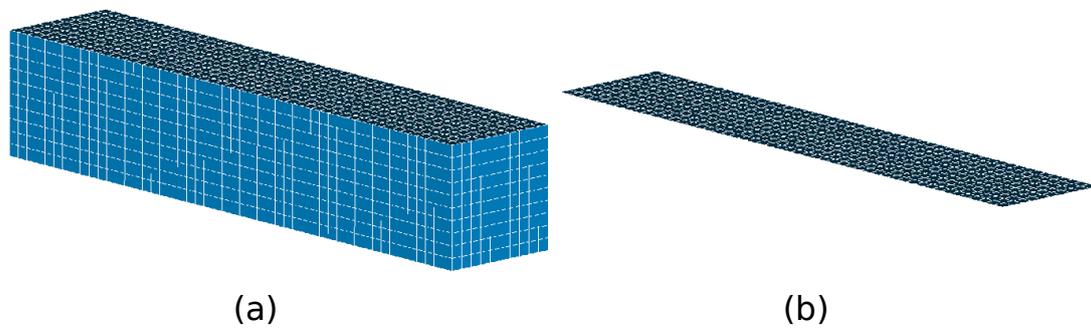


FIGURE 3.27 – Maillage de l'élément de plaque pour le modèle de grille avec décohésion, avec (a) le béton, et (b) les barres d'armature modélisées par des éléments de grille. L'interface entre la grille et le béton est modélisée par des éléments d'interface dégénérés. Le maillage comporte 26 000 nœuds.

est augmenté progressivement de 0 à 100 kN en dix incréments. À chaque incrément, l'énergie mécanique du système est minimisée par un algorithme de Newton. Le nombre d'itérations de cet algorithme est toujours inférieur à cinq, ce qui est très satisfaisant. Le temps de calcul total pour la solution de référence est de plus de trois heures, contre vingt minutes pour la modélisation simplifiée. Le coût de calcul est ainsi diminué d'un facteur dix avec le modèle simplifié.

Résultats obtenus et analyse

On représente les déformées de la plaque de béton armé sur la Figure 3.28, et la décohéation de l'acier par rapport au béton sur la Figure 3.29. On peut remarquer tout d'abord que les déformées du modèle simplifié et du modèle de référence sont très similaires. La principale différence réside dans une légère courbure de la plaque avec le modèle de référence, qui n'est pas reproduite avec le modèle de grille avec décohéation. Ceci est dû au fait que la barre d'acier sur laquelle on applique la force de traction est légèrement excentrée par rapport au plan moyen de la plaque. Cette force induit ainsi un léger couple de torsion, qui explique la flexion de la plaque. Comme cet excentrement n'est pas pris en compte par le modèle de grille avec décohéation, la flexion de la plaque n'est pas reproduite. On peut penser cependant que cet effet est assez négligeable. Par ailleurs, on observe sur la Figure 3.29 que la décohéation de l'acier par rapport au béton est très similaire pour les deux modèles. Cette décohéation se propage de quelques dizaines de centimètres à l'intérieur de la plaque. Cette décohéation ne peut pas se propager beaucoup plus loin car, au-delà de 100 kN, la contrainte dans l'acier dépasse 300 MPa. La barre d'acier plastifie donc avant que la décohéation ne traverse toute la plaque.

En termes quantitatifs, on représente sur les Figures 3.30 et 3.31 la courbe force-déplacement associée à l'effort appliqué sur l'acier, ainsi que le glissement de l'armature par rapport au béton. On remarque sur ces deux courbes que le modèle de référence et le modèle de grille avec décohéation présentent un comportement extrêmement proche. Les écarts observés sur ces deux courbes ne dépassent pas 5 %, ce qui est tout à fait satisfaisant.

Le modèle de grille avec décohéation reproduit donc non seulement le comportement global de la structure, mais également la répartition de la décohéation entre l'acier et le béton à l'intérieur de la structure. Le comportement non-linéaire du modèle de grille avec décohéation est donc validé.

3.5 Conclusions sur le modèle de grille avec décohéation

Dans ce chapitre, nous avons construit un modèle simplifié, capable de représenter la décohéation des armatures et des câbles de précontrainte dans une structure en béton armé. Ce modèle est appelé modèle de grille avec décohéation. Il est développé en étudiant le comportement asymptotique de fibres rigides dans une structure. Une loi d'adhérence acier-béton est ensuite développée, qui permet de prendre en compte ce phénomène dans les modélisations. Cette loi d'adhérence est validée par des comparaisons avec des essais

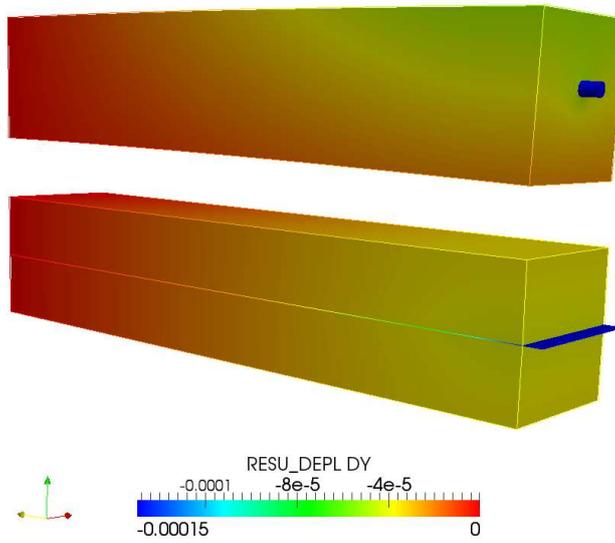


FIGURE 3.28 – Déformée de la plaque de béton armé pour un chargement de 50 kN, pour le modèle de référence et le modèle de grille avec décohésion. Les déformées sont amplifiées d'un facteur 200, et les couleurs indiquent le déplacement longitudinal.

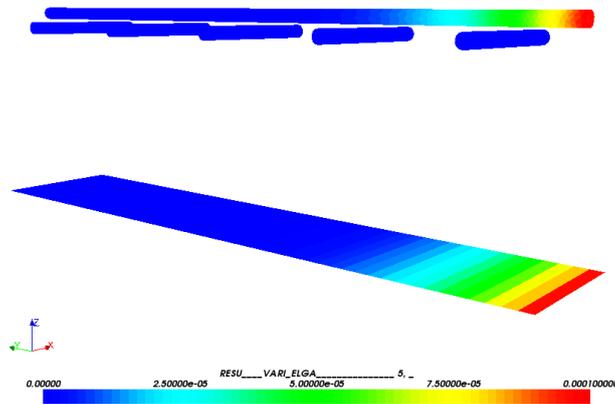


FIGURE 3.29 – Représentation du glissement à l'interface acier-béton pour un chargement de 50 kN, pour le modèle de référence et le modèle de grille avec décohésion.

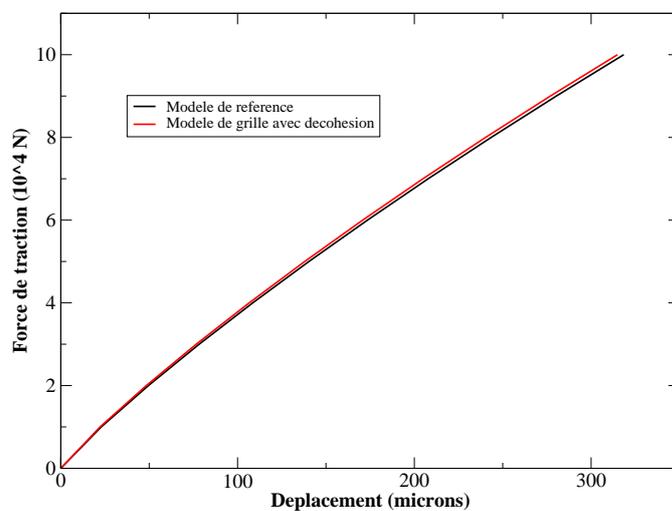


FIGURE 3.30 – Courbe force-déplacement pour le modèle de référence et le modèle de grille avec décohesion.

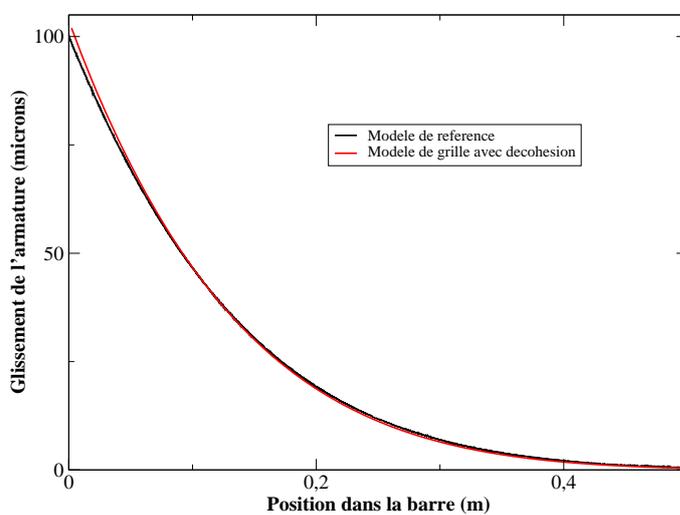


FIGURE 3.31 – Glissement de l'armature pour un chargement de 50 kN, pour le modèle de référence et le modèle de grille avec décohesion.

expérimentaux d'extraction d'armatures. Le modèle de grille avec décohésion est ensuite implanté dans le code éléments finis *Code_Aster* sous une forme modulaire, avec d'une part des éléments de membrane anisotrope, et d'autre part des éléments d'interface à formulation mixte. Enfin, ce modèle simplifié est validé par des comparaisons avec des simulations fines tridimensionnelles, dans un régime élastique et dans un régime de décohésion. Dans un régime élastique, le modèle de membrane anisotrope développé au chapitre précédent donne d'excellents résultats, tandis que le modèle de grille donne des résultats acceptables. Dans un régime de décohésion, le modèle de grille donne de très bons résultats, l'écart à la modélisation de référence étant inférieur à 5 %.

Le modèle de grille avec décohésion est donc construit par le biais d'une méthode d'analyse asymptotique, implanté dans le code éléments finis *Code_Aster* et validé par rapport à des simulations de référence. Son principal avantage est que tous les coefficients intervenant dans son comportement peuvent être déterminés analytiquement, ce qui facilite beaucoup sa mise en œuvre dans un contexte industriel. En revanche, le modèle développé ici ne prend pas en compte une éventuelle plastification de l'acier, ainsi que l'endommagement du béton.

La plastification de l'acier pourrait être intégrée assez facilement dans la construction de ce modèle. On peut démontrer qu'elle induit simplement une non-linéarité du comportement de la grille d'armature, qui n'interagit pas avec le comportement de la liaison acier-béton. Notons que ce comportement de grille non-linéaire est déjà intégré dans le code éléments finis *Code_Aster*. En revanche, la question de l'endommagement du béton reste une question largement ouverte. En effet, la dégradation de la liaison acier-béton intègre pour partie ce comportement non-linéaire du béton, en autorisant un glissement relatif de l'acier. Il est ainsi délicat de faire cohabiter deux modes de représentation de l'endommagement du béton, une partie de cet endommagement étant condensée à l'interface acier-béton, une autre étant représentée par un comportement volumique. Un travail conséquent reste donc à réaliser sur ce point, sur le plan théorique et en termes d'implantation numérique.

Chapitre 4

Application à la modélisation des enceintes de confinement

Introduction

Dans ce chapitre, on utilise le modèle de grille avec décohésion développé au chapitre précédent pour décrire le comportement mécanique d'une portion d'enceinte de confinement. L'objectif est d'estimer l'ouverture et le débit de fuite d'éventuelles fissures présentes au sein de ce type de structure. On développe une stratégie de modélisation, consistant à modéliser de façon chaînée le comportement mécanique de la structure, puis l'écoulement d'air dans les fissures. Ceci permet d'envisager à terme la modélisation de l'étanchéité d'une enceinte de confinement complète.

Dans la première section, on développe un outil permettant d'estimer le débit de fuite en air à travers les fissures. On précise tout d'abord la phénoménologie des fuites observées sur les enceintes de confinement, ainsi que les ordres de grandeur de ce phénomène. On fait ensuite un rapide tour d'horizon des modèles existant dans la littérature pour modéliser ce type de phénomène. En s'inspirant de ces modèles, on développe un outil de calcul de débit de fuite très simple. Cet outil permet, à partir d'un profil d'ouverture de fissure, de calculer le débit de fuite traversant cette fissure. Cet outil est validé par des comparaisons avec le code industriel de simulation ÉCREVISSE, qui est conçu pour des fissures de géométrie plus simple.

Dans la seconde section, on s'intéresse au comportement mécanique d'une fissure traversant une enceinte de confinement. Le modèle de grille avec décohésion nous permet de modéliser ce problème de façon relativement simple, avec un coût de calcul modéré. On calcule l'ouverture de cette fissure, ainsi que le débit de fuite correspondant, en fonction de la pression interne de l'enceinte. On montre que la loi d'adhérence entre les câbles de précontrainte et le béton a une influence significative sur le débit de fuite de la fissure. On compare également une modélisation tridimensionnelle des câbles avec une modélisation de grille avec décohésion. On démontre que le modèle de grille fournit des résultats extrêmement proches du modèle tridimensionnel, tant en termes d'ouverture de fissure qu'en termes de débit de fuite. Ce modèle simplifié est donc tout à fait pertinent

pour estimer l'étanchéité d'une enceinte de confinement.

Dans la troisième section, on s'intéresse à une campagne expérimentale de grande ampleur financée par EDF R&D auprès de l'institut technologique de Karlsruhe (KIT). Cette campagne vise à étudier le comportement mécanique et l'étanchéité d'une partie courante d'enceinte (dite PACE) à l'échelle 1. On modélise cet essai expérimental de façon simplifiée : les armatures et les câbles de précontrainte sont modélisés par le modèle de grille avec décohesion, tandis que les fissures dans le béton sont modélisées à l'aide de fissures cohésives. On démontre que cette modélisation simplifiée donne des résultats comparables à l'expérience, sans nécessiter le recalage des paramètres du modèle. Les coûts de calcul de ces simulations restent de plus très modérés.

4.1 Modélisation du débit de fuite

4.1.1 Approches proposées dans la littérature

On peut distinguer deux types d'écoulements de fluide au sein d'un matériau solide, selon l'échelle à laquelle on décrit le matériau. Il existe tout d'abord des écoulements diffus, caractérisés par un flux plus ou moins homogène au sein du matériau. Ces écoulements diffus peuvent être liés à une porosité intrinsèque du matériau, ou à une microfissuration due à un endommagement partiel de la microstructure. Il existe par ailleurs des écoulements localisés, transitant par des fissures macroscopiques au sein du matériau. Ces écoulements sont au contraire fortement hétérogènes, car concentrés dans les fissures.

Les deux types d'écoulements coexistent dans le béton : le ciment est un matériau poreux, dans lequel les fluides peuvent s'écouler naturellement, mais également fragile, et susceptible de se fissurer. Tant que le béton n'est que faiblement endommagé, les écoulements de fluide se font via le réseau poreux, et le cas échéant par le réseau de microfissures induit par l'endommagement. Dans ce cas, la perméabilité du béton reste faible. En revanche, lorsque des fissures macroscopiques apparaissent au sein de la structure, l'écoulement de fluide dans ces fissures devient prédominant, et le taux de fuite augmente de plusieurs ordres de grandeur. La répartition des écoulements dans la structure est alors essentiellement déterminée par la topologie des fissures la traversant.

Les méthodes utilisées dans la littérature pour modéliser les écoulements de fluide dans le béton privilégient l'un ou l'autre de ces phénomènes : certaines utilisent une représentation *moyennée* des écoulements, liée à une perméabilité volumique du béton, tandis que d'autres s'appuient sur une représentation *discrétisée* des écoulements, via des réseaux de fissures. La première approche s'appuie sur le cadre général des comportements thermo-hydro-mécaniques des milieux poreux. On peut citer par exemple les travaux de Jason *et al.* [94, 95], et de Meschke et Grasberger [96, 92]. L'approche proposée par Jason consiste à résoudre de façon chaînée le comportement mécanique de la structure, puis l'écoulement des fluides au sein du béton. Le comportement du béton est modélisé par un comportement élasto-plastique endommageable, et par une perméabilité qui dépend de l'hydratation et de l'endommagement du béton. Un premier calcul mécanique permet de déterminer la dégradation du béton sous l'effet de sollicitations extérieures. Ensuite,

un calcul d'écoulement de fluide dans la structure est réalisé, qui permet d'estimer son étanchéité. Les auteurs soulignent que cette approche est principalement adaptée à la description de faibles niveaux d'endommagement, son extrapolation à de vraies fissures étant délicate. De façon similaire, Meschke et Grasberger [96, 92] proposent un modèle formulé dans le cadre des comportements thermo-hydro-mécaniques couplés, décrit par Coussy [91]. Le comportement mécanique du béton est modélisé par un modèle de type *smearred crack*, présentant un comportement élasto-plastique endommageable. La perméabilité du matériau est définie comme la somme d'une perméabilité *intrinsèque*, liée à la porosité du béton, et d'une perméabilité anisotrope induite par les fissures. Cette perméabilité anisotrope est évaluée par un modèle de type Poiseuille au sein de chaque élément, et n'autorise d'écoulement que dans la direction de la fissure. Les exemples d'applications proposés concernent la modélisation du retrait du béton au jeune âge. En conclusion, ces approches continues permettent de modéliser de façon réaliste la perméabilité du béton aux faibles niveaux d'endommagement. En revanche, il n'est pas certain qu'elles puissent être extrapolées à la modélisation d'écoulements dans de vraies fissures macroscopiques.

Inversement, on peut choisir de modéliser uniquement les écoulements apparaissant dans les fissures macroscopiques du béton. Cette démarche est adaptée à la modélisation de bétons fortement endommagés, pour lesquels le débit de fuite transitant par le réseau poreux du béton est négligeable devant celui transitant par les fissures. Ce type d'approche nécessite de connaître le réseau des fissures dans le béton, ainsi que la loi d'écoulement du fluide dans ces fissures. Celle-ci relie le débit de l'écoulement au gradient de pression et à l'ouverture de la fissure. Le modèle d'écoulement le plus simple est le modèle de Hagen-Poiseuille, proposé indépendamment par Poiseuille et Hagen dans les années 1840. Il est valable lorsque l'écoulement de fluide est laminaire, et lorsque les bords de la fissure sont lisses. Cette loi d'écoulement s'écrit pour un gaz parfait en écoulement isotherme :

$$D_m = \alpha \ell_f w^3 \frac{p_{\text{int}}^2 - p_{\text{ext}}^2}{L} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{M}{24 \mu T R}$$

Dans cette relation, D_m est le débit massique en kg/s, w est l'ouverture de la fissure, p_{int} et p_{ext} sont les pressions absolues de part et d'autre du bloc de béton, L est l'épaisseur du bloc de béton, et ℓ_f est la largeur de la fissure. Le coefficient α est une caractéristique du fluide, qui fait intervenir la masse molaire M du fluide, la viscosité dynamique μ , sa température T et la constante des gaz parfaits R . Cette loi présente l'avantage d'être relativement simple, et très largement reconnue. Cependant, le débit observé expérimentalement est en général nettement inférieur aux prédictions du modèle de Poiseuille. Ceci peut être dû soit à la rugosité des bords de la fissure, soit à des phénomènes de turbulence aux petites échelles. D'autres lois ont donc été proposées à partir des années 80 par Rizkalla *et al.* [100], Suzuki *et al.* [105] et Greiner et Ramm [93]. Ces lois sont purement empiriques. Elles comprennent de nombreux paramètres, qui sont identifiés sur un ensemble d'essais expérimentaux. Le principal avantage de ces lois est qu'elles sont souvent plus précises que le modèle de Poiseuille. Inversement, comme toutes les lois empiriques, leur domaine de validité en termes d'ouverture de fissure et de gradient de pression est limité. De plus, on peut s'attendre à ce que ces lois dépendent de la formulation du béton,

qui influe sur la rugosité des bords de la fissure. Il convient donc d'être assez prudent dans l'utilisation de ces modèles.

Plus récemment, Riva *et al.* [99] et Wang et Hutchinson [106] ont effectué une comparaison de ces différents modèles avec des essais expérimentaux. Les essais considérés par Riva sont des essais de traction d'une dalle en béton armé, tandis que Wang et Hutchinson considèrent un essai de cisaillement. La démarche adoptée par les auteurs est la suivante : les essais sont modélisés de façon très simplifiée, avec quelques éléments finis de béton armé. Les fissures n'étant pas représentées explicitement, leur ouverture n'est pas directement accessible. Les auteurs introduisent donc arbitrairement un espacement de fissure, lié soit à l'espacement des barres d'armature (Riva *et al.*), soit à la taille des éléments finis (Wang et Hutchinson). En multipliant cet espacement de fissures par les déformations anélastiques du béton, les auteurs obtiennent une ouverture équivalente des fissures. Le débit de fuite est finalement calculé en additionnant la contribution de chacune de ces fissures, avec les différentes lois d'écoulement. Les auteurs concluent que le modèle de Poiseuille surestime beaucoup le débit de fuite, d'un facteur dix environ. Les modèles de Rizkalla et Suzuki donnent de bons résultats, tandis que le modèle de Greiner et Ramm surestime légèrement les résultats. On peut contester cependant le choix fait d'estimer l'ouverture des fissures à partir de la simulation. Il aurait été plus judicieux de s'appuyer sur les ouvertures de fissures mesurées expérimentalement, moins sujettes à caution. Comme le débit de fuite varie au cube de l'ouverture de fissure, on peut penser que ceci a une grande influence sur les résultats obtenus.

Dans le cadre d'essais expérimentaux menés à l'institut technologique de Karlsruhe, d'autres auteurs se sont intéressés à la modélisation de fissures traversant une portion d'enceinte de confinement de centrale nucléaire en vraie grandeur. On peut citer par exemple les travaux de Simon *et al.* [104] et Niklasch et Herrmann [98]. L'essai considéré correspond à la mise en traction d'un bloc de béton armé de 3 mètres de long et 1,2 mètres d'épaisseur. Ce bloc est mis en traction jusqu'à l'apparition de plusieurs fissures traversantes (voir Figure 4.1). Ensuite, une pression est appliquée sur la face supérieure du bloc, et le débit de fuite est mesuré de façon globale. Les données mesurées sur cet essai sont l'ouverture des fissures observée en paroi, ainsi que le débit de fuite global. Le gaz injecté est un mélange air-vapeur à 140°C. Les modélisations mises en œuvre par les auteurs sont assez proches. La structure est modélisée en deux dimensions, et comprend le volume de béton et des barres d'acier. Le béton est modélisé par un comportement élastique dans les travaux de Simon *et al.*, et endommageable dans les travaux de Niklasch et Herrmann. Les armatures sont modélisées par des éléments barre, qui sont reliés au béton par des éléments d'interface. Les fissures sont supposées préexistantes, et sont modélisées par des conditions de contact. Enfin, l'écoulement modélisé dans les fissures est laminaire diphasique. Il se compose d'un mélange gazeux air-vapeur, et d'une fraction d'eau condensée à l'intérieur de la structure. Les auteurs s'accordent sur la difficulté de reproduire à l'aveugle les résultats expérimentaux en termes d'ouverture de fissure et de débit de fuite. Les paramètres de chargement ainsi que la loi d'écoulement sont donc ajustés pour s'approcher des résultats expérimentaux. Une fois ce recalage effectué, l'accord entre l'expérience et les simulations est assez bon (voir Figures 4.2 et 4.3). Ces travaux de

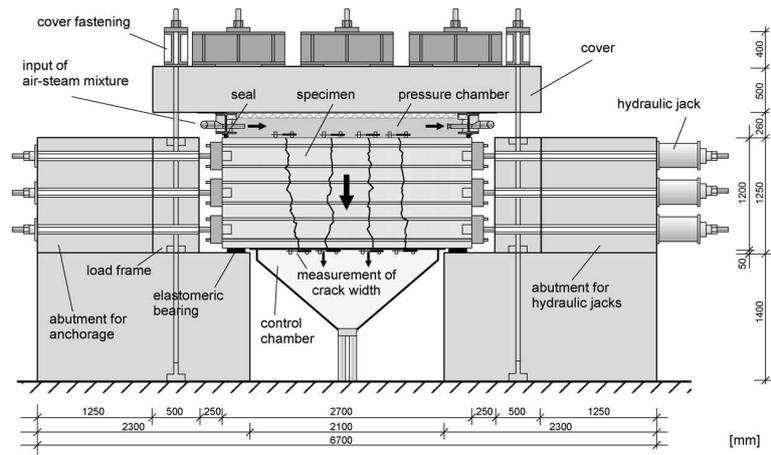


FIGURE 4.1 – Schéma de la dalle de Karlsruhe. La dalle de béton armé est mise en traction horizontalement, et soumise à une pression sur sa face supérieure.

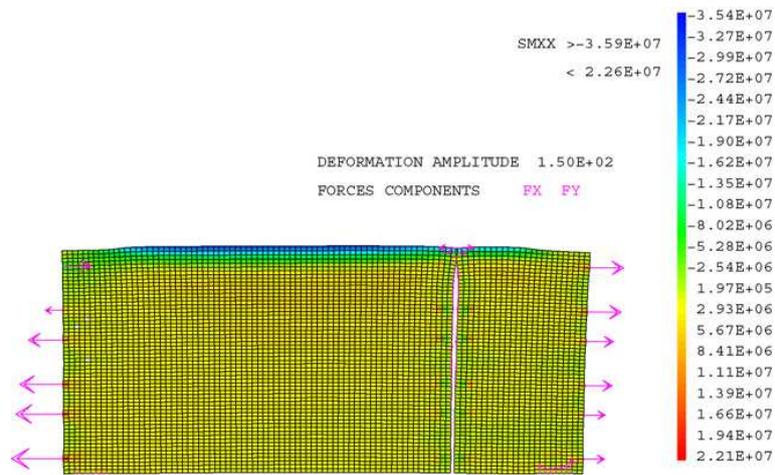


FIGURE 4.2 – Déformée de la dalle de Karlsruhe d’après les travaux de Simon *et al.* [104]

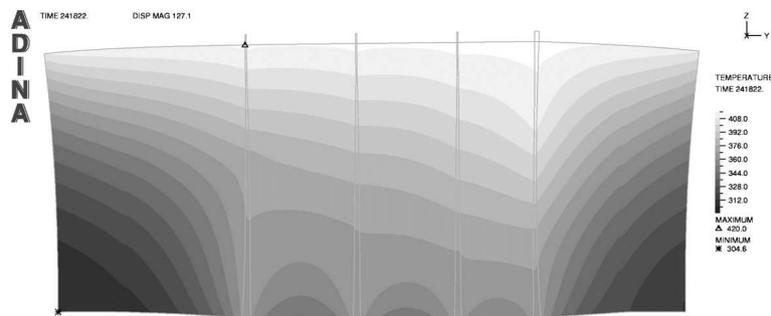


FIGURE 4.3 – Déformée de la dalle de Karlsruhe d’après les travaux de Niklasch et Herrmann [98].

recherche suggèrent qu'il est possible de modéliser de façon relativement simple le débit de fuite d'une structure en béton. Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons deux modélisations tridimensionnelles similaires pour des structures en béton précontraint.

Notons que des travaux de recherche assez proches ont été réalisés dans le domaine des géomatériaux, pour simuler le phénomène de fracturation hydraulique des roches. Ce phénomène désigne la propagation d'une fissure sous l'effet d'une forte pression de fluide injecté dans la fissure. Ce phénomène peut être intéressant, lorsqu'on souhaite par exemple augmenter le rendement d'un puit de forage, ou très néfaste, lorsqu'il aboutit à la déstabilisation d'un barrage hydraulique. On peut citer dans ce domaine les travaux de Boone et Ingraffea [90], Ng et Small [97], Selvadurai et Nguyen [103], Alfano *et al.* [89], et Segura et Carol [101, 102].

4.1.2 Proposition d'un modèle simplifié

Caractérisation de l'écoulement

Pour comprendre la physique des écoulements qui ont lieu dans les fissures, on se propose de faire tout d'abord une simple estimation d'ordres de grandeur. On souhaite déterminer en particulier si l'écoulement dans les fissures est laminaire ou turbulent, ainsi que le nombre de Mach de l'écoulement. Le critère de sûreté d'une enceinte de confinement impose que, lorsque l'enceinte est soumise à une pression interne de 5,3 bars en air sec, moins de 1,125 % de la masse de gaz contenu fuie en une journée. Le diamètre d'une enceinte de confinement est de l'ordre de 44 mètres, et sa hauteur de l'ordre de 60 mètres. On peut estimer son volume à 90 000 m³. La fuite d'air maximale tolérée est donc de 1000 m³ d'air à 5 bars sur 24 heures, soit 80 g/s.

Pour fixer les ordres de grandeur, on fait l'hypothèse que cette fuite est due à une unique fissure macroscopique dans l'enceinte. Cette fissure présente une ouverture w homogène, et une largeur ℓ_f (voir Figure 4.4). On fait l'hypothèse que l'écoulement d'air dans cette fissure peut être décrit par un modèle de Poiseuille. Le débit de fuite en masse D_m de l'enceinte s'écrit donc :

$$D_m = \alpha \ell_f w^3 \frac{p_{\text{int}}^2 - p_{\text{ext}}^2}{L} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{M}{24 \mu T R} \approx 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ S.I.} \quad (4.1)$$

On rappelle que L , ℓ_f et w sont l'épaisseur du mur de l'enceinte, la largeur et l'ouverture de la fissure. p_{int} et p_{ext} sont les pressions à l'intérieur et à l'extérieur de l'enceinte, et M , μ , T et R sont la masse molaire de l'air, son coefficient de viscosité dynamique, sa température et la constante des gaz parfaits. Le profil de vitesse dans la fissure est donné par la relation suivante :

$$V(z) = \frac{6D_m}{\rho \ell_f w^3} \left(\frac{w}{2} + z \right) \left(\frac{w}{2} - z \right)$$

On souhaite vérifier que l'écoulement dans la fissure est bien laminaire. Pour cela, on doit vérifier que le nombre de Reynolds de cet écoulement est inférieur à 1000. On peut

estimer le nombre de Reynolds de la façon suivante :

$$\mathcal{R}_e = \frac{D_m}{\mu \ell_f}$$

En utilisant cette relation, la condition $\mathcal{R}_e \leq 1000$ s'écrit :

$$\ell_f \geq \frac{D_m}{1000 \mu}$$

La viscosité de l'air à température ambiante est de l'ordre de 2.10^{-5} Pa.s. Si l'on fait l'hypothèse que le débit massique D_m est égal au débit maximum admissible de l'enceinte, on obtient $\ell_f \geq 3$ m. On peut penser que cette inégalité est vérifiée en pratique, car les fuites d'une enceinte sont dues à de nombreuses fissures réparties dans plusieurs zones. On fera donc l'hypothèse dans la suite des développements que l'écoulement d'air dans les fissures est laminaire.

On cherche à présent à estimer le nombre de Mach de cet écoulement. D'après le modèle de Poiseuille, la vitesse du fluide au centre de la fissure s'écrit :

$$V(0) = \frac{3D_m}{2 \rho \ell_f w} \quad (4.2)$$

Cette vitesse est maximale lorsque la densité du fluide est minimale, c'est-à-dire lorsque $\rho = \rho_{\text{ext}}$ au débouché de la fissure. Pour estimer cette vitesse, il nous faut estimer l'ouverture de la fissure. On réécrit donc la relation (4.1) sous la forme suivante :

$$w = \sqrt[3]{\frac{D_m L}{\alpha \ell_f (p_{\text{int}}^2 - p_{\text{ext}}^2)}}$$

On suppose toujours que le débit D_m est maximal, et on fait l'hypothèse que ℓ_f est de l'ordre de 10 mètres. On obtient alors $w \approx 120 \mu\text{m}$. En réintroduisant dans la relation (4.2), on obtient :

$$V \leq 80 \text{ m/s}$$

Comme la vitesse des ondes sonores à la pression atmosphérique est de l'ordre de 330 m/s, le nombre de Mach de cet écoulement est inférieur à 0,25. L'écoulement d'air dans les fissures reste donc subsonique.

Un modèle de Poiseuille compressible

On se propose de développer un outil de calcul de débit de fuite relativement simple, en se basant sur les ordres de grandeur décrits précédemment. On se donne une fissure, assimilée à une surface régulière $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Les points de cette surface sont notés $\mathbf{x}' \in \Gamma$, et l'ouverture de la fissure est notée $w(\mathbf{x}')$. On suppose que cette ouverture est très petite devant les dimensions de la surface Γ . Le bord de la surface est partitionné en trois parties $\partial_{\text{int}}\Gamma$, $\partial_{\text{ext}}\Gamma$ et $\partial_0\Gamma$ (voir Figure 4.5). $\partial_{\text{int}}\Gamma$ désigne le bord de la fissure qui débouche sur l'intérieur de l'enceinte, $\partial_{\text{ext}}\Gamma$ celui qui débouche sur l'extérieur de l'enceinte, et $\partial_0\Gamma$ le

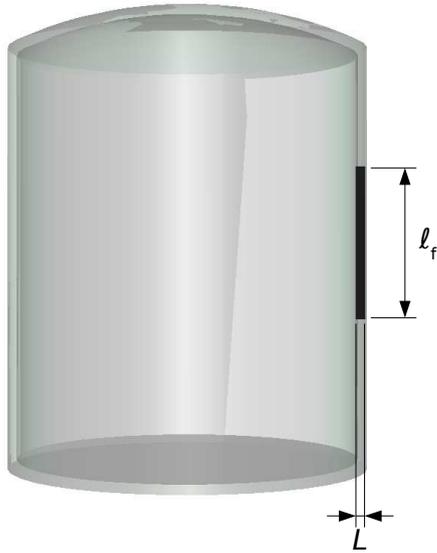


FIGURE 4.4 – Représentation d’une fissure de largeur ℓ_f , traversant le mur d’une enceinte de confinement d’épaisseur L .

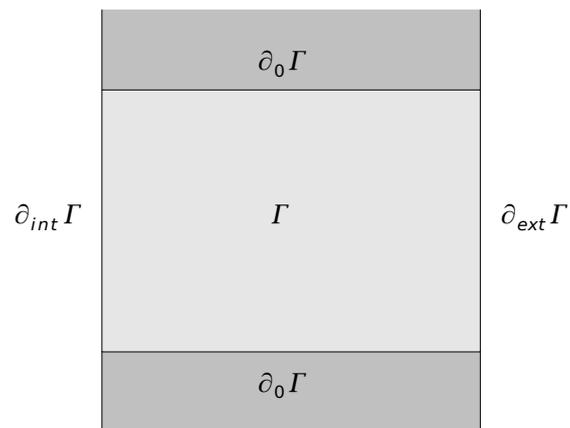


FIGURE 4.5 – La fissure modélisée est assimilée à une surface Γ . Les débouchés de la fissure sur les faces interne et externe sont notés $\partial_{int}\Gamma$ et $\partial_{ext}\Gamma$, et le front de fissure est noté $\partial_0\Gamma$.

front de fissure. On note $\mathbf{q}_m(\mathbf{x}')$ le flux de masse dans la fissure, exprimé en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, et $p(\mathbf{x}')$ la pression de l'écoulement en tout point de la fissure.

On fait l'hypothèse que l'écoulement de fluide dans la fissure est isotherme, ce qui est justifié tant que la capacité thermique de l'air est négligeable devant celle du béton. Sous cette hypothèse, l'écoulement de fluide est gouverné par trois équations, que sont l'équation de conservation de la masse, l'équation d'état qui relie la densité du fluide à sa pression, et une loi de perte de charge qui relie le gradient de pression au débit massique de fluide. L'équation de conservation de la masse s'écrit simplement :

$$\text{div}_\Gamma(\mathbf{q}_m) = 0$$

Dans cette relation, l'opérateur div_Γ désigne la divergence du flux sur la surface Γ . On suppose également que le fluide se comporte comme un gaz parfait. Il obéit donc à l'équation d'état suivante :

$$p = \frac{\rho RT}{M} \quad (4.3)$$

Enfin, on fait l'hypothèse que l'écoulement dans les fissures est de type Hagen-Poiseuille, c'est-à-dire parabolique dans l'épaisseur de la fissure (voir Figure 4.6). On néglige donc dans un premier temps la rugosité des lèvres de la fissure. La relation entre le flux de masse et la pression s'écrit alors :

$$\mathbf{q}_m = -\frac{\rho w^3}{12\mu} \mathbf{grad}_\Gamma(p)$$

Le terme \mathbf{grad}_Γ désigne le gradient de la pression le long de la surface Γ . En introduisant la relation d'état (4.3) dans la relation précédente, on obtient

$$\mathbf{q}_m = -\alpha w^3 \mathbf{grad}_\Gamma(p^2),$$

où le coefficient α est une constante caractéristique de l'écoulement, définie par

$$\alpha = \frac{M}{24\mu TR}.$$

Pour compléter le système d'équations, il reste à définir les conditions limite de l'écoulement. On suppose qu'il n'existe pas de perte de charge localisée aux débouchés de la fissure. La pression est donc fixée respectivement à p_{int} et p_{ext} sur les faces interne et externe de l'enceinte. Par ailleurs, au niveau du front de fissure, le débit de masse doit être tangent au front. Cette condition s'écrit $\mathbf{q}_m \cdot \mathbf{n} = 0$.

L'écoulement de fluide dans la fissure obéit donc au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_m = -\alpha w^3 \mathbf{grad}_\Gamma(p^2) & \text{sur } \Gamma \\ \text{div}_\Gamma(\mathbf{q}_m) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ p = p_{\text{int}} & \text{sur } \partial_{\text{int}}\Gamma \\ p = p_{\text{ext}} & \text{sur } \partial_{\text{ext}}\Gamma \\ \mathbf{q}_m \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial_0\Gamma \end{cases} \quad (4.4)$$

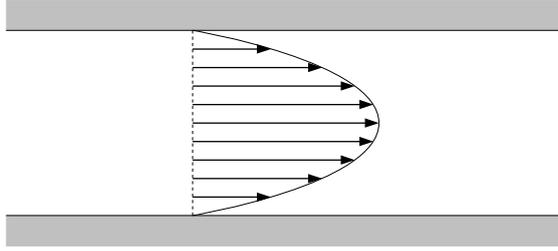


FIGURE 4.6 – Profil de vitesse pour un écoulement laminaire de Hagen-Poiseuille.

On reconnaît dans ce système une équation de Poisson classique sur la variable p^2 , avec des conditions aux limites mixtes de Neumann et Dirichlet.

Ce modèle est un modèle très simplifié, qui néglige la rugosité des lèvres de la fissure, ainsi que d'éventuels phénomènes de turbulence. La non-planéité des lèvres de la fissure se traduit par une augmentation du chemin parcouru par le fluide, ainsi que par une diminution de l'*ouverture effective*. Elle tend donc à réduire le débit de fuite de la fissure. De même, les phénomènes de turbulence induisent une source de dissipation supplémentaire, qui augmente les pertes de charge. Ils diminuent donc également le débit de fuite. On peut ainsi s'attendre à ce que le modèle proposé soit conservatif.

Dans la littérature, il est proposé d'introduire dans la formule de Poiseuille un coefficient de tortuosité, qui traduit un chemin supplémentaire parcouru par le fluide en raison de la tortuosité de la fissure. La loi d'écoulement s'écrit alors :

$$\mathbf{q}_m = -\alpha \kappa w^3 \mathbf{grad}_\Gamma(p^2)$$

Le paramètre κ est un paramètre dit de *tortuosité*, qui vérifie :

$$0 < \kappa \leq 1$$

Ce paramètre est généralement ajusté empiriquement pour reproduire le débit de fuite mesuré expérimentalement. D'après Niklasch et Herrmann [98], ce paramètre varie généralement entre 0,05 et 0,4. En d'autres termes, on peut s'attendre à ce que le modèle de Hagen-Poiseuille, défini par le système (4.4), surestime le débit de fuite d'un facteur 2 à 20.

4.1.3 Implantation et validation

Formulation d'un problème thermique équivalent

On suppose que la pression de fluide sur les lèvres de la fissure a peu d'influence sur le comportement mécanique de la structure. Le problème mécanique et le problème d'écoulement peuvent donc être résolus de façon chaînée : le comportement mécanique de la structure est modélisé en supposant que la pression de fluide dans la fissure est

nulle, puis le problème de l'écoulement du fluide est résolu en considérant l'ouverture de la fissure comme une donnée. Le système d'équations (4.4) peut donc être résolu indépendamment du problème mécanique.

Ce système d'équations s'interprète comme une équation de Poisson inhomogène sur la variable p^2 . Pour le résoudre, on établit une équivalence entre ce problème d'écoulement de fluide et un problème de thermique. On introduit donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_T = -\lambda_T \mathbf{grad}_\Gamma(T) & \text{sur } \Gamma \\ \text{div}_\Gamma(\mathbf{q}_T) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ T = T_{\text{int}} & \text{sur } \partial_{\text{int}}\Gamma \\ T = T_{\text{ext}} & \text{sur } \partial_{\text{ext}}\Gamma \\ \mathbf{q}_T \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial_0\Gamma \end{cases} \quad (4.5)$$

Ce système d'équations correspond à un problème de diffusion thermique stationnaire sur la surface Γ . La première équation constitue une loi de Fourier, la seconde la condition de conservation de l'énergie, et les trois dernières des conditions aux limites. On constate que ce système est équivalent au système d'équations (4.4). La température correspond au carré de la pression, et le flux thermique correspond au flux de masse dans la fissure. L'équivalence entre les autres grandeurs est précisée dans le tableau ci-dessous :

Grandeurs physiques de l'écoulement	p^2	\mathbf{q}_m	αw^3	p_{int}^2	p_{ext}^2
Grandeurs thermiques équivalentes	T	\mathbf{q}_T	λ_T	T_{int}	T_{ext}

Cette équivalence nous permet d'utiliser une modélisation thermique de *Code_Aster* pour modéliser l'écoulement de fluide dans la fissure. On utilise pour cela le modèle de coque thermique, qui modélise les phénomènes de diffusion thermique dans les structures minces [16]. La démarche adoptée est la suivante : l'ouverture w de la fissure est obtenue à partir du calcul mécanique. On déduit de cette ouverture la conductivité thermique équivalente $\lambda_T = \alpha w^3$ en tout point de la surface Γ . On résout ensuite le problème thermique équivalent (4.5) par la méthode des éléments finis. Enfin, le débit de fuite de la fissure est estimé en calculant l'intégrale du flux massique au bord de la fissure.

Validation numérique du modèle

Pour conclure, on souhaite valider notre outil de calcul de débit de fuite, ainsi que son implantation dans *Code_Aster*. Pour cela, on s'appuie sur le code de calcul ÉCREVISSE, qui est un code industriel développé par EDF R&D. Cet outil a été conçu initialement pour calculer le débit de fuite de fissures dans des tuyauteries métalliques. Il permet de modéliser des écoulements monophasiques et diphasiques, dans des régimes d'écoulement laminaire et turbulent. Il est donc assez riche sur le plan de la physique. En revanche, les géométries de fissure considérées par ÉCREVISSE sont plus simples : l'écoulement est modélisé comme un phénomène unidimensionnel, et la section de la fissure peut être soit rectangulaire, soit elliptique. Le modèle de Hagen-Poiseuille utilisé dans notre approche est donc plus pauvre sur le plan de la physique, mais plus riche sur le plan de la représentation géométrique de la fissure. Pour comparer ces outils, on se place dans

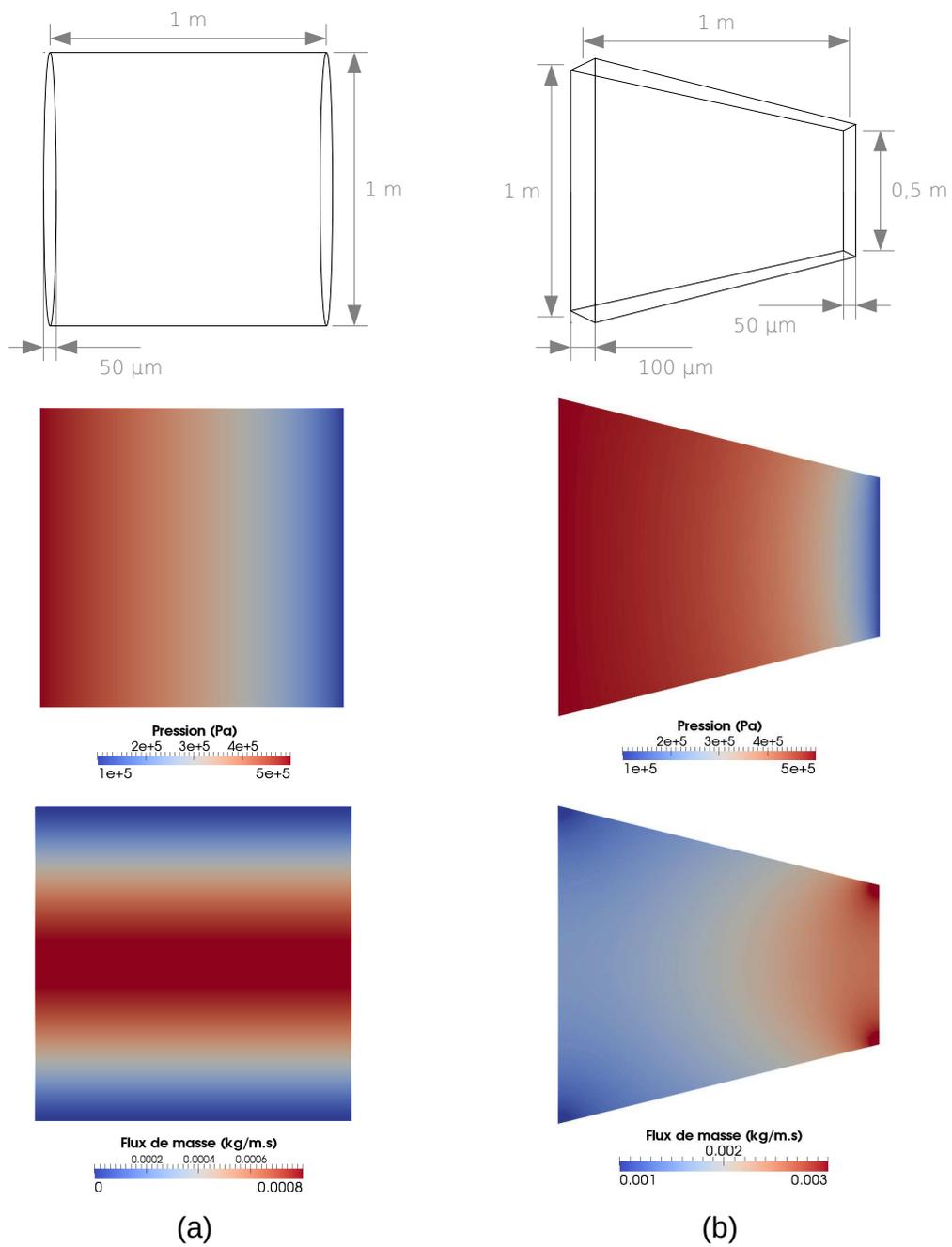


FIGURE 4.7 – Cas-tests de validation de la modélisation de l'écoulement. Les fissures considérées sont une fissure de profil elliptique constant (gauche), et une fissure de profil rectangulaire variable (droite). Les illustrations montrent la pression de fluide dans la fissure (milieu) et le débit massique (bas).

le domaine de validité commun des deux outils : on considère deux fissures de géométrie très simple, dans un régime d'écoulement laminaire monophasique.

La première fissure considérée présente un profil elliptique constant (voir Figure 4.7). Le grand diamètre de l'ellipse fait 1 m, le petit diamètre 50 μm , et la longueur de la fissure est de 1 m. La seconde fissure présente un profil rectangulaire non constant. Son ouverture varie linéairement de 100 à 50 μm , et sa largeur de 1 à 0,5 m. Les pressions imposées sur les faces interne et externe valent respectivement 5 et 1 bars, et le fluide considéré est de l'air à 20 °C.

On détermine tout d'abord le débit de fuite de ces deux fissures avec le code de calcul ÉCREVISSE. La géométrie des fissures est renseignée via un tableau de valeurs, interpolées automatiquement par le logiciel. On précise les pressions interne et externe imposées, ainsi que les propriétés du fluide injecté. Les débits de fuite estimés par le code de calcul ÉCREVISSE sont indiqués dans le tableau ci-après.

On évalue ensuite ce même débit de fuite avec le modèle de Hagen-Poiseuille implanté dans *Code_Aster*. Pour réaliser les calculs par éléments finis, les fissures sont maillées par un maillage réglé, comportant 40 000 quadrangles linéaires. La conductivité équivalente du matériau est calculée par la formule indiquée précédemment, et le problème thermique est résolu numériquement. Le débit de fuite de la fissure est obtenu en calculant l'intégrale du flux massique au débouché de la fissure. Les résultats correspondants sont indiqués ci-dessous.

Profil de fissure	Outil dédié (g/s)	ÉCREVISSE (g/s)	Écart relatif (%)
Fissure elliptique	0,485	0,479	1,2
Fissure rectangulaire	1,40	1,37	1,9

Les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants : l'écart entre les débits de fuite estimés ne dépasse pas 2 %. On peut attribuer cet écart à une erreur de discrétisation, due à l'une ou l'autre modélisation. L'implantation du modèle de Hagen-Poiseuille compressible dans *Code_Aster* est donc validée.

4.2 Modélisation d'une fissure traversante

4.2.1 Le problème étudié

Le premier exemple d'application de ces modèles concerne la modélisation d'une fissure traversante dans une enceinte de confinement de centrale nucléaire. Le problème étudié est montré sur la Figure 4.8. On suppose qu'il existe une fissure verticale à mi-hauteur de l'enceinte, traversant la structure de part en part. Cette fissure est intersectée par les armatures et les câbles de précontrainte présents dans la structure. Lorsque la pression à l'intérieur de l'enceinte est normale, cette fissure est refermée par la précontrainte. En revanche, si la pression dans l'enceinte augmente de façon trop importante, la précontrainte ne suffit plus à mettre le béton en compression, et la fissure est susceptible de s'ouvrir. On souhaite modéliser ce phénomène de façon relativement simple, en s'appuyant sur une représentation simplifiée des armatures et des câbles de précontrainte.

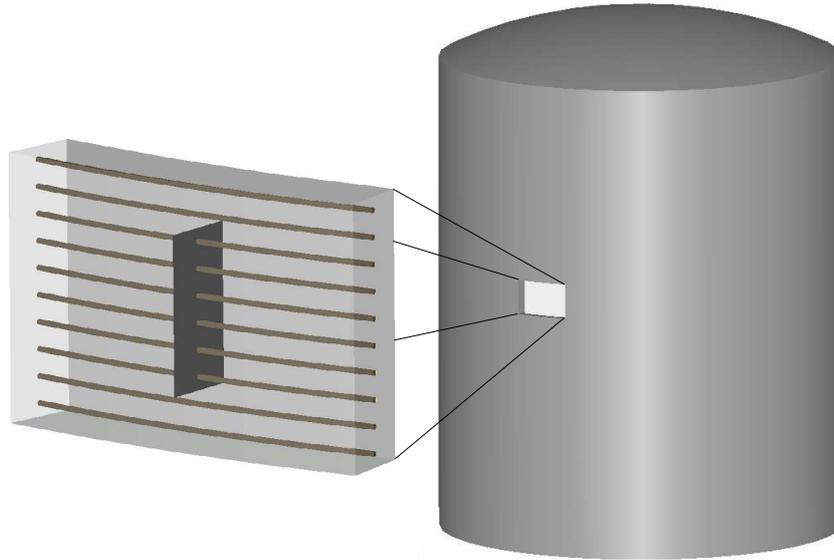


FIGURE 4.8 – Modélisation d’une fissure traversante dans une enceinte de confinement. Seuls les câbles de précontrainte horizontaux sont représentés.

L’enceinte de confinement présente une épaisseur de 1,2 mètres. Elle comporte deux nappes d’armatures, situées à 10 cm des faces interne et externe du béton. Ces armatures présentent un diamètre de 2 cm, un espacement de 20 cm, et sont organisées selon un motif orthogonal. L’enceinte est mise en précontrainte par des câbles de précontrainte horizontaux et verticaux. Ces câbles présentent un diamètre de 8,4 cm, et sont placés dans des gaines injectées au coulis de ciment. Les câbles horizontaux sont situés au milieu du béton, et sont espacés verticalement de 40 cm. Les câbles verticaux sont situés à 25 cm de la face interne du béton, et sont espacés horizontalement de 1 mètre. Ces câbles induisent une précontrainte horizontale de l’ordre de 12 MPa, et une précontrainte verticale de l’ordre de 8 MPa.

La fissure hypothétique considérée fait 2,4 mètres de haut. Elle est supposée initialement ouverte, ce qui signifie que les lèvres de la fissure sont en simple contact. Cette fissure est intersectée par les câbles de précontrainte horizontaux, et par les grilles d’armature situées sur les faces interne et externe de l’enceinte. En revanche, les câbles de précontrainte verticaux ne jouent pas de rôle particulier dans ce problème, en dehors de la précontrainte verticale qu’ils induisent.

4.2.2 Modélisation et discrétisation du problème

Symétries du problème

Pour simplifier la modélisation de ce problème, on ne considère qu’une portion de l’enceinte de confinement, haute de 4 m, large de 6 m, et centrée sur la fissure traver-

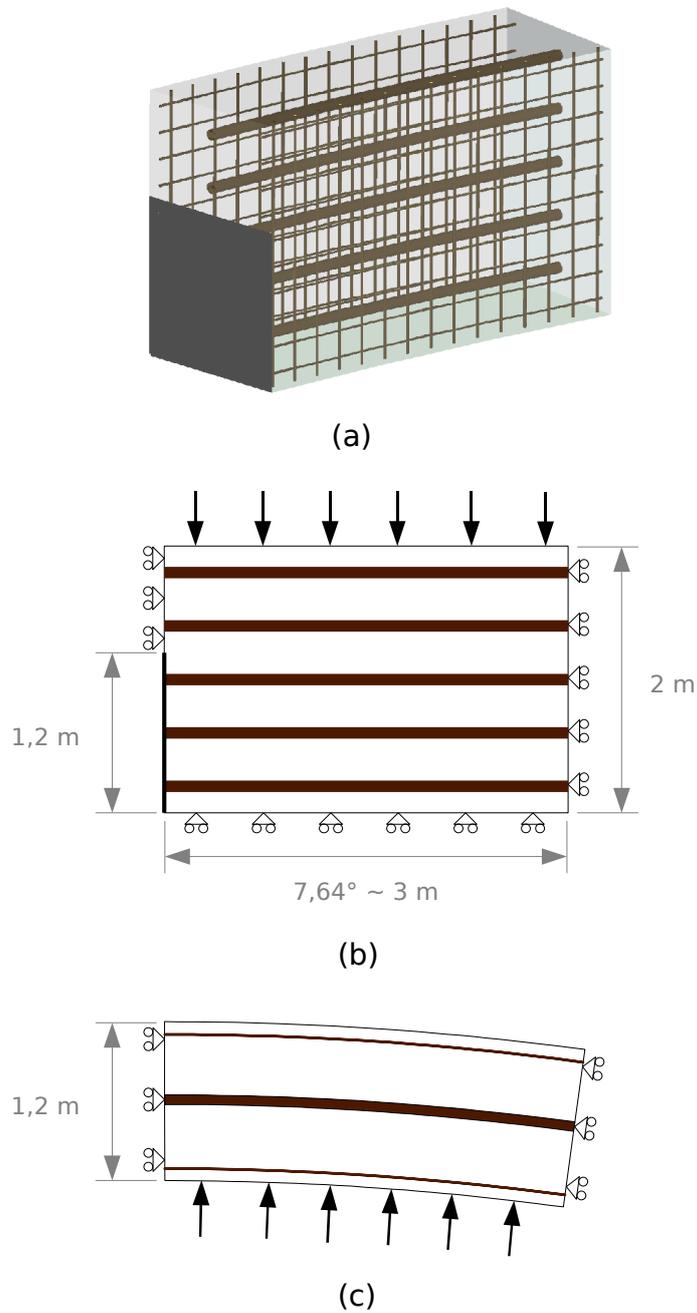


FIGURE 4.9 – (a) Représentation 3D de la fissure traversant l’enceinte de confinement. Cette fissure croise les câbles de précontrainte horizontaux, et les grilles d’armatures (non représentées). (b) Vue déroulée intérieure de la partie d’enceinte modélisée. La fissure se situe sur un plan de symétrie. (c) Coupe horizontale du volume modélisé, contenant les barres d’armature (noires) et les câbles de précontrainte (marron).

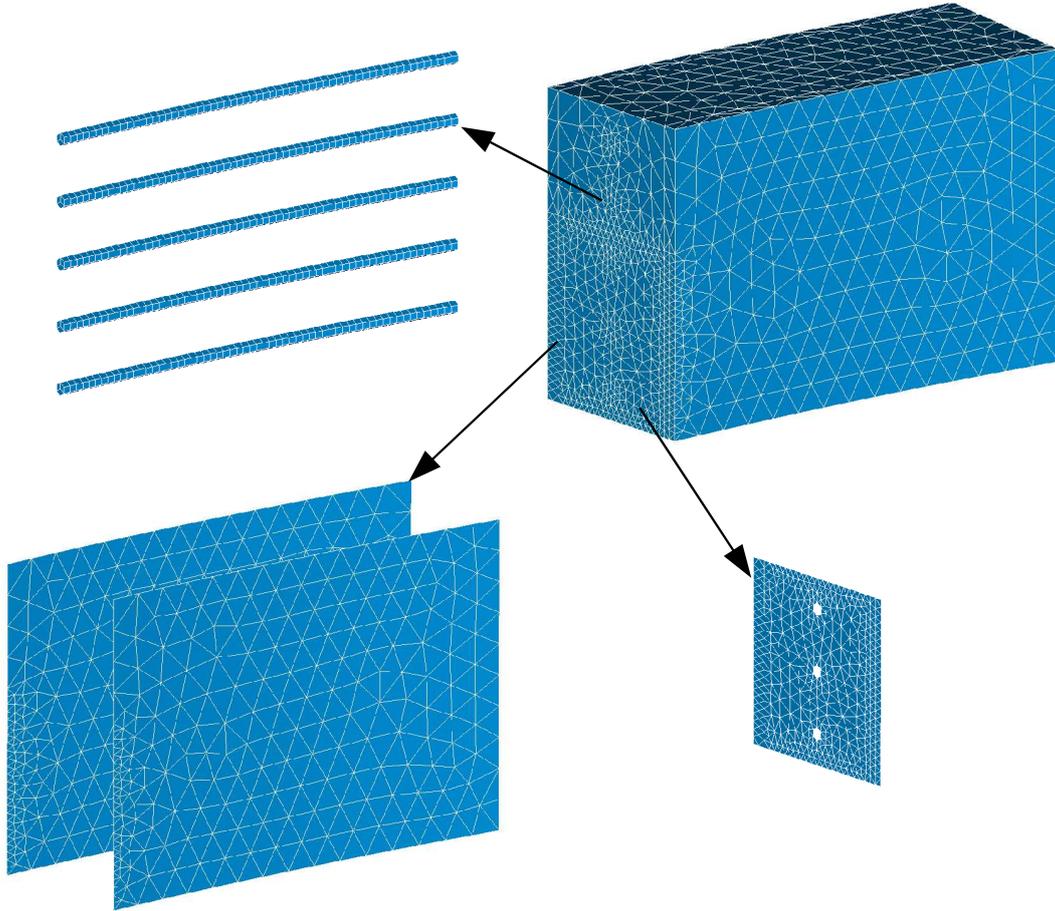


FIGURE 4.10 – Maillage complet de la portion d'enceinte de confinement. Les câbles de précontrainte horizontaux sont modélisés en 3D, les nappes d'armatures par des éléments de grille avec décohésion, et la fissure par des éléments d'interface. Le maillage comporte 52 000 éléments volumiques quadratiques, et 85 000 nœuds.

sante (voir Figure 4.8). Cette portion d'enceinte présente deux symétries, horizontale et verticale. Si le comportement des différents matériaux reste durcissant, on peut s'attendre à ce que la déformée de la portion d'enceinte reste symétrique. On choisit donc de ne modéliser qu'un quart de la structure, comme illustré sur la Figure 4.9.

Propriétés des matériaux

Le béton composant la structure est supposé présenter un comportement linéaire élastique, caractérisé par un module d'Young de 30 GPa, et un coefficient de Poisson de 0,22. La fissure traversante est modélisée par une loi de contact sans frottement. Les nappes d'armature sur les faces interne et externe sont modélisées par le modèle de grille avec décohesion, mais seul le glissement des armatures dans le sens horizontal est modélisé. Le module d'Young de l'acier est de 200 GPa, et les paramètres de la loi d'interface armature-béton sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Paramètre	a_m	τ_m	α	β
Valeur	1 mm	10 MPa	0,5	1

Ces paramètres sont représentatifs d'une loi d'interface armature-béton réelle. On choisit par ailleurs de modéliser les câbles de précontrainte horizontaux en trois dimensions. Le module d'Young de ces câbles est de 200 GPa, et le coefficient de Poisson de 0,3. En revanche, on néglige le comportement mécanique des gaines des câbles de précontrainte, ainsi que celui du coulis de ciment. Ces constituants sont donc assimilés à du béton. La loi d'adhérence entre les câbles de précontrainte et le béton est supposée similaire à une loi d'adhérence armature-béton. Il existe cependant une forte incertitude sur les paramètres de cette loi. On choisit les mêmes paramètres que pour la loi d'adhérence armature-béton, sauf pour la contrainte au pic τ_m , que l'on fait varier parmi 1, 7 et 50 MPa. Les paramètres de la loi d'adhérence câble-béton sont donc les suivants :

Paramètre	a_m	τ_m	α	β
Valeur	1 mm	1/7/50 MPa	0,5	1

Notons que l'on ne modélise pas explicitement les câbles de précontrainte verticaux.

Conditions limite et chargements

Les conditions limite appliquées sont les suivantes (voir Figure 4.9). On impose des déplacements normaux nuls sur les deux faces latérales, ainsi que sur la face inférieure de la portion d'enceinte. La portion d'enceinte est également soumise à trois chargements, que sont la pression interne, la précontrainte horizontale et la précontrainte verticale. La précontrainte horizontale est modélisée par une prédéformation des câbles horizontaux (mot-clé EPSI_INIT), et la précontrainte verticale est modélisée de façon globale par une pression uniforme sur la face supérieure de la portion d'enceinte. La pression interne de l'enceinte a deux effets : elle induit une contrainte de compression sur la face interne, ainsi qu'un effet de fond¹ sur la face supérieure de la portion d'enceinte. Le chargement

1. L'effet de fond traduit l'effet de la pression sur le dôme supérieur de l'enceinte, qui est équilibré par une contrainte de traction verticale dans le fût de l'enceinte.

appliqué sur la face supérieure correspond donc à la somme de la précontrainte verticale et de l'effet de fond de la pression. La densité d'efforts appliquée sur la face supérieure est donc calculée par la formule suivante :

$$F_z = \frac{R_{\text{int}}}{2e}(p_{\text{int}} - p_{\text{ext}}) - \sigma_{\text{pv}}$$

Dans cette relation, R_{int} et e sont respectivement le rayon interne de l'enceinte et l'épaisseur du mur, tandis que $p_{\text{int}} - p_{\text{ext}}$ et σ_{pv} sont la pression relative interne et la précontrainte verticale. Notons que l'on néglige ici l'effet du poids propre de l'enceinte. Les chargements appliqués sur la portion d'enceinte évoluent de la façon suivante. La structure est tout d'abord mise en précontrainte. Ensuite, on augmente progressivement la pression à l'intérieur de l'enceinte, jusqu'à atteindre la valeur de 10 bars. Précisons que ce scénario de chargement excède la pression de dimensionnement de l'enceinte, qui est de l'ordre de 5 bars.

Maillage de la structure et discrétisation en temps

Le maillage utilisé pour cette modélisation est montré sur la Figure 4.10. Il comprend 52 000 éléments volumiques quadratiques, et 85 000 nœuds. Parmi ces éléments, on compte 48 500 éléments volumiques, et 3 500 éléments d'interface dégénérés modélisant le comportement des différentes interfaces. Le problème mécanique discrétisé comporte au total 260 000 degrés de liberté. Le problème mécanique non-linéaire d'évolution de la structure est discrétisé en 30 pas de temps. À chaque pas de temps, le problème mécanique discrétisé est résolu par la méthode de Newton. Cet algorithme converge à chaque pas de temps en moins de 10 itérations, ce qui est très satisfaisant. Le temps de calcul cumulé varie de 30 minutes à 4 heures selon les propriétés de la liaison câble-béton et le nombre de pas de temps.

4.2.3 Résultats et analyse

On présente sur la Figure 4.11 les déformées de la portion d'enceinte pour une pression interne de 8,5 bars, et pour trois valeurs de la contrainte maximale d'adhérence entre les câbles de précontrainte et le béton, de 1, 7 et 50 MPa. On constate que la fissure traversante est ouverte, et pontée par les armatures et les câbles de précontrainte présents dans la structure. Comme on pouvait s'y attendre, plus l'adhérence entre les câbles et le béton est grande, moins la fissure est ouverte

On représente sur la Figure 4.12 l'évolution de l'ouverture au centre de la fissure en fonction de la pression interne, selon la loi d'adhérence câble-béton. Tant que la pression interne est inférieure à 7,7 bars, la fissure est entièrement refermée par la précontrainte. On en déduit que, tant que la pression interne est inférieure à la pression de dimensionnement de 5,3 bars, la fissure ne peut pas s'ouvrir. Ensuite, si la pression à l'intérieur de l'enceinte excède 7,7 bars, la fissure traversante s'ouvre graduellement. Si la pression interne atteint 8,5 bars, l'ouverture de la fissure est de l'ordre de 100 à 200 μm . Au maximum, lorsque la pression interne est de 10 bars, l'ouverture de la fissure atteint 500 μm .

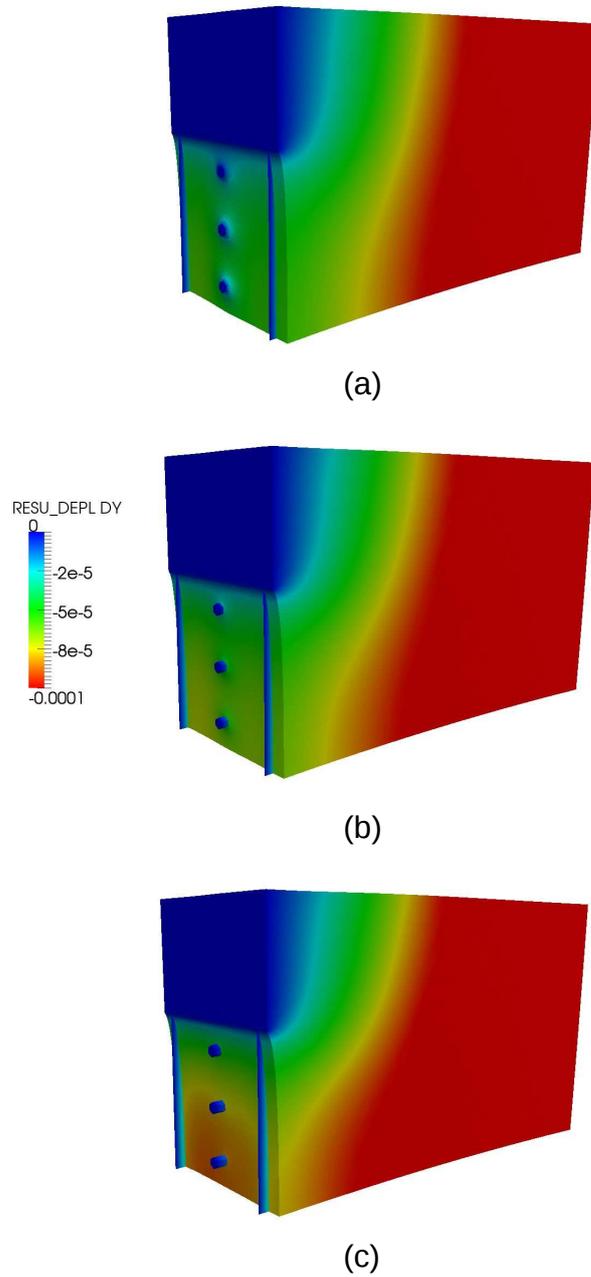


FIGURE 4.11 – Déformées de la portion d’enceinte modélisée amplifiées d’un facteur 1000, pour une pression interne de 8,5 bars, et pour différents comportements de la liaison câble-béton. La contrainte d’adhérence au pic de cette liaison est respectivement de (a) 50 MPa, (b) 7 MPa et (c) 1 MPa. Les couleurs indiquent le déplacement dans le sens orthoradial en mètres.

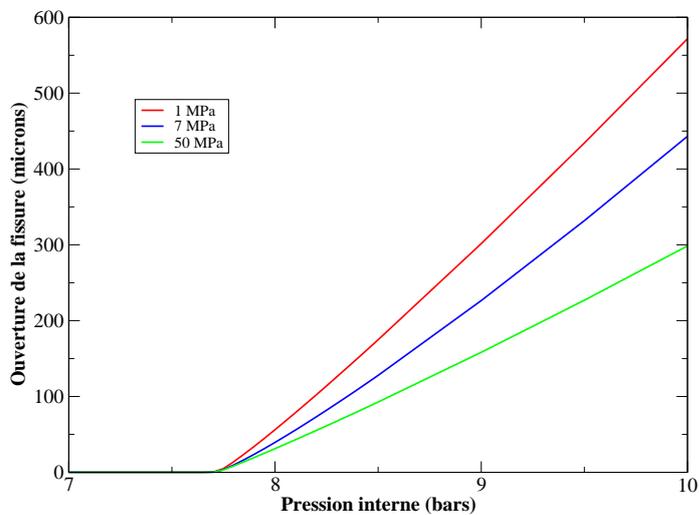


FIGURE 4.12 – Ouverture au centre de la fissure en fonction de la pression interne, pour différentes hypothèses du comportement de la liaison câble-béton.

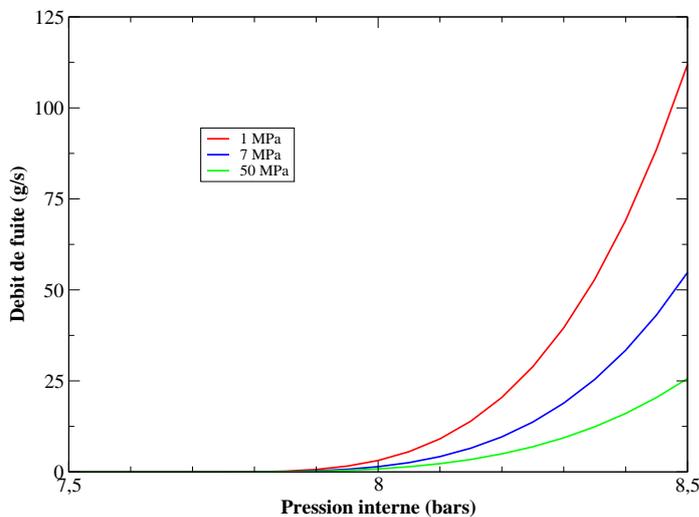


FIGURE 4.13 – Débit de fuite de la fissure en fonction de la pression interne, pour différentes hypothèses du comportement de la liaison câble-béton.

Comme évoqué précédemment, plus l'adhérence entre les câbles et le béton est forte, moins l'ouverture de la fissure est grande. Entre les deux scénarii extrêmes $\tau_m = 1$ MPa et $\tau_m = 50$ MPa, l'ouverture de la fissure varie dans un rapport 1 à 2. Le rôle des câbles de précontrainte et de la liaison acier-béton dans l'ouverture des fissures n'est donc pas négligeable.

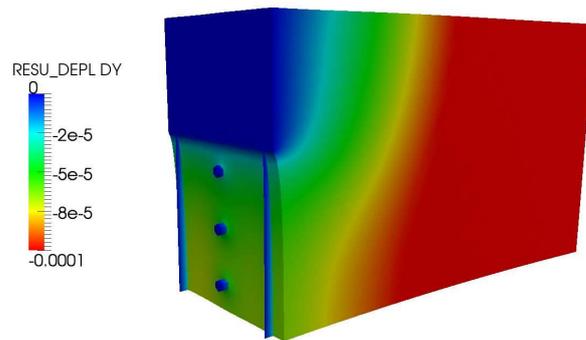
On représente également sur la Figure 4.13 le débit de fuite de la fissure, en fonction de la pression interne et de l'adhérence câble-béton. Ce débit de fuite est calculé suivant le modèle de Hagen-Poiseuille compressible présenté dans la section précédente. Tant que la pression interne est inférieure à 7,8 bars, le débit de fuite est négligeable. En revanche, lorsque la pression dépasse ce seuil, il augmente de façon importante. On remarque également que le débit dépend beaucoup de l'adhérence entre les câbles de précontrainte et le béton. Entre les deux hypothèses d'une contrainte au pic de 1 MPa et 50 MPa, le débit de fuite varie d'un facteur 4.

L'augmentation rapide du débit de fuite à partir d'un certain seuil en pression s'explique simplement. Tant que la fissure est refermée par la précontrainte induite par les câbles, on s'attend à ce que le débit de fuite soit nul. Ensuite, si la pression interne dépasse un certain seuil, la précontrainte ne suffit plus à mettre le béton en compression, et la fissure peut commencer à s'ouvrir. Dans cette situation, le débit de fuite dépend à la fois de l'ouverture de la fissure, et des pressions appliquées sur les faces interne et externe de l'enceinte. Le modèle de Hagen-Poiseuille prédit que le débit de fuite varie comme le carré de la pression interne, et comme le cube de l'ouverture de fissure. Ceci explique que le débit de fuite augmente très rapidement lorsque la pression interne dépasse la pression seuil. Notons cependant que, lorsque le débit de fuite dépasse 100 g/s, ce qui se produit pour une pression de 8,5 bars lorsque l'adhérence des câbles au béton est faible, l'écoulement de fluide dans la fissure n'est plus vraiment laminaire. Dans ce cas, le modèle de Hagen-Poiseuille surestime probablement beaucoup le débit de fuite.

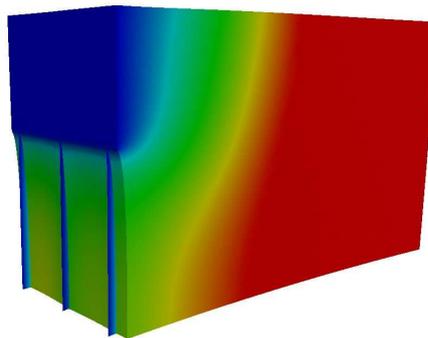
4.2.4 Influence de la modélisation des câbles

On se propose de confronter à cette modélisation une approche plus simple, dans laquelle les câbles de précontrainte horizontaux sont modélisés par le modèle de grille avec décohéssion développé au chapitre précédent. Cette approche simplifie beaucoup la mise en données du problème, car la géométrie des câbles est réduite à une simple surface. Le nombre de mailles est réduit à 37 000, le nombre de nœuds à 48 000, et le nombre de degrés de liberté du problème mécanique discrétisé à 140 000. De ce fait, le coût de calcul de la simulation complète est à peu près divisé par 2. Pour simplifier les comparaisons, on étudie une seule configuration de la loi d'adhérence câble-béton, correspondant à une contrainte d'adhérence maximale de 7 MPa.

On présente sur la Figure 4.14 la comparaison des déformées de la structure pour les deux modélisations. On constate que ces déformées sont extrêmement proches, bien que la représentation des câbles de précontrainte soit très simplifiée avec le modèle de grille. On compare également sur les Figures 4.15 et 4.16 l'ouverture au centre de la fissure en fonction de la pression interne, ainsi que le débit de fuite total. On observe que l'ouverture de la fissure est similaire, avec un écart relatif inférieur à 10 %. L'estimation du débit de



(a)



(b)

FIGURE 4.14 – Déformées de la portion d'enceinte amplifiées d'un facteur 1000 pour une pression interne de 8,5 bars. Comparaison entre (a) une représentation tridimensionnelle des câbles de précontrainte, et (b) leur représentation par le modèle de grille avec décohésion. Les couleurs indiquent le déplacement dans le sens orthoradial en mètres.

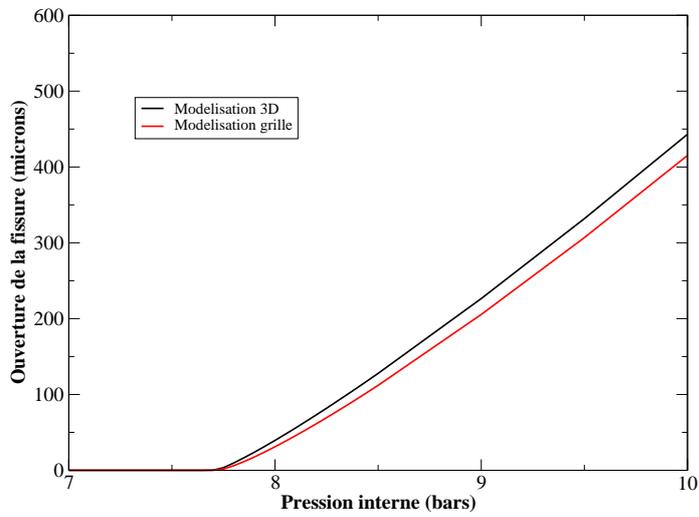


FIGURE 4.15 – Ouverture au centre de la fissure en fonction de la pression interne, selon la modélisation adoptée pour les câbles de précontrainte.

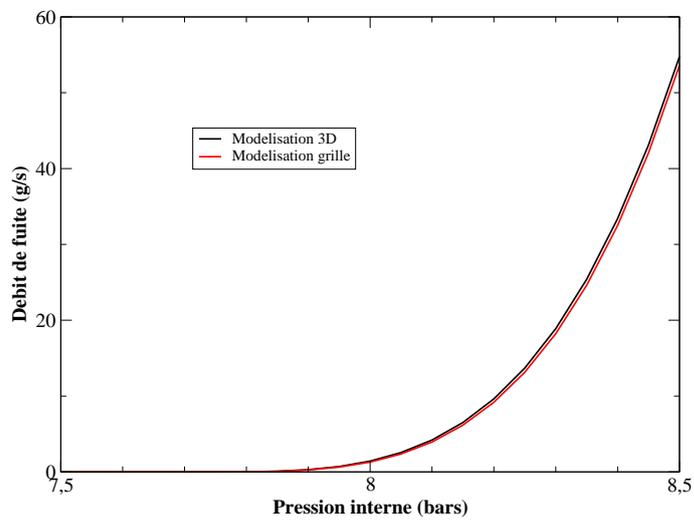


FIGURE 4.16 – Débit de fuite de la fissure en fonction de la pression interne, selon la modélisation adoptée pour les câbles de précontrainte.

fuite est encore meilleure, avec un écart entre les deux modélisations inférieur à 3 %.

On constate ainsi que l'estimation du débit de fuite global est bien meilleure que l'estimation de l'ouverture de fissure. Ceci peut surprendre, dans la mesure où le débit de l'écoulement est proportionnel au cube de l'ouverture de fissure, et devrait donc être très sensible à cette dernière. Cet effet est cependant compensé par le fait que le débit de fuite de la fissure est une grandeur globale, tandis que l'ouverture de fissure est une grandeur locale. Le débit de l'écoulement modélisé en un point est donc peu précis, mais, *en moyenne*, on retrouve une bonne estimation du débit de la fissure.

Le modèle de grille avec décohesion permet ainsi de modéliser de façon simple les armatures et les câbles de précontrainte dans une structure de béton armé. Ce modèle s'avère précis, même lorsque le nombre de barres d'armature ou de câbles de précontrainte modélisés est faible. Dans l'exemple proposé ici, le modèle de grille donne d'excellents résultats, bien que la fissure modélisée croise seulement six câbles de précontrainte (en comptant la symétrie verticale). On remarque que ce modèle permet d'avoir accès de façon précise à des grandeurs mécaniques globales, et de façon approximative à des grandeurs locales. Pour compléter cette analyse, il serait utile de confronter ce modèle à de vrais résultats expérimentaux. Ceci sera réalisé dans la prochaine section.

4.3 Modélisation des essais de Karlsruhe

4.3.1 Le programme expérimental

Un programme expérimental ambitieux a été lancé par EDF en 2006, visant à mener des essais mécaniques en vraie grandeur sur un élément représentatif d'une enceinte de confinement réelle. L'élément de structure considéré est appelé PACE 1450, pour PArtie Courante d'Enceinte du palier 1450 MWe. L'essai expérimental vise à reproduire les conditions d'une montée en pression d'une enceinte de confinement. Ce programme est financé par EDF, et réalisé par l'institut technologique de Karlsruhe² en Allemagne [9].

Le principe de l'essai expérimental est présenté sur la Figure 4.17. L'élément d'enceinte considéré mesure 2,4 m de large, 1,8 m de haut et 1,2 m d'épaisseur. Il présente le même schéma de ferrailage qu'une enceinte de confinement réelle. Cet élément d'enceinte est placé en position basculée sur un support en berceau, de sorte que la face supérieure de la maquette expérimentale correspond à la face interne de l'enceinte de confinement. Deux *oreilles* métalliques sont fixées de part et d'autre de la maquette, afin de transmettre des efforts de traction. Une pression est appliquée sur la face supérieure du béton, tandis que les oreilles sont écartées par des vérins. Ceci permet de reproduire les conditions de chargement de l'enceinte réelle.

L'élément d'enceinte comporte deux nappes d'armatures sur les faces interne et externe (voir Figure 4.18). D'autres barres d'acier sont disposées à proximité des oreilles, afin de faciliter les transmissions d'efforts entre les oreilles et le béton. La maquette comporte également un câble de précontrainte *vertical*, et quatre câbles *horizontaux*. Pour des raisons de mise en œuvre, le câble vertical n'est pas tendu. Il est simplement placé dans sa gaine, et injecté au coulis de ciment. Par ailleurs, les câbles horizontaux sont tendus, mais ne sont pas injectés au coulis de ciment, afin de pouvoir faire évoluer la précontrainte au cours des essais. Ces câbles sont mis en tension au niveau des deux oreilles par des vérins. Le dispositif expérimental est montré sur les Figures 4.19 et 4.20.

Le programme expérimental s'est déroulé de la façon suivante. La maquette est construite en juillet 2007. Un premier essai expérimental est mené en octobre 2007 pour valider la conception et l'instrumentation de la maquette. Il est suivi de trois essais de novembre 2007 à février 2008, appelés RUN 1, 2 et 3. Lors de ces essais, la pression appliquée ne dépasse pas la pression de dimensionnement de l'enceinte, qui vaut 5,3 bars. La différence entre ces trois essais est la précontrainte des câbles horizontaux, qui est diminuée progressivement de 100 % à 80 %, puis 60 %. Ces pertes de précontrainte permettent de reproduire l'effet des déformations différées du béton sur plusieurs dizaines d'années. Lors de ces essais, très peu de fissures sont apparues à la surface de la maquette.

Ensuite, il a été décidé d'aller plus loin dans le chargement de la maquette, et de dépasser la pression de dimensionnement. Lors du RUN 4, en octobre 2008, la maquette est soumise à une pression de 6 bars. Plusieurs fissures apparaissent lors de cet essai, et le débit de fuite augmente dans de fortes proportions. À la suite de cet essai, un relevé de fissuration est effectué, qui montre quatre fissures réparties sur la moitié de la maquette

2. Karlsruhe Institut für Technologie, KIT.

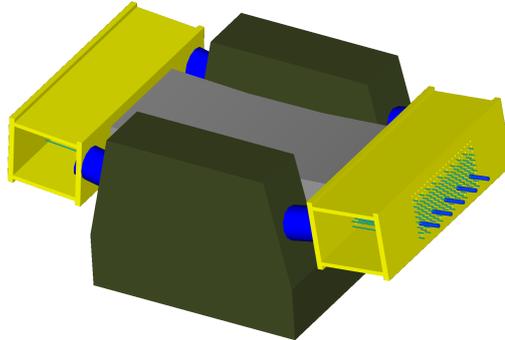


FIGURE 4.17 – Principe de l’essai PACE 1450. Le bloc de béton représentatif de l’enceinte (gris) est soumis à une pression sur sa face supérieure, et mis en traction par des *oreilles* métalliques (jaunes) et des vérins (bleus).

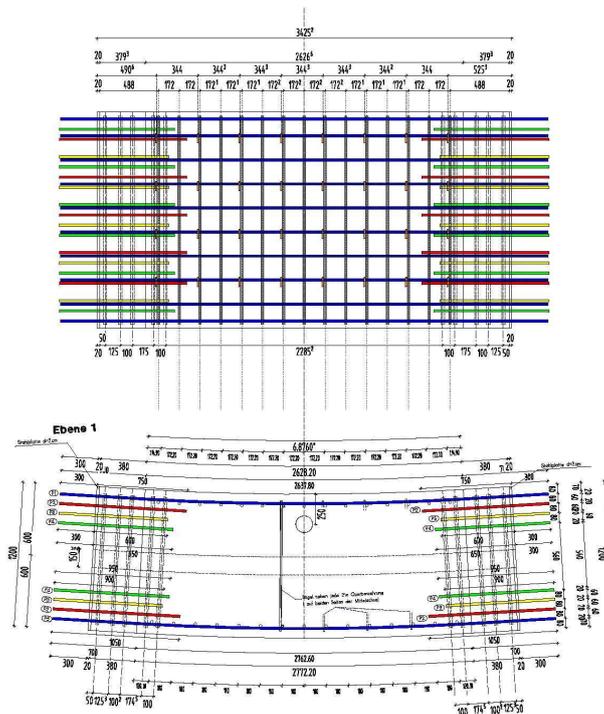


FIGURE 4.18 – Schéma de ferrailage de la structure PACE. Des armatures, représentées en bleu, sont placées sur les faces interne et externe. Les autres barres d’acier servent à transférer les efforts entre les oreilles et le béton. Les gaines des câbles de précontrainte sont indiquées en pointillés.



FIGURE 4.19 – La maquette PACE 1450 dans les conditions de l’essai. On distingue au premier plan une oreille métallique, et les quatre câbles de précontrainte horizontaux. Au second plan se trouve la chambre de mise en pression, sous laquelle se trouve l’élément de structure.



FIGURE 4.20 – L’élément de structure PACE 1450 lors de sa mise en place sur son support en berceau. On distingue les gaines des quatre câbles de précontrainte horizontaux, ainsi que les barres d’acier servant à transmettre les efforts entre les oreilles et le béton.

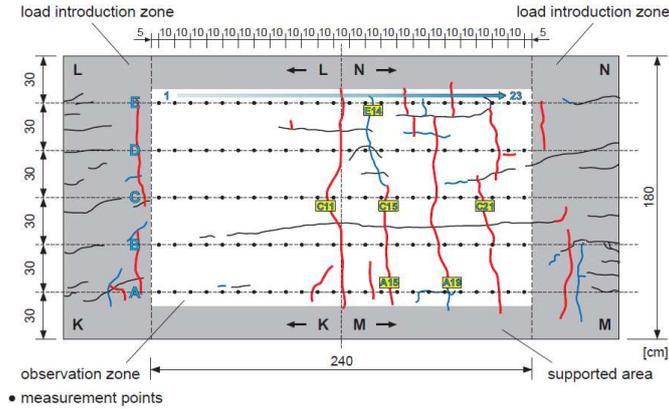


FIGURE 4.21 – Relevé de fissuration sur la face inférieure de la dalle avant le RUN 6. Les capteurs d'ouverture de fissure sont indiqués en jaune.

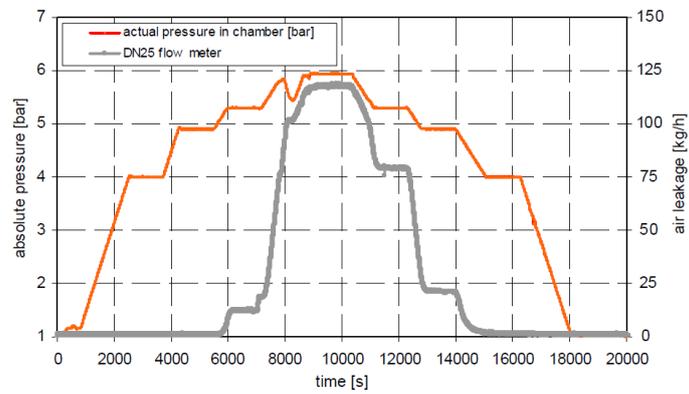


FIGURE 4.22 – Évolution de la pression appliquée et du débit de fuite lors du RUN 6.

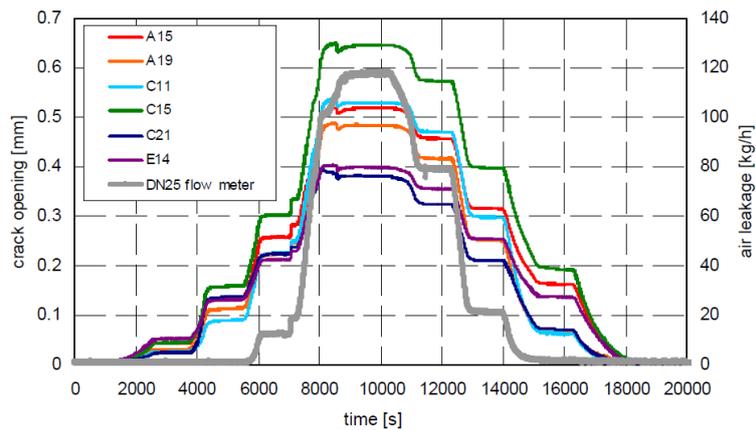


FIGURE 4.23 – Évolution du débit de fuite et de l'ouverture des fissures lors du RUN 6.

(voir Figure 4.21).

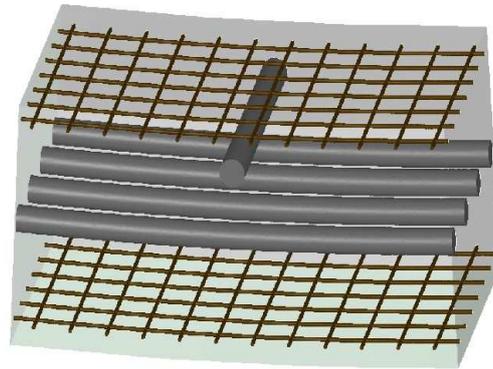
Deux essais expérimentaux supplémentaires sont effectués en mai 2009 et mars 2010, afin de quantifier plus précisément le débit de fuite à travers la portion d'enceinte. Un dispositif de collecte des fuites d'air est placé sous la maquette, permettant de mesurer le débit de fuite. Le scénario de chargement en pression, le débit de fuite et l'ouverture des fissures au cours du RUN 6 sont montrés sur les Figures 4.22 et 4.23. La pression est augmentée progressivement de 1 à 6 bars par paliers, puis diminue de la même façon. On observe qu'en surface les fissures commencent à s'ouvrir dès 4 bars de pression. L'ouverture croît ensuite régulièrement, jusqu'à atteindre 400 à 600 μm pour une pression de 6 bars. Parallèlement, le débit de fuite croît à partir de 5,3 bars. Il atteint au maximum 120 kg/h, soit 32 g/s pour une pression de 6 bars. On peut remarquer que, à pression égale, l'ouverture des fissures n'est pas identique lors de la montée en pression et lors de la décharge. Le même phénomène peut être observé sur le débit de fuite. Il existe donc un phénomène d'hystérésis dans l'ouverture des fissures, qui limite leur refermeture lors de la décharge. L'ensemble des essais expérimentaux est rappelé dans le tableau suivant :

Essai	Date	Pression maximale (bars)	Niveau de précontrainte
Mise en place	18/07/2007		
RUN 0	19/10/2007	1,4	25 %
RUN 1	16/11/2007	5,3	100 %
RUN 2	14/12/2007	5,3	80 %
RUN 3	15/02/2008	5,3	60 %
RUN 4	31/10/2008	6,0	60 %
RUN 5	15/05/2009	6,0	60 %
RUN 6	01/03/2010	6,0	60 %

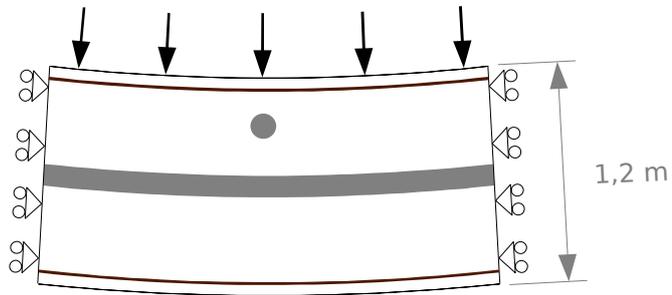
4.3.2 Modélisation et discrétisation

Géométrie et conditions limite

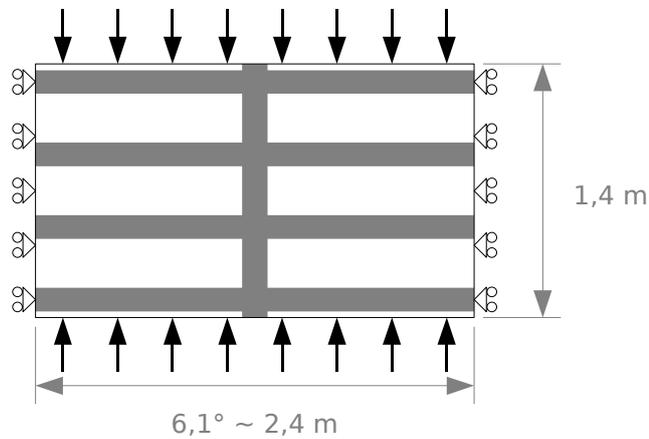
On se propose de modéliser cet essai expérimental de façon relativement simple à l'aide des modèles développés dans le cadre de cette thèse. On choisit de ne modéliser que la portion centrale de la maquette, sur laquelle la pression est appliquée, et sous laquelle le débit de fuite est collecté. Cette portion mesure 2,4 m dans le sens de la longueur, 1,4 m dans le sens de la largeur, et présente une épaisseur de 1,2 m (voir Figure 4.24). On fait l'hypothèse que le dispositif expérimental permet de reproduire exactement le chargement d'une enceinte de confinement réelle. Les conditions limite appliquées à la portion d'enceinte sont donc les suivantes. Les déplacements normaux sont supposés nuls sur les deux faces latérales. Une pression est appliquée sur la face supérieure, correspondant à la pression interne de l'enceinte. Enfin, une pression de 1 MPa est appliquée sur les deux autres faces latérales.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.24 – Schéma de la portion de PACE modélisée. (a) Représentation tridimensionnelle des armatures (brun) et des gaines des câbles de précontrainte (gris). (b) Vue transverse de la maquette, avec les conditions limite appliquées. (c) Vue du dessus de la maquette, avec les conditions limite appliquées.

Propriétés des matériaux

Le béton est supposé présenter un comportement linéaire élastique, caractérisé par un module d'Young de 26 GPa, et un coefficient de Poisson de 0,22. Les nappes d'armatures sur les faces interne et externe, ainsi que les quatre câbles de précontrainte horizontaux, sont modélisés par le modèle de grille avec décohésion. L'acier des barres d'armature présente un module d'Young de 200 GPa, et la liaison entre les armatures et le béton est modélisée par la loi d'adhérence développée au chapitre précédent. Les paramètres de cette loi sont précisés dans le tableau ci-dessous :

Paramètre	a_m	τ_m	α	β
Valeur	1 mm	10 MPa	0,5	1

Ces paramètres sont représentatifs d'une loi d'adhérence acier-béton réelle. L'acier des câbles de précontrainte présente également un module d'Young de 200 GPa. Comme les câbles de précontrainte horizontaux ne sont pas injectés au coulis de ciment, on fait l'hypothèse qu'ils coulisent parfaitement dans leur gaine. La loi d'adhérence entre la grille et le volume de béton est donc une loi de glissement sans frottement. Par ailleurs, le câble de précontrainte vertical est seul au centre de la maquette. On choisit de le modéliser en trois dimensions avec sa gaine. Pour simplifier le maillage de la structure, on homogénéise grossièrement le comportement du câble, du coulis de ciment et de la gaine en un seul matériau homogène. Le module d'Young de ce matériau *composite* est approximé par la moyenne harmonique des différents constituants, à raison de leur volume. Ce module d'Young homogénéisé vaut 44 GPa, et le coefficient de Poisson est fixé à 0,3.

Les fissures susceptibles d'apparaître dans le béton sont modélisées par une loi d'interface cohésive. On doit donc postuler *a priori* la position de ces fissures. On choisit de placer cinq fissures traversantes régulièrement réparties sur la maquette, et espacées de 40 cm. Le nombre de ces fissures correspond plus ou moins au nombre de fissures observées expérimentalement, mais leur répartition est assez différente (voir Figure 4.21). La fissure centrale intersecte la gaine du câble de précontrainte vertical. On suppose que cette gaine constitue une inclusion rigide dans le béton, et l'adhérence entre cette gaine et le béton est modélisée par une loi d'adhésion spécifique.

La loi d'interface modélisant le comportement des fissures dans le béton, ainsi que l'adhérence entre la gaine et le béton est une loi proposée par Talon-Curnier [15], et implantée dans *Code_Aster* [10]. Cette loi d'interface combine une condition de contact unilatéral et une loi d'adhésion. Dans un régime de sollicitation monotone, la loi d'adhésion s'écrit sous la forme suivante (voir Figure 4.25) :

$$\tau(a) = \begin{cases} \tau_c \left(1 - \frac{a}{\delta_c}\right) & \text{si } 0 \leq a \leq \delta_c \\ 0 & \text{si } \delta_c < a \end{cases}$$

a est le saut de déplacement maximal atteint, et τ la contrainte exercée entre les lèvres de la fissure. Les paramètres τ_c et δ_c sont respectivement la contrainte critique à l'interface, le saut de déplacement à partir duquel l'adhésion entre les lèvres de la fissure est nulle.

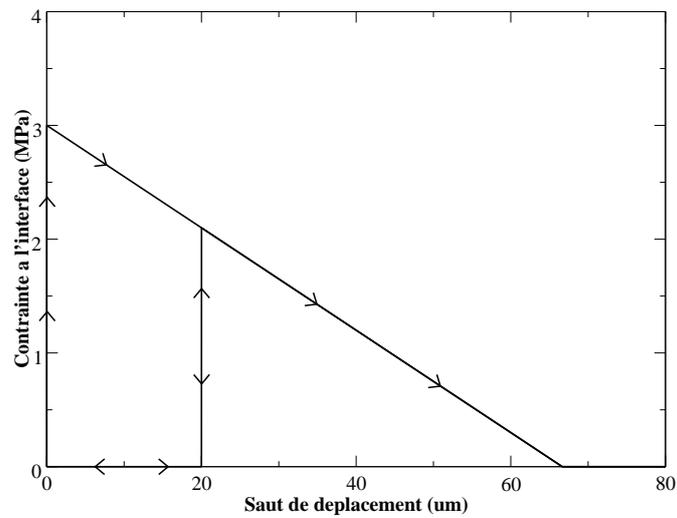


FIGURE 4.25 – Loi d'interface de Talon-Curnier, modélisant l'adhérence entre les lèvres d'une fissure. La décharge se fait à contrainte nulle.

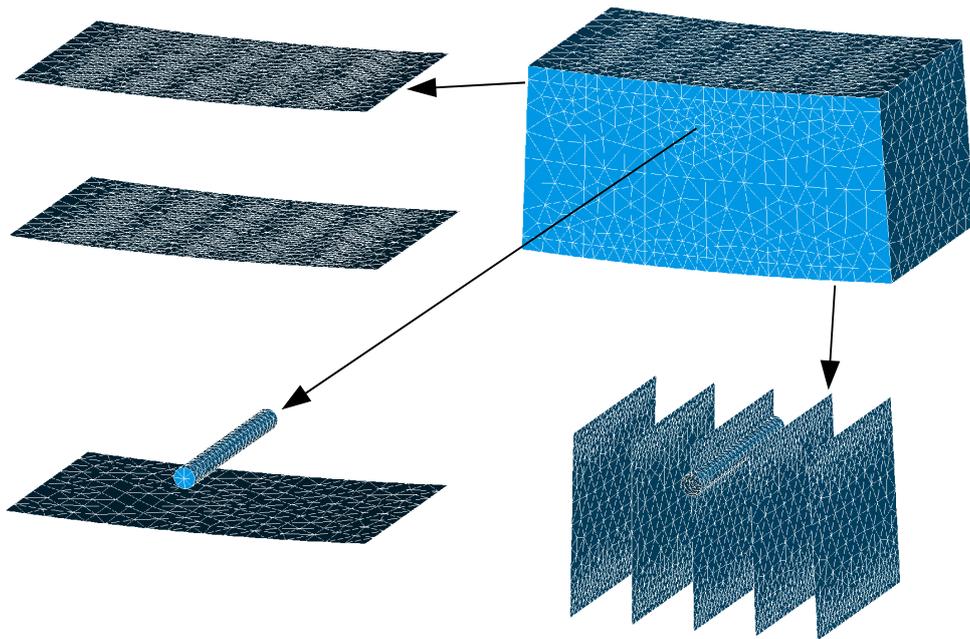


FIGURE 4.26 – Maillage de la maquette PACE. Les nappes d'armatures et les câbles de précontrainte horizontaux sont modélisés par des éléments de grille avec décohésion. Le câble et la gaine verticale sont modélisés en trois dimensions. Cinq fissures traversantes, dont l'une intersecte le câble de précontrainte vertical, sont maillées par des éléments d'interface. Le maillage comporte 54 000 éléments volumiques quadratiques, et 84 000 nœuds.

On peut relier ces paramètres à l'énergie de fissuration G_c par la relation suivante :

$$G_c = \frac{\tau_c \delta_c}{2}$$

Par ailleurs, dans un régime de décharge, la contrainte entre les lèvres de la fissure est nulle (voir Figure 4.25). Pour les fissures dans le béton, on choisit une contrainte critique de 3 MPa, et une énergie de fissuration de 100 J/m². Le saut de déplacement critique est donc de 66,6 μm. Par ailleurs, on peut penser que l'adhérence entre le béton et la gaine d'un câble de précontrainte est plus faible. On choisit donc une contrainte critique de 1 MPa, et une énergie de fissuration de 33 J/m² pour la loi d'interface entre la gaine et le béton.

Maillage de la structure et méthode de résolution

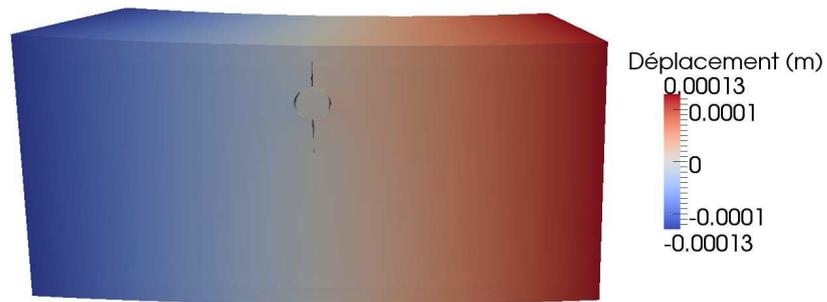
Le maillage utilisé pour cette modélisation est présenté sur la Figure 4.26. Il comporte 54 000 éléments volumiques quadratiques, dont 7 000 éléments d'interface dégénérés, et 84 000 nœuds. Le nombre total de degrés de liberté du problème discrétisé est de 255 000. À chaque pas de temps, le problème mécanique non-linéaire est résolu par la méthode de Newton. En raison des conditions de contact, et d'instabilités mécaniques apparaissant au cours du calcul, l'algorithme ne converge pas toujours. On utilise donc une méthode de recherche linéaire, qui stabilise la convergence de l'algorithme de Newton [1]. En l'absence d'instabilités, l'algorithme converge en moins de dix itérations à chaque pas de temps. En cas d'instabilité au cours d'un pas de temps, la convergence est beaucoup plus lente, et peut nécessiter quelques centaines d'itérations.

La simulation complète de ce problème, comprenant la mise en précontrainte, la fissuration de la maquette et la modélisation du RUN 6, prend une vingtaine d'heures. Ce temps de calcul est relativement long, mais reste compatible avec une utilisation dans un contexte industriel. Une méthode alternative à la recherche linéaire est en cours de développement, qui pourrait permettre d'accélérer la convergence de l'algorithme de Newton en présence d'instabilités. Ceci permettrait de réduire le temps de calcul de ce type de simulation à quelques heures.

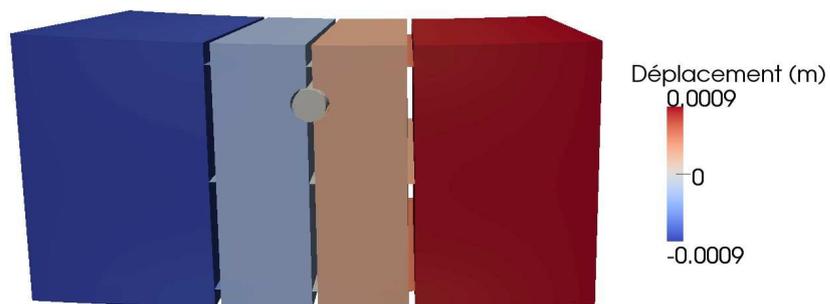
4.3.3 Résultats de la simulation et analyse

Le déroulement de l'essai est modélisé de la façon suivante. La structure est tout d'abord mise en précontrainte à 60 %. Les câbles de précontrainte horizontaux sont donc mis en traction pour induire un effort de compression de 7 MPa dans le béton. Un effort de compression est également appliqué sur les faces latérales, qui induit une contrainte de 1 MPa dans le sens transverse. Aucun phénomène particulier ne se produit lors de cette mise en précontrainte.

Ensuite, on simule le RUN 4, qui consiste à augmenter la pression interne jusqu'à obtenir l'apparition d'une fissure traversante. Les déformées correspondantes sont montrées sur la Figure 4.27. Jusqu'à une pression de 6,79 bars, aucune fissure traversante n'apparaît. On remarque seulement l'amorçage d'une fissure au niveau de la gaine du câble



(a)



(b)

FIGURE 4.27 – Déformées de la structure avant et après la fissuration brutale de la maquette. (a) Déformée correspondant à une pression interne de 6,79 bars, amplifiée 500 fois, et (b) déformée correspondant à une pression interne de 6,8 bars, amplifiée 50 fois. Les couleurs indiquent le déplacement horizontal.

de précontrainte vertical. Lorsque la pression appliquée atteint 6,8 bars, les trois fissures centrales s'ouvrent brutalement. La maquette est donc scindée en quatre morceaux, qui sont liés par les armatures et les câbles de précontrainte horizontaux.

Si l'on compare ce résultat avec le comportement de la maquette lors du RUN 4, on constate que l'on surestime le seuil de pression de 0,8 bars. Plusieurs phénomènes peuvent expliquer cet écart. Il est possible que la résistance du béton à la traction soit surestimée, ou que les conditions limite soit mal modélisées. On peut également envisager que la structure réelle ait été fragilisée par le retrait du béton au jeune âge, qui n'est pas pris en compte dans la simulation. Ce retrait peut initier la propagation d'un certain nombre de fissures aux bords de la structure, et diminuer ainsi sa résistance mécanique. Au vu de la simplicité du modèle, un écart de 0,8 bars sur la pression seuil n'est donc pas très surprenant.

La simulation prédit l'apparition de trois fissures traversantes au centre de la maquette. Ce résultat est relativement cohérent avec le profil de fissuration observé expérimentalement, qui montre plusieurs fissures de grande taille (voir Figure 4.21). On remarque cependant que le profil de fissuration simulé est symétrique, tandis que le profil expérimental est dissymétrique. Les raisons de cette dissymétrie ne sont pas très claires. Notons également que l'apparition des fissures est un phénomène instable, tandis que le modèle utilisé pour la simulation est un modèle quasi-statique. Ceci a deux conséquences. D'une part on néglige les phénomènes d'inertie qui peuvent influencer sur la propagation des fissures, et d'autre part la solution du problème étudié n'est ni unique, ni continue en temps. Ceci se traduit numériquement par un grand nombre d'itérations de Newton, de l'ordre de 430 dans ce cas précis. On doit donc rester assez prudent dans l'interprétation de ce profil de fissuration.

À partir de cet état de fissuration initial, on se propose de modéliser le RUN 6, avec une montée en pression progressive par paliers de 1 à 6 bars, et la décharge consécutive. Lors de cette simulation, la pression reste toujours inférieure à la pression de 6,8 bars atteinte précédemment. Les seules fissures susceptibles de s'ouvrir sont donc les trois fissures traversantes au centre de la maquette. On présente sur la Figure 4.28 une comparaison entre les ouvertures de fissures simulées, et les ouvertures mesurées expérimentalement. Parmi les points positifs, l'ouverture des fissures prédite pour une pression de 6 bars est du bon ordre de grandeur : elle est de l'ordre de 300 μm , à comparer aux 350 à 650 μm mesurés expérimentalement. Le modèle proposé est donc en mesure de reproduire qualitativement le comportement de la maquette réelle. Cependant, on note deux différences importantes entre la modélisation et les essais. Premièrement, la simulation sous-estime l'ouverture des fissures mesurée en surface. Ceci peut être dû au retrait du béton au jeune âge, qui induit des efforts de traction aux bords de la structure. Ce phénomène n'est pas pris en compte dans le modèle, et peut expliquer la plus grande ouverture des fissures. D'autre part, à pression égale, l'ouverture des fissures mesurée n'est pas identique à la montée en pression et à la décharge. Cet écart peut s'expliquer par une certaine rugosité des lèvres des fissures limitant leur refermeture, ou par un frottement des armatures et des câbles de précontrainte par rapport au béton. Ces phénomènes ne sont pas pris en compte dans notre modèle, mais pourraient être intégrés facilement.

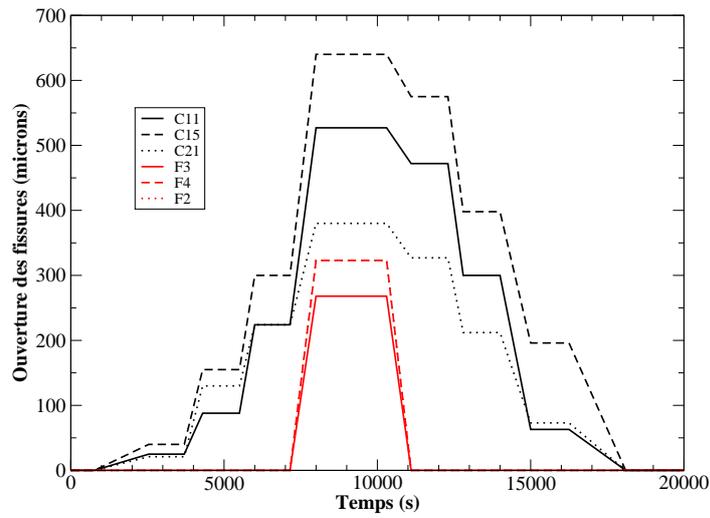


FIGURE 4.28 – Ouverture des fissures en surface en fonction de la pression interne. On compare les ouvertures mesurées par les capteurs (noir), aux ouvertures simulées (rouge). La position des capteurs expérimentaux est précisée sur la Figure 4.21.

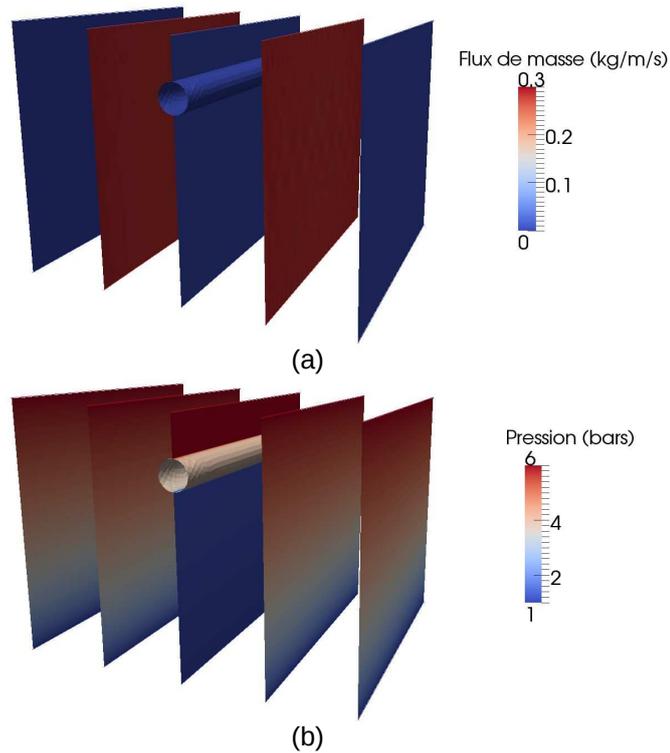


FIGURE 4.29 – (a) Flux de masse et (b) pression dans les fissures, pour une pression interne de 6 bars.

Le débit de fuite de la maquette lors du RUN 6 est également simulé. On montre sur la Figure 4.29 le flux de masse et la pression dans les fissures calculés par le modèle de Hagen-Poiseuille. Parmi les trois fissures ouvertes, on constate que seules les deux fissures latérales fuient. On observant la pression dans les fissures, on constate que la gaine du câble vertical fait office de *bouchon* dans la fissure centrale. Il est cependant difficile de savoir si cet effet est réaliste, ou s'il est dû à une modélisation trop pauvre de l'écoulement au contact de la gaine. Remarquons également que le débit de fuite simulé atteint 0,3 kg/m/s, ce qui dépasse beaucoup le seuil d'un écoulement laminaire, que l'on peut estimer à 0,02 kg/m/s. Le résultat de cette simulation doit donc être pris avec précaution. On montre dans le tableau suivant une comparaison entre le débit de fuite simulé, et le débit de fuite mesuré expérimentalement lors du RUN 6.

Pression interne (bars)	1	4	4,9	5,3	6	5,3	4,9	4	1
Débit mesuré (g/s)	0	0	0	3,3	32,5	21,9	5,83	0	0
Débit simulé (g/s)	0	0	0	0	804	0	0	0	0

L'écart entre la simulation et l'expérience est relativement important. La simulation prédit un débit de fuite nul pour tous les paliers de pression, sauf pour le palier à 6 bars, pour lequel le débit de fuite est extrêmement grand. Le débit de fuite mesuré expérimentalement varie de façon plus régulière. Pour le palier de pression à 6 bars, la simulation diffère des mesures d'un facteur 30, ce qui constitue un écart important. Ceci est probablement dû à la trop grande simplicité du modèle d'écoulement, et aux insuffisances du modèle mécanique soulignées précédemment.

4.4 Conclusions sur la stratégie de modélisation

Nous avons développé dans ce chapitre une stratégie de modélisation permettant d'étudier le comportement mécanique et la perméabilité d'une structure en béton armé précontraint de grande taille. Cette stratégie s'appuie essentiellement sur trois éléments, que sont le modèle de grille avec décohéision, un modèle d'adhérence acier-béton relativement simple et un modèle d'écoulement de fluide basé sur le profil laminaire de Hagen-Poiseuille. Le modèle de grille avec décohéision joue un rôle central dans cette stratégie, car il permet de simplifier la représentation des armatures et des câbles de précontrainte dans la structure. Le coût de calcul de ce type de simulation devient ainsi tout à fait abordable. Les différents éléments de cette stratégie ont été validés d'une part par des comparaisons numériques, et d'autre part par la modélisation d'essais expérimentaux. En particulier, cette stratégie est utilisée pour modéliser l'essai PACE 1450, consistant à étudier l'étanchéité d'une portion d'enceinte de confinement de centrale nucléaire. On démontre ainsi que la stratégie proposée fournit des résultats intéressants en termes d'ouverture de fissures et de débit de fuite. L'analyse des résultats de cette simulation permet également d'identifier certaines insuffisances de la modélisation, qui pourront faire l'objet de travaux ultérieurs. On présente ici les perspectives de ce travail.

Sur le plan de la mécanique, on a pu constater que le modèle proposé ne permet pas de reproduire tous les aspects du comportement mécanique de la maquette. En particulier,

le modèle surestime la pression à laquelle la maquette se fissure, il sous-estime l'ouverture des fissures et ne reproduit pas la dissymétrie du comportement de la maquette entre la charge et la décharge. Ces différents aspects peuvent être expliqués par le retrait du béton au jeune âge, par une refermeture incomplète des fissures en compression ou par un frottement au niveau de la liaison acier-béton. Il serait donc intéressant d'intégrer ces différents phénomènes dans la modélisation, afin de comprendre leur influence sur le comportement de la maquette. Ceci permettrait probablement de réduire l'écart entre la simulation et les résultats expérimentaux.

Pour modéliser les écoulements de fluide, nous nous sommes basés sur le modèle de Hagen-Poiseuille compressible, qui présente l'avantage d'être très simple sur le plan de la physique, et d'être largement reconnu dans la communauté. De nombreux auteurs soulignent cependant son conservatisme pour la modélisation des écoulements dans les structures en béton. Il serait donc intéressant de le comparer à des modèles d'écoulement empiriques proposés par de nombreux auteurs, tels Rizkalla [100], Suzuki [105] et Greiner et Ramm [93]. La difficulté de ce travail réside dans l'identification d'un profil d'ouverture de fissure réel, difficile à déterminer expérimentalement.

Sur le plan numérique, l'algorithme de Newton avec recherche linéaire est très performant en l'absence d'instabilités mécaniques. En revanche, en présence d'instabilité, le nombre d'itérations de l'algorithme augmente très fortement et le coût de calcul devient important. Il serait intéressant de développer un algorithme plus fiable, qui présente les mêmes propriétés de convergence quadratique que l'algorithme de Newton, mais soit également plus robuste en situation d'instabilité. Un algorithme basé sur une notion de *domaine de confiance* est actuellement en cours de développement, qui pourra peut-être remédier à ce problème.

Conclusion

Nous avons proposé dans cette thèse une étude asymptotique complète du comportement mécanique des armatures et des câbles de précontrainte dans une structure en béton armé. Deux modèles sont construits, permettant de représenter les armatures et les câbles par un comportement homogénéisé sur une surface. Ces modèles présentent l'avantage d'être bien posés sur le plan mathématique, et d'induire moins de concentrations de contraintes que les modèles de barres utilisés classiquement. Ces modèles sont implantés dans le code éléments finis *Code_Aster*, et validés par rapport à des simulations tridimensionnelles de référence. Enfin, ces modèles sont utilisés pour modéliser le comportement mécanique d'une partie courante d'enceinte de confinement de centrale nucléaire.

Le premier modèle, développé dans le second chapitre, est un modèle asymptotique général. Il permet de décrire le comportement effectif de tous types d'hétérogénéités périodiquement réparties sur une surface. Ce modèle est formulé dans un cadre énergétique ; il combine un comportement d'interface élastique et un comportement de membrane. On construit un encadrement du comportement de cette interface, similaire aux bornes de Voigt et Reuss en homogénéisation tridimensionnelle. On démontre que ce modèle est généralement instable, ce qui constitue un frein important à son utilisation dans un contexte industriel. Enfin, ce modèle est appliqué à plusieurs exemples, qui soulignent son large champ d'application. Dans le cas des armatures, on démontre que l'on peut restreindre ce modèle à un simple comportement de *membrane anisotrope*.

Un second modèle plus pragmatique est développé dans le troisième chapitre. Ce modèle permet de décrire le comportement mécanique de fibres rigides réparties sur une surface, et susceptibles de glisser par rapport au volume environnant. Dans la limite de fibres très rigides de petite taille, on démontre que ce modèle tend vers un modèle limite dit de *grille avec décohesion*. Ce modèle combine un comportement de membrane à rigidité uniaxiale, et une loi cohésive reliant cette membrane au volume environnant. On développe ensuite une loi d'adhérence acier-béton relativement simple, qui permet de prendre en compte un éventuel glissement des armatures et des câbles de précontrainte par rapport au béton. Cette loi d'adhérence est validée par des comparaisons avec des essais expérimentaux. Les modèles de grille avec décohesion et de membrane anisotrope sont implantés dans le code éléments finis *Code_Aster*. Cette implantation est réalisée sous une forme modulaire, avec d'une part des éléments de membrane anisotrope classiques, et d'autre part des éléments d'interface permettant de modéliser un

possible glissement de la grille par rapport au volume environnant. Enfin, le modèle de membrane anisotrope et le modèle de grille sont validés par des comparaisons avec des simulations tridimensionnelles de référence. On démontre qu'ils donnent des résultats très satisfaisants pour un coût de calcul limité.

Le quatrième chapitre permet d'appliquer le modèle de grille à l'évaluation de l'étanchéité d'une enceinte de confinement. On développe tout d'abord un modèle d'écoulement d'air dans les fissures. Ce modèle très simple est basé sur le profil d'écoulement laminaire de Hagen-Poiseuille. On modélise ensuite une fissure traversante verticale dans une enceinte de confinement. Le modèle de grille avec décohésion permet de représenter de façon simple le comportement des armatures et des câbles de précontrainte dans le béton. On démontre que l'adhérence des câbles de précontrainte a une influence significative sur le débit de fuite de la fissure. On compare également une modélisation tridimensionnelle des câbles de précontrainte avec une modélisation de type grille, et l'on démontre que ce dernier donne des résultats satisfaisants en termes d'ouverture de fissure et de débit de fuite. Enfin, on utilise les outils développés dans le cadre de cette thèse pour modéliser un essai expérimental, consistant à étudier l'étanchéité d'une portion d'enceinte de confinement à l'échelle 1. Le modèle de grille avec décohésion nous permet de prédire correctement l'ordre de grandeur des ouvertures de fissures. En revanche, la modélisation du débit de fuite de la maquette demande à être améliorée.

Les perspectives de cette thèse sont nombreuses. En reprenant l'ordre des principaux chapitres, on évoque ici un certain nombre de questions ouvertes qui pourront faire l'objet de travaux ultérieurs. Considérons tout d'abord le modèle asymptotique général développé dans le second chapitre. Ce modèle est assez séduisant, car il permet de décrire le comportement effectif de tous types d'hétérogénéités périodiquement réparties sur une surface. Malheureusement, ce modèle est généralement instable, ce qui rend son utilisation délicate en pratique. On peut penser que cette instabilité est due à la formulation du comportement homogénéisé sous la forme d'un comportement d'interface d'épaisseur nulle. On pourrait donc essayer de reformuler ce modèle asymptotique sous la forme d'un comportement de *couche homogénéisée*. Les premiers développements effectués en ce sens sont assez encourageants.

Le modèle de grille avec décohésion est un modèle beaucoup plus pragmatique, adapté à une utilisation dans un contexte industriel. Ce modèle pourrait être enrichi de deux manières. Tout d'abord, il ne prend pas en compte un éventuel comportement plastique des fibres. Ce phénomène pourrait être introduit assez simplement, car le comportement mécanique des fibres est localement indépendant de celui de la matrice. Par ailleurs, ce modèle ne prend pas en compte une possible influence du confinement sur le comportement de la liaison fibre-matrice. En particulier, un frottement de type Coulomb entre les fibres et la matrice ne peut pas être modélisé. Il serait intéressant d'essayer d'introduire ce type de comportement dans l'analyse asymptotique, afin de découvrir le modèle limite correspondant.

Le modèle de liaison acier-béton proposé dans le troisième chapitre est relativement simple, ce qui constitue un atout important pour son utilisation dans un contexte indus-

triel. Il présente cependant un comportement peu réaliste lors de sollicitations cycliques, qui peuvent se produire lors de séismes, ou plus simplement lorsque plusieurs essais décennaux sont réalisés successivement sur une enceinte. La formulation de ce modèle pourrait donc être améliorée en étudiant la phénoménologie de la liaison acier-béton lors de sollicitations non monotones. Ceci permettrait de construire un modèle de liaison au domaine de validité plus large.

Le modèle de Hagen-Poiseuille utilisé pour calculer le débit de fuite à travers les fissures du béton est largement conservatif. Il pourrait être amélioré en s'inspirant des travaux de plusieurs auteurs, qui ont proposé des formules empiriques de débit de fuite à travers les fissures du béton. Ces formules comprennent cependant de nombreux paramètres déterminés empiriquement, et il n'est pas certain qu'elles restent valable dans un autre contexte. Il serait donc intéressant de mener des comparaisons détaillées entre ces différents modèles, afin d'implanter le plus pertinent dans *Code_Aster*.

Par ailleurs, la simulation numérique de l'essai PACE 1450 n'est pas encore complètement satisfaisante sur le plan de la physique, car le comportement de la maquette n'est reproduit que partiellement. En particulier, la maquette ne se fissure pas au bon niveau de sollicitation, et l'ouverture des fissures est sous-estimée. Il est possible que ces écarts soient dus au retrait du béton au jeune âge, ou à la refermeture incomplète des fissures en compression. On pourrait donc compléter la modélisation de cet essai en prenant en compte ces différents phénomènes.

Enfin, la fissuration du béton est modélisée dans cette thèse avec un modèle de zone cohésive. Le principal défaut de cette approche est qu'elle oblige à postuler *a priori* la position des fissures dans le béton. On pourrait donc envisager de combiner le modèle de grille avec décohésion avec un modèle d'endommagement volumique du béton. Comme le modèle de grille induit moins de concentrations de contraintes que les éléments filaires, on peut espérer qu'il pose moins de difficultés dans les simulations numériques.

Généralités

- [1] M. Abbas. *Algorithme non linéaire quasi-statique, R5.03.01*. EDF R&D, 2012. Disponible sur www.code-aster.org.
- [2] K. Bathe and F. Brezzi. Stability of finite element mixed interpolations for contact problems. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, 12(9) :167–183, 2001.
- [3] F. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990.
- [4] Commissariat général au développement durable. *Bilan énergétique de la France pour 2010*, 2011.
- [5] M. Crouzeix and A. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1992.
- [6] I. Ekeland and R. Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.
- [7] M. Frémond. Adhérence des solides. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 6(3) :383–407, 1987.
- [8] B. Halphen and Q. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique*, 14(1) :39–63, 1971.
- [9] N. Herrmann and H. Müller. Final report on the project pace 1450 – experimental campaign. Technical report, KIT, 2010.
- [10] E. Lorentz. Ill-posed boundary conditions encountered in 3d and plate finite element simulations. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(11-12) :1105–1117, 2005.
- [11] J.-J. Moreau. Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série A*, 271 :608–611, 1970.
- [12] J.-J. Moreau. Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série A*, 273 :118–121, 1971.
- [13] J. Oliver, D. Linero, A. Huespe, and O. Manzoli. A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6) :729–737, 1986.
- [14] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3-4) :383–399, 1999.

- [15] C. Talon and A. Curnier. A model of adhesion coupled to contact and friction. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22(4) :545–565, 2003.
- [16] F. Voltaire. *Formulation d'un modèle de thermique pour les coques minces*, R3.11.01. EDF R&D, 2011. Disponible sur www.code-aster.org.

Modélisation du béton et des structures

- [17] Z. Bažant, T. Belytschko, and T. Chang. Continuum theory for strain-softening. *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, 110 :1666–1692, 1984.
- [18] A. Benallal, R. Billardon, and G. Geymonat. Bifurcation and localization in rate-independent materials. some general considerations. In Q. Nguyen, editor, *Bifurcation and stability of dissipative systems*, pages 1–44. Springer Verlag, 1993.
- [19] C. Comi. Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 4(1) :17–36, 1999.
- [20] F. Dufour, G. Pijaudier-Cabot, M. Choinska, and A. Huerta. Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. *Computers & Concrete*, 5(4) :375–388, 2008.
- [21] A. Ibrahimbegovic, A. Boulkertous, L. Davenne, and D. Brancherie. Modelling of reinforced-concrete structures providing crack-spacing based on x-fem, ed-fem and novel operator split solution procedure. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 83(4) :452–481, 2010.
- [22] A. Ingraffea and V. Saouma. Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. In G. Sih and A. DiTomasso, editors, *Fracture Mechanics of Concrete*, pages 171–225. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.
- [23] L. Jason, S. Ghavamian, and A. Courtois. Truss vs solid modeling of tendons in prestressed concrete structures : Consequences on mechanical capacity of a representative structural volume. *Engineering Structures*, 32(6) :1779–1790, 2010.
- [24] L. Jendele and J. Červenka. Finite element modelling of reinforcement with bond. *Computers & Structures*, 84(28) :1780–1791, 2006.
- [25] L. Jendele and J. Červenka. On the solution of multi-point constraints – application to fe analysis of reinforced concrete structures. *Computers & Structures*, 87(15-16) :970–980, 2009.
- [26] E. Lorentz and V. Godard. Gradient damage models : Toward full-scale computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(21-22) :1927–1944, 2011.

- [27] J. Oliver, D. Linero, A. Huespe, and O. Manzoli. Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5) :332–348, 2008.
- [28] R. H. J. Peerlings, R. de Borst, W. A. M. Brekelmans, and M. G. D. Geers. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 3(4) :323–342, 1998.
- [29] G. Pijaudier-Cabot and Z. P. Bažant. Nonlocal damage theory. *J. Eng. Mech.*, 113(10) :1512–1533, 1987.
- [30] T. Rabczuk, J. Akkermann, and J. Eibl. A numerical model for reinforced concrete structures. *International Journal of Solids and Structures*, 42(5-6) :1327–1354, 2005.

Analyse asymptotique

- [31] R. Abdelmoula, M. Coutris, and J.-J. Marigo. Comportement asymptotique d'une interphase élastique mince. *C. R. Acad. Sci. Paris Série II b*, 326(4) :237–242, 1998.
- [32] R. Abdelmoula and J.-J. Marigo. The effective behavior of a fiber bridged crack. *J. Mech. Phys. Solids*, 48(11) :2419–2444, 2000.
- [33] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *Journal of Computational Physics*, 147(1) :187–218, 1998.
- [34] S. Andrieux, Y. Bamberger, and J.-J. Marigo. Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 5(3) :471–513, 1986.
- [35] Y. Benveniste. A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. *J. Mech. Phys. Solids*, 54(4) :708–734, 2006.
- [36] Y. Benveniste and T. Miloh. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mechanics of Materials*, 33(6) :309–323, 2001.
- [37] A. L. Bessoud, F. Krasucki, and G. Michaille. Multi-materials with strong interface : variational modelings. *Asymptotic Analysis*, 61(1) :1–19, 2009.
- [38] A.-L. Bessoud, F. Krasucki, and M. Serpilli. Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(11-12) :697–702, 2008.
- [39] A.-L. Bessoud, F. Krasucki, and M. Serpilli. Asymptotic analysis of shell-like inclusions with high rigidity. *Journal of Elasticity*, 103(2) :153–172, 2011.
- [40] F. Bilteyst and J.-J. Marigo. An energy based analysis of the pull-out problem. *Eur. J. Mech. - A/Solids*, 22(1) :55–69, 2003.
- [41] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, F. Hérau, and G. Vial. On generalized Ventcel's type boundary conditions for Laplace operator in a bounded domain. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(2) :931–945, 2010.
- [42] M. Briane. Homogenization of a non-periodic material. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 73(1) :47–66, 1994.
- [43] Y. Bövik. On the modelling of thin interface layers in elastic and acoustic scattering problems. *Q. J. Mechanics Appl. Math.*, 47(1) :17–42, 1994.

- [44] D. Caillerie. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2 :251–270, 1980.
- [45] Y. Capdeville, L. Guilloit, and J.-J. Marigo. 2-d non-periodic homogenization to upscale elastic media for p–sv waves. *Geophysical Journal International*, 182(2) :903–922, 2010.
- [46] P. Ciarlet. *Plates and junctions in elastic multi-structures : an asymptotic analysis*. Masson, 1990.
- [47] J. Cousteix and J. Mauss. *Analyse asymptotique et couche limite*. Springer, 2006.
- [48] F. Devries, H. Dumontet, G. Duvaut, and F. Lené. Homogenization and damage for composite structures. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 27 :285–298, 1989.
- [49] H. Dumontet. *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse de doctorat d’État. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1990.
- [50] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(5) :1765–1766, 1977.
- [51] F. Feyel and J.-L. Chaboche. Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3-4) :309–330, 2000.
- [52] G. Geymonat, S. Hendili, F. Krasucki, and M. Vidrascu. The matched asymptotic expansion for the computation of the effective behavior of an elastic structure with a thin layer of holes. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2011.
- [53] G. Geymonat, F. Krasucki, and S. Lenci. Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. *Math. Mech. Solids*, 4(2) :201–225, 1999.
- [54] D. Givoli. Non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 94(1) :1–29, 1991.
- [55] H. P. Huy and E. Sanchez-Palencia. Phénomène de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée. *J. Math. Anal. Appl.*, 47, 1974.
- [56] W. Jäger and A. Mikelic. On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow. *Journal of Differential Equations*, 170(1) :96–122, 2001.
- [57] A. Klarbring. Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method. *International Journal of Engineering Science*, 29(4) :493–512, 1991.
- [58] P. Ladevèze. On the saint venant principle in elasticity. In P. Ladevèze, editor, *Local Effects in the Analysis of Structures*. Elsevier, Amsterdam, 1985.
- [59] K. Lemrabet. Le problème de Ventcel pour le système de l’élasticité dans un domaine de \mathbb{R}^3 . *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, 304(6) :151–154, 1987.
- [60] F. Lené. *Contribution à l’étude des matériaux composites et de leur endommagement*. Thèse de doctorat d’État. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1984.

- [61] C. Licht and G. Michaille. A modelling of elastic adhesive bonded joints. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 7(2) :711–740, 1997.
- [62] J.-J. Marigo and C. Pideri. The effective behavior of elastic bodies containing microcracks or microholes localized on a surface. *International Journal of Damage Mechanics*, 20 :1151–1177, 2011.
- [63] J.-C. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 172 :109–143, 1999.
- [64] G. Nguetseng. Problèmes d’écrans perforés pour l’équation de Laplace. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 19(1) :33–63, 1985.
- [65] E. Sanchez-Palencia. Comportement limite d’un problème de transmission à travers une plaque faiblement conductrice. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A*, 270 :1026–1028, 1970.
- [66] E. Sanchez-Palencia. *Non-homogenous Media and Vibration Theory*. Springer Verlag, 1980.
- [67] E. Sanchez-Palencia. Elastic body with defects distributed near a surface. In *Homogenization Techniques for Composite Media*. Springer Verlag, 1986.
- [68] I. B. Simonenko. Electrostatic problems for non uniformal media. the case of a thin dielectric with a high dielectric constant, i. *Differential Equations*, 10 :223–229, 1974.
- [69] I. B. Simonenko. Electrostatic problems for non uniformal media. the case of a thin dielectric with a high dielectric constant, ii. *Differential Equations*, 11 :1398–1404, 1975.
- [70] I. B. Simonenko. Limit problem in thermal conductivity in a nonhomogeneous medium. *Siberian Mathematical Journal*, 16 :991–998, 1975.
- [71] P. Suquet. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui, editors, *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 of *Lecture Notes in Physics*, pages 193–278. Springer Verlag, 1987.
- [72] A. D. Ventcel. On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes. *Theor. Probability Appl.*, 4 :164–177, 1959.

La liaison acier-béton

- [73] P. Bamonte, D. Coronelli, and P. Gambarova. Smooth anchored bars in nsc and hpc : a study on size effect. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 1(1) :42–53, 2003.
- [74] C. L. Borderie and G. Pijaudier-Cabot. Etude expérimentale du comportement des matériaux renforcés. rapport intermédiaire : Détermination expérimentale des lois de comportement de l'interface fibre-matrice. Technical Report I70/1F 3146 pour Électricité de France, LMT Cachan, 1987.
- [75] L. Butler, J. West, and S. Tighe. The effect of recycled concrete aggregate properties on the bond strength between rca concrete and steel reinforcement. *Cement and Concrete Research*, 41 :1037–1049, 2011.
- [76] J. Clément. *Interface acier-béton et comportement des structures en béton armé : caractérisation et modélisation*. PhD thesis, Université Paris VI, 1987.
- [77] J. Cox and L. Herrmann. Development of a plasticity bond model for steel reinforcement. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 3 :155–180, 1998.
- [78] J. Cox and L. Herrmann. Validation of a plasticity bond model for steel reinforcement. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 4 :361–389, 1999.
- [79] A. Daoud. *Étude expérimentale de la liaison entre l'acier et le béton autoplaçant – contribution à la modélisation numérique de l'interface*. PhD thesis, INSA de Toulouse, 2003.
- [80] A. Daoud, M. Lorrain, and M. Elgonnoui. Résistance à l'arrachement d'armatures ancrées dans du béton autoplaçant. *Materials and Structures*, 35 :395–401, 2002.
- [81] N. Dominguez. *Étude de la liaison acier-béton : De la modélisation du phénomène à la formulation d'un élément fini enrichi « béton armé »*. PhD thesis, ENS Cachan, 2005.
- [82] R. Eligehausen, E. Popov, and V. Bertero. Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations. Technical Report UCB/EERC-83/23 of the National Science Foundation, University of California, Berkeley, 1983.
- [83] Y. Goto. Cracks formed in concrete around tension bars. *ACI Journal*, 68(4) :244–251, 1971.
- [84] S. Michel-Ponnelle. *Loi de comportement (en 2D) pour la liaison acier-béton : JOINT_BA, R7.01.21*. EDF R&D, 2011. Disponible sur www.code-aster.org.

- [85] A. Ouglova. *Analyse du comportement des structures en béton armé atteintes de corrosion des armatures*. PhD thesis, ENS Cachan, 2004.
- [86] G. Rehm. *The basic principle of bond between steel and concrete*, volume 138 of *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*. Wilhelm Ernest and Sohn, Berlin, 1961.
- [87] B. Richard. *Comportement des éléments de structures en béton armé dégradés par corrosion*. PhD thesis, Université Paris Est, 2010.
- [88] R. Tepfers. Cracking of concrete cover along anchored deformed reinforcing bars. *Cement and Concrete Research*, 31(106) :3–129, 1979.

Les écoulements dans les fissures

- [89] G. Alfano, S. Marfia, and E. Sacco. A cohesive damage-friction interface model accounting for water pressure on crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1-3) :192–209, 2006.
- [90] T. J. Boone and A. R. Ingraffea. A numerical procedure for simulation of hydraulically-driven fracture propagation in poroelastic media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 14(1) :27–47, 1990.
- [91] O. Coussy. *Poromechanics*. Wiley, 2004.
- [92] S. Grasberger and G. Meschke. Thermo-hygro-mechanical degradation of concrete : From coupled 3d material modelling to durability-oriented multifield structural analyses. *Materials and Structures*, 37 :244–256, 2004.
- [93] U. Greiner and W. Ramm. Air leakage characteristics in cracked concrete. *Nuclear Engineering and Design*, 156(1-2) :167–172, 1995.
- [94] L. Jason. Relation endommagement-perméabilité pour les structures, application aux calculs de structures. 2004.
- [95] L. Jason, G. Pijaudier-Cabot, S. Ghavamian, and A. Huerta. Hydraulic behaviour of a representative structural volume for containment buildings. *Nuclear Engineering and Design*, 237(12-13) :1259–1274, 2007.
- [96] G. Meschke and S. Grasberger. Numerical modeling of coupled hygromechanical degradation of cementitious materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(4), 2003.
- [97] K. Ng and J. Small. Behavior of joints and interfaces subjected to water pressure. *Computers and Geotechnics*, 20(1) :7–93, 1997.
- [98] C. Niklasch and N. Herrmann. Nonlinear fluid-structure interaction calculation of the leakage behaviour of cracked concrete walls. *Nuclear Engineering and Design*, 239(9) :1628–1640, 2009.
- [99] P. Riva, L. Brusa, P. Contri, and L. Imperato. Prediction of air and steam leak rate through cracked reinforced concrete panels. *Nuclear Engineering and Design*, 192(1) :13–30, 1999.
- [100] S. Rizkalla, B. Lau, and S. Simmonds. Air leakage characteristics in reinforced concrete. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 110(5) :1147–1162, 1984.

- [101] J. M. Segura and I. Carol. Coupled hm analysis using zero-thickness interface elements with double nodes. part i : Theoretical model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(18) :2083–2101, 2008.
- [102] J. M. Segura and I. Carol. Coupled hm analysis using zero-thickness interface elements with double nodes. part ii : Verification and application. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(18) :2103–2123, 2008.
- [103] A. Selvadurai and T. Nguyen. Mechanics and fluid transport in a degradable discontinuity. *Engineering Geology*, 53(3-4) :24–249, 1999.
- [104] H. Simon, G. Nahas, and N. Coulon. Air-steam leakage through cracks in concrete walls. *Nuclear Engineering and Design*, 237(15-17) :1786–1794, 2007.
- [105] T. Suzuki, K. Takiguchi, and H. Hotta. Leakage of gas through cracked concrete walls. *Nuclear Engineering and Design*, 133(1) :121–130, 1992.
- [106] T. Wang and T. C. Hutchinson. Gas leakage rate through reinforced concrete shear walls : Numerical study. *Nuclear Engineering and Design*, 235(21) :2246–2260, 2005.