

# Modélisation des écoulements dans des milieux poreux fracturés par la méthode des équations aux intégrales singulières

Minh Ngoc Vu

▶ **To cite this version:**

Minh Ngoc Vu. Modélisation des écoulements dans des milieux poreux fracturés par la méthode des équations aux intégrales singulières. Autre. Université Paris-Est, 2012. Français. NNT : 2012PEST1168 . pastel-00777926

**HAL Id: pastel-00777926**
**https://pastel.hal.science/pastel-00777926**

Submitted on 18 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

THESE

Pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris - Est**

**Discipline : Géotechnique**

présentée par

**Minh-Ngoc VU**

# Modélisation des écoulements dans des milieux poreux fissurés par la méthode des équations intégrales singulières

*Soutenue le 26 Septembre 2012 à Champs-sur-Marne*

*devant le jury est composé de :*

| | | |
|---|---|---|
| M. Luc Dormieux | ENPC | Président |
| M. Djimedo Kondo | UPMC | Rapporteur |
| M. Marc Bonnet | ENSTA | Rapporteur |
| M. Kun Su | TOTAL | Examinateur |
| M. Laurent Jeannin | GDFSUEZ | Examinateur |
| M. Darius Seyedi | BRGM | Examinateur |
| M. Ahmad Pouya | ENPC | Directeur de thèse |

# Remerciement

Je tiens à remercier le BRGM et l'IFSTTAR pour avoir fait le choix d'assurer le support financer et avoir mis en œuvre les moyens nécessaires à la réalisation de ce travail.

Je souhaiterais témoigner toute ma reconnaissance à mes encadrants pour la confiance qu'ils m'ont accordée. Mes profonds et vifs remerciements s'adressent à Monsieur Ahmad Pouya, directeur de thèse, un grand scientifique, un home chaleureux. Merci de son temps qu'il m'a consacré, de ses encouragements pour mes initiatives, de ses conseils scientifiques et de l'aspect humain de sa personnalité. J'aimerais également remercier Darius Seyedi pour sa disponibilité et pour la pertinence de ses conseils qu'il m'a apportés sur le travail scientifique et la vie quotidienne. Merci pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Je voudrais remercier tout particulièrement Monsieur Luc Dormieux qui m'a fait l'honneur de présider le jury, à Messieurs Marc Bonnet et Djimédo Kondo qui ont accepté d'être rapporteur de ma thèse. Je remercie sincèrement Messieurs Kun Su et Laurent Jeannin qui ont bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

Un grand merci à Hubert Fabriol, Olivier Bouc et Thomas Le Guénan d'avoir apporté le soutien pendant ma thèse. Je tiens à remercier vivement Siavash Ghabezloo, Pierre Sochala et Jérémy Rohmer pour les échanges scientifiques et les conseils fructueux.

Je remercie chaleureusement Yu-Jun Cui qui m'a donné l'occasion de continuer les études supérieures en France et a encadré mon stage du Master. Merci pour ses encouragements et pour sa générosité scientifique.

Je remercie profondément  mon ami et mon collègue Anh-Minh Tang, qui m'a apporté ses aides scientifiques et dans la vie quotidienne depuis mon arrivé en France.

J'aimerais remercier tous mes amis au CERMES, à l'IFSTTAR et au BRGM, pour l'ambiance de travail et pour les moments de convivialité. Je souhaite bon courage à mon successeur Van-Linh NGUYEN.

Je voudrais profiter de cette page pour exprimer toute ma gratitude à mes parents et mes amis pour leur encouragement et leur soutien permanents.

# Résumé

Cette thèse est consacrée au développement d'une méthode numérique visant à modéliser des écoulements dans des milieux poreux fissurés, ainsi qu'à déterminer leur perméabilité effective à partir des avancements théoriques récents. En parallèle, elle a été aussi l'occasion de continuer sur la voie théorique et d'obtenir de nouveaux résultats sur ce plan.

Les équations générales gouvernant l'écoulement dans de tels matériaux sont rappelées, et plus particulièrement, la conservation de la masse à l'intersection entre fissures est établie explicitement [132, 139]. Des solutions générales du potentiel sont proposées sous la forme d'une équation intégrale singulière décrivant l'écoulement dans et autour des fissures entourées par une matrice infinie soumise à un champ lointain [136, 139]. Ces solutions représentent le champ de pression dans le milieu infini en fonction de l'infiltration dans les fissures qui prennent en compte complètement l'interaction et l'intersection entre fissures. En considérant le problème d'une fissure super-conductrice, des solutions analytiques de l'écoulement ont été développées et ces solutions sont utilisées comme cas de référence pour valider la solution numérique. De plus, la solution théorique de ce problème dans le cas 3D permet de comparer le modèle d'écoulement de Poiseuille dans une fissure elliptique d'épaisseur nulle et le modèle d'inclusion ellipsoïdale aplatie soumise à l'écoulement de Darcy [140].

Des outils numériques ont été développés en se basant sur la méthode des équations intégrales singulières afin de résoudre les équations générales du potentiel [132, 180]. Cela permet, d'une part, de modéliser l'écoulement stationnaire dans un domaine poreux contenant un grand nombre de fissures et, d'autre part, de proposer une solution semi-analytique de l'infiltration dans une fissure isolée dépendant de la perméabilité de la matrice, de la conductivité de la fissure et de la variable géométrique de la fissure. Cette dernière est l'élément essentiel pour déterminer de la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré en utilisant des schémas d'homogénéisation. Ce modèle auto-cohérent révèle un seuil de percolation qui est alors applicable pour l'estimation de la perméabilité effective d'un matériau contenant un grand nombre de fissures. L'approche par sous-structuration permet l'extension de la solution générale du potentiel, écrite pour un domaine infini, à celle d'un domaine fini [181]. Une solution analytique de l'écoulement dans et autour d'une fissure partiellement saturée est établie, fondée sur la solution analytique pour la fissure super-conductrice. Celle-ci est alors utilisée pour estimer la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé [141].

Le modèle de la perméabilité effective est appliqué dans le contexte du stockage géologique du $CO_2$ en vue d'étudier le comportement d'une zone de faille constituée par un noyau argileux et des zones fissurées. La pression d'injection provoque l'augmentation de la pression intertisielle dans le réservoir. Cette surpression engendrée dans le réservoir peut affecter la perméabilité de zones fissurées ce qui conduit à des phénomènes hydromécaniques couplés. Les résultats de simulations numériques permettent d'évaluer, d'une part, le risque de la remontée de la saumure à l'aquifère supérieur, et d'autre part, le risque de l'initiation d'une rupture sur le plan de la faille.

**Mots clés** : milieu poreux fissuré, perméabilité effective, équations intégrales singulières, intersection entre fissures, fissure non-saturé, stockage géologique du $CO_2$, réactivation de la faille

# Abstract

This thesis aims to develop a method for numerical modelling of fluid flow through fractured porous media and for determination of their effective permeability by taking advantage of recent results based on formulation of the problem by Singular Integral Equations. In parallel, it was alos an occasion to continue on the theoretical developement and to obtain new reseults in this area.

The governing equations for flow in such materials are reviewed first and mass conservation at the fracture intersections is expressed explicitly. Using the theory of potential, the general potential solutions are proposed in the form of a singular integral equation that describes the steady-state flow in and around several fractures embedded in an infinite porous matrix under a far-field pressure condition [136, 139]. These solutions represent the pressure field in the whole body as functions of the infiltration in the fractures, which fully take into account the fracture interaction and intersections. Closed-form solutions for the fundamental problem of fluid flow around a single fracture are derived, which are considered as the benchmark problems to validate the numerical solutions. In particular, the solution obtained for the case of an elliptical disc-shaped crack obeying to the Poiseuille's law has been compared to that obtained for ellipsoidal inclusions with Darcy's law [140].

The numerical programs have been developed based on the singular integral equations method to resolve the general potential equations [132, 180]. These allow modeling the fluid flow through a porous medium containing a great number of fractures. Besides, this formulation of the problem also allows obtaining a semi-analytical infiltration solution over a single fracture depending on the matrice permeability, the fracture conductivity and the fracture geometry. This result is the important key to upscalling the effective permeability of a fractured porous medium by using different homogeneisation schemes. The results obtained by the self-consistent scheme have been in particular established. The multi-region approach can be used to extend the general potential solution written for the infinite domain to that for a finite domain [181]. A closed-form solution for flow in and around a single partially saturated fracture, surrounded by an infinite matrix subjected to a far-field condition, is also derived combining the solutions for a superconductive fracture and for an imprevious fracture. This solution is then employed to estimate the effective permeability of unsaturated fractured porous media [141].

The effective permeability model is applied to study the hydromechanical behaviour of a fault zone constituted by a clay core surrounded by fractured zones in the context of $CO_2$ geological storage. The pressure injection induces an overpressure in the reservoir that may affect the permeability of the fractured zones leading to complexe coupled hydromechanical phenomena. The simulation results allow evaluating the risk of leakage of the reservoir brine to higher aquifers as well as the risk of fault reactivation.

**Keywords**: fractured porous media, effective permeability, singular integral equation, fracture intersection, unsaturated fracture, $CO_2$ geological storage, fault reactivation

**INTRODUCTION GENERALE ..... 3**

**CHAPITRE 1. DEVELOPPEMENTS FONDAMENTAUX SUR L'ECOULEMENT DANS UN MILIEU POREUX FISSURE INFINI ..... 8**

1.1 INTRODUCTION ..... 8
1.2 PROBLEME BIDIMENSIONNEL ..... 9
*1.2.1 Equations générales de l'écoulement 2D ..... 9*
*1.2.2 Solution théorique de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré infini 2D ..... 13*
1.3 PROBLEME TRIDIMENSIONNEL ..... 17
*1.3.1 Equations générales de l'écoulement 3D ..... 17*
*1.3.2 Solution générale du potentiel 3D ..... 21*
1.4 PROBLEME DE FISSURE SOUS FORME DE DISQUE ELLIPTIQUE ..... 21
*1.4.1 Champ d'infiltration dans la fissure ..... 22*
*1.4.2 Champ de pression dans la matrice ..... 27*
*1.4.3 Extension au milieu anisotrope ..... 29*
*1.4.4 Comparaison entre la fissure de Poiseuille et l'inclusion de Darcy ..... 30*
1.5 CONCLUSION ..... 32

**CHAPITRE 2. MODELISATION NUMERIQUE DE L'ECOULEMENT STATIONNAIRE DANS UN MILIEU POREUX FISSURE INFINI ..... 34**

2.1 INTRODUCTION ..... 34
2.2 MODELISATION BIDIMENSIONNELLE DE L'ECOULEMENT STATIONNAIRE DANS UN MILIEU POREUX FISSURE INFINI ..... 35
*2.2.1 Méthode de résolution numérique 2D ..... 36*
*2.2.2 Solution numérique de l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini 2D ..... 40*
2.3 MODELISATION TRIDIMENSIONNELLE DE L'ECOULEMENT STATIONNAIRE DANS UN MILIEU POREUX FISSURE INFINI ..... 45
*2.3.1 Méthode de résolution numérique 3D ..... 45*
*2.3.2 Validation de la solution numérique ..... 51*
*2.3.3 Solution numérique de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré infini 3D ..... 54*
2.4 CONCLUSION ..... 55

**CHAPITRE 3. APPLICATION AU CALCUL DE LA PERMEABILITE EFFECTIVE D'UN MILIEU POREUX FISSURE SATURE ..... 57**

3.1 INTRODUCTION ..... 57
3.2 PERMEABILITE EFFECTIVE D'UN MILIEU POREUX FISSURE ..... 58
3.3 DETERMINATION THEORIQUE DE LA PERMEABILITE EFFECTIVE ..... 59
*3.3.1 Milieu poreux fissuré 2D contenant des fissures super-conductrices ..... 59*
*3.3.2 Milieu poreux fissuré 3D contenant des fissures super-conductrices ..... 60*
3.4 DETERMINATION SEMI-ANALYTIQUE DE LA PERMEABILITE EFFECTIVE ..... 61
*3.4.1 Modèle semi-analytique de la perméabilité effective 2D ..... 61*
*3.4.2 Modèle semi-analytique de la perméabilité effective ..... 63*
3.5 CONCLUSION ..... 70

**CHAPITRE 4. EXTENSIONS THEORIQUES ..... 71**

4.1 ECOULEMENT STATIONNAIRE DANS UN MILIEU POREUX FISSURE FINI 2D ..... 71
*4.1.1 Introduction ..... 71*
*4.1.2 Formulation d'intégrale de frontière de l'écoulement stationnaire ..... 72*
*4.1.3 Résolution numérique ..... 77*
*4.1.4 Exemples numériques ..... 77*

*4.1.5 Conclusion* ... *81*
4.2 PERMEABILITE EFFECTIVE D'UN MILIEU POREUX FISSURE NON-SATURE ... 83
*4.2.1 Introduction* ... *83*
*4.2.2 Un seule fissure vide dans une matrice infinie* ... *84*
*4.2.3 Une fissure partiellement saturée dans une matrice infinie* ... *88*
*4.2.4 Une fissure seule partiellement saturée dans un milieu anistrope* ... *91*
*4.2.5 Perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non saturé* ... *92*
*4.2.6 Modélisation par éléments finis* ... *95*
*4.2.7 Conclusion* ... *97*

**CHAPITRE 5. APPLICATION A LA SECURITE DE STOCKAGE GEOLOGIQUE DU $CO_2$ ... 98**

5.1 INTRODUCTION ... 98
5.2 DEFINITION D'UN SCENARIO DE REFERENCE ... 100
*5.2.1 Description du modèle géologique* ... *100*
*5.2.2 Sénario d'injection* ... *104*
5.3 PROCEDURE DE CALCUL HYDROMECANIQUE DE L'OPERATION D'INJECTION DU $CO_2$ ... 105
*5.3.1 Calcul de la perméabilité des zones endommagées* ... *105*
*5.3.2 Couplage hydromécanique global de l'opération d'injection du $CO_2$* ... *105*
5.4 COMPORTEMENT DE LA FAILLE ... 106
*5.4.1 Remontée de la saumure vers l'aquifère supérieur* ... *106*
*5.4.2 Comportement du noyau de la faille* ... *110*
5.5 CONCLUSION ... 113

**CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES GENERALES ... 115**

CONCLUSIONS GENERALES ... 115
PERPECTIVES GENERALES ... 118

**ANNEXE 1. EQUATION INTEGRALE SINGULIERE ... 120**

**ANNEXE 2. CALCUL INTEGRAL POUR UN POINT A L'INTERIEUR DU DISQUE ELLIPTIQUE 121**

**ANNEXE 3. CALCUL DE LA LIMITE ... 124**

**ANNEXE 4. CHAMP DE PRESSION A L'EXTERIEUR DU DISQUE CIRCULAIRE ... 125**

**ANNEXE 5. RELATION LINEAIRE ENTRE LES TENSEURS Φ ET B ... 127**

**ANNEXE 6. RELATION ENTRE $K^F$ ET $G^F$ ... 129**

**ANNEXE 7. SOLUTIONS DU POTENTIEL D'ECOULEMENT TRANSITOIRE DANS UN MILIEU POREUX FISSURE ... 131**

**RÉFÉRENCES ... 135**

# Introduction générale

Les milieux poreux fissurés sont devenus un objet d'études important et d'intérêt croissant ces dernières années en raison de leur rôle dans la modélisation exigée par diverses applications industrielles telles que le stockage géologique du $CO_2$ (e.g., Fig 1), le stockage des déchets radioactifs (e.g., Fig 2), l'ingénierie des réservoirs d'hydrocarbures ou la géothermie (e.g., Fig 3). Un défi scientifique auquel sont confrontés les géomécaniciens dans ce domaine est de modéliser l'écoulement dans de tels matériaux ainsi que de déterminer leur perméabilité effective. Des travaux importants ont été consacrés récemment par différents organismes à ces questions tant sur le plan théorique que sur les plans de la modélisation numérique et expérimental. L'intérêt de cette question touche également d'autres domaines tels que l'hydrogéologie (gestion des ressources en eau), l'environnement (transport des polluants dans les sols fissurés) ou le génie civil (étanchéité des bétons).




Fig 1. Stockage géologique du $CO_2$ (source : http://brgm.fr)

Des études antérieures axées sur les techniques de mesures sur le terrain (e.g. essai de pompage [81]) ont été mises en place afin de déterminer les propriétés hydrauliques d'aquifères fissurés. Cependant, cette approche coûteuse prend beaucoup de temps et nécessite de bien contrôler les matériels. Les méthodes numériques et analytiques sont largement utilisées pour estimer la perméabilité effective des massifs rocheux fracturés en raison de leur flexibilité dans le traitement des variations des géométries du réseau de fissures et des propriétés de matériaux. Les approches purement théoriques pour la détermination de la perméabilité équivalente des milieux à double porosité (pores/fissures) telles que le schéma de Mori-Tanaka [161] se heurtent vite à leurs limites dès que l'on quitte les cas de matériaux à faible densité de fissures. Le schéma d'homogénéisation auto-cohérent permet de tenir compte implicitement, et de manière simplifiée, de l'interaction entre les fissures [48, 12]. En vue de modéliser l'écoulement dans une formation géologique avec une fracturation

complexe, le recours à l'outil numérique s'impose naturellement. L'utilisation des méthodes telles que les éléments finis ou les volumes finis nécessite la constitution d'un maillage volumique adapté pour le domaine fissuré. La création de ce maillage par une méthode automatique et pour un domaine comprenant un grand nombre de fissures de géométrie aléatoire constitue une difficulté numérique majeure qui n'a pu être résolue que dans le cas 2D [137] et partiellement en 3D pour des fissures polygonales [16]. La méthode des équations intégrales singulières présente l'intérêt de diminuer la dimension du problème et de réduire le problème 3D à un problème 2D. Le maillage se fait alors uniquement sur les surfaces des fissures qui sont modélisées souvent par des formes simples. La mise en place de cette méthode a nécessité certaines avancées théoriques, en particulier, l'établissement de certaines solutions fondamentales.

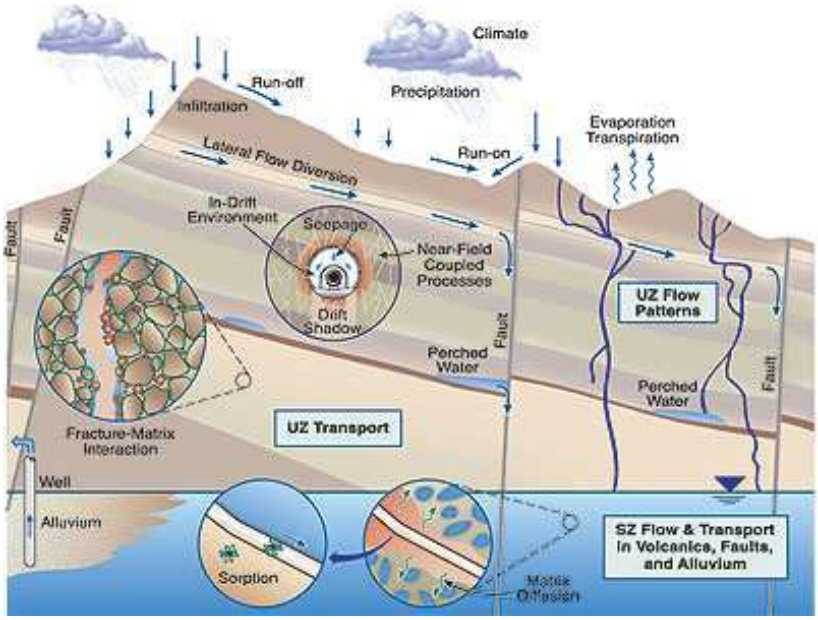



Fig 2. Stockage des déchets radioactifs en couche géologique profonde à Yucca Mountain (source : http://esd.lbl.gov/)

Cette thèse s'est donnée l'objectif de profiter de ces avancées afin de mettre en place une méthode numérique de modélisation des écoulements dans les milieux poreux fissurés fondées sur les équations aux intégrales singulières. Mais en parallèle, elle a été aussi l'occasion de continuer sur la voie théorique et d'étendre certains résultats sur ce plan.

Parmi les nombreux problèmes liés à l'écoulement dans un massif rocheux fracturé, on s'intéresse plus particulièrement à l'écoulement stationnaire autour et dans un réseau de fissures dans un milieu infini sous une condition de champ lointain. La résolution de ce problème permet de déterminer la perméabilité effective d'un tel milieu. Ce mémoire a pour but de faire d'abord une synthèse des résultats récents sur ce sujet.

Le premier chapitre de ce rapport est dédié à présenter les résultats théoriques concernant l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux infini contenant des fissures [136, 132, 139, 140]. Les équations générales gouvernant l'écoulement transitoire dans un milieu poreux fissuré sont d'abord rappelées, dans lesquelles l'échange de la masse entre les fissures et la

matrice à l'intersection entre les fissures a été établie explicitement [132, 139]. Des solutions potentielles, fondées sur une formulation du problème en termes d'équations intégrales singulières, ont été proposées par Pouya et Ghabezloo [136] pour le problème 2D et Pouya [139] pour le problème 3D. Ces solutions répresentent le champ de pression dans le milieu comme fonction de l'infiltration dans les fissures tout en prenant en compte l'interaction et l'intersection entre les fissures. Elles apportent de grandes facilités de calculs numériques. Quand ces solutions générales sont écrites pour le cas d'une seule fissure, elles permettent de dériver une solution analytique pour le problème fondamental de l'écoulement dans et autour d'une fissure super-conductrice. En particulier, la formulation analytique de l'infiltration dans une fissure sous forme de disque elliptique dans un milieu infini sous l'effet d'un gradient constant de pression imposé à l'infini a pu être obtenue. Elle permet de comparer le modèle d'écoulement de Poiseuille dans une fissure d'épaisseur nulle et le modèle d'inclusion ellipsoïdale aplatie soumise à l'écoulement de Darcy [140].

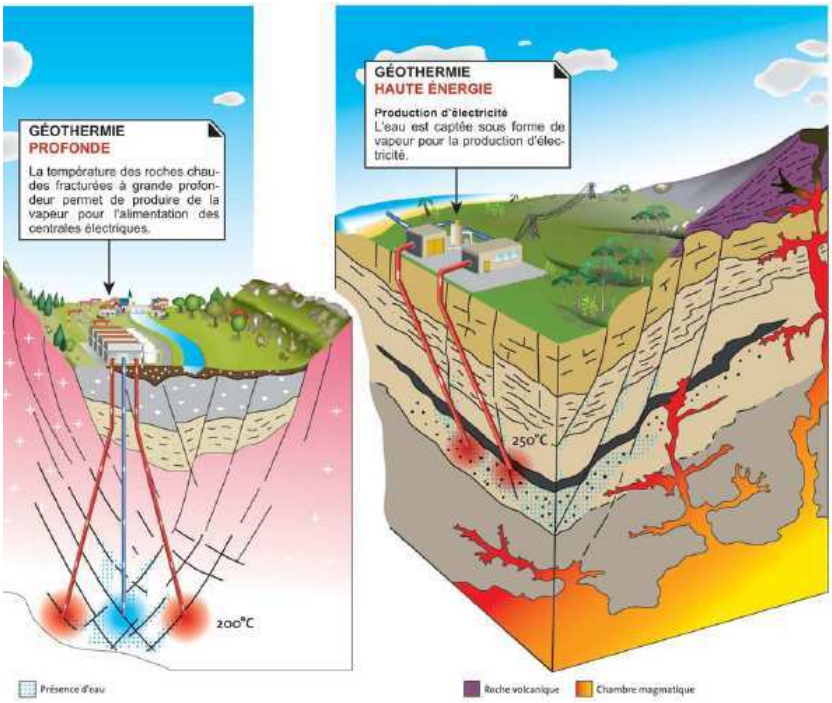



Fig 3. Géothermie : l'eau froide injéctée dans le massif circule à travers un réseau de fractures et récupère la chaleur du terrain (source : http://brgm.fr)

Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à la modélisation numérique de l'écoulement stationaire dans un milieu poreux fissuré infini, fondée sur les solutions générales de potentiel : Pouya et Vu [132] pour le cas 2D et Vu et al. [180] pour le cas 3D. En s'appuyant sur la méthode de collocation, la procédure numérique consiste à discrétiser des fissures, à choisir des fonctions d'interpolation correspondant aux éléments courants des fissures et aux éléments d'extrémités, à choisir des points de collocation, à constituer et à résoudre le système d'équations et effectuer le post-traitement des résultats. Un outil numérique a été développé afin d'implémenter cette procédure, dans lequel le solveur principal est écrit en langage Fortran. Les solutions analytiques du problème de fissure super-

conductrice sont utilisées pour valider la solution numérique. Le programme numérique permet de modéliser l'écoulement de fluide dans et autour d'un réseau de fissures entouré par une matrice infinie soumise à un gradient uniforme de pression à l'infini.

Le troisième chapitre présente les méthodes de changement d'échelle pour la détermination de la perméabilité effective d'un domaine poreux contenant des fissures [136, 132, 180]. Le résultat de l'écoulement autour et dans les fissures nous permet de déterminer la perméabilité équivalente des géomatériaux poreux fissurés. La résolution numérique du problème de l'écoulement dans et autour d'une seule fissure ayant une conductivité finie permet d'élaborer une solution semi-analytique de l'intégrale du champ de l'infiltration dans la fissure en fonction des paramètres du problème (perméabilité de la matrice, conductivité de la fissure et sa géométrie). Ce résultat est l'occasion d'établir un modèle auto-cohérent d'estimation de la perméabilité effective. La validité du modèle est démontrée en le comparant avec le résultat du problème de référence pour la fissure super-conductrice. Ce modèle peut être appliqué à un milieu poreux contenant un grand nombre de familles de fissures.Chaque famille de fissures est caractérisée par une densité, une orientation moyenne, une longueur moyenne et une conductivité.

Un des volets importants de cette thèse est le développement théorique concernant l'écoulement dans des massifs rocheux fracturés. Deux extensions théoriques réprésentatives sont présentées dans le quatrième chapitre de ce mémoire : l'écoulement stationnaire dans un domaine fissuré fini et la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé. Les solutions potentielles obtenues pour un milieu infini peuvent être étendues à celles pour un milieu fini en se basant sur la méthode de sous-structuration. Ces solutions sont exprimées sous la formulation générale de la méthode des éléments de frontières classiques en ajoutant le terme de contribution des fissures. Cette formulation de l'écoulement stationnaire a par ailleurs pu être résolue avec succès dans le cas 2D (Vu et al. [181]). Cette méthodologie peut être appliquée également afin de dériver la solution générale de l'écoulement transitoire d'un fluide compressible dans un milieu poreux fissuré fini. De plus, la solution de l'écoulement autour d'une fissure partiellement saturée est obtenue par la superposition des solutions des parties remplies et des parties vides qui permet d'établir un modèle théorique de la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé en se basant sur le schéma dilué de Mori-Tanaka (Pouya et al. [141]).

Le cinquième chapitre présente l'application une partie des résultats obtenus à la modélisation de stockage géologique du $CO_2$. Le modèle théorique auto-cohérent de perméabilité effective en 2D est valorisé par son application dans le cadre de l'étude du comportement d'une zone de faille sous l'effet de l'injection de $CO_2$. La faille est constituée d'un cœur argileux suivant la loi élasto-plastique de Drucker-Prager et de zones endommagées caractérisées par des distributions statistiques de fissures. L'idée principale est que l'ouverture des fissures, et donc la perméabilité effective de la zone endommagée, peut augmenter avec la pression, ce qui conduit à des phénomènes hydromécaniques couplés. Pour étudier ces phénomènes, le code de calcul de la perméabilité équivalente (PermAu) a été interfacé dans un chaînage de calcul hydromécanique avec le Code_Aster. Avec un va et vient entre les deux codes, on réalise une

simulation hydromécanique couplée de la remontée potentielle des fluides à travers la faille sous l'effet de la surpression engendrée par l'injection. Les résultats permettent d'évaluer, d'une part, le risque de contamination d'un aquifère supérieur, et d'autre part, le risque de la réactivation de la faille.

Certains aspects très techniques des calcules ont été reportés dans les annexes 2-6. En plus, certains résultats de la littérature sont réproduits dans l'annexe 1 pour avoir un document complet.

# Chapitre 1 . Développements fondamentaux sur l'écoulement dans un milieu poreux fissuré infini

## 1.1 Introduction

Plusieurs problèmes physiques et industriels tels que le transport des contaminants dans les roches fracturées ou l'exploitation des réservoirs pétroliers requièrent la modélisation de l'écoulement dans un milieu poreux contenant des fissures ou des fractures. Ces discontinuités ont généralement une grande influence sur les propriétés globales de transport dans les massifs rocheux.

Parmi les nombreux problèmes liés à l'écoulement dans les formations géologiques fracturées ou les roches micro-fissurées, on s'intéresse à l'écoulement stationnaire au sein d'un système poreux soumis à un champ lointain pour déterminer sa perméabilité effective. Afin de modéliser l'écoulement dans un milieu poreux fissuré infini, l'équation intégrale singulière fournit une méthode puissante permettant de développer :

(1) un schéma numérique simple,

(2) la solution générale du potentiel et

(3) la solution analytique dans quelques cas de références.

Concernant la solution générale du potentiel, le champ de pression dans la matrice est élaboré comme la fonction du flux dans les fissures. Cela réduit d'une unité la dimension des variables inconnues ; on passe d'un problème 3D à un problème 2D ou d'un problème 2D à un problème 1D, ce qui simplifie alors la modélisation numérique. La solution potentielle est proposée premièrement par Liolios et Exadaktylos [94] pour l'écoulement plan en utilisant les variables complexes. Leur solution est restreinte au cas d'une matrice de perméabilité isotrope et exclut l'intersection entre les fissures.

Le premier objectif de ce chapitre est de rappeler des solutions théoriques de l'écoulement dans le cas général d'une matrice anisotrope contenant des fissures intersectées (2D et 3D) [136, 139, 132]. La formule de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré doit intégrer la conservation de la masse concernant les échanges de masse « matrice-fissure » le long des fissures et celui « fissure-fissure » à un point d'intersection donné. La relation décrivant l'échange de masse « matrice-fissure » en un point sur la fissure a été dérivée premièrement par Barenblatt et al. [11] en utilisant le modèle de double porosité, et ensuite utilisé largement afin de modéliser l'écoulement dans un milieu poreux fissuré [4, 2, 16, 115]. Cependant, l'utilisation de leur formulation pour la surface courbe de fissure devrait être examinée plus attentivement comme on le verra plus tard dans ce chapitre. De plus, la conservation de masse en un point d'intersection n'est pas établie explicitement dans la littérature. Probablement, le concept de double porosité, dans lequel le flux dans le réseau des fissures et dans la matrice sont décrits séparément par un doublet d'équations, rend le problème plus compliqué [191]. La plupart des travaux ont ignoré cette condition pour éviter

la difficulté numérique et quelques autres ont imposé des conditions empiriques [67]. C'est sur cette difficulté que s'est concentré les travaux de Pouya et Vu [139] et de Pouya [132] qui ont cherché à présenter une formulation rigoureuse de la conservation de la masse à un point d'intersection (en 2D) ou à une ligne d'intersection (en 3D). Cela est une condition préalable importante en vue d'établir la solution potentielle générale ainsi que la modélisation numérique.

Le deuxième objectif de ce chapitre est d'établir la solution de l'écoulement dans et autour d'une fissure isolée dans une matrice infinie soumise à un champ lointain. Cette solution a été déterminée dans certains travaux en utilisant le modèle d'inclusion elliptique [195, 192], de lentille [114] en 2D ou d'inclusion ellipsoïdale [161, 12, 23] en 3D dans laquelle le fluide est gouverné par la loi de Darcy. Toutefois, la loi de Poiseuille est choisie préférentiellement afin de modéliser l'écoulement dans la fissure pour le cas de roches. La solution générale du potentiel, écrite pour le cas d'une fissure super-conductrice isolée de Poiseuille, est alors une étape nécessaire pour déterminer la solution analytique de l'infiltration dans la fissure. Obtenir une telle solution nous donnera un élément essentiel pour la détermination de la perméabilité effective et des études théoriques approfondies. Cela est utilisé également comme un outil de validation de la solution numérique présentée dans le chapitre suivant.

Dans ce travail, la fissure peut être représentée géométriquement par une surface d'épaisseur nulle avec une absence de discontinuité de pression entre deux faces. Cela correspond physiquement au cas limite d'une fissure de taille négligeable par rapport à la taille du domaine, dans lequel le fluide est en équilibre avec celui dans les pores et la pression est continue à l'interface matrice-fissure. Cette hypothèse correspond à une perméabilité transversale infinie ou une résistance transversale nulle. Cette supposition exclut le cas de l'écoulement, qui n'est pas en équilibre avec la différence de pression entre la fissure et la matrice [163] ou entre des fissures, telles que certains défauts de cisaillement, agissant comme des membranes imperméables [107].

## 1.2 Problème bidimensionnel

### 1.2.1 Equations générales de l'écoulement 2D

Considérons un domaine 2D $\Omega$ comprenant plusieurs fissures interconnectées numérotées selon $j$, notées $\Gamma_j$ et représentées par les fonctions $\underline{z}^j(s) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, avec $s$ l'abscisse curviligne (Fig 4). Notons $S$ l'ensemble des points singuliers, constitué par les intersections et les extrémités des fissures. $\Gamma$ désigne l'ensemble des points appartenant aux fissures : $\Gamma = \cup\Gamma_j$, donc, $S \subset \Gamma$. L'ensemble des points $\Gamma$-$S$ est appelé l'ensemble des points réguliers des fissures. La matrice poreuse correspond à $\Omega$-$\Gamma$.

L'écoulement transitoire dans la matrice poreuse est régi par la loi de Darcy :

$$\forall \underline{x} \in \Omega\text{-}\Gamma \; ; \qquad \underline{v}(\underline{x},t) = -\boldsymbol{k}(\underline{x}).\nabla p(\underline{x},t) \tag{1}$$

où $\underline{v}(\underline{x},t)$, $p(\underline{x},t)$ sont respectivement le vecteur de vitesse et la pression locale au point $\underline{x}$ et au temps $t$; $\boldsymbol{k}$ le tenseur de perméabilité qui dépend de la perméabilité intrinsèque $\boldsymbol{k}_m$ de la matrice et de la viscosité dynamique du fluide $\mu$ :

$$\forall \underline{x} \in \Omega\text{-}\Gamma\ ; \qquad \boldsymbol{k}(\underline{x}) = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{k}_m(\underline{x}) \tag{2}$$

En l'absence de sources, la conservation de la masse dans la matrice s'écrit :

$$\forall \underline{x} \in \Omega\text{-}\Gamma\ ; \qquad \partial\rho/\partial t + \nabla.[\rho \underline{v}(\underline{x},t)] = 0 \tag{3}$$

ou encore :

$$\forall \underline{x} \in \Omega\text{-}\Gamma\ ; \qquad \phi_m \beta_m \frac{\partial p(\underline{x},t)}{\partial t} + \nabla.\underline{v}(\underline{x},t) = 0 \tag{4}$$

avec $\rho$ la densité volumique du fluide dans la matrice poreuse ; $\phi_m$ la porosité de la matrice et $\beta_m$ la compressibilité du liquide dans la matrice.

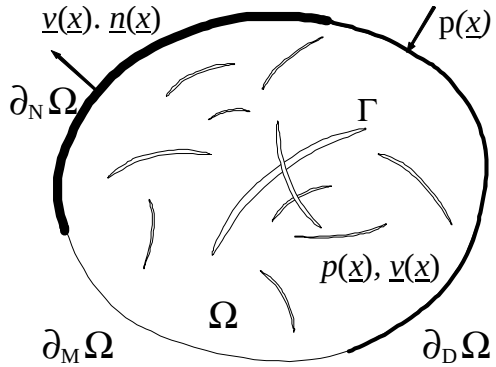



Fig 4. Un milieu poreux comprenant des fissures intersectées

L'écoulement dans une fissure, du moins dans un massif rocheux, est couramment modélisé par la loi de Poiseuille [103, 125, 186, 71, 194] qui représente une relation linéaire entre le vecteur de décharge et le gradient de pression dans la fissure :

$$\forall \underline{z}(s) \in \Gamma; \qquad q(\underline{z}(s),t) = -c(s)\partial_s p(\underline{z}(s),t) \tag{5}$$

La conductivité hydraulique $c$ dépend de la viscosité dynamique $\mu$ du fluide, de l'ouverture hydraulique $e$ et de la rugosité de la fissure. Plusieurs études dans la littérature [186, 42, 122] ont pris en compte la rugosité de la fissure par un facteur fictif $f$ supplémentaire qui est introduit dans la formulation de la loi cubique de l'écoulement laminaire entre deux plaques parallèles :

$$c = \frac{1}{f}\frac{e^3}{12\mu} \tag{6}$$

Le débit, s'écoulant dans la fissure, est défini comme l'intégrale de la vitesse $\underline{v}$ du fluide sur l'épaisseur physique $e$ de la fissure :

$$\forall \underline{s} \in \Gamma; \qquad \underline{q}(s) = \int_{-e/2}^{e/2} \underline{v}\,(y)dy \tag{7}$$

L'échange de masse entre la fissure et la matrice en un point régulier est obtenu en considérant la conservation de la masse dans un segment de fissure comprise entre abscisses *s* et *s*+d*s* (Fig 5) :

$$\forall \underline{z}(s) \in \Gamma - S; \quad \beta_f \frac{\partial p(\underline{z},t)}{\partial t} + [\![\underline{v}(\underline{z},t)]\!].\underline{n}(s) + \partial_s q(s,t) = 0 \tag{8}$$

où $\beta_f$ est la compressibilité du fluide dans la fissure ; $\underline{n}(s)$ le vecteur unitaire normal de fissure orienté de $\Gamma^-$ à $\Gamma^+$ et $[\![\underline{v}(\underline{z})]\!] = \underline{v}^+(\underline{z}) - \underline{v}^-(\underline{z})$ la discontinuité de la vitesse à travers la fissure.

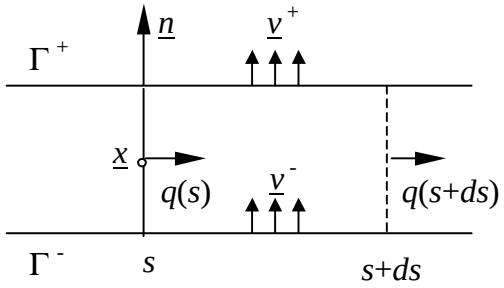



Fig 5. Echange de la masse entre la fissure et la matrice en un point régulier d'une fissure [136]

Un problème important de l'étude de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré est l'échange de masse à l'intersection entre les fissures. Une méthode rigoureuse a été présentée par Pouya et Vu [139] afin de dériver l'expression de la conservation de la masse en ces points pour l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, et est étendue pour l'écoulement transitoire compressible.

Envisageons un domaine *D* suffisamment petit avec sa frontière $\partial D$ environnant un point d'intersection $\underline{z}$ (Fig 6). On suppose qu'il y a *J* fissures s'intersectant en $\underline{z}$, donc, le domaine *D* peut être divisé en *J* sous-domaines $D_{j,j+1}$ bornés par les fissures $\Gamma_j$ et $\Gamma_{j+1}$ (avec la convention $\Gamma_{J+1}=\Gamma_1$ pour avoir la notation cyclique). Notons $\rho$ et $\rho_f$ les densités massiques du fluide dans la matrice et dans les fissures, respectivement.

L'échange de la masse entre *D* et le reste du milieu comprend deux parties : l'échange avec la matrice à travers $\partial D$ par le mouvement du fluide et l'échange avec les fissures à leur intersections avec $\partial D$ par la décharge notée $q_j^D$. D'une part, la conservation de la masse pour ce domaine s'exprime :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + Q = 0 \tag{9}$$

avec $\mathcal{M}$ la variation de la masse du fluide dans *D* :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = \sum_j \int_{D_{j,j+1}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega + \sum_j \int_{\Gamma_j^D} \frac{\partial \rho_f}{\partial t}\, ds \tag{10}$$

et $Q$ le flux sortant de $\partial D$ :

$$Q = \int_{\partial D} \rho \underline{v}.\underline{n}\, ds + \sum_{j=1}^{J} \rho q_j^D \tag{11}$$

D'autre part, la conservation de la masse dans le sous-domaine $D_{j,j+1}$ s'exprime selon :

$$\int_{D_{j,\,j+1}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega + \int_{\partial D_{j,\,j+1}} \rho \underline{v}.\underline{n}\, ds - \int_{\Gamma_j^D} \rho \underline{v}^{+}.\underline{n}\, ds + \int_{\Gamma_{j+1}^D} \rho \underline{v}^{-}.\underline{n}\, ds = 0 \tag{12}$$

où $\Gamma_j^D$ représente la portion de $\Gamma_j$ comprise dans $D$ ; $\underline{n}$ le vecteur unitaire normal sortant de $\Gamma_j^D$ et orienté de $\Gamma_j$ vers le domaine $\partial D_{j,j+1}$. La vitesse du fluide est discontinue au passage de la fissure $\Gamma_j$ : $\underline{v}^{-}$ et $\underline{v}^{+}$ représentent respectivement les vitesses sur les côtés négatif et positif de cette fissure, respectivement. La convention de l'orientation du vecteur $\underline{n}$ sur la fissure $\Gamma_j$ détermine les signes des deux dernières intégrales de la formule (12). En sommant les J équations (12), la contribution des deux dernières intégrales peut être transformée en une expression impliquant la discontinuité de vitesse à travers les fissures selon :

$$\int_{D} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega + \int_{\partial D} \rho \underline{v}.\underline{n}\, ds - \sum_{j} \int_{\Gamma_j} \rho [\![ \underline{v} ]\!].\underline{n}\, ds = 0 \tag{13}$$

En outre, l'échange de la masse entre la fissure et la matrice en un point régulier (8) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\sum_{j} \int_{\Gamma_j^D} \frac{\partial \rho_f}{\partial t}\, ds + \sum_{j} \int_{\Gamma_j^D} \partial_s(\rho q)\, ds + \sum_{j} \int_{\Gamma_j^D} \rho [\![ \underline{v} ]\!].\underline{n}\, ds = 0 \tag{14}$$

avec

$$\int_{\Gamma_j^D} \partial_s(\rho q)\, ds = \rho(q_j^D - q_j^0) \tag{15}$$

où $q_j^0$ désigne le débit sortant du point d'intersection $\underline{z}$ dans la branche $j$.

En substituant (10), (11), (13), (14) et (15) dans (9), on aboutit à :

$$\sum_{j} q_j^0 = 0 \tag{16}$$

Cette expression est similaire à celle obtenue pour un réseau de fissures scellé dans un milieu imperméable. Néanmoins, c'est la première fois que la formulation complète de la conservation de la masse aux points d'intersection entre fissures dans un milieu poreux est mise en évidence. L'équation (16) montre que la conservation de la masse au point d'intersection des fissures est indépendante de l'échange de masse entre matrice et fissures. Ceci revient à montrer que le term source potentielle suposée en ce point dans des travaux précédents [136] est nul. En plus, ce résultat analytique nous permet également de préciser et faciliter la modélisation numérique que nous allons voir dans le chapitre 2.

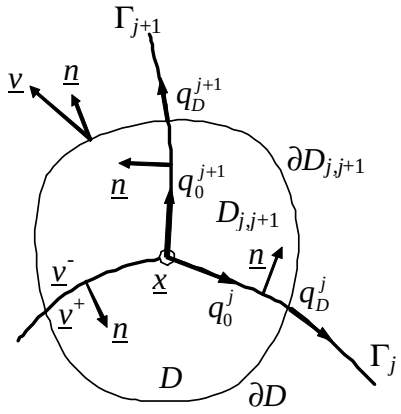



Fig 6. Conservation de la masse à l'intersection entre les fissures [139]

Trois types de conditions aux limites peuvent être imposés sur les différentes sections de $\partial\Omega$ : condition de Dirichlet sur $\partial_D\Omega$, condition de Neumann sur $\partial_N\Omega$ et condition mixte sur $\partial_M\Omega$ :

$$\forall \underline{x} \in \partial_D\Omega; \qquad p(\underline{x},t)=p_d(\underline{x}) \tag{17}$$

$$\forall \underline{x} \in \partial_N\Omega; \qquad \underline{v}(\underline{x},t).\underline{n}(\underline{x})=v_d(\underline{x}) \tag{18}$$

$$\forall \underline{x} \in \partial_M\Omega; \qquad \lambda(\underline{x})p(\underline{x},t)+\kappa(\underline{x})\underline{v}(\underline{x},t).\underline{n}(\underline{x}) = \gamma(\underline{x}) \tag{19}$$

dans lesquelles $\underline{n}$ est le vecteur unitaire normal sortant du bord considéré ; $p_d(\underline{x})$, $v_d(\underline{x})$, $\lambda(\underline{x})$, $\kappa(\underline{x})$, $\gamma(\underline{x})$ sont cinq fonctions connues.

Néanmoins, en ce qui concerne le domaine fissuré, les fissures peuvent couper la frontière du domaine en plusieurs points. Notons $S_B = \Gamma \cap \partial\Omega$, l'ensemble des points d'intersection entre les fissures et la frontière. Par conséquent, la pression, la décharge sortant, ou la condition mixte, doivent être spécifiées à chaque point de $S_B$ correspondant à sa position sur $\partial\Omega$.

La condition initiale est homogène, c'est-à-dire :

$$\forall \underline{x} \in \Omega; \qquad p(\underline{x},0) = 0 \tag{20}$$

### 1.2.2 Solution théorique de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré infini 2D

#### 1.2.2.1 Solution générale du potentiel

Considérons un domaine homogène infini $\Omega$ ayant la perméabilité isotrope $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{\delta}$, soumis à l'infini à un champ de pression $p_\infty(\underline{x})$:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} [p(\underline{x}) - p_\infty(\underline{x})] = 0 \tag{21}$$

avec $p_\infty$ satisfaisant $\Delta p_\infty = 0$. Dans le cas général, en particulier pour la détermination de la perméabilité effective, $p_\infty$ correspond à un gradient uniforme de pression : $p_\infty(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x}$.

Les équations devant être vérifiées par le champ de pression $p(\underline{x})$ sont les équations constitutives (1), (5) ; les conservations de la masse (4), (8), (16) et la condition aux limites (21) dans lesquelles les termes reliés au temps disparaissent. Une solution générale gouvernant l'écoulement dans un milieu poreux fissuré infini peut être obtenue par le théorème du potentiel ou l'approche de sous-structuration associant à la méthode des éléments de frontière. La dernière est utilie pour un domaine fini contenant des fissures qui sera présentée dans la section 4.1. En utilisant le théorème du potentiel pour le domaine infini dans lequel les fissures sont considérées comme une répartition des points sources ou puits, Pouya et Ghabezloo [136] a proposé une solution générale du potentiel :

$$p(\underline{x}) = p_\infty(\underline{x}) + \frac{1}{2\pi k}\sum_j q^j(s)\frac{\underline{x}-\underline{z}^j(s)}{\left\|\underline{x}-\underline{z}^j(s)\right\|^2}.\underline{t}^j(s)ds \tag{22}$$

où $\underline{t}^j$ est le vecteur unitaire tangentiel à la fissure $\Gamma^j$ au point $\underline{z}^j(s)$.

En l'absence de $p_\infty$, l'expression (22) est identique à celle proposée par Liolios et Exadaktylos [94]. Il a été alors montré que leur solution, établie pour les fissures non intersectées, reste aussi valide pour le cas des fissures intersectées. Le remplacement de décharge $q(s)$ dans (22) par la loi de Poiseuille (5) conduit à l'équation intégrale singulière suivante dans laquelle l'inconnue est le champ de pression sur l'ensemble des fissures.

$$p(\underline{x}) = p_\infty(\underline{x}) - \frac{c}{2\pi k}\sum_j \partial_s p(s)\frac{\underline{x}-\underline{z}^j(s)}{\left\|\underline{x}-\underline{z}^j(s)\right\|^2}.\underline{t}^j(s)ds \tag{23}$$

Des méthodes de transformation ont été souvent développées afin d'étudier un problème complexe à partir d'un problème simple dans les domaines mécaniques ou physiques telles que la diffusion thermique ou chimique [36, 12, 113], l'étasticité linéaire [142, 134], etc. Des transformations linéaires présentées récemment par Pouya [136, 132] permettent d'étendre la solution de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré isotrope à celle da la matrice anisotrope. En appliquant la transformation pour le problème 2D [136], la solution générale de l'écoulement dans un milieu anisotrope, réprésenté par un tenseur de perméabilité $\boldsymbol{k}$, est obtenue comme suit :

$$p(\underline{x}) = p_\infty(\underline{x}) + \frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\sum_j \int_{\Gamma_j} q^j(s)\frac{\underline{x}-\underline{z}^j(s)}{\left\|\sqrt{\boldsymbol{k}^{-1}}.\left[\underline{x}-\underline{z}^j(s)\right]\right\|^2}.\boldsymbol{k}^{-1}.\underline{t}^j(s)\,ds \tag{24}$$

Une méthode numérique fondée sur l'équation (24) est abordée dans le chapitre suivant qui permet de modéliser l'écoulement dans un milieu poreux fissuré infini, ainsi que d'évaluer sa perméabilité effective. Par ailleurs, l'équation (24) est également un point de départ en vue d'obtenir la solution analytique d'un problème fondamental de l'écoulement dans et autour d'une seule fissure.

### 1.2.2.2 Cas d'une fissure super-conductrice

La modélisation de l'écoulement stationnaire dans et autour d'une seule fissure rectiligne Γ noyée dans un milieu poreux infini Ω caractérisé par une perméabilité isotrope $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{\delta}$ est un problème fondamental. Ce problème a été considéré et résolu dans Pouya et Ghabezloo [136] par une analyse des variables complexes. Cette section présente une résolution analytique basée sur la théorie des équations intégrales singulières afin d'obtenir une solution analytique du flux dans une fissure super-conductice dans un milieu infini.

La fissure super-conductrice de longueur $2L$ correspond à l'axe O$x_1$ et son centre est localisé à l'origine du système des coordonnées. Le milieu est prescrit par un champ lointain de pression $p_\infty(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x}$. L'équation (24) écrite pour ce problème prend la forme suivante :

$$p(x_1,x_2) = p_\infty(x_1,x_2) + \frac{1}{2\pi k}\int_{-L}^{L} q(s)\frac{s-x_1}{(x_1-s)^2+x_2^2}\,ds \tag{25}$$

La solution pour le cas général $p_\infty(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x} = A_1x_1+A_2x_2$ peut être obtenue par le principe de superposition de celles correspondant à $\underline{A}.\underline{x} = A_1x_1$ et à $\underline{A}.\underline{x} = A_2x_2$. Dans le dernier cas, l'écoulement n'est pas perturbé par la présence de la fissure et la solution de pression est $p(\underline{x})= A_2x_2$. La solution pour le cas général est déduite par l'ajout de $A_2x_2$ dans celle obtenue pour le cas $\underline{A}.\underline{x} = A_1x_1$. En introduisant les variables adimensionnelles :

$$X_1 = \frac{x_1}{L}, \quad X_2 = \frac{x_2}{L}, \quad P(X_1) = \frac{p(x_1,0)}{A_1L} \tag{26}$$

et les notations $Q(X_1) = q(s)$ définies pour $X_1 \in [-1,1]$, l'équation (25) est réécrite pour $x_2 = 0$ :

$$P(X_1) = X_1 - \frac{1}{2\pi kLA_1}\int_{-1}^{1}\frac{Q(\beta)}{\beta - X_1}\,d\beta \tag{27}$$

La symétrie de la géométrie et la condition aux limites entrainent $p(-x_1,x_2)=-p(x_1,x_2)$. De plus, la fissure est super-conductrice, c'est-à-dire la pression est constante le long de la fissure, ce qui implique $p(\underline{x})=0$ dans la fissure :

$$\forall X_1 \in [-1,1]\ ; \quad 0 = X_1 - \frac{1}{2\pi kLa}\int_{-1}^{1}\frac{Q(\beta)}{\beta - X_1}\,d\beta \tag{28}$$

Cette équation intégrale singulière et son application ont été largement étudiées dans le domaine mathématique et physique [121, 174, 57]. La résolution de cette équation par une méthode générale est décrite dans l'Annexe 1 qui donne la solution suivante :

$$\forall X_1 \in [-1,1]\ ; \quad Q(X_1) = -2kA_1L\sqrt{1-X_1^2} \tag{29}$$

ou encore,

$$\forall s \in [-L,L]\ ; \quad q(s) = -2k\sqrt{L^2-s^2}\,\underline{A}.\underline{t} \tag{30}$$

En substituant (29) dans (27), on obtient :

$$p(x_1, x_2) = A_1 L X_1 \Phi(X_1^2, X_2^2) \tag{31}$$

avec,

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\alpha_1+\alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} - (1-\alpha_1+\alpha_2)}{2\alpha_1}} \tag{32}$$

Il est intéressant de noter que la solution (31) est indépendante de la perméabilité de la matrice *k* grâce à la fissure super-conductrice. Cette solution est présentée dans Fig 7 qui montre la singularité du champ de gradiant pression au voisinage des pointes de la fissure. En considérant l'extrémité ($x_1$=*L*, $x_2$=0), la solution (31) écrite dans le système polaire ($r$,θ) centré sur ce point résulte en :

$$p(r,\theta) \simeq A_1 \sqrt{L} \sqrt{r(1+\cos\theta)} \tag{33}$$

ainsi, la vitesse radiale dans la matrice est :

$$v_r(r,\theta) = -k\,\partial p/\partial r \simeq \left(-kA_1\sqrt{L}/2\sqrt{r}\right)\sqrt{(1+\cos\theta)} \tag{34}$$

Cette expression montre que la vitesse du fluide dans la matrice est singulière en $r^{-1/2}$ autour de la pointe de la fissure, comme prévu dans le cadre théorique général par Muskhelishvili [121]. Cependant, l'intégrale du flux sortant $\underline{v}.\underline{n}$ sur un petit cercle centré à l'extrémité de la fissure donne $\simeq -kA_1 L\pi\sqrt{r}$ qui tend vers zéro avec *r*. Cela implique que la décharge dans la fissure à la pointe de la fissure disparaît. Cette propriété peut être déduite directement de la solution analytique (29).

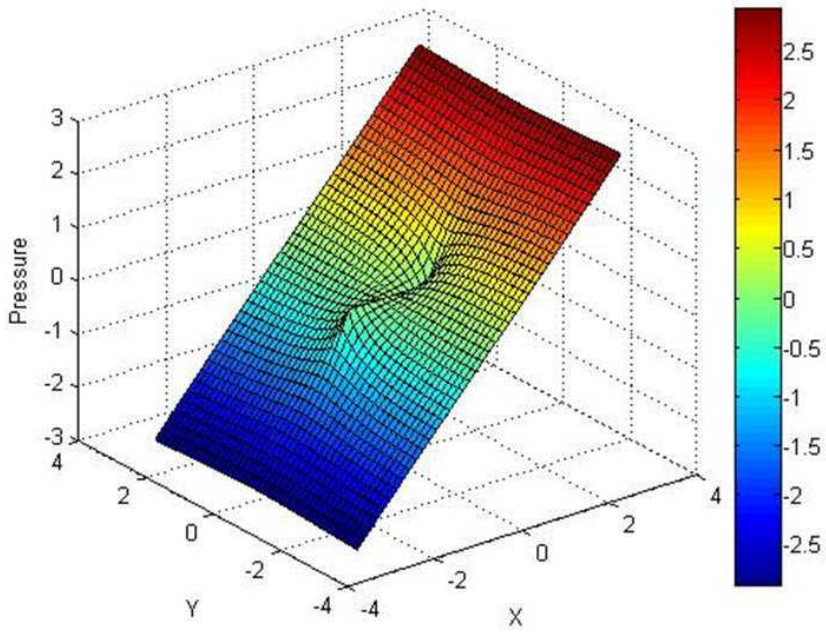



Fig 7. Champ de pression autour d'une fissure rectiligne isolée noyée dans une matrice poreuse infinie sous un gradient constant de pression imposé à l'infini parallèle à la fissure

Dans le cas général d'un champ lointain de gradient constant de pression $\underline{A}=(A_1,A_2)$, la solution complète est obtenue par l'addition simplement du terme $A_2 y$ à l'expression (31) car la fissure ne perturbe pas l'écoulement dans cette direction. Donc, la solution correspondant à $p_\infty(\underline{x})=\underline{A}.\underline{x}$ pour une fissure ayant le vecteur tangentiel $\underline{t}$ peut être réécrite sous une forme indépendante des coordonnées comme suit :

$$p(\underline{x})=\underline{A}.(\underline{x} + w\, \underline{t}) \tag{35}$$

où,

$$w = (\underline{t}.\underline{x})[\Phi(\alpha_1, \alpha_2) -1] \tag{36}$$

avec la fonction $\Phi$ exprimée dans l'équation (32);

$$\alpha_1=\frac{\left[(\underline{x}-\underline{x}_1).\underline{t}\right]^2}{L^2}, \quad \alpha_2=\frac{(\underline{x}-\underline{x}_1).(\underline{x}-\underline{x}_1)}{L^2} - \alpha_1 \tag{37}$$

et $\underline{x}_1$ le centre de la fissure dans le système global de coordonnées.

### 1.3 Problème tridimensionnel

Cette section est consacrée à rappeler les principaux résultats obtenus par Pouya [132] sur la moldélisation de l'écoulement dans milieux poreux fracturé 3D. Cette modélisation tient compte des échanges de masse entre les fractures et la matrice, de la conservation de la masse à l'intersection entre surfaces de fissures qui peuvent être d'ailleurs des surfaces courbes, et propose une solution de potentiel général pour l'écoulement. Cette solution permet d'une part de mettre en place une méthode numérique simple et efficace de modélisation de l'écoulement stationnaire dans un tel milieu, et d'autre part, la recherche de solutions analytiques pour des cas simples de fissure elliptique isolée dans une matrice infinie.

#### 1.3.1 Equations générales de l'écoulement 3D

Un domaine tridimensionnel poreux $\Omega$ avec la frontière $\partial\Omega$ comprenant un ensemble des surfaces de fissures $\Gamma$, est considéré (Fig 8). Les fissures sont numérotées selon $j$, notées $\Gamma_j$, et sont définies par les fonctions surfaciques $\underline{z}^j(\underline{s})$ : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dans lesquelles $\underline{s} = (s_1,s_2)$ représente le paramètre curviligne. $\partial\Gamma_j$ désigne la frontière de la fissure $\Gamma_j$. Plusieurs fissures peuvent se rencontrer sur une ligne d'intersection ou en un point d'intersection. La ligne d'intersection numérotée $i$ est notée par $L_i$ et $L = \cup L_i$. $S = \partial\Gamma+L$ est appelé l'ensemble des points singuliers et $\Gamma$-$S$ est alors l'ensemble des points réguliers. $\Omega$-$\Gamma$ correspond à la matrice poreuse.

L'équation constitutive (1) et la conservation de la masse (4) dans la matrice poreuse du problème plan restent valides pour le problème tridimensionnel. L'écoulement dans la fissure est modélisé par loi de Poiseuille qui exprime une relation linéaire entre le vecteur d'infiltration et le gradient de pression dans la surface de la fissure :

$$\forall \underline{s} \in \Gamma; \qquad \underline{q}(\underline{s}) = -\boldsymbol{c}(\underline{s}).\nabla_s p(\underline{s}) \tag{38}$$

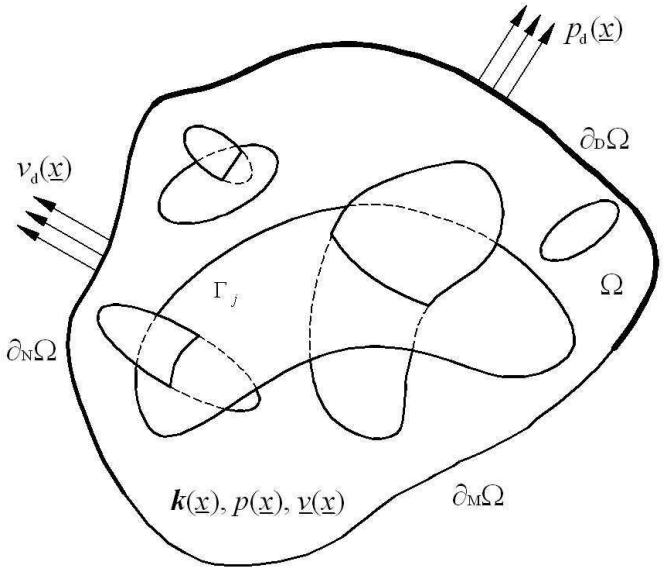



Fig 8. Domaine tridimensionnel poreux comprenant des surfaces de fissure

avec

$$\forall \underline{s} \in \Gamma; \qquad \nabla_s p = \frac{\partial p}{\partial s_1}.t_1 + \frac{\partial p}{\partial s_2}.t_2 \tag{39}$$

où $\underline{s}(s_1,s_2)$ est le paramétrage de la surface de fissure défini localement au voisinage de $\underline{z}$, avec comme système des coordonnées cartésiennes $(t_1,t_2)$ défini par $\underline{t}_\alpha = \partial\underline{z}/\partial\underline{s}_\alpha$ ($\alpha$=1,2) (Fig 9).

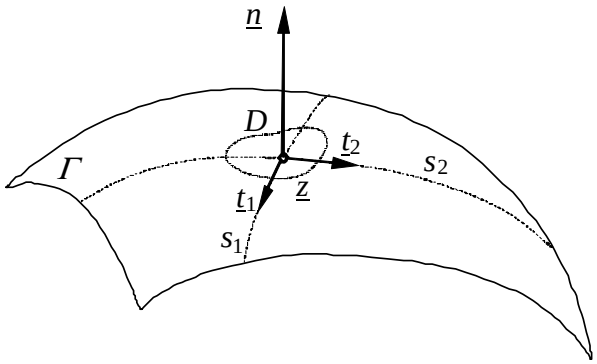



Fig 9. Système des cordonnées locales [132]

La conductivité hydraulique $\boldsymbol{c}$ est un tenseur symétrique défini positif et peut varier dans la surface de fissure à cause des propriétés physiques de la fissure. Dans le cas le plus simple d'une conductivité isotrope, le tenseur $\boldsymbol{c}$ peut être exprimé par un scalaire $c$ défini dans (6). Toutefois, la forme des aspérités sur les murs de fissure peut entraîner des conductivités différentes pour différentes directions de l'écoulement dans la fissure comme montré expérimentalement par Gentier et al. [59]. Afin d'assurer que la composante de $\underline{q}$ normale à la surface de fissure soit nulle et le fait que la perméabilité transversale est égale à zéro (résistance croisée infinie), la condition convenable concernant c s'écrit :

$$\forall \underline{s} \in \Gamma; \qquad \boldsymbol{c}^{-1}(\underline{s}).\,\underline{n}(\underline{s}) = 0 \tag{40}$$

Considérons la conservation de la masse dans un petit volume entourant le point régulier $\underline{z}$ sur une fissure ne coupant pas d'autre fissure permet d'obtenir l'expression de l'échange de masse entre la matrice et cette fissure :

$$\forall \underline{z}(\underline{s}) \in \Gamma\text{-}S; \quad \frac{\partial \rho_f(\underline{s})}{\partial t} + \rho [\![ \underline{v}(\underline{z}) ]\!] . \underline{n}(\underline{s}) + \nabla_s . \left[ \rho \underline{q}(\underline{s}) \right] = 0 \tag{41}$$

où $\nabla_s . \underline{q}$ représente la divergence surfacique de l'infiltration dans la fissure $\underline{q}$. La divergence surfacique du champ $\underline{q}$ sur la surface courbe $\Gamma_j$, définie par la fonction $\underline{z}(\underline{s})$ avec le repère naturel $\underline{t}_\alpha = \partial \underline{z} / \partial s_\alpha$ ($\alpha$=1,2), s'écrit :

$$\nabla_s . \underline{q} = \partial_\alpha q^\alpha + q^\beta C^\alpha_{\alpha\beta} \tag{42}$$

Dans cette formulation, le coefficient $C^\gamma_{\alpha\beta}$ est le symbole de Christoffel de la surface courbe $\Gamma$ représentant ses courbures.

L'échange de masse entre la matrice et les fissures peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\forall \underline{z}(\underline{s}) \in \Gamma\text{-}S; \quad \beta_f \frac{\partial p(\underline{z},t)}{\partial t} + [\![ \underline{v}(\underline{z},t) ]\!] . \underline{n}(s) + \nabla_s . \left[ \underline{q}(\underline{s},t) \right] = 0 \tag{43}$$

Cette conservation de la masse est largement utilisée dans la littérature afin de modéliser l'écoulement dans un milieu poreux fissuré [16, 115, 11, 2, 4]. Néanmoins, elle est généralement obtenue en considérant l'échange de la masse d'un petit domaine $D$ entourant $\underline{z}$. Ce domaine est localisé sur le plan tangentiel à $\Gamma$ au point $\underline{z}$ (Fig 10). La conservation de la masse est écrite pour l'échange entre le domaine $D$ et la matrice via les surfaces supérieure et inférieure $D^+$ et $D^-$ et avec la partie restante de la fissure via la frontière $\partial D$. Toutefois, $\nabla_s . \underline{q}$ est supposée être définie sur la surface plane $D$ et son expression est donnée dans l'équation (44) qui ne prend pas en compte l'effet de courbure.

$$\nabla_s . \underline{q} = \partial_\alpha q^\alpha \tag{44}$$

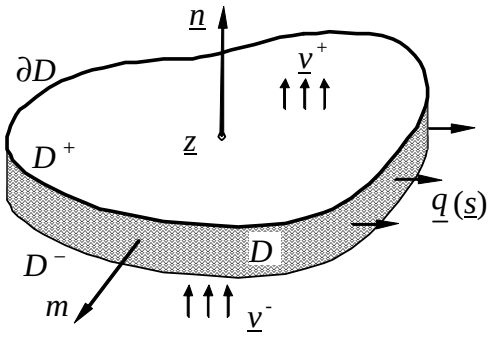


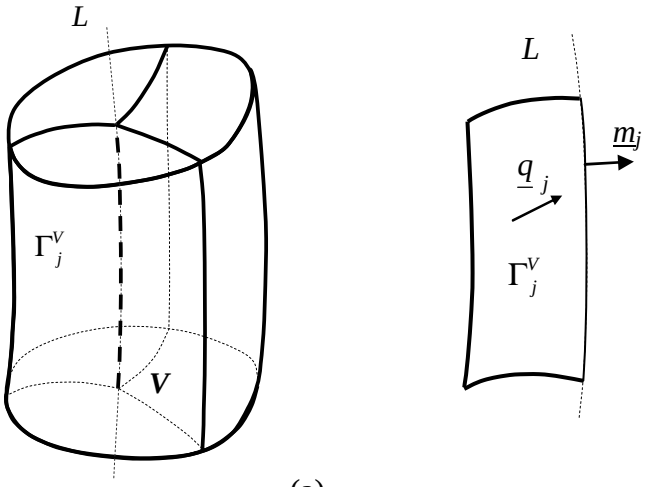

Fig 10. Contributions aux échanges de la masse du domaine $D$ [132]

En envisageant l'échange de masse dans un volume cylindrique $V$ entourant une ligne d'intersection $L$ entre plusieurs fissures $\Gamma_j$ (Fig 11a), la conservation de la masse à l'intersection entre les surfaces de fissure est gouvernée par l'expression suivante :

$$\forall \underline{z}(l) \in L; \qquad \sum_j \underline{q}_j . \underline{m}_j = 0 \tag{45}$$

où $\underline{q}_j$ est le flux dans la fissure $\Gamma_j$ et $\underline{m}_j$ est le vecteur unitaire normal de la ligne L et tangetiel à la surface considérée $\Gamma_j$ (Fig 11b).

Cette expression est similaire à celle trouvée pour le cas 2D dans (16) qui confirme encore une fois que la conservation de la masse à l'intersection de la fissure exclue l'échange de masse entre les fissures et la matrice. Une conséquence importante de cette formulation est que l'infiltration normale à la borne de la fissure disparaît ( $\underline{q}.\underline{m} = 0$ ) dans le cas où la fissure est strictement contenue dans le domaine.




(a) (b)

Fig 11. (a) Un volume de référence entoure une ligne *L* d'intersection de plusieurs fissures ; (b) Une partie de la surface de fissure $\Gamma_j$ comprise dans le volume

Les équations (17) à (20) représentent les conditions aux limites et la condition initiale pour le problème de l'écoulement transitoire dans un milieu poreux **Ω**. Dans le cas d'un corps fissuré, un type supplémentaire de condition doit s'ajouter à l'ensemble des points d'intersections entre les fissures Γ et la frontière du domaine $\partial\Omega$. Notons : $\gamma_j^B = \Gamma_j \cap \Omega$ l'ensemble des points sur lesquels la pression ou le flux sortant de la fissure doivent être spécifiés en vue de compléter les équations d'écoulement pour la modélisation numérique. En fait, lorsque la pression est prescrite sur ces lignes, ce n'est pas nécessaire de les distinguer avec $\partial_D\Omega$. Cela signifie que $\partial_D\Omega$ couvre tous les points sur $\partial\Omega$ imposés par une pression connue incluant les points localisés sur l'intersection entre les fissures et la frontière du domaine. Par contre, pour le cas où le flux $Q^g$ est imposé à l'affleurement des fissures désigné par $\partial_q\Omega$, la condition s'écrit :

$$\forall \underline{z} \in \partial_q\Omega; \qquad \underline{q}_j . \underline{m}_j = Q^g \tag{46}$$

où $\underline{q}_j$ est l'infiltration dans $\Gamma_j$ et $\underline{m}_j$ le vecteur unitaire normal à $\gamma_j^B$ et tangent à $\Gamma_j$ sortant de **Ω**. Notons que $\underline{m}_j$ peut être différent du vecteur normal $\underline{n}$ de $\partial\Omega$.

### 1.3.2 Solution générale du potentiel 3D

En considérant l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini en 3D, la solution doit satisfaire la condition aux limites (21), les équations constitutives (1), (38) et les conservations de la masse (3), (41), (45). En assimilant les fissures à une distribution des points sources, une solution générale est proposée sous la forme suivante :

$$p(\underline{x}) = p_{\infty}(\underline{x}) + \frac{1}{4\pi k}\sum_{j}\int_{\Gamma_j}\frac{\underline{q}^{j}(\underline{s}).(\underline{x}-\underline{z}^{j}(\underline{s}))}{\left\|\underline{x}-\underline{z}^{j}(\underline{s})\right\|^{3}}\,ds \tag{47}$$

Cette solution est étendue à celle d'un milieu anisotrope en utilisant la transformation linéaire, décrite dans Pouya [132] :

$$p(\underline{x}) = p_{\infty}(\underline{x}) + \frac{1}{4\pi\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\sum_{j}\int_{\Gamma_j}\frac{\underline{q}^{j}(\underline{s}).\boldsymbol{k}^{-1}.(\underline{x}-\underline{z}^{j}(\underline{s}))}{\left[\left(\underline{x}-\underline{z}^{j}(\underline{s})\right).\boldsymbol{k}^{-1}.\left(\underline{x}-\underline{z}^{j}(\underline{s})\right)\right]^{3/2}}\,ds \tag{48}$$

L'introduction de la loi de Poiseuille (38) dans (48) conduit à une équation intégrale hyper-singulière dans laquelle l'inconnue est le champ de pression sur les surfaces de fissure.

$$p(\underline{x}) = p_{\infty}(\underline{x}) - \frac{1}{4\pi\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\sum_{j}\int_{\Gamma_j}\frac{\nabla_{s}^{j}p(\underline{s}).\left[\boldsymbol{c}^{j}(\underline{s})\boldsymbol{k}^{-1}\right].\left(\underline{x}-z^{j}(\underline{s})\right)}{\left[\left(\underline{x}-z^{j}(\underline{s})\right).\boldsymbol{k}^{-1}.\left(\underline{x}-z^{j}(\underline{s})\right)\right]^{3/2}}\,ds \tag{49}$$

Ce résultat théorique présente donc l'avantage important de réduire la dimension du problème de 3D à 2D. La modélisation numérique de l'écoulement dans et autour des fissures noyées dans un milieu infini en se basant sur cette équation est abordée dans le chapitre 2. De plus, une investigation rigoureuse fondée sur cette solution générale appliquée à un disque de fissure met en évidence des résultats théoriques importants qui sont présentées dans la section suivante.

## 1.4 Problème de fissure sous forme de disque elliptique

Les aspects mécanique, hydraulique et thermique ont été largement étudiés pour le cas d'inclusions ellipsoïdales, ou d'une surface elliptique de fissure (en 2D) noyée dans un domaine infini soumis à un champ lointain. Deux grandes méthodes ont été utilisées dans la littérature afin d'établir des solutions théoriques pour ce problème: les harmoniques ellipsoïdales [161, 23, 69, 157, 152, 153] et la méthode des équations intégrales duales [164, 158]. La solution de l'écoulement stationnaire dans et autour d'une seule fissure de Poiseuille pourrait être probablement obtenue en utilisant ces deux méthodes. Cependant, l'équation (48) fournit une solution générale qui est valable pour le cas général d'un domaine poreux contenant des surfaces courbes et intersectées par des fissures. Ce résultat n'est pas accessible par la méthode de l'harmonique ellipsoïdale ni par la méthode des équations intégrales duales. Lorsque cette expression est disponible, elle est un point de départ permettant de dériver la solution analytique pour le cas d'une fissure elliptique. Elle constitue

alors une méthode plus courte et facile par rapport aux autres méthodes. Dans cette section, une solution analytique d'infiltration dans une fissure de Poiseuille est présentée. Cette solution permet une comparaison entre le modèle d'écoulement de Poiseuille dans une fissure d'épaisseur nulle et le modèle d'inclusion ellipsoïdale aplatie soumise à l'écoulement de Darcy.

### 1.4.1 Champ d'infiltration dans la fissure

Considérons un milieu poreux infini $\Omega$, contenant une seule fissure elliptique $\Gamma$, soumis à un champ lointain de gradient uniforme de pression $\underline{A}$. La perméabilité de la matrice est uniforme et isotrope $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{\delta}$. Notons $d_1$ et $d_2$ les deux demi grand axe et demi petit axe de l'ellipse, respectivement; $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ ses deux directions principales ; et $\underline{e}_3$ le vecteur unitaire normal à la surface de fissure. Un système de coordonnées locales est défini avec son origine localisée au centre de la fissure et trois axes parallèles à $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ (Fig 12). L'équation de l'ellipse s'écrit :

$$\forall \underline{x} \in \partial\Gamma \; ; \qquad \underline{x}.\boldsymbol{B}.\underline{x} = 1 \tag{50}$$

avec les notations :

$$\lambda_1 = 1/d_1^{\,2}, \quad \lambda_2 = 1/d_2^{\,2}, \quad \boldsymbol{B} = \lambda_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \tag{51}$$

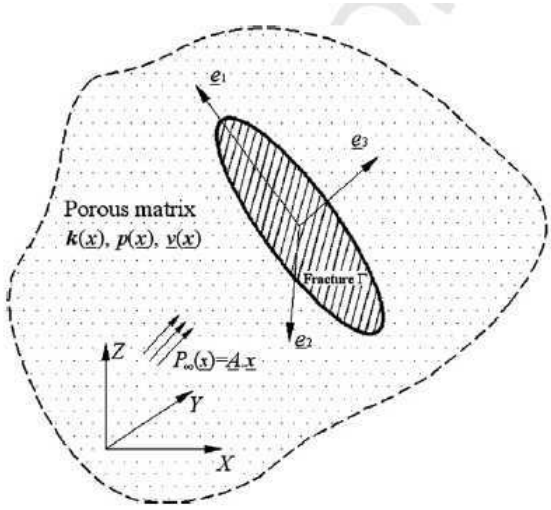



Fig 12. Milieu poreux infini contenant une fissure elliptique plat [140]

Le résultat général nécessaire pour l'homogénéisation de la perméabilité est l'intégrale de l'infiltration $\underline{q}$ sur le disque de fissure. Cette intégrale est une fonction linéaire du champ lointain $\underline{A}$ sous la forme $\boldsymbol{\Psi}.\underline{A}$, avec le tenseur $\boldsymbol{\Psi}$ fonction de $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{B}$. Le problème peut être transformé en celui d'un disque elliptique dans un milieu isotrope en utilisant la transformation présentée dans Pouya [132]. Toutefois, une méthode numérique est exigée en vue de résoudre le cas général d'une fissure ayant la conductivité finie $\boldsymbol{c}$. Le cas d'un disque super-conducteur qui sera étudié analytiquement dans la suite correspond à la limite $\boldsymbol{c}\to\infty$. L'équation (48) écrite dans le cas d'un seul disque devient :

$$p(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x} - \frac{1}{4\pi k}\int_{\Gamma} \frac{\underline{q}(\underline{\xi}).(\underline{\xi}-\underline{x})}{\left\|\underline{\xi}-\underline{x}\right\|^3} d\xi \tag{52}$$

La solution correspondant au cas général du champ lointain $\underline{A}.\underline{x}$ est obtenue par la superposition des trois solutions élémentaires correspondant à $\underline{A}$, parallèles à $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$. En particulier, la présence de la fissure ne perturbe pas l'écoulement sous le gradient $\underline{A}$ parallèle à $\underline{e}_3$. Afin d'élaborer une solution complète de l'équation (52), il est suffisant alors de déterminer la solution correspondant à $p_\infty(\underline{x}) = A_1 x_1$.

La fissure super-conductrice implique que la pression est constante dans le disque. De plus, la symétrie de configuration impose que cette constante soit égale à zéro. En désignant pour un champ $\underline{q}(\underline{\xi})$ :

$$I(\underline{q}) = \int_{\Gamma} \frac{\underline{q}(\underline{\xi}).(\underline{\xi}-\underline{x})}{\left\|\underline{\xi}-\underline{x}\right\|^3} d\xi \tag{53}$$

la solution $\underline{q}$ doit satisfaire :

$$I(\underline{q}) = 4\pi k A_1 x_1 \tag{54}$$

En nous inspirant de la solution de (29) pour le problème 2D, nous avons d'abord l'expression suivante :

$$\underline{q}^0(\underline{\xi}) = h_1\sqrt{1-\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}\;\underline{e}_1 \tag{55}$$

Nous voyons dans l'Annexe 2 que $I(\underline{q}^0)$ est une fonction linéaire de $x_1$ qui permet d'établir la solution de l'équation (54). L'expression complète de cette solution est trouvée en ayant recours à des intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce :

$$K(\lambda) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}\;,\; E(\lambda) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}\,d\theta \qquad (0 \le \lambda \le 1) \tag{56}$$

Les méthodes semi-analytiques ou numériques itératives utilisées pour calculer ces intégrales peuvent être trouvées dans le manuel mathématique [1]. Nous définissons par ailleurs :

$$\begin{cases} \phi_1(\lambda_1,\lambda_2) = \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\lambda_1\cos^2\theta}{\sqrt{\lambda_1\cos^2\theta+\lambda_2\sin^2\theta}}\,d\theta \\ \phi_2(\lambda_1,\lambda_2) = \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\lambda_2\sin^2\theta}{\sqrt{\lambda_1\cos^2\theta+\lambda_2\sin^2\theta}}\,d\theta \end{cases} \tag{57}$$

En notant ensuite $\lambda = \sqrt{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2}$, on obtient un système d'équations permettant de déterminer $\phi_1$ et $\phi_2$ en fonction de $K(\lambda)$ et $E(\lambda)$ comme suit :

$$\begin{cases} \phi_1(\lambda_1,\lambda_2) + \phi_2(\lambda_1,\lambda_2) = \dfrac{1}{d_2} E(\lambda) \\ d_1^2\ \phi_1(\lambda_1,\lambda_2) + d_2^2\ \phi_2(\lambda_1,\lambda_2) = d_2 K(\lambda) \end{cases} \tag{58}$$

Le résultat trouvé dans l'Annexe 2 montre que :

$$I = -2h_1\ \pi\ \phi_1(\lambda_1,\lambda_2)\ x_1 \tag{59}$$

De ce fait, (55) vérifie (54) avec $h_1 = \dfrac{-2k}{\phi_1} A_1$ et alors :

$$\underline{q}^0(\underline{\xi}) = -\frac{2k}{\phi_1} A_1 \sqrt{1 - \underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}\ \underline{e}_1 \tag{60}$$

Selon cette expression, l'infiltration dans la fissure est parallèle au champ lointain comme trouvé dans le cas d'inclusion ellipsoïdale de Darcy. Toutefois, $\underline{q}^0$ n'est pas la solution attendue pour le problème physique. Mathématiquement, il faut noter que la solution de l'équation (54) n'est pas unique. En supposant que le vecteur $\underline{\omega}(\underline{\xi})$ satisfait $\underline{\nabla}.\underline{\omega} = 0$ dans le disque et $\underline{\omega}.\underline{n} = 0$ sur la borne du disque, avec $\underline{n}$ le vecteur unitaire normal sortant de la borne considérée, nous trouvons :

$$\begin{aligned} I(\underline{\omega}) = -\int_{\Gamma} \underline{\omega}(\underline{\xi}).\underline{\nabla}\left(\left\|\underline{\xi} - \underline{x}\right\|^{-1}\right) d\xi = \\ -\int_{\partial\Gamma} \left\|\underline{\xi} - \underline{x}\right\|^{-1} \underline{\omega}(\underline{\xi}).\underline{n}\ ds + \int_{\Gamma} \left\|\underline{\xi} - \underline{x}\right\|^{-1} \underline{\nabla}.\underline{\omega}\ d\xi = 0 \end{aligned} \tag{61}$$

En conséquence, $\underline{q} = \underline{q}^0 + \underline{\omega}$ satisfait également (54). Cette dégénérescence peut être éliminée si l'on suppose que la fissure super-conductrice est le cas limite d'une fissure ayant la conductivité $\boldsymbol{c} = \sigma \boldsymbol{c}_0$, où $c_0$ = cte et $\sigma \to \infty$. Cela implique que $\boldsymbol{c}_0^{-1}\underline{q}$ doit être un gradient et doit vérifier la condition de symétrie des dérivées croisées. Cette condition permet de déterminer la solution unique $\underline{q}$ ayant une signification physique. Il peut être vérifié que $\underline{q}^0$ donné par (60) n'est pas un gradient. La partie supplémentaire $\underline{\omega}(\underline{\xi})$ devrait être ajoutée à $\underline{q}^0$ pour qu'il soit un gradient. La solution physique de l'équation (54) s'écrit alors :

$$\underline{q}(\underline{\xi}) = \underline{q}^0(\underline{\xi}) + \underline{\omega}(\underline{\xi}) \tag{62}$$

Dans laquelle, $\underline{\omega}(\underline{\xi})$ remplit les conditions suivantes :

$\forall \underline{\xi} \in \Gamma$ ; $\quad \underline{\nabla}.\underline{\omega} = 0$ (63)

$\forall \underline{\xi} \in \partial\Gamma$; $\quad \underline{\omega}.\underline{n} = 0$ (64)

$\forall \underline{\xi} \in \Gamma$; $\quad \partial_1(q^0{}_2 + \omega_2) = \partial_2(q^0{}_1 + \omega_1)$ (65)

La dernière condition assure que $\underline{q}$ soit un champ de gradient. L'équation (63) est vérifiée mathématiquement si on prend :

$$\omega_1 = \partial_2\varphi, \quad \omega_2 = -\partial_1\varphi \tag{66}$$

avec $\varphi$ une fonction arbitraire. La condition (65) donne ensuite :

$$\Delta_s\varphi = \frac{2kA_1}{\phi_1}\partial_2\sqrt{1-\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}} \tag{67}$$

où $\Delta_s\varphi = \left(\partial_1^2 + \partial_2^2\right)\varphi$

En injectant (66) dans (64) et après réarrangement des termes, on trouve :

$$\forall\underline{\xi}\in\partial\Gamma; \qquad \nabla\varphi.\underline{t} = 0 \tag{68}$$

où $\underline{t}$ le vecteur unitaire tangent à la borne de la fissure $\partial\Gamma$. Cette équation implique que $\varphi$ est constant sur $\partial\Gamma$ tel que :

$$\forall\underline{\xi}\in\partial\Gamma; \qquad \varphi = \varphi_0 \tag{69}$$

La solution de l'équation de Poisson (67) définie sur le disque elliptique est unique pour la condition aux limites de type Dirichlet, particulièrement pour la condition (69). De plus, la constante $\varphi_0$ peut prendre la valeur zéro parce que l'ajout d'une valeur constante à $\varphi$ ne change pas la solution $\underline{\omega}$. L'équation (67) avec la condition $\varphi = 0$ sur la borne peut être résolue numériquement dans le cas général et analytiquement dans quelques cas particuliers.

**Cas 1** : *Limite de disque elliptique infiniment long*

Considérons le cas limite d'un disque elliptique avec une extension infinie dans la direction 2. En maintenant constant le diamètre $d_1$ et faisant tendre $d_2$ vers l'infinie, on obtient au cas limite une bande de largeur $2d_1$ dans la plan ($x_1$, $x_2$) parallèle à la direction $x_2$. En appliquant un champ lointain de gradient de pression $\underline{A} = (A_1,0)$, le problème 3D équivaut à celui en 2D avec une fissure rectiligne de longueur $2d_1$ dans le plan ($\underline{x}_1$,$\underline{x}_2$) et parallèle à $x_1$.

En faisant $d_2\to\infty$ et $\lambda_2 = 0$ dans (60), on trouve $\underline{q}^0(\underline{\xi}) = -2k\sqrt{d_1^2 - \xi_1^2}\ A_1\underline{e}_1$ qui est un champ de gradient et alors $\underline{\omega} = 0$. Cette solution est exactement ce qui a été trouvée pour le cas 2D donné par la formulation (29).

**Cas 2** : *Fissure circulaire du rayon R*

Dans ce cas, $d_1 = d_2 = R$, on trouve $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{4R}$ et $\underline{q}^0(\underline{\xi}) = \frac{8kA_1}{\pi}\sqrt{R^2 - r^2}\,\underline{e}_1$ avec $r^2 = \underline{\xi}.\underline{\xi}$.

En vue d'établir la forme de la partie supplémentaire $\underline{\omega}$, son expression est proposée sous la forme suivante :

$$\varphi(\underline{\xi}) = \chi(\underline{\xi}) + \partial_2\zeta(r) \tag{70}$$

avec,

$$\Delta_s \zeta = -\frac{8kA_1}{\pi}\sqrt{R^2 - r^2} \tag{71}$$

$\chi$ doit satisfaire alors $\Delta\chi$ =0. La solution de (71) s'écrit :

$$\begin{aligned}\zeta(r) = -\frac{8kA_1}{\pi}\Bigg[ &-\frac{1}{3}R^2\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{1}{6}R^3 Ln\frac{R - \sqrt{R^2 - r^2}}{R + \sqrt{R^2 - r^2}} \\ &-\frac{1}{9}\left(R^2 - r^2\right)^{3/2} + C_1 Lnr + C_2\Bigg]\end{aligned} \tag{72}$$

où $C_1$, $C_2$ sont deux constants arbitraires.

On déduit ensuite :

$$\partial_2 \zeta = -\frac{8kA_1}{\pi}\frac{\xi_2}{r^2}\left[\frac{1}{3}\left(R^2 - r^2\right)^{3/2} - C_1\right] \tag{73}$$

En injectant (73) dans (70) et en considérant la condition $\varphi(R)$=0, on trouve $\chi(\underline{\xi}) = -C_1\frac{8kA_1}{\pi}\frac{\xi_2}{R^2}$. Ainsi, la solution $\varphi$ est :

$$\varphi = -\frac{8kA_1}{\pi}\frac{\xi_2}{r^2}\left[\frac{1}{3}\left(R^2 - r^2\right)^{3/2} - C_1\right] - C_1\frac{8kA_1}{\pi}\frac{\xi_2}{R^2} \tag{74}$$

La condition pour déterminer la constante $C_1$ est que $\underline{q}$ doit être fini dans la fissure ou que $\varphi$ n'est pas singulière quand $r \to 0$, ce qui impose $C_1 = \frac{R^3}{3}$. Substituons (74) dans (66) afin de trouver la formulation analytique de la partie supplémentaire $\underline{\omega}$. La solution d'infiltration dans un disque circulaire sous un gradient parallèle à $\underline{e}_1$ imposé à l'infini est dérivée ensuite comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{q}(\underline{\xi}) = &-\frac{8kA_1}{\pi}\left[\frac{\xi_1^2}{r^2}\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{3r^4}\left(R^3 - \left(\sqrt{R^2 - r^2}\right)^3\right) + \frac{R}{3}\right]\underline{e}_1 \\ &-\frac{8kA_1}{\pi}\left[-\frac{2\xi_1\xi_2}{3r^4}\left(R^3 - \left(\sqrt{R^2 - r^2}\right)^3\right) + \frac{\xi_1\xi_2}{r^2}\left(R^2 - r^2\right)^{1/2}\right]\underline{e}_2\end{aligned} \tag{75}$$

Les deux composantes de $\underline{q}$, $\underline{q}_1(\underline{\xi})$ parallèles au champ lointain et $\underline{q}_2(\underline{\xi})$ normal à ce gradient, sont présentées dans Fig 13 pour $A_1$ = 1 et $k$ = 1.

La solution élémentaire correspondet au cas $\underline{A}$ = (0,$A_2$) est obtenue à partir la formulation (75) en changeant l'indice 1↔2. En introduisant les notations :

$$r = \sqrt{\underline{\xi}.\underline{\xi}}, \qquad \hat{\underline{\xi}} = \frac{1}{r}\underline{\xi}, \qquad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{\delta} - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \tag{76}$$

la solution générale obtenue pour un gradient $\underline{A}$ est mise sous la forme suivante :

$$\underline{q}(\underline{\xi}) = \frac{-8k}{3\pi r^2}\left\{\left(Rr^2 - R^3 + \sqrt{R^2 - r^2}^{\,3}\right)\boldsymbol{\delta} + \left(3r^2\sqrt{R^2 - r^2} + 2R^3 - 2\sqrt{R^2 - r^2}^{\,3}\right)\left(\hat{\underline{\xi}} \otimes \hat{\underline{\xi}}\right)\right\}\mathbf{T}\underline{A} \tag{77}$$

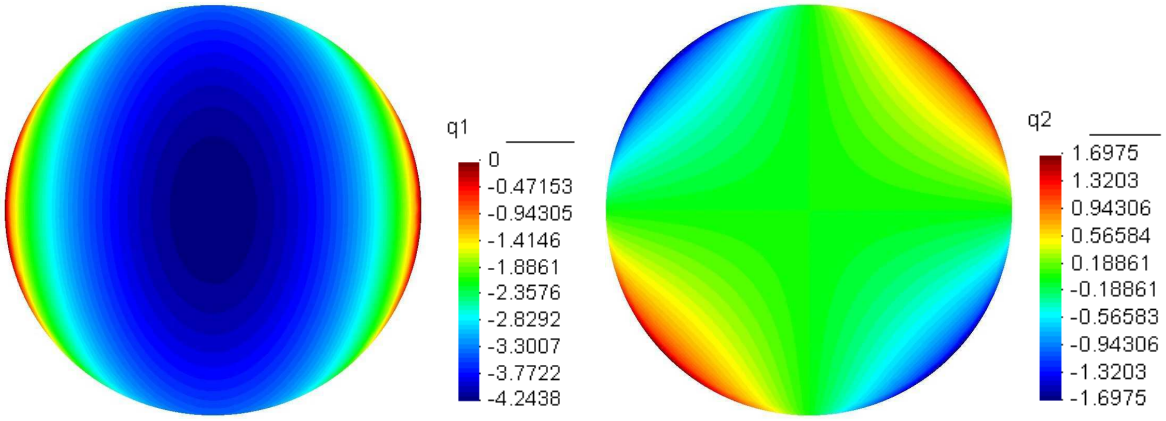



Fig 13. Solution analytique de l'infiltration $\underline{q}(q_1,q_2)$ dans la fissure circulaire du rayon $R$=1 noyée dans une matrice isotrope $k$=1 sous un gradient constant de pression $\underline{A}$ = (1,0) imposé à l'infini [140]

### 1.4.2 Champ de pression dans la matrice

La solution de l'infiltration (77) permet de déterminer le champ de pression autour du disque circulaire par l'équation (52). Toutefois, la décomposition $\underline{q}$ par $\underline{q}^0$ et $\underline{\omega}$ dans (62) nous aide à établir la solution de pression dans la matrice et l'intégrale du flux sur la fissure pour le cas plus général d'un disque elliptique. L'expression générale de $\underline{q}^0$ pour un gradient lointain $\underline{A}$ est obtenue par la superposition de deux solutions élémentaires correspondant à $\underline{A} = \underline{A}_1\underline{e}_1$ et à $\underline{A} = \underline{A}_2\underline{e}_2$ :

$$\underline{q}^0(\underline{\xi}) = -2k\sqrt{1 - \underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}\;\boldsymbol{\Phi}.\underline{A} \tag{78}$$

avec,

$$\boldsymbol{\Phi} = (\phi_1)^{-1}\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + (\phi_2)^{-1}\,\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \tag{79}$$

Selon (52) et (62), on trouve :

$$p(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x} - \frac{1}{4\pi k}\int_\Gamma \frac{\left[\underline{q}^0(\underline{\xi}) + \underline{\omega}(\underline{\xi})\right].(\underline{\xi} - \underline{x})}{\left\|\underline{\xi} - \underline{x}\right\|^3} d\xi \tag{80}$$

Par ailleurs, le développement (61) indique que la contribution de $\underline{\omega}$ dans l'intégrale du côté droit de (80) disparaît. En injectant (78) dans (80), on obtient :

$$p(\underline{x}) = \left(\underline{x} - \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\Phi}.\int_\Gamma \frac{\sqrt{1 - \underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}}{\left\|\underline{\xi} - \underline{x}\right\|^3}(\underline{\xi} - \underline{x})\, d\xi\right).\underline{A} \tag{81}$$

Le champ de pression donné de cette façon est une fonction intégrale explicite des paramètres géométriques du disque représentée par le tenseur $\boldsymbol{B}$. Similaire au cas 2D, cette solution de pression est indépendante de la perméabilité de la matrice $k$. L'équation (81) fournit directement le champ de pression en utilisant un calcul d'intégrale numérique. En particulier, une expression explicite peut être obtenue pour le cas d'un disque circulaire ($\boldsymbol{B} = R^{-2}\,\boldsymbol{T}$) et pour un point situé sur le plan contenant la fissure, i.e $x_3 = 0$. Le développement, présenté dans l'Annexe 4, montre que :

$$\int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1-\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}}{\left\|\underline{\xi}-\underline{x}\right\|^3}(\underline{\xi}-\underline{x})\,d\underline{\xi} = \frac{\pi}{2R}\left(\psi-\sin\psi\right)\underline{x} \tag{82}$$

où, $\psi$ le diamètre angulaire du disque à partir du point $\underline{x}$ (voir Fig 78).

Grâce à la fissure super-conductrice, $p(\underline{x}) = 0$ si $\underline{x}$ est dans le disque. Par ailleurs, $\boldsymbol{\Phi} = (4R/\pi)\boldsymbol{T}$ et la pression $p$ pour un point extérieur du disque s'écrit :

$$\underline{x}.\underline{e}_3 = 0\ ; \qquad p(\underline{x}) = \left[1-\frac{1}{\pi}\left(\psi-\sin\psi\right)\right]\underline{A}.\underline{x} \tag{83}$$

Il peut être vérifié que quand $\underline{x} \to \infty$, donc $\psi \to 0$, on obtient $p(\underline{x}) \to \underline{A}.\underline{x}$. Le champ lointain de pression est retrouvé de cette façon. Ainsi, quand $\underline{x}$ est situé sur la borne du disque $\psi = \pi/2$, on trouve $p(\underline{x}) = 0$, la pression dans le disque super-conducteur. Fig 14 donne la variation de pression dans le plan contenant un seul disque de fissure super-conductrice sous le gradient de pression $\underline{A}$=(1,0,0) appliqué à l'infini.

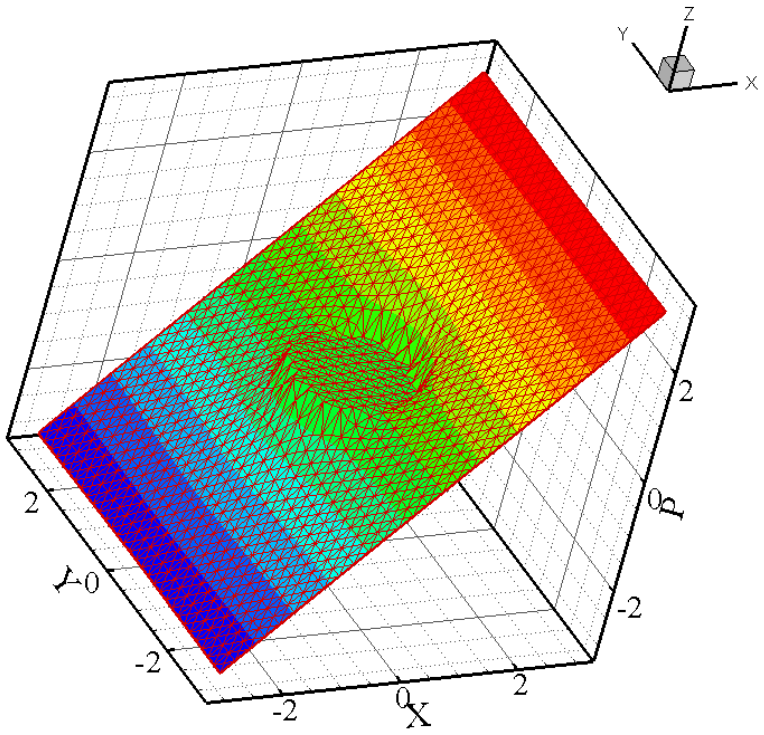



Fig 14. Champ de pression autour d'un disque super-conducteur noyé dans une matrice infinie sous le champ lointain d'un gradient de pression parallèle à l'axe $\underline{x}_1$ [140]

### 1.4.3 Extension au milieu anisotrope

Cette sous-section est consacrée à l'extension de la solution d'infiltration dans la fissure (78) et de la solution de pression autour de la fissure (81) au milieu anisotrope ayant le tenseur de la perméabilité $\boldsymbol{k}$. Prenons la transformation présentée dans Pouya [139] avec $\boldsymbol{M} = \sqrt{\boldsymbol{k}^{-1}}$ et $\zeta = 1$. Dans le problème transformé, le domaine isotrope $\tilde{\Omega}$ est représenté par la perméabilité unitaire $\tilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\delta}$. L'équation décrivant la fissure $\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi} = 1$ est équivalent à $\underline{\tilde{\xi}}.\boldsymbol{M}^{-1,\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}^{-1}.\underline{\tilde{\xi}} = 1$ ou $\underline{\tilde{\xi}}.\tilde{\boldsymbol{B}}.\underline{\tilde{\xi}} = 1$, avec :

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \sqrt{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{B}\sqrt{\boldsymbol{k}} \tag{84}$$

Le tenseur $\tilde{\boldsymbol{B}}$ définit la géométrie de la fissure dans le problème transformé. En vue de déterminer le demi grand axe et le demi petit axe $\tilde{d}_1$, $\tilde{d}_2$ et les deux directions principales $\underline{\tilde{e}}_1$, $\underline{\tilde{e}}_2$ de ce tenseur, $\tilde{\boldsymbol{B}}$ est mis sous la forme suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\lambda}_1\underline{\tilde{e}}_1 \otimes \underline{\tilde{e}}_1 + \tilde{\lambda}_2\underline{\tilde{e}}_2 \otimes \underline{\tilde{e}}_2 \tag{85}$$

Et ensuite, l'expression du tenseur $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ devient :

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = (\tilde{\phi}_1)^{-1}\,\underline{\tilde{e}}_1 \otimes \underline{\tilde{e}}_1 + (\tilde{\phi}_2)^{-1}\,\underline{\tilde{e}}_2 \otimes \underline{\tilde{e}}_2 \tag{86}$$

avec, $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_2$ pouvant être déduits de $\tilde{d}_1$, $\tilde{d}_2$ par l'équation (51) ; et $\tilde{\phi}_1$ et $\tilde{\phi}_2$ par l'équation (57). Toutefois, si on ne prend qu'en considération le flux dans la fissure (78), le champ de pression dans la matrice (81) et éventuellement la perméabilité équivalente, il est plus facile d'exprimer directement $\boldsymbol{\Phi}$ en fonction de $\boldsymbol{B}$ (voir l'Annexe 5) comme suit :

$$\boldsymbol{\Phi} = f\boldsymbol{\delta} + g\boldsymbol{B} \tag{87}$$

où, $f$ et $g$ sont deux fonctions scalaires de $B = \boldsymbol{B}:\boldsymbol{\delta}$ et $\beta = |\boldsymbol{B}|$.

De ce fait, la transformation de pression donne $\tilde{p}(\underline{\tilde{x}}) = p(\underline{x})$ ou $\underline{\tilde{A}}.\underline{\tilde{x}} = \underline{A}.\underline{x}$ à l'infini. Donc, $\underline{\tilde{A}} = \sqrt{\boldsymbol{k}}.\underline{A}$. L'infiltration $\underline{\tilde{q}}^{\,0}(\underline{\tilde{\xi}})$ dans le problème transformé est donnée par l'équation (78) :

$$\underline{\tilde{q}}^{\,0}(\underline{\tilde{\xi}}) = -2\tilde{k}\sqrt{1-\underline{\tilde{\xi}}.\tilde{\boldsymbol{B}}.\underline{\tilde{\xi}}}\;\tilde{\boldsymbol{\Phi}}.\underline{\tilde{\mathrm{A}}} \tag{88}$$

avec $\tilde{k} = 1$ et

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = f(\tilde{B},\tilde{\beta})\boldsymbol{\delta} + g(\tilde{B},\tilde{\beta})\tilde{\boldsymbol{B}} \tag{89}$$

Dans cette relation, $\tilde{\boldsymbol{B}}$ est exprimée par l'équation (84) ; $\tilde{B} = \tilde{\boldsymbol{B}}:\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{k} : \boldsymbol{B}$ et $\tilde{B} = \tilde{\boldsymbol{B}}:\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{k} : \boldsymbol{B}$.

La règle de transformation pour le vecteur d'infiltration se déduit :

$$\underline{\tilde{q}}^{0} = \frac{1}{\sqrt{\underline{n}.\boldsymbol{k}.\underline{n}}}\sqrt{\boldsymbol{k}^{-1}}.\underline{q}^{0} \tag{90}$$

En injectant (88) dans (90), il en résulte:

$$\underline{q}^{0}(\underline{\xi}) = -2\sqrt{\underline{n}.\mathrm{k}.\underline{n}}\sqrt{1-\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}\sqrt{\mathbf{k}}\;\tilde{\boldsymbol{\Phi}}.\sqrt{\mathbf{k}}\,\underline{A} \tag{91}$$

De cette façon, le flux $\underline{q}^{0}(\underline{\xi})$ est formulé explicitement pour une fissure elliptique arbitraire dans une matrice anisotrope de la perméabilité $\boldsymbol{k}$. Le champ de pression s'obtient :

$$p(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x} + \frac{1}{4\pi\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\int_{D}\frac{q^{0}(\underline{\xi}).\boldsymbol{k}^{-1}(\underline{\xi}-\underline{x})}{\left\|(\underline{\xi}-\underline{x}).\boldsymbol{k}^{-1}.(\underline{\xi}-\underline{x})\right\|^{3/2}}d\xi \tag{92}$$

### 1.4.4 Comparaison entre la fissure de Poiseuille et l'inclusion de Darcy

La fissure a été parfois considérée comme le cas limite d'une inclusion avec un facteur de forme (rapport entre l'épaisseur et le diamètre) tendant vers zéro. Toutefois, une étude approfondie a montré que cette similarité n'est que partielle, ne vaut que pour certains résultats et dans certains cas. Ceratines différences importantes entre les deux modèles, la fissure de Poiseille et le cas limite de l'inclusion ellipsoïdale applatie avec la la de Darcy, n'ont pas été soulignées dans la littérature.

Afin de montrer ces différences, une inclusion ellipsoïdale $\Omega^{*}$ est considérée avec les semi-diamètres $d_1 = d_2 = d$, $d_3 << d$ et l'axe de révolution pris comme troisième axe du système local des coordonnées (Fig 15). L'inclusion a la perméabilité isotrope $k^{*}$ noyée dans une matrice isotrope de référence $\Omega$ ayant la perméabilité $k$ soumis au champ lointain de gradient de pression $\underline{A}$. Le champ de vitesse dans l'inclusion, $\underline{v}$ se trouve être uniforme avec sa formulation donnée dans Shafiro et Kachanov [161]. La contribution de l'inclusion à la perméabilité effective est déterminée par l'intégrale de la vitesse dans l'inclusion qui est une fonction linéaire du gradient $\underline{A}$ :

$$\underline{Q} = \int_{\Omega^{*}}\underline{v}(\underline{\xi})d\xi = -\boldsymbol{\Psi}.\underline{A} \tag{93}$$

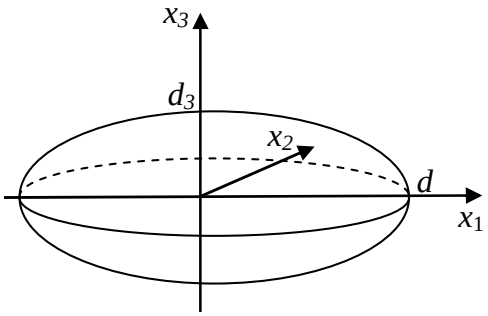



Fig 15. Inclusion ellipsoïdale de Darcy [140]

Selon Shafiro et Kachanov [161], pour des valeurs arbitraires $\varepsilon = d_3/d$ et $k^{*}$ :

$$\boldsymbol{\Psi} = \frac{\Omega^*}{\Omega}(k^* - k)\left\{\left[1 + \frac{k^* - k}{k}\frac{\pi\varepsilon}{4}\right]^{-1}(\boldsymbol{\delta} - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) + \left[1 + \frac{k^* - k}{k}\left(1 - \frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\right]^{-1}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3\right\} \tag{94}$$

En envisageant le cas limite de l'inclusion aplatie super-conductrice ($\varepsilon = d_3/d \to 0$ et $k^* \to \infty$), Shafiro et Kachanov [161] ont proposé l'expression suivante pour $\boldsymbol{\Psi}$ :

$$\boldsymbol{\Psi} = \frac{16}{3}\rho R^3 k(\boldsymbol{\delta} - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{95}$$

où $\rho$ est la densité des inclusions. Toutefois, on peut montrer que la limite n'est pas unique et dépend de la valeur $\varepsilon k^*$ qui dégénère lorsque $\varepsilon \to 0$ et $k^* \to \infty$. Supposons que $k^* = bk/\varepsilon$, avec $b$ une valeur fixe ; $\varepsilon k^* = bk$ reste alors constant quand $\varepsilon \to 0$ et $k^* \to \infty$. L'expression (95) se réduit dans ce cas à :

$$\boldsymbol{\Psi} = \frac{16}{3}\rho R^3 k \frac{b}{b + (4/\pi)}(\boldsymbol{\delta} - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{96}$$

L'expression (95) correspond à la limite lorsque $b \to \infty$. Notons $\underline{v}^m$ la vitesse dans la matrice à la frontière de l'inclusion et $\underline{v}^i$ celle dans l'inclusion. La vitesse est constante dans l'inclusion et $\underline{v}^i = v\underline{e}_1$ dans le cas $\underline{A}$ parallèle à $\underline{e}_1$. A la frontière de l'inclusion ellipsoïdale, nous avons $\underline{v}^m.\underline{n} = \underline{v}^i.\underline{n} = vn_1$, avec $\underline{n}(n_1,n_2,n_3)$ le vecteur unitaire normal sortant de $\partial\Omega^*$ et $n_1 = \dfrac{\varepsilon x_1}{\sqrt{d^2 - r^2(1-\varepsilon^2)}}$. La valeur constante de la vitesse dans la fissure $v$ pour les petites valeurs de $\varepsilon = d_3/d$ peut être déduite de l'expression de $\boldsymbol{\Psi}$ (94). L'approximation au premier ordre de $v$ vis-à-vis $\varepsilon$ s'écrit :

$$v = -\frac{k^* - k}{1 + \frac{\pi\varepsilon}{4}\frac{k^* - k}{k}} \tag{97}$$

Le vecteur de l'infiltration passant une section de l'inclusion ellipsoïdale est calculé par l'équation (7) $q = 2ev$ dans laquelle l'épaisseur $e = \varepsilon\sqrt{d^2 - r^2}$ et $v$ est constant. La limite de $q$ quand $\varepsilon \to 0$ est trouvée comme suit :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} q = -\frac{8kc}{\pi c + 8dk}\sqrt{d^2 - r^2} \tag{98}$$

où $c = 2d_3k^*$. Dans le cas limite $c \to \infty$, l'expression (98) donne une solution différente de celle de (77) pour une fissure elliptique de Poiseuille et donne seulement l'expression de la partie $\underline{q}^0$ dans la formulation (55) pour un disque circulaire ($\phi_1 = \pi/4d$). L'expression du flux dans une

fissure super-conductrice de Poiseuille est celle obtenue pour l'inclusion ellipsoïdale de Darcy en ajoutant la partie supplémentaire $\underline{\omega}$.

Nous pouvons vérifier également que la solution (98) ne satisfait pas l'équation (52). On conclut alors que la solution de l'écoulement de Poiseuille dans une fissure elliptique ne peut pas être déduite par le cas limite de l'inclusion ellipsoïdale aplatie soumise à l'écoulement de Darcy. Il implique que la pression dans la matrice et dans l'inclusion est différente pour ces deux modèles. Seulement dans le cas d'une fissure super-conductrice, la pression et l'intégrale de l'infiltration sont similaires pour ces deux problèmes grâce à la pression qui est constante et $\boldsymbol{\Psi}$ qui ne dépend que de $\underline{q}^0$ pour la fissure de Poiseuille.

En théorie de l'élasticité, une grande quantité des travaux a été consacrée à étudier la propriété d'un corps infini contenant une fissure sous la condition d'un champ lointain [164, 69, 152, 153, 30, 73, 84]. La fissure est considérée comme une surface remplie par un matériau avec une raideur nulle. Ces travaux ont montré que la solution de ce problème peut être obtenue par le cas limite d'une inclusion ellipsoïdale aplatie avec une rigidité nulle (cavité ellipsoïdale). Toutefois, le cas où la rigidité de l'inclusion n'est pas nulle, et même tends vers l'infinie en même temps que son épaisseur tends vers zéro n'a pas étudié, à notre connaissance, dans la littérature. Par analogie dans notre problème de diffusion hydraulique, la rigidité élastique est remplacée par la perméabilité avec la loi de Darcy. Cependant, l'écoulement dans la surface de fissure est souvent modélisé par la loi de Poiseuille. La première loi établit la relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression ; tandis que la deuxième établit la linéarité entre le gradient de pression et le vecteur d'infiltration qui est l'intégrale de la vitesse sur l'épaisseur de la fissure. Très fréquemment, il a été supposé, du moins implicitement dans l'étude de la perméabilité effective des milieux poreux fissurés, que la fissure elliptique de Poiseuille est obtenue comme cas limite de l'inclusion ellipsoïdale aplatie de Darcy quand son épaisseur tend vers zéro et sa permeabilité vers l'infinie. Cette idée est basée probablement sur l'analogie rigoureuse dans le cas d'une fissure ou d'une cavité avec une rigidité nulle en élasticité linéaire ou avec une perméabilité infinie dans les problèmes d'écoulement. Nous avons montré dans cette section que ce résultat n'est pas toujours vrai : la solution décrivant le cas d'une fissure elliptique de Poiseuille est différente de celle obtenue comme cas limite d'une inclusion ellipsoïdale aplatie de Darcy.

## 1.5 Conclusion

Un système complet d'équations gouvernant l'écoulement transitoire dans un milieu poreux fissuré a été rappelé dans ce chapitre, dans lequel la conservation de la masse en un point régulier sur une fissure ou à l'intersection entre plusieurs fissures a été formulée explicitement. Le résultat important est le fait que l'échange de masse en un point sur l'intersection est indépendant des échanges entre les fissures et la matrice et se formule par la même expression que pour un réseau de fissures dans un milieu imperméable.

En assimilant les fissures à une répartition de points sources, une solution générale du potentielle a été proposée pour le cas 2D et 3D sous la forme d'une équation intégrale singulière pour l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini soumis à un

champ lointain (gradient constant). Dans cette solution, le champ de pression dans la matrice est une fonction de l'infiltration dans les fissures qui permet la réduction de la dimension du problème numérique. Il est intéressant de noter que la solution générale inclut la conservation de la masse à l'intersection entre les fissures. Il n'y a pas alors de condition suplémentaire à introduire dans la modélisation numérique.

La solution générale du potentiel écrite dans le cas d'une fissure isolée permet d'établir la solution analytique d'infiltration dans la fissure super-conductrice de Poiseuille. Cette expression montre que l'infiltration varie en $r^{1/2}$ (depuis la pointe de la fissure en 2D ou du bord de la surface de fissure en 3D, avec $r$ la distance à l'extrémité de fissure). Cette solution de référence sera utilisée pour valider la méthode numérique exposée dans le chapitre 3. En particulier, la solution analytique d'infiltration sur une fissure circulaire en 3D permet une comparaison avec le modèle de l'inclusion ellipsoïdale de Darcy. La fissure a été modélisée souvent par l'inclusion ellipsoïdale aplatie obéissant à la loi de Darcy. La question s'est posée alors de savoir si ce modèle peut représenter ainsi une fissure d'épaisseur nulle soumise à un écoulement de Poiseuille. Nous avons montré que l'équivalence entre ces deux modèles n'est pas valable dans le cas général. Seuls quelques résultats partiels dans le cas limite de la fissure super-conductrice sont équivalents. En général, la fissure ayant une conductivité finie, le gradient de pression est donc constant dans l'inclusion ellipsoïdale mais pas dans la fissure de Poiseuille. Ce résultat change fondamentalement la vision que nous pouvons avoir de l'écoulement dans une fissure de Poiseuille du celui obtenu comme cas limite de l'inclusion ellipsoïdale aplatie de Darcy.

La solution du problème fondamental de l'écoulement stationnaire dans et autour d'une fissure isolée est un point essentiel pour estimer la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré. La discussion sur ces points sera abordée en détail dans le chapitre 3.

# Chapitre 2 . Modélisation numérique de l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini

## 2.1 Introduction

Pendant les deux dernières décennies, l'écoulement des fluides et le transport des matières dans des milieux poreux fissurés ou des massif rocheux fracturés ont été intensivement étudiés en raison des exigences des applications industrielles importantes telles que : le stockage des déchets radioactifs, le stockage géologique du $CO_2$, les réservoirs pétroliers, la géothermie, etc. Toutefois, la détermination de la perméabilité effective de la formation géologique fracturée est encore l'un des défis auxquels sont confrontés les géomécaniciens et les géotechniciens. L'approche continue classique consiste à considérer un milieu hétérogène ou fissuré comme un milieu homogène équivalent avec des propriétés macroscopiques obtenues par des essais in-situ ou en laboratoire. Le modèle de réseau de fractures discrets (Discrete Fracture Network, DFN) est une approche puissante pour simuler l'écoulement dans des réservoirs naturels fracturés [31, 14, 86, 53, 46, 50, 58, 98, 126, 175, 17, 18]. Le DFN a été introduit dans plusieurs logiciels commerciaux tels que UDEC (Itasca) [85] et Fraca [13]. Dans ces travaux, l'écoulement est considéré unidimensionnel dans le réseau des fissures dans lesquelles des canaux 1D sont créés sur la surface des fissures dans le cas 3D [182]. D'autres travaux ont été consacrés à résoudre les équations d'écoulement plan (2D) dans le réseau des fissures 3D [91, 116, 117, 118, 77, 119, 120]. Néanmoins, l'hypothèse implicite dans le modèle DFN qui ne considère que l'écoulement dans un réseau des fissures est que la perméabilité de la matrice est négligeable. Une approche commune pour dépasser cette limite est le modèle « double porosité/double perméabilité » qui a d'abord été proposé par Barenblatt et al. [11] dans lequel la fissure et la matrice poreuse sont considérées comme deux continuums interactifs. Un résumé des versions de ce modèle peut être consulté dans Jafari et Babadagli [86].

Différentes techniques numériques telles que la méthode des éléments finis [9, 61, 188, 92] et la méthode des volumes finis [37, 5, 70, 16, 115] ont été utilisées afin de résoudre les équations de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré. L'utilisation de ces méthodes de discrétisation de volume nécessite un outil numérique pour générer automatiquement un maillage adapté au domain fissuré. Quelques œuvres se sont concentrées à développer des mailleurs tels que : Pouya et Ghoreychi [137] pour un milieu poreux fissuré 2D ; Koudina et al. [91] ; Mutsapha [120] pour un réseau de fissures 3D et Bogdanov et al. [16] pour un milieu poreux fissuré 3D.

A l'opposé, la méthode des équations intégrales singulières présente l'avantage important de réduire la dimension du problème. Toutefois, il y a eu rarement de travaux abordant cette approche afin d'étudier l'écoulement dans un milieu poreux fissuré car quelques obstacles pour la formulation mathématique subsistaient. Récemment, quelques développements ont

permi d'avancer sur cette question sur les plan théorique et numérique et ont abouti à des résultats intéressants [94, 136, 139, 132, 140, 180].

es equations génerales du problème d'écoulement et l'expression de la solution potentielle génerale ont été données dans le chapitre précedent. L'objectif de ce chapitre est d'établir une méthode numérique de résolution des équations générales (24) et (47) afin de modéliser l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini 2D ou 3D. La solution analytique d'infiltration dans une fissure super-conductrice a été déjà obtenue dans la section 1.2.2.2 pour le cas 2D et la section 1.4.1 pour le cas 3D. Cependant, il n'éxiste pas de solution analytique pour le cas général d'une fissure ayant une conductivité infinie. Des schémas numériques adaptés aux problèmes 2D et 3D ont d'abord été proposés. La solution numérique a été validée ensuite par la comparaison avec celle analytique du problème de référence d'une fissure isolée super-conductrice. Puis, des exemples ont été présentés afin d'illustrer la capacité du programme numérique.

## 2.2 Modélisation bidimensionnelle de l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini

La méthode des éléments finis est efficace pour résoudre les problèmes physiques dans des domaines finis, mais moins pratique pour les domaines infinis ou du moins nécessitant dans ce cas des éléments spécifiques. Par contre, la méthode des équations intégrales est une alternative efficace largement utilisée pour les problèmes infinis ou semi-infinis [25, 20, 26]. L'équation (24) gouverne l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux bidimensionnel infini $\Omega$, contenant plusieurs fissures $\Gamma_j$. Le milieu $\Omega$, ayant la perméabilité uniforme $\boldsymbol{k}$, est soumis à un champ lointain $p_\infty(\underline{x})= \underline{A}.\underline{x}$. En remplaçant $q(s)$ dans (24) par son expression dans (5), une équation intégro-différentielle est obtenue. En considérant les points $\underline{x}$ localisés sur les fissures, cette équation permet, dans un premier temps, de déterminer la pression sur l'ensemble des fissures par la méthode des équations intégrales singulières et puis le débit dans les fissures par l'équation (5). Dans un deuxième temps, l'équation intégrale (24) est utilisée encore, avec $q(s)$ connu, afin de calculer la pression en un point arbitraire dans la matrice poreuse. La perméabilité effective est déterminée, dans un dernier temps, en utilisant le débit dans les fissures et la pression dans le milieu. Par ailleurs, la solution numérique de $q(s)$ dans une fissure isolée est un paramètre clé en vue de déterminer la perméabilité effective en utilisant le schéma d'homogénéisation.

Le principe général de la résolution d'une équation intégrale singulière par la méthode de collocation est trouvé dans Brebbia et Dominguez [25] et Bonnet [20]. Dans cette section, nous avons proposé un choix particulier de points de collocation et de fonctions d'interpolation. Ce choix permet d'obtenir des expressions analytiques pour les intégrales élémentaires qui conduisent à une méthode de résolution numérique rapide et efficace.

### 2.2.1 Méthode de résolution numérique 2D

#### 2.2.1.1 Discrétisation et interpolation

La procédure numérique pour résoudre l'équation (24) ne nécessite qu'un maillage généré sur les fissures qui doit être conforme en prenant en compte l'intersection entre les fissures. Les fissures sont discrétisées par $E$ éléments numérotés selon $n$, notées $E_n$ ($1 \le n \le E$) et $N$ nœuds. La discrétisation de l'équation (24) s'écrit :

$$p(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x} + \sum_{n=1}^{N} I_n \tag{99}$$

avec

$$I_n(\underline{x}) = \int_{E_n} q^n(s) \frac{\underline{x} - \underline{z}^n(s)}{\left\| \sqrt{\boldsymbol{k}^{-1}}.\left[\underline{x} - \underline{z}^n(s)\right] \right\|^2} . \boldsymbol{k}^{-1}.\underline{t}^n \, ds \tag{100}$$

En vue de définir les fonctions d'interpolation des variables, nous distinguons deux types d'éléments : l'élément courant sur la fissure et l'élément extrémité qui contient la pointe de la fissure. Sur l'élément courant, une fonction linéaire de pression est utilisée, donc, $q$ est constant sur ce type d'élément. Quant à l'élément extrémité, les résultats théoriques généraux ont montré que la singularité de la vitesse autour de la pointe de la fissure est de l'ordre $r^{-1/2}$ [121, 174, 136]. De plus, en se basant sur la solution analytique obtenue pour une fissure super-conductrice (30), la fonction d'interpolation sur l'élément extrémité est choisie telle que $q(s)$ varie en $s^{1/2}$, où $s$ est la distance de la pointe de la fissure. Cela conduit à une variation en $s^{3/2}$ pour $p(s)$ sur l'élément de ce type. En notant $L$ la longueur de l'élément ; $p_1$ et $p_2$ les pressions correspondant respectivement à $s = 0$ et $s = L$, les fonctions d'interpolation pour la pression et pour le flux sur l'élément courant, l'élément extrémité gauche ($s = 0$), l'élément extrémité droit ($s = L$) s'écrivent :

$$p(s) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L} s; \quad q(s) = -c \frac{p_2 - p_1}{L} \tag{101}$$

$$p(s) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{L}^3} \sqrt{s}^3; \quad q(s) = -a\sqrt{s} \tag{102}$$

$$p(s) = p_2 - \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{L}^3} \sqrt{L - s}^3; \quad q(s) = -a\sqrt{L - s} \tag{103}$$

où,

$$a = \frac{3c}{2} \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{L}^3} \tag{104}$$

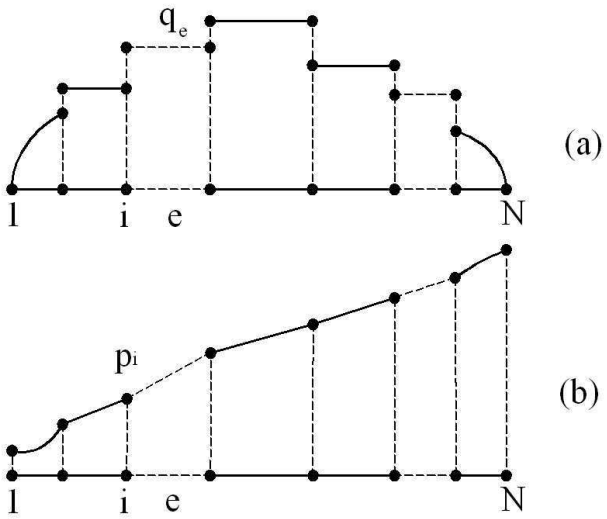



Fig 16. Fonctions d'interpolation pour : (a) le flux et (b) la pression [139]

### 2.2.1.2 Points de collocation et intégrales élémentaires

La méthode de collocation consiste à imposer l'équation (24) à un nombre fini de points appelés points de collocation. L'ensemble des nœuds utilisés pour la discrétisation de la géométrie, choisis comme des points de collocation, est le choix le plus simple dans la plupart des études dans la littérature. Toutefois, nous pouvons proposer une autre façon de choisir les points de collocation qui permet de déterminer facilement l'expression analytique des intégrales élémentaires dans ce travail. Dans un premier temps, un point de collocation est pris par élément, qui vérifie l'équation suivante :

$$I_n(\underline{x}) = 0 \tag{105}$$

Considérons un point arbitraire $\underline{x}$ dans la matrice et un élément ayant deux extrémités $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$. L'intégrale élémentaire $I_n(\underline{x})$ peut être exprimée sous la forme analytique suivante pour l'élément courant :

$$I_n(\underline{x}) = \frac{c}{2}\ Log\frac{(\underline{x}-\underline{z}_2).\boldsymbol{k}^{-1}.(\underline{x}-\underline{z}_2)}{(\underline{x}-\underline{z}_1).\boldsymbol{k}^{-1}.(\underline{x}-\underline{z}_1)}\ \frac{p_2-p_1}{L} \tag{106}$$

Ainsi que pour l'élément extrémité par :

$$I_n(\underline{x}) = \varepsilon\ \frac{3c}{2}\left(2+\alpha Log\Phi+\beta Arc\tan\frac{2\beta L}{L-\zeta}\right)\ \frac{p_2-p_1}{L} \tag{107}$$

où

$$\tau = \underline{t}.\boldsymbol{k}^{-1}.\underline{t}\ ,\ \zeta = \sqrt{\frac{(\underline{x}-\underline{z}_0).\boldsymbol{k}^{-1}.(\underline{x}-\underline{z}_0)}{\underline{t}\ .\boldsymbol{k}^{-1}.\underline{t}}}\ ,\ \phi = \varepsilon\ \frac{(\underline{x}-\underline{z}_0).\boldsymbol{k}^{-1}.\underline{t}}{\underline{t}\ .\boldsymbol{k}^{-1}.\underline{t}} \tag{108}$$

et

$$\alpha = \sqrt{\frac{\zeta + \phi}{2L}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\zeta - \phi}{2L}}, \quad \Phi = \frac{\sqrt{L^2 - 2\phi L + \zeta^2}}{L + \sqrt{2\,(\zeta + \phi)L} + \zeta} \tag{109}$$

dans lesquelles $\underline{z}_0 = \underline{z}_1$ et $\varepsilon = 1$ pour l'élément extrémité gauche et $\underline{z}_0 = \underline{z}_2$ et $\varepsilon = -1$ pour l'élément extrémité droit.

Par conséquent, pour un élément courant, le point de collocation $\underline{x}_n$ localisé à son milieu satisfait naturellement l'équation (105) grâce à la linéarité de pression sur ce type d'élément. Quant à l'élément extrémité, le point de collocation est mis sous la forme suivante :

$$\underline{x} = \underline{z}(s_x) = \underline{z}_1 + (s_x/L)\,(\underline{z}_2 - \underline{z}_1) \tag{110}$$

En injectant (110) dans (107), l'équation (105) est équivalente à l'équation suivante pour l'élément de extrémité gauche:

$$Log\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} = \frac{2}{\sqrt{\xi}} \tag{111}$$

avec $\xi = s_x/L$. La solution de cette équation $\xi \approx 0.695$ donne la position du point de collocation (110) pour l'élément extrémité gauche. Simultanément, le point de collocation $s_x/L = 1\text{-}\xi$ est obtenu pour l'élément extrémité droit.

Il convient de noter que, selon la connectivité du réseau des fissures, le nombre des nœuds peut être plus élevé que celui des éléments. En conséquence, il n'est généralement pas suffisant de prendre un point de collocation par élément afin de résoudre un système d'équations qui a les pressions nodales comme inconnues. La différence entre le nombre de nœuds et celui d'éléments dépend de la propriété de connectivité du réseau des fissures qu'il n'est pas facile à déterminer. Néanmoins, une analyse concernant le nombre de nœuds et d'éléments pourrait aider à déterminer un choix optimal de points de collocation. En fait, chaque élément est lié toujours à deux nœuds, tandis que, à l'exception des extrémités des fissures, un nœud est lié à deux ou plusieurs éléments. Ainsi, le nombre d'éléments est plus élevé que le nombre de nœuds qui ne sont pas des extrémités des fissures. Par conséquent, si nous ajoutons à l'ensemble des points de collocations définis ci-dessus des extrémités des fissures, le nombre de points de collocation $M$ est toujours plus grand que celui de nœuds $N$. De cette façon, nous pouvons avoir plus d'équations que d'inconnues. Le système est résolu ensuite par la méthode des moindres carrés.

Selon la position relative entre le point observé $\underline{x}_c$ et l'élément $E_n$, six cas différents sont distingués afin de calculer l'intégrale élémentaire : (i) $\underline{x}_c = \underline{x}_n$ le point de collocation, défini par l'équation (105), dans l'intervalle $E_n$ ; (ii) $\underline{x}_c$ est une pointe de fissure sur l'élément extrémité ; (iii) $\underline{x}_c$ est un point d'intersection entre fissures ; (iv) $\underline{x}_c$ est un point sur un élément $E_n$ ; (v) $\underline{x}_c$ est un point nodal d'un élément courant ; (vi) $\underline{x}_c$ n'est sur aucun élément $E_n$. Pour le premier cas, nous avons déjà choisi $\underline{x}_n$ tel que $I_n(\underline{x}_n) = 0$. L'intégrale élémentaire est singulière en $\underline{x}_c$ dans le deuxième cas, mais reste intégrable car l'ordre de singularité est $s^{-1/2}$. Dans le troisième cas, $\underline{x}_c$ est le point commun entre plusieurs éléments, l'intégrale élémentaire $I_n(\underline{x}_c)$

est singulière sur chaque élément. Cependant, la somme de ces intégrales sur tous les éléments liés à $\underline{x}_c$ fait disparaître la singularité en ayant recours à la conservation de la masse (16). L'intégrale est singulière dans le quatrième cas mais peut être intégrée dans le sens de la valeur principale de Cauchy. Voyons la dégénérescence inattendue dans le cinquième cas à cause de la fonction d'interpolation constante de flux sur l'élément courant. En considérant l'équation (106), l'intégrale $I_n(\underline{x}_c)$ est singulière à l'extrémité de l'élément et la différence entre le débit sortant de ce point dans les deux éléments adjacents liés à ce point ne permet pas de faire disparaître la singularité. Néanmoins, ce problème n'apparaît que dans la deuxième étape quand nous souhaitons déterminer le champ de pression dans le milieu poreux fissuré lorsque la pression est connue sur les fissures. La dégénérescence est donc résolue en remplaçant la solution de pression sur les fissures de la première étape dans la deuxième étape quand le point observé est sur les fissures. Pour le sixième cas, l'intégrante n'est pas singulière et son intégrale pour différents éléments est trouvée à partir des équations (106) et (107). De plus, ces expressions analytiques permettent de surmonter la difficulté provenant de l'intégrale quasi-singulière.

### 2.2.1.3 Equation matricielle

En imposant (99) à $M$ points de collocation, le calcul des intégrales élémentaires correspondant à ces points conduisent à un système de $M$ équations avec $N$ inconnues nodales :

$$F=\boldsymbol{H}P=C+\boldsymbol{G}P \tag{112}$$

où $F(M\times1)$ est la colonne de pression aux points de collocation ; $P(N\times1)$ la colonne de pression inconnue nodale ; $C(M\times1)$ la colonne des valeurs $p_\infty$ appliquées aux points de collocation ; $\boldsymbol{H}(M\times N)$ la matrice établie par les fonctions d'interpolation (101)-(104) ; $\boldsymbol{G}(M\times N)$ la matrice élaborée par les intégrales élémentaires et par l'opération d'assemblage qui est réalisée par deux boucles imbriquées : la première est sur tous les points de collocation et la deuxième sur les éléments.

Le système (112) consiste en $M$ équations et $N$ inconnues avec $M > N$ et il n'existe pas de solution dans le cas général. Toutefois, une solution approximative peut être obtenue par la méthode des moindres carrés en minimisant $|(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{G})P - C|^2$ par rapport $P$. Il en résulte :

$$\boldsymbol{K}P=Y \tag{113}$$

avec,

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{H}-\boldsymbol{G})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{G});\ Y = (\boldsymbol{H}-\boldsymbol{G})^{\mathrm{T}}C \tag{114}$$

Le système (113) a alors $N$ équations et $N$ inconnues. La résolution de ce système a recours aux différents algorithmes tels que : élimination de Gauss, factorisation LU, substitution, etc [144, 89].

#### 2.2.1.4 Implémentation numérique

L'outil numérique développé en 2D comporte quatre phases principales : génération des fissures, prétraitement, résolution du système et post-traitement. Nous avons choisi d'utiliser le logiciel GID [62] afin de générer le maillage et de visualiser le résultat dans la deuxième et la quatrième phase. Ainsi, les outils numériques propres sont développés pour la première et la troisième phase. Il est évident que le fonctionement des codes développés est indépendant du mailleur. Ainsi, ces codes peuvent être adaptés à tout autre mailleur capable à générer des maillages appropriés.

La procédure numérique nécessite d'abord les données d'entrées qui sont la perméabilité de la matrice et les paramètres des fissures comprenant la géométrie et l'ouverture hydraulique. La géométrie des fissures peut être décrite par des modèles déterministes [90] ou des modèles stochastiques [60, 31, 14, 105]. L'approche stochastique du réseau des joints s'est basée sur un modèle probabiliste hiérarchique qui reproduit de façon réaliste la configuration des fissures en utilisant un minimum de données telles que le nombre des familles des fissures, les distributions de la longueur, de l'orientation, de l'ouverture des fissures pour chaque famille. On rappelle que l'angle entre la fissure et l'axe horizontal $\theta$ ($0 \leq \theta < \pi$) représente l'orientation d'une fissure. Grâce à sa flexibilité, l'approche stochastique est souvent utilisée en pratique afin de modéliser l'écoulement dans les réservoirs fracturés. Un outil numérique, appelé « GENEFIS », est développé pour générer un réseau des fissures dans un milieu infini. Cet outil permet de générer un réseau de fissures dans deux cas différents : une distribution isotrope de l'orientation des fissures et le modèle développé dans Maleki et Pouya [105]. Dans le deuxième cas, nous considérons pour chaque famille de fissure : une distribution exponentielle de la longueur entre la longueur maximale et la longueur minimale ; une distribution isotrope de l'orientation entre $\theta_{max}$ et $\theta_{min}$; et une distribution isotrope de la position du centre des fissures. Le résultat sorti par « genefis » est un fichier, écrit sous un format approprié pour GID, contenant tous les informations des fissures.

Le résultat de la première phase est importé dans l'environnement GID. Les intersections entres les fissures sont calculées automatiquement par ce logiciel. Un maillage conforme est généré sur l'ensemble des fissures dans lequel les éléments sont fins autour des pointes des fissures. La table des coordonnées et de la connectivité est exportée comme un fichier donné du programme solveur. Le schéma numérique présenté ci-dessus est implémenté dans le solveur appelé « Permsin2D ». Le résultat de ce programme est le champ de pression dans la matrice qui peut être visualisé en utilisant GID.

### 2.2.2 Solution numérique de l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini 2D

Cette section est consacrée à vérifier la validation de la solution numérique ainsi que de montrer la capacité de la méthode numérique. Le cas le plus simple consiste à considérer une fissure ayant une conductivité *c* noyée dans une matrice infinie. La solution de ce problème pour une fissure super-conductrice est comparable avec celle obtenue par la solution théorique

présentée dans l'équation (30). Le cas des fissures intersectées est ensuite étudié dans lequel la conservation de la masse (16) est vérifiée numériquement. Le dernier cas illustre le résultat obtenu pour un grand nombre de fissures.

### 2.2.2.1 Fissure isolée de conductivité finie

Considérons un milieu infini Ω, avec une perméabilité uniforme et isotrope $k$, contenant une fissure rectiligne isolée Γ de longueur $2L$, de la conductivité $c$ qui occupe l'intervalle $[-L,L]$ sur l'axe $x$. Le domaine Ω est soumis à un champ lointain $p_\infty(\underline{x})= \underline{A}.\underline{x}$. Introduisons la variable adimensionnelle suivante :

$$\lambda = \frac{c}{2\pi L\sqrt{|\boldsymbol{k}|}} \tag{115}$$

Cette variable adimensionnelle présente une mesure de ratio entre la conductivité de la fissure et la perméabilité de la matrice. La résolution numérique de l'équation (24), dans le cas d'une fissure isolée et du gradient de pression $\underline{A}$ parallèle à l'axe $x$, pour les différentes valeurs λ, donne les résultats de pression sur l'axe $x$ et de flux dans la fissure dans Fig 19. On peut constater que le champ de pression n'est pas influencé pour une fissure imperméable (λ=0.0001). La pression est constante dans la fissure super-conductrice ($\lambda=10^5$) et le gradient de pression est singulier à la pointe de la fissure. La symétrie du débit dans la fissure indique qu'il entre autant de fluide dans la fissure en un point à droite qu'il en sort sur le point symétrique à gauche. De plus, la solution numérique de flux, ayant $\lambda\to\infty$, est en parfait accord avec celle obtenue par la méthode analytique (30).

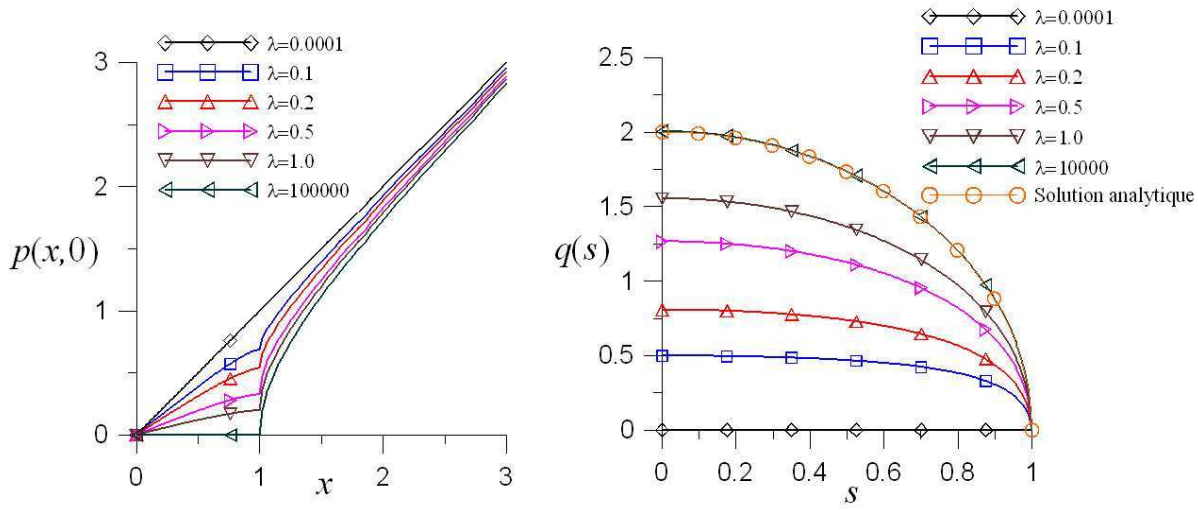



Fig 17. Résultats numériques le long de la fissure pour différentes valeurs de λ : la pression à gauche et le flux dans la fissure à droit

### 2.2.2.2 Fissures curvilignes avec intersections

Envisageons le cas de trois fissures curvilignes intersectées dans un milieu poreux infini (Fig 19). Le milieu est de tenseur de perméabilité $\boldsymbol{k} = k_{xx}\underline{e}_x\otimes k_{yy}\underline{e}_y$, et soumis à un gradient de

pression à l'infini $\underline{A}$ parallèle à l'axe $x$. Le champ de pression a été calculé pour deux cas de matrices isotrope ($k_{xx}/k_{yy}$=1) et anisotrope ($k_{xx}/k_{yy}$=4) avec le même déterminant du tenseur de perméabilité $|\boldsymbol{k}|$ et décrits respectivement sur Fig 18 et Fig 19. Cet exemple illustre deux améliorations de la méthode par rapport à celle présentée par Liolios et Exadaktylos [94]: extension aux fissures intersectées et au milieu anisotrope. Notons que la condition aux limites $p_\infty(\underline{x})= \underline{A}.\underline{x}$ est prescrite à l'infini et sur la frontière du domaine fissuré sur laquelle la pression est influencée par la présence des fissures. Cela montre un autre avantage de la méthode dans le calcul de la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré $\Omega$ en supposant que $\Omega$ est noyé dans un milieu infini soumis à un gradient uniforme de pression à l'infini. C'est le concept d'une inclusion dans une matrice infinie. En vue de déterminer la propriété macroscopique d'un matériau fissuré, un volume élémentaire représentatif (VER) est généralement considéré avec une pression linéaire $p(\underline{x})= \underline{A}.\underline{x}$ prescrite sur sa frontière [97, 138, 135, 133]. Cela ne correspond pas à l'état théorique d'un gradient de pression appliqué à l'infini.

Rappelons que la conservation de la masse au point d'intersection entre les fissures est comprise dans la solution générale (24) ; c'est-à-dire elle n'est pas a priori une condition supplémentaire pour le système des équations (112) dans la modélisation numérique. Toutefois, cet exemple est également une occasion de vérifier numériquement la condition (16). Le résultat numérique de débit dans les éléments liés au point d'intersection dans Fig 19 à droite (nœud 122) montre que la conservation de la masse (16) est précise. De plus, on peut définir l'erreur relative par :

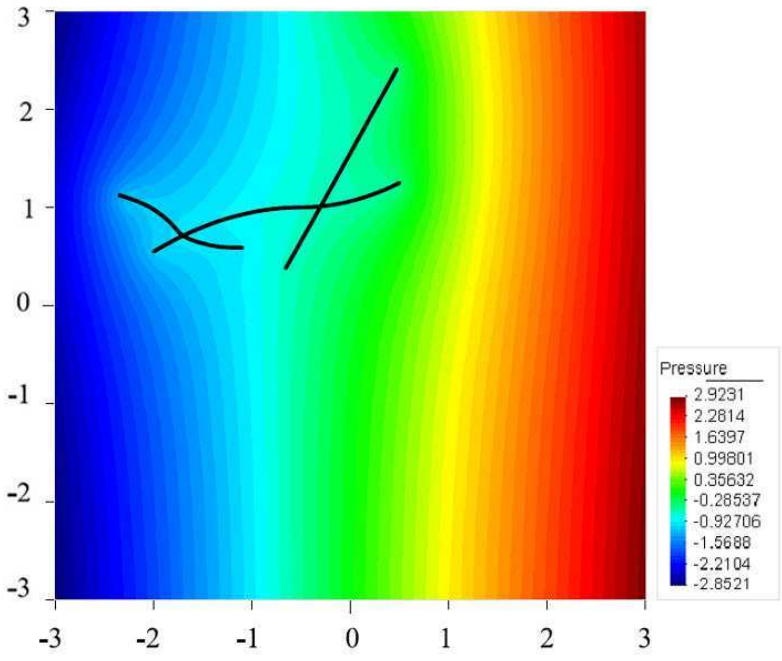



Fig 18. Champ de pression $p(x,y)$ autour des fissures dans un matrice isotrope $k_{xx}=k_{yy}$

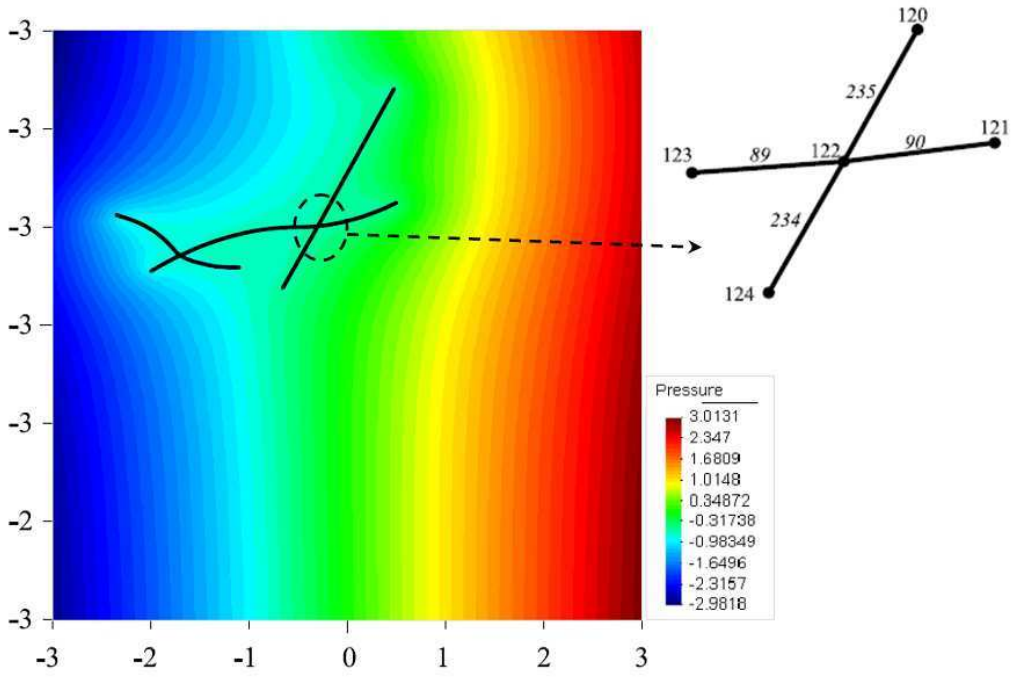



Fig 19. Champ de pression $p(x,y)$ autour des fissures dans un matrice anisotrope $k_{xx}/k_{yy}$ =4 [139]

$$E = \frac{\left|\sum_b q_j^b\right|}{\widehat{\left|q_j^b\right|}} \tag{116}$$

où $q_j^b$ est le débit sortant du nœud $j$ dans la branche $b$ (un des quatres éléments considérés) et $\widehat{\left|q_j^b\right|}$ le moyen absolu de ces débits. Nous obtenons numériquement $E \approx 0.004$ et $E \approx 0.012$ pour la matrice isotrope et anisotrope, respectivement. La conservation de masse (16) est alors satisfaite avec une bonne précision. Le même résultat a été obtenu pour l'autre point d'intersection sur Fig 19.

### 2.2.2.3 Distribution des fissures

Afin de montrer la performance de la méthode numérique ainsi que de mieux comprendre la procédure numérique présentée dans la section 2.2.1.4, nous exposons le résultat numérique obtenu pour une distribution isotrope (Fig 20) ou une distribution de trois familles de fissures (Fig 21) dans un milieu infini. L'outil « GENEFIS» est d'abord utilisé pour générer statistiquement les fissures avec les informations préalables dans un domaine suffisamment large. L'équation (24) est résolue numériquement pour toutes les fissures. Une fois la pression sur les fissures déterminée, le champ de pression dans la matrice peut être déterminé en un point arbitraire. Un domaine fictif est considéré afin de présenter le résultat du champ de pression (Fig 20 et Fig 21 à droite).

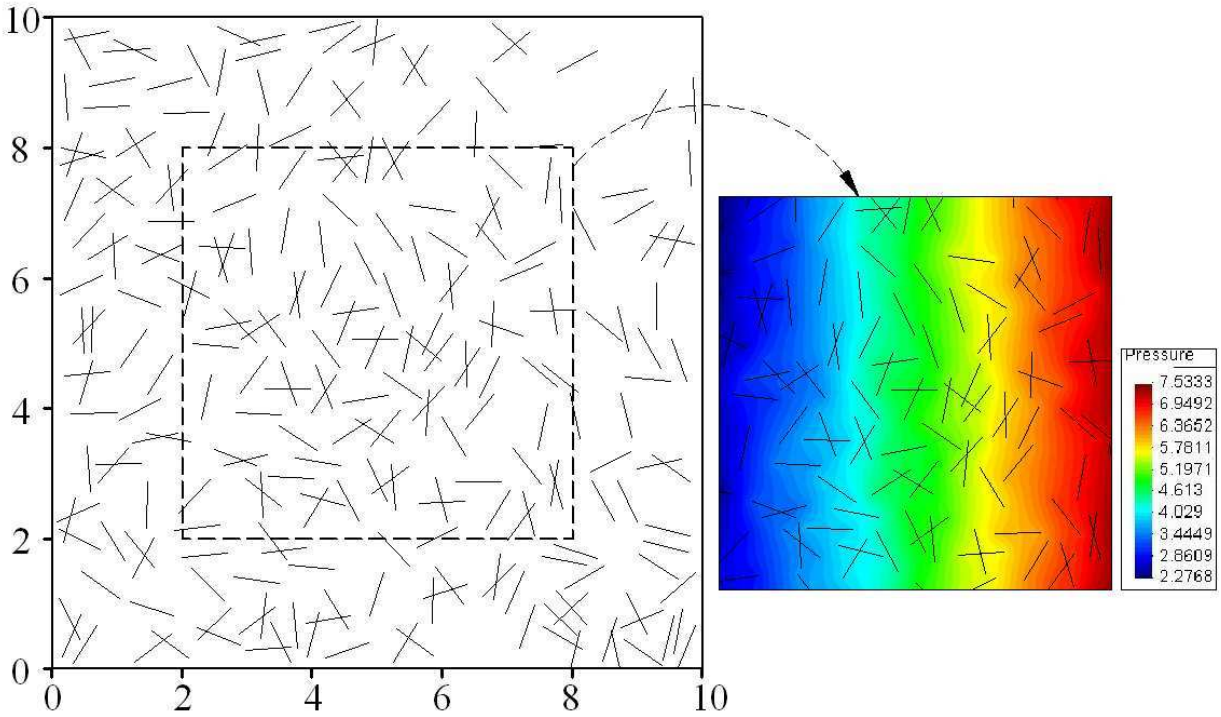



Fig 20. Distribution isotrope des fissures dans une formation géologique et le champ de pression dans le modèle avec les paramètres : $\underline{A}$=(1,0), $k$=1, $c$=10

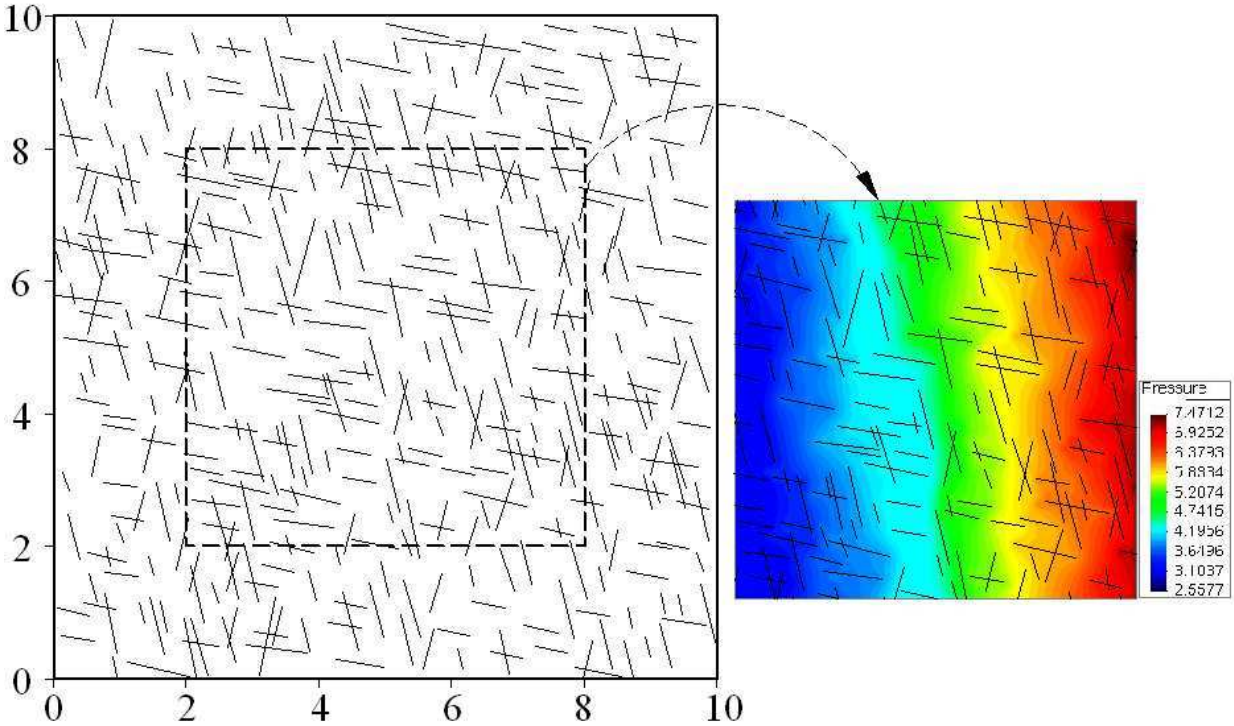



Fig 21. Distribution de trois familles des fissures et le champ de pression dans le modèle avec les paramètres : $\underline{A}$=(1,0), $k$=1, $c$=10

## 2.3 Modélisation tridimensionnelle de l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini

Considérons un milieu tridimensionnel infini $\Omega$ contenant des fissures avec intersections, de conductivité constante $c$, modélisées par des surfaces courbes numérotées selon $j$ et notées $\Gamma_j$. L'écoulement stationnaire dans $\Omega$, ayant la perméabilité isotrope $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{\delta}$, sous un champ lointain de pression linéaire $p_\infty(\underline{x})= \underline{A}.\underline{x}$, est décrit par l'équation générale (47). La procédure de résolution de cette équation est similaire à celle présentée dans la section 2.2. Cette section est consacrée à exposer brièvement la méthodologie numérique appliquée au problème 3D, notamment les techniques particulières différentes du cas 2D.

### 2.3.1 Méthode de résolution numérique 3D

#### 2.3.1.1 Discrétisation et interpolation

Un maillage conforme est d'abord généré sur la surface des fissures qui consiste en $N$ nœuds et $M$ éléments triangulaires numérotés selon $m$ et notés $E_m$. En remplaçant le débit $\underline{q}(\underline{s})$ par la loi de Poiseuille (38), la forme discrétisée de l'équation (47) sur le maillage s'écrit :

$$p(\underline{x}) \approx p_\infty(\underline{x}) - \frac{c}{4\pi k}\sum_{m=1}^{M} I_m(\underline{x}) \tag{117}$$

où $I_m(\underline{x})$ est l'intégrale élémentaire :

$$I_m(\underline{x}) = \int_{E_m} \frac{\nabla p(\underline{z}).(\underline{x}-\underline{z}(s))}{\|\underline{x}-\underline{z}(s)\|^3} ds \tag{118}$$

Le choix des fonctions d'interpolation pour les éléments à la frontière des fissures est basé sur le profil de vitesse autour de cette zone. En ce qui concerne l'équation intégrale singulière en 1D sur un intervalle fini, de nombreux auteurs ont caractérisé le profil de solution aux points extrémités, qui varie selon $r^{1/2}$ au voisinage de ces points [121, 51, 109, 94, 136, 139]. Pour le problème 2D, Wolfe [187] et Boersma et Danicki [15] ont considéré le problème du potentiel électrostatique issu de la charge d'un disque elliptique. La solution varie également en $r^{1/2}$ au voisinage de la frontière du disque, avec $r$ la distance de la frontière du disque. Pouya et Vu [140] ont étudié récemment le problème d'une fissure elliptique super-conductrice isolée noyée dans une matrice infinie 3D. La résolution analytique de ce problème est présentée dans la section 1.4. Constatons que la solution d'infiltration dans un disque circulaire varie en $\sqrt{1-r^2}$ dans la direction perpendiculaire à la frontière du disque.

Par conséquent, trois types d'éléments sont distingués : type 0, 1 et 2 correspondant respectivement aux cas contenant aucun, 1 et 2 nœuds sur la frontière de la fissure (Fig 22). L'élément de type 0 est l'élément iso-paramétrique avec une interpolation linéaire de pression qui entraine un flux constant sur ce type d'élément. En s'inspirant de la solution analytique de l'infiltration dans une fissure elliptique isolée, l'interpolation du flux sur les éléments du type 1 et 2 est choisie de façon qu'elle varie en $r^{1/2}$ dans la direction normale à la frontière de la

fissure $\partial\Gamma$ et est constante pour l'autre direction, avec $r$ la distance de $\partial\Gamma$. L'interpolation de pression sur les éléments du type 1 et 2 peut être déduite de l'équation (38).

Les fonctions de forme d'un élément triangulaire arbitraire dans l'espace peuvent être déterminées à partir de celles d'un élément référence. En considérant un élément équilatéral dans l'espace de paramètre $(\eta,\xi)$, les fonctions de forme s'expriment selon :

$$\psi_1(\eta,\xi)=\frac{\sqrt{3}(1-\eta)-\xi}{2\sqrt{3}};\quad \psi_2(\eta,\xi)=\frac{\sqrt{3}(1+\eta)-\xi}{2\sqrt{3}};\quad \psi_3(\eta,\xi)=\frac{\xi}{\sqrt{3}} \tag{119}$$

Ces fonctions peuvent être réécrites sous la forme vectorielle :

$$\psi_k(\underline{\xi})=\lambda_k+\underline{\alpha}_k.\underline{\xi}\qquad (k=1,2,3) \tag{120}$$

où $\underline{\xi}=(\eta,\xi)$ ; $\underline{\alpha}_k=(\alpha_k,\beta_k)$ ; $\lambda_1=\lambda_2=0.5$ ; $\lambda_3=0$ ; $\alpha_1=-0.5$ ; $\alpha_2=0.5$ ; $\alpha_3=0$ ; $\beta_1=\beta_2=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ; $\beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

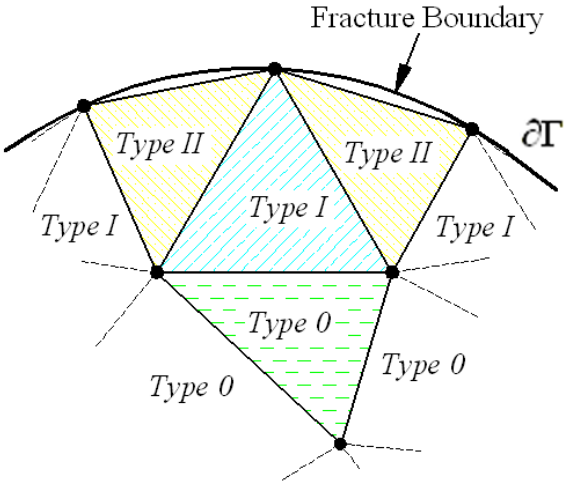



Fig 22. Trois types d'éléments sur la fissure [180]

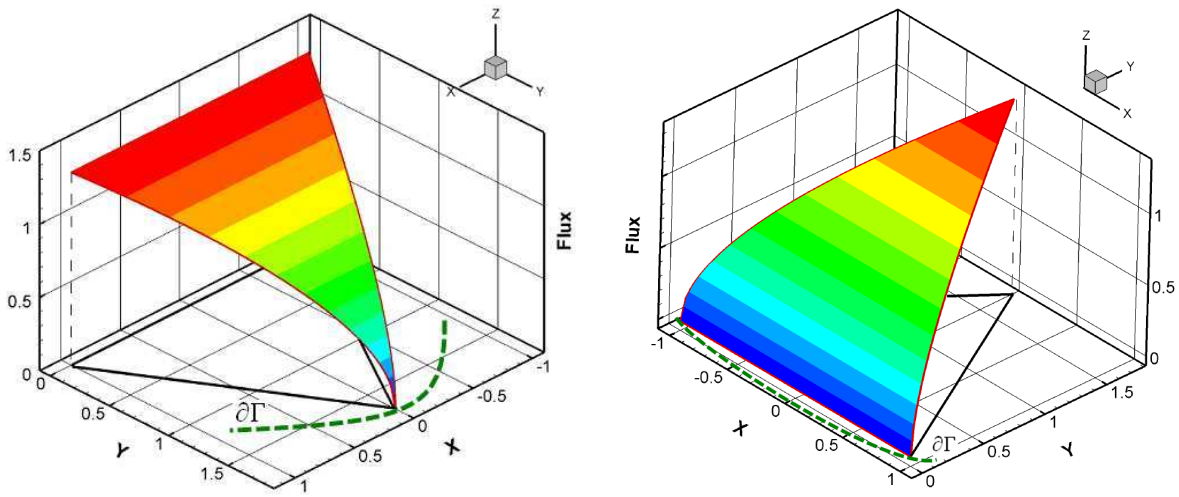



Fig 23. Interpolation du flux sur les éléments du type 1 et 2 [180]

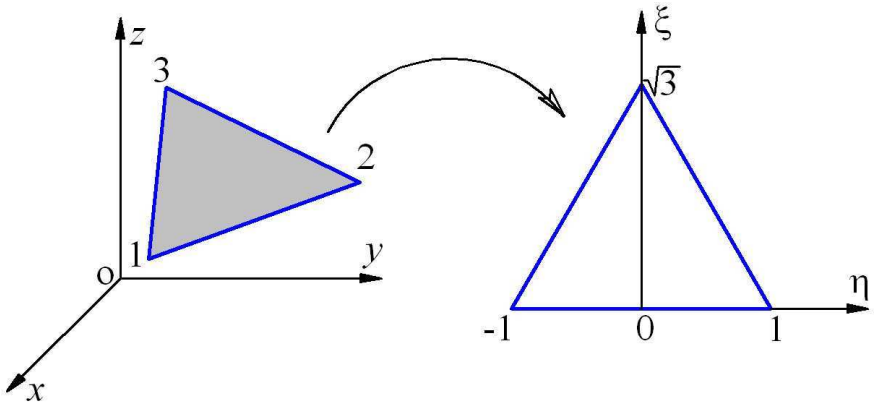



Fig 24. Transformation d'un élément dans le repère global vers celui dans le repère local [180]

La transformation d'un élément triangulaire dans le repère global vers un élément référence est décrite comme suit :

$$\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix} = \boldsymbol{J}.\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{\xi} = \boldsymbol{J}.\left(\underline{x}-\underline{x}_0\right) \tag{121}$$

où $\boldsymbol{J}$ est la matrice de transformation et $(x_0,y_0)$ l'origine de transformation. Les fonctions de forme sont alors obtenues dans le repère global :

$$\psi_k^0(\underline{x}) = \lambda_k + \underline{\alpha}_k.\boldsymbol{J}.\left(\underline{x}-\underline{x}_0\right) \quad (k=1,2,3) \tag{122}$$

En outre, les fonctions d'interpolation de pression sur les éléments du type 1 et 2 s'écrivent respectivement :

$$\psi_k^1(\eta,\xi) = \lambda_k^1 + \begin{pmatrix}\alpha_k^1\\ \beta_k^1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\sqrt{\xi}\end{pmatrix} \quad (k=1,2,3) \tag{123}$$

$$\psi_k^2(\eta,\xi) = \lambda_k^2 + \begin{pmatrix}\alpha_k^2\\ \beta_k^2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\eta\\ \sqrt{\left(\sqrt{3}-\xi\right)^3}\end{pmatrix} \quad (k=1,2,3) \tag{124}$$

avec, $\lambda_k^1 = \lambda_k$ ; $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 0$ ; $\lambda_3^2 = 1$ ; $\alpha_k^1 = -\alpha_k^2 = \alpha_k$ ; $\beta_1^1 = \beta_2^1 = -\beta_1^2 = -\beta_2^2 = -1/2\sqrt{3\sqrt{3}}$ ; $\beta_3^1 = -\beta_3^2 = 1/\sqrt{3\sqrt{3}}$ .

Les fonctions $\psi_k^1(\underline{x})$ et $\psi_k^2(\underline{x})$ sont retrouvées en injectant (121) dans (123) et (124). Pour la simplification, la notation $\psi_k(\underline{x})$ est utilisée pour indiquer les fonctions d'interpolation sur tous les trois types d'éléments.

### 2.3.1.2 Résolution du système d'équations

La méthode des points de collocation est utilisée afin de résoudre l'équation (117). *M* points de collocation $\underline{x}_c$ sont choisis comme les barycentres des éléments et numérotés comme les éléments. L'équation (117) s'écrit au point de collocation $\underline{x}_c^i$ sur l'élément *i* comme suit :

$$p(\underline{x}_c^i) \approx p_\infty(\underline{x}_c^i) - \frac{c}{4\pi k}\sum_{m=1}^{M} I_m(\underline{x}_c^i) \tag{125}$$

En utilisant les fonctions d'interpolation, l'équation (125) conduit à :

$$\sum_{k=1}^{3}\psi_k(\underline{x}_c^i).p_k^i \approx \underline{A}.\underline{x}_c^i - \frac{c}{4\pi k}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{3}\int_{E_m}\frac{\nabla\left(\psi_k(\underline{z}).p_k^m\right).\left(\underline{x}_c^i - \underline{z}(s)\right)}{\left\|\underline{x}_c^i - \underline{z}(s)\right\|^3}ds \tag{126}$$

En écrivant cette équation pour tous les points de collocation, l'opération d'assemblage se basant sur deux boucles imbriquées sur *M* points de collocation et *N* éléments entraîne :

$$\boldsymbol{H}.P = G \tag{127}$$

où $G(M\times 1)$ est la colonne du champ lointain de pression calculé aux points de collocation ; $P(N\times 1)$ la colonne des pressions nodales ou des inconnues ; $\boldsymbol{H}(M\times \mathrm{N})$ la matrice des coefficients obtenue par le calcul des intégrales élémentaires et l'opération d'assemblage en prenant en compte les termes du côté gauche de l'équation (126).

Il convient de noter que le système (127) comporte *M* équations et *N* inconnues, et en générale $M > N$. Effectivement, la plupart des maillages générés sur les surfaces des fissures contiennent plus d'éléments que les nœuds. Cette observation est toujours vraie pour un maillage fin. La méthode des moindres carrés est alors utilisée afin d'obtenir une solution approximative de ce système en minimisant $|\boldsymbol{H}.P - G|^2$ par rapport à la variable *P*.

### 2.3.1.3 Intégrales élémentaires

L'équation (126) contient l'intégrale élémentaire suivante :

$$I_{mk} = \int_{E_m}\frac{\nabla\left(\psi_k(\underline{z}).p_k^m\right).\left(\underline{x}_c^i - \underline{z}(s)\right)}{\left\|\underline{x}_c^i - \underline{z}(s)\right\|^3}ds \text{ et } I_m = \sum_{k=1}^{3} I_{mk} \tag{128}$$

Cette intégrale est singulière si $\underline{x}_c^i \in E_m$ i.e $i = m$ et est régulière si $\underline{x}_c^i \notin E_m$ ou $i \neq m$. L'intégrale élémentaire singulière est évaluée dans le sens de la valeur principale de Cauchy [74]. Le calcul de l'intégrale élémentaire régulière est généralement basé sur la méthode de quadrature de Gauss. Cependant, la méthode numérique ordinaire ne donnerait pas de solution fiable et consistante pour évaluer l'intégrale élémentaire singulière car la singularité se pose dans le noyau de l'intégrale. Plusieurs méthodes sont employées pour calculer précisément cette intégrale telles que : intégration par parties [21], « limit process » [167], méthodes de transformation [167, 75, 87]. En outre, la difficulté numérique apparaît lorsque le point de collocation est trop proche de l'élément, l'intégrale n'est alors pas strictement singulière, mais en quelque sorte quasi-singulière. Les chercheurs en méthode des éléments de frontière ont proposé divers schémas numériques ou semi-analytiques pour calculer ce type d'intégrale. Un résumé de quelques techniques concernant cette intégrale peut être trouvé dans Liu et al. [96]. Dans ce travail, l'intégrale élémentaire (128) peut être calculée de différentes façons :

analytique, semi-analytique et numérique, dépendant de la position relative entre le point de collocation $\underline{x}_c$ et l'élément *E* ainsi que le type de l'élément (*i.e* la fonction d'interpolation).

***Schéma analytique***

La procédure analytique est développée afin de calculer l'intégrale élémentaire singulière sur l'élément de type 0 (Fig 25a). Le traitement de la singularité est basé sur l'introduction du système des cordonnées polaires centré en $\underline{x}_c$ dans l'élément *E*.

$$\underline{z} = \underline{x}_c + \rho\underline{\phi} \tag{129}$$

où $\underline{\phi} = (\cos\theta, \sin\theta)$. L'interpolation linéaire de pression sur l'élément de type 0 entraîne un gradient constant de pression sur cet élément : $\underline{\nabla}\left(\psi_k(\underline{z})\right) = \underline{\zeta}_k = cte$. L'élement *E* est divisé en quatre parties : un petit cercle *C* du rayon ε centré sur $\underline{x}_c$ et trois sous-triangles $T_l$ ($l$=1,2,3).

En réécrivant l'équation (128) dans le système des cordonnées polaires, on obtient :

$$I_{mk} = \sum_{k=1}^{3} p_k^m \underline{\zeta}_k \left( \int_C \underline{\phi} \frac{d\rho}{\rho} d\theta + \sum_{l=1}^{3} \int_{T_l} \underline{\phi} \frac{d\rho}{\rho} d\theta \right) \tag{130}$$

ensuite,

$$I_{mk} = \sum_{k=1}^{3} p_k^m \underline{\zeta}_k \left( \int_0^{\varepsilon} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{2\pi} \underline{\phi} d\theta + \sum_{l=1}^{3} \int_{\theta_{l1}}^{\theta_{l2}} \underline{\phi} d\theta \int_{\varepsilon}^{\rho_l(\theta)} \frac{d\rho}{\rho} \right) \tag{131}$$

où les paramètres de chaque sous-triangle $T_l$ ($l$=1,2,3) dans l'équation (131) peuvent être trouvé dans Fig 26. Comme attendu, la première intégrale est singulière mais disparaît grâce à $\int_0^{2\pi} \underline{\phi} d\theta = 0$. La seconde intégrale est régulière et peut être déterminée sous une forme explicite.

En effet, ε apparaît dans l'expression de l'intégrale sur chaque sous-triangle, mais disparaît après avoir fait la somme des trois intégrales.

Notons ϒ le plan contenant l'élément *E*. Il est intéressant de noter que ce schéma numérique est aussi valable lorsque le point de collocation $\underline{x}_c$ est sur ϒ mais n'est pas dans l'élément *E* de type 0 (Fig 25b).

Cette procédure où les intégrales élémentaires sont remplacées par des expressions analytiques fournit une méthode numérique rapide pour l'estimation de la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré comme souligné précédemment.

***Schéma semi-analytique***

L'intégrale élémentaire singulière ne peut pas être calculée explicitement sur les éléments de types 1 et 2 à cause de la complication des fonctions d'interpolation dans les équations (123) et (124). Une procédure semi-analytique a été développée afin d'évaluer ces types d'intégrales qui est basée sur la transformation en système de cordonnées polaires centré en point de

collocation $\underline{x}_c$, comme celui utilisé dans le schéma analytique (129). En vue du traitement de la singularité, l'intégration par rapport à la variable ρ est effectuée analytiquement. Dans cette manipulation, la singularité issue de ρ disparaît. L'intégration par rapport à la variable θ est alors régulière et peut être évaluée par la méthode de quadrature de Gauss unidimensionnelle.

De plus, l'intégrale élémentaire quasi-singulière peut être également évaluée par cette procédure semi-analytique dans laquelle le système des cordonnées polaires est centré sur la projection $\underline{x}_{cp}$ du point de collocation $\underline{x}_c$ sur l'élément $E$ (Fig 25c). En notant $h=|\underline{x}_c-\underline{x}_{cp}|$ la distance entre $\underline{x}_c$ et $E$, l'intégrale (128) sur élément du type 0 dans le système des cordonnées polaires s'écrit :

$$I_{mk} = \sum_{k=1}^{3} p_k^m \underline{\zeta}_k \left( \int_0^{\varepsilon} \frac{\rho^2 d\rho}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \underline{\phi} d\theta + \sum_{l=1}^{3} \int_{\theta_{l1}}^{\theta_{l2}} \underline{\phi} d\theta \int_{\varepsilon}^{\rho_l(\theta)} \frac{\rho^2 d\rho}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}} \right) \tag{132}$$

En utilisant l'analyse identique à la procédure analytique pour l'équation (131), seule la deuxième intégrale contribue au résultat final dans laquelle l'intégration de la variable ρ peut être manipulée analytiquement et l'intégration numérique est utilisée ensuite pour l'intégration de la variable θ. A la différence de la procédure numérique dans la méthode des éléments de frontière, l'intégrale quasi-singulière est évaluée par quelques techniques de transformation afin de concentrer les points de Gauss au voisinage de $\underline{x}_{pc}$ [78, 172]. Cela est coûteux en termes du temps de calcul et de mémoire.

L'évaluation correcte de l'intégrale élémentaire singulière ou quasi-singulière permet d'obtenir un bon conditionnement de la matrice en résolvant le système des équations linéaires (127). Cela est particulièrement important lors de l'application de cette méthode numérique dans les massifs rocheux fracturés dans lesquels le ratio entre la conductivité de fissure et la perméabilité de la matrice est normalement considérable.

***Schéma numérique***

La méthode de quadrature de Gauss est efficace pour estimer l'intégrale élémentaire régulière dans le cas où $\underline{x}_c$ n'est pas sur le plan $\Upsilon$ et sa projection sur ce plan, $\underline{x}_{cp}$ n'est pas dans l'élément $E$ (Fig 25d). En se référant à la théorie de l'intégration numérique [45], l'intégrale (128) est évaluée :

$$I_m = \sum_{k=1}^{3} p_k^m \sum_{j=1}^{Ng} w_j \frac{\nabla\left(\psi_k(\underline{x}_{Gj})\right).\left(\underline{x}_c^i - \underline{x}_{Gj}\right)}{\left\|\underline{x}_c^i - \underline{x}_{Gj}\right\|^3} \tag{133}$$

où $Ng$ est le nombre des points de Gauss, $\underline{x}_{Gj}$ et $w_j$ sont le point de Gauss et le poids, numérotés $j$. Ce schéma peut être également utilisé pour évaluer l'intégrale régulière sur l'élément de type 1 et 2 dans laquelle le point de collocation $\underline{x}_c$ est sur $\Upsilon$.

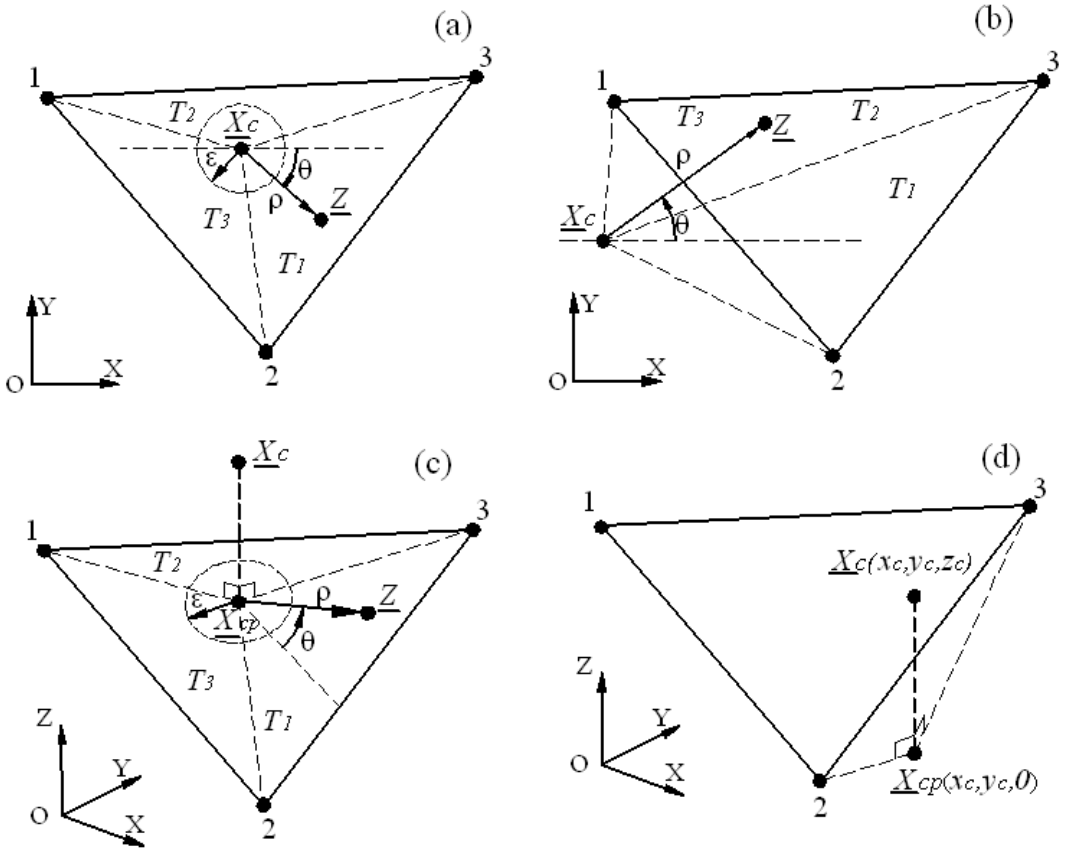



Fig 25. Position relative entre le point de collocation $\underline{x}_c$ et élément $E$ dans le plan $\Upsilon$ supposé être $Oxy$ : (a) $\underline{x}_c$ dans $E$ ; (b) $\underline{x}_c$ sur $\Upsilon$ mais pas dans $E$ ; (c) $\underline{x}_c$ ne pas sur $\Upsilon$ mais $\underline{x}_{cp}$ dans $E$ ; (d) $\underline{x}_c$ ne pas sur $\Upsilon$ et $\underline{x}_{cp}$ ne pas dans $E$ [180]

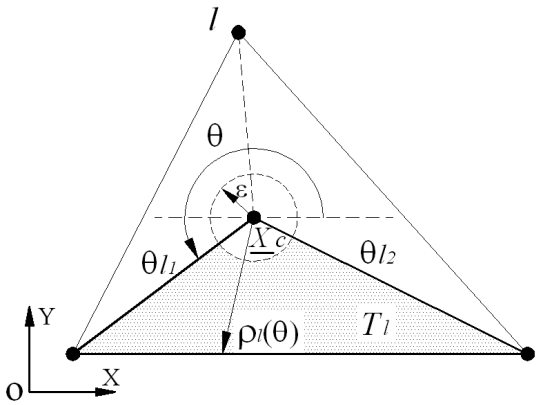



Fig 26. Paramètres sur chaque sous-triangle $T_l$ [180]

### 2.3.2 Validation de la solution numérique

Le cas limite d'une fissure super-conductrice est utilisé comme un problème de référence en vue de valider la méthode numérique en raison du fait que les solutions explicites sont connues pour ce cas. Dans cette perspective, deux cas-tests avec des géométries différentes sont proposés.

### 2.3.2.1 Un disque de fissure super-conductrice

Une fissure super-conductrice ($c \to \infty$), modélisée par un disque du rayon $R$, et noyée dans un milieu infini soumis à l'infini à une pression linéaire $p_\infty(\underline{x})=\underline{A}.\underline{x}$, est considérée. Le disque est localisé sur le plan O$xy$ (Fig 27). La solution analytique de l'infiltration dans la fissure est décrite dans l'équation (77) et présentée dans Fig 13. D'ailleurs, cette solution peut être obtenue par la voie numérique en appliquant la procédure numérique exposée ci-dessus à ce problème ($c >> 1$). La solution numérique de pression est constante sur la surface de la fissure. En ce qui concerne la solution de flux, un accord parfait entre la solution numérique et celle analytique est également observé (Fig 28).

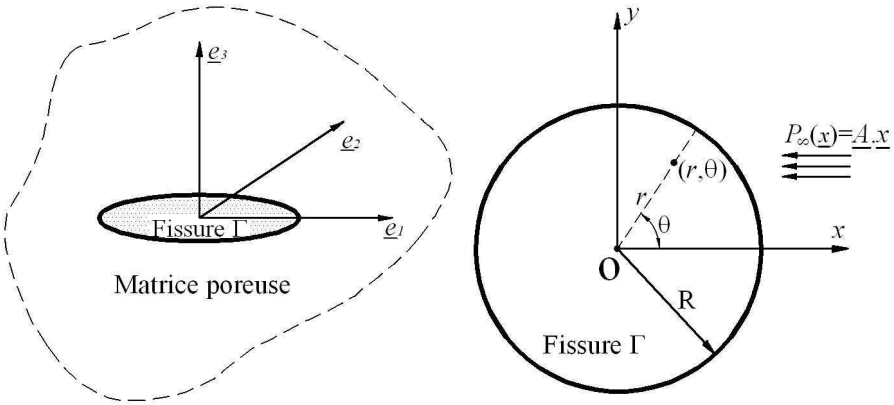



Fig 27. Une fissure circulaire super-conductrice isolée dans un milieu poreux infini

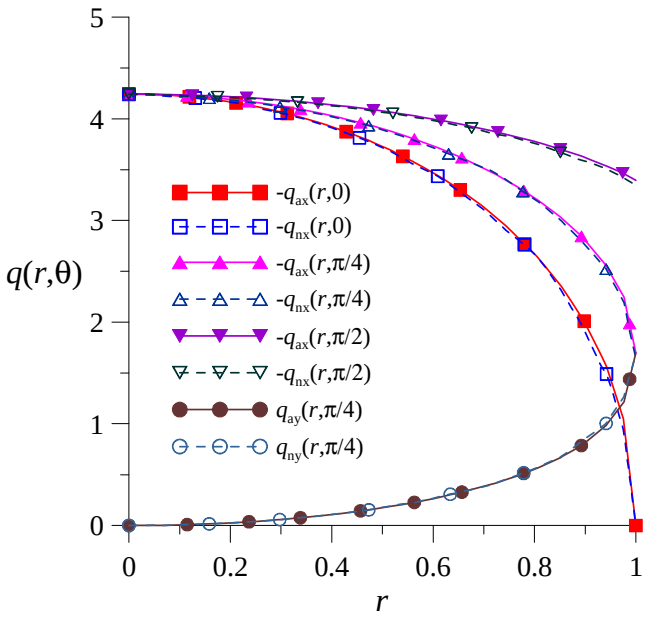



Fig 28. Comparaison entre les solutions analytique et numérique de l'infiltration dans la fissure $q(r)$ pour les différentes valeurs de θ avec $0 \le r \le R$ ($q_{ax}$, $q_{ay}$, $q_{nx}$, $q_{ny}$ le champ d'infiltration analytique ou numérique dans les directions $x$ et $y$) [180]

Une expression d'erreur relative est défini comme suit afin d'évaluer la précision de la solution numérique par rapport à la solution analytique :

$$E_r(q_\alpha) = \left| \frac{q_{n\alpha} - q_{a\alpha}}{q_{a\alpha}} \right| \tag{134}$$

où $q_{a\alpha}$, $q_{n\alpha}$ sont les solutions de flux dans la direction $\alpha$ ($\alpha = x,y$), obtenues par les méthodes analytique et numérique, respectivement.

La valeur maximale de l'erreur relative est $E_{rmax}(q_x) = 0{,}6\%$. Ceci montre l'extrême précision de la méthode numérique mais constitue aussi une vérfication ou validation partielle de la méthode numérique.

### 2.3.2.2 Une bande de fissure super-conductrice

Un deuxième exemple de validation de la méthode numérique peut être constitué par la comparaison des résultats de cette méthode 3D pour un cas qui est en réalité 2D et pour lequel on dispose d'une solution analytique.

Envisageons une fissure, modélisée par une bande de la longueur infinie $H$ et de la largeur finie $L$ (numériquement $H>>L$), dans un milieu infini 3D de perméabilité isotrope $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{\delta}$, prescrit par un champ lointain $p_\infty(\underline{x})=y$ (Fig 29 à gauche). Théoriquement, l'écoulement dans chaque plan perpendiculaire à l'axe-$x$ est similaire. En conséquence, cette configuration 3D est équivalente à l'écoulement dans un plan infini (le plan $Oyz$), contenant une fissure rectiligne isolée de longueur $L$, sous la condition aux limites $p_\infty(\underline{x})=y$ (Fig 29 à droite). La solution analytique du flux de cette configuration 2D est exprimée dans l'équation (30). D'un point de vue numérique, une bande avec $H/L=10$ est modélisée par la procédure numérique décrite ci-dessus. La solution numérique de pression sur la bande permet de déterminer le flux traversant au milieu de la fissure dans la direction $y$. Un bon accord entre l'approche numérique et la configuration de référence en 2D est observé dans Fig 30.

Ces deux exemples de validation montrent que la méthode numérique développée fournit des résultats avec une fidélité et une précision élevées.

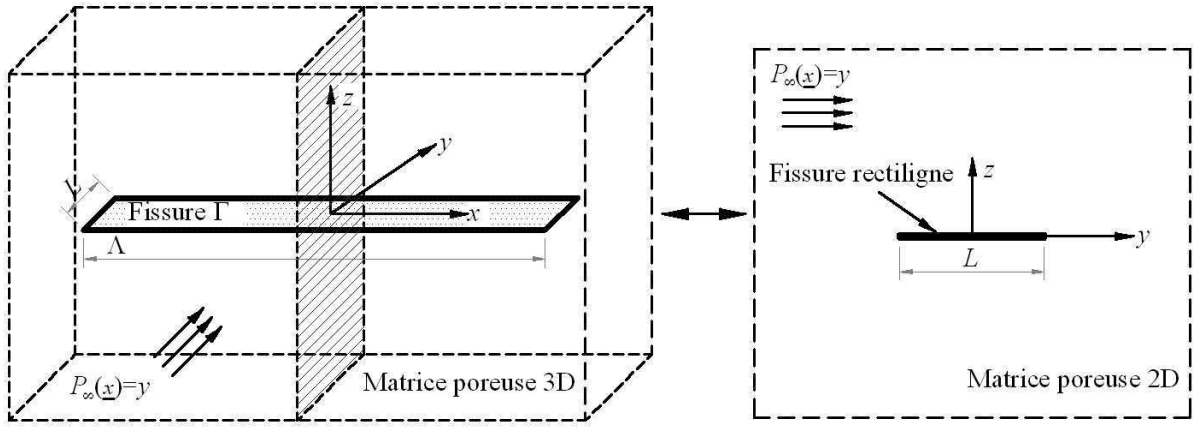



Fig 29. Bande de fissure en 3D et la configuration équivalente en 2D [180]

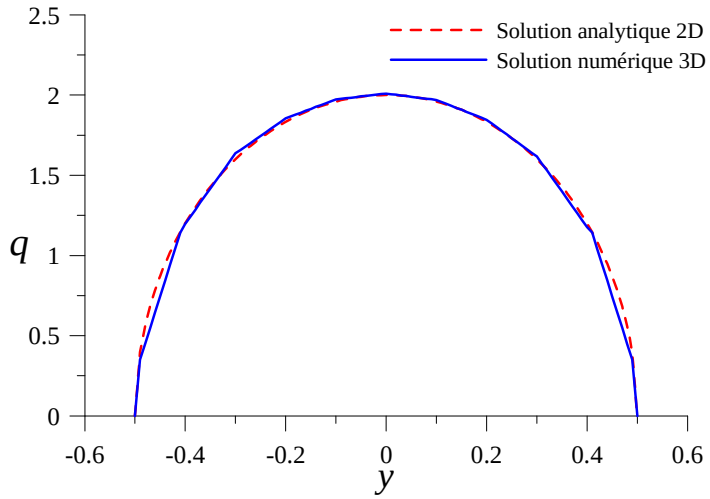



Fig 30. Comparaison entre la solution numérique du problème 3D et celle analytique de la configuration équivalente en 2D [180]

### 2.3.3 Solution numérique de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré infini 3D

En vue de montrer la capacité de la méthode numérique pour la modélisation de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré, deux exemples d'application sont présentés dans cette section. Le premier consiste à modéliser l'écoulement autour et dans plusieurs fissures circulaires avec intersections. Une surface courbe de fissure dans une matrice infinie est ensuite considérée dans le deuxième cas. Dans le premier cas, un maillage conforme est généré sur la surface des fissures (Fig 31). Fig 32 présente la solution numérique du champ de pression sur les surfaces de fissure, solution qui a l'air continue à l'intersection entre les fissures. La conservation de la masse à l'intersection (45) peut être vérifiée numériquement comme présenté ci-dessus dans la section 2.2.2.2 pour le cas 2D. Dans le second cas, une fissure courbe est modélisée par un morceau de la surface sphérique sur laquelle la solution de pression est présentée dans Fig 33.

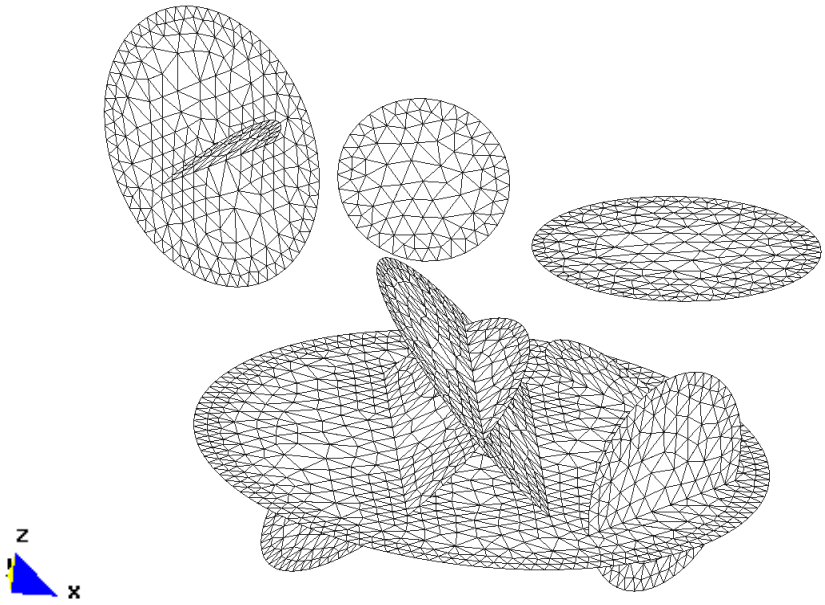



Fig 31. Maillage conforme sur la surface des fissures circulaires [180]

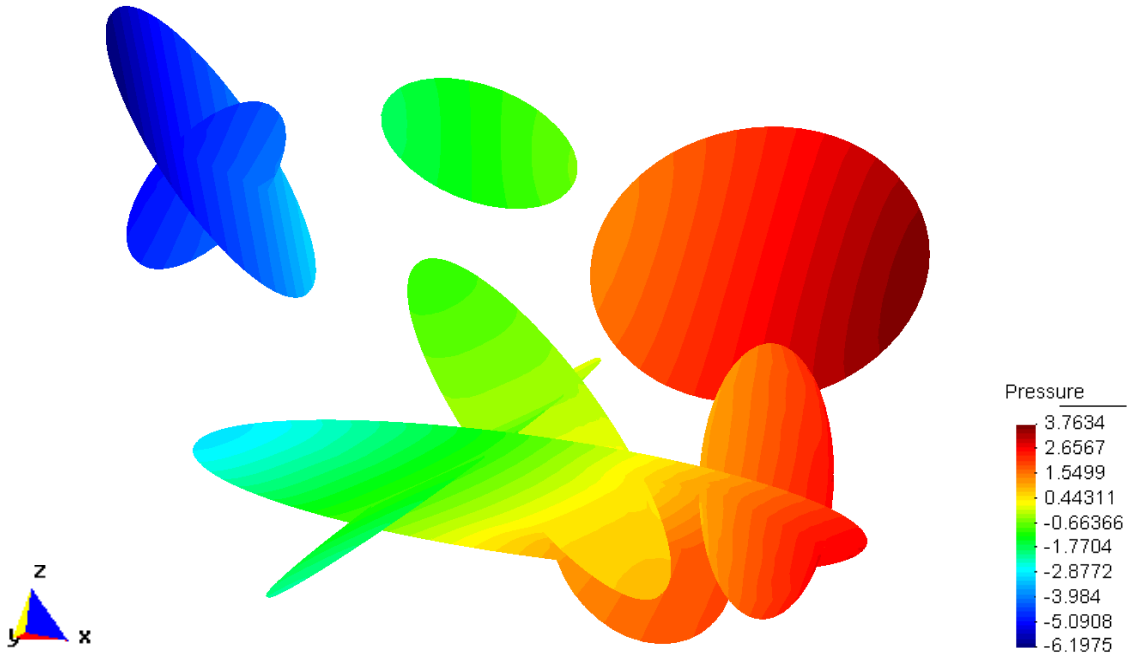



Fig 32. Champ de pression sur la surface des fissures ($c$=100) dans un matrice infinie isotrope ($k$=1) soumis à un gradient constant de pression à l'infini $\underline{A}$ = (1,0,0) [180]

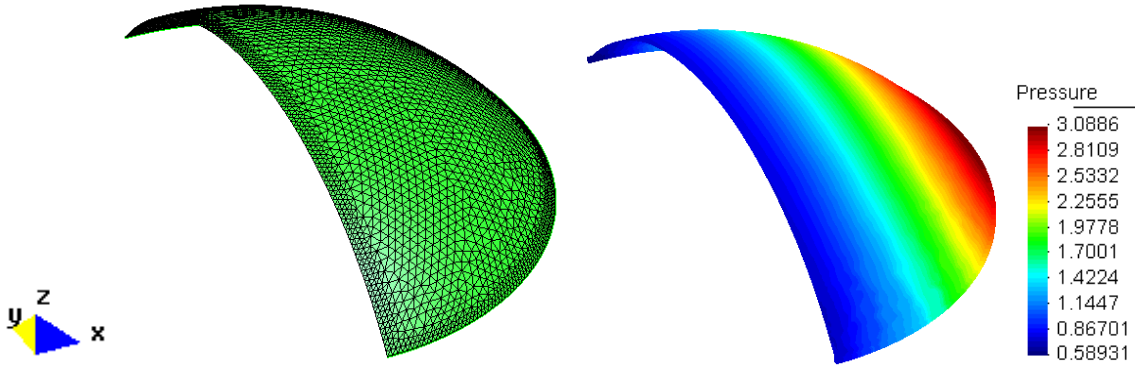



Fig 33. Maillage et solution numérique de pression sur la surface courbe de la fissure ($c$=100) noyée dans un milieu poreux infini ($k$=1) prescrit par un champ lointain $\underline{A}$ = (1,0,0) [180]

Rappelons que, comme on le verra dans le chapitre suivant, seuls les champs d'écoulement sur les fissures sont nécéssaires pour le caclul de la perméabilité effective du mileu fissuré à matrice homogène. Les résultats numériques ci-dessus obtenus sous l'effet d'un grandient de pression à l'infini permettraient donc d'étudier numériquement la péreméabilité effective des mileux 3D comprenant des fissures intersectées et avec des surfaces courbes.

## 2.4 Conclusion

La méthode numérique basée sur la méthode des équations intégrales singulières a été décrite afin de résoudre les équations générales du potentiel qui gouvernent l'écoulement stationnaire dans et autour d'un ensemble de fissures noyées dans une matrice infinie soumise à un champ lointain. Dans ce cadre, un maillage conforme n'a été nécessaire à générer que sur les fissures. Des choix des fonctions d'interpolations et des points de collocations, adaptés aux problèmes

considérés, ont été proposés afin d'élaborer une méthode numérique rapide. La solution numérique a été validée par la comparaison avec celles des problèmes de références pour lesquels des solutions analytiques sont connues. En modélisation tridimensionnelle, le programme numérique, écrit pour un problème général de fissures courbes avec intersections, peut être appliqué à l'étude d'écoulement à une grande échelle telle que dans des failles dans les formations géologiques soumises à des conditions de champs lointains. L'élaboration du modèle géométrique des failles courbes a recours à des outils numériques tels que GeoModeller [27] ou GoCad [64].

Un des objectifs de la méthode numérique ici présentée est d'obtenir un modèle approximatif ou pseudo-analytique de l'écoulement dans et autour d'une fissure isolée de Poiseuille en vue d'établir une estimation de la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré. Cela sera présenté dans le chapitre suivant.

Il convient de rappeler que les fissures avec une conductivité transversale infinie (pas de saut de pression de part et d'autre de la fissure) ont été considérées dans ce chapitre. Cependant, dans certains cas physiques, une fissure peut agir comme une membrane imperméable induisant une discontinuité de pression à travers la fissure. Une solution analytique du potentiel pour ce cas de fissures a été obtenue par Martin [110]. La détermination de la perméabilité effective d'un milieu contenant des fissures imperméables sera abordée dans le Chapitre 4 de ce mémoire.

# Chapitre 3 . Application au calcul de la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré saturé

## 3.1 Introduction

Des méthodes très diverses et variées, heuristiques, analytiques, statistiques, déterministes, etc., ont été proposées depuis quelques décennies pour l'estimation de la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré. Cependant, ces méthodes, dont une revue détaillée peut être trouvé dans Sánchez-Vila et al. [65], Goméz-Hernández et Wen [148], Renard et de Marsily [155], sont la plupart du temps de nature plutôt empirique. L'homogénéisation est une méthode simple et puissante pour l'évaluation théorique ou numérique de la perméabilité effective des milieux hétérogènes et/ou fissurés. Le schéma de Mori-Tanaka dilué est applicable pour estimer la conductivité thermique effective ou la perméabilité effective d'un milieu poreux contenant une faible densité de fissures [193, 161, 6]. Cette approche ne tient pas compte des interactions entre fissures. L'approche d'homogénéisation auto-cohérente permet de prendre en compte implicitement l'interaction entre les fissures. Cette approche a été utilisée dans certains cas [48, 12] en assimilant les fissures à des inclusions ellipsoïdales aplaties de type Eshelby [52] soumises à un l'écoulement de Darcy. Toutefois, l'intersection entre les fissures est ignorée ces méthodes théorique et ne peut être que prise en compte explicitement que dans des méthodes numériques.

Des méthodes numériques basées sur la discrétisation des volumes telles que les éléments finis et les volumes finis ont été développées afin de modéliser l'écoulement dans les milieux poreux fissurés, parfois dans l'objectif de calculer la perméabilité effective de ces milieux [16, 115, 61, 141, 5]. La création d'un maillage conforme constitue une difficulté majeure à la quelle on se heurte surtout pour des domaines contenant un grand nombre des fissures. Cette difficulté a été résolue partiellement dans les travaux de Pouya et Ghoreychi [137] et Bogdanov et al. [16]. Comme présenté dans le premier chapitre, la résolution numérique des équations intégrales singulières gouvenant l'écoulement dans une matrice infinie fissurée peut être faite aisément même en présence d'un grand nombre de fissure.

Concernant le problème fondamental d'une fissure de Poiseuille seule dans une matrice infinie, on peut noter que la solution théorique de l'écoulement est connue pour le cas de fissure super-conductrice mais non pour le cas général d'une fissure de conductivité finie. Cependant, la méthode numérique peut être appliquée dans ce dernier cas afin d'élaborer, comme nous le verrons, une solution semi-analytique [136, 139, 180].

Ce chapitre vise d'abord à présenter les formulations générales pour déterminer la perméabilité effective d'un milieu poreux contenant des fissures conductrices. La détermination de la perméabilité effective pour le cas des fissures super-conductrices est présentée ensuite comme un cas de référence. La solution de l'infiltration dans une fissure est

établie à la suite numériquement et est finalement utilisée afin de mettre en place un modèle semi-analytique d'estimation de la perméabilité effective des milieux poreux fissurés.

### 3.2 Perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré

Considérons un domaine poreux $\Omega$ contenant un ensemble de fissures, numérotées selon $j$ et notées $\Gamma_j$. La matrice poreuse est homogène et isotrope avec la perméabilité $k$. En vue de déterminer la perméabilité effective de $\Omega$, la condition d'une pression linéaire $p(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x}$ est généralement prescrite à la frontière $\partial\Omega$, notamment pour la méthode utilisant le volume élémentaire représentatif [48, 12, 97, 138]. En considérant les fissures dans le cas limite des couches perméables minces, les moyennes de la vitesse $\underline{V}$ et du gradient de pression $\underline{G}$ dans $\Omega$ s'écrivent [16, 136, 140, 135, 133]:

$$\underline{V} = \frac{1}{\Omega}\left[\int_{\Omega} \underline{v} d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_j} \underline{q} d\Gamma\right] \; ; \quad \underline{G} = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} \nabla p d\Omega \tag{135}$$

La perméabilité effective $\hat{\boldsymbol{k}}$ du milieu poreux fissuré $\Omega$ est exprimée globalement par la loi de Darcy :

$$\underline{V} = \hat{\boldsymbol{k}}\underline{G} \tag{136}$$

Le théorème de Green pour la fonction $p$ dans un domaine $\Omega$ a des discontinuités $\Gamma_j$ s'écrit:

$$\int_{\Omega} \nabla p \, da = \int_{\partial\Omega} p \, \underline{n} \, ds - \sum_j \int_{\Gamma_j} [\![ p ]\!] \underline{n} \, ds \tag{137}$$

où $\underline{n}$ est le vecteur unitaire normal sortant du bord $\partial\Omega$ dans la première intégrale et normal à la fissure dans la deuxième intégrale. En rappelant l'hypothèse fondamentale qui est le fait que $[\![ p ]\!] = 0$ et l'identité mathématique $\int_{\partial\Omega} x_i n_j ds = \Omega\delta_{ij}$ conduit à $\underline{G} = \underline{A}$. La contribution de la matrice dans la vitesse moyenne $\underline{V}$ se réduit alors à:

$$\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} \underline{v} \, d\omega = -\frac{1}{\Omega}\boldsymbol{k}.\int_{\partial\Omega} p \, \underline{n} \, ds = -\boldsymbol{k}.\underline{A} \tag{138}$$

Selon les équations (135)-(138), il existe un tenseur $\boldsymbol{\Psi}$ défini par :

$$\frac{1}{\Omega}\sum_j \int_{\Gamma_j} q \, \underline{t} \, ds = \boldsymbol{\Psi}.\underline{A} \tag{139}$$

Le tenseur de la perméabilité du domaine $\Omega$ s'en déduit :

$$\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{\Psi} \tag{140}$$

La perméabilité effective $\boldsymbol{k}^{eff}$, si elle existe, est la limite de $\hat{\boldsymbol{k}}$ quand le domaine $\Omega$ tend vers l'infini.

## 3.3 Détermination théorique de la perméabilité effective

### 3.3.1 Milieu poreux fissuré 2D contenant des fissures super-conductrices

La solution analytique de la décharge (30) écrite pour une fissure s'en déduit :

$$\int_{-L}^{L} q(s)\underline{t}ds = -\pi k L^2 (\underline{t}\otimes\underline{t}).\underline{A} \tag{141}$$

Notons $\rho = N/\Omega$, la densité des fissures (le nombre de fissures dans une unité de volume) et $\bar{\rho} = \rho\pi L^2$ la densité adimensionnelle. Les équations (139) et (141) conduisent à $\boldsymbol{\Psi} = \bar{\rho}k(\underline{t}\otimes\underline{t})$. Cette expression est étendue au milieu anisotrope sous la forme :

$$\boldsymbol{\Psi} = \bar{\rho}\sqrt{|\boldsymbol{k}|}(\underline{t}\otimes\underline{t}) \tag{142}$$

Supposons $\Omega$ comprenant $n$ familles de fissures dans lesquelles chaque famille est caractérisée par une densité $\rho_i$, une orientation $\underline{t}_i$, une longueur $L_i$ ($1 \le i \le n$). Pour estimer la perméabilité d'un milieu à faible densité de fissures, on peut employer le schéma de Mori-Tanaka en négligeant l'interaction entre les fissures comme suit :

$$\boldsymbol{k}^{eff} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{k} + \sum_i \bar{\rho}\sqrt{|\boldsymbol{k}|}(\underline{t}_i\otimes\underline{t}_i) \tag{143}$$

Dans le cas d'une distribution isotrope de fissures de même longueur noyées dans une matrice isotrope $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{\delta}$, nous avons la moyenne $\langle \underline{t}\otimes\underline{t}\rangle = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}$. La perméabilité effective est aussi isotrope $\boldsymbol{k}^{eff} = k^{eff}\boldsymbol{\delta} = k^{MT}\boldsymbol{\delta}$, avec :

$$\frac{k^{MT}}{k} = 1 + \frac{1}{2}\bar{\rho} \tag{144}$$

Le schéma d'homogénéisation auto-cohérent consiste à remplacer, dans le tenseur de localisation $\boldsymbol{\Psi}$, la perméabilité $k$ de la mtrice par la perméabilité effective inconnue $k^{eff} = k^{auto}$. On obtient donc :

$$k^{eff} = k + \frac{1}{2}\bar{\rho}k^{eff} \tag{145}$$

Cette équation donne :

$$\frac{k^{auto}}{k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\bar{\rho}} \tag{146}$$

L'expansion de $k^{auto}$ au premier ordre en $\bar{\rho}$ permet de retrouver l'expression de $k^{MT}$ dans l'équation (144).

### 3.3.2 Milieu poreux fissuré 3D contenant des fissures super-conductrices

La solution d'infiltration dans une fissure elliptique super-conductrice est décomposée par $\underline{q} = \underline{q}^0 + \underline{\omega}$. En vertu de l'équation (66), $\underline{\omega}$ peut être exprimé tel que : $\underline{\omega} = \underline{e}_3 \times \nabla\varphi$. En utilisant l'équation (69), nous avons alors :

$$\int_\Gamma \underline{\omega}(\underline{\xi})ds = -\underline{e}_3 \wedge \int_\Gamma \underline{\nabla}\varphi ds = -\underline{e}_3 \wedge \int_{\partial\Gamma} \varphi.\underline{n}\, dl = -\varphi_0 \int_{\partial\Gamma} \underline{t}\, dl = 0 \tag{147}$$

On trouve ensuite :

$$\underline{Q} = \int_\Gamma \underline{q}(\underline{\xi})ds = \int_\Gamma \underline{q}^0(\underline{\xi})ds = -\frac{4k}{3} S_\Gamma \boldsymbol{\Phi}.\underline{A} \tag{148}$$

où le tenseur $\Phi$ est défini par l'équation (79) et $S_\Gamma = \pi d_1 d_2 = \pi / |\boldsymbol{B}|^{1/2}$ représente l'aire de l'ellipse $\Gamma$. Le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka pour une distribution isotrope des fissures donne :

$$\boldsymbol{k}^{eff} = \boldsymbol{k}^{MT} = \boldsymbol{k} + \frac{4}{3}\rho k < S_\Gamma \boldsymbol{\Phi} > \tag{149}$$

où $<S_\Gamma \boldsymbol{\Phi}>$ est la moyenne de $S_\Gamma \boldsymbol{\Phi}$ calculée sur la population des fissures, qui est égale à $\frac{4}{3}R^3$ pour les fissures circulaires du rayon $R$.

Afin d'unifier les résultats pour les différentes formes de fissures, on peut utiliser les variables adimensionnelles. Il est utile d'avoir recours à la notation du volume exclu d'une fissure $V_{ex}$ qui est le volume dans lequel le centre d'une autre fissure ne peut pas entrer s'il n'y a pas d'intersection. De ce fait, la densité adimensionnelle des fissures $\bar{\rho}$ est définie, en prenant l'expression de volume exclu donnée par Adler et Thovert [3], de la manière suivante :

$$\bar{\rho} = \rho V_{ex} \tag{150}$$

où $V_{ex} = \pi^2 R^3$ pour un disque du rayon $R$ [40].

L'équation (149) se réduit donc à :

$$\frac{k^{MT}}{k} = 1 + \frac{32}{9}\rho R^3 = 1 + \frac{32}{9\pi^2}\bar{\rho} \tag{151}$$

Ainsi, le schéma d'homogénéisation auto-cohérent en résulte :

$$k^{auto} = k + \frac{32}{9\pi^2}\bar{\rho} k^{auto} \tag{152}$$

Ou encore,

$$\frac{k^{auto}}{k} = \frac{1}{1 - \frac{32}{9\pi^2}\bar{\rho}} \tag{153}$$

En suivant le schéma de Mori-Tanaka dilué pour l'estimation de la perméabilité effective (144) en 2D et (151) en 3D, la perméabilité effective devient une fonction linéaire de la densité $\bar{\rho}$ (modèle valable pour les fabiles densités de fissures). En revanche, le modèle auto-cohérent expose une relation non-linéaire par rapport à $\bar{\rho}$ en présentant une valeur critique $\bar{\rho}_c = 2.0$ pour le cas 2D et $\bar{\rho}_c = \frac{9\pi^2}{32}$ pour le cas 3D où $k^{eff} = k^{auto}$ tend vers l'infini. La discussion sur cette valeur est faite plus loins lors de présentation de la modélisation numérique.

Il faut noter que les résultats concernant le cas d'une fissure super-conductrice, obtenues ici par la voie théorique, peuvent être également retrouvés par la méthode numérique qui traite le cas général des fissures de conductivité finie. Ces résultats représentent une référence importante pour la validation de la solution numérique, ainsi que pour d'aures investigations théoriques qui seront préssentés plus loins (sous-section 1.4.4).

## 3.4 Détermination semi-analytique de la perméabilité effective

### 3.4.1 Modèle semi-analytique de la perméabilité effective 2D

Cette section a l'objectif de rappeler la méthodologie utilisée dans Pouya et Ghabezloo [136] afin d'obtenir une solution semi-analytique du tenseur $\boldsymbol{\Psi}$ pour une fissure qui sera appliquée pour le cas 3D dans la section suivante. Cela est également une occasion d'étendre leur modèle auto-cohérent développé pour les distributions isotrope et parallèle de fissures à un modèle pour une distribution anisotrope de fissures.

En considérant le problème de la section 2.2.2.1, on calcule l'intégrale de débit $q_\lambda$ dans la fissure correspondant à chaque valeur de $\lambda$:

$$\boldsymbol{\Psi} = -\int_{-L}^{L} q_\lambda(s)\underline{t}ds = -\int_{-L}^{L} -c\frac{\partial p_\lambda}{\partial s}\underline{t}ds = 2cp_\lambda(L\underline{t})\underline{t} \tag{154}$$

où $p_\lambda$ est la pression sur la ligne de fissure correspondant à la valeur $\lambda$ considérée. L'équation (26) conduit à $p_\lambda(L\underline{t}) = Lp_\lambda(1)\underline{A}.\underline{t}$ avec l'expression de $\lambda$ donnée dans (115). Les solutions numériques obtenues $p_\lambda(1)$ en fonction de $\lambda$ peuvent être représentées par la formulation suivante avec une précision presque parfaite:

$$p_\lambda(1) = \frac{1}{1+4\lambda} \tag{155}$$

Comme l'ont souligné ses auteurs, cette formule n'a pu être analytiquement, et doit donc être regarder, en attendant son éventuelle démosntration, comme une forme approchée de la solution exacte. On note cependant qu'elle donne le comportement asymptotique exact quand

$\lambda \to \infty$, pour la fissure super-conductrice avec $p_\lambda(1) = 0$. En admettant cette formule et l'injectant avec (115) dans (154), la contribution de la fissure à la perméabilité équivalente s'écrit :

$$\boldsymbol{\Psi} = \frac{4\pi c L^2 \sqrt{|\boldsymbol{k}|}}{4c + 2\pi L\sqrt{|\boldsymbol{k}|}} (\underline{t} \otimes \underline{t}) \tag{156}$$

En utilisant la définition de la densité adimensionnelle $\bar{\rho} = \rho\pi L^2$ dans la section 3.3.1, on obtient :

$$\boldsymbol{\Psi}(\rho, L, c, \underline{t}, \boldsymbol{k}) = \frac{2\bar{\rho} c\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}{2c + \pi L\sqrt{|\boldsymbol{k}|}} (\underline{t} \otimes \underline{t}) \tag{157}$$

On suppose que le milieu $\Omega$ comprend $m$ familles de fissures dans lesquelles chaque famille est caractérisée par une densité $\rho_j$, une longueur moyenne $L_j$, une orientation moyenne $\underline{t}_j$ et une conductivité hydraulique $c_j$. L'approche Mori-Tanaka (143) pour une distribution diluée des fissures en négligeant l'interaction entre les fissures s'en déduit :

$$\boldsymbol{k}^{MT} = \boldsymbol{k}^{eff} = \boldsymbol{k} + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\Psi}(\bar{\rho}_j, L_j, c_j, \underline{t}_j, \boldsymbol{k}) \tag{158}$$

Il est intéressant de noter que la contribution de la fissure à la perméabilité effective ne dépend que du déterminant du tenseur de perméabilité de la matrice $|\boldsymbol{k}|$ et non de sa direction. Le modèle auto-cohérent consiste à remplacer, dans le tenseur de localisation, le tenseur de perméabilité $\boldsymbol{k}$ par celui du milieu effectif $\boldsymbol{k}^{eff} = \boldsymbol{k}^{auto}$:

$$\boldsymbol{k}^{auto} = \boldsymbol{k}^{eff} = \boldsymbol{k} + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\Psi}(\bar{\rho}_j, L_j, c_j, \underline{t}_j, \boldsymbol{k}^{eff}) \tag{159}$$

et de nouveau :

$$\boldsymbol{k}^{eff} = \boldsymbol{k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{2\bar{\rho}_j c\sqrt{|\boldsymbol{k}^{eff}|}}{2c_j + \pi L_j\sqrt{|\boldsymbol{k}^{eff}|}} (\underline{t}_j \otimes \underline{t}_j) \tag{160}$$

Le calcul du déterminant de $\boldsymbol{k}^{eff}$ par le côté droit de (160) conduit à une équation du troisième degrée de variable $\sqrt{|\boldsymbol{k}^{eff}|}$. Un outil numérique est développé afin de résoudre cette équation dans le cas général de $m$ familles de fissures par la méthode Newton-Raphson. L'application de ce modèle avec des données géométriques réelles de fissures sera présentée dans le Chapitre 5 pour la simulation de l'opération d'injection du $CO_2$. Le modèle écrit pour deux cas particuliers des distributions isotrope et parallèle de fissure permet de retrouver les résultats obtenus pour ces cas par Pouya et Ghabezloo [136].

### 3.4.2 Modèle semi-analytique de la perméabilité effective

Contrairement au cas d'une fissure super-conductrice, le problème de l'écoulement dans et autour d'une fissure isolée ayant une conductivité finie dans une matrice infinie n'a pas de solution analytique jusqu'à présent. Toutefois, le calcul numérique basé sur la méthode des équations intégrales singulières peut apporter une réponse à ce problème. La méthode numérique, décrite dans la section 2.3.1, est appliquée pour une fissure elliptique avec différentes valeurs de conductivités *c*. La solution numérique obtenue pour ce cas permet d'établir une solution semi-analytique d'infiltration dans la fissure, et ensuite la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré en fonction de la conductivité *c*, de la perméabilité de la matrice ***k*** et du paramètre géométrique.

#### 3.4.2.1 Solution semi-analytique d'infiltration dans une fissure circulaire

Considérons le problème de l'écoulement autour d'une fissure elliptique, ayant une conductivité finie *c*, entourée par une matrice infinie isotrope de la perméabilité *k*. Les paramètres géométriques de ce problème sont décrits dans la section 1.4 (Fig 12). L'équation (48) écrite dans le cas d'un disque devient :

$$p(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x} - \frac{c}{4\pi\kappa}\int_{\Gamma}\frac{\nabla_s p(\underline{s}).\left(\underline{x}-z(\underline{s})\right)}{\left\|\underline{x}-z(\underline{s})\right\|^{3/2}}\,ds \tag{161}$$

Nous introduisons les variables adimensionnelles telles que :

$$\underline{X} = \frac{\underline{x}}{\sqrt{d_1 d_2}}, \quad \lambda = \frac{c}{4\pi\kappa\sqrt{d_1 d_2}}, \quad P_\lambda\left(\underline{X}\right) = \frac{p(\underline{x})}{\sqrt{d_1 d_2}\left|\underline{A}\right|} \tag{162}$$

En utilisant $\nabla p(\underline{x}) = \left|\underline{A}\right|\nabla P_\lambda(\underline{X})$, l'équation (161) est transformée en :

$$P_\lambda\left(\underline{X}\right) = \frac{\underline{A}}{\left|\underline{A}\right|}.\underline{X} - \lambda\int_{\Gamma^*}\frac{\nabla P_\lambda\left(\underline{X}\right).\left(\underline{X}-\underline{Z}\right)}{\left\|\underline{X}-\underline{Z}\right\|^3}dZ \tag{163}$$

où $\Gamma^*$ est l'ellipse dans la base de variable $\underline{X}$.

L'intégrale de flux sur la surface de fissure est évaluée :

$$\underline{Q} = -c\int_{\Gamma}\nabla p(\underline{x})dx = -c\left|\underline{A}\right|d_1 d_2\int_{\Gamma^*}\nabla P_\lambda(\underline{X})dX \tag{164}$$

On définit ensuite:

$$Q^* = \frac{\underline{Q}.\underline{A}}{d_1 d_2\left|\underline{A}\right|^2} = -c\underline{A}.\int_{\Gamma^*}\nabla P_\lambda(\underline{X})dX \tag{165}$$

La solution de l'équation (163), correspondant au cas générale $\underline{A}=(A_1,A_2,A_3)$, est obtenue par la superposition des trois solutions correspondant à $p_\infty(\underline{x})=A_1x_1$, $p_\infty(\underline{x})=A_2x_2$ et $p_\infty(\underline{x})=A_3x_3$. Néanmoins, comme indiqué dans les chapitres précédents, l'écoulement sous le gradient $\underline{A}$ parallèle à $\underline{e}_3$ n'est pas perturbé par la précence de la fissure. La solution générale est obtenue

par l'ajout de $A_3x_3$ à celle correspondant à $\underline{A}=(A_1,A_2,0)$. Afin d'établir une solution complète de l'équation (163), il est suffisant alors de déterminer la solution correspondant à $p_\infty(\underline{x}) = A_1x_1$. La résolution numérique de cette équation est effectuée pour les différentes valeurs de $\lambda$ et pour les différentes géométries de fissure caractérisées par le rapport $\varepsilon=d_1/d_2$.

La solution numérique obtenue pour $P_\lambda(\underline{X})$ permet de déterminier la solution $Q^*$ selon l'équation (165). La solution analytique pour la fissure super-conductrice décrite dans l'équation (148) est utlisée pour valider la solution numérique. Un accord parfait entre les solutions numérique et analytique est observé dans Fig 34.

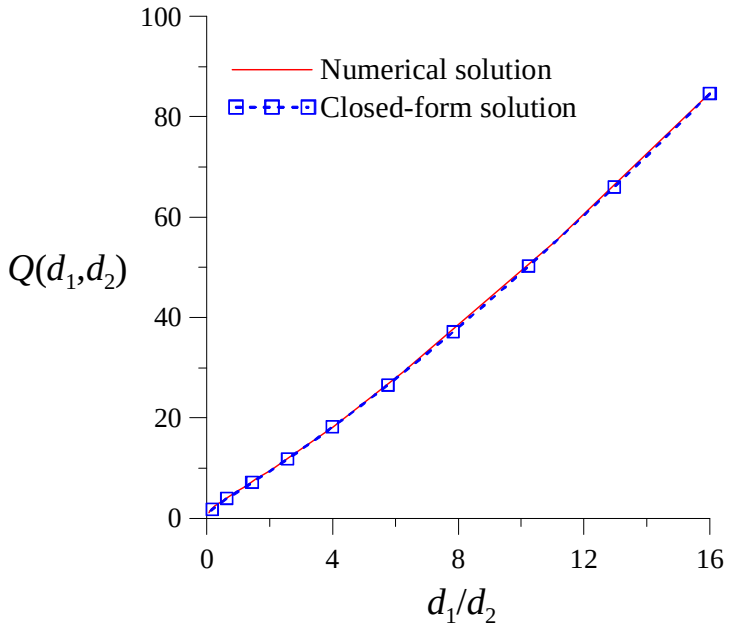



Fig 34. Solutions numérique et analytique de l'intégrale du flux sur les fissures super-conductrices correspondant au champ lointain $\underline{A}=(1,0,0)$

Fig 35 montre que la relation entre $c/Q^*$ et $\lambda$ pour chaque valeur de $\varepsilon = 1/d_2^2$ ($d_1d_2=1$) peut être approchée par une fonction linéaire avec une grande précision comme suit :

$$\frac{c}{Q^*} = \alpha(\varepsilon)\lambda + \beta(\varepsilon) \tag{166}$$

où les solutions numériques des coefficients $\alpha$, $\beta$ en fonction de $\varepsilon$ sont présentées dans Fig 36 et Fig 37, respectivement.

En injectant (166), (165) et (162) dans (164), on obtient finalement:

$$\underline{Q} = -\frac{4\pi kc\left(d_1d_2\right)^{3/2}}{\alpha c + 4\pi k\beta\left(d_1d_2\right)^{1/2}} A_1\underline{e}_1 \tag{167}$$

Dans cette relation, l'intégrale du flux sur la fissure $\underline{Q}$ est exprimée par une fonction des variables : le champ lointain $\underline{A}$, la perméabilité de la matrice $k$, la conductivité hydraulique de la fissure $c$, et la géométrie de fissure $d_1$, $d_2$. Il convient de noter que le coefficient $\alpha(\varepsilon)$ peut

être déduit du comportement asymptotique de $\underline{Q}$ quand $c \to \infty$ grâce à la connaissance de la solution analytique de la fissure super-conductrice (148) :

$$\lim_{c\to\infty} \underline{Q} = -\frac{4\pi k \left(d_1 d_2\right)^{3/2}}{\alpha} A_1 \underline{e}_1 \tag{168}$$

La comparaison de cette relation avec l'équation (148) fournit:

$$\alpha(d_1, d_2) = 3\phi_1(\lambda_1, \lambda_2)\left(d_1 d_2\right)^{1/2} \tag{169}$$

où $\phi_1$ est la fonction donnée par l'équation (57). Ce résultat peut être vérifié numériquement et un accord parfait de cette relation avec la solution numérique de $\alpha$ fonction de $d_1$ et $d_2$ est observé dans Fig 36. D'ailleurs, une relation purement numérique est obtenue pour exprimer $\beta$ en fonction de $d_1$ et $d_2$ basée sur le résultat numérique présenté dans Fig 37. Un adjustement de courbe numérique est mis sous une jolie forme comme suit :

$$\beta(d_1, d_2) = \frac{\phi_1(\lambda_1, \lambda_2)}{125}\left(d_1 d_2\right)^{1/2} + \frac{1}{3} - \frac{\pi}{1000} \tag{170}$$

Si $d_1 = d_2 = R$, on a $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{4R}$ et alors $\beta = 1/3$ qui correspondant au résultat obtenu par Vu et al. [180] dans le cas d'une fissure circulaire du rayon $R$.

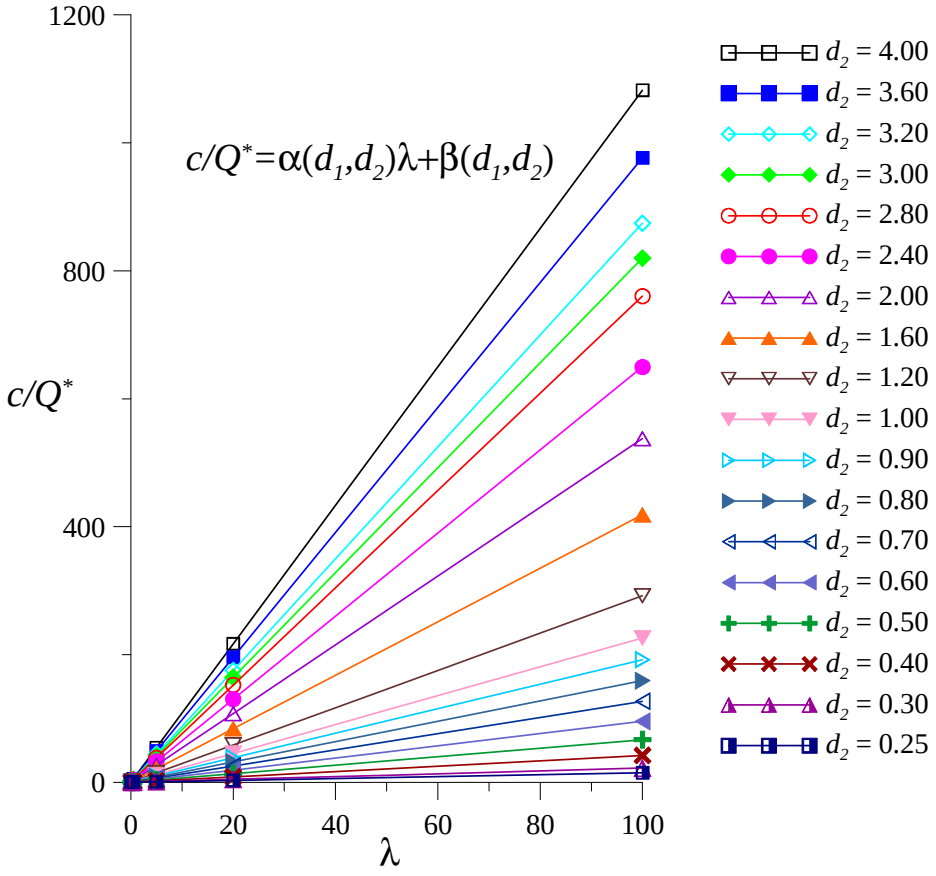



Fig 35. Solution numérique de $c/Q^*$ en fonction de $\lambda$, approchée par une fonction linéaire

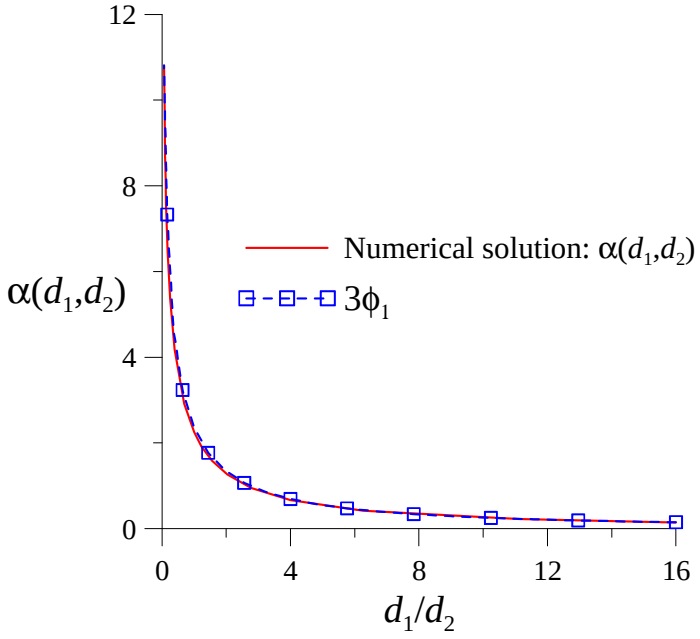



Fig 36. Solution numérique de α en fonction de $d_1$ et $d_2$ et son modèle

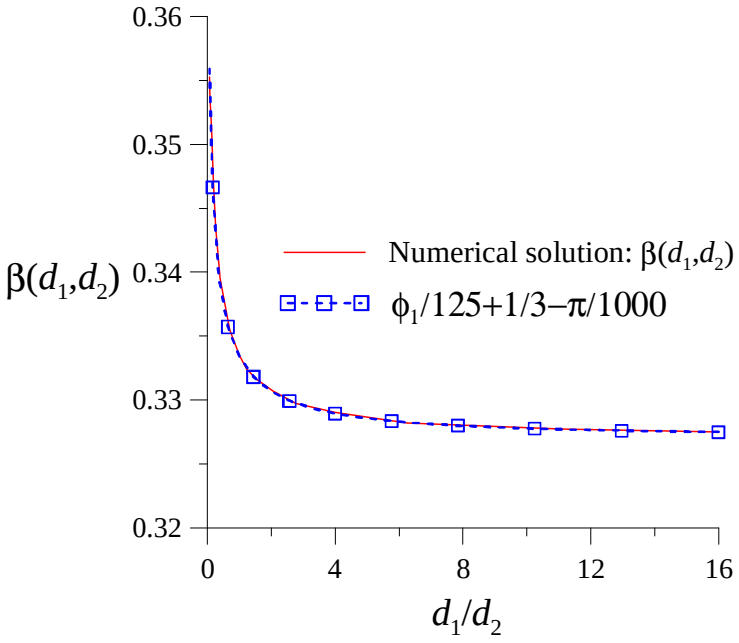



Fig 37. Solution numérique de β en fonction de $d_1$ et $d_2$ et son modèle

Par un changement d'indices, on peut obtenir la solution de $\underline{Q}$ correspondant au champ lointain $p_\infty(\underline{x}) = A_2 x_2$ comme suit :

$$\underline{Q} = -\frac{4\pi kc\left(d_1 d_2\right)^{3/2}}{\gamma c + 4\pi k\eta\left(d_1 d_2\right)^{1/2}} A_2 \underline{e}_2 \tag{171}$$

avec

$$\gamma(d_1, d_2) = 3\phi_2(\lambda_1, \lambda_2)\left(d_1 d_2\right)^{1/2} \tag{172}$$

et

$$\eta(d_1,d_2)=\frac{\phi_2(\lambda_1,\lambda_2)}{125}\left(d_1d_2\right)^{1/2}+\frac{1}{3}-\frac{\pi}{1000} \tag{173}$$

où $\phi_2$ est la fonction donnée par l'équation (57).

Notons que $\boldsymbol{A}$ est la matrice de transformation du système local sur la fissure en système global et $\boldsymbol{T}$ l'opérateur de projection sur le plane de fissure :

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\delta} - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \tag{174}$$

En conclusion, pour le cas générale du champ lointain $\underline{A}=(A_1,A_2,A_3)$, l'expression de $\underline{Q}$ s'écrit sous la forme indépendante des coordonnées :

$$\underline{Q} = -4\pi\kappa c\left(d_1d_2\right)^{3/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{T}\,\underline{A} \tag{175}$$

où :

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1)^{-1}\,\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1 + (\psi_2)^{-1}\,\underline{e}_2\otimes\underline{e}_2, \tag{176}$$

$$\psi_1 = \alpha c + 4\pi\kappa\beta\left(d_1d_2\right)^{1/2},\quad \psi_2 = \gamma c + 4\pi\kappa\eta\left(d_1d_2\right)^{1/2} \tag{177}$$

### 3.4.2.2 Détermination de la perméabilité effective 3D

En utilisant le modèle dilué de Mori-Tanaka, la contribution d'une famille de fissures numérotée selon $j$, caractérisée par une densité $\rho_j$, une conductivité $c_j$, deux demi-longueurs $d_{1j}$, $d_{2j}$, s'écrit :

$$\boldsymbol{\Psi}_j = 4\pi\rho_j\kappa c_j\left(d_{1j}d_{2j}\right)^{3/2}\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{\psi}_j\boldsymbol{T}_j \tag{178}$$

La perméabilité effective est déterminée donc par l'équation (140) :

$$\boldsymbol{k}^{eff} = \boldsymbol{k} + \sum_{j=1}^{m} 4\pi\rho_j\kappa c_j\left(d_{1j}d_{2j}\right)^{3/2}\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{\psi}_j\boldsymbol{T}_j \tag{179}$$

En particuler, on considère le cas de la fissure circulaire ($d_{1i}=d_{2i}=R_i$), l'équation (179) se réduit alors à :

$$\boldsymbol{k}^{eff} = \boldsymbol{k} + \sum_{j=1}^{m}\rho_j\frac{48kc_jR_j^3}{9c_j+16kR_j}(\boldsymbol{\delta}-\underline{n}_j\otimes\underline{n}_j) \tag{180}$$

Considérons une distribution isotrope de l'orientation des fissures ayant les mêmes paramètres de géométrie $R$ et de conductivité $c$, avec $\langle\underline{n}\otimes\underline{n}\rangle=\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta}$. La perméabilité effective est isotrope $\boldsymbol{k}^{eff} = k^{eff}\,\boldsymbol{\delta}$ et s'écrit :

$$k^{eff} = k^{MT} = k + \rho \frac{32kcR^3}{9c + 16kR} \tag{181}$$

En substituant $k$ dans $\mathbf{\Psi}$ par $k^{eff} = k^{auto}$, l'approche auto-cohérente s'exprime :

$$k^{auto} = k + \rho \frac{32k^{auto}cR^3}{9c + 16k^{auto}R} \tag{182}$$

Effectivement, l'estimation de Mori-Tanaka (181) correspond au développement limité au premier ordre de celle auto-cohérente (182). En vue d'analyser la variation de la perméabilité effective en fonction de la densité des fissures, on introduit la variable adimensionnelle suivante :

$$\bar{\lambda} = \frac{c}{4\pi k^{eff} R} \tag{183}$$

En utilisant la méthode d'anlayse présentée par Dormieux et Kondo [48], on expose la variation de $\bar{\lambda}$ par rapport à $\bar{\rho} = \rho\pi^2 R^3$ (densité adimensionnelle utilisé dans la section 3.3.2) Fig 38. Dans le cas limite $\lambda \to \infty$, le modèle auto-cohérent rélève une valeur critique $\bar{\rho}_c \approx \frac{9\pi^2}{32} \approx 2.77$ *i.e* $\rho \approx \frac{9}{32R^3}$ qui est exactement la valeur singulière dans le modèle (153) trouvé pour la fissure super-conductrice ($c \to \infty$) [140]. Ce résultat peut avoir une autre interprétation. Le cas limite $\lambda \to \infty$ peut correspondre à une matrice imperméable ($k \to 0$), c'est-à-dire que la perméabilité effective peut être différente de zéro au-delà de cette valeur critique $\bar{\rho}_c$. Il est intéressant de noter que cette densité critique pourrait être considérée comme le seuil de percolation du réseau des fissures. Dormieux et Kondo [48] ont trouvé une valeur différente $\bar{\rho}_c \approx \frac{9\pi^2}{16} \approx 5.55$ en utilisant le modèle auto-cohérent afin de faire un changement d'échelle de la perméabilité effective d'un milieu poreux contenant des inclusions ellipsoïdales aplaties de Darcy. Le seuil de percolation a parfois été étudié numériquement. Lorsque la taille du domaine est finie, une certaine configuration des fissures percole et les autres ne percolent pas pour une densité donnée. Il peut être seulement défini un seuil de percolation pour la limite de taille infinie de domaine en dessous de laquelle le réseau des fissures n'est jamais percolé et au-dessus duquel il est toujours percolé [16]. En étudiant une distribution isotrope des fissures hexagonales, Bogdanov et al. [16] ont trouvé qu'il y a rarement de percolation pour un réseau de fissures fini avec $\bar{\rho} \le 1.00$ ; percolation et non-percolation co-existent pour la plage de densité $1.00 \le \bar{\rho} \le 4.00$ et la quasi-totalité des fissures sont connectées lorsque $\bar{\rho} \ge 4.00$. Huseby et al. [83] ont trouvé précisement le seuil de percolation $\bar{\rho}_c = 2.26$ pour un milieu infini, qui est proche de la valeur critique du modèle auto-cohérent trouvée dans ce travail.

En analysant Fig 38, la variation de $\bar{\lambda}$ en fonction de $\bar{\rho}$, pour le cas $k = 0$ et $\bar{\rho} \ge \bar{\rho}_c$, peut être approchée par l'équation linéaire suivante :

$$\bar{\rho} \geq \bar{\rho}_c \qquad \frac{1}{\bar{\lambda}} = 2.55\left(\bar{\rho} - \frac{9\pi^2}{32}\right) \tag{184}$$

Ou encore,

$$\bar{\rho} \geq \bar{\rho}_c \qquad \frac{k^{auto}}{k} = 2.55\lambda\left(\bar{\rho} - \frac{9\pi^2}{32}\right) \tag{185}$$

Pour une valeur finie de $\lambda$, la pente de la courbe $1/\bar{\lambda}$ s'accroît avec $\bar{\rho}$ jusqu'à une valeur asymptotique. Il existe également une valeur critique pour chaque courbe au-delà de laquelle la perméabilité effective change d'ordre de grandeur. Ce point critique peut être déterminé par l'intersection entre la tangente initiale et la tangente finale de la courbe.

De plus, la variation de $k^{auto}/k$ par rapport à la densité adimensionnelle $\bar{\rho}$ est tracée pour les différentes valeurs $\lambda$ dans Fig 39. La valeur critique $\bar{\rho}_c$ est également observée dans cette figure pour les grandes valeurs de $\lambda$ correspondant au saut en $k^{auto}$.

La perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré est évaluée, en considérant une fissure, par la méthode d'homogénéisation de Mori-Tanaka ou la méthode auto-cohérente. Le calcul peut être effectué en utilisant seulement l'évaluation des intégrales élémentaires analytiques ou semi-analytiques car tous les points de collocation sont localisés sur la surface des fissures. Cela conduit à un programme rapide et efficace pour le calcul numérique de la perméabilité effective du milieu poreux fissuré.

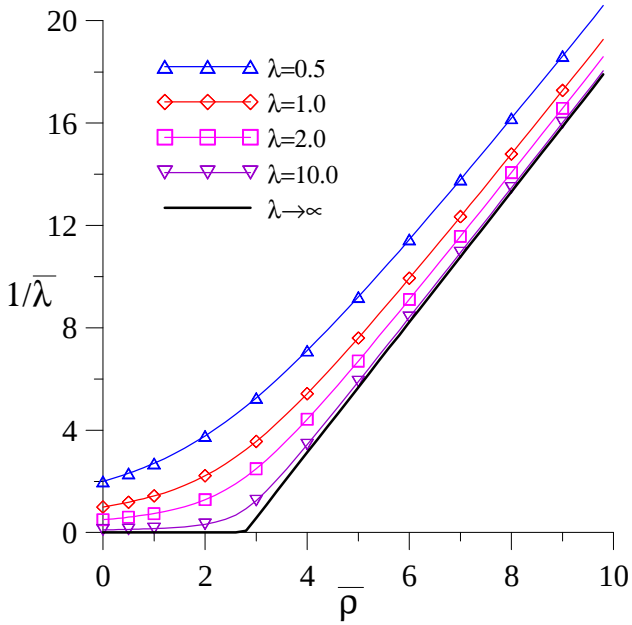



Fig 38. L'estimation auto-cohérente de la variable adimensionnelle $1/\bar{\lambda}$ tracée en fonction de la densité adimensionnelle des fissures $\bar{\rho}$ pour les différentes valeurs $\lambda$ [180]

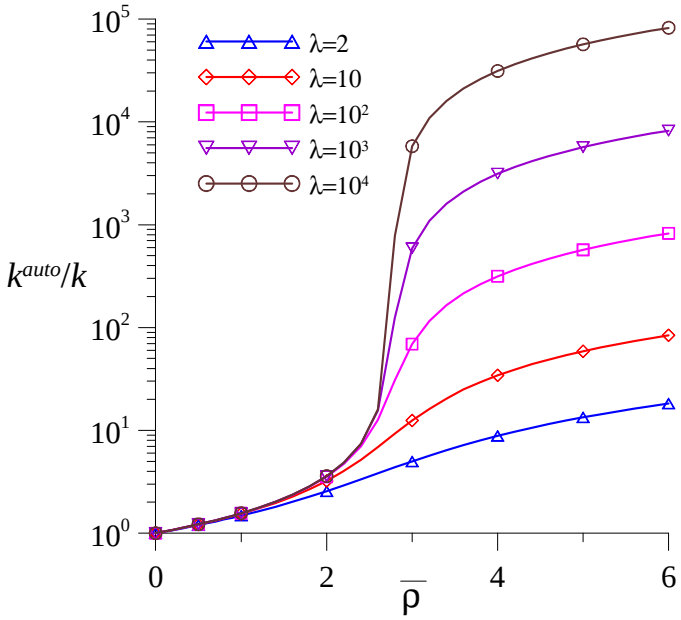



Fig 39. La variation de $k^{auto}/k$ en fonction de la densité adimensionnelle des fissures $\bar{\rho}$ pour différentes valeurs de $\lambda$ [180]

## 3.5 Conclusion

Ce chapitre s'est concentré sur la détermination de la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré. Les formulations des moyennes de vitesse et de gradient de pression ont été rappelées et la perméabilité effective est déduite de la loi de Darcy macroscopique. La résolution numérique présentée dans le Chapitre 2 est appliquée au cas d'une fissure isolée entourée d'une matrice infinie soumise à un gradient uniforme de pression à l'infini. Cela permet d'élaborer une solution semi-analytique de l'infiltration dans la fissure en fonction de la perméabilité de la matrice, de la conductivité de la fissure et des variables géométriques de la fissure. Différentes approches d'homogénéisation sont ensuite utilisées afin d'estimer la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré en se basant sur cette solution semi-analytique. Le schéma de Mori-Tanaka rélève une évolution linéaire de la perméabilité effective par rapport à la densité des fissures, alors que le schéma auto-cohérent représente une variation non-linéaire. En outre, une densité critique est trouvée qui est interprétée comme un seuil de percolation dans l'approche auto-cohérente pour la distribution isotrope d'orientation des fissures. Le fait que cette densité crotique n'existe pas pour une famille parallèle de fissures renforce l'idée de la lier au seuil de percolation. Le seuil de percolation obtenu par l'approche auto-cohérente pour le problème 3D est proche de celui trouvé dans la littérature. De plus, le modèle auto-cohérent est applicable au cas général d'un milieu contenant plusieurs familles de fissures dans lesquelles chaque famille est caractérisée par des paramètres moyens (densité, longueur caractéristique, orientation, conductivité). Ce modèle général sera employé pour la simulation hydromécanique de l'opération d'injection du $CO_2$ dans le réservoir qui sera présenté dans le Chapitre 5.

# Chapitre 4 . Extensions théoriques

## 4.1 Ecoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré fini 2D

### 4.1.1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons toujours considéré des fissures ou fractures dans un mileu infini. Cette hypothèse de milieu infini, dans lequel les fractures restent confinées dans un domaine fini, permet en effet de simplifier notablement l'expression de la solution potentielle car la condition à la frontière infinie intervient alors simplement comme une expression de $p_\infty$. Elle suffit et convient aussi parfaitement pour le calcul des perméabilités effectives. Mais dans certains cas de problèmes d'ingénieur, on peut être amené à modéliser l'écoulement dans un milieu poreux fracturé mais fini. C'est le cas par exemple de l'étude d'un réservoir fracturé délimité par des failles, socle imperméable ou surface du sol auxquels on voudrait pouvoir imposer des conditions aux limites particulières. Pour la modélisation de ces écoulements dans les milieux fracturés finis, la méthode des éléments de frontières présente encore l'avantage, en comparaison avec d'autres méthodes numériques, de réduire la dimension du problème. En particulier, le problème de potentiel tel que l'écoulement stationnaire du fluide ou la conduction de la chaleur dans un milieu poreux est généralement utilisé comme une référence pour montrer l'efficacité et l'intérêt de cette méthode dans la littérature [25, 20, 26]. Néanmoins, pour le problème particulier dans lequel le domaine contient des discontinuités, la méthode des éléments de frontières exhibe une dégénérescence mathématique. De nombreuses alternatives sont proposées afin de résoudre ce problème telles que : Accelerated Perturbation Boundary Element Model [156], Multi-domain Dual Reciprocity Method [130, 154], Green element method [99, 100, 101].

Un système d'équations intégrales de frontières pour l'écoulement dans un milieu poreux fissuré est introduit en premier par Rasmussen et al. [147] dans lequel la matrice et les fissures sont traitées commes des milieux séparés ayant une interface commune qui est la frontière des fissures contenues dans la matrice. Ce système est constitué alors de quatre équations : deux équations intégrales de frontière pour la matrice et la fissure et deux conditions pour la pression et la vitesse à l'interface entre la fissure et la matrice. Le calcul numérique nécessite un maillage fin pour calculer précisément la différence entre les inconnues au niveau des points de collocations sur deux faces de la fissure. Cette difficulté numérique a été résolue par Lough et al. [102] en considérant les fissures comme des plans dans la matrice. Cependant, ce nouveau modèle consiste encore en un couple des deux équations intégrales de frontières entre matrice et fissures, avec l'addition de l'inconnue de l'intensité de la source sur le plan de fissure.

Ce chapitre est consacré à l'extension des solutions théoriques et numériques de l'écoulement stationnaire présentées dans les chapitres précédents au cas d'un milieu poreux fissuré 2D fini. Une équation générale intégrale de frontière sera obtenue par l'utilisation de l'approche

de sous-structuration en associant le modèle de l'écoulement présenté dans la section 1.2.1. Dans cette méthode, le domaine est divisé en plusieurs sous-domaines où les fissures sont situées sur leurs frontières. L'échange de masse sur la fissure ou au point d'intersection entre fissures est considéré comme la condition aux limites pour chaque sous-domaine. L'équation intégrale de frontière sera écrite pour chaque domaine, et en les sommant on finit par trouver l'équation du potentiel pour le domaine entier contenant des fissures. Cette équation sera résolue ensuite en utilisant la méthode de collocation. La solution numérique obtenue est en bon accord avec celle obtenue par la méthode des éléments finis. Quelques exemples seront enfin présentés en vue d'illustrer la capacité des méthodes théorique et numérique développées.

### 4.1.2 Formulation d'intégrale de frontière de l'écoulement stationnaire

En considérant le domaine poreux fissuré $\Omega$ défini dans la section 1.2.1 et présenté par Fig 4 dans lequel l'écoulement est gouverné par la loi de Darcy (1) dans la matrice et la loi de Poiseuille (5) dans la fissure. Les expressions de conservation de la masse dans la matrice, en un point régulier et en un point singulier sont présentées respectivement par les équations (4), (8), (16). L'écoulement stationnaire dans le domaine $\Omega$ est influencé par les conditions aux limites imposées sur sa frontière $\partial\Omega$ dans les équations (17), (18), (19).

La méthode de sous-structuration a été largement employée en mécanique de rupture linéaire grâce à la précision des évaluations des quantités locales [20]. Cette section se concentre sur l'association du modèle d'écoulement présenté dans la section 1.2.1 avec cette approche afin d'élaborer une formulation intégrale de frontière de l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré. Cette méthode consiste à décomposer le domaine fissuré $\Omega$ en $I$ sous-domaines $\Omega_i$. Les lignes de séparation étant construites en prolongeant les fissures $\Gamma$ par les lignes fictives $\tilde{\Gamma}$ qui connectent les extrémités de fissures, mais n'intersectent pas les fissures existantes ou les autres lignes fictives (Fig 40). Pouya et Ghoreychi [137] ont présenté un algorithme pour générer automatiquement ces lignes fictives afin de créer des sous-domaines. A la suite, le maillage est généré pour chaque sous-domaine par des méthodes classiques, puis assemblé afin d'obtenir le maillage du domaine global. Cet outil est utile pour la modélisation numérique en utilisant la méthode des éléments finis. Cependant, il n'y a pas de contribution des lignes fictives dans la formulation finale en utilisant la méthode de sous-structuration comme on le verra par la suite.

La substitution (1) dans (4) résulte en l'équation de Laplace de la pression pour l'écoulement stationnaire :

$$\forall \underline{x} \in \Omega\text{-}\Gamma\ ; \qquad \Delta p(\underline{x}) = 0 \tag{186}$$

Une solution explicite de fonction de Green pour cette équation aux dérivées partielles n'existe que dans des cas rares de géométrie très simple. La technique numérique est alors naturellement appliquée. La procédure classique de la méthode des éléments de frontière

permet d'obtenir une solution générale du potentiel de cette équation pour un domaine sans fissures comme suit :

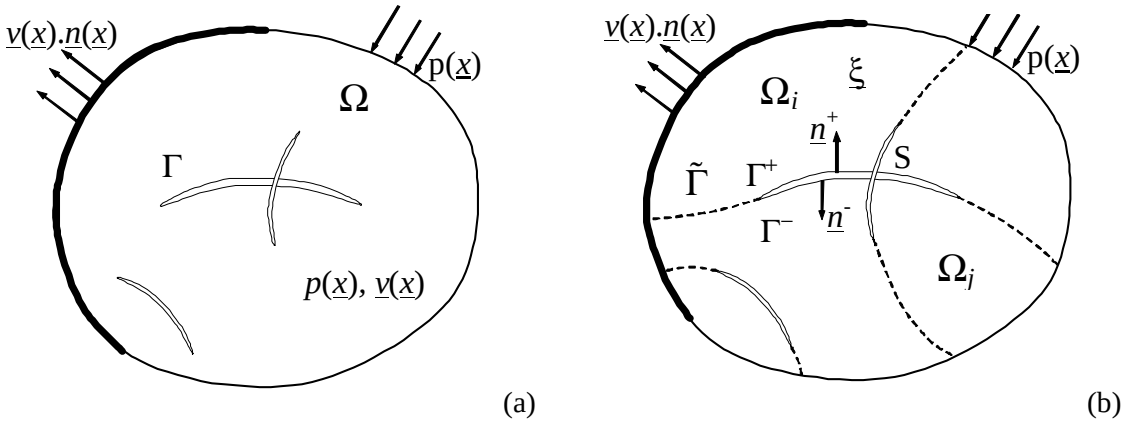



Fig 40. Application de la méthode de sous-structuration à l'étude de l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré

$$\zeta(\underline{x})\,p(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} [G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi}) - p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \tag{187}$$

où $\underline{x}$ est un point observé, $\underline{\xi}$ un point source, $G(\underline{x},\underline{\xi}) = \frac{1}{2\pi} Ln\left|\underline{x} - \underline{\xi}\right|$ la solution fondamentale de l'équation (186). $\zeta(\underline{x})$ est le coefficient de la position du point observé $\underline{x}$ (récepteur) :

$$\zeta(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2\pi} & \text{for } \underline{x} \in \partial\Omega \\ 1 & \text{for } \underline{x} \in \Omega;\ \underline{x} \notin \partial\Omega \\ 0 & \text{for } \underline{x} \in \Omega \end{cases} \tag{188}$$

avec $\alpha$ l'angle solide du domaine vu de $\underline{x} \in \partial\Omega$ (Fig 41).

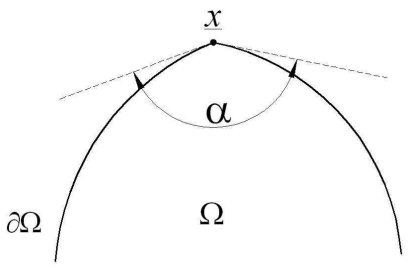



Fig 41. Angle solide du domaine $\Omega$ vu de $\underline{x} \in \partial\Omega$

Notons que le vecteur unitaire normal de la fissure $\underline{n}$ est orienté de $\Gamma^+$ à $\Gamma^-$, donc, $\underline{n} = \underline{n}^+ = -\underline{n}^-$. On suppose qu'un sous-domaine $\Omega_i$ est délimité par un segment $\partial\Omega_i$ sur la frontière du domaine global $\partial\Omega$, $m_{1i}$ surfaces positives de fissures $\Gamma_j^+$, $m_{2i}$ surfaces négatives de fissures $\Gamma_j^-$ et $m_{3i}$ lignes fictives $\tilde{\Gamma}_j$ (Fig 42). En notant $\partial\Omega_i^* = \partial\Omega_i \cap \sum_{j=1}^{m_{i1}} \Gamma_j^+ \cap \sum_{j=1}^{m_{i2}} \Gamma_j^- \cap \sum_{j=1}^{m_{i3}} \tilde{\Gamma}_j$, ce sous-

domaine est supposé également comprendre $m_i$ points singuliers $S_i$ sur $\partial\Omega_i^*$ auxquels $m_{4i}$ et $m_{5i}$ surfaces positives ou négatives de fissures sont reliées.

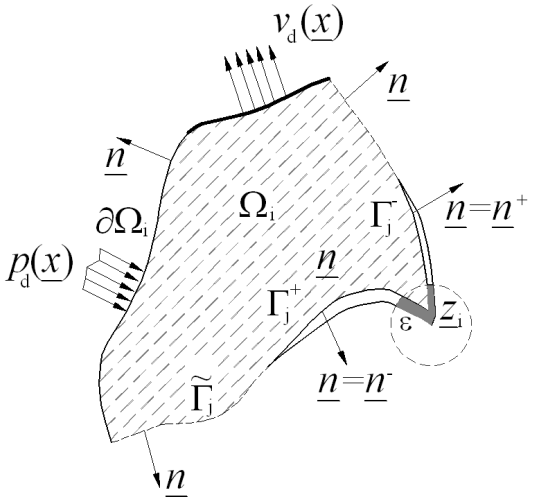



Fig 42. Sous-domaine $\Omega_i$

En écrivant (187) pour chaque sous-domaine $\Omega_i$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\zeta_i(\underline{x})\,p(\underline{x}) = & \int_{\partial\Omega_i} [G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi}) - p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \\
& + \sum_{j=1}^{m_{3i}} [G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi}) - p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \\
& + \sum_{j=1}^{m_{1i}} [G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi}) - p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}^-(\underline{\xi})d\xi \\
& + \sum_{j=1}^{m_{2i}} \int_{\Gamma_j^-} [G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi}) - p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}^+(\underline{\xi})d\xi \\
& + \sum_{j=1}^{m_{4i}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_j^+ + \varepsilon} [G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi}) - p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}^-(\underline{\xi})d\xi \\
& + \sum_{j=1}^{m_{5i}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_j^- + \varepsilon} [G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi}) - p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}^+(\underline{\xi})d\xi
\end{aligned} \tag{189}$$

Il est à noter qu'il n'y a pas de discontinuté de la pression $p(\underline{\xi})$, du gradient de pression $\nabla p(\underline{\xi})$ sur les lignes fictives $\tilde{\Gamma}$, ni de la pression $p(\underline{\xi})$ sur les fissures $\Gamma$. La somme de $I$ équations (189) correspondant à $I$ sous-domaines $\Omega_i$ pour le point observé $\underline{x}$ conduit à :

$$\left(\sum_i \zeta_i(\underline{x})\right) p(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} [G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi}) - p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \tag{190}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}[G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi})-p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{S}\sum_{j}\int_{S_j+\varepsilon}[G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi})-p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi$$

On peut constater que l'intégrale sur les lignes fictives disparaît, et que la discontinuité du gradient de pression $[\![\nabla p(\underline{\xi})]\!]$ intervient sur les fissures et aux points singuliers comme les conditions aux limites. Néanmoins, le terme $[\![\nabla p(\underline{\xi})]\!]$ n'est pas défini sur les points d'intersection entre fissures. C'est pourquoi nous considérons le point singulier dans l'équation (189) et cette dégénérescence peut être traitée en utilisant l'expression de conservation de la masse (16). Quet le point observé $\underline{x}$ est situé sur une ligne de fissure ou en un point d'intersection entre fissures, la somme des angles solides $\alpha_i$ pour deux ou plusieurs sous-domaines adjacents est égale à $2\pi$ (Fig 43). Donc, $\sum_i \zeta_i(\underline{x})=1$ pour un point $\underline{x}$ dans $\Omega$, c'est-à-dire : $\zeta(\underline{x})=\sum_i \zeta_i(\underline{x})$.

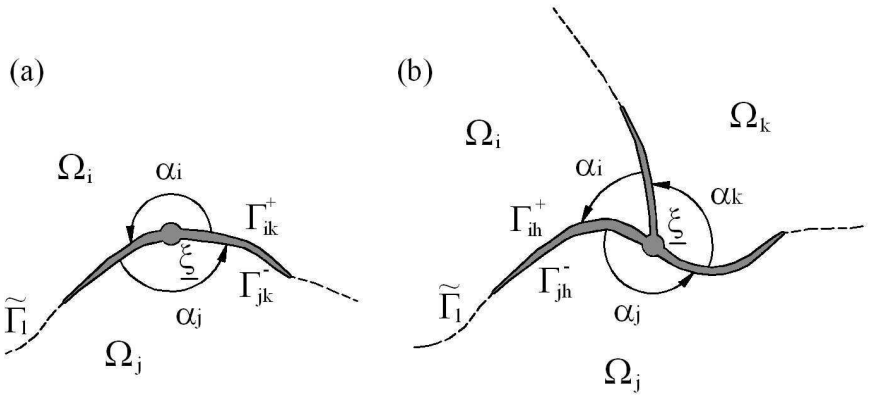



Fig 43. Point observé $\xi$ situé : (a) sur une fissure $\alpha_i+\alpha_j=2\pi$; en un point d'intersection entre fissures $\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k=2\pi$

La discontinuité de la vitesse à travers deux côtés d'une fissure est déduite par la conservation de la masse en un point régulier sur la fissure (8). En plus, $[\![\underline{v}(\underline{\xi})]\!]=-k[\![\nabla p(\underline{\xi})]\!]$, alors :

$$[\![\nabla p(\underline{\xi})]\!].\underline{n}(s)=-\frac{1}{k}\partial_s q(s) \tag{191}$$

L'introduction de (191) dans (190) donne:

$$\begin{aligned}\zeta(\underline{x})\,p(\underline{x}) &= \int_{\partial\Omega}[G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi})-p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \\ &-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}\partial_s q(s)G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi-\frac{1}{k}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{S}\sum_{j}\int_{S_j+\varepsilon}\partial_s q(s)G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi\end{aligned} \tag{192}$$

L'intégration par parties s'en déduit:

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}\partial_s q(s)G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi=\sum_{S}\left(\sum_{j}q_{ij}^{0}(\underline{z}_i)\right)G(\underline{x},\underline{z}_i)-\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}q(s)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi \qquad (193)$$

où $\underline{z}_i \in S$ est le point singulier numéroté $i$ ; $q_{ij}^{0}$ est le flux sortant dans la branche $j$ du point d'intersection $\underline{z}_i$. La conservation de la masse $\sum_j q_{ij}^{0}(\underline{z}_i)=0$ mène à :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{S}\sum_{j}\int_{S_j+\varepsilon}\partial_s q(s)G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{S}\sum_{j=1}^{m}\int_{0}^{\varepsilon(\Gamma_j)}q(s)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi \qquad (194)$$

En considérant le débit $q(s)$ constant et égal à $q_{ij}^{0}$ dans chaque segment infinitésimal ε de la branche de fissure $j$ reliée au point d'intersection $\underline{z}_i$, on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{S}\sum_{j=1}^{m}\int_{0}^{\varepsilon(\Gamma_j)}q(s)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi=\sum_{S}\sum_{j=1}^{m}q_{ij}^{0}\int_{0}^{\varepsilon(\Gamma_j)}\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi=0 \qquad (195)$$

L'équation (192) résulte alors en :

$$\begin{aligned}\zeta(\underline{x})\,p(\underline{x})&=\int_{\partial\Omega}[G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi})-p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi\\&+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}q(s)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi\end{aligned} \qquad (196)$$

En substituant (5) dans (196), on trouve :

$$\begin{aligned}\zeta(\underline{x})\,p(\underline{x})&=\int_{\partial\Omega}[G(\underline{x},\underline{\xi})\nabla p(\underline{\xi})-p(\underline{\xi})\nabla G(\underline{x},\underline{\xi})]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi\\&-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}c(s)\partial_s p(s)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi})d\xi\end{aligned} \qquad (197)$$

Ce résultat est écrit pour un milieu isotrope de la perméabilité $k$, qui peut être étendu à celui du milieu anisotrope en utilisant la transformation linéaire présentée dans Pouya [136] :

$$\begin{aligned}\zeta(\underline{x})\,p(\underline{x})&=\frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\int_{\partial\Omega}p(s)\frac{\left(\underline{x}-\underline{\xi}(s)\right).\underline{n}(s)}{\left\|\sqrt{\boldsymbol{k}^{-1}}.\left(\underline{x}-\underline{\xi}(s)\right)\right\|^{2}}ds\\&-\frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\int_{\partial\Omega}Ln\left\|\sqrt{\boldsymbol{k}^{-1}}.\left(\underline{x}-\underline{\xi}(s)\right)\right\|\boldsymbol{k}\underline{\nabla}p\left(s\right).\underline{n}(s)ds\\&-\frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\sum_{j}\int_{\Gamma_j}q_j(s)\frac{\underline{x}-\underline{z}_j(s)}{\left\|\sqrt{\boldsymbol{k}^{-1}}.\left(\underline{\xi}-\underline{z}_j(s)\right)\right\|^{2}}.\boldsymbol{k}^{-1}.\underline{t}_j(s)ds\end{aligned} \qquad (198)$$

En conclusion, l'approche de sous-structuration conduit à une unique équation intégrale de frontière à résoudre en comparant avec un système de quatre équations présenté par Rasmussen et al. [147] et Lough et al. [102]. Cette solution générale du potentiel facilite la résolution numérique par la réduction de la dimension du problème de 2D à 1D. Le maillage se fait alors uniquement sur la frontière du domaine $\partial\Omega$ et sur les lignes de fissures $\Gamma_j$. Cette formulation est également utile pour résoudre des problèmes physiques concernant un domaine semi-infini, par exemple le problème de grande échelle pour l'écoulement autour d'une faille dans une formation géologique [106, 24].

### 4.1.3 Résolution numérique

La méthode numérique, basée sur l'utlisation des points de collocation, a été présentée dans la section 2.2 afin de modéliser l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux infini contenant des fissures en 2D [139] ou en 3D [180]. La procédure générale de la méthode de collocation, appliquée à résoudre le problème du potentiel dans un domaine fini sans fissures, peut être trouvée dans Banerjee et Butterfield [10]; Brebbia et Dominguez [25] ; Bonnet [20]. Une simple combinaison de ces deux processus numériques permet donc de résoudre le problème de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré fini. Un algorithme numérique est brièvement présenté dans cette section afin de résoudre l'équation (197).

Le discrétisation de l'équation (197) est effectuée par la discrétisation de la géométrie et le choix des fonctions d'interpolation des variables. La frontière et les fissures sont globalement divisées en $E$ éléments et $N$ nœuds dans lesquels on a $E_b$ éléments sur la frontière et $E_f$ éléments sur les fissures ($E=E_b+E_f$). Le maillage doit être conforme aux intersections entre fissures et il est recommendé qu'il soit raffiné aux extrémités de fissures. On suppose une variation linéaire de pression et de flux normal sur les éléments appartenant à la frontière. Les fonctions d'interpolation de pression sont présentées dans les équations (101)-(104) pour les éléments sur les fissures. L'ensemble global des points de collocation est choisi par l'addition des nœuds sur la frontière à l'ensemble des points de collocation sur les fissures choisi par la méthode dans la section 2.2.1.2. La méthode de collocation consiste à enforcer l'équation (197) aux points de collocation afin d'obtenir un système d'équations ayant comme inconnues la pression nodale sur les fissures et la pression nodale ou le flux normal nodal sur la frontière. La solution approximative est obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés. Une fois cela est réalisé, l'inconnue est déterminée, l'équation (197) est alors utilisée à nouveau pour calculer le champ de pression et le champ de flux dans le milieu poreux fissuré entier. La procédure numérique est implémentée dans un programme nommé « BEM code »

### 4.1.4 Exemples numériques

Cette section est consacrée à présenter la solution numérique de l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré fini par la formulation d'intégrale (197) et le schéma numérique décrit dans la section précédente. Deux exemples sont d'abord abordés comme des problèmes de référence en vue de vérifier la validité et l'exactitude des développements théorique et numérique. Dans le premier exemple, l'écoulement dans et autour d'une fissure rectiligne

dans une matrice infinie est modélisée car les solutions analytique et semi-analytique sont disponibles pour cette exemple [136, 139]. Un scénario simple d'une fissure isolée, entourée par un domaine poreux fini, est ensuite considéré dans le deuxième exemple, dont la solution sera comparée avec celle obtenue par la méthode des éléments finis. Deux autres exemples sont finalement présentés afin d'illustrer les capacités de la méthode appliquée aux cas de plusieurs fissures intersectées dans un milieu poreux fini.

#### 4.1.4.1 Validation de la solution numérique

***Une fissure rectiligne dans un domaine poreux fini***

Considérons un domaine poreux fissuré, représenté par une perméabilité isotrope $k$, contenant une fissure rectiligne de conductivité $c$ et de longueur $2L$. La taille du domaine est dix fois supérieure à la longueur de la fissure. La fissure est située sur l'axe $x$ et occupe l'intervalle $[-L,L]$. Une pression linéaire $p(\underline{x})=A_1x$ est prescrite sur la frontière du domaine. Afin d'étudier ce problème, nous utilisons les variables adimensionelles dans l'équation (26). La solution de ce problème est obtenue directement par la résolution de l'équation (197). Par ailleurs, elle peut être également obtenue par la résolution de l'équation (24) en considérant le domaine comme un domaine infini. Fig 44 présente la comparaison entre les solutions numériques de flux dans la fissure obtenues par ces deux méthodes pour différentes valeurs de λ. Un bon accord est observé entre ces solutions.

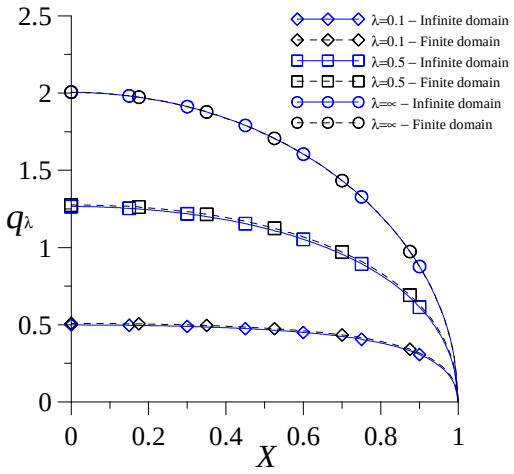



Fig 44. Comparaison des solutions numériques du flux dans la fissure obtenues par deux méthodes différentes : milieu fini et milieu infini [181]

***Un domaine poreux fini contenant une fissure isolée***

Envisageons un domaine rectangulaire, ayant une perméabilité isotrope $k$, contenant une fissure isolée de conductivité $c$ (Fig 45). Deux valeurs constantes de pression sont appliquées aux côtés gauche et droit du domaine et un flux nul est prescrit sur ses deux côtés supérieur et inférieur. Le but de cet exemple est de comparer la solution obtenue par le programme d'élément de frontière (BEM code) avec celle obtenue par le programme d'élément fini (FEM code) présenté par Ghabezloo et Pouya [61]. Selon FEM code, un maillage conforme est

généré automatiquement et adapté au domaine fissuré [137]. La fissure est modélisée par un élément joint d'épaisseur nul avec quatre nœuds. Le champ de pression obtenu par le BEM code est exposé sur Fig 46. On constate que les isovaleurs sont denses autour de la pointe de fissure. Cela montre une concentration de flux autours des pointes de la fissure. Autrement dit, le fluide entre dans la fissure et sort de la fissure avec un volume important à ces points. Ce phénomène est observé plus clairement sur une visualisation 3D de la variation de pression dans la matrice (Fig 48). Les solutions de pression et de flux dans la fissure sont présentées sur Fig 48 montrant un bon accord entre les deux méthodes.

Ces deux méthodes, de validation de la solution obtenue par l'équation (197) et sa résolution numérique (BEM code), démontrent la précision élevée du développement numérique présenté dans ce travail.

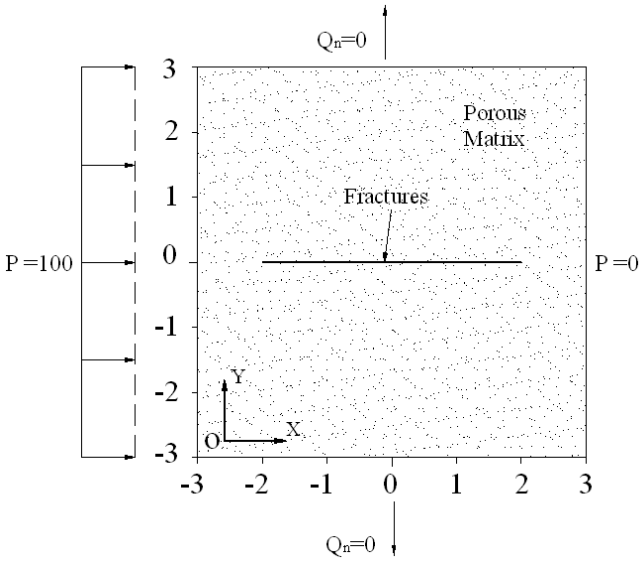



Fig 45. Géométrie du domain et les conditions aux limites du problème de référence d'écoulement à travers un mileiu contenant une fissure centrale [181]

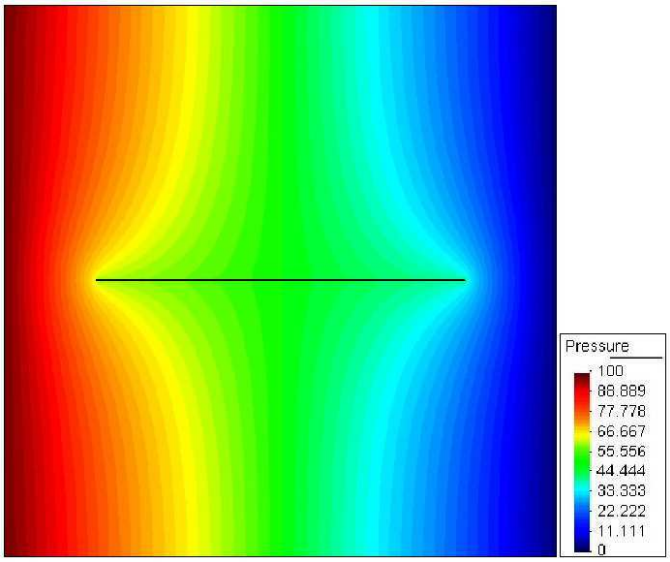



Fig 46. Champ de pression dans un milieu poreux fissuré ($k$=1, $c$=100) [181]

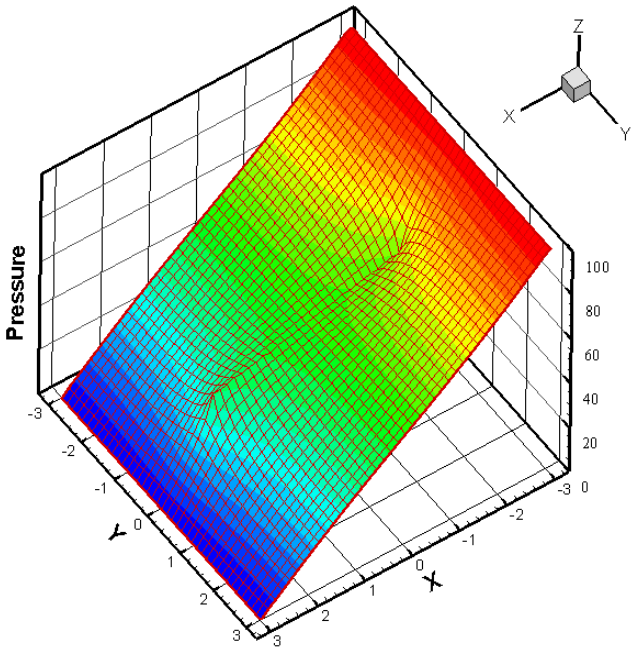



Fig 47. Visualisation 3D du champ de pression dans un milieu poreux fissuré ($k$=1, $c$=100) [181]

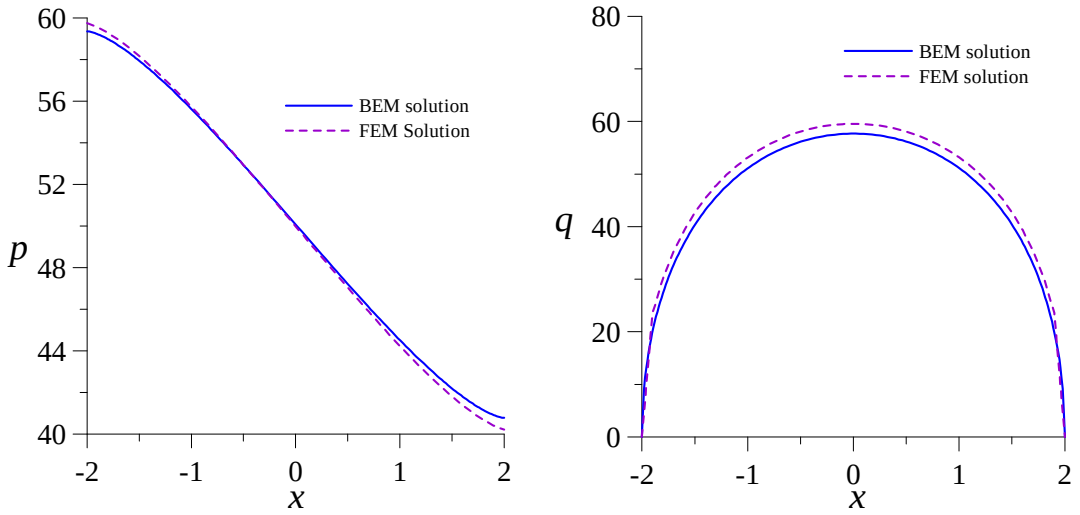



Fig 48. Comparaison des solutions numériques obtenues par BEM code et FEM code ($k$=1, $c$=100) [181]

### 4.1.4.2 Cas de plusieurs fissures intersectées

Plusieurs fissures intersectées, entourées par un domaine avec géométrie et conditions aux limites similaires au problème précédent, sont considérées dans les troisième et quatrième exemples. La fissure courbe est approximée par une série de petits segments linéaires afin d'éviter la complexité apportée par le calcul des paramètres curvilignes. La géométrie des fissures et le champ de pression sont présentés dans Fig 49. (à gauche pour le troisième exemple et à droite pour le quatrième exemple). La conservation de la masse (16) en tous les

points d'intersection entre fissures numérotés 1-6 est vérifiée par la méthode utilisée dans la section 2.2.2.2. Le résultat obtenu montre une erreur relative $E < 3\%$ pour tous les points.

On remarque bien que le résultat sur la frontière du domaine est exact la condition aux limites imposée pour le domaine fini (Fig 46 et Fig 49). Alors qu'une fluctuation du champ de pression sur le domaine considéré est observée dans Fig 18 et Fig 19 pour l'écoulement dans un milieu infini.

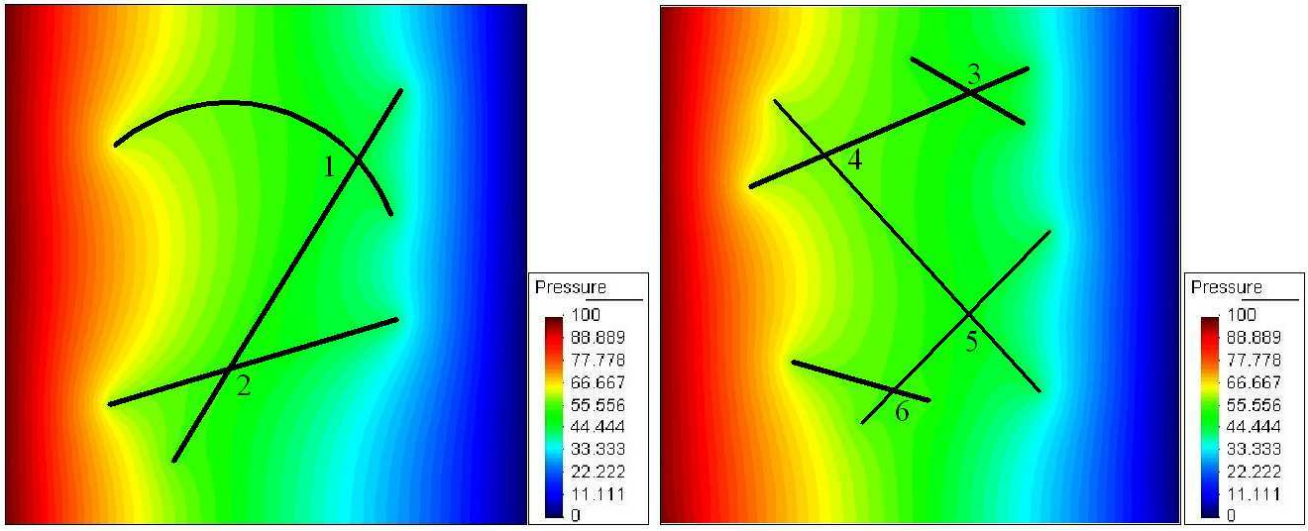



Fig 49. Champ de pression dans un milieu poreux contenant plusieurs fissures intersectées ($k$=1, $c$=100) [181]

### 4.1.5 Conclusion

L'écoulement stationnaire au sein d'un domaine poreux contenant des fissures est étudié dans ce chapitre. L'approche de sous-structuration est utilisée afin d'obtenir une solution théorique. L'hypothèse de continuité de pression sur la fissure d'épaisseur nulle résulte en une équation intégrale de frontière gouvernant l'écoulement du fluide, contre un système de quatre équations proposées par Rasmussen et al. [147] et Lough et al. [102]. Cette équation représente la pression dans la matrice, qui est une fonction de la pression et du flux normal sur la frontière et la pression sur les fissures qui prend en compte l'interaction et l'intersection entre fissures. Cela montre l'avantage important de réduire la dimension du problème. Un maillage conforme doit être généré sur la frontière et sur les fissures. La méthode numérique basée sur la méthode de collocation est développée pour résoudre l'équation théorique. La solution numérique a été validée par la comparaison avec les résultats obtenus par la méthode des éléments finis ou par ceux obtenus pour un milieu infini [139]. La procédure similaire en utilisant la méthode de sous-structuration et le modèle de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré 3D [132] ainsi que la résolution numérique [180] nous permettent d'étendre ce travail au problème 3D. En plus, les équations, présentées dans le Chapitre 1, gouvernent l'écoulement transitoire au sein d'un milieu poreux fissuré qui permettent également d'établir une solution générale pour ce type d'écoulement. L'écoulement transitoire dans un milieu poreux fissuré est un axe important qui est en cours de développement grâce à de nombreuses

applications telles que l'ingénierie pétrolière, la gestion de l'eau souterraine, etc. Le développement théorique de l'écoulement transitoire a été réalisé dont les résultats obtenus sont présentés dans l'Annexe 7. Ce resultat théorique devrait être valorisé par une modélisation numérique qui est en cours de développement.

## 4.2 Perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé

### 4.2.1 Introduction

Les études et modélisations théoriques et numériques présentés dans les sections précédentes de ce mémoire ont toutes concernées les milieux saturés. La perméabilité effcetive des milieux fissurés et non saturés est un sujet d'intérêt grandissant pour ses divreses applications, mais encore peu exploré sur le plan théorique et de modélisation numérique. Une revue de la littérature montre que la perméabilité des matériaux poreux non-saturés (mais sans fissures) a été intensivement étudiée expérimentalement et théoriquement [176, 196, 54, 171, 190]. Mais beacoup moins de résultats sont disponibles pour la perméabilité des milieux poreux fissurés et non-saturés. Il convient de noter qu'une fissure remplie de fluide tend à augmenter la perméabilité, alors qu'une fissure vide (fissure ne contenant pas de fluide) agit comme une membrane imperméable. Elle constitue un obstacle à l'écoulement et diminue donc la perémabilité effective. A notre connaissance, il n'y a pas de modèle représentant cette double nature de contribution d'une fissure non-saturée à la perméabilité effective des matériaux poreux fissurés non-saturés.

Ce chapitre se concentre à présenter une solution obtenue dans le cadre d'un travail collectif [141], de l'écoulement stationnaire dans et autour d'une fissure partiellement saturée noyée dans une matrice infinie soumise à un champ lointain d'un gradient constant de pression. Pour ce faire, la solution d'une fissure super-conductrice présentée dans la section 1.2.2.2 [136] est étendue au cas d'une fissure vide. La solution correspondant à une fissure non-saturée est obtenue ensuite par la superposition de ces solutions le long de la ligne de fissure qui est utilisée finalement pour l'objectif de déterminer la perméabilité effective d'un matériau poreux fissuré non-saturé.

L'hypothèse fondamentale concernant la distribution de la teneur en fluide dans l'espace des pores de matrice et dans la fissure est nécessaire afin d'étudier l'écoulement dans un milieu poreux fissuré non-saturé. En supposant que l'ouverture des fissures est plus grande que la taille des pores et compte tenu des phénomènes de capillarité, on peut raisonnablement admettre que les fissures, entourées par une matrice poreuse en équilibre hydraulique, sont vides tandis que la matrice n'est pas encore totalement saturée avec le fluide. Après la saturation de la matrice, le fluide continue à remplir les fissures jusqu'à une saturation complète du milieu. Ce processus de saturation du milieu poreux fissuré suit l'hypothèse faite dans le modèle conceptuel de Wang et Narasimhan [183] pour l'écoulement dans un massif rocheux perméable non-saturé contenant des fissures. Ce modèle a été largement utilisé pour la modélisation numérique et le champ d'application [131, 123, 111, 173, 189, 112] en vue de caractériser l'écoulement et le transport de contaminant dans les formations géologiques fissurées. En plus, ce modèle a été vérifié également par plusieurs études en laboratoire ou in-situ [76, 80 88, 184, 29, 166].

Dans cette section deux types de fissure sans matériaux remplissage sont considérés :

Fissure conductive : La fissure est remplie pleinement par le fluide et est représentée par une conductivité finie. Un champ continu de pression est considéré entre les deux faces de la fissure. Les études théoriques et numériques sur ce type de fissure ont été abordées dans les chapitres précédents.

Fissure vide : La fissure ne contribue pas à l'écoulement tangentiel et fait barrière à l'écoulement tranversal (normal à la fissure). Elle agit comme une membrane imperméable et une discontinuité de pression peut alors exister entre les deux faces de la fissure. Par conséquent, la condition aux limites sur la fissure s'écrit : $\underline{v}^{+}.\underline{n} = \underline{v}^{-}.\underline{n} = 0$.

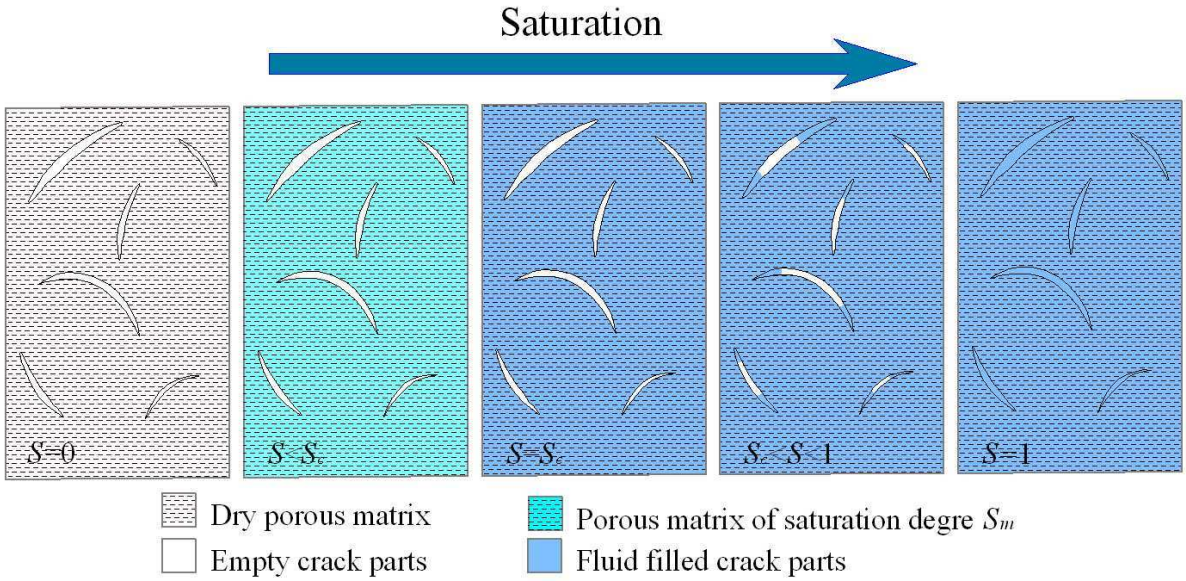



Fig 50. Modèle conceptuel de l'écoulement dans un milieu poreux fissuré non-saturé, le processus de saturation de gauche à droite : matrice non-saturée et fissures vides ; matrice saturée et fissures non-saturées ; milieu compètement saturé [141]

### 4.2.2 Un seule fissure vide dans une matrice infinie

En considérant les équations gouvernant l'écoulement stationnaire autour d'une fissure imperméable dans une matrice infinie soumise à un champ lointain, nous pouvons établir une formulation générale du potentiel sous la forme d'une équation intégrale singulière. La résolution de cette équation peut être obtenue par une méthode similaire utilisée pour la fissure super-conductrice présentée dans l'Annexe 1. Néanmoins, elle peut être également obtenue par une méthode plus simple basée sur la transformation mathématique du problème de fissure super-conductrice dans lequel la solution est déjà connue [141]. Cette méthode sera présentée ci-dessous.

#### 4.2.2.1 Transformation de la solution de fissure super-conductrice en solution de fissure vide

Notons $\underline{u}(\underline{x})$ et $\underline{v}(\underline{x})$ les champs de vitesse correspondant respectivement aux problèmes d'une fissure super-conductrice et d'une fissure vide. Ces deux champs doivent satisfaire respectivement les systèmes d'équations (199) et (200). Les équations ($a$) et ($a'$) expriment la

conservation de la masse dans la matrice. Celles (*b*) et (*b′*) représentent les conditions que, selon $\underline{u} = -k\,\nabla p$ et $\underline{v} = -k\,\nabla p$, $\underline{u}$ et $\underline{v}$ doivent être des gradients. L'équation (*c*) résulte de la pression constante le long de la ligne de fissure pour la fissure super-conductrice et de $\underline{u} = -k\,\nabla p$, alors que celle (c') exprime la condition d'une barrière imperméable pour la fissure vide. Les autres équations représentent la condition aux limites.

Dans le cas d'une fissure super-conductrice :

$$\begin{cases} \forall \underline{x} \in \Omega - \Gamma; & \nabla.\underline{u}(\underline{x}) = 0 & (a) \\ \forall \underline{x} \in \Omega - \Gamma; & \partial_x u_y = \partial_y u_x & (b) \\ \forall \underline{x} \in \Gamma; & \underline{u}(\underline{x}).\underline{t}(\underline{x}) = u_t(\underline{x}) = 0 & (c) \\ \lim_{x\to\infty} \underline{u}(\underline{x}) = \underline{U} = U_1 \underline{e}_x + U_2 \underline{e}_y & & (d) \end{cases} \tag{199}$$

Dans le cas d'une fissure vide :

$$\begin{cases} \forall \underline{x} \in \Omega - \Gamma; & \nabla.\underline{v}(\underline{x}) = 0 & (a') \\ \forall \underline{x} \in \Omega - \Gamma; & \partial_x v_y = \partial_y v_x & (b') \\ \forall \underline{x} \in \Gamma; & \underline{v}(\underline{x}).\underline{n}(\underline{x}) = v_n(\underline{x}) = 0 & (c') \\ \lim_{x\to\infty} \underline{v}(\underline{x}) = \underline{V} = V_1 \underline{e}_x + V_2 \underline{e}_y & & (d') \end{cases} \tag{200}$$

Le problème de l'écoulement dans et autour d'une fissure super-conductrice isolée a été résolu théoriquement dans la section 1.2.2.2, la solution $\underline{u}(\underline{x})$ de l'équation (199) est alors connue. En fait, la solution $\underline{v}(\underline{x})$ de l'équation (200) peut être déduite de $\underline{u}(\underline{x})$ en prenant :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{e}_z \times \underline{u}(\underline{x}) \tag{201}$$

En injectant (201) dans (200) et en utilisant (199), les équations (*a′*) et (*b′*) sont vérifiées. En ce qui concerne les équations (*c′*) et (*d′*), nous avons $\underline{v}(\underline{x}).\underline{n} = \left[\underline{e}_z \times \underline{u}(\underline{x})\right].\underline{n} = -\underline{u}(\underline{x}).\left[\underline{e}_z \times \underline{n}\right]$ $= -\underline{u}(\underline{x}).\underline{t}(\underline{x}) = 0$ pour $\forall \underline{x} \in \Gamma$ et $\lim_{x\to\infty} \underline{v}(\underline{x}) = -U_2 \underline{e}_x + U_1 \underline{e}_y = \underline{e}_z \times \underline{U}$. En conséquence, si $\underline{V} = \underline{e}_z \times \underline{U}$, l'expression de $\underline{v}(\underline{x})$ dans l'équation (201) satisfait l'équation (200) représentant le problème d'une fissure vide. L'unicité de la solution d'écoulement stationnaire implique $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{e}_z \times \underline{u}(\underline{x})$ est la solution du problème de l'écoulement (200) correspondant à la condition aux limites $\underline{V} = \underline{e}_z \times \underline{U}$.

La relation entre les solutions pour les problèmes de la fissure vide et de la fissure super-conductrice, exprimée dans l'équation (201), peut être vérifiée numériquement en utilisant la méthode des éléments finis. Pour ce faire, les conditions aux limites doivent être définies attentivement afin d'assurer l'équivalence entre ces deux problèmes validée pour le domaine fini. A cet égard, Fig 51 présente deux problèmes de l'écoulement au sein de deux domaines rectangulaires avec deux conditions aux limites équivalentes imposées à sa frontière. Le premier domaine contient une fissure super-conductrice. Sur sa frontière, une vitesse normale constante $\underline{u}(\underline{x}).\underline{n} = U$ est appliquée aux côtés gauche et droit et une pression linéaire $p(\underline{x}) = -Ux/k$ aux côtés supérieur et inférieur. Le deuxième domaine comprend une fissure vide avec une

géométrie identique à celle du premier domaine. Une vitesse constante $\underline{v}(\underline{x}).\underline{n}=-U$ est imposée sur les côtés supérieur et inférieur et une pression linéaire $\pi(\underline{x})=-Uy/k$ aux côtés gauche et droit. Il peut être montré analytiquement que la solution du problème de la fissure vide peut être déduite de celle de la fissure super-conductrice par l'équation (201). La vérification numérique confirme un bon accord entre les solutions numériques du $\underline{u}(\underline{x})$ et $\underline{v}(\underline{x})$ pour ces deux problèmes, comme présenté par Fig 52.

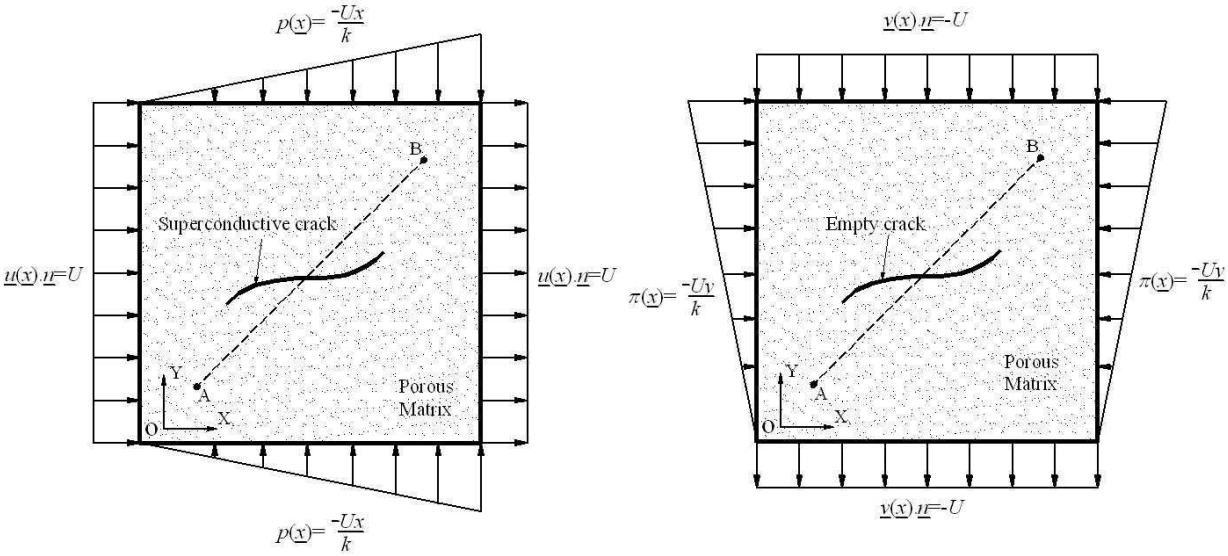



Fig 51. Ecoulement dans deux domaines, avec deux conditions aux limites équivalentes, contenant une : (a) fissure super-conductrice ; (b) fissure vide [141]

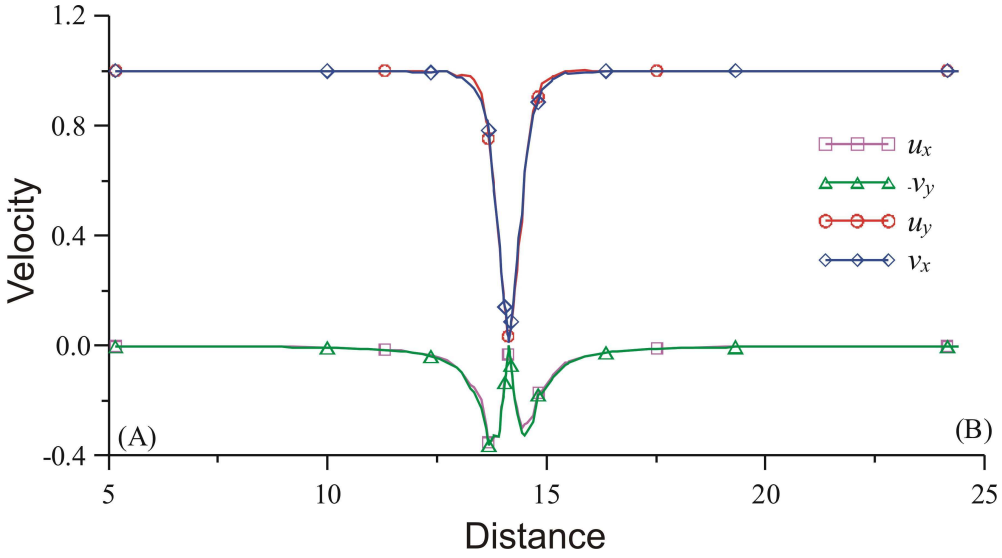



Fig 52. Comparaison des solutions numériques de vitesse pour deux problèmes équivalents (le résultat est tracé sur la coupe AB dans Fig 51) [141]

### 4.2.2.2 Solution de l'écoulement autour d'une fissure vide

L'équivalence établie dans la section précédente permet de déduire la solution pour la fissure vide de celle présentée dans la section 1.2.2.2 pour la fissure super-conductrice. Considérons

une fissure vide de longueur $2L$ située sur l'axe $x$ et centrée en l'origine du système de coordonnées. Pour un gradient de pression parallèle à la fissure, l'écoulement n'est pas influencé par la présence de la fissure. Par conséquent, la solution, correspondant au cas général d'un champ lointain $p_\infty(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x} = A_1x + A_2y$, est obtenue en ajoutant $A_1x$ à celle pour $p_\infty(\underline{x}) = A_2y$. Nous considérons alors le cas d'une matrice infinie contenant une fissure rectiligne vide soumise à un gradient de pression $p_\infty(\underline{x}) = A_2y$ à l'infini.

La solution de l'écoulement autour d'une fissure super-conductrice dans l'équation (31) présente une continuité de pression passant par la fissure. Au contraire, la solution $\pi(x,y)$ pour la fissure vide doit réprésenter une discontinuité à travers la ligne de fissure et la conditon $\underline{v}.\underline{n} = 0$. Cette solution peut être trouvée en utilisant l'expression (31) de telle façon que le champ de vitesse satisfait l'équation (200). Notons que si le terme $L^2$ dans la formulation $p(x,y)$ est remplacé par une variable $\zeta$, $p(x,y,\zeta,A_1)$ satisfait toujours l'équation laplacienne $\Delta p(x,y,\zeta,A_1)=0$ quels que soient $\zeta$ et $A_1$. En conséquence, on peut prendre $\zeta=-L^2$ et $A_1=A_2$ et on note $p'(x,y)=p(x,y,-L^2,A_2)$ qui conduit à $\Delta p'(x,y)=0$. En utilisant les variables adimensionnelles, on a :

$$p'(x,y) = A_2 L X \sqrt{\frac{\sqrt{(1+X^2-Y^2)^2+4X^2Y^2}+(1+X^2-Y^2)}{2X^2}} \qquad (202)$$

En plus, la solution $\pi(x,y)$ doit être unique et satisfaire les conditions dans l'équation (200). En s'inspirant de la relation entre les champs de vitesse pour la fissure vide et la fissure super-conductrice dans la section précédente, la solution $\pi(\underline{x})$ peut être obtenue comme : $\pi(x,y) = p'(-y,x)$ :

$$\pi(x,y) = A_2 L Y \Psi(X^2, Y^2) \qquad (203)$$

où,

$$\Psi(X^2,Y^2) = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-X^2+Y^2)^2+4X^2Y^2}+(1-X^2+Y^2)}{2Y^2}} \qquad (204)$$

Notons que :

$$\Psi(X^2,Y^2) = \frac{1}{\Phi(X^2,Y^2)} \qquad (205)$$

D'une part, la relation $\partial_x\pi = -\partial_y p'$, $\partial_y\pi = \partial_x p'$ induit $\Delta\pi = \Delta p' = 0$. Il peut être vérifié que cette solution satisfait également les conditions aux limites à l'infini $y\to\infty$ et sur la ligne de fissure, $\partial_y\pi = 0$. Par ailleurs, $\pi(\underline{x})$ rélève la symétrie par rapport à l'axe $x$ et la discontinuité à travers la ligne de fissure. D'autre part, le champ de vitesse dans la matrice $\underline{v}(\underline{x}) = -k\nabla\pi(\underline{x})$ vérifie exactement la relation entre les problèmes de la fissure vide et de la fissure super-conductrice dans l'équation (201), c'est-à-dire : $\partial_x\pi = -\partial_y p$ et $\partial_y\pi = \partial_x p$.

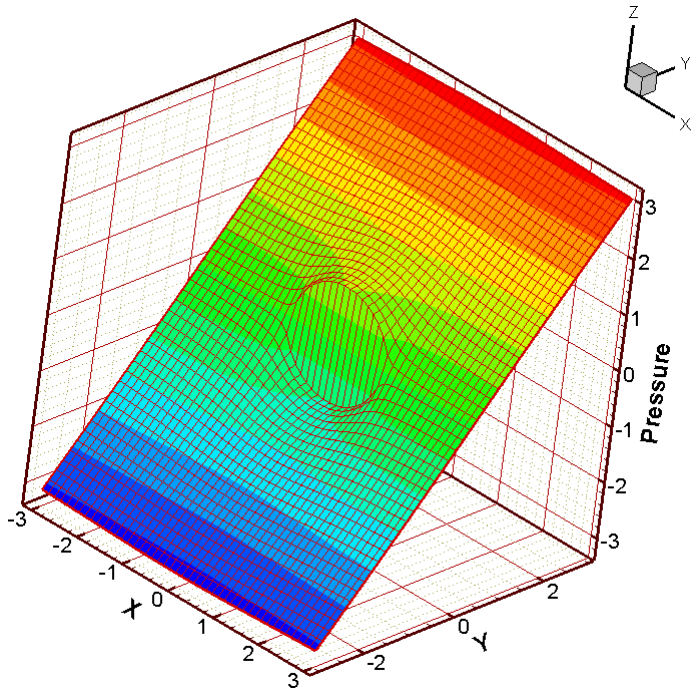



Fig 53. Champ de pression $\pi(x,y)$ autour d'une fissure vide dans une matrice poreuse infinie soumise à l'infini à un gradient constant de pression normal à la direction de fissure [141]

Comme mentionné ci-dessus, le champ de pression, pour un champ lointain du gradient de pression parallèle à la fissure $p_\infty(\underline{x}) = A_1 x$, n'est pas affecté par la présence de la fissure. La solution, correspondant au cas $p_\infty(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x}$, s'écrit alors :

$$\pi(\underline{x})=\underline{A}.(\underline{x} + \varpi\, \underline{n}) \tag{206}$$

où,

$$\varpi = (\underline{n}.\underline{x})[\Psi(\beta_1, \beta_2) -1] \tag{207}$$

Dans laquelle la fonction $\Psi$ est exprimée dans l'équation (204) ; ainsi que :

$$\beta_1=\frac{\left[(\underline{x}-\underline{x}_1).\underline{t}\right]^2}{L^2}, \quad \beta_2=\frac{(\underline{x}-\underline{x}_1).(\underline{x}-\underline{x}_1)}{L^2} - \beta_1 \tag{208}$$

et $\underline{x}_1$ est le centre de la fissure dans le système global de coordonnées.

### 4.2.3 Une fissure partiellement saturée dans une matrice infinie

La solution de l'écoulement pour une fissure partiellement saturée dans une matrice peut être obtenue en utilisant celles présentées ci-dessus pour la fissure super-conductrice et la fissure vide. La solution est obtenue dans cette section pour un cas simple d'une fissure non-saturée constituée par une partie vide et une partie pleinement remplie du fluide comme présentée dans Fig 54. L'étude de cette simple distribution de la teneur en fluide le long de la ligne de fissure, comme il sera montré ci-dessous, est nécessaire pour l'estimation de la perméabilité effective en utilisant la méthode d'homogénéisation.

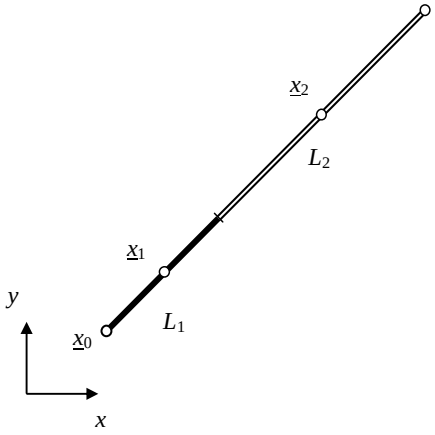



Fig 54. Fissure non-saturée de longueur $L_1$+$L_2$, pleinement remplie avec le fluide sur la longueur $L_1$ de l'extrémité $\underline{x}_0$ et vide sur le reste. $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ indiquent respectivement les centres de la partie remplie du fluide et de la partie vide [141]

La ligne de fissure de longueur totale $L$ est pleinement remplie avec le fluide dans la partie gauche de longueur $L_1$ et vide dans la partie restante à droite avec la longueur $L_2$. La fissure est isolée dans un milieu infini soumis à un gradient uniforme de pression à l'infini $\underline{A}$=($A_1$,$A_2$). Le champ de pression résultant de la condition $p_\infty(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x}$ peut être obtenu comme la somme du champ de pression obtenu pour $p_\infty(\underline{x}) = A_1 x$ parallèle à la ligne de fissure et celui obtenu pour $p_\infty(\underline{x}) = A_2.y$ normal à la fissure. Comme expliqué dans la section précédente, la présence de la partie vide $L_2$ n'a pas d'influence sur le champ de pression résultant du gradient de pression parallèle à la ligne de fissure $p_\infty(\underline{x}) = A_1 x$. Par conséquent, la solution obtenue pour la fissure super-conductrice dans l'équation (35) pour la partie remplie du fluide donne le champ de pression dans ce cas. Simultanément, le champ de pression, résultant du gradient de pression perpendiculaire à la ligne de fissure $p_\infty(\underline{x}) = A_2.y$, n'est pas perturbé par la partie remplie du fluide $L_1$ et peut être obtenu de la solution donnée par la fissure vide (206). La solution, résultant de $p_\infty(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x}$, est obtenue alors par la superposition des solutions correspondant respectivement à une fissure super-conductrice $L_1$ soumise à $p_\infty(\underline{x}) = A_1 x$ et une fissure vide $L_2$ soumise à $p_\infty(\underline{x}) = A_2 y$.

En vue d'élaborer une solution sous une forme indépendante du système des coordonnées, on considère une fissure partiellement saturée avec le vecteur unitaire normal $\underline{n}$ dans la direction de $\underline{t}$ orienté de la partie remplie du fluide vers la partie vide. Notons $R_1$, $R_2$ les demi-longueurs des parties remplie du fluide et vide, c'est-à-dire $L_1$=2$R_1$ et $L_2$=2$R_2$. En conséquence, si $\underline{A}$ = $A_1\,\underline{t} + A_2\,\underline{n}$, selon l'équation(35), la composante $A_1$ induit un champ de pression :

$$p_1(\underline{x}) = A_1\,[(\underline{x}- \underline{x}_1).\underline{t}]\,\Phi(\alpha_1, \alpha_2) \qquad (209)$$

et un champ de pression correspondant à la composante $A_2$ selon l'équation (206) :

$$p_2(\underline{x}) = A_2\,[(\underline{x}- \underline{x}_2).\underline{n}]\,\Psi(\beta_1, \beta_2) \qquad (210)$$

La solution globale $p(\underline{x}) = p_1(\underline{x}) + p_2(\underline{x})$ s'écrit :

$$p(\underline{x})=\underline{A}.\{\Phi(\alpha_1, \alpha_2)[(\underline{x}- \underline{x}_1).\underline{t}]\ \underline{t}\ + \Psi(\beta_1, \beta_2)\ [(\underline{x}- \underline{x}_2).\underline{n}]\ \underline{n}\} \tag{211}$$

où

$$\alpha_1=\frac{\left((\underline{x}-\underline{x}_1).\underline{t}\right)^2}{R_1^2},\quad \alpha_2=\frac{\left((\underline{x}-\underline{x}_1).(\underline{x}-\underline{x}_1)\right)^2}{R_1^2}-\alpha_1 \tag{212}$$

$$\beta_1=\frac{\left((\underline{x}-\underline{x}_2).\underline{t}\right)^2}{R_2^2},\quad \beta_2=\frac{(\underline{x}-\underline{x}_2).(\underline{x}-\underline{x}_2)}{R_2^2}-\beta_1 \tag{213}$$

avec $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ respectivement les centres de la partie remplie du fluide et de la partie vide qui peuvent être reliés à la longueur totale $L=L_1+L_2$, la position $\underline{x}_0$ de l'extrémité saturée et le degré de saturation $S_f=L_1/L$ par :

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + (S_f L/2)\ \underline{t}\ ,\qquad \underline{x}_2 = \underline{x}_0 + [(1+S_f)L/2]\ \underline{t} \tag{214}$$

$$R_1 = S_f L/2,\quad R_2 = (1-S_f)L/2 \tag{215}$$

Fig 55et Fig 56 présentent la solution analytique de l'écoulement autour d'une fissure partiellement saturé ayant $S_f$=0.5, noyée dans une matrice porouse infinie soumise à un champ lointain $\underline{A}$=(1,1)

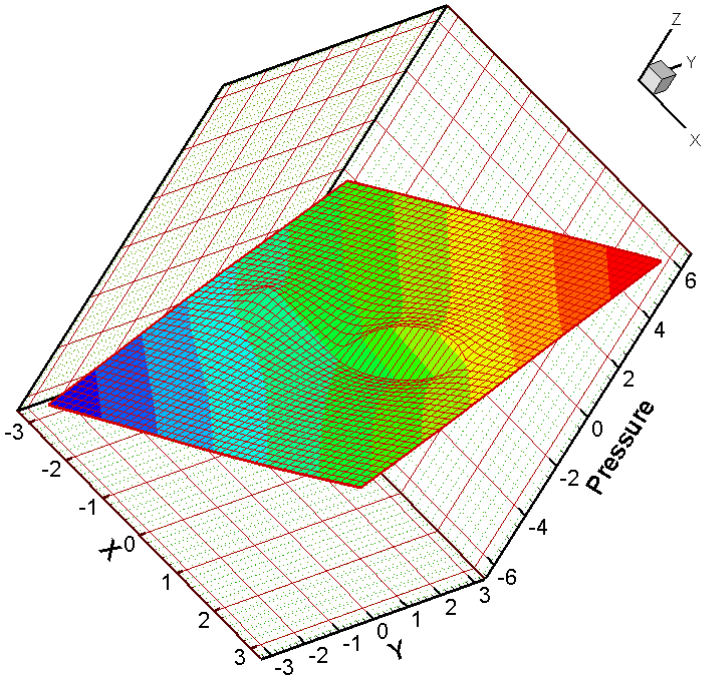



Fig 55. Champ de pression autour d'une fissure non-saturée ($S_f$=0.5) dans une matrice infinie ($k$=1) soumise à un gradient de pression $\underline{A}$=(1,1) à l'infini [141]

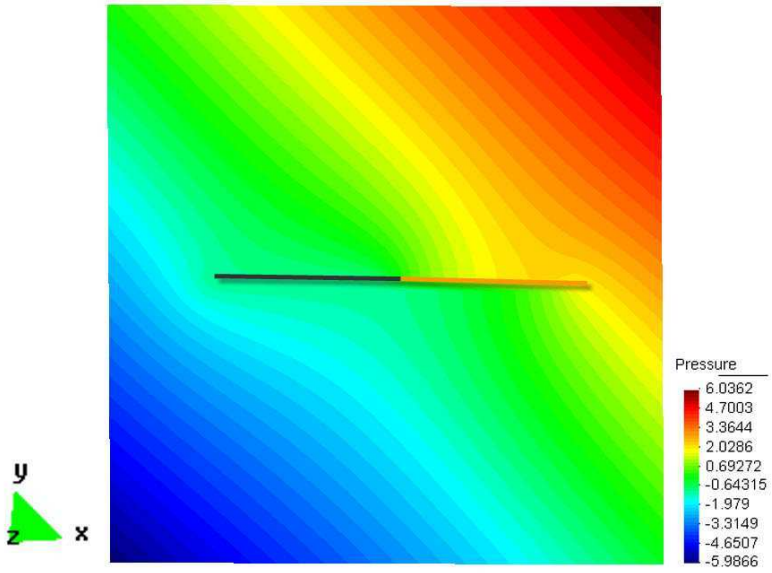



Fig 56. Champ de presion autour d'une fissure non-saturée ($S_f$=0.5) dans une matrice infinie ($k$=1) soumise à un gradient de pression $\underline{A}$=(1,1) à l'infini [141]

### 4.2.4 Une fissure seule partiellement saturée dans un milieu anistrope

La solution (211) obtenue pour une matrice isotrope peut être étendue au cas d'anisotropie en utilisant la transformation linéaire décrite dans Pouya et Ghabezloo [136]. Considérons un domaine infini, représenté par une perméabilité homogène $\boldsymbol{k}$, contenant une fissure de longueur $L$ dans la direction $\underline{t}$ avec le degré de saturation $S_f$. Un gradient uniforme de pression $\underline{A}$ est imposé à l'infini. En prenant $\boldsymbol{M} = \sqrt{\boldsymbol{k}^{-1}}$, $\zeta = 1$, nous avons dans le problème transformé : la transformation de la géométrie $\underline{\tilde{x}} = \boldsymbol{M}.\underline{x}$ ; la matrice avec la perméabilité isotrope $\tilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\delta}$ ; la direction de la ligne de fissure $\underline{\tilde{t}} = h^{-1}\boldsymbol{M}.\underline{t}$ avec $h = \left|\boldsymbol{M}.\underline{t}\right|$ ; et la longueur $\tilde{L} = \left|L\boldsymbol{M}.\underline{t}\right| = Lh$ ; ainsi que le degré de saturation (le ratio $L_1/L$) qui reste inchangé. Le champ lointain se transforme en $\underline{\tilde{A}} = \sqrt{\boldsymbol{k}}\,\underline{A}$. La solution de pression du problème transformé (avec la perméabilité isotrope) s'écrit :

$$\tilde{p}(\underline{\tilde{x}}) = \underline{\tilde{A}}.\{\Phi(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2)[(\underline{\tilde{x}}-\underline{\tilde{x}}_1).\underline{\tilde{t}}]\underline{\tilde{t}} + \Psi(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2)[(\underline{\tilde{x}}-\underline{\tilde{x}}_2).\underline{\tilde{n}}]\underline{\tilde{n}}\} \tag{216}$$

où $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont donnés par les mêmes expressions (212) et (213) avec des variables tildes. En remplaçant chaque variable tilde par son expression reliée à celle initiale et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} p(\underline{x}) = \underline{A}.\{&\Phi(\alpha_1,\alpha_2)\left[(\underline{x}-\underline{x}_1).\boldsymbol{H}.\underline{t}\right]\underline{t} \\ &+ \Psi(\beta_1,\beta_2)\left[(\underline{x}-\underline{x}_2).\underline{n}\right]\left(H_{tt}\underline{n} - H_{tn}\underline{t}\right)\} \end{aligned} \tag{217}$$

où

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{k}^{-1},\ H_{tt} = \underline{t}.\boldsymbol{H}.\underline{t},\ H_{tn} = \underline{t}.\boldsymbol{H}.\underline{n} \tag{218}$$

et

$$\alpha_1 = \frac{\left((\underline{x}-\underline{x}_1).\boldsymbol{H}.\underline{t}\right)^2}{R_1^2\left(H_{tt}\right)^{3/2}}, \quad \alpha_2 = \frac{\left((\underline{x}-\underline{x}_1).\boldsymbol{H}.(\underline{x}-\underline{x}_1)\right)^2}{H_{tt}R_1^2} - \alpha_1, \tag{219}$$

$$\beta_1 = \frac{\left((\underline{x}-\underline{x}_2).\boldsymbol{H}.\underline{t}\right)^2}{R_2^2\left(H_{tt}\right)^{3/2}}, \quad \beta_2 = \frac{\left((\underline{x}-\underline{x}_2).\boldsymbol{H}.(\underline{x}-\underline{x}_2)\right)^2}{H_{tt}R_2^2} - \beta_1, \tag{220}$$

### 4.2.5 Perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non saturé

La solution obtenue pour une fissure partiellement saturée présentée dans la section 4.2.3 peut être utilisée pour déterminer la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé. Envisageons un domaine poreux homogène $\Omega$ représenté par une perméabilité $\boldsymbol{k}$, contenant une population de $m$ fissures super-conductrices $\Gamma_m$ et $n$ fissures vides $\Gamma_n$. Une pression linéaire $p(\underline{x}) = \underline{A}.\underline{x}$ est imposée sur la frontière $\partial\Omega$. Une fissure remplie de fluide mène à une augmentation de la perméabilité effective dans la direction parallèle à la fissure, tandis qu'une fissure vide contribue à la diminuer dans la direction perpendiculaire à la fissure. La perméabilité effective $\hat{\boldsymbol{k}}$ d'un milieu poreux fissuré non-saturé est donnée globalement par la loi de Darcy :

$$\underline{\hat{V}} = \hat{\boldsymbol{k}}.\underline{\hat{G}} \tag{221}$$

où $\underline{\hat{G}}$ et $\underline{\hat{V}}$ sont respectivement les moyennes du gradient de pression et de vitesse qui sont exprimées comme suit :

$$\underline{\hat{V}} = \frac{1}{\Omega}\left[\int_\Omega \underline{v}\, d\omega + \sum_m \int_{\Gamma_m} q\,\underline{t}\, ds\right], \quad \underline{\hat{G}} = \frac{1}{\Omega}\int_{\partial\Omega} p.\underline{n}\, ds \tag{222}$$

On introduit les notations suivantes :

$$\underline{V} = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \underline{v}\, d\omega = -\boldsymbol{k}.\underline{A}\,; \quad \underline{G} = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \underline{\nabla}\, p\, d\omega = \underline{A} \tag{223}$$

Le théorème de la divergence s'écrit pour la fonction de pression dans le domaine $\Omega$ contenant les discontinuités $\Gamma_n$ :

$$\int_\Omega \underline{\nabla}\, p\, d\omega = \int_{\partial\Omega} p.\underline{n}\, ds - \sum_n \int_{\Gamma_n} [\![ p ]\!].\underline{n}\, ds \tag{224}$$

Donc,

$$\underline{\hat{G}} = \underline{G} + \frac{1}{\Omega}\sum_n \int_{\Gamma_n} [\![ p ]\!].\underline{n}\, ds \tag{225}$$

En utilisant l'analyse dans la section 3.2, la contribution des fissures super-conductrices s'écrit :

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{m}\int_{\Gamma_m} q\,\underline{t}\,ds = -\boldsymbol{k}^{f}\,\underline{A} \tag{226}$$

L'expression analytique de $\boldsymbol{k}^f$ pour une fissure super-conductrice rectiligne a été présentée dans la section 3.3.1 [136]. La linéarité de $\underline{\hat{V}}$ à $\underline{A}$ et l'équation (225) montrent qu'il existe un tenseur $\boldsymbol{g}^f$ qui vérifie l'expression suivante :

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{n}\int_{\Gamma_n} [\![ p ]\!].\underline{n}\,ds = \boldsymbol{g}^{f}.\underline{A} \tag{227}$$

La discontinuité de la pression sur la fissure vide peut être déduite de la solution analytique du champ de pression dans une matrice infinie contenant une fissure rectiligne vide (203). Cependant, la contribution de la fissure vide à la perméabilité effective peut être obtenue pour le cas général d'une fissure courbe. En utilisant la transformation présentée dans la section 4.2.2.1, il est possible de déduire $\boldsymbol{g}^f$ pour une fissure vide à partir de $\boldsymbol{k}^f$ pour une fissure super-conductrice ayant la même géométrie et la condition aux limites correspondante. Le résultat est démontré dans l'Annexe 6 comme suit :

$$\left(\int_{\Gamma} [\![ p ]\!].\underline{n}(s)\,ds\right)_{\underline{A}} = \left(-\frac{1}{k}\int_{\Gamma} q(s)\underline{n}(s)ds\right)_{\underline{A}'} \tag{228}$$

où $\underline{A} = \underline{e}_z \times \underline{A}'$, et alors :

$$\boldsymbol{g}^{f} = \frac{1}{k}\boldsymbol{k}^{f*} \tag{229}$$

avec $\boldsymbol{k}^{f*} = \mathrm{adj}(\boldsymbol{k}^f)$ la comatrice de $\boldsymbol{k}^f$.

En utilisant la définition de la densité adimensionelle $\bar{\rho}$ et le résultat dans la section 3.3.1, on retrouve :

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{f}} = k\,\bar{\rho}\,(\underline{t}\otimes\underline{t}) \tag{230}$$

La relation (229) conduit alors à:

$$\boldsymbol{g}^{f} = \bar{\rho}\,(\underline{n}\otimes\underline{n}) \tag{231}$$

Supposons le domaine $\Omega$ contenant une famille de fissures vides de densité $\bar{\rho}_v$ et de direction $\underline{t}_v$ ($\underline{n}_v = \underline{e}_z \times \underline{t}_v$) et une famille de fissures super-conductrices de densité $\bar{\rho}_s$ et de direction $\underline{t}_s$. Les moyennes de la vitesse et du gradient de pression dans ce domaine peuvent être estimées par le schéma de Mori-Tanaka dilué avec :

$$\hat{\underline{V}} = \underline{V} + \bar{\rho}_s \left(\underline{t}_s \otimes \underline{t}_s\right).\underline{V}\,; \quad \hat{\underline{G}} = \underline{G} + \bar{\rho}_v \left(\underline{n}_v \otimes \underline{n}_v\right).\underline{G} \tag{232}$$

En plus, la loi de Darcy pour l'écoulement dans la matrice (1) et dans le milieu entier (221) conduit à :

$$\hat{\boldsymbol{k}} = \left[\boldsymbol{\delta} + \bar{\rho}_s \left(\underline{t}_s \otimes \underline{t}_s\right)\right].\boldsymbol{k}.\left[\boldsymbol{\delta} + \bar{\rho}_v \left(\underline{n}_v \otimes \underline{n}_v\right)\right]^{-1} \tag{233}$$

Si $\underline{t}_s$ et $\underline{n}_v$ sont perpendiculaires, cette expression montre bien une augmentation de la perméabilité effective dans la direction $\underline{t}_s$ et une diminution dans la direction $\underline{n}_v$.

#### 4.2.5.1 Milieu saturé contenant des fissures partiellement saturées

Considérons une famille de fissures non-saturées de densité ρ (densité adimensionnelle $\bar{\rho}$), de longueur $L$, de degré de saturation $S_f$, de direction $\underline{t}$, entourée par un milieu Ω de la perméabilité isotrope $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{\delta}$. La fissure a été décrite dans Fig 54 et ses paramètres dans les équations (214) et (215). En appliquant (233), on trouve l'expression de la perméabilité effective pour ce cas :

$$\hat{\boldsymbol{k}} = k\left[\boldsymbol{\delta} + \rho\pi R_1^2 \left(\underline{t} \otimes \underline{t}\right)\right]\left[\boldsymbol{\delta} + \rho\pi R_2^2 \left(\underline{n} \otimes \underline{n}\right)\right]^{-1} \tag{234}$$

En introduisant $R_1=S_fL/2$ et $R_2=(1-S_f)L/2$ dans (234) et en utilisant les identités mathématiques $\left[\boldsymbol{\delta} + a\left(\underline{n} \otimes \underline{n}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{1+a}\boldsymbol{\delta} + \frac{a}{1+a}\left(\underline{t} \otimes \underline{t}\right)\right]^{-1}$ et $\left(\boldsymbol{\delta} + a\underline{t} \otimes \underline{t}\right)\left(\boldsymbol{\delta} + b\underline{t} \otimes \underline{t}\right) = \boldsymbol{\delta} + (a + b + ab)\underline{t} \otimes \underline{t}$, on obtient :

$$\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{k}{1 + \bar{\rho}(1 - S_f)^2}\left[\boldsymbol{\delta} + \bar{\rho}\left(S_f^2 + (1 - S_f)^2 + \bar{\rho}S_f^2(1 - S_f)^2\right)\left(\underline{t} \otimes \underline{t}\right)\right] \tag{235}$$

Pour une distribution isotrope de l'orientation des fissures $\underline{t}$, c'est-à-dire : la moyenne $\left\langle \underline{t} \otimes \underline{t} \right\rangle = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}$, la perméabilité effective est alors isotrope $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{k}\boldsymbol{\delta}$, avec :

$$\frac{\hat{k}}{k} = \frac{1}{1 + \bar{\rho}(1 - S_f)^2}\left[1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}\left(S_f^2 + (1 - S_f)^2 + \bar{\rho}S_f^2(1 - S_f)^2\right)\right] \tag{236}$$

Fig 58a présente l'évolution de $\hat{k}/k$ par rapport au degré de saturation de fissure $S_f$ pour différentes densités de fissures ρ. On observe que pour une densité considérée, la perméabilité effective augmente avec le degré de saturation $S_f$ et le taux d'augmentation est plus important pour des densités plus élevées. Pour l'intervalle considéré de densité, les effets des parties vides et des parties remplies du fluide sur la perméabilité effective sont compensés à une valeur du degré de saturation $S_f$ entre 0.40 et 0.45 et alors la perméabilité effective est égale à celle de la matrice. L'expression de $\hat{k}$ peut être vérifiée pour le cas particulier $S_f$ = 1,

$\hat{k}/k = 1+\bar{\rho}/2$ qui est conforme à la solution analytique (144) pour la fissure super-conductrice.

#### 4.2.5.2 Milieu non-saturé contenant des fissures vides

Le modèle (235) permet de proposer un modèle empirique afin d'évaluer la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé dans lequel la matrice est non-saturée et les fissures sont vides. Notons $S$ le degré de saturation du milieu entier. Le degré de saturation critique, correspondant à l'état où la matrice est complètement saturée mais les fissures sont totalement vides, est désigné par $S_c$ et est exprimé par :

$$S_c = \frac{\phi_m}{\phi_m + \phi_f} \tag{237}$$

où $\phi_m$, $\phi_f$ désignent respectivement la porosité de la matrice et le volume des fissures dans un volume unitaire de $\Omega$. Par exemple, pour un volume $\Omega$ contenant $N$ fissures de longueur $2R$ et d'épaisseur physique $e$, on a : $\phi_f = (2NRe/\Omega)$. On note $S_m$ le degré de saturation de la matrice qui est lié au degré de saturation global par : $S_m\phi_m = S(\phi_m+\phi_f)$, ou $S_m = S/S_c$. En plus, le degré de saturation du milieu poreux fissuré $S$ et celui de fissure $S_f$ sont liés comme suit :

$$S_c \le S \le 1; \qquad S_f = \frac{S - S_c}{1 - S_c} \tag{238}$$

Supposons $k_m(S_m)$ la perméabilité de la matrice correspondant au degré de saturation $S_m$ qui peut être déterminé théoriquement ou expérimentalement par l'étude sur des roches intactes (sans fissures). Par exemple, selon Bovet el al. [19], $k_m(S_m) = k_s\,(S_m)^n$, où $k_s$ est la perméabilité de la matrice saturée. Pour $0 \le S \le S_c$ ou $S_f = 0$, la perméabilité effective globale d'une matrice non-saturée contenant des fissures vides est obtenue par l'équation (236) en remplaçant $k = k_m(S_m)$ et $S_f = 0$ dans cette équation :

$$0 \le S \le S_c; \qquad \hat{k}(S) = k_m\left(S_m\right)\frac{1+\frac{1}{2}\bar{\rho}}{1+\bar{\rho}} \tag{239}$$

Pour $S_c \le S \le 1$, la perméabilité effective est donnée par l'équation (236) dans laquelle $k=k_s$ et $S_f$ est exprimé par l'équation (238). Les expressions (239) et (236) donnent alors une expression de perméabilité effective continue d'un milieu poreux fissuré non-saturé pour $0 \le S \le 1$.

### 4.2.6 Modélisation par éléments finis

Comme mentionné ci-dessus, le schéma de Mori-Tanaka ne prend pas en compte l'interaction entre fissures. En vue d'estimer cet effet, on peut avoir recours à la modélisation numérique. Un outil numérique basé sur la méthode des éléments finis a été développé afin de simuler l'écoulement dans un milieu poreux fissuré non-saturé et déterminer la perméabilité effective. Le calcul numérique est effectué pour une distribution isotrope des fissures. Un maillage

conforme adapté au domaine fissuré est généré automatiquement en utilisant l'algorithme présenté par Pouya et Ghoreychi [137] (Fig 57). La solution numérique de perméabilité effective en fonction du degré de saturation de fissure pour différentes densités de fissures est présentée dans Fig 58b. Il convient de noter que la solution numérique est cohérente avec la solution théorique (236) pour une faible densité de fissures ($\rho \leq 0.05$). En outre, pour l'intervalle considéré de fissure, des résultats similaires sont obtenus par les méthodes numérique et théorique pour $S_f < 0.4$. Néanmoins, la perméabilité effective numérique devient non-linéaire pour une densité plus élevée et pour une grande valeur de $S_f$ tandis que l'estimation théorique fournit une variation quasi-linéaire de $\hat{k}$ avec la densité de fissures.

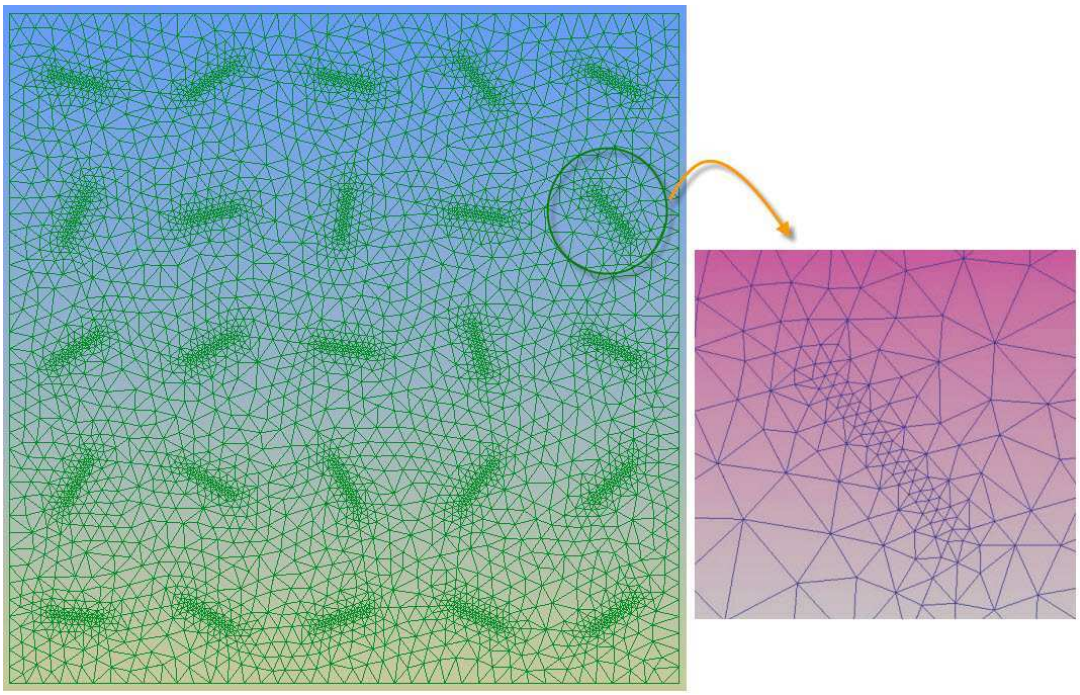


Fig 57. Maillage conforme adapté au domaine fissuré [141]

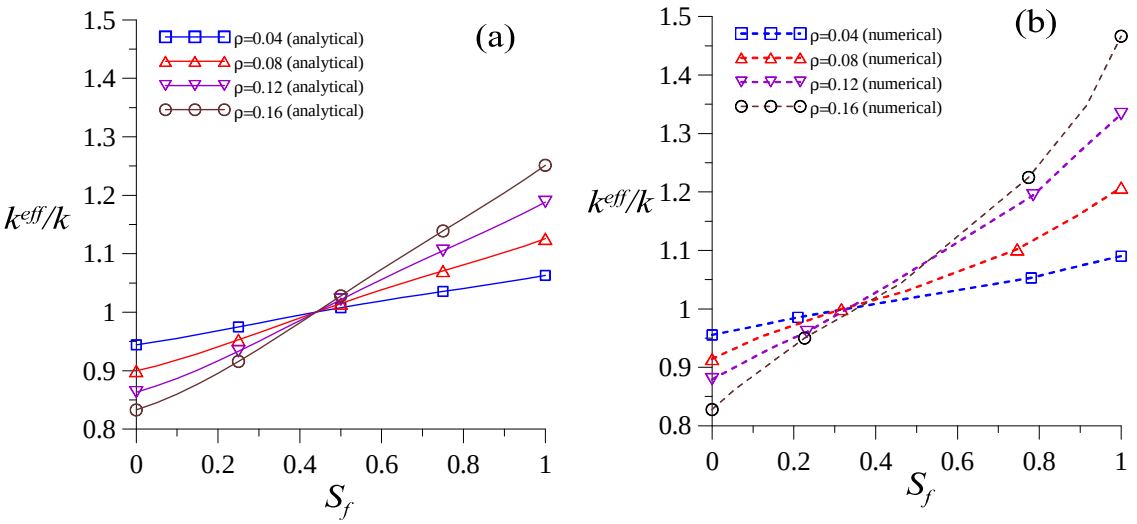



Fig 58. Evolution de la perméabilité effective en fonction du degré de saturation de fissure pour différentes densités de fissure [141]

### 4.2.7 Conclusion

Cette section s'est concentrée sur l'écoulement de fluide et la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé. Une fissure partiellement saturée est supposée être composée d'une partie remplie du fluide, qui agit comme une fissure super-conductrice, et d'une partie vide agissant comme une barrière imperméable. Une solution analytique obtenue pour l'écoulement dans et autour d'une fissure rectiligne partiellement saturée dans une matrice infinie soumise à un gradient constant de pression à l'infini a été présentée. La solution pour une fissure super-conductrice permet d'obtenir celle pour une fissure vide par une transformation mathématique. La solution correspondant à la fissure non-saturée a été obtenue par la superposition de ces solutions le long de la ligne de fissure. Ce résultat est ensuite utilisé pour déterminer la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé en utilisant le schéma de Mori-Tanaka. Il faut noter que dans le modèle ainsi obtenue les interactions entre les parties vides et pleines des différentes fissures ne sont pas prise en compte, tandis que l'interction entre la partie vide et pleine d'une même fissure est bien prise ne compte. La solution pour la fissure individuelle partiellement saturée dans une matrice infinie est en effet excate tant que toute la masse de fluide dans la fissure est rapartie en une seule partie pleine et une seule partie vide.

Cette estimation théorique est comparée avec des résultats numériques montrant un bon accord, particulièrement pour une faible densité des fissures. Le résultat obtenu par cette méthode peut être appliqué aux nombreux problèmes physiques et d'ingénierie y compris la perméabilité des matériaux poreux fissurés non-saturés tels que les réservoirs pétroliers, la diffusion des contaminants, etc. Cette étude pourra être étendue au problème tridimensionnel en utilisant les solutions théoriques présentées par Pouya [132] et Pouya et Vu [140] pour la fissure super-conductrice et en les étendant à la fissure non-saturée.

# Chapitre 5 . Application à la sécurité de stockage géologique du $CO_2$

## 5.1 Introduction

Le stockage géologique du $CO_2$ est envisagé comme une option valide afin de limiter la contribution de ce gaz à l'acidification des milieux et aux modifications climatiques [63]. Toutefois, la mise en œuvre à grande échelle du stockage géologique du $CO_2$ nécessite des garanties en termes de sécurité pour l'homme et l'environnement. Le dioxyde de carbon peut être stocké géologiquement en injectant le $CO_2$ en état supercritique dans les aquifères profonds, les réservoirs d'hydrocarbures (pétrole, gaz) épuisés ou en cours d'épuisement, les charbons inaccessibles on inexploitables [129]. L'élaboration des critères de sécurité pour le stockage géologique du $CO_2$ est basée sur l'évaluation des risques potentiels durant l'opération d'injection et la période de stockage. Les discontinuités géologiques (i.e., les failles et les réseaux de fractures) sont considérées comme des chemins potentiels de remontée de $CO_2$ et des gaz annexex dans une approche d'évaluation des risques basée sur les scénarios de risque (ex. [44]). D'un point de vue pratique, l'étude de la sécurité d'un site de stockage du $CO_2$ consiste, entre autres, à évaluer la pression d'injection maximale admissible correspondant aux critères de sécurité établis pour le site (intégrité des puits, intégrité de la couveture, non-réactivation des failles, …).

Le potentiel de retour de $CO_2$ dans l'atmosphère a été considéré être inévitable à long terme, mais acceptable s'il est suffisamment faible (<0.1% par an) [79]. L'injection de $CO_2$ dans le réservoir peut potentiellement, en fonction de la pression d'injection et les caractéristique du site, endommager le bouchage des puits, activer ou générer les fissures dans la couverture, déclencher des failles existantes, donc créer des chemins préférentiels de la romontée de $CO_2$ depuis le réservoir. Plusieurs sénarios de fuite survenant lors d'un stockage du $CO_2$ à travers le puit abondonné ou des failles multiples ont été considérés et modélisés [124, 82, 39, 143]. En outre, Selvadurai [159] a développé une solution analytique afin d'estimer la fuite stationnaire du $CO_2$ par une fracture dans la couverture. D'ailleurs, la fracture peut être considérée comme une zone endommagée ou une zone poreuse ayant une perméabilité élevée. Cependant, la perméabilité de ces zones dépendant de la pression d'injection, due à l'ouverture des fissures interconnectées, n'ont pas été pris en considération.

Lors de l'injection de $CO_2$, l'augmentation de pression conduit à la diminution des contraintes effectives (au sens de la mécanique des sols) dans et autour du réservoir. Si la pression d'injection est trop importante, la contrainte induite peut causer des changements irréversibles tels que la création des nouvelles fractures et fissures, le glissement des failles existantes. L'utilisation du critère de Morh-Coulomb en observant l'évolution de la contrainte normale effective et de la contrainte de cisaillement le long du plan de faille est la méthode analytique pour évaluer la stabilité des failles [165, 177]. Le couplage de l'écoulement multiphasique et l'analyse géomécanique du glissement de faille durant le stockage géologique du $CO_2$ est

réalisé pour évaluer précisément la pression acceptable concernant le risque de réactivation de la faille [151]. Ce couplage est utilisé également afin d'étudier les phénomènes complexes dans une zone de faille tels que l'interaction entre la déformation mécanique et l'écoulement durant la réactivation de la faille [34], la rupture sismique [33, 35].

Une zone de faille est une structure complexe constituée généralement par un noyau de faille et des zones endommagées [35, 41, 185]. Le noyau de faille est représenté par une faible perméabilité tandis que la zone endomagée comprenant un réseau de fissures interconnectées qui expose alors une perméabilité plus élevée. La largeur de la zone endommagée peut varier entre quelques mètres et plusieurs dizaines de mètres sur les deux côtés du plan de faille [41, 32].

Ce chapitre vise à établir un outil numérique qui permet d'évaluer le risque de remontée de la saumure à travers la zone de faille vers un aquifère supérieur et d'évaluer le risque de réactivation de la faille. Récemment, Ducellier et al. [49] ont modélisé le comportement d'une faille durant l'injection de $CO_2$ à l'aide d'un modèle hydromécanique spécifique implémenté dans le code de calculs par élément finis Gefdyn [7, 8]. En première approximation, la faille est constituée de deux éléments joints entourant un milieu poreux représentant les matériaux de remplissage de la faille dans laquelle les couplages hydromécaniques sont modélisés par des éléments joints. La zone endomagée, représentée par une perméabilité constante et plus faible que celle de la couverture, est ensuite prise en compte dans Seyedi et al. [160]. Une modélisation précise est réalisée dans ce travail afin d'étudier la nature complexe des phénomènes dans la zone de faille lors de l'injection de $CO_2$. Le noyau de faille est constitué par un matériau argileux suivant la loi élasto-plastique de Druker-Prager. Les zones endommagées sont caractérisées par une distribution statistique des fissures. Un couplage hydro-mécanique dans les zones endommagées est effectué au cours de l'opération d'injection. L'idée principale est que plus la pression d'injection augmente, plus l'ouverture des fissures augmente, induisant la croissance de la perméabilité effective de cette zone. Pour ce faire, le programme de résolution numérique de l'équation (160), appelé « PermSIE.exe », a été intégré au sein d'un chaînage de calcul hydromécanique. A chaque pas de temps, un calcul hydromécanique global est réalisé par le Code_Aster afin d'obtenir la pression dans des zones endommagées. Cette valeur de pression est la donnée d'entrée pour le calcul de la perméabilité effective via le programme PermSIE.exe intégré dans la chaine de calcul. Puis cette valeur de perméabilité devient la donnée d'entrée du pas de calcul suivant de Code_Aster. Le flux cumulé à l'interface entre la zone endommagée dans la roche de couverture et un aquifère supérieur est enregistré pour évaluer la remontée de saumure. Enfin, le risque de la réactivation de la faille peut être évalué en fonction de la pression d'injection en suivant l'initiation de la rupture (i.e., l'apparition des zones plastiques) du matériau argileux du noyau de la faille. Bien que ce mémoire soit consacré essentiellement à la modélisation des phénomènes hydrauliques, nous allons présenter dans la dernière section, pour terminer, les résultats mécaniques ayant pu être obtenus sur cette question importante du risque d'activation des failles sur la base de phénomènes de diffusion hydrauliques que nous avons pu modéliser.

## 5.2 Définition d'un scénario de référence

### 5.2.1 Description du modèle géologique

En vue d'illustrer la capacité du modèle développé, la procédure numérique est appliquée à un site géologique représentatif similaire à celui du Bassin de Paris [28, 68, 150]. Le Bassin Parisien est un système multicouche, qui se compose de plusieurs aquifères séparés par des formations peu perméables. Pour la simplification, toutes les couches sont supposées horizontales [149]. La vue schématique du modèle est donnée dans Fig 59 et les couches de sol ainsi que leurs propriétés hydromécaniques sont décrites dans Tableau 1:

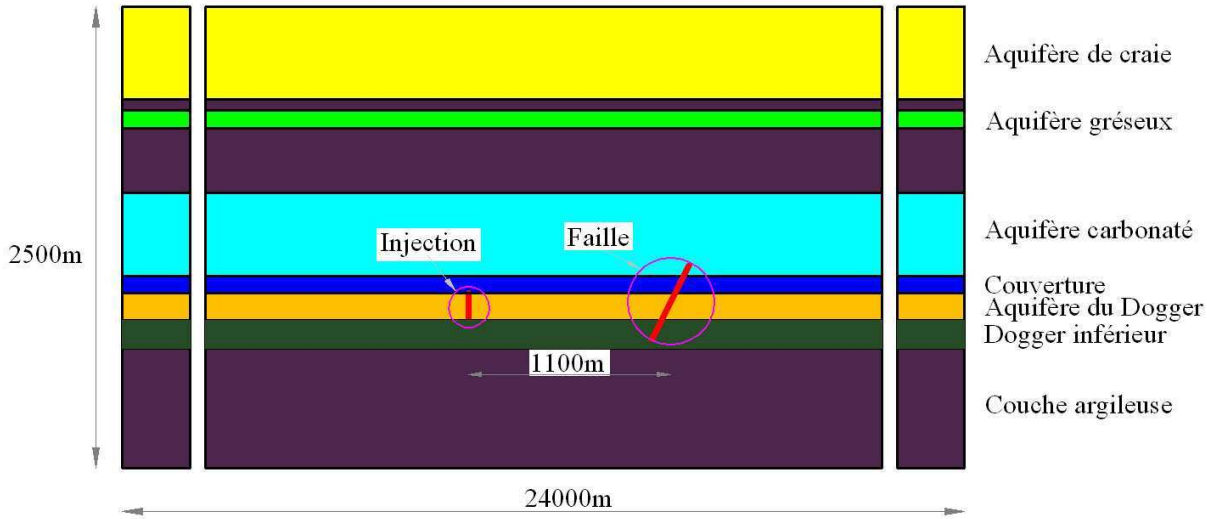



Fig 59. Modèle géologique simplifié du Bassin Parisien [49]

Tableau 1. Epaisseurs et propriétés hydromécaniques des couches du Bassin Parisien ($t$ : épaisseur; $D$ : profondeur; $E$ : module d'Young; $\nu$ : ratio de Poisson; $\varphi$ : porosité ; $k$ : perméabilité) [22]

| Nom de la couche | $t$ (m) | $D$ (m) | $E$ (GPa) | $\nu$ | $\varphi$ (%) | $k$ ($m^2$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aquifère de craie | 500 | 500 | 5 | 0.3 | 30 | $1.0\times10^{-16}$ |
| Couche argileuse | 60 | 560 | 6.65 | 0.285 | 5 | $1.0\times10^{-19}$ |
| Aquifère gréseux | 100 | 660 | 10 | 0.3 | 25 | $0.5\times10^{-12}$ |
| Couche argileuse | 350 | 1010 | 6.65 | 0.285 | 5 | $1.0\times10^{-19}$ |
| Aquifère carbonaté | 450 | 1460 | 15 | 0.3 | 15 | $1.0\times10^{-14}$ |
| Couverture | 90 | 1550 | 20 | 0.3 | 15 | $1.0\times10^{-22}$ |
| Aquifère du Dogger | 150 | 1700 | 6.65 | 0.285 | 5 | $1.0\times10^{-14}$ |
| Dogger inférieur | 150 | 1850 | 24 | 0.29 | 15 | $1.0\times10^{-19}$ |
| Couche argileuse | 650 | 2100 | 42 | 0.29 | 10 | $1.0\times10^{-21}$ |

En se basant sur les travaux [43, 179], nous prenons une densité de 2500 kg.m$^{-3}$ pour toutes les couches de sol et un coefficient de poussée des tères $k_0$ = 0,7 correspondant à un état de contraintes initial en extension.

Le modèle géométrique utilisé est un rectangle de profondeur 2500m et de largeur 24000m qui est traversé par une faille fictive de pente ~63$^0$. Les extrémités de la faille se trouvent respectivement à une profondeur de 1400m et 1800m. La faille croise alors le réservoir du Dogger, la couverture et partiellement l'aquifère carbonnaté. La répartition de la longueur de la faille dans les couches géologiques suivant la coordonnée horizontale *x* est présentée dans Fig 60. Le centre de la faille est localisé à 5000m du côté droit du modèle. Un puits d'injection horizontal situé dans le réservoir du Dogger et à 1100m du milieu de la faille est considéré. On impose un déplacement normal nul sur les bords gauche, droit et inférieur. Un flux normal nul est prescrit sur les bords gauche et droit. En fait, le modèle géométrique permet d'avoir un impact nul de l'injection de $CO_2$ sur les bords verticaux correspondant à un flux nul sur ces deux côtés.

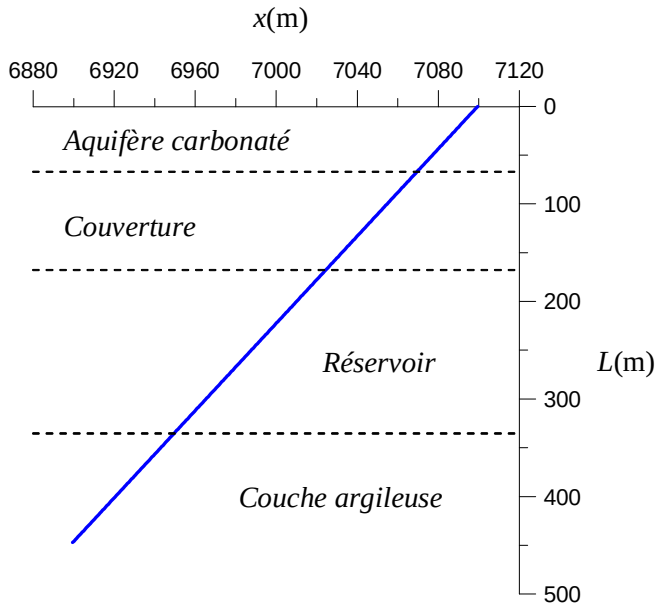



Fig 60. Répartition de la longueur de la faille dans les couches géologiques suivant la coordonnée horizontale *x*

### 5.2.2 Description du modèle de faille

#### 5.2.2.1 Géométrie et propriétés hydromécanique de faille

La zone de faille consiste en un cœur de faille et des zones endommagées (Fig 61a). Le cœur de faille est considéré comme une couche, d'epaisseur 1m, de matériau de remplissage argileux très peu perméable. Celui-ci se comporte alors comme une barrière hydraulique contre l'écoulement de saumure dans le reservoir. Les paramètres hydromécaniques du noyau argileux sont décrits dans le Tableau 2 qui sont proches de ceux qui caractérisent la gouge de la faille d'Aegion [168, 169, 170].

Tableau 2. Propriétés hydromécanique du noyau de faille

| Paramètres | Valeur |
|---|---|
| Module Young | 6.65GPa |
| Ratio de Poisson | 0.285 |
| Cohésion | 1.22MPa |
| Angle de frottement | $25.4^0$ |
| Perméabilité intrinsèque | $10^{-21}$ $m^2$ |
| Porosité | 0.05 |

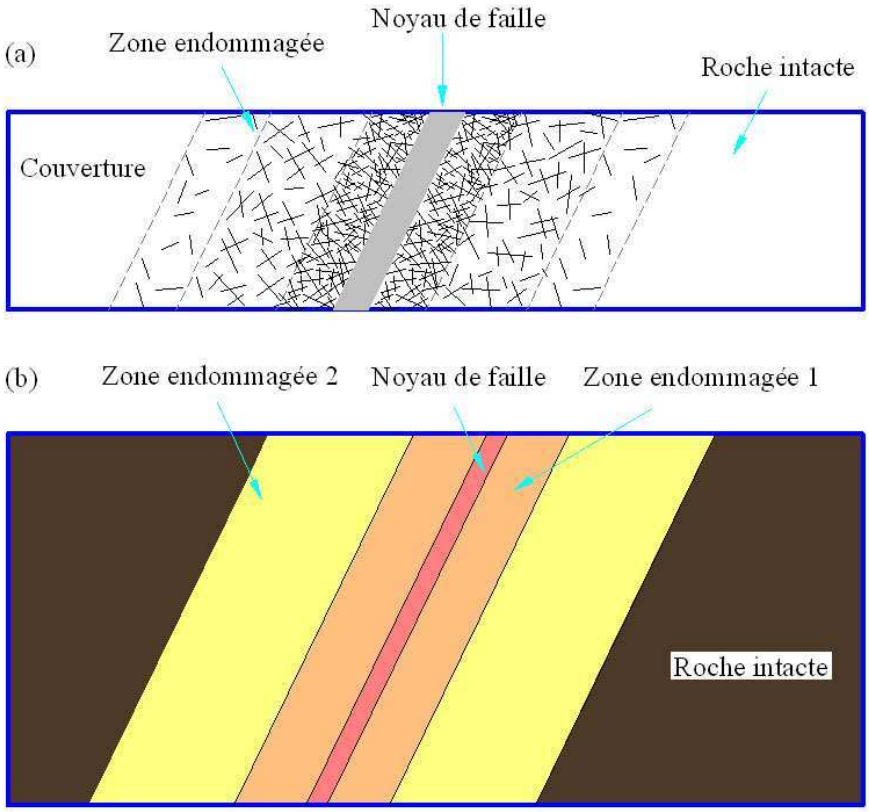



Fig 61. Modèle de faille (adaptée de [160])

On suppose qu'il y a trois zones endommagées autour du noyau de faille (Fig 61a). La zone adjacente du noyau, nommée « zone endommagée 1 », présente une forte densité de fissures où toutes les fissures sont interconnectées. La zone avoisinante de la zone endomagée 1, appelée « zone endommagée 2 », présente une densité moyenne de fissures représentant le cas d'un réseau percolé laissant isolés quelques fissures ou grappes de fissures. Il existe une zone intermédiaire entre la roche intacte et la zone endommagée 2 qui présente une faible densité des fissures. Comme indiqué dans le chapitre 3, une faible densité des fissures ne change pas l'ordre de grandeur de la perméabilité effective du domaine fissuré par rapport à celle de la

matrice poreuse. Cette zone intermédiaire peut être donc considérée comme la roche intacte dans le calcul hydraulique. En se basant sur l'analyse du réseau de fissures dans le Dogger affleurant en Bourgogne [60, 145, 47], nous considérons 5 familles de fissures dans la zone endommagée 1 et 3 familles de fissures dans la zone endommagée 2. Les paramètres des familles des fissures dans ces deux zones sont décrits respectivement dans le Tableau 3 et le Tableau 4. Dans la simulation hydromécanique globale, les zones endommagées sont envisagées comme un milieu poreux équivalent avec des perméabilités effectives obtenues à partir du modèle (160).

Tableau 3. Paramètres des familles des fissures dans la zone endommagée 1 (ρ : densité des fissures ; $L$ : longeur moyenne ; θ : orientation moyenne ; $e$ : l'ouverture initiale moyenne ; $K_n$ : raideur normale)

| Numéro de famille | ρ | $L$ (m) | θ (0≤θ<π) | $e_0$ (mm) | $K_n$(GPa) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.56 | 0.70 | 2.6167 | 0.125 | 60 |
| 2 | 0.33 | 0.92 | 1.0467 | 0.125 | 60 |
| 3 | 0.36 | 0.81 | 2.3550 | 0.125 | 60 |
| 4 | 0.15 | 0.62 | 1.0467 | 0.125 | 60 |
| 5 | 0.18 | 0.22 | 1.9189 | 0.125 | 60 |

Tableau 4. Paramètres des familles des fissures dans la zone endommagée 1 (ρ : densité des fissures ; $L$ : longeur moyenne ; θ : orientation moyenne ; $e$ : l'ouverture initiale moyenne ; $K_n$ : raideur normale)

| Numéro de famille | ρ | $L$ (m) | θ (0≤θ<π) | $e_0$ (mm) | $K_n$(GPa) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.36 | 0.70 | 2.6167 | 0.125 | 60 |
| 2 | 0.33 | 0.92 | 1.0467 | 0.125 | 60 |
| 3 | 0.16 | 0.81 | 2.3550 | 0.125 | 60 |

#### 5.2.2.2 Comportement mécanique de la faille

La loi Drucker-Prager permet de modéliser de façon élémentaire le comportement élasto-plastique de certains sols tels que les sables et les argiles à long terme [55, 104]. La loi Drucker-Prager associée sans écrouissage est alors adoptée dans ce travail afin de modéliser l'état de plastification du noyau de faille due à la diminution de la contrainte effective dans la zone de faille. La surface de charge de ce critère s'écrit :

$$F(\boldsymbol{\sigma}') = q' + \alpha p' - R = 0 \tag{240}$$

où $\boldsymbol{\sigma}'$ est le tenseur de contrainte effective ; $p'=\frac{Tr(\boldsymbol{\sigma}')}{2}$ la contrainte effective moyenne; $q'=\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s}':\boldsymbol{s}'}$ le déviateur du tenseur des contraintes effectives ( $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{\sigma}' - \frac{Tr(\boldsymbol{\sigma}')}{2}\boldsymbol{\delta}$ ) ; $\alpha$, $R$ des coefficients donnés. Dans le cas général, $R$ est une fonction de la déformation plastique cumulée (fonction d'écrouissage), de type linéaire ou parabolique. En considérant une version associée, le potentiel d'écoulement suit la même expression que celle de la surface de charge $F$. On peut se donner à la place de $\alpha$ et $R$ la cohésion $c$ et l'angle de frottement $\varphi$ comme suit :

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{3-\sin\varphi}; \qquad R = \frac{6c\cos\varphi}{3-\sin\varphi} \tag{241}$$

Par conséquent, on peut déduire les paramètres du modèle à partir des données dans le Tableau 2 : $\alpha$ = 0.33 ; $R$ = 2.57MPa (pas d'écrouissage).

### 5.2.3 Sénario d'injection

La faille affectée étant à une distance raisonnable (1100 m) du puits d'injection, l'injection de $CO_2$ peut être modélisée par un accroissement de la pression interstitielle dans le réservoir. La pression initiale d'injection est égale à la pression hydrostatique au niveau du puits d'injection. On impose ensuite une augmentation linéaire de la pression d'injection pendant le temps considéré pour atteindre la valeur maximale deux fois supérieure à la pression initiale (Fig 62). La durée d'injection est de 25 ans dans lequel le pas de calcul choisi est de 3 mois.

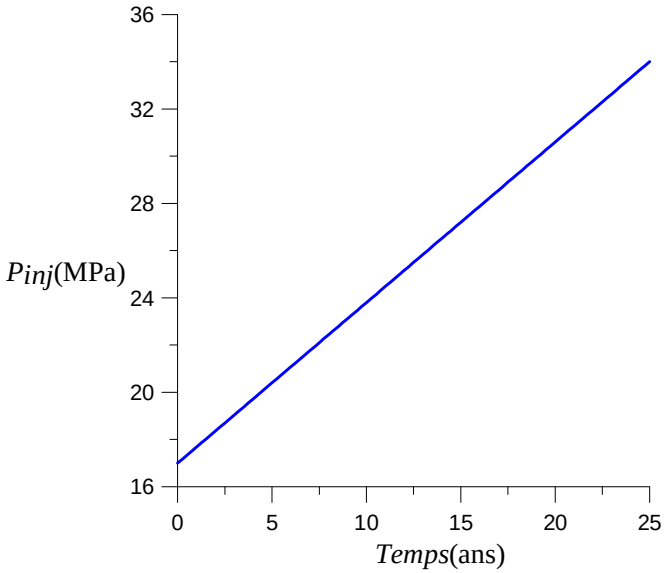



Fig 62. Pression d'injection de $CO_2$ dans le réservoir

## 5.3 Procédure de calcul hydromécanique de l'opération d'injection du $CO_2$

### 5.3.1 Calcul de la perméabilité des zones endommagées

La perméabilité initiale des zones endommagées est déterminée, avec les données concernant les fissures dans le Tableau 3 et le Tableau 4 ainsi que la perméabilité du milieu entourant dans le Tableau 1, en utilisant l'estimation auto-cohérente (160). Cependant, la perméabilité effective doit être mise à jour au cours de l'opération d'injection. La croissance de la pression d'injection entraîne l'augmentation de pression interstitielle dans les zones endommagées, notée par $\Lambda p$, qui conduit à une ouverture supplémentaire $\Lambda e$ par rapport à celle intitiale de la fissure. Selon un modèle simple dans le Code_Aster, l'augmentation de pression appliquée sur la surface de fissure est évaluée comme $(1-b)\Lambda p$ où $b$ est le coefficient de Biot de la matrice entourant les fissures. Le terme $\Lambda e_i$, correspondant à la famille $i$ de fissure, est exprimé par :

$$\Lambda e_i = \frac{(1-b)\Lambda p}{K_{ni}} \tag{242}$$

où $K_{ni}$ est la raideur normale de la fissure appartenant à la famille $i$. L'ouverture totale de la fissure de la famille $i$ s'écrit :

$$e_i = e_0 + \Lambda e_i \tag{243}$$

La conductivité $c_i$ de la fissure est déterminée ensuite par l'équation (6). Le modèle (160) nous permet de déterminer la perméabilité effective correspondant à la pression dans chaque zone endommagée à chaque pas de temps ou chaque niveau de pression d'injection.

### 5.3.2 Couplage hydromécanique global de l'opération d'injection du $CO_2$

La simulation de l'opération d'injection du $CO_2$ est effectuée en utilisant Code_Aster afin de modéliser le comportement hydromécanique du réservoir et de la faille. Cependant, le calcul hydromécanique global réalisé par Code_Aster ne peut pas prendre en compte l'évolution de la perméabilité des zones endommagées en fonction de la pression d'injection. Un script est donc développé, en utilisant le langage Python, et intégré dans le fichier de commandes du Code_Aster afin de déterminer la perméabilité effective correspondant à une pression d'injection considérée et mettre à jour cette valeur de perméabilité pour le pas de temps suivant (Fig 63).

Pour ce faire, un chaînage correspondant à l'augmentation de la pression d'injection en fonction du temps a été mis en place. A chaque pas de temps, la simulation hydromécanique globale est réalisée dans un premier temps par le Code_Aster afin d'obtenir des résultats voulus tels que le champ de pression dans le réservoir, le flux traversant les zones endommagées, l'indicateur de plastification des éléments sur la faille, etc. La pression dans chaque zone endommagée est enregistrée ensuite dans un fichier appartenant au répertoire considéré. Cette valeur de pression est la donnée d'entrée pour le calcul de la perméabilité effective via le programme « PermSIE.exe » intégré dans Code_Aster. Le résultat de

perméabilité devient ensuite la donnée d'entrée du pas de calcul suivant de Code_Aster. Le script Python assure que le chaînage est exécuté automatiquement. Les résultats concernant la fuite de saumure vers l'aquifère au-dessus de la couverture et l'état de rupture de la faille sont présentés et analysés dans les deux sous-sections suivantes.

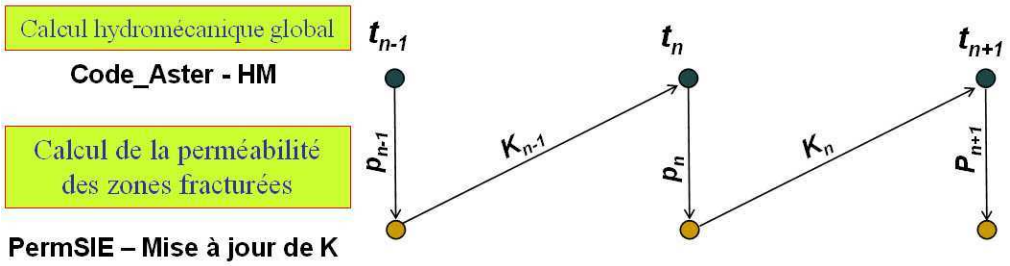



Fig 63. Schéma de la simulation numérique de l'opération d'injection du $CO_2$ dans un aquifère profond

## 5.4 Comportement de la faille

On observe deux phénomènes. D'une part, l'augmentation de la pression d'injection au niveau du puits qui élève le gradient de pression et induit un flux à travers les zones endommagées qui va permettre la remontée du fluide dans le réservoir vers l'aquifère situé au-dessus de la couverture. Cela provoque une contamination de l'eau de cet aquifère par la saumure et par le $CO_2$ dissous dans le fluide remonté. On cherche donc à déterminer quelle est la fuite de la saumure au niveau de l'interface couverture-aquifère carbonatée. D'autre part, la diminution des contraintes effectives sur le matériau du noyau de faille due à l'augmentation de la pression interstitielle peut entraîner une rupture en cisaillement. On va alors chercher à définir la taille de la plastification sur la faille.

### 5.4.1 Remontée de la saumure vers l'aquifère supérieur

Le chemin préférentiel de remontée de la saumure et du $CO_2$ dissous dans le fluide du réservoir est la zone endommagée dans la couverture à cause d'une permeabilité plus aimportante par rapport à celle du matériau environnant. De plus, l'augmentation de pression dans les zones endommagées modifie de nouveau la perméabilité effective de ces zones comme présenté dans la section 5.3.1. Fig 64 et Fig 65 présentent respectivement l'évolution de la perméabilité effective en fonction de la pression d'injection au niveau du puits dans deux zones endommagées 1 et 2 du côté gauche de la faille dans la couverture. Notons que les tenseurs de perméabilité effective sont anisotropes. Leurs composantes initiales $k^e_{xx}$ $k^e_{yy}$ et $k^e_{xy}$ sont respectivement $10^4$ à $10^5$ et $10^2$ à $10^3$ fois plus grandes que la perméabilité de la couverture correspondant aux zones endommagées 1 et 2. De l'opération d'injection résulte un changement de deux ordres de grandeur de ces composantes. On voit bien que l'ordre de grandeur de la perméabilité de la zone endommagée 1 est similaire à celui du réservoir. En outre, une variation isotrope des composantes du tenseur de perméabilité est observée au cours de l'opération d'injection dans le code numérique. Cela correspond au fait que l'augmentation de la pression interstitielle est le seul facteur qui induit le changement de la

perméabilité effective comme présenté dans la section 5.3.1. L'évolution de la perméabilité effective dans les zones endommagées, comprises dans la couche argileuse au-dessous du réservoir et sur le côté gauche de la faille, en fonction de la pression d'injection du $CO_2$ sont présentées sur Fig 66 et Fig 67.

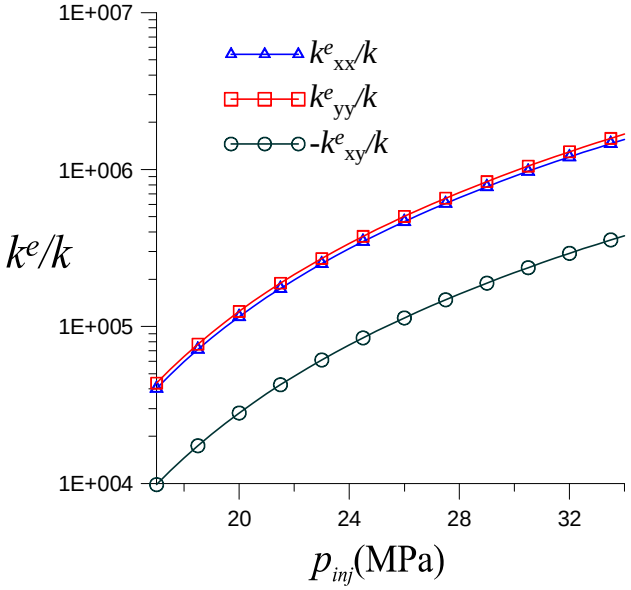



Fig 64. Variation de la perméabilité effective de la zone endommagée 1 dans la couverture en fonction de la pression d'injection au niveau du puits ($k$ la perméabilité de la couverture, $k^e$ une composante du tenseur de perméabilité effective)

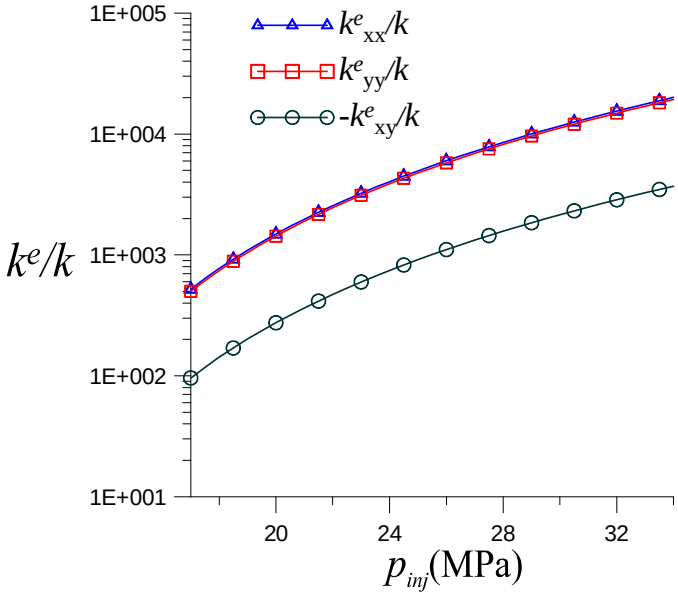



Fig 65. Variation de la perméabilité effective de la zone endommagée 2 dans la couverture en fonction de la pression d'injection au niveau du puits ($k$ la perméabilité de la couverture, $k^e$ une composante du tenseur de perméabilité effective)

La zone de faille se comporte donc comme une « conduite » due au réseau percolé des fissures dans la couverture. Afin d'évaluer le risque de la remontée de saumure, le flux massique $w_c$(kg/s) passant par l'interface entre les zones endommagées, dans la couverture et

au côté gauche de la faille et l'aquifère carbonaté, est observée (Fig 68). On constate une forte concentration du flux dans la zone endommagée 1, étant donné que sa perméabilité effective est plus élevée que dans l'autre zone. Plus la pression d'injection du $CO_2$ est élevée, plus cette concentration est importante. En se basant sur ce résultat, la masse cumulée du $CO_2$ dissous dans l'eau $W_c$ au cours de l'opération d'injection est évaluée (Fig 69). Ce paramètre est la clé de détermination de la pression d'injection admissible correspondant à un seuil $W_c$ qui risque de contaminer l'aquifère situé au-dessus du réservoir.

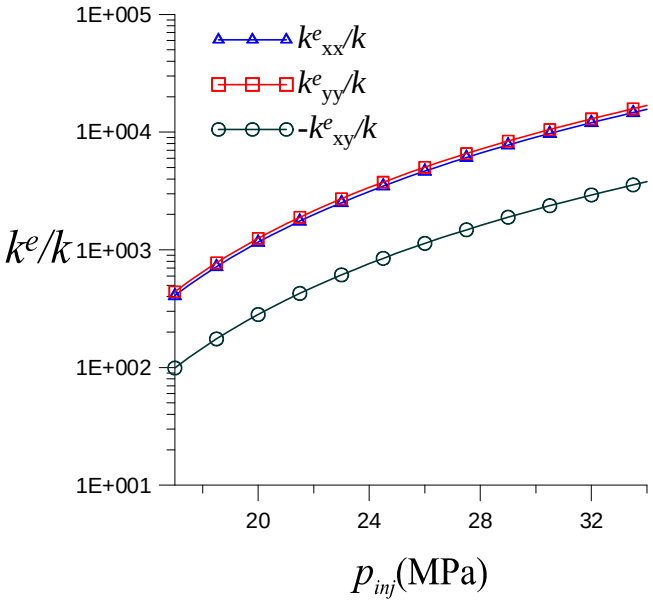



Fig 66. Variation de la perméabilité effective de la zone endommagée 1 dans la couche argileuse en fonction de la pression d'injection au niveau du puits ($k$ la perméabilité de la formation argileuse, $k^e$ une composante du tenseur de perméabilité effective)

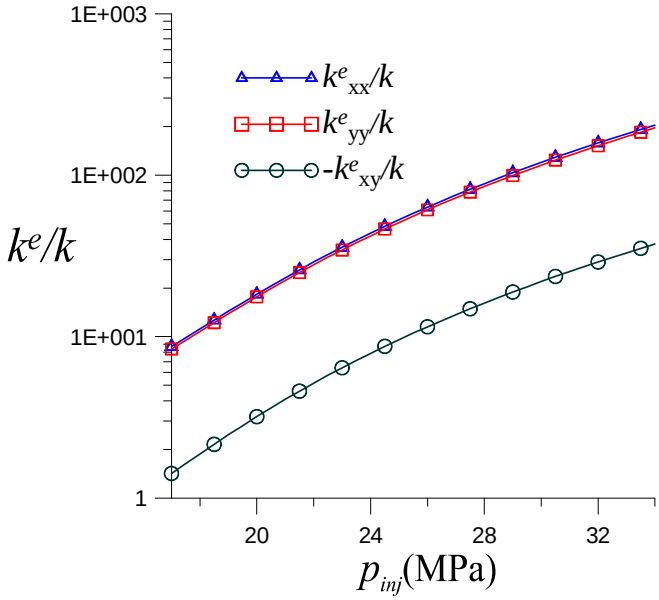



Fig 67. Variation de la perméabilité effective de la zone endommagée 2 dans la couche argileuse en fonction de la pression d'injection au niveau du puits ($k$ la perméabilité de la formation argileuse, $k^e$ une composante du tenseur de perméabilité effective)

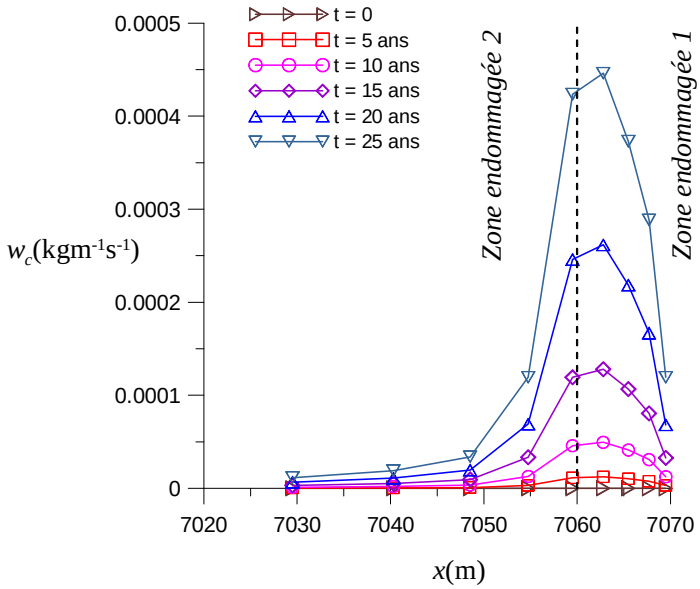



Fig 68. Flux massique traversant l'interface entre les zones endommagées dans la couverture et l'aquifère situé au-dessus de la couverture

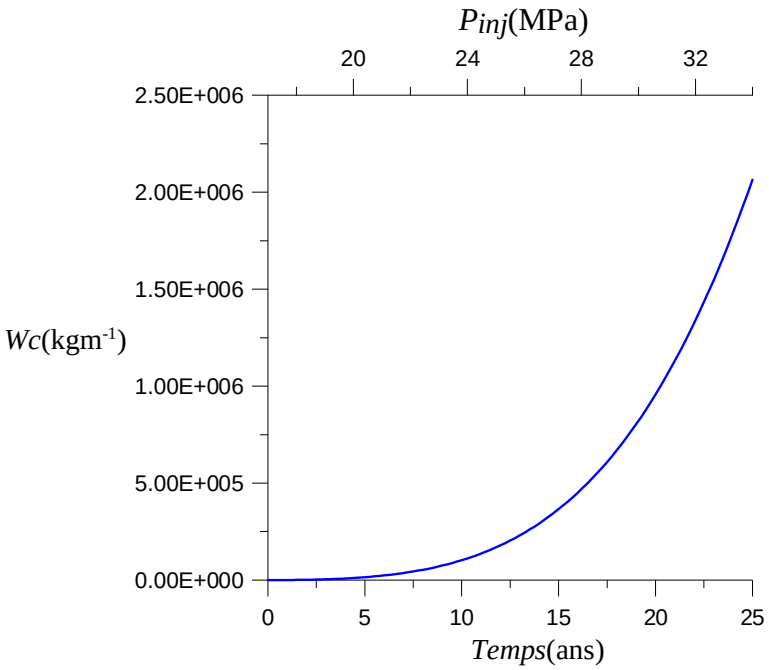



Fig 69. Masse cumulée de la saumure s'échappant du réservoir vers l'aquifère carbonatée au cours du temps

En observant l'évolution de pression à l'interface entre le réservoir et la couverture au cours de l'opération d'injection (Fig 70), on constate une chute importante de pression dans le réservoir à travers la faille. Après la faille dans le réservoir, la pression reste quasi-constante et donc la pression au bord droit est toujours égale à la pression hydrostatique. De plus, la distance du puits d'injection au bord gauche est suffisamment élevée et on observe également une pression similaire à la pression hydrostatique sur ce bord. Ce résultat de pression confirme qu'il est raisonable d'imposer la condition aux limites de flux nul sur les bords verticaux.

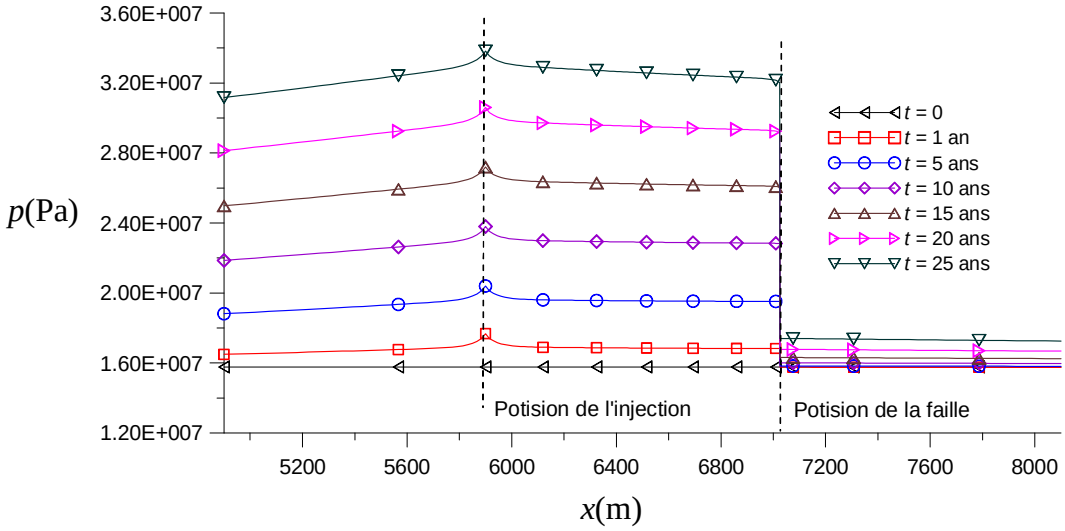



Fig 70. Evolution de la pression à l'interface entre le réservoir et la couverture observée à différents temps

### 5.4.2 Comportement du noyau de la faille

Le risque de réactivation de la faille est évalué selon le critère de Drucker-Prager (240). Nous supposons $\alpha$=0.33 et $R$=2.57MPa dans cette étude. La diminution des contraites effectives $\sigma'_{xx}$, $\sigma'_{yy}$, $p'$, $q'$ sur la surface gauche du noyau de la faille, due à l'augmentation de la pression interstitielle, est présentée respectivement sur Fig 71, Fig 72, Fig 73 et Fig 74. Notons que la longueur de faille $L$ = 0 à l'extrémité appartient à l'aquifère carbonaté et $L_{max}$ = 447.21(m) à l'extrémité localisée dans la couche argileuse. En ayant recours à la variable interne « indicateur d'état » du Code_Aster (égale à 1 si la déformation plastique cumulée >0, 0 dans le cas contraire), nous traçons les zones de plastification sur le noyau de la faille en fonction de la pression d'injection $P_{inj}$ sur Fig 75 ainsi que la taille cumulée de ces zones $L_p$ sur Fig 76.

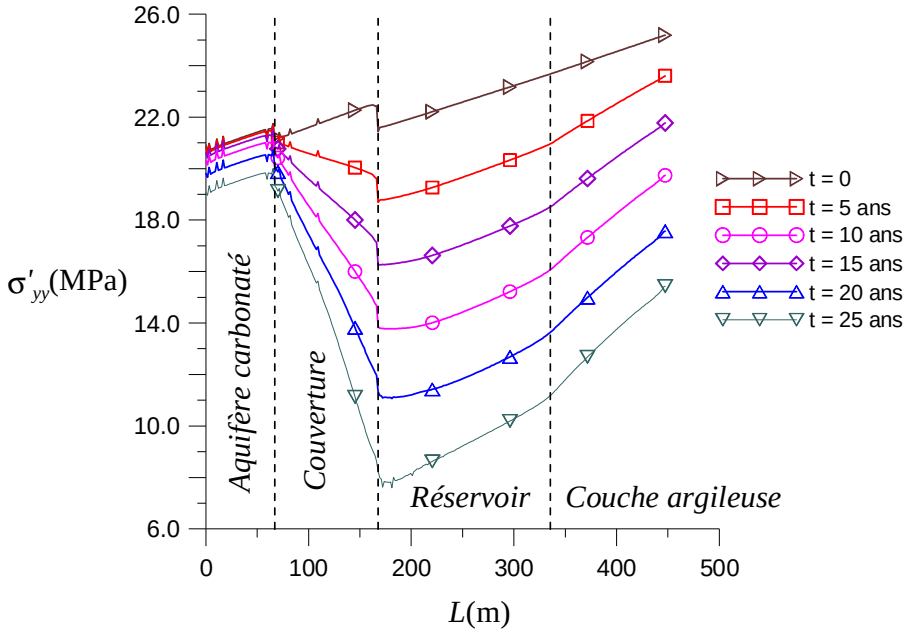



Fig 71. Contrainte verticale $\sigma'_{yy}$ sur l'interface du noyau de la faille et du réservoir

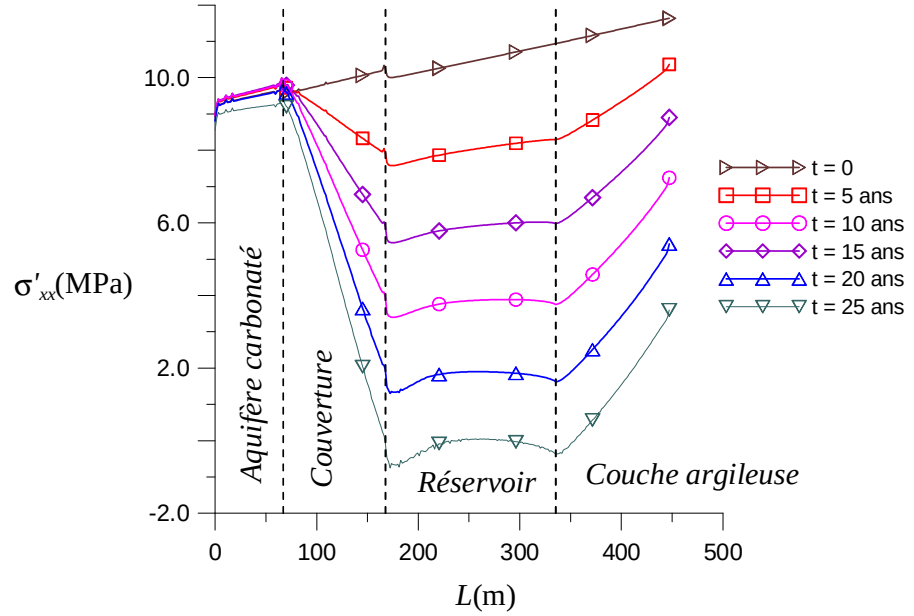



Fig 72. Contrainte horizontale $\sigma'_{xx}$ sur l'interface du noyau de la faille et du réservoir

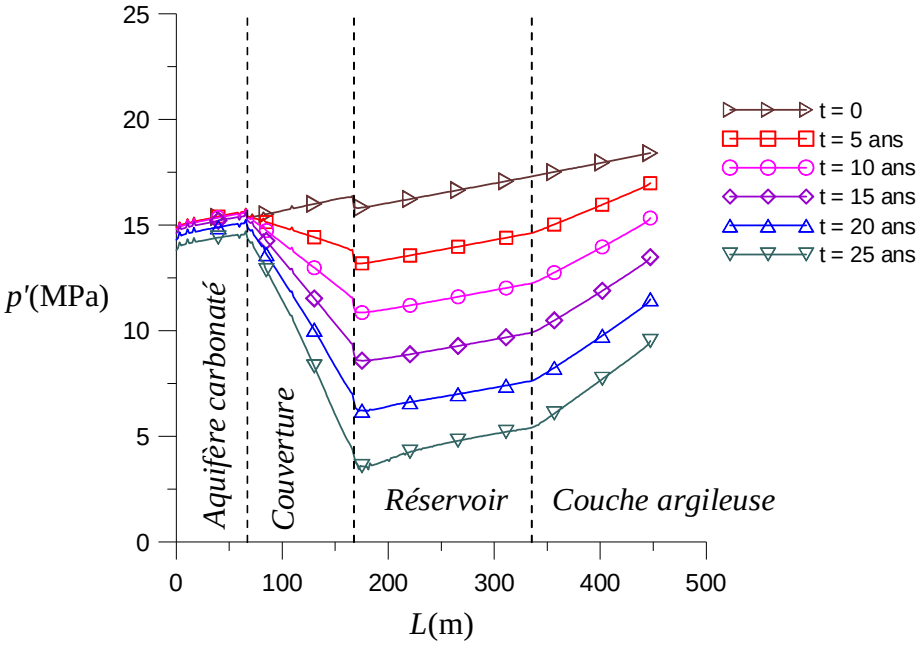



Fig 73. Contrainte moyenne $p'$ sur l'interface du noyau de la faille et du réservoir

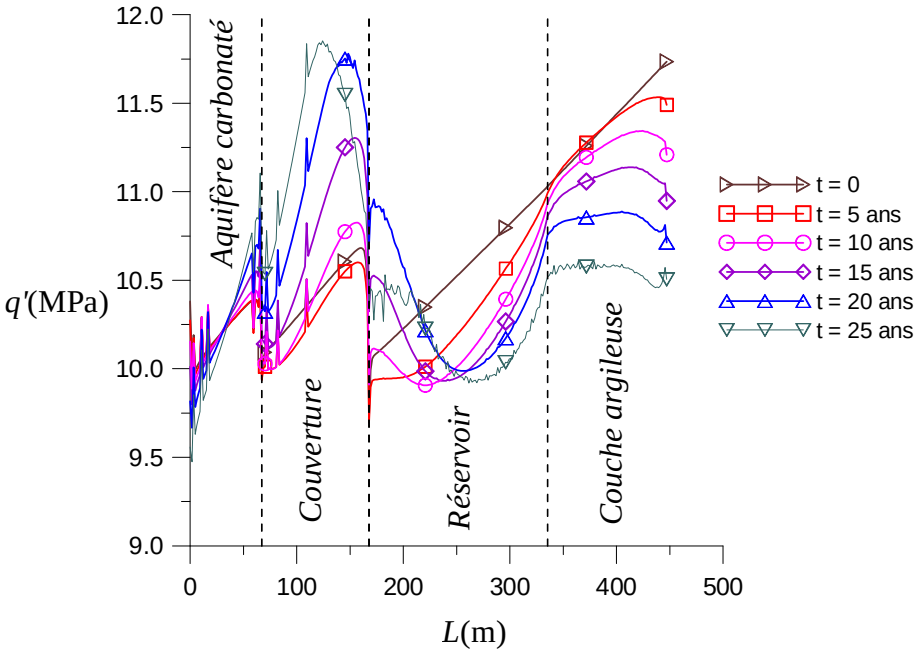



Fig 74. Déviateur de contrainte q′ sur l'interface du noyau de la faille et du réservoir

On observe une diminution des contraintes effectives verticale et horizontale et donc de la contrainte moyenne sur la surface gauche du noyau de la faille. Cependant, en ce qui concerne la contrainte déviatorique, un fort accroissement dans la couverture, une forte décroissance dans le réservoir et une faible diminution dans la couche argileuse sont constatés. En particulier, l'augementation de $q'$ est plus importante au voisinage de l'interface entre le réservoir et la couverture $L$≈160(m). La plastification de la faille commence alors à se développer en ce point et à partir de la pression $P_{inj}$≈28MPa. Cette zone est élargie jusqu'à la fin de l'opération d'injection. Néanmoins, une autre zone de plastification apparaît à la position $L$≈350(m) à l'interface entre le réservoir et le base argileux correspondant à la pression $P_{inj}$≈31MPa. Ce phénomène est probablement dû au fait que la plus forte diminution de $p'$ et la plus faible diminution de $q'$ ont lieu en ce point dans la couche argileuse. Comme l'on constate que plus la pression d'injection du $CO_2$ est élevée, plus la pente des courbes $p'$ (dans le base) en fonction de $L$ est importante, tandis que celle des courbes $q'$ en fonction de $L$ est faible, voire nulle avec $P_{inj}$ >30MPa. Cette valeur de pression est aussi proche de celle où deux zones plastifiées sur le noyau de la faille dans la couverture et dans le réservoir se rencontrent et la zone plastifiée couvre tout le long du réservoir et toute la couverture. La taille totale de la zone plastifiée à la fin de l'opération d'injection ici étudié est évaluée à $L_p/L$≈0.7. Un faible changement des contraintes effectives est observé sur la surface de faille dans l'aquifère carbonnaté et donc la plastification n'apparaît pas dans cette zone.

Ci-dessus nous avons considéré le cas typique dans lequel le matériau de remplissage présente un angle de frottement proche de valeur trouvée dans la littérature et une cohésion non nulle. Les résultats de la taille de plastification $L_p$, correspondant à différentes valeurs de cohésion, fonction de la pression d'injection au niveau du puits, sont également exposés dans Fig 76. Pour le cas $c$=0, la plastification de la faille apparaît à $P_{inj}$≈22MPa et sa taille atteint à

$L_p/L$≈0.88 à la fin de l'opération d'injection. Au contraire, on n'observe pas de plastification pour le cas $c$=3.00MPa.

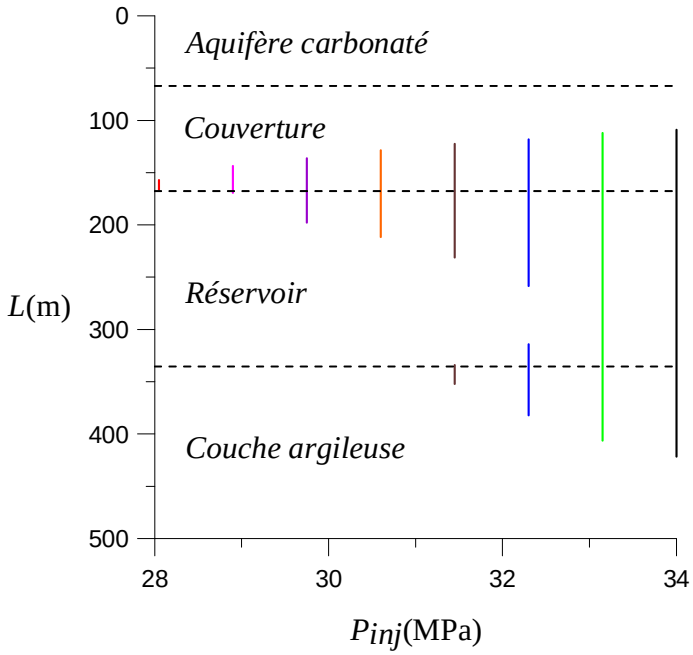



Fig 75. Taille et localisation de plastification sur le noyau de la faille

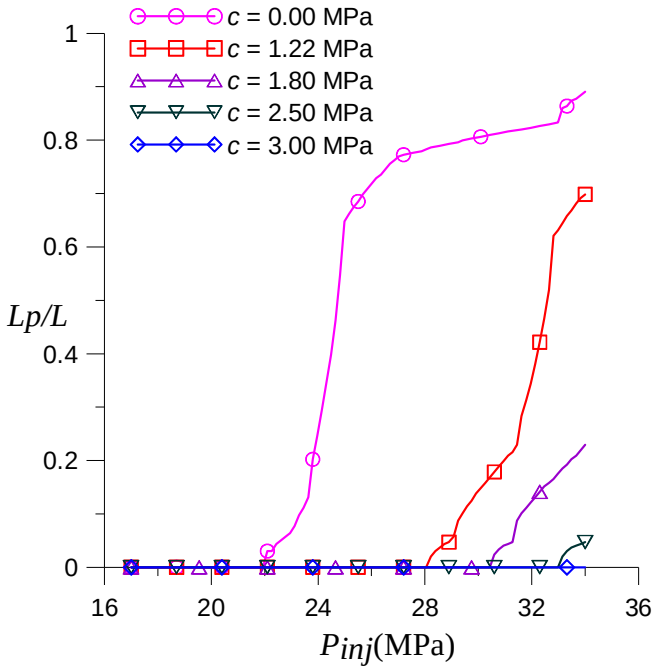



Fig 76. Evolution de la taille de plastification sur le noyau de la faille en fonction de la pression d'injection au niveau du puits pour différentes cohésions du matériau de remplissage

## 5.5 Conclusion

Le comportement hydromécanique d'une faille traversant un réservoir lors d'un scénario d'injection de $CO_2$ a été modélisé. La faille consiste en un noyau rempli par un matériau argileux très peu perméable avec une loi de comportement de Drucker-Prager et des zones

endommagées caractérisées par des distributions stochastiques de fissures. Le noyau de la faille réagit donc comme une barrière contre l'écoulement de $CO_2$ dissous dans l'eau du réservoir. Au contraire, le réseau percolé des fissures dans les zones endommagées confère une forte perméabilité effective à cette zone par rapport à celle du matériau de la couverture. La zone de faille se comporte alors comme une conduite.

Une augmentation de la pression d'injection provoque, d'une part, une augmentation de la perméabilité effective des zones endommagées dans la couverture, et donc un accroissement du flux à l'interface de ces zones et de l'aquifère situé au-dessus de la couverture. Le résultat du flux cumulé à ce niveau permet d'évaluer le risque de la remontée de saumure à l'aquifère carbonatée et la contamination de cet aquifère.

D'autre part, l'opération d'injection induit une diminution de la contrainte effective qui entraîne l'apparition d'une zone de plastification dans le noyau de la faille. La taille de plastification obtenue dans les calculs permet d'évaluer le risque de réactivation de la faille. On peut alors déterminer une pression d'injection critique à ne pas dépasser sous peine de provoquer des glissements de failles et sismicités induites.

# Conclusions et perspectives générales

### Conclusions générales

Ce mémoire a d'abord présenté les développements récents concernant la modélisation de l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré et l'estimation de sa perméabilité effective. La matrice entourant les fissures obéit à la loi d'écoulement de Darcy avec une perméabilité uniforme. L'écoulement dans les fissures est modélisé par la loi de Poiseuille. En comparaison avec la taille du domaine, la fissure est supposée avoir une épaisseur nulle. Sa perméabilité transversale est supposée infinie, ce qui implique une continuité de pression de part et d'autre de la fissure. Mathématiquement, la fissure est alors représentée par une classe de régularité surface dans l'espace. La loi d'échange de masse entre la fissure et la matrice est obtenue en écrivant la conservation de la masse dans une petite portion de la surface de fissure considérée comme un volume de mince épaisseur [136, 139]. L'analyse de la conservation de la masse de fluide dans un petit volume entourant un point d'intersection pour le problème 2D [132] ou une ligne d'intersection pour le problème 3D [139] permet d'établir la loi d'échange en ces points et lignes. Cette loi est indépendante des échanges de masse entre les fissures et la matrice et s'exprime par les mêmes relations que pour un réseau de fissures dans une matrice imperméable.

Une analyse rigoureuse a montré que les hypothèses adoptées pour les fissures, à savoir surfaces d'épaisseur nulle et conductivité transversale infinie, l'effet des fissures dans l'écoulement peut être représenté par une répartition linéaire (dans le cas 2D) ou surfacique (dans le cas 3D) de points sources. Des solutions générales du potentiel, sous la forme d'une équation intégrale singulière, ont alors pu être proposées par Pouya et Ghabezloo [136] dans le cas 2D et Pouya [139] dans le cas 3D afin de décrire l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini soumis à un champ lointain. Dans ces solutions le champ de pression dans la matrice est une fonction intégrale de l'infiltration dans les fissures qui tient compte pleinement de l'interaction et de l'intersection entre les fissures. Ces formulations ont été présentées d'abord pour une matrice isotrope et ensuite étendues pour le cas anisotrope en utilisant des transformations linéaires. Ces solutions apportent un grand avantage en terme de modélisation numérique qui est la réduction de la dimension du problème. Elles vérifient aussi automatiquement la conservation de la masse aux points et lignes d'intersection entre fissures sans la nécessité d'écriture d'équations supplémentaires. Par ailleurs, de ces équations il est possible d'obtenir une solution explicite de l'infiltration dans une fissure super-conductrice. La connaissance de cette solution est très utile pour valider les solutions numériques.

Nous avons étudié plus particulièrement l'écoulement dans une fissure elliptique isolée placée dans une matrice infinie sous l'effet d'un champ lointain. Nous avons montré que la solution de l'écoulement de Poiseuille dans cette fissure d'épaisseur nulle et obéissant à la loi d'écoulement de Poiseuille n'est pas celle du cas limite d'une inclusion ellipsoïdale aplatie

soumise à l'écoulement de Darcy [140]. Les champs de pression dans la matrice et dans la fissure sont différents entre ces deux modèles dans le cas général. Seules la pression et l'intégrale de l'infiltration sur la surface de fissure sont identiques pour ces deux types de modélisation dans le cas d'une fissure super-conductrice. Dans ce cas, en effet la pression est constante dans la fissure, que ce soit sous l'hypothèse d'un écoulement de Darcy ou de Poiseuille. On note en particulier que le champ de l'infiltration dans la fissure de Poiseille comporte deux composantes non nulles dans les directions parallèle et perpendiculaire au gradient de pression lointain imposé à la matrice, tandis que dans une inclusion de Darcy l'écoulement reste parallèle (du moins si les perméabilités sont isotropes) au gradient de pression à l'infini. Ce résultat change fondamentalement la vision que l'on peut avoir de l'écoulement dans une fissure de Poiseuille comparé à l'inclusion ellipsoïdale aplatie de Darcy.

En remplaçant, dans les expressions générales du potentiel, l'infiltration dans les fissures par son expression en fonction du gradient de la pression dans la surface de la fissure, on obtient des équations intégrales singulières dans lesquelles l'inconnue est le champ de pression dans les fissures. La résolution numérique de ces équations basée sur la méthode de collocation a été décrite par Pouya et Vu [132] pour le problème 2D et Vu et al. [180] pour le problème 3D. Cette méthode aboutit à un outil numérique de modélisation de l'écoulement dans et autour d'un réseau de fissures dans un milieu infini sous l'effet d'un champ lointain de gradient de pression. La procédure numérique nécessite un maillage conforme sur l'ensemble des fissures. Des choix appropriés des fonctions d'interpolation et des points de collocations permettent d'établir un programme numérique rapide en particulier dans le but de calculer la perméabilité effective des mileux poreux fortement fissurés. La précision de la solution numérique a été vérifiée en la comparant avec la solution explicite du problème connue pour la fissure super-conductrice. La conservation de la masse en un point sur l'intersection entre fissures a été également vérifiée numériquement. Le calcul numérique est appliqué à des réseaux complexes de fissures pour illustrer sa capacité et son efficacité.

Dans une partie suivante de ce mémoire nous avons étudié la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré. Les hypothèses de continuité de la pression de part et d'autre de la fissure (conductivité transversale infinie) et de l'épaisseur (et donc de volume) nulle des fissures font, au final, que leur contribution à la perméabilité effective se traduit par un tenseur $\boldsymbol{k}^f$ qui s'ajoute à celle de la matrice. La détermination de $\boldsymbol{k}^f$ a été exposée dans ce mémoire par la voie numérique et, pour certains cas, par la voie théorique.

Le code numérique que nous avons développé sur la base des méthodes ci-dessus a été utilisé pour étudier le problème fondamental de l'écoulement dans une fissure isolée de forme elliptique dans une matrice infinie. Dans le cas de conductivité finie de la fissure, on ne connait pas de solution analytique pour l'écoulement dans la fissure sous l'effet de gradient de pression lointain imposé à la matrice. Mais, grâce aux résultats numériques, nous avons pu établir une solution approchée extrêmement précise pour l'intégrale de l'infiltration dans la surface de la fissure. C'est en effet cette intégrale qui intervient dans le calcul de la perméabilité effective du milieu poreux fissuré, et l'expression que nous avons établie est de

grand intérêt pour l'estimation de cette perméabilité. Nous avons par ailleurs procédé à l'estimation de cette perméabilité, en introduisant nos résultats dans des schémas d'homogénéisation de Mori-Tanaka dilué ou auto-cohérent. Le premier ne prenant pas en compte l'interaction entre fissures, conduit à une variation linéaire de la perméabilité effective en fonction de la densité de fissures. L'approche auto-cohérente, en revanche, conduit à une perméabilité effective en fonction non-linéaire de la densité de fissures. Une densité critique apparaît dans ce modèle au-delà de laquelle la perméabilité effective change d'allure en fonction de la densité de fissure et peut même être non nulle pour une matrice imperméaable. Cette valeur critique de densité de fissures a été interprêtée comme le seuil de percolation du réseau de fissures par Dormieux et Kondo [48]. Les valeurs que nous avons trouvées pour cette densité sont proches de celles trouvées dans la littérature par une approche directe de l'étude de la densité de percolation de réseaux de fissures. Nous avons donné le résultat général de la perméabilité calculée par le schéma auto-cohérent pour un milieu contenant plusieurs familles de fissures caractérisées chacunes par des paramètres moyens (densité, longueur caractéristique, orientation, conductivité) pour les fissures.

Les développements essentiellement numériques ci-dessus ont été complétés par des recherches sur des aspects théoriques qui ont aboutis entre autres à deux extensions intéressantes des travaux précédents : l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré *fini* [181] et la perméabilité effective d'un matériau poreux fissuré non-saturé [141].

Pour établir l'expression générale de la solution potentielle d'écoulement dans un domaine poreux fini contenant des fissures, ce domaine est divisé en plusieurs sous-domaines en utilisant l'approche de sous-structuration. Les fissures sont localisées sur les interfaces communes entre les sous-domaines sur lesquelles l'échange de masse entre la matrice et la fissure est considéré comme une condition aux limites. Les équations intégrales de frontières sont d'abord écrites en un point d'observation pour tous les sous-domaines et sont ensuite sommées et réarrangées afin d'obtenir une équation unique gouvernant l'écoulement stationnaire dans le milieu. Cette équation fournit la pression en tout point du domaine en fonction de la condition de pression ou de flux normal sur la frontière du domaine et de l'infiltration (inconnue) dans les fissures. L'expression du potentiel comporte alors deux contributions : celle exprimant les conditions sur la frontière qui est identique à l'expression trouvée dans la méthode des éléments de frontière classique et celle correspondant aux fissures qui est identique à celle trouvée pour le milieu infini [136]. La méthode de collocation est utilisée ensuite pour résoudre cette équation [132]. La méthode numérique développée suivant cette approche a pu être validée par comparaion avec les résultats obtenus pour les domaines finis par la méthode des éléments finis.

Pour l'étude de la perméabilité effective du milieu poreux fissuré et non-saturé, on admet d'abord que la fissure vide agit comme une membrane imperméable à l'écoulement de fluide dans la direction orthogonale à son plan. Elle n'a pas d'effet sur l'écoulement parallèle à son plan. On admet aussi que les fissures restent vides tant que la matrice n'est pas complètement saturée, ce qui peut se justifier si on assimile les fissures à des pores de taille beaucoup plus grandes que les pores de la matrice et on note que les phénomènes de tension superficielle

font que ce sont d'abord les petits pores qui se remplissent. Une fissure partiellement saturée est ensuite supposée être constituée par une partie remplie de fluide, agissant comme une fissure super-conductrice, et une partie vide agissant comme une barrière imperméable. Une solution analytique est obtenue, pour l'écoulement autour d'une fissure vide dans un milieu poreux infini soumis à un champ lointain, par la transformation de la solution pour la fissure super-conductrice. La solution correspondant à la fissure rectiligne non-saturée a été obtenue alors par la superposition de ces solutions le long de la ligne de fissure [141].

Ces hypothèses et ces résultats théoriques ont été finalement utilisés afin d'établir une estimation de la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé suivant le schéma de Mori-Tanaka. Le modèle proposé reflète bien la double nature de contribution d'une fissure non-saturée à la perméabilité globale : la partie remplie du fluide tend à augmenter la perméabilité tandis que la partie vide constitue un obstacle à l'écoulement et diminue la perméabilité effective. Le modèle théorique ainsi obtenu a été confronté à une modélisation numérique par les éléments finis et l'accord entre les résultats a été observé pour les faibles densités de fissures.

Les développements théoriques et numériques dans ce mémoire ont de nombreuses applications potentielles et possibles dans le domaine des géosciences. Une application a été réalisée dans ce travail du modèle auto-cohérent de la perméabilité effective du milieu poreux fissuré au problème du stockage géologique du $CO_2$. On a étudié le comportement hydromécanique d'une faille fictive traversant un système géologique multicouche lors d'une opération d'injection du $CO_2$. La faille est considérée comme un système constitué par un noyau argileux avec un critère mécanique de Drucker-Prager et des zones endommagées comprenant différentes densités de répartition des fissures. Le noyau de la faille réagit comme un obstacle à l'écoulement de saumure dans le réservoir tandis que le réseau percolé de fissures dans la couverture constitue un chemin préférentiel de remontée de saumure vers l'aquifère supérieur. L'opération d'injection du $CO_2$ est modélisée par l'augmentation de la pression interstitielle imposée sur une ligne représentant le puits d'injection. Le Code_Aster est utilisé pour la simulation hydro-mécanique globale. Un chaînage de calcul a été mis en place entre ce code et un module hydraulique de calcul de la perméabilité effective des zones endommagées pour prendre en compte l'évolution de la perméabilité au cours de l'injection. Le flux cumulé à l'interface entre les zones endommagées dans la couverture et l'aquifère supérieur a été caclulé, ce qui permet d'évaluer le risque de contamination de cet aquifère. La diminution de la contrainte effective observée au cours de l'injection dans le réservoir conduit à l'apparition et au développement d'une zone de plastification dans le noyau de la faille. La taille de cette zone permet d'estimer le risque de réactivation de la faille ainsi que la sismicité induite.

**Perpectives générales**

Les développements théoriques et numériques concernant l'écoulement dans un milieu poreux fissuré ainsi que la détermination de sa perméabilité effective [136, 132, 139, 140, 180,

181, 141] décrits dans ce mémoire peuvent être poursuivis en plusieurs directions sur les trois axes théorique, numérique et des applications.

Sur le plan théorique, deux extensions paraissent intéressantes et sont en cours de développement: l'écoulement transitoire dans un milieu poreux fissuré et la perméabilité effective d'un milieu poreux fissuré non-saturé 3D. La première est obtenue en utilisant l'approche de sous-structuration associée aux équations d'échange de masse entre la matrice et les fissures pour l'écoulement transitoire. Nous avons déjà entrepris ce travail dont les prémices sont données dans l'Annexe 7 de ce mémoire. La deuxième serait possible par la méthode présentée dans la section 4.2 pour le cas 2D et en partant des résultats théoriques obtenus par Pouya [139] et Pouya et Vu [140] pour une fissure elliptique super-conductrice dans une matrice 3D.

Sur le plan numérique, nous envisageons plusieurs travaux de développements tirant profit des résultats théoriques existants. En premier lieu, le programme numérique écrit pour l'écoulement stationnaire dans un milieu poreux fissuré infini isotrope 3D, présenté dans le chapitre 2, sera étendu au problème de matrice anisotrope. En deuxième lieu, l'équation intégrale de frontière gouvernant l'écoulement stationnaire au sein d'un domain poreux fini 3D contenant des fissures sera résolue en utilisant la méthode de collocation. En troisième lieu, la modélisation numérique de l'écoulement transitoire dans des formations géologiques fracturées paraît une perspective importante et extrêmement utile pour des applications dans les domaines pétrolier ou hydrogéologique. Dans le même esprit, l'extension de nos modèles numériques au cas des surfaces de fractures courbes paraît très intéressante.

Sur le plan des applications, la prise en compte d'autres types decouplages tels que « endomagement-perméabilité », « chimie-mécanique-perméabilité », rencontrés parfois dans les problèmes pétroliers ou du stockage géologique du $CO_2$, paraît une perspective intéressante de nos travaux.

# Annexe 1. Equation intégrale singulière *airfoil*

Dans cette annexe, on rappelle l'équation *airfoil* qui permet d'obtenir une solution analytique de l'infiltration dans une fissure super-conductrice isolée noyée dans une matrice infinie soumise à un champ lointain d'un gradient de pression (section 1.2.2.2).

Envisageons l'équation intégrale singulière *airfoil* sur un intervalle fini :

$$\forall x\in\,]\text{-}1,1[ \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{x-t}dt = g(x) \tag{244}$$

Cette équation et sa généralisation ont été intensivement étudiées dans la littérature [121, 174, 146, 93]. En limitant $g(x)$ une fonction continue de Hölder sur $-1 \le x \le 1$, $g\in C^{0,\alpha}[-1,1]$, la solution générale de l'équation (244) s'écrit :

$$\forall x\in\,]\text{-}1,1[; \qquad f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}}\frac{g(t)}{x-t}dt + \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} \tag{245}$$

où $A$ est une constante arbitraire. Donc, $f$ est généralement singulière à la fois en $x$ = -1 et $x$ = 1. Une condition supplémentaire appropriée est souvent rencontrée dans les problèmes physiques :

$$f(1) = f(\text{-}1) = 0 \tag{246}$$

De plus,

$$\int\frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t}dt = -\sqrt{1-t^2} + x\arcsin t - \sqrt{1-x^2}\,\log\left(\frac{|x-t|}{1-xt+\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}\right) \tag{247}$$

On en déduit alors:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t}dt = x \tag{248}$$

Dans le cas où $g(x)$ est une fonction linéaire de $x$ définie avec $x\in[\text{-}1,1]$ : $g(x) = Bx$. Nous calculons :

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}}\frac{Bt}{x-t}dt = \frac{B}{\sqrt{1-x^2}}\left(x\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t}dt - \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt\right) = -B\sqrt{1-x^2} \tag{249}$$

La solution de l'équation (245) avec la condition (246) est alors :

$$x\in[\text{-}1,1] \qquad f(x) = -B\sqrt{1-x^2} \tag{250}$$

# Annexe 2. Calcul de l'intégral pour un point à l'intérieur du disque elliptique

Cette annexe est consacré à démontrer la composante $q^0$ de l'infiltration dans une fissure elliptique super-conductrice présenté dans l'équation (55) dans la section 1.4.1.

Considérons une fissure elliptique Γ exprimée par l'équation $\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi} = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2$ ($\lambda_1$, $\lambda_2$ les deux valeurs propres du tenseur $\boldsymbol{B}$). En représentant les variables dans le système des coordonnées polaires (ρ,θ) centrées sur $\underline{x}$ (Fig 77) : $\xi_1 = x_1 + \rho\cos\theta$, $\xi_2 = x_2 + \rho\sin\theta$.

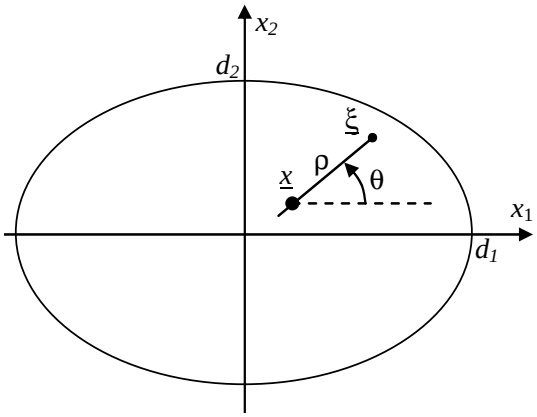



Fig 77. Inclusion ellipsoïdale de Darcy [140]

En injectant (55) dans (53), le changement des variables conduit à :

$$I_1 = \int_D \frac{\sqrt{1-\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}}{\left\|\underline{\xi}-\underline{x}\right\|^3}(\xi_1 - x_1)d\xi = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho_m} \frac{\sqrt{1-\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}}{\rho} d\rho\cos\theta d\theta \tag{251}$$

Evidemment, cette intégrale doit être envisagée au sens de la valeur principale de Cauchy

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0} I_{1\varepsilon}, \quad I_{1\varepsilon} = \int_{\theta=0}^{2\pi} J_\varepsilon(\theta)\cos\theta d\theta \tag{252}$$

avec

$$J_\varepsilon(\theta) = \int_\varepsilon^{\rho_m} \frac{\sqrt{1-\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}}{\rho} d\rho = \frac{\gamma}{e}\int_\varepsilon^{\rho_m} \sqrt{1-(e\rho+g)^2}\,\frac{d\rho}{\rho} \tag{253}$$

où

$$\gamma = \sqrt{\lambda_1\cos^2\theta + \lambda_2\sin^2\theta}, \quad D = \sqrt{\gamma^2 - \lambda_1\lambda_2(x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)^2} \tag{254}$$

$$e = \frac{\gamma^2}{D}, \quad g = \frac{\lambda_1 x_1\cos\theta + \lambda_2 x_2\sin\theta}{D} \tag{255}$$

On utilise la variable α comme suit :

$$\sin\alpha = e\rho + g \tag{256}$$

Quet ρ varie entre ε et $\rho_m$, α varie de $\alpha_\varepsilon$ = Arcsin(ρε +*g*) à π/2. Dans cet intervalle, $\cos\alpha \geq 0$. Le changement de variable ρ→α permet de calculer :

$$J_\varepsilon(\theta) = \frac{\gamma}{e}\int_{\alpha=\alpha_\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - g}\,d\alpha \tag{257}$$

En écrivant :

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - g} = \frac{1-g^2}{\sin\alpha - g} - (\sin\alpha + g) \tag{258}$$

on obtient :

$$J_\varepsilon(\theta) = \frac{\gamma(1-g^2)}{e}F_\varepsilon(\theta) - \frac{\gamma}{e}\left[\cos\alpha_\varepsilon + g(\pi/2 - \alpha_\varepsilon)\right] \tag{259}$$

où

$$F_\varepsilon(\theta) = \int_{\alpha=\alpha_\varepsilon}^{\pi/2} \frac{1}{\sin\alpha - g}\,d\alpha \tag{260}$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire l'expression $I_{1,\varepsilon}$ telle que :

$$I_{1,\varepsilon} = \int_{\theta=0}^{\pi} \left[J_\varepsilon(\theta) - J_\varepsilon(\theta+\pi)\right]\cos\theta\,d\theta \tag{261}$$

En remplaçant θ par θ + π, les fonctions γ, *e*, *D* ne changent pas, mais *g* change en –*g* et $\alpha_\varepsilon$ change en $\alpha'_\varepsilon$ = Arcsin(ρε -*g*) et $u_\varepsilon$ à $u'_\varepsilon$ = tan ($\alpha'_\varepsilon$/2) . Nous développons alors :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\theta) - J_\varepsilon(\theta+\pi) = {} & \frac{\gamma(1-g^2)}{e}\left[(F_\varepsilon(\theta) - F_\varepsilon(\theta+\pi)\right] \\ & -\frac{\gamma}{e}\left[\cos\alpha_\varepsilon - \cos\alpha'_\varepsilon + g\pi - g(\alpha_\varepsilon + \alpha'_\varepsilon)\right] \end{aligned} \tag{262}$$

Nous avons démontré dans dans l'Annexe 3 que $\lim_{\varepsilon\to 0}\left[F_\varepsilon(\theta) - F_\varepsilon(\theta+\pi)\right] = 0$. De plus, $\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon = -\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha'_\varepsilon = Arc\sin(g)$, on obtient : $\lim_{\varepsilon\to 0}\left[J_\varepsilon(\theta) - J_\varepsilon(\theta+\pi)\right] = -\frac{\gamma g}{e}\pi = -\frac{gD}{\gamma}\pi$.

Donc :

$$I_1 = -\pi\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\gamma g}{e}\cos\theta\,d\theta \tag{263}$$

En substituant (254) et (255) dans (263), on trouve :

$$I_1 = -2\pi\lambda_1 x_1 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{\lambda_1\cos^2\theta + \lambda_2\sin^2\theta}}\, d\theta = -2\pi\phi_1(\lambda_1,\lambda_2)\, x_1 \tag{264}$$

D'ailleurs, dans le cas $x_1$=$x_2$=0, c'est-à-dire $g$=0 et $e$=γ, l'intégrale de l'infiltration sur la fissure s'exprime selon :

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho_m} \sqrt{1-\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}\;\rho\, d\rho\, d\theta &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1/\gamma} \sqrt{1-\gamma^2\rho^2}\;\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d\theta}{3\gamma^2} \\ &= \frac{1}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d\theta}{\lambda_1\cos^2\theta + \lambda_2\sin^2\theta} = \frac{2\pi}{3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \end{aligned} \tag{265}$$

# Annexe 3. Calcul d'une limite de fonction

Afin de calculer $F_\varepsilon(\theta)$ présenté dans l'Annexe 2, le changement de variable $u = tan\ (\alpha/2)$ entraîne :

$$F_\varepsilon(\theta) = -2g \int_{u=u_\varepsilon}^{1} \frac{1}{g^2(u^2+1)-2ug}\,du = \frac{-1}{\sqrt{1-g^2}} \ln\left|\frac{gu-1-\sqrt{1-g^2}}{gu-1+\sqrt{1-g^2}}\right|_{u_\varepsilon}^{1} \tag{266}$$

où $u_\varepsilon = \tan(\alpha_\varepsilon/2)$.

Nous calculons la différence suivante:

$$\begin{aligned} & F_\varepsilon(\theta) - F_\varepsilon(\theta+\pi) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-g^2}}\left[ \ln\left|\frac{gu-1-\sqrt{1-g^2}}{gu-1+\sqrt{1-g^2}}\right|_{u_\varepsilon}^{1} - \ln\left|\frac{-gu-1-\sqrt{1-g^2}}{-gu-1+\sqrt{1-g^2}}\right|_{u'_\varepsilon}^{1}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-g^2}}\left[ \ln\left|\frac{gu_\varepsilon-1-\sqrt{1-g^2}}{gu'_\varepsilon+1+\sqrt{1-g^2}}\right| - \ln\left|\frac{gu_\varepsilon-1+\sqrt{1-g^2}}{gu'_\varepsilon+1-\sqrt{1-g^2}}\right|\right] \end{aligned} \tag{267}$$

On note $\sin\alpha_0 = g$, donc $-\pi/2 \le \alpha_0 \le \pi/2$ et $\tan\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g}$ ce qui assure que le premier terme $\ln|\cdot|$ dans (267) tend vers zéro quet $\varepsilon\to 0$. Toutefois, le second terme est indéterminé car le numérateur et le dénominateur tends vers zéro quet $\varepsilon\to 0$. La règle de l'Hôpital s'en déduit :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{gu_\varepsilon-1+\sqrt{1-g^2}}{gu'_\varepsilon+1-\sqrt{1-g^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial u_\varepsilon/\partial\varepsilon}{\partial u'_\varepsilon/\partial\varepsilon} \tag{268}$$

Par ailleurs, $du_\varepsilon = (1+\tan^2\alpha_\varepsilon/2)\,d(\alpha_\varepsilon/2)$, $ed\varepsilon = d\sin\alpha_\varepsilon = \cos\alpha_\varepsilon d\alpha_\varepsilon$ et $\frac{du_\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{1+\tan^2\frac{\alpha_\varepsilon}{2}}{2\cos\alpha_\varepsilon}$,

$\frac{du'_\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{1+\tan^2\frac{\alpha'_\varepsilon}{2}}{2\cos\alpha'_\varepsilon}$ impliquent :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial u_\varepsilon/\partial\varepsilon}{\partial u'_\varepsilon/\partial\varepsilon} = 1 \tag{269}$$

On trouve alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[F_\varepsilon(\theta) - F_\varepsilon(\theta+\pi)\right] = 0 \tag{270}$$

# Annexe 4. Champ de pression à l'extérieur du disque circulaire

Afin de déduire le résultat (82) dans la section 1.4.2, nous observons sur Fig 78 et l'intégrale du côté gauche de l'équation (82) est réécrite dans le système des coordonnées polaires :

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1-\underline{\xi}.\boldsymbol{B}.\underline{\xi}}}{\left\|\underline{\xi}-\underline{x}\right\|^3}(\underline{\xi}-\underline{x})\,d\xi = \int_{-\psi'}^{\psi'}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\sqrt{1-\underline{\xi}.\underline{\xi}/R^2}\;(\underline{u}\cos\varphi+\underline{v}\sin\varphi)}{\rho}\,d\rho\,d\theta \quad (271)$$

où ψ'=ψ/2.

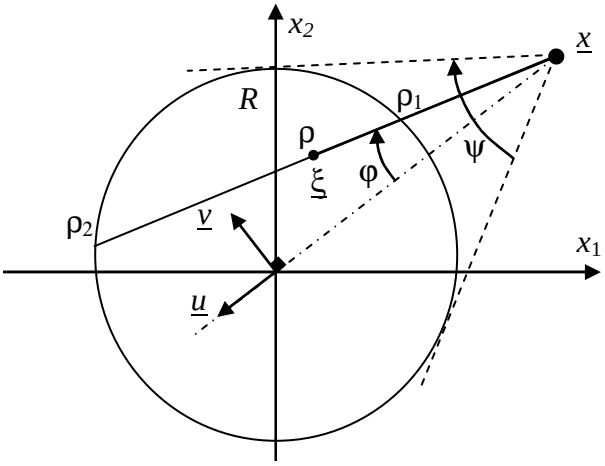



Fig 78. Paramètres dans le système polaire [140]

Nous pouvons exprimer : $\sqrt{1-\underline{\xi}.\underline{\xi}/R^2} = \frac{1}{eR}\sqrt{1-(e\rho+g)^2}$ avec $e = \frac{1}{\sqrt{R^2-\left\|\underline{x}\right\|^2\sin^2\varphi}}$ et $g = -e\left\|\underline{x}\right\|\cos\varphi$. La symétrie selon φ→-φ permet d'écrire : $I = \left(\int_{-\psi'}^{\psi'} \frac{1}{eR}J(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi\right)\underline{u}$, avec $J(\varphi) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\sqrt{1-(e\rho+g)^2}}{\rho}\,d\rho$.

Etant simultané à l'Annexe 2, le changement de variable $\sin\alpha = e\rho+g$, avec $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$ et $-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2$, conduit à :

$$J(\varphi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha-g}\,d\alpha = (1-g^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sin\alpha-g}\,d\alpha - g\pi \quad (272)$$

Cependant, contrairement au cas de l'Annexe 2, $|g|>1$. En changeant les variables : $u = \tan(\alpha/2)$ et puis $v = \frac{gu-1}{\sqrt{g^2-1}}$, on calcule successivement :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sin\alpha - g} d\alpha = -2g \int_{-1}^{1} \frac{du}{(gu-1)^2 + g^2 - 1} = \frac{-2}{\sqrt{g^2-1}} \left[ Arc\tan v \right]_{v_1}^{v_2} \qquad (273)$$

où $v_1 = \frac{-g-1}{\sqrt{g^2-1}}$, $v_2 = \frac{g-1}{\sqrt{g^2-1}}$. Car $v_1 v_2 = -1$, nous avons : *Arc*tan $v_2$ - *Arc*tan $v_1 = \pi/2$ si $v_2 > v_1$ (g >0) ou *Arc*tan $v_2$ - *Arc*tan $v_1 = -\pi/2$ si $v_2 < v_1$ (g <0). Par conséquent :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sin\alpha - g} d\alpha = \frac{-\pi}{\sqrt{g^2-1}} \frac{g}{|g|} = \frac{-\pi}{g\sqrt{1-\frac{1}{g^2}}} \qquad (274)$$

En notant $\sin\psi' = \frac{R}{\|\underline{x}\|}$, on trouve :

$$\frac{1}{eR} J(\varphi)\cos\varphi = \left( \sqrt{1-\frac{1}{g^2}} - 1 \right) \frac{g}{e}\pi = -\frac{\pi}{\sin\psi'} (\cos\psi' - \cos\varphi)\cos\varphi \qquad (275)$$

De plus, $\underline{u} = \frac{\sin\psi'}{R}\underline{x}$, on obtient le résultat final :

$$I = \left( \int_{-\psi'}^{\psi'} \frac{1}{eR} J(\varphi)\cos\varphi d\varphi \right) \underline{u} = \frac{\pi}{2R} (2\psi' - \sin 2\psi') \underline{x} = \frac{\pi}{2R} (\psi - \sin\psi) \underline{x} \qquad (276)$$

# Annexe 5. Relation linéaire entre les tenseurs Φ et B

Afin de compléter le calcul dans la section 1.4.3, on envisage un tenseur de second ordre $\boldsymbol{B}$ et note que $B = \boldsymbol{B}:\boldsymbol{\delta}$ et $\beta = |\boldsymbol{B}|$ (déterminant de $\boldsymbol{B}$). En écrivant $\boldsymbol{B} = \lambda_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$, on trouve : $B = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\beta = \lambda_1\lambda_2$. Donc,

$$\lambda_{1,2} = \frac{B \mp \sqrt{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{B} - 4\beta}}{2} \tag{277}$$

Par ailleurs, $\boldsymbol{\Phi} = \phi_1^{-1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \phi_2^{-1} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$ dans lequel $\phi_1$ et $\phi_2$ ont été donnés dans (57), c'est-à-dire :

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}}{\lambda} E(\lambda) \; ; \; \frac{1}{1-\lambda^2}\phi_1 + \phi_2 = \frac{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}}{\lambda} K(\lambda) \tag{278}$$

où $\lambda = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ ; $K(\lambda)$ et $E(\lambda)$ les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce. Les solutions $\phi_1$ et $\phi_2$ ont été trouvées telles que :

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}}{\lambda} . \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \left[ K(\lambda) - E(\lambda) \right] = \frac{1}{\chi_1(B,\beta)} \tag{279}$$

$$\phi_2 = \frac{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}}{\lambda} \left[ -\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} K(\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} E(\lambda) \right] = \frac{1}{\chi_2(B,\beta)} \tag{280}$$

En remarquant que les deux tenseurs $\boldsymbol{\Phi}$ et $\boldsymbol{B}$ ont les mêmes directions principales $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, on peut écrire alors :

$$\boldsymbol{\Phi} = \sigma\boldsymbol{\delta} + \tau\bar{\boldsymbol{B}} \tag{281}$$

où, σ et τ sont deux scalaires et $\bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} - \frac{1}{2} B\boldsymbol{\delta}$. On en déduit :

$$\boldsymbol{\Phi}:\boldsymbol{\delta} = 3\sigma, \quad det\boldsymbol{\Phi} = \sigma^2 - \frac{\tau^2}{4}(B^2 - 4\beta) \tag{282}$$

Ainsi, $\phi_1$ et $\phi_2$ peuvent être déterminés par le système d'équations suivantes :

$$\frac{1}{\phi_1} + \frac{1}{\phi_2} = 3\sigma, \quad \frac{1}{\phi_1\phi_2} = \sigma^2 - \frac{\tau^2}{4}(B^2 - 4\beta) \tag{283}$$

Ensuite, on exprime σ et τ en fonction de $\phi_1$ et $\phi_2$ et puis en fonction de $B$ et β comme suit :

$$\sigma(B,\beta)=\frac{1}{3}(\chi_1+\chi_2),\quad \tau(B,\beta)=\frac{\chi_1^2+\chi_2^2-7\chi_1\chi_2}{9\alpha^2} \tag{284}$$

avec $\alpha(B,\beta)=\frac{\sqrt{\boldsymbol{B}:\boldsymbol{B}-4\beta}}{2}$.

On définit les deux fonctions scalaires *f* et *g* telles que :

$$f(B,\beta)=\sigma-\frac{1}{2}B\tau,\quad g(B,\beta)=\tau \tag{285}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\Phi}=f\boldsymbol{\delta}+g\boldsymbol{B} \tag{286}$$

# Annexe 6. Relation entre $k^f$ et $g^f$

Cette annexe vise à démontrer la relation (228) entre l'intégrale de la discontinuité de la pression à travers une fissure vide et celle de l'infiltration dans une fissure super-conductrice ayant la même géometrie avec des conditions aux limites équivalentes (section 4.2.5).

Considérons une fissure courbe décrite par une fonction régulière $\underline{z}(s)$ avec la tangente $\underline{t}(s)$ et la normale $\underline{n}(s) = \underline{e}_z \times \underline{t}(s)$ (Fig 79). La fissure se termine en deux extrémités $s = 0$ et $s = L$. $\underline{v}(\underline{x})$, $\underline{u}(\underline{x})$ désignent respectivement les champs de vitesse pour les problèmes de la fissure vide et de la fissure super-conductrice, correspondant aux champs lointains d'un gradient uniforme de pression $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ satisfaisant $\underline{A}=\underline{e}_z \times \underline{A}'$.

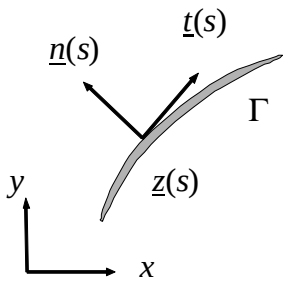



Fig 79. Paramètres geométriques d'une fissure courbe [141]

En fait,

$$\int_\Gamma [\![ p ]\!].\underline{n}(s)\, ds = \underline{e}_z \times \int_\Gamma [\![ p ]\!].\underline{t}(s)\, ds = \underline{e}_z \times \int_\Gamma [\![ p ]\!]\, d\underline{z} \tag{287}$$

L'intégration par parties donne ensuite :

$$\int_\Gamma [\![ p ]\!] d\underline{z} = \left[ [\![ p ]\!] \underline{z} \right]_0^L - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial s} \left( [\![ p ]\!] \right) \underline{z} ds \tag{288}$$

En outre,

$$\frac{\partial [\![ p ]\!]}{\partial s} = [\![ \nabla p ]\!].\underline{t}(s) = -\frac{1}{k} \left( \underline{v}^+(s) - \underline{v}^-(s) \right).\underline{t}(s) \tag{289}$$

Il convient de noter que la vitesse tengentielle sur la fissure vide peut être déduite par celle normale sur la fissure super-conductrice avec la condition aux limites équivalente en utilisant la relation (201). En plus, il n'y a pas de discontinuité de pression aux pointes de fissure vide, donc :

$$\left( \int_\Gamma [\![ p ]\!]\, d\underline{z} \right)_{\underline{A}} = -\left( \frac{1}{k} \int_\Gamma \left( u_n^+(s) - u_n^-(s) \right) d\underline{z} \right)_{\underline{A}'} \tag{290}$$

En injectant (8) dans (290), on obtient:

$$\left(\int_{\Gamma}[\![p]\!]d\underline{z}\right)_{\underline{A}}=\left(\frac{1}{k}\int_{\Gamma}\frac{\partial q}{\partial s}\underline{z}ds\right)_{\underline{A}'}=\left(-\frac{1}{k}\int_{\Gamma}q(s)\underline{t}(s)ds\right)_{\underline{A}'} \tag{291}$$

L'introduction de (291) dans (287) donne:

$$\left(\int_{\Gamma}[\![p]\!].\underline{n}(s)\,ds\right)_{\underline{A}}=\left(-\frac{1}{k}\int_{\Gamma}q(s)\underline{n}(s)ds\right)_{\underline{A}'} \tag{292}$$

Afin de vérifier cette relation, la fissure est supposée être rectiligne, c'est-à-dire $\underline{n}(s)$ est constant. Par ailleurs, la solution explicite de pression $p(\underline{x})$ est disponible dans l'équation (203) pour la fissure vide. D'une part, le côté gauche de l'équation (292) peut être déterminé analytiquement comme suit :

$$\left(\int_{\Gamma}[\![p]\!].\underline{n}\,ds\right)_{\underline{A}}=2\underline{n}.\underline{A}.\underline{n}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-s^2}ds=\pi R^2\left(\underline{n}\otimes\underline{n}\right).\underline{A} \tag{293}$$

D'autre part, en utilisant le champ lointain du gradient de pression correspondant $\underline{A}'$, le côté droit de l'équation (292) est développé : $\frac{1}{k}\int_{-R}^{R}q(s)n(s)ds\;=\;-\pi R^2\underline{n}\underline{A}'.\underline{t}=-\pi R^2\underline{n}.\underline{A}.\underline{n}$ qui est identique au résultat dans l'équation (293).

# Annexe 7. Solutions du potentiel d'écoulement transitoire dans un milieu poreux fissuré

En considérant l'écoulement transitoire dans un milieu poreux fissuré 2D décrites dans la section 4.1, l'approche « sous-structuration » peut être utilisé afin d'obtenir une solution générale du potentiel. Les équations gouvernant l'écoulement transitoire comportent les expressions de la conservation de la masse (4), (8), (16) ; les conditions aux limites (17), (18), (19) ; la condition initiale (20) et les lois constitutives (1), (5).

En substituant (1) dans (4), on obtient :

$$\forall \underline{x} \in \Omega\text{-}\Gamma; \qquad \frac{1}{\eta}\frac{\partial p(\underline{x},t)}{\partial t} - \Delta p(\underline{x},t) = 0 \tag{294}$$

où $\eta = \dfrac{k}{\phi_m \beta_m}$ est le coefficient de diffusion de la matrice.

La procédure de la méthode des éléments de frontière permet de développer cette équation afin d'aboutir à une solution générale du potentiel de l'écoulement transitoire dans un milieu poreux sans fissures comme suit :

$$\zeta(\underline{x})\, p(\underline{x},t) = \eta \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} [G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p(\underline{\xi},\tau) - p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \tag{295}$$

où $\zeta$ est le coefficient exprimé par l'équation (188) et Fig 41 ; $G(\underline{x},\underline{\xi},t,\tau)$ est la solution fondamentale du problème de l'écoulement transitoire dans le cas 2D [38] :

$$G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t) = \frac{1}{4\pi\eta(t-\tau)} \exp\left[-\frac{(\underline{x}-\underline{\xi})^2}{4\eta(t-\tau)}\right] \tag{296}$$

Le domaine fissuré $\Omega$ est décomposé en plusieurs sous-domaines noté $\Omega_i$ par la méthode « sous-structuration » comme présenté en détail dans la section 4.1 pour l'écoulement stationnaire. En écrivant l'équation (295) à un point observé $\underline{x}$ pour chaque sous-domaine $\Omega_i$ présenté dans Fig 42, nous avons :

$$\begin{aligned}
\zeta_i(\underline{x})\, p(\underline{x},t) = {} & \eta \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega_i} [G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p(\underline{\xi},\tau) - p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \\
& + \eta \int_0^t d\tau \sum_{j=1}^{m_{3i}} \int_{\tilde{\Gamma}_j} [G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p(\underline{\xi},\tau) - p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \\
& + \eta \int_0^t d\tau \sum_{j=1}^{m_{1i}} \int_{\Gamma_j^+} [G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p^+(\underline{\xi},\tau) - p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}^-(\underline{\xi})d\xi
\end{aligned} \tag{297}$$

$$+\eta\int_0^t d\tau\sum_{j=1}^{m_{2i}}\int_{\Gamma_j^-}[G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p^-(\underline{\xi},\tau)-p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}^+(\underline{\xi})d\xi$$

$$+\eta\int_0^t d\tau\sum_{j=1}^{m_{4i}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_j^+ +\varepsilon}[G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p^+(\underline{\xi},\tau)-p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}^-(\underline{\xi})d\xi$$

$$+\eta\int_0^t d\tau\sum_{j=1}^{m_{5i}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_j^- +\varepsilon}[G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p^-(\underline{\xi},\tau)-p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}^+(\underline{\xi})d\xi$$

En notant que la pression $p(\underline{\xi})$ et le gradient de pression $\nabla p(\underline{\xi})$ sont continus à traverse les lignes fictives $\tilde{\Gamma}$ ainsi qu'il n'y a pas de saut de pression ($\underline{\xi}$) sur les fissures $\Gamma$, la somme des équations (297) sur *i* conduit à :

$$\begin{aligned}\left(\sum_i \zeta_i(\underline{x})\right)p(\underline{x},t)=&\eta\int_0^t d\tau\int_{\partial\Omega}[G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p(\underline{\xi},\tau)-p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi\\&+\eta\int_0^t d\tau\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)[\nabla p^+(\underline{\xi},\tau)-\nabla p^-(\underline{\xi},\tau)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi\\&+\eta\int_0^t d\tau\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_S\sum_j\int_{S_j+\varepsilon}G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)[\nabla p^+(\underline{\xi},\tau)-\nabla p^-(\underline{\xi},\tau)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi\end{aligned}\qquad(298)$$

La discontinuité du gradient de pression $[\![\nabla p(\underline{\xi},t)]\!]$ apparaît sur les lignes de fissures et aux points d'intersections comme la condition aux limites. Cependant, le terme $[\![\nabla p(\underline{\xi})]\!]$ n'est pas défini sur les points d'intersection entre fissures qui peut être traité par le calcul de limites. La démontration dans la section 4.1 montre que $\zeta(\underline{x})=\sum_i\zeta_i(\underline{x})$. La substitution de la relation $[\![\underline{v}(\underline{\xi},t)]\!]=-k[\![\nabla p(\underline{\xi},t)]\!]$ dans l'équation (8) en déduit :

$$[\![\nabla p(\underline{\xi},t)]\!].\underline{n}(s)=-\frac{\beta_f}{k}\frac{\partial p(\underline{z},t)}{\partial t}-\frac{1}{k}\partial_s q(s,t)\qquad(299)$$

En injectant (299) dans (298), on obtient :

$$\begin{aligned}\zeta(\underline{x})\,p(\underline{x},t)=&\eta\int_0^t d\tau\int_{\partial\Omega}[G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p(\underline{\xi},\tau)-p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi\\&-\frac{\eta}{k}\int_0^t d\tau\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)[\beta_f\frac{\partial p(\underline{z},\tau)}{\partial\tau}+\partial_s q(s,\tau)]d\xi\\&-\frac{\eta}{k}\int_0^t d\tau\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_S\sum_j\int_{S_j+\varepsilon}G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)[\beta_f\frac{\partial p(\underline{z},\tau)}{\partial\tau}+\partial_s q(s,\tau)]d\xi\end{aligned}\qquad(300)$$

L'intégration par parties conduit à :

$$\int_0^t \frac{\partial p(\underline{\xi},\tau)}{\partial \tau} G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)d\tau = \left[ p(\underline{\xi},\tau)G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t) \right]_0^t - \int_0^t p(\underline{\xi},\tau)\frac{\partial G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)}{\partial \tau} d\tau \quad (301)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} \partial_s q(s,\tau) G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)d\xi = \sum_S \left( \sum_j q_{ij}^0(\underline{z}_i,\tau) \right) G(\underline{x},\underline{z}_i,\tau,t) - \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} q(s,\tau)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)d\xi \quad (302)$$

où $\underline{z}_i \in S$ est le point singulier numéroté selon $i$ ; $q_{ij}^0$ est le flux sortant dans la fissure $j$ du point $\underline{z}_i$. La conservation de la masse au point d'intersection $\underline{z}_i$ s'écrit : $\sum_j q_{ij}^0(\underline{z}_i,\tau) = 0$. De plus, la condition initiale (20) mène à : $\left[ p(\underline{\xi},\tau)G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t) \right]_0^t = 0$. En conséquence :

$$\begin{aligned} &\int_0^t d\tau \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_S \sum_j \int_{S_j+\varepsilon} G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)[\beta_f \frac{\partial p(\underline{z},\tau)}{\partial \tau} + \partial_s q(s,\tau)]d\xi \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t d\tau \sum_S \sum_j \int_0^{\varepsilon(\Gamma_j)} p(\underline{\xi},\tau)\frac{\partial G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)}{\partial \tau} d\xi \\ &\quad -\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_S \sum_{j=1}^{m} \int_0^t d\tau \int_0^{\varepsilon(\Gamma_j)} q(s,\tau)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)d\xi \end{aligned} \quad (303)$$

Le premier terme du côté droit de cette équation disparaît quand $\varepsilon \to 0$. On suppose que le débit $q(s)$ constant et égal à $q_{ij}^0$ dans chaque segment infinitésimal $\varepsilon$ de la fissure $j$ reliée au point d'intersection $\underline{z}_j$. Il en déduit alors:

$$\sum_S \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\varepsilon(\Gamma_j)} q(s,\tau)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)d\xi = \sum_S \sum_{j=1}^{m} q_{ij}^0(\tau) \int_0^{\varepsilon(\Gamma_j)} \partial_s G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)d\xi = 0 \quad (304)$$

L'introduction des équations (301)-(304) dans (300) en résulte :

$$\begin{aligned} \zeta(\underline{x})\, p(\underline{x},t) &= \eta \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} [G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p(\underline{\xi},\tau) - p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \\ &\quad + \frac{\eta}{k} \int_0^t d\tau \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} \left[ \beta_f\, p(\underline{\xi},\tau)\frac{\partial G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)}{\partial \tau} + q(s,\tau)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t) \right] d\xi \end{aligned} \quad (305)$$

En remplaçant $q(s,\tau)$ dans cette équation par son expression (5), on obtient :

$$\zeta(\underline{x})\, p(\underline{x},t) = \eta \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} [G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p(\underline{\xi},\tau) - p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi \quad (306)$$

$$+\frac{\eta}{k}\int_0^t d\tau\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}\left[\beta_f\, p(\underline{\xi},\tau)\frac{\partial G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)}{\partial\tau}-c\partial_s p(s,\tau)\partial_s G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\right]d\xi$$

Cette procédure, décrite ci-dessus peut être étendue au problème 3D considéré dans la section 1.2.2. La solution générale du potentiel de ce problème s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\zeta(\underline{x})\,p(\underline{x},t)&=\eta\int_0^t d\tau\int_{\partial\Omega}[G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p(\underline{\xi},\tau)-p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi\\&+\frac{\eta}{k}\int_0^t d\tau\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}\left[\beta_f\, p(\underline{\xi},\tau)\frac{\partial G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)}{\partial\tau}+\underline{q}(\underline{s},\tau)\nabla_s G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\right]d\xi\end{aligned}\qquad(307)$$

et de nouveau,

$$\begin{aligned}\zeta(\underline{x})\,p(\underline{x},t)&=\eta\int_0^t d\tau\int_{\partial\Omega}[G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\nabla p(\underline{\xi},\tau)-p(\underline{\xi},\tau)\nabla G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)]\underline{n}(\underline{\xi})d\xi\\&+\frac{\eta}{k}\int_0^t d\tau\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}\left[\beta_f\, p(\underline{\xi},\tau)\frac{\partial G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)}{\partial\tau}-\boldsymbol{c}.\nabla_s p(\underline{s},\tau).\nabla_s G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)\right]d\xi\end{aligned}\qquad(308)$$

où $G(\underline{x},\underline{\xi},t,\tau)$ est la solution fondamentale du problème de l'écoulement transitoire dans le cas 3D [38] :

$$G(\underline{x},\underline{\xi},\tau,t)=\frac{1}{8\left[\pi\eta(t-\tau)\right]^{3/2}}\exp\left[-\frac{(\underline{x}-\underline{\xi})^2}{4\eta(t-\tau)}\right]\qquad(309)$$

Quand le point observé $\underline{x}$ est localisé sur les fissures ou sur la frontière du domaine, les équations (306) et (308) ne comprennent que les champs inconnus sur les fissures qui réduisent donc la dimension du problème. Ces équations seront résolues par une méthode numérique afin de vérifier la méthode et les formulations développées.

# Références


1. Abramowitz M, Stegun I. A : *"The Process of the Arithmetic-Geometric Mean"* §17.6 in Hetbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, pp. 571 and 598-599 (1972).
2. Adler P.M : *Porous Media: Geometry and Transports*. Butterworth- Heinemann, Woburn, Mass. (1992).
3. Adler P.M, Thovert J.F : *Fractures and Fracture Networks*. Kluwer Acad., Norwell, Mass. (1999).
4. Aifantis E.C : On Barrenblatt's problem. *International Journal of Engineering Science* **18**, 857-867 (1980).
5. Angot P, Boyer F, Hubert F : Asymptotic and numerical modelling of flows in fractured porous media. *M2AN* **43**(2), 239–275 (2009).
6. Arbogast T, Douglas J, Hornung U : Derivation of the double-porosity model of single phase flow via homogeneisation theory. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **21**, 823-836 (1990).
7. Aubry D, Chouvet D, Modaressi A, Modaressi H : *GEFDYN : Logiciel d'Analyse de Comportement Mécanique des Sols par Eléments Finis avec Prise en Compte du Couplage Sol-Eau-Air*. Manuel scientifique. Ecole Centrale Paris. LMSS-Mat (1986)
8. Aubry D, Modaressi A : *GEFDYN, Manuel scientifque*. Ecole Centrale Paris. LMSS-Mat (1996).
9. Baca R, Arnett R, Langford D : Modeling fluid flow in fractured porous rock masses by finite element techniques. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **4**, 337-348 (1984).
10. Banerjee P.K, Butterfield R : *Boundary element methods in engineering science*. Maidenhead, McGraw-Hill (1981).
11. Barenblatt G.I, Zheltov Y.P, Kochina I.N : Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. *Sov. Appl. Math. Mech., Engl. Transl.* **24**, 852–864 (1960).
12. Barthélémy J.F : Effective Permeability of Media with a Dense Network of Long and Micro Fractures. *Transport in Porous Media* **76**, 153–178 (2009).
13. Beicip-Franlab. *Fractured Reservoir Characterization and Modelling* (FracaFlow)
14. Billaux D : *Hydrogéologie des milieux fracturés. Géométrie, connectivité and comportement hydraulique*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (1990).
15. Boersma J, Danicki E : On the solution of an integral Equation arising in potential problems for circular and elliptic disks. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **53**, 931-941 (1993).
16. Bogdanov I.I, Mourzenko V.V, Thovert J.F : Effective permeability of fractured porous media in steady state flow. *Water Resources Research* **39**(1), 1301-1316 (2003).
17. Bogdanov I.I, Mourzenko V.V, Thovert J.F, Adler P.M : Effective permeability of fractured porous media with power-law distribution of fracture sizes. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*. **76**(3 Pt 2), 036309 (2007).
18. Bogdanov I.I, Mourzenko V.V, Thovert J.F, Adler P.M : Two-phase flow through fractured porous media. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* **68**(2 Pt 2), 026703 (2003).

19. Bovet D, Jouannna P, Recordon E, Saix C : *Experimental studies, Modern issues in Non-saturated soils*. Gens A, Jouanna P, Schrefler B. Eds, Springer-Verlag, pp. 159-21(1995).
20. Bonnet M : *Equations Intégrales et Éléments de Frontière*. CNRS Editions/Eyrolles, Paris (1995).
21. Bonnet M : *Méthode des équations intégrales régularisées en élastodynamique tridimensionnelle*. Thèse de doctorat, Ecole National des Ponts and Chaussées (1986).
22. Bouc O, Seyedi D, Bellenfant G, Rehmer J, Fabbri A, Jacquemet N, Wertz F, Gastine M, Ducellier A, Picot G, Lions J, Sy S, Douglas J : *Modélisation des scénarios de risque liés au stockages géologique du $CO_2$*. Rapport BRGM/ RP-56963-FR (2009).
23. Bouchelaghem F : Analytical Determination of Flow Patterns in a Double Porosity Medium Containing Ellipsoidal Occluded Macro-Voids. *Transport in Porous Media* **85**, 97–115 (2010).
24. Braun J, Munroe S.M, Cox S.F Transient fluid flow in and around a fault. *Geofluids* **3**, 81-7 (2003).
25. Brebbia C.A, Dominguez J : *Boundary Elements: An Introduction Course*. McGraw-Hill, New York (1989).
26. Brebbia C.A, Telles J, Wrobel L : *Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag: Berlin (1984).
27. BRGM : *3D GeoModeller Editeur Géologique* (http://www.geomodeller.com/)
28. Brosse E, Hasanov V, Bonijoly D, Garcia D, Rigollet C, Munier G et al. The PICOREF Project: Selection of geological sites for pilot $CO_2$ injection and storage in the Paris basin. *In Proceedings of the 1st French German Symposium on Geological Storage of CO2*, Potsdam, Germany 21-22, June (2007).
29. Brouyère S, Dassargues A, Hallet V : Migration of contaminants through the unsaturated zone verlying the Hesbaye chalky aquifer in Belgium: a field investigation. *Journal of Contaminant Hydrology* **72**(1-4), 135-164 (2004).
30. Bui H.D : Application des potentiels élastiques à l'étude des fissures planes de forme arbitraire en milieu tridimensionnel. *C.R. Acad. Sci. Paris A* **280**, 1157-1160 (1975).
31. Cacas M.C, Ledoux E, De Marsily G, Tillie B : Modeling Fracture Flow with A Stochastic Discrete Fracture Network: Calibration and Validation The Flow Model. *Water Resources Research* **26**(3), 479-489 (1990).
32. Caine J.S, Evans J.P, Foster C.G : Fault zone architecture and permeability structures. *Geology* **24** (11), 1025-1028 (1996).
33. Cappa F, Rutqvist J : Impact of $CO_2$ geological sequestration on the nucleation of earthquakes. *Geophysical Research Letter* **38**, L17313 (2011).
34. Cappa F, Rutqvist J : Modeling of coupled deformation and permeability evolution during fault reactivation induced by deep underground injection of $CO_2$. *International Journal of Greenhouse Gas Control* **5**, 336–346 (2011).
35. Cappa F : Influence of hydromechanical heterogeneities of fault zones on earthquake rupture. *Geophysical Journal International* **185**, 1049-1058 (2011).
36. Castany G : *Traité pratique des eaux souterraines*. Editions Dunod, Paris (1967).
37. Castaing C, Genter A, Bourgine B, Chilès J.P, Wendling J, Siegel P : Taking into account the complexity of natural fracture systems in reservoir single-phase flow modelling. *Journal of Hydrology* **266**, 83–98 (2002).
38. Carslaw H.S, Jaeger J.C : *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, New York (1959).
39. Chang K.W, Minkoff S.E, Bryant S.L : Modeling leakage through faults of $CO_2$ in an Aquifer. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Denver, Colorado, 21-24 Septembre (2008).

40. Charlaix E, Guyon E, Rivier N : A criterion for percolation threshold in a retom array of plates. *Solid State Communication* **50**(11), 999-1002 (1984).
41. Chester F.M, Evans J.P, Biegel R.L : Internal structure and weakening mechanisms of the San Etreas Fault. *Journal of Geophysical Research* **98**, 771-786 (1993).
42. Cook A.M, Myer L.R, Cook N.G.W, Doyle F.M : The effect of tortuosity on flow through a natural fracture. Pp. 371–378 in *Rock Mechanics Contributions and Challenges,* Proceedings of the 31st U.S. Symposium on Rock Mechanics, W. A. Hustrulid and G. A. Johnson, eds. Rotterdam: A. A. Balkema (1990).
43. Cornet F.H, Burlet D : Stress field determinations in France by hydraulic test in borehole. *Journal of Geophysical Research* **97**(B8), 11829-11849 (1992).
44. Damen K, Faaij A, Turkenburg W : Health, safety and environemntal risks of underground $CO_2$ storage - overview of mechanisms and current knowledge. *Climatic Change* **74** (1-3), 289-318 (2006).
45. Davis J.J, Rabinowitz P : *Methods of numerical integration*. Academic Press (1975).
46. Dershowitz W.S, Herda H.H : Interpretation of fracture spacing and intensity, in *Rock Mechanics*, edited by T. Wawersik, pp. 757-766, Balkema, Rotterdam (1992).
47. Dezayes C : *Réseau de fractures dans le Dogger de Bourgogne. Données pour le calcul de perméabilité équivalente*. BRGM/RP-54955-FR (2007).
48. Dormieux L, Kondo D : Approche micromécanique du couplage perméabilité endommagement. *C.R. Mecanique* **332**, 135-140 (2004).
49. Ducellier A, Seyedi D, Foerster E : A coupled hydromechanical fault model for the study of the integrity and safety of geological storage of CO2. *In Proceedings of GHGT10*, 19-23 September, Amsterdam, NL (2010).
50. Dverstop B, Etersson J : Application of the Discrete Fracture Network Concept With Filed Data: Possibilities of Model Calibration and Validation. *Water Resources Research* **25**(3), 540-550 (1989).
51. Erdogan F : Approximate Solutions of Systems of Singular Integral Equations. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **17**, 1041-1059 (1969).
52. Eshelby J.D : Determination of the elastic filed of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society A* **241**, 376-396 (1957).
53. Etersson J, Dverstop B : Conditional Simulations of Fluid Flow in Three-Dimensional Networks of Discrete Fractures. *Water Resources Research* **23**(10), 1876-1886 (1987).
54. Fredlund D.G, Xing A, Huang S : Predicting the permeability function for unsaturated soils using the soil–water characteristic curve. *Canadian Geotechnical Journal* **31**(4), 533-546 (1994).
55. Fernetes R : *Intégration des comportements de Drucker-Prager*. R7.01.16. http://www.code-aster.org (2011)
56. Fernetes R : *Essai biaxial drainé avec un comportement Drucker-Prager adoucissant*. SSNP124. http://www.code-aster.org/(2011)
57. Gakhov F.D : *Boundary Value Problems*. Nauka, Moscow (1977).
58. Genter A, Castaing C, Dezayes C, Tenzer H, Traineau H, Villemin T : Comparative analysis of direct (core) and indirect (borehole imaging tools) collection of fracture data in the Hot Dry Rock Soultz reservoir (France). *Journal of Geophysical Research* **102**(B7), 15419-15431 (1997).
59. Gentier S, Lamontagne E, Archambault G, Riss J : Anisotropy of flow in a fracture undergoing shear and its relationship to the direction of shearing and injection pressure. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* **34**, 3-4 (1997).

60. Gervais F : *Modélisation géométrique d'un réseau de fractures dans un massif rocheux stratifié. Application aux carrières marbrières de Comblanchien (Côte d'Or, France)*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (1993).

61. Ghabezloo S, Pouya A : Numerical upscaling of the permeability of a retomly cracked porous medium. *The 12th international conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics* (IACMAG); Goa, India: 2536-2543 (2008).

62. GiD 11 Reference Manual (http://gid.cimne.upc.es/)

63. GIEC : *IPCC Special report on carbon dioxide capture and storage*. Cambridge University Press, Cambridge, UK and New York, USA (2005).

64. GoCad: http://www.gocad.org/

65. Goméz-Hernández J.J, Wen X.H : Upscaling hydraulic conductivities in heterogeneous media: an overview. *Journal of Hydrology* **183**, ix-xxxii (1996).

66. Granet S : *Modélisation des fissures avec couplages hydro-mécanique en milieu poreux saturé*. R7.02.15. http://www.code-aster.org (2011).

67. Granet S, Fabrie P, Lemonnier P, Quintard M : A two-phase f low simulation of a fractured reservoir using a new fissure element method. *Journal of Petroleum Science and Engineering* **32**, 35-52 (2001).

68. Grataloup S, Bonijoly D, Brosse E, Garcia D, Hasanov V, Lescanne M et al. PICOREF: A site selection methodology for saline aquifer in Paris basin. In *Proceedings of the 9th International Conference on Greenhouse Gas Technologies*, Washington, USA, 16-20 November 2008.

69. Green A.E, Sneddon I.N : The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptic crack in an elastic solid. *Proc Cambridge Philos Soc* **46**, 159–64 (1950).

70. Grillo A, Logashenko D, Stichel, Wittum G : Simulation of density-driven flow in fractured porous media. *Advances in Water Resources* **33**(12), 1494-1507 (2010).

71. Guéguen Y, Palciauskas V : *Introduction to Physics of Rocks*. Princeton Univ. Press (1994).

72. Guéguen Y, Schubnel A : Elastic waves velocities and permeability of cracked rocks. *Tectonophysics* **370**(1-4), 163-176 (2003).

73. Guidera J.T, Lardner R.W : Penny-shaped cracks. *Journal of Elasticity* **5**, 59-73 (1975).

74. Guiggiani M : The evaluation of Cauchy principal value integrals in the boundary element method-A review. *Mathematical and Computer Modelling - Special Issue on BIEM/BEM* **15**(3-5), 175-184 (1991).

75. Guiggiani M, Gigante A : A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method. *Journal of Applied Mechanics Transactions ASME* **57**, 906-915 (1990).

76. Gvirtzman H, Magaritz M, Kanfi Y, Carmi I : Matrix and fissure water transport through unsaturated calcareous setstone. *Transport in Porous Media* **3**, 343-356 (1988).

77. Hamzehpour H, Mourzenko V.V, Thovert J.F, Adler P.M : Percolation and permeability of networks of heterogeneous fractures. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* **79**(3 Pt 2), 036302 (2009).

78. Hayami K : High precison numerical integration method for 3-D BEM and its error analysis using complex function theory. *In Bondary Element Technology VI* (pp.335-338), C.A. Brebbia, editor, Computational Mechanics Publications/Elsevier, Southampton (1991).

79. Hepple R.P, Benson S.M : Implication of surface seepage on the effectiveness of geological storage of carbon dioxide as a climate change mitigation strategy. In

*Proceedings of the Sixth International Greenhouse Gas Technologies Conference*, Kyoto, Japan, October 1-5, 2002; Gale, J., Kaya, Y., Eds.; Pergamon; Vol. I, pp 261-266 (2003).

80. Hodnett M.G, Bell J.P : Processes of Water Movement Through a Chalk Coombe Deposit in Southeast Englet. *Hydrological Processes* **4**, 361-372 (1990).
81. Hsieh P.A, Neuman S.P : Field determination of the three-dimensional hydraulic conductivity tensor of anisotropic media. *Water Resource Research* **21**(11), 1655-1665 (1985).
82. Humez P, Audigane P, Lions J, Chiaberge C, Bellenfant G : Modeling of $CO_2$ Leakage up Through an Abetoned Well from Deep Saline Aquifer to Shallow Fresh Groundwaters. *Transport in Porous Media* **90**, 153–181(2011).
83. Huseby O, Thovert J.F, Adler P.M : Geometry and topology of fracture systems. *Journal of Physics A* **30**, 1415-1444 (1997).
84. Ioakimidis N.I : Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity. *Acta Mechanica* **45**, 31-47 (1982).
85. ITASCA Software. *Universal Distinct Element Code* (UDEC). http://www.itascacg.com/udec/
86. Jafari A, Babadagli T : Effective Fracture Network Permeability of Geothermal Reservoirs. *Geothermics* **40**, 25-38 (2001).
87. Karami G, Derakhshan D : An efficient method to evaluate hypersingular and supersingular integrals in boundary integral quations analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **23**, 317-326 (1999).
88. Keller A.A : *Multiphase flow and transport in fractured porous media*. Ph.D. dissertation. Stanford University, Stanford, CA (1996).
89. Kincaid D, Cheney E.W. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. 701 Pages, Brooks/Cole (1991).
90. Kolditz O, Clauser C : Numerical Simulation of Flow and Heat Transfer in Fractured Crystalline Rocks: Application to The Hot Dry Rock Site in Rosemanowes (UK). *Geothermics* **27**, 1-23 (1998).
91. Koudina N, Gonzalez Garcia R, Thovert J.F, Adler P.M : Permeability of three-dimensional fracture networks. *Physical Review E* **57**, 4466-4479 (1998).
92. Lesinigo M, D'Angelo C, Quarteroni A : A multiscale Darcy-Brinkman model for fluid flow in fractured porous media. *Numerische Mathematik*, 1-36 (2010).
93. Lifanov Lev I.K, Poltavskiĭ N, Vaĭnikko G : *Hypersingular Integral Equations and Their Applications*. Chapman & Hall/CRC, 396 pages (2004).
94. Liolios P.A, Exadaktylos G.E : A solution of steady-state fluid flow in multiply fractured isotropic porous media. *International Journal of Solids and Structures* **43**, 3960-3982 (2006).
95. Liu J, Sano Y, Nakayama A : A simple mathematical model for determining the equivalent permeability of fractured porous media. *International Communications in Heat and Mass Transfer* **36**(3), 220-224 (2009).
96. Liu Y.J, Zhang D, Rizzo F.J : Nearly singular and hypersingular integrals in the boundary element method. In: Brebbia, C.A., Rencis, J.J. (Eds.), *Boundary Elements XV*. Computational Mechanics Publication, 453-468, Southampton (1993).
97. Long J.C.S, Remer J.S, Wilson C.R, Witherspoon P.A : Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures. *Water Resources Research* **18**(3), 645-658 (1982).
98. Long J.C.S, Billaux D : From Field Data to Fracture Network Modeling: An Example Incorporating Spatial Structure. *Water Resources Research* **23**(7), 1201-1216 (1987).

99. Lorinczi P, Harris S.D, Elliott L : Modelling of highly-heterogeneous media using a flux-vector based Green element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **30**, 818-833 (2006).
100. Lorinczi P, Harris S.D, Elliott L : Modified flux-vector based GEM for problems in steady-state anisotropic media. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **33**, 368-387 (2009).
101. Lorinczi P, Harris S.D, Elliott L : Influence of media properties on fluid flow in faulted and fractured anisotropic media: a study using a modified flux-vector- based Green element method. *Transport in Porous Media* **80**, 469-98 (2009).
102. Lough M.F, Lee S.H, Kamath J : An efficient boundary integral formulation for flow through fractured porous media. *Journal of Computational Physics* **143**, 462-483 (1998).
103. Louis C : *A study of groundwater flow in jointed rock and its influence on the stability of rock mass*. Imperial College Rock Mechanic. Report 10 (1969).
104. Magnan J.P, Mestat P : *Lois de comportement and modélisation des sols*. Technique-Ingénieur, Géotechnique **C218** (1997).
105. Maleki K, Pouya A : Numerical simulation of damage-Permeability relationship in brittle geomaterials. *Computers and Geotechnics* **37,** 619-628 (2010).
106. Malkovsky V.I, Pek A.A : Timescales for reaching steady-state fluid flow in systems perturbed by formation of highly permeable faults. *Geofluids* **4**, 253-258 (2004).
107. Manzocchi T, Childs C, Walsh J.J : Faults and fault properties in hydrocarbon flow models. *Geofluids* **10**, 94-113 (2010).
108. Markov M, Kazatchenko E, Mousatov A, Pervago E : Permeability of the Fluid-Filled Inclusions in Porous Media. *Transport in porous media* **84**(2), 307-317 (2010).
109. Martin P.A : End-point behaviour of solutions to hypersingular integral Equations. *Proc. R. Soc. London A* **432**, 301–320 (1991).
110. Martin P.A : On potential flow past wrinkled discs. *Proceedings of the Royal Society A* **454**, 2209-2221 (1998).
111. Martinez M.J, Dykhuizen R.C, Eaton R.R : The apparent conductivity for steady unsaturated flow in periodically fractured porous media. *Water Resources Research* **28**(11), 2879-2887 (1992).
112. Mathias S.A, Butler A.P, McIntyre N, Wheater H.S : The sigificance of flow in the matrix in the Chalk unsaturated zone. *Journal of Hydrology* **310**, 62-77 (2005).
113. Milton G.W : *The theory of composites*, pp. 145-147, Cambridge University Press (2002).
114. Mityushev V, Adler P.M : Darcy flow around a two dimensional fracture. *Journal of Physic A* **39**, 35-45 (2006).
115. Mourzenko V.V, Bogdanov I.I, Thovert J.F, Adler P.M : Three-dimensional numerical simulation of single-phase transient compressible flows and well-tests in fractured formations. *Mathematics and Computers in Simulation* **81**(10), 2270-2281 (2010).
116. Mourzenko V.V, Thovert J.F, Adler P.M : Macroscopic permeability of three-dimensional fracture networks with power-law size distribution. *Physical Review E* **69**(6), 066307 (2004).
117. Mourzenko V.V, Thovert J.F, Adler P.M : Permeability of isotropic and anisotropic fracture networks, from the percolation threshold to very large densities. *Physical Review E* **84**(3-2), 036307 (2011).
118. Mourzenko V.V, Thovert J.F, Adler P.M : Trace analysis for fracture networks with anisotropic orientations and heterogeneous distributions. *Physical Review E* **83**(3 Pt 1), 031104 (2011).

119. Mourzenko V.V, Thovert J.F, Adler P.M : Percolation of three-dimensional fracture networks with power-law size distribution. *Physical Review E* **72**(3 Pt 2):036103.
120. Mustapha H : *Simulation numérique de l'écoulement dans des milieux fracturés tridiemensionnels*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1 (2005).
121. Muskhelishvili N.I : *Singular Integral Equations*. P. Noordhoff Ltd., Groningen, Hollet (1953).
122. Nazridoust K, Ahmadi G, Smith D.H : New friction factor correlation for laminar, single phase flows through rock fractures. *Journal of Hydrology* **329**, 315-328 (2006).
123. Niemi A, Bodvarsson G.S : Preliminary capillary hysteresis simulations in fractured rocks, Yucca Mountain, Nevada. *Journal of Contaminant Hydrology* **3**, 277-291 (1988).
124. Nordbotten, JM; Kavetski, D, Celia, MA; Bachu, S.: Model for CO2 leakage including multiple geological layers and multiple leaky wells, Environmental Science & Technology, Vol. 43, pp 743-749 (2009).
125. Norton D.L, Knapp R : Transport phenomena in hydrothermal systems: the nature of porosity. *American Journal of Science* **277**, 913-36 (1977).
126. Okubo P.G, Aki K : Fractal geometry in the San Etreas fault system. *Journal of Geophysical Research* **92**, 345-355 (1987).
127. Or D, Tuller M : Flow in unsaturated fractured porous media: Hydraulic conductivity of rough surfaces. *Water Resources Research* **36**(5), 1165 (2000).
128. Or D, Tuller M : Hydraulic conductivity of partially saturated fractured porous media: flow in a cross-section. *Advances in Water Resources* **26**(8), 883-898 (2003).
129. Orr F : Storage of carbon dioxide in geologic formations. *Journal of Petroleum Technology* **56**(9), 90–97 (2004).
130. Peratta A, Popov V : A new scheme for numerical modelling of flow and transport processes in 3D fractured porous media. *Advances in Water Resources* **29**, 42-61 (2006).
131. Peters R.R, Klavetter E.A : A Continuum Model for Water Movement in an Unsaturated Fractured Rock Mass. *Water Resources Research* **24** (3), 416-430 (1988).
132. Pouya A : Three-dimensional flow in fractured porous media: a potential solution based on singular integral Equation. *Advances in Water Resources* **35**, 30-40 (2012).
133. Pouya A : Equivalent permeability tensors of a finite heterogeneous block. *C.R. Géosciences* **337**, 581-588 (2005).
134. Pouya A : Ellipsoidal anisotropy in linear elasticity: approximation models and analytical solutions. *International Journal of Solids and Structures* **48**,2245-2254 (2011).
135. Pouya A, Courtois A : Définition de la perméabilité équivalente des massifs fracturés par des méthodes d'homogénéisation. *C.R. Géosciences* **334**, 975-979 (2002).
136. Pouya A, Ghabezloo S : Flow around a crack in a porous matrix and related problems. *Transport in Porous Media* **84**(2), 511-532 (2010).
137. Pouya A, Ghoreychi M : Determination of rock mass strength properties by homogenisation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **25**, 1285-1303 (2001).
138. Pouya A, Fouché O : Permeability of 3D discontinuity networks. New tensors from boundary-conditioned homogenisation. *Advances in Water Resources* **32**, 303-314 (2009).
139. Pouya A, Vu M.N : Numerical modelling of steady-state flow in 2D cracked anisotropic porous media by singular integral Equations method. *Transport in Porous Media* **93**(3), 475-493 (2012).

140. Pouya A, Vu M.N : Flow and effective permeability of an infinite matrix containing disk-shaped crack. *Advances in Water Resources* **42**, 37-46 (2011).
141. Pouya A, Vu M.N, Ghabezloo S, Bendjeddou Z : Flow around an unsaturated crack in a porous medium and related problems. *Transport in Porous Media* (soumis 2012).
142. Pouya A, Zaoui A : A transformation of elastic boundary value problems with application to anisotropic behaviour. *International Journal of Solids and Structures* **43**, 4937-4956 (2006).
143. Pruess K : Leakage of CO2 from geologic storage: role of secondary accumulation at shallow depth. *International Journal of Greenhouse Gas Control* **2**(1), 37-46 (2008).
144. Quarteroni A, Sacco R, Saleri F : *Méthodes Numériques: Algorithmes, analyse and applications*. 537 pages, Springer (2007).
145. Rachez X : *Calcul de perméabilités directionnelles d'un milieu stratifié fracturé*. BRGM/RP-55470-FR (2007).
146. Rahman M : *Integral equation and their applications*. Southamton, Boston, 384p (2007).
147. Rasmussen T.C, Yeh T.C.J, Evans D.D : Effect of variable fracture permeability/matrix permeability ratios on three-dimensional fractured rock hydraulic conductivity. Proceedings of the Conference on Geostatistical, Sensitivity, and Uncertainty Methods for Ground-Water Flow and Radionuclide Transport Modeling. San Francisco, California, edited by B. E. Buxton (Batelle Press, Columbus, OH, 1987).
148. Renard Ph, de Marsily G : Calculating equivalent permeability : a review. *Advances in Water Resources* **20**(5-6), 253-278 (1997).
149. Rohmer J, Seyedi D : Coupled large scale hydromechanical modelling for caprock failure risk assessment of CO2 storage in deep saline aquifers. *Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP*. **65**, 503-517 (2010).
150. Rojas J, Giot D, Le Nindre Y.M, Criaud A, Fouillac C, Brach M : *Caractérisation and modélisation du réservoir géothermique du Dogger, Bassin parisien, France*. Technical report CCE, EN 3G-0064-F(CD), BRGM R 30 IRG SGN 89 (1989).
151. Rutqvist J, Birkholzer J.T, Cappa F, Tsang C.F : Estimating maximum sustainable injection pressure during geological sequestration of CO2 using coupled fluid flow and geomechanical fault-slip analysis. *Energy Conversion and Management* **48**, 1798-1807 (2007).
152. Sack R : Extension of Griffith's theory of rupture to three dimensions. *Proc.Phys. Soc.* **58**(6), 729–736 (1946).
153. Sadowsky M.A, Sternberg E : Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity. *Journal of Applied Mechanics* **16**, 149–157 (1949).
154. Samardzioska T, Popov V : Numerical comparison of the equivalent continuum, non-homogeneous and dual porosity models for flow and transport in fractured porous media. *Advances in Water Resources* **28**, 235-255 (2005).
155. Sánchez-Vila X, Girardi G.P, Carrera J : A synthesis of approaches to upscaling of hydraulic conductivities. *Water Resources Research* **31**(4), 867-882 (1995).
156. Sato K : *Accelerated Perturbation Boundary Element Model for Flow Problems in Heterogeneous Reservoirs*. Ph.D. Dissertation, Stanford U. (1992).
157. Selvadurai A.P.S : On the hydraulic intake shape factor for a circular opening located at an impervious boundary: influence of inclined stratification. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **35**, 639-651 (2011).
158. Selvadurai A.P.S : Advective transport from a penny-shaped crack and an associated uniqueness theorem. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **28**, 191-208 (2004).

159. Selvadurai A.P.S : Fluide leakage through fractures in an impervious caprock embedded between two geologic aquifers. *Advance in Water Resources* **41**, 76-83 (2012).

160. Seyedi D.M, Ducellier A, Vu M.N, Pouya A : A two-scale model for simulating the hydromechanical behavior of faults during $CO_2$ geological storage operation. *45th US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium*. San Fransisco, June 26-29 (2011).

161. Shafiro B, Kachanov M : Anisotropic effective conductivity of materials with non-randomly oriented inclusions of diverse ellipsoidal shapes. *Journal of Applied Physics* **87**, 8561-8569 (2000).

162. Simpson G, Guéguen Y, Schneider F : Permeability enhancement due to microcrack dilatancy in the damage regime. *Journal of Geophysical Research* **106**, 3999-4016 (2001).

163. Simunek J, Jarvis N.J, van Genuchten M.Th, Gärdenäs A : Review and comparison of models for describing non-equilibrium and preferential flow and transport in the vadose zone. *Journal of Hydrology* **272**, 14-35 (2003).

164. Sneddon I.N : The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid. *Proceedings of the Royal Society A* **187**, 229-60 (1946).

165. Streit J.E, Hillis R.R : Estimating fault stability and sustainable fluid pressures for underground storage of $CO_2$ in porous rock. *Energy* **29**, 1445-1456 (2004).

166. Su G.W, Nimmo J.R, Dragila M.I : Effect of isolated fractures on accelerated flow in unsaturated porous rock. *Water Resources Research* **39**(12), 13-26 (2003).

167. Sutradhar A, Glaucio H.P, Leonard J.G : *Symmetric Galerkin Boundary Element Method*. Springer (2008).

168. Sulem J, Vardoulakis I, Ouffroukh H, Boulon M, Hans J : Experimental characterization of the thermo-poro-mechanical properties of the Aegion fault gouge. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, Geosciences* **336**, 455-466 (2004).

169. Sulem J, Vardoulakis I, Ouffroukh H, Perdikatsis V : Thermo-poro-mechanical Properties of the Aigion Fault Clayey Gouge Application to the Analysis of Shear Heating and Fluid Pressurization. *Soils and Foundations* **45**(2), 97-108 (2005).

170. Sulem J : Stress orientation evaluated from strain localisation analysis in Aigion fault. *Tectonophysics* **442**, 3-13 (2007).

171. Tang A.M, Vu M.N, Cui J.Y : Effects of the maximum soil aggregates size and cyclic wetting-drying on the stiffness of a lime-treated clayey soil. *Géotechnique* **61**(5), 421-429 (2011).

172. Telles J.C.F : A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **24**(5), 959–973 (1987).

173. Therrien R, Sudicky E.A : Three-dimensional analysis of variably-saturated flow and solute transport in discretely-fractured porous media. *Journal of Contaminant Hydrology* **23**(1), 1-44 (1996).

174. Tricomi F.C : *Intergral equations*. Interscience, NewYork (1957).

175. Tsang Y.W, Tsang C.F, Hale F.V, Dverstop B : Tracer transport in a stochastic continuum model of fractured media. *Water Resources Research* **32**(10), 3077-3092 (1996).

176. van Genuchten M. Th : A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil. Sci. Soc. Am. J.* **44**, 892-898 (1980).

177. van Ruth P.J, Nelson E, Hillis R.R : Fault reactivation potential during $CO_2$ injection in the Gippslet Basin. *Australia. Explor Geophys* **37**, 50-56 (2006).

178. Vidal-Gilbert S, Nauroy J.F, Brosse E : 3D geomechanical modelling for $CO_2$ geologic storage in the Dogger carbonates of the Paris Basin. *International Journal of Greenhouse Gas Control* **3**(3), 288-299 (2008).

179. Vidal-Gilbert S, Bemer E, Barroux C, Brosse E : Hydromechanical behaviour during $CO_2$ injection. *ISRM Regional Symposium Eurock*, Liège, Belgique, 9-12 mai (2006).

180. Vu M.N, Pouya A, Seyedi D.M : Modelling of steady-state fluid flow in 3D fractured isotropic porous media. Application to effective permeability calculation. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* (accepté 2012).

181. Vu M.N, Pouya, A, Seyedi D.M : Theoretical and Numerical study on steady-state flow through finite fractured porous media. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* (soumis 2012).

182. Ubertosi F, Delay F : A new method for generating a pipe network to hetle channeled flow in fractured rocks. *C.R. Geosciences* **339**(10), 682-691 (2007).

183. Wang J.S.Y, Narasimhan T.N : Hydrological Mechanisms Governing Fluid Flow in a Partially Saturated Fractured Porous Medium. *Water Resources Research* **21**(12), 1861-1874 (1985).

184. Wang J.S.Y, Trautz R.C, Cook P.J, Finsterle S, James A.L, Birkholzer J : Field tests and model analyses of seepage into drift. *Journal of Contaminant Hydrology* **38**(1-3), 323-347 (1999).

185. Wibberley C.A.J, Shimamoto T : Internal structure and permeability of a major strick-slip fault zones: The Median Tectonic Line in Mie Prefecture, Southwest Japan. Journal of Structural Geology **25**, 59-78 (2003).

186. Witherspoon P.A, Wang J.S.Y, Iwai K, Gale J.E : Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture. *Water Resources Research* **16**, 1016-24 (1980).

187. Wolfe P : Eigen/functions of the integral Equation for the potential of the charged disk. *Journal of Mathematical Physics* **12**, 1215-1218 (1971).

188. Woodbury A, Zhang K : Lanczos method for the solution of groundwater flow in discretely fractured porous media. *Advances in Water Resources* **24**, 621-630 (2001).

189. Wu Y.S, Haukwa C, Bodvarsson G.S : A site-scale model for fluid and heat flow in the unsaturated zone of Yucca Mountain, Nevada. *Journal of Contaminant Hydrology* **38(**1–3), 185-215 (1999).

190. Wu Y.S, Pan L.H : Special relative permeability functions with analytical solutions for transient flow into unsaturated rock matrix. *Water Resources Research* **39**(4), 1104 (2003).

191. Wu Y.S, Pan L, Pruess K : A physically based approach for modelling multiphase fracture–matrix interaction in fractured porous media. *Advances in Water Resources* **27**, 875-887 (2004).

192. Zhao C, Hobbs B.E, Ord A, Hornby P, Mühlhaus H, Peng Sh : Theoretical and numerical analyses of pore-fluid flow focused heat transfer around geological faults and large cracks. *Computers and Geotechnics* **35**, 357-371 (2008).

193. Zimmerman R.W : Effective conductivity of a two-dimensional medium containing elliptical inhomogeneities. *Proceedings of the Royal Society A* 453, 1713–1727 (1996).

194. Zhou C.B, Sharma R.S, Chen Y.F. Flow-stress coupled permeability tensor for fractured rock masses. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **32**, 1289-1309 (2008).

195. Zimmerman R.W : Effective conductivity of a two-dimensional medium containing elliptical inhomogeneities. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **452**, 1713-1727 (1996).

196. Zimmerman R. W, Bodvarsson G. S : Combined Analytical/Numerical Approaches to Solving Fluid Flow Problems in the Unsaturated Zone at Yucca Mountain. *Conference High Level Radioactive Waste Management.* pp 818-824 (1990).