Décomposition et Agrégation dans la conduite optimale d'un grand réseau de distribution d'eau

Pierre Carpentier

▶ **To cite this version:**

Pierre Carpentier. Décomposition et Agrégation dans la conduite optimale d'un grand réseau de distribution d'eau. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1983. Français. NNT : . pastel-00833999

HAL Id: pastel-00833999

https://pastel.hal.science/pastel-00833999

Submitted on 13 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

par

Pierre CARPENTIER

en vue de l'obtention

DU TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR
EN
MATHEMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Décomposition et Agrégation dans la conduite optimale d'un grand réseau de distribution d'eau

---

Soutenue le 5 Décembre 1983 devant le jury composé de

Messieurs	Pierre	BERNHARD	...	Président
	Guy	COHEN	...	Rapporteur
	Bernard	CONTE	...	Examinateur
	Jean Michel	LASRY	...	Examinateur
	Ernest	IRVING	...	Invité

Ἕνα νερό, κυρά Βαγγελιώ
ἕνα νερό, κρύο νερό
κι ἀπώ πο͂υθε κατεβαίνει
Βαγγελιώ μου παινεμένη;

(Ἀγγελική Σκανδάλη, ἔργα)

REMERCIEMENTS

Ces remerciements s'adressent en premier lieu à Monsieur Pierre Bernhard, tout d'abord pour m'avoir accueilli au Centre d'Automatique et d'Informatique de l'Ecole des Mines de Paris lorsqu'il en était directeur, puis pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail et d'accepter la présidence de mon jury de soutenance.

Je tiens ensuite à remercier tout particulièrement Monsieur Guy Cohen pour avoir dirigé ce travail et pour m'avoir permis, par ses conseils et ses encouragements, de le mener à bien. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je remercie également Monsieur Bernard Conte, ingénieur à la Société Lyonnaise des Eaux et de l'Eclairage, qui fut pour cette étude le partenaire industriel idéal, et qui m'a fait le plaisir d'accepter de faire partie de mon jury.

Je remercie enfin Messieurs Jean Michel Lasry et Ernest Irving qui m'ont fait l'honneur de prendre part à ce jury.

Je voudrais également exprimer ma gratitude à tous mes collégues du C. A. I. pour leurs conseils, tant dans le domaine des mathématiques que de l'informatique, et pour leur gentillesse.

Enfin, je remercie Madame Altimira pour avoir, malgrè l'absence de clarté de mes manuscrits et un système de traitement de texte adverse, réalisé ce document.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE I : Description et modélisation du problème.

I.1. Caractéristiques générales des réseaux de distribution d'eau
I.2. Caractéristiques du réseau concerné par l'étude.
I.3. Modélisation mathématique du problème de commande.
I.4. Difficultés de la résolution et solutions envisagées.

CHAPITRE II : Méthodes de décomposition-coordination.

II.1. Introduction.
II.2. Fondements théoriques de la décomposition-coordination.
II.3. Application au cas d'une interaction en débit-pression.
II.4. Application au cas des vannes télécommandées.

CHAPITRE III : Méthodes d'agrégation-désagrégation.

III.1. Introduction.
III.2. La Désagrégation.
III.3. Agrégation exacte.
III.4. Agrégation basée sur la notion de cohérence.
III.5. Résultats obtenus par ces méthodes.

CHAPITRE IV : Mise en oeuvre ; résultats ; conclusions.

IV.1. Description du processus complet d'optimisation.

IV.2. Résultats obtenus sur une journée-test.

IV.3. Conclusions.

INTRODUCTION

Nous présentons dans cette étude un ensemble de méthodes et de techniques pour la résolution du problème de la commande optimale d'un grand système dynamique complexe, à savoir un réseau de distribution d'eau potable à l'échelle d'une région, en France.

Précisons tout de suite cette notion de "Grand Système Complexe": il s'agit dans le cas qui nous intéresse d'un système dont les caractéristiques sont telles que la résolution du problème d'optimisation correspondant par des méthodes classiques s'avèrerait impraticable sur tout calculateur (temps-calcul excessif, ou/et stockage trop important). De plus, ce système, qui s'est constitué au cours du temps par l'interconnexion de réseaux de distribution d'eau de plus petite taille, se présente comme un ensemble hétérogène, chacun des sous-systèmes ayant ses caractéristiques propres, nécessitant des méthodes de résolution adaptées à chaque cas.

Les méthodes que nous nous proposons d'appliquer se réfèrent aux deux grands courants d'idées de l'Automatique des grands systèmes: il s'agit essentiellement des notions de décomposition-coordination et d'agrégation-désagrégation. L'une des originalités, pensons nous, de ce travail est d'avoir utilisé simultanément ces deux idées, qui sont en fait complémentaires l'une de l'autre.

Le réseau de distribution d'eau ayant servi de support à cette étude est celui de la région parisienne ouest de la Société Lyonnaise des Eaux et de l'Eclairage (SLEE). Il s'étend des portes de Paris jusqu'à Aubergenville, soit environ une quarantaine de kilomètres à l'Ouest, et alimente en eau potable tant des zones rurales (Feucherolles, Chambourcy,...) que des zones fortement urbanisées (Le Pecq, Poissy,...), voire de gros consommateurs industriels ou d'autres compagnies de distribution d'eau. Au total, ce réseau dessert une population d'environ un million d'habitants,

répartis sur les départements des Yvelines et des Hauts-de-Seine, et la production annuelle est de l'ordre de cent millions de mètres cubes. Il comporte une vingtaine d'usines de production principales refoulant directement dans le réseau, ainsi qu'une trentaine de réservoirs.

La structure de ce réseau est constituée par une artère principale (en fait, une canalisation d'un mètre quarante de diamètre) alimentée par l'usine d'Aubergenville, et traversant d'Ouest en Est toute la région desservie. Sur cette artère viennent se brancher d'autres canalisations permettant de fournir, par un ensemble de vannes télécommandées, de l'eau aux autres parties du réseau. Ces autres parties, appelées sous-réseaux périphériques, ont en général des ressources en eau et des capacités de stockage propres.

Ce réseau est actuellement contrôlé de manière centralisée par un opérateur humain: à partir d'un centre de dispatching où sont ramenées toutes les mesures effectuées en temps-réel sur le réseau (niveaux des réservoirs, débits des vannes, état des usines) et où l'on peut agir sur chaque organe de commande (mise en marche de pompes, modification du débit transitant dans les vannes), cet opérateur, n'utilisant que son expérience, cherche à conduire l'ensemble des installations du réseau, en respectant un certain nombre de règles de fonctionnement.

Le but de cette étude s'inscrit dans le cadre futur de l'automatisation de la commande du réseau et vise à produire un logiciel opérationnel capable de fournir en temps-réel des consignes de fonctionnement des installations de refoulement de l'eau et des vannes effectuant les transferts d'eau entre les différentes parties du réseau, consignes minimisant le coût d'exploitation global encouru sur le réseau, à savoir la somme du coût de traitement de l'eau et du coût électrique nécessaire à son pompage, tout en respectant l'ensemble des contraintes de fonctionnement, portant, par exemple sur les niveaux de l'eau dans les réservoirs, la pression dans les canalisations, la puissance électrique totale disponible pour une usine de refoulement, le volume global d'eau à

fournir quotidiennement à un client,.... Dans un premier temps, ce logiciel ne doit être utilisé que comme une aide à la décision de l'opérateur, ce dernier ayant toujours la possibilité de ne pas suivre les consignes de commandes fournies par le programme. Cependant, rien n'interdit de penser qu'à terme, et dans la mesure où le comportement des solutions fournies par le logiciel s'avèrera satisfaisant, les consignes calculées soient directement appliquées aux organes de commandes, via les lignes de télé-transmissions servant déjà à l'acquisition des mesures effectuées sur le réseau.

Plusieurs projets portant sur la commande de ce type de réseau ont été traités. Parmi ceux-ci, mentionnons tout d'abord la seule réalisation existante (à notre connaissance) pour l'alimentation du réseau d'eau de la région de Cambridge (Grande Bretagne), où un ordinateur pilote de manière autonome les installations du réseau (Fallside and Perry (1975)). Cependant, cette étude a utilisé de manière cruciale certaines caractéristiques n'existant pas dans le problème qui motive notre travail, comme par exemple le fait que l'on peut retenir comme modèle du réseau un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement moyen (ce qui n'est pas envisageable dans notre cas où le sens de circulation de l'eau dans les tuyaux peut s'inverser suivant les commandes que l'on applique), ou encore le fait que les pompes présentes sur le réseau sont à vitesse variable, et que les variables de commandes asssociées (débits refoulés) sont de nature continue (alors que le réseau de la SLEE ne possède pratiquement que des pompes en "tout ou rien", les variables de commandes associées -nombre de pompes en marche- étant alors de nature discrète). Tout ceci permet une modélisation simple du problème, se limitant aux équations de débit, alors qu'une modélisation en débit-pression parait indispensable dans le cas du réseau ouest de la SLEE.

L'autre étude que nous mentionnerons ici est celle effectuée sur la partie rive-droite de la Seine du réseau de distribution d'eau de la SLEE en région parisienne sud (Joalland (1978)). Ce projet est beaucoup plus proche du notre que le précédent, et nous a d'ailleurs servi de première expérience pour l'application des méthodes de décomposition et d'agrégation au cas des réseaux d'eau:

les caractéristiques physiques de ces réseaux sont assez proches, et dans les deux cas, on est amené à manipuler des modèles non linéaires en débit-pression pour représenter correctement la réalité. Cependant, le problème posé par l'optimisation du réseau de la région parisienne sud se situait bien en deça de notre projet, qui s'intéresse à un ensemble bien plus vaste et bien plus complexe: indiquons simplement, pour fixer les idées, qu'il existe dans le réseau ouest des sous-réseaux périphériques dont la complexité est plus grande que celle du réseau sud rive-droite tout entier! De plus, le but de notre étude est de fournir des consignes de fonctionnement en temps-réel, ce qui n'était pas le cas de la précédente.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous décrirons le problème posé, sa modélisation mathématique, les difficultés soulevées par sa résolution ainsi qu'une description succinte des solutions retenues.

Le second chapitre sera consacré aux méthodes de décomposition-coordination, tout d'abord exposées dans un cadre général, puis appliquées au cas qui nous intéresse.

Dans le troisième chapitre, nous montrerons comment utiliser les notions d'agrégation et de cohérence pour parvenir à résoudre avec une précision satisfaisante les sous-problèmes les plus complexes issus de la décomposition du problème global.

Le quatrième chapitre sera tout d'abord consacré aux deux points suivants: d'une part l'examen de la manière dont sont imbriquées les deux méthodes précédentes au sein du processus d'optimisation complet ainsi que la façon dont ont été traitées certaines difficultés, dûes soit à la nature du problème lui-même, soit aux méthodes de résolution mises en oeuvre; d'autre part les développements qui ont été apportés pour permettre l'utilisation en temps-réel des résultats issus de l'optimisation. Puis nous présenterons ces résultats obtenus sur quelques journées-test de fonctionnement et nous tirerons finalement quelques conclusions sur cette étude.

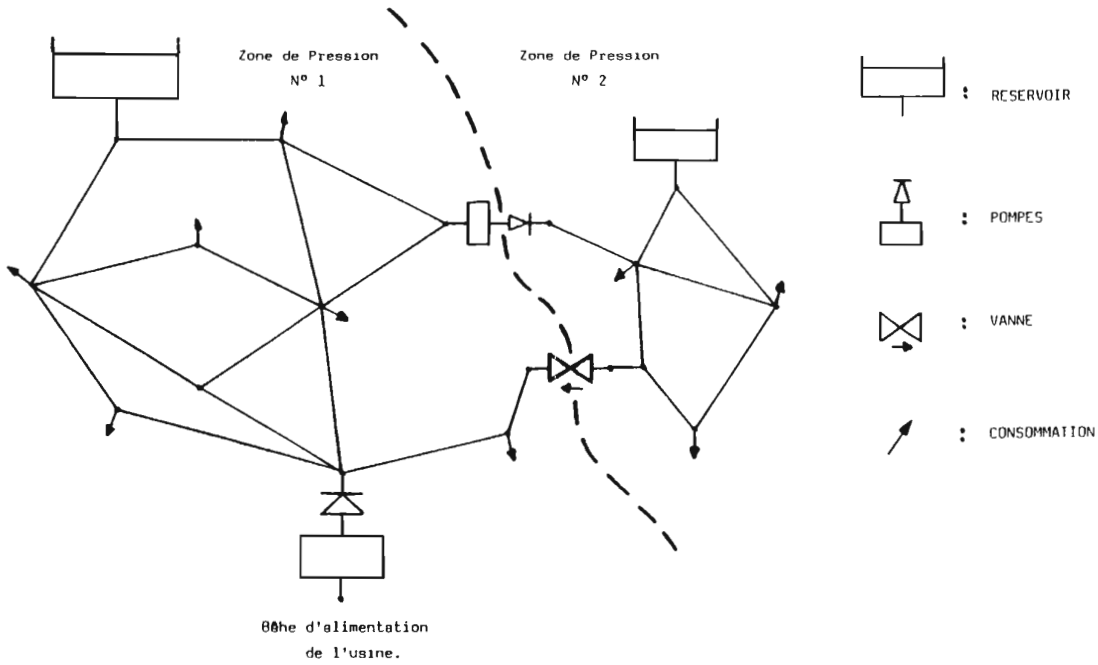
CHAPITRE I : DESCRIPTION ET MODELISATION DU PROBLEME

I.1. Caractéristiques générales des réseaux de distribution d'eau

De manière très générale, un réseau de distribution d'eau est constitué d'un ensemble de canalisations de divers longueurs et diamètres formant un graphe maillé. Aux noeuds de ce graphe sont localisées les consommations des abonnés. En fait, ces consommations sont reparties le long des canalisations, mais, le manque total de connaissance que l'on a de cette répartition fait qu'il paraît licite de localiser les consommations aux noeuds du réseau. En certains de ces noeuds se trouvent des réservoirs permettant de stocker l'eau, des pompes qui permettent soit d'injecter de l'eau dans le réseau à partir de ressources externes au réseau (bâches alimentées par des forages puisant dans des nappes phréatiques ou des rivières), soit de faire franchir à l'eau un étage de pression entre deux parties du réseau, dans le sens croissant des pressions. Ces pompes peuvent soit être à vitesse variable, auquel cas on maitrise directement le débit refoulé par la pompe, soit être en "tout ou rien". Dans ce dernier cas, le débit refoulé par la pompe dépend des conditions de pression dans le réseau et n'est pas connu à l'avance. On peut enfin effectuer des transferts d'eau entre différentes parties du réseau dans le sens décroissant en utilisant des réducteurs de pression, comme par exemple, des détendeurs ou des vannes. Ces vannes peuvent elles-mêmes être en tout ou rien, ou contrôlées en débit.

Le rôle du réseau est de pouvoir satisfaire à chaque instant l'ensemble des consommateurs. Ceci peut être réalisé soit en utilisant les capacités de production, soit en utilisant l'eau stockée dans les réservoirs. On voit donc que l'intérêt économique des réservoirs est double: ils permettent de faire face aux pointes de la consommation sans faire appel aux ressources les plus chères (c'est à dire les pompes dont le rendement électrique est le moins bon), et ils permettent de pomper plus d'eau dans les périodes où

l'énergie électrique est bon marché (heures creuses EDF, de nuit), eau utilisée ensuite dans les périodes tarifaires chères. Ce dernier point explique que l'une des contraintes usuelles de fonctionnement sur un réseau soit l'obligation faite d'avoir tous les réservoirs remplis en fin de nuit.



- Figure 1 -

Le modèle mathématique permettant la représentation d'un réseau d'eau se compose de deux ensembles d'équations. Le premier de ces ensembles est constitué par les équations différentielles donnant l'évolution du niveau des réservoirs (une équation par réservoir), de la forme:

$$S_k(x_k) \cdot \frac{dx_k(t)}{dt} = q_k(t) \qquad [1]$$

où

- $q_k(t)$ est le débit algébrique entrant dans la k-ième réservoir à l'instant t
- $x_k(t)$ est le niveau à l'instant t du k-ième réservoir
- $S_k(x_k)$ est la surface de la section du réservoir k à la hauteur x_k.

Les débits $q_k(t)$ sont déterminés par la résolution du deuxième ensemble d'équations, donnant à chaque instant les conditions d'équilibre instantané dans le réseau, en supposant connues les consommations, l'état de marche des pompes et l'état des vannes. Cette résolution fournit en fait la pression en chaque noeud du réseau (sauf aux noeuds où sont localisés les réservoirs, et où la pression est donc déjà connue) et les débits transitant au travers de chaque élément (tuyaux, pompes, vannes) et donc, en particulier, les débits d'entrée des réservoirs contribuant à la partie dynamique du modèle. Les équations sont les suivantes:

* Equations de conservation de la masse

En chaque noeud du réseau, la somme algébrique des débits entrant et sortant est égale à la consommation en ce noeud:

$$\sum_{j \in J(i)} q_{ij} = c_i \qquad [2]$$

où:

. $J(i)$ désigne l'ensemble des noeuds du réseau adjacents au noeud i

. q_{ij} est le débit transitant dans l'élément liant les noeuds i et j

. c_i est la consommation au noeud i

* Equations de perte de charge

Elles caractérisent la dissipation ou l'accroissement d'énergie mécanique dans les éléments du réseau:

$$H_i - H_j = \rho_{ij}(q_{ij}) \qquad [3]$$

où:

. H_i designe la pression au noeud i. Il s'agit d'un

potentiel, généralement exprimé par la hauteur d'une colonne d'eau (sous entendu qui créerait la même pression à sa base) mesurée par rapport à un niveau de référence - celui de la mer, par exemple-.

. ρ_{ij} est la relation, caractéristique de l'élément connectant les noeuds i et j, reliant débit et pression. Dans le cas d'un tuyau, la forme retenue pour ρ_{ij} est:

$$\rho_{ij}(q_{ij}) = R_{ij} \cdot q_{ij} \, |q_{ij}|$$

, R_{ij} étant un coefficient dépendant de la longueur, du diamètre et de la rugosité du tuyau.
Dans le cas d'une pompe en fonctionnement, une bonne approximation consiste à utiliser une fonction parabolique,

$$\rho_{ij}(q_{ij}) = a_{ij} \, q_{ij}^2 + b_{ij} \, q_{ij} + c_{ij}$$

appelée courbe caractéristique de la pompe. Bien évidemment, la courbe caractéristique d'une pompe à l'arrêt correspond à:

$$q_{ij} = 0$$

Pour les vannes, ou autres dispositifs spéciaux (détendeurs,..), des relations de même type peuvent être utilisées. Cependant, pour les vannes télécommandées, on supposera que c'est le débit q_{ij} qui est directement imposé (ceci peut être obtenu, soit par un asservissement local, soit par l'action manuelle de l'opérateur).
On voit donc apparaître les variables de commandes soit sous forme continue (choix de débit), soit sous forme discrète (choix d'une courbe caractéristique correspondant à chaque combinaison de pompes, à l'arrêt ou en fonctionnement en un point donné du réseau). Nous y reviendrons une nouvelle fois plus loin.

Notons enfin que la pression H_i est supposée connue lorsque l'on trouve au noeud i du réseau un réservoir ou la bâche d'alimentation d'une usine.

On constate donc que le modèle décrit est celui d'un système dynamique classique, avec comme variables d'état les niveaux x_k des réservoirs, comme variables de commande celles associées aux pompes et aux vannes, et soumis à des perturbations extérieures qui sont les consommations c_i en chaque noeud. Cependant, et c'est là une difficulté réelle dans le problème de la commande des réseaux d'eau, le calcul de la dérivée de l'état passe par la résolution de l'ensemble des équations statiques non linéaires décrites ci-dessus, et cette tâche peut s'avérer très coûteuse en temps calcul. Disposer d'une méthode rapide et efficace pour cette résolution est donc fondamental. Plusieurs solutions satisfaisantes existent: certaines découlent de la méthode de Newton appliquée à l'ensemble des équations [2] et [3] (Rao et al. (1974)), d'autres ramènent le problème à un problème d'optimisation sous contraintes linéaires qui est résolu itérativement en linéarisant le critère, pour pouvoir utiliser des algorithmes de flot minimum rapides (Collins et al. (1983)). Une autre classe de méthodes, enfin, cherche à ne travailler que sur un nombre réduit de variables: on trouvera dans (Jarrige, (1983)) une comparaison d'un certain nombre de ces méthodes.

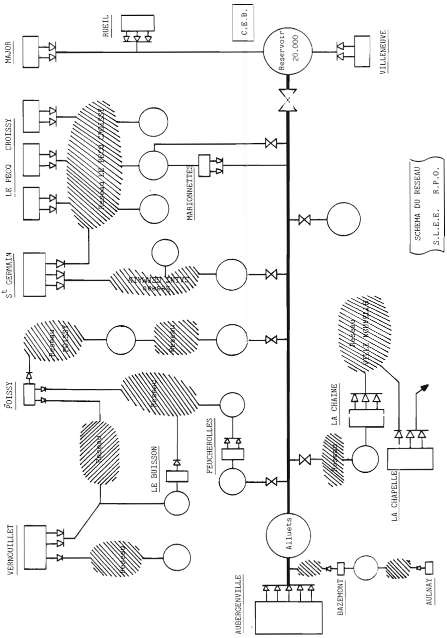
La méthode que nous avons utilisée appartient à cette dernière catégorie et est bien connue des hydrauliciens sous le nom de méthode de Hardy-Cross. Elle consiste à se définir un certain nombre de chemins indépendants dans le réseau et à faire varier le débit le long de ces chemins par une méthode de Newton relaxée (c'est à dire en travaillant séquentiellement sur des quantités scalaires), jusqu'à la convergence. Elle présente les avantages d'être l'une des méthodes les plus rapides (pourvu que l'on se contente d'une précision assez faible), de ne nécessiter que peu de stockage (puisqu'on travaille sur des variables réduites) et d'être enfin très facile à programmer. On trouvera dans (Dupont, (1971)) une description exhaustive de la méthode et dans (Joalland, (1978)) une programmation de celle-ci.

I.2. Caractéristiques du réseau concerné par l'étude

Outre sa très grande taille, déjà précédemment mentionnée, le réseau considérée présente une structure particulière, que l'on peut qualifier de "structure en étoile" avec un sous-réseau central auquel sont connectés des sous-réseaux périphériques (Figure 2).

Le sous-réseau central est essentiellement constitué d'une importante usine (d'un débit horaire maximum de 6.000m3) refoulant directement dans de gros réservoirs se trouvant pratiquement au point le plus élevé de l'ensemble du réseau. A partir de ces réservoirs part une conduite de fort diamètre qui permet d'alimenter par un système de vannes télécommandées la plupart des sous-réseaux périphériques. Cette conduite peut, en certains endroits, être réalimentée à partir des sous-réseaux périphériques par des pompes. En bout de conduite se trouve un réservoir alimenté, entre autres, par celle-ci, avec la particularité que le total du débit journalier fourni à ce réservoir par la conduite est fixé par contrat, toute latitude étant laissée pour la répartition au cours de la journée (dans la limite, bien sûr, du débit maximum que peut laisser transiter de manière instantanée la vanne correspondante): c'est ce que nous appelerons un contrat journalier de fourniture d'eau. Ce sous-réseau central n'est pas maillé, et ne compte pratiquement pas de consommateurs. La résolution des équations correspondant au modèle associé est donc excessivement simple.

- Figure 2 -

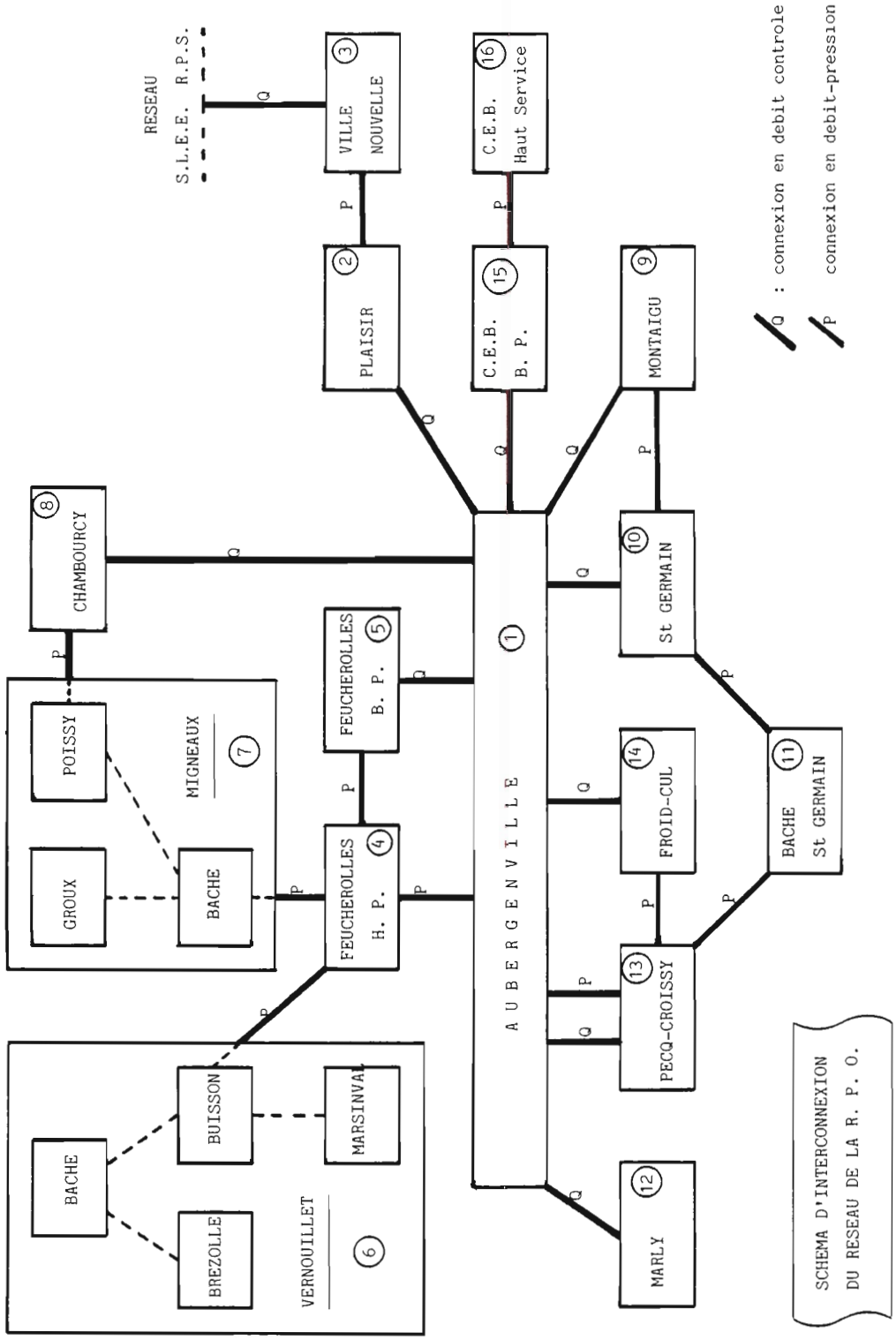

SCHEMA DU RESEAU
S.L.E.E. R.P.O.
MAJOR
RUEIL
C.E.B.
Reservoir 20.000
VILLENEUVE
LE PECQ
CROISSY
Reseau LE PECQ CROISSY
MARIONNETTES
St GERMAIN
Reseau SAINT GERMAIN
POISSY
Reseau POISSY
Reseau
LE BUISSON
FEUCHEROLLES
LA CHAINE
Reseau VILLE NOUVELLE
LA CHAPELLE
VERNOUILLET
Alluets
AUBERGENVILLE
BAZEMONT
AULNAY

Les sous-réseaux périphériques sont de nature très variée, car couvrant des zones géographiques assez différentes: rurales, urbaines, industrielles. Chacun d'eux peut contenir un ou plusieurs réservoirs, des pompes internes et un réseau maillé. Le plus complexe d'entre eux comporte quatre réservoirs, sept usines et une douzaine de mailles, alors que certains sous-réseaux ne comporte qu'un réservoir sans ressources propres. Outre leurs éventuelles interconnexions par vannes et pompes au sous-réseau central, certains sous-réseaux périphériques sont reliés directement l'un à l'autre, le cas le plus courant étant celui où une usine de production refoule dans deux sous-réseaux distincts, avec une contrainte (éventuellement dynamique) sur la production maximale totale de l'usine. Le schéma global d'interconnexion (Figure 3) représente chaque sous-réseau et ses liens avec le reste de l'ensemble.

Une autre caractéristique de ce réseau est que la quasi-totalité des pompes qui y sont présentes, sont des pompes en tout ou rien, les variables de commande associées étant le nombre de pompes en action (et non le débit refoulé, qui ne peut être déterminé qu'après la résolution complète des équations de l'hydraulique [2] et [3] du réseau), ce qui fait que le problème de commande associé au réseau se trouve être un problème en nombres entiers.

A l'opposé, toutes les vannes existantes sont télé-commandées en débit, de telle sorte que les variables de commandes associées sont les débits eux mêmes et sont donc continues. On voit donc que les commandes du réseau sont à la fois de nature discrète et continue. Remarquons pour conclure que les commandes discrètes sont plutôt localisées à l'intérieur des sous-réseaux, et donc seront les paramètres d'optimisation des sous-problèmes locaux correspondants, alors que les commandes continues se trouvent aux frontières entre les sous-réseaux, et constituent ainsi la grande majorité des interconnexions . Cette remarque permettra de justifier l'application des méthodes de décompositon-coordination au cas du réseau.

- Figure 3 -


RESEAU
S.L.E.E. R.P.S.
Q
VILLE NOUVELLE
3
C.E.B. Haut Service
16
P
PLAISIR
2
C.E.B. B. P.
15
MONTAIGU
9
CHAMBOURCY
8
FEUCHEROLLES B. P.
5
FEUCHEROLLES H. P.
4
POISSY
GROUX
BACHE
MIGNEAUX
7
BACHE
BUISSON
MARSINVAL
BREZOLLE
VERNOUILLET
6
A U B E R G E N V I L L E
1
St GERMAIN
10
FROID-CUL
14
BACHE St GERMAIN
11
PECQ-CROISSY
13
MARLY
12
Q : connexion en debit controle
P connexion en debit-pression
SCHEMA D'INTERCONNEXION
DU RESEAU DE LA R. P. O.

Le but global de l'opérateur conduisant le réseau est donc de partager la ressource commune provenant du sous-réseau central entre les sous-réseaux périphériques et de gérer les ressources internes de chacun de ces sous-réseaux, cette gestion dépendant bien sûr de l'intensité des échanges effectués avec le sous-réseau central. L'objectif visé est bien entendu de minimiser les coûts de fonctionnement (du moins ceux qui sont directement variables avec la production) encourus sur l'ensemble des usines du réseau. Nous préciserons plus loin la structure de ces coûts.

I.3. Modélisation mathématique du problème de commande

Nous avons déjà mentionné le fait qu'une des contraintes d'exploitation était de remplir les réservoirs du réseau en fin de nuit. L'état du système étant précisément les niveaux de ces réservoirs, il apparait que cette contrainte d'exploitation découple le problème dans le temps par période de 24 heures. Le problème d'optimisation pourra donc être formulé comme un problème de commande optimale à horizon fini, sur une période de 24 heures, avec état final imposé (réservoirs pleins). La seule exception à cela a lieu pour les périodes de fin de semaine, puisque pour la journée du Dimanche entière, le tarif électrique en vigueur est uniforme, et dans ce cas; le problème de commande optimal sera formulé sur un horizon de 48 heures à partir du Samedi matin.

Le problème de commande a de plus été formulé en temps discret. Théoriquement, il faudrait considérer que les arrêts-démarrages de pompes peuvent être effectués à n'importe quel instant, et mettre un coût impulsionnel sur chaque changement de commande pour éviter des modifications trop rapides, irréalisables par l'opérateur et préjudiciables aux installations. Mais cette formulation associe une nouvelle variable d'état binaire par pompe et conduit à un problème insoluble vu le très grand nombre de pompes existant sur le réseau (plus de cent!). C'est pourquoi il a été décidé de n'autoriser les changements de configurations de pompes qu'à certains instants prédéterminés, ce qui induit une formulation du problème en temps discret, avec des pas de temps de l'ordre de l'heure. Cela restreint un peu la classe des commandes autorisées et se traduit donc par un certain degré de sous-optimalité des solutions proposées, mais on peut espérer que cette dégradation de performance reste faible grâce à un choix judicieux des pas de temps, respectant bien, par exemple, la structure tarifaire électrique de la journée.

Les consommations aux noeuds du réseau sont supposées connues à l'avance pour chaque pas de temps de la période

d'optimisation. Elles sont en fait fournies par un programme de prédiction intégrant les consommations des jours précédents et certaines variables météorologiques, mais la qualité de cette prédiction est très moyenne, pouvant présenter avec la réalité des écarts de l'ordre de 15%, allant exceptionnellement jusqu'à 20%.

Nous pouvons alors modéliser le problème complet. Nous désignons par T le nombre de points de discrétisation de la période d'optimisation, et par N le nombre total des sous-réseaux (central et périphériques) formant le réseau global.

Nous appelons U l'ensemble des commandes des pompes du réseau, et m le nombre d'usines de refoulement. Soit h_j le nombre de combinaisons de groupes de pompes pouvant refouler à l'usine n°j, numérotés de 1 à s_j.

$$U = \{u \,/ u = (u_1,\ldots,u_j,\ldots,u_m),\ u_j \in \{0,1,\ldots,h_j\}\}$$

la valeur nulle pour u_j signifiant qu'aucune pompe ne refoule à l'usine j. $q(u_j)$ et $\eta(u_j)$ sont respectivement le débit et la consommation électrique à l'usine j pour la commande u_j. Remarquons tout de suite que l'ensemble U se décompose par rapport aux sous-réseaux en $U = U_1 x \ldots x U_N$, l'ensemble U_s regroupant les commandes des usines se trouvant dans le sous-réseau s; m s'écrit alors:

$$m = \sum_{s=1}^{N} m_s$$

et $$U_s = \{u^s / u^s = (u^s_1,\ldots,u^s_j,\ldots,u^s_{m_s}),\ u^s_j \in \{0,1,\ldots,h^s_j\}\}$$

Soit n le nombre de réservoirs et $x=(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ l'état du système, x_i désignant la hauteur d'eau dans le réservoir i. Nous noterons de manière générale $S(x_i)$ le volume d'eau dans le réservoir i correspondant au niveau x_i.
De même que pour les usines, le vecteur d'état x se décompose par rapport au sous-réseaux. n s'écrit alors:

$$n = \sum_{s=1}^{N} n_s$$

et $x = (x^1,\ldots,x^s,\ldots,x^N)$, avec $x^s \in R^{n_s}$

Soit encore W l'ensemble des commandes des vannes du réseau, et p le nombre de ces vannes télécommandées. Nous noterons $\underline{w_k}$ et $\overline{w_k}$ les valeurs minimales et maximales du débit que peut laisser passer la vanne k, et nous avons donc:

$$W = \{w/w = (w_1,\ldots,w_k,\ldots,w_p) \ , \ w_k \in [\underline{w}_k,\bar{w}_k]\}$$

En toute rigueur, les bornes supérieures $\overline{w_k}$ dépendent des conditions locales de pression, puisqu'alors, elles correspondent simplement aux débits transitant dans les tuyaux lorsque les vannes sont grand ouvertes. Cependant, nous nous contenterons ici de bornes approximatives, éventuellement plus sévères, mais constantes.

Nous noterons Θ^s l'ensemble des indices des vannes connectées au sous-réseau s, w^s désignant alors le vecteur des débits des vannes associées et W^s l'ensemble des commandes associées; Nous noterons encore γ^s l'application qui, au vecteur complet des débits des vannes w, associe sa restriction au sous-réseau s:

$$\gamma^s : W \to W^s$$
$$w \to w^s = \gamma^s(w)$$

Dans le cadre du réseau étudié, où toutes les vannes sont issues du sous-réseau central, nous supposerons (moyennant une renumérotation des vannes et l'introduction de vannes fictives ne pouvant donner qu'un débit nul) pour simplifier les notations que le sous-réseau central est le sous-réseau numéro N, et que chaque sous-réseau périphérique s ($1 \leqslant s \leqslant N-1$) est connecté au sous-réseau central par la vanne numéro s. Le vecteur des débits de vannes a alors N-1 composantes (dont N-p-1 fictives) et nous avons:

$\Theta^s = \{s\}$

sous-réseau périphérique s : $W^s = \{w^s / w^s = w_s, w_s \in [\underline{w}_s, \bar{w}_s]\}$

$1 \leqslant s \leqslant N-1$ $\quad \Psi^s(w) = w_s$

$\Theta^N = \{1,\ldots,N-1\}$

sous-réseau central N : $W^N = W$; $w^N = (w_1,\ldots,w_{N-1})$

$\Psi^N = Id_W$

Nous avons donc : $W = W^1 \times \ldots \times W^{N-1} = W^N$

Dans la suite, nous remplacerons souvent $\Psi^s(w)$ par w^s, en sachant qu'alors, les variables w^s ne sont pas indépendantes entre elles.

Enfin, nous noterons c le vecteur des consommations en chaque noeud du réseau, qui peut de même être éclaté par rapport à la décomposition en sous-réseau:

$$c = (c^1,\ldots,c^s,\ldots,c^N)$$

où c^s est le vecteur des consommations en chaque noeud du sous-réseau s.

t désignera l'indice du pas de temps, $t \in \{0,\ldots,T\}$. Cet indice est susceptible d'être ajouté à toutes les notations définies précédemment, et ne doit pas être confondu avec les indexations utilisées dans la numérotation des réservoirs, usines, vannes,....

* **La modélisation du système dynamique** a déjà été évoquée au §.I-1, et peut s'écrire, en suivant les notations précédentes:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t, w_t, c_t) \qquad [4\ g]$$

$$t \in \{0, \ldots, T-1\}$$

$$u_t \in U$$

$$w_t \in W$$

ou encore, en l'écrivant pour chaque sous-réseau:

$$x^s_{t+1} = f^s(x^s_t, u^s_t, w^s_t, c^s_t) \qquad [4\ d]$$

$$t \in \{0, \ldots, T-1\} \qquad s=1, \ldots, N$$

$$u^s_t \in U^s$$

$$w^s_t \in W^s$$

* **La modélisation des contraintes:** celles ci sont de nature très diverse :

- La satisfaction des consommations est automatiquement assurée par la résolution des équations [2] et [3] du réseau.

- En tout noeud du réseau, la pression statique P dans la canalisation doit être supérieure à un certain seuil (pour éviter les effets de cavitation) et inférieure à un autre seuil (pour éviter les ruptures de conduite)

$$P \in [Pmin, Pmax] \qquad [5]$$

- Les niveaux des réservoirs ne doivent pas descendre en dessous d'un niveau minimum (radier du réservoir augmenté d'une réserve de sécurité) et ne peuvent excéder le trop-plein. Ceci s'exprime sur le vecteur d'état x par:

$$\underline{x} < x < \overline{x} \qquad [6\ g]$$

ou encore, au niveau de chaque sous-réseau:

$$\underline{x}^s < x^s < \overline{x}^s, \quad s=1, \ldots, N \qquad [6\ d]$$

Nous voyons donc surgir une difficulté pour l'optimisation, à savoir la présence de contraintes sur les variables d'état.

- Les réservoirs doivent être remplis à la fin de la période d'optimisation. Nous ne pouvons cependant choisir une cible finale ponctuelle car les commandes du problème sont partiellement discrètes, et le problème n'aurait presque sûrement pas de solutions. C'est pourquoi nous nous définissons une cible-intervalle:

$$x_T \in C \qquad [7\ g]$$

avec $C = [x_{1_{min}}, x_{1_{max}}] x \ldots x [x_{n_{min}}, x_{n_{max}}]$

ou encore:

$$x^s_T \in C^s,\ s=1,\ldots,N \qquad [7\ d]$$

- La puissance électrique instantanée appelée à une usine de refoulement doit toujours être inférieure à la puissance maximale souscrite pour l'usine, qui dépend elle-même de la période de tarification électrique:

$$\eta_t(u_j) \leqslant \eta_t\ ,\ j=1,\ldots,m \qquad t=0,\ldots,T-1 \qquad [8]$$

- Enfin, nous avons déjà mentionné que le total du débit journalier fourni par certaines vannes était imposé, sa répartition à chaque pas de temps étant libre:

$$\exists k_o,\ \sum_{t=o}^{T-1} w_{k_o,t} = Q_{k_o} \qquad [9]$$

* **Le critère à optimiser** regroupe tous les coûts de fonctionnement des installations du réseau liés directement à l'exploitation. En particulier, les dépenses dûes au personnel et aux dépenses fixes (entretien,...) ne sont pas comptabilisées. Ces coûts sont de trois origines:

- coût dû à la consommation électrique des pompes de refoulement, notée $\eta_t(u_j)$ à l'usine j et dépendant des conditions de pression sur le réseau à l'instant t.

- coût dû à la consommation électrique des installations se trouvant dans les usines, mais autres que les pompes de refoulement: exhaure, éclairage, traitement spécifique. Cette consommation est évaluée et ramenée au volume d'eau refoulé par l'usine. La consommation unitaire sera notée μ_j pour l'usine n°j.

- coût dû aux traitements physico-chimiques assurant la potabilité de l'eau refoulée. Ce coût est ramené au volume d'eau refoulée et est noté: ν_j à l'usine j.

Si on note $a_{j,t}$ le coût du kilowatt-heure à l'usine j au pas de temps t, le critère s'écrit:

$$J = \sum_{t=o}^{T-1} \sum_{j=1}^{m} [a_{j,t}.\eta(u_{j,t}) + a_{j,t}.\mu_j.q(u_{j,t}) + \nu_j.q(u_{j,t})] \qquad [10\ g]$$

et doit être minimisé par rapport aux variables $u_{j,t}$ qui apparaissent explicitement dans le critère et par rapport aux variables $w_{k,t}$ qui interviennent dans la dynamique.

Nous pouvons de même faire apparaitre la décomposition géographique en sous-réseaux:

$$J = \sum_{s=1}^{N} J^s \qquad [10\ d]$$

$$\text{avec} \quad J^s = \sum_{t=o}^{T-1} \sum_{j=1}^{m_s} [a_{j,t}.\eta(u_{j,t}) + a_{j,t}.\mu_j.q(u_{j,t}) + \nu_j.q(u_{j,t})]$$

Finalement, le problème de la détermination des commandes optimales dans un réseau hydraulique s'écrit:

$$(PB) : \quad \underset{u_t \in U,\ w_t \in W}{\text{Min}} \quad \{J\}$$

sous les contraines: [4],[5],[6],[7],[8],[9]

Remarque: Pour alléger les notations, on écrira les critères:

$$J^s = \sum_{t=o}^{T-1} L_t^s(x_t^s, u_t^s)$$

et

$$J = \sum_{t=o}^{T-1} L_t(x_t, u_t)$$

I.4. Difficultés de la résolution et solutions envisagées

La résolution du problème de commande optimale décrit ci-dessus présente de nombreuses difficultés, que nous rappelons:

a) Il y a des contraintes sur les variables d'état.
b) La plupart des variables de commandes sont discrètes.
c) La relation liant la commande à l'état est implicite et sa résolution nécessite dans des cas standards des temps-calcul de l'ordre de la seconde.
d) Le nombre de variables d'état du système est élevé.

Les trois premières difficultés mentionnées ci-dessus semble désigner la Programmation Dynamique Discrète (PDD) comme étant la **seule** méthode de résolution adéquate. De plus, cette méthode a l'avantage de fournir des commandes en boucle fermée, ce qui parait être important puisque nous savons que le manque de précision des prévisions de consommation introduira des écarts entre les résultats de l'optimisation et la réalité du réseau, écarts qu'il faudra savoir compenser en temps réel. Mais alors, la taille du problème que nous envisageons de traiter, et qui constitue la quatrième difficulté, conjuguée avec le temps-calcul nécessaire à la résolution de la relation implicite commande-état, rend l'application de cette méthode impensable, puisque elle nécessite autant d'évaluations de cette relation implicite qu'il y a de points à explorer dans l'espace "temps x etat x commande", et que ce nombre de points dépend exponentiellement du nombre de variables d'état. Signalons simplement que dans le cas du réseau que nous devons étudier (et qui compte environ vingt variables d'état), l'application brutale de cette méthode sur un calculateur, même très rapide, conduirait, pour simplement obtenir les commandes du réseau sur les prochaines 24 heures, à des temps-calcul gigantesques, se chiffrant à plusieurs millions de siècles (extrapolation d'un résultat réel observé avec un réseau maillé de taille modeste, avec seulement deux réservoirs).

En pratique, donc, la méthode PDD ne peut s'appliquer qu'à de petits réseaux, comportant un seul réservoir et quelques mailles, ou éventuellement deux réservoirs, mais sans mailles (pour avoir un modèle dynamique explicite). C'est pourquoi une idée naturelle consiste à tirer partie de la structure en étoile du réseau à étudier, et de n'appliquer la méthode de PDD qu'au niveau des sous-réseaux pris isolément, dans la mesure où lesdits sous-réseaux sont eux-même suffisamment simples pour que cette application soit possible. Ceci correspond donc à un processus de décomposition (spatiale dans ce cas), permettant de conduire l'optimisation des commandes internes de chaque sous-réseau. Ce processus doit être complété par une phase de coordination, destinée d'une part à assurer le respect des conditions de compatibilité entre les sous-réseaux, et d'autre part à déterminer les valeurs optimales des interactions entre les sous-réseaux (qui peuvent être des commandes de vannes). La coordination est en général effectué en utilisant une méthode de type variationnel. Nous voyons donc que, bien que la programmation dynamique fournisse des commandes en boucle fermée localement, une partie de la commande sera obtenue en boucle ouverte, ce qui nous obligera à effectuer en ligne un traitement spécial pour pouvoir, le cas échéant, modifier ces commandes en boucle ouverte.

Cette décomposition spatiale s'avère cependant encore insuffisante, et il reste certains sous-réseaux trop complexes pour qu'on puisse envisager de leur appliquer la PDD. Il serait certes possible de réitérer la décomposition spatiale de ces sous-réseaux, en les scindant, artificiellement cette fois, les interactions étant alors les débits et les pressions aux points-frontière ainsi créés. Malheureusement, l'expérience que nous avons de ce type d'interaction par plusieurs points est négative, la convergence dans certains cas ne pouvant être assurée (Joalland , (1978)). C'est pourquoi nous avons préféré tenter de simplifier la résolution de ces sous-réseaux en utilisant des idées d'agrégation basées sur la séparation des modes lents et rapides des phénomènes dynamiques s'y développant. La méthode qui en est dérivée simplifie le modèle du sous-réseau de deux manières: elle agrège les réservoirs présentant des comportements dynamiques proches, et donc diminue le nombre de

variables d'état; elle réduit le nombre d'équations statiques représentant l'équilibre instantané du sous-réseau, jusqu'à ne plus garder que des équations que l'on peut résoudre explicitement. Le modèle agrégé résultant pour le sous-réseau peut alors servir de base à un calcul de programmation dynamique, envisageable dans la mesure où le nombre de réservoirs agrégés n'excède pas deux. Les fonctions de Bellman issues de ce calcul peuvent alors servir à déterminer les commandes cherchées sur le modèle complet du sous-réseau. L'ensemble de cette procédure introduit bien sûr un certain degré de sous-optimalité dans les résultats obtenus, mais suffisamment faible pour que ces résultats restent parfaitement acceptables.

Rappel des notations:

nombre de pas de temps	:	T-1	;	indice courant : t
nombre de sous-réseaux	:	N	;	indice courant : s
nombre de réservoirs	:	n	;	indice courant : i
nombre de pompes	:	m	;	indice courant : j
nombre de vannes	:	N-1	;	indice courant : s

==========

x_i : niveau du i° réservoir

u_j : commande de la j° usine

w_s : débit de la s° vanne

x^s	:	vecteur d'état	du s° sous-réseau
u^s	:	vecteur commandes des pompes	du s° sous-réseau
w^s	:	vecteur débits des vannes	du s° sous-réseau
c^s	:	vecteur des consommations	du s° sous-réseau

==========

CHAPITRE II : METHODES DE DECOMPOSITION-COORDINATION

Nous allons présenter dans ce chapitre les méthodes de décomposition-coordination que nous avons utilisées pour la résolution de notre problème

II.1. Introduction

On peut distinguer de manière classique trois principales méthodes de décomposition, d'interprétation intuitive simple. Ce sont:

- La méthode d'allocation de ressources, encore appelée méthode primale ou méthode de coordination par les quantités, qui consiste, dans le cas simple du problème où plusieurs agents se partagent une ressource commune, à répartir cette ressource entre les différents agents, et à faire évoluer la répartition vers l'optimum en calculant des informations de sensibilité du coût de chaque agent à cette répartition.

- La méthode de coordination par les prix, ou méthode duale, qui consiste, sur le même exemple que ci-dessus, à laisser chaque agent déterminer la quantité de ressources qu'il veut utiliser, mais en la lui faisant payer un prix tel que la somme des quantités consommées par les agents respecte la ressource globale disponible.

- La méthode de coordination par prédiction, qui consiste à laisser tous les agents **sauf un** déterminer la quantité de ressources qu'ils veulent utiliser. Le dernier agent, alors, n'utilise que le complément restant par rapport à la ressource globale, et calcule le prix marginal correspondant à cette utilisation. C'est à ce prix marginal que les autres agents peuvent se procurer la ressource commune.

En fait, ces trois méthodes peuvent être plongées dans une théorie formelle plus générale des algorithmes d'optimisation par décomposition-coordination, dans le cadre de l'optimisation convexe dans les espaces de Hilbert (Cohen, (1978)). L'intérêt de ce plongement est qu'il permet d'étendre le champ d'application de ces méthodes classiques, aux cas, par exemple, où les fonctionnelles manipulées sont non additives, voir non différentiables. Par contre, l'exposé de ces méthodes dans le cadre de cette théorie ne fait plus ressortir leur signification économique évidente, et masque donc les idées sous-jacentes. C'est pourquoi nous avons pris le parti de faire la présentation de la décomposition-coordination de notre problème dans le cadre de ces trois méthodes classiques. Chaque fois cependant qu'il faudra étendre ces méthodes à des cas non classiques, nous ferons référence au cadre théorique justifiant cette extension.

Nous allons donc tout d'abord présenter certains aspects utiles dans notre application de cette théorie formelle, que l'on trouvera exposée de manière complète dans (Cohen, (1983)). Ensuite, nous détaillerons sur un exemple tiré des réseaux d'eau le fonctionnement des méthodes classiques de coordination, ce qui expliquera par quelles heuristiques sont traitées certaines interactions directes entre les sous-réseaux. Enfin nous montrerons par quelle méthode ont été traitées les interconnexions par vannes télécommandées.

II.2. Fondements théoriques de la Décomposition-Coordination

Soit U et C deux espaces de Hilbert. U^f un sous-ensemble convexe fermé de U; on note <.,.> (resp.(.,.)) le produit scalaire sur U (resp. C) et | | la norme associée. C est un cône convexe fermé de C, C^* son dual. On s'intéresse aux deux problèmes suivants:

$$(MP1) : \quad \underset{u \in U^f}{\text{Min}} \ \{J(u)\}$$

$$(MP2) : \quad \underset{u \in U^f}{\text{Min}} \ \{J(u)\}$$

$$\text{soumis à : } \quad \Theta(u) \in -C$$

avec les hypothèses suivantes :

HA1 :

J est une fonctionnelle de U à valeurs dans R, convexe, propre, s.c.i., sous différentiable sur un ouvert O contenant U^f. J est lipschitzienne sur tout ouvert borné contenu dans O. Si U^f n'est pas borné, J est supposée coercive sur U^f

HA2 :

Θ est une fonctionnelle de U à valeurs dans C, que l'on suppose C-convexe, et lipschitzienne de constante τ sur O vérifiant une condition de qualification des contraintes.

On sait alors que, sous les hypothèses HA1 (resp. HA1 et HA2), le problème (MP1) admet un ensemble de solutions U^* (resp. le lagrangien du problème (MP2) admet un ensemble de points-selle $U^* \times P^*$)

II.2.a) Le cas differentiable

Dans le cas ou la fonctionnelle J est differentiable, un algorithme pour résoudre le problème (MP1) est :

Algorithme 1 :

(a) choisir $u^0 \in U^f$; poser k = 0

(b) Résoudre le problème auxiliaire :
(PA^k) : $\underset{u \in U^f}{\text{Min}} \{K^k(u) + \langle \epsilon^k J'(u^k) - K'(u^k), u \rangle\}$

Soit u^{k+1} la solution obtenue

(c) Stopper si $|J(u^{k+1}) - J(u^k)|$ ou $|u^{k+1} - u^k|$ est inférieur à un seuil donnée; sinon, faire k <- k+1 et aller en (b)

avec ϵ^k étant une suite de nombres positifs et K^k une suite de fonctionnelles de U^f dans R, dépendant de l'indice d'itération k.

Si on suppose en plus de HA1 que :

HB1 :

La dérivée de J est lipschitzienne, de constante A

HB2 :

Les fonctionnnels K^k sont fortement convexes de constantes b^k, coercives, différentiables, de dérivées lipschitziennes de constantes B^k

HB3 :

$\exists\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \text{tq}\ \forall k,\ \alpha < \epsilon^k < 2b^k/A+\beta$

alors, la suite $\{J(u^k)\}$ est strictement décroissante, convergeant vers $J(u^*)$ et tout point d'adhérence de la suite $\{u^k\}$ au sens de la topologie faible est solution du problème (MP1)

Si de plus J est supposée fortement convexe, alors, la suite $\{u^k\}$ converge fortement vers u^*, seul élément de U^*.

L'intérêt de cet algorithme est que le critère initial J n'intervient plus que sous forme linéarisée. Il suffit de choisir alors les noyaux K^k additifs par rapport à une décomposition de l'ensemble

$$U^f : U_1^f \times \ldots \times U_N^f ,$$

pour avoir à résoudre à l'étape (b) de l'algorithme N problèmes indépendants au lieu du problème global.

Signalons une variante à cet algorithme, où l'étape (b) est remplacée par:

* Résoudre le problème (PA^k) avec $\epsilon^k = 1$; soit $\tilde{u}^{k+1}$ la solution

* Calculer $u^{k+1} = \rho^k \tilde{u}^{k+1} + (1-\rho^k)u^k$, $\rho^k > 0$

et qui converge sous les mêmes hypothèses que l'algorithme précédent.

Toujours dans le cas différentiable, on donne deux algorithmes pour résoudre le problème (MP2). En notant L(u,p) le lagrangien du problème sous contraintes: $L(u,p) = J(u) + (p,\Theta(u))$ et $\mathcal{K}(u,p) = K(u) + (p,\Omega(u))$ le noyau (fonctionnelle auxiliaire à choisir par l'utilisateur), on a :

Algorithme 2.1 : (dit "à un niveau")

(a) Choisir $(u^o,p^o) \in U^f \times C^*$; poser $k = 0$

(b) Résoudre le problème auxiliaire (PA^k)

$$\operatorname{Min}_{u\in U^f} \{K(u)+\langle \epsilon J'(u^k)-K'(u^k),u\rangle - (p^k,(\epsilon\Theta'(u^k)-\Omega'(u^k))u))$$

soumis à : $\Omega(u) + \rho\,\Theta(u^k) - \Omega(u^k) \in -C$

Soit u^{k+1} la solution et p^{k+1} le multiplicateur optimal associé

(c) Stopper sur un test d'arrêt; sinon, faire k <- k+1 et aller en (b).

La preuve de convergence de cet algorithme n'a été obtenue que dans le cas de contraintes égalités, J et K étant des fonctionnelles quadratiques et Θ et Ω étant affines (nous renvoyons le lecteur à Cohen (1980) ou (1983) pour les conditions de convergence). C'est à partir de cet algorithme que l'on retrouve la méthode de coordination par prédiction, ou encore la méthode d'allocation de ressources (Cohen, (1978)). Pour obtenir la décomposition du problème auxiliaire (PA^k), il faudra non seulement choisir K additive par rapport à la décomposition de U, mais, aussi Ω "bloc-diagonale" par rapport à une décomposition de U et C.

Si maintenant, nous choisissons pour noyau du problème la fonction: $\Psi(u,p) = K(u) - 1/2\ |p|^2$, et en considérant séquentiellement les opérations portant sur u et p, on obtient l'algorithme suivant:

Algorithme 2-2 : (dit "à 2 niveaux")

(a) Choisir $(u^o,p^o) \in U^f \times C^*$: Poser k = 0

(b) Résoudre le problème auxiliaire (PA^k)

$$\underset{u\in U^f}{\text{Min}}\{K(u) + \langle \epsilon\ J'(u^k) - K'(u^k),u\rangle + \epsilon(p^k,\Theta(u))$$

Soit u^{k+1} la solution

Calculer $p^{k+1} = \Pi\ (p^k + \rho\ \Theta(u^{k+1}))$

où Π désigne la projection sur le cône dual C^*

(c) Stopper sur un test d'arrêt; sinon faire k <- k+1 et aller en (b)

Si on suppose vérifiées, outre les hyptohèses HA1 et HA2:

HB1 :

La dérivée de J est lipschitzienne, de constante A.

HB2 :

La fonctionnelle K est fortement convexe de constante b, coercive, différentiable, de dérivée lipschitzienne de constante B.

HB4 :

J est fortement convexe, de constante a, et on a:

$$0 < \epsilon < \frac{b}{A} \; ; \; 0 < \rho < \frac{2a}{\tau^2}$$

alors la suite $\{u_k\}$ obtenue converge fortement vers u^*, unique solution de (MP2). La suite $\{p^k\}$ converge faiblement vers un multiplicateur optimal $\overline{p}$, et $(u^*,\overline{p})$ est un point-selle du Lagrangien L.

Nous voyons donc que cet algorithme est une extension de celui d'Uzawa, base de la méthode de décomposition par les prix. Remarquons que l'on obtient des résultats analogues en remplaçant dans le critère le terme $\epsilon(p^k,\Theta(u))$ par $\epsilon(p^k,\Theta'(u^k).u)$ lorsque Θ est différentiable, avec une hypothèse de type Lipschitz sur Θ'.

II.2.b) Le cas sous-différentiable

Dans le cas où la fonctionnelle J est simplement sous-différentiable en tout point u de U^f, nous noterons $\partial J(u)$ le sous-différentiel de J au point u.

Par définition, on dira qu'une suite de réels $\{\epsilon^k\}$ est de type σ si:

$$\epsilon^k > o \ , \ \sum_{k\in N} \epsilon^k = +\infty \ , \ \sum_{k\in N} (\epsilon^k)^2 < +\infty$$

Un premier algorithme de résolution du problème (MP1) est:

Algorithme 3-1

(a) Choisir $u^o \in U^f$; poser $k = o$

(b) Résoudre le problème auxiliaire:

$$\min_{u\in U^f} \{K(u) + \langle \epsilon^k r^k - K'(u^k), u\rangle\}$$

où r^k est un élément quelconque de $\partial J(u^k)$

Soit u^{k+1} la solution obtenue.

(c) Stopper sur un critère d'arrêt, sinon, faire k <- k+1 et aller en (b)

Si on suppose, en plus des hypothèses HA, que :

HC1 :

$$\exists\, c_1, c_2, \ \forall u\in U^f, \ \forall r\in\partial J(u), \ |r| \leqslant c_1|u| + c_2$$

HC2 :

K est une fonctionnelle fortement convexe, differentiable.

HC3 :

La suite $\{\epsilon^k\}$ est de type σ

alors, la suite $\{J(u^k)\}$ converge vers $J(u^k)$, et la suite $\{u^k\}$ converge faiblement vers une solution de (MP1).
Si, de plus, J est fortement convexe, la suite $\{u^k\}$ converge fortement vers u^*, unique solution du problème (MP1)

Cet algorithme est le pendant de l'algorithme 1 dans le cas non différentiable, mais avec un noyau K fixe. Il existe une variable de cet algorithme 3-1 avec des noyaux K^k dépendant de l'indice d'itération k, moyennant une hypothèse sur la vitesse de déformation des noyaux K^k, et une autre variante où le noyau K est simplement sous-différentiable, mais où l'on doit être capable de choisir des éléments particuliers dans les sous-différentiels de K aux points successifs u^k. Indiquons enfin la possibilité suivante qui consiste à "garder intacte" une partie de la fonction coût originale dans le problème auxiliaire (ceci sera utilisé au § II.4.b ci-dessous).
Supposons que J soit la somme de J_1 et J_2. On garde pour J_1 toutes les hypothèses faites sur J pour l'algorithme 3-1, mais, on suppose simplement que J_2 est convexe, propre, s.c.i., lipschitzienne sur tout ouvert borné contenu dans O (pas d'hypothèse de sous-différentiabilité de J_2). On a alors l'algorithme suivant :

Algorithme 3-2

(a) Choisir $u^o \in U^f$; faire k = o

(b) Résoudre le problème auxiliaire

$$\min_{u \in U^f} \{K(u) + \langle \epsilon^k . r^k - K'(u^k), u \rangle + \epsilon^k J_2(u)\}$$

où $r^k \in \partial J_1(u^k)$

(c) Stopper sur test d'arrêt; sinon faire k <- k+1 et aller en (b).

dont on trouvera les conditions exactes de convergence dans Cohen, (1983).

Pour la résolution du problème (MP2) dans le cas non différentiable, on dispose d'un algorithme "à deux niveaux".

Algorithme 4 :

(a) Choisir $(u^o, p^o) \in U^f \times C^*$; poser k=o

(b) Résoudre le problème auxiliaire (PA^k)

$$\min_{u \in U^f} \{K(u) + \langle \epsilon^k r^k - K'(u^k), u \rangle + \epsilon^k (p^k, \theta(u))\}, \quad r^k \in \partial J(u^k)$$

soit u^{k+1} la solution

Calculer : $p^{k+1} = \Pi(p^k + \rho\theta(u^{k+1}))$

Π étant la projection sur C^*

(c) Stopper sur un test d'arrêt, sinon, faire k <- k+1 et aller en (b)

Sous les hypothèses HA1, HA2, HC1, HC2, HC3, avec de plus :

* J est fortement convexe

* la suite $\{\epsilon^k\}$ est non-croissante

* ρ vérifie : $o < \rho < 2\ a/\tau^2$

alors, la suite $\{u^k\}$ converge fortement vers u^*, unique solution de (MP2).

Cet algorithme peut être étendu au cas où θ est sous-différentiable d'une part, d'autre part au cas où J n'est pas

fortement convexe. Le cas J non fortement convexe oblige à introduire dans la phase de mise à jour du prix p^k un paramètre ρ^k (au lieu de ρ) tel que la suite $\{\rho^k\}$ soit de type σ, et à faire une hyptohèse de "stabilité" sur le Lagrangien L (voir paragraphe suivant).

Le cas Θ sous-différentiable sert en décomposition lorsque Θ n'est pas additive: ou remplace le terme $\epsilon^k(\rho^k,\Theta(u))$ par $\epsilon^k(\rho^k, \theta^k.u)$ où $\theta^k \in \partial\Theta(u^k)$ (on trouvera cette notion de sous-differentiel dans Cohen, (1983)) si bien que le problème auxiliaire redevient additif par rapport à une décomposition donnée de U, moyennant un choix additif pour le noyau K.

II.2.c) Le cas du Lagrangien Augmenté

Nous avons dit que l'utilisation des algorithmes 2-2 ou 4 nécessite, dans le cas où la fonctionnelle J n'est pas fortement convexe, une hypothèse de "stabilité" du Lagrangien L(u,p), à savoir: si on note $U^* \times P^*$ l'ensemble des points-selle de L, et U(p) l'ensemble des solutions du problème:

$$\min_{u \in U^f} \{L(u,p)\}$$

$$\text{alors,} \quad \forall p^* \in P^* , \quad \hat{U}(p^*) = U^*$$

De plus, la non forte convexité du J peut entrainer la non différentiabilité de la fonctionnelle duale Ψ:

$$\Psi(p) = \min_{u \in U^f} \{L(u,p)\}$$

et nous oblige donc à remettre à jour les paramètres duaux p^k avec des "petits pas" ρ^k (de type σ) tendant vers zero.

Outre le fait que l'hypothèse de stabilité du lagrangien n'est pas aisée à vérifier, le fait d'utiliser les pas ρ^k de type σ nuit à la vitesse de convergence de l'algorithme (par raport à des "grands pas" ρ simplement astreints à ne pas dépasser une borne donnée).

Une solution à ces difficultés est apportée par l'utilisation des Lagrangiens augmentés. Malheureusement, ceux-ci ne sont pas additifs par rapport à u, si bien que l'on est amené à leur appliquer des algorithmes de décompositon spécifiques.

Nous allons présenter un algorithme dans le cas spécifique des contraintes égalité, sachant que la théorie est disponible dans

le cas de contraintes inégalité.

Nous nous intéressons donc au problème:

$$(MP3): \quad \min_{u \in U^f} \{J(u)\}$$

$$\text{soumis à : } \Theta(u) = o$$

où J et Θ vérifient les hypothèses HA1 et HA2.
Le lagrangien augmenté de ce problème est, pour $c > o$:

$$L_c(u,p) = J(u) + (p,\Theta(u)) + \frac{c}{2} |\Theta(u)|_C^2$$

et on note $\Psi_c(p) = \min_{u \in U^f} \{L_c(u,p)\}$

On peut alors montrer que L et L_c ont le même ensemble de points-selle, soit $U^* \times P^*$, que L_c est stable en u dès que $c > o$ et que Ψ_c est différentiable.

Un algorithme de résolution du problème (MP3) est alors:

Algorithme 5 :

(a) Choisir $(u^o,p^o) \in U^f \times C^*$, Poser $k=o$

(b) Resoudre le problème auxiliaire (PA^k) :

$$\min_{u \in U^f} \{K(u) + \langle \epsilon^k r^k - K'(u^k), u \rangle + \epsilon^k c(\Theta(u^k),\Theta(u))\}$$

Soit u^{k+1} la solution obtenue, $r^k \in \partial J(u^k)$

Remettre à jour les paramètres duaux par :

$$p^{k+1} = p^k + \rho\, \Theta(u^{k+1})$$

(c) Stopper sur un test d'arrêt, sinon, faire $k \leftarrow k+1$ et aller en (b)

Sous les hypothèses HA1, HA2, HC1, HC3, avec de plus:

* la suite $\{\epsilon^k\}$ est non croissante

* ρ vérifie $0 < \rho < 2c$

la suite $\{u_k\}$ est bornée, et tout point d'adhérence au sens de la topologie faible est élément de U^*.

Cet algorithme peut être étendu au cas au Θ est une fonctionnelle sous-différentiable: les termes du critère dépendant de Θ, à savoir:

$$\epsilon^k(p^k, \Theta(u)) + \epsilon^k c(\Theta(u^k), \Theta(u))$$

sont remplacés par :

$$\epsilon^k(p^k, \theta^k.u) + \epsilon^k c(\Theta(u^k), \theta^k.u) \quad \text{où} \quad \theta^k \in \partial\Theta(u^k)$$

On dispose alors d'un algorithme permettant une décomposition suivant l'espace U (par un choix judicieux du noyau K) alors que J et Θ ne sont pas additives par rapport à cette décomposition, J étant non fortement convexe.

Si, par exemple, on décompose U^f en:

$$U^f = U_1^f x \ldots x\, U_N^f$$

et si on suppose K de la forme :

$$K(u) = \sum_1^N K_i(u_i), \quad u_i \in U_i^f$$

l'étape (b) de l'algorithme revient à minimiser les N sous-problèmes indépendants suivants:

$$\underset{u_i \in U_i^f}{\text{Min}} \{K_i(u_i) + \langle \epsilon^k r_i^k - K_i'(u_i^k), u_i \rangle + \epsilon^k \langle \xi_i, u_i \rangle$$

où $r_i^k \in \partial_{u_i} J(u^k)$ (sous-différentiel partiel par rapport à u_i)

et où ξ_i désigne les composantes sur U_i de l'élément de U définissant la forme linéaire $\Xi : u \to (p^k + c\Theta(u^k), \Theta^k.u)$.

II.3. Application au cas d'une interaction en débit-pression

Dans la description faite du réseau que nous étudions, nous avons mentionné le fait que les sous-réseaux périphériques pouvaient être connectés au sous-réseau central par l'intermédiaire de vannes d'une part, par l'intermédiaire de pompes d'autre part (voir même être directement connectés entre eux par une pompe, un détendeur, une simple canalisation). Lorsque l'on cherche par une méthode de décomposition à séparer les sous-réseaux, il suffit, dans le premier cas, d'écrire au niveau de chaque point d'interaction une équation de continuité du débit (nous y reviendrons au §.II-4).Sinon, une équation de continuité de la pression est également nécessaire. Remarquons que dans le cas de la connexion par une pompe, la différence de pression aux points situés de part et d'autre de la pompe, considérés chacun comme appartenant à l'un des sous-réseaux, intervient dans le coût d'utilisation. Ainsi, pour une pompe à vitesse variable située à une interconnexion, l'équation de continuité de pression n'est plus nécessaire (puisque la vitesse du moteur s'adapte, à débit donné, à la perte de charge), mais le couplage par la pression réapparait au niveau du critère. Dans le cas d'une vanne télécommandée, le coût d'utilisation est nul, ce qui fait complètement disparaitre les phénomènes de pression. Par contre, lorsque la pompe à l'interconnexion est à vitesse fixe (ce qui est presque systématiquement le cas sur notre réseau), débit d'interaction et différence de pression sont liés par la courbe caractéristique de la pompe, et l'écriture de l'équation de continuité de la pression est alors indispensable.

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe au cas des interactions nécessitant la prise en compte des conditions de débit et de pression, en étudiant le cas de deux sous-réseaux interconnectés par une conduite, en appelant A le point d'interaction.

Reprenant les notations du chapitre I, avec seulement deux sous-réseaux, le problème se formule ainsi :

$$\underset{(u_t^1, u_t^2)}{\text{Min}} \; J = J^1 + J^2 = \sum_{t=o}^{T-1} L_t^1(x_t^1, u_t^1) + L_t^2(x_t^2, u_t^2)$$

soumis à l'ensemble des contraintes locales
aux dynamiques locales
aux deux contraintes couplantes d'interaction au point A, à savoir:

- $\forall t, \quad Q_t^1 = Q_t^2$ (égalité des débits au point A) $[\alpha]$
- $\forall t, \quad H_t^1 = H_t^2$ (égalité des pressions au point A) $[\beta]$

Nous remarquons que les seuls couplages entre les deux sous-réseaux proviennent des contraintes $[\alpha]$ et $[\beta]$.

Décrivons alors les trois méthodes classiques de coordination dans ce cas.

II.3.a) Coordination par allocation de ressources.

Cette méthode consiste, au pas k de l'algorithme, à fixer des trajectoires $(Q^1{}_t)^k=(Q^2{}_t)^k$ du débit au point A et $(H^1{}_t)^k=(H^2{}_t)^k$ de la pression en ce même point, puis, à résoudre indépendamment les deux sous-problèmes avec ces conditions aux bords, enfin à calculer pour chaque sous-réseau les trajectoires des "prix marginaux" $(P^i{}_{Q,t})^k$ du débit et $(P^i{}_{H,t})^k$ de la pression au point A, égaux, au signe près, au gradient du coût optimal de chaque sous-réseau par rapport à ces valeurs imposées $(Q^i{}_t)^k$ et $(H^i{}_t)^k$. Il suffit alors de remettre à jour les débits et les pressions d'interaction, par des formules du type:

$$(Q^1_t)^{k+1} = (Q^2_t)^{k+1} = (Q^1_t)^k + \rho^k.(P^1_{Q,t})^k-(P^2_{Q,t})^k) \ , \quad \rho^k > o$$

$$(H^1_t)^{k+1} = (H^2_t)^{k+1} = (H^1_t)^k + \epsilon^k.(P^1_{H,t})^k-(P^2_{H,t})^k) \ , \quad \epsilon^k > o$$

jusqu'à observer la stabilisation des différentes trajectoires.

En pratique, cette méthode est inapplicable dans ce cas, car elle revient à imposer en un point des réseaux, à la fois le débit et la pression. Or, le fait que les commandes des pompes soient des variables discrètes fait que, en tout point du réseau, le nombre des relations pouvant lier débit et pression est fini (à niveaux de réservoirs fixés et autres conditions aux limites imposées), de telle sorte que si l'on impose la pression (resp. le débit) en un point, alors le débit (resp. la pression) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, et il est alors fort improbable que la valeur du débit (resp. de la pression) imposée par la méthode d'allocation coincide avec l'une des valeurs réalisables.

II.3.b) Coordination par les prix

Cette méthode, duale de la précédente, consiste à laisser libre de toutes contraintes les sous-problèmes, mais à les résoudre avec des critères modifiés. Plus précisément, au pas k de l'algorithme, on dispose de trajectoires $(P_{Q,t})^k$ et $(P_{H,t})^k$ pour les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes [α] et [β] et on résoud les sous-problèmes locaux en remplaçant les critères J^1 et J^2 par:

$$J^1 + \sum_{t=o}^{T-1} \{(P_{Q,t})^k Q^1_t + (P_{H,t})^k H^1_t\} \qquad [\gamma\text{-}1]$$

et

$$J^2 - \sum_{t=o}^{T-1} \{(P_{Q,t})^k Q^2_t + (P_{H,t})^k H^2_t\} \qquad [\gamma\text{-}2]$$

les variables par rapport auxquelles s'effectue la minimisation étant non seulement les commandes locales u^1_t et u^2_t, mais aussi les couples (Q^1_t, H^1_t) et (Q^2_t, H^2_t) (en fait, on a déjà vu que fixer l'un des éléments de ces couples et la commande locale u_t déterminait complètement l'autre élément de ces couples).
Les résolutions des deux sous-problèmes fournissent, entre autres, des trajectoires $(Q^1_t)^{k+1}$, $(H^1_t)^{k+1}$, $(Q^2_t)^{k+1}$, $(H^2_t)^{k+1}$. On remet alors à jour les multiplicateurs de Lagrange par des formules du type:

$$(P_{Q,t})^{k+1} = (P_{Q,t})^k + \rho^k[(Q^1_t)^{k+1} - (Q^2_t)^{k+1}] \ , \quad \rho^k > o$$

$$(P_{H,t})^{k+1} = (P_{H,t})^k + \epsilon^k[(H^1_t)^{k+1} - (H^2_t)^{k+1}] \ , \quad \epsilon^k > o$$

L'algorithme est arrêté lorsque les contraintes sont vérifiées de manière stable.

Remarquons enfin que cet algorithme s'apparente à l'algorithme 2-2, dit à deux niveaux, du paragraphe précédent.

Sa mise en oeuvre pratique se heurte à une difficulté majeure. Comme nous l'avons déjà signalé, le calcul des équations formant le modèle dynamique est une opération très coûteuse en temps-calcul. Or, cette méthode donne à chaque sous-réseau un degré de liberté supplémentaire, qui est le choix d'une des deux variables de débit ou de pression, ce qui signifie, au niveau de l'optimisation, une forte augmentation du nombre des commandes à explorer (puisque l'ensemble des valeurs possibles pour la variable laissée libre se combine à l'ensemble des commandes locales), et donc une forte augmentation du temps-calcul nécessaire à l'optimisation, ce qui détruit en partie le gain de temps procuré par la décompositon. Cet inconvénient n'existant pas avec la troisième méthode exposée ci-dessous, c'est celle ci que nous préférerons à la méthode par les prix.

II.3.c) Coordination par prédiction

Cette méthode nécessite d'introduire, en plus de la décomposition de l'espace des décisions (séparation en sous-réseaux), une décomposition de l'espace des contraintes cohérente avec la première (opération qui est à relier au choix de la "contrainte auxiliaire" Ω de l'algorithme 2-1). Dans le cas des deux sous-réseaux traité ici, les seules contraintes qui posent problème sont les contraintes [α] et [β], puisque les autres sont purement locales et ne peuvent donc qu'être affectées au sous-réseau où elles agissent. Il faut donc **décider** quelles contraintes allouer à chaque sous-problème.

Pour des raisons déjà évoquées au paragraphe II.3.a, il est impossible d'allouer les deux contraintes [α] et [β] au même sous-réseau. Il ne reste plus alors que deux possibilités. Nous allons examiner le cas où la contrainte [α] a été attribuée au sous-problème 1 (la contrainte [β] étant alors au sous-problème 2). Au pas k de l'algorithme, on dispose de la trajectoire de débit $(Q^2_t)^k$ "prédite" par le sous-réseau No-2, ainsi que de la trajectoire $(P_{H,t})^k$ du "prix marginal" de la pression au point d'interconnexion A. On résoud alors le sous-problème correspondant au sous-réseau No-1, a savoir:

$$\underset{(u^1_t)}{\text{Min}} \; \{J^1 - \sum_{t=o}^{T-1} (P_{H,t})^k \cdot H^1_t\}$$

$$\text{soumis à :} \quad Q^1_t = (Q^2_t)^k$$

et aux contraintes locales

Le sous-réseau 1 travaille donc à débit d'interaction fixé, et la pression d'interaction H^1_t y est libre, mais, en fait entièrement déterminée par le choix des commandes internes du sous-réseau. De plus, le critère à optimiser dans ce sous-problème a été modifié par rapport au critère naturel, par ajoût d'une partie linéaire

dépendant de la pression d'interaction Hl_t qui est censée refléter la variation du coût de l'autre sous-réseau à des variations de la pression d'interaction.

Parmi les résultats issus de l'optimisation, on trouve la trajectoire $(H^1{}_t)^k$ de la pression d'interaction. De plus, on peut obtenir la trajectoire $(P_{Q,t})^k$ du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte portant sur le débit d'interaction dans ce sous-problème (c'est simplement l'opposé du gradient du coût optimal par rapport au niveau de la contrainte de débit, c'est à dire $(Q^2{}_t)^k$).

On résoud alors le sous-problème correspondant au sous-réseau No-2, à savoir:

$$\underset{(u_t^2)}{\text{Min}} \; \{J^2 - \sum_{t=o}^{T-1} (P_{Q,t})^k \cdot Q_t^2\}$$

$$\text{soumis à :} \qquad H_t^2 = (H_t^1)^k$$

et aux contraintes locales

Le sous-réseau No-2 travaille donc à pression d'interaction imposée, avec un critère modifié pour tenir compte de la sensibilité du coût optimal du premier sous-réseau au niveau du débit d'interaction.

La résolution de ce sous-problème fournit, entre autres, la trajectoire optimale $(Q^2{}_t)^{k+1}$ du débit d'interaction, ainsi que celle du multiplicateur de Lagrange $(P_{H,t})^{k+1}$ associé à la contrainte portant sur la pression d'interaction.

L'algorithme est arrêté lorsque les trajectoires des variables d'interaction sont stabilisées.

Au point de vue théorique, cet algorithme (présenté ici dans sa version Gauss-Seidel) se rattache à l'algorithme 2-1, dit à un niveau, du paragraphe précédent, et son application au cas des

réseaux d'eau dépasse très largement le cadre dans lequel il a été prouvé (critère quadratique et contraintes égalité linéaires). Cependant les conditions de convergence obtenues sur ce cas théorique permettent de préciser la mise en oeuvre pratique pour notre étude:

- comme nous avons pris les paramètres ϵ et ρ qui figurent dans l'algorithme 2-1 implicitement égaux à 1 alors que les conditions de convergence leur imposent une borne supérieure (éventuellement inférieure à 1), nous compensons cela par une procédure de sous-relaxation. La prédiction du pas k+1 sera calculée par :

$$(H_t^1)^{k+1} = \epsilon.(\tilde{H}_t^1)^{k+1} + (1-\epsilon).(H_t^1)^k$$

$$(Q_t^2)^{k+1} = \epsilon.(\tilde{Q}_t^2)^{k+1} + (1-\epsilon).(Q_t^2)^k$$

$$(P_{H,t})^{k+1} = \rho.(\tilde{P}_{H,t})^{k+1} + (1-\rho).(P_{H,t})^k$$

$$(P_{Q,t})^{k+1} = \rho.(\tilde{P}_{Q,t})^{k+1} + (1-\rho).(P_{Q,t})^k$$

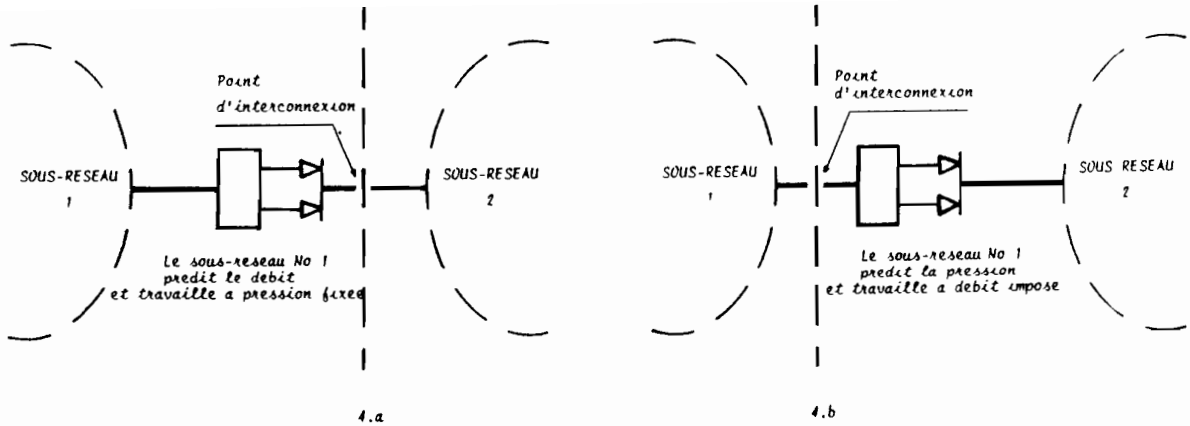
où les variables surmontées d'un tilde sont celles issues de l'optimisation.

- une autre condition préalable de type géométrique portant sur les contraintes auxiliaires Ω, non citée (voir Cohen, (1980)), peut s'interpréter comme le fait que les contraintes ne peuvent être réparties n'importe comment entre les sous-problèmes, et qu'il faut assurer la compatibilité entre la décomposition de l'espace des états et celle de l'espace des contraintes. Dans le cas de l'interconnexion en débit-pression, cette condition de convergence s'interpète géométriquement dans le cas statique, et peut s'énoncer ainsi:

"Il faut attribuer la contrainte de débit au sous-réseau dont la pression au point d'interaction est la moins sensible aux variations du débit d'interaction, et réciproquement pour la pression".

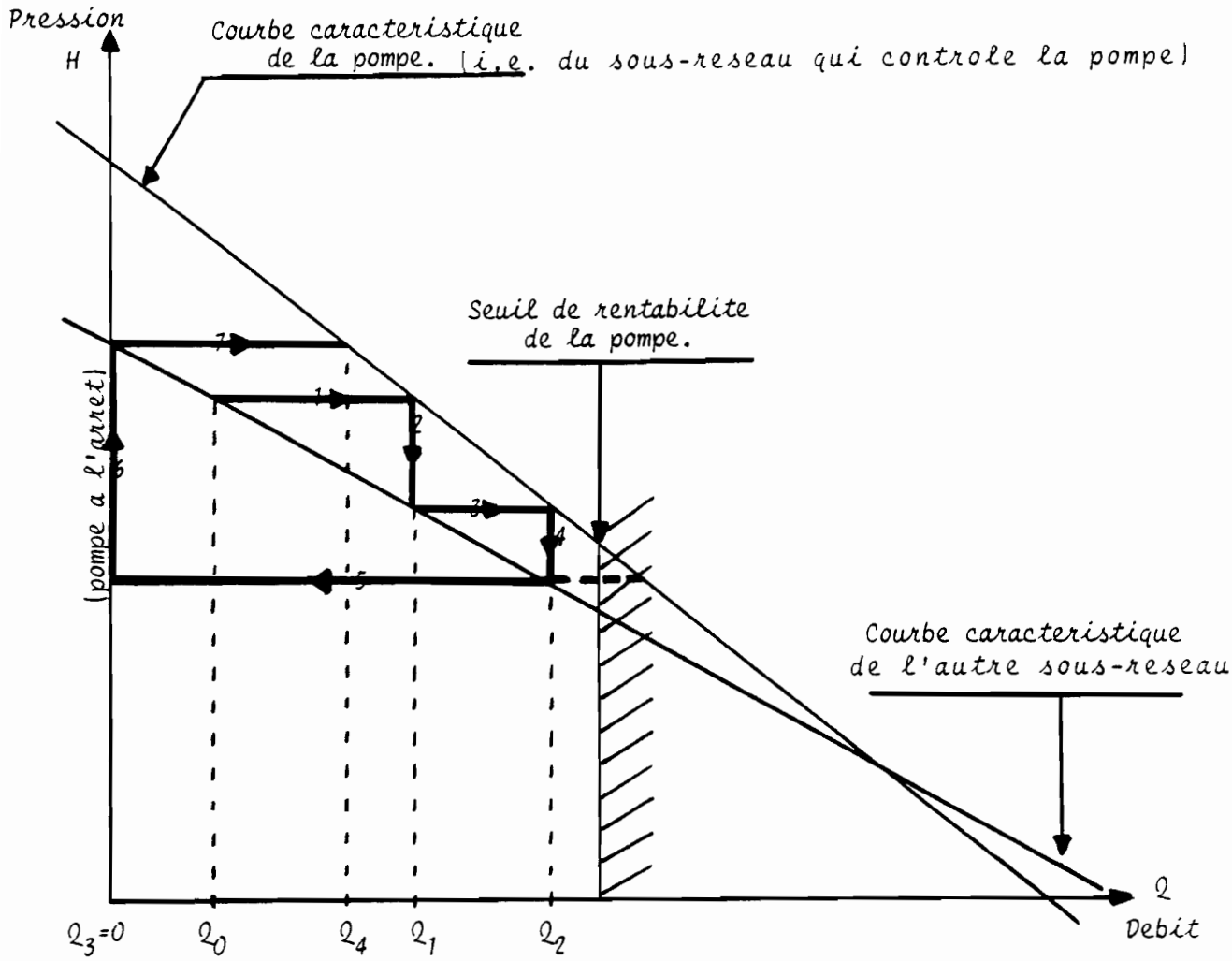
Sans vouloir entrer dans les détails (on se référera pour cela à la cinquième partie de (Cohen, (1983))), signalons que cette condition peut dépendre des conditions opératoires sur le réseau (régime de fonctionnement des pompes, niveau de la consommation), et que donc, elle est susceptible de varier le long de l'horizon d'optimisation, ou au cours des itérations de coordination, ce qui en pratique consistue un obstacle de taille à l'application de cette méthode. Cependant, dans le cas simple où l'on trouve de part et d'autre du point d'interconnexion un réservoir (ou, du moins, dans le cas où ces réservoirs sont "suffisamment proches" de ce point pour y imposer la pression), le sous-réseau le plus stable en pression est celui pour lequel la section du réservoir proche du point d'interaction est la plus grande, et c'est donc à ce sous-réseau qu'il faut allouer la contrainte de débit (extension dynamique de la condition précédente).

Un autre cas, que l'on rencontre fréquemment dans le réseau SLEE est celui où la connexion entre les deux sous-réseaux est constituée par une ou plusieurs pompes puisant l'eau dans un réservoir bas pour la refouler dans un autre réservoir plus élevé (franchissement d'un étage de pression grâce à un surpresseur). Alors, le sous-réseau qui "prédit" le débit est celui qui commande les pompes à l'interconnexion, d'où une influence du choix préliminaire pour l'attribution des contraintes [α] et [β] sur le découpage géographique en sous-réseaux(Figure 4).



- Figure 4 -

De plus, la nature discrète de la commande des pompes fait, qu'en réalité, le débit et la pression d'interaction ne peuvent prendre, à de faibles variations près, que certaines valeurs préderminées, correspondant aux différentes courbes caractéristiques des pompes. On voit alors qu'il est possible d'osciller de manière cyclique entre les différentes courbes caractéristiques des pompes (l'axe Q = O étant considéré comme la courbe caractéristique de la pompe à l'arrêt). La figure 5 explique ce phénomène de cyclage: lorsque la pompe fournit un débit trop important, il y a une chute du rendement de celle-ci, si bien qu'au vu du prix marginal proposé par le sous-réseau fonctionnant à débit d'interaction imposé, on a intéret à arréter le fonctionnement de cette pompe. La pression prédite alors autorise le redémarrage de la pompe avec un rendement satisfaisant, si bien que l'on observe lors du déroulement de l'algorithme des oscillations du débit d'interaction, entre zéro et le débit nominal (aux variations près) de la pompe.



- Figure 5 -

Dans le cas du réseau SLEE étudié, presque toutes les interactions directes entre sous-réseaux se font par l'intermédiaire de pompes, et posent donc à priori ce type de problème. Mais les prix marginaux de production d'eau dans les sous-réseaux ainsi connectés sont suffisamment éloignés pour qu'il n'y ait pas de cycles: cela correspond, par exemple, au cas où le seuil de rentabilité de la pompe se trouve à droite du point d'intersection des deux courbes caractéristiques. La convergence est alors presque immédiate.

Ceci explique pourquoi nous avons en définitive adopté cette méthode de coordination par prédiction pour le cas étudié. Il faut cependant bien voir que l'utilisation qui en est faite est

heuristique: outre le fait que le modèle étudié déborde du cadre linéaire-quadratique, on constate de plus qu'il y a non-unicité, voir non existence des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes. Ceux-ci, en effet peuvent s'interpréter, à un terme de transport près, comme les dérivées des fonctions de Bellman obtenues en résolvant les sous-problèmes par la Programmation Dynamique. Or, le fait de n'opérer avec les pompes en tout ou rien qu'à des instants prédéterminés rend ces fonctions non continues. De toute façon, même en passant à la limite sur le pas de temps (pour permettre le changement de commande à tout instant en temps continu), ces fonctions resteraient sous-différentiables à cause des commandes discrètes des pompes. Ceci nécessiterait donc une extension de l'algorithme 2-1 au cas où les fonctionnelles duales seraient sous-différentiables, ce qui n'a pu encore être fait.

Remarquons enfin pour conclure que, si cette méthode à l'avantage de ne pas introduire de nouveaux degrés de liberté dans les sous-problèmes, elle leur impose par contre des conditions de débit, ou de pression, si bien que, à un certain stade de l'algorithme, il se peut qu'il n'existe aucune solution admissible pour un sous-problème (par exemple, un débit d'interaction trop fort peut vider un réservoir, quelle que soit la commande interne du sous-réseau auquel ce débit est imposé). Cet inconvénient sera supprimé par l'utilisation d'une technique de pénalisation pseudo-exacte, qui introduira cependant elle aussi des fonctionnelles non différentiables. Ce point sera discuté au paragraphe suivant.

II.4 - Application au cas des vannes télécommandées

II.4.a) Formulation du problème et choix de la méthode

Il reste à traiter encore la plus importante partie du problème de coordination, à savoir la gestion de l'ensemble des vannes télécommandées connectant le sous-réseau central aux sous-réseaux périphériques. La particularité de ce type d'interconnexion vient du fait qu'alors, les phénomènes de pression n'interviennent plus explicitement, puisque la vanne autorise une discontinuité de pression, pratiquement indépendamment du débit qui y transite grâce à son ouverture variable, si bien que la seule contrainte à assurer en un tel point d'interconnexion est la contrainte [α]. Il en résulte que les seules variables d'interaction restantes (les débits) sont à valeurs continues et peuvent être considérées comme des variables de commande (en réalité, ce sont les points de consigne pour un asservissement, manuel ou automatique, agissant sur l'ouverture des vannes). Si on reprend encore les notations du chapitre I, en négligeant les interactions directes traitées précédemment, le problème de coordination globale s'écrit:

$$(PBG) \qquad \min_{w_t \in W} \quad \min_{u_t \in U} \quad \sum_{s=1}^{N} \sum_{t=o}^{T-1} L_t^s(x_t^s, u_t^s)$$

$$\text{soumis à :} \quad x_{t+1}^s = f^s(x_t^s, u_t^s, \psi^s(w_t), c_t^s), \quad s=1,\ldots,N$$

et aux autres contraintes locales

Rappelons que nous avons supposé que le sous-réseau central était le sous-réseau n°N, et que toutes les vannes lui étaient reliées:

$$\psi^N(w_t) = (w_{1,t},\ldots,w_{N-1,t}), \text{ aussi noté } w_t^N$$

Enfin, nous avons supposé que, par une rémunération des vannes, le sous-réseau périphérique s était connecté au sous-réseau central par la vanne numéro s, $1 \leqslant s \leqslant N-1$

$$\Psi^s(w_t) = w_{s,t} \text{ , aussi noté } w^s_t$$

En notant $\{w_{s,t}\}$ la trajectoire du débit $w_{s,t}$ de la $s^{ième}$ vanne, $\{\Psi^s(w_t)\}$ la trajectoire du vecteur $\Psi^s(w_t)$ du débit des vannes, le problème (PBG) se reformule de la manière suivante:

$$(PCG) \qquad \underset{\{w_{s,t}\}}{\text{Min}} \sum_{s=1}^{N} G^s(\{\Psi^s(w_t)\})$$

où G^s, (s variant de 1 à N) désigne le résultat de la minimisation du critère local du sous-réseau s par rapport aux commandes internes u^s_t, à débits d'interconnexions fixés:

$$(PBL^s)_{s=1,\ldots,N} \quad G^s(\{\Psi^s(w_t)\}) = \underset{u^s_t \in U^s}{\text{Min}} \sum_{t=o}^{T-1} L^s_t(x^s_t, u^s_t)$$

$$\text{soumis à : } x^s_{t+1} = f^s(x^s_t, u^s_t, \Psi^s(w_t), c^s_t)$$

et aux contraintes locales

Remarque : En fait, la structure du sous-réseau central est telle que les critère et dynamique associés ne dépendent pas des débits $w_{s,t}$ de chaque vanne prise individuellement, mais du débit global fourni à tous les sous-réseaux périphériques, soit encore

$\sum_{s=1}^{N-1} w_{s,t}$, et donc que la fonctionnelle G^N peut s'écrire:

$$G^N(\{\sum_{s=1}^{N-1} w_{s,t}\})$$

Nous noterons : $$w_{N,t} = \sum_{s=1}^{N-1} w_{s,t}$$

On peut alors reconsidérer sur ce problème (PCG) l'application des trois méthodes de décomposition:

- La coordination par allocation de ressources consiste, au pas k de l'algorithme, à résoudre chacun des sous-problèmes (PBL^s), s variant de 1 à N, à interaction fixées $(w_t)^k$, puis, à calculer, pour chacun de ces sous-problèmes, des sous-gradients des fonctionnelles G^s (en supposant qu'ils existent) par rapport aux variables $w_{s,t}$ pour effectuer un pas de sous-gradient dans la direction du minimum du problème (PCG). Si on note $(p^{N,s}{}_t)^k$ le sous-gradient de G^N par rapport à $w_{s,t}$ et $(p^{s,s}{}_t)^k$ celui de la fonctionnelle G^s par rapport à $w_{s,t}$ ce pas de sous-gradient s'écrit:

$$(w_{s,t})^{k+1} = (w_{s,t})^k - \epsilon^k.[(p_t^{N,s})^k + (p_t^{s,s})^k] \quad , \quad s=1,\ldots,N-1$$

$(\epsilon^k)_{k\in N}$ étant une suite de réels positifs de type σ (comme défini au paragraphe II-2).

Si on tient compte de la remarque précédente, alors, tous les sous-gradients $(p^{N,s}{}_t)^k$, $1\leqslant s\leqslant N-1$, sont égaux puisque G^N ne dépend que de la sommme des débits. Appelant $(p^N{}_t)^k$ cette valeur commune, et notant $(p^{s,s}{}_t)^k$:$(p^s{}_t)^k$ pour alléger la notation, le pas de sous-gradient devient:

$$(w_{s,t})^{k+1} = (w_{s,t})^k - \epsilon^k.[(p_t^N)^k + (p_t^s)^k], \quad s=1,\ldots,N-1$$

Contrairement au cas d'une interaction en débit-pression, cette méthode est applicable, puisqu'on impose à chaque connexion une seule contrainte. Elle se heurte cependant à une autre

difficulté propre au réseau étudié: certains des sous-réseaux ne possèdent pas d'autre alimentation que la vanne d'interconnexion, si bien que, pour ces sous-réseaux, le calcul des sensibilités $(p^s_t)^k$ n'a que peu de sens (en gros, cette sensibilité est nulle tant que l'on respecte les contraintes du sous-réseau, et devient infinie en cas de violation); c'est pourquoi, en pratique, nous avons préféré ne pas l'utiliser.

- La coordination par les prix consiste, au pas k de l'algorithme à dédoubler chaque vanne, et à les faire commander par chaque sous-réseau suivant un système de prix $(p^s_t)^k$, $s=1,\ldots,N-1$. Les sous problèmes sont alors indépendants, et on peut effectuer pour chacun d'eux la minimisation, portant simultanément sur les commandes locales u^s_t et les variables d'interaction w^s_t (ces dernières variables sont alors indépendantes les unes des autres, et c'est la tâche de coordination qui est chargé d'assurer la contrainte: $W^N = W^1 \times \ldots \times W^{N-1}$). Ceci s'écrit:

- pour le sous-réseau central:

$$\underset{u^N_t \in U^N,\ (w_{1,t},\ldots,w_{N-1,t}) \in W}{\text{Min}} \quad \sum_{t=o}^{T-1} \left[L^N_t(x^N_t, u^N_t) - \sum_{s=1}^{N-1} (p^s_t)^k . w_{s,t} \right]$$

soumis aux contraintes locales et à la dynamique

- pour le sous-réseau périphérique s :

$$\underset{u^s_t \in U^s,\ w_{s,t} \in W^s}{\text{Min}} \quad \sum_{t=o}^{T-1} \left[L^s_t(x^s_t, u^s_t) + (p^s_t)^k . w_{s,t} \right]$$

soumis aux contraintes locales et à la dynamique

Les prix $(p^s_t)^k$ sont ensuite remis à jour en fonction des écarts constatés à chaque vanne s entre les valeurs du débit pour cette vanne issues de la résolution du sous-réseau central et de celle du sous-réseau s.

En fait, les prix $(p^s_t)^k$ utilisés sont les multiplicateurs de Lagrange des contraintes d'égalité du débit de part et d'autre de

chaque vanne. Si on utilise la remarque faite précédemment sur la manière dont le sous-réseau central dépend des débits des vannes, la seule contrainte à dualiser pour pouvoir décomposer le problème est:

$$w_{N,t} = \sum_{s=1}^{N-1} w_{s,t}$$

et il n'y a alors plus qu'une seule trajectoire de prix: $(p_t)^k$. Les sous-problèmes à résoudre sont alors:

sous-réseau central

$$\min_{u_t^N \in U^N} \sum_{t=o}^{T-1} [L_t^N(x_t^N, u_t^N) - (p_t)^k . \sum_{s=1}^{N-1} w_{s,t}]$$

$$(w_{1,t}, \ldots, w_{N-1,t}) \in W$$

sous réseau périphérique :

$$\min_{u_t^s \in U^s} \sum_{t=o}^{T-1} [L_t^s(x_t^s, u_t^s) + (p_t)^k . w_{s,t}]$$

$$w_{s,t} \in W^s$$

avec un pas de sous-gradient sur l'écart entre le débit fourni par les vannes lors de la résolution du sous-réseau central, soit $(w_{N,t})^k$, et la somme des débits fournis par chaque vanne lors de la résolution des sous-réseaux périphériques, soit:

$\sum_{s=1}^{N-1} (w_{s,t})^k$, pour remettre à jour le prix $(p_t)^k$:

$$(p_t)^{k+1} = (P_t)^k - \rho^k . [(w_{N,t})^k - \sum_{s=1}^{N-1} (w_{s,t})^k]$$

De toute façon, cette méthode possède un inconvénient majeur, déjà évoqué lors de son application à une interconnexion en débit-pression: elle oblige à dupliquer les vannes puisque l'on a une variable de commande de vannes dans chacun des sous-réseaux de part et d'autre de l'interconnexion, ce qui entraine, bien sûr, une forte augmentation de la combinatoire de commande à l'intérieur de chaque sous-réseau, qui se révèle prohibitive dans l'exemple étudié.

La méthode de coordination que nous avons donc utilisée est celle dite de prédiction, que nous allons détailler maintenant.

II.4.b) Coordination par prédiction

Comme pour l'exemple d'une interaction en débit-pression, il faut dans cette méthode effectuer une décomposition de l'espace des contraintes, à savoir à quel sous-réseau allouer la contrainte de débit au point d'interconnexion. Ceci revient en fait à faire gérer la vanne correspondante par l'un des deux sous-réseaux, l'autre ayant alors un débit d'interaction imposé. Nous allons, par exemple, supposer que c'est le sous-réseau central qui gère toutes les vannes. Alors, l'algorithme de coordination par prédiction (version Gauss-Seidel) consiste, connaissant au pas k les trajectoires des prix des débits d'interconnexion $(p^s_t)^k$, s=1,...,N-1, à résoudre pour le sous-réseau central:

$$(PCL^N_k) \qquad \min_{\substack{(w_{1,t},\dots,w_{N-1,t})\in W \\ u^N_t \in U^N}} \sum_{t=o}^{T-1} \{L^N_t(x^N_t,u^N_t) + \sum_{s=1}^{N-1} (p^s_t)^k \cdot w_{s,t}\}$$

soumis aux contraintes locales et à la dynamique:

$$x^N_{t+1} = f^N(x^N_t,u^N_t,w^N_t,c^N_t)$$

où, rappelons le, w^N_t est le vecteur complet des débits des vannes, égal à w_t, ce que l'on notera encore:

$$\min_{w_t=(w_{1,t},\dots,w_{N-1,t})\in W} [G^N(\{w_t\}) + \sum_{s=1}^{N-1} <\{(p^s_t)^k\},\{w_{s,t}\}>]$$

où $\{(p^s_t)^k\}$ designe la trajectoire de la variable $(p^s_t)^k$, $<.,.>$ le produit scalaire, et $|.|$ la norme associée.

Cette résolution fournit, outre les commandes optimales locales $(u^N_t)^{k+1}$ des trajectoires du débit de chaque vanne, soit $\{(w_{s,t})^{k+1}\}$. On résoud alors chaque sous-réseau périphérique

en imposant comme valeur au débit d'interaction la valeur obtenue ainsi:

$$(PCL_k^s) : \quad \min_{u_t^s \in U^s} \sum_{t=o}^{T-1} L_t^s(x_t^s, u_t^s) , \quad s = 1,\ldots,N-1$$

$$\text{soumis à } x_{t+1}^s = f^s(x_t^s, u_t^s, (w_{s,t})^{k+1}, c_t^s)$$

et aux contraintes locales

Cette minimisation consiste donc a évaluer la valeur $G^s(\{(w_{s,t})^{k+1}\})$. on remet ensuite à jour les trajectoires de prix pour le pas k+1 en évaluant des éléments du sous-différentiel des fonctions G^s:

$$\{(p_t^s)^{k+1}\} \in \partial G^s(\{w_{s,t})^{k+1}\}) , \quad s = 1,\ldots,N-1$$

Ce calcul de sous-gradient, qui, rappelons le, est calculé pratiquement en dérivant numériquement la fonction de Bellman issue de la résolution par la Programmation Dynamique du sous-problème correspondant (nous reviendrons au chapitre suivant sur le détail de ce calcul), pose le problème déjà évoqué de la régularité des fonctions G^s. Même si on néglige les discontinuités de celles-ci dûes à la discrétisation en temps, il reste le fait que la présence des contraintes, en particulier sur l'état, provoque des sauts de ces fonctionnelles: une trajectoire du débit d'interaction telle que une contrainte soit non vérifiée quelle que soit la commande locale engendre une valeur infinie pour la fonction coût optimal correspondante Une manière de supprimer ces discontinuités consiste à appliquer une technique de pénalisation pseudo-exacte; celle-ci consiste à introduire dans chaque sous-réseau des ressources fictives permettant d'assurer le respect des contraintes locales sur l'état du sous-réseau. Quand l'application d'une commande (pompes et vannes) fait déborder (resp. vide) l'un des réservoirs du sous-réseau, cette ressource fictive prélève (resp. apporte) la

quantité d'eau nécessaire au maintien du niveau de ce réservoir entre les limites données. A cette ressource est attaché un coût linéaire de pente très forte; remarquons que cette pente doit, en particulier, dans le cas de violation de la contrainte basse du réservoir, être supérieure au prix marginal de la moins rentable des ressources réelles de l'ensemble du réseau (et non du sous-réseau considéré seulement, car les prix des débits d'interaction dépendent des rendement des pompes d'autres sous-réseaux), de telle sorte que la ressource fictive n'est utilisée qu'en dernière extrémité pour assurer le respect des contraintes. De plus, dans ce dernier cas, le calcul de la sensibilité du coût optimal au niveau du débit d'interaction fournit une valeur très élevée (puisque toute variation de ce débit se paie au prix de la ressource fictive) et assure donc au pas suivant de l'algorithme une modification dans le bon sens de ce débit. On ne peut cependant employer pour cette technique le terme de "pénalisation exacte" car, seule une pente infinie pour la fonction coût fictif peut assurer que les contraintes soient exactement respectées: avec une pente finie, même très grande, il peut toujours être plus intéressant d'utiliser la ressource fictive pour un très faible débit, plutôt que de démarrer une autre pompe, à un prix marginal plus faible, mais fournissant un débit beaucoup plus grand (nature discrète de la commande), et se soldant donc par un coût plus élevé. C'est pourquoi on l'a appelé "pénalisation pseudo-exacte", sachant qu'en pratique, un choix suffisamment grand pour la pente assure un respect presque parfait des contraintes.

On voit donc qu'ainsi, par modification des espaces de commandes U^s, des critères locaux L^s et des dynamiques locales f^s, on rend les fonctionnelles G^s continues, et cela quasiment sans modifier la solution optimale recherchée. Ces fonctionnelles restent cependant sous-différentiables, du fait de la nature des commandes et de la modification du critère dûe aux ressources fictives. Ceci permet de replacer l'algorithme utilisé ici dans le cadre théorique du paragraphe II-2: en "gommant" une fois de plus les effets indésirables de la discrétisation en temps par passage à la limite sur le pas de discrétisation, la fonction coût à minimiser dans (PCG) est sous-différentiable, et pratiquement convexe en w_t

(par un argument de coût marginal croissant classique en économie). On est donc presque dans le cadre théorique de l'algorithme 3-2 du paragraphe II-2, où G^N joue le rôle de la fonctionnelle J_2 à garder intacte dans le problème auxiliaire. En prenant un noyau K fortement convexe et différentiable de la forme:

$$K(\{w_t\}) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N-1} |\{w_{s,t}\}|^2 \quad \text{(norme sur les trajectoires)}$$

le problème auxiliaire à résoudre à l'itération k par application de l'algorithme 3-2 au problème initial (PCG) est:

$$(PA_k) \qquad \min_{(w_{1,t},\ldots,w_{N-1}) \in W} \; G^N(\{(w_{1,t},\ldots,w_{N-1,t})\}) +$$

$$\sum_{s=1}^{N-1} \langle \{(p_t^s)^k\}, \{(w_{s,t}\} \rangle +$$

$$\frac{1}{2\epsilon_k} \sum_{s=1}^{N-1} |\{w_{s,t} - (w_{s,t})^k\}|^2$$

$$\text{avec} \quad \{(p_t^s)^k\} \in \partial\, G^s(\{(w_{s,t})^k\}). \quad s = 1,\ldots,N-1$$

ce qui, aux termes quadratiques près, est le problème (PCL^N_k) que l'on se proposait de résoudre, obtenu par application "naive" de la méthode de prédiction. La suite $(\epsilon^k)_{k \in N}$ est, bien sur, de type σ.

Il y a cependant un grand avantage à résoudre le problème (PCL^N_k) plutôt que le problème (PA_k). Toujours d'après la remarque sur la structure du sous-réseau central, les débits d'interaction $w_{s,t}$ des vannes n'interviennent que de manière linéaire dans le critère de (PCL^N_k), et uniquement par leur somme

$$\sum_{s=1}^{T-1} w_{s,t}$$

dans la dynamique, de telle sorte que l'on peut reformuler ce problème:

$$\min_{u^N \in U^N} \quad \min_{w_{N,t} \in W} \quad \min_{(w_{1,t},\dots,w_{N-1,t}) \in W} \quad \sum_{t=o}^{T-1} \left[L_t^N(x_t^N, u_t^N) + \sum_{s=1}^{N-1} (p_t^s)^k . w_{s,t} \right]$$

$$\sum_{l=1}^{N-1} w_{s,t} = w_{N,t}$$

$$\text{sous : } x_{t+1}^N = f^N(x_t^N, u_t^N, w_{N,t}, c_t^N)$$

et autres contraintes locales.

où, alors, $w_{N,t}$ est une variable scalaire, et où:

$$W = [\underline{w}, \bar{w}] \quad , \quad \text{avec} \quad \underline{w} = \sum_{s=1}^{N-1} \underline{w_s} \quad , \quad \bar{w} = \sum_{s=1}^{N-1} \overline{w_s}$$

Or, la minimisation par rapport aux $w_{s,t}$, à volume global $w_{N,t}$ fixé, est particulièrement simple, puisqu'elle est purement statique et linéaire. Elle consiste au pas de temps t à ranger les prix $(p^s{}_t)^k$ par valeurs croissantes et à fixer, dans l'ordre ainsi obtenu, les valeurs des débits $w_{s,t}$ à leurs valeurs maximales $\overline{w_s}$ (sauf éventuellement le dernier servi) jusqu'à ce que le total des débits fournis soit égal à $w_{N,t}$, les débits restant étant mis à zéro (ceci n'étant bien sûr valable que dans la mesure où le débit minimum $\underline{w_s}$ pouvant passer dans chaque vanne est nul). On obtient donc ainsi une très importante réduction du nombre des commandes à explorer dans le sous-problème central, ce qui permet donc de gérer dans ce sous-problème un grand nombre de vannes, ce qui simplifie d'autant la résolution des sous-réseaux périphériques. Par contre, dans le problème (PA_k) où l'introduction des termes quadratiques "individualise" chaque vanne, ce regroupement n'est plus possible ce qui en pratique limite à deux au plus le nombre de vannes que peut gérer le sous-réseau central, afin d'obtenir des temps de calcul raisonnables. Comme, dans le cas du réseau traité, la

complexité d'au moins trois sous-réseaux nous oblige à faire gérer leurs vannes par le sous-réseau central (qui, lui a une structure particulièrement simple, avec une dynamique explicite), nous ne pouvons pas utiliser l'algorithme résolvant le (PA_k). et c'est pourquoi le problème résolu en pratique pour le sous réseau N est le (PCL^N_k). Pour essayer de compenser la perte des termes quadratiques dans le critère, qui sont fondamentaux pour la convergence, nous avons sous-relaxé les solutions $(w_{s,t})$ issues de la résolution du problème (PCL^N_k), en série divergente, à savoir:

en notant $(\tilde{w}_{s,t})^{k+1}$ les solutions directement issues de la résolution du (PCL^N_k), on définit $(w_{s,t})^{k+1}$ par

$$(w_{s,t})^{k+1} = \epsilon^k.(\tilde{w}_{s,t})^{k+1} + (1-\epsilon^k)\ (w_{s,t})^k \ , \ s = 1,\ldots,N-1$$

où ϵ^k est une suite de réels positifs de type σ.

La résolution des problèmes (PCL^s_k) permet le calcul de sous-gradients,

$$\{(\tilde{p}^s_t)^{k+1}\} \in \partial\, G^s(\{w_{s,t})^{k+1}\})$$

et on sous-relaxe alors ces sous-gradients pour le pas suivant de l'algorithme de coordination:

$$(p^s_t)^{k+1} = \rho^k.(\tilde{p}^s_t)^{k+1} + (1-\rho^k).(p^s_t)^k \quad , \quad s = 1,\ldots,N-1$$

où ρ^k est une suite de réels positifs de type σ

Rappelons les étapes de l'algorithme de coordination utilisé:

COOR

(a) **Initialisation**

Choisir des trajectoires $\{(p^s{}_t)^o\}$ des prix marginaux de chaque vanne et des trajectoires $\{(w_{s,t})^o\}$ de leur débit

(b1) **Résolution du sous-problème central**

Résoudre le problème $(PCL^N{}_k)$ et relaxer les trajectoires obtenues.
Soit $\{(w_{s,t})^{k+1}\}$ les résultats.

(b2) **Résolution des sous-problèmes périphériques**

Résoudre les problèmes $(PCL^s{}_k)$ avec les prédictions $(w_{s,t})^{k+1}$ de débit.
Evaluer et relaxer les sous-gradients:
soit $(p^s)^{k+1}$ les résultats.

(c) **Test d'arrêt**

Arrêter si les trajectoires $(w_{s,t})$ et $(p^s{}_t)$ sont stables d'une itération sur l'autre; sinon, faire k <- k+1 et aller en (b1).

Bien que nous ne possédions pas de preuve de convergence de cet algorithme, nous pouvons espérer d'après tout ce qui a été dit précédemment qu'il ait un "bon" comportement. Par analogie avec un algorithme de recherche d'un point-selle du lagrangien dans le cas sous-différentiable proposé dans (Balducchi (1982)) dans lequel sont relaxées les variables primales et duales, nous utiliserons des suites de coefficients de relaxation sur les débits convergeant plus vite vers zéro que celles sur les prix marginaux ("l'effet de moyenne" doit être plus important sur les variables duales que sur les primales).

II.4.c) Quelques aspects de la mise en oeuvre de la coordination

Nous avons dans le précédent paragraphe présenté l'application de la coordination par prédiction lorsqu'on a décidé de confier la gestion de l'ensemble des vannes au sous-réseau central. Ceci conduit à résoudre chaque sous-réseau périphérique à interaction $w_{s,t}$ fixées, ce que nous avions exclu pour les sous-réseaux ne possédant pas ou peu de ressources propres lorsque nous avions examiné la méthode de coordination par allocation. Nous décidons alors que les sous-réseaux de ce type (qui sont, bien sûr de structure interne simple) gèrent eux mêmes leur vanne, ce qui revient à modifier la décomposition de l'espace des contraintes précédemment effectuée. Supposant par exemple que les sous-réseaux concernés soient numérotés de 1 à M, les problèmes que l'on a à résoudre sont les suivants:

*** sous-réseau central**

$$(PCL'^{N}_{k}) \qquad \min_{\substack{u_t^N \in U^N \\ (w_{M+1,t},\ldots,w_{N-1,t})}} \sum_{t=o}^{T-1} \left[L_t^N(x_t^N, u_t^N) + \sum_{s=M+1}^{N-1} (p_t^s)^k . w_{s,t} \right]$$

$$\text{sous : } x_{t+1}^N = f^N\left(x_t^N, u_t^N, \sum_{s=1}^{M} (w_{s,t})^{k+1} + \sum_{s=M+1}^{N-1} w_{s,t}, c_t^N\right)$$

et les contraintes locales

Le calcul de la sensibilité du coût optimal, à chaque instant t, par rapport aux variables $(w_{s,t})^{k+1}$, s = 1,...,M donne des prix marginaux $(p^s{}_t)^{k+1}$, s = 1,...,M, **tous égaux** et notés: $(p_t)^{k+1}$.

*** sous-réseaux périphériques avec gestion de la vanne**

$$(PCL'^{s}_{k}) \qquad \min_{u^s_t \in U^s,\ w_{s,t} \in W^s} \sum_{t=o}^{T-1} [L^s_t(x^s_t, u^s_t) + (p^s_t)^k . w_{s,t}]$$

$s=1,\ldots,M$

$$\text{sous : } x^s_{t+1} = f^s(x^s_t, u^s_t, w_{s,t}, c^s_t)$$

et les contraintes locales

*** sous-réseaux périphériques sans gestion de la vanne**

$$(PCL'^{s}_{k}) \qquad \min_{u^s_t \in U^s} \sum_{t=o}^{T-1} [L^s_t(x^s_t, u^s_t)]$$

$s=M+1;\ldots,N-1$

$$\text{sous : } x^s_{t+1} = f^s(x^s_t, u^s_t, (w_{s,t})^{k+1}, c^s_t)$$

et les contraintes locales

Le calcul de sensibilité fournit, par sous-réseau, une trajectoire $\{(p^s{}_t)^{k+1}\}$ de "prix marginaux":
$\{(p^s{}_t)^{k+1}\} \in \partial\, G^s(\{(w_{s,t})^{k+1}\})$.

Dans l'algorithme de coordination **COOR**, cela revient à remplacer les étapes (b1) et (b2) par:

(b1) **Résolution des sous réseaux périphériques avec vanne**
Résoudre les problèmes (PCL'^{s}_{k}) pour s variant de 1 à M.
Relaxer les trajectoires de débit obtenues;
soit $\{(w_{s,t})^{k+1}\}$ les résultats.

(b2) **Résolution du sous-réseau central**

Résoudre le problème (PCL'^{N}_{k}) en utilisant les prévisions de débit $\{(w_{s,t})^{k+1}\}$ pour s variant de 1 à M.

Relaxer les trajectoires des débits obtenues lors de la minimisation; soit $\{(w_{s,t})^{k+1}\}$ pour s variant de M+1 à N-1 les résultats.

Evaluer et relaxer les sensibilités du coût optimal aux débits; soit $\{(p_t)^{k+1}\}$ la trajectoire obtenue.

(b3) **Résolution des sous-réseaux périphériques sans vanne**

Résoudre les problèmes (PCL'^{s}_{k}) pour s variant de M+1 à N-1.

Evaluer et relaxer les sensibilités des coûts optimaux aux débits imposés $\{(w_{s,t})^{k+1}\}$; soit $\{(p^{s}t)^{k+1}\}$ les trajectoires de prix ainsi obtenues.

Remarquons que l'ordre dans lequel sont effectuées ces trois étapes fait que la solution globale obtenue pour l'ensemble du réseau à chaque itération de coordination est admissible: en effet au cours d'une même itération, les débits d'interaction utilisés de part et d'autre de chaque vanne sont identiques, de telle sorte qu'à la fin de chaque itération, l'ensemble des commandes de pompes et de vannes obtenu est sinon optimal, du moins admissible (dans la mesure où il n'est nulle part fait appel aux ressources fictives). Cette remarque est en pratique d'une grande importance: en effet, les algorithmes de coordination dans le cadre non-différentiable ne convergent que lentement. Or, dans notre étude, chaque itération de coordination va prendre plusieurs minutes de temps CPU, de telle sorte que nous ne pourrons jamais faire tourner l'algorithme plus de vingt itérations. C'est pourquoi en pratique, nous ferons se dérouler l'algorithme de coordination un nombre fixé d'itérations. Chaque itération sera globalement évaluée, suivant des critères comme l'utilisation des ressources fictives (pour assurer l'admissibilité de la solution), le coût global des commandes appliquées, et le respect de contraintes "souples", comme par exemple les contrats journaliers de fourniture d'eau (contrainte [9] du paragraphe I-3), qui supportent une certaine tolérance dans leur

réalisation. La meilleure itération obtenue sera stockée, et c'est elle que nous proposerons comme solution "optimale" du problème de commande du réseau.

Indiquons pour conclure comment sont traitées ces contraintes de contrat de fourniture journalière d'eau. Prenons le cas d'un sous-réseau s gérant sa vanne, dont le débit total journalier est imposé. Le problème de commande associé est:

$$(PCL'^{s}_{k}) \qquad \min_{\substack{w_{s,t} \in W^s \\ u^s_t \in U^s}} \sum_{t=o}^{T-1} \{L^s_t(x^s_t, u^s_t) + (p_t)^k . w_{s,t}\}$$

$$\text{sous :} \quad x^s_{t+1} = f^s(x^s_t, u^s_t, w_{s,t}, c^s_t) \qquad (a)$$

$$\sum_{t=o}^{T-1} w_{s,t} = Q_s \qquad (b)$$

$$\text{et les autres contraintes locales} \qquad (c)$$

La contrainte (b) peut être traitée par l'introduction d'une nouvelle variable d'état y, avec:

$$y_o = o$$

$$y_{t+1} = y_t + w_{s,t}$$

$$y_T = Q_s$$

L'avantage de faire cela est que l'on introduit de la boucle fermée au niveau de la contrainte de réalisation des contrats, puisque l'on résoud les problèmes locaux par la programmation dynamique. L'inconvénient est que l'on introduit ainsi une nouvelle variable d'état et que donc, le temps de calcul nécessaire à la résolution se

trouve fortement accru.

C'est pourquoi on préfère dualiser cette contrainte (b) De manière plus précise, comme on sait que le problème n'est pas généralement strictement convexe, on utilise une technique de Lagrangien Augmenté, et on cherche alors un point-selle de la fonctionnelle:

$$L_c^s(\{u_t^s\},\{w_{s,t}\},\Pi) = \sum_{t=o}^{T-1} \{L_t^s(x_t^s,u_t^s)+(p_t)^k.w_{s,t}+\Pi.w_{s,t}\} + \frac{c}{2}\left[\sum_{t=o}^{T-1} w_{s,t} - Q_s\right]^2$$

La recherche du point-selle peut être faite par un algorithme de type Uzawa: à chaque itération k du processus de coordination, on résoud de manière itérative ce problème particulier, ce qui implique la recherche à Π fixé du minimum en $\{u^s_t\}$ et $\{w_{s,t}\}$ de la fonction L^s_c. On remarque cependant que le dernier terme dans l'expression du Lagrangien augmenté n'est pas additif par rapport au temps, de telle sorte que l'application de la programmation dynamique n'est pas possible. Pour surmonter cette difficulté, on "linéarise" ce terme comme présenté au paragraphe II-2c et on résoud le problème auxiliaire:

$$(PCL''^s_k) \quad \min_{\substack{u_t^s \epsilon U^s \\ w_{s,t} \epsilon W^s}} \sum_{t=o}^{T-1} \{L_t^s(x_t^s,u_t^s)+(p_t)^k.w_{s,t}+(\Pi)^n.w_{s,t} + c\left[\sum_{t=o}^{T-1} (w_{s,t})^n - Q_s\right].w_{s,t}\}$$

sous les contraintes (a) et (c).

Soit $(w_{s,t})^{n+1}$ la solution obtenue; on remet à jour le paramètre Π par:

$$(\Pi)^{n+1} = (\Pi)^n + \rho\left[\sum_{t=o}^{T-1} (w_{s,t})^{n+1} - Q_s\right]$$

La solution $\{(w_{s,t})^*\}$ obtenue après convergence est transmise dans le processus de coordination comme étant (à la relaxation près) $\{(w_{s,t})^{k+1}\}$.

On voit donc apparaitre ainsi une nouvelle boucle itérative à l'intérieur des itérations de coordination, ce qui risque de conduire, une fois de plus, à des temps-calcul élevés. Or, la recherche exacte à k fixé du point-selle de L_c n'est pas nécessaire, puisque la solution obtenue ne sert en fait qu'à faire progresser l'algorithme de coordination globale. C'est pourquoi il nous a paru suffisant de n'effectuer qu'un pas de gradient d'Uzawa à chaque itération de coordination: on résoud le problème (PCL^{*s}_k) en remplaçant l'indice n portant sur Π et $w_{s,t}$ par l'indice d'itération de coordination k. Soit $\{(w_{s,t})^{k+1}\}$ la solution trouvée. On remet alors à jour le paramètre dual Π; la valeur $(\Pi)^{k+1}$ ainsi obtenu sera utilisée à l'itération de coordination suivante. En pratique, on a constaté que cette manière de procéder conduisait à des résultats satisfaisants.

Il faut enfin remarquer que l'application rigoureuse des algorithmes de décomposition au cas du Lagrangien augmenté nécessite d'employer des noyaux K fortement convexes, ce qui dans notre cas se traduirait, par exemple par l'introduction de termes quadratiques $|w_{s,t}-(w_{s,t})^k|^2$ dans le critère du problème (PCL^{*s}_k). Nous ne l'avons pas fait pour les raisons invoquées auparavant (groupement de vannes), en espérant que les effets de relaxation sur ces variables auront des conséquences similaires au niveau de la convergence.

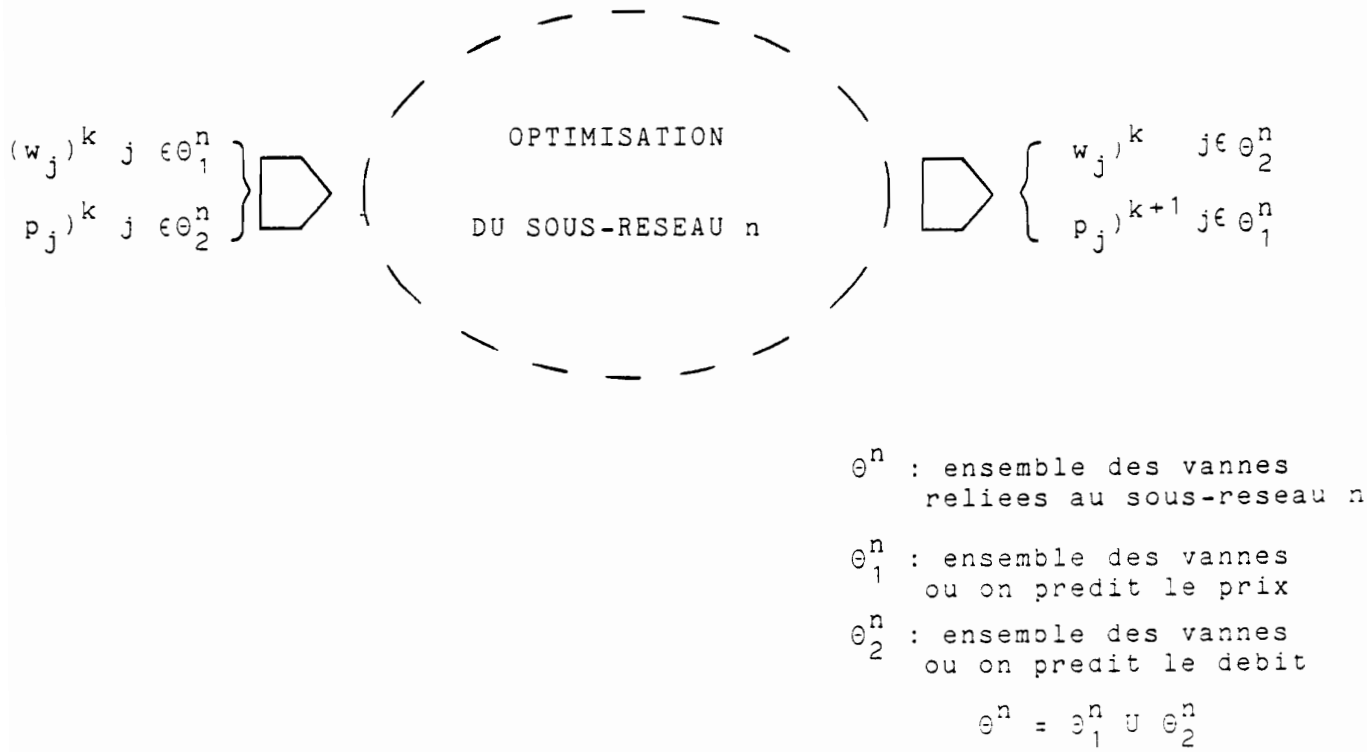
CHAPITRE III : METHODES D'AGREGATION-DESAGREGATION

L'utilisation des méthodes de décomposition-coordination a permis de considérablement réduire la taille des problèmes à résoudre, ce qui est fondamental pour nous puisque nous avons vu que la méthode de Programmation Dynamique Discrète semblait être la seule bien adaptée aux résolutions demandées. On ne peut cependant pousser la décomposition jusqu'à une plus avoir que des sous-réseaux élémentaires avec un seul réservoir, car on sait que la méthode de coordination utilisée, appliquée au cas de plusieurs interconnexions en débit-pression entre deux sous-réseaux, risque de ne pas converger. C'est pourquoi il faut envisager l'emploi de nouvelles méthodes, comme l'agrégation, pour simplifier la résolution des sous-problèmes associés aux sous-réseaux les plus complexes.

III.1 - Introduction

En fait, on a toujours utilisé sans le dire des modèles de réseaux agrégés: en effet, le réseau réel est constitué de milliers de tuyaux, raccordant chaque abonné au réseau. Comme il n'est pas pensable de modéliser le système à un tel degré de finesse, on commence par négliger tous les tuyaux dont le diamètre est inférieur à un seuil donné, et par chercher des tuyaux équivalents pour représenter certains maillages simples, au travers desquels l'écoulement est connu. On obtient ainsi un modèle de réseau utilisable, par exemple, a des fins de simulation. Ce degré d'agrégation ne paraissant pas encore suffisant pour utiliser les modèles en optimisation, on va se poser le problème de simplifier encore ce modèle tout en gardant une précision suffisante pour le but recherché.

Or, lors du processus de coordination, au moins, la résolution des sous-réseaux ne sert qu'à assurer la correspondance entre les trajectoires des prix marginaux $(p_j)^k$ (resp. des débits $(w_j)^k$) et celles des débits prédits $(w_j)^k$ (resp. des prix calculés $(p_j)^{k+1}$) (Figure 6).



- figure 6 -

Il suffit donc, au niveau de la coordination, d'avoir des modèles de sous-réseaux tels que l'optimisation faite sur ceux-ci conduise à une représentation correcte de ces correspondances, la perte d'optimalité résultant de l'utilisation de ce type de modèles étant directement liée au degré de finesse du modèle agrégé. Une fois obtenus les débits "optimaux" des interconnexions à l'issue du processus de coordination, il sera toujours possible de mieux résoudre les problèmes locaux, en utilisant leurs modèles détaillés, ne serait-ce d'ailleurs que pour pouvoir assurer le respect de toutes les contraintes opératoires imposées.

Nous allons commencer par détailler cette tâche de désagrégation donnant des résultats sur le modèle complet du sous-réseau à partir d'informations issues du modèle agrégé. Puis, nous décrirons deux méthodes d'agrégation de modèle que nous avons utilisées, en essayant de dégager les raisons théoriques qui justifient leur emploi.

III.2. La Désagrégation

Nous allons nous placer dans le contexte un peu particulier suivant: nous supposons que l'agrégation du modèle du sous-réseau à traiter, c'est-à-dire l'obtention d'un modèle agrégé représentant bien les correspondances prix-débits d'interaction, n'a pas trop altérée la signification physique du problème, à savoir que le problème agrégé que l'on est appelé à résoudre est bien une version simplifiée du problème de commande initial, avec une dynamique et un critère du même type, et non un problème totalement différent fournissant simplement les correspondances voulues sans pour autant imiter la structure du problème initial.

La résolution par la programmation dynamique de ce problème agrégé fournit donc une fonction de Bellman: $V(X,t)$ où X représente l'état agrégé du sous-réseau, lié au vecteur état réel x par une fonctionnelle $\rho: X=\rho(x)$, et la valeur de cette fonction de Bellman au point (X_0,t_0) constitue alors une évaluation approximative du coût optimal encouru pour le problème réel débutant à l'instant t_0 pour l'état initial x_0, tel que $X_0=\rho(x_0)$.

Si le problème initial était de la forme:

$$(PI) \quad \min_{(u_t)\,(w_t)} \sum_{t=0}^{T-1} \{L_t(x_t,u_t) + p_t.w_t\}$$

$$\text{soumis à :} \quad x_{t+1} = f(x_t,u_t,w_t,c_t) \qquad (a)$$

$$\underline{x} \leq x_t \leq \bar{x} \qquad (b)$$

$$\text{et aux autres contraintes locales} \qquad (c)$$

la tâche de désagrégation va consister à résoudre T problèmes d'optimisation statique, celui à l'instant t étant:

$$(PS_t) \quad \min_{\substack{u_t \in U \\ w_t \in W}} \{L_t(x_t^*, u_t) + p_t.w_t + V(\rho(f(x_t^*, u_t, w_t, c_t)), t+1)\}$$

$$\text{soumis à : } \quad \underline{x} \leqq f(x_t^*, u_t, w_t, c_t) \leqq \bar{x}$$

et aux contraintes (c)

La solution de (PS_t) est notée (u^*_t, w^*_t), commande réelle du sous-réseau à l'instant t, vérifiant toutes les contraintes locales. La valeur de l'état: $x^*_{t+1}=f(x^*_t, u^*_t, w^*_t, c_t)$ est communiquée au problème (PS_{t+1}).

Les deux premiers termes du critère minimisé dans (PS_t) représentent le coût instantané de la commande que l'on applique, et le dernier terme est une approximation du coût futur fonction de l'état dans lequel est mis le réseau par application de la commande.

Il faut bien voir que la résolution des problèmes (PS_t) se fait en un seul point de l'état et donc que le temps-calcul nécessaire à leur résolution est indépendant de la dimension du vecteur d'état (contrairement à la méthode PDD qui en dépend exponentiellement). Seules interviennent pour l'évaluation de ce temps la combinatoire du problème, et la complexité de la relation commande-état, ce qui rend alors tout à fait acceptable sa résolution.

Quant à la qualité des résultats fournis par la désagrégation, elle dépend uniquement de la qualité de l'approximation de la fonction de Bellman réelle V fournie par la fonction V, puisqu'en effet, dans le cas où l'on peut résoudre le problème avec le modèle initial, et donc où l'on peut calculer la vraie fonction de Bellman V(x,t), la résolution des problèmes (PS_t) fournit les commandes optimales du problème initial.

Remarquons enfin que l'avantage de cette méthode est qu'elle est facilement utilisable en-ligne pour obtenir des commandes à appliquer à partir de l'état réellement mesuré du système, en supposant connue la fonction de Bellman. Nous reviendrons sur cet

aspect au chapitre suivant.

Il s'agit pour nous maintenant de trouver des moyens systématiques de simplifier les modèles détaillés des sous-réseaux complexes. Rappelons que cette simplification passe par deux aspects, qui permettent l'application de la méthode PDD au problème agrégé.

- réduction du nombre de variables d'états.
- simplification de la relation implicite commande-état.

Les approximations faites seront jugées licites lorsque les solutions fournies par la désagrégation seront proches des solutions optimales, ou tout au moins conformes à l'intuition que l'on peut avoir de ces solutions.

III.3. Agrégation exacte

Cette méthode, proposée par (Aoki,(1978)) peut être formulée de la manière suivante sur un exemple simple:

On a à résoudre:

$$\underset{(u_t)}{\text{Min}} \; J = \sum_t L_t(x_t, u_t)$$

$$\text{soumis à :} \quad x_{t+1} = F_t(x_t, u_t)$$

$$x_t \in C_t$$

avec $F_t : R^n \times R^m \rightarrow R^n$

$L_t : R^n \times R^m \rightarrow R$

$C_t \subset R^n$

On suppose qu'il existe un triplet de fonctions (ρ, F_t, L_t),

avec $\rho : R^n \rightarrow R^{n_o}$

$F_t : R^{n_o} \times R^m \rightarrow R^{n_o}$

$L_t : R^{n_o} \times R^m \rightarrow R$

$\underline{n_o < n}$

tel que:

(i) Si on appelle état agrégé la variable $X=\rho(x)$, alors, le critère et les contraintes ne dépendent que de cet état agrégé, à savoir:

$$L_t(x,u) = L_t(X,u),\ \forall t,\ \forall (x,u) \in R^n \times R^m$$

$$\forall t,\ \exists\ C_t \subset R^{n_o},\ x \in C_t \iff X \in C_t$$

(ii) On peut agréger l'équation d'évolution du système, à savoir:

$$X_{t+1} = \rho(x_{t+1}) = \rho(F_t(x_t,u_t)) = F_t(X_t,u_t)$$
$$\text{avec}\quad X_t = \rho(x_t)$$

Alors, la résolution du problème suivant :

$$\min_{(u_t)} \quad J = \sum_t L_t(X_t,u_t)$$
$$\text{soumis à :}\quad X_{t+1} = F_t(X_t,u_t)$$
$$X_t \in C_t$$

qui ne dépend que de l'état agrégé X, est équivalente à la résolution du problème initial. Il suffit donc de résoudre le problème agrégé plus simple (réduction de la taille de l'état, au moins) pour obtenir une solution du problème initial.

En fait, cette méthode ne peut s'employer en pratique que de manière approchée, car il parait presque impossible de vérifier exactement les hypothèses (i) et (ii) sur des cas concrets.

L'application immédiate de cette agrégation exacte à notre cas consiste à chercher l'invariant le plus naturel existant sur le sous-réseau, en l'occurrence à écrire globalement l'équation de conservation de la masse sur le sous-réseau. Ceci revient à agréger tous les réservoirs en un seul réservoir fictif, dit réservoir agrégé. Dans la mesure où la décomposition spatiale déja effectuée du réseau assure une certaine homogénéité de la pression à l'intérieur de chaque sous-réseau, on peut en première approximation con-

sidérer que le débit refoulé par les pompes du sous-réseau ne dépend que d'un niveau moyen de la pression du sous-réseau, lié directement au volume contenu dans l'unique réservoir agrégé. L'équation d'évolution de la variable d'état agrégé correspondant au problème (PI) est alors:

$$X_{t+1} = X_t + Q(X_t, u_t) + C_t + w_t \qquad (a')$$

où X_t désigne le volume global disponible des réservoirs à l'instant t, correspondant aux niveaux x_t des réservoirs:

$$X_t = \rho(x_t)$$

$Q(X_t, u_t)$ est le débit global refoulé par les pompes lorsque l'on applique la commande u_t, au niveau de pression moyen correspondant à l'état agrégé X_t. Cette relation est connue explicitement et est dérivée des courbes débit-pression des pompes.

C_t est la consommation totale à l'instant t du sous-réseau.

L'hypothèse (ii) est donc bien vérifiée sur notre cas.

De même, on peut estimer que le critère du problème (PI) ne dépend en fait que de l'état agrégé: dans la mesure où les débits refoulés par les usines ne dépendent approximativement que du niveau de pression moyen sur le sous-réseau, lié à X_t, on peut dire la même chose pour le rendement des pompes, ce qui fait que la partie coût électrique du critère ne dépend bien que de l'état agrégé; la partie coût de traitement est proportionnelle aux débits refoulés, et ne dépend donc elle aussi que de l'état agrégé. On peut donc mettre le critère sous la forme:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \{M_t(X_t, u_t) + p_t \cdot w_t\}$$

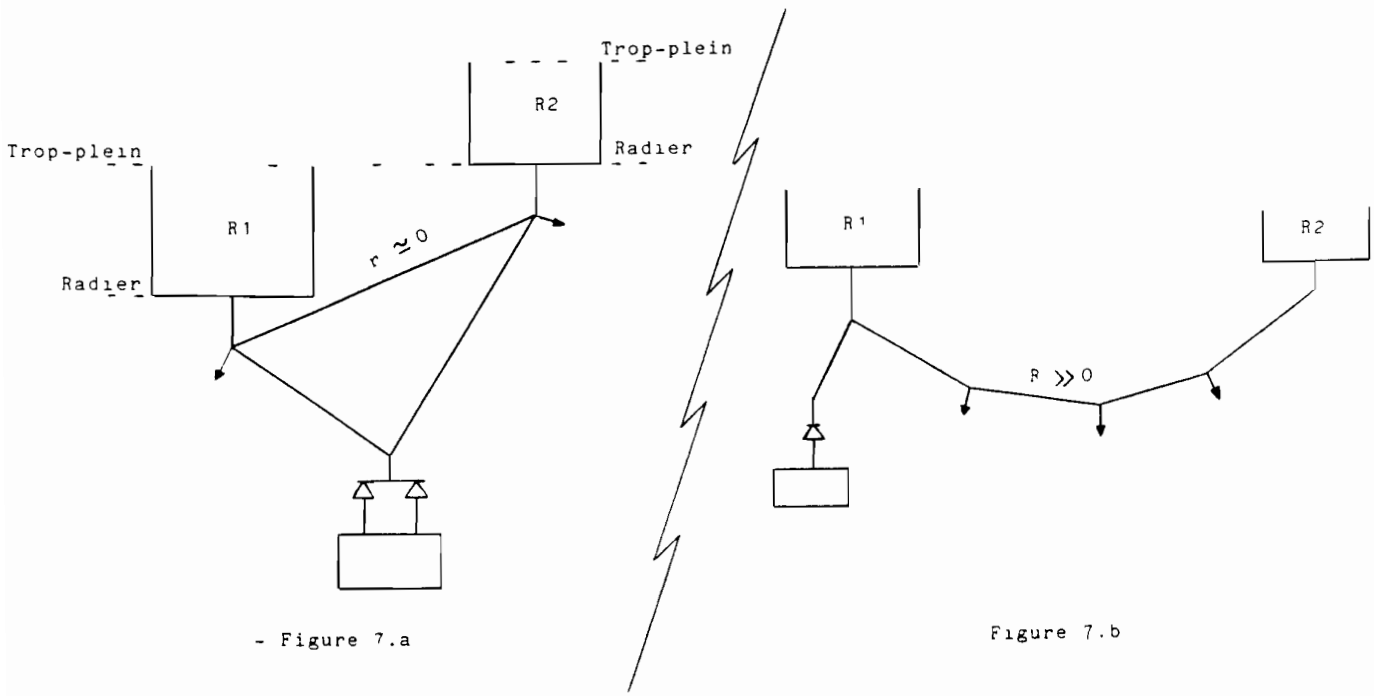
en conservant le sens économique de celui-ci avec une bonne précision.

Par contre, la traduction des contraintes de type (b) (bornes inférieure et supérieure sur chaque niveau de réservoir) pour l'état agrégé pose des problèmes insolubles. En effet, on ne pourra écrire sur l'état agrégé X que des contraintes portant sur le volume global stocké, alors que les contraintes originales doivent être considérées, comme on va le voir, plutôt comme des contraintes de pression. Ceci peut conduire à deux type d'ennuis:

(α) prenons le cas d'un réseau comportant deux réservoirs bien reliés, mais tels que le trop-plein de l'un soit au niveau du radier de l'autre (Figure 7-a). L'application brutale de la méthode d'agrégation, si l'on traduit les contraintes sur les réservoirs au niveau agrégé par le simple fait que l'état agrégé doit être compris entre zéro et la somme des volumes des réservoirs, va faire qu'au niveau agrégé, on pourra jouer sur toute la plage de variation de l'état et donc on calculera une fonction de Bellman incitant (par exemple juste avant un changement de tarif EDF) à vider le réservoir agrégé, donc les deux réservoirs réels, alors que dans la réalité, les contraintes de niveau individuel obligent la commande à maintenir le premier réservoir toujours plein afin de respecter la contrainte basse sur le second réservoir.

(β) dans le cas d'un réseau comportant deux réservoirs mal reliés, les usines se trouvant par exemple proches du premier réservoir (Figure 7-b), la méthode d'agrégation, pour un volume global d'eau stocké, ne discerne pas la répartition de ce volume entre les réservoirs réels, alors que dans la réalité, amener de l'eau au deuxième réservoir est beaucoup coûteux et prend beaucoup plus de temps que pour le premier réservoir. La fonction de Bellman calculé au niveau agrégé, négligeant totalement ce phénomène, risque donc de produire en désagrégation des solutions très éloignées de l'optimum, car elle incitera, par exemple, à laisser se vider le 2ème réservoir, ce qui obligera plus tard et au stade de la désagrégation de commandes à en utiliser de "mauvaises" (au sens de l'optimalité) pour maintenir entre les limites autorisées le niveau de ce réservoir.

Les inconvénients constatés en (α) peuvent se régler en affinant les contraintes sur l'état agrégé, en donnant, par exemple, des volumes globaux minimum et maximum utiles correspondant aux possibilités réelles du réseau. Par contre, les inconvénients de type (β) sont directement reliés au fait que la modélisation agrégée retenue est trop grossière, et nous oblige donc à remettre en cause la méthode elle-même.



- Figure 7.a

Figure 7.b

- Figure 7 -

III.4. Agrégation basée sur la notion de cohérence.

Dans cette approche, plutôt que de chercher une fonction d'agrégation à priori, on essaie de faire apparaitre des phénomènes dynamiques lents et rapides dans le sous-réseau par un changement de base d'état adéquat. Si les phénomènes rapides sont stables, ils sont rapidement amortis et on peut alors ne s'intéresser qu'à la partie lente de l'état, d'où une réduction de la taille du système étudié. A partir d'un système dynamique où les échelles de temps apparaissent explicitement:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(y,z,\epsilon) \quad , \quad y(o) = y_o \quad , \quad y \in R^{\nu} \\ \epsilon \frac{dz}{dt} &= g(y,z,\epsilon) \quad , \quad z(o) = z_o \quad , \quad z \in R^{n-\nu} \end{aligned} \tag{1}$$

où ϵ représente un petit paramètre sans dimension, y la partie essentiellement lente de l'état, et z la partie contenant l'essentiel des composantes rapides, on obtient facilement le modèle "lent" réduit, ou équivalent long terme, associé, en supposant le jacobien $\partial g/\partial z$, évalué en $\epsilon=o$, inversible, à valeurs propres stables en tout point (y,z):

* $$o = g(\bar{y},\bar{z},o) \quad <=> \quad \bar{z} = \Psi(\bar{y}) \tag{2}$$

$\bar{z}$ représentant l'état d'équilibre des variables rapides

* $$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(y,\Psi(y),o) \quad ; \quad \bar{y}(o) = y_o \tag{3}$$

dynamique du modèle lent réduit

et on a la relation suivante entre la solution y de (1) et celle de (3):

$$y(t) = \bar{y}(t) + O(\epsilon) \qquad (4)$$

qui précise la qualité de l'approximation fournie par le système (3).

On peut de même obtenir l'expression du système rapide réduit, ou équivalent court terme; Posant $\tau = t/\epsilon$, échelle de temps rapide, on obtient:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = g(\bar{y}(t),\ \bar{z}(t) + \tilde{z}(\tau),o)\ ,\ \tilde{z}(o) = z(o) - \bar{z}(o) \qquad (3')$$

et on a : $$z(t) = \bar{z}(t) + \tilde{z}(\tau) + O(\epsilon) \qquad (4')$$

Dans le cadre de l'optimisation avec dynamique linéaire et critère quadratique, on peut montrer (Chow et al.,(1976)) que l'écart entre la valeur optimale du critère et celle obtenue en ne commandant que les états lents est lui aussi d'ordre ϵ, ce qui, par extension, justifie heuristiquement l'utilisation de fonctions de Bellman calculées sur le modèle lent réduit d'un système non linéaire pour l'obtention de commandes ϵ-optimales du modèle initial.

Cependant, dans la plupart des cas, les échelles de temps n'apparaissent pas explicitement dans le modèle du système, et le premier travail consiste donc à trouver le changement de coordonnées à effectuer sur l'état pour exhiber les phénomènes lents et rapides.

Commençons tout d'abord par étudier le cas simple d'un système linéaire de la forme:

$$\epsilon \frac{dx}{dt} = A(\epsilon)x\ ,\ x(o) = x_o\ ,\ x \in R^n \qquad (5)$$

$$\text{avec } A(\epsilon) = A_o + \epsilon A_1\ ,\ \text{matrice } (n,n)$$

En notant τ l'échelle de temps rapide, $\tau = t/\epsilon$, l'équation (5) se reformule:

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\epsilon)x$$

et nous appellerons système-limite le système différentiel obtenu pour ϵ=o:

$$\frac{dx}{d\tau} = A(o).x = A_o x \qquad (6)$$

Supposons qu'il existe une trajectoire y(.) solution de (5), telle que à tout instant t, y(t) soit dans le noyau de la matrice A_o. Alors, l'équation différentielle vérifiée par y se met sous la forme:

$$\frac{dy}{dt} = A_1.y$$

ce qui montre que le sous-espace du noyau de A(o) invariant par la dynamique est un sous-espace de modes "lents".

Nous supposons alors que le noyau S et l'image F de la matrice A(o) sont des sous-espaces supplémentaires de R^n, de dimensions respectives ν et ρ ($\nu+\rho$=n). Par définition, nous appelons S la variété assymptotique et F la variété intégrale associées au système (5), et nous notons par "t" l'opération de transposition et par "$\perp$" l'orthogonalité. Nous effectuons alors un changement de base, la nouvelle base étant constituée d'une part d'une base de $F^{\perp}$ et nous appelons ${}^tV$ la matrice (n,ν) formée avec les coordonnées en colonnes des vecteurs de cette base de $F^{\perp}$, et d'autre part d'une base de $S^{\perp}$, et nous appelons ${}^tW$ la matrice (n,ρ) formée avec les coordonnées en colonne des vecteurs de cette base.

L'ensemble est une base de R^n d'après la supplémentarité des espaces S et F, et on a:

. $\forall x \in S$, $W.x = o$, puisque chaque ligne formant W représente un vecteur de $S^{\perp}$.

. Le long de toute trajectoire du système limite (6), la quantité V.x est invariable: $V.x(\tau) = V.x(o) \quad \forall \tau, \forall x(o) \in R^n$
En effet, on a:

$V \frac{dx}{d\tau} = V.A(o).x = o$ puisque, par définition, chaque ligne de V représente un vecteur de $F^{\perp}$.

Si on fait alors le changement de variables:

$$\begin{vmatrix} y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V \\ W \end{vmatrix} x$$

on obtient une séparation explicite des échelles de temps, y étant la partie essentiellement lente de l'état, et z la partie contenant les composantes rapides:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= A_l.y + B_l.z \\ \epsilon \frac{dz}{dt} &= \epsilon B_r.y + A_r(\epsilon).z \end{aligned} \qquad (7)$$

z est vraiment purement rapide dans le cas où B_r est la matrice nulle.

Dans le cas non linéaire, on peut formaliser de façon semblable le problème de la séparation des échelles de temps, et y apporter une solution (Péponides et al.,(1983)):

Soit le système : $$\epsilon \frac{dx}{dt} = h(x,\epsilon) \qquad (8)$$

et le système-limite associé : $$\frac{dx}{d\tau} = h(x,o) \qquad (9)$$

Si on suppose que:

a) Le système $h(x,o)=o$ définit une variété différentiable S, appelée variété assymptotique, de dimension ν, que l'on peut définir par $n-\nu$ équations: $\varphi(x)=o$.

b) Il existe une fonction continuement différentiable $\sigma: R^n \to R^\nu$ telle que, le long de toute trajectoire du système-limite (9), la quantité $\sigma(x(t))$ soit invariante.

c) pour tout x, le rang de la matrice $\left| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \end{matrix} \right|$ est égal à n, dimension de l'espace d'état.

alors, le changement de variables dans (8):

$$y = \sigma(x)$$
$$z = \varphi(x)$$

conduit à un système d'équations différentielles à échelles de temps séparées de la forme (1). De plus l'état d'équilibre des variables rapides est alors donné par: $\bar{z}(t)=o$, $\forall t$. En utilisant le système rapide réduit (3'), on déduit que:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = g(\bar{y}(t),\tilde{z}(\tau),o) \qquad \tilde{z}(o)=z(o)$$

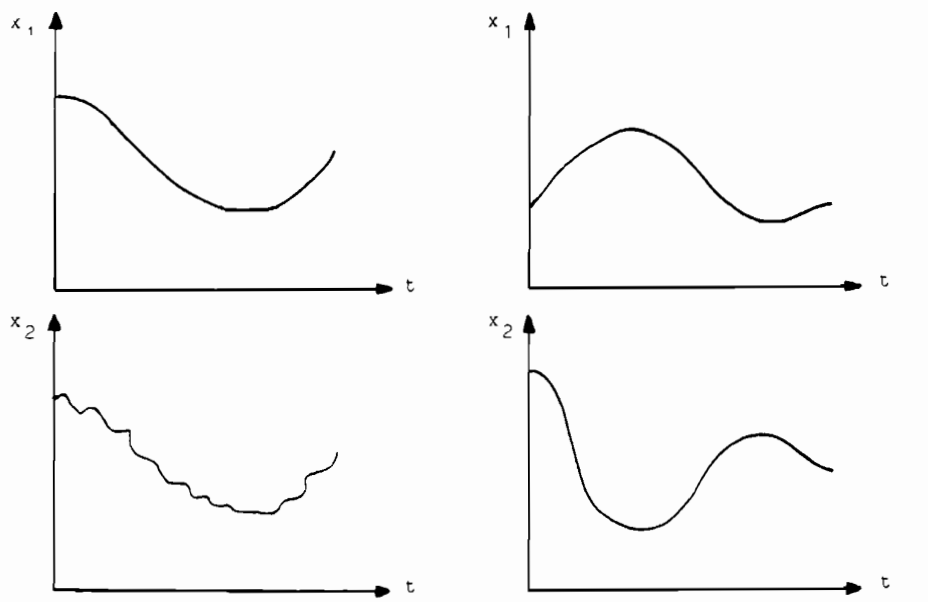
Si on part avec une condition initiale x(o) dans S, alors $z(o)=o$ si bien que $\tilde{z}(\tau)=o \ \forall\tau$ · d'où d'après (4'):

$$x(o) \in S \Rightarrow z(t) = o(\epsilon) \quad \forall t \qquad (10)$$

Cette condition (10) exprime l'ϵ-cohérence du système par rapport aux variables lentes: lorsque l'état initial du système appartient

à la variété assymptotique S, tout état le long de la trajectoire appartient "à ϵ près" à cette variété.

Dans le cas où l'une des composantes z_k de la partie rapide de l'état se met sous la forme: $z_k=x_i-x_j$: différence de deux composantes de l'état initial, on retrouve bien la notion intuitive de cohérence lente entre les deux variables x_i et x_j, à savoir que ces variables ont le même comportement dynamique dans les basses fréquences (ou à long terme) correspondant aux modes propres de la partie lente de l'état et ne diffèrent que par des transitoires rapides amortis, d'ordre ϵ (Figure 8). Pour conclure cette interprétation de l'ϵ-cohérence, signalons que, même dans le cas où l'état initial x(o) n'est pas élément de S, et donc où z(o) est non nul, les hypothèses de stabilité faites sur le jacobien $\partial g/\partial z$ assurent le fait que la partie rapide de l'état z(t) sera d'ordre ϵ après un instant t_1 petit (d'ordre ϵ dans le cas linéaire), ce qui fait qu'on récupère, en fait, l'ϵ-cohérence pour tout instant t postérieur à t_1.



Les etats x_1 et x_2 sont conerents

8.a

Les etats x_1 et x_2 ne sont pas coherents

8.b

- figure 8 -

Nous allons montrer sur deux exemples simples tirés des réseaux d'eau l'application de ces idées d'agrégation par cohérence.

a) Considérons le cas du réseau de la figure 9 comportant en chaque noeud i un réservoir R_i de section S_i, le niveau d'eau étant noté x_i et une pompe U_i de courbe caractéristique $f_i(.)$, avec une consommation c_i. La résistance du tuyau reliant les réservoirs i et j est notée R_{ij} et l'on suppose $R_{13}=R_{23}=R$, $r_{12}=r=\epsilon^2 R$, ϵ étant un petit paramètre (ce qui revient à dire que les réservoirs R_1 et R_2 sont fortement connectés). Le système dynamique associé s'écrit:

$$S_1\dot{x}_1 = f_1(x_1) - c_1 - \frac{1}{\epsilon}\sqrt{\frac{|x_1-x_2|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_1-x_2) - \sqrt{\frac{|x_1-x_3|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_1-x_3)$$

$$S_2\dot{x}_2 = f_2(x_2) - c_2 - \frac{1}{\epsilon}\sqrt{\frac{|x_2-x_1|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_2-x_1) - \sqrt{\frac{|x_2-x_3|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_2-x_3)$$

$$S_3\dot{x}_3 = f_3(x_3) - c_3 - \sqrt{\frac{|x_3-x_1|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_3-x_1) - \sqrt{\frac{|x_3-x_2|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_3-x_2)$$

et le système-limite (avec $\tau = \frac{t}{\epsilon}$) :

$$S_1\frac{dx_1}{d\tau} = -\sqrt{\frac{|x_1-x_2|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_1-x_2)$$

$$S_2\frac{dx_2}{d\tau} = +\sqrt{\frac{|x_1-x_2|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_1-x_2)$$

$$S_3\frac{dx_3}{d\tau} = 0$$

On en déduit immédiatement le changement de coordonnées séparant les échelles de temps :

$$y = \begin{bmatrix} \dfrac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = X \\ \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$z = x_1 - x_2$$

Les variables d'état associées aux réservoirs R_1 et R_2 sont donc ϵ-cohérentes, ce qui permet de les agréger au niveau du modèle lent réduit, qui n'est plus que de dimension deux. Remarquons que la propriété de cohérence des états x_1 et x_2 permet de plus, lorsqu'il existe des contraintes d'état, de les redéfinir de manière correcte sur le modèle réduit lent. Puisqu'en effet, l'écart $x_1(t)-x_2(t)$ sera petit après (éventuellement) un temps très court, les trois variables x_1, x_2 et X seront, après ce transitoire, pratiquement égales. On peut donc remplacer les contraintes:

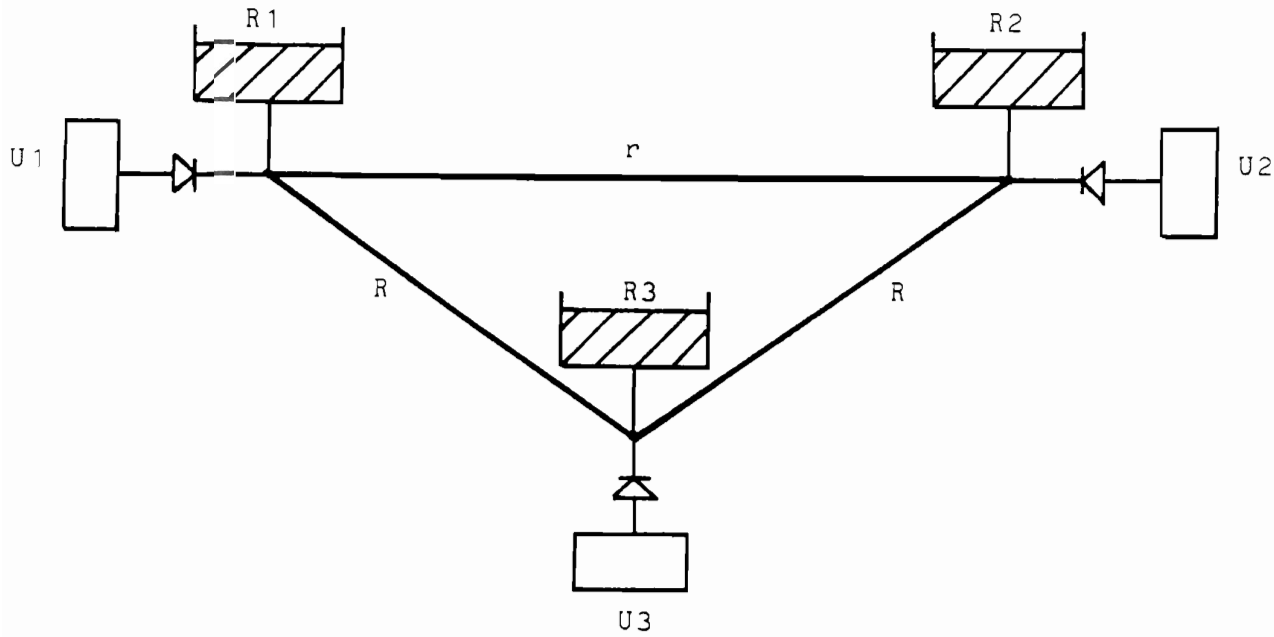
$$\underline{x_1} \leqslant x_1 \leqslant \overline{x_1} \quad \text{et} \quad \underline{x_2} \leqslant x_2 \leqslant \overline{x_2}$$

par la contrainte unique:

$$\text{Max}(\underline{x_1}, \underline{x_2}) \leqslant X \leqslant \text{Min}(\overline{x_1}, \overline{x_2})$$

Ceci assure la satisfaction "presque exacte" des contraintes d'état au niveau agrégé. La satisfaction exacte de celles ci sera obtenue au moment de la procédure de désagrégation; heuristiquement, ceci nous conduira à modifier la commande élaborée au niveau agrégé soit d'une quantité finie sur un temps infiniment petit (en ϵ) pour tenir compte de transitoires rapides, soit d'une quantité infiniment petite tout le temps pour tenir compte d'un "biais" du modèle agrégé, soit les deux. Dans tous les cas, on peut estimer que l'incidence sur le coût optimal restera faible. Mais nous ne disposons pas aujourd'hui de théorème d'approximation pour cette procédure de perturbations singulières en présence de contraintes d'état.

Ainsi, le modèle agrégé obtenu, en respectant la cohérence du système permet d'éviter les inconvénients de type [α] envisagés au paragraphe III-3, et de plus distingue à priori les réservoirs mal reliés



- Figure 9 -

b) Prenons le cas du réseau de la figure 10, comportant en chacun des noeuds 1 et 2 un réservoir de section S, dont le niveau est noté x, et au noeud 3 une pompe de courbe caractéristique f(.), la pression en ce noeud étant noté h. La pompe est reliée au réservoir R_1 par un tuyau de faible résistance r, et au réservoir R_2 par un autre tuyau de forte résistance R. On suppose que l'on a encore:

$$r = \epsilon^2 . R$$

Le modèle dynamique s'écrit:

$$S_1 \dot{x}_1 = -\frac{1}{\epsilon}\sqrt{\frac{|x_1-h|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_1-h) - c_1$$

$$S_2 \dot{x}_2 = -\sqrt{\frac{|x_2-h|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_2-h) - c_2$$

$$f(h) = +\frac{1}{\epsilon}\sqrt{\frac{|x_1-h|}{R}}\,\mathrm{sgn}(h-x_1) + \sqrt{\frac{|x_2-h|}{R}}\,\mathrm{sgn}(h-x_2) - c_3$$

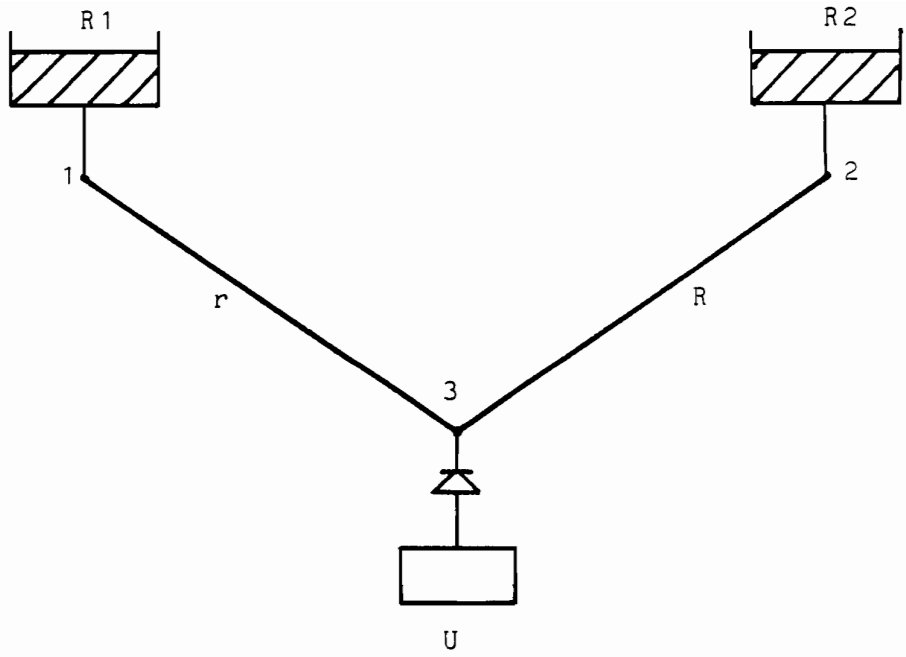
Cette dernière équation exprime une condition d'équilibre statique du réseau, et nous montre que, pour tout instant t, les variables x_1 et h sont proches à ϵ^2 près. Ceci nous conduit au modèle approché suivant:

$$S_1 \dot{x}_1 = f(h) - (c_1+c_3) - \sqrt{\frac{|x_1-x_2|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_1-x_2)$$

$$S_2 \dot{x}_2 = -\sqrt{\frac{|x_1-x_2|}{R}}\,\mathrm{sgn}(x_2-x_1) - c_2$$

ce qui revient à agréger les noeuds 1 et 3, fortement connectés.

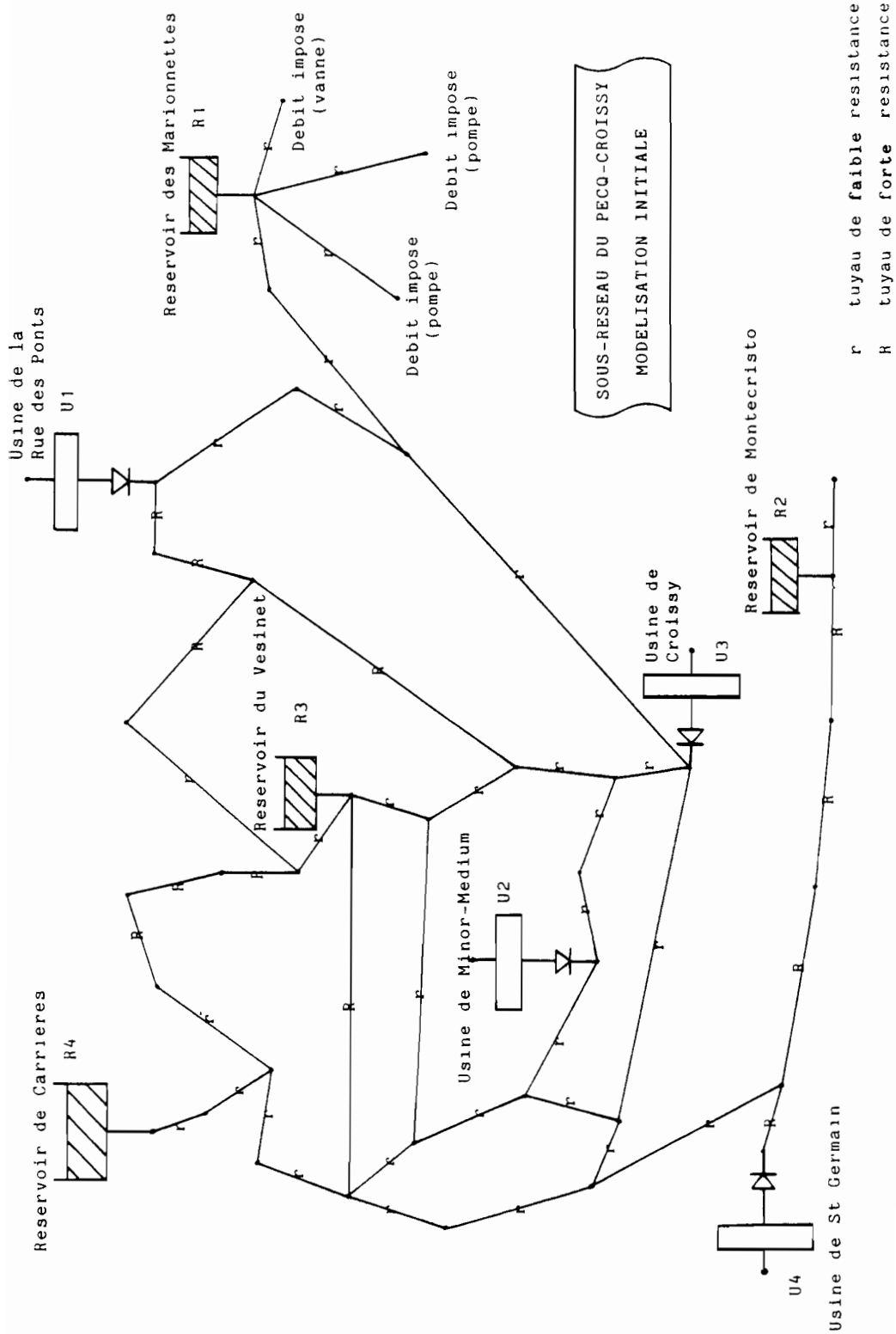
Dans ce cas, on voit que l'agrégation par cohérence ne diminue pas la taille de l'état du système, mais simplifie la résolution des équations statiques d'équilibre instantané du réseau. Notons que, dans ce cas, le fait que la pompe alimente plus facilement le réservoir R_1 que le réservoir R_2 est représenté au niveau du modèle agrégé, ce qui donne une solution aux inconvénients de type [β] évoqués au paragraphe précédent.



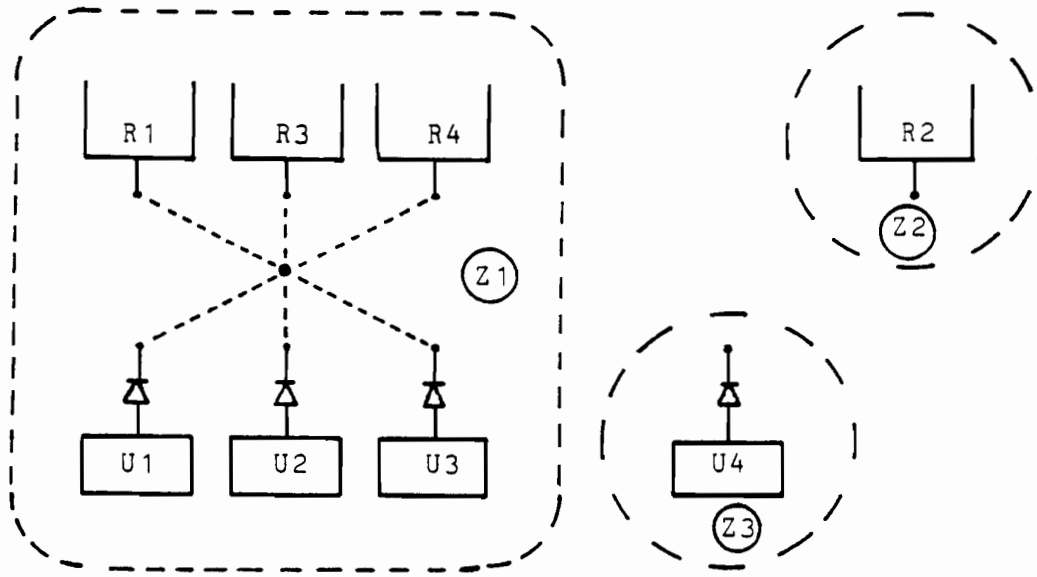
- Figure 10 -

On peut donc espérer, par une réduction de la taille de l'état du système et par une simplification des équations statiques associées, obtenir par la technique d'agrégation par cohérence un modèle lent réduit d'un réseau sur lequel la programmation dynamique soit praticable.

- Figure 11 -


SOUS-RESEAU DU PECQ-CROISSY
MODELISATION INITIALE
r tuyau de faible resistance
R tuyau de forte resistance
Reservoir des Marionnettes R1
Debit impose (vanne)
Debit impose (pompe)
Debit impose (pompe)
Usine de la Rue des Ponts U1
Reservoir du Vesinet R3
Usine de Minor-Medium U2
Usine de Croissy U3
Reservoir de Montecristo R2
Reservoir de Carrieres R4
U4
Usine de St Germain

Prenons par exemple le cas du sous-réseau du Pecq-Croissy (Figure 11). Lorsque l'on cherche à appliquer cette méthode à ce réseau réel, on se heurte à un certain nombre de difficultés. Tout d'abord, le petit paramètre ϵ n'apparait pas explicitement: par exemple, les valeurs des résistances des tuyaux ne se séparent pas en deux ensembles de petites et fortes valeurs, mais forment plutôt un continuum de valeurs, et il faut alors se donner assez arbitrairement un seuil, en dessous duquel la résistance sera considérée comme faible (valeur r) et au dessus duquel elle sera considérée comme forte (valeur R). Par analogie avec les exemples traités auparavant, on peut se définir des zones d'éléments cohérents en agrégeant les points reliés par des tuyaux de faible résistance. On obtient alors trois zones Z1, Z2, Z3 (Figure 12).



- Figure 12 -

La zone Z1 comporte trois réservoirs, que l'on peut donc agréger par cohérence en un seul réservoir agrégé RA1, dans lequel refoulent directement les usines U1, U2 et U3.
La zone Z2 n'est constituée que par un réservoir, formant à lui seul le second réservoir agrégé RA2.
Enfin, la zone Z3 ne comporte qu'une pompe, à priori mal reliée avec

les deux zones précédentes. En réalité, une analyse plus fine des résistances des tuyaux liant cette pompe à Z1 et Z2 montre que la connexion Z2-Z3 est négligeable devant la connexion Z1-Z3, ce qui fait que l'on peut encore agréger les zones Z1 et Z3.

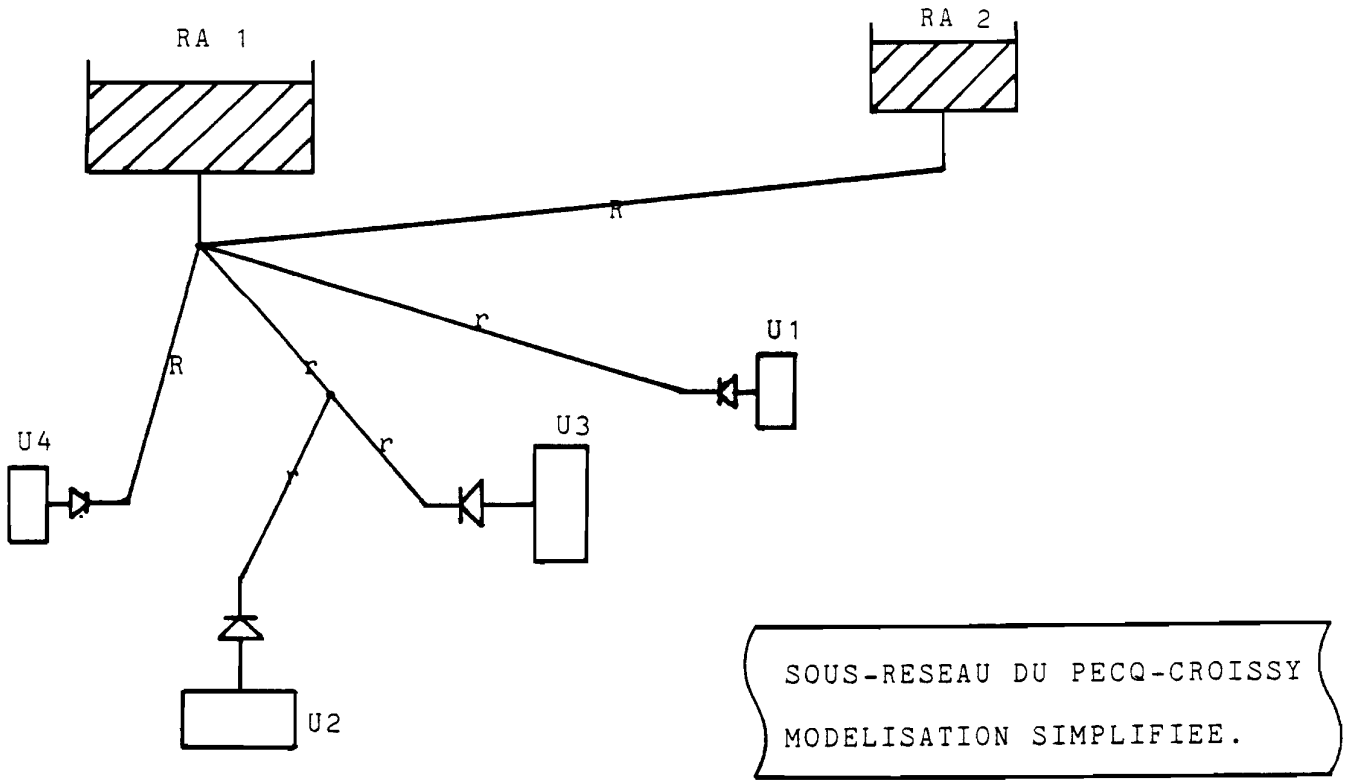
On a donc ainsi réduit le nombre de variables d'état du système initial à deux variables agrégées, et on a même pu déterminer à laquelle de ces variables agrégées se reliait chacune des pompes (ou, en d'autres termes, le réservoir agrégé qui imposait la pression de sortie de chaque pompe). Il reste encore à écrire réellement le modèle dynamique régissant ces éléments agrégés (modèle lent réduit). Ceci ne peut être fait que très difficilement à cause du grand nombre et de la complexité des équations statiques permettant la détermination des équations différentielles. On préfère alors, dans la lignée des travaux de De Moyer (1975), imposer des relations à priori entre les différents éléments agrégés du réseau, à savoir:

- une relation entre le débit et la pression à la sortie de chaque pompe (courbe caractéristique de la pompe),
- une relation entre chaque usine et chaque réservoir, liant le débit refoulé à la perte de charge entre usine et réservoir agrégé En fait, utilisant les zones obtenues par cohérence, on n'écrira pour un réservoir donné que les relations avec les usines se trouvant dans la même zone,
- une relation liant pour chaque réservoir le débit entrant ou sortant de ce réservoir aux niveaux des autres réservoirs et aux débits refoulés par les pompes (ce type de relation couple entre elles les différentes zones),
- éventuellement, pour tenir compte des débits et pressions d'interaction, des relations liant ces valeurs aux niveaux des réservoirs et aux pressions à la sortie des usines. Dans la mesure où chaque point d'interconnexion appartient à une zone de cohérence, on ne liera ces valeurs qu'aux niveaux et pressions des réservoirs et usines de la zone.

Ces relations font aussi en général intervenir la consommation sur le réseau. Les coefficients de ces relations sont évalués par une

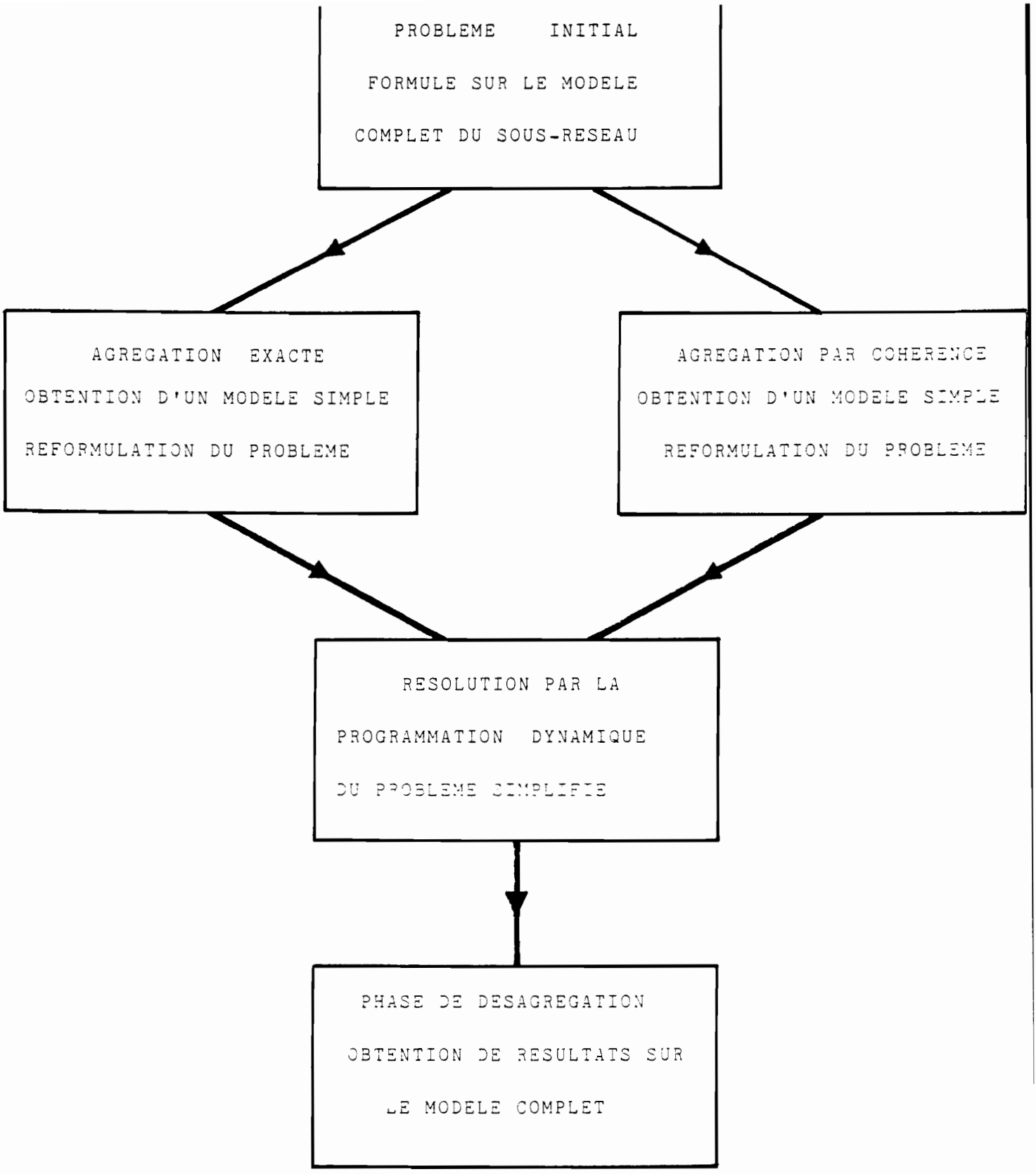
méthode de moindres carrés afin de respecter au mieux un ensemble de valeurs obtenues sur le modèle initial du réseau (calage du modèle simplifié) L'adéquation entre les résultats fournis par les deux modèles est en général excellente, mais, le modèle simplifié ainsi obtenu est encore implicite, et sa résolution nécessite l'utilisation d'une méthode itérative.

Pour simplifier encore le modèle du réseau agrégé, on va supposer que toutes les relations entre les éléments proviennent de connexions par des tuyaux, et que de plus, les relations inter-zones ne dépendent que des niveaux des réservoirs agrégés. On peut alors connecter tous les éléments du modèle agrégé par des tuyaux, et évaluer les résistances de ces tuyaux par une méthode de moindres carrés, les résistances inter-zones étant d'ordre R et celles intra-zones d'ordre r (figure 13). Pour tenir compte du fait que dans une même zone de cohérence, les débits refoulés par les usines ne sont pas indépendants les uns des autres en général, on peut avoir des tronçons communs a plusieurs usines (c'est le cas des usines U2 et U3 dans l'exemple étudié). De toute façon, les équations du modèle simplifié ainsi constitué se résolvent explicitement, de manière très rapide et la précision obtenue par rapport au modèle réel est acceptable.



- Figure 13 -

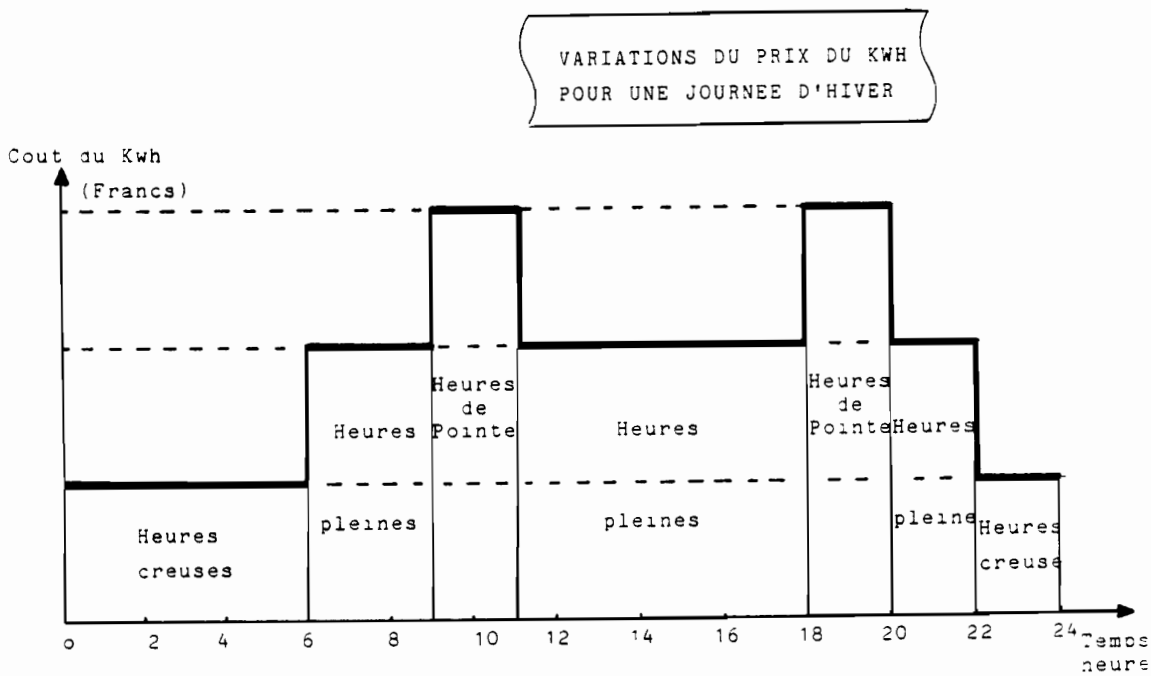
Il ne reste plus qu'à redéfinir le critère à optimiser, ce qui ne pose pas de problèmes particuliers puisque, dans ce modèle, on dispose de la pression et du débit de chaque usine, dépendant des niveaux des réservoirs agrégés. La résolution par la programmation dynamique discrète fournit alors une fonction de Bellman dépendant de l'état agrégé et du temps. Les optimisations statiques correspondant au problème de la désagrégation fournissent ensuite les commandes réelles à appliquer au réseau, ainsi que les trajectoires des réservoirs réels. Signalons pour conclure que la qualité du modèle simplifié est telle que la séquence des commandes trouvée par la désagrégation ne diffère quasiment pas de celle obtenue directement lors de la programmation dynamique sur le réseau simplifié.



ALLURE GENERALE DES METHODES D'AGREGATION-DESAGREGATION UTILISEES

III.5 Résultats obtenus par ces méthodes

Nous avons cherché à comparer les résultats que fournissent ces deux méthodes d'agrégation sur le réseau du Pecq-Croissy pour une journée d'hiver avec périodes de pointe EDF, en supposant connues à l'avance toutes les interactions avec le reste du réseau. Le coût de l'énergie électrique pour ce type de journée varie au cours du temps comme indiqué par la figure 14. Il faut donc essayer d'éviter autant que possible de faire fonctionner les pompes du sous-réseau durant les pointes EDF, d'abord parce que le kilowattheure y est très cher, et ensuite parce que les contrats de fourniture d'énergie électrique pour les usines stipulent un nombre maximum de kilowattheures utilisable pour chaque période de tarification EDF, et qu'il est très coûteux de souscrire en période de pointe. Le pompage y est donc limité et il faut anticiper le remplissage des réservoirs.



- Figure 14 -

Rappelons que le réservoir de Monte-cristo, situé en antenne, est mal relié au reste du sous-réseau, en particulier des réservoirs du Vésinet et de Carrières sur Seine. Dans la méthode d'agrégation "exacte" (§ III.3) cependant, ces trois réservoirs sont agrégés en un seul, alors que dans l'agrégation par cohérence, le réservoir de Monte-cristo est représenté de manière individuelle. Enfin, le réservoir des Marionnettes, pour la journée étudiée, reste toujours rempli car son trop-plein se situe bien en dessous de celui des autres réservoirs, et que la consommation n'est pas assez forte pour qu'il ait un rôle actif. Il reste donc toujours isolé du reste du sous-réseau par un robinet à flotteur, et il n'y a pas lieu de le prendre en compte dans le cas étudié.

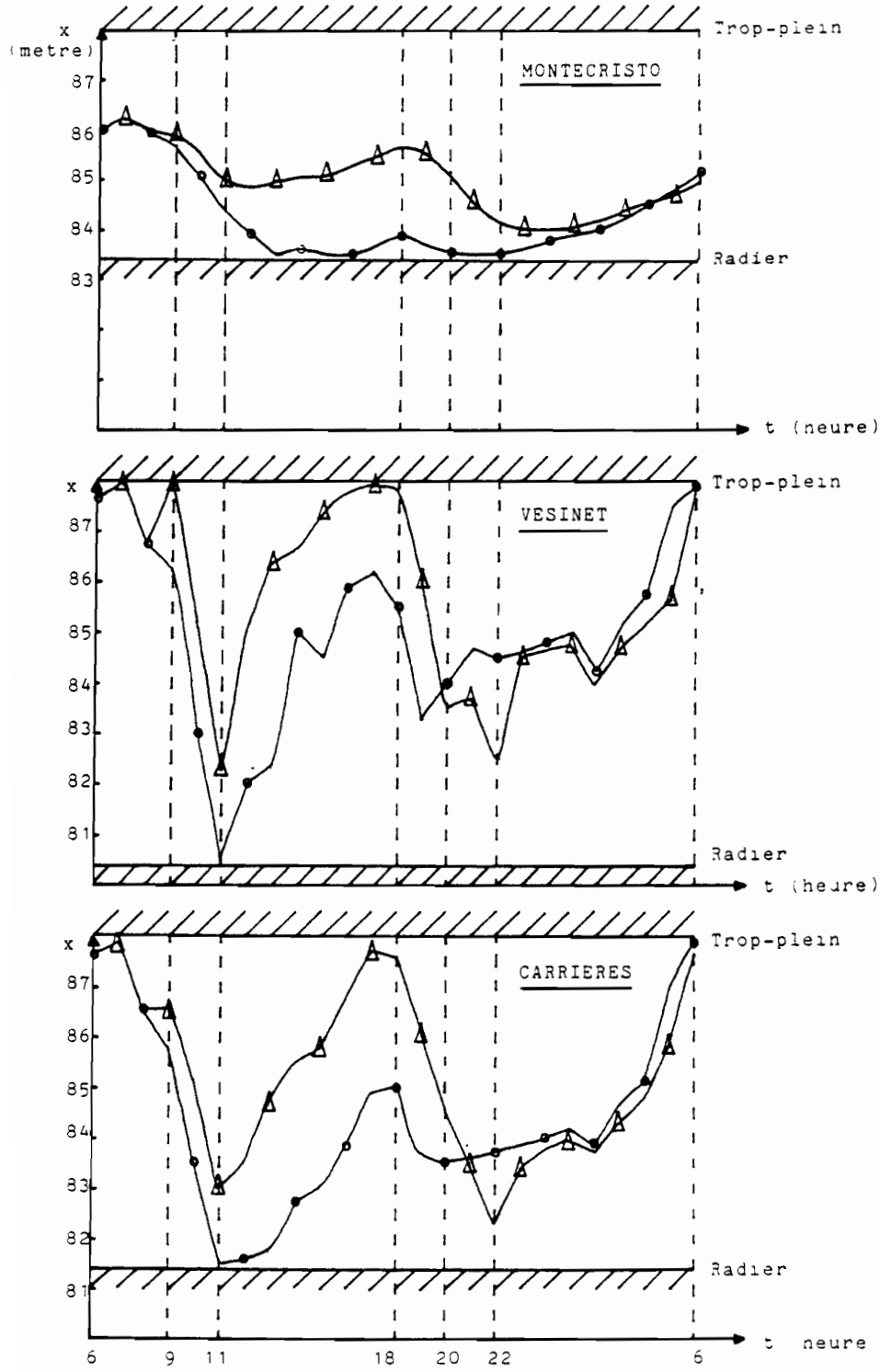
Au niveau des temps-calcul nécessaires aux deux méthodes, il faut noter que la phase de désagrégation, commune à ces deux méthodes, est coûteuse puisqu'elle s'effectue sur le modèle complet. Bien sur, la phase de programmation dynamique dans le cas de l'agrégation exacte est très rapide, à cause de la dynamique scalaire très simple (cf. § III.3, eq. (a')) alors que celle efffectuée sur le modèle agrégé par cohérence porte sur un état de dimension deux, avec une dynamique qui, quoique se résolvant explicitement, est plus complexe. Cette dernière nécessite donc un temps-calcul plus grand, de l'ordre de celui de la phase de désagrégation. Il en résulte qu'au total, le rapport des temps-calcul de ces deux méthodes est d'environ 1/2 sur l'exemple traité. A titre indicatif, sur un ordinateur Perkin-Elmer 3220 avec accélérateur flottant cablé, la programmation dynamique prend environ 30 secondes par la première méthode, et 15 minutes par la deuxième, et la phase de désagrégation dure environ 20 minutes.

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont assez différents. Le coût optimal obtenu par application de l'agrégation par cohérence est meilleur d'environ 2% que celui obtenu par l'agrégation exacte, qui lui même améliore d'environ 5% le coût réalisé par l'opérateur pour cette journée (en fait le coût obtenu en simulant la politique suivie par l'opérateur sur le modèle complet du sous-réseau). Ces gains, relativement faibles, s'expliquent par le fait que les dépenses incompressibles sur le sous-

réseau (il faut de toute façon assurer la satisfaction des consommations!) forment la majeure partie du coût: la° politique (admissible) la plus défavorable sur cette journée (que l'on peut par exemple, obtenir en maximisant le critère du problème, en respectant les contraintes existantes) ne conduit pas à un coût "optimal" excessivement différent du vrai coût optimal (obtenu en minimisant le critère!).

Par contre, les trajectoires des réservoirs sont assez distinctes (figure 15). Pour la méthode d'agrégation exacte, la fonction de Bellman ne contient qu'une information globale sur le volume d'eau disponible: ainsi, avant la deuxième période de pointe, cette fonction n'incite à stocker que la quantité nécessaire à la consommation de cette période, ce qui se traduit sur le réseau réel par une obligation de pomper durant cette période de pointe pour respecter la contrainte de niveau bas sur le réservoir de Monte-cristo. De même, avant le début de la période de tarif "heures creuses", on est obligé, compte tenu de la situation dans laquelle on se trouve à ce moment là, de maintenir les niveaux des réservoirs du Vésinet et de Carrières sur Seine assez élevés pour maintenir celui de Monte-cristo au dessus de son radier. Ce sont là les inconvénients inhérents à cette méthode que nous avons déjà signalé au paragraphe III.3 (mauvaise anticipation du futur). Notons enfin que cette méthode oblige, en période de pointe, à utiliser toutes les pompes disponibles (car les contrats EDF limitent le pompage en pointe) ce qui, au niveau de la sécurité, est très mauvais, puisque il se pourrait que, durant la pointe, il ne soit pas possible de maintenir le niveau de Monte-cristo au dessus de son radier. Il faudrait alors démarrer une pompe, théoriquement interdite durant cette période, ce qui se traduirait par un coût énorme (dépassement du contrat EDF).

- Figure 15 -



: Trajectoire obtenue par agregation exacte

Trajectoire obtenue par agregation basee sur la coherence

Pour la méthode d'agrégation basée sur la cohérence, par contre, avoir représenté de manière individuelle, même imparfaitement, ce réservoir de Monte-cristo fait que les trajectoires obtenues après désagrégation sont beaucoup plus correctes: le niveau du réservoir de Monte-cristo est maintenu assez haut pour permettre de passer la deuxième pointe sans pompage, et aussi, on vide mieux l'ensemble des réservoirs avant la période où l'énergie est bon marché, toutes choses améliorant le coût de fonctionnement et la sécurité pour la conduite du sous-réseau.

Cette comparaison nous fait donc préférer la méthode issue de l'agrégation basée sur la cohérence. De plus, puisque l'on peut représenter au niveau de ce modèle agrégé les phénomènes locaux de pression (ce qui n'est pas possible dans le modèle obtenue par agrégation exacte), il n'est pas nécessaire de désagréger à chaque itération de coordination: on peut se contenter d'assurer les correspondances entre les trajectoires de débit, pression et prix d'interaction sur le modèle simplifié. Après convergence de la coordination, on pourra toujours désagréger le modèle en utilisant les fonctions de Bellman obtenues pour donner des résultats sur les modèles complets des sous-réseaux.

Pour conclure ce chapitre, montrons comment sont calculés en pratique les sous gradients des fonctions coûts optimaux par rapport aux variables d'interconnexion: la résolution par la programmation dynamique du problème agrégé correspondant à un sous-réseau s pour lequel un débit d'interaction $(w_{s,t})^k$ est imposé:

$$G^s(\{(w_{s,t})^k\}) = \min_{u_t^s \in U^s} \sum_{t=o}^{T-1} L_t^s(X_t^s, u_t^s)$$

soumis à la dynamique agrégée: $X_{t+1}^s = F^s(X_t^s, u_t^s, (w_{s,t})^k, c_t^s)$

et aux contraintes locales (éventuellement agrégées).

fournit la trajectoire optimale de l'état agrégé, notée $\{(X^s{}_t)^*\}$, issue d'un état initial connu, et la fonction de Bellman V(X,t) donnant le coût optimal du problème avec la phase initiale (X,t), X représentant un point de l'état agrégé. Un sous-gradient de la

fonctionnelle G_s par rapport à la variable $(w_{s,t_o})^k$ s'obtient en dérivant numériquement la fonction de Bellman par rapport à l'état agrégé, et en tenant compte de l'influence de cette modification de débit sur l'état agrégé: une variation δw du débit d'interconnexion $(w_{s,t_o})^k$ à l'instant t_o produit une modification δX de l'état agrégé $(X^s_{t_o+1})^*$ à l'instant t_o+1 (le système est à temps discret), qui induit une variation du coût optimal:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial X} \left((X^s_{t_o+1})^*,\ t_o+1\right).\delta X$$

d'où l'évaluation du sous gradient:

$$(p^s_{t_o})^k = \frac{\partial V}{\partial X} \left((X^s_{t_o+1})^*, t_o+1\right).\frac{\delta X}{\delta w} \ .$$

Lorsque l'on dispose de formules explicites pour la dynamique F^s (ce qui est le cas pour les modèles agrégés que nous avons définis), le calcul numérique de la dérivée de l'état agrégé par rapport au débit d'interconnexion peut être remplacé par le calcul de:

$$\frac{\partial F^s}{\partial w} \left((X^s_{t_o})^*, (u^s_{t_o})^*, (w_{s,t})^k, c^s_t\right)$$

CHAPITRE IV : MISE EN OEUVRE; RESULTATS; CONCLUSIONS

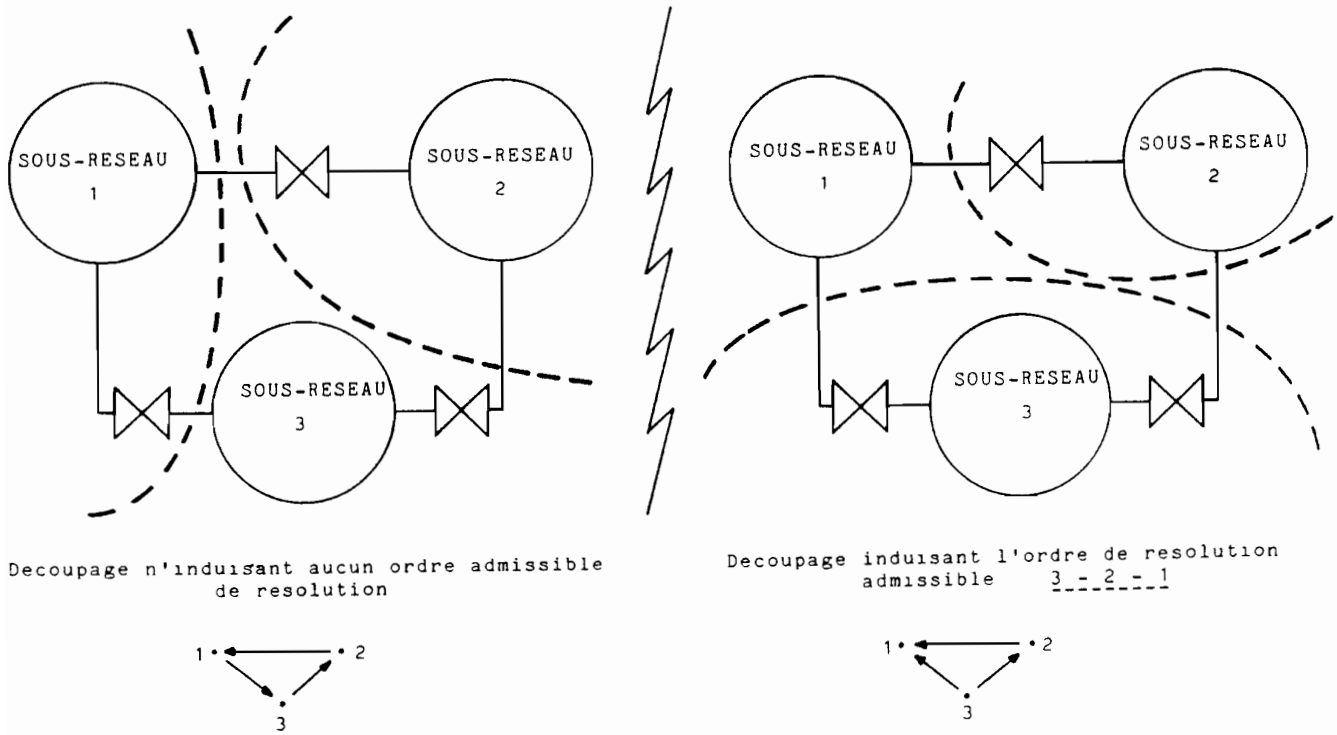
IV.1 - Description du processus complet d'optimisation

a) Phase préliminaire

La première étape du travail consiste, à partir de plans, journaux de bord, relevés de compteurs,..., à obtenir, pour l'ensemble du réseau, des données chiffrées permettant de définir un modèle complet du réseau, ainsi que les paramètres donnant le coût d'exploitation. Comme nous l'avons déjà dit, ce modèle complet est lui-même le résultat de simplifications effectuées sur le réseau réel(par exemple, on néglige les tuyaux de diamètre jugé trop faible, et on localise de manière assez arbitraire les consommations aux noeuds du graphe obtenu). Il faut donc recaler les paramètres définissant le modèle par rapport à des mesures effectuées sur le terrain, pour pouvoir disposer d'un outil de simulation du réseau suffisamment précis et fiable. Il faut bien être conscient que ce travail, quoiqu'ingrat, est indispensable à la réussite de l'étude, et qu'il a représenté une part tout à fait non négligeable du temps nécessaire à l'aboutissement du projet.

Une fois ce modèle obtenu, il faut effectuer le découpage en sous-réseaux. Dans la mesure où la méthode de coordination retenue est celle de prédiction des interactions, il faut de plus effectuer le découpage de l'espace des contraintes associées à chaque point d'interaction: il faut donc décider, pour chaque vanne, quel sous-réseau prédit le débit (et donc gère la commande associée), l'autre sous-réseau prédisant alors un prix, et pour chaque point d'interaction en débit-pression, quel sous-réseau prédit le débit (et le prix marginal associé à la pression d'interaction), l'autre sous-réseau prédisant alors la pression (et le prix associé à ce débit). Ce découpage pourra bien sûr évoluer en fonction des difficultés rencontrées au cours de l'optimisation, en respectant cependant les règles décrites au chapitre II. On cherche

ensuite à déterminer un ordre de résolution des sous-problèmes assurant (au moins approximativement) l'admissibilité de la solution globale obtenue, dans la mesure où un tel ordre admissible existe. Cette solution ne peut de toute façon qu'être approximativement admissible si il existe des interactions en débit-pression, puisque dans ce cas, les deux sous-réseaux ainsi connectés sont étudiés au cours d'une même itération soit avec la même pression d'interaction, soit avec le même débit d'interaction, la simultanéité n'intervenant qu'après convergence de la méthode.



- Figure 16 -

La figure 16 montre un premier cas où le graphe orienté des prédictions de débit comporte un cycle, ce qui exclue toute possibilité d'existence d'un ordre admissible, alors que le second cas présente un graphe orienté sans cycle (d'où existence d'un tel ordre).

Enfin, pour chacun des sous-réseaux ainsi isolés, on cherche à déterminer un modèle simplifié, dont le vecteur d'état soit de dimension inférieure ou égale à deux, avec une équation

d'évolution se résolvant explicitement, en utilisant la méthode d'agrégation basée sur la cohérence des phénomènes de sous-réseau

Le dernier problème à résoudre avant de pouvoir s'attaquer à l'optimisation est celui de la prévision de la consommation. Cette partie du projet, elle aussi très importante, n'était pas de notre ressort, mais il semble intéressant de préciser la solution adoptée Il a été décidé de faire les prévisions pour les consommations globales journalières de chaque sous-réseau. Le total de la consommation ainsi obtenue pour un sous-réseau est ensuite répartie au cours du temps afin d'obtenir une valeur de la consommation totale du sous-réseau à chaque pas de temps d'optimisation. Cette répartition se fait par utilisation de courbes types, dépendant de la nature du sous-réseau (zone rurale ou urbanisée), du jour de la semaine, de la saison. Pour ensuite avoir une valeur de la consommation en chaque noeud du sous-réseau (répartition géographique fine), on a déterminé des coefficients à chaque noeud, mesurant la contribution moyenne du noeud à la consommation du sous-réseau. Ces coefficients ont été obtenus par le regroupement des ventes annuelles aux abonnés rue par rue (ou quartier par quartier), et la répartition induite est considérée comme figée une fois pour toutes.

Les prévisions globales journalières par sous-réseau ont été faites par l'utilisation de méthodes statistiques: une analyse factorielle par sous-réseau, menée sur plusieurs années de données, dans laquelle la consommation du jour était décrite par des variables comme la consommation de la veille, celle d'il y a sept jours, le jour de la semaine, la prévision de température du jour, la pression atmosphérique, la saison (codée de manière floue), etc, a donnée des pourcentages d'inertie très importants sur les premiers axes factoriels (de l'ordre de 75% pour le premier et 10% sur le second), ce qui a permis l'utilisation de formules explicites pour la prévision, fonction elle même de prévisions météorologiques et de valeurs de consommations passées mesurées.

b) Algorithme d'optimisation "hors ligne"

Toute cette phase préliminaire étant acquise, le processus d'optimisation se décrit comme suit:

(i) **Etape d'initialisation**

* Choisir les suites $\{\epsilon^k\}$ de type σ (en pratique de la forme a/b.k+c) associées aux variables d'interaction et aux fonctions de Bellman.
* Choisir des trajectoires initiales "réalistes" pour chaque variable d'interaction.
* Choisir les coefficients des Lagrangiens augmentés associés aux contrats de fourniture journalière, ainsi que les valeurs initiales des variables duales de ces Lagrangiens.
* Calculer, par comparaison à l'usine la moins rentable du réseau, les prix associés aux ressources fictives (pénalisation).
* Choisir un nombre d'itérations de coordination.

(ii) **Itérations de coordination**

* Pour chacun des sous-réseaux, traités dans l'ordre fournissant une solution admissible:

  . Calculer, par la programmation dynamique, en utilisant le modèle simplifié issu de l'agrégation et le critère agrégé modifié pour tenir compte des interactions et des contrats journaliers de fourniture d'eau, la fonction de Bellman du sous-problème (dépendant donc de l'état agrégé).
  . Sous-relaxer la fonction de Bellman obtenue avec celle de l'itération précédente, en utilisant la suite $\{\epsilon^k\}$ du type σ définie à cet effet.
  . Calculer sur le modèle simplifié les trajectoires des débits des vannes que commande le sous-réseau, par utilisation de la fonction de Bellman sous-relaxée

(procédure de "désagrégation" du § 2 du chapitre III, mais portant encore sur le modèle agrégé).

. Sous-relaxer les trajectoires des débits des vannes obtenues.

. Calculer, les débits des vannes étant ainsi fixés aux valeurs trouvées à l'étape précédente, la trajectoire de l'état agrégé par une nouvelle application de la procédure de désagrégation toujours sur le modèle agrégé, mais ne comportant maintenant qu'une optimisation par rapport aux variables de commandes internes. Calculer autour des trajectoires ainsi obtenues les variables de prix nécessaires à la coordination.

. Sous-relaxer les trajectoires de ces prix avec les valeurs obtenues à l'itération précédente.

. Remettre à jour le prix du Lagrangien Augmenté, lorsque le sous-problème gère un contrat de fourniture d'eau, par un seul pas de gradient.

* Evaluer globalement l'itération sur les trois critères suivants:

  - utilisation des ressources fictives
  - satisfaction des contrats de fourniture d'eau
  - coût total de l'itération

Si l'itération est meilleure que les précédentes, stocker les trajectoires des variables d'interaction obtenues, ainsi que celles suivies par les contrats.

(iii) **Calcul de la solution complète**

* Reprendre les valeurs des variables d'interaction et des contrats obtenues à la meilleure itération de coordination, et imposer les trajectoires de débit des vannes à ces valeurs.

* Effectuer pour chaque sous-réseau une phase de désagrégation avec les fonctions de Bellman obtenues, sur le

modèle complet du sous-réseau. En déduire les trajectoires des réservoirs réels et des débits refoulés par les usines, ainsi que les coûts de fonctionnement.

Cette description appelle un certain nombre de remarques:

- Tout d'abord, dans la partie (ii) de l'algorithme, insistons sur les faits que l'on n'utilise jamais les modèles complets des sous-réseaux, et que l'on ne fait, à chaque itération, qu'un seul pas de gradient pour la remise à jour des paramètres duaux des Lagrangiens Augmentés (contrats de fourniture), afin de réduire le temps-calcul nécessaire à chaque itération de coordination.

- Ensuite, on voit que, toujours dans la partie (ii), on applique deux foix la procédure de "désagrégation" (portant sur le modèle agrégé) d'où un double calcul des trajectoires de l'état et des coûts pour chaque sous-réseau: le premier de ces calculs fournit les trajectoires des débits des vannes; ces trajectoires sont sous-relaxées, et on fait alors le second calcul, servant à l'évaluation de l'itération, en fixant les débits des vannes aux valeurs sous-relaxées. Ceci est fait pour assurer l'admissibilité de la solution globale de l'itération: en effet, le débit de vanne transmis par la coordination est le débit sous-relaxé, et il faut donc calculer le coût du sous-réseau qui détermine ce débit avec la valeur sous-relaxée. On notera que ce double calcul n'a pas lieu d'être si le sous-réseau correspondant ne pilote aucune vanne.

- Enfin, toujours dans la partie (ii), on sous-relaxe les fonctions de Bellman, et on utilise dans la partie (iii) les fonctions sous-relaxées pour obtenir la solution sur le modèle complet du réseau. Cette technique heuristique vient de ce que, au moment où les fonctions de Bellman sont calculées dans un sous-réseau donné, elles le sont avec les débits des vannes non relaxés, ce qui engendre, lorsque l'on passe à la phase de désagrégation sans sous-relaxer la fonction de Bellman, mais en ayant relaxé les débits des vannes, des comportements visiblement non optimaux. Une solution consisterait à refaire pour chaque sous-réseau un calcul de

programmation dynamique avec les débits des vannes fixés aux valeurs sous-relaxées trouvées lors de l'étape (ii), et à effectuer alors les phases de désagrégation pour chacun des sous-réseaux avec ces fonctions de Bellman, ce qui produirait les meilleures commandes locales possibles, compte tenu des commandes des vannes. Cette manière de procéder reviendrait à remplacer l'étape (iii) par:

(iii')

* Reprendre les valeurs des variables d'interaction et des contrats obtenues lors de la meilleure itération de coordination.

* Faire, pour chaque sous-réseau, un calcul de programmation dynamique à débits de vannes d'interaction fixés

* Faire, pour chaque sous-réseau, la phase de désagrégation avec la fonction de Bellman ainsi obtenue.

Elle fournirait aussi, en cas de perturbations, la meilleure solution en boucle fermée, à condition de ne pas modifier les commandes des vannes. Cependant, en dehors du fait qu'une nouvelle optimisation dynamique au niveau d'un sous-réseau est plus coûteuse en temps de calcul qu'une procédure (en "marche avant") de désagrégation, nous allons être amené à retoucher aussi en temps réel les débits des vannes d'interconnexion choisis hors-ligne. Ceci est dû à la nécessité de reprendre certains écarts importants entre prévisions et réalisations de la consommation, et au fait que certains sous-réseaux n'ont pas ou peu de ressources internes et sont donc principalement alimentés par ces vannes. Dans ces conditions, rechercher la meilleure fonction de Bellman à débits d'interaction fixés est moins utile pour le recalage en-ligne, et nous avons obtenu de meilleurs résultats avec les fonctions de Bellman sous-relaxées.

c) Optimisation "en ligne" : procédure de recalage

Nous devons donc disposer d'une procédure permettant, en temps réel, de disposer de "bonnes" commandes de pompes et de vannes. Le pas de temps de discrétisation étant de l'ordre de l'heure, cette procédure sera donc utilisée toutes les heures pour fournir les commandes à appliquer au pas de temps à venir.

Plus précisément, avant le début du pas de temps t_o, on va mesurer les niveaux réels des réservoirs du réseau, qui sont à priori différents de ceux calculés lors de la procédure d'optimisation hors-ligne. On reformule alors le problème de commande optimale du réseau entier, comme on l'avait fait pour l'optimisation hors-ligne, mais avec un horizon d'optimisation de un seul pas de temps, le coût final de ce problème étant alors la somme des fonctions de Bellman sous-relaxées calculées hors-ligne à l'instant t_o+1 (ce coût représente une estimation du coût optimal sur l'ensemble du réseau à partir de l'instant t_o+1, pourvu que les consommations futures soient conformes aux prévisions faites et pourvu que les débits d'interaction futurs soient ceux calculés lors de l'optimisation hors-ligne.). Ce nouveau problème statique se décompose lui aussi suivant les sous-réseaux avec la même procédure de coordination, on peut utiliser les mêmes techniques d'agrégation, si bien que l'algorithme d'optimisation en-ligne est tout à fait similaire à celui hors-ligne. Il est cependant simplifié dans la mesure où le calcul ne s'effectue que sur un seul pas de temps:

- à l'étape (i), l'initialisation des variables d'interaction est faite avec les valeurs trouvées hors-ligne, pour le pas de temps considéré.
- à l'étape (ii), le calcul et la relaxation des fonctions de Bellman disparaissent puisqu'on s'intéresse à l'optimisation sur un pas de temps avec état initial fixé (mesuré sur le réseau). Tout ce qui est trajectoire devient valeur sur le pas de temps considéré.
- enfin, l'étape (iii) n'est pas modifiée.

On voit donc que le temps-calcul nécessaire à l'exécution de cet algorithme va être beaucoup plus court que celui nécessaire à l'optimisation hors-ligne (division par un facteur vingt du fait de l'horizon d'optimisation, et suppression de toute exploration en espace -on travaille à partir d'un état initial connu-, ce qui donne en fait un facteur 50!). Cela explique la possibilité d'utiliser cette méthode en ligne. A titre d'exemple, avec dix itérations de coordination, toujours sur notre ordinateur Perkin Elmer 3220, l'optimisation hors ligne consomme environ 150 minutes de temps U.C., alors que chaque appel de la procédure de recalage n'en nécessite qu'environ 3 minutes (rappelons qu'elle met pourtant en jeu un processus de coordination et permet aussi le recalage des débits d'interaction).

Indiquons enfin comment ont été traités les contrats journaliers dans la procédure en-ligne. Pour passer de la valeur du débit à fournir contractuellement sur une journée à des valeurs pour chaque pas de temps (puisque le recalage ne s'intéresse qu'à un seul pas de temps), on utilise tout simplement la trajectoire du débit de ce contrat, obtenue hors-ligne: la valeur sur cette trajectoire pour un pas de temps donné est utilisée dans le recalage correspondant comme objectif à atteindre pour le contrat de fourniture d'eau sur ce pas de temps.

d) Séquencement des tâches

Le processus complet d'optimisation peut donc être décrit, au cours d'une journée normale, comme suit:

1) A minuit, après avoir exécuté le programme effectuant les prévisions de consommation sur le réseau, et éventuellement modifié des données conjoncturelles (pannes de pompes,...), on fait le calcul d'optimisation hors-ligne (environ trois heure de temps U.C. sur le VAX750 de la SLEE). Certains résultats (fonctions de Bellman, trajectoires des variables d'interaction) sont stockés, d'autres (trajectoires des réservoirs, plans de pompage par usine, débits des vannes) sont communiqués au dispatcheur pour qu'il puisse avoir une idée

précise de la journée à venir.

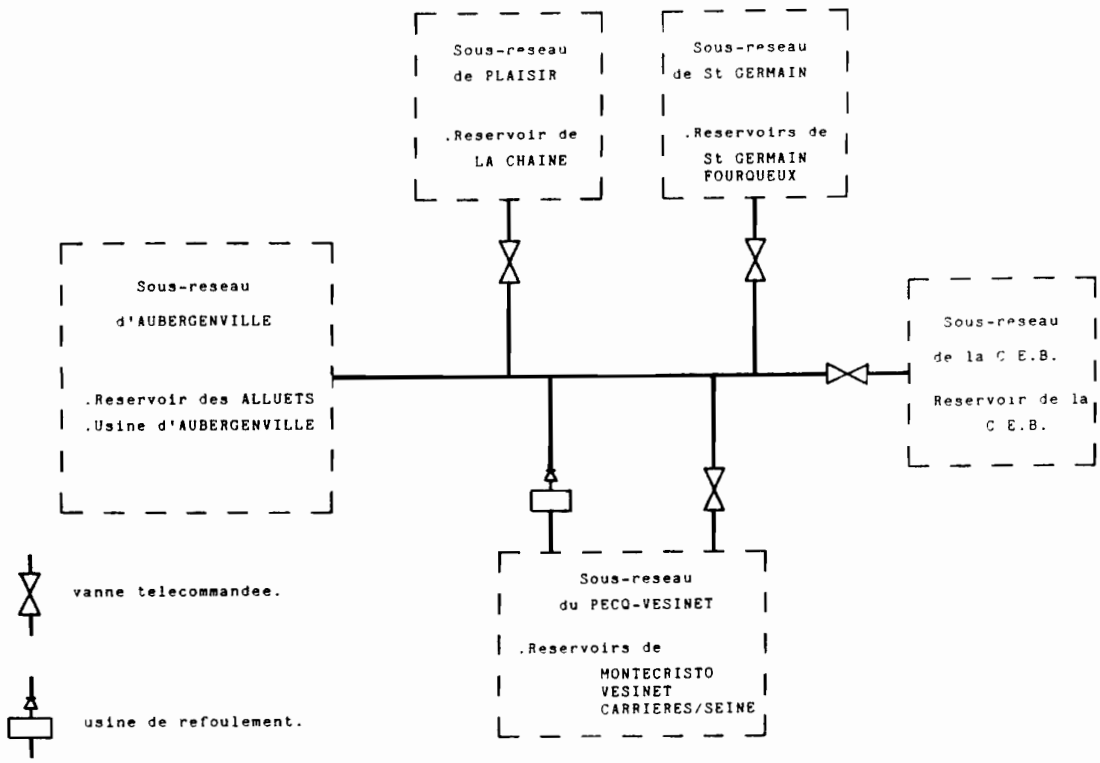
2) Environ dix minutes avant le début de chaque pas de temps de la journée (la journée débutant elle même à 5 h 45, et le pas de temps durant environ 1 heure), on mesure les niveaux réels des réservoirs, on extrapole les valeurs obtenues pour disposer de niveaux estimés au début du pas de temps à venir et on effectue un calcul de recalage. Les commandes de pompes et de vannes obtenues sont proposées à l'opérateur qui les étudie, et les applique réellement sur le réseau, ou bien elles sont directement appliquées dans une version entièrement automatique.

En cas de modifications importantes sur le réseau en cours de journée (panne d'usines, casse d'un tuyau,...), on peut toujours lancer une réoptimisation sur le reste de la journée tenant compte de ces modifications, ce qui, après calcul des nouvelles fonctions de Bellman, permet d'effectuer les procédures de recalage avec des objectifs ou des coûts finaux réalistes. En effet, le même programme d'optimisation peut être utilisé sur un horizon variable (de quelques pas de temps, par exemple), en adoptant au bout de cet horizon soit un coût final évalué par la somme des fonctions de Bellman calculées hors-ligne pour l'instant correspondant, soit un objectif "primal" sur des niveaux de réservoirs, correspondant à ceux observés sur les trajectoires obtenues hors-ligne par exemple. La seule limitation à l'utilisation de cette réoptimisation "en-ligne" provient du temps de calcul nécessaire à son déroulement.

IV.2. Résultats obtenus sur une journée-test

On ne pourra, bien sûr, juger de la qualité des solutions fournies par ce programme d'optimisation, ainsi que les facultés qu'il aura de s'adapter aux situations nouvelles sur le réseau, qu'après sa mise en service, dont la date est fixée au début Juillet 1984. Cependant, les résultats obtenus en simulation sur un petit nombre de journées-test ont paru très satisfaisants. Présentons, par exemple, ceux obtenus pour une journée d'été, avec une consommation assez forte, sur un sous-ensemble du réseau complet où l'on retrouve les principales difficultés de l'étude. Ce sous-ensemble est formé des sous-réseaux suivants (figure 17):

- le sous-réseau d'Aubergenville, coeur du problème, avec le réservoir des Alluets,
- le sous-réseau de Plaisir, dont la principale alimentation est une vanne télécommandée, à Davron, avec le réservoir de La Chaine,
- le sous-réseau de Saint-Germain, qui comporte deux réservoirs ayant des comportements dynamiques assez différents,
- le sous-réseau du Pecq-Vésinet, déjà étudié au chapitre III, et qui est le sous-réseau le plus complexe de l'ensemble étudié,
- enfin, le sous-réseau de la C.E.B., le plus gros consommateur en eau du réseau, et pour lequel existent deux contrats journaliers de fourniture d'eau: l'un, par la vanne de Buzenval, en provenance du sous-réseau d'Aubergenville (environ 75.000m3/jour), et l'autre par une usine interne au sous-réseau (environ 25.000m3/jour).



- Figure 17 -

Les autres sous-réseaux sont de bien moindre importance, et n'ont pas été modélisés. La somme de leurs piquages sur la grosse conduite du sous-réseau d'Aubergenville a été rassemblée en une consommation unique sur ce sous-réseau.

Pour disposer d'une base valable de comparaison, nous avons tout d'abord simulé la politique suivie effectivement par le dispatcheur. Le total des coûts de fonctionnement en résultant s'élève à: 28.654 Francs, avec un respect parfait du contrat à la vanne de Buzenval (75.000 m3 fournis pour 75.000 m3 demandés), mais une surproduction à l'usine sur laquelle porte l'autre contrat (31.000 m3 fournis pour 25.000 m3 demandés). Pour pouvoir réellement comparer cette solution avec celle élaborée par le programme

d'optimisation, nous avons donc fixé comme valeur du contrat à l'usine 31.000 m3. Le programme d'optimisation a alors fourni une solution qui, lorsque l'on prend en compte les corrections qui ramènent les contrats aux valeurs théoriques souhaitées, (il subsiste en effet un écart de quelques centaines de m3, dans la mesure où les contraintes correspondantes sont dualisées et traitées par une méthode de type Uzawa, dont on ne peut se permettre d'attendre la convergence parfaite.) améliore le coût total obtenu par le dispatcheur d'environ 2% (28.072 Francs). Ce faible gain s'explique par trois facteurs:

* tout d'abord, les dispatcheurs connaissent bien le réseau et le gèrent en respectant un certain nombre de règles (vidange des réservoirs avant la période "Heures Creuses", non utilisation des usines réputées non rentables) qui leur assurent des coûts convenables.

Comme, de toute façon, les gains que l'on peut espérer, même sur une mauvaise gestion du réseau (pourvu qu'elle reste admissible) ne sont pas démesurés, il est normal que le programme ne fasse pas beaucoup mieux que le dispatcheur.

Une autre façon d'exprimer cette même idée est de noter que le gain, en valeur absolue d'environ 600 Francs (ce qui peut déjà être apprécié en soi) est rapporté à un dénominateur que l'on peut gonfler arbitrairement de coûts fixes, ou "obligatoires", pour donner un pourcentage d'économies qui peut paraitre faible. Ainsi, il nous semble que si nous savions évaluer la quantité:

$C_1 \triangleq$ coût le plus mauvais possible d'une politique de commandes satisfaisant les contraintes.

une idée plus exacte de ce qu'apporte l'optimisation, ou de ce que perd le pilotage manuel , serait donnée par le ratio:

$$\frac{C_2 - C_3}{C_1 - C_3}$$

avec :

$C_2 \triangleq$ coût du pilotage manuel

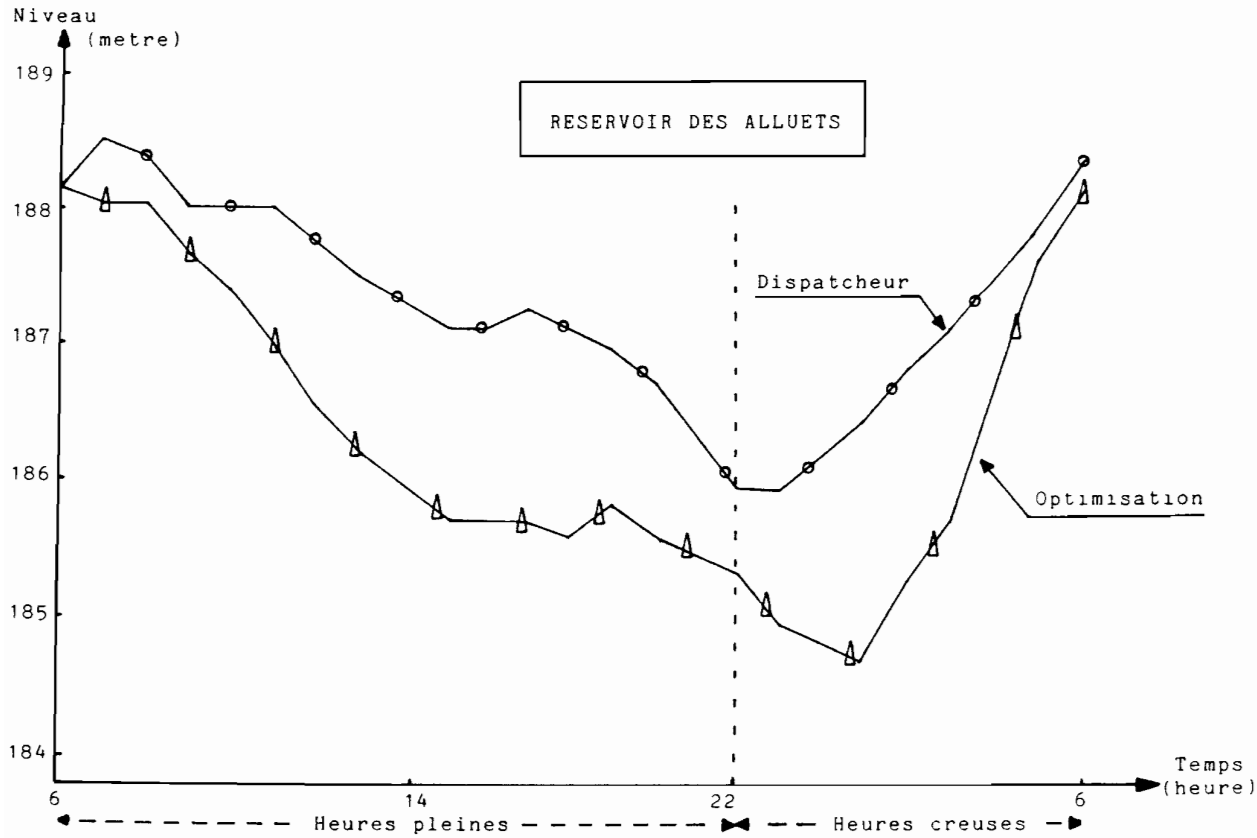
$C_3 \triangleq$ coût issu de la politique "optimale"

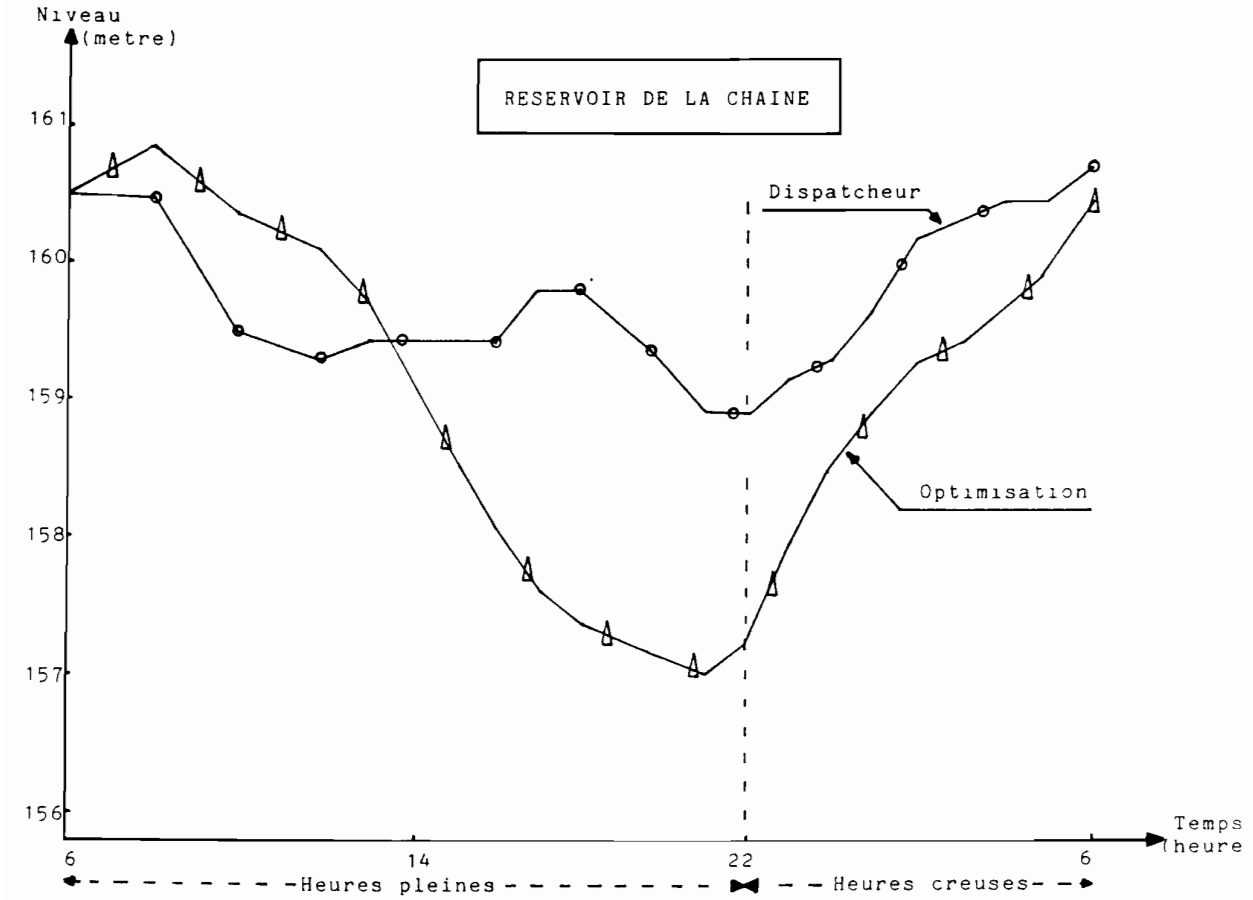
* ensuite, il y a le fait que la majeure partie du coût total (plus de 60%!) est dépensée à l'usine d'Aubergenville pour alimenter le sous-réseau de la C.E.B.. Or, la très grande simplicité du sous-réseau d'Aubergenville fait que, pour un fonctionnement normal du reste du réseau, il n'y a pratiquement rien à gagner sur ce sous-réseau, par rapport à une gestion manuelle "intelligente". Ainsi, bien que dans certains sous-réseaux, comme celui du Pecq, on puisse diminuer le coût du dispatcheur d'environ 6%, on ne peut espérer avoir globalement une telle réduction.

* enfin, la simplicité de la structure du tarif EDF (deux périodes seulement pour l'été) fait qu'on ne peut gagner que sur un transfert jour-nuit. Pour une journée d'hiver, la présence des périodes de pointe permet d'espérer des gains globaux plus importants, puisqu'il y a alors trois possibilités de transfert.

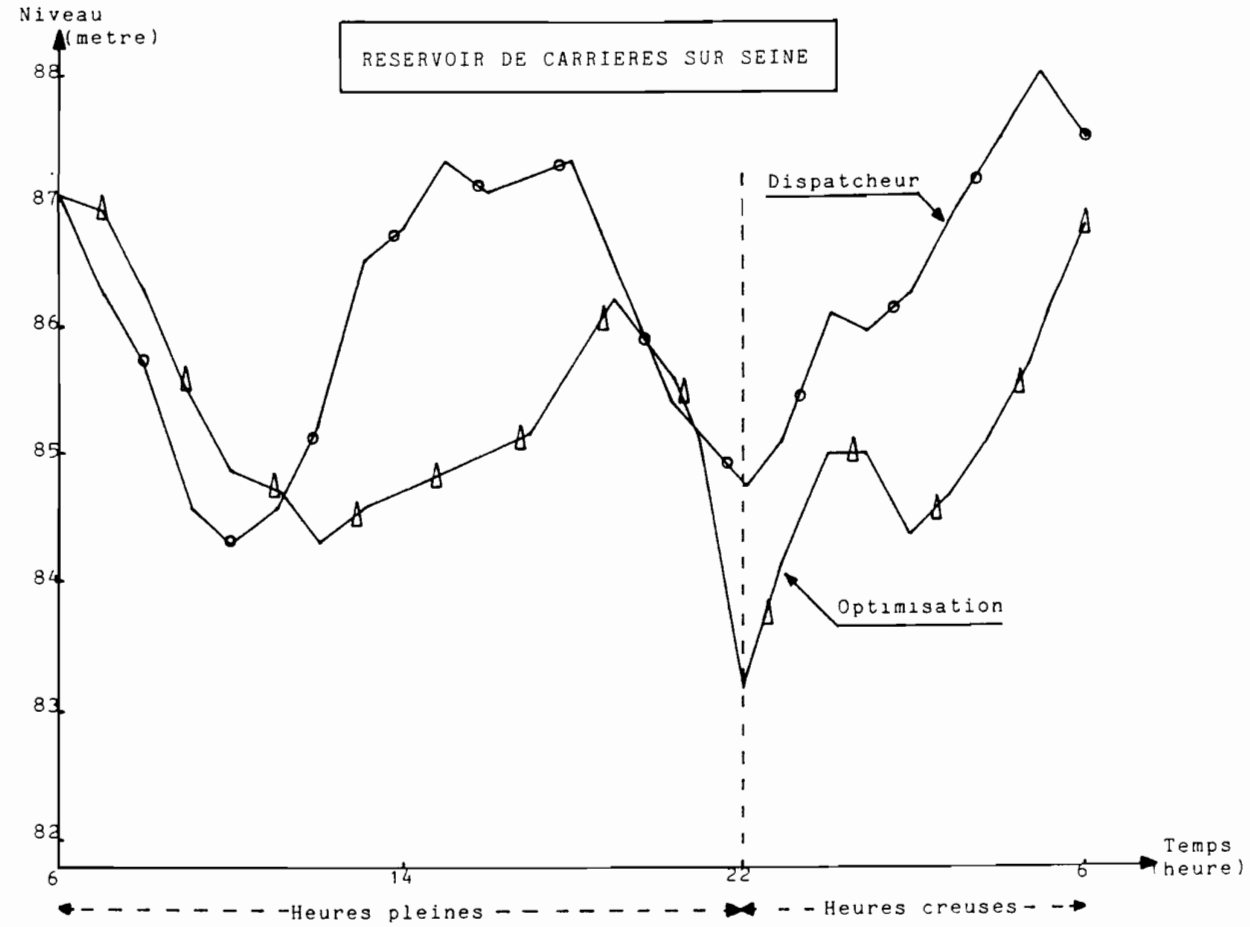
Cependant, la solution proposée par le programme d'optimisation reste meilleure, tant quantitativement que qualitativement: les coûts obtenus sont plus faibles, et ce pour chaque sous-réseau, et les capacités de stockage sont mieux utilisées. Enfin, les débits des vannes télécommandées sont assez réguliers dans le temps, ce qui est satisfaisant pour l'exploitant qui souhaite en effet cette stabilité (tout comme pour les démarrages-arrêts de pompes). Les figures 18 représentent les comportements respectifs du dispatcheur et de l'optimisation au niveau des trajectoires de certains réservoirs du réseau.

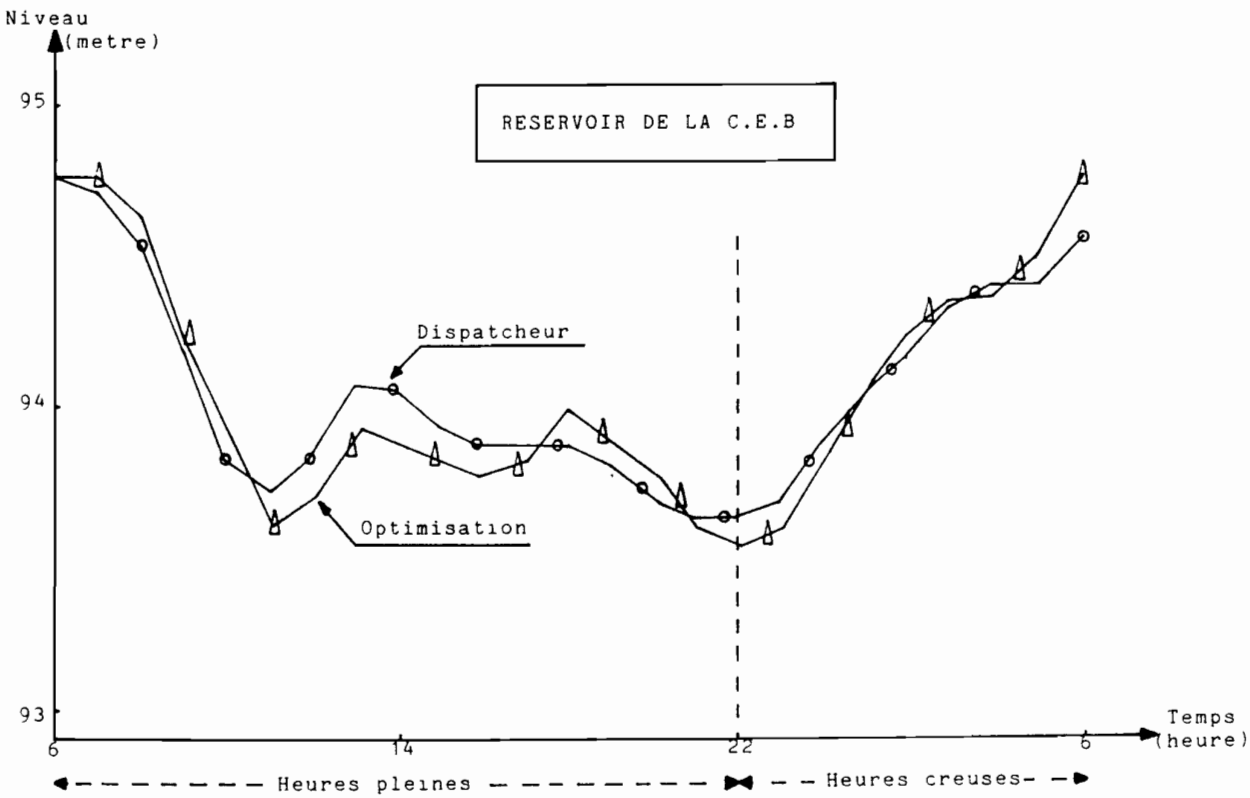
- Figure 18a -


Niveau
(metre)
189
188
187
186
185
184
RESERVOIR DES ALLUETS
Dispatcheur
Optimisation
Temps
(heure)
6
14
22
6
Heures pleines
Heures creuses


Niveau
(metre)
161
160
159
158
157
156
RESERVOIR DE LA CHAINE
Dispatcheur
Optimisation
Temps
(heure)
6
14
22
6
Heures pleines
Heures creuses

- Figure 18b -


Niveau
(metre)
RESERVOIR DE CARRIERES SUR SEINE
88
87
86
85
84
83
82
Dispatcheur
Optimisation
6
14
22
6
Temps
(heure)
Heures pleines
Heures creuses

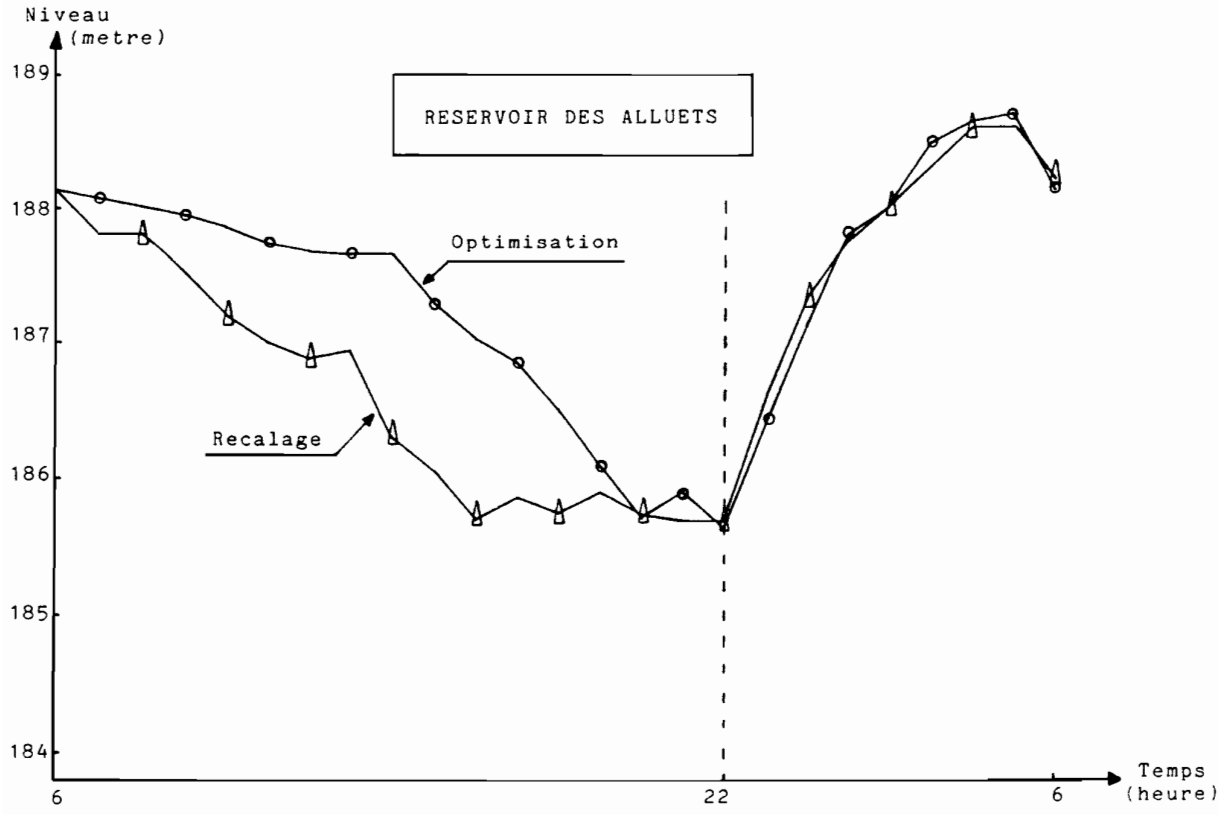

Niveau
(metre)
RESERVOIR DE LA C.E.B
95
94
93
Dispatcheur
Optimisation
6
14
22
6
Temps
(heure)
Heures pleines
Heures creuses

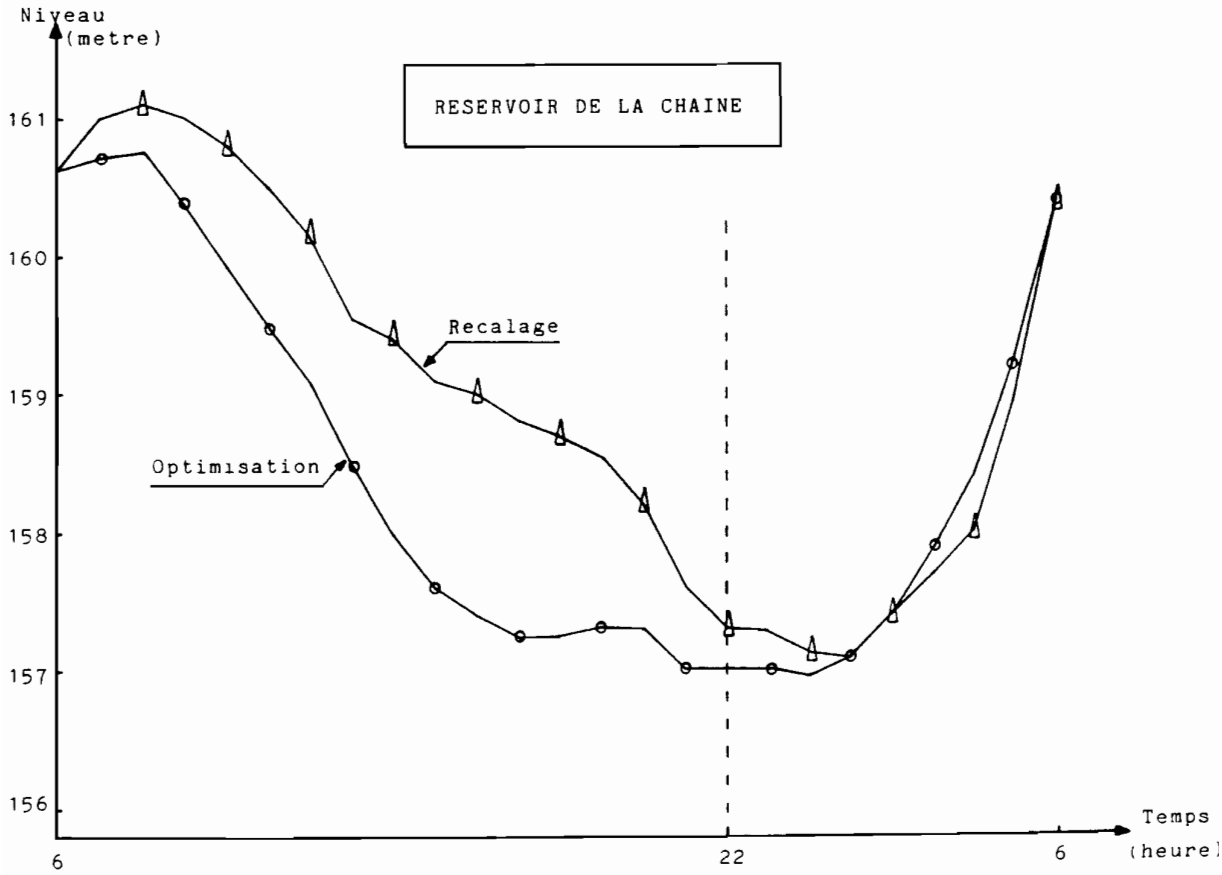
Pour avoir un panorama complet des résultats donnés par le processus d'optimisation, nous devons encore examiner ceux qui sont effectivement fournis par la série des recalages, puisque ce sont eux qui sont en définitive communiqués au dispatcheur pour application. Nous avons pour cela comparé, sur une autre journée d'été, les politiques de commandes issues de l'optimisation de nuit et des recalages. Tout d'abord, pour les mêmes données de consommation, on constate que ces deux politiques conduisent à des coûts sensiblement égaux, globalement et par sous-réseau. Les trajectoires suivies par les niveaux des réservoirs sont assez semblables, et, les quantités d'eau pompées ou transférées durant une même période de tarification EDF sont équivalentes (à titre d'exemple, le plus gros écart de débit transféré est constaté à la vanne de Davron, et est d'environ 500m3, soit moins de 4% du cube total fourni par la vanne; l'écart à la vanne de Buzenval, alimentant le sous-réseau de la CEB à partir de celui d'Aubergenville, est de 400m3, ce qui ne représente plus que 0,5% du total). Nous avons représenté les résultats de cette comparaison sur les figures 19.

Enfin, nous avons testé la qualité de la boucle fermée sur les commandes en perturbant les consommations dans deux sous-réseaux: celui de Plaisir (alimenté par vanne) et celui du Pecq (disposant de nombreuses ressources internes): nous avons procédé en calculant les commandes à appliquer aux sous-réseaux par le programme de recalage, sans remise à jour des prévisions de consommation utilisées lors de l'optimisation de nuit, mais en les appliquant avec des consommations perturbées. Ainsi, les niveaux des réservoirs obtenus (qui sont transmis comme niveaux initiaux des réservoirs pour le recalage suivant) tiennent compte de ces perturbations passées et le programme de recalage ne les prend en compte que par l'intermédiaire de ces niveaux. Nous avons choisi des perturbations uniformes, qui modifient d'un pourcentage donné la consommation prévue à chaque pas de temps. Les résultats obtenus sont très satisfaisants: par exemple, dans le cas du réseau du Pecq-Vésinet, la modification de consommation est entièrement absorbée par les productions internes. Des variations de -10%, +10% et +20% de la consommation par rapport à la prévision ont engendrées des variations du coût optimal de -8,3%, +10% et + 21,4%, (figure 20);

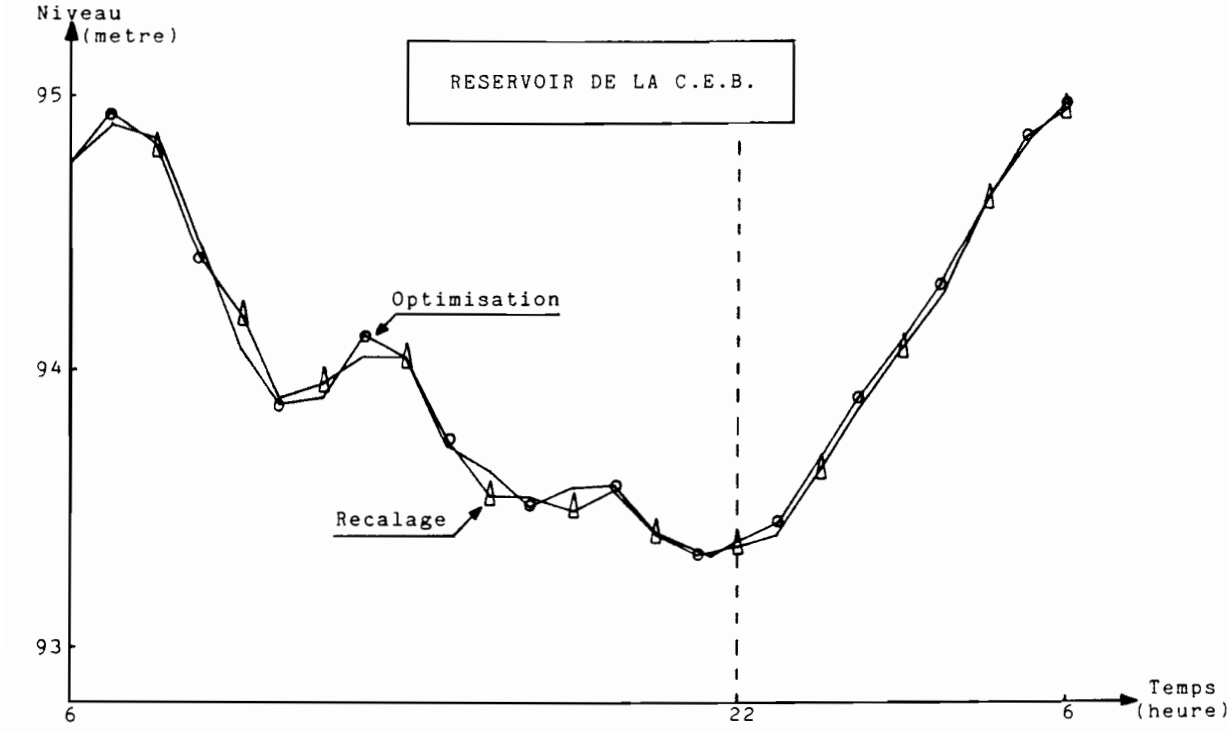
de plus même pour des variations de +30% de la consommation, on génére une séquence de commandes assurant un fonctionnement correct pour ce sous-réseau. Pour le sous-réseau de Plaisir, la série de recalages avec consommation perturbée conduit à modifier en conséquence les débits fournis par la vanne, et la répercussion en terme de coût de ces modifications sur le sous-réseau d'Aubergenville (qui fournit l'eau aux vannes) est encore très proche en pourcentage de la perturbation. Nous avons représenté figure 21 sur certains réservoirs de ces sous-réseaux, les trajectoires de niveaux obtenues.

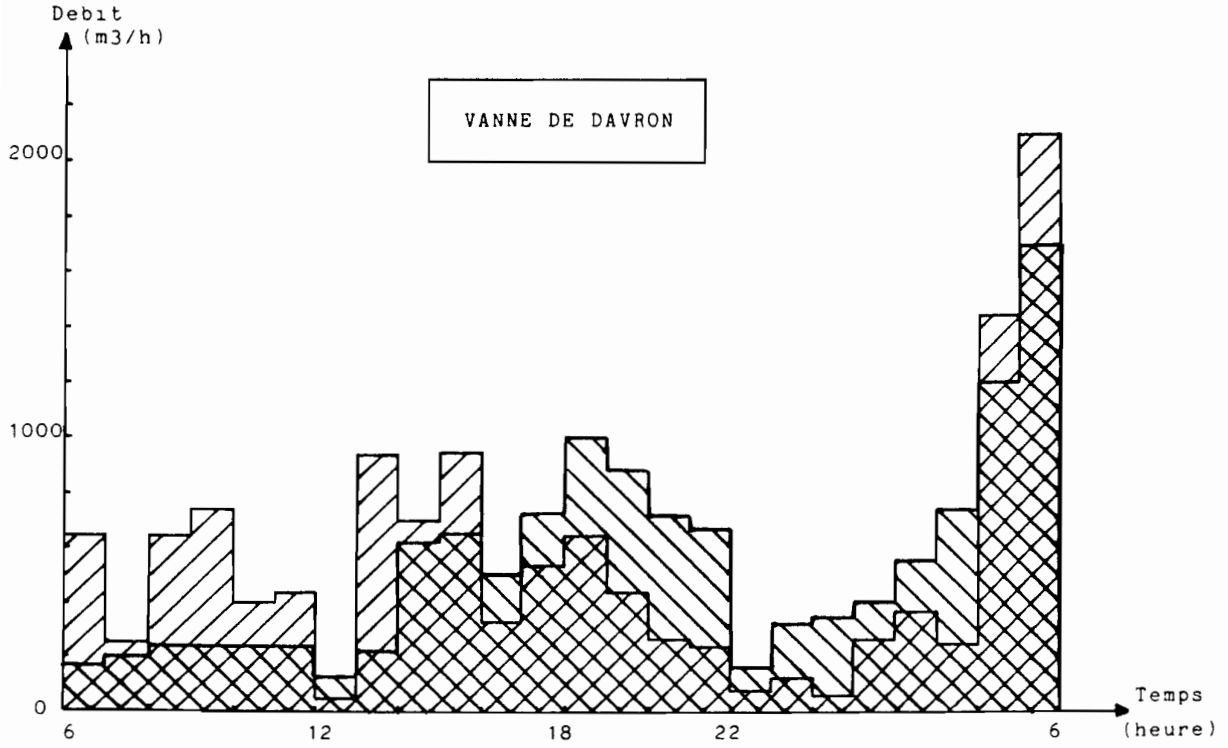
- Figure 19a -


Niveau
(metre)
189
188
187
186
185
184
RESERVOIR DES ALLUETS
Optimisation
Recalage
6
22
6
Temps
(heure)


Niveau
(metre)
161
160
159
158
157
156
RESERVOIR DE LA CHAINE
Recalage
Optimisation
6
22
6
Temps
(heure)

- Figure 19b -

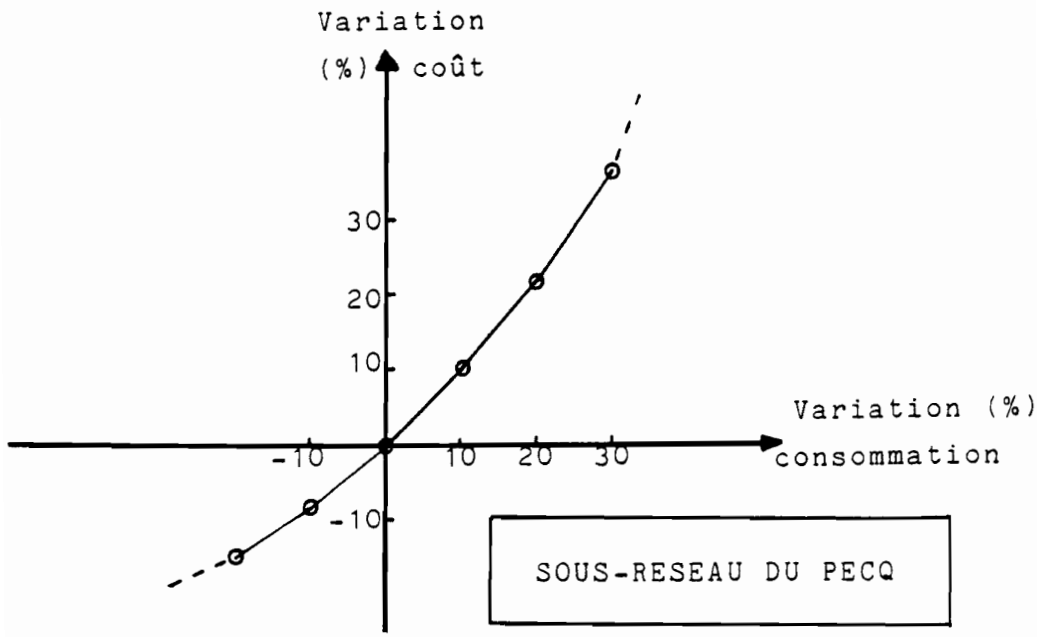




: Serie des recalages

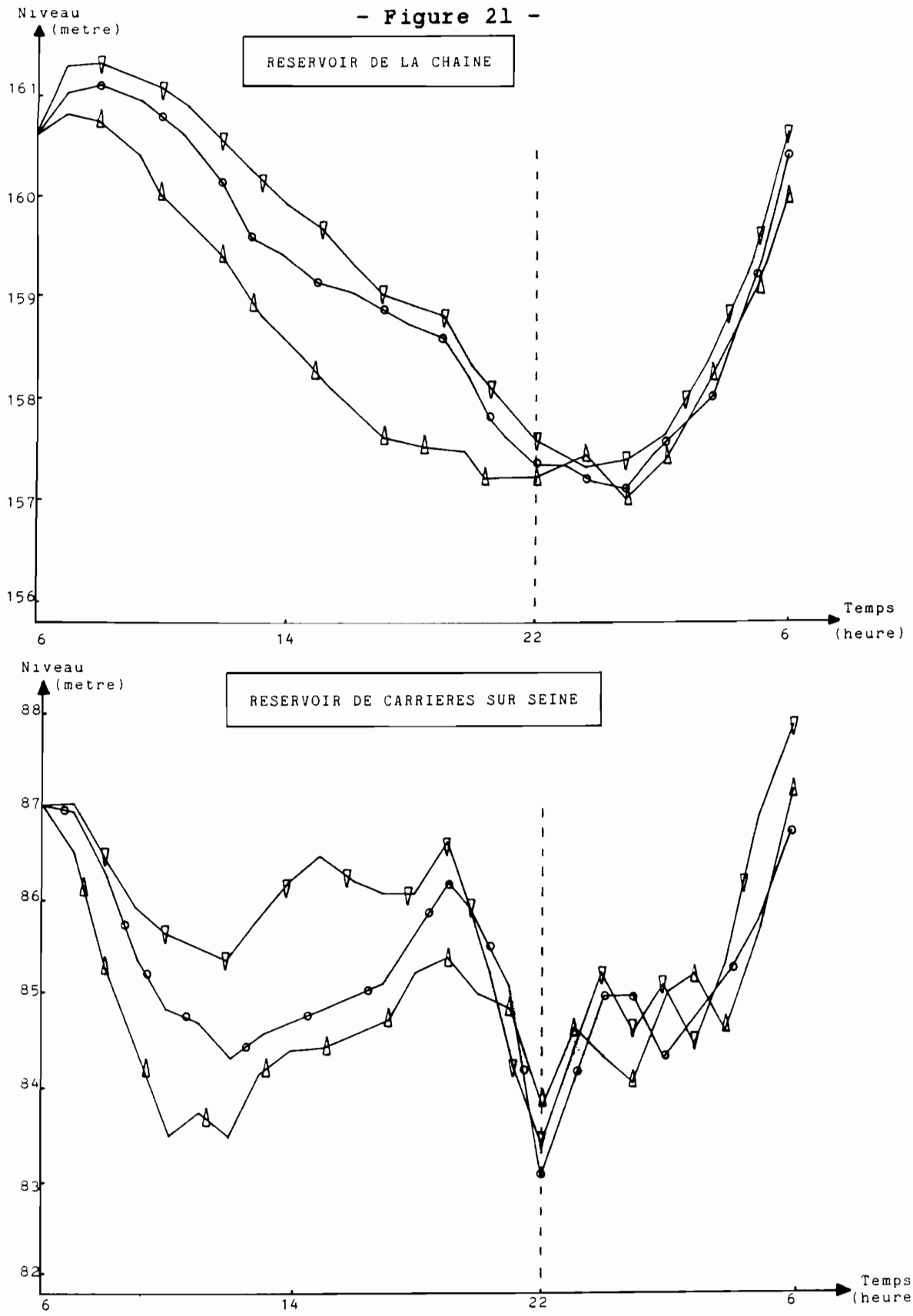
: Optimisation de nuit

- Figure 20 -



- Figure 20 -

- Figure 21 -



o Recalage avec les previsions de consommation exactes

▽ Recalage avec les previsions de consommation - 10 %

△ Recalage avec les previsions de consommation + 10 %

IV.3 - Conclusions

Le problème que nous avons traité était vraiment un problème de taille énorme, et il aura fallu utiliser toutes les caractéristiques propres au réseau pour parvenir à *rester* dans les limites imposées par le fait que l'on veut pouvoir utiliser quotidiennement les programmes d'optimisation écrits à cet effet. Ainsi, on a réussi à obtenir des temps de calcul raisonnables pour ces programmes en utilisant des méthodes théoriques développées pour le traitement des grands systèmes complexes, comme la décomposition-coordination ou l'agrégation par cohérence basée sur les perturbations singulières. Cependant, ces idées sont fondées dans un cadre théorique plus simple que la réalité, qui comporte en effet pour notre cas de nombreux et déplaisants inconvénients: présence de variables à valeurs discrètes, non différentiabilité (voir non continuité) des fonctions coûts et non stricte convexité, présence de contraintes sur les états,... Il a donc fallu se contenter le plus souvent de procédés heuristiques, inspirés de la théorie et confortés par l'expérience et les résultats, pour traiter les points délicats du problème. Cette approche n'a d'ailleurs rien de surprenant car une coopération étroite entre théorie et pratique est toujours nécessaire dans le domaine des Mathématiques Appliquées. Il n'est d'ailleurs pas exclu que certains des heuristiques utilisés trouvent une justification théorique, ce qui permettrait d'ailleurs probablement de les améliorer.

Sur le plan industriel, l'intérêt tient du fait que les logiciels écrits pour la résolution de ces problèmes vont réellement être utilisés. A cet effet, outre les problèmes de calage de modèles des sous-réseaux confiés à la société SAFEGE (filiale de la SLEE spécialisée dans l'ingénierie hydraulique) et les problèmes des prévisions de consommation, résolus par la société ARLAB (autre filiale de la SLEE -c'est d'ailleurs sur l'ordinateur de cette société qu'ont été implantés les programmes d'optimisation), une société de service en informatique, SINAC, a été chargée de résoudre

les problèmes d'interface entre les divers programmes (il faut en effet faire communiquer entre eux les programmes d'optimisation, de prévisions de consommations et d'écoute du réseau, ce dernier fournissant en temps-réel des mesures effectuées sur le réseau, en particulier les niveaux des réservoirs nécessaires aux optimisations en ligne). La SINAC était aussi chargée de mettre au point une procédure de dialogue "en clair" entre les programmes d'optimisation et l'opérateur. Bien que, dans un premier temps, le maitre d'ouvrage, SLEE, n'envisage pas d'automatiser entièrement le processus sur le réseau de la Région Parisienne Ouest, les commandes élaborées par le programme étant simplement proposées à l'opérateur qui décide de leur application réelle, cette hypothèse n'est pas exclue sur ce réseau pour l'avenir, et elle est de toute façon retenue dans le cas où les programmes pourraient être réutilisés pour d'autres sous-réseaux un peu moins complexes.

Outre cette éventuelle réutilisation, la Société Lyonnaise des Eaux espère des retombées dans les domaines suivants:

- Coût de fonctionnement (tout de même !)
- Sécurité de fonctionnement
- Stratégie de négociations avec les gros clients (consommateurs industriels ou autres sociétés de distribution d'eau
- Dimensionnement des contrats EDF souscrits aux usines de refoulement
- Planification des investissements

Il est certain que la manière d'appréhender ce genre de problèmes est en train de changer et que l'on s'oriente de plus en plus vers une utilisation extensive de l'ordinateur pour tous ces besoins. L'optimisation des consignes de refoulement et de transfert dans un réseau ne constitue qu'une "brique", d'ailleurs indispensable, de l'environnement logiciel futur souhaitable. Dans le cadre d'une coopération de type structurelle avec la SLEE, nous commençons dès maintemant à nous atteler à cette tâche.

REFERENCES

. FALLSIDE, F. and PERRY, P.F. (1975), Hierarchical Optimization of a Water Supply Network, Proceedings IEE, 122(2) 202-208.

. JOALLAND, G. (1978), Elaboration automatique des consignes pour la conduite d'un réseau de distribution d'eau, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Paris IX-Dauphine, PARIS.

. COLLINS, M., COOPER, L., HELGASON, R., KENNINGTON, J. and LEBLANC, L. (1978), Solving the Pipe Network Analysis Problem Using Optimization Techniques, Management Science, 24, 747-760.

. JARRIGE, A. (1983), Comparaison de méthodes de résolution des équations d'équilibre dans les grands réseaux non linéaires, Mémoire de DEA, Université de Paris IX-Dauphine, PARIS.

. RAO, H.S., BREE, D.W. and BENZVI, R. (1974), Extended period Simulation of Water Distribution Networks, Final Report. PB-230148, Systems Control Inc., Palo Alto, California.

. DUPONT, A (1971), Hydraulique urbaine, (Eyrolles, Paris).

. COHEN, G. (1978), Decomposition and Coordination: A Unified Approach, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-23, N°2, April 1978 (Special Issue on Large Scale Systems).

. COHEN, G. (1983), Décomposition et Coordination en Optimisation Déterministe différentiable et non différentiable. Thèse de Docteur d'Etat, Université de Paris IX-Dauphine.

. BALDUCCHI, J.F. (1982), Algorithme de recherche de point-selle de Lagrangien non strictement convexe. Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Paris IX-Dauphine.

. AOKI, M. (1978), Some approximation Methods for Estimation and Control of Large Scale Systems, IEEE Trans. Autom. Control, AC-23, N°2.

. CHOW, J.H., KOKOTOVIC, P.V. (1976), A Decomposition of Near-Optimum Regulators for Systems with Slow and Fast Modes, IEEE Trans. Autom. Control, AC-21, N°6.

. PEPONIDES, G., KOKOTOVIC, P.V., CHOW, J.H. (1983), Singular Perturbations and Time Scales in Nonlinear Models of Power Systems, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol.CAS-29.

.DEMOYER, R., HORWITZ, L.B. (1975), A System approach to water Distribution Modelling and Control, Lexington Books, D.C. Heath and Co. Lexington, Mars 1975.

. COHEN, G. (1980), Auxiliary Problem Principle and Decomposition of Optimization Problems, J.O.T.A., 32(3), 277-305.