THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Benoît CHARLET

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité :

MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse :

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE STABILISATION ROBUSTE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

soutenue le 20 novembre 1989 devant le jury composé de :

MM.	**Michel FLIESS**	Président et Rapporteur
	Jacques DESCUSSE	Rapporteur
	Georges BASTIN	Examinateur
	Jean-Michel CORON	Examinateur
	Jean-Paul GAUTHIER	Examinateur
	Jean LÉVINE	Examinateur

RÉSUMÉ

Cette thèse est consacrée à l'étude de la stabilité robuste de lois de commande de systèmes non linéaires.

La première partie s'intéresse aux systèmes non linéaires entrée-sortie linéarisés et découplés par bouclage statique.

Nous rappelons la définition de l'immersion d'un système entrée-sortie et nous distinguons deux cas : l'immersion est localement bijective, les résultats de stabilité et de robustesse se ramènent au cas linéaire là où la loi de bouclage ne présente pas de singularité ; l'immersion n'est pas bijective. Dans ce cas, la loi de bouclage a rendu une partie de la dynamique inobservable, la dynamique des zéros. Nous donnons une définition de la stabilité moins restrictive que la stabilité asymptotique, la K-stabilité, et nous donnons deux conditions nécessaires de K-stabilité, l'une étant de nature topologique et utilisant la caractéristique d'Euler-Poincaré de la sous-variété asymptotique inobservable.

La seconde partie est consacrée à l'étude de la linéarisation totale des systèmes non linéaires entrée-état par bouclage dynamique.

Nous montrons d'abord que pour les systèmes mono-entrée, la linéarisation par bouclage dynamique est équivalente à la linéarisation par bouclage statique. Nous donnons ensuite une condition nécessaire triviale de linéarisation par bouclage dynamique. Nous montrons que cette condition est suffisante pour les systèmes ayant une dimension de plus que de commande. Puis nous donnons des conditions suffisantes de linéarisation totale par bouclage dynamique pour les systèmes non linéaires multi-entrée. Des exemples, dont un tiré de l'aéronautique, nous montrent comment mettre en œuvre ces conditions.

Mots-clefs

Stabilité, Robustesse, Système non linéaire, Bouclage statique, Bouclage dynamique, Linéarisation, Dynamique des zéros, Immersion, Caractéristiques d'Euler-Poincaré.

ABSTRACT

In this thesis we study stability and robustness aspects of nonlinear system control laws.

The first part is devoted to input-output nonlinear systems decoupled and linearized by static feedback.

We recall the definition of immersion of input-output nonlinear systems and we distinguish two cases : either the immersion is locally a diffeomorphism ; then stability and robustness results are those of the linear case whenever the feedback law is nonsingular. Or the immersion is not a local diffeomorphism and the unobservability of part of the dynamics, the zero dynamics, results from the construction of the feedback law. We propose a weaker definition of stability than asymptotic stability, namely K-stability, and we give two necessary conditions of K-stability, one of them being of topological type and involving the Euler-Poincaré characteristic of the unobservable asymptotic submanifold.

The second part is concerned with complete linearization via dynamic feedback of input to state nonlinear systems.

First we show that for single-input systems, dynamic feedback linearization is equivalent to static feedback linearization. Then we give a trivial necessary condition for dynamic feedback linearization. We show that this condition is sufficient when the number of states minus one is equal to the number of inputs. We give sufficient conditions for dynamic feedback linearization of multi-input nonlinear systems. We show how these conditions work on examples, one of them being a general model of aircraft guidance.

Keywords

Stability, Robustness, Nonlinear system, Static feedback, Dynamic feedback, Linearization, Zero dynamics, Immersion, Euler-Poincaré characteristic.

REMERCIEMENTS

Je remercie Michel Fliess d'avoir accepté d'être le président de ce jury. Je lui suis reconnaissant de ses remarques et des échanges de vue que nous avons eues.

Je remercie Jacques Descusse de participer à ce jury et de l'intérêt qu'il a témoigné à mes travaux.

Je remercie Georges Bastin d'avoir accepté d'être de ce jury. Son sourire, sa moustache, et son humour resteront un excellent souvenir.

Je remercie Jean-Michel Coron. C'est grâce à ces conseils que j'ai fait connaissance du Centre d'Automatique de Fontainebleau, je lui en suis très reconnaissant ainsi que sa gentillesse qui ne s'est jamais démentie. C'est une joie pour moi de le savoir dans ce jury.

Je remercie Jean-Paul Gauthier de me faire l'honneur d'être membre du jury.

Je remercie Jean Lévine, mon directeur de thèse. Il m'a orienté dans mes travaux et aidé par ses conseils. Par des échanges fructueux et parfois animés il m'a permis de clarifier ma pensée. Je tiens aussi à le remercier pour sa culture étendue, son souci de l'orthographe, et pour son humour acide et souvent compréhensible. Pour toutes ces raisons, je lui suis infiniment reconnaissant.

Je remercie Ricardo Marino pour l'aide qu'il m'a apportée conjointement avec Jean Lévine. Je lui suis reconnaissant de sa collaboration et de ses suggestions.

Je remercie l'ensemble de mes collègues du Centre d'Automatique pour l'ambiance détendue et néanmoins studieuse qui y régnait, notament Brigitte d'Andréa-Novel avec qui j'ai longtemps partagé le même bureau et qui m'a donné quelques exemples, je la remercie de m'avoir fait partager son expérience d'un directeur de thèse commun, et Madame Le Gallic pour sa gentillesse et son humeur toujours égale.

Je remercie mes parents pour m'avoir donné le jour, éduqué, et supporté.

Je remercie le Dieu d'Abraham, d'Isaac, et de Jacob, Père, Fils, et Saint-Esprit, sans qui je ne serais pas.

Table des matières

1 INTRODUCTION **6**

2 Stabilité et robustesse des systèmes non linéaires entrée-sortie linéarisés et découplés par bouclage statique **12**

2.1 Introduction 12
2.2 Rappel 13
2.3 Cas où l'immersion est localement bijective, $q = n$ 16
2.4 Cas où l'immersion est de plus petite dimension que l'état, $q < n$ . . . 18
2.5 Application à la commande d'un bras de robot équilibriste [2] . . . 24
2.6 Conclusion 27
2.7 Annexe : Expression du Lagrangien et des couples de gravité [1] 27

3 Linéarisation par bouclage dynamique et difféomorphisme **31**

3.1 Introduction 31
3.2 Résultats préliminaires 33
3.3 Le cas mono-entrée 38
3.4 Une condition nécessaire 42
3.5 Le cas multi-entrée 43
3.6 Exemples 51
3.7 Conclusion 60

4 CONCLUSION **61**

A Quelques notions de Géométrie différentielle **67**

A.1 Sous-variétés différentiables 67
A.2 Espace tangent, Fibré tangent, Application linéaire tangente 70
A.3 Champs de vecteurs, Flots, Dérivées de Lie, Crochets de Lie 74
A.4 Covecteurs, Espace cotangent, 1-formes 77
A.5 Distributions, Distributions involutives, Théorème de Frobénius 79

B Propriétés de quelques distributions utilisées dans le calcul de lois de bouclages **81**

Chapitre 1

INTRODUCTION

Une des questions primordiales pour la commande des systèmes est celle de la stabilisation. Étant donné un système commandé, est-il possible de trouver une loi de commande qui le stabilisera autour d'un régime de fonctionnement donné, que ce soit un point d'équilibre, une trajectoire périodique ou des comportements plus complexes ? La résolution de ce problème est fondamentale pour les applications, une commande instable n'ayant aucun intérêt lors de la mise en œuvre pratique sur des systèmes réels de ladite loi de commande.

Pour les systèmes linéaires les problèmes de stabilisation autour d'une trajectoire quelconque se ramènent à la stabilisation de l'origine. Pour les systèmes non linéaires une caractérisation aussi simple de la stabilité n'est plus possible. La richesse et la complexité des phénomènes observables remettent en question la notion même de stabilité. Si pour les systèmes linéaires l'étude du comportement local au voisinage de l'origine nous permettait d'en déduire le comportement global du système, il n'en est plus de même pour les systèmes non linéaires ; les résultats globaux deviennent rares et ne concernent souvent que des classes particulières de systèmes non linéaires.

Il convient également de remarquer que dans les systèmes commandés, le concepteur cherche à faire suivre au système des comportements simples qu'il domine bien et cherche à éviter des comportements qui malgré leur intérêt du point de vue mathématique sont soit inexploitables en raison de leur complexité soit même indésirables en raison des efforts physiques qu'ils exigent du système, soit plus simplement que leurs performances ne satisfont pas à des critères industriels. La notion de stabilité que le mathématicien trouvera convenable pour un système non linéaire pourra être inacceptable pour l'automaticien si le comportement "stable" du système est aberrant vis à vis de ses caractéristiques physiques et des objectifs demandés.

Nous nous intéresserons dans ce mémoire à la stabilisation des systèmes non linéaires et à la robustesse de la stabilité du système en boucle fermée vis à vis de perturbations de la dynamique. La notion de robustesse que nous étudions est proche de celle de la stabilité structurelle. En effet, nous ne considèrerons pas le cas où lors de la modélisation une partie de l'état a été négligée (dynamique parasite) mais simplement le cas où la dynamique est entachée d'erreurs "petites" en un sens à préciser.

L'étude des systèmes commandés se subdivise en deux approches complémentaires :

l'approche entrée-sortie, et l'approche entrée-état.

Dans l'approche entrée-sortie, les systèmes sont définis par les relations dynamiques entre les sorties, dont nous voulons contrôler l'évolution au cours du temps, et les entrées, sur lesquelles nous pouvons agir directement pour commander les sorties. En linéaire cette relation dynamique est décrite par une matrice de transfert dont les pôles caractérisent la stabilité du système ou par un système dynamique linéaire dont les valeurs propres correspondent aux pôles de la matrice de transfert. Le problème de la stabilisation d'un système entrée-sortie par retour (dynamique) de sortie devient un problème de placement de pôles sur la matrice de transfert ou du placement de valeurs propres par le choix d'un compensateur. En plus de la stabilisation, on peut s'intéresser au découplage entrée-sortie par retour d'état : l'évolution de chaque sortie ne dépend que d'une entrée et chaque entrée n'influe que sur une sortie. P.L. Falb et W.A. Wolovich [12] donnèrent des conditions nécessaires et suffisantes de découplage entrée-sortie (voir aussi E.G. Gilbert [13] et E.G. Gilbert et J.R. Pivnichny [14]). W.M. Wonham ([31]) montra que si l'on utilise un précompensateur et un bouclage, il n'y a plus de contrainte structurelle (hormis l'inversibilité à droite) pour découpler les systèmes entrée-sortie (voir aussi W.M. Wonham et A.S. Morse [32], [25]).

Ces questions se posent en non linéaire, cependant les outils à notre disposition ne sont plus les mêmes. L'utilisation du concept de distribution (f,g)-invariantes, qui généralise celle de sous-espace (A,B)-invariants en linéaire (cf [17], [19]), a permis, en 1981, à R.M. Hirschorn [17] et à A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, S.D. Monaco [21] de résoudre le problème du découplage entrée-sortie et du rejet de perturbations par bouclage statique. Ces mêmes méthodes permettent d'étudier et de résoudre le problème de la linéarisation entrée-sortie, i.e. de faire en sorte que la relation entrée-sortie soit la même que celle d'un système linéaire (problème dont l'équivalent linéaire serait celui du suivi de modèle).

Lorsqu'en plus de la linéarisation et du découplage entrée-sortie on veut stabiliser le système, des contraintes structurelles, similaires à celle du découplage stable en linéaire, apparaissent, liées à ce que C. Byrnes et A. Isidori ont appelé la dynamique des zéros [3] [19]. Cette dernière apparaît lorsqu'une partie de l'état a été rendue inobservable par la loi de bouclage. Elle est l'extension au non linéaire de ce que sont les zéros de la matrice de transfert en linéaire.

Dans le Chapitre 2, nous nous plaçons dans le cadre de la linéarisation et du découplage entrée-sortie par retour d'état. C. Byrnes et A. Isidori [3] montrèrent que si la dynamique des zéros était exponentiellement stable, le système était localement exponentiellement stable. Cependant, en non linéaire, la notion de stabilité exponentielle est parfois trop restrictive. Nous donnons ici une définition plus large de la stabilité, la K-stabilité. Un système est dit K-stable lorsque, d'une part sa relation entrée-sortie est linéaire stable, d'autre part lorsque les trajectoires du système vont vers un compact attractif. Nous donnons deux conditions nécessaires de K-stabilité, l'une de nature topologique reliant la dynamique des zéros à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la sous-variété sur laquelle est définie ladite dynamique, l'autre liée au comportement du système au voisinage des singularités de la loi de bouclage. Nous montrons que la K-stabilité est robuste vis à vis des perturbations des champs de vecteurs décrivant la dynamique. Enfin nous donnons

un exemple tiré de la robotique ([1]) de systèmes K-stable qui ne vérifie pas la condition suffisante donnée par C. Byrnes et A. Isidori [3].

Pour éviter d'affronter le problème de la stabilité de la dynamique des zéros, on peut se poser le problème de savoir si un sytème est équivalent par bouclage et difféomorphisme à un système linéaire commandable. A.J. Krener, en 1973, donna les conditions pour qu'un système non linéaire soit localement difféomorphe à un système linéaire. R. Brockett [2], en 1978, étudia le problème de la linéarisation par bouclage statique et difféomorphisme, enfin B. Jakubczyk et W. Respondek [23], en1980, et L.R. Hunt, R. Su, et G. Meyer [18], en 1983, caractérisèrent les systèmes localement linéarisables par bouclage statique régulier et difféomorphisme. Lorsque cette linéarisation locale n'est pas posible, R. Marino [24], en 1986, étudia le problème de la linéarisation partielle et caractérisa la taille et la structure du plus grand sous-système linéarisable.

Tant dans le cadre des approches entrée-sortie que des approches entrée-état, on a senti le besoin d'élargir la classe des transformations utilisées de façon à pouvoir traiter les problèmes que les techniques de bouclage statique d'état ne permettaient pas de résoudre. Notons que pour la linéarisation entrée-état, les conditions sont particulièrement non génériques. L'extension aux bouclages dynamiques et difféomorphismes, furent introduit en linéaire (cf W.M. Wonham [31]) pour résoudre le problème du découplage entrée-sortie. R.M. Hirschorn [16], en 1979, et S.N. Singh [27] [28], en 1980 et 1981, utilisèrent ces techniques de bouclage dynamique pour étudier le problème de l'inversion des systèmes non linéaires entrée-sortie, et le découplage par bouclage dynamique. J. Descusse et C.H. Moog, en 1985 [7] et en 1987 [8], M. Fliess, en 1987 [19], et en 1989 [18], H. Nijmeijer et W. Respondek [26], en 1988, caractérisèrent les systèmes non linéaires entrée-sortie découplables par bouclage dynamique d'état. A. Isidori [20], et A. Isidori, C.H. Moog, et A. De Luca [22], en 1986, donnèrent des conditions suffisantes pour linéariser et découpler par bouclage dynamique un système non linéaire entrée-sortie. Notre propos est, dans le Chapitre 3, d'étendre au bouclage dynamique les résultats de linéarisation entrée-état afin d'obtenir un bouclage stabilisant robuste pour le système non linéaire considéré.

Le chapitre 3 reprend des résultats établis en collaboration avec J. Lévine et R. Marino (cf [4], [5], [6]). Nous montrons un premier résultat négatif concernant les systèmes mono-entrée : un système mono-entrée est linéarisable par bouclage dynamique si et seulement s'il l'est par bouclage statique. Autrement dit, les techniques de bouclage dynamique n'apportent rien pour la linéarisation des systèmes mono-entrée. La linéarisation par bouclage dynamique est essentiellement un phénomène multi-entrée.

Nous établissons ensuite une condition nécessaire triviale : un système non linéaire linéarisable par bouclage dynamique a son approximation linéaire tangente commandable. Puis nous donnons deux conditions suffisantes de linéarisation par bouclage dynamique. Des exemples nous permettent de voir comment utiliser ces théorèmes lorsque l'on connaît la structure des crochets de Lie des champs de vecteurs de commande et de dynamique propre.

Nous comparons nos résultats avec ceux établis par M. Fliess [10] et nous donnons un exemple d'application au guidage-pilotage d'engin aérodynamique.

Références

[1] B. D'ANDRÉA, J. LÉVINE : *Synthesis of nonlinear state feedback for the stabilization of a class of manipulators*, in Information and Decision Technologies 14 (1988) 145-168.

[2] R.W. BROCKETT : *Feedback invariants for nonlinear systems*, Proc. VII IFAC Congress, Helsinki, p. 1115-1120, 1978.

[3] C. BYRNES, A. ISIDORI : *Asymptotic expansions, root-loci and the global stability of nonlinear feedback systems*, in M. Fliess and M. Hazewinkel, Eds, Algebraic and Geometric Methods in Control Theory, Reidel, Dordrecht-Boston, 1986.

[4] B. CHARLET, J. LÉVINE, R. MARINO : *Two sufficient conditions for feedback linearization*, in Analysis and Optimization of Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, A. Bensoussan and J.L. Lions Eds., pp. 181-192, Springer-Verlag, 1988.

[5] B. CHARLET, J. LÉVINE, R. MARINO : *On dynamic feedback linearization*, Systems & Control Letters 13 (1989), pp. 143-151.

[6] B. CHARLET, J. LÉVINE, R. MARINO : *Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization*, submitted to SIAM J. Control & Optimiz.

[7] J. DESCUSSE, C.H. MOOG : *Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems*, Int. J. Control, vol. 42, N° 6, pp. 1387-1398, 1985.

[8] J. DESCUSSE, C.H. MOOG : *Dynamic decoupling for right invertible nonlinear systems*, Systems & Control Letters, Vol. 8, N° 4, pp. 345-349, 1987.

[9] M. FLIESS : *Nonlinear control theory and differential algebra : some illustrative examples*, 10 $^{\text{th}}$ IFAC World Congress, Munich 1987, vol. 8, pp. 114-118.

[10] M. FLIESS : *Généralisation non linéaire de la forme canonique de commande et linéarisation par bouclage*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 377-379, 1989.

[11] M. FLIESS : *Automatique et corps différentiels*, Forum Math. **1** (1989), pp. 227-238.

[12] P.L. FALB, W.A. WOLOVICH : *Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems*, IEEE Trans. Aut. Control., AC-12 (6), 1967, pp. 651-659.

[13] E.G. GILBERT : *The decoupling of multivariable systems by state feedback*, SIAM J. Control, 7 (1), 1969, pp. 50-63.

[14] E.G. GILBERT, J.R. PIVNICHNY : *A computer program for the synthesis of decoupled multivariable feedback systems*, IEEE Trans. Aut. Control, AC-14 (6), 1969, pp. 652-659.

[15] R. HERMANN, A. J. KRENER; *Nonlinear controllability and observability.* IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC 22, N° 5, 1977, pp. 728-740.

[16] R.M. HIRSCHORN : *Invertibility of multivarible nonlinear control systems*, IEEE Trans. Aut. Control AC-24, pp. 855-865, 1979.

[17] R.M. HIRSCHORN : *(A-B) invariant distributions and disturbances decoupling of nonlinear systems*, SIAM J. Control & Optimiz., 19 (1981), pp. 1-19.

[18] L.R. HUNT, R. SU, G. MEYER : *Design for multi-input nonlinear systems*, in Differential Geometric Control Theory, R. Brockett, R. Millman, H. Sussmann eds., pp. 268-298, Birkhäuser, 1983.

[19] A. ISIDORI: *Non linear control systems: an introduction.* Communications and Control Engineering Series, 2 nd Edition, Springer Verlag, 1989.

[20] A. ISIDORI : *Control of nonlinear systems via dynamic state feedback*, Algebraic and Geometric Methods in nonlinear control theory, M. Hazewinkel and M. Fliess eds., Reidel, 1986.

[21] A. ISIDORI, A. J. KRENER, C. GORI-GIORGI, S. MONACO : *Nonlinear decoupling via feedback*, IEEE Trans. Aut. Control 26, p. 331-345, 1981.

[22] A. ISIDORI, C.H. MOOG, A. DE LUCA : *A sufficient condition for full linearization via dynamic state feedback*, Proc. 25 th IEEE CDC, Athens, 1986.

[23] B. JAKUBCZYK, W. RESPONDEK : *On linearization of control systems*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math., vol. 28, 9-10, p. 517-522, 1980.

[24] R. MARINO : *On the largest feedback linearizable subsystem*, Systems & Control Letters 6 (1986) 345-351.

[25] A.S. MORSE, W.M. WONHAM : *Decoupling and pole assignement by dynamic compensation*, SIAM J. Control 8 (3), 1970, pp. 317-337

[26] H. NIJMEIJER, W. RESPONDEK : *Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-33, pp. 1065-1070, 1988.

[27] S.N. SINGH : *Decoupling of invertible nonlinear systems with state feedback and precompensation*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-25 (1980), pp. 1237-1239.

[28] S.N. SINGH : *A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-26 (1981), pp. 595-598.

[29] H.J. SUSSMANN : *Lie brackets, real analyticity and geometric control*, in Differential Geometric Control Theory, R.W. Brockett, R.S. Millmann, H.J. Sussmann Eds., Birkhäuser, Boston MA, pp. 1-116, 1983.

[30] H.J. SUSSMANN, V. JURDJEVIC : *Controllability of nonlinear systems*, J. Diff. Eqs., 12, pp. 95-116, 1972.

[31] W.M. WONHAM : *Linear Multivariable Control, a Geometric Approach*, Lecture notes in economics and mathematical systems, Springer-Verlag, N° 101, 1974.

[32] W.M. WONHAM, A.S. MORSE : *Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : a geometric approach*, SIAM J. Control 8 (1), 1970, pp. 1-18.

Chapitre 2

Stabilité et robustesse des systèmes non linéaires entrée-sortie linéarisés et découplés par bouclage statique[1]

2.1 Introduction

Les sytèmes que nous étudions ci-dessous sont des systèmes non linéaires entrée-sortie. Il semble naturel de demander un comportement simple à la relation entrée-sortie après bouclage, en l'occurence, on s'intéressera aux systèmes dont la fonctionnelle entrée-sortie est linéarisable par bouclage statique. Le problème du découplage entrée-sortie stable par retour d'état a été étudié en linéaire par P.L. Falb et W.A. Wolovich [22], en 1967 Ils mirent en évidence des conditions nécessaires et suffisantes de découplage entrée-sortie. Cependant une partie de la dynamique, liée aux zéros finis de la matrice de transfert, devient inobservable et conditionne la stabilité du système en boucle fermée. W.M. Wonham [54] montra que ces contraintes pouvaient être supprimées lorsque l'on s'autorisait un précompensateur et un bouclage.

Ces deux types de conditions ont leurs équivalents en non linéaire. Celles liées aux zéros à l'infini en linéaire deviennent des conditions de régularité d'une matrice appelée matrice de découplage (cf R.M. Hirschorn [27] et A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, et S. Monaco [31]). L'équivalent non linéaire des zéros finis étant la notion de "dynamique des zéros" introduites par C. Byrnes et A. Isidori [8] (voir également A. Isidori [29]). Ils donnèrent une condition suffisantes de stabilité d'un système entrée-sortie découplé par bouclage statique : si la dynamique des zéros admet un point d'équilibre asymptotiquement stable, le système complet est découplable et localement stabilisable par bouclage statique.

Le premier résultat de ce chapitre concerne les systèmes non linéaires sans dynamique des zéros. Nous montrons alors que les résultats de stabilité et de robustesse sont essentiellement ceux d'un système linéaire mais vu au travers de coordonnées non linéaires.

Nous montrons ensuite que la notion de stabilité utilisée par C. Byrnes et A. Isidori est

[1] Les résultats de ce chapitre ont déjà fait l'objet d'une publication (cf [9]).

parfois trop restrictive. Nous définissons d'abord la K-stabilité : un système non linéaire entrée-sortie linéarisé et découplé par bouclage statique est K-stable si sa relation entrée-sortie est asymptotiquement stable et si toutes les trajectoires du système bouclé vont vers un compact attractif. Nous donnons deux conditions nécessaires de K-stabilité, l'une portant sur le comportement du système bouclé au voisinage des singularités de la loi de bouclage, l'autre de nature topologique reliant les propriétés des points stationnaire de la dynamique des zéros à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la sous-variété sur laquelle elle est définie. Puis nous étudions dans quelle mesure la K-stabilité est préservée lorsque les champs de vecteurs définissant la dynamique du système sont perturbés. Enfin nous donnons un exemple tiré de la robotique (cf B. d'Andréa-Novel et J. Lévine [2]) K-stable qui ne vérifie pas les conditions suffisantes de stabilité données par C. Byrnes et A. Isidori.

2.2 Rappel

Une large classe de systèmes physiques est constituée des systèmes décrits par des équations dites linéaires analytiques :

$$(\Sigma)\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \\ y_j &= h_j(x) \qquad\qquad j = 1, \ldots, q, \end{cases}$$

où les champs de vecteurs $f, g_1, \ldots, g_m$ et les fonctions $h_1, \ldots, h_q$ sont analytiques.

Classiquement, le vecteur des sorties y représente les mesures effectuées sur le système. Dans notre cas, on supposera que tout l'état est mesuré ; le vecteur des sorties y représentera généralement les grandeurs physiques qui nous intéressent plus particulièrement ; mais ce ne sera pas toujours le cas, le choix de y peut relever de considérations plus "mathématiques" que "physiques" (pour assurer la stabilité par exemple...). Une des manières de commander le système est d'imposer un comportement entrée-sortie donné, sous réserve que cela soit possible. Un des comportements simples particulièrement intéressant est d'imposer une relation entrée-sortie linéaire, et si possible découplée dont nous rappelons la définition :

DÉFINITION 2.1
On dit que le système (Σ) *est découplé si et seulement si les sorties* y_j, $1 \leq j \leq q$ *vérifie des équations différentielles du type suivant :*

$$\varphi_j(y_j, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{\lambda_j} y_j}{\mathrm{d}t^{\lambda_j}}, u_j) \quad , \quad 1 \leq j \leq q.$$

y_j *vérifie une équation différentielle où n'interviennent que les dérivées de* y_j *et l'entrée* u_j.

On dit que le système (Σ) *a une relation entrée-sortie linéaire si et seulement s'il existe un difféomorphisme* $x \mapsto (\xi, z)$ *et des matrices* A, B, *et* C *tels que* (Σ) *s'écrive :*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + Bu \\ \dot{z} &= a(\xi, z) + b(\xi, z)u \\ y &= C\xi \end{aligned}$$

En particulier, la relation entrée-sortie entre u et y peut être décrite par une matrice de transfert.

(Σ) est découplable (respectivement linéarisable) s'il existe un bouclage statique $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, avec $\beta(x)$ inversible quel que soit x, et un difféomorphisme $z = \varphi(x)$ tels que le système en boucle fermée soit découplé (respectivement linéaire).

Nous nous placerons pour simplifier dans le cas de systèmes carrés, $m = q$. Nous utiliserons les notations usuelles de la géométrie différentielle rappelées dans l'Appendice A. Nous rappelons pour mémoire l'expression de la dérivée de Lie en coordonnées.

Si $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = f_1(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x)\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ est un champ de vecteurs et $h = h(x)$ une fonction, on a

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^1 h &= L_f h = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial h}{\partial x_i} \\ L_f^{k+1} h &= L_f L_f^k h \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

Introduisons maintenant quelques notations propres à l'Automatique :

DÉFINITION 2.2

Soient

$$\rho_i = \inf\{k \mid L_{g_j} L_f^k h_i \neq 0 \text{ pour au moins un } j\}.$$

Les nombres ρ_i sont appelés les nombres caractéristiques du système (Σ).

On définit également l'immersion Θ (cf M. Fliess et I. Kupka [21]) :

DÉFINITION 2.3

On appelle immersion l'application Θ suivante :

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{\Theta} & \mathbf{R}^q \\ x & \longmapsto & \xi, \end{array}$$

où $q = m + \sum_{i=1}^{m} \rho_i$, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$, *et* $\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_{i,0} \\ \vdots \\ \xi_{i,\rho_i} \end{pmatrix}$ *les* $\xi_{i,k}$ *valant* $\xi_{i,k} = L_f^k h_i$.

On définit enfin les matrices Δ et Δ_0

DÉFINITION 2.4

Δ est la matrice carrée d'éléments

$$\Delta_j^i = L_{g_j} L_f^{\rho_i} h_i \; ; \tag{2.1}$$

Δ est appelée matrice de découplage et Δ_0 est la matrice colonne d'éléments

$$\Delta_0^i = L_f^{\rho_i+1} h_i. \tag{2.2}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat bien connu sur la linéarisation et le découplage par bouclage d'état :

THÉORÈME 2.1 *([9],[29],[31])*
Le système (Σ) *est linéarisable et découplable par bouclage d'état si et seulement si la matrice de découplage* Δ *est inversible ; dans ce cas, les matrices* α *et* β *qui caractérisent la loi de bouclage s'expriment sous la forme :*

$$\alpha^i = \sum_{j=1}^{m} (\Delta^{-1})^i_j (< \omega_j, \xi_j > - \Delta_0^j) \quad , \quad \beta = \Delta^{-1} D, \tag{2.3}$$

où D *est une matrice constante diagonale inversible* $m \times m$*, et* ω_i *est une forme linéaire quelconque sur* $\mathbf{R}^{\rho_i+1}$*. On utilisera la notation*

$$\alpha = \Delta^{-1}(\Omega\xi - \Delta_0).$$

Avec la loi de bouclage (2.3), (Σ) a le même comportement entrée-sortie que le système (ΣI) :

$$(\Sigma I) \quad \begin{cases} \dot{\xi} &= F\xi + Gv \\ y &= H\xi, \end{cases}$$

où $\xi \in \mathbf{R}^q$, F, G, et H sont des matrices bloc-diagonales :

$$\begin{aligned} F &= diag(F_1, \ldots, F_m), \\ G &= diag(G_1, \ldots, G_m), \\ H &= diag(H_1, \ldots, H_m), \end{aligned}$$

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \omega_{i,1} & \omega_{i,2} & \cdot & \cdot & \omega_{i,\rho_i+1} \end{pmatrix} \quad , \quad G_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ D_i^i \end{pmatrix} \quad , \quad G_i \in \mathbf{R}^{\rho_i+1},$$

$$H_i = (1, \ldots, 0) \quad , \quad H_i \in (\mathbf{R}^{\rho_i+1})^*$$

(on rappelle que D est une matrice diagonale.)

(ΣI) se décompose en m sous-systèmes indépendants. On remarque que les pôles de chaque sous-systèmes peuvent être choisis indépendament à travers les ω_i dans le demi-plan gauche ouvert. On peut donc supposer sans perte de généralité que chaque sous-système est stable.

Cette technique de commande, si elle permet d'imposer un comportement entrée-sortie linéaire découplé stable lorsque Δ est inversible ne permet pas toujours de conclure sur la stabilité du système (Σ) proprement dit. Il nous faut distinguer deux cas :

- Θ est un difféomorphisme local, dans ce cas la stabilité du système (Σ) se réduit à la stabilité du système immergé (ΣI).

- Θ n'est pas un difféomorphisme local, dans ce cas, la loi de bouclage a rendu inobservable une partie du système (Σ) (voir Proposition 2.5), la stabilité du système (ΣI) ne rend plus compte que partiellement de la stabilité du système complet, il nous faut également étudier la stabilité de la dynamique inobservable dite dynamique des zéros.

Les résultats que nous avons énoncés s'expriment en fonction de l'immersion Θ et de la matrice de découplage Δ. Plus précisément, nous avons vu que notre problème était résoluble si et seulement si la matrice de découplage était inversible. Rien n'a été dit jusqu'à présent sur l'immersion, en particulier sur ses singularités ; le théorème suivant montre que les singularités de Θ sont comprises dans les singularités de Δ, et qu'il n'y a pas besoin de les traiter de façon spécifique.

THÉORÈME 2.2

Soit $T_x\Theta$ l'application tangente en x à Θ. La singularité de Θ en x, i.e. $\mathrm{rg}\, T_x\Theta < q$, *implique la singularité de Δ en x, i.e.* $\det \Delta = 0$.

Démonstration :

Par l'absurde, supposons que $\mathrm{rg}\, T_x\Theta < q$ et que $\Delta(x)$ soit inversible. Dans ce cas Δ est inversible dans un voisinage de x, et le Théorème 2.1 s'applique, le système (Σ) s'immerge dans le système linéaire commandable (ΣI). On a donc

$$\begin{aligned} T\Theta(f) &= F\xi \\ T\Theta(g_i) &= G_i \end{aligned}$$

où G_i est la i $^{\text{ème}}$ colonne de G. L'application tangente $T\Theta$ étant naturelle pour le crochet de Lie (i.e. si $T\Theta(V_i) = W_i$, $i = 1, 2$, alors $[T\Theta(V_1), T\Theta(V_2)] = [W_1, W_2]$), on en déduit que $T\Theta(\mathrm{ad}_g^k g_i) = (-1)^i F G_i$. Le système (ΣI) étant commandable, nous avons $\mathrm{rg}(G, FG, \ldots, F^{q-1}G) = q$, ce qui implique que $\mathrm{rg}\, T_x\Theta \geq q$, ce qui contredit l'hypothèse $\mathrm{rg}\, T_x\Theta < q$. □

2.3 Cas où l'immersion est localement bijective, $q = n$

C'est le cas le plus simple. On suppose que Δ est presque partout inversible. Le système (Σ) en boucle fermée est localement difféomorphe au système (ΣI), ses propriétés de stabilité et de robustesse sont essentiellement celles d'un système linéaire, vu après un changement non linéaire de coordonnées.

DÉFINITION 2.5

On dit que $\bar{x}$ est un point nominal de (Σ) si et seulement si $\Theta(\bar{x}) \in Im\, F^{-1}G$ et $\Delta(\bar{x})$ inversible. Cela signifie qu'il existe $\bar{u}$ et $\bar{v}$ tels que $\bar{u} = \alpha(\bar{x}) + \beta(\bar{x})\bar{v}$ et

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0. \tag{2.4}$$

On rappelle que le placement de pôles du système immergé est assuré par le choix des ω_i. En particulier, si $\bar{x}$ est un point nominal de (Σ), comme Θ est un difféomorphisme local au voisinage de $\bar{x}$, le système (Σ) en boucle fermée est asymptotiquement stable au voisinage de $\bar{x}$.

On s'intéresse maintenant à la robustesse de la loi de bouclage (2.3) lorsque les champs de vecteurs $f, g_1, \ldots, g_m$ ne sont pas exactement connus. Une formulation équivalente consiste à supposer que les champs de vecteurs étudiés peuvent être perturbés par les champs inconnus $\varepsilon\tilde{f}, \varepsilon\tilde{g}_1, \ldots, \varepsilon\tilde{g}_m$, tandis que les matrices α et β et l'immersion Θ, construites à partir des données restent inchangées. Des termes correctifs doivent être ajoutés au système immergé pour tenir compte de ces perturbations inconnues (supposées petites).

Si l'on considère des perturbations de sorties qui n'affectent pas la structure des nombres caractéristiques, les perturbations dues à ces errurs affectant les matrices Δ et Δ_0 sont du même type que celle étudiées ici. On peut donc se restreindre sans perte de généralité aux perturbations de Δ et Δ_0 uniquement créées par des "erreurs" sur les champs de commande et de dynamique propre.

Comme $\xi_{i,k} = L_f^k h_i$, on aura

$$\dot{\xi}_{i,k} = L_{f+\varepsilon\tilde{f}} L_f^k h_i + \sum_{j=1}^{m} u_j L_{g_j+\varepsilon\tilde{g}_j} L_f^k h_i = \underbrace{L_f^{k+1} h_i}_{\substack{=\xi_{i,k+1} \text{ si } k<\rho_i \\ =\Delta_0^i \text{ si } k=\rho_i}} + \sum_{j=1}^{m} u_j \underbrace{L_{g_j} L_f^k h_i}_{\substack{=0 \text{ si } k<\rho_i \\ =\Delta_j^i \text{ si } k=\rho_i}} + \varepsilon(L_{\tilde{f}} L_f^k h_i + \sum_{j=1}^{m} u_j L_{\tilde{g}_j} L_f^k h_i)$$

Comme $u = \Delta^{-1}(\Omega\xi - \Delta_0 + Dv)$, (ΣI) s'écrit :

$$(\Sigma I) \begin{cases} \dot{\xi} &= F\xi + Gv + \varepsilon\left[\Gamma_0 + \Gamma\Delta^{-1}(\Omega\xi - \Delta_0 + Dv)\right] \\ y &= H\xi, \end{cases}$$

où $\Gamma_0(x)$ et $\Gamma(x)$ sont respectivement des matrices de taille $n \times 1$ et $n \times m$.

$$\begin{aligned} \Gamma_0^r &= L_{\tilde{f}} L_f^{i-1} h_{k+1} \\ \Gamma_j^r &= L_{\tilde{g}_j} L_f^{i-1} h_{k+1}, \end{aligned}$$

avec $r = i + k + \sum_{s=1}^{k} \rho_s$, $1 \le i \le \rho_{k+1} + 1$, $0 \le k \le m-1$. Γ_0 et Γ sont des fonctions continues (et même indéfiniment différentiable) à valeurs matricielles sur M^n, en particulier, elles sont bornées sur toute partie compacte de M^n.

On s'aperçoit cependant, que la perturbation du système immergé contient Δ^{-1}, cette perturbation ne peut pas être considérée comme "petite" au voisinage des singularités de Δ. En revanche, si on se place au voisinage d'un point nominal $\bar{x}$ (en particulier $\Delta(\bar{x})$ est inversible), les techniques classiques de robustesse des systèmes linéaires soumis à des perturbations non linéaires s'appliquent.

THÉORÈME 2.3 *[3] [37]*

Considérons le système linéaire suivant soumis à une perturbation non linéaire :

$$\dot{\zeta} = K_\varepsilon(\zeta) = K\zeta + \varepsilon L(\zeta), \tag{2.5}$$

où $\zeta \in B_\nu$, boule ouverte de rayon ν de $\mathbb{R}^p$, K matrice $p \times p$ de valeurs propres à partie réelle strictement négative, L champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur B_ν.

Pour tout ρ, $0 < \rho < \nu$, il existe un réel strictement positif $\eta(\rho)$ tel que pour tout ε, $|\varepsilon| < \eta(\rho)$:

(i) *Le champ de vecteurs K_ε a un zéro et un seul ζ_ε dans la boule fermée $\bar{B}_\rho$.*

(ii) *ζ_ε est exponentiellement stable pour le flot Φ_ε de K_ε et son domaine d'attraction contient la boule fermée $\bar{B}_\rho$.*

En outre, $\varepsilon \longmapsto \zeta_\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Corollaire 2.4

Supposons que les champs de vecteurs $f, g_1, \ldots, g_m$ soient perturbés par les champs $\varepsilon\tilde{f}$, $\varepsilon\tilde{g}_1, \ldots, \varepsilon\tilde{g}_m$. Soit $\bar{x}$ un point nominal du système (Σ) non perturbé. Alors il existe un réel stictement positif $\eta(\bar{x})$ tel que pour tout ε, $|\varepsilon| < \eta(\bar{x})$, le système (Σ) en boucle fermée ait un point nominal exponentiellement stable $\bar{x}_\varepsilon$ au voisinage de $\bar{x}$. En outre, l'application $\varepsilon \longmapsto \bar{x}_\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration :

$\bar{x}$ étant un point nominal, $\Delta(\bar{x})$ est inversible. D'après le Théorème 2.2 Θ induit un difféomorphisme d'un voisinage U de $\bar{x}$ sur un voisinage W de $\Theta(\bar{x})$. Sur W, on a un système linéaire soumis à une perturbation non linéaire et Proposition 2.3 s'applique, ce qui nous donne la conclusion. □

Dans le cas particulier où l'immersion est localement bijective, nous venons de voir que les résultats de robustesse sont essentiellement des résultats de type linéaire, c'est à dire que l'on traduit en terme de coordonnées non linéaires des résultats bien connus en linéaire. Les véritables "phénomènes non linéaires" apparaîtront en fait lorsque le système immergé ne sera plus localement difféomorphe au système initial. C'est ce que nous allons étudier dans le paragraphe suivant.

2.4 Cas où l'immersion est de plus petite dimension que l'état, $q < n$

Le système immergé a la même forme que précédemment :

$$(\Sigma I) \quad \begin{cases} \dot{\xi} &= F\xi + Gv \\ y &= H\xi. \end{cases}$$

On rappelle que les pôles du système immergé peuvent être placés arbitrairement à travers le choix des ω_i. Le principal problème qui apparaît lorsque $q < n$ est l'existence d'un feuilletage de dimension $n - q$ de M^n que la loi de bouclage a rendu inobservable. Ce phénomène est comparable à ce qui se passe en linéaire lorsque la loi de bouclage fait disparaitre les zéros finis (cette opération se fait en plaçant un pôle sous chaque zéro).

La stabilité du système (Σ) en boucle fermée ne se lit plus uniquement sur le système immergé, il faut aussi s'assurer que la dynamique inobservable dite dynamique des zéros soit stable, en un sens à préciser.

On remarque que lorsque l'on applique la commande constante v, ξ tend vers une limite finie :

$$\lim_{t\to+\infty} \xi(t) = -F^{-1}Gv\,;$$

ce fait justifie la définition suivante :

DÉFINITION 2.6

On appelle sous-variété asymptotique inobservable associée à v la sous variété N_v de M :

$$N_v = \{x \in M \mid \Theta(x) = -F^{-1}Gv,\ \mathrm{rg}\,\mathrm{T}_x\Theta = q\}.$$

Le qualificatif d'inobservable est détaillé par la proposition suivante

Proposition 2.5 *[29]*

Le système (Σ) en boucle fermée admet un feuilletage inobservable Ξ, $\dim \Xi(x) = n - q$ pour tout x tel que $\Delta(x)$ est inversible. La distribution Ξ a localement pour variété intégrale N_v, $T_xN_v = \Xi(x)\ \ \forall x \in N_v$ et est la plus grande distribution contenue dans

$$\bigcap_{j=1}^{p} \ker\, dh_j$$

invariante par $\bar{f}, \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m$ [9],[29], [31], où

$$\bar{f} = f + \sum_{j=1}^{m} \alpha^j g_j, \quad \bar{g}_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_i^j g_j.$$

En particulier $\dim N_v = n - q$.

Démonstration :

Le système en boucle fermée ayant le même comportement entrée-sortie que le système immergé, commandable et observable, (ΣI), on en déduit que la plus grande distribution invariante contenue dans $\bigcap_{j=1}^{m} \ker\, dh_j$ est précisement

$$\Xi = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcap_{i=0}^{\rho_j} \ker\, \mathrm{d}L_f^i h_j.$$

De par sa définition, Ξ est exactement la distribution inobservable du système (Σ) en boucle fermée ([25]). Ce qui nous donne la conclusion. □

L'étude de la stabilité du système (Σ) en boucle fermée se scinde donc en deux : la stabilité de la partie observable, qui dépend exclusivement des choix du concepteur et se lit sur le système immergé (ΣI), et la stabilité de la dynamique inobservable dont nous montrerons que certains éléments sont indépendant des choix du concepteur et peuvent être calculés a priori. Ce sont ces objets que nous allons maintenant définir ; on introduit les notations suivantes :

- $\delta(x) = \det \Delta(x)$
- $gu = \sum_{i=1}^{m} u^i g_i$ (notation matricielle)
- $\hat{\Delta}$ = transposée de la comatrice de Δ , $\hat{\Delta} = \delta \Delta^{-1}$ lorsque $\delta \neq 0$.
- $\hat{N}_v = \{x \in N_v \mid \delta(x) \neq 0\}$
- $\hat{f}_v = (f - g\Delta^{-1}\Delta_0)_{|_{\hat{N}_v}}$

On remarque que

$$f + g\Delta^{-1}(\Omega\xi - \Delta_0 + Dv) = \tilde{f} + \sum_{i=1}^{m} v^i \tilde{g}_i = \tilde{f} + \tilde{g}v.$$

Lemme 2.6 *(voir aussi [8])*
Pour tout $v \in \mathbb{R}^m$, le champ de vecteurs $\tilde{f} + \tilde{g}v$ coïncide avec le champ $\hat{f}_v$ sur $\hat{N}_v$. En particulier, sur $\hat{N}_v$, il ne dépend pas du choix des matrices D et Ω. En outre, $\hat{f}_v$ est tangent à $\hat{N}_v$. $\hat{f}_v$ est par définition la dynamique des zéros.

Démonstration :
Lorsque $x \in \hat{N}_v$, cela signifie que $F\xi + Gv = 0$ et donc que $\Omega\xi + Dv = 0$, i.e.

$$f + g\Delta^{-1}(\Omega\xi - \Delta_0 + Dv) = \hat{f}_v$$

Ainsi $\dot{\xi} = 0$ et x reste dans $\hat{N}_v$, on en déduit que $\hat{f}_v$ est tangent à $\hat{N}_v$. □

On constate que lorsque l'on applique la commande constante v, l'état x du système en boucle fermée tend à se rapprocher de la variété asymptotique inobservable $\hat{N}_v$. Le champ de vecteurs $\hat{f}_v$ défini sur $\hat{N}_v$ représente donc la dynamique inobservable de l'équilibre, la dynamique des zéros. Le lemme ci-dessus nous montre que cette dynamique est indépendante du choix des pôles du système immergé, c'est à dire de la dynamique observable et ne dépend que du choix du régime permanent ; en outre, cette dynamique des zéros peut être calculée a priori avant même de réaliser la loi de bouclage.

La stabilité du système (Σ) en boucle fermée ne pourra être assurée que si la dynamique des zéros est elle même stable. La notion habituelle de stabilité correspond à ce qui est bien connu pour les champs linéaires, l'état du système tend vers un point attractif dont le domaine de stabilité est l'espace tout entier. Si cette notion de stabilité est satisfaisante pour la dynamique observable, qui dans notre cas est linéaire, elle est par contre trop restrictive pour la dynamique des zéros. On peut envisager, en l'absence de point d'équilibre stable, que l'on puisse se contenter d'exiger que toutes les trajectoires de la dynamique asymptotique inobservable aillent dans un compact et n'en ressortent plus.

Notons que ce type de comportement peut s'avérer dans certain cas inacceptable : pour rester dans le compact K, les actionneurs peuvent être excessivement sollicités. Cette discussion doit être menée au cas par cas.

DÉFINITION 2.7
Soit N une variété et V un champ de vecteurs sur N On dit que V est K-stable si et seulement s'il existe un compact régulier K de N tel que V soit rentrant sur ∂K et tel que chaque point de N soit transporté par le flot de V dans K en temps fini positif. Un tel compact est dit vérifier la propriété (P).

DÉFINITION 2.8
Le système (Σ) en boucle fermée est dit K-stable si pour toute commande constante v, le champ de vecteurs $\tilde{f} + \tilde{g}v$ est K-stable.

Ayant maintenant une notion plus large de stabilité, il nous faut maintenant trouver des critères permettant de savoir si un champs de vecteurs est K-stable ou non. Nous énonçons maintenant un théorème qui nous servira à établir un tel critère :

THÉORÈME 2.7 (Poincaré, Hopf) *[39]*
Soit N une variété compacte à bord et V un champ de vecteur tangent à N On suppose que V est sortant sur le bord ∂N et qu'il n'a que des zéros isolés (N étant compact, ils sont donc en nombre fini). Alors, on a l'égalité :

$$\sum_{x \in N, V(x)=0} i(x) = \chi(N),$$

où $\chi(N)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de N et où $i(x)$ est l'indice du zéro x du champ de vecteurs V

Remarque 2.1
Si x est un zéro régulier de V, alors $i(x) = (-1)^{\sigma}$, où σ = nombre de valeurs propres réelles strictement négatives de $\nabla_x V$ $\chi(N)$ est un invariant topologique dont la définition peut être trouvée dans [24].

Le théorème est énoncé dans le cas où V est sortant, pour obtenir des résultats de stabilité, on sera amené à considérer des champs de vecteurs rentrants. La transposition est immédiate, si V est un champ de vecteurs rentrant, $-V$ sera sortant, et l'on applique le Théorème 2.7 à $-V$. Il suffit de remarquer que les indices des zéros de $-V$ s'obtiennent en multipliant par $(-1)^{\dim \hat{N}_v}$ les indices des zéros de V

On suppose que le système (Σ) vérifie pour tout v les hypothèses supplémentaires suivantes :

(i) $\hat{N}_v$ est "simple à l'infini", c'est à dire qu'il existe un compact K_v de $\hat{N}_v$ qui est un rétract par déformation de $\hat{N}_v$.

(ii) Le champ de vecteurs $\hat{f}_v$ n'a qu'un nombre fini de zéros.

(iii) Le champ de vecteurs $\tilde{f} + \tilde{g}v$ est complet (ce qui implique que le champ $\hat{f}_v$ le soit).

Remarque 2.2
L'hypothèse (iii) est en fait superflu, si l'on suppose que le champ $\tilde{f} + \tilde{g}v$ est K-stable, comme il sera rentrant dans un certain compact, le flot sera défini pour tout $t \geq 0$ même si le champ n'est pas complet pour les $t < 0$.

En revanche, l'hypothèse (i) est indispensable ; si le champ $\tilde{f}+\tilde{g}v$ est K-stable, le champ $\hat{f}_v$ le sera aussi. On peut alors montrer que $\hat{N}_v$ est homéomorphe à $K \cup \partial K \times]-\infty, 0]$ où K est un compact de $\hat{N}_v$ et où ∂K et $\partial K \times \{0\}$ sont identifiés ; ce qui montre que K est un rétract par déformation de $\hat{N}_v$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principal théorème de ce chapitre :

THÉORÈME 2.8
Si le système (Σ) en boucle fermée est K-stable, alors, pour tout v les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\displaystyle\sum_{x \in \hat{N}_v, \hat{f}_v(x)=0} i(x) = (-1)^{\dim \hat{N}_v} \chi(\hat{N}_v).$

(ii) $L_{g\hat{\Delta}\Delta_0}\delta|_{N_v \cap \{\delta=0\}} \leq 0.$

En outre, lorsque (ii) est vérifiée, l'inégalité est stricte pour les points génériques ; l'état du système en boucle fermée ne peut atteindre $N_v \cap \{\delta = 0\}$ aux points où cette inégalité est stricte.

La condition (i) traduit la K-stabilité de la dynamique asymptotique inobservable sur $\hat{N}_v$, tandis que la condition (ii) signifie que le système en boucle fermée est naturellement repoussé des singularités de Δ.

Démonstration :
Par définition, la K-stabilité du système en boucle fermée implique que $\hat{f}_v$ soit K-stable, donc qu'il existe un compact K_v de $\hat{N}_v$ satisfaisant à la propriété (P). K_v étant un rétract par déformation de $\hat{N}_v$, on a $\chi(K_v) = \chi(\hat{N}_v)$. Le théorème de Poincaré-Hopf s'applique alors pour K_v et pour le champ de vecteurs $\hat{f}_v$ restreint à K_v, ce qui nous donne (i).

La K-stabilité implique également que les trajectoires du système ne traversent jamais les singularités de Δ, la dynamique en boucle fermée n'y étant pas définie. Montrons que cela implique (ii).

Par l'absurde, supposons qu'il y ait un point x_0 de $N_v \cap \{\delta = 0\}$ tel que $L_{g\hat{\Delta}\Delta_0}\delta|_{x_0} > 0$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe intégrale du champ $\delta\hat{f}_v$ passant par x_0 (le champ $\delta\hat{f}_v$ se prolonge par continuité à N_v tout entier) ; comme $\delta L_{\hat{f}_v}\delta$ tend vers $-L_{g\hat{\Delta}\Delta_0}\delta|_{x_0}$ lorsque x tend vers x_0, la trajectoire $\mathcal{C}$ est parcourue dans le sens des δ décroissants. Excepté lorsque $\delta = 0$, $\mathcal{C}$ est aussi une trajectoire de $\hat{f}_v$, parcourue dans le sens des δ décroissants lorsque δ est positif, et dans le sens des δ croissants lorsque δ est négatif ; en outre, on a $|L_{\hat{f}_v}\delta| \longrightarrow \infty$ lorsque $\delta \longrightarrow 0$, sur $\mathcal{C}$, le flot de $\hat{f}_v$ est attiré par sur la zone singulière $\delta = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de K-stabilité sur $\hat{N}_v$. □

Étudions maintenant les propriétés de robustesse du système (Σ) en boucle fermée. On suppose que le système (Σ) est K-stable et que les champs de vecteurs f, $g_1, \cdots, g_m$, sont

perturbés par les champs de vecteurs inconnus $\varepsilon\tilde{f}$, $\varepsilon\tilde{g}_1, \cdots, \varepsilon\tilde{g}_m$, la loi de bouclage (2.3) étant toujours calculée avec les champs f, $g_1, \cdots, g_m$. Le champ de vecteurs en boucle fermée s'écrit alors :

$$\bar{f}_\varepsilon = \bar{f} + \bar{g}v + \varepsilon\left[\tilde{f} - \bar{g}\Delta^{-1}(\Omega\xi - \Delta_0 + Dv)\right] \tag{2.6}$$

Comme Δ^{-1} apparaît dans le terme perturbatif, les perturbations ne seront "petites" que lorsque le système sera loin de la zone $\{\delta = 0\}$. Pour les mêmes raisons qu'en l'absence de dynamique des zéros, on peut ramener les perturbations des sorties respectant la structure des nombres caractéristiques à des perturbations des matrices Δ et Δ_0 du mêmes type que celles étudiées ici. Le système (Σ) non perturbé étant K-stable, pour toute commande constante v il existe un compact tel que le champ non perturbé en boucle fermée soit rentrant dans ce compact, pour des perturbations faibles, i.e. pour ε proche de zéro, le champ perturbé $\bar{f}_\varepsilon$ sera toujours rentrant (les propriétés de transversalité étant structurellement stables). On en déduit donc le théorème suivant :

THÉORÈME 2.9

Supposons que le système (Σ) non perturbé en boucle fermée soit K-stable. Alors pour tout v et pour tout $\eta > 0$, il existe un compact $K_{\eta,v}$ de $M - \{\delta = 0\}$ et un nombre $\rho(\eta, v) > 0$ tels que si $|\varepsilon| < \rho(\eta, v)$:

(i) *$\bar{f}_\varepsilon$ (cf 2.6) est rentrant dans $K_{\eta,v}$,*

(ii) $\|\Theta(x) + A^{-1}Bv\| < \eta \ \forall x \in K_{\eta,v}$.

En particulier, le système perturbé reste K-stable si l'on se restraint dans un voisinage du compact $K_{\eta,v}$.

Démonstration :

On sait que lorsque l'on applique une commande constante v, l'état du système immergé $\Theta(x)$ tend vers $-A^{-1}Bv$ lorsque t tend vers $+\infty$ (les pôles du système immergé ayant été bien évidemment choisis stables). Comme on suppose d'autre part que le système (Σ) est K-stable, les trajectoires du système en boucle fermée sont rentrantes dans un certain compact ; on peut choisir ce compact tel que son image par Θ soit contenues dans une boule de rayon η centrée en $-A^{-1}Bv$.

En effet, si K est un compact vérifiant la propriété (P), pour tout x appartenant à K on pose $t_{x,v} = \inf\{t > 0 / \|\Phi_v^t(x)\| \leq \eta\}$ où Φ_v est le flot défini par le champ en boucle fermée lorsque l'on applique la commande constante v. L'application $x \mapsto t_{x,v}$ étant continu sur le compact K, admet une borne supérieure $\bar{t}$; on peut alors prendre pour $K_{\eta,v}$ le compact $\Phi_v^{\bar{t}}(K)$.

Le champ non perturbé $\tilde{f}_0$ est rentrant dans $K_{\eta,v}$. D'autre part, $K_{\eta,v} \cap \{\delta = 0\} = \emptyset$ (le système non perturbé étant K-stable, le compact K, et donc le compact $K_{\eta,v}$, a une intersection vide avec les singularités de la loi de bouclage, i.e. avec la zone $\{\delta = 0\}$). Au voisinage de $K_{\eta,v}$, le champ $\bar{f}_\varepsilon$ peut être considéré comme une petite perturbation de $\tilde{f}_0$; en particulier pour ε suffisemment petit, $\bar{f}_\varepsilon$ sera toujours rentrant dans $K_{\eta,v}$, ce qui nous donne la conclusion. □

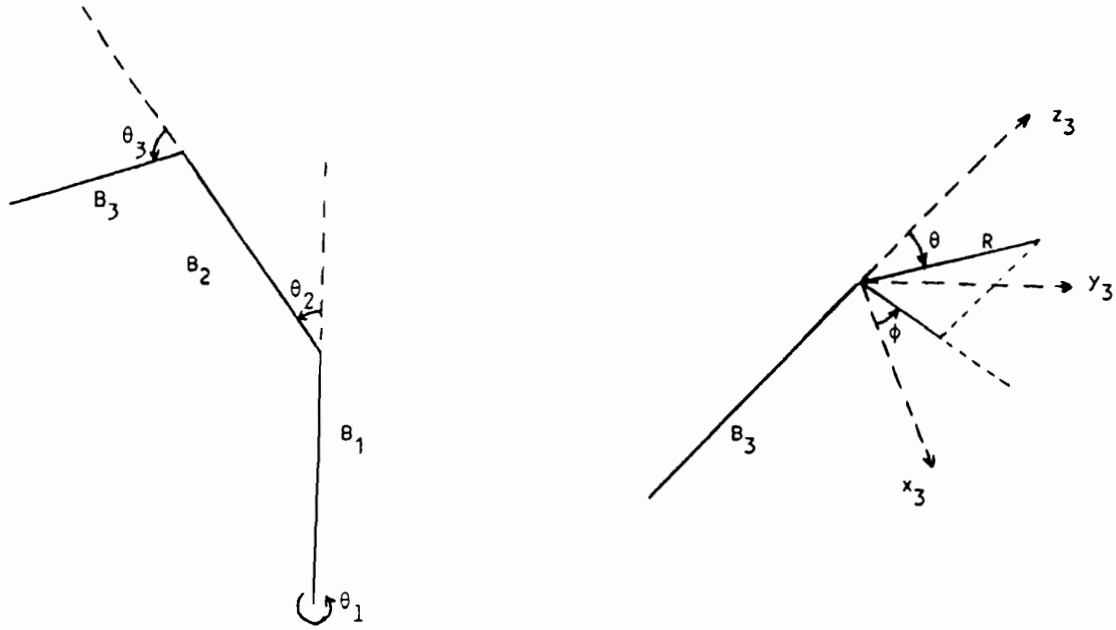


Figure 1

Comparons les deux résultats de robustesse que nous avons obtenus. Dans le paragraphe précédant, nous avions affaire essentiellement à un système linéaire avec une perturbation non linéaire. Le point de fonctionnement autour duquel nous nous étions placés était légèrement déplacé et conservait ses propriétés de stabilité. Tandis qu'ici, on ne peut plus véritablement parler d'un point de fonctionnement, mais plutôt d'un "compact" de fonctionnement, compact qui n'apparaît ponctuel que vu à travers l'immersion Θ. Ce compact est déformé par les perturbations (il peut même "s'épaissir" et ne plus être contenu dans une sous-variété de M), et son image par Θ n'est plus ponctuelle ; tout ce que l'on peut dire, c'est que l'image par Θ des trajectoires du système perturbé en régime permanent resteront au voisinage du point de fonctionnement du système immergé.

On retrouvera des résultats comparables au linéaire lorsque le "compact de fonctionnement" K est en fait réduit à un point ; la dynamique inobservable est alors stable au sens usuel où toutes les trajectoires tendent asymptotiquement vers le même point d'équilibre, on dit alors que le système est à minimum de phase. Ce cas particulier a été plus précisément étudié par C. Byrnes et A. Isidori [8].

2.5 Application à la commande d'un bras de robot équilibriste [2]

On étudie un bras de robots constitués de trois segments articulés. Le premier segment B_1 est vertical et tourne autour d'un axe vertical. Le deuxième segment B_2 est fixé à l'extrémité supérieure de B_1 et peut tourner dans le plan vertical défini par B_1 et B_2. Le troisième segment B_3 est fixé à l'autre extrémité de B_2 et tourne dans le même plan vertical. Les angles θ_1, θ_2, et θ_3 sont définis dans la Figure 1. Sur chaque articulation du bras de robot il y a un actionneur commandé en couple.

Un pendule rigide est fixé à l'extrémité du bras de robot. Ce pendule est décrit par ses coordonnées sphérique notées θ, φ dans un repère lié au segment B_3, et peut tourner librement autour de son articulation.

On cherche une loi de commande qui stabilise le pendule autour de sa position d'équilibre

instable (robot équilibriste).

Le système mécanique "bras + pendule" est représenté par ses coordonnées d'angles et de vitesses angulaires dans $\mathbf{R}^{10}$,

$$\begin{array}{lllllllll} x_1 & = & \theta_1, & x_2 & = & \theta_2, & x_3 & = & \theta_3, \\ x_4 & = & \phi, & x_5 & = & \theta, & x_6 & = & \dot{\theta}_1, \\ x_7 & = & \dot{\theta}_2, & x_8 & = & \dot{\theta}_3, & x_9 & = & \dot{\phi}, \\ & & & x_{10} & = & \dot{\theta}. & & & \end{array}$$

Les équations du système sont données par les équations de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = u_i + Q_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

où Q_i est le couple exercé par la gravité sur la i $^{\text{ème}}$ articulation et u_i le couple commandé appliqué par l'actionneur de la i $^{\text{ème}}$ articulation. Pour les coordonnées du pendule on trouve :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = Q_\phi, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta.$$

L'expression du Lagrangien et des couples de gravité est donné en Annexe.

On définit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix}$, le système prend alors la forme classique :

$$\dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x) + u_3 g_3(x),$$

f, g_1, g_2, et g_3 analytiques. La position d'équilibre supérieure est caractérisée par :

$$\begin{array}{ll} x_2 + x_3 + x_5 = 0 & \\ x_4 = 0 & \\ x_i = 0 & 6 \leq i \leq 10. \end{array} \tag{2.7}$$

On va maintenant choisir trois sorties pour pouvoir utiliser les outils développés dans les paragraphes précédents. Les sorties seront choisies de telle sorte qu'il n'y ait qu'un nombre fini de points d'équilibre dans chaque sous-variété asymptotique inobservable ; les sorties h_1, h_2, et h_3 seront fonctions uniquement des cinq coordonnées d'angles, $x_1, \ldots, x_5$, et telles que leurs différentielle forment avec les différentielles des fonctions $x_2 + x_3 + x_5$ et x_4 une famille de rang 5 (i.e. de rang maximal), ce qui nous permet d'assurer que les points d'équilibre dans la sous-variété asymptotique inobservable sont isolés. Un choix possible de fonctions h_1, h_2, et h_3 est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} h_1 & = & \frac{1}{2}[(x_1 - x_{1c}) + (x_2 - x_{2c})] \\ h_2 & = & (x_1 - x_{1c}) + \frac{1}{2}(x_3 - x_{3c}) \\ h_3 & = & \frac{1}{2}[(x_4 - x_{4c}) + (x_5 - x_{5c})], \end{array}$$

où

$$\begin{array}{lllllll} x_{1c} & = & \frac{\pi}{12} & x_{2c} & = & x_{3c} & = & \frac{\pi}{4} \\ x_{4c} & = & 0 & & & x_{5c} & = & -\frac{\pi}{2}. \end{array}$$

Avec ce choix de sorties on obtient l'immersion

$$\Theta(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(x_1 - x_{1c}) + (x_2 - x_{2c})] \\ (x_1 - x_{1c}) + \frac{1}{2}(x_3 - x_{3c}) \\ \frac{1}{2}[x_4 + (x_5 - x_5)] \\ \frac{1}{2}(x_6 + x_7) \\ x_6 + \frac{1}{2}x_8 \\ \frac{1}{2}(x_9 + x_{10}) \end{pmatrix}$$

La matrice de découplage Δ est de la forme

$$\Delta = P\Gamma Q,$$

où Γ est la matrice d'inertie du système et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de découplage Δ n'a pas de singularités sur la sous-variété asymptotique inobservable N_0 (qui est de dimension 4). On a donc $N_0 = \hat{N}_0$. Sur N_0, il n'y a qu'un point d'équilibre x_e, caractérisé par $x_i = x_{ic}$ pour $1 \leq i \leq 5$ et $x_i = 0$ pour $6 \leq i \leq 10$. Le linéarisé du champ de vecteurs $\hat{f}_0$ autour de ce point d'équilibre a pour valeurs propres :

$$4.77 \times 10^{-7} \pm 3.99i, \ -1.43 \times 10^{-7} \pm 5.45i$$

Ce point n'est pas asymptotiquement stable. Le système a, selon la définition de C. Byrnes et A. Isidori, deux zéros instables et le système n'est pas à minimum de phase.

Cependant, on a $i_{\hat{f}_0}(x_e) = 1$ et comme $\hat{N}_0 \approx \mathbb{R}^4$, $\chi(\hat{N}_0) = 1$, conformément au Théorème 2.8, les conditions nécessaires de K-stabilité sont vérifiées, et la simulation (Figure 2) nous montre que le système est effectivement K-stable, le compact K étant une "petite" boule centrée en x_e. En outre, la simulation nous suggère que les trajectoires tendent vers un tore attractif contenu dans K

Nous avons avec le bras de robots un exemple de système qui n'est pas asymptotiquement stable, dont le linéarisé tangent au point d'équilibre est instable ; mais qu'on ne peut cependant pas qualifier d'instable, les trajectoires du système restant dans un voisinage de ce point d'équilibre "instable" On a vu que ce système vérifiait les conditions nécessaires

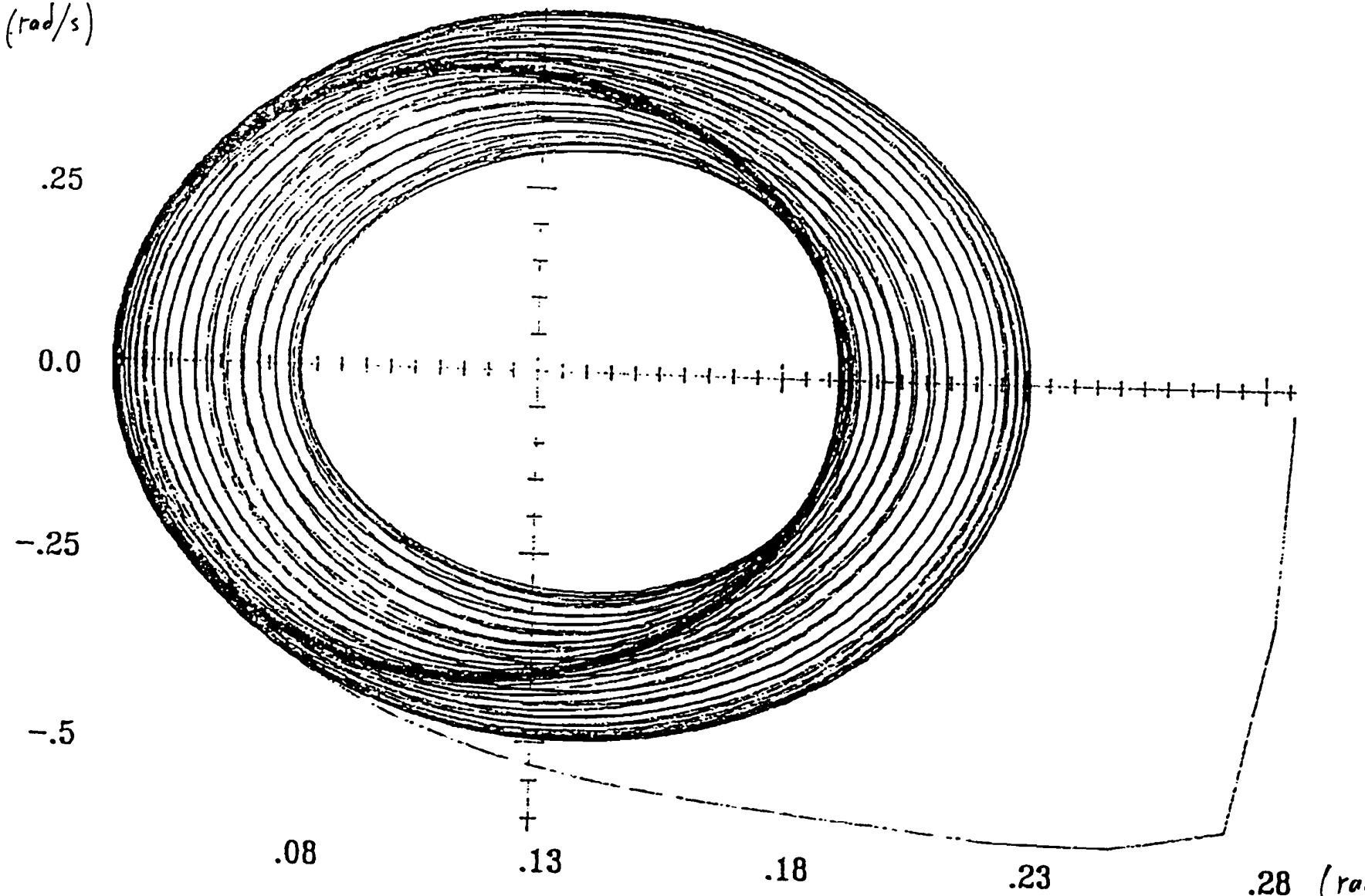


Figure 2 : Tore attractif

de K-stabilité ; cela ne signifit pas que le système soit obligatoirement stable, ces conditions sont nécessaires et non suffisantes, il a fallu simuler le système pour établir avec certitude s'il était K-stable ou pas. Ce critère permet de faire un premier tri entre les sorties acceptables, celles qui vérifient les conditions nécessaires de K-stabilité, de celles qui ne le sont pas, qui donneront de toutes façons un comportement en boucle fermée instable.

2.6 Conclusion

Nous nous sommes intéressés à la stabilité et la robustesse d'une classe particulière de lois de bouclage. Nous avons élargi à la K-stabilité la notion de stabilité. Ceci nous a permis de relacher nos exigences sur la partie inobservable de la dynamique, la "dynamique des zéros" On notera aussi que la K-stabilité est structurellement stable alors que la stabilité asymptotique ne l'est pas toujours. En effet, si le système en boucle fermée a un point d'équilibre asymptotiquement stable et que par la suite de perturbations une bifurcation de Hopf se produit en ce point, le système reste K-stable tandis qu'il n'est plus asymptotiquement stable. On soulignera cependant que nous n'avons donné que des **conditions nécessaires** de K-stabilité tandis que C. Byrnes et A. Isidori [8] et A. Isidori [29] donnaient des **conditions suffisantes** de stabilité asymptotique.

B. d'Andréa-Novel et J. Lévine prolongèrent cette étude de la K-stabilité en prenant en compte d'autres invariants topologiques de la sous-variété asymptotique inobservable et en considérant en plus des points stationnaire de la dynamique des zéros ses orbites périodiques, et en utilisant les inégalités de Morse-Smale [46]. Cette extension est cependant limitée ; la mise en application de ces résultats exigeant que la dynamique des zéros soit de Morse-Smale (voir [43] pour une définition précise des champ de Morse-Smale), or cette condition n'est plus générique en dimension supérieure ou égal à 3.

Ces résultats de stabilité restent dépendants de l'approche "suivi de modèle" puisque l'on essaye par diverses transformations de suivre un modèle que l'on connaît et que l'on sait stable. D'autres approches plus générales sont possibles. Un grand nombre d'entre elles utilisent des méthodes de type Lyapunov. Ces méthodes permettent de construire des lois de bouclage stabilisantes au voisinage de points où les techniques de linéarisation ne s'appliquent pas. Ces méthodes peuvent déboucher sur des lois de commande qui ne sont plus $\mathcal{C}^\infty$ mais seulement $\mathcal{C}^0$ (et parfois pas même Lipschitz) (cf Z. Artstein [5]). Des résultats ont également été obtenues avec des lois de bouclages discontinues. (Voir par exemple E.D. Sontag [47] pour une présentation générale sur les résultats de stabilité, voir aussi [48], [52].) Les résultats obtenues jusqu'à présent restent cependant fragmentaires.

2.7 Annexe : Expression du Lagrangien et des couples de gravité [1]

Le robot étant considéré comme rigide, l'énergie potentielle interne est nulle. Le Lagrangien L se réduit à la somme des énergies cinétiques de chacune des barres composant le

robot.

Notations :

- On notera $R_0 = (Oxyz)$ un repère absolu, l'axe Oy étant parallèle à la barre B_1.
- On notera $R_1 = (O_1x_1y_1z_1)$ le repère relatif lié à la barre B_1 obtenu par une translation de longueur d_1 le long de l'axe Ox suivi d'une rotation d'angle θ_1 autour de l'axe Oy parallèle à O_1y_1.
- On notera $R_2 = (O_2x_2y_2z_2)$ le repère relatif lié à la barre B_2 obtenu à partir de R_1 par une translation de longueur d_2 suivant O_1y_1 suivi d'une rotation d'angle θ_2 autour de l'axe O_2z_2 parallèle à l'axe O_1z_1.
- On notera $R_3 = (O_3x_3y_3z_3)$ le repère relatif lié à la barre B_3 obtenu à partir de R_2 par une translation de longueur d_3 le long de l'axe O_2z_2 suivi d'une translation de longueur d_4 le long de O_2y_2 et d'une rotation d'angle θ_3 autour de l'axe O_3z_3 parallèle aux axes O_1z_1 et O_2z_2.
- On notera par d_5 la distance entre O_3 et le centre de gravité G_4 du pendule R, et par $\varphi = \theta_4$ et $\theta = \theta_5$ ses coordonnées sphériques dans le repère R_3.
- On notera x_{g_i}, y_{g_i}, et z_{g_i}, $i = 1,2,3$, les coordonnées du centre de gravité G_i de la barre B_i dans le repère relatif R_i.
- On notera

$$I_i = \begin{pmatrix} I_{x,i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y,i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z,i} \end{pmatrix}$$

  la matrice d'inertie de la barre B_i dans le repère $(G_ix_iy_iz_i)$ pour $i = 1,2,3$. Pour $i = 4$, cela représente la matrice d'inertie du pendule R dans un repère relatif lié à R d'origine G_4.
- On note m_i les masses des barres B_i et m_4 la masse du pendule R.

On a alors :

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} \lambda_{i,i}\dot{\theta}_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le 5} \lambda_{i,j}\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j \tag{2.8}$$

où

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,1} &= m_1(x_{g_1}^2 + z_{g_1}^2) + m_2((x_{g_2}\cos\theta_2 + y_{g_2}\sin\theta_2)^2 + z_{g_2}^2) \\
&\quad + m_3((-(d_1+d_3)\sin\theta_2 + x_{g_3}\cos(\theta_2+\theta_3) + y_{g_3}\sin(\theta_2+\theta_3))^2 + (d_4+z_{g_3})^2) \\
&\quad + m_4((-(d_1+d_3)\sin\theta_2 + d_4\sin(\theta_2+\theta_3) \\
&\quad + d_5(\cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5\cos\theta_4 + \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5))^2 \\
&\quad + (d_4 + d_5\sin\theta_4\sin\theta_5)^2) \\
&\quad + I_{y,1} + I_{x,2}\sin^2(\theta_2+\theta_3) + I_{y,2}\cos^2\theta_2 + I_{y,3}\cos^2(\theta_2+\theta_3) \\
&\quad + I_{x,4}(\sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\cos\theta_5 + \cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5)^2 \\
&\quad + I_{y,4}(\cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5 - \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5)^2 + I_{z,4}\sin^2\theta_4\sin^2(\theta_2+\theta_3) \\
\lambda_{2,2} &= m_2(x_{g_2}^2 + y_{g_2}^2) + m_3(x_{g_3}^2 + y_{g_3}^2 - (d_1+d_3)(-d_1-d_3+2(y_{g_3}\cos\theta_3 - x_{g_3}\sin\theta_3))) \\
&\quad + m_4((d_4(d_4+2(-d_1-d_3)\cos\theta_3) + (d_1+d_3)^2 + d_5^2(\cos^2\theta_4\sin^2\theta_5 + \cos^2\theta_5) \\
&\quad + 2d_5((d_4 - d_3\cos\theta_3)\cos\theta_5 + (d_1+d_3)\sin\theta_3\cos\theta_4\sin\theta_5)) \\
&\quad + I_{z,2} + I_{z,3} + I_{x,4}\sin^2\theta_4\cos^2\theta_5 \\
&\quad + I_{y,4}\sin^2\theta_4\sin^2\theta_5 + I_{z,4}\cos^2\theta_4 \\
\lambda_{3,3} &= m_3(x_{g_3}^2 + y_{g_3}^2) + m_4(d_4^2 + d_5^2(\cos^2\theta_4\sin^2\theta_5 + \cos^2\theta_5) + 2d_4d_5\cos\theta_5) \\
&\quad + I_{z,3} + I_{x,4}\cos^2\theta_5\sin^2\theta_4 + I_{y,4}\sin^2\theta_5\sin^2\theta_4 + I_{z,4}\cos^2\theta_4 \\
\lambda_{4,4} &= m_4d_5^2\sin^2\theta_5 + I_{x,4}sin^2\theta_5 + I_{y,4}\cos^2\theta_5 \\
\lambda_{5,5} &= m_4d_5^2 + I_{z,4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= m_2z_{g_2}(x_{g_2}\sin\theta_2 - y_{g_2}\cos\theta_2) + m_3(d_4+z_{g_3}) \\
&\quad \times((d_1+d_3)\cos\theta_2 + x_{g_3}\sin(\theta_2+\theta_3) - y_{g_3}\cos(\theta_2+\theta_3)) \\
&\quad - m_4(d_4 + d_5\sin\theta_4\sin\theta_5)(-(d_1+d_3)\cos\theta_2 + d_4\cos(\theta_2+\theta_3) \\
&\quad + d_5(-\sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5 + \cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5)) \\
&\quad - I_{x,4}(\sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\cos\theta_5 + \cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5)\sin\theta_4\cos\theta_5 \\
&\quad + I_{y,4}(\cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5 - \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5)\sin\theta_4\sin\theta_5 \\
&\quad I_{z,4}\sin\theta_4\cos\theta_5\sin(\theta_2+\theta_3) \\
\lambda_{1,3} &= m_3(d_4+z_{g_3})(x_{g_3}\sin(\theta_2+\theta_3) - y_{g_3}\cos(\theta_2+\theta_3)) - m_4(d_4 + d_5\sin\theta_4\sin\theta_5) \\
&\quad \times(d_4\cos(\theta_2+\theta_3) + d_5(\cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5 - \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5)) \\
&\quad - I_{x,4}(\sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\cos\theta_5 + \cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5)\sin\theta_4\cos\theta_5 \\
&\quad + I_{y,4}(\cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\cos\theta_5 + \cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5)\sin\theta_4\cos\theta_5 \\
&\quad + I_{z,4}\sin\theta_4\cos\theta_4\sin(\theta_2+\theta_3) \\
\lambda_{1,4} &= m_4((-(d_1+d_3)\sin\theta_2 + d_4\sin(\theta_2+\theta_3) + d_5(\cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5\cos\theta_4 \\
&\quad + \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5))d_5\cos\theta_4\sin\theta_5 \\
&\quad + (d_4 + d_5\sin\theta_4\sin\theta_5)d_5\cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_4\sin\theta_5) \\
&\quad + I_{x,4}\sin\theta_5(\sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\cos\theta_5 + \cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5) \\
&\quad + I_{y,4}\cos\theta_5(\cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5 - \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5) \\
\lambda_{1,5} &= m_4((-(d_1+d_3)\sin\theta_2 + d_4\sin(\theta_2+\theta_3) + d_5(\cos(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5\cos\theta_4 \\
&\quad + \sin(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_5))d_5\sin\theta_4\cos\theta_5 \\
&\quad - d_5(d_4 + d_5\sin\theta_4\sin\theta_5)(\cos(\theta_2+\theta_3)\cos\theta_4\cos\theta_5 - \\
&\quad \sin(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_5)) + I_{z,4}\sin(\theta_2+\theta_3)\sin\theta_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_{2,3} &= m_3(x_{g_3}^2 + y_{g_3}^2 - (d_1 + d_3)(y_{g_3}\cos\theta_3 - x_{g_3}\sin\theta_3)) \\
&\quad + m_4(d_4(d_4 - (d_1 + d_3)\cos\theta_3) + d_5^2(\cos^2\theta_4\sin^2\theta_5 + \cos^2\theta_5) \\
&\quad d_5(2d_4\cos\theta_5 - (d_1 + d_3)(\cos\theta_3\cos\theta_5 - \sin\theta_3\cos\theta_4\sin\theta_5))) \\
&\quad + I_{z,3} + I_{x,4}\sin^2\theta_4\cos^2\theta_5 + I_{y,4}\sin^2\theta_4\sin^2\theta_5 + I_{z,4}\cos^2\theta_4 \\
\lambda_{2,4} &= -m_4 d_5\sin\theta_4\sin\theta_5(-(d_1 + d_3)\cos\theta_3 + d_4 + d_5\cos\theta_5) \\
&\quad -(I_{x,4} - I_{y,4})\sin\theta_4\sin\theta_5\cos\theta_5 \\
\lambda_{2,5} &= m_4 d_5((-(d_1 + d_3)\cos\theta_3 + d_4)\cos\theta_4\cos\theta_5 + d_3\sin\theta_3\sin\theta_5 + d_5\cos\theta_4) \\
&\quad + I_{z,4}\cos\theta_4 \\
\lambda_{3,4} &= -m_4 d_5(d_4 + d_5\cos\theta_5)\sin\theta_4\sin\theta_5 - (I_{x,4} - I_{y,4})\sin\theta_4\sin\theta_5\cos\theta_5 \\
\lambda_{3,5} &= m_4 d_5(d_5 + d_4\cos\theta_5)\cos\theta_4 + I_{z,4}\cos\theta_4 \\
\lambda_{4,5} &= 0
\end{aligned}
$$

Les couples de pesanteur sont donnés par les expressions suivantes ($Q_i = Q_{\theta_i}$ pour $i = 1, 2, 3$, $Q_\varphi = Q_{\theta_4}$, et $Q_\theta = Q_{\theta_5}$) :

$$
\begin{aligned}
Q_{\theta_1} &= 0 \\
Q_{\theta_2} &= g(m_2(x_{g_2}\cos\theta_2 + y_{g_2}\sin\theta_2) \\
&\quad + m_3(-(d_1 + d_3)\sin\theta_2 + x_{g_3}\cos(\theta_2 + \theta_3) + y_{g_3}\sin(\theta_2 + \theta_3)) \\
&\quad m_4(-d_4\sin(\theta_2 + \theta_3) + (d_1 + d_3)\sin\theta_2 \\
&\quad + d_5(-\cos(\theta_2 + \theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5 - \sin(\theta_2 + \theta_3)\cos\theta_5))) \\
Q_{\theta_3} &= g(m_3(x_{g_3}\cos(\theta_2 + \theta_3) + y_{g_3}\sin(\theta_2 + \theta_3)) \\
&\quad + m_4(-d_4\sin(\theta_2 + \theta_3) + d_5(-\cos(\theta_2 + \theta_3)\cos\theta_4\sin\theta_5 - \sin(\theta_2 + \theta_3)\cos\theta_5))) \\
Q_{\theta_4} &= -g m_4 d_5\sin(\theta_2 + \theta_3)\sin\theta_4\sin\theta_5 \\
Q_{\theta_5} &= g m_4 d_5(\sin(\theta_2 + \theta_3)\cos\theta_4\cos\theta_5 + \cos(\theta_2 + \theta_3)\sin\theta_5)
\end{aligned}
$$

Chapitre 3

Linéarisation par bouclage dynamique et difféomorphisme[1]

3.1 Introduction

Le but premier de la commande d'un système, qu'il soit linéaire ou non, est de lui donner un comportement stable, c'est à dire que le système revienne spontanément au comportement qui lui a été assigné lorsqu'une perturbation l'en a écarté, et robuste au sens où le comportement qualitatif du système reste le même lorsque les paramètres du système varient, que la dynamique n'est connu qu'approximativement, ou que la loi de bouclage appliquée n'est pas exactement celle que l'on a calculée.

Il est bien connu d'une part qu'un système linéaire commandable est stabilisable par une loi de bouclage (linéaire) bien choisie ; d'autre part qu'un système linéaire stable est robuste lorsqu'il est soumis à des perturbations non linéaires. Enfin les propriétés de stabilité et de robustesse sont invariantes par difféomorphisme. Une des techniques possibles de commande stabilisante et robuste et de transformer par bouclage et difféomorphisme un système non linéaire en un système linéaire commandable.

Les systèmes non linéaires étudiés ici seront de la forme

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) = f(x) + g(x)u. \tag{3.1}$$

A.J. Krener [35] donna les conditions pour que le système (3.1) soit difféomorphe à un système linéaire. R.W. Brockett [7] généralisa cette approche pour des lois de bouclage de la forme $u = \alpha(x) + \beta v$, où β est une matrice $m \times m$ constante et inversible. Enfin B. Jakubczyk et W. Respondek [33] et indépendemment L.R. Hunt, R. Su et G. Meyer [28] donnèrent la réponse complète lorsque l'on s'autorise les lois de bouclage statiques de la forme

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{3.2}$$

[1] Ce travail a été effectué en collaboration avec J. Lévine et R. Marino et a fait l'objet de plusieurs publications (cf [12], [13], et [14]

où $\beta(x)$ est une matrice carrée inversible pour tout x. Ce résultat contient ceux présentés dans [35] et [7].

R. Marino [38] montra que tout système (3.1) admettait un plus grand sous-système linéarisable et en donna la construction. Après difféomorphisme et bouclage, le système est scindé en une partie linéaire et une partie non linéaire,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + bv \\ \dot{\zeta} &= a(z,\zeta) + b(z,\zeta)v \end{aligned}$$

et la stabilité et la robustesse de ces systèmes est alors donné d'une part par la partie linéarisée et d'autre part par la partie non linéaire. Cependant le comportement de cette partie non linéaire est inconnue a priori, on ne peut que constater la stabilité ou l'instabilité du système bouclée. En outre, cette stabilité dépend du choix des coordonnées qui sont effectivement linéarisées.

Dans le Chapitre 2 nous cherchions des critères permettant de savoir si la partie non linéaire du système (3.1) était stable et robuste. Ici on cherchera plutôt à étendre la classe des lois de bouclages possibles aux bouclages dynamiques de façon à élargir la classe des systèmes linéarisables. Les lois de bouclage dynamique étudiées seront de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{w} &= a(x,w) + b(x,w)v \quad w \in \mathbf{R}^{n'} \\ u &= \alpha(x,w) + \beta(x,w)v \quad v \in \mathbf{R}^{m'} \quad m' \geq m. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La loi de bouclage étant régulière en un sens qui sera défini ultérieurement (cf Définition 3.1). Ce type de loi de bouclage contient ce qu'en linéaire on appelle compensateur dynamique et précompensateur. En non linéaire, nous ne ferons plus cette distinction. Le système étendu (3.1) + (3.3) sera appelé extension dynamique de (3.1).

Ce type de loi de bouclage a été introduit en linéaire pour résoudre le problème du découplage entrée-sortie (cf W.M. Wonham [54]). R.M. Hirschorn [26], en 1979, et S.N. Singh [44] [45], en 1980 et 1981, montrèrent l'importance de ces lois de bouclage dans la construction d'inverse de systèmes entrée-sortie non linéaires et du découplage par bouclage dynamique.

On remarquera que si la transformation par bouclage statique (3.2) est inversible, le bouclage permettant de revenir au système initial étant donné par $v = \beta(x)^{-1}(u - \alpha(x))$, la transformation par bouclage dynamique ne l'est pas (la dimenson de l'espace d'état augmente et passe de n à $n + n'$). S'il est possible de définir un "groupe de transformation par bouclage statique" du système (3.1), on ne peut plus en faire de même pour les transformations par bouclage dynamique.

Le bouclage dynamique fut étudié dans le cas des systèmes non linéaires entrée-sortie : J. Descusse et C.H. Moog [15], [16] étudièrent le découplage entrée-sortie, A. Isidori et M.D. Di Benedetto [6] résolurent le problème du suivi de modèle non linéaire. A. Isidori [29] avec C.H. Moog et A. De Luca [32], et M. Fliess [20], donnèrent des conditions suffisantes pour qu'un système non linéaire entrée-sortie soit simultanément linéarisable et découplable par compensation dynamique. Notre approche diffère de celle de [17] et de [32] puisque nous considérons des systèmes entrée-état, donc sans sortie ; si dans l'approche entrée-sortie les fonctions de sorties sont données, l'approche entrée-état dans ce cas reviendrait à chercher des "bonnes" sorties vérifiant les conditions données par les auteurs précédents.

Les définitions des compensateurs dynamiques et de la linéarisation par bouclage dynamique que nous utiliseront sont différentes de celles utilisées par M. Fliess ; il n'est donc pas surprenant que nos résultats et les siens semblent contradictoires. En effet, M. Fliess montre (cf [19]) que tout système non linéaire peut être transformé par bouclage dynamique et difféomorphisme en un système linéaire. Nous montrons au contraire que toute une classe de systèmes, les systèmes non linéaires mono-entrée qui ne sont pas linéarisables par bouclage statique, ne sont pas non plus linéarisables par bouclage dynamique. Cette contradiction apparente provient de ce que la classe des transformations que nous nous autorisons est plus restrictive que celle de M. Fliess. Si l'on note $x \in \mathbf{R}^n$ l'état du système non linéaire étudié et $w \in \mathbf{R}^q$ l'état du compensateur dynamique, nous ne considérons que des difféomorphismes $z = \varphi(x, w)$ de $\mathbf{R}^{n+q}$ l'espace étendu, tandis que M. Fliess considère les transformation $z = \psi(x, w)$ de $\mathbf{R}^n$ l'espace initial, où pour tout w, $\psi(., w)$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$. Il s'en suit que nous linéarisons l'ensemble système + compensateur tandis que cela peut ne pas être le cas dans la théorie de M. Fliess. Lorsque nous plaçons les pôles du système linéarisé, nous stabilisons l'ensemble système + compensateur ; M. Fliess après avoir linéarisé le système se doit de vérifier que le compensateur lui-même a un comportement stable, ce qui n'est pas garanti a priori. L'approche de M. Fliess donne surtout des renseignements d'ordre structurel sur les systèmes non linéaires.

Nous établirons en premier lieu le résultat négatif évoqué ci-dessus : Si un système mono-entrée n'est pas linéarisable par bouclage statique, il ne sera pas linéarisable par bouclage dynamique. La linéarisation par bouclage dynamique est un phénomène exclusivement multi-entrées.

Nous donnerons ensuite une condition nécessaire triviale : si un système est linéarisable par bouclage dynamique, alors son approximation linéaire est commandable.

Devant la complexité du problème pour les systèmes multi-entrées nous ne prétendrons pas résoudre de façon exhaustive le problème de la linéarisation par bouclage dynamique (3.3) du système (3.1) ; nous chercherons à trouver des conditions suffisantes de linéarisation par bouclage dynamique. Enfin nous montrerons qu'elles s'appliquent à certaines classes de systèmes non linéaires (3.1) et nous donnerons un procédé de synthèse des commandes dynamiques correspondantes.

3.2 Résultats préliminaires

Considérons le système étendu composé du système (3.1) et du compensateur (3.3)

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x) + g(x)\alpha(x, w) + g(x)\beta(x, w)v \\ \dot{w} & = & a(x, w) + b(x, w)v, \end{array} \tag{3.4}$$

que l'on peut réécrire

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x})v = \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m'} \tilde{g}_i(\tilde{x})v_i\ ,\ \ \tilde{x} \in \mathbf{R}^{n+n'}\ ,\ \ v \in \mathbf{R}^{m'} \tag{3.5}$$

où $\tilde{x} = (x, w)$ est l'état étendu et où

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} f(x) + g(x)\alpha(x,w) \\ a(x,w) \end{pmatrix} \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} g(x)\beta(x,w) \\ b(x,w) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Si les $u_j = \alpha_j(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m'} \beta_{j,i}(\tilde{x}) v_i$, $1 \leq j \leq m$, sont considérées comme des sorties du système (3.5), on définit leurs nombres caractéristiques $\nu_1, \ldots, \nu_m$ selon la définition habituelle [29] :

$$\begin{aligned} &\nu_j = 0 \text{ si } \beta_{j,i}(\tilde{x}) \neq 0 \text{ pour au moins un } i,\ 1 \leq i \leq m \\ &\nu_j = \min\{r \mid L_{\tilde{g}_i} L_{\tilde{f}}^{r-1} \alpha_j(\tilde{x}) \neq 0 \text{ pour au moins un } i,\ 1 \leq i \leq m\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Soit

$$\delta_{j,i}(\tilde{x}) = \begin{cases} \beta_{j,i}(\tilde{x}) & \text{si } \nu_j = 0 \\ L_{\tilde{g}_i} L_{\tilde{f}}^{\nu_j - 1} \alpha_j(\tilde{x}) & \text{si } \nu_j > 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Lorsque tout les ν_j sont finis, la matrice $m \times m'$

$$D(\tilde{x}) = (\delta_{j,i}(\tilde{x})) \tag{3.9}$$

est appelée la matrice de découplage du compensateur (3.3) pour le système (3.1).

DÉFINITION 3.1
La loi de bouclage dynamique (3.3) est dite régulière pour le système (3.1) si le système étendu (3.4) muni des sorties $(u_1, \ldots, u_m)$ est inversible à droite (cf [15], [16], [17]).

Remarque 3.1
Une loi de bouclage statique (3.2) avec $\beta(x)$ inversible est un cas particulier de loi de bouclage dynamique régulière.

DÉFINITION 3.2
Le système (3.1) est dit localement statiquement linéarisable s'il existe une loi de bouclage (3.2) et un difféomorphisme de l'espace d'état transformant (3.1) en un système linéaire commandable.

DÉFINITION 3.3
Le système (3.1) est dit localement dynamiquement linéarisable ou linéarisable par bouclage dynamique s'il existe une loi de bouclage dynamique régulière (3.3) et un difféomorphisme de l'état étendu (x, w) transformant le système étendu (3.1) + (3.3) en un système linéaire commandable.

Les notions mathématiques utilisées ci-dessous sont définies en Appendice A. On rapelle de [33], [28], et [38] les définitions et résultats suivants :

DÉFINITION 3.4

- $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{G}_0 = sp\{g_1, \ldots, g_m\}$.
- $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_i + \mathrm{ad}_f\mathcal{G}_i$.
- $\mathcal{Q}_{i+1} = \overline{\mathcal{Q}_i} + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{Q}_0$ *pour tout* $i \geq 1$.
- $\mathcal{G}_* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{G}_i$.
- $\mathcal{Q}_* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{Q}_i$.

Où $\overline{\Delta}$ représente la clôture involutive de la distribution Δ. Les principales propriétés des distributions $\mathcal{Q}_i$ et $\mathcal{G}_i$ sont données dans la proposition suivante et sont démontrées dans l'Appendice B. Pour les systèmes linéaires $\dot{X} = AX + Bu$, on a $\mathcal{Q}_i = \mathcal{G}_i = \mathrm{Im}(B, AB, \ldots, A^iB)$.

Proposition 3.1 *(cf Appendice B)*
Les distributions $\mathcal{Q}_i$ et $\mathcal{G}_i$ vérifient les identités suivantes :

- $\overline{\mathcal{G}_i} = \overline{\mathcal{Q}_i}$.
- $\overline{\mathcal{G}_*} = \mathcal{Q}_*$, *en particulier* $\mathcal{Q}_*$ *est involutive.*
- $\mathrm{ad}_f\mathcal{Q}_i \subset \mathcal{Q}_{i+1}$.
- $\mathrm{ad}_f\overline{\mathcal{Q}_i} \subset \overline{\mathcal{Q}_{i+1}}$

En outre, les distributions $\mathcal{Q}_i$ et $\overline{\mathcal{Q}_i}$ sont invariantes par bouclage statique régulier ([38]). (En général, les distributions $\mathcal{G}_i$ ne le sont pas.)

On rappelle la définition de l'invariance par bouclage statique régulier des distributions.

DÉFINITION 3.5
On dit qu'une distribution définie en fonction des champs de vecteurs f, $g_1, \ldots, g_m$ (par exemple les distributions $\mathcal{G}_i$ et $\mathcal{Q}_i$ et leurs clôtures involutives) est invariante par bouclage statique régulier si lorsque l'on remplace f par $\tilde{f} = f + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)g_i$ et g_i par $\tilde{g}_j = \sum_{i=1}^{m}\beta_{j,i}(x)g_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq m$ avec β inversible, cette distribution n'est pas modifiée.

On s'aperçoit en outre que si $f - \tilde{f}$ appartient à $\mathcal{G}_0$ et que si $(\tilde{g}_i)_{1\leq i\leq m}$ est une base de $\mathcal{G}_0$ alors $\tilde{f} = f + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)g_i$ et $\tilde{g}_j = \sum_{i=1}^{m}\beta_{j,i}(x)g_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq m$ avec β inversible. Une loi de bouclage statique (3.2) s'interprète donc comme un changement de base de la distribution $\mathcal{G}_0$ et une modification de la dynamique propre par un champ de vecteurs de $\mathcal{G}_0$:

$$\begin{array}{rcl} f & \longrightarrow & \tilde{f} \\ g_i & \longrightarrow & \tilde{g}_i \quad 1 \leq i \leq m, \end{array}$$

où $f - \tilde{f} \in \mathcal{G}_0$.

On rapelle les théorèmes suivants :

THÉORÈME 3.2 *[29]*
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le système (3.1) est localement fortement commandable.*

(ii) $\mathcal{Q}_* = \mathrm{TR}^n$.

(iii) *Il existe un entier* $k \leq n-1$ *tel que* $\mathcal{Q}_k = \mathrm{TR}^n$.

Pour les systèmes linéaires, on retrouve bien le critère de Kalman.

THÉORÈME 3.3 *[33] [28]*
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *(3.1) est linéarisable (localement) par bouclage statique (3.2) et difféomorphisme.*

(ii) *Les distributions* $\mathcal{G}_i$ *sont involutives de rang constant quel que soit* i *et* $\mathcal{G}_{n-1} = \mathrm{TR}^n$

Dans ce cas les deux familles de distributions $\mathcal{G}_i$ et $\mathcal{Q}_i$ coïncident, $\mathcal{G}_i = \mathcal{Q}_i$, pour tout $i \geq 0$.

Les théorèmes précédents nous permettent de caractériser entièrement les systèmes linéarisables par bouclage statique et difféomorphisme. On s'aperçoit que l'impossibilité de linéariser le système (3.1) peut provenir de deux causes bien distinctes,

- La variation du rang des distributions $\mathcal{G}_i$. Cette obstruction de type topologique ne sera pas étudiée ici.
- La non involutivité des distributions $\mathcal{G}_i$.

Quand ces conditions ne sont pas vérifiées on peut s'intéresser au plus grand sous-systèmes linéarisable par bouclage statique et difféomorphisme. Pour cela on introduit les indices suivants :

DÉFINITION 3.6

- $r_0 = \dim \mathcal{Q}_0$,
- $r_i = \dim \mathcal{Q}_i - \dim \overline{\mathcal{Q}_{i-1}}$ *pour* $i \geq 1$,
- $k_i = card\{j | r_j \geq i\}$ *pour* $i = 1, \ldots, m$.

DÉFINITION 3.7 *[38]*
On dit que le système (3.1) est partiellement linéarisable avec les indices $\kappa_1, \ldots, \kappa_\mu$, *si et seulement si (3.1) est équivalent par bouclage statique à un système de la forme :*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bv \\ \dot{\zeta} &= a(z,\zeta) + b(z,\zeta)v, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où la partie linéaire est commandable d'indice de commandabilité $\kappa_1, \ldots, \kappa_\mu$. Plus précisément les matrices A et B sont de la forme

$$A = diag(A_1, \ldots, A_\mu)$$
$$B = diag(B_1, \ldots, B_\mu)$$
$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}_{\kappa_i \times \kappa_i} \qquad B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\kappa_i \times 1}$$

THÉORÈME 3.4 *[38]*

Si le système (3.1) est équivalent à un système de la forme (3.10) alors on aura $\mu \leq m$ et $\kappa_i \leq k_i$ pour tout $i \leq \mu$.

En outre le système (3.1) est effectivement équivalent à un système de la forme (3.10) avec $\mu = m$ et $\kappa_i = k_i$.

La dimension des plus grands sous-systèmes linéarisable est donc égal à $k_1 + \cdots + k_m = r_0 + \cdots + r_{n-1}$.

DÉFINITION 3.8

On appelle dimension non linéaire du système (3.1) et on note n_{NL} l'entier

$$n_{NL} = n - \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

En particulier, le système (3.1) est linéarisable par bouclage statique si $n_{NL} = 0$. Dans ce cas, on retrouve le résultat du Théorème 3.3 grâce à la remarque suivante :

Remarque 3.2

Si $\mathcal{Q}_* = \mathrm{T}\mathbb{R}^n$, on a $n_{NL} = \sum_{i=0}^{\infty} \dim \overline{\mathcal{Q}_i} - \dim \mathcal{Q}_i$. L'entier n_{NL} donne une "mesure" de la non involutivité des distributions $\mathcal{Q}_i$. Donc si $n_{NL} = 0$, toutes les $\mathcal{Q}_i$ sont involutives et $\sum k_i = n$ donc $\mathcal{Q}_{n-1} = \mathrm{T}\mathbb{R}^n$, d'où le Théorème 3.3.

DÉFINITION 3.9 *On dit que le système (3.1) est sous forme pseudocanonique s'il est écrit sous la forme (3.10) avec $\mu = m$ et $\kappa_i = k_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq m$.*

Un système non linéaire (3.1) est en général équivalent à plusieurs formes pseudocanoniques (la partie non linéaire de (3.10) dépend du choix des coordonnées de la partie linéarisée).

3.3 Le cas mono-entrée

On peut maintenant passer à l'étude des bouclages dynamiques. Le résultat est particulièrement simple dans le cas où le système n'a qu'une seule commande.

THÉORÈME 3.5

On considère le système (3.1) avec $m = 1$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le système mono-entrée (3.1) est linéarisable par bouclage statique et difféomorphisme.*

(ii) *Le système mono-entrée (3.1) est linéarisable par bouclage dynamique et difféomorphisme.*

En outre, la dimension non linéaire n_{NL}^e de toute extension dynamique de (3.1) est supérieure à n_{NL}, $n_{NL}^e \geq n_{NL}$.

Démonstration :

L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale (tout bouclage statique est un cas particulier de bouclage dynamique, voir Remarque 3.1).

Montrons que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Considérons une extension dynamique de (3.1),

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x) + \alpha(x,w)g(x) + \beta(x,w)g(x)v \\ \dot{w} & = & a(x,w) + b(x,w)v \\ u & = & \alpha(x,w) + \beta(x,w)v, \end{array} \tag{3.11}$$

où $v \in \mathbf{R}^{m'}$ Nous montrerons que si (3.11) est linéarisable par bouclage statique et difféomorphisme alors (3.1) vérifie les conditions de Jakubczyk-Respondek, Hunt-Su-Meyer (Théorème 3.3). On a $(x,w) \in \mathbf{R}^{n+n'}$; les champs de vecteurs définissant le système (3.11) sont

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} f(x) + \alpha(x,w)g(x) \\ a(x,w) \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{g}_i = \begin{pmatrix} \beta_i(x,w)g(x) \\ b_i(x,w) \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq m' \tag{3.12}$$

On définit les distributions

- $\tilde{\mathcal{G}}_0 = \tilde{\mathcal{Q}}_0 = sp\{\tilde{g}_j \ ; \ 1 \leq j \leq m'\}$,
- $\tilde{\mathcal{G}}_i = \tilde{\mathcal{G}}_{i-1} + sp\{\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^i \tilde{g}\} = \tilde{\mathcal{G}}_{i-1} + \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^i \tilde{\mathcal{G}}_0$, $i \geq 1$.
- $\tilde{\mathcal{Q}}_i = \overline{\tilde{\mathcal{Q}}_{i-1}} + \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^i \tilde{\mathcal{Q}}_0$, $i \geq 1$.

Le système étendu sera linéarisable par bouclage statique si et seulement si les distributions $\tilde{\mathcal{G}}_i$ sont involutives de rang constant pour tout i, auquel cas nous aurons $\tilde{\mathcal{G}}_i = \tilde{\mathcal{Q}}_i$ pour tout $i \geq 0$. Nous allons montrer que ce n'est pas possible lorsqu'une des distributions $\mathcal{G}_i$ ne l'est pas, i.e. lorsque le système (3.1) n'est pas linéarisable par bouclage statique.

On définit l'entier ν comme en (3.7), Définition 3.1 :

- $\nu = 0$ si $\beta_j(x,w) \not\equiv 0$ pour au moins un j, $1 \leq j \leq m'$

- $\nu = \min\{k \mid L_{\tilde{g}_j} L_{\tilde{f}}^{k-1}\alpha(x,w) \not\equiv 0 \text{ pour au moins un } j\}$ si $\beta_j(x,w) \equiv 0$ pour tout j, $1 \leq j \leq m'$

Soit $\gamma_j(x,w) = \beta_j(x,w)$ si $\nu = 0$ et $\gamma_j(x,w) = (-1)^\nu L_{\tilde{g}_j} L_{\tilde{f}}^{\nu-1}\alpha(x,w)$ si $\nu \geq 1$. Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 3.6
On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^i \tilde{g}_j &= \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} && \text{si } i < \nu \\ \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^i \tilde{g}_j &= \begin{pmatrix} \gamma_j \mathrm{ad}_f^{i-\nu} g + X_{j,i} \\ * \end{pmatrix} && \text{si } i \geq \nu, \end{aligned}$$

où $X_{j,i} \in \overline{\mathcal{Q}_{i-\nu-1}}$ et où $*$ représente des expressions mathématiques qu'il n'est pas nécessaire de préciser.

En particulier, on a $\mathcal{Q}_i = \mathrm{T}\pi(\tilde{\mathcal{Q}}_{i+\nu})$ et $\overline{\mathcal{Q}_i} = \mathrm{T}\pi(\overline{\tilde{\mathcal{Q}}_{i+\nu}})$, où $\mathrm{T}\pi$ est l'application tangente à la projection $(x,w) \overset{\pi}{\longmapsto} x$.

On suppose provisoirement que le lemme a été démontré. Nous montrerons par l'absurde que les distributions $\mathcal{G}_i$ sont involutives. Si tel n'était pas le cas, soit $k = \min\{i \mid \overline{\mathcal{G}_i} \neq \mathcal{G}_i\}$; ayant supposé que (i) était faux, nous avons $k < +\infty$. Comme $\overline{\mathcal{G}_j} = \mathcal{G}_j$ pour tout $j < k$, on a $\mathcal{G}_k = sp\{g, \mathrm{ad}_f g, \ldots, \mathrm{ad}_f^k g\}$ et $\mathcal{G}_k = \mathcal{Q}_k$. La définition de k entraine qu'il existe un entier j tel que

$$\left[\mathrm{ad}_f^j g, \mathrm{ad}_f^k g\right] \notin \mathcal{G}_k.$$

L'assertion (ii) étant vérifiée, on a d'après le Lemme 3.6 et la définition de k

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\nu+k} = sp\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ V_{j,1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ V_{j,\nu} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_j g \\ V_{j,\nu+1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \mathrm{ad}_f^k \gamma_j g \\ V_{j,\nu+k+1} \end{pmatrix} \; ; \; 1 \leq j \leq m' \right\}$$

Soit l tel que $\gamma_l \not\equiv 0$, on calcule le crochet de Lie suivant :

$$[\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{\nu+j} \tilde{g}_l, \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^k \tilde{g}_l] = \left[\begin{pmatrix} \gamma_l \mathrm{ad}_f^j g \\ V_{\nu+j+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_l \mathrm{ad}_f^k g \\ V_{\nu+k+1} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \gamma_l^2 \left[\mathrm{ad}_f^j g, \mathrm{ad}_f^k g\right] + Y \\ * \end{pmatrix} \notin \tilde{\mathcal{G}}_{\nu+k},$$

où $Y = (L_{\mathrm{ad}_{\tilde{f}\tilde{g}_l}^j \gamma_l}) \mathrm{ad}_f^k g - (L_{\mathrm{ad}_{\tilde{f}\tilde{g}_l}^k \gamma_l}) \mathrm{ad}_f^j g \in \mathcal{G}_k$, ce qui implique que $\tilde{\mathcal{G}}_{\nu+k}$ n'est pas involutive ce qui est contradictoire avec l'assertion (ii).

Nous avons montré que (ii) impliquait que $\mathcal{G}_i$ était involutive quel que soit i, montrons maintenant que $\mathcal{G}_i$ (ou $\mathcal{Q}_i$) est de rang constant. D'après le Lemme 3.6 et le fait que $\tilde{\mathcal{Q}}_i$ soit involutive pour tout i, quitte à faire des combinaisons linéaires des champs de vecteurs $\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^k \tilde{g}_j$, les distributions $\tilde{\mathcal{Q}}_{\nu+i}$ se décomposent de la façon suivante :

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{\nu+i} = E_i \oplus F_i,$$

où $\mathrm{T}\pi$ induit une bijection de E_i sur $\mathcal{Q}_i$ et où $F_i = \tilde{\mathcal{Q}}_{\nu+i} \cap \ker \mathrm{T}\pi$. On a donc

$$\dim \tilde{\mathcal{Q}}_{\nu+i} = \dim \mathcal{Q}_i + \dim F_i.$$

Comme les applications $\tilde{x} \mapsto \dim \mathcal{Q}_i(\pi(\tilde{x}))$ et $\tilde{x} \mapsto \dim F_i(\tilde{x})$ sont semi-continues inférieurement et comme $\tilde{\mathcal{Q}}_i$ est de rang constant, il en est de même pour F_i et $\mathcal{Q}_i = \mathcal{G}_i$.

Enfin, on a $\tilde{\mathcal{Q}}_* = \mathrm{TR}^{n+n'}$, d'où l'on déduit que $\mathcal{G}_* = \mathcal{Q}_* = \mathrm{T}\pi(\tilde{\mathcal{Q}}_*) = \mathrm{TR}^n$, l'assertion (i) est bien vérifiée.

Comme $\mathrm{T}\pi(\overline{\tilde{\mathcal{Q}}_{i+\nu}}) = \overline{\mathcal{Q}_i}$, il existe alors une application unique φ telle que le diagramme suivant soit commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{Q}}_i & \longrightarrow & \overline{\tilde{\mathcal{Q}}_i} & \longrightarrow & \overline{\tilde{\mathcal{Q}}_i}/\tilde{\mathcal{Q}}_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{T}\pi & & \downarrow \mathrm{T}\pi & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_i & \longrightarrow & \overline{\mathcal{Q}_i} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{Q}_i}/\mathcal{Q}_i & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

L'existence de φ et sa surjectivité se déduit de l'exactitude des deux lignes et de la surjectivité de l'application $\mathrm{T}\pi$. La surjectivité de φ implique que $\dim \overline{\tilde{\mathcal{Q}}_i} - \dim \tilde{\mathcal{Q}}_i \geq \dim \overline{\mathcal{Q}_i} - \dim \mathcal{Q}_i$; on en déduit que $n^e_{NL} \geq n_{NL}$.

Démonstration du Lemme 3.6

Par récurrence sur i. Pour $i = 0$ on a

$$\tilde{g}_j = \begin{pmatrix} \beta_j g \\ b_j \end{pmatrix}$$

avec $\beta_j = \gamma_j$ si $\nu = 0$ et $\beta_j = 0$ si $\nu \geq 1$. Le lemme est vrai pour $i = 0$.

On suppose que le lemme est vrai pour un entier donné i, montrons qu'il est vrai pour l'entier $i+1$. On considère deux cas suivant que $i \geq \nu$ ou $i < \nu$. Si $i \geq \nu$, on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_f^{i+1}\tilde{g}_j &= \left[\begin{pmatrix} f(x) + \alpha(x,w)g(x) \\ a(x,w) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_j(x,w)\mathrm{ad}_f^{i-\nu}g + X_{j,i} \\ * \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_j(x,w)\mathrm{ad}_f^{i+1-\nu}g + X_{j,i+1} \\ * \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$X_{j,i+1} = [f, X_{j,i}] + \alpha[g, X_{j,i}] + (L_f\gamma_j)\mathrm{ad}_f^{i-\nu}g - (L_{\mathrm{ad}_{\tilde{f}\tilde{g}_j}^i}\alpha)g + \alpha\gamma_j\mathrm{ad}_g\mathrm{ad}_f^{i-\nu}g + \frac{\partial X_{j,i}}{\partial w}a.$$

Comme $X_{j,i} \in \overline{\mathcal{Q}_{i-\nu-1}}$ et $\gamma_j = (-1)^\nu\delta_j$, $X_{j,i}$ s'écrit $X_{j,i}(x,w) = \sum_k \sigma_{k,j,i}(x,w)\Gamma_{k,j,i}(x)$, où $\Gamma_{k,j,i} \in \overline{\mathcal{Q}_{i-\nu-1}}$, ainsi $\dfrac{\partial X_{j,i}}{\partial w}a = \sum_k L_a\sigma_{k,j,i}\Gamma_{k,j,i} \in \overline{\mathcal{Q}_{i-\nu-1}}$; on en déduit que, conformément à la Proposition 3.1, $X_{j,i+1}$ appartient à $\overline{\mathcal{Q}_{i-\nu}}$.

Si $i < \nu$ alors par hypothèse on a

$$\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^i\tilde{g}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{i+1}\tilde{g}_j = \begin{pmatrix} -(L_{\mathrm{ad}_{\tilde{f}\tilde{g}_j}^{i}}\alpha)g \\ * \end{pmatrix}$$

Comme

$$L_{\mathrm{ad}_{\tilde{f}\tilde{g}_j}^{i}}\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } i < \nu - 1 \\ (-1)^i L_{\tilde{g}_j} L_{\tilde{f}}^{i}\alpha & \text{si } i = \nu - 1, \end{cases}$$

on a

$$\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{i+1}\tilde{g}_j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} & \text{si } i < \nu - 2 \\ \begin{pmatrix} \gamma_j g \\ * \end{pmatrix} & \text{si } i = \nu - 1. \end{cases}$$

La récurrence est établie.

Montrons par récurrence que l'on a pour tout $i \geq 0$

(i) $\mathrm{T}\pi(\tilde{\mathcal{Q}}_{i+\nu}) = \mathcal{Q}_i$,

(ii) $\mathrm{T}\pi(\overline{\tilde{\mathcal{Q}}_{i+\nu}}) = \overline{\mathcal{Q}_i}$.

De la relation $[\mathrm{T}\pi(V_1), \mathrm{T}\pi(V_2)] = \mathrm{T}\pi([V_1, V_2])$ on déduit que (i) implique (ii). De l'expression des $\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l+\nu}\tilde{g}_k$ on obtient que (i) est vrai pour $i = 0$.

Supposons que (i) (et donc (ii)) soit vrai pour un entier i donné : montrons alors que (i) est vrai pour $i+1$. Comme $\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{i+\nu+1}\tilde{g}_k = \begin{pmatrix} \gamma_k \mathrm{ad}_f^{i+1} g + X_{k,i+\nu+1} \\ * \end{pmatrix}$ avec $X_{k,i+\nu+1} \in \overline{\mathcal{Q}_{i+1}}$, on en déduit que

$$\mathrm{T}\pi(\tilde{\mathcal{Q}}_{i+\nu+1}) = \underbrace{\mathrm{T}\pi(\overline{\tilde{\mathcal{Q}}_{i+\nu}})}_{=\overline{\mathcal{Q}_i}} + span\{\gamma_k \mathrm{ad}_f^{i+1} g + \underbrace{X_{k,i+\nu+1}}_{\in \overline{\mathcal{Q}_i}},\ 1 \leq k \leq m'\},$$

i.e. vu la définition des $\mathcal{Q}_k$, $\mathrm{T}\pi(\tilde{\mathcal{Q}}_{i+\nu+1}) = \mathcal{Q}_{i+1}$. La récurrence est établie. □

Corollaire 3.7

On considère un système (3.1) constitué de la réunion de m systèmes mono-entrée : $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, $n = n_1 + \cdots + n_m$,

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + g_i(x_i)u_i,$$

alors les propositions suivantes suivantes sont équivalentes :

(i) *Le système (3.1) est linéarisable par bouclage statique.*

(ii) *Le système (3.1) est linéarisable par bouclage dynamique.*

Démonstration :

L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ est évidente. Si l'on suppose maintenant que (ii) est vrai, chaque sous-système mono-entrée sera linéarisable par bouclage dynamique (le compensateur linéarisant ce sous-système étant constitué du compensateur linéarisant l'ensemble du système (3.1) et des autres sous-systèmes mono-entrée). Le Théorème 3.5 implique alors que chaque sous-système mono-entrée est linéarisable par bouclage statique. Il est alors évident que le système complet (3.1) est linéarisable par bouclage statique. □

3.4 Une condition nécessaire

La condition nécessaire suivante, presque triviale, permet de mieux comprendre la structure des systèmes linéarisables par bouclage dynamique.

THÉORÈME 3.8

On considère un système non linéaire (3.1). On suppose que ce système est localement dynamiquement linéarisable au voisinage U_0 de l'origine.

Alors l'approximation linéaire tangente à l'origine de (3.1) est commandable.

Démonstration :

D'après les hypothèses il existe un bouclage dynamique (3.3) et un difféomorphisme de l'état étendu $z = \varphi(x, w)$ tel que le système étendu soit transformé en un système linéaire commandable. Considérons le système étendu :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x) + G(x)\alpha(x,w) + G(x)\beta(x,w)v \\ \dot{w} & = & a(x,w) + B(x,w)v. \end{array} \tag{3.13}$$

Il s'en suit que l'approximation linéaire du système (3.13) au voisinage de $(0,0)$

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (\nabla_x f)(0)x + G(0)(\nabla_x \alpha)(0,0)x + G(0)(\nabla_w \alpha)(0,0)w + G(0)\beta(0,0)v \\ \dot{w} & = & (\nabla_x a)(0,0)x + (\nabla_w a)(0,0)w + B(0,0)v, \end{array}$$

que l'on écrit de façon condensée

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla_x f + G(0)\nabla_x \alpha & G(0)\nabla_w \alpha \\ \nabla_x a & \nabla_w a \end{pmatrix}}_{=\tilde{F}} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} G(0)\beta(0,0) \\ B(0,0) \end{pmatrix}}_{=\tilde{G}} v, \tag{3.14}$$

est équivalente par le changement linéaire de coordonnées $Z = \nabla\varphi \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$ à un système linéaire et commandable. Le système (3.14) vérifie donc le critère de Kalman.

Montrons par récurrence sur i que

$$\mathrm{Im}\,(I_n, 0)(\tilde{G}, \tilde{F}\tilde{G}, \ldots, \tilde{F}^i\tilde{G}) \subset \mathrm{Im}\, \underbrace{(G(0), \nabla_x f G(0), \ldots, (\nabla_x f)^i G(0))}_{=\mathcal{C}_i} \tag{3.15}$$

C'est évident pour $i = 0$. Supposons le vrai pour un entier donné i. De l'inclusion (3.15) on en déduit qu'il existe une matrice M telle que

$$\tilde{F}^i\tilde{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_i M \\ * \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\tilde{F}^{i+1}\tilde{G} = \begin{pmatrix} \nabla_x f \mathcal{C}_i M + G(0)N \\ * \end{pmatrix},$$

où N est une certaine matrice ; cela nous donne (3.15) pour $i+1$. La récurrence est établie.

Comme le système (3.14) est commandable, les matrices $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ vérifie le critère de Kalman. Ce qui nous donne

$$\mathrm{rg}\,\mathcal{C}_{n+q-1} = n\,;$$

le Théorème de Cayley-Hamilton nous donne alors le critère de Kalman pour $\nabla_x f$ et $G(0)$. □

Exemple

Cette condition nécessaire n'est bien évidemment pas suffisante comme nous le montre le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ce système a pour approximation linéaire le système commandable

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Cependant, d'après le Théorème 3.3 le système (3.16) n'est pas linéarisable par bouclage statique et donc, conformément au Théorème 3.5, n'est pas linéarisable par bouclage dynamique.

Remarque 3.3

Aucun système bilinéaire homogène $\dot{x} = \sum_i u_i A_i x$ n'est linéarisable par bouclage dynamique au voisinage de 0.

3.5 Le cas multi-entrée

La situation est très différente pour les systèmes multi-entrées. Certaines classes de systèmes non linéaires multi-entrées que l'on ne peut pas linéariser par bouclage statique le sont par bouclage dynamique.

On peut essayer de vérifier directement que le système étendu (3.1)-(3.3) vérifie les conditions du Théorème 3.3 pour savoir si le système (3.1) est linéarisable par bouclage dynamique. Mais nous n'avons aucun moyen théorique de savoir quel choix de compensateur dynamique (3.3) nous linéarisera le système étendu. Notre propos est de chercher des conditions directement vérifiable sur le système (3.1) qui nous assurerons l'existence et un algorithme de construction du compensateur dynamique linéarisant.

Les lois de bouclage dynamique (3.3) sont trop complexes et ne peuvent être étudiées dans toute leur généralité. On se restreindra à des bouclages dynamiques de la forme (3.17)-(3.18)

$$\frac{d^{\mu_i} u_i}{dt^{\mu_i}} = \tilde{v}_i \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.17}$$

$$\tilde{v} = \alpha(x,w) + \beta(x,w)v, \tag{3.18}$$

avec $\alpha(0,0) = 0$ et $\beta(x,w)$ matrice $m \times m$ inversibles. On note $w = (w_i^j; \mu_i \geq 1, 1 \leq j \leq \mu_i)$ où w_i^j vaut $\frac{d^{j-1}u_i}{dt^{j-1}}$. C'est à dire que l'on met des chaînes d'intégrateurs sur certaines entrées, enfin on fait un bouclage statique sur le système étendu. Cela revient à "retarder" certaines commandes par des chaînes d'intégrateurs pour que le système étendu verifie les conditions du Théorème 3.3. Ce type de compensateur est bien régulier (la relation entrée-sortie $\tilde{v} \rightarrow u$ est linéaire et sa matrice de transfert est inversible).

On pourrait également faire un premier bouclage statique sur l'état initial, ce qui revient à choisir une base de $\mathcal{G}_0$, puis de rajouter des chaînes d'intégrateurs sur ces nouveaux canaux d'entrées. Le point le plus délicat est alors le choix du premier bouclage statique. Il n'y a malheureusement pas encore de procédure systématique simple permettant de faire "le bon choix", à l'exception du cas particulier des systèmes dont la dimension non linéaire n_{Nl} (cf Definition 3.8) est égale à 1, $n_{Nl} = 1$. Pour ces systèmes nous donneront des conditions suffisantes de linéarisation totale par bouclage dynamique qui porteront sur la structure des crochets de Lie des champs de commande dans une forme pseudocanonique. Pour vérifier ces conditions, il faudra donc faire un premier bouclage statique qui mette le système (3.1) sous forme pseudocanonique.

Pour les autres systèmes non linéaires il est toujours possible de se mettre sous forme pseudocanonique, cependant, dans de nombreux cas rencontrés dans les applications les systèmes sont naturellement "structurés" et sont déjà dans la "bonne base" ; le concepteur devant encore déterminer les entiers μ_i de (3.17) sans devoir au préalable se mettre dans une forme pseudocanonique. Bien que de tels systèmes ne soient pas le cas général, nous les étudierons en premier lieu.

Nous allons maintenant donner des conditions suffisantes pour que le système (3.1) soit linéarisable par un bouclage dynamique de la forme (3.17)-(3.18).

On suppose choisi la base de $\mathcal{G}_0$ et les entiers $\mu_1, \ldots, \mu_m$; On considère le système étendu (3.1)+(3.17). Le système étendu a donc la forme :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{g}_i, \tag{3.19}$$

avec $\tilde{x} = (x,w) = (x; w_j^i, \mu_i \geq 1, 1 \leq j \leq \mu_i)$, où $w_i^j = \dfrac{\mathrm{d}^{j-1}u_i}{\mathrm{d}t^{j-1}}$ et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{f}(\tilde{x}) & = & f(x) + \sum\limits_{\mu_i \geq 1} w_i^1 g_i(x) + \sum\limits_{\mu_i \geq 2} \sum\limits_{j=1}^{\mu_i - 1} w_i^{j+1} \dfrac{\partial}{\partial w_i^j} \\ \tilde{g}_i(\tilde{x}) & = & g_i(x) \text{ si } \mu_i = 0 \\ \tilde{g}_i(\tilde{x}) & = & \dfrac{\partial}{\partial w_i^{\mu_i}} \text{ si } \mu_i \geq 1. \end{array} \right. \tag{3.20}$$

On définit les distributions $\tilde{\mathcal{G}}_i$ de façon similaire aux distributions $\mathcal{G}_i$:

$$\tilde{\mathcal{G}}_i = sp\{\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^l \tilde{g}_j \,,\, 0 \leq l \leq i \,,\, 1 \leq j \leq m\}. \tag{3.21}$$

Ces distributions dépendent naturellement de la définition de l'espace étendu. Notre but est de "traduire" les propriétés des $\tilde{\mathcal{G}}_i$ en propriétés de distributions définies sur l'espace initial. On introduit donc :

DÉFINITION 3.10
Soit Δ_i la famille de distributions suivante :

- $\Delta_0 = sp\{g_k \mid \mu_k = 0\}$
- $\Delta_{i+1} = \Delta_i + [f, \Delta_i] + sp\{g_k \mid \mu_k = i+1\}$

Les distributions Δ_i et les distributions $\tilde{\mathcal{G}}_i$ sont, sous certaines conditions, étroitement reliées :

Lemme 3.9
Si pour tout i, $i \geq 0$ et pour tout j, $1 \leq j \leq m$, tels que $\mu_j \geq 1$ nous avons

$$[g_j, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1},$$

alors pour $i \geq 0$

$$\tilde{\mathcal{G}}_i = \Delta_i + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j}} \mid \mu_j \geq 1\} + \cdots + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j - i}} \mid \mu_j \geq i+1\}. \tag{3.22}$$

Lorsque les hypothèses de ce lemme sont vérifiés, les propriétés d'involutivité et de constance de rang des distributions $\tilde{\mathcal{G}}_i$ se lisent sur les distributions Δ_i.

Démonstration :
Calculons la distribution $\tilde{\mathcal{G}}_0$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_0 &= sp\{\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m\} \\ &= sp\{g_k \mid \mu_k = 0\} + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j}} \mid \mu_j \geq 1\}. \end{aligned}$$

Or, d'après la définition de Δ_0,

$$\tilde{\mathcal{G}}_0 = \Delta_0 + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j}} \mid \mu_j \geq 1\}.$$

Nous allons maintenant procéder par récurrence sur i. On suppose que pour i donné

$$\tilde{\mathcal{G}}_i = \Delta_i + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j}} \mid \mu_j \geq 1\} + \cdots + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j - i}} \mid \mu_j \geq i+1\}.$$

Montrons que

$$\tilde{\mathcal{G}}_{i+1} = \Delta_{i+1} + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j}} \mid \mu_j \geq 1\} + \cdots + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j - i - 1}} \mid \mu_j \geq i+2\}.$$

On a

$$\tilde{\mathcal{G}}_{i+1} = \tilde{\mathcal{G}}_i + \mathrm{ad}_{\tilde{f}}\tilde{\mathcal{G}}_i.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{G}}_i + \mathrm{ad}_{\tilde{f}}\tilde{\mathcal{G}}_i &= \tilde{\mathcal{G}}_i + sp\{\mathrm{ad}_{\tilde{f}}X\,;\, X \in \tilde{\mathcal{G}}_i\} \\
&= \tilde{\mathcal{G}}_i + \mathrm{ad}_{\tilde{f}}\Delta_i + sp\{\mathrm{ad}_{\tilde{f}}\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j}} \mid \mu_j \geq 1\} \\
&\quad + \cdots + sp\{\mathrm{ad}_{\tilde{f}}\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j - i}} \mid \mu_j \geq i+1\} \\
&= \tilde{\mathcal{G}}_i + sp\{\mathrm{ad}_f Y + \sum_{j,\mu_j \geq 1} w_j^1 \mathrm{ad}_{g_j} Y\,;\, Y \in \Delta_i\} + sp\{g_j \mid \mu_j = i+1\} \\
&\quad + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j}}\,;\, \mu_j \geq 1\} + \cdots + sp\{\frac{\partial}{\partial w_j^{\mu_j - i - 1}}\,;\, \mu_j \geq i+2\}.
\end{aligned}$$

En effet, si $Y(x,w) \in \Delta_i$, $Y(x,w) = \sum_k \lambda_k(x,w) Y_k(x)$ où $Y_k(x) \in \Delta_i$. On a donc

$$\mathrm{ad}_{\tilde{f}} Y = \sum_k \lambda_k (\mathrm{ad}_f + \sum_{i,\mu_i \geq 1} \mathrm{ad}_{g_i}) Y_k + \underbrace{\sum_k (\mathrm{ad}_{\tilde{f}}\lambda_k) Y_k}_{\in \Delta_i \subset \tilde{\mathcal{G}}_i}, \text{ vu que } [\frac{\partial}{\partial w_j^i}, Y_k(x)] = 0.$$

Par hypothèse, pour tout j, $1 \leq j \leq m$, $\mu_j \geq 1$, nous avons $[g_j, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1}$. Selon la définition de Δ_{i+1}, nous venons de montrer que le Lemme est vrai pour $i+1$ s'il est vrai pour i. La récurrence est établie. □

Nous pouvons maintenant énoncer les conditions suffisantes de linéarisation par bouclage dynamique :

THÉORÈME 3.10

Étant donnée une suite d'entiers $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$, *et la suite des distributions* Δ_i *données par la Définition 3.10, si les conditions suivantes sont vérifiées au voisinage de l'origine,*

(i) Δ_i *est involutive de rang constant pour tout* i, $i = 0, \ldots n + \mu - 1$.

(ii) $\Delta_{n+\mu-1} = \mathrm{T}\mathbb{R}^n$

(iii) *Pour tout* i, $i = 0, \ldots n + \mu - 1$ *et tout* j, $1 \leq j \leq m$, $[g_j, \Delta_i] \in \Delta_{i+1}$,

alors le système (3.1) est linéarisable par bouclage dynamique par un compensateur régulier du type (3.17)-(3.18) ; autrement dit, le système étendu (3.1)-(3.17) est linéarisable par bouclage statique.

Démonstration :

L'hypothèse (iii) et le Lemme 3.9 nous garantit que (3.22) est vrai pour tout $i \geq 0$. Comme Δ_i ne dépend que de x, étant défini sur l'espace d'état initial, (i) et (3.22) impliquent que les distributions $\tilde{\mathcal{G}}_i$ sont involutives de rang constant pour tout $i \geq 0$.

Enfin (3.22) implique que $\tilde{\mathcal{G}}_{n+\mu-1} = \Delta_{n+\mu-1} + \mathrm{TR}^{\mu}$; d'après (ii), on a bien $\dim \tilde{\mathcal{G}}_{n+\mu-1} = n+\mu$. Les conditions de Jakubczyk-Respondek, Hunt-Su-Meyer sont bien vérifiées, il existe donc un bouclage statique sur l'espace étendu

$$\tilde{v} = \alpha(x,w) + \beta(x,w)v,$$

($\alpha(0,0) = 0$ et $\beta(x,w)$ matrice $m \times m$ inversible) et un difféomorphisme de l'état étendu,

$$z = \varphi(x,w)\,,\ \ \varphi(0,0) = 0 \quad z \in \mathbf{R}^{n+\mu},$$

transformant le système (3.19) en un système linéaire commandable. □

Corollaire 3.11
Considérons le système (3.1) tel que $m = n-1$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le système (3.1) est localement linéarisable par bouclage dynamique.*

(ii) *L'approximation linéaire tangente du système (3.1) à l'origine est commandable.*

Démonstration :
$(i) \Rightarrow (ii)$ est une conséquence du Théorème 3.8.
$(ii) \Rightarrow (i)$.

Comme l'approximation linéaire du système (3.1) est commandable et que le rang de $\mathcal{G}_0$ est $n-1$, il existe un champ de vecteurs g_i tel que $\mathrm{ad}_f g_i$ n'appartient pas à $\mathcal{G}_0$ (sinon on aurait $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0$, ce qui impliquerait que $\mathcal{G}_* = \mathcal{G}_0 \neq \mathrm{TR}^n$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de commandabilité de l'approximation linéaire de (3.1)). D'autre part on a $\mathcal{G}_1 = \mathrm{TR}^n$. On distingue deux cas : soit $\mathcal{G}_0$ est involutive et alors, comme $\mathcal{G}_1 = \mathrm{TR}^n$, selon le Théorème 3.3 le système (3.1) est linéarisable par bouclage statique, soit $\mathcal{G}_0$ n'est pas involutive. Dans ce cas on assigne aux indices μ_k les valeurs suivantes : $\mu_k = 1$ si $k \neq i$ et $\mu_i = 0$. On aura alors

- $\Delta_0 = sp\{g_i\}$ qui est de rang 1 et involutive.
- $\Delta_1 = \mathcal{G}_0 + sp\{\mathrm{ad}_f g_i\} = \mathrm{TR}^n$ puisque $n = m+1$.

Les hypothèses du Théorème 3.10 sont vérifiées et le système (3.1) est linéarisable par bouclage dynamique. □

Remarque 3.4
Nous allons montrer comment les conditions suffisantes du Théorème 3.10 peuvent nous aider à trouver la structure d'un compensateur dynamique linéarisant lorsqu'il existe. Nous nous plaçons dans le cas particulier où toutes les non involutivités sont générées par un seul champ de vecteurs, par exemple g_m. Plus précisément, on suppose que $\Lambda_0 = sp\{g_1, \ldots, g_{m-1}\}$ est une sous-distribution involutive de $\mathcal{G}_0$. On suppose que pour tout $i \geq 0$, on ait

$$\overline{\mathcal{G}_i} = \mathcal{G}_i + I(\{\mathrm{ad}_f^k g_m, 0 \leq k \leq i\})$$

où $I(\{\mathrm{ad}_f^k g_m, 0 \leq k \leq i\})$ est l'idéal de Lie de l'algèbre de Lie $\overline{\mathcal{G}_i}$ engendré par $\{\mathrm{ad}_f^k g_m, 0 \leq k \leq i\}$. Cette condition signifie que les non involutivités des distributions $\mathcal{G}_i$ proviennent de crochets de Lie mettant en jeu g_m.

Cette structure spécifique des algèbres de Lie $\overline{\mathcal{G}_i}$ nous suggère de considérer des compensateurs dynamique du type (3.17) tel que $\mu_1 = \cdot = \mu_{m-1} = 0$ et $\mu_m \neq 0$. Il nous reste à choisir une valeur pour μ_m. La procédure suivante nous donnera des bornes pour cet entier.

Nous définissons les distributions et indices suivants:

$$\Lambda_{i+1} = \Lambda_i + \mathrm{ad}_f \Lambda_i$$

$$i_0 = \inf\{i \mid \mathcal{G}_i \neq \overline{\mathcal{G}_i}\}$$

$$\mu = \sup\{0\ ,\ \{i_0 - k \mid \left[\mathrm{ad}_f^k g_m, \mathrm{ad}_f^{i_0} \Lambda_0\right] \not\subset \mathcal{G}_{i_0}\ ,\ 0 \leq k \leq i_0\}\}$$

$$r = \sup\{i \mid \Lambda_i \textit{ involutive et } \mathrm{ad}_{g_m} \Lambda_{i-1} \subset \Lambda_i\}.$$

Soient $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-1} = 0$. Supposons que $\mu \leq r$ et choisissons μ_m et les distributions Δ_i comme suit :

$$\begin{array}{lcll} \mu + 1 \leq \mu_m \leq r + 1 & & & \\ \Delta_i & = & \Lambda_i & \forall i \leq \mu_m - 1 \\ \Delta_{\mu_m} & = & \Lambda_{\mu_m} + sp\{g_m\} & \\ \Delta_{i+1} & = & \Delta_i + \mathrm{ad}_f \Delta_i & \forall i \geq \mu_m. \end{array} \tag{3.23}$$

Conformément à la définition des distributions Λ_i et de l'indice r, et au Théorème 3.3, si Δ_i est involutive pour tout $i \geq \mu_m$ alors le système (3.1) est linéarisable par un compensateur dynamique du type (3.17) avec $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-1} = 0$ et μ_m donné par (3.23).

Si μ_m est choisi inférieur ou égal à μ, alors Δ_{i_0} ne peut pas être involutive :

$$\Delta_{i_0} = \sum_{k=0}^{i_0} \mathrm{ad}_f^k \Lambda_0 + sp\{\mathrm{ad}_f^k g_m\ ,\ 0 \leq k \leq i_0 - \mu_m\},$$

$\mathrm{ad}_f^{i_0 - \mu} g_m \subset \Delta_{i_0}$ *ce qui implique, conformément à la définition de μ, que $\Delta_{i_0} \subset \mathcal{G}_{i_0}$ n'est pas involutive.*

Inversement, si μ est choisi strictement supérieur à $r + 1$, alors

$$\Delta_{r+1} = \Lambda_{r+1}$$

et, conformément à la définition de r, $\Delta_{r+1} = \Lambda_{r+1}$ n'est pas involutive. Les seuls choix possibles sont $\mu + 1 \leq \mu_m \leq r + 1$.

Nous étudions maintenant le cas des sytèmes (3.1) "presque linéarisable", c'est à dire dont la dimension non linéaire vaut 1, $n_{NL} = 1$. Pour ces systèmes nous ferons un bouclage statique préliminaire qui les mettra sous forme pseudocanonique, les conditions portant sur les champs de commande après ce bouclage.

THÉORÈME 3.12

Considérons le système (3.1) dont l'approximation linéaire tangente est commandable. On suppose que $n_{NL} = 1$, *i.e. que* $\sum_{i=1}^{m} k_i = n - 1$ *(cf Définition 3.6). Soit*

$$\dot{x} = \bar{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{g}_i(x) v_i(t) \tag{3.24}$$

une forme pseudocanonique équivalente par bouclage statique à (3.1). S'il existe un indice j, $1 \leq j \leq m$, *tel que*

$$\mathrm{ad}_{\bar{f}}^{k_j} \bar{g}_j \notin \overline{\Gamma_j}, \tag{3.25}$$

où

$$\Gamma_j = \mathcal{G}_{k_j - 2} + sp\{\mathrm{ad}_{\bar{f}}^{k_j - 1} \bar{g}_j\},$$

alors le système (3.1) est linéarisable par bouclage dynamique.

Démonstration :

Considérons une forme pseudocanonique (3.24) du système (3.1) obtenue par bouclage statique et difféomorphisme auquel on adjoint le compensateur dynamique suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = v_i' & i \neq j,\ 1 \leq i \leq m \\ v_j = v_j'. \end{cases} \tag{3.26}$$

On introduit la notation $x_{k_i+1}^i = v_i$ pour $i \neq j$, $1 \leq i \leq m$ et $\tilde{x} = (x; x_{k_i-1}^i, i \neq j)$. On déduit de la Définition 3.7 et du Théorème 3.4 que le système (3.24)-(3.26) s'écrit

$$\begin{array}{lcll} \dot{x}_l^i & = & x_{l+1}^i & 1 \leq l \leq k_i \\ \dot{x}_{k_i+1}^i & = & v_i' & i \neq j,\ 1 \leq i \leq m \\ \dot{x}_l^j & = & x_{l+1}^j & 1 \leq l \leq k_j - 1 \\ \dot{x}_{k_j}^j & = & v_j' & \\ \dot{x}^{(2)} & = & a(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} b_i(\tilde{x}) v_i', & \end{array} \tag{3.27}$$

que l'on écrit sous forme condensée

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{g}_i(\tilde{x}) v_i', \tag{3.28}$$

avec

$$\begin{array}{lcll} \tilde{g}_i & = & \dfrac{\partial}{\partial x_{k_i+1}^i} & i \neq j,\ 1 \leq i \leq m \\ \tilde{g}_j & = & \bar{g}_j & \\ \tilde{f} & = & \bar{f} + \sum_{i \neq j} x_{k_i+1}^i \bar{g}_i. & \end{array}$$

Montrons par récurrence que

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l}\tilde{g}_i &=& -\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l-1}\bar{g}_i + X_{i,l} & i \neq j,\ l \geq 1 \\ \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l}\tilde{g}_j &=& \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l}\bar{g}_j + X_{j,l} & l \geq 0, \end{array} \tag{3.29}$$

avec $X_{i,l} \in \overline{\mathcal{Q}_{l-1}}$, $i \neq j$, et $X_{j,l} \in \overline{\mathcal{Q}_l}$.

On remarque que $\mathrm{ad}_{\tilde{f}}\tilde{g}_i = -\bar{g}_i$ pour $i \neq j$, les démonstrations de (3.29) pour $i \neq j$ et pour $i = j$ sont identiques à l'exception d'un décalage d'une unité dans les indices l. On ne fera donc la démonstration de (3.29) que pour $i = j$.

(3.29) est évidente pour $l = 0$, $X_{j,0} = 0$. Supposons la démontrée pour l'indice l. On a donc

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l+1}\tilde{g}_j &=& \mathrm{ad}_{\tilde{f}}\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l}\bar{g}_j + \mathrm{ad}_{\tilde{f}}X_{j,l} \\ &=& \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l+1}\bar{g}_j + X_{j,l+1}, \end{array}$$

où

$$X_{j,l+1} = \mathrm{ad}_{\tilde{f}}X_{j,l} + \sum_{i\neq j} x_{k_i+1}^{i} \underbrace{\mathrm{ad}_{\bar{g}_i}(\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l}\bar{g}_j + X_{j,l})}_{\in \overline{\mathcal{Q}_l}}.$$

Comme $\left[f, \overline{\mathcal{Q}_l}\right] \subset \overline{\mathcal{Q}_{l+1}}$, (cf Appendice B), on a bien $X_{j,l+1} \in \overline{\mathcal{Q}_{l+1}}$. La récurrence est établie.

D'après l'hypothèse (3.25), il existe une fonction $\psi(x)$ telle que $\mathrm{d}\psi \in \overline{\Gamma_j}$ et $\langle \mathrm{d}\psi, \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{k_j}\bar{g}_j\rangle \neq 0$. Si maintenant l'on considère ψ comme une fonction de $\tilde{x}$, on en déduit, vu la définition de Γ et (3.29), que

$$\begin{array}{l} \langle \mathrm{d}\psi, \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{k_j}\tilde{g}_j\rangle \neq 0 \\ \langle \mathrm{d}\psi, \mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{l}\tilde{g}_i\rangle = 0 \quad 0 \leq l \leq k_j - 1,\ 1 \leq i \leq m. \end{array} \tag{3.30}$$

On définit maintenant les fonctions de $\tilde{x}$ suivantes :

$$y_l = L_{\tilde{f}}^{l-1}\psi\ ,\ \ 1 \leq l \leq k_j + 1. \tag{3.31}$$

L'application $\tilde{x} \longmapsto (x_l^i, y^s;\ 1 \leq l \leq k_i + 1,\ i \neq j,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq s \leq k_j + 1)$ est un difféomorphisme local puisque la matrice carrée $(n + m - 1) \times (n + m - 1)$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1^1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_{k_{j-1}+1}^{j-1} \\ \mathrm{d}y_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}y_{k_j+1} \\ \mathrm{d}x_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_{k_m+1}^{m} \end{pmatrix}, ((-1)^{k_1}\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{k_1}\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_{j-1}, (-1)^{k_j}\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{k_j}\tilde{g}_j, \ldots, \tilde{g}_j, (-1)^{k_{j+1}}\mathrm{ad}_{\tilde{f}}^{k_{j+1}}\tilde{g}_{j+1}, \ldots, \tilde{g}_m)\right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} I_{\rho_1\times\rho_1} & 0 & 0 \\ * & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & I_{\rho_2\times\rho_2} \end{pmatrix},$$

où $\rho_1 = \sum_{i=1}^{j-1}(k_i+1)$, $\rho_2 = \sum_{i=j+1}^{m}(k_i+1)$ et où Λ est une matrice carrée de taille $(k_j+1)\times(k_j+1)$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \eta & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \eta \end{pmatrix},$$

avec $\eta = L_{\tilde{g}_j} L_{\tilde{f}}^{k_j+1}\psi \neq 0$. On peut donc remplacer dans $\tilde{x}$ les fonctions coordonnées $x^{(2)}$ et x_l^j, $1 \leq l \leq k_j$, par les nouvelles coordonnées y_l, $1 \leq l \leq k_j+1$, les autres fonctions coordonnées étant conservées. Dans ces nouvelles coordonnées le système (3.24) s'écrit

$$\begin{array}{lcll} \dot{x}_l^i & = & x_{l+1}^i & 1 \leq l \leq k_i,\ i \neq j \\ \dot{x}_{k_i+1}^i & = & v_i' & i \neq j \\ \dot{y}_l & = & y_{l+1} & 1 \leq l \leq k_j \\ \dot{y}_{k_j+1} & = & L_{\tilde{f}}^{k_j+1}\psi + \sum_{i\neq j}(L_{\tilde{g}_i} L_{\tilde{f}}^{k_j}\psi)v_i' + (L_{\tilde{g}_j} L_{\tilde{f}}^{k_j}\psi)v_j'. & \end{array} \tag{3.32}$$

Le bouclage statique suivant sur (3.32)

$$\begin{array}{lcll} v_i' & = & v_i'' & i \neq j,\ 1 \leq i \leq m \\ v_j' & = & \dfrac{1}{L_{\tilde{g}_j} L_{\tilde{f}}^{k_j}\psi}(-L_{\tilde{f}}^{k_j+1}\psi - \sum_{i\neq j}(L_{\tilde{g}_i} L_{\tilde{f}}^{k_j}\psi)v_i'' + v_j'') & \end{array} \tag{3.33}$$

permet de linéariser le système (3.32), c'est à dire de linéariser par bouclage dynamique le système (3.1). □

3.6 Exemples

Exemple 1

Considérons le système

$$\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & u_1 \\ \dot{x}_3 & = & u_2 \\ \dot{x}_4 & = & x_3 - x_3 u_1, \end{array} \tag{3.34}$$

que l'on peut écrire

$$\dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x),$$

où

$$f = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$g_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$g_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Le calcul des crochets de Lie entre les g_i et f nous donne

$$\mathrm{ad}_{g_1} g_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mathrm{ad}_f g_2 = -\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mathrm{ad}_f g_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Comme $\mathcal{G}_0$ n'est pas involutive, la condition (ii) du Théorème 3.3 n'est pas vérifiée, le système (3.34) n'est pas linéarisable par bouclage statique. On remarquera que, contrairement à $sp\{g_1, g_2, \mathrm{ad}_f g_1\}$, $sp\{g_1, g_2, \mathrm{ad}_f g_2\}$ est involutive et de rang constant égal à 3. Ainsi, si l'on choisit $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 0$ nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= sp\{g_2\}\\ \Delta_1 &= sp\{g_2, \mathrm{ad}_f g_2, g_1\}\\ \Delta_2 &= sp\{g_2, g_1, \mathrm{ad}_f g_1, \mathrm{ad}_f g_2\}.\end{aligned}$$

Les conditions du Théorème 3.10 sont satisfaites. Les indices de commandabilité du système en boucle (dynamique) fermée sont (3,2). Le compensateur dynamique s'écrira

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} &= v_1'\\ u_2 &= v_2'.\end{aligned}$$

Le changement de coordonnées du système étendu s'obtient en résolvant les équations

$$\mathrm{d}\varphi_1 \in (\Delta_1)^\perp \ , \quad \mathrm{d}\varphi_2 \in (\Delta_0)^\perp$$

et

$$\begin{pmatrix} \langle \mathrm{d}\varphi_1, \mathrm{ad}_f g_1\rangle & \langle \mathrm{d}\varphi_1, \mathrm{ad}_f^2 g_2\rangle \\ \langle \mathrm{d}\varphi_2, g_1\rangle & \langle \mathrm{d}\varphi_1, \mathrm{ad}_f g_2\rangle \end{pmatrix}$$

inversible ; une solution est donnée par $\varphi_1 = x_1$, $\varphi_2 = x_4$. Le changement de coordonnées est alors

$$\varphi = (\varphi_1, L_f\varphi_1, L_f^2\varphi_1, \varphi_2, L_f\varphi_2) = (x_1, x_2, u_1, x_4, x_3 - x_3u_1),$$

et le bouclage d'état étendu vaut

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x_3 & 1-u_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

On remarquera que le bouclage dynamique a introduit une singularité en $u_1 = 1$.

Exemple 2

Cet exemple montre que la condition (iii) du Théorème 3.10 n'est pas nécessaire. Considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3 u_2 \\ \dot{x}_1 &= x_3 + x_1 u_2 \\ \dot{x}_1 &= u_1 + x_2 u_2 \\ \dot{x}_4 &= u_2, \end{aligned} \tag{3.35}$$

i.e.

$$\dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_{2(x)},$$

où

$$f = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad g_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad g_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

On a les crochets de Lie suivants

$$\mathrm{ad}_{g_2} g_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \mathrm{ad}^2_{g_2} g_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathrm{ad}^3_{g_2} g_1 = -\frac{\partial}{\partial x_3}$$

et

$$\mathrm{ad}_f g_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathrm{ad}^2_f g_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \mathrm{ad}_f g_2 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

En particulier $\mathcal{G}_0$ n'est pas involutive, ce système n'est pas linéarisable par bouclage statique. Comme $\dim \mathcal{G}_2 = 4$, l'approximation linéaire tangente à l'origine est commandable. Si l'on choisit $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 3$, le système étendu s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3 w_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + x_1 w_1 \\ \dot{x}_3 &= v_1' + x_2 w_1 \\ \dot{x}_4 &= w_1 \\ \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= w_3 \\ \dot{w}_3 &= v_2' \end{aligned}$$

et se trouve être linéarisable par bouclage statique ; en effet

$$\tilde{\mathcal{G}}_0 = span\{\frac{\partial}{\partial w_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}\},$$

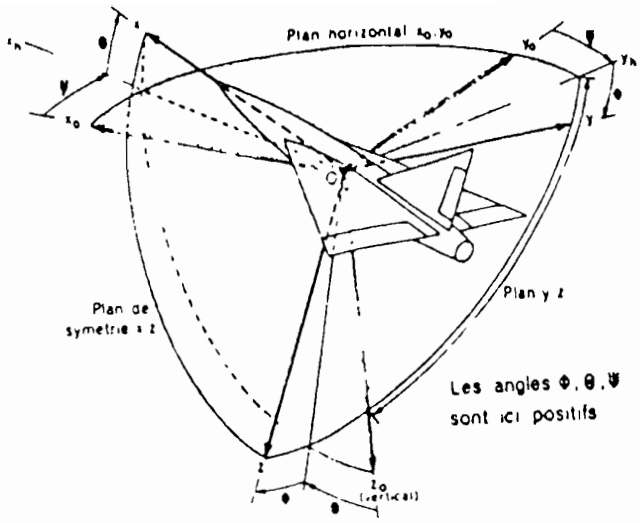


Figure 3

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = \tilde{\mathcal{G}}_0 + span\{\frac{\partial}{\partial w_2}, \frac{\partial}{\partial x_2} + w_1\frac{\partial}{\partial x_1}\},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_2 = \tilde{\mathcal{G}}_1 + span\{\frac{\partial}{\partial w_1}, (1-w_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + w_1^2\frac{\partial}{\partial x_2} + w_1\frac{\partial}{\partial x_3}\}.$$

Lorsque $w_1^3 + w_2 - 1 \neq 0$ (i.e. $\dot{u}_1 \neq 1 - u_1^3$) on a

$$\tilde{\mathcal{G}}_2 = \tilde{\mathcal{G}}_1 + span\{\frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}.$$

De même lorsque $w_1^3 + w_2 - 1 \neq 0$

$$\tilde{\mathcal{G}}_3 = \mathrm{TR}^7$$

Les distributions $\tilde{\mathcal{G}}_i$ satisfont les conditions du Théorème 3.3 tant que $w_1^3 + w_2 - 1 \neq 0$ (où a lieu une chute de rang de $\tilde{\mathcal{G}}_2$). D'autre part on a $\Delta_0 = span\{\frac{\partial}{\partial x_3}\}$ et $\Delta_1 = span\{\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$; la condition (iii) du Théorème 3.10 n'est pas satisfaite puisque $\mathrm{ad}_{g_2} g_1$ n'appartient pas à Δ_1.

On remarquera que dans cet exemple, les Δ_i ne sont plus égaux aux projections dans l'espace original des distributions $\tilde{\mathcal{G}}_i$. Ceci nous montre le rôle de la condition (iii), bien qu'elle ne soit pas nécessaire, elle nous permet lorsqu'elle est satisfaite de vérifier l'involutivité et la constance du rang des distributions $\tilde{\mathcal{G}}_i$ en ne considérant que les distributions Δ_i définies sur l'espace original.

Exemple 3 : commande de la cinématique d'un corps rigide [23]

On considère un modèle de corps rigide, cas qui recouvre en particulier les modèles d'avions ou de missiles. Nous montrerons que ce modèle n'est pas linéarisable par bouclage statique mais qu'il est linéarisable par bouclage dynamique. Nous comparerons également les performances de la loi de bouclage dynamique linéarisante avec la loi de bouclage statique permettant de linéariser un sous-système maximal.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées du centre de masse du corps rigide dans un repère absolu d'axe vertical l'axe des z (orienté vers le bas), $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ les coordonnées de la vitesse dans un repère relatif liée au corps rigide, $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ les composantes du moment cinétique dans le repère relatif, et $\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{pmatrix}$ les angles respectifs de roulis, tangage et lacet. Soit

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \\ \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{pmatrix}$$

le vecteur d'état. On considère p, q, r, et ρ (où ρ est la poussée) comme des variables de commande. Ce choix signifie que l'on considère comme rapide la dynamique du corps rigide autour de son centre de masse comparée à la dynamique du centre de masse. C'est la distinction entre guidage et pilotage bien connue en aéronautique. Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u\cos\Psi\cos\Theta \\
&\quad +v(\cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi-\sin\Psi\cos\Phi) \\
&\quad +w(\cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi+\sin\Psi\sin\Phi) \\
\dot{y} &= u\sin\Psi\cos\Theta \\
&\quad +v(\sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi+\cos\Psi\cos\Phi) \\
&\quad +w(\sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi-\cos\Psi\sin\Phi) \\
\dot{z} &= -u\sin\Theta+v\cos\Theta\sin\Phi+w\cos\Theta\cos\Phi \\
\dot{u} &= g\sin\Theta+rv-qw+\frac{X_0(\xi)}{m}+\frac{J\rho}{m} \\
\dot{v} &= -g\cos\Theta\sin\Phi-ru+pw+\frac{Y(\xi)}{m} \\
\dot{w} &= -g\cos\Theta\cos\Phi+qu-pv+\frac{Z(\xi)}{m} \\
\dot{\Phi} &= p+\mathrm{tg}\Theta(q\sin\Phi+r\cos\Phi) \\
\dot{\Theta} &= q\cos\Phi-r\sin\Phi \\
\dot{\Psi} &= \frac{q\sin\Phi+r\cos\Phi}{\cos\Theta},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

où $(X_0(\xi)+J\rho, Y(\xi), Z(\xi))$ sont les composantes du vecteur des forces, la gravité exceptée, exprimées dans le repère relatif. Le modèle est de la forme suivante :

$$\dot{\xi} = f(\xi) + g_1(\xi)p + g_2(\xi)q + g_3(\xi)r + g_4(\xi)\rho,$$

où les champs de vecteurs f, g_1, g_2, g_3, et g_4 sont obtenues à partir de (3.36).

$$f = \begin{pmatrix} u\cos\Psi\cos\Theta + v(\cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi - \sin\Psi\cos\Phi) \\ +w(\cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Phi) \\ u\sin\Psi\cos\Theta + v(\sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi) \\ +w(\sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \cos\Psi\sin\Phi) \\ -u\sin\Theta + v\cos\Theta\sin\Phi + w\cos\Theta\cos\Phi \\ g\sin\Theta + \dfrac{X_0(\xi)}{m} \\ -g\cos\Theta\sin\Phi + \dfrac{Y(\xi)}{m} \\ -g\cos\Theta\cos\Phi + \dfrac{Z(\xi)}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\w\\-v\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\-w\\0\\u\\\sin\Phi\mathrm{tg}\Theta\\\cos\Phi\\\dfrac{\sin\Phi}{\cos\Theta} \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\v\\-u\\0\\\cos\Phi\mathrm{tg}\Theta\\-\sin\Phi\\\dfrac{\cos\Phi}{\cos\Theta} \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\\dfrac{J}{m}\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de vérifier que

- $sp\{g_1, g_2, g_3\}$ est involutive;
- $\mathcal{G}_0 = sp\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ n'est pas involutive, $\dim \mathcal{G}_0 = 4$;
- $\overline{\mathcal{G}_0} = \mathcal{G}_0 + sp\{\mathrm{ad}_{g_4}g_2, \mathrm{ad}_{g_4}g_3\} = sp\{\dfrac{\partial}{\partial u}, \dfrac{\partial}{\partial v}, \dfrac{\partial}{\partial w}, \dfrac{\partial}{\partial \Phi}, \dfrac{\partial}{\partial \Theta}, \dfrac{\partial}{\partial \Psi}\}$, $\dim \overline{\mathcal{G}_0} = 6$;
- $\mathcal{G}_1 = \overline{\mathcal{G}_0} + \mathrm{ad}_f\mathcal{G}_0 \neq \overline{\mathcal{G}_1} = \mathrm{TR}^9$, $\dim \mathcal{G}_1 = 7$ et $\dim \overline{\mathcal{G}_1} = 9$.

Comme $\mathcal{G}_0$ (et $\mathcal{G}_1$) n'est pas involutive, le système (3.36) n'est pas linéarisable par bouclage statique. Cependant, la structure des crochets de Lie fait apparaître que g_4 joue un rôle particulier; si nous choisissons $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ et $\mu_4 = 1$, on aura :

$$\begin{array}{lcll} \Delta_0 & = & sp\{g_1, g_2, g_3\} & \\ \Delta_1 & = & \Delta_0 + \mathrm{ad}_f\Delta_0 + sp\{g_4\} & = \overline{\mathcal{G}_0} \\ \Delta_2 & = & \Delta_1 + \mathrm{ad}_f\Delta_1 & = \mathrm{TR}^9. \end{array}$$

Les conditions suffisantes du Théorème 3.10 sont donc satisfaites. On augmente donc l'état en lui adjoignant la poussée ρ et l'on construit le compensateur dynamique suivant :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\rho} & = & v_4 \\ p & = & v_1 \\ q & = & v_2 \\ r & = & v_3. \end{array}$$

Le système étendu est alors linéarisable par bouclage statique et difféomorphisme. On peut choisir comme sorties à découpler et à linéariser les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & x \\ y_2 & = & y \\ y_3 & = & z \\ y_4 & = & \Phi. \end{array}$$

On a alors les relations

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^3 y_1}{\mathrm{d}t^3} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^3 y_2}{\mathrm{d}t^3} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^3 y_3}{\mathrm{d}t^3} \\ \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = D_0 + D \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix},$$

où

$$
\begin{aligned}
D_0^1 &= \frac{L_f X_0}{m}\cos\Psi\cos\Theta + \frac{L_f Y}{m}(\cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi - \sin\Psi\cos\Phi) \\
&\quad + \frac{L_f Z}{m}(\cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Phi) \\
D_0^2 &= \frac{L_f X_0}{m}\sin\Psi\cos\Theta + \frac{L_f Y}{m}(\sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi) \\
&\quad + \frac{L_f Z}{m}(\sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \cos\Psi\sin\Phi) \\
D_0^3 &= -\frac{L_f X_0}{m}\sin\Theta + \frac{L_f Y}{m}\cos\Theta\sin\Phi + \frac{L_f Z}{m}\cos\Theta\cos\Phi \\
D_0^4 &= 0,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
D_1^1 &= \frac{Y}{m}\cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \frac{Z}{m}\cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi + \varepsilon_1^1 \\
D_1^2 &= -\frac{X_0 + J\rho}{m}(\cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Phi) + \frac{Z}{m}\cos\Psi\cos\Theta + \varepsilon_1^2 \\
D_1^3 &= \frac{X_0 + J\rho}{m}(\cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi - \sin\Psi\cos\Phi) - \frac{Y}{m}\cos\Psi\cos\Theta + \varepsilon_1^3 \\
D_1^4 &= \frac{J}{m}\cos\Psi\cos\Theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2^1 &= \frac{Y}{m}(\sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \cos\Psi\sin\Phi) - \frac{Z}{m}(\sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi) + \varepsilon_2^1 \\
D_2^2 &= -\frac{X_0 + J\rho}{m}(\sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \cos\Psi\sin\Phi) + \frac{Z}{m}\sin\Psi\cos\Theta + \varepsilon_2^2 \\
D_2^3 &= \frac{X_0 + J\rho}{m}(\sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi) - \frac{Y}{m}\sin\Psi\cos\Theta + \varepsilon_2^3 \\
D_2^4 &= \frac{J}{m}\sin\Psi\cos\Theta \\
D_3^1 &= \frac{\cos\Theta}{m}(Y\cos\Phi + Z\sin\Phi) + \varepsilon_3^1 \\
D_3^2 &= -\frac{X_0 + J\rho}{m}(\cos\Theta\cos\Phi + \sin\Theta\frac{Z}{m}) + \varepsilon_3^2 \\
D_3^3 &= \frac{X_0 + J\rho}{m}\cos\Theta\sin\Phi + \sin\Theta\frac{Y}{m} + \varepsilon_3^3 \\
D_3^4 &= -\frac{J}{m}\sin\Theta \\
D_4^1 &= 1 \\
D_4^2 &= \mathrm{tg}\Theta\sin\Phi \\
D_4^3 &= \mathrm{tg}\Theta\cos\Phi \\
D_4^4 &= 0,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1^i &= \frac{L_{g_i}X_0}{m}\cos\Psi\cos\Theta + \frac{L_{g_i}Y}{m}(\cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi - \sin\Psi\cos\Phi) \\
&\quad + \frac{L_{g_i}Z}{m}(\cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Phi) \qquad 1 \le i \le 3 \\
\varepsilon_2^i &= \frac{L_{g_i}X_0}{m}\sin\Psi\cos\Theta + \frac{L_{g_i}Y}{m}(\sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi) \\
&\quad + \frac{L_{g_i}Z}{m}(\sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \cos\Psi\sin\Phi) \qquad 1 \le i \le 3 \\
\varepsilon_3^i &= -\frac{L_{g_i}X_0}{m}\sin\Theta + \frac{L_{g_i}Y}{m}\cos\Theta\sin\Phi + \frac{L_{g_i}Z}{m}\cos\Theta\cos\Phi \qquad 1 \le i \le 3.
\end{aligned}
$$

On fait alors le bouclage statique suivant sur l'état étendu

$$v = D^{-1}(v' - D_0), \tag{3.37}$$

et le système étendu s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^3 y_i}{\mathrm{d}t^3} &= v_i \quad 1 \leq i \leq 3 \\ \dot{y}_4 &= v'_4. \end{aligned}$$

3.7 Conclusion

Nous avons essayé dans cette étude de déterminer la structure des systèmes entrée-état linéarisables par bouclage dynamique. Nous sommes arrivés à une cartactérisation complète de ceux-ci dans le cas mono-entrée ; un système mono-entrée est linéarisable par bouclage dynamique s'il est linéarisable par bouclage statique.

Les choses sont beaucoup moins claires dans le cas des systèmes multi-entrée. Mis à part une condition nécessaire triviale, le linéarisé tangent du système en boucle ouverte doit être commandable, le problème reste ouvert. Nous avons essayé de trouver des caractérisations des systèmes linéarisables par bouclage dynamique qui soient directement lisibles sur le système initial. Pour cela nous avons dû restreindre la classe des compensateurs dynamiques utilisés, et nous avons donné des conditions suffisantes de linéarisation par bouclage dynamique. Ces conditions nous permettent de résoudre le cas où la dimension du système initial n'est supérieure que d'une unité au nombre de commandes.

Un contre-exemple (Exemple 2) nous prouve que ces conditions suffisantes ne sont pas nécessaires. Ce contre-exemple nous montre également les limites de notre approche. En effet, nous avons cherché des conditions lisibles directement sur le système en boucle ouverte et non sur le système étendu, système + compensateur dynamique. Les outils mathématiques utilisés ici ne semblent pas permettre des extensions substantielles des résultats présentés. L'obtention de conditions nécessaires et suffisantes de linéarisation par bouclage dynamique reste un problème ouvert. Cependant les techniques actuelles suffisent à traiter des exemples d'applications particulièrement importants, comme le guidage-pilotage d'engins aérodynamiques (Exemple 3).

Chapitre 4

CONCLUSION

Nous nous sommes interessés dans ce mémoire à la stabilisation et à la robustesse des systèmes non linéaires en boucle fermée. La façon d'aborder ce problème a été "indirecte", en ce sens que nous avons essayé de faire suivre au système commandé des modèles connus que l'on savait stables et robustes, dans notre cas, des systèmes linéaires commandables.

Dans le Chapitre 2, nous nous sommes placés dans le formalisme entrée-sortie et nous avons étudié le problème de la stabilité de la commande linéarisante et découplante. C. Byrnes et A. Isidori [8], montrèrent l'importance pour ce problème de la dynamique des zéros et donnèrent des conditions suffisantes de stabilité asymptotique du système en boucle fermée (voir aussi [29]). Nous avons ici élargi la notion de stabilité à la K-stabilité ce qui nous permet d'être moins exigeant sur la dynamique des zéros tout en conservant les mêmes exigences sur la relation entrée-sortie. On remarquera que contrairement à la stabilité asymptotique, la K-stabilité est structurellement stable. En effet, si le système en boucle fermée a un point d'équilibre asymptotiquement stable et que par suite de perturbations une bifurcation de Hopf se produit en ce point, le système reste K-stable tandis qu'il n'est plus asymptotiquement stable. En revanche nous n'avons pu donner que des conditions nécessaires de K-stabilité tandis que C. Byrnes et A. Isidori donnaient des conditions suffisantes de stabilité asymptotique. Notons cependant que la K-stabilité peut s'avérer dans certain cas inacceptable : pour rester dans le compact K, les actionneurs peuvent être excessivement sollicités. Cette discussion doit être menée au cas par cas.

B. d'Andréa-Novel et J. Lévine prolongèrent cette étude de la K-stabilité en prenant en compte d'autres invariants topologiques de la sous-variété asymptotique inobservable et en considérant, en plus des points stationnaires de la dynamique des zéros, ses orbites périodiques et en utilisant les inégalités de Morse-Smale [46]. Cette extension est cependant limitée ; la mise en application de ces résultats exigeant que la dynamique des zéros soit de Morse-Smale (voir [43] pour une définition précise des champ de Morse-Smale), or cette condition n'est plus générique en dimension supérieure ou égale à 3.

Des approches plus générales sont possibles. La plupart sont fondées sur des méthodes de type Lyapunov. Contrairement à ce que l'on étudie ici, ces bouclages stabilisants ne sont plus nécessairement $\mathcal{C}^\infty$ ni même Lipschitz mais seulement $\mathcal{C}^0$ ou même discontinue (cf Z. Artstein [5] et E.D. Sontag [47] pour une présentation générale sur les résultats

de stabilité, voir aussi [48], [52].) Les résultats obtenus jusqu'à présent restent cependant fragmentaires.

Dans le Chapitre 3, pour éviter d'avoir à faire une analyse de la dynamique des zéros, nous nous sommes intéressés au problème de la linéarisation totale entrée-état par bouclage dynamique (ce problème ayant été résolu dans le cas du bouclage statique dans [33], [28]). Nous avons obtenu un résultat complet dans le cas des systèmes mono-entrées et dans le cas des systèmes multi-entrées comportant une dimension de plus que de commandes.

Dans le cas des systèmes multi-entrée généraux, mis à part une condition nécessaire triviale - le linéarisé tangent du système en boucle ouverte doit être commandable le problème reste ouvert. Nous avons cherché des caractérisations des systèmes linéarisables par bouclage dynamique qui soient directement lisibles sur le système initial en restreignant la classe des compensateurs dynamiques à des chaînes d'intégrateur simples, conduisant à des conditions suffisantes de linéarisation par bouclage dynamique.

Un contre-exemple nous prouve que ces conditions suffisantes ne sont pas nécessaires. Ce contre-exemple nous montre également les limites de notre approche. En effet, nous avons cherché des conditions lisibles directement sur le système en boucle ouverte et non sur le système étendu, système + compensateur dynamique. Les outils mathématiques utilisés ici ne nous nous semblent pas permettre des extensions substantielles des résultats présentés. L'obtention de conditions nécessaires et suffisantes de linéarisation par bouclage dynamique reste un problème ouvert. Cependant les techniques actuelles suffisent à traiter des exemples d'applications particulièrement importants, comme le guidage-pilotage d'engins aérodynamiques.

Références

[1] B. D'ANDRÉA-NOVEL : *Commande non linéaire des robots*, Hermès, Paris, 1988.

[2] B. D'ANDRÉA, J. LÉVINE : *Synthesis of nonlinear state feedback for the stabilization of a class of manipulators*, in Information and Decision Technologies 14 (1988) 145-168.

[3] V. I. ARNOLD : *Équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscou, traduction Française, 1974.

[4] V.I. ARNOLD :*Chapitres suppléentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscou, traduction Française, 1978.

[5] Z. ARTSTEIN : *Stabilization with relaxed controls*, Nonlinear Analysis, TMA 7, 1983, pp. 1163-1173.

[6] M.D. DI BENEDETTO, A. ISIDORI : *The matching of nonlinear models via dynamic state feedback*, SIAM J. Control & Optimization, vol. 24, pp. 1063-1075, 1986.

[7] R.W BROCKETT : *Feedback invariants for nonlinear systems*, Proc. VII IFAC Congress, Helsinki, p. 1115-1120, 1978.

[8] C. BYRNES, A. ISIDORI : *Asymptotic expansions, root-loci and the global stability of nonlinear feedback systems*, in M. Fliess and M. Hazewinkel, Eds, Algebraic and Geometric Methods in Control Theory, Reidel, Dordrecht-Boston, 1986.

[9] D. CLAUDE : *Decoupling of nonlinear systems*, Systems & Control Letters 1 (1982) 242-248.

[10] D. CLAUDE, M. FLIESS, A. ISIDORI : *Immersion directe et par bouclage d'un système non linéaire dans un linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, p. 237-240, 1983.

[11] B. CHARLET : *Stability and Robustness for nonlinear systems decoupled and linearized by feedback*, Systems & Control Letters 8 (1987), pp. 367-374.

[12] B. CHARLET, J. LÉVINE, R. MARINO : *Two sufficient conditions for feedback linearization*, in Analysis and Optimization of Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, A. Bensoussan and J.L. Lions Eds., pp. 181-192, Springer-Verlag, 1988.

[13] B. CHARLET, J. LÉVINE, R. MARINO : *On dynamic feedback linearization*, Systems & Control Letters 13 (1989), pp. 143-151.

[14] B. CHARLET, J. LÉVINE, R. MARINO : *Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization*, submitted to SIAM J. Control & Optimiz.

[15] J. DESCUSSE, C.H. MOOG : *Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems*, Int. J. Control, vol. 42, N° 6, pp. 1387-1398, 1985.

[16] J. DESCUSSE, C.H. MOOG : *Dynamic decoupling for right invertible nonlinear systems*, Systems & Control Letters, Vol. 8, N° 4, pp. 345-349, 1987.

[17] M. FLIESS : *Some remarks on nonlinear invertibility and dynamic state feedback*, Theory and Application of nonlinear control systems, C.I. Byrnes and A. Lindquist eds., NORTH-HOLLAND, pp. 115-122, 1986.

[18] M. FLIESS : *Nonlinear control theory and differential algebra : some illustrative examples*, 10 $^{\text{th}}$ IFAC World Congress, Munich 1987, vol. 8, pp. 114-118.

[19] M. FLIESS : *Généralisation non linéaire de la forme canonique de commande et linéarisation par bouclage*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 377-379, 1989.

[20] M. FLIESS : *Automatique et corps différentiels*, Forum Math. **1** (1989), pp. 227-238.

[21] M. FLIESS, I. KUPKA : *A finiteness criterion for nonlinear input-output differential systems*, SIAM J. Control and Optimization, Vol 21, N° 5, 1983.

[22] P.L. FALB, W.A. WOLOVICH : *Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems*, IEEE Trans. Aut. Control., AC-12 (6), 1967, pp. 651-659.

[23] V GODARD, R. GALTIER : *Automatique non linéaire pour suivi de trajectoire, méthodes algébriques*, rapport de stage E.N.S.M.P., SFENA, Juin 1986.

[24] C. GODBILLON : *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.

[25] R. HERMANN, A. J. KRENER; *Nonlinear controllability and observability.* IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC 22, N° 5, 1977, pp. 728-740.

[26] R.M. HIRSCHORN : *Invertibility of multivarible nonlinear control systems*, IEEE Trans. Aut. Control AC-24, pp. 855-865, 1979.

[27] R.M. HIRSCHORN : *(A-B) invariant distributions and disturbances decoupling of nonlinear systems*, SIAM J. Control & Optimiz., 19 (1981), pp. 1-19.

[28] L.R. HUNT, R. SU, G. MEYER : *Design for multi-input nonlinear systems*, in Differential Geometric Control Theory, R. Brockett, R. Millman, H. Sussmann eds., pp. 268-298, Birkhäuser, 1983.

[29] A. ISIDORI: *Non linear control systems : an introduction*, Communications and Control Engineering Series, 2 nd Edition, Springer Verlag, 1989.

[30] A. ISIDORI : *Control of nonlinear systems via dynamic state feedback*, Algebraic and Geometric Methods in nonlinear control theory, M. Hazewinkel and M. Fliess eds., Reidel, 1986.

[31] A. ISIDORI, A. J. KRENER, C. GORI-GIORGI, S. MONACO : *Nonlinear decoupling via feedback*, IEEE Trans. Aut. Control 26, p. 331-345, 1981.

[32] A. ISIDORI, C.H. MOOG, A. DE LUCA : *A sufficient condition for full linearization via dynamic state feedback*, Proc. 25 th IEEE CDC, Athens, 1986.

[33] B. JAKUBCZYK, W. RESPONDEK : *On linearization of control systems*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math., vol. 28, 9-10, p. 517-522, 1980.

[34] A. KASINSKI, J. LÉVINE : *A fast graph-theoritic algorithm for the feedback decoupling problem of nonlinear systems*, in Lecture Notes in Control and Information Sciences, N° 58, Springer Verlag, 1984, p. 550-562.

[35] A.J. KRENER : *On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems*, SIAM Journal on Control & Optimization, 11, 4, p. 670-676, 1973.

[36] A.J. KRENER, A. ISIDORI, W. RESPONDEK : *Partial and robust linearization by feedback*, Proc. 22 nd IEEE CDC, pp. 126-130, 1983.

[37] A. LIAPOUNOFF : *Problèmes général de la stabilité du mouvement*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, deuxième série, Tome IX, 1907, Traduit du Russe par M. Édouard Davaux.

[38] R. MARINO : *On the largest feedback linearizable subsystem*, Systems & Control Letters 6 (1986) 345-351.

[39] J. MILNOR : *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1978.

[40] A.S. MORSE, W.M. WONHAM : *Decoupling and pole assignment by dynamic compensation*, SIAM J. Control 8(3), pp. 317-337, 1970.

[41] H. NIJMEIJER, W. RESPONDEK : *Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-33, pp. 1065-1070, 1988.

[42] H. NIJMEIJER, A.J. VAN DER SCHAFT : *Controlled invariance for nonlinear systems*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-27, pp. 904-914, 1982.

[43] J. PALIS, W. DE MELO : *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction*, Springer Verlag, 1982.

[44] S.N. SINGH : *Decoupling of invertible nonlinear systems with state feedback and precompensation*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-25 (1980), pp. 1237-1239.

[45] S.N. SINGH : *A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-26 (1981), pp. 595-598.

[46] S. SMALE : *The mathematics of Time. Essays on Dynamical Systems, Economic Processes and Related Topics*, Springer Verlag, 1980.

[47] E.D. SONTAG : *Feedback stabilization of nonlinear systems*, Proceedings MTNS-89, Birkhäuser.

[48] H.J. SUSSMANN : *Subanalytic sets and feedback control*, J. Diff. Eqs. 31 (1979), pp. 31-52.

[49] H.J. SUSSMANN : *Lie brackets, real analyticity and geometric control*, in Differential Geometric Control Theory, R.W. Brockett, R.S. Millmann, H.J. Sussmann Eds., Birkhäuser, Boston MA, pp. 1-116, 1983.

[50] H.J. SUSSMANN, V. JURDJEVIC : *Controllability of nonlinear systems*, J. Diff. Eqs., 12, pp. 95-116, 1972.

[51] D.G. TAYLOR, P.V. KOKOTOVIC, R. MARINO, I. KANELLAKOPOULOS : *Adaptative regulation of nonlinear systems with unmodelled dynamics*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-34, pp. 405-412, 1989.

[52] V.I. UTKIN : *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, Mir, Moscow, 1978.

[53] A.J. VAN DER SCHAFT : *Linearization and input-output decoupling for general nonlinear systems*, Systems and Control Letters 5 (1984) 27-33.

[54] W.M. WONHAM : *Linear Multivariable Control : a Geometric Approach*, Springer Verlag, 1979.

Appendix A

Quelques notions de Géométrie différentielle

La géométrie différentielle est la théorie qui étudie les propriétés des objets mathématiques appelés "variétés différentiables".

Les résultats donnés ici sans démonstration peuvent être trouvés de façon plus développé dans les ouvrages [2] et [4]

A.1 Sous-variétés différentiables

Pour nos besoins, nous nous restreindrons au cadre des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Avant de donner la définitions des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$ nous allons d'abord en donner quelques exemples bien connus :

- $\mathbf{R}^n$ lui-même est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$;
- Les ouverts de $\mathbf{R}^n$ sont des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Ces sous-variétés servent d'ailleurs localement de modèles à toute variété ;
- Les sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbf{R}^n$ sont des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$ difféomorphes à $\mathbf{R}^k$;
- La sphère de dimension n d'équations $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+1}$;
- Le cylindre $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est une sous-variétés de $\mathbf{R}^3$.

Ces exemples de sous-variétés obéissent tous à la définition suivante :

DÉFINITION A.1
Un ensemble $V \subset \mathbf{R}^n$ est une sous-variété analytique (respectivement C^∞, C^r) de dimension $k \leq n$ si pour tout point x de V et pour tout ouvert suffisement petit U_x de $\mathbf{R}^n$ contenant

x (i.e. contenu dans une boule $B(x,\rho)$ de centre x et de rayon ρ pour ρ suffisement petit), il existe un ouvert Ω_x de $\mathbf{R}^k$ et une application analytique (respectivement $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^r$) φ_x de Ω_x dans U_x telle que :

- $\mathcal{U}_x = V \cap U_x = \varphi_x(\Omega_x)$,
- *φ_x induit une bijection de Ω_x dans $V \cap U_x$ et $\nabla\varphi_x$ est de rang k en tout point de Ω_x.*

Dans ce cas on dit que le triplet $(\Omega_x, \varphi_x, \mathcal{U}_x)$ est une **carte locale** *analytique (respectivement $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^r$) de V au voisinage de x. Les coordonnées canoniques de $\Omega_x \subset \mathbf{R}^k$ forment ce que l'on appelle un système de coordonnées locales au voisinage de x. La notation φ_x^{-1} dénotera la réciproque de la bijection induite par φ_x de Ω_x dans $V \cap U_x$.*

On utilisera la notation V^k lorsqu'on voudra préciser la dimension de V

Remarque A.1
On munit V de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^n$, i.e. les ouverts de V sont les $\mathcal{U} = V \cap U$, U ouvert de $\mathbf{R}^n$. L'application φ_x de la carte locale $(\Omega_x, \varphi_x, \mathcal{U}_x)$ est un homéomorphisme de Ω_x dans $\mathcal{U}_x$.

Les divers systèmes de coordonnées locales au voisinage d'un point x vérifient la propriété suivante :

THÉORÈME A.1
Soient V^k une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, $(\Omega_1, \varphi_1, \mathcal{U}_1)$ et $(\Omega_2, \varphi_2, \mathcal{U}_2)$ deux cartes locales au voisinage de x. Les ensembles $\varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$, $i = 1, 2$ sont des ouverts de $\mathbf{R}^k$ et l'application $\varphi_{1,2} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ est un difféomorphisme analytique (respectivement $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^r$) de $\varphi_1^{-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ dans $\varphi_2^{-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$.

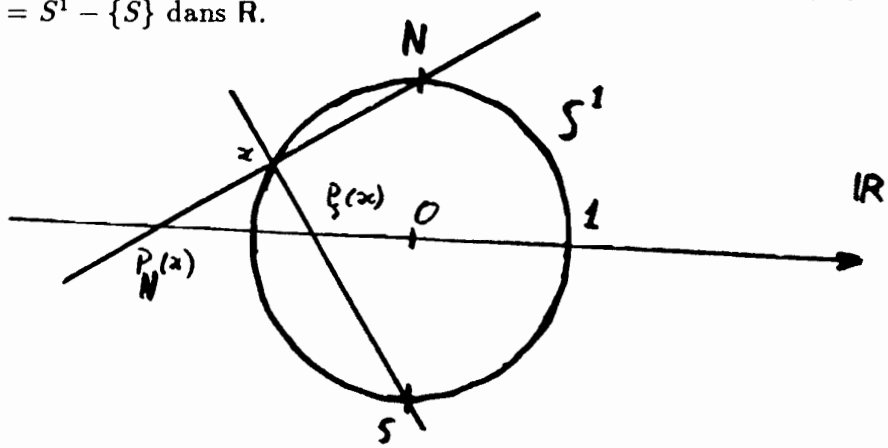
L'application $\varphi_{1,2}$ est l'application qui donne le changement de coordonées locales dans $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

DÉFINITION A.2
On appelle **atlas** *analytique (respectivement $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^r$) de V toute famille $(\Omega_i, \varphi_i, \mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de carte locale analytique (respectivement $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^r$) de V telle que $V = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$.*

Exemples :

- La variété $\mathbf{R}^n$ (sous-variété triviale d'elle même) est muni de l'atlas trivial $(\mathbf{R}^n, Id, \mathbf{R}^n)$.
- L'ouvert U de $\mathbf{R}^n$ est muni de l'atlas trivial (U, Id, U).
- Si V est un sous-espace affine de dimension k de $\mathbf{R}^n$, il est muni de l'atlas $(\mathbf{R}^k, u+b, V)$ où u est une application linéaire injective de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R}^n$ et b est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ constant.

- On considère les deux projections stéréographiques p_N de $\mathcal{U}_1 = S^1 - \{N\}$ dans R et p_S de $\mathcal{U}_2 = S^1 - \{S\}$ dans R.



Le cercle S^1 est alors muni de l'atlas $\{(\mathsf{R}, p_N^{-1}, \mathcal{U}_1), (\mathsf{R}, p_S^{-1}, \mathcal{U}_2)\}$. L'application de changement de carte est alors

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{R}^* & \xrightarrow{p_S \circ p_N^{-1}} & \mathsf{R}^* \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$

(généraliser cet exemple aux sphères de dimension quelconque).

Comme V est un espace topologique, on peut donc parler de fonctions continues définies sur V où à valeurs dans V. Nous allons voir que les systèmes de coordonnées locales nous permettront de définir ce qu'est pour une sous-variété une application différentiable.

DÉFINITION A.3

Une application h de V dans R *est dite analytique (respectivement C^∞, C^r) si pour toute carte locale analytique (respectivement C^∞, C^r) $(\Omega, \varphi, \mathcal{U})$ de V l'application $h \circ \varphi$ est analytique (respectivement C^∞, C^r) de $\Omega \subset \mathsf{R}^k$ dans* R.

Une application θ d'une sous-variété $V_1^{k_1}$ de R^{n_1} dans une sous-variété $V_2^{k_2}$ de R^{n_2} est dite analytique (respectivement C^∞, C^r) si pour toute carte locale $(\Omega_1, \varphi_1, \mathcal{U}_1)$ de V_1 et toute carte locale $(\Omega_2, \varphi_2, \mathcal{U}_2)$ de V_2 l'application $\varphi_2^{-1} \circ \theta \circ \varphi_1$ est analytique(respectivement C^∞, C^r) de $\Omega_1 \subset \mathsf{R}^{k_1}$ dans $\Omega_2 \subset \mathsf{R}^{k_2}$ là où cette application est définie.

La définition de la régularité d'une application d'une sous-variété dans une autre implique toutes les cartes locales de chacune de ces sous-variétés. Le Théorème suivant montre qu'il n'est besoin que de regarder un nombre restreint de cartes pour vérifier la régularité d'une application.

THÉORÈME A.2

Soient h une application continue de la sous-variété V^k de R^n dans R, *et $\mathcal{A}$ un atlas de V^k Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *h est analytique (respectivement C^∞, C^r).*

(ii) *Pour toute carte locale $(\Omega, \varphi, \mathcal{U})$ appartenant à l'atlas $\mathcal{A}$, l'application $h \circ \varphi$ de $\Omega \subset \mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R}$ est analytique (respectivement $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^r$).*

Soient θ une application continue de la sous-variété $V_1^{k_1}$ dans la sous-variété $V_2^{k_2}$, et $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des atlas de V_1 et V_2 respectivement. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(iii) *θ est analytique (respectivement $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^r$).*

(iv) *Pour toute carte locale $(\Omega_1, \varphi_1, \mathcal{U}_1)$ de $\mathcal{A}_1$ et toute carte locale $(\Omega_2, \varphi_2, \mathcal{U}_2)$ de $\mathcal{A}_2$, l'application $\varphi_2^{-1} \circ \theta \circ \varphi_1$ d'un ouvert de $\mathbf{R}^{k_1}$ dans $\mathbf{R}^{k_2}$ est analytique (respectivement $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^r$).*

Ce résultat important montre que l'on peut non seulement se restreindre aux cartes des atlas des sous-variétés considérées pour étudier la régularité d'un application θ, mais aussi que l'on peut choisir ces atlas. Dans la pratique on prendra les atlas qui nous simplifierons le plus les calculs et on n'hésitera pas à changer d'atlas en cours de route si besoin est.

On remarque en outre que les propriétés de régularité des applications d'une sous-variété dans une autre sont intimement liées aux atlas de ces variétés et indépendantes des espaces ambiants dans lesquels elles se trouvent. Seule est importante l'existence d'atlas et des lois de changement de carte (lorsque l'on fait totalement abstraction de l'espace ambiant on parle de variété différentiable et non plus de sous-variété).

Désormais, nous utiliserons le terme **variété** pour désigner une sous-variété V de $\mathbf{R}^n$ Nous ne feront exception à cette règle que lorsque nous voudrons insister sur l'inclusion de V dans $\mathbf{R}^n$.

A.2 Espace tangent, Fibré tangent, Application linéaire tangente

Dans "variété différentiable" il y a le mot différentiable. Nous avons défini dans le paragraphe précédent ce qu'était une application différentiable, mais nous ne savons pas encore la différentier. C'est le propos de ce paragraphe.

DÉFINITION A.4
Soient V^k une variété et x un point de V Soit σ une courbe différentiable de $\mathbf{R}$ dans V telle que $\sigma(0) = x$. On appelle **vecteur tangent à la courbe paramétrée** *σ, l'application suivante notée X_x ;*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_x & \xrightarrow{X_x} & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & X_x f = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \sigma)_{|t=0} \end{array}$$

où $\mathcal{F}_x$ est l'ensemble des fonctions différentiables à valeurs réelles définies dans un voisinage de x.

Dans le cas de la variété triviale $V = \mathbf{R}^n$, le vecteur tangent à $x = \sigma(0)$ au sens classique est $\dot{\sigma}(0)$. Dans ce cas on aura

$$X_x f = < \mathrm{d}f, \dot{\sigma} > = \sum_{i=1}^{n} \dot{\sigma}_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

La définition que nous avons donnée identifie les "vecteurs classiques" avec les dérivées directionnelles qu'ils définissent.

Les vecteurs tangents en un point x de V vérifient les propriétés suivantes :

Proposition A.3

- *L'application X_x de $\mathcal{F}_x$ dans $\mathbf{R}$ est linéaire. En particulier l'ensemble $\mathrm{T}_x V$ des vecteurs tangents à V en x est un espace vectoriel appelé espace tangent à V en x ou au dessus de x.*
- *Si f et g appartiennent à $\mathcal{F}_x$, et si X_x appartient à $\mathrm{T}_x V$ on aura*

$$X_x(fg) = (X_x f)g(x) + f(x)(X_x g)$$

Considérons un système de coordonnées locales au voisinage de x, $\Omega \subset \mathbf{R}^n \xrightarrow{\varphi} V$. Pour tout i, $1 \leq i \leq n$ on considère la courbe différentiable σ_i donnée en coordonnées locales par

$$\begin{array}{rcll} x_j(\sigma(t)) & = & x_j(x) & \text{si } j \neq i,\ 1 \leq j \leq n, \\ x_i(\sigma(t)) & = & x_i(x) + t & \end{array}$$

On notera $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x)$ le vecteur tangent à σ_i au point x. Cette notation permet d'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \sigma_i)_{|t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

En outre, on a le théorème suivant :

THÉORÈME A.4

Soient V^n une variété de dimension n et $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales au voisinage de x. L'espace vectoriel $\mathrm{T}_x V$ a pour base

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$$

Un vecteur X_x de $\mathrm{T}_x V$ est donc caractérisé par :

- *Les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ du point x (qui caractérisent l'endroit où X_x est tangent à V).*
- *Les coordonnées $(X_1, \ldots, X_n)$ dans la base $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}(x)\right)$ de X_x. Lorsque le contexte l'indique clairement, on ne donnera pas les coordonnées du point x de base.*

DÉFINITION A.5

On appelle **espace fibré tangent** *de V, ou plus simplement le fibré tangent de V, que l'on note $\mathrm{T}V$, la réunion disjointe des espaces tangents à V au dessus de chaque point.*

$$\mathrm{T}V = \bigcup_{x \in V} \mathrm{T}_x V$$

On appelle projection canonique de $\mathrm{T}V$ dans V l'application π qui à un vecteur tangent à V en x associe le point x

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}V & \xrightarrow{\pi} & V \\ X_x \in \mathrm{T}_x V & \longmapsto & x \end{array}$$

(Classiquement, l'application π associe à tout vecteur lié son origine.) En particulier on a $\pi^{-1}(x) = \mathrm{T}_x V$

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales de V, $(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n)$ définit un système de coordonnées locales de $\mathrm{T}V$. Le $2n$-uplet $(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n)$ désignant le vecteur tangent $X_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}(x) + \cdots + X_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}(x)$, x étant le point de V de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.

Par abus de notation on écrira $(x, X_x) = (x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n)$.

Les changements de carte de $\mathrm{T}V$ se construisent à partir des changements de V de la façon suivante : si $y = \varphi(x)$ est un changement de coordonnées sur V, le changement de coordonnées correspondant sur $\mathrm{T}V$ est

$$(y, Y_y) = (\varphi(x), \nabla_x \varphi X_x)$$

(où les composantes de X_x ont été écrites en colonne). Ce procédé nous permet de construire un atlas de $\mathrm{T}V$ à partir d'un atlas de V et donc de définir une structure de variété différentiable sur $\mathrm{T}V$ On remarquera qu'avec cette structure différentiable l'application $\pi : \mathrm{T}V \longrightarrow V$ est une application différentiable. On remarquera que $\dim \mathrm{T}V = 2 \dim V$

Exemples :

- L'espace tangent à $\mathbf{R}$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^2$, $\mathrm{T}\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^2$.
- Plus généralement, $\mathrm{T}\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$.
- Si S^1 désigne la sphère de dimension 1 (le cercle), on a $\mathrm{T}S^1 = S^1 \times \mathbf{R}$.
- En revanche, $\mathrm{T}S^2 \not\equiv S^2 \times \mathbf{R}^2$ (cf le Théorème du hérisson).

$$\mathrm{T}S^2 = \{(x, y, z, X, Y, Z) \in \mathbf{R}^6 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ xX + yY + zZ = 0\}$$

Définissons maintenant l'application linéaire tangente à une application différentiable $\varphi : V \longrightarrow W$

THÉORÈME A.5
Soit φ une application différentiable de la variété V^n dans la variété W^m Il existe une application unique $\mathrm{T}\varphi$ *de* $\mathrm{T}V$ *dans* $\mathrm{T}W$ *appelée application tangente à φ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathrm{T}\varphi(\mathrm{T}_x V) \subset \mathrm{T}_{\varphi(x)}W$

(ii) *Si X_x est un vecteur tangent en $x = \sigma(0)$ à la courbe différentiable σ,* $\mathrm{T}\varphi(X_x)$ *est le vecteur tangent en $\varphi(x)$ à la courbe $\varphi \circ \sigma$, i.e. si h est une fonction définie au voisinage de $\varphi(x)$,on aura*

$$(\mathrm{T}\varphi(X_x))h = X_x(h \circ \varphi)$$

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_m)$ sont deux systèmes de coordonnées locales sur V et W respectivement, et (x, X) et (y, Y) les systèmes de coordonnées correspondants sur $\mathrm{T}V$ et $\mathrm{T}W$, l'application $\mathrm{T}\varphi$ s'écrit alors

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}V & \xrightarrow{\mathrm{T}\varphi} & \mathrm{T}W \\ (x, X) & \longmapsto & (y, Y) = (\varphi(x), \nabla_x \varphi X) \end{array}$$

On remarquera que l'application tangente $\mathrm{T}\varphi$ "contient" l'application φ. On notera $\mathrm{T}_x\varphi$ l'application de $\mathrm{T}_x V$ dans $\mathrm{T}_{\varphi(x)}W$ $\mathrm{T}_x\varphi$ est appelée l'application linéaire tangente à φ en x.

Propriétés :

- L'application $\mathrm{T}_x\varphi$ est une application linéaire; ce qui justifie son nom.
- $\mathrm{T}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{T}\varphi \circ \mathrm{T}\psi$,
  $\mathrm{T}_x(\varphi \circ \psi) = \mathrm{T}_{\psi(x)}\varphi \circ \mathrm{T}_x\psi$.
- Si σ est une courbe différentiable et si X_x est le vecteur tangent en $x = \sigma(0)$ à σ, alors $X_x = \mathrm{T}\sigma(0, 1) = \mathrm{T}_0\sigma(1)$ ($\mathrm{T}\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$). Par convention, on notera $\dot{\sigma}(t) = \mathrm{T}\sigma(t, 1) = \mathrm{T}_t\sigma(1)$.

DÉFINITION A.6
On dit que φ est de rang k en x si $\mathrm{rg}\,\mathrm{T}_x\varphi = k$. *On dit que φ est de rang constant si* $\mathrm{rg}\,\mathrm{T}_x\varphi = k$ *est indépendant de x.*

Ces définitions nous redonnent bien les notions connues pour les applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et permettent de généraliser aux variétés les théorèmes d'inversion locales, des fonctions implicites, etc . .

A.3 Champs de vecteurs, Flots, Dérivées de Lie, Crochets de Lie

DÉFINITION A.7
Soit V une variété, on appelle champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur V une application $\mathcal{C}^\infty$ $X : V \longmapsto \mathrm{T}V$ telle que $\pi \circ X = Id_V$, i.e. $X(x) \in \mathrm{T}_x V$ pour tout x de V L'application X associe à chaque point x de V un vecteur tangent en x à V

Propriétés :

- L'ensemble $\mathcal{X}(V)$ des champs de vecteur $\mathcal{C}^\infty$ sur V est doté d'une structure de $\mathcal{C}^\infty$-module ($\mathcal{C}^\infty(V) = \mathcal{C}^\infty$ étant l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur V). Si f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur V et X et Y sont deux champs de vecteurs, on définit

$$\begin{aligned}(X+Y)(x) &= X(x)+Y(x) \in \mathrm{T}_x V \\ (fX)(x) &= f(x)X(x) \in \mathrm{T}_x V\end{aligned}$$

- Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales, pour chaque i, $1 \leq i \leq n$, l'application $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : x \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial x_i}(x)$ est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$. En outre, tout champ de vecteurs X se décompose de façon unique :

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad X_i \in \mathcal{C}^\infty(V), \ 1 \leq i \leq n.$$

Nous allons maintenant introduire les notions de courbe intégrale et de flot d'un champ de vecteurs.

DÉFINITION A.8
Soit X un champ de vecteurs sur V, soit $\sigma : I \subset \mathsf{R} \longrightarrow V$ une courbe différentiable (I est un intervalle de R). On dit que σ est une courbe intégrale de X si

$$\dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t)) \qquad \forall t \in I$$

THÉORÈME A.6
Soient X un champ de vecteurs sur V et x un point de V Il existe un unique intervalle $I_x \subset \mathsf{R}$ et une unique courbe différentiable σ_x de I_x dans V tels que :

- *σ_x est une courbe intégrale de X*
- *$\sigma_x(0) = x$.*
- *Si σ est une autre courbe intégrale définit sur un intervalle I vérifiant les deux propriétés ci-dessus, alors $I \subset I_x$ et pour tout $t \in I$, $\sigma(t) = \sigma_x(t)$.*

On dit que σ_x est la courbe intégrale maximale de X telle que $\sigma_x(0) = x$ ou de condition initiale x.

La courbe intégrale σ_x est la solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \dot{y} &= X(y) \\ y(0) &= x \end{aligned}$$

On définit alors l'ensemble $U = \bigcup_{x \in V} \{x\} \times I_x \subset V \times \mathbf{R}$ et l'application

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{\Phi} V \\ (x,t) &\longmapsto \Phi_t(x) = \sigma_x(t) \end{aligned}$$

où σ_x est la courbe intégrale maximale de X de condition initiale x. On dit que (U, Φ) est le flot associé à X (on omettra souvent de préciser l'ensemble U).

THÉORÈME A.7
Soient X un champ de vecteurs sur V, et (U, Φ) son flot associé. On a

- *U est un ouvert de $V \times \mathbf{R}$.*
- *Φ est une application C^∞ de U dans V*

Lorsque $U = V \times \mathbf{R}$ on dit que le champ X est complet. On remarquera que l'on a toujours $M \times \{0\} \subset U$
Propriétés :

- $\Phi_0(x) = x$, i.e. $\Phi_0 = Id_V$.
- $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ partout où ces expressions sont simultanément définies.
- En particulier $\Phi_{-t} = (\Phi_t)^{-1}$.
- $\dfrac{\partial \Phi_t(x)}{\partial t} = X(\Phi_t(x))$.

Nous allons maintenant introduire les deux notions très importantes de dérivées de Lie d'une fonction par un champ de vecteurs et de crochets de Lie de champs de vecteurs.

DÉFINITION A.9
Soient f une fonction C^∞ sur V et X un champ de vecteurs. On appelle dérivée de Lie de f par X, que l'on note $L_X f$, la fonction

$$x \longmapsto L_X f(x) = X_x f = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

La dérivée de Lie a les propriétés suivantes :

- La dérivée de lie est une dérivation, i.e.

$$\begin{aligned} L_X(fg) &= (L_X f)g + f(L_X g) \\ L_X(f+g) &= L_X f + L_X g \\ L_X(\alpha f) &= \alpha L_X f \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

- Si f et g sont deux fonctions sur V et X et Y deux champs de vecteurs,

$$\begin{aligned} L_{X+Y}f &= L_Xf + L_Yf \\ L_{fX}g &= f(L_Xg) \end{aligned}$$

- $\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi_t(x)) = (L_Xf) \circ \Phi_t(x)$, où Φ est le flot associé à X, en particulier

$$L_Xf = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi_t(x))_{|t=0}$$

  Cette identité est parfois prise comme définition de L_Xf.

Cette dernière identité nous montre que la dérivée de Lie par rapport à X n'est rien d'autre que la dérivée particulaire le long des trajectoires du flot de X

Proposition A.8
Soient X et Y deux champs de vecteurs sur V Il existe un unique champ Z telle que, pour toute fonction f de $C^\infty(V)$,

$$L_Zf = L_X(L_Yf) - L_Y(L_Xf)$$

DÉFINITION A.10
Le champ de vecteurs Z est noté $[X,Y]$ et est appelé **crochet de Lie** *des champs X et Y*

Si $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, on aura

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}))\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Les crochets de Lie vérifient les propriétés suivantes :

- $[X,X] = 0$ pour tout champ de vecteurs X, propriété équivalente à $[Y,X] = -[X,Y]$ pour tous champs de vecteurs X et Y Le crochet de Lie est antisymétrique.
- $[X+Y,Z] = [X,Z] + [Y,Z]$ et $[X,Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$, $[\lambda X,Y] = \lambda[X,Y] = [X,\lambda Y]$ pour tout champ de vecteurs X, Y, et Z et pour tout **réel** λ ; le crochet de Lie est bilinéaire.
- $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$, pour tous champs de vecteurs X, Y, et Z ; c'est l'identité de Jacobi.
- $[X,fY] = f[X,Y] + (L_Xf)Y$ et $[fX,Y] = f[X,Y] - (L_Yf)X$ pour tous champs de vecteurs X et Y et pour toute fonction différentiable f
- Pour toute fonction f et pour tous champs de vecteurs X et Y, $L_{[X,Y]}f = [L_X,L_Y]f = L_XL_Yf - L_YL_Xf$.

En particulier, l'espace $\mathcal{X}(V)$ des champs de vecteurs muni du crochet de Lie est une algèbre de Lie (de dimension infinie).

DÉFINITION A.11
Soient V une variété différentiable et φ un difféomorphisme de V Pour tout champ de vecteurs Y sur V, on appelle image réciproque de Y par φ, que l'on note φ^*Y, le champ de vecteurs

$$\varphi^*Y = (\mathrm{T}\varphi)^{-1} \circ Y \circ \varphi$$

i.e. $\varphi^*Y(x) = (\mathrm{T}_x\varphi)^{-1}(Y(\varphi(x)))$.

Proposition A.9
Soient V une variété, X un champ de vecteurs sur V et Φ son flot. Pour tout champ de vecteurs Y on a :

$$[X,Y](x) = \lim_{t\to 0} \Phi_t^* Y(x)$$

Nous allons maintenant montrer le lien entre le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y et les flots qu'ils génèrent.

THÉORÈME A.10
Soient X et Y deux champs de vecteurs et Φ et Ψ les flots respectifs qu'ils génèrent. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $[X,Y] = 0$.

(ii) *Pour tout t et s appartenant à $\mathbb{R}$, on a $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$, partout où ces expressions sont simultanément définies ; i.e. les flots commutent lorsque le crochet de Lie est nul.*

A.4 Covecteurs, Espace cotangent, 1-formes

DÉFINITION A.12
Soit V une variété. On appelle espace cotangent au point x que l'on note T_x^*V, l'espace dual de T_xV, $\mathrm{T}_x^*V = L(\mathrm{T}_xV, \mathbb{R})$. Le produit de dualité entre un vecteur et un covecteur sera noté indifféremment $< X_x, \omega_x >$ ou $< \omega_x, X_x >$, $X_x \in \mathrm{T}_xV$, et $\omega_x \in \mathrm{T}_x^*V$

On appelle fibré cotangent de V la réunion disjointe des espaces cotangents en chaque point,

$$\mathrm{T}^*V = \bigcup_{x\in V} \mathrm{T}_x^*V$$

Les éléments de T^*V sont appelées des covecteurs ou vecteurs cotangents.

On appelle projection canonique de T^*V dans V l'application π qui à un vecteur cotangent à V en x associe le point x

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}^*V & \xrightarrow{\pi} & V \\ \omega_x \in \mathrm{T}_x^*V & \longmapsto & x \end{array}$$

En particulier, $\pi^{-1}(x) = \mathrm{T}_x^*V$

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales sur V, on note $(\mathrm{d}x_1(x), \ldots, \mathrm{d}x_n(x))$ la base de T_x^*V duale de la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x))$ de T_xV

$$< \mathrm{d}x_i(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) >= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Le covecteur ω_x est donc déterminé par :

- Les cordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de son point de base (qui précise que ω_x appartient à T_x^*V),
- Les coordonnées $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de ω_x dans la base $(\mathrm{d}x_1(x), \ldots, \mathrm{d}x_n(x))$.

Nous allons maintenant munir T^*V d'une structure différentiable à partir de celle de V Si $y = \varphi(x)$ est un changement de coordonnées sur V, le changement de coordonnées sur T^*V est donné par

$$(y, \psi_y) = (\varphi(x), ((\nabla_x \varphi)^{-1})' \omega_x)$$

(où $'$ dénote la transposition) si les composantes de ω_x et ψ_y sont écrites en colonne,

$$(y, \psi_y) = (\varphi(x), \omega_x (\nabla_x \varphi)^{-1})$$

si les composantes de ω_x et ψ_y sont écrites en ligne. Ce procédé nous permet de construire un atlas de T^*V à partir d'un atlas de V On remarquera que les changements de cartes de T^*V sont duaux de ceux de $\mathrm{T}V$.

DÉFINITION A.13
On appelle 1-forme différentielle ou champ de covecteurs une application différentiable ω de V dans T^*V telle que $\pi \circ \omega = Id_V$, i.e. $\omega(x) \in \mathrm{T}_x^*V$ pour tout x de V On note $\Omega(V)$ l'ensemble des 1-formes différentielles.

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées sur V, on note $\mathrm{d}x_i$ la 1-forme différentielle qui à x associe $\mathrm{d}x_i(x)$. Toute 1-forme différentielle ω se décompose de façon unique sous la forme

$$\omega = \omega_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + \omega_n \mathrm{d}x_n$$

où les ω_i appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(V)$.

Les espaces $\mathcal{X}(V)$ et $\Omega(V)$ sont en dualité ; si X est un champ de vecteur et ω une 1-forme, on définit

$$< \omega, X >=< X, \omega > \in \mathcal{C}^\infty(V)$$

par $< \omega, X > (x) =< \omega(x), X(x) >$ pour tout x de V

DÉFINITION A.14
Soit f une fonction sur V On note $\mathrm{d}f$ la 1-forme telle que

$$< \mathrm{d}f(x), X_x >= X_x f$$

pour tout vecteur de $\mathrm{T}_x V$ $\mathrm{d}f$ *se caractérise également par*

$$< \mathrm{d}f, X >= L_X f$$

pour tout champ de vecteurs X *sur* V *En coordonnées on a*

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

A.5 Distributions, Distributions involutives, Théorème de Frobénius

DÉFINITION A.15
Soit V *une variété différentiable. On appelle distibution* Δ *sur* V *une application qui à tout point* x *de* V *associe un sous-espace* $\Delta(x)$ *de* $\mathrm{T}_x V$ *La distribution* Δ *est dite régulière s'il existe des champs de vecteurs* C^∞ $X_1, \ldots, X_k$ *tels que* $\Delta(x) = sp\{X_1(x), \ldots, X_k(x)\}$ *en tout point* x.

On dit que Δ *est de rang constant si* $\mathrm{rg}\,\Delta(x)$ *est indépendant de* x. *On dit qu'un champ de vecteurs appartient à* Δ *si* $X(x) \in \Delta(x)$ *pour tout* x. *On dit que* Δ *est involutive si pour tous champs de vecteurs* X *et* Y *appartenant à* Δ, *le champ* $[X, Y]$ *appartient également à* Δ.

Les champs de vecteurs appartenant àune distribution Δ forment un sous-module de $\mathcal{X}(V)$. Lorsque Δ est involutive, ce sous-module est également une sous-algèbre de Lie.

Un champ de vecteurs X définit une distribution de rang 1, à savoir $\Delta = sp\{X\}$. Les courbes intégrales de X sont alors appelées par définition courbes intégrales de Δ. Pour les distributions de rang supérieur, on définit la notion de sous-variété intégrale.

DÉFINITION A.16
Soit Δ *une distribution sur* V *On dit que* $W \subset V$ *est une sous-variété intégrale de* Δ *si pour tout point* x *de* W, *on a* $\mathrm{T}_x W = \Delta(x)$ *(en particulier,* $\dim W = \dim \Delta(x)$*).*

On dit que Δ *de rang constant* k *est complètement intégrable si pour tout point* x *de* V, *il existe une sous-variété intégrale* W_x *de dimension* k *telle que* $x \in W_x$.

Le Théorème de Frobénius nous permet de relier les notions d'involutivité et de complète intégrabilité.

THÉORÈME A.11 (Frobénius)
Soit Δ *une distribution de rang constant. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Δ *est involutive.*

(ii) Δ *est complètement intégrable.*

Lorsqu'une distribution n'est pas involutive, on construit sa clôture involutive.

Proposition A.12
Soit Δ une distribution sur V Il existe une unique distribution involutive notée $\overline{\Delta}$, que l'on appelle la clôture involutive de Δ, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\Delta \subset \overline{\Delta}$.

(ii) *Si Γ est une autre distribution, $\Delta \subset \Gamma$ et Γ involutive impliquent que $\overline{\Delta} \subset \Gamma$*

$\overline{\Delta}$ est la plus petite distribution involutive contenant Δ.

Appendix B

Propriétés de quelques distributions utilisées dans le calcul de lois de bouclages

On considère le système non linéaire suivant

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{B.1}$$

On définit les distributions suivantes :

DÉFINITION B.1

- $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{G}_0 = sp\{g_1, \ldots, g_m\}$.
- $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_i + \mathrm{ad}_f\mathcal{G}_i$.
- $\mathcal{Q}_{i+1} = \overline{\mathcal{Q}_i} + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{Q}_0$
- $\mathcal{G}_* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{G}_i$.
- $\mathcal{Q}_* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{Q}_i$.

Où $\overline{\Delta}$ représente la clôture involutive de la distribution Δ. Pour les systèmes linéaires $\dot{X} = AX + Bu$, on a $\mathcal{Q}_i = \mathcal{G}_i = \mathrm{Im}(B, AB, \ldots, A^iB)$.

Lemme B.1
Pour tout i on a $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{Q}_i$ et $\overline{\mathcal{G}_i} = \overline{\mathcal{Q}_i}$ et $\overline{\mathcal{G}_*} = \mathcal{Q}_*$; en particulier, $\mathcal{Q}_*$ est involutive.

Démonstration :
Montrons d'abord par récurrence sur i que $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{Q}_i$. C'est évident pour $i = 0$. Supposons

le vrai pour i donné. On a $\mathcal{G}_{i+1} = \underbrace{\mathcal{G}_i}_{\subset \mathcal{Q}_i} + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{Q}_i + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{G}_0 \subset \overline{\mathcal{Q}_i} + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{G}_0 = \mathcal{Q}_{i+1}$, la récurrence est établie.

Montrons maintenant que $\overline{\mathcal{G}_i} = \overline{\mathcal{Q}_i}$. L'inclusion $\overline{\mathcal{G}_i} \subset \overline{\mathcal{Q}_i}$ est triviale. Montrons par récurrence l'inclusion inverse. Elle est trivial pour $i = 0$. Supposons la vrai pour i donné. On a donc $\overline{\mathcal{G}_i} = \overline{\mathcal{Q}_i}$. On a alors $\overline{\mathcal{G}_{i+1}} = \overline{\mathcal{G}_i + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{G}_0}$ et $\overline{\mathcal{Q}_{i+1}} = \overline{\overline{\mathcal{G}_i} + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{G}_0}$, vu que $\mathcal{G}_0 = \mathcal{Q}_0$ et vu l'hypothèse de récurrence. Il ne nous reste plus qu'à montrer que pour deux distributions quelconques Δ et Γ, on a

$$\overline{\Delta + \Gamma} = \overline{\overline{\Delta} + \Gamma} \tag{B.2}$$

$\overline{\Delta + \Gamma}$ est la plus petite distribution involutive contenant Δ et Γ. En particulier elle contient $\overline{\Delta}$ qui est la plus petite distribution involutive contenant Δ. Elle contient donc $\overline{\Delta}$ et Γ, et la clôture involutive de leur somme, $\overline{\overline{\Delta} + \Gamma} \subset \overline{\Delta + \Gamma}$. De façon similaire, on montre l'inclusion inverse, on a donc l'égalité (B.2). Ce qui nous permet de conclure que $\overline{\mathcal{Q}_{i+1}} = \overline{\mathcal{G}_{i+1}}$, la récurrence est établie.

Comme les dimensions des distributions $\mathcal{G}_i$ et $\mathcal{Q}_i$ vont en croissant et qu'elles sont majorées par n, il existe un k tel que $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}_* = \sup_i \mathcal{G}_i$ et $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_* = \sup_i \mathcal{Q}_i$. En particulier, $\mathcal{Q}_{k+1} = \mathcal{Q}_k$. Comme $\overline{\mathcal{Q}_k} \subset \mathcal{Q}_{k+1}$, on en déduit que $\mathcal{Q}_k$ est involutive. On a donc $\overline{\mathcal{G}_*} = \overline{\mathcal{G}_k} = \mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_*$. □

DÉFINITION B.2
Soient $(r_i)_{i\geq 0}$ et $(\rho_i)_{i\geq 0}$ les suites d'entiers suivants :

- $r_0 = \rho_0 = \dim \mathcal{G}_0 = m$.
- $r_i = \dim \mathcal{Q}_i - \dim \overline{\mathcal{Q}_{i-1}}$ *pour tout* $i \geq 1$.
- $\rho_i = \dim \mathcal{G}_i - \dim \mathcal{G}_{i-1}$ *pour tout* $i \geq 1$.

Les indices r_i ont été définis et utilisés dans [3], une variante des indices ρ_i a été définis et utilisés dans le cas des systèmes linéaires dans [1]. On remarquera que pour les systèmes linéaires, $r_i = \rho_i$ pour tout i.

Proposition B.2
Les suites (r_i) et (ρ_i) sont décroissantes :

- $r_0 \geq r_1 \geq \cdots \geq r_i \geq \cdot\cdot$
- $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \cdots \geq \rho_i \geq \cdot\cdot$

Démonstration :
Comme $\rho_i = \dim \mathcal{G}_i - \dim \mathcal{G}_{i-1}$, il existe ρ_i champs de vecteurs indépendants $X_1, \ldots, X_{\rho_i}$ tels que $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} \oplus sp\{X_k, 1 \leq k \leq \rho_i\}$. Comme, par définition, $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + \mathrm{ad}_f^i \mathcal{G}_0$, il existe ρ_i champs de vecteurs $Y_1, \ldots, Y_{\rho_i}$ de $\mathcal{G}_0$ et ρ_i champs de vecteurs $Z_1, \ldots, Z_{\rho_i}$ de $\mathcal{G}_{i-1}$ tels

que $X_k = \mathrm{ad}_f^i Y_k + Z_k$. On a donc $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} \oplus sp\{\mathrm{ad}_f^i Y_k, 1 \leq k \leq \rho_i\}$. On a $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i + \mathrm{ad}_f \mathcal{G}_i$, i.e. :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{i+1} &= \mathcal{G}_i + \mathrm{ad}_f(\mathcal{G}_{i-1} \oplus sp\{\mathrm{ad}_f^i Y_k, 1 \leq k \leq \rho_i\}) \\ &= \mathcal{G}_i + \underbrace{\mathrm{ad}_f \mathcal{G}_{i-1}}_{\subset \mathcal{G}_i} + \mathrm{ad}_f sp\{\mathrm{ad}_f^i Y_k, 1 \leq k \leq \rho_i\} \\ &= \mathcal{G}_i + sp\{\mathrm{ad}_f^{i+1} Y_k, 1 \leq k \leq \rho_i\} \end{aligned}$$

La somme n'étant pas forcément directe, on en déduit que $\dim \mathcal{G}_{i+1} \leq \dim \mathcal{G}_i + \rho_i$, i.e. $\rho_{i+1} \leq \rho_i$.

La démonstration est similaire pour les indices r_i. □

Corollaire B.3
Si sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i$ (respectivement $\mathcal{Q}_{i+1} = \mathcal{Q}_i$) pour un entier i donné, alors pour tout $k \geq i$, on a $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}_i$ (respectivement $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_i$).

Démonstration :
L'hypothèse $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i$ implique que $\rho_{i+1} = 0$. D'après la Proposition B.2, $\rho_k = 0$ pour tout $k \geq i+1$. La conclusion s'en suit. La démonstration est identique pour les distributions $\mathcal{Q}_j$. □

Proposition B.4
Pour tout $i \geq 0$, les distributions $\mathcal{Q}_i$ vérifient les propriétés suivantes :

(i) $\mathrm{ad}_f \mathcal{Q}_i \subset \mathcal{Q}_{i+1}$.

(ii) $\mathrm{ad}_f \overline{\mathcal{Q}_i} \subset \overline{\mathcal{Q}_{i+1}}$

Démonstration :
Montrons d'abord que si Δ est un distribution quelconque, $\mathrm{ad}_f \overline{\Delta} \subset \overline{\Delta + \mathrm{ad}_f \Delta}$. On a

$$\overline{\Delta} = sp\{\mathrm{ad}_{V_1} \cdots \mathrm{ad}_{V_\nu} V_{\nu+1}\ ,\ \ \nu \geq 0,\ \ V_i \in \Delta,\ \ 1 \leq i \leq \nu+1\}$$

Montrons par récurrence sur ν que $\mathrm{ad}_f \mathrm{ad}_{V_1} \cdots \mathrm{ad}_{V_\nu} V_{\nu+1} \in \overline{\Delta + \mathrm{ad}_f \Delta}$. C'est vrai pour $\nu = 1$. En effet, $\mathrm{ad}_f \mathrm{ad}_{V_1} V_2 = [f, [V_1, V_2]] = [[f, V_1], V_2] + [V_1, [f, V_2]]$ (identité de Jacobi), i.e. $\mathrm{ad}_f \mathrm{ad}_{V_1} V_2 = [\mathrm{ad}_f V_1, V_2] + [V_1, \mathrm{ad}_f V_2] \in \overline{\Delta + \mathrm{ad}_f \Delta}$.

Supposons le vrai pour un entier ν donné. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_f \mathrm{ad}_{V_1} \cdots \mathrm{ad}_{V_{\nu+1}} V_{\nu+2} &= \underbrace{[\mathrm{ad}_f V_1, \mathrm{ad}_{V_2} \cdots \mathrm{ad}_{V_{\nu+1}} V_{\nu+2}]}_{\in \overline{\Delta + \mathrm{ad}_f \Delta}} + [V_1, \underbrace{\mathrm{ad}_f \mathrm{ad}_{V_2} \cdots \mathrm{ad}_{V_{\nu+1}} V_{\nu+2}}_{\in \overline{\Delta + \mathrm{ad}_f \Delta}}] \\ &\in \overline{\Delta + \mathrm{ad}_f \Delta} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité de Jacobi et l'hypothèse de récurrence. La récurrence est établie ;

$$\mathrm{ad}_f \overline{\Delta} \subset \overline{\Delta + \mathrm{ad}_f \Delta}. \tag{B.3}$$

Montrons maintenant par récurrence sur i que (i) et (ii) sont vrais. On remarque d'abord que comme $\mathcal{Q}_i \subset \mathcal{Q}_{i+1}$, (i) implique (ii) (conformément à (B.3)). Il ne nous reste donc qu'à vérifier (i).

(i) est trivialement vrai pour $i = 0$ (donc (ii) l'est vrai). Supposons que (i) soit vrai pour un entier donné i. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_f \mathcal{Q}_{i+1} &= \mathrm{ad}_f(\overline{\mathcal{Q}_i} + \mathrm{ad}_f^{i+1}\mathcal{Q}_0) \\ &= \underbrace{\mathrm{ad}_f \overline{\mathcal{Q}_i}}_{\subset \overline{\mathcal{Q}_{i+1}}} + \mathrm{ad}_f^{i+2}\mathcal{Q}_0 \subset \overline{\mathcal{Q}_{i+1}} + \mathrm{ad}_f^{i+2}\mathcal{Q}_0 \\ &\subset \mathcal{Q}_{i+2} \end{aligned}$$

La récurrence est établie. □

Références

[1] P. BRUNOVSKÝ : *A classification of linear controllable systems*, Kybernetika, 3 (1970), pp. 173-187.

[2] D. LEHMANN, C. SACRÉ : *Géométrie et Topologie des Surfaces*, Puf, 1982.

[3] R. MARINO : *On the largest feedback linearizable subsystem*, Systems & Control Letters 6 (1986) 345-351.

[4] M. SPIVAK : *A comprehensive introduction to differential geometry*, Sec. Ed. Vol. 1, Publish or Perish, Inc. Houston, Texas 1979.