

Sur la commande adaptative des systèmes non linéaires

Jean-Baptiste Pomet

▶ **To cite this version:**

Jean-Baptiste Pomet. Sur la commande adaptative des systèmes non linéaires. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1989. Français. NNT : 1989ENMP0165 . pastel-00838224

HAL Id: pastel-00838224
https://pastel.hal.science/pastel-00838224

Submitted on 25 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Jean-Baptiste POMET

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité :

MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse :

SUR LA COMMANDE ADAPTATIVE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

soutenue le 25 septembre 1989 devant le jury composé de :

MM.	**Philippe de LARMINAT**	Président
	Georges BASTIN	Rapporteur
	Jean-Paul GAUTHIER	Rapporteur
	Riccardo MARINO	Examinateur
	Laurent PRALY	Examinateur

Je remercie Monsieur *Philippe de Larminat*. Il me fait l'honneur de présider ce jury, et le plaisir d'examiner ce travail à la lumière de ses immenses connaissances en commande adaptative.

Je remercie Monsieur *Laurent Praly*, mon directeur de thèse. Il a suivi de très près l'élaboration de ce travail, dont il est l'instigateur. Cette attention permanente et la justesse de ses avis, jointes à la gentillesse et l'égalité d'humeur, tout au moins apparente, avec laquelle il m'a guidé lui valent ma profonde et sincère reconnaissance.

Je remercie Monsieur *Georges Bastin*, que j'ai plaisir à compter au nombre des jurés. Je lui sais gré de la compétence et de la bonhomie avec laquelle il a suivi mes travaux jusqu'ici.

Je remercie Monsieur *Jean-Paul Gauthier*. Il m'oblige infiniment en acceptant de participer à ce jury, et j'apprécie l'intérêt bienveillant dont il a toujours témoigné pour mes recherches.

Je remercie Monsieur *Riccardo Marino*, qui m'a fait le plaisir d'accepter avec empressement de s'intéresser à mon travail et de participer à ce jury.

Je remercie Monsieur *Guy Cohen*, qui m'a accueilli il y a quatre ans, au nom de toute l'équipe d'Automatique du Centre d'Automatique et d'Informatique. J'ai beaucoup apprécié sa constante bienveillance et la discrète bonne humeur qu'il sait faire régner autour de lui.

Je remercie Monsieur *Jean-Michel Coron*, avec qui j'ai découvert la recherche, au Centre de Mathématique de l'Ecole Polytechnique, et qui m'a fait connaître le Centre d'Automatique et d'Informatique. Son grand savoir mathématique et la facilité d'abord qui le caractérise ont rendu fructueuses les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui au cours de ce travail.

Je remercie tous mes collègues de l'équipe d'Automatique du C.A.I., et en particulier

Monsieur *Jean Lévine*, actuel directeur, dont j'ai apprécié les positions souvent tranchées, tant sur la recherche en général que sur des points scientifiques précis,

Monsieur *Pierre Carpentier*, dont les insondables connaissances en informatique n'ont d'égales que la dose d'humour qui accompagne tout transfert des susdites connaissances,

Madame *Brigitte d'Andrea*, qui a supporté avec bonne humeur de partager son bureau avec moi, ainsi que ses idées sur la commande non-linéaire et la robotique,

Monsieur *Benoît Charlet*, pour des discussions instructives sur la commande non-linéaire ou la géométrie différentielle,

et tous les autres.

Je remercie toutes les personnes qui, par leurs conseils amicaux, leurs encouragements, ou leurs qualités scientifiques, m'ont donné le goût de la recherche. Outre mes collègues du C.A.I., je m'adresse ici en particulier à Messieurs *Ivar Ekeland*, *Michel Fliess* et *Yoan-Doré Landau*, sans oublier Monsieur *Pfeiffer*, mon professeur de Mathématiques en "Math. Spé." au Lycée Thiers à Marseille... et bien d'autres.

Je remercie mes parents, qui m'ont donné une partie de leur vie et m'ont souvent fait confiance dans ce que j'ai entrepris. Sans eux, ces pages n'auraient pas plus vu le jour que moi... et peut-être est-ce à mon père, Professeur de Mathématique, que je dois de m'être tourné vers la recherche.

Je remercie enfin *Jocelyne*, ma femme, qui a supporté, parfois difficilement, de me voir absorbé presque entièrement par cette thèse, et qui m'a toujours soutenu. Je lui dois beaucoup et c'est avec plaisir que je lui offre ces pages.

Je remercie aussi le soleil de briller et la terre de tourner, avec une mention spéciale pour la lune que j'aime beaucoup.

RESUME

Cette thèse, essentiellement théorique, traite de la commande des systèmes non-linéaires dans lesquels certains paramètres, intervenant linéairement, sont inconnus. L'objectif est la stabilisation asymptotique d'un point d'équilibre, et l'on se pose la question suivante: Supposons que l'on connaisse, pour chaque valeur possible des paramètres, une loi qui stabiliserait le système correspondant; comment déduire de cette famille de lois une loi (adaptative) qui stabilise sans utiliser la valeur des paramètres ?

On propose une démarche générale fondée sur l'estimation linéaire, et qui permet d'une part de classifier les algorithmes existant dans la littérature et d'autre part d'en écrire de nouveaux. On les compare suivant le critère de "performances" suivant: si chaque loi de commande de la famille donnée au départ donnait la stabilité asymptotique *globale*, cette globalité est-elle conservée par la loi adaptative ?

Les avancées par rapport à la littérature existante viennent de ce que d'une part on ne se restreint plus à de la commande de type linéarisation par feedback et difféomorphisme et d'autre part certains contrôleurs trouvés ont de meilleures performances (au sens ci-dessus) que ceux existants. Des idées nouvelles sont introduites comme l'estimation fondée sur une équation de Lyapunov ou une norma-lisation "réglable" en fonction de la croissance des incertitudes paramétriques.

L'étude de la possibilité de compenser, par un terme de commande, les effets de l'adaptation amènent par ailleurs à établir des conditions générales d'équivalence par feedback et/ou difféomorphisme des systèmes d'une famille paramétrée.

ABSTRACT

This dissertation is concerned with the control of nonlinear linearly parametrized systems, with unknown parameters. The control objective is asymptotic stability of an equilibrium point. The problem is : suppose you know, for each possible value of the parameters, a stabilizing control law; how to construct, from this family of laws, an (adap-tive) stabilizing control law which does not need the exact value of the parameters ?

We give a general method, based on linear estimation, which results in a clas-sification of the existing algorithms and the design of new ones. We compare them from the following criterium: supposing each control law above makes the equilibrium point *globally* asymptotically stable, does this globalness still hold for the adaptive controller ?

Compared with the existing literature, we do better in two senses : we do not suppose that the known stabilizing laws are obtained via feedback linarization plus linear control, and we find some controllers giving global stability in cases when we cannot prove that the existing ones do so. We introduce new ideas as estimation based on a the evolution of a Lyapunov function, or tuning the normalization from the growth of parametric uncertainties.

Besides, studying the possibility to cancel bad effects of adaptation via an a modification of the control law leads us to establish general conditions for feedback and/or diffeomorphism equivalence of the systems of a parametrized family.

Table des matières

0 Introduction et Résumé **1**

Commande adaptative boite noire 1

Commande adaptative utilisant de la connaissance a priori 1

Commande adaptative non-linéaire 2

Apports de cette thèse 2

Résumé chapitre par chapitre 4

I PARAMETRAGE FAMILLE DE SYSTEMES **7**

1 Paramétrage **9**

1.1 Paramétrage en boucle ouverte 9

1.2 Description et propriétés des systèmes considérés. 10

1.2.1 Paramétrage linéaire 10

1.2.2 Stabilisabilité 12

1.2.3 Equivalence par feedback et difféomorphisme 16

Equivalence par feedback seulement 16

Equivalence par feedback et difféomorphisme 18

Equivalence par feedback et difféomorphisme avec matching 20

2 Conditions d'équivalence par feedback d'état et/ou difféomorphisme des systèmes d'une famille **22**

2.1 Introduction. Position du problème 22

2.2 Equivalence par feedback (sans difféomorphisme) 22

2.3 Equivalence par feedback et difféomorphisme 24
2.4 Equivalence par feedback et difféomorphisme avec matching 27
2.4.1 Condition nécessaire et suffisante abstraite 27
2.4.2 Conditions suffisantes explicites 28

II ESTIMATION 31

3 Préliminaires 33
3.1 L'équation d'observation 33
3.2 L'estimation à l'usage de la commande adaptative. 35
3.2.1 Estimation exacte 35
3.2.2 Objectifs de l'estimation en commande adaptative. 37

4 Algorithmes d'estimation avec information idéale. 38
4.1 Algorithme "général", propriétés. 38
4.2 Estimation avec contrainte sur l'estimé, projection. 40
4.2.1 Mise en oeuvre de la projection 40
Projection non-continue 40
Projection continue 42
Propriétés de l'algorithme avec projection 43
4.3 Robustesse à un bruit exponentiellement décroissant 44
4.4 Panorama d'algorithmes plus ou moins classiques 45
4.4.1 Les algorithmes de type gradient 45
4.4.2 Les algorithmes de type moindres carrés 48

5 Algorithmes d'estimation avec information réaliste. 50
5.1 Introduction 50
5.2 "Filtrage" de l'équation d'observation 51
5.3 "Filtrage" de l'erreur d'équation. 52
5.3.1 Théorie des systèmes passifs 53
Définition des systèmes passifs 53
Exemples de systèmes passifs 54

Propriété des systèmes passifs 55

5.3.2 Les estimateurs "idéaux" vus comme des systèmes passifs 57

Cas des proto-estimateurs de type gradient 57

Cas de l'algorithme général: 58

5.4 Une nouvelle famille d'estimateurs réalistes 60

5.4.1 Etude générale 60

5.4.2 Famille d'algorithmes $\left(\mathcal{GF}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}\right)$. 62

5.4.3 Algorithmes particuliers avec filtrage non-linéaire de l'erreur 63

III COMMANDE 65

6 Commande - Introduction 67

6.1 Objectifs . 67

6.2 Etat de l'art 68

Méthode Lyapunov contre Méthode estimation 68

Analyse "erreur de commande" contre analyse "erreur sur le système" 69

Difféomorphisme estimé contre difféomorphisme "étoile" 70

6.3 Méthodes communes aux chapitres suivants 74

6.3.1 Estimation . 74

Choix de l'équation d'observation. 74

Estimateur 75

6.3.2 Analyse "erreur sur le système" de la boucle fermée 75

7 Commande des systèmes à parametrage linéaire implicite 78

7.1 Le contrôleur 78

7.1.1 Ecriture du contrôleur 78

Equation d'observation 78

Filtrage 79

Estimation proprement dite 79

Loi de commande 80

Conclusion 80

7.1.2 Filtrage, problèmes de calculabilité 80
7.2 Commande "certainty equivalence" Comportement 83
7.2.1 Analyse de comportement, problème de perturbations 83
7.2.2 Résultat local 85
7.2.3 Résultat global 85
7.3 Modification des lois "certainty equivalence" 87
7.4 Cas particulier des systèmes à paramétrage linéaire explicite 90
7.4.1 Le contrôleur 90
Obtention de z et Z 90
Estimation et commande 90
7.4.2 Comportement 91

8 Commande des systèmes à paramétrage linéaire explicite 93
8.1 Méthode 94
8.1.1 Choix de l'équation d'observation 94
Equation du système "en x" 94
Equation transformée par difféomorphisme 94
Equation de Lyapunov 94
8.1.2 Choix de l'estimateur 95
8.1.3 Loi de commande 97
8.2 Commande certainty equivalence 97
8.2.1 Contrôleur avec estimateur ($\mathcal{GF}_{m_1,m_2}$) 98
Ecriture du contrôleur 98
Comportement 101
Démonstrations 108
8.2.2 Cas où V ne dépend pas de p 115
8.2.3 Un autre choix de Ξ et Υ 116
Introdution 116
Le contrôleur 117
Comportement 117
Où l'on retrouve des algorithmes adaptatifs "directs"... 118

Une condition suffisante pour pouvoir appliquer cet algorithme 119

8.3 Modification des lois "certainty equivalence" 120

8.3.1 Discussion générale 120

8.3.2 Cas de systèmes équivalents par feedback et difféomorphisme 125

CONCLUSION de la partie COMMANDE 133

Apports . . 133

Perspectives 133

IV ANNEXES 135

A Lemmes et démonstrations divers. 137

A.1 Pseudo-inverses 137

A.2 Annexe au chapitre 2 . 139

A.2.1 Transformation de champs de vecteurs par un difféomorphisme dépendant de paramètres 139

A.2.2 Démonstrations relatives à la section 2.2 142

A.2.3 Démonstrations relatives à le section 2.3 . 143

A.2.4 Démonstrations relatives à la section 2.4 147

A.3 Démonstrations concernant la partie ESTIMATION. 150

A.3.1 Deux lemmes techniques 150

A.3.2 Démonstrations des théorèmes du chapitre 4 151

Démonstration des théorèmes 4.1 et 4.3 151

Démonstration du théorème 4.4 153

B Reproduction de [42] 155

Chapitre 0

Introduction et Résumé

Commande adaptative boite noire

La commande adaptative est née dans les années 50 de l'insuffisance des commandes classiques, par exemple de type P.I.D. : aucune combinaison des gains de commande ne pouvant permettre de stabiliser certains systèmes, on a eu l'idée d'"adapter" ces gains, c'est-à-dire de les faire varier de façon à optimiser à chaque instant certains critères. Cette idée a, par exemple, conduit à la fameuse méthode connue sous le nom de "MIT rule"

On obtient ainsi un contrôleur, dynamique et non-linéaire, qui n'est sans doute pas aussi universel que l'on pourrait le rêver mais qui convient à une large classe de systèmes. La simplicité de la méthode a mené dès les années 60 à des expérimentations industrielles suffisamment concluantes pour conduire à la commercialisation de tels contrôleurs adaptatifs, destinés à être "branchés" sur un peu n'importe quel procédé. Les succès ont été, et sont encore, réels. Selon *Aström* [4], il y avait, en mai 1988, à peu près 70000 tels contrôleurs adaptatifs en service dans le monde.

Ces contrôleurs ne contenant aucune information a priori sur le système, il n'est pas plus déraisonnable théoriquement de les appliquer à un système non-linéaire qu'à un système linéaire; on ne se prive d'ailleurs pas en pratique de les appliquer à des systèmes non-linéaires, les systèmes que nous propose la nature étant rarement linéaires.

Si la mise en oeuvre de tels contrôleurs est simple, l'étude théorique des performances qu'ils confèrent à la boucle fermée, c'est-à-dire, par exemple, l'étude de la stabilité des solutions du système en boucle fermée obtenu en les appliquant à un système "quelconque", est loin d'être simple. Même si les systèmes auxquels on les applique sont linéaires, on voit apparaître des dynamiques parfois très complexes (chaos, multiples orbites périodiques, phénomène de "bursting"...).

Commande adaptative utilisant de la connaissance a priori

Parallèllement se sont développées des méthodes de commande plus sophistiquées (représentation d'état, synthèse observateur-contrôleur, commande optimale, commande non-

linéaire...), faisant appel à une modélisation beaucoup plus précise du système. Ces méthodes se sont imposées dans des domaines où cette modèlisation précise est accessible et où l'on est exigeant sur les performances.

Tirant partie de ces avancées, une autre branche de la commande adaptative a émergé, où l'on suppose que le système à commander est connu à un nombre fini de paramètres (constants) près. Il s'agit alors de compléter les susdites "méthodes modernes" pour leur permettre d'atteindre l'objectif fixé malgré l'ignorance de ces paramètres. Cette approche demande beaucoup moins à l'adaptation en tant que telle puisque l'on a déjà incorporé beaucoup de connaissance sur le système et de savoir-faire pour la commande.

Dire que le système dépend d'un nombre fini de paramètres équivaut à dire qu'il appartient à une famille de systèmes parfaitement décrite et paramétrée par un nombre fini de paramètres réels. On définit alors une famille de contrôleurs, telle que pour tout système de la famille, l'un au moins de cas contrôleurs convienne et satisfasse à l'objectif fixé. On appelle parfois cette propriété **hypothèse de modélisation exacte**. Le but est alors de bâtir, à partir de cette famille de contrôleurs, un contrôleur dynamique, obtenu en prenant un contrôleur "variable dans la famille décrite ci-dessus", qui satisfasse à l'objectif en question sans demander la connaissance des paramètres. Dans ce cadre, et dans le cas où le système à commander (c'est-à-dire tous les systèmes de la famille) est linéaire, la famille de contrôleur étant de type placement de pôle, ou LQ ou Modèle de référence, ou..., il existe de nombreux algorithmes qui donnent satisfaction (cf. *Goodwin et Sin* [23], *Landau* [31], *Gawthorp* [21], *Aström* [4], *Sastry et Bodson* [48]). On les range en général en deux catégories : lorsque la famille de contrôleurs est obtenue en concevant exactement un contrôleur pour chaque système et que la philosophie de l'adaptation est une "identification" des paramètres réels du système, on dit que l'algorithme est **indirect**; lorsqu'il n'y a pas de correspondance claire entre les contrôleurs et les systèmes (par exemple, plus de contrôleurs que de systèmes) et (ou) que le processus d'adaptation n'est pas du tout fondé sur de l'identification mais, par exemple, sur un critère de performance on dit que l'algorithme est **direct**

Commande adaptative non-linéaire

On appelle en général "commande non-linéaire adaptative" le type de commande décrite ci-dessus quand le système à commander n'est pas supposé linéaire. La littérature sur le sujet est déjà assez riche, couvrant essentiellement les cas où les sytèmes sont linéarisables par bouclage d'état et difféormorphisme (entrée/sortie ou entrée/état); l'objectif est alors le suivi de trajectoire ou la stabilisation d'un point d'équilibre.

Apports de cette thèse

Dans cette thèse, on évite sciemment l'étape de conception des lois de commandes à paramètres connus, et on les suppose données, satisfaisant notre objectif : stabilisation (locale ou globale) d'un point d'équilibre noté O. Leur conception est loin d'être un problème simple, nous ne l'ignorons pas, mais là n'est pas notre souci. Le sujet de la thèse peut en fait être compris comme : **Comment rendre adapatatives des lois de commandes**

stabilisantes ? Les algorithmes obtenus ne sont donc pas sensibles à la forme des lois de commande[1].

En plus de ce caractère de généralité, voici les points qui démarquent les travaux présentés ici :

- Nous proposons une méthode de synthèse de contrôleurs adaptatifs, c'est-à-dire une stratégie pour "rendre adaptative" une loi de commande. De cette démarche systématique découlent :
  - Une classification des algorithmes existants dans la littérature, et une approche unifiée pour les obtenir,
  - Une vaste famille de contrôleurs adaptatifs,
  - Une manière de synthétiser par notre philosophie "estimation", des algorithmes considérés jusque là comme "directs", c'est-à-dire synthétisés en assignant une fonction de Lyapunov au système bouclé : système + commande + adaptation (Celui décrit par *Taylor* [58] notament). On retrouve là le lien entre les méthodes "Lyapunov" et les méthodes "hyperstabilité", évoqué en adaptatif linéaire par *Narendra et Valavani* [38].
- Certains de ces contrôleurs reposent sur des idées nouvelles dans ce contexte : normalisation (dynamique ou statique) de l'erreur, utilisation du concept de passivité, estimation à partir d'une équation de Lyapunov.
- Dans l'analyse des propriétés de nos algorithmes adaptatifs, nous mettons l'accent notament sur le caractère global ou local de la stabilité obtenue pour le système adaptatif. Notre objectif est d'évaluer la qualité des algorithmes d'adaptation plutôt que celle des lois de commande à paramètres connus. On juge les algorithmes sur leur capacité à conserver la stabilité globale si celle-ci était assurée à paramètres connus par les lois de commande initiales. L'idée de ce critère étant de distinguer, quand la stabilité n'est que locale, si cette localité est imposée par les lois de commandes ou par l'adaptation.
- On fait ressortir, à l'occasion de cette recherche de la stabilité globale, l'importance de certaines conditions, qui assurent de pouvoir toujours conserver la globalité. Dans le cas de commande par linéarisation par feedback, ces conditions se ramènent aux "(extended) matching assumptions" de *Kanellakopoulos, Kokotovic et Marino* [28]. On caractérise ces conditions explicitement en terme des champs et de leur dépendance en le paramètre p, ce qui revient à caractériser l'équivalence des systèmes d'une famille par feedback et difféomorphisme avec une condition restrictive sur le difféomorphisme; on donne également une caractérisation, moins explicite, de l'équivalence par feedback et difféomorphisme en général.
- La possibilité d'exploiter ces hypothèses est de plus améliorée. Elles permettent d'introduire un terme correctif de commande destiné à annuler les effets néfastes de

[1] En particulier, ils n'utilisent pas la forme des lois de type linéarisation par feedback.

l'adaptation. Nous étendons ici une idée de introduite par *Middleton et Goodwin* [35], et reprise par [28], puis par *Bastin et Campion* dans le cas de la linéarisation par feedback. Cela est ici généralisé aux stabilisations autres que celles résultant de la linéarisation, et on lève un problème d'équations implicites mis en évidenve dans [28].

Résumé chapitre par chapitre

Le **chapitre 1** est une description de la famille de systèmes considérés à savoir une famille linéairement paramétrée (implicitement ou explicitement), de systèmes tous stabilisables par une loi de commande dépendant des paramètres. On introduit également la possibilité que ces systèmes soient équivalents par feedback et/ou diffeomorphisme.

Le **chapitre 2** donne des conditions pour que les systèmes d'une famille soient équivalents par feedback (FE), feedback et difféomorphisme (FDE) ou feedback et difféomorphisme avec une condition restrictive sur ce dernier (FDEM). Les propriétés locales ou globales sont étudiées. Les résultats de ce chapitre ont un intérêt par eux-mêmes, mais ils sont aussi fortement reliés à la suite car les conditions FE et FDEM permettent de rejeter exactement certains effets dûs à l'adaptation. Dans le cas d'une famille de systèmes tous linéarisables par feedback et difféormorphisme, FE est équivalente à la condition dite de "matching" et FDEM à la condition dite d'"extended matching" (voir *Taylor, Kokotovic, Marino et Kanellakopoulos* [59] et [28]).

La partie II (chapitres 3,4, et 5) est consacrée aux méthodes d'estimation linéaires, qui seront utilisées dans la partie III. Beaucoup d'algorithmes introduits ici sont très classiques ainsi que leurs propriétés; certains sont cependant plus ou moins nouveaux, et l'accent est mis sur les propriétés réellement nécessaires à la commande adaptative et sur le statut de l'estimation en commande adaptative.

Au **chapitre 3**, on détermine les objectifs assignés à des méthodes d'estimation en commande adaptative, cette estimation (d'un vecteur p^*) reposant sur une régression, ou "équation d'observation" de type

$$z_{eq}(t) \quad = \quad Z_{eq}(t)p^*$$

Au **chapitre 4**, on étudie des algorithmes qui supposent que z_{eq} et Z_{eq} sont entièrement mesurés. Au **chapitre 5**, on étudie deux méthodes valables dans le cas où seulement des "intégrales" de z_{eq} et Z_{eq} sont connues. L'une de ces méthodes consiste à faire passer z_{eq} et Z_{eq} à travers un filtre linéaire strictement causal; la seconde, valable si Z_{eq} est mesuré, utilise la théorie de la passivité (introduite en commande adaptative linéaire par *Landau* [31]) et ouvre la porte à toute une famille d'algorithmes, sans doute beaucoup plus nombreux que ceux explicitement mentionnés dans ce chapitre.

La **partie III** (chapitres 6, 7 et 8) est consacrée à la commande adaptative proprement dite.

Le **chapitre 6**, après avoir rappelé les objectifs (paragraphe 6.1), présente (paragraphe 6.2) une analyse des différentes méthodes utilisées dans la littérature en les classant suivant

trois critères qui nous ont semblé plus pertinents que la traditionnelle distinction direct-indirect. On décrit ensuite en détail (paragraphe 6.3) l'approche adoptée ici. Elle consiste à analyser le comportement du système adaptatif comme une perturbation d'un comportement idéal par des quantités que les méthodes d'estimation introduites dans la partie III sont susceptibles de rendre petites. La mesure de $\dot{x}$ rendrait cela très aisé, mais on n'en dispose pas en général et c'est en fait la façon de s'en passer qui fait l'essentiel de la différence entre les algorithmes adaptatifs présentés ensuite. Les chapitres 7 et 8 enfin présentent nos différents algorithmes de commande adaptative : des méthodes valables pour le cas d'un paramétrage linéaire implicite (ou aussi explicite) au **chapitre 7**, puis des méthodes spécifiques au cas d'un paramétrage linéaire explicite au **chapitre 8**, qui est beaucoup plus développé. Dans ces chapitres, les contrôleurs diffèrent par :

le choix du type d'estimateur : gradient, moindres carrés;

- une normalisation appropriée, statique ou dynamique;
- la manière de "filtrer" pour ne pas avoir à utiliser $\dot{x}$. Dans les algorithmes du chapitre 8, on a beaucoup de lattitude sur le choix de ces filtres, et l'on retrouve même, grâce à certains choix, des algorithmes jusqu'ici considérés comme directs (voir plus haut).

Le choix d'un éventuel terme correctif de commande destiné à annuler une partie des effets néfastes de l'adaptation.

On donne pour chaque algorithme des résultats de stabilité locale ou globale, la stabilité globale étant souvent obtenue au prix d'hypothèses sur la croissance des champs à l'infini. Certains algorithmes y sont plus sensibles que d'autres.

Partie I

PARAMETRAGE FAMILLE DE SYSTEMES

Chapitre 1

Paramétrage

1.1 Paramétrage en boucle ouverte

En commande adaptative linéaire, supposant le système à commander linéaire stationnaire et d'ordre majoré par N, on se donne naturellement une famille de systèmes dépendant linéairement d'un nombre fini de paramètres réels et à laquelle le système à commander appartient. Cette famille est celle des systèmes linéaires d'ordre inférieur à N, et l'on peut par exemple prendre pour paramètres les coefficients des différents polynômes qui interviennent dans sa fonction de transfert, et dont le degré est majoré. L'équivalent en non-linéaire consiste à *se donner a priori* une famille de systèmes si l'on veut avoir affaire à un nombre fini de paramètres[1]. On va préciser ici comment on décrit cette famille et les différentes hypothèses que l'on fait.

Dans tout ce travail, on considère une famille de systèmes $(\mathcal{S}_p)_{p\in\mathcal{P}}$, indexée par p, un paramètre appartenant à $\mathcal{P}$, ouvert convexe de $\mathbb{R}^l$ L'ensemble $\mathcal{P}$ n'est pas $\mathbb{R}^l$ tout entier car il se peut que les systèmes soient mal définis pour certaines valeurs des paramètres (par exemple matrice d'inertie non positive, ou non inversible pour des systèmes mécaniques)[2] Les $\mathcal{S}_p$ sont des systèmes sur une variété M^n de dimension n décrits par:

$$\mathcal{S}_p \quad : \quad \dot{x} \;=\; f(p,x) \;+\; \sum_{k=1}^{m} u_k g_k(p,x) \tag{1.1}$$

$$x \in M^n\,, \quad u_k \in \mathbb{R}\,, \quad p \in \mathcal{P}\,, \tag{1.2}$$

où f et les g_k sont des champs de vecteurs réguliers dépendant régulièrement du paramètre p. Si M^n est une variété abstraite, une bonne façon de définir de définir un "champ de vecteurs réguliers dépendant de façon régulière d'un paramètre $p \in \mathcal{P}$" est de dire que c'est un champ de vecteurs régulier sur la variété produit $\mathcal{P} \times M^n$ qui a en tout point (p,x) une composante nulle sur $T_p\mathcal{P}$ et induit donc, pour tout p, un champ sur la sous-variété $\{p\} \times M^n$, isomorphe à M^n; ce dernier champ est notre $f(p,.)$.

[1] On *pourrait* penser prendre pour espace des paramètres l'"espace des systèmes non-linéaires", c'est à dire, par exemple, l'espace des f et g de l'équation d'état !...

[2] Par la suite (voir aussi le paragraphe précédent la condition SF page 13), nous serons amenés à restreindre cet ensemble, et à ne considérer que les valeurs du paramètre appartenant à une partie fermée convexe de $\mathcal{P}$, que l'on notera Π.

On abrège souvent (1.1) en

$$\mathcal{S}_p \ : \quad \dot{x} \ = \ f(p,x) \ + \ g(p,x)\, u \ ; \tag{1.3}$$

$$x \in M^n \, , \quad u \in \mathbb{R}^m \, , \quad p \in \mathcal{P} \ , \tag{1.4}$$

où, pour être très précis, $g(p,x)$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans T_xM^n donnée par:

$$g(p,x) \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & T_xM^n \\ u = (u_1, ..., u_m) & \longmapsto & g(p,x)u = \sum_{k=1}^{m} u_k g_k(p,x) \end{array} \right. \tag{1.5}$$

1.2 Description et propriétés des systèmes considérés.

1.2.1 Paramétrage linéaire

Nous serons amenés, sauf au chapitre 2, à faire l'hypothèse que le paramétrage de notre famille est *linéaire*, c'est à dire que les champs f et g de l'équation (1.1) ont une dépendance linéaire en p, ou, pour élargir le champ d'application de notre étude, que (1.1) peut être réécrite sous une forme *implicite* linéaire en p:

Définition 1.1 (Condition PLE) *On dit que le paramétrage de la famille de systèmes $(\mathcal{S}_p)$ est* **linéaire explicite** *si les champs de vecteurs $f(p,.)$ et $g_k(p,.)$ présents dans les équations (1.1) vérifient, pour tout x dans M^n et tout $p = (p_1, ..., p_l)$ dans $\mathcal{P}$:*

$$f(p,x) \ = \ a^o(x) \ + \ \sum_{i=1}^{l} p_i a^i(x) \ = \ a^o(x) \ + \ A^p(x)p \tag{1.6}$$

$$g_k(p,x) \ = \ b_k^o(x) \ + \ \sum_{i=1}^{l} p_i b_k^i(x) \ = \ b_k^o(x) \ + \ B_k^p(x)p \tag{1.7}$$

$$\text{ou encore} \quad g(p,x) \ = \ b^o(x) \ + \ \sum_{i=1}^{l} p_i b^i(x) \ = \ b^o(x) \ + \ B^p(x)p \tag{1.8}$$

g étant défini par (1.5).

Exemple 1.1 La famille de systèmes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & x_2 \ + \ px_1 \\ \dot{x_2} & = & u \end{array} \right. \tag{1.9}$$

satisfait la condition PLE.

∎

Exemple 1.2 De nombreux systèmes physiques faisant intervenir des paramètres se mettent sous cette forme. ∎

Définition 1.2 (Condition PLI) *On dit que le paramétrage de la famille de systèmes* $(\mathcal{S}_p)$ *est* **linéaire implicite** *si l'équation (1.1) peut se réécrire comme:*

$$(\mathcal{S}_p) \quad : \quad J(p,x)\dot{x} \;=\; a(p,x) \;+\; \sum_{k=1}^{m} u_k b_k(p,x) \tag{1.10}$$

c'est-à-dire si

$$f(p,x) \;=\; J(p,x)^{-1}a(p,x) \tag{1.11}$$
$$g_k(p,x) \;=\; J(p,x)^{-1}b_k(p,x) \tag{1.12}$$

où:

- *pour tout p dans* $\mathcal{P}$, $a(p,.)$ *et* $b_k(p,.)$ *sont des champs de vecteurs sur* M^n *et* $J(p,.)$ *un champ d'applications linéaires tel que* $J(p,x)$ *est inversible pour tout* (p,x).
- *a, b, et J dépendent linéairement de p:*

$$a(p,x) \;=\; a^o(x) \;+\; \sum_{i=1}^{l} p_i a^i(x) \;=\; a^o(x) \;+\; A^p(x)p \tag{1.13}$$

$$b_k(p,x) \;=\; b_k^o(x) \;+\; \sum_{i=1}^{l} p_i b_k^i(x) \;=\; b_k^o(x) \;+\; B_k^p(x)p \tag{1.14}$$

$$\textit{ou encore}\quad b(p,x) \;=\; b^o(x) \;+\; \sum_{i=1}^{l} p_i b^i(x) \;=\; b^o(x) \;+\; B^p(x)p \tag{1.15}$$

$$J(p,x) \;=\; J^o(x) \;+\; \sum_{i=1}^{l} p_i J^i(x) \;=\; J^o(x) \;+\; J^p(x)p \tag{1.16}$$

Notons qu'avec les notations introduites en (1.8) (1.15) et (1.16), le terme de commande dépendant de p :

$$[B^p(x).p]\; u$$

et le terme

$$[J^p(x).p]\; \dot{x}$$

sont linéaires à la fois en p et en u ou $\dot{x}$. Pour éviter toute confusion, on définit les notations $B^p(x) \odot u$ et $J^p(x) \odot \dot{x}$ par

$$[B^p(x) \odot u]\; p \;\triangleq\; [B^p(x).p]\; u \tag{1.17}$$
$$[J^p(x) \odot \dot{x}]\; p \;\triangleq\; [J^p(x).p]\; \dot{x} \tag{1.18}$$

Exemple 1.3 Pour une large classe de systèmes mécaniques, on peut choisir comme paramètres des fonctions des paramètres naturels (masses, inerties, longueurs...) de telle façon que l'équation implicite dépende linéairement de ces paramètres. Par exemple, la

famille des bras de robots rigides à un nombre fixé d'articulations satisfait la condition PLI, après reparamétrage (voir par exemple [12], ou la version préliminaire de [35]). ∎

Exemple 1.4 La famille de systèmes dans $\mathbb{R}$ (mais $p \in \mathbb{R}^2$)

$$\dot{x} = \frac{x + p_1 u}{x^2 + p_2 x^2} \tag{1.19}$$

satisfait la condition PLI avec $p \in]0, +\infty[$ (c'est-à-dire que $\mathcal{P} =]0, +\infty[$). ∎

Remarque 1.1 Le mot "implicite" ne doit pas faire penser que l'on s'intéresse à des *systèmes* réellement implicites. Dans l'écriture (1.10), $J(p, x)$ est partout inversible et l'on peut obtenir une forme explicite (1.1) équivalente (voir (1.11) et (1.12)). On n'écrit les systèmes $\mathcal{S}_p$ sous cette forme implicite que pour caractériser une classe de *paramétrages* plus large que celle où f et g sont linéaires en p. ∎

Remarque 1.2 La notion de dépendance linéaire en des paramétres est intrinsèque: les a^i, b^i_k ou J^i des formules (1.6) à (1.8) et (1.13) à (1.16) sont des champs de vecteurs ou de tenseurs définis sur M^n et non pas des objets attachés à un système de coordonnées sur M^n. Les p_i étant des réels et les a^i des champs de vecteurs, l'expression (par exemple)

$$\sum_i p_i a^i$$

a un sens indépendament du système de coordonnées que l'on a pu choisir sur M^n. ∎

Remarque 1.3 Il est possible d'avoir naturellement un paramétrage non-linéaire, mais d'obtenir un paramétrage linéaire après un changement de paramètres. C'est ce que l'on fait dans le cas de la robotique par exemple (cf. exemple 1.3 page 11), où il y a une correspondance bijective entre les nouveaux paramètres et les anciens ; on peut aussi parfois faire un reparamétrage redondant, comme dans [49], où l'on considère par exemple p_1, p_2 et $p_1 p_2$ comme trois paramètres indépendants, si bien que l'on introduit en fait une nouvelle famille, contenant la première et paramétrée linéairement.

Nous prenons ici le paramétrage linéaire comme hypothèse, mais l'on peut tout de même faire le raisonnement suivant. Dans l'espace vectoriel (de dimension infinie) des $(f, g_1, ..., g_m)$ (auxquels il faut ajouter J dans le cas PLI), la famille $(\mathcal{S}_p)$ décrit une sous-variété paramétrée par $\mathbb{R}^l$, a priori de dimension l si il n'y a pas de singularités. Si le paramétrage est linéaire, cette variété est un sous-espace affine de dimension finie, et réciproquement, si cette sous-variété est un sous-espace affine de dimension finie, alors, par le choix d'une base sur ce sous espace, on obtient naturellement un paramétrage linéaire (avec eventuellement moins de paramètres qu'au début). De même, si l'on peut opérer un re-paramétrage redondant linéaire, alors la sous-variété décrite par les $\mathcal{S}_p$ est incluse dans un sous-espace affine de dimension finie, et la réciproque suit comme ci-dessus. ∎

1.2.2 Stabilisabilité

Comme annoncé dans l'introduction, nous supposons que tous les systèmes de la famille considérée sont stabilisables par feedback d'état régulier, en général dépendant des paramètres.

On entend par là que ce feedback, noté $u_{ST}(p,x)$, fait du point 0 de M^n (le même point 0 pour tous les systèmes) un point d'équilibre asymptotiquement stable du système dynamique en boucle fermée

$$\dot{x} \;=\; s_o(p,x) \;\triangleq\; f(p,x) \;+\; g(p,x)\; u_{ST}(p,x) \tag{1.20}$$

D'après les théorèmes inverses de Lyapunov (voir par exemple [62]), on sait que l'on ne perd rien en caractérisant la stabilité par une fonction de Lyapunov $V(p,x)$ ((1.21) et (1.22) précisent ce que l'on entend exactement par "fonction de Lyapunov"). Cette fonction de Lyapunov dépend a priori de p, et sans plus d'analyse des systèmes considérés, il est impossible de connaitre cette dépendance. Nous prendrons comme *hypothèse* que d'une part la loi de feedback et d'autre part la fonction de Lyapunov sont des fonctions suffisament régulières de p et x.

Il existe généralement des valeurs des paramètres pour lesquelles cela n'est pas possible[3]; on supposera donc seulement que sont stabilisables les systèmes correspondant aux valeurs des paramètres contenus dans un domaine Π convexe fermée d'intérieur non vide de l'espace des paramètres. Π est a priori plus petit que $\mathcal{P}$ introduit en (1.2), et fermé alors que $\mathcal{P}$ était ouvert. Il n'y aura cependant pas d'équivoque : au chapitre 2, on a besoin de $\mathcal{P}$ qui est une sous-variété de $\mathbb{R}^l$, et l'on ne se soucie pas de lois de commande ni de stabilité, alors que dans toute la suite, c'est-à-dire les parties estimation et commande, on utilisera Π, la partie convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^l$ dont nous parlons ici.

Voici l'hypothèse minimum que l'on fera sur la stabilisabilité des systèmes de la famille considérée:

Définition 1.3 (condition SF) *On dit que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **SF** *(stabilisabilité par feedback) si il existe des fonctions régulières de $\Pi \times M^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et dans $\mathbb{R}$, $u_{ST}(p,x)$ et $V(p,x)$ tel que :*

1– *$V(p,x)$ est positif ou nul, nul si et seulement si $x = 0$.* (1.21)

2– *Pour tout m réel positif, l'ensemble*
$\{(p,x) \;/\; V(p,x) < m \;,\; p \in \Pi$ *et* $|p| \leq m\}$ *est borné.* (1.22)

3– *Le champ s étant donné par* (1.20),
$$\frac{\partial V}{\partial x}(p,x).s_o(p,x) \;\leq\; -\,c\,V(p,x) \tag{1.23}$$

c étant une constante strictement positive indépendante de p et x.

On dit que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait **localement** *la condition* **SF** *si et seulement si il existe un voisinage ouvert Ω de 0, indépendant de p, tel que les points* **1**, **2** *et* **3** *soient satisfaits pour x dans Ω et p dans Π*

[3]La dépendance linéaire des champs en les paramètres rend cela presque automatique : un vecteur dépendant linéairement de p s'annule génériquement pour au moins une valeur de p si la dimension de p est supérieure au nombre de directions possibles pour ce vecteur

Dans certains cas, nous serons amenés à introduire un difféomorphisme $\varphi(p,.)$ dépendant du paramètre p. L'image de (1.20) par ce difféomorphisme s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{\xi} = s(p,\xi) \triangleq \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x).[f(p,x) + g(p,x)\, u_{ST}(p,x)] \tag{1.24}$$

$$avec \quad \xi = \varphi(p,x) \ , \tag{1.25}$$

La stabilité est évidemment conservée (tout ceci s'entend à p constant), et l'on note U la fonction de Lyapunov après difféomorphisme :

$$U(p,\varphi(p,x)) \triangleq V(p,x) \tag{1.26}$$

Ainsi, (1.23) s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(p,\xi).s(p,\xi) \leq -c\, U(p,\xi) \tag{1.27}$$

Exemple 1.5 On considère la famille de systèmes dans $\mathbb{R}^2$, paramétrée par le paramètre réel p :

$$\mathcal{S}_p : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + p\,\theta(x_1) \\ \dot{x}_2 = p\, u \end{cases} \tag{1.28}$$

Définissant, pour tout p, le difféomorphisme $\varphi(p,.)$ par

$$\varphi(p,x) \triangleq \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + p\,\theta(x_1) \end{pmatrix} \ , \tag{1.29}$$

on peut transformer (1.28) en

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = p\,\theta'(x_1)[x_2 + p\,\theta(x_1)] + p\, u \end{cases} \tag{1.30}$$

On prend alors (pour $p \neq 0$)

$$u = -\theta'(x_1)[x_2 + p\,\theta(x_1)] + \frac{1}{p} v \ , \tag{1.31}$$

où θ' désigne la dérivée de θ, fonction réelle d'une variable réelle :

$$\theta'(x_1) = \frac{\partial \theta}{x_1}(x_1) \ , \tag{1.32}$$

et l'on réalise ainsi la linéarisation par feedback et difféomorphisme de $\mathcal{S}_p$, c'est-à-dire que (1.30) donne :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = v \end{cases} \tag{1.33}$$

Il reste alors à stabiliser ce système linéaire : on prend, par exemple,

$$v = -\omega_1 \xi_1 - \omega_2 \xi_2 \tag{1.34}$$

où ω_1 et ω_2 sont deux réels strictement positifs, ce qui revient à définir $u_{ST}(p,x)$, pour p non nul, par

$$u_{ST}(p,x) = -\theta'(x_1)[x_2 + p\theta(x_1)] - \frac{1}{p}(\omega_1 x_1 + \omega_2[x_2 + p\theta(x_1)]) , \quad (1.35)$$

et l'on obtient

$$\dot{\xi} = s(\xi) \triangleq A\xi \quad (1.36)$$

avec

$$A \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1 & -\omega_2 \end{pmatrix} , \quad (1.37)$$

matrice dont les valeurs propres sont à partie réelle strictement négatives. 0 est donc un point d'équilibre globalement assymptotiquement stable de cette équation différentielle ordinaire linéaire et l'on peut résoudre, pour toute matrice Γ symétrique définie positive, l'équation de Lyapunov

$$\tfrac{1}{2}\left(A^\top Q + QA\right) = -\Gamma, \quad (1.38)$$

avec Q symétrique définie posistive, et définir U par :

$$U(\xi) = \tfrac{1}{2}\xi^\top Q\xi = \tfrac{1}{2}q_{11}\xi_1^2 + q_{12}\xi_1\xi_2 + \tfrac{1}{2}q_{22}\xi_2^2 \quad (1.39)$$

On a alors, d'après (1.38),

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi).s(\xi) = \xi^\top QA\xi = -\xi^\top\Gamma\xi \leq -c\,U(\xi) , \quad (1.40)$$

pour un certain c positif puisque Q est définie positive; (1.27) est donc vérifié.

Revenant aux coordonnées initiales, le système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x} = s_o(p,x) = \begin{pmatrix} x_2 + p\theta(x_1) \\ -\theta'(x_1)[x_2 + p\theta(x_1)] - \frac{1}{p}(\omega_1 x_1 + \omega_2[x_2 + p\theta(x_1)]) \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

et 0 est un point d'équilibre globalement assymptotiquement stable de cette équation différentielle ordinaire, qui n'est que la transformée de (1.36). V est définie par

$$V(p,x) = U(\varphi(p,x)) = \tfrac{1}{2}q_{11}x_1^2 + q_{12}x_1(x_2 + p\theta(x_1)) + \tfrac{1}{2}q_{22}(x_2 + p\theta(x_1))^2 \quad (1.42)$$

et l'on peut retrouver directement que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(p,x).s_o(p,x) = -\left(x_1^2 + (x_2 + p\theta(x_1))^2\right) \quad (1.43)$$

En conclusion, on vient de montrer qu'en prenant par exemple $\mathcal{P} = (0, +\infty)$, la famille $(\mathcal{S}_p)$ donnée par (1.28) satisfait la condition SF

Le difféomorphisme φ a évidemment été introduit pour linéariser le système, ce qui a permis, ensuite, de placer les pôles du système linéaire obtenu; notons de plus que, par l'action de ce difféomorphisme et du feedback (1.31), tous deux dépendants de p, on a transformé le système $\mathcal{S}_p$ en un système (1.33) indépendant de p. Voici deux bonnes raisons pour introduire ce difféomorphisme, qui ne joue pourtant aucun rôle dans la stabilité du système bouclé, puisque l'on peut écrire u_{ST}, s_o et V sans l'utiliser (voir (1.35), (1.41), (1.42) et (1.43)), et considérer φ seulement comme un "guide" pour construire une loi stabilisante.
∎

1.2.3 Equivalence par feedback et difféomorphisme

Il est bien clair et intuitif que plus les systèmes de la famille se "ressemblent", plus on a d'information sur le système à commander en sachant qu'il est dans cette famille, et plus on a de chances de pouvoir, dans de bonnes conditions, trouver notre loi de commande adaptative, valable pour tout système de la famille. Il est donc naturel d'étudier de façon privilégiée le cas où, par exemple, tous les systèmes de la famille sont équivalents, par feedback seulement, ou par feedback et difféomorphisme, ce qui justifie les définitions suivantes. Des conditions sur $f(p,x)$ et $g(p,x)$ pour qu'elles soient satisfaites seront données au chapitre 2.

Equivalence par feedback seulement

Un système non-linéaire affine en la commande

$$\mathcal{S} : \quad \dot{x} = f(x) + \sum_{k=1}^{m} u_k g_k(x) = f(x) + g(x).u \tag{1.44}$$

étant défini par la donnée de $m+1$ champs de vecteurs ou plutôt, de façon équivalente, par la donnée d'un champ de vecteurs (f), et d'une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans l'espace des champs de vecteurs (g), voir (1.5) page 10), on définit un *feedback d'état non-singulier* par la donnée de deux application

$$\begin{array}{rcl} \alpha & : & M^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \beta & : & M^n \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \end{array} \tag{1.45}$$

où $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ est le groupe linéaire de $\mathbb{R}^m$, ensemble des applications linéaires bijectives de $\mathbb{R}^m$ On définit le transformé $\mathcal{S}'$ par le feedback (α,β) de ce système $\mathcal{S}$ par la donnée du champ de vecteur f' et du champ d'applications linéaires g' de $\mathbb{R}^m$ dans l'espace des champs de vecteurs:

$$f'(x) = f(x) + g(x)\,\alpha(x) \tag{1.46}$$

$$g'(x) = g(x)\,\beta(x) \tag{1.47}$$

c'est-à-dire que le système

$$\mathcal{S}' : \quad \dot{x} = f'(x) + \sum_{k=1}^{m} v_k g'_k(x) = f'(x) + g(x)'.v \tag{1.48}$$

est obtenu en substituant

$$u = \alpha(x) + \beta(x).v \tag{1.49}$$

dans le système $\mathcal{S}$ donné par (1.44).

On dit que deux systèmes (f,g) et (f',g') sur M^n sont *équivalents par feedback non-singulier* si il existe un feedback non-singulier qui transforme (f,g) en (f',g'). En fait, on peut munir l'ensemble des feedback non-singuliers d'une structure de groupe, son action sur les systèmes sur M^n étant définie par ce qui précède. Cela est bien connu et parfaitement classique.

Pour nous, c'est-à-dire dans le cas d'une famille $(\mathcal{S}_p)$ de systèmes (définie page 9) on cherche à caractériser une propriété qui exige non seulement que tous les systèmes $\mathcal{S}_p$ soient équivalents par feedback deux à deux, mais aussi que l'équivalence puisse être réalisée par une famille de feedback dépendant continument des systèmes, ce que l'on précise dans la définition suivante:

Définition 1.4 (condition FE) *On dit que la famille de systèmes $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **FE** *(feedback-équivalence) si il existe un système $\breve{\mathcal{S}}$ (indépendant de p) sur M^n et un feedback dépendant de façon régulière du paramètre p, c'est-à-dire deux fonctions régulières*

$$\begin{array}{rcl} \alpha & : & \mathcal{P} \times M^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \beta & : & \mathcal{P} \times M^n \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m) \end{array} \tag{1.50}$$

telles que, pour tout p, le feedback $(\alpha(p,.),\beta(p,.))$ transforme le système $\mathcal{S}_p$ en le système $\breve{\mathcal{S}}$, ce qui s'écrit:

$$f(p,x) + g(p,x)\,\alpha(p,x) = \breve{f}(x) \tag{1.51}$$

$$g(p,x)\,\beta(p,x) = \breve{g}(x) \tag{1.52}$$

On peut alors prendre pour $\mathcal{S}$ un $\mathcal{S}_{p_o}$, p_o étant choisi dans $\mathcal{P}$.

Exemple 1.6 Soit une famille de systèmes monodimensionnels (dans $\mathbb{R}$) donnés par

$$\dot{x_1} = f(p,x_1) + u \tag{1.53}$$

Une telle famille satisfait clairement FE : en prenant

$$\begin{array}{rcl} \alpha(p,x_1) & = & -f(p,x_1) \\ \beta(p,x_1) & \equiv & 1 \ , \end{array} \tag{1.54}$$

c'est-à-dire

$$u = -f(p,x_1) + v \ ,$$

on transforme le système $\mathcal{S}_p$ en le système $\breve{\mathcal{S}}$ donné par

$$\breve{\mathcal{S}} \ : \quad \dot{x_1} = v$$

∎

Remarque 1.4 En fait, la condition FE demande l'équivalence de tous les systèmes à un système choisi indépendant de p, ce qui est équivalent à demander l'équivalence des systèmes deux à deux: si la condition FE est satisfaite, deux systèmes $\mathcal{S}_{p'}$ et $\mathcal{S}_{p''}$ de la famille sont équivalents par le feedback $(\alpha_{',''},\beta_{',''})$ donné par

$$\alpha_{',''}(x) = \alpha(p',x) - \beta(p',x)\beta(p'',x)^{-1}\alpha(p'',x) \tag{1.55}$$

$$\beta_{',''}(x) = \beta(p',x)\beta(p'',x)^{-1} \tag{1.56}$$

Ceci démontre la propriété contenue dans la dernière ligne de la définition 1.4.

Reprenant l'exemple précédent, on peut transformer tous les $\mathcal{S}_p$ en $\mathcal{S}_{p_o}$, p_o étant choisi quelconque dans l'espace des paramètres, en prenant, lieu de (1.54),

$$\begin{aligned} \alpha(p,x_1) &= -f(p,x_1) + f(p_o,x_1) \\ \beta(p,x_1) &\equiv 1 \ , \end{aligned}$$

et l'on peut tranformer $\mathcal{S}_{p'}$ en $\mathcal{S}_{p''}$ grâce à :

$$\begin{aligned} \alpha_{\prime,\prime\prime}(x) &= -f(p',x_1) + f(p'',x_1) \\ \beta(p,x_1) &\equiv 1 \end{aligned}$$

∎

Remarque 1.5 Supposons que la condition FE soit satisfaite et que l'un des systèmes de la famille, $\mathcal{S}_{p_o}$, soit stabilisable. On note $\overline{u}(x)$ la loi de commande stabilisante, alors

$$\dot{x} = \overline{s_o}(x) = f(p_o,x) + g(p_o,x)\overline{u}(x) \tag{1.57}$$

a 0 pour point d'équilibre assymptotiquement stable, si bien qu'il existe une fonction positive $\overline{V}(x)$ telle que (voir par exemple [62])

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}.\overline{s_o} \leq -c\,\overline{V} \tag{1.58}$$

Mais alors, utilisant α et β donnés par la condition FE, on peut définir pour un système $\mathcal{S}_p$ quelconque de la famille

$$u_{\mathrm{ST}}(p,x) = \alpha(p,x) + \beta(p,x).\overline{u}(x) \tag{1.59}$$

et l'on a

$$f(p,x) + g(p,x)u_{\mathrm{ST}}(p,x) = \overline{s_o}(x) \tag{1.60}$$

si bien que le système bouclé obtenu en appliquant le feedback $u_{\mathrm{ST}}(p,x)$ à $\mathcal{S}_p$ est

$$\dot{x} = \overline{s_o}(x)$$

En conclusion, pour que la condition SF soit satisfaite avec V et s_o indépendants de p, il suffit que l'un quelconque des systèmes soit stabilisable, et que FE soit vraie. A forciori, il suffit que SF et FE soient satisfaites. ∎

Equivalence par feedback et difféomorphisme

On définit le transformé $\mathcal{S}''$ d'un système $\mathcal{S}$ ((1.44)) par un difféomorphisme φ sur M^n par la donnée des champs f'' et g_k'', transportés de f et g_k par φ:

$$\begin{aligned} f'' &= \varphi_* f \\ g_k'' &= \varphi_* g_k \end{aligned} \tag{1.61}$$

(voir une définition des "étoiles en bas" dans [56] ou en annexe, page 139); le système $\mathcal{S}'$ s'écrit alors

$$\mathcal{S}' : \quad \dot{x} = f'(x) + \sum_{k=1}^{m} v_k g'_k(x) \triangleq f'(x) + g'(x).v \tag{1.62}$$

On est alors en mesure de définir les transformations par feedback (non singulier) et difféomorphisme (α, β, φ) en faisant d'abord une transformation par feedback (α, β) puis une transformation par difféomorphisme (φ) (ou le contraire, mais alors il faut remplacer α et β par $\alpha \circ \varphi^{-1}$ et $\beta \circ \varphi^{-1}$), c'est -à-dire que l'on définit la transformation (α, β, φ) par

$$(\alpha, \beta, \varphi) = (\varphi) \circ (\alpha, \beta) = (\alpha \circ \varphi^{-1}, \beta \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi) \tag{1.63}$$

A nouveau, on va définir, pour le cas d'une famille de systèmes $(\mathcal{S}_p)$ (définie page 9) une propriété qui exige non seulement que tous les systèmes $\mathcal{S}_p$ soient équivalents deux à deux par feedback et difféomorphisme, mais aussi que l'équivalence puisse être réalisée par une famille de feedback et de difféomorphismes dépendant continument des systèmes, ce que l'on précise dans la définition suivante:

Définition 1.5 (Condition FDE) *On dit que les systèmes $(\mathcal{S}_p)$ sont* **équivalents par feedback et difféomorphisme**, *ou que la famille des $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **FDE**, *si il existe un système $\breve{\mathcal{S}}$ sur M^n, ainsi qu'un feedback et un difféomorphisme dépendant régulièrement du paramètre p, soit*

$$\begin{array}{rcl} \alpha & : & \mathcal{P} \times M^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \beta & : & \mathcal{P} \times M^n \longrightarrow \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \\ \varphi & : & \mathcal{P} \times M^n \longrightarrow M^n \end{array} \tag{1.64}$$

tels que la transformation par feedback et difféomorphisme $(\alpha(p,.), \beta(p,.), \varphi(p,.))$ transforme, pour tout p, le système $\mathcal{S}_p$ en le système $\breve{\mathcal{S}}$, ce qui s'écrit:

$$\breve{f} = \varphi(p,.)_*[f(p,.) + g(p,.).\alpha(p,.)] \tag{1.65}$$

$$\breve{g} = \varphi(p,.)_* g(p,.).\beta(p,.) \tag{1.66}$$

On peut alors prendre pour $\breve{\mathcal{S}}$ un $\mathcal{S}_{p_o}$, p_o étant choisi dans $\mathcal{P}$.

(Condition FDE locale) *On dit que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait* **localement** *la condition* **FDE** *si, pour tout $\overline{x}$ dans M^n et tout $\overline{p}$ dans $\mathcal{P}$, il existe un voisinage V de $(\overline{p}, \overline{x})$ dans $M^n \times \mathcal{P}$, un feedback (α, β) défini pour (p, x) dans V, et une application φ de V dans $M^n \times \mathcal{P}$ telle que, pour tout p, $\varphi(p,.)$ soit un difféomorphisme de $\{p\} \times M^n$ dans $\varphi(V)$, et que (1.65) et (1.66) soient vérifiés pour tout (p, x) dans V*

Exemple 1.7 Considérons la famille de systèmes dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{S}_p : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + p\,x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \tag{1.67}$$

Elle satisfait la condition FDE car chacun de ces systèmes est globalement linéarisable par feedback et difféomorphisme : définissant φ par

$$\varphi(p, x_1, x_2, x_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{1.68}$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \\ \xi_2 &= x_2 + p\,x_1^2 \\ \xi_3 &= x_3 + 2px_1\,(x_2 + px_1^2) \end{aligned} \tag{1.69}$$

et le feedback par

$$\begin{aligned} \alpha(p,x) &= -2p\left[x_1x_3 + \left(x_2 + 3p\,x_1^2\right)\left(x_2 + px_1^2\right)\right] \\ \beta(p,x) &\equiv 1 \ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u = -2p\left[x_1x_3 + \left(x_2 + 3p\,x_1^2\right)\left(x_2 + px_1^2\right)\right] + v \ , \tag{1.70}$$

ce feedback et ce difféomorphisme transforment, pour tout p, le système $\mathcal{S}_p$ en $\breve{\mathcal{S}}$ donné par

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= v \ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\breve{f}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi \quad ; \quad \breve{g}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.71}$$

On peut noter que $\breve{\mathcal{S}}$ n'est autre que $\mathcal{S}_0$ ($\mathcal{S}_p$ pour $p = 0$). ∎

Remarque 1.6 La remarque 1.4 est également valable pour la condition FDE : FDE demande l'équivalence de tous les systèmes à un système choisi indépendant de p, ce qui est équivalent à demander l'équivalence des systèmes deux à deux: si la condition FDE est satisfaite, deux systèmes $\mathcal{S}_{p'}$ et $\mathcal{S}_{p''}$ de la famille sont équivalents par la transformation:

$$(\alpha(p'',.),\beta(p'',.),\varphi(p'',.))^{-1} \circ (\alpha(p',.),\beta(p',.),\varphi(p',.))$$

Ceci démontre la dernière ligne de la définition 1.5. ∎

Equivalence par feedback et difféomorphisme avec matching

Nous allons enfin definir une condition, que nous appelerons "équivalence par feedback et difféomorphisme avec matching" et qui demande la condition FDE plus la propriété assez restrictive (1.72) de "matching" sur les difféomorphismes $\varphi(p,.)$. Cette propriété peut paraître un peu anecdotique; elle sera en fait très importante pour la suite: elle permet, si elle est satisfaite, de compenser exactement les effets néfastes de l'adaptation.

Définition 1.6 (Condition FDEM) *On dit que les systèmes* $(\mathcal{S}_p)$ *sont* **équivalents par feedback et difféomorphisme avec "matching"**, *ou que la famille des* $(\mathcal{S}_p)$ *satisfait la condition* **FDEM**, *si la condition FDE est satisfaite, et que, de plus, les difféomorphismes* $\varphi(p,.)$ *vérifient la condition de "matching" suivante: pour tout p dans* $\mathcal{P}$ *et tout x dans* M^n, *on a:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}(p,x) \in \text{Span}\{ \breve{g}_1(\varphi(p,x)), ..., \breve{g}_m(\varphi(p,x)) \} \quad i = 1, ...l \tag{1.72}$$

où le système $\breve{S}$ *s'écrit :*

$$\dot{\xi} = \breve{f}(\xi) + \breve{g}(\xi).v = \breve{f}(\xi) + \sum_{k=1}^{m} v_k \breve{g}_k(x) \ , \tag{1.73}$$

(Condition FDEM locale) *On dit que la famille* $(\mathcal{S}_p)$ *satisfait* **localement** *la condition* **FDEM** *si et seulement si elle satisfait localement la condition* FDE, φ *étant de plus tel que la condition de "matching" (1.72) soit vérifiée.*

Exemple 1.8 Dans l'exemple 1.7, le difféomorphisme $\varphi(p,.)$ qui est donné ne satisfait pas la condition de matching (1.72) puisque

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \\ 2x_1(x_2 + 2px_1^2) \end{pmatrix} \quad ; \quad \breve{g}(\varphi(p,x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ceci ne prouve pas que la famille $(\mathcal{S}_p)$ donnée par (1.67) ne satisfasse pas la condition FDEM (il pourrait exister un *autre* difféomorphisme, qui vérifie, lui, la condition de matching (1.72)). On verra que la condition nécessaire donnée par la proposition 2.10 montre que cette famille ne satisfait pas FDEM.

En revanche, si l'on considère, au lieu de (1.67), la famille donnée par (1.28) dans l'exemple 1.5, le difféomorphisme φ donné par (1.29) et le feedback donné par (1.31), c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} \alpha(p,x) &= -2p\left[x_1x_3 + \left(x_2 + 3px_1^2\right)\left(x_2 + px_1^2\right)\right] \\ \beta(p,x) &\equiv 1 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(p,x) &= -\theta'(x_1)[x_2 + p\,\theta(x_1)] \\ \beta(p,x) &= \frac{1}{p} \ , \end{aligned}$$

transforment bien les systèmes en un système (1.33) indépendant de p, et de plus φ satisfait la condition de matching (1.72), puisque

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}(p,x) = = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta(x_1) \end{pmatrix} \quad ; \quad \breve{g}(\varphi(p,x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∎

Chapitre 2

Conditions d'équivalence par feedback d'état et/ou difféomorphisme des systèmes d'une famille

2.1 Introduction. Position du problème

A propos de la famille de systèmes $(\mathcal{S}_p)$, on se pose la question suivante :

> A quelles conditions, sur les champs f, g_k et sur leur dépendance en p est-ce que les différents systèmes $(\mathcal{S}_p)$ sont équivalents par feedback d'état et/ou difféomorphisme ?

Notons que l'on ne fait dans ce chapitre *aucune hypothèse de linéarité des champs par rapport au paramètre p*, mais que l'on supposera toujours l'**absence de chutes de rang de l'espace engendré par le champs de commande** :

Définition 2.1 (Condition RC (rang constant maximal)) *On dit que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition RC, si les vecteurs $g_1(p,x)$,... ,$g_m(p,x)$ sont libres en tout point :*

$$\text{rg}\ \{g_1(p,x),...,g_m(p,x)\} \quad = \quad m \qquad \forall (p,x) \ \in \ \mathcal{P} \times M^n \tag{2.1}$$

2.2 Equivalence par feedback (sans difféomorphisme)

On s'intéresse à trouver une caractérisation de la condion **FE** définie page 17 Ce qui suit est une condition nécessaire et suffisante (CNS) très simple pourvu que la distribution engendrée par les champs de commande soit de rang constant maximal. Elle demande, en gros, que toutes les incertitudes soient dans les directions sur lesquelles la commande influe directement :

Théorème 2.2 *Si g est de rang constant maximal (condition RC, définition 2.1), alors la condition FE (définition 1.4) est équivalente à:*

- $\text{Span}\{\ g_1(p,x),\ \dots\ ,\ g_m(p,x)\ \}$ *ne dépend pas de* p (2.2)
- $\dfrac{\partial f}{\partial p_i}(p,x)\ \in\ \text{Span}\{\ g_1(p,x),\ \dots\ ,\ g_m(p,x)\ \}\quad i=1,\dots,l$ (2.3)

Proposition 2.3 *Si g est de rang constant maximal (condition RC, définition 2.1), les deux propriétés suivantes sont équivalentes entre elles et équivalentes à (2.2) :*

$$\frac{\partial g_k}{\partial p_i}(p,x)\ \in\ \text{Span}\{\ g_1(p,x),\ \dots\ ,\ g_m(p,x)\ \}\quad \begin{matrix} i=1,\dots,l \\ k=1,\dots,m \end{matrix} \tag{2.4}$$

$$g_k(p',x)\ -\ g_k(p'',x)\ \in\ \text{Span}\{\ g_1(p',x),\ \dots\ ,\ g_m(p',x)\ \}\quad \begin{matrix} k=1,\dots,m \\ p',p''\ \in\ \mathcal{P} \end{matrix} \tag{2.5}$$

Démonstrations : données en annexe A, page 142 et suivantes. ▽▽▽

Remarque 2.1 Dans [59], *Taylor, Kokotovic, Marino et Kanellakopoulos* introduisent, pour une famille de systèmes paramétrée explicitement linéairement (notre condition PLE), et supposés tous linéarisables par feedback et difféomorphisme, l'hypothèse suivante, reprise dans [28] sous le nom de *(strict) matching assumption* :

$$\left.\begin{matrix} f_k(p',x)\ -\ f_k(p'',x)\ \in\ \text{Span}\{\ g_1(p_1,x),\ \dots\ ,\ g_m(p_1,x)\ \} \\ g_k(p',x)\ -\ g_k(p'',x)\ \in\ \text{Span}\{\ g_1(p_1,x),\ \dots\ ,\ g_m(p_1,x)\ \} \end{matrix}\right\}\quad \begin{matrix} k=1,\dots,m \\ p',p''\ \in\ \mathcal{P} \end{matrix}$$

Cette condition est équivalente à (2.2)-(2.3), dès que g est de rang constant maximal (ce qui est aussi supposé dans [59]), puisque la seconde condition n'est autre que (2.5), et qu'une fois établi que le *Span* de g ne dépend pas de p, il est évident que la première est équivalente à (2.3). Dans [59], les auteurs prouvent (proposition S) que ces hypothèses implique que l'on peut choisir le difféomorphisme linéarisant indépendant de p. Le système linéaire étant de plus indépendant de p (forme Companion), cela implique que la famille satisfait la condition FE (avant difféomorphisme, le système n'est pas linéaire, mais déja indépendant de p).

Cette proposition S de [59] démontre donc la condition suffisante du théorème 2.2 dans le cas de systèmes linéarisables linéairement paramétrés. Notre théorème en est une généralisation et apporte de plus la condition nécessaire. ∎

Exemple 2.1 On a montré, voir l'exemple 1.6, que les systèmes introduits en (1.53) satisfont la condition FE : il n'est pas difficile de vérifier qu'il satisfont également (2.2) et (2.3) puisque tout se passe dans $\mathbb{R}$ et que g ne s'annule jamais.

On peut utiliser la condition nécessaire de ce théorème pour montrer que les systèmes $\mathcal{S}_p$ introduits en (1.28), à l'exemple 1.5, ou en (1.67), à l'exemple 1.7, ne sont pas équivalents par feedback seulement, puisque $\frac{\partial f}{\partial p}$ n'est pas dans l'espace engendré par g. Les difféomorphismes sont donc nécessaires dans ces cas pour rendre les systèmes identiques. ∎

2.3 Equivalence par feedback et difféomorphisme

Nous allons donner une CNS abstraite d'équivalence par feedback et difféomorphisme. Afin de l'écrire commodément, nous allons utiliser la *variété produit* $\mathcal{P} \times M^n$, sur laquelle nous définissons les objets suivants:

Les champs G_k et F sur $\mathcal{P} \times M^n$, de composante nulle sur $T_p\mathcal{P}$ sont définis à partir des champs $g_k(p,.)$ et $f(p,.)$ sur M^n dépendants du paramètre p de la façon suivante[1] :

$$F(p,x) \triangleq (0 , f(p,x)) , \tag{2.6}$$

$$G_k(p,x) \triangleq (0 , g_k(p,x)) \tag{2.7}$$

La distribution $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{P} \times M^n$ est donnée par:

$$\mathcal{G} \triangleq \text{Span}\{ G_1 , ... , G_m \} \tag{2.8}$$

On définit par ailleurs, pour tout p, la distribution $\mathcal{G}^p$ sur M^n, donnée par :

$$\mathcal{G}^p \triangleq \text{Span}\{ g_1(p,.) , ... , g_m(p,.) \} , \tag{2.9}$$

si bien que l'on a pour tout (p,x),

$$\mathcal{G}(p,x) = \{0\} \times \mathcal{G}^p(x) \tag{2.10}$$

Les champs $\dfrac{\partial}{\partial p_i}$ pour $i = 1,...,l$ sont associés aux coordonnées naturelles $p_1,...,p_l$ sur $\mathcal{P}$:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}(p,x) \equiv (e_i , 0) \tag{2.11}$$

où $\{ e_1,...,e_l \}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^l$

Enfin, vu que l'on va s'interésser à des propriétés globales, une notion importante est celle de *champ de vecteur complet*, c'est à dire dont le flot n'a pas d'explosions en temps finis ou, en d'autres termes, est défini partout pour tout temps. Ici, pour des champs définis sur $\mathcal{P} \times M^n$, on définit la notion de champ dont le flot ne peut exploser que "par sa composante en p":

Définition 2.4 *On dit qu'un champ de vecteurs Y sur $\mathcal{P} \times M^n$ est* **x-complet** *si son flot*

$$(t,p,x) \longmapsto \phi_Y^t(p,x) = (\pi(t,p,x), \xi(t,p,x))$$

est tel que pour tout (p,x) et $t_i < 0 < t_f$ tels que $]t_i,t_f[$ soit l'intervalle maximal de définition (pour t) de $\phi_Y^t(p,x)$, soit t_i (resp. t_f) est égal à $-\infty$ (resp. $+\infty$), soit $\pi(t,p,x)$ a une limite quand t tend vers t_i (resp. t_f) et cette limite est sur la frontière de $\mathcal{P}$.

[1] On aurait pu dès le départ définir non pas des "champs de vecteurs dépendant d'un paramètres" mais des champs de vecteurs sur $\mathcal{P} \times M^n$, voir paragraphe 1.1.

Remarque 2.2 Si $\mathcal{P} = \mathbb{R}^l$, les notions de x-complet et de complet se confondent. ∎

La condition nécéssaire et suffisante annoncée est contenue dans le théorème suivant :

Théorème 2.5 *Si g est de rang constant maximal (condition RC, (2.1)),*

• *Une CNS pour que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfasse* **localement** *la condition* **FDE**, *c'est-à-dire pour que tous les $(\mathcal{S}_p)$ soient localement équivalents par feedback et difféomorphisme, est que pour tout $(\bar{p}, \bar{x})$, il existe un voisinage ouvert U de $(\bar{p}, \bar{x})$ dans $\mathcal{P} \times M^n$ et des champs $X_1, ..., X_l$ sur U tels que l'on ait, sur U,*

$$X_i(p,x) \in \{0\} \times T_x M^n \quad i = 1, ..., l \ , \ (p,x) \in UM^n \quad , \tag{2.12}$$

$$[\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i \ , \ \frac{\partial}{\partial p_j} + X_j \ ] = 0 \quad i,j = 1, ..., l \tag{2.13}$$

$$[\ F \ , \ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i \ ] \subset \mathcal{G} \quad i = 1, ..., l \tag{2.14}$$

$$[\ \mathcal{G} \ , \ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i \ ] \subset \mathcal{G} \quad i = 1, ..., l \tag{2.15}$$

On peut calculer le difféomorphisme qui ramène tous les systèmes de la famille à $\mathcal{S}_{\bar{p}}$ par

$$\begin{cases} L_{\frac{\partial}{\partial p_1} + X_1} \varphi(p,x) = 0 \\ \varphi(\bar{p}, x) = x \end{cases} \tag{2.16}$$

qui a une solution sur un voisinage de $(\bar{p}, \bar{x})$.

• *Une CNS pour que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfasse* **globalement** *la condition* **FDE** *est qu'il existe l champs de vecteurs $X_1, ..., X_l$ définis sur $\mathcal{P} \times M^n$ toute entière vérifiant les conditions (2.12) à (2.15) sur tout $\mathcal{P} \times M^n$, ainsi que :*

$$\text{les champs de vecteurs } \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i \ , i = 1, ..., l \ \text{ sont } x\text{−complets} \tag{2.17}$$

On peut alors calculer, pour tout $\bar{p}$ dans $\mathcal{P}$ le difféomorphisme qui ramène tous les systèmes de la famille à $\mathcal{S}_{\bar{p}}$ par (2.16), qui a une solution sur $\mathcal{P} \times M^n$.

Remarque 2.3 Si l'on définit la distribution $\mathcal{H}$ sur U (ou sur $\mathcal{P} \times M^n$) par

$$\mathcal{H} \triangleq \text{Span}\{ \frac{\partial}{\partial p_1} + X_1 \ , ..., \ \frac{\partial}{\partial p_l} + X_l \ \} \ , \tag{2.18}$$

la condition (2.13) est équivalente à l'involutivité de $\mathcal{H}$.

Démonstration de cette affirmation : Il est clair que (2.13) implique cette l'involutivité. Réciproquement, si $\mathcal{H}$ est involutive, alors pour tout i et j, le champ

$$[\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i \ , \ \frac{\partial}{\partial p_j} + X_j \ ]$$

est dans $\mathcal{H}$, mais de plus ce champ vaut

$$[\frac{\partial}{\partial p_i}, X_j] \; - \; [\frac{\partial}{\partial p_j}, X_i] \; + \; [X_i, X_j]$$

champ dont la composante sur $T\mathcal{P}$ est nulle (i.e. sa valeur en (p,x) est dans $\{0\} \times T_x M^n$), or les $\frac{\partial}{\partial p_i}$ étant linéairement indépendant, le seul champ dans $\mathcal{H}$ qui vérifie ceci est le champ nul. ∎

La **démonstation** est assez complexe et figure en annexe A, page 143. La première remarque à faire est cependant simple, et consiste à remarquer que l'on peut toujours faire le difféomorphisme en premier dans la transformation par feedback et difféomorphisme (voir formule (1.63)), si bien qu'après l'avoir fait, il ne reste plus qu'un feedback à faire pour se ramener à un système indépendant du paramètre, ce qui implique que la famille de systèmes transformés par difféomorphisme seulement satisfait la condition FE du paragraphe précédent (définition 1.4); la réciproque étant évidente, nous avons établi le lemme suivant, sur lequel se fonde la démonstration du théorème 2.5, et qui isole en quelque sorte la difficulté :

Lemme 2.6 *Si g est de rang constant maximal (condition RC, (2.1)), alors*

• *La famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **FDE** *si et seulement si il existe un diffeomorphisme dépendant du paramètre p, c'est-à-dire une application C^1, φ, de $\mathcal{P} \times M^n$ dans M^n telle que pour tout p, $\varphi(p,.)$ soit un difféomorphisme de M^n– transformant le système $\mathcal{S}_p$ en*[2]

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(p,x) \\ \dot{\xi} &= \tilde{f}(p,\xi) + \tilde{g}(p,\xi)\, u = \tilde{f}(p,\xi) + \sum_{k=1}^{m} u_k \tilde{g}_k(x) \quad , \end{aligned} \tag{2.20}$$

où $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ satisfont, pour tout (p,ξ) dans $\mathcal{P} \times M^n$ et $i = 1, ..., l$:

$$\frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial p_i}(p,\xi) \in \text{Span}\{ \tilde{g}_1(p,\xi), \ \dots \ , \ \tilde{g_m}(p,\xi) \} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_i}(p,\xi) \in \text{Span}\{ \tilde{g}_1(p,\xi), \ \dots \ , \ \tilde{g}_m(p,\xi) \} \tag{2.22}$$

• *La famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait* **localement** *la condition* **FDE** *si et seulement si un tel φ existe localement dans $\mathcal{P} \times M^n$ (voir la formulation précise dans la définition 1.5).*

[2] c'est-à-dire que les champs $\tilde{f}(p,.)$ et $\tilde{g}_k(p,.)$ sont donnés pour tout p par:

$$\tilde{f}(p,.) = \varphi(p,.)_* f(p,.) \quad ; \quad \tilde{g}_k(p,.) = \varphi(p,.)_* g_k(p,.) \tag{2.19}$$

2.4 Equivalence par feedback et difféomorphisme avec matching

2.4.1 Condition nécessaire et suffisante abstraite

On donne une CNS pour que les systèmes de la famille soient équivalents par feedback avec la propriété de matching (1.72) sur le difféomorphisme (condition FDEM, page 21). La différence entre FDE et FDEM est que l'on exige ici que le famille de difféomorphisme $\varphi(p,.)$ satisfasse la condition de matching (1.72) ; la différence entre la CNS donnée ici pour FDEM et celle donnée plus haut pour FDE est que l'on demande ici aux champs X_i soient dans $\mathcal{G}$, distribution de commande dans la variété produit $\mathcal{P} \times M^n$

Proposition 2.7 *Si g est de rang constant maximal (condition RC, (2.1)),*

• *Une CNS pour que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfasse* **localement** *la condition* **FDEM**, *c'est-à-dire pour que tous les $(\mathcal{S}_p)$ soient localement équivalents par feedback et difféomorphisme avec la condition de matching (1.72) sur le difféomorphisme, est que pour tout $(\bar{p},\bar{x})$, il existe un voisinage ouvert U de $(\bar{p},\bar{x})$ dans $\mathcal{P} \times M^n$ et des champs X_i sur U – tels que l'on ait, sur U,*

$$X_i \in \mathcal{G} \quad i=1,...,l \quad , \tag{2.23}$$

$$[\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i\ ,\ \frac{\partial}{\partial p_1} + X_j\ ] = 0 \quad i,j=1,...,l \tag{2.24}$$

$$[\ F\ ,\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i\ ] \in \mathcal{G} \quad i=1,...,l \tag{2.25}$$

$$[\ \mathcal{G}\ ,\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i\ ] \subset \mathcal{G} \quad i=1,...,l \tag{2.26}$$

On peut calculer le difféomorphisme qui ramène tous les systèmes de la famille à $\mathcal{S}_{\bar{p}}$ par

$$\begin{cases} L_{\frac{\partial}{\partial p_i}+X_i}\varphi\,(p,x) = 0 \\ \varphi(\bar{p},x) = x \end{cases} \tag{2.27}$$

qui a une solution sur un voisinage de $(\bar{p},\bar{x})$.

• *Une CNS pour que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfasse globalement la condition* **FDEM** *est qu'il existe l champs de vecteurs $X_1,...,X_l$ définis sur $\mathcal{P} \times M^n$ (de composante nulle sur $T_p\mathcal{P}$) tels que les conditions (2.23) à (2.26) soient satisfaites ainsi que:*

$$\textit{les champs de vecteurs } \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i\ , i=1,...,l \textit{ sont } x\textit{–complets} \tag{2.28}$$

On peut alors calculer, pour tout $\bar{p}$ dans $\mathcal{P}$ le difféomorphisme qui ramène tous les systèmes de la famille à $\mathcal{S}_{\bar{p}}$ par (2.27), qui a une solution sur $\mathcal{P} \times M^n$

Remarque 2.4 La remarque 2.3 est encore valable : la condition (2.25) est équivalente à l'involutivité de la distribution $\mathcal{H}$ définie par (2.18). ∎

La **démonstration** de cette proposition 2.7 est donnée en annexe. On va toutefois donner ici un lemme sur lequel elle se fonde, similaire au lemme 2.6 et tout aussi facile à démontrer. Il ne sera pas démontrer (voir page 26) :

Lemme 2.8 *Si g est de rang constant maximal (condition RC, (2.1)), alors la propriété* FDEM *est équivalente à l'existence de φ, application $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{P} \times M^n$ dans M^n telle que:*

(i) Pour tout p, $\varphi(p,.)$ est un difféomorphisme de M^n,

(ii) Pour tout (p,x) dans $\mathcal{P} \times M^n$ et $i = 1,...,l$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x)^{-1}.\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}(p,x) \quad \in \quad \text{Span} \ \{ \ g_1(p,x), \ \dots \ , \ g_m(p,x) \ \} \tag{2.29}$$

(iii) Le système (1.3) est équivalent à

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(p,x) \\ \dot{\xi} &= \tilde{f}(p,\xi) \ + \ \tilde{g}(p,\xi)\, u \end{aligned} \tag{2.30}$$

où $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ satisfont, pour $i = 1,...l$:

$$\frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial p_i}(p,\xi) \quad \in \quad \text{Span}\{ \ \tilde{g}_1(p,\xi), \ \dots \ , \ \tilde{g_m}(p,\xi) \ \} \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_i}(p,\xi) \quad \in \quad \text{Span}\{ \ \tilde{g}_1(p,\xi), \ \dots \ , \ \tilde{g}_m(p,\xi) \ \} \tag{2.32}$$

2.4.2 Conditions suffisantes explicites

On peut donner la condition suffisante suivante pour la propriété locale, explicite en les champs f et g_k, pour la condition locale :

Théorème 2.9 *Si g est de rang constant maximal (condition RC, (2.1)), une condition suffisante pour que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfasse* localement *la condition* FDEM *est :*

$$\mathcal{G}^p \ \ est \ \ une \ distribution \ involutive \ sur \ \ M^n \ \ pour \ tout \ p, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} \quad \in \quad \text{Span}\{ \ g_1,...,g_m \ , \ [f,g_1],...,[f,g_m] \ \} \qquad i = 1,...,l \tag{2.34}$$

$$\mathcal{G}^p \ \ est \ \ indépendant \ de \ p \tag{2.35}$$

et l'on a la proposition suivante, qui dit plus ou moins dans quelle mesure (2.34) et (2.35) sont nécessaires:

Proposition 2.10 *Si*

g est de rang constant maximal (condition RC, (2.1)),

la distribution $\mathcal{G}^p$ est involutive, pour tout p,

- *la famille satisfait localement la condition FDEM,*

alors f et g_k satisfont (2.33), (2.34) et (2.35).

Remarque 2.5 Si les systèmes sontéquivalents, cela revient au même de dire que $\mathcal{G}^p$ est involutive pour tout p ou pour au moins une valeur de p. ∎

On peut donner une condition plus explicite pour que la condition FDEM soit vraie globalement:

Théorème 2.11 *Si g est de rang constant maximal (condition RC, (2.1)), et si, en plus des conditions du théorème 2.9 , on a:*

$$\text{rang}\{\ g_1,...,g_m\ ,\ [f,g_1],...,[f,g_m]\ \} \quad = \quad 2m \quad , \tag{2.36}$$

alors il existe (globalement) une unique famille $(X_1,...,X_l)$ de champs de vecteurs sur $M^n \times \mathcal{P}$ vérifiant (2.23) et (2.25) :

$$\begin{aligned} X_i \ &\in \ \mathcal{G} \qquad i=1,...,l \quad , \\ [\ F\ ,\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i\ ] \ &\in \ \mathcal{G} \qquad i=1,...,l \end{aligned}$$

Ces champs vérifent alors aussi (2.24) et (2.26). Si de plus les champs $\frac{\partial}{\partial p_1}+X_1,...,\frac{\partial}{\partial p_l}+X_l$ ainsi obtenus sont x-complets, alors la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait globalement la condition FDEM, φ étant solution de :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L_{\frac{\partial}{\partial p_i}+X_i}\varphi\,(p,x) & = & 0 \\ \varphi(\bar{p},x) & = & x \quad , \end{array} \right. \tag{2.37}$$

$\bar{p}$ étant fixé, quelconque, dans $\mathcal{P}$.

Corollaire 2.12 *Si g est de rang constant maximal (condition RC, (2.1)), et si f et g_k vérifient les conditions du théorème 2.9, ainsi que (2.36), et que de surcroit M^n est compacte, alors la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition FDEM.*

Remarque 2.6 Dans le problème de la *linéarisation* globale par feedback et difféomorphisme (voir par exemple *Dayawansa, Boothby et Elliott* [15], ou *Boothby* [9]), on rencontre deux obstacles (pour obtenir une linéarisation globale) : l'un est de nature topologique, et vient en fait de ce que l'on veut construire un difféomorphisme de la variété sur laquelle vit le système vers $\mathbb{R}^n$; l'autre, de nature un peu différente, demande, comme ici, que certains champs soient complets afin que le difféomorphisme que l'on est en train de construire "n'explose pas", ce qui permet de le construire partout. Ici, le premier obstacle ne se présente pas car on ne cherche à construire de difféomorphisme que de M^n vers elle-même. ∎

Partie II

ESTIMATION

Chapitre 3

Préliminaires

3.1 L'équation d'observation

Nous aurons à commander l'un des systèmes de la famille $(\mathcal{S}_p)$. Appelons p^* une valeur du paramètre qui lui correspond; nous avons donc affaire au système $\mathcal{S}_{p^*}$. Cette valeur p^* est inconnue.

Si les hypothèses PLE ou PLI du chapitre 1 sont vérifiées, l'équation (1.10) du système est linéaire en p^*, et peut donc s'écrire à chaque instant sous la forme

$$z_{eq}(t) \quad = \quad Z_{eq}(t)\ p^* \tag{3.1}$$

Ceci est une *équation d'observation* linéaire du vecteur constant p^* On peut d'ailleurs obtenir d'autre équations de la même forme par des transformations sur (1.10) qui en préservent la linéarité par rapport à p^*. Ainsi l'objet de cette partie est l'estimation linéaire fondée sur une *équation d'observation* de cette forme.

La toute première difficulté pour exploiter une telle équation vient en fait de ce que $Z_{eq}(t)$ et $z_{eq}(t)$ font intervenir explicitement $\dot{x}$ qui n'est pas mesuré. Nous appeleons tout de même (3.1) équation d'observation, malgré l'impossobilité d'"observer" ses éléments.

Oubliant pour un moment cette difficulté, le chapître 4 étudie le problème général de l'estimation à partir d'une équation du type

$$z(t) \quad = \quad Z(t)\ p^* \tag{3.2}$$

où z est un vecteur de dimension n, et Z est une matrice $n \times q$, que l'on utilise tous les deux sans se préoccuper de la façon de la manière dont ils peuvent être obtenus. Notons toutefois que (3.2) est a priori disticte de (3.1) puisque Z_{eq} et z_{eq} ne sont pas utilisables ; on change de notation pour éviter toute confusion. Il est possible que l'équation (3.2) soit "bruitée", devenant alors

$$z(t) \quad = \quad Z(t)\ p^* \ + \ w(t) \tag{3.3}$$

où w est un vecteur de "bruit", de dimension n, que l'on ne mesure pas et sur lequel on va être amené à faire différentes hypothèses (borné, exponentiellement décroissant, petit en moyenne...); ce cas est étudié à la section 4.3, pour un bruit exponentiellement décroissant.

Le chapitre 5, lui, traite spécifiquement le cas où l'on dispose d'une équation d'observation de type (3.1) où z_{eq} et Z_{eq} ne sont pas mesurés; on y donne diverses manières d'utiliser des signaux transformés de z_{eq} et Z_{eq}, qu'il est plus raisonnable de supposer mesurés, ou calculables à partir de signaux mesurés; on étend ainsi les résultats du chapitre 4.

Notations

Pour toute la suite, nous allons définir les quantités suivantes: $\hat{p}$ étant une estimée du paramètre p^*, on définit l'*erreur d'équation* comme:

$$e \triangleq Z\hat{p} - z \tag{3.4}$$

ou, avec les signaux dits "bruts"

$$e_{eq} \triangleq Z_{eq}\hat{p} - z_{eq} \tag{3.5}$$

On note

$$\tilde{p} \triangleq \hat{p} - p^* \tag{3.6}$$

l'*erreur de paramètre*, et l'on a alors la relation suivante, en l'absence de bruit ((3.2) vérifiée):

$$e = Z\tilde{p} \tag{3.7}$$

ou, en présence d'un bruit ((3.3) vérifiée):

$$e = Z\tilde{p} - w \tag{3.8}$$

et, de même,

$$e_{eq} = Z_{eq}\tilde{p} \tag{3.9}$$

3.2 L'estimation à l'usage de la commande adaptative.

Nous dégageons ici les objectifs que l'on doit assigner à l'estimation en commande adaptative. Ils sont très sensiblement différents de ceux que l'on se fixe lorsque l'on veut identifier un système.

3.2.1 Estimation exacte

Ce paragraphe n'a d'autre but que de montrer ce qu'il ne faut pas faire, à savoir chercher à tout prix à "trouver" la valeur exacte de p^*

Supposons, pour nous mettre dans un cas idéal, que le bruit w soit nul et que z_{eq} et Z_{eq} soient mesurés. Il existe alors un vecteur de paramètres p^*, constant, tel qu'à tout instant, z_{eq} et Z_{eq} sont reliés par (3.1). Dans ces conditions, déterminer p^* d'après les mesures de z_{eq} et Z_{eq} est rien moins qu'enfantin: si l'on écrit (3.1) à un certain nombre d'instants $t_1, \ldots t_k$, on obtient un système de kn équations linéaires en les composantes de p^*, qui a forcément au moins une solution, puisque l'on suppose qu'il esiste p^* vérifiant (3.1) à tout instant. La proposition suivante donne une condition pour pouvoir résoudre ces équations; c'est une version rudimentaire de résultats généraux sur l'observabilité des systèmes linéaires non-stationnaires (voir par exemple *Kailath* [28] et la remarque 3.2).

Proposition 3.1 *$Z_{eq}(t)$ étant une matrice $n \times q$ fonction continue du temps et T_1 et T_2 des réels positifs ($T_1 < T_2$), les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) Il est possible de trouver des instants $t_1, \ldots t_k \in [T_1, T_2]$ tels que le système d'équations algébriques linéaires en les coordonnées de p^* obtenu en écrivant (3.1) pour ces valeurs de t ait une unique solution.

(ii) $\int_{T_1}^{T_2} {Z_{eq}}^\top Z_{eq}$ est inversible.

Démonstration : Si (i) est satisfait, alors les lignes de $Z_{eq}(t_1), \ldots, Z_{eq}(t_k)$ engendrent $\mathbb{R}^l$, si bien que

$$\sum_1^k {Z_{eq}}^\top(t_j) Z_{eq}(t_j)$$

est symétrique définie positive; comme Z_{eq} est une fonction continue du temps, on peut trouver k petits sous-intervalles disjoints de $[T_1, T_2]$, de longueur ε, notés I_j, tels que, pour t dans I_j, on ait ${Z_{eq}}^\top(t) Z_{eq}(t) > \frac{1}{2} {Z_{eq}}^\top(t_j) Z_{eq}(t_j)$, et alors, ${Z_{eq}}^\top Z_{eq}$ restant symétrique positive,

$$\int_{T_1}^{T_2} {Z_{eq}}^\top Z_{eq} \;\geq\; \int_{\cup_{j=1}^k I_j} {Z_{eq}}^\top Z_{eq} \;>\; \frac{1}{2} \sum_1^k {Z_{eq}}^\top(t_j) Z_{eq}(t_j)$$

est définie positive, donc inversible. Réciproquement, si cette intégrale n'est pas définie positive, les lignes des matrices $Z_{eq}(t)$ pour $t \in [T_1, T_2]$ n'engendrent pas $\mathbb{R}^l$, si bien qu'il est évidemment impossible d'en extraire un nombre fini dont les lignes engendrent $\mathbb{R}^l$ $\triangledown\triangledown\triangledown$

Remarque 3.1 La condition (i) est évidemment nécessaire pour que la donnée de Z_{eq} et z_{eq} pendant l'intervalle de temps $[T_1, T_2]$ puisse permettre de determiner p^*. La condition (ii), sous une forme en général plus forte est bien connue: par exemple, l'algorithme des moindres carrés converge si la plus petite valeur propre de $\int_0^t {Z_{eq}}^\top Z_{eq}$ tend vers l'infini quand t tend vers l'infini; la propriété de "balayage persistant" (persistant spanning), ou d'"excitation persistante" (persistant excitation) demande que pour un certain $\alpha > 0$, et un certain $T > 0$ ("période" de balayage persistant, ou d'excitation persistente), on ait:

$$\forall\, t > 0\ , \quad \int_t^{t+T} {Z_{eq}}^\top Z_{eq} \ > \ \alpha I$$

et il est encore une fois bien connu que cette propriété est nécessaire et suffisante pour que l'on puisse assigner une convergence exponentielle arbitrairement rapide à la plupart des algorithmes d'estimation connus (voir *Ikeda, Maeda et Kodama* [26]). ∎

Remarque 3.2 On peut également voir le problème de la détermination de p^* comme un problème d'observation de l'état p^* du système linéaire stationnaire

$$\dot{p^*} \ = \ 0$$

par la sortie non stationnaire

$$z_{eq} \ = \ Z_{eq}(t)p^*$$

(ii) apparait alors comme une condition necessaire d'observabilité , la quantité $\int Z^\top Z$ étant le *grammien d'observabilité* [27]. ∎

La condition (ii) est très difficille à vérifier directement vu que Z_{eq} est en général un signal produit par un système et fonction d'entrées et de conditions initiales. C'est là l'un des problèmes de l'identification: comment exciter le système pour pouvoir l'identifier dans de bonnes condition ? Sous certaines conditions, des propriétés d'"excitation suffisante", ou de "richesse suffisante" sur les entrées entrainent le balayage persistent (l'excitation persistante). Cependant ces conditions sont difficiles à vérifier, et, surtout, il est en général *impossible* qu'elles soient satisfaites sur *toutes* les trajectoires. Considérons par exemple le système suivant sur $\mathbb{R}$:

$$\dot{x} \ = \ p^* g_1(x) u \tag{3.10}$$

où p^* et g une fonction réelle de x, réel. (3.10) est sous la forme (3.1) avec

$$\begin{aligned} z \ &= \ \dot{x} \\ Z \ &= \ g_1(x)u \end{aligned} \tag{3.11}$$

Supposons alors que $x(0) = 0$. Une excellente commande si l'on veut réguler x à zéro, consiste alors à choisir $u \equiv 0$ (sur cette trajectoire). Dans ce cas, $x(t)$, $z_{eq}(t)$ et $Z_{eq}(t)$ sont nuls, ce qui viole clairement la condition (ii) et rend tout aussi clairement impossible l'identification de a^* et b^* le long de cette trajectoire.

L'idée intuitive que l'on a d'un bon algorithme d'estimation est qu'il doit fournir une estimée $\hat{p}$ qui converge, pour toute condition initiale, vers la vraie valeur p^*. Ceci implique clairement que la condition (i) doit être satisfaite (la seule information fournie à l'algorithme

d'estimation est la condition initiale et les mesures de z_{eq} et Z_{eq}, et la non-satisfaction de (i) implique que ces mesures ne contiennent pas assez d'information pour déterminer p^*). Vu que (i) est équivalente à (ii) et que l'on vient de voir que (ii) ne pouvait en général être satisfaite sur toute trajectoire, la convergence de $\hat{p}$ vers p^* ne pourra non plus, en général, être satisfaite sur toute trajectoire.

3.2.2 Objectifs de l'estimation en commande adaptative.

Il ressort de la section précédente que la convergence de l'estimée $\hat{p}$ vers la véritable valeur p^* du paramètre est soumise à des conditions *nécessaires* dont la satisfaction dépend de la trajectoire suivie. Il est donc absurde de fixer comme objectif à un estimateur d'assurer cette convergence, d'autant plus que rien ne l'exige, sinon peut-être notre "envie" de voir $\hat{p}$ converger, ce qui permettrait de donner à cette étude, et à la commande adaptative en général, une philosophie "synthèse observateur-contrôleur" Une fois éliminé cet objectif irréaliste, il reste à fixer les véritables objectis de l'estimation en commande adaptative. On verra (paragraphe 6.3.2) que si u_{ST} est celui défini par les hypothèses SF, paragraphe 1.2.2, alors le comportement de x dans le système bouclé

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_{p^*} \\ &u \;=\; u_{ST}(\hat{p}, x) \\ &\hat{p} \text{ calculé par une méthode quelconque} \quad , \end{aligned}$$

peut être analysé comme un comportement "nominal" répondant aux objectifs de commande fixés, perturbé par $e_{eq}(t)$ et $\dot{\hat{p}}(t)$. On aimerait donc demander à notre estimateur de faire en sorte que $e_{eq}(t)$ et $\dot{\hat{p}}(t)$ soient petits. De plus, il est nécessaire, pour d'évidentes raisons de calcul, que $\hat{p}(t)$ soit borné. On peut donc se fixer l'

$$\textbf{OBJECTIF IDEAL :} \quad \begin{cases} \hat{p} & \text{borné ,} \\ \dot{\hat{p}} & \text{"petit"} \\ e_{eq} & \text{"petit"} \end{cases} \tag{3.12}$$

Il s'avère en fait que l'on ne pourra satisfaire un objectif de ce type qu'avec des estimateurs utilisant explicitement Z_{eq} et z_{eq} (chapitre 4), les estimateurs plus réalistes du chapitre 5 ne fournissant que la "petitesse" de signaux transformés de e_{eq}. "Petitesse" signfiera en général existence d'une norme L^k finie pour un certain $k > 1$.

Chapitre 4

Algorithmes d'estimation avec information idéale.

Ce chapitre présente différents estimateurs conçus à partir d'une équation d'observation (3.2) [1]:

$$z(t) \quad = \quad Z(t)\ p^* \tag{4.1}$$

et utilisant directement la valeur de z et Z, et présente leurs principales propriétés. La section 4.1 présente la forme générale des estimateurs utilisés. La section 4.2 introduit une méthode pour contenir l'estimée dans une région donnée de l'espace des paramètres, les propriétés des estimateurs ainsi décrits étant données sous l'hypothèse que p^* satisfait l'équation exacte (4.1). La robustesse de ces propriétés à la présence d'un bruit dans l'équation d'observation est étudiée à la section 4.3. Enfin, à la section 4.4, on déduit de cette étude générale toute une famille d'algorithmes plus particuliers que l'on utilisera par la suite.

4.1 Algorithme "général", propriétés.

On se place donc dans le cas où l'on dispose d'une équation d'observation (4.1) et de la mesure de z, Z et donc de l'erreur d'équation e (voir (3.4)). On va tout d'abord étudier les propriétés des estimateurs tels que la mise à jour de $\hat{p}$ est donnée par:

$$\dot{\hat{p}} \quad = \quad -\ r\ P\ Z\ e \tag{4.2}$$

où r est un réel positif, en général une fonction statique ou dynamique de Z et z, P est une matrice carrée symétrique réelle dépendant de façon dynamique de Z et z (en général, $\dot{P}$ est une fonction de Z et z). La matrice P est en général définie positive; elle peut être constante, dans le cas des algorithmes que nous appelerons "de type gradient" Le gain r semble redondant — on pourrait noter P au lieu de rP — mais en général r et P seront

[1] (4.1) est une recopie de (3.2)

défini séparément et de manière assez différente, ce qui justifie de les différentier. Il se trouve que la plupart des algorithmes connus s'écrivent sous la forme (4.2).

Remarque 4.1 *Normalisation de l'équation d'observation*

Si on multiplie (3.3) à droite et à gauche par $\sqrt{r}$, on obtient

$$z_{\text{norm}}(t) = Z_{\text{norm}}(t)p^* + \sqrt{r(t)}w(t) \tag{4.3}$$

où les quantités "normalisées" Z_{norm} et z_{norm} sont définies par:

$$\begin{aligned} z_{\text{norm}} &= \sqrt{r}\, z \\ Z_{\text{norm}} &= \sqrt{r}\, Z \end{aligned} \tag{4.4}$$

$\dot{\hat{p}}$ donné par (4.2) peut alors s' écrire:

$$\dot{\hat{p}} = -PZ_{\text{norm}}^{\top} e_{\text{norm}} \tag{4.5}$$

avec

$$e_{\text{norm}} = \sqrt{r}e = Z_{\text{norm}}\hat{p} - z_{\text{norm}} \tag{4.6}$$

C'est à dire que la présence du gain r dans (4.2) traduit tout simplement une normalisation (par $\sqrt{r}$) de l'équation d'observation. ∎

Voyons tout d'abord des propriétés générales que l'on peut tirer de la forme (4.2), en l'absence de bruit:

Théorème 4.1 *Quelles que soient les lois de commande utilisées, dès que l'estimateur est de la forme (4.2) où la matrice P est symétrique et vérifie (au sens des formes quadratiques):*

$$\dot{P} \geq -k\, r\, PZ^{\top}ZP \qquad k < 2 \tag{4.7}$$

$$P > 0 \tag{4.8}$$

$$P \leq k_1 I \qquad k_1 > 0 \quad , \tag{4.9}$$

1/ on a les propriétés suivantes pourvu que Z et z soient définis sur l'intervalle $[0,T)$ (fermé à gauche et ouvert à droite):

- $r\,\|e\|^2 \in L^1(0,T)$ *, avec*

$$\int_0^T r\|e\|^2 \leq \frac{1}{2-k}\,(\hat{p}(0)-p^*)^{\top}P^{-1}(0)\,(\hat{p}(0)-p^*) \tag{4.10}$$

- *$\hat{p}$ est borné, et plus précisément,*

$$\|\hat{p}(t)-p^*\|^2 \leq \frac{1}{k_1}(\hat{p}(0)-p^*)^{\top}P^{-1}(0)\,(\hat{p}(0)-p^*) \tag{4.11}$$

2/ Si, de plus, la matrice P est décroissante avec

$$\dot{P} \leq -k_2\, r\, PZ^{\top}ZP \qquad k_2 > 0 \quad , \tag{4.12}$$

alors

$$\dot{\hat{p}} \in L^1(0,T) \tag{4.13}$$

avec

$$\int_0^T \|\dot{\hat{p}}\| \leq \sqrt{\frac{trP(0)}{k_2(2-k)}}\sqrt{\tilde{p}(0)^\top P^{-1}(0)\ \tilde{p}(0)} \tag{4.14}$$

Démonstration en annexe A, page 151. $\triangledown\triangledown\triangledown$

4.2 Estimation avec contrainte sur l'estimé, projection.

En commande adaptative, l'estimée $\hat{p}$ est utilisée à chaque instant pour calculer la commande. Au chapitre 1, nous avons vu qu'il est en général impossible de pouvoir commander les systèmes de la famille correspondant à toutes les valeurs possibles de p dans $\mathbb{R}^l$ Nous avons dû restreindre la validité de nos hypothèses, qui permettent de calculer la commande, à un domaine convexe fermé Π. Il est donc souhaitable de disposer de méthodes d'estimation qui maintiennent l'estimée dans la domaine Π.

4.2.1 Mise en oeuvre de la projection

Projection non-continue

La méthode décrite ici consiste à utiliser un algorithme de la forme (4.2) tant que $\hat{p}$ est à l'intérieur de Π et, lorsque $\hat{p}$ arrive sur la frontière, à projeter le $\dot{\hat{p}}$ issu de (4.2) sur une direction non sortante de Π parllèlement à une direction bien choisie. Précisons tout cela dans le cas régulier où la frontière de Π admet justement un hyperplan tangent en tout point: on définit $\pi_{\hat{p},P}$ comme étant l'identité si $\hat{p}$ est à l'intérieur de Π et la projection sur l'hyperplan tangent à la frontière de Π (notée $\partial\Pi$) parallèlement à Pn où n est le *vecteur normal unitaire sortant* à $\partial\Pi$ et P est le même que dans (4.2):

$$\pi_{\hat{p},P}(s) = \begin{cases} s & \text{si } \hat{p} \in \overset{o}{\Pi} \\ s & \text{si } \hat{p} \in \partial\Pi \text{ et } s^\top n(\hat{p}) \geq 0 \\ s - \frac{n(\hat{p})^\top s}{n(\hat{p})^\top P\ n(\hat{p})} Pn & \text{si } \hat{p} \in \partial\Pi \text{ et } s^\top n(\hat{p}) > 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

la mise à jour du paramètre est alors donnée par:

$$\dot{\hat{p}} = -r\ \pi_{\hat{p},P}\left(PZ^\top e\right) , \tag{4.16}$$

où le gain r est pris sous la forme suivante :

$$r = \rho(Z)\,\sigma(e) \tag{4.17}$$

Remarque 4.2 Dans le cas où la frontière de Π n'est pas régulière, ce qui est par exemple le cas si Π est donné par un certain nombre d'inégalités, on peut évidement choisir un domaine plus petit qui soit régulier. ∎

Cette modification soulève une question théorique: $\dot{\hat{p}}$ n'étant plus une fonction continue de l'état (au sens le plus large possible), a-t-on toujours **existence et unicité des solutions** du système bouclé obtenu en utilisant un contrôleur contenant de tels algorithmes d'estimation ? Ce n'est pas là seulement un "problème de math": si il n'y a plus existence et unicité des solutions des équations d'évolution d'un système, c'est qu'elles ne sont plus pertinentes pour décrire un comportement physique.

Exploitant la convexité de Π, on peut montrer toutefois l'existence et l'unicité des solutions, sous réserve que la seule non-continuité soit introduite par cette projection (et même que tous les autres termes soient Lipschitziens), grâce au théorème suivant, déduit du théorème 3.12 de [10], la dernière ligne étant une conséquence de la proposition 3.3 p.68 de ce même ouvrage.

Théorème 4.2 ([10]) *Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de $\mathbb{R}^N$, et $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ sa fonction indicatrice convexe donnée par :*

$$\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(X) \;=\; \begin{cases} 0 & si\ X \in \mathcal{C} \\ +\infty & si\ X \notin \mathcal{C} \end{cases}, \tag{4.18}$$

dont la sous-différentielle $\partial \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ vaut :

$$\partial \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(X) \;=\; \{\, v \in \mathbb{R}^q \;/\; \forall y \in \mathcal{C},\ (v|y-x) \leq 0 \,\} \tag{4.19}$$

Soit aussi f une fonction globalement lipschitzienne. Il existe alors, pour tout X_o dans $\mathcal{C}$, une unique fonction $X(t)$ absolument continue (donc dérivable presque partout) telle que

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) \;-\; f(X(t)) \;\in\; -\partial \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(X(t)) \\ X(0) \;=\; X_o \end{cases} \tag{4.20}$$

En outre, $X(t)$ est partout dérivable à droite, et sa dérivée à droite vaut $f(X(t))$ en tout point intérieur à $\mathcal{C}$, et, si la frontière de $\mathcal{C}$ est régulière, cette dérivée à droite en un point $X(t)$ sur la frontière est exactement $f(X(t))$ si celui-ci est rentrant, ou sa pojection orthogonale sur l'hyperplan tangent si il est sortant.

Supposons tout d'abord que $P \equiv I$. La propriété d'existence étant locale, on peut considérer que l'on est bien dans $\mathbb{R}^N$, avec $N = N_1 + l$, l'état complet du système bouclé étant $X = (X_1, \hat{p})$ où X_1, de dimension N_1, contient tous les états autres que $\hat{p}$, c'est-à-dire au moins x, voir (1.1). Pour la même raison, on peut supposer ici que les champs sont globalement lipschitziens. Le convexe $\mathcal{C}$ est alors

$$\mathcal{C} \;=\; \mathbb{R}^{N_1} \times \Pi \tag{4.21}$$

Si Π est régulier, $\partial \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(X)$, défini en (4.19), est
réduit à 0 si X est à l'intérieur de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire si $\hat{p}$ est à l'intérieur de Π, et
la demi-droite normale sortante à la frontière de $\mathcal{C}$, qui est en fait la demi-droite normale

sortante à la frontière de Π (composante nulle sur les X_1), si X est sur la frontière de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire si $\hat{p}$ est sur la frontière de Π.// L'équation multivoque (4.20) est alors exactement l'équation du système bouclé avec notre algorithme avec projection (si $P \equiv I$), sauf que l'on n'a pas fixé la coefficient de n dans (4.15), et que l'on autorise n'importe quel nombre positif là où (4.15) imposait la valeur

$$\frac{n(\hat{p})^\top s}{n(\hat{p})^\top\ n(\hat{p})}$$

Le théorème nous donne alors l'existence et l'unicité des solutions, et nous dit de plus que le seul choix possible pour assurer l'existence était, la où (4.20) est multivoque, celui donné par notre projection.

Ce raisonnement était valable pour P constant égal à l'identité. Si P est constant mais autre, on peut se ramener, par un simple changement de base sur l'espace des paramètres au cas où elle est égale à l'identité. Quand P varie, les choses sont un peu plus compliquées : on inclut P dans X_1, et l'on doit bâtir un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{N_1} \times \Pi$ qui ne change pas la frontière, mais qui change Pn en n. Si de plus des discontinuités apparaissent ailleurs que dans $\dot{\hat{p}}$, ce qui sera le cas quand on écrira un terme de commande dépendant justement de $\dot{\hat{p}}$, qui est discontinu, ces raisonnement tombent à l'eau (ce qui ne prouve absolument pas qu'il n'y ait pas existence et unicité des solutions !). C'est pour toutes ces raisons que nous allons régulariser notre projection de la manière suivante.

Projection continue

Pour éviter tous les problèmes évoqués ci-dessus, on peut remplacer la projection non-continue (4.15) par une projection régulière, que l'on commence à faire agir un peu avant d'arriver au bord de Π.

Pour préciser cela, on suppose que le convexe régulier Π est donné par

$$\Pi \quad = \quad \{\ p\ /\ \Theta(p) \leq 0\ \} \tag{4.22}$$

où Θ est une fonction régulière (par exemple $\mathcal{C}^2$) et que de plus tous les ensembles

$$\Pi_\lambda \ \stackrel{\Delta}{=}\ \{p\ /\ \Theta(p) \leq -\lambda\ \} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{4.23}$$

sont convexes (et d'intérieur non vide). On définit alors π non plus par (4.15) mais par

$$\pi_{\hat{p},P}(s) \quad = \quad \begin{cases} s & \text{si } \Theta(\hat{p}) \in (-\infty, -\varepsilon] \\ s & \text{si } \Theta(\hat{p}) \in [-\varepsilon, 0] \text{ et } s^\top n(\hat{p}) \geq 0 \\ s\ -\ (1+\Theta(\hat{p}))\frac{n(\hat{p})^\top s}{n(\hat{p})^\top P\ n(\hat{p})} Pn & \text{si } \Theta(\hat{p}) \in [-\varepsilon, 0] \text{ et } s^\top n(\hat{p}) \leq 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

où n est donné par

$$n \quad = \quad n(\hat{p}) \quad = \quad \frac{\partial \Theta}{\partial p}(\hat{p})\ , \tag{4.25}$$

c'est-à-dire que c'est un *vecteur normal sortant* à la frontière du Π_λ sur lequel $\hat{p}$ se trouve (cf. (4.23)).

Il n'est pas difficile alors de vérifier que $\pi_{\hat{p},P}(s)$ est une fonction localement lipschitzienne de P, $\hat{p}$ et s. Cela nous ôte tout souci quant à l'existence et à l'unicité des solutions du système bouclé.

Propriétés de l'algorithme avec projection

Pour s'affranchir des problèmes d'existence et d'unicité des solutions, nous choisissons maintenant la projection "continue" donnée par (4.24). Nous établissons ici les propriétés des estimateurs ainsi obtenus. Il n'est pas difficile de comprendre que ces estimateurs seront tels que $\hat{p}$ reste dans Π. La véritable propriété dans le théorème suivant est que l'on n'altère pas les propriétés trouvées pour les algorithmes sans projections, sous réserve que p^* soit strictement à l'intérieur de Π_1, c'est à dire du domaine où la projection n'agit pas. Ce résultat n'est en fait pas très surprenant, car la projection ne fait que rajouter à $\dot{\hat{p}}$ un terme qui fait diminuer la distance de $\hat{p}$ à p^* où que soit p^* strictement à l'intérieur de Π_1; c'est là d'ailleurs l'essentiel de la démonstration, sauf pour le point (4.34), qui est plus délicat.

Théorème 4.3 *Si l'on utilise l'estimateur (4.16)), où :*

- *la matrice P est symétrique et vérifie (au sens des formes quadratiques) :*

$$\dot{P} \geq -k\, r\, PZ^\top ZP \qquad k < 2 \tag{4.26}$$

$$P > 0 \tag{4.27}$$

$$P \leq k_1 I \qquad k_1 > 0 \quad , \tag{4.28}$$

- *le convexe Π satisfait (4.22)-(4.23) et la projection $\pi_{\hat{p},P}$ est donnée par (4.24),*
- *p^* est strictement à l'intérieur de Π_1 (voir (4.23),*

on obtient les propriétés suivantes[2], pourvu que Z et z soient définis sur l'intervalle $[0,T)$ (fermé à gauche et ouvert à droite) :

0/ Si $\hat{p}(0)$ est à l'intérieur de Π, $\hat{p}(t)$ reste à l'intérieur de Π:

$$\hat{p}(0) \in \Pi \implies [\ \hat{p}(t) \in \Pi \quad , t \in [0,T)\ ] \tag{4.29}$$

1/

- $r\,\|e\|^2 \in L^1(0,T)$, *avec*

$$\int_0^T r\|e\|^2 \leq \frac{1}{2-k}\,(\hat{p}(0)-p^*)^\top P^{-1}(0)\,(\hat{p}(0)-p^*) \tag{4.30}$$

- *$\hat{p}$ est borné, et plus précisément,*

$$\|\hat{p}(t)-p^*\|^2 \leq \frac{1}{k_1}(\hat{p}(0)-p^*)^\top P^{-1}(0)\,(\hat{p}(0)-p^*) \tag{4.31}$$

[2](4.26) et (4.28) ne sont pas nécessaires pour le point 0/

2/ Si, de plus, la matrice P est décroissante avec

$$\dot{P} \leq -k_2\, r\, PZ^\top ZP \qquad k_2 > 0 \tag{4.32}$$

alors

$$\dot{\hat{p}} \in L^1(0,T) \tag{4.33}$$

avec

$$\int_0^T \|\dot{\hat{p}}\| \leq \sqrt{\frac{trP(0)}{k_2(2-k)}}\sqrt{\tilde{p}(0)^\top P^{-1}(0)\,\tilde{p}(0)} + \frac{\|P(0)\|}{2D^*}\tilde{p}(0)^\top P^{-1}(0)\,\tilde{p}(0) \tag{4.34}$$

où

$$\mathrm{dist}\{\, p^*,\, \partial\Pi_\epsilon \,\} = D^* > 0 \tag{4.35}$$

Démonstration : en annexe A, page 153. ▽▽▽

Remarque 4.3 On utilisera dorénavant toujours l'algorithme avec projection, l'algorithme sans projection en étant un cas particulier($\Pi = \mathbb{R}^l$, la projection est toujours l'identité). ∎

4.3 Robustesse à un bruit exponentiellement décroissant

Nous n'étudierons ici que le cas de bruits exponentiellement décroissants. Il est immédiat d'étendre ces résultats à des bruits L^k, et pas très difficile de les étendre à des bruits petits en moyenne.

Le contexte exact est le suivant:

- p^* satisfait à chaque instant l'équation

$$z(t) = Z(t)\, p^* + w\ , \tag{4.36}$$

- z et Z sont disponibles pour l'estimation,
- Le bruit w est exponentiellement décroissant:

$$\|w(t)\| \leq k_w\, \|w(0)\|\, e^{-\frac{t}{\tau_w}} \tag{4.37}$$

On va, sous ces conditions, conclure à la robustesse des propriétés des algorithmes décrits aux sections 4.1 et 4.2 sous certaines conditions sur la "normalisation" r. Le théorème suivant précise en quoi les conclusions des théorèmes 4.1 ou 4.3 sont robustes à la présence du bruit w:

Théorème 4.4 *Si*

- *p^* satisfait à chaque instant l'équation (4.36), w satisfaisant l'inégalité (4.37),*
- *p^* est strictement à l'l'intérieur de Π_1 (voir (4.23)),*
- *le gain r est donné par :*

$$r = \rho(Z)\ \sigma(e) \tag{4.38}$$
$$\rho(Z) \leq 1 \tag{4.39}$$
$$\sigma(e) = \|e\|^{m_1-1} \quad , \ m_1 \geq 1 \tag{4.40}$$

alors, pourvu que Z et z soient définis sur l'intervalle $[0,T)$, l'estimateur avec projection (4.16)-(4.26)-(4.28)[3] vérifie :

0/ Si $\hat{p}(0)$ est à l'intérieur de Π, $\hat{p}(t)$ reste à l'intérieur de Π.

1/ $\hat{p}$ est borné et $r\ \|e\|^2 \in L^1(0,T)$. Plus précisément, il existe des constantes positives K_1 et K_2 ne dépendant que de k, k_w, τ_w et m_1, telles que

$$\int_0^T r\|e\|^2 \leq K_1\ (\hat{p}(0)-p^*)^\top P^{-1}(0)\ (\hat{p}(0)-p^*) + K_2\ \|w(0)\|^{m_1+1} \tag{4.41}$$
$$\|\hat{p}(t)-p^*\|^2 \leq \frac{1}{k_1}(\hat{p}(0)-p^*)^\top P^{-1}(0)\ (\hat{p}(0)-p^*) + K_2\ \|w(0)\|^{m_1+1} \tag{4.42}$$

2/ Si, de plus, la dérivée de la matrice P est bornée supérieurement par (4.32), on a

$$\dot{\hat{p}} \in L^1(0,T) \tag{4.43}$$

avec

$$\int_0^T \|\dot{\hat{p}}\| \leq \sqrt{\frac{trP(0)}{k_2(2-k)}}\ \sqrt{K_1(\hat{p}(0)-p^*)^\top P^{-1}(0)\ (\hat{p}(0)-p^*) + K_2\|w(0)\|^{m_1+1}} \tag{4.44}$$
$$+ \frac{\|P(0)\|}{2D^*}\tilde{p}(0)^\top P^{-1}(0)\ \tilde{p}(0) + K_2\ \|w(0)\|^{m_1+1}$$

où

$$D^* = \text{dist}\{\ p^*,\ \partial\Pi_1\ \} > 0 \tag{4.45}$$

4.4 Panorama d'algorithmes plus ou moins classiques

4.4.1 Les algorithmes de type gradient

On regroupe sous ce nom tous les agorithmes où la matrice définie positive P est constante. Ces algorithmes s'écrivent :

[3] On utilise dorénavant toujours l'algorithme avec projection (4.16)-(4.26)-(4.28), l'algorithme sans projection en étant un cas particulier, pour $\Pi = \mathbb{R}^l$ (alors la "projection π est partout l'identité).

$$\dot{\hat{p}} = -r\pi_{\hat{p},P}\left(PZ^\top e\right) \tag{4.46}$$

$$P \quad \text{constante définie positive} \tag{4.47}$$

où r est réel positif et $\pi_{\hat{p},P}$ est la projection définie en (4.24).

On peut immédiatement écrire :

Lemme 4.5 *Dès que $\hat{p}$ est donné par (4.46)-(4.47), et que p^* vérifie l'équation (3.2) pour tout temps, on a:*

$$\begin{aligned} re^2 &\in L^1[0,T) \\ (\hat{p}-p^*)^\top P(\hat{p}-p^*) &\text{ est décroissant (donc borné)} \\ \frac{1}{\sqrt{r\,(1+\|Z^\top Z\|)}}\dot{\hat{p}} &\in L^2[0,T) \end{aligned} \tag{4.48}$$

Démonstration : Conséquence immédiate du théorème 4.3, vu que, d'après (4.46), on a

$$\|\dot{\hat{p}}\| = (\rho\sigma)^2\,\|\pi_{\hat{p},P}\left(PZ^\top e\right)\|^2 \leq \frac{\lambda_{max}P}{\lambda_{min}P}(\rho\sigma)^2\|Z^\top Z\|\,\|e\|^2 \tag{4.49}$$

$\nabla\nabla\nabla$

Pour notre étude ultérieure, nous allons définir une famille $(\mathcal{G}_{m_1,m_2})$ d'algorithmes de type gradient en choisissant :

$$\begin{aligned} r &= \sigma(e)\rho(Z) \\ \sigma(e) &= \|e\|^{m_1-1} \\ \rho(Z) &= (1+\mathrm{tr}Z^\top Z)^{m_2/2} \end{aligned} \tag{4.50}$$

si bien que l'estimateur $\mathcal{G}_{m_1,m_2}$ s'écrit, avec projection :

$$\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}} \quad : \quad \dot{\hat{p}} = -\frac{\|e\|^{m_1-1}}{(1+\mathrm{tr}Z^\top Z)^{m_2/2}}\,\pi_{\hat{p},P}\left(PZ^\top e\right) \tag{4.51}$$

On a les résultats précis suivants

Lemme 4.6 *Si p^* est strictement à l'intérieur de Π_1 et vérifie l'équation exacte (3.2) pour tout temps, et si z et Z sont définis sur $[0,T)$, l'estimateur $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$ a les propriétés suivantes :*

$$\|\hat{p}-p^*\|^2 \text{ est décroissant (donc borné)} \tag{4.52}$$

$$\frac{1}{(1+\mathrm{tr}Z^\top Z)^{\frac{m_2}{2(m_1+1)}}}\,e \in L^{m_1+1}[0,T) \tag{4.53}$$

$$\frac{1}{(1+\mathrm{tr}Z^\top Z)^{\frac{1-m_2}{2}}}\,\dot{\hat{p}} \in L^{1+\frac{1}{m_1}}[0,T) \quad , \tag{4.54}$$

avec les bornes:

$$\int_0^t \frac{1}{(1+\mathrm{tr}Z^\top Z)^{\frac{m_2}{2}}} \|e\|^{m_1+1}(\tau)d\tau \;\leq\; \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \qquad (4.55)$$

$$\int_0^t (1+\mathrm{tr}Z^\top Z)^{\frac{m_2-1}{2}(1+\frac{1}{m_1})} \|\dot{\hat{p}}\|^{1+\frac{1}{m_1}}(\tau)d\tau \;\leq\; K\,\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \qquad (4.56)$$

où K est une constante dépendant uniquement de P.

Preuve du lemme 4.6 : Appliquant le théorème général 4.3 au cas:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\|e\|^{m_1-1}}{(1 + \mathrm{tr}Z^\top Z)^{m_2/2}} \\ P &= I \;\text{ (donc } k = 0), \end{aligned}$$

on obtient directement (4.52). De plus,

$$\frac{\|e\|^{m_1+1}}{(1 + \mathrm{tr}Z^\top Z)^{m_2/2}} \;\in\; L^1[0,T) \quad ,$$

d'où (4.53), et finalement (4.51) implique

$$\|\dot{\hat{p}}\| \;\leq\; K\frac{\|e\|^{m_1}}{(1 + \mathrm{tr}Z^\top Z)^{\frac{m_2-1}{2}}}$$

d'où (4.54). ▽▽▽

Lemme 4.7 *Si p^* vérifie maintenant l'équation bruitée (4.36) et est strictement à l'intérieur de Π_1, le bruit w étant borné par (4.37)*

$$\|w(t)\| \;\leq\; k_w\,\|w(0)\|\,e^{-\frac{t}{\tau_w}} \quad , \qquad (4.57)$$

l'estimateur $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$ (défini en (4.50)-(4.51)) vérifie toujours les points (4.52), (4.53) et (4.54) du lemme 4.6, les bormes étant seulement modifiées de la façon suivante:

Pour certains réels positifs $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ ne dépendant que de k_w, τ_w, m_1 *et* P, *dès que z et Z sont définis sur $[0,T)$,*

$$\|\hat{p}(t) - p^*\|^2 \;\leq\; \|\hat{p}(0) - p^*\|^2 + K_2\|w(0)\|^{m_1+1} \qquad (4.58)$$

$$\int_0^t \frac{1}{(1+\mathrm{tr}Z^\top Z)^{\frac{m_2}{2}}} \|e\|^{m_1+1}(\tau)d\tau \;\leq\; K_1\,\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 + K_2\|w(0)\|^{m_1+1} \qquad (4.59)$$

$$\int_0^t (1+\mathrm{tr}Z^\top Z)^{\frac{m_2-1}{2}(1+\frac{1}{m_1})} \|\dot{\hat{p}}\|^{1+\frac{1}{m_1}}(\tau)d\tau \;\leq\; K_1\,\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 + K_2\|w(0)\|^{m_1+1} \qquad (4.60)$$

Remarque 4.4 On peut également multiplier tout cela par un fonction de e et obtenir ainsi toute une variété d'algorithmes plus ou moins connus (zone morte...):

$$\dot{\hat{p}} \;=\; -\,\omega(e)\|e\|^{m_1-1}\,(1 + \mathrm{tr}Z^\top Z)^{m_2/2}\;\pi_{\hat{p},P}\left(PZ^\top e\right)$$

∎

4.4.2 Les algorithmes de type moindres carrés

L'algorithme original des moindres carrés est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} & = & - PZ^\top e \\ \dot{P} & = & - PZ^\top ZP \end{array} \right. , \tag{4.61}$$

ainsi nommé parce que, à tout instant, $\hat{p}(t)$ minimise le critère quadratique :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^t \|P\,(z(\tau) - Z(\tau))\|^2 d\tau + (p-\hat{p}(0))^\top P(0)^{-1}(p-\hat{p}(0))$$

Nous appelerons estimateurs de type moindres carrés tous les estimateurs de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} & = & - \rho(Z)\sigma(e)\; PZ^\top e \\ \dot{P} & = & - \rho(Z)\sigma(e)\; PZ^\top ZP \\ P(0) & > & 0 \end{array} \right. \tag{4.62}$$

Leurs propriétés se déduisent aisément des théorèmes des trois section précédentes.

Comme pour les estimateurs de type gradient, nous allons définir une famille $\left(\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}\right)$ d'estimateurs de type moindre carrés, en choisissant :

$$\begin{array}{rcl} r & = & \sigma(e)\rho(Z) \\ \sigma(e) & = & \|e\|^{m_1-1} \\ \rho(Z) & = & 1 \end{array} \tag{4.63}$$

si bien que l'estimateur $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$ s'écrit, avec projection :

$$\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}} \; : \; \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} & = & - \|e\|^{m_1-1}\; \pi_{\hat{p},P}\left(PZ^\top e \right) \\ \dot{P} & = & - \|e\|^{m_1-1}\; PZ^\top ZP \\ P(0) & = & I \end{array} \right. \tag{4.64}$$

On a le lemme suivant:

Lemme 4.8 *Si p^* est strictement à l'intérieur de Π_1 et si il vérifie l'équation exacte (3.2) pour tout temps, et si z et Z sont définis sur $[0,T)$, l'estimateur $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$ a les propriétés suivantes :*

$$P(t) \;\; \text{reste} \;\; \text{définie positive} \tag{4.65}$$

$$\hat{p} \;\; \textit{est} \;\; \textit{borné et reste dans} \;\; \Pi \tag{4.66}$$

$$e \;\; \in \;\; L^{m_1+1}[0,T) \tag{4.67}$$

$$\|\dot{\hat{p}}\| \;\; \in \;\; L^1[0,T) \quad , \tag{4.68}$$

Des bornes précises seront données sur les algorithmes plus réalistes du chapitre 5.

Preuve du lemme (4.8) : Le premier point est simple: P reste clairement symétrique, et pour tout t dans $[0,T)$, la matrice

$$P(0)^{-1} + \int_0^t \rho(Z)\sigma(e)Z^\top Z(\tau)d\tau$$

est bien définie, et il n'est pas difficile de vérifier que c'est l'inverse de $P(t)$, ce qui implique que $P(t)$ reste inversible, et donc positive car $P(0)$ l'est. Le reste est une conséquence immédiate du théorème général 4.3. ▽▽▽

Lemme 4.9 *Si p^* est strictement à l'intérieur de Π_1 et vérifie maintenant l'équation bruitée (4.36), le bruit w étant borné par (4.57), l'estimateur $\left(\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}\right)$ vérifie encore les propriétés du lemme 4.8 avec les bornes suivantes:*

Pour certains réels positifs $K_1' > 0$ et $K_2' > 0$ ne dépendant que de k_w, τ_w et m_1, *on a, dès que z et Z sont définis sur $[0,T)$,*

$$(\hat{p}(t) - p^*)^\top P^{-1}(0)(\hat{p}(t) - p^*) \leq \|\hat{p}(0) - p^*\|^2 + K_2\|w(0)\|^{m_1+1} \tag{4.69}$$

$$\int_0^t \|e\|^{m_1+1}(\tau)d\tau \leq K_1\,\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 + K_2\|w(0)\|^{m_1+1} \tag{4.70}$$

$$\int_0^t \|\dot{\hat{p}}\|(\tau)d\tau \leq (\sqrt{l} + \frac{1}{2D^*})\sqrt{K_1\,\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 + K_2\|w(0)\|^{m_1+1}} + \frac{m_1+1}{2D^*}\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \tag{4.71}$$

Preuve du lemme 4.9 : Le premier point se démontre comme pour le lemme 4.8, et le reste est une conséquence du théorème 4.4. ▽▽▽

Chapitre 5

Algorithmes d'estimation avec information réaliste.

5.1 Introduction

Il a jusqu'ici été supposé que l'on dispose de l'équation d'observation (3.2), éventuellement bruitée (3.3) au paragraphe 4.3, et des valeurs des z et Z qui y apparaissent. Comme évoqué p.33 au début de cette partie, il est rare qu'une telle équation avec z et Z mesurés soit donnée d'entrée par le problème.

On suppose ici qu'une équation du type (3.1):

$$z_{eq}(t) \quad = \quad Z_{eq}(t)\ p^* \tag{5.1}$$

est vérifiée par p^*, mais où z_{eq} et Z_{eq} ne sont pas mesurés. e_{eq} est défini (3.5) par

$$e_{eq} \quad \triangleq \quad Z_{eq}\hat{p} - z_{eq} \tag{5.2}$$

z_{eq} n'est pas non plus mesuré ou calculable à partir de grandeurs mesurées.

Evidemment, si ces grandeurs ne sont reliées à rien de connu, on a bien peu de chance de pouvoir faire quoi que ce soit. Dans le cas par exemple du système (1.10), que l'on peut réécrire sous la forme (5.1), le seul obstacle à la connaissance de z_{eq} et Z_{eq} est la présence de $\dot{x}$, x étant mesuré mais pas $\dot{x}$, on peut donc espérer avoir accès à des quantités qui soient en quelque sorte z_{eq} et Z_{eq} "intégrés" une fois; on dira dans ce cas la que l'on a des *information réalistes* sur z_{eq} et Z_{eq}.

On va ici définir précisement ce que l'on entend par disposer d'informations réalistes, puis donner des estimateurs permettant de les exploiter, étendant les résultats du chapitre précédent. La possibilité de disposer effectivement de telles "informations réalistes" sera étudiée plus loin lorsque l'on cherchera à mettre en oeuvre ces estimateurs.

Définition 5.1 *On dira que l'on dispose d'***informations réalistes** *sur z_{eq} et Z_{eq} (resp. sur e_{eq}) si il existe des quantité z et Z (resp. e) qui d'une part soient calculable(s) à partir de*

grandeurs mesurées, et d'autre part satisfasse une relation dynamique de type (5.3) (resp. (5.4)).

$$P(\tfrac{d}{dt})\begin{pmatrix} z \\ Z \end{pmatrix} = Q(\tfrac{d}{dt})\begin{pmatrix} z_{eq} \\ Z_{eq} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \Xi(\zeta) + e_{eq} \\ e &= \Upsilon(\zeta) \end{aligned} \tag{5.4}$$

où P et Q sont des des polynômes, $\frac{d}{dt}$ est la dérivation par rapport au temps, Ξ un champ de vecteurs et Υ une application.

Remarque 5.1 Une écriture de type (5.3) linéaire n'a de sens que dans $\mathbb{R}^n$; en revanche (5.4) peut avoir un sens sur une variété, Ξ étant un champ de vecteur. ∎

5.2 "Filtrage" de l'équation d'observation

Dans cette section, on développe une méthode valable dans le cas où l'on dispose d'informations réalistes sur z_{eq} et Z_{eq}, c'est-à-dire de z et Z vérifiant (5.3).

Il est alors facile de déduire de (5.1) l'équation "filtrée":

$$\begin{aligned} z(t) &= Z(t)\, p^* + w(t) \\ Q(\tfrac{d}{dt})\ w &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Si le polynôme Q est Hurwitz (parties réelles de ses racines strictement négatives), w est exponentiellement décroissant, et on peut considérer (5.5) comme une nouvelle équation d'observation, bruitée, qui relève de l'étude de la section 4.3. On a alors le résultat suivant,

Théorème 5.2 *Si*

- *il existe p^*, stricteent à l'intérieur de Π_1 (voir (4.23)) et satisfaisant (3.1) à tout instant,*
- *Z et z sont reliés à Z_{eq} et z_{eq} par (5.3), où $\dfrac{P}{Q}$ est une fonction de transfert (scalaire) stable et strictement propre,*
- *l'estimateur donnant $\hat{p}$ est du type (4.16),(4.26)-(4.28) avec*

$$r = \rho(Z)\,\sigma(e) \tag{5.6}$$

$$\rho(Z) \leq 1 \tag{5.7}$$

$$\sigma(e) = \|e\|^{m_1 - 1} \quad , \ m_1 \geq 1 \quad , \tag{5.8}$$

on a alors, quelles que soient les lois de commande utilisées, pourvu que la solution suivie soit définie sur l'intervalle $[0,T)$*:*

0/ Si $\hat{p}(0)$ *est à l'intérieur de* Π, $\hat{p}(t)$ *reste à l'intérieur de* Π.

1/ $\hat{p}$ *est borné et* $r\,\|e\|^2 \in L^1(0,T)$. *Plus précisément, il existe des constantes positives* K_1 *et* K_2 *telles que*

$$\int_0^T r\|e\|^2 \leq K_1\,(\hat{p}(0)-p^*)^\top P^{-1}(0)\,(\hat{p}(0)-p^*) + K_2\,\|w(0)\|^{m_1+1} \tag{5.9}$$

$$\|\hat{p}(t)-p^*\|^2 \leq \frac{1}{k_1}(\hat{p}(0)-p^*)^\top P^{-1}(0)\,(\hat{p}(0)-p^*) + K_2\,\|w(0)\|^{m_1+1} \tag{5.10}$$

2/ Si, de plus, la dérivée de la matrice P *est bornée supérieurement par (4.32), on a*

$$\dot{\hat{p}} \in L^1(0,T) \tag{5.11}$$

avec

$$\int_0^T \|\dot{\hat{p}}\| \leq \sqrt{\frac{trP(0)}{k_2(2-k)}}\,\sqrt{\tilde{p}(0)^\top P^{-1}(0)\,\tilde{p}(0)} + \frac{\|P(0)\|}{2D^*}\left(\tilde{p}(0)^\top P^{-1}(0)\,\tilde{p}(0) + K_2\,\|w(0)\|^{m_1+1}\right) \tag{5.12}$$

où

$$\text{dist}\{\,p^*,\,\partial\Pi\,\} = D^* > 0 \tag{5.13}$$

5.3 "Filtrage" de l'erreur d'équation.

Au paragraphe précédent, on a donné des estimateurs ne nécessitant ni Z_{eq} ni z_{eq} explicitement mais seulement des "informations réalistes" sur ces grandeurs. Dans le cas où Z_{eq} est mesuré, et où l'on dispose d'informations réalistes sur e_{eq} (où sur z_{eq}, ce qui revient au même), on va développer ici des estimateurs utilisant la valeur exacte de Z_{eq} mais une valeur "filtrée" de e_{eq} (5.4). Voyons rapidement le fil directeur de la construction de ces estimateurs, afin de motiver l'étude qui suit.

Reconsidérons l'estimateur (4.16),(4.26)-(4.28), appliqué à l'équation exacte. La mise à jour de $\hat{p}$ donnée par (4.16) :

$$\dot{\hat{p}} = -\,r\,\pi_{\hat{p},P}\left(\,PZ_{eq}^\top e_{eq}\,\right) \tag{5.14}$$

utilise la valeur de e_{eq} supposée non exploitable. On a envie, tout simplement d'utiliser autre chose à la place de e_{eq}, c'est à dire de définir l'estimateur par:

$$\dot{\hat{p}} = \pi_{\hat{p},P}\left(\,PZ_{eq}^\top \eta\,\right) \tag{5.15}$$

où η doit à la fois être calculable à partir de grandeurs mesurées et être tel que l'estimateur ainsi fait ait de bonnes propriétés.

Suivant une idée introduite par *Landau* [31], on décompose alors l'estimateur idéal (5.14) en deux parties formant un système en boucle fermée. Le système en action, qui est en quelque sorte le cœur de l'estimateur, et que l'on appelera *proto-estimateur* est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} & = & \sqrt{r}\, \pi_{\hat{p},P}\left(P Z_{eq}^{\top} \eta \right) \\ y & = & \sqrt{r} Z_{eq}(\hat{p} - p^*) \quad , \end{array} \right. \tag{5.16}$$

"bloc" d'entée η et de sortie y; le système en contre réaction est simplement un gain statique :

$$\eta = -y \tag{5.17}$$

C'est le fait d'imposer cette égalité qui rend l'estimateur "irréaliste" puisque η intervient dans la mise à jour de $\hat{p}$ et y demande e_{eq} (ou z_{eq}). Toute l'idée est de remplacer ce feedback par un système entrée sortie comme (5.4) entre y et η (y n'est autre que $\sqrt{r} e_{eq}$) tel que d'une part η soit une quantité calculable à partir de grandeurs mesurées (cf. définition 5.1)[1], et d'autre part l'estimateur ainsi obtenu conserve des propriétés similaires à celles de l'estimateur "idéaliste" (5.14).

Pour guider notre choix, étudions tout d'abord le "proto-estimateur" (5.16) à l'aide de la théorie de la passivité.

5.3.1 Théorie des systèmes passifs

Nous n'introduisons ici que des choses tout à fait élémentaires, qui serviront avant tout à guider notre intuition. Les définitions que nous donnons de la "passivité" n'engagent que nous; elles diffèrent plus ou moins de celles que l'on peut trouver dans la littérature, qui sont d'ailleurs elles-même plus ou moins différentes les unes des autres. Voir par exemple les ouvrages [46], [31], [18].

Définition des systèmes passifs

On va définir ici les notions de système passif et strictement passif:

Définition 5.3 *On dit que le système:*

$$(\Sigma_1) \quad \begin{array}{rcl} \dot{x_1} & = & f_1(x_1, u_1) \\ y_1 & = & h_1(x_1, u_1) \end{array} \tag{5.18}$$

est **passif** *relativement à la fonction $\mathcal{V}_1$ si et seulement si $\mathcal{V}_1$ est une fonction positive de l'état et si pour tout u, x, y solutions du système et pour deux instants quelconques t_1 et t_2 (avec $t_1 < t_2$), on a:*

[1] Dans le cas qui nous interesse, et où l'obstacle pour calculer e_{eq} est la présence de $\dot{x}$, non mesuré, on va en fait chercher un système en contre réaction strictement causal au lieu de la transmission directe de η à y

$$\int_{t_1}^{t_2} u_1(\tau)^\top y_1(\tau) d\tau \quad \geq \quad \mathcal{V}_1(x_1(t_1)) \; - \; \mathcal{V}_1(x_1(t_2)) \tag{5.19}$$

Définition 5.4 *On dit que le système:*

$$(\Sigma_2) \quad \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & f_2(u_2, x_2) \\ y_2 & = & h_2(x_2) \end{array} \tag{5.20}$$

est **strictement passif** *relativement aux fonctions $\mathcal{V}_2(x)$ et $\mathcal{W}_2(x,u)$ si et seulement si $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{W}_2$ sont des fonctions positives de l'état et si pour tout u, x, y solutions du système, il existe une constante positive d_2 telle que, pour deux instants quelconques t_1 et t_2 (avec $t_1 < t_2$), on ait:*

$$\int_{t_1}^{t_2} u_2(\tau)^\top y_2(\tau) d\tau \quad \geq \quad \mathcal{V}_2(x_2(t_1)) \; - \; \mathcal{V}_2(x_2(t_2)) \; + \; d_2 \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{W}_2(x(\tau), u(\tau)) \; d\tau \tag{5.21}$$

Exemples de systèmes passifs

Exemple 5.1 Le système

$$y \quad = \quad ku \quad , k > 0 \tag{5.22}$$

d'entrée u et de sortie y (état x de dimension 0) est strictement passif relativement à

$$\mathcal{V}_2(x) \; = \; 0 \qquad \mathcal{W}_2(x,u) \; = \; \|u\|^2$$

∎

Exemple 5.2 Soit un système dynamique (sans entrée)

$$\dot{X} \quad = \quad F(X) \tag{5.23}$$

tel qu'il existe une fonction positive $\mathcal{U}(X)$ vérifiant pour tout X

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X).F(X) \quad \leq \quad -a \; \mathcal{U}(X) \tag{5.24}$$

pour un certain a strictement positif. Ce système peut avoir l'origine pour point d'équilibre globalement assymptotiquement stable si $\mathcal{U}$ est une fonction "définie positive" de X, mais il est possible que cela ne soit pas vérifié, si par exemple $\mathcal{U}$ ne porte que sur une partie de l'état X (voir application page 116). On définit alors le sytème entrée-sortie

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X} & = & F(X) \; + \; u \\ y & = & \nabla \mathcal{U}(X) \end{array} \right. \tag{5.25}$$

où

$$\nabla \mathcal{U} \quad = \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}^\top \tag{5.26}$$

Il est naturellement strictement passif relativement à la fonction positive $\mathcal{U}(X)$ (ou pour reprendre les notations de la définition 5.4, relativement aux fonctions positives $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ et $\mathcal{W} = \mathcal{U}$), puisque

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} y^\top u &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X).\dot{X} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X).F(X) \\ &\geq \mathcal{U}(t_2) - \mathcal{U}(t_1) + a\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U}(X) \end{aligned} \tag{5.27}$$

∎

Exemple 5.3 On peut reprendre l'exemple précédent, mais en supposant que $\mathcal{U}$ ne décroît que dans certaines directions. Précisément, si

$$X = (X_1, X_2),$$

on peut écrire (5.23) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_1 &=& F_1(X_1, X_2) = F_1(X) \\ \dot{X}_2 &=& F_2(X_1, X_2) = F_2(X) \end{array} \right. \tag{5.28}$$

et $\mathcal{U}$ ne satisfait pas (5.24) mais seulement

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X_2}(X).F_2(X) \leq -a\,\mathcal{U}(X) \tag{5.29}$$

et l'on considère le système entrée-sortie

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_1 &=& F_1(X) \\ \dot{X}_2 &=& F_2(X) + u \\ y &=& \nabla_{X_2}\mathcal{U}(X) \end{array} \right. \tag{5.30}$$

où ∇_{X_2} désigne le gradient partiel par rapport à X_2 :

$$\nabla_{X_2}\mathcal{U}(X) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X_2}(X)^\top \tag{5.31}$$

Alors,
Si $\mathcal{U}$ ne dépend pas de X_1, le système (5.30) est strictement passif *quel que soit* F_1 relativement aux fonctions positives $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ et $\mathcal{W} = \mathcal{U}$), comme dans le cas précédent; les calculs (5.27) étant toujours valables puisque $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}$ est identiquement nul.
Si $\mathcal{U}$ dépend de X_1, (5.27) devient

$$\int_{t_1}^{t_2} y^\top u \geq \mathcal{U}(t_2) - \mathcal{U}(t_1) + a\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{U}(X) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X_1}(X).F_1(X), \tag{5.32}$$

si bien que l'on ne peut assurer la passivité que si

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X_1}.F_1 \leq a\mathcal{U}$$

et la stricte passivité si pour un c strictement positif et pour tout X

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X_1}.F_1 \leq (a-c)\,\mathcal{U} \tag{5.33}$$

∎

Propriété des systèmes passifs

La propriété essentielle des opérateur présentant des caractéristiques de positivité concerne la "stabilité" des systèmes bouclés de la forme présentée à la figure 5.1:

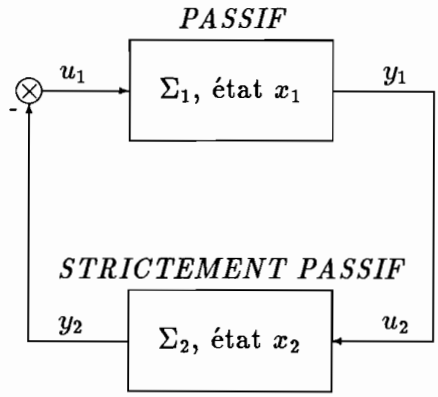


Fig. 5.1 : *Shéma-bloc du système du théorème* 5.5

Plus précisément, on peut énoncer le résultat suivant:

Théorème 5.5 *On suppose que les systèmes* (Σ_1) *et* (Σ_2)*, donnés par (5.18) et (5.20), sont respectivement strictement passifs et passifs relativement aux fonctions positives* $\mathcal{V}_1$ *et* $\mathcal{V}_2$*.*

Alors, si (u_1, y_1, x_1) *et* (u_2, y_2, x_2) *sont des solutions de* (Σ_1) *et* (Σ_2) *définies sur l'intervalle de temps* $[0, T)$ *et vérifiant*

$$\begin{aligned} u_2 &= y_1 \\ u_1 &= -y_2 \quad , \end{aligned} \tag{5.34}$$

elles vérifient aussi:

$$\int_0^T \mathcal{V}_1\left(x_1(\tau)\right) d\tau \;<\; +\infty \tag{5.35}$$

$$\mathcal{V}_1\left(x_1(t)\right) \text{ et } \mathcal{V}_2\left(x_2(t)\right) \text{ sont bornés} \tag{5.36}$$

Plus précisément, on a la majoration suivante, pour tout t *dans l'intervalle* $[0, T)$ *:*

$$\mathcal{V}_1(x_1(t)) \;+\; \mathcal{V}_2(x_2(t)) \;+\; d_2 \int_0^t \mathcal{W}_2(x_2(\tau), u_2(\tau))\, d\tau \;\leq\; \mathcal{V}_1(x_1(0)) \;+\; \mathcal{V}_2(x_2(0)) \tag{5.37}$$

Si de plus les fonctions $\mathcal{V}_1$ *et* $\mathcal{V}_2$ *sont propres (i.e. l'image réciproque d'un compact est compacte), alors les états sont bornés sur* $[0, T)$*.*

Démonstration du théorème 5.5 : Un simple calcul donne (5.37), d'où tout découle. $\triangledown\triangledown\triangledown$

5.3.2 Les estimateurs "idéaux" vus comme des systèmes passifs

Considérons à nouveau les estimateurs introduits aux sections 4.1 et 4.2, mais vus comme formés de deux blocs en boucle fermée, et précisons ce qui a été dit en introduction de cette section, page 52. Définissons le "proto-estimateur", système d'entrée η et de sortie y:

$$\Sigma \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\hat{p}} & = & \sqrt{\rho(Z_{eq})\sigma(\eta)}\ \pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}\eta \right) \\ P & \textit{fonction dynamique de} & Z_{eq},\ \eta \\ y & = & \sqrt{r}e \ = \ \sqrt{\rho(Z_{eq})\sigma(\eta)}Z_{eq}(\hat{p}-p^*)\ , \end{array} \right. \tag{5.38}$$

qui donne, si l'on prend $y = -\eta$, l'estimateur avec projection (4.16),(4.26)-(4.28) appliqué à l'equation d'observation exacte, c'est à dire:

$$\dot{\hat{p}} \ = \ -\,r\,\pi\left(PZ_{eq}^{\top}e_{eq} \right) \quad ; \tag{5.39}$$

On peut donc représenter l'estimateur avec projection (4.16),(4.26)-(4.28) par le schema-bloc suivant:

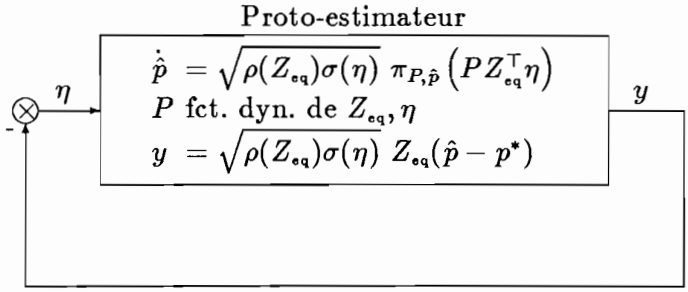


Fig. 5.2 : *une façon de voir l'estimateur "idéal"* (5.39) (ou (4.16)).

Vu le théorème 5.5, et vu que le gain unité mis en rétroaction est évidemment strictement passif (cf. exemple page 54), la positivité du "proto-estimateur" permettrait de retrouver les propriétés établies à la section 4; de plus, si ce "proto-estimateur" est effectivement passif, on pourra remplacer le gain unité en rétroaction par n'importe quel système strictement passif et conserver des propriètès similaires; c'est là le but de la présente étude.

Cas des proto-estimateurs de type gradient

On considère donc ici le système entrée-sortie ((5.38) avec P constant):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\hat{p}} & = & \sqrt{\rho(Z_{eq})\sigma(\eta)}\ \pi_{\hat{p},P}\left(PZ_{eq}^{\top}\eta \right) \\ y & = & \sqrt{\rho(Z_{eq})\sigma(\eta)}Z_{eq}(\hat{p}-p^*) \end{array} \right. \tag{5.40}$$

Il est très facile de vérifier que

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} y^{\top}\eta & = & \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho\sigma}\ (\hat{p}-p^*)^{\top}\ Z_{eq}^{\top}\eta \\ & \geq & \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} (\hat{p}-p^*)^{\top}\ P^{-1}\dot{\hat{p}} \\ & = & \frac{1}{2}\|\hat{p}(t_2)-p^*\|_{P^{-1}}^2 \ - \ \frac{1}{2}\|\hat{p}(t_1)-p^*\|_{P^{-1}}^2 \end{array}$$

Ceci est traduit par la proposition suivante :

Proposition 5.6 *Le proto-estimateur de type gradient (5.40) est un sytème entrée-sortie passif relativement à la fonction positive*

$$\mathcal{V}_{\text{grad}} \;=\; \tfrac{1}{2}\|\hat{p}-p^*\|^2_{P^{-1}} \;=\; (\hat{p}-p^*)^\top P^{-1}(\hat{p}-p^*) \tag{5.41}$$

Cas de l'algorithme général:

Dans le cas de l'algorithme plus général (5.38), où P est présent, le calcul précédent devient, si $\dot{P}$ satisfait l'inégalité (5.42):

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} y^\top \eta \;&\geq\; \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho\sigma}\,(\hat{p}-p^*)^\top\, P^{-1}\dot{\hat{p}} \\
&=\; \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(t_2)-p^*\|^2_{P^{-1}} \;-\; \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(t_1)-p^*\|^2_{P^{-1}} \;-\; \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(\hat{p}-p^*)^\top\, \dot{P^{-1}}(\hat{p}-p^*) \\
&\geq\; \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(t_2)-p^*\|^2_{P^{-1}} \;-\; \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(t_1)-p^*\|^2_{P^{-1}} \;-\; \frac{k}{2}\int_{t_1}^{t_2}\|y\|^2 \;,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que:

Proposition 5.7 *Si $P(t)$ vérifie l'hypothèse du théorème 4.1, que l'on rapelle:*

$$\dot{P} \;\geq\; -k\; r\; PZ^\top ZP \qquad k<2 \tag{5.42}$$

$$P \;>\; 0\;, \tag{5.43}$$

$$P \;\leq\; k_1 I \qquad\qquad k_1>0 \quad, \tag{5.44}$$

alors le système

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dot{\hat{p}} &=& -\sqrt{\rho(Z_{eq})\sigma(\eta)}\;\pi_{P,\hat{p}}\Big(\; PZ^\top_{eq}(\eta \;+\; \tfrac{k}{2}Z_{eq}(\hat{p}-p^*))\;\Big) \\
P &\quad fonction\ dynamique\ de & Z_{eq},\ \eta \\
y &=& \sqrt{\rho(Z_{eq})\sigma(\eta)}\;Z_{eq}\;(p^*-\hat{p}) \quad,
\end{array}\right. \tag{5.45}$$

obtenu en placant le gain positif $\dfrac{k}{2}$ en rétroaction (négative) sur (5.38) est passif relativement à la fonction:

$$\mathcal{V}_{gen}(\hat{p},P) \;=\; \tfrac{1}{2}\;(\hat{p}-p^*)^\top\; P^{-1}\;(\hat{p}-p^*) \tag{5.46}$$

Remarque 5.2 Cette propriété est clairement moins forte que le fait d'être passif. ∎

La propriété 5.7 peut être traduite par le schéma-bloc suivant:

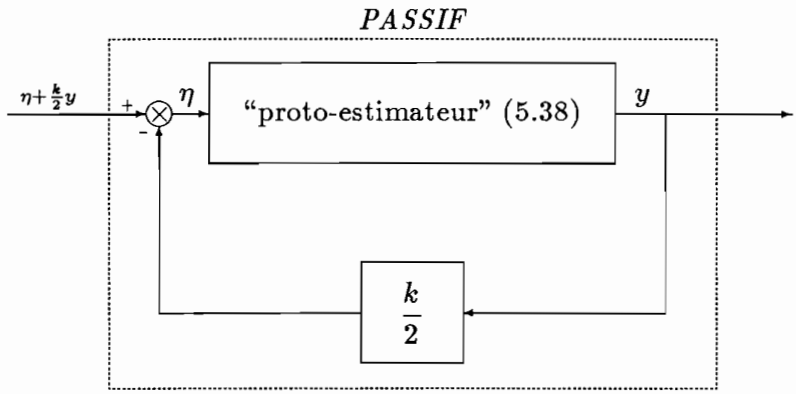


Fig. 5.3 :

On peut encore interpréter la proposition 5.7 comme le fait que le proto-estimateur est composé de la façon suivante:

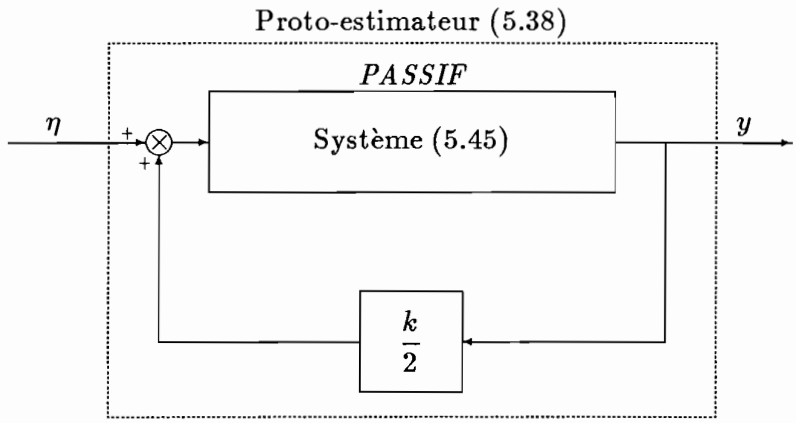


Fig. 5.4 :

Remarque 5.3 Le cas particulier des proto-estimateurs de type gradient, et de la proposition 5.6 est obtenu en faisant $k = 0$. ∎

Remarque 5.4 On peut retrouver grâce à la propriété 5.7 toutes les propriétés enoncées aux sections 4.1 et 4.2 puisque l'estimateur idéal (4.16) (représenté figure 5.2 avec $z = z_{eq}$ et $Z = Z_{eq}$) peut se décomposer de la façon suivante

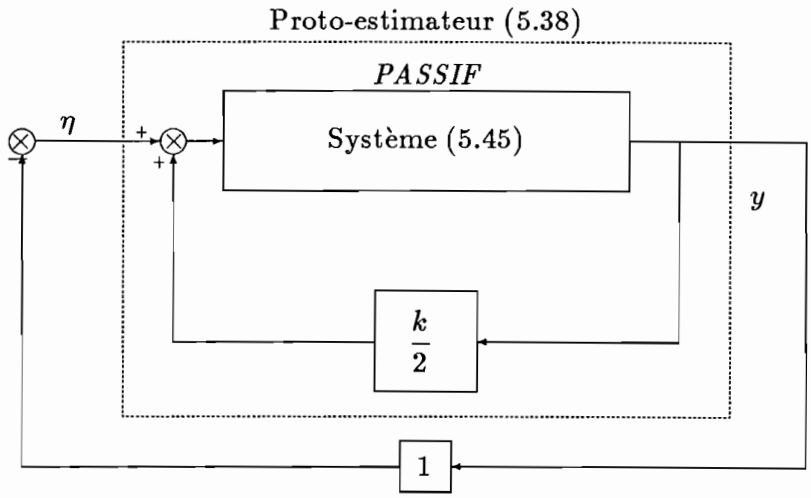


Fig. 5.5 :

ou encore:

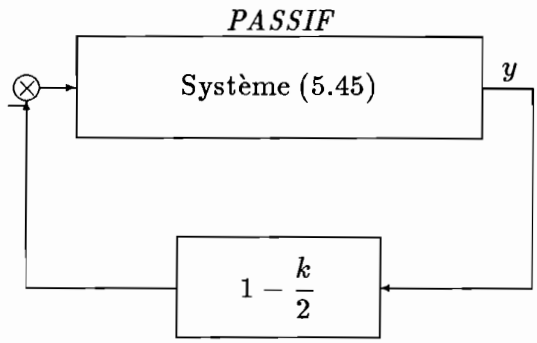


Fig. 5.6 :

où si k est inférieur à 2, le gain $1 - \frac{k}{2}$ est un système strictement passif relativement aux fonctions positives $\mathcal{V} = 0$ et $\mathcal{W} = y^2$. ∎

5.4 Une nouvelle famille d'estimateurs réalistes

5.4.1 Etude générale

Nous supposons maintenant que la seule information disponible sur e_{eq} est la connaissance de e relié à e_{eq} par un système entrée-sortie de la forme (5.4). On cherche des conditions sur ce filtre pour pouvoir tout simplement remplaçer e_{eq} par e dans l'estimateur.

Si l'on remplace le gain unité de l'estimateur idéal (figure 5.5) par un système $\mathcal{S}$, l'estimateur obtenu est alors représenté par le schéma-bloc de la figure 5.7, au lieu de 5.6.

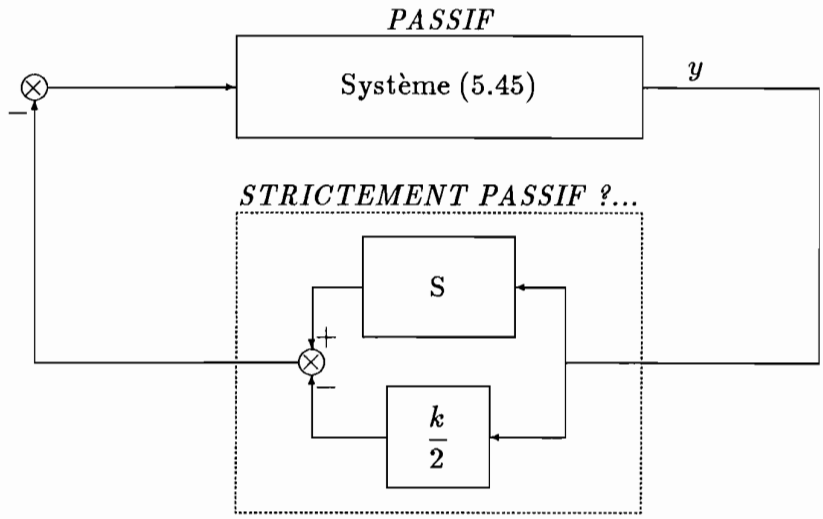


Fig. 5.7 :

D'après la proposition 5.7 et le théorème 5.5, on retrouvera des propriétés intéressantes si le système entrée/sortie entouré de pointillés est strictement passif. D'un autre côté, l'estimateur sera "implémentable" si la sortie de $\mathcal{S}$ se trouve être calculable à partir de grandeurs mesurées.

Vue la forme de (5.45), le système $\mathcal{S}$ doit avoir pour entrée $\sqrt{r}e_{eq}$ et pour sortie $\sqrt{r}e$. Pour pouvoir utiliser notre hypothèse d'"information réaliste" sur e_{eq} (voir (5.4)), on prendra

$$r = 1 \tag{5.47}$$

pour toute la suite (par exemple $m_1 = m_2 = 0$ dans (5.2) ou (4.64)). L'hypothèse est en effet que l'on peut calculer la sortie d'un certain système dont l'entrée est e_{eq}, et non pas $\sqrt{r}e_{eq}$ où r varie. On verra par la suite (chapitre 8) que c'est bien cette condition qui est réalisée. L'effet "normalisation" qu'apportait le gain r pourra être reporté dans le système $\mathcal{S}$, qui sera à priori très peu contraint, et en tout cas certainement pas contraint d'être linéaire.

Le système $\mathcal{S}$ se confond, quand $r = 1$, avec (5.4) si bien que le système entouré de pointillés sur la figure 5.7 s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \Xi(\zeta) + e_{eq} \\ \eta &= \Upsilon(\zeta_z) - \frac{k}{2}e_{eq} \end{aligned} \tag{5.48}$$

Comme annoncé plus haut, toutes nos espérances sont tournées vers la passivité de ce système. Hélas, il n'est pas difficile de voir que le terme de transmission directe négative, s'il est non nul, met irremédiablement fin à tout espoir de passivité [2]; *On va donc prendre ici* $k = 0$, c'est à dire ne s'intéresser qu'aux proto-estimateurs de type gradient et de gain r unité :

[2] C'est une conséquence du lemme positif réel; voir par exemple [18].

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}} &= -\pi_{\hat{p},P}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \\ y &= e_{eq} = Z_{eq}(\hat{p}-p^*) \end{aligned} \tag{5.49}$$

Précisons tout cela par la propriété suivante:

Proposition 5.8 *Si:*

- *Il existe p^*, strictement à l'intérieur de Π_1 (voir (4.23)), satisfaisant à tout instant l'égalité (3.1):*
$$z_{eq} = Z_{eq}\, p^* \ ,$$
- *La grandeur Z_{eq} est mesurée ou calculable à partir de grandeurs mesurées,*
- *il existe une grandeur e, mesurée ou calculable à partir de grandeurs mesurées, et qui est de plus la sortie du système d'entrée e_{eq}:*
$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \Xi(\zeta) + e_{eq} \\ e &= \Upsilon(\zeta) \end{aligned} \tag{5.50}$$
pour certains Υ et Ξ tels que ce système (5.50) soit de plus strictement passif relativement à des fonctions positives $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de l'état ζ.
- *La mise à jour de $\hat{p}$ est donnée par :*
$$\dot{\hat{p}} = -\pi_{\hat{p},P}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \tag{5.51}$$

alors, on a les propriétés suivantes, pour toute solution définie sur l'intervalle de temps $[0,T)$,

$$\begin{cases} \hat{p}(t) \text{ est borné sur } [0,T) \ , \\ \mathcal{V}(\zeta(t)) \text{ est borné sur } [0,T) \ , \\ \mathcal{W}(\zeta(t)) \in L^1([0,T)) \end{cases} \tag{5.52}$$

résumées et précisées par l'inégalité:

$$\tfrac{1}{2}\|\hat{p}(t)-p^*\|^2_{P^{-1}} + \mathcal{V}(\zeta(t)) + d\int_0^t \mathcal{W}(\zeta(\tau))d\tau \leq \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(0)-p^*\|^2_{P^{-1}} + \mathcal{V}(\zeta(0)) \ , \tag{5.53}$$

5.4.2 Famille d'algorithmes $\left(\mathcal{GF}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}\right)$.

En prenant

$$\Xi(\zeta) = -\|\zeta\|^{m_1-1}\,(1 + \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq}\,)^{m_2/2}\,\zeta \tag{5.54}$$

$$\Upsilon(\zeta) = \zeta \tag{5.55}$$

avec

$$m_1 \geq 1 \quad ; \quad m_2 \geq 0 \quad , \tag{5.56}$$

On obtient la famille d'algorithmes

$$\mathcal{GF}_{\mathbf{m_1,m_2}} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{e} & = & -\|e\|^{m_1-1}\,(1 + \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq})^{m_2/2}\,e + e_{eq} \\ \dot{\hat{p}} & = & -\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}\,e\right) \end{array} \right. \tag{5.57}$$

avec

$$m_1 \geq 1 \quad ; \quad m_2 \geq 0 \quad , \tag{5.58}$$

où la matrice P, constante, symétrique définie posistive représente un gain d'adaptation.

Il est très facile de montrer que le système entrée/sortie

$$\dot{e} + \|e\|^{m_1-1}\,(1 + \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq})^{m_2/2}e = e_{eq}$$

d'entrée e_{eq} et de sortie e est strictent passif relativement aux fonctions positives

$$\mathcal{V} = \tfrac{1}{2}\|e\|^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{W} = \|e\|^{m_1-1}\,(1 + \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq})^{m_2/2}\|e\|^2$$

On a les propriétés suivantes:

Proposition 5.9 *Si $\hat{p}$ est mis à jour par $\left(\mathcal{GF}_{\mathbf{m_1,m_2}}\right)$, alors, dès que z_{eq} et Z_{eq} sont définis sur tout l'intervalle de temps $[0,T)$,*

- *$\hat{p}(t)$ est borné sur $[0,T)$,*
- *$e(t)$ est borné sur $[0,T)$,*
- *$(\sqrt{1 + \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq}})^{\frac{m_2}{m_1+1}}\|e\|$ est dans $L^{m_1+1}([0,T))$,*
- *$(\sqrt{1 + \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq}})^{\frac{m_2}{m_1+1}-1}\|\dot{\hat{p}}\|$ est dans $L^{m_1+1}([0,T))$,*

tout ceci étant traduit par l'inégalité suivante, vérifiée pour tout instant t dans $[0,T)$:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(t) - p^*\|^2 + \tfrac{1}{2}\|e(t)\|^2 + \int_0^t (1 + \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq})^{m_2/2}\|e\|^{m_1+1}(\tau)\,d\tau \\ \leq \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 + \tfrac{1}{2}\|e(0)\|^2 \end{aligned} \tag{5.59}$$

5.4.3 Algorithmes particuliers avec filtrage non-linéaire de l'erreur

Reprenant ici les systèmes passifs de l'exemple 5.2 page 54, on définit e par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X} & = & F(X) + e_{eq} \\ e & = & \nabla\mathcal{V}(X) \end{array} \right. \tag{5.60}$$

où $\mathcal{V}$ vérifie

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X}(X).F(X) \quad \leq \quad -a\mathcal{V}(X) \tag{5.61}$$

et l'on pose

$$\dot{\hat{p}} \quad = \quad \pi_{P,\hat{p}}\Big(PZ_{eq}^{\top}e\Big) \tag{5.62}$$

Où la matrice P, constante, symétrique définie posistive représente un gain d'adaptation.

Proposition 5.10 *Si il existe un p^* strictement à l'intérieur de Π_1 (voir (4.23)), qui vérifie à tout instant (3.1), l'estimateur (5.60)-(5.62), a les propriétés suivantes:*

- *$\hat{p}(t)$ est borné sur $[0,T)$,*
- *$\mathcal{V}(X(t))$ est borné sur $[0,T)$,*
- *$\mathcal{V}(X(t))$ est dans $L^1([0,T))$.*

Tout ceci est traduit par l'inégalité suivante, vérifiée pour tout instant t dans $[0,T)$:

$$\tfrac{1}{2}\|\hat{p}(t)-p^*\|^2 \; + \; \mathcal{V}(X(t)) \; + \; \int_0^t \mathcal{V}(X(\tau))d\tau \quad \leq \quad \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(0)-p^*\|^2 \; + \; \mathcal{V}(X(0)) \tag{5.63}$$

Partie III

COMMANDE

Chapitre 6

Commande - Introduction

6.1 Objectifs

Rappelons que nous nous sommes donnés une famille de systèmes $\mathcal{S}_p$:

$$\dot{x} \;=\; f(p,x) \;+\; g(p,x)u \tag{6.1}$$

sur laquelle on va faire dorénavant essentiellement deux hypothèses:

- **Stabilisabilité** (condition SF, voir page 13) : On connait pour chaque système $\mathcal{S}_p$ un feedback "stabilisant" $u_{\text{ST}}(p,x)$, dépendant de p.
- **Paramétrage linéaire** *explicite* (condition PLE, page 10) si les champs f et g dans (6.1) dépendent linéairement du paramètre p, ou *implicite* (condition PLI, page 11), si (6.1) peut se mettre sous la forme

  $$J(p,x)\dot{x} \;=\; a(p,x) \;+\; b(p,x)u \tag{6.2}$$

  où J, a et b dépendent linéairement du paramètre p.

Ayant fait ces hypothèses sur la *famille* $(\mathcal{S}_p)$, on particularise maintenant l'un des systèmes de la famille, $\mathcal{S}_{p^*}$, que l'on veut commander; on appelera p^* la "vraie" valeur du paramètre. On ne suppose pas p^* connu, et l'on cherche un contrôleur qui assure un comportement en x qualitativement similaire à celui que l'on aurait en utilisant la loi de commande $u_{\text{ST}}(p^*,.)$ si p^* était connu[1]. Par exemple, si la famille satisfait la condition SF, $x(t)$ devra tendre vers 0.

Si p^* était connu, on emploierait bien sûr le contrôleur (statique)

$$u \;=\; u_{\text{ST}}(p^*,x) \tag{6.3}$$

[1]Notons que, nos hypothèses ne privilégiant aucune valeur à l'intérieur de Π, p^* peut être quelconque dans Π. Chercher un contrôleur pour le système $\mathcal{S}_{p^*}$, p^* étant inconnu mais dans Π, est donc équivalent à chercher un contrôleur valable pour tous les systèmes de la famille $(\mathcal{S}_p)_{p\in\Pi}$

p^* étant inconnu, on utilise courament à la place de (6.3) :

$$\begin{cases} u &= u_{ST}(\hat{p}, x) + v \\ \hat{p} &= \textit{une fonction dynamique de } x \end{cases} \tag{6.4}$$

où $\hat{p}$ est en général interprété comme une estimée[2] du paramètre p^*, $u_{ST}(\hat{p}, x)$ étant donné par l'hypothèse SF. Le terme $u_{ST}(\hat{p}, x)$ est souvent appelé par la suite commande *certainty equivalence*. v est un terme correctif supplémentaire que l'on n'utilisera que dans certains cas.

Il est important de noter qu'au contraire de (6.3), ce contrôleur est un contrôleur dynamique, dont l'état contient au moins $\hat{p}$. Ainsi, pour parler de stabilité, on devra aussi se préoccuper des dynamiques auxiliaires de ce contrôleur, i.e. du comportement de $\hat{p}$ et d'éventuelles autres variables dynamiques. L'objectif de commande est donc :
Comportement de x : tend vers 0,
Comportement des autres variables dynamiques : bornées.

Dans toute la suite de cette thèse, on utilise les abbréviations suivantes:

$$\begin{array}{lllllllll} f^* &=& f(p^*,x) & g^* &=& g(p^*,x) & g_k^* &=& g_k(p^*,x) \\ \widehat{f} &=& f(\hat{p},x) & \widehat{g} &=& g(\hat{p},x) & \widehat{g_k} &=& g_k(\hat{p},x) \\ J^* &=& J(p^*,x) & & & & & & \\ \widehat{J} &=& J(\hat{p},x) & & & & & & \\ a^* &=& a(p^*,x) & b^* &=& b(p^*,x) & b_k^* &=& b_k(p^*,x) \\ \widehat{a} &=& a(\hat{p},x) & \widehat{b} &=& b(\hat{p},x) & \widehat{b_k} &=& b_k(\hat{p},x)\ , \end{array} \tag{6.5}$$

6.2 Etat de l'art

La littérature sur le sujet est déja assez riche et, pour mieux la situer, nous nous proposons d'en présenter une classification selon trois critères :

Méthode Lyapunov contre Méthode estimation

Il y a deux méthodes pour concevoir une mise à jour de $\hat{p}$ et éventuellement un terme v satisfaisant : l'une que l'on peut appeler "méthode Lyapunov" et l'autre "méthode estimation"

La première, sans doute la plus naturelle, consiste à choisir une fonction positive de l'état complet du système (candidat à être une fonction de Lyapunov), puis à trouver la fonction dynamique invoquée en (6.4) et éventuellement le terme v qui puissent la faire décroître. Cette méthode a été proposée et utilisée

- en linéaire par *Parks* [45]

[2] en fait certains algorithmes (cf. Sastry et Isidori[49]) utilisent une reparamétrisation *redondante si bien* que $\hat{p}$ est de dimension plus grande que p^*

- dans le cas de robots rigide par *Campion et Bastin*[11], et *Slotine et Li*[53]
- dans le cas d'une famille de systèmes à paramétrage linéaire explicite, supposés tous linéarisables par feedback et difféomorphisme, et sous certaines hypothèses de "matching" par *Taylor, Kanellakopoulos, Kokotovic et Marino*[59] puis [28].

Cette méthode a l'avantage appréciable de fournir une fonction de Lyapunov pour le système adaptatif complet, mais on ne sait l'appliquer aujourd'hui que dans des cas assez particuliers.

La seconde méthode (adoptée ici) consiste à séparer la partie "système" (x) de la partie "adaptation" ($\hat{p}$ et autres variables d'état éventuelles). L'adaptation est obtenue par une méthode d'estimation qui (cf. chapitres 3, 4 et 5) rend certaines quantités "petites" L'évolution de x est ensuite analysée comme une évolution "idéale" pertubée précisément par ces quantités que l'estimation rend petites.

Cette méthode a été utilisée

- très souvent en linéaire (voir *Goodwin et Sin* [23])
- dans le cas de robots rigides par *Middleton et Goodwin* [35]
- dans le cas de systèmes à paramétrage linéaire explicite complètement linéarisables par feedback d'état par *Nam et Arapostatis* [37] et *Bastin et Campion* [6]
- dans le cas de systèmes à paramétrage linéaire explicite, linéarisables entrée-sortie par *Sastry et Isidori* [49]
- dans le cas d'une famille de systèmes stabilisables à paramétrage linéaire implicite dans *Pomet et Praly* [42].

Analyse "erreur de commande" contre analyse "erreur sur le système"

Pour étudier le comportement de la composante x de l'état complet (point 1 du problème posé ci-dessus au paragraphe 6.1), et ceci indépendament de la stratégie de commande choisie, on doit étudier l'équation

$$\dot{x} \;=\; f(p^*, x) \;+\; g(p^*, x).[u_{\mathrm{ST}}(\hat{p}, x) + v] \tag{6.6}$$

dans laquelle, pour simplifier la présente discussion, on va prendre $v \equiv 0$. (6.6) est obtenu en appliquant au système $\mathcal{S}_{p^*}$ la commande $u_{\mathrm{ST}}(\hat{p}, .)$, conçue pour le système $\mathcal{S}_{\hat{p}}$. Il y a deux approches pour analyser cette inadéquation. La première consiste à considérer que l'on fait une erreur sur la commande, la seconde une erreur sur le système :

erreur de commande : Se rattachant au fait que l'hypothèse SF donne le comportement de $\mathcal{S}_{p^*}$ bouclé par $u_{\mathrm{ST}}(p^*, x)$, on considére que l'on fait une erreur *sur la commande* en appliquant $u_{\mathrm{ST}}(\hat{p}, x)$ au lieu de $u_{\mathrm{ST}}(p^*, x)$ qui conviendrait. On réécrit alors (6.6)

sous la forme d'un système nominal constitué de $\mathcal{S}_{p^*}$ bouclé par $u_{ST}(p^*, x)$, perturbé par l'erreur de commande :

$$\dot{x} = \underbrace{f(p^*, x) + g(p^*, x).u_{ST}(p^*, x)}_{= s_o(p^*, x)} + g(p^*, x).[u_{ST}(\hat{p}, x) - u_{ST}(p^*, x)] \quad (6.7)$$

dans le cas d'un paramétrage linéaire explicite, ou

$$J(p^*, x)\dot{x} = \underbrace{a(p^*, x) + b(p^*, x).u_{ST}(p^*, x)}_{= J(p^*, x)s_o(p^*, x)} + b(p^*, x).[u_{ST}(\hat{p}, x) - u_{ST}(p^*, x)] \quad (6.8)$$

dans le cas d'un paramétrage linéaire implicite. Le problème de cette analyse est qu'en général, elle perd la propriété de linéarité par rapport aux paramètres : il n'y a aucune raison pour que u_{ST} soit linéaire par rapport aux paramètres si les champs le sont, et même si c'était le cas, le terme $b(p^*, x)u_{ST}(p^*, x)$ ne serait pas en général linéaire en p^*

Une manière d'analyser la stabilité est d'étudier la variation de $V^*(t) = V(p^*, x(t))$ où V est la fonction positive donnée par la propriété SF (définition1.3). Par exemple, dans le cas d'un paramétrage linéaire implicite, on a l'inéquation suivante, donnée par (1.23) :

$$\dot{V}^* \leq -cV^* + \frac{\partial V^*}{\partial x} J^{*-1} b(p^*, x)[u_{ST}(\hat{p}, x) - u_{ST}(p^*, x)] \quad (6.9)$$

que l'on aimerait traiter comme une perturbation de $\dot{V}^* \leq -cV^*$; ceci est en général rendu difficile par le peu d'information disponible sur le terme d'erreur. Cependant, dans le cas où $\frac{\partial V^*}{\partial x} J^{*-1} b(p^*, x)[u_{ST}(\hat{p}, x) - u_{ST}(p^*, x)]$ est linéaire en $p^* - \hat{p}$, on peut contourner cette difficulté ; *Slotine et Li* [53], grâce à un choix judicieux des lois de commande $u_{ST}(p, .)$, se sont ramenés à ce cas pour un robot rigide.

erreur sur le système : Ici, se rattachant au fait que l'hypothèse SF donne le comportement de $\mathcal{S}_{\hat{p}}$ bouclé par $u_{ST}(\hat{p}, .)$ à $\hat{p}$ constant, on considère que l'on se "trompe" de système puisque l'on a en face de soi non pas le système $\mathcal{S}_{\hat{p}}$, auquel $u_{ST}(\hat{p}, .)$ est adapté, mais le système $\mathcal{S}_{p^*}$. On écrit alors comme système nominal $\mathcal{S}_{\hat{p}}$ bouclé par $u_{ST}(\hat{p}, .)$, la perturbation étant "$\mathcal{S}_{p^*} - \mathcal{S}_{\hat{p}}$" :

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \overbrace{f(\hat{p}, x) + g(\hat{p}, x).u_{ST}(\hat{p}, x)}^{= s_o(\hat{p}, x)} \\ & + f(p^*, x) - f(\hat{p}, x) + [g(p^*, x) - g(\hat{p}, x)].u_{ST}(\hat{p}, x) \end{aligned} \quad (6.10)$$

dans le cas d'un paramétrage linéaire explicite, ou

$$\begin{aligned} J(\hat{p}, x)\dot{x} = & \overbrace{a(\hat{p}, x) + b(\hat{p}, x).u_{ST}(\hat{p}, x)}^{= J(\hat{p}, x)s_o(\hat{p}, x)} \\ & + a(p^*, x) - a(\hat{p}, x) + [b(p^*, x) - b(\hat{p}, x)].u_{ST}(\hat{p}, x) \\ & - [J(p^*, x) - J(\hat{p}, x)]\dot{x} \end{aligned} \quad (6.11)$$

dans le cas d'un paramétrage linéaire implicite. Cette méthode à l'avantage de préserver la linéarité des équation par rapport à p^*, ce qui autorise des méthodes plus systématiques. Elle est utilisée dans [35], [7], [37], [42] et [59].

Difféomorphisme estimé contre difféomorphisme "étoile"

Dans certains cas, il est intéressant de transformer (6.1) par un difféomorphisme, par exemple, pour se placer dans des coordonnées où le système est linéaire (linéarisation par feedback), ou pour rendre les champs après difféomorphisme indépendants des paramètres (équivalence par feedback et difféomorphisme), si cela est possible, évidemment. Cette opération est réalisée sur le système $\mathcal{S}_p$ en appliquant un difféomorphisme $\varphi(p,x)$ qui dépend en général du paramètre p. On a alors le choix entre étudier l'évolution de $\xi^* = \varphi(p^*,x)$, donnée par

$$\dot{\xi}^* = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p^*,x).\dot{x} \tag{6.12}$$

ou l'évolution de $\xi = \varphi(\hat{p},x)$, donnée par:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{p},x).\dot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\hat{p},x).\dot{\hat{p}} \tag{6.13}$$

En général, l'utilisation de ξ^* convient à une analyse de type "erreur de commande" et celle de ξ à une analyse de type "erreur sur le système". L'inconvénient de (6.12) est la perte de linéarité en p^*, propriété que l'on peut "récupérer" dans certains cas par reparamétrage redondant (cf. [49]); l'inconvénient de (6.13) est l'apparition de $\dot{\hat{p}}$ qui rend le problème explicitement dépendant de l'adaptation. Le difféomorphisme "étoile" a été utilisé essentiellement par *Sastry et Isidori* [49] et le difféomorphisme $\varphi(\hat{p},x)$ par *Nam et Arapostatis* [37], *Bastin et Campion* [7] et par *Kanellakopoulos, Kokotovic et Marino* [28].

Exemple 6.1 Pour illustrer les deux dernièrs critères ci-dessus (erreur de commande/erreur sur le système, difféomorphisme étoile/difféomorphisme estimé), on considère la famille de systèmes dans $\mathbb{R}^2$ déja introduit dans l'exemple 1.5 (1.28) :

$$\mathcal{S}_p : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_1} &=& x_2 + p\,\theta(x_1) \\ \dot{x_2} &=& p\,u \end{array} \right. \tag{6.14}$$

où θ est une fonction (réelle) de x_1. Le système à commander est :

$$\mathcal{S}_{p^*} : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_1} &=& x_2 + p^*\,\theta(x_1) \\ \dot{x_2} &=& p^*\,u \end{array} \right. \tag{6.15}$$

$\hat{p}$ est une estimée de p^*

Dans l'exemple 1.5, on a défini en (1.29) le difféomorphisme linéarisant $\varphi(p,.)$ à appliquer à $\mathcal{S}_p$, et en (1.35) le feedback $u_{ST}(p,.)$ qui achève la linéarisation, et stabilise l'origine (en plaçant les pôles du système linéaire obtenu). On prend

$$u = u_{ST}(\hat{p},x) \ , \tag{6.16}$$

et l'on définit, comme en (6.12) et (6.13), ξ^* et $\hat{\xi}$ par

$$\begin{array}{rcl} \xi^* = \varphi(p^*,x) &=& \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + p^*\theta(x_1) \end{pmatrix} \\ \hat{\xi} = \varphi(\hat{p},x) &=& \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \hat{p}\theta(x_1) \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.17}$$

L'évolution de ξ^* est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\xi}_1^* & = & x_2 + p^*\theta(x_1) = \xi_2^* \\ \dot{\xi}_2^* & = & p^*\,\theta'(x_1)[x_2 + p^*\,\theta(x_1)] + p^*\,u_{ST}(\hat{p},x)\ , \end{array} \right. \tag{6.18}$$

(où θ est la dérivée de θ) et celle de $\hat{\xi}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{\xi}}_1 & = & x_2 + p^*\theta(x_1) = \hat{\xi}_2 + \theta(x_1)(p^* - \hat{p}) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 & = & \hat{p}\,\theta'(x_1)[x_2 + p^*\,\theta(x_1)] + \dot{\hat{p}}\theta(x_1) + p^*\,u_{ST}(\hat{p},x) \end{array} \right. \tag{6.19}$$

On vérifie bien que :

l'équation de ξ^* a l'inconvénient de n'être pas linéaire par rapport à la valeur inconnue du paramètre p^*, et de faire intervenir justement ξ^*, qui n'est pas calculacle puisqu'il dépend de p^*, mais l'avantage de ne pas faire intervenir $\dot{\hat{p}}$,

l'équation de $\hat{\xi}$ a l'inconvénient de faire intervenir explicitement $\dot{\hat{p}}$, mais l'avantage d'être linéaire par rapport à la valeur inconnue du paramètre p^*, et l'avantage aussi que $\hat{\xi}$ soit calculable puisqu'il n'est fonction que de x, mesuré, et de $\hat{p}$, disponible puisque calculé par le contôleur.

Difféomorphisme "étoile" + "erreur de commande" : Une analyse "erreur de commande" sur (6.18) consiste à écrire (voir les calculs dans l'exemple 1.5) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\xi}_1^* & = & \xi_2^* \\ \dot{\xi}_2^* & = & -\omega_1\xi_1^* - \omega_2\xi_2^* + p^*\,[u_{ST}(\hat{p},x) - u_{ST}(p^*,x)] \end{array} \right. \tag{6.20}$$

On considère alors le terme

$$p^*\,[u_{ST}(\hat{p},x) - u_{ST}(p^*,x)] = -\theta(x_1)\theta'(x_1)\,p^*(\hat{p}-p^*) - (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)\,p^*(\frac{1}{\hat{p}} - \frac{1}{p^*}) \tag{6.21}$$

comme une perturbation, le reste donnant un système stable; le problème est que cette "erreur" n'est pas du tout reliée simplement à l'erreur de paramètre $p^* - \hat{p}$.

Difféomorphisme "étoile" + "erreur sur le système" : Une analyse "erreur sur le système" telle que décrite plus haut appliquée à (6.18) consiste exactement à écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\xi}_1^* & = & x_2 + \hat{p}\theta(x_1) + (p^* - \hat{p})\,\theta(x_1) \\ \dot{\xi}_2^* & = & p^*\theta'(x_1)[x_2 + \hat{p}\,\theta(x_1)] + \hat{p}\,u_{ST}(\hat{p},x) + (p^* - \hat{p})\,[p^*\theta(x_1)\theta'(x_1) + u_{ST}(\hat{p},x)] \end{array} \right.$$

Ceci n'a que peu d'intêret, le terme d'"erreur" n'étant pas mieux relié à l'erreur de paramètre que précédemment, et le reste ne fournissant de surcroît pas en évidence un système stable (en particulier, il semble un peu dommage de ne pas écrire $\dot{\xi}_1^* = \xi_2^*$).

Dans [49], *Sastry et Isidori*[3] utilisent un mélange de ces deux dernières analyses : à savoir que dans (6.18), ils utilisent l'"erreur de commande" pour la première composante (en fait

[3]Cet exemple rentre tout-à-fait dans le cadre de [49], avec une dynamique des zéros nulle. La "sortie" est alors $\xi_1 = x_1$, indépendante des paramètres.

toutes celles ne faisant pas intervenir la commande), et l'"erreur sur le système", mais en reparamétrant, sur la dernière composante. Cela consiste à écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\xi}_1^* & = & \xi_2^* \\ \dot{\xi}_2^* & = & -\omega_1 \widehat{\xi}_1 \; - \omega_2 \widehat{\xi}_2 \; + \; (p^* - \hat{p}) \left[u_{\mathrm{ST}}(\hat{p}, x) \; + \; x_2 \theta'(x_1) \right] \; + \; (p^{*2} - \hat{p}^2) \theta(x_1) \theta'(x_1) \; , \end{array} \right.$$

et à utiliser le fait que ξ lui-même dépend linéairement de p, ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\xi}_1^* & = & \xi_2^* \\ \dot{\xi}_2^* & = & -\omega_1 \xi_1^* - \omega_2 \xi_2^* \; + (p^* - \hat{p}) \left[\omega_2 \theta(x_1) + u_{\mathrm{ST}}(\hat{p}, x) + x_2 \theta'(x_1) \right] \; + \; (p^{*2} - \hat{p}^2) \theta(x_1) \theta'(x_1) \end{array} \tag{6.22}$$

On fait alors une reparamétrisation : considérant en quelque sorte p et p^2 comme indépendants, on utilise un paramètre de dimension 2 :

$$q \; = \; \left(\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} \right)$$

dont la "vraie" valeur est

$$q^* \; = \; \left(\begin{array}{c} p^* \\ p^{*2} \end{array} \right)$$

On utilise alors dans [49] des méthodes d'estimation de q^* fondées, pour reprendre le vocabulaire des chapitres 3, 4 et 5, sur l'équation d'observation (6.22), une difficulté supplémentaire provenant de ce que ξ_1^* etξ_2^* ne sont pas mesurés. Il est montré dans [49] que ce reparamétrage linéaire en des monômes des paramètres de départ est un fait général dans le cas de la linéarisation pourvu que les "sorties" (ici ξ_1) ne dépendent pas des paramètres.

Difféomorphisme estimé +"erreur de commande" : Une analyse "erreur de commande" sur le système transformé par le difféomorphisme estimé (6.19) n'a aucun intêret.

Difféomorphisme estimé + "erreur sur le système" : Les calculs étant faits dans l'exemple 1.5, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\widehat{\xi}}_1 & = & \widehat{\xi}_2 \qquad\qquad\qquad + \theta(x_1)(p^* - \hat{p}) \\ \dot{\widehat{\xi}}_2 & = & -\omega_1 \widehat{\xi}_1 \; - \omega_2 \widehat{\xi}_2 \; + \left[\hat{p} \theta(x_1) \theta'(x_1) \; + \; u_{\mathrm{ST}}(\hat{p}, x) \right] (p^* - \hat{p}) \; + \; \theta(x_1) \, \dot{\hat{p}} \end{array} \right. \tag{6.23}$$

Cette écriture est de la forme

$$\dot{\widehat{\xi}} \; = \; s(\widehat{\xi}) \; + \; Z_{\mathrm{eq}}(p^* - \hat{p}) \; + \; \frac{\partial \varphi}{\partial p} \dot{\hat{p}} \tag{6.24}$$

avec

$$s(\widehat{\xi}) \; = \; \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\omega_1 & -\omega_2 \end{array} \right) \widehat{\xi}$$

et donne $\widehat{\xi}$ comme solution d'une équation différentielle ayant 0 comme point d'équilibre assymptotiquement stable, perturbée par un terme linéaire en $p^* - \hat{p}$ et en $\dot{\hat{p}}$. C'est cette méthode qui est utilisée et poursuivie dans cette thèse, tout au moins dans l'esprit, et nous reprendrons cet exemple pour l'illustrer. ∎

6.3 Méthodes communes aux chapitres suivants

Pour employer la terminologie de la "classification" du paragraphe précédent, nous allons employer tout au long de cette thèse, une approche de type "estimation", "erreur sur le système", "difféomorphisme estimé"

6.3.1 Estimation

Choix de l'équation d'observation.

Les algorithmes d'estimation développés aux chapitres 4 et 5 se fondent sur une "équation d'observation" (3.1) linéaire en p^*, (voir paragraphe 3.1) :

$$z_{eq} = Z_{eq} p^* \tag{6.25}$$

Ici, compte tenu des hypothèses de linéarité PLI ou PLE, plusieurs choix d'équation d'observation s'offrent à nous qui conduisent à des expressions différentes de z_{eq} et Z_{eq}.

• L'équation du système (6.1) ou (6.2) — que l'on multipliera en général par $\widehat{J}(\hat{p},x)^{-1}$ dans le cas linéaire implicite — est linéaire en p^* et fournit à priori une équation d'observation (6.25). Les expressions de z_{eq} et Z_{eq} correspondantes se déduisent facilement de (6.1) ou (6.2) et de l'hypothèse PLE ou PLI. Dans ce cas, l'erreur d'équation "brute" définie en (3.5) page 34 s'écrit

$$e_{eq} = -\dot{x} + f(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)u \tag{6.26}$$

• Utilisant un difféomorphisme $\varphi(\hat{p},x)$ dépendant de $\hat{p}$, on peut également considérer l'équation transformée par difféomorphisme, c'est-à-dire l'équation de

$$\xi = \varphi(\hat{p},x)\,, \tag{6.27}$$

qui s'écrit, dans le cas d'un paramétrage linéaire explicite[4],

$$\dot{\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{p},x)\dot{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \tag{6.28}$$

où $\dot{x}$ est donné par (6.1); cette équation fournit une nouvelle équation d'observation possible, et donc une nouvelle expression de z_{eq} et Z_{eq}. L'erreur d'équation vaut dans ce cas-ci :

$$e_{eq} = -\dot{\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{p},x)\,[f(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)\,u] + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \tag{6.29}$$

• Posant, compte tenu des hypothèses SF,

$$V(t) = V(\hat{p}(t),x(t)) \tag{6.30}$$

[4] Le cas linéaire implicite n'est pas considéré; on peut cependant presque aussi facilement obtenir une équation linéaire en p^* : remplacer $\dot{x}$ par (6.28) dans (6.11) multiplié par $\widehat{J}^{-1}$.

on peut également obtenir une équation (scalaire) linéaire en p^*, qui s'écrit dans le cas d'un paramétrage linéaire explicite[5],

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \tag{6.31}$$

où $\dot{x}$ est donné par (6.1), on obtient ainsi une troisième possibilité d'équation d'observation, et donc d'expression de Z_{eq} et z_{eq}. L'erreur d'équation prend la valeur :

$$e_{eq} = -\dot{V} + \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)\,[f(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)\,u] + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \tag{6.32}$$

Estimateur

Quel que soit le choix fait ci-dessus pour l'équation d'observation, on peut remarquer que :

Dans le cas d'un paramétrage linéaire implicite, z_{eq} et Z_{eq} sont fonction de $\dot{x}$ et ne peuvent donc ni l'un ni l'autre être utilisés explicitement, mais sous certaines conditions, les grandeurs "filtrées" obtenues en "intégrant un fois" z_{eq} et Z_{eq} peuvent être calculées sans utiliser $\dot{x}$. La seule méthode d'estimation "réaliste" parmi celles présentées au chapitre 5 qui puisse être utilisé dans le cas d'un paramétrage linéaire implicite est celle de la section 5.2 qui consiste à filtrer l'équation d'observation (6.25) par un filtre de fonction de transfert scalaire.

Dans le cas d'un paramétrage linéaire explicite, en revanche, on constate que Z_{eq} ne dépend pas de $\dot{x}$ et peut donc être considéré comme mesuré. On peut alors appliquer soit comme ci-dessus la méthode où l'on filtre à la fois z_{eq} et Z_{eq}, soit la méthode de la section 5.3 où seule l'erreur d'équation est filtrée.

6.3.2 Analyse "erreur sur le système" de la boucle fermée

Poursuivant l'étude de la section (6.2) dans le cas où $v \equiv 0$ (pour simplifier cette discussion), et où l'équation d'observation choisie est l'équation du système "en x" (premier choix page 74), on étudie le comportement de la composante x de l'état complet de la boucle fermée en réécrivant

$$J(p^*,x)\dot{x} = a(p^*,x) + b(p^*,x)u_{ST}(\hat{p},x) \tag{6.33}$$

sous la forme "erreur sur le système" grâce à (6.26) et à (6.10) ou (6.11)

$$\dot{x} = s_o(\hat{p},x) - e_{eq} \tag{6.34}$$

où e_{eq} est une fonction de x, $\hat{p}$, p^* (et $\dot{x}$ dans le cas d'un paramétrage linéaire implicite), affine en p^* Si $\dot{\hat{p}}$ et e_{eq} sont nuls, $\hat{p}$ est constant et l'équation (6.34) devient:

$$\dot{x} = s_o(\hat{p},x) \tag{6.35}$$

[5] Même remarque qu'à la note 4 page 74.

équation différentielle ordinaire, paramétrée par $\hat{p}$ constant et dont les propriétés de stabilité sont données par les hypothèses SF : assymptotique stabilité d'un unique point d'équilibre par exemple. On peut donc considérer (6.34) comme une perturbation de (6.35) par le terme additif e_{eq} et le fait que $\hat{p}$ varie. Cela est encore plus clair si l'on considère la fonction positive introduite dans les hypothèses SF : en posant

$$V(t) = V(\hat{p}(t), x(t)) \ , \tag{6.36}$$

(6.34) conduit à l'inégalité suivante sur $\dot{V}$, dans le domaine de validité de SF,

$$\dot{V} \leq -cV - \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p}, x)e_{eq} + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p}, x)\dot{\hat{p}} \tag{6.37}$$

et nous allons traiter ceci comme une perturbation de $\dot{V} \leq -cV$ par les termes e_{eq} et $\dot{\hat{p}}$.

Il est inutile d'insister sur le fait que, pour que les propriétés à $e_{eq} = 0$ et $\hat{p}$ constant se transportent, on aura besoin d'hypothèses sur

la "force" de ces propriétés, c'est-à-dire par exemple de l'attractivité du point O pour chaque $\hat{p}$ fixé.

la "petitesse" de e_{eq} et $\dot{\hat{p}}$,

Il est bien connu, par exemple, que si O est un point d'équilibre assymptotiquement stable pour le système non perturbé, pour tout $\hat{p}$, cela est en général faux sans hypothèse sur $\dot{\hat{p}}$ pour (6.34) (systèmes linéaires non stationnaires, voir par exemple [19]).

Ici, on obtient, par exemple sous l'hypothèse SF, la propriété de "robustesse" suivante qui est une conséquence immédiate du lemme 3 dans [42] (reproduit page 165), et qui se trouve aussi dans [62]

Proposition 6.1 *Si la famille $(\mathcal{S}_p)$ est paramétrée linéairement (hypothèse PLI) et si tout $\mathcal{S}_p$ est stabilisé par le feedback $u_{ST}(p,.)$ (hypothèse SF), avec, de plus, k_1 et k_2 étant deux nombres positifs et $k(p)$ une fonction positive continue de p,*

$$\begin{aligned} \hat{p} &\quad \textit{borné} \\ \|\dot{\hat{p}}\| &\in L^{k_1} \\ \|e_{eq}\| &\in L^{k_2} \\ \|\frac{\partial V}{\partial x}\| &\leq k \ \mathrm{Sup}\{1, |V|\} \\ \|\frac{\partial V}{\partial p}\| &\leq k \ \mathrm{Sup}\{1, |V|\} \end{aligned}$$

alors O est un point d'équilibre assymptotiquement stable de l'équation différentielle non-stationnaire

$$\dot{x} = f(\hat{p}(t), x) + g(\hat{p}(t), x)u_{ST}(\hat{p}(t), x)$$

Cette proposition a pour d'intérêt de préciser en quel sens les perturbations $\dot{\tilde{p}}$ et e_{eq} devraient être petites, c'est-à-dire au sens de certaines normes L^k

Les méthodes du chapitre 4 fournissent de telles propriétés, en utilisant par exemple un estimateur du type (4.2)-(4.7)-(4.8)-(4.9). Elles demandent cependant la mesure de $\dot{x}$ que l'on suppose ici inaccessible. Dans le cas où l'on a seulement accès à l'état x on doit faire appel aux méthodes d'estimation n'utilisant pas explicitement z_{eq} et Z_{eq} (encore que l'on puisse utiliser Z_{eq} dans le cas d'un paramétrage linéaire explicite) introduite au chapitre 5. Le problème est que ces estimateurs ne rendent pas e_{eq} petit, mais une grandeur "filtrée" qui lui est reliée ainsi qu'à z_{eq} et Z_{eq}, si bien que l'on devra modifier le problème de perturbation et utiliser des propriétés plus sophistiquées que la proposition 6.1.

Chapitre 7

Commande des systèmes à parametrage linéaire implicite

Dans ce chapitre, on suppose que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition PLI (paramétrage linéaire implicite, voir définition page 11). De plus, on suppose dans tout ce chapitre que les systèmes $\mathcal{S}_p$ vivent dans $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire $M^n = \mathbb{R}^n$), ou que l'on travaille en coordonnées locales , toutes les méthodes présentées ici dépendant des coordonnées choisies.

Les deux premières sections de ca chapitre sont en quelque sorte une version étoffée et plus générale de [42], qui est reproduit en annexe B. Nous montrons ici que l'on peut aussi bien utiliser des algorithmes à gains décroissants que les moindres carrés utilisés dans [42], et les hypothéses sont clarifiées. La section 7.3 systématise la méthode introduite dans [43]. La section 7.4 traite de l'application des méthodes introduites au cas particulier où le paramétrage linéaire implicite est en fait explicite.

7.1 Le contrôleur

7.1.1 Ecriture du contrôleur

Selon la terminologie du chapitre 6, nous suivons ici une approche de type "estimation", l'équation d'observation choisie étant l'équation "en x" Les autres équations d'observation possibles (équation transformée par difféomorphisme ou équation de Lyapunov) amènent à des expressions plus complexes et ne sont pas développées dans ce chapitre, mais seulement au chapitre 8.

Equation d'observation

L'équation du système

$$J(p^*, x)\dot{x} \quad = \quad a(p^*, x) \; + \; b(p^*, x)u \tag{7.1}$$

peut aisemment s'écrire, en multipliant par $\widehat{J}^{-1}$, sous la forme

$$z_{eq} = Z_{eq} p^* \ , \tag{7.2}$$

avec

$$Z_{eq} = \widehat{J}^{-1}(-J^p \odot \dot{x} + A^p + B^p \odot u) \tag{7.3}$$
$$z_{eq} = \widehat{J}^{-1}(J^o \dot{x} - a^o - b^o u) \tag{7.4}$$

Filtrage

Cette équation ne peut être utilisée telle quelle pour l'estimation puisque z_{eq} et Z_{eq} contiennent tous les les deux $\dot{x}$ via les termes $J(\hat{p},x)^{-1}J^o(x)\dot{x}$ et $J(\hat{p},x)^{-1}J^p(x) \odot \dot{x}$. La méthode utilisée est alors celle présentée au paragraphe 5.2 et qui consiste à "intégrer une fois" l'équation (7.2) via une fonction de transfert scalaire, c'est-à-dire que l'on déduit de (7.2) l'équation "filtrée"

$$z = Zp^* + w \tag{7.5}$$

en définissant, comme en (5.3 et, (5.5),

$$z = H(\tfrac{d}{dt}) z_{eq} \tag{7.6}$$
$$Z = H(\tfrac{d}{dt}) Z_{eq} \tag{7.7}$$
$$D(\tfrac{d}{dt}) w = 0 \tag{7.8}$$

où H est une fonction de transfert rationelle scalaire stable et strictement propre et D est son dénominateur. Notons que cette écriture n'a de sens que dans $\mathbb{R}^n$, ce qui justifie déja que l'on se soit restreint aux systèmes dans $\mathbb{R}^n$ (cf. lignes d'introduction du chapitre). On définit également

$$e = Z\hat{p} - z \tag{7.9}$$

Notons que (7.6) et (7.7) qui *définissent* z et Z, ne peuvent évidemment pas être utilisés telles quelles pour les calculer (z_{eq} et Z_{eq} ne sont pas mesurés puisqu'ils dépendent de $\dot{x}$). Tirant partie de la stricte causalité de H, nous donnerons au paragraphe 7.1.2 des conditions, et des méthodes pour calculer z et Z définis par (7.6) et (7.7).

Estimation proprement dite

Supposant ce problème résolu, nous pouvons utiliser tous les estimateurs développés au chapitre 4 sur l'équation (7.9); nous choisissons ici les estimateurs de type gradient $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$ *(voir (4.51))* ou de type moindre carrés $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$ (voir (4.64)). Leur emploi sur (7.9) donne :

$$\dot{\hat{p}} = -\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ^\top e\right) \tag{7.10}$$

avec

$$\begin{cases} r = \|e\|^{m_1-1}\left(\sqrt{1+|Z|^2}\right)^{-m_2} \\ P \quad \textit{constante} \end{cases} \tag{7.11}$$

dans le cas $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$, et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r & = & \|e\|^{m_1-1} \\ \dot{P} & = & -rPZZ^\top P \end{array} \right. \tag{7.12}$$

dans le cas $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$ Dans le premier cas, on aura les propriétés suivantes de e et $\dot{\hat{p}}$, d'après le lemme 4.7 :

$$\begin{array}{rcl} \left(\sqrt{1+|Z|^2}\right)^{-\frac{m_2}{m_1+1}} |e| & \in & L^{m_1+1} \\ \left(\sqrt{1+|Z|^2}\right)^{m_2-1} |\dot{\hat{p}}| & \in & L^{1+\frac{1}{m_1}} \end{array} \tag{7.13}$$

Dans le second cas, d'après le lemme 4.9, on aura les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl} |e| & \in & L^{m_1+1} \\ |\dot{\hat{p}}| & \in & L^1 \end{array} \tag{7.14}$$

Loi de commande

On prendra

$$u = u_{\text{ST}}(\hat{p}, x) + v \tag{7.15}$$

où u_{ST} est issu de l'hypothèse SF et v est nul dans le cas de la commande "certainty equivalence" (cf. paragraphe 7.2) ou calculé pour permettre d'obtenir le plus grand bassin d'attraction possible, dans certains cas (cf. paragraphe 7.3).

Conclusion

La commande adaptative va donc se décomposer en trois phases, qui induisent autant de parties du contrôleur :

Obtention de Z et z : Ils sont donnés, à partir des grandeurs connues, par les équations à intégrer (7.26) et (7.27) ou (7.31) et (7.32) du paragraphe 7.1.2. Les variables d'état de cette partie du contrôleur sont ω et Ω.

Estimation : On utilise un estimateur de type $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$ ou $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$, c'est à dire: Les variables d'état de cette partie du contrôleur sont $\hat{p}$, et P si l'on est dans le cas $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$

Commande : u est donné par (7.15).

7.1.2 Filtrage, problèmes de calculabilité

Pour utiliser ces algorithmes, les quantités filtrées Z et z doivent être calculables à partir des quantités mesurées, c'est-à-dire x et u; c'est là l'hypothèse dite "d'informations réalistes" sur Z_{eq} et z_{eq} (voir définition 5.1). Ce paragraphe donne des conditions pour que Z et z donnés par (7.6) et (7.7) soient effectivement calculables sans utiliser $\dot{x}$.

Il n'est pas difficile de se rendre compte que le seul problème pour satisfaire cette condition, c'est-à-dire pour calculer Z et z est de pouvoir calculer les grandeurs y_o et Y_p obtenues en intégrant une fois la partie de Z_{eq} et z_{eq} qui contient $\dot{x}$, c'est-à-dire définies par

$$\dot{y}_o = J(\hat{p},x)^{-1}J^o(x)\dot{x} \tag{7.16}$$
$$\dot{Y}_p = J(\hat{p},x)^{-1}J^p(x)\odot\dot{x} \tag{7.17}$$

Mais on peut écrire

$$\begin{aligned} J(\hat{p},x)^{-1}J^o(x)\dot{x} &= \dot{\overline{J(\hat{p},x)^{-1}J^o(x)x}} \\ &\quad - J(\hat{p},x)^{-1}\dot{\overline{J(\hat{p},x)}}J(\hat{p},x)^{-1}J^o(x)x \\ &\quad - J(\hat{p},x)^{-1}\dot{\overline{J^o(x)}}x \end{aligned} \tag{7.18}$$

et la même chose pour Y_p. On peut donc calculer y_o (ou Y_p) par une réalisation du type:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\omega}_o &=& J(\hat{p},x)^{-1}\dot{\overline{J(\hat{p},x)}}J(\hat{p},x)^{-1}J^o(x)x \;+\; J(\hat{p},x)^{-1}\dot{\overline{J^o(x)}}x \\ y_o &=& J(\hat{p},x)^{-1}J^o(x)x \;-\; \omega_o \end{array}\right. \tag{7.19}$$

à la condition que la dérivée de J ne soit pas incertaine, c'est à dire que les quantités $\dot{\overline{J(\hat{p},x)}}$ et $\dot{\overline{J^o(x)}}$ ne soient en fait pas fonction de p^* via $\dot{x}$. Cela justifie la forme de l'hypothèse CI1.

Définition 7.1 (Condition CI1) *On dira que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **CI1** *si elle est paramétrée implicitement linéairement (condition* PLI*) et si de plus,*

$$\frac{\partial J^o}{\partial x}(x).J(p,x)^{-1}[a(p,x)+b(p,x)u]$$
$$\text{et}\quad \frac{\partial J^p}{\partial x}(x)\odot\Big(J(p,x)^{-1}[a(p,x)+b(p,x)u]\Big)$$

ne dépendent pas de p, c'est-à-dire sont des fonction de x et u seulement. On note alors

$$\dot{J}^o(x,u) = \frac{\partial J^o}{\partial x}(x).J(p,x)^{-1}[a(p,x)+b(p,x)u] \tag{7.20}$$
$$\dot{J}^p(x,u) = \frac{\partial J^p}{\partial x}(x)\odot\Big(J(p,x)^{-1}[a(p,x)+b(p,x)u]\Big) \tag{7.21}$$
$$\begin{aligned} \dot{\widehat{J}}(\hat{p},\dot{\hat{p}},x,u) &= \frac{\partial J^o}{\partial x}(x).J(p,x)^{-1}[a(p,x)+b(p,x)u] \\ &\quad + \frac{\partial J^p}{\partial x}(x)\odot\Big(J(p,x)^{-1}[a(p,x)+b(p,x)u]\Big)\,\dot{\hat{p}} \end{aligned} \tag{7.22}$$

Exemple 7.1 Dans le cas de robotes rigide, cette hypothèse est vérifiée, et cela a été remarqué et utilisé par *Middleton et Goodwin* [35] et *Campion et Bastin* [11]. C'est l'"intégration par partie" du terme $K(p,\theta).\ddot{\theta}$ (où K est la matrice d'inertie), possible car K ne dépend pas de $\dot{\theta}$, et que la dérivée de θ est $\dot{\theta}$, mesuré. Dans cet exemple, $x=(\theta,\dot{\theta})$ et

$$J(p,x) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & K(p,x) \end{pmatrix}$$

∎

Cette condition est suffisante pour pouvoir calculer z et Z sans la mesure de $\dot{x}$ quelle que soit H rationelle strictement causale. Dans le cas particulier où

$$H(s) = \frac{1}{\mu s + 1} , \tag{7.23}$$

si bien que (7.6) et (7.7) s'écrivent

$$\mu \dot{z} + z = z_{eq} \tag{7.24}$$
$$\mu \dot{Z} + Z = Z_{eq} , \tag{7.25}$$

ce calcul s'écrit explicitement :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\omega} & = & - J(\hat{p},x)^{-1} \dot{\hat{J}}(\hat{p},\dot{\hat{p}},x,u)\, J(\hat{p},x)^{-1} J^o(x) x \; - \; J(\hat{p},x)^{-1} \dot{J}^o(x,u)\, x \\ & & - J(\hat{p},x)^{-1}[a^o(x) + b^o(x)u] \\ z & = & \omega + \frac{1}{\mu} J(\hat{p},x)^{-1} J^o(x) x \end{array} \right. \tag{7.26}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\Omega} & = & - J(\hat{p},x)^{-1} \dot{\hat{J}}(\hat{p},\dot{\hat{p}},x,u)\, J(\hat{p},x)^{-1} J^p(x) \odot x \; - \; J(\hat{p},x)^{-1} \dot{J}^p(x,u) \odot x \\ & & - J(\hat{p},x)^{-1}[A^p(x) + B^p(x) \odot u] \\ Z & = & \Omega + \frac{1}{\mu} J(\hat{p},x)^{-1} J^p(x) \odot x \end{array} \right. \tag{7.27}$$

Définition 7.2 (Condition CI2) *On dira que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **CI2** *si elle est paramétrée implicitement linéairement (condition* PLI*) et si de plus, il existe des fonctions $\mathcal{C}^1$ de p et de x, $h^o(p,x)$ et $h^p(p,x)$ telles que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tout p, q dans Π,*

$$[J(p,x)^{-1} \begin{pmatrix} J^o(x) \\ J^p(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial h^o}{\partial x}(p,x) \\ \frac{\partial h^p}{\partial x}(p,x) \end{pmatrix}] \frac{\partial}{\partial q} J(q,x)^{-1}[f(q,x) + v(p,x)g(q,x)] = 0 \tag{7.28}$$

Exemple 7.2 Dans le cas de systèmes de dimension 1, ceci est toujours vérifié en prenant :

$$h^o(p,x) = \int_0^x J(p,\xi)^{-1} J^o(\xi)\, d\xi \tag{7.29}$$
$$h^p(p,x) = \int_0^x J(p,\xi)^{-1} J^p(\xi)\, d\xi \tag{7.30}$$

car alors le premier facteur entre crochets dans (7.28) est identiquement nul. ∎

Comme pour la condition CI2, cette condition est suffisante pour pouvoir calculer z et Z sans la mesure de $\dot{x}$ quelle que soit H rationelle strictement causale, et dans le cas où H est donné par (7.23), ce calcul prend la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu\dot{\omega}+\omega & = & -\frac{1}{\mu}\,h^o(\hat{p},x) \;-\; \frac{\partial h^o}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \\ & & +\,[J(\hat{p},x)^{-1}J^o(x)-\frac{\partial h^o}{\partial x}(\hat{p},x)]J(\hat{p},x)^{-1}(a(\hat{p},x)+v(\hat{p},x)b(\hat{p},x)) \\ & & +\,J(\hat{p},x)^{-1}(a^o(x)+v(\hat{p},x)b^o(x)) \\ z & = & \frac{1}{\mu}\,h^o(\hat{p},x)\;+\;\omega \end{array}\right. \tag{7.31}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu\dot{\Omega}+\Omega & = & -\frac{1}{\mu}\,h^p(\hat{p},x) \;-\; \frac{\partial h^p}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \\ & & +\,[J(\hat{p},x)^{-1}J^p(x)-\frac{\partial h^p}{\partial x}(\hat{p},x)]J(\hat{p},x)^{-1}(a(\hat{p},x)+v(\hat{p},x)b(\hat{p},x)) \\ & & +\,J(\hat{p},x)^{-1}(A^p(x)+v(\hat{p},x)B^p(x)) \\ Z & = & \frac{1}{\mu}\,h^p(\hat{p},x)\;+\;\Omega \end{array}\right. \tag{7.32}$$

7.2 Commande "certainty equivalence". Comportement

La loi de commande utilisée ici est la plus simple à imaginer à partir des lois p-dépendantes données par l'hypothèse SF puisque l'on choisit :

$$u \;=\; u_{\mathrm{ST}}(\hat{p},x) \tag{7.33}$$

$\hat{p}$ étant donné par un estimateur. On n'exploite pas la possibilité de modifier les lois de commande par le terme v, que l'on prend donc nul.

On obtient le contrôleur adaptatif suivant :

Contrôleur adaptatif I1 :

$$u \;=\; u_{\mathrm{ST}}(\hat{p},x) \tag{7.34}$$

$P,\ \dot{\hat{p}}$ *donnés par* (4.51) $(\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}})$

ou par (4.64) $(\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}})$ (7.35)

$\dot{\Omega},\ Z_{\mathrm{eq}}$ *donnés par* (7.27) *ou* (7.32) (7.36)

$\dot{\omega},\ z$ *donnés par* (7.26) *ou* (7.31) (7.37)

7.2.1 Analyse de comportement, problème de perturbations

Revenons à l'équation du système bouclé (6.34) sous forme "erreur sur le système"

$$\dot{x} \;=\; s_o(\hat{p},x)\;+\;e_{\mathrm{eq}} \tag{7.38}$$

C'est naturellement une pertubation de (6.35):

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & s_o(\hat{p},x) \\ \dot{\hat{p}} & = & 0 \quad , \end{array}\right.$$

par $\dot{\hat{p}}$ (qui sera donné par un estimateur) et e_{eq}. Hélas, les estimateurs "réalistes" utilisant non pas z_{eq} et Z_{eq} mais z et Z ne rendent pas e_{eq} petit, mais seulement e donné par

$$e = z - Z\hat{p} \ , \tag{7.39}$$

et il est faux que si e est petit en un certain sens, alors e_{eq} le soit. On va donc essayer de réécrire le système bouclé de manière à ce que les perturbations soient non pas $\dot{\hat{p}}$ et e_{eq} mais bien $\dot{\hat{p}}$ et e.

Pour cela, on se restreint à la forme particulière de H:

$$H(s) = \frac{1}{\mu s + 1} \ , \tag{7.40}$$

déja utilisée pour écrire le calcul de Z et z, qui vérifient dans ce cas-là (7.24) et (7.25); e vérifie alors

$$\mu\dot{e} + e = e_{eq} + \mu Z\dot{\hat{p}} \tag{7.41}$$

Cette identité est simple à obtenir. Elle est aussi la conséquense du cas particulier pour une fonction de transfert de la forme (7.40) de ce que l'on appelle parfois le "swapping lemma" (voir par exemple [48]) et qui exprime, si H est une fonction de transfert quelconque (scalaire) la différence

$$H(s).\ Y_1Y_2 - [H(s).Y_1]\ Y_2$$

entre $H(s)$ appliqué au produit Y_1Y_2 et le produit de Y_2 et de $H(s)$ appliqué à Y_1, Y_1 et Y_2 étant des fonctions du temps, éventuellement matricielles (ici, $Y_1 = Z$ et $Y_2 = \tilde{p} = p^* - \hat{p}$). Pour des fonctions de transfert ayant un dénominateur de degré supérieur à 2, cette différence a une expression assez compliquée qui fait intervenir l'état d'une réalisation minimale de H, alors qu'ici elle se réduit au terme $\mu Z\dot{\hat{p}}$, ce qui va nous permettre de poursuivre. C'est la raison essentielle pour laquelle nous nous sommes restreints à une fonction de transfert du type (7.40).

L'intérêt de (7.41) est de nous permettre de réécrire (6.34) sous une forme où les perturbations sont bien e et $\dot{\hat{p}}$. En effet, (7.41) et (6.34) entraînent :

$$\dot{x} = s_o(\hat{p}, x) + \mu\dot{e} + e + \mu Z\dot{\hat{p}} \tag{7.42}$$

que l'on peut réécrire, avec le changement de variable $y = x - \mu e$, et en rajoutant le comportement de Z,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y} & = & s_o(\hat{p}, y + \mu e) + e + \mu Z\dot{\hat{p}} \\ x & = & y + \mu e \\ \dot{Z} & = & -\mu Z + Z_{eq} \end{array} \right. \tag{7.43}$$

On pose alors

$$V(t) = V(\hat{p}(t), y(t)) \tag{7.44}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{\partial V}{\partial x} s_o(\hat{p}, y) \\ & + \frac{\partial V}{\partial x}\left[s_o(\hat{p}, y + \mu e) - s_o(\hat{p}, y) + e + \mu Z\dot{\hat{p}}\right] \\ & + \frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat{p}} \end{aligned} \tag{7.45}$$

d'où, dès que y est dans un domaine où (1.23) (conditions SF) sont vérifiés,

$$\begin{aligned}\dot{V} \;\leq\; -cV \;+\; & \left|\frac{\partial V}{\partial x}[s_o(\hat{p},y+\mu e)-s_o(\hat{p},y)]\right| \\ & +\; \left|\frac{\partial V}{\partial x}e\right| \;+\; \mu\left|\frac{\partial V}{\partial x}Z\dot{\hat{p}}\right| \;+\; \left|\frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat{p}}\right|\end{aligned} \tag{7.46}$$

où, en explicitant la dernière ligne de (7.43),

$$\begin{aligned}\dot{Z} \;=\; & -\mu Z \;+\; J(\hat{p},y+\mu e)^{-1}J^p(y+\mu e)\odot[J(p^*,y+\mu e)^{-1}(a(p^*,y+\mu e)+b(p^*,y+\mu e)u)] \\ & +\; J(\hat{p},x)^{-1}[A^p(x)+B^p(x)\odot u]\end{aligned} \tag{7.47}$$

7.2.2 Résultat local

Théorème 7.3 *Si la famille de systèmes satisfait les conditions PLI et CI1 ou CI2 et satisfait* localement *la condition SF et si de plus on choisit $Z(0)$ et $z(0)$ de norme inférieure à une certaine constante, alors il existe un voisinage de 0 tel que pour toute condition initiale telle que $x(0)$ soit dans ce voisinage et que $\hat{p}(0)$ soit assez proche de p^*, la solution correspondante n'a pas d'explosion en temps fini, est bornée sur $[0,+\infty)$, et sa composante $x(t)$ reste dans le voisinage de 0 où les conditions SF sont vérifiées; de plus, x tend vers 0.*

Nous donnons dans [42] un résultat local sensiblement différent. Voir remarque 7.2.

7.2.3 Résultat global

On suppose maintenant que les conditions SF sont satisfaites globalement. Pour établir une convergence du système adaptatif, nous introduisons des hypothèses suivantes sur la "croissance à l'infini" des champs, de V et de J :

Définition 7.4 (Condition BC1) *On dit que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **BC1** *si l'on a les estimées suivantes sur la croissance à l'infini de V, J, a et b, introduits en (1.21), (1.13), (1.15) et (1.16) :*

Il existe une fonction continue positive k du paramètre et des constantes positives d, α, β, γ, δ telles que, pour tout (p,x) dans $\Pi\times\mathbb{R}^n$,

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}(p,x)\right\| \;\leq\; k(p)\ \mathrm{Sup}\ \{\,1\ ,\ V(p,x)^{\alpha}\,\} \tag{7.48}$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial p}(p,x)\right\| \;\leq\; k(p)\ \mathrm{Sup}\ \left\{\,1\ ,\ V(p,x)^{\beta}\,\right\} \tag{7.49}$$

$$\|a^o(x)\| \;\leq\; k(p)\ \mathrm{Sup}\ \{\,1\ ,\ V(p,x)^{\gamma}\,\} \tag{7.50}$$

$$\|A^p(x)\| \;\leq\; k(p)\ \mathrm{Sup}\ \{\,1\ ,\ V(p,x)^{\gamma}\,\} \tag{7.51}$$

$$\|b^o(x)\ u_{\mathrm{ST}}(p,x)\| \;\leq\; k(p)\ \mathrm{Sup}\ \{\,1\ ,\ V(p,x)^{\gamma}\,\} \tag{7.52}$$

$$\|B^p(x)\odot u_{\mathrm{ST}}(p,x)\| \;\leq\; k(p)\ \mathrm{Sup}\ \{\,1\ ,\ V(p,x)^{\gamma}\,\} \tag{7.53}$$

$$\left\| J(p,x)^{-1} J^p(x) \right\| \leq k(p) \tag{7.54}$$

$$\|s_o(p,x) - s_o(p,y)\| \leq k(p)\ \mathrm{Sup}\left\{ 1\ ,\ V(p,x)^{\delta} \right\} \left(1 + \|x-y\|^d\right) \|x-y\| \tag{7.55}$$

Ces conditions permettent de majorer tous les termes de (7.46) en fonction de puissances de V et des "perturbations $\dot{\hat{p}}$ et e : rappelons que l'on définit

$$V(t) = V(y(t), \hat{p}(t))\ , \tag{7.56}$$

y étant donné par (7.43)-(7.46) entraîne alors l'inégalité suivante où $k(p)$ n'a pas forcément la même valeur que ci-dessus, mais est une fonction de ce dernier et des différentes constantes :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq -cV &+ k(p)\ \mathrm{Sup}\{1, V^{\alpha+\delta}\}\ (1 + \mu^d \|e\|^d)\|e\| \\ &+ k(p)\ \mathrm{Sup}\{1, V^{\alpha}\}\ \|e\| \\ &+ k(p)\ \mathrm{Sup}\{1, V^{\alpha}\}\ \|Z\|\ \|\dot{\hat{p}}\| \\ &+ k(p)\ \mathrm{Sup}\{1, V^{\beta}\}\ \|\dot{\hat{p}}\| \end{aligned} \tag{7.57}$$

et par ailleurs (calcul un peu moins immédiat précisé en (B.63)-(B.54) dans [42], reproduit page 165),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{\|Z\|\} \leq -\mu\|Z\| &+ k(p)\ \mathrm{Sup}\{1, V^{\gamma}\} \\ &+ k(p)\ \mathrm{Sup}\{1, V^{\alpha\gamma}\}\ (\|e\|^{\gamma} + \|e\|^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}) \end{aligned} \tag{7.58}$$

et finalement le théorème suivant

Théorème 7.5 *Sous les hypothèses suivantes:*

les conditions PLI et CI1 ou CI2 sont satisfaites,

SF est satisfaite globalement,

- *les conditions de croissance à l'infini BC1 sont satisfaites, avec :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & < & 1 \\ \alpha + \gamma & \leq & 1 \\ \alpha + \delta & \leq & 1 \\ \beta & \leq & 1 \end{array} \right. \tag{7.59}$$

On utilise le contrôleur décrit ci-dessus avec un estimateur de type $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$ ou $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$, les nombres m_1 et m_2 étant choisis tels que

$$m_2 \geq \alpha + 1 \tag{7.60}$$

$$m_1 \geq \mathrm{Sup}\left\{ 1\ ,\ d\ ,\ \gamma - 1\ ,\ \frac{\gamma}{1-\alpha} - 1\ ,\ \frac{m_2}{1-\alpha} \right\} \tag{7.61}$$

dans le cas ou l'on utilise $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$ et par

$$m_1 \geq \mathrm{Sup}\left\{ 1\ ,\ d\ ,\ \gamma - 1\ ,\ \frac{\gamma}{1-\alpha} - 1 \right\} \tag{7.62}$$

dans le cas ou l'on utilise $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$,

on a les conclusions suivantes sur le comportement du système bouclé : toute solution est définie et bornée sur $[0, +\infty)$*, et* x *tend vers* 0.

Démonstration : Elle est donnée dans [42], reproduite page 163, mais nous la résumons ici rapidement. On construit une fonction quadratique definie positive de V (W_1 dans [42]) et $\|Z\|$ (W_2 dans [42]), donnée par (B.59), et que l'on appelle W (Udans [42]). Le calcul de $\dot{W}$, à partir de $\dot{V}$ et $\frac{d}{dt}\|Z\|$ donnés par (7.57) et (7.58) et des majorations données par la condition BC1 permet d'arriver à

$$\dot{W} \leq -c\,W + k(p)\mathrm{Sup}\{1, W\}\, f(t) \tag{7.63}$$

où $f(t)$ est une somme de fonctions L^k pour différentes valeurs de k. On conclut alors grâce au lemme 3 dans [42] (reproduit page 165) ou au lemme 8.5 (page 108) après avoir remplacé $Sup\{1, W\}$ par $1 + W$ ▽▽▽

Remarque 7.1 Si la fonction de Lyapunov V ne dépend pas de p, ce qui est le cas par exemple si les systèmes de la famille sont équivalents par feedback (condition FE, voir théorème 2.2), l'hypothèse $\beta \leq 1$ est évidemment vérifiée, mais il n'y a pas d'autre gain spectaculaire par rapport au cas "général" En revanche, sous une hypothèse un peu plus forte que celle qui est donnée comme CNS pour l'équivalence par feedback (théorème 2.2), et en modifiant les lois de commandes, on va pouvoir améliorer nettement les résultats obtenus ici. ∎

Remarque 7.2 Dans [42], nous donnons un résultat local de nature différente du théorème 7.3 (voir théorème 1 de [42], reproduit page 160) : nous supposons en fait les hypothèses du théorème 7.5 satisfaites (en particulier les systèmes sont supposés globalement stabilisables) sauf les majorations (7.59) sur les indices α, β, γ (α doit tout de même être strictement inférieur à 1). On définit l'indice

$$\eta_1 = \mathrm{Sup}\{\alpha + \gamma, \alpha + \delta, \beta\},$$

et lorsque η_1 est supérieur à 1, on n'a plus le résultat global énoncé ici, mais l'on peut donner une estimée du domaine de stabilité en fonction de $\eta_1 - 1$ (et de constantes difficiles à évaluer !). ∎

7.3 Modification des lois "certainty equivalence"

En prenant la commande non plus sous la forme certainty equivalence, mais sous la forme :

$$u = u_{ST}(\hat{p}, x) + v, \tag{7.64}$$

nous nous donnons un degré de liberté supplémentaire.

Cette idée a été exploitée en premier par *Middleton et Goodwin* [35] dans le cas de la commande de robots (voir remarque 7.3 page 90).

L'équation (7.45) devient alors

$$\dot{V} \leq -c\,V + \frac{\partial V}{\partial x}\left[s_o(\hat{p}, y+\mu e) - s_o(\hat{p}, y) + e + Z\dot{\hat{p}} + \widehat{J}^{-1}\widehat{g}v\right] + \frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat{p}} \tag{7.65}$$

On peut espérer, grâce à un choix approprié de v, supprimer une partie des termes qui suivent $-cV$ et qui étaient jusque là interprétés comme des perturbations. L'idéal serait qu'il existe $v(x, \hat{p}, e, \dot{\hat{p}})$ tel que

$$\frac{\partial V}{\partial x}\left[s_o(\hat{p}, y+\mu e) - s_o(\hat{p}, y) + e + Z\dot{\hat{p}} + \widehat{J}^{-1}\widehat{g}.v(x, \hat{p}, e, \dot{\hat{p}})\right] + \frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat{p}} = 0 \tag{7.66}$$

Sauf simplification miraculeuse, un tel $v(x, \hat{p}, e, \dot{\hat{p}})$ se décomposerait en
un terme annulant $\frac{\partial V}{\partial x}[s_o(\hat{p}, y+\mu e) - s_o(\hat{p}, y)]$,
un terme annulant $\frac{\partial V}{\partial x}e$,
un terme annulant $\frac{\partial V}{\partial x}Z\dot{\hat{p}}$,
et un terme annulant $\frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat{p}}$.
Malheureusement, $\widehat{J}^{-1}\widehat{b}v$ ne peut atteindre que l'espace engendré par les vecteurs $\widehat{J^{-1}b_k}$, c'est-à-dire par les vecteurs de commande $\widehat{g_k}$ (voir (1.12)). Ainsi, il est par exemple nécessaire[1] que le terme $Z\dot{\hat{p}}$ soit précisément dans l'espace engendré par les $\widehat{g_k}$. Il est hélas difficile de caractériser la direction de Z, qui est donné dynamiquement par (7.25). Une condition suffisante explicite que l'on peut donner pour assurer, à un terme exponentiellement décroissant près, que $Z\dot{\hat{p}}$ va rester dans l'image de la commande est l'existence d'un sous-espace linéaire *constant* G de $\mathbb{R}^n$, tel que :

$$G \subset \text{Span}\,\{g_1, ..., g_m\} \tag{7.67}$$

$$\forall \delta p \in \mathbb{R}^l, \quad \begin{cases} J^p(x)\delta p \in G \\ A^p(x)\delta p \in G \\ B^p_k(x)\delta p \in G \quad k = 1, ..., m \end{cases} \tag{7.68}$$

Sous cette condition, et d'après (7.4), il est clair que $Z_{eq}\dot{\hat{p}}$ reste dans G, ce qui implique, d'après (7.25), que Z y reste à un terme exponentiellement décroissant près. Sous réserve que g soit de rang constant maximal (condition RC), on écrit alors un *pseudo-inverse* $\widehat{g}^\dagger$ de $\widehat{g}$ (voir proposition A.1 page 137), et l'on prend:

$$v = -\mu\,\widehat{g}^\dagger Z\dot{\hat{p}} \tag{7.69}$$

Par ailleurs, ces conditions très fortes impliquent, au vu de (1.11), (1.12), (1.13), (1.14) et (1.16), que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial p} \in \text{Span}\,\{g_1, ..., g_2\} \\ \frac{\partial g_k}{\partial p} \in \text{Span}\,\{g_1, ..., g_2\} \end{cases} \tag{7.70}$$

[1] En fait, cela n'est pas nécessaire pour que le terme $\frac{\partial V}{\partial x}\widehat{J}^{-1}\widehat{g}.v(x, \hat{p}, e, \dot{\hat{p}})$ puisse annuler le terme $\frac{\partial V}{\partial x}Z\dot{\hat{p}}$, mais pour que le terme $\widehat{J}^{-1}\widehat{g}.v(x, \hat{p}, e, \dot{\hat{p}})$ puisse annuler le terme $Z\dot{\hat{p}}$, ce qui est a priori plus exigeant. Nous ne sommes pas en train de prouver que nos conditions sont nécessaires, mais seulement d'expliquer en quoi ce sont les moins exigeantes parmi celles qui sont simples !

et ceci implique, d'après le théorème 2.2, que la famille satisfait la condition FE : tous les systèmes $\mathcal{S}_p$ sont équivalents par feedback, sans difféomorphisme. Moyennant un autre choix de u_{ST}, on peut alors faire en sorte que V ne dépende pas de p (cf. remarque 1.5). Ceci supprime le terme $\frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat{p}}$. Quant aux deux premiers termes, il est difficile de caractériser les cas où l'on saurait agir sur eux via la commande, vu que e est obtenu dynamiquement, et que l'on ne peut tout de même pas demander à tous les champs d'être constants, et que de plus le terme $s_o(\hat{p}, y+\mu e) - s_o(\hat{p}, y)$ est une différence entre les valeurs d'un champ en deux points.

On se place donc dans le cas où (7.67) et (7.68) sont satisfaits, et l'on modifie I1 en :

Contrôleur adaptatif I1bis :

$$u = u_{ST}(\hat{p}, x) + v \tag{7.71}$$
$$v = -\mu \hat{g}^{\dagger}\left(Z\dot{\hat{p}}\right) \tag{7.72}$$
$$\dot{\hat{p}} \quad \textit{donné par } \mathcal{G}_{m_1,m_2} \textit{ ou } \mathcal{LS}_{m_1} \tag{7.73}$$
$$Z \quad \textit{donné par (7.27) ou (7.32)} \tag{7.74}$$
$$z \quad \textit{donné par (7.26) ou (7.31)} \tag{7.75}$$

où r et P sont des fonctions de z, Z, et $\hat{p}$ données par (7.11) ou (7.12) suivant que l'estimateur utilisé est du type $\mathcal{G}_{m_1,m_2}$ ou $\mathcal{LS}_{m_1}$

Le résultat est le suivant :

Théorème 7.6 *Si notre famille de systèmes satisfait les conditions PLI (paramétrage linéaire implicite), SF (stabilisabilité), et CI1 ou CI2 (conditions d'intégrabilité), et si de plus il existe G sous-espace constant de $\mathbb{R}^n$, vérifiant (7.67) et (7.68), alors on peut choisir u_{ST} et V tels que ni s_o ni V ne dépendent de p. Si l'on a de plus, α, γ et d étant des constantes positives et k une fonction continue positive de p,*

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right\| \leq k(p)\ \mathrm{Sup}\ \{\ 1\ ,\ V(p)^{\alpha}\ \} \tag{7.76}$$

$$\|s_o(x) - s_o(y)\| \leq k(p)\ \mathrm{Sup}\left\{\ 1\ ,\ V(p,x)^{\delta}\ \right\}\ \left(1 + \|x-y\|^d\right)\|x-y\| \tag{7.77}$$

avec

$$\alpha + \delta \leq 1\ , \tag{7.78}$$

alors, si l'on utilise le contrôleur (7.71)-(7.75), où m_1 et m_2 satisfont

$$\begin{cases} m_2 \geq \alpha + 1 \\ m_1 \geq \mathrm{Sup}\left\{\ 1\ ,\ d\ ,\ \frac{m_2}{1-\alpha}\right\} \end{cases} \tag{7.79}$$

dans le cas ou l'on utilise $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$, ou

$$m_1 \geq \mathrm{Sup}\ \{\ 1\ ,\ d\} \tag{7.80}$$

dans le cas ou l'on utilise $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$, on a la propriété suivante :
toute solution est définie et bornée sur $[0,+\infty)$, et x tend vers 0.

Démonstration : Elle est très similaire à la précédente, mais beaucoup plus simple car il n'y a plus "couplage" entre l'équation en V et celle en $\|Z\|$, puisque le terme $Z\dot{\hat{p}}$ a disparu. De plus, le terme v n'ajoute pas de complexite, car il n'apparait pas dans Z_{eq}, et donc pas dans Z, mais seulement dans z_{eq}, et donc dans z, et donc dans e, mais l'algorithme d'estimation majore a priori e. $\triangledown\triangledown\triangledown$

Remarque 7.3 Dans [35], le procédé employé par *Middleton et Goodwin* est identique à celui-ci (dans le cas d'un robot rigide, nos hypothèses sont vérifiées, G étant l'espace des vitesses angulaires); cependant, l'équation d'observation choisie dans [35] est (7.1), non multipliée par $\hat{J}^{-1}$, si bien que les valeurs de Z_{eq} et $zeqq$ (7.3)-(7.4) sont modifiées (pas de facteur $\hat{J}^{-1}$); il en résulte un terme supplémentaire dans (7.65), que l'on peut également annuler sous les mêmes conditions. ∎

7.4 Cas particulier des systèmes à paramétrage linéaire explicite

Dans ce paragraphe, nous allons seulement détailler l'application des méthodes décrites plus haut dans le cas de familles de systèmes à paramétrage linéaire implicite au cas bien particulier où ce paramétrage est en fait linéaire *explicite*. Cela simplifie considérablement l'étude précédente, et notamment

- l'obtention des quantités filtrées z et Z (paragraphe 7.1.2), ne pose plus aucun problème, la "réalisation" étant immédiate car $J^p \equiv 0$,

  les conditions de "croissance à l'infini" BC1 sont très simplifiées, voir BC2

Notons que l'on présentera au chapitre 8 des méthodes spécifiques au cas linéaire explicite et qui peuvent donner de bien meilleurs résultats.

7.4.1 Le contrôleur

Obtention de z et Z

vu que $J^p \equiv 0$ et $J^o \equiv I$, les conditons CI1 et CI2 sont trivialement satisfaites. On peut d'ailleurs calculer z par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu\dot{\omega} + \omega & = & -\frac{1}{\mu}x - a^o - b^o u \\ z & = & \frac{1}{\mu}x + \omega \end{array} \right. \tag{7.81}$$

et Z directement par

$$\mu\dot{Z} + Z = Z_{eq} \tag{7.82}$$

Z_{eq} ne dépendant plus de $\dot{x}$.

Estimation et commande

Il n'y a ici aucun changement par rapport au cas où J dépend effectivement de p.

7.4.2 Comportement

Définition 7.7 (Condition BC2) *On dit que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **BC2** *si l'on a les estimées suivantes sur la croissance à l'infini de V, J, a et b, introduits en (1.21), (1.13), (1.15) et (1.16) :*

Il existe une fonction positive k du paramètre et des constantes positives d, α, β, γ, δ telles que

$$\alpha \ < \ 1 \tag{7.83}$$

et, pour tout (p,x) dans $\Pi \times \mathbb{R}^n$,

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(p,x) \right\| \ \leq \ k(p) \ \mathrm{Sup} \ \{ \ 1 \ , \ V(p,x)^{\alpha} \ \} \tag{7.84}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial p}(p,x) \right\| \ \leq \ k(p) \ \mathrm{Sup} \ \left\{ \ 1 \ , \ V(p,x)^{\beta} \ \right\} \tag{7.85}$$

$$\| A^p(x) \| \ \leq \ k(p) \ \mathrm{Sup} \ \{ \ 1 \ , \ V(p,x)^{\gamma} \ \} \tag{7.86}$$

$$\| B^p(x) \odot u_{\mathrm{ST}}(p,x) \| \ \leq \ k(p) \ \mathrm{Sup} \ \{ \ 1 \ , \ V(p,x)^{\gamma} \ \} \tag{7.87}$$

$$\| s_o(p,x) \ - \ s_o(p,y) \| \ \leq \ k(p) \ \mathrm{Sup} \left\{ \ 1 \ , \ V(p,x)^{\delta} \ \right\} \ \left(1 + \| x - y \|^d \right) \| x - y \| \tag{7.88}$$

Le résultat local est le même que dans le cas linéaire implicite (théorème 7.3), et on a le résultat global suivant, où BC1 est remplacé par BC2, et où l'on ne demande plus de condition d'intégrabilité (CI1 ou CI2) puisque le paramétrage linéaire explicite les implique :

Théorème 7.8 *Sous les hypothèses suivantes:*

- *la condition PLE est satisfaite,*

  SF est satisfaite globalement,

  les conditions de croissance à l'infini BC2 sont satisfaites, avec :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \gamma & \leq & 1 \\ \alpha + \delta & \leq & 1 \\ \beta & \leq & 1 \end{array} \right. \tag{7.89}$$

On utilise le contrôleur décrit ci-dessus avec un estimateur de type $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$ *ou* $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$, *les nombres* m_1 *et* m_2 *étant choisis tels que*

$$m_2 \geq \alpha + 1 \tag{7.90}$$

$$m_1 \geq \text{Sup}\left\{1\ ,\ d\ ,\ \gamma-1\ ,\ \frac{\gamma}{1-\alpha}-1\ ,\ \frac{m_2}{1-\alpha}\right\} \tag{7.91}$$

dans le cas ou l'on utilise $\mathcal{G}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$ *et par*

$$m_1 \geq \text{Sup}\left\{1\ ,\ d\ ,\ \gamma-1\ ,\ \frac{\gamma}{1-\alpha}-1\right\} \tag{7.92}$$

dans le cas ou l'on utilise $\mathcal{LS}_{\mathbf{m_1}}$

On a les conclusions suivantes sur le comportement du système bouclé : toute solution est définie et bornée sur $[0,+\infty)$, *et* x *tend vers* 0.

Démonstration : elle est la même que pour le théorème 7.5. Les conditions (7.50) et (7.52) ne sont plus nécessaires car les termes qui les exigeaient sont mutipliés par J^p, qui est ici identiquement nul. ▽▽▽

Remarque 7.4 Dans le cas d'une famille de systèmes linéaires, c'est-à-dire si J est une matrice dépendant uniquement de p (linéairement) et $a(p,.)$ et $b_k(p,.)$ sont, pour tout p des champs linéaires en x, et si la commande u_{ST} est un feedback linéaire, toutes les fypothèses sont vérifiées, avec :

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\ ,\ \beta = 1\ ,\ \gamma = \tfrac{1}{2}\ ,\ \delta = 0\ ,\ d = 0$$

On retrouve ainsi le résultat classique de commande adaptative linéaire avec modélisation exacte (voir [23]). Il apparait ainsi que ce résutat en linéaire est toujours vrai non par en raison de propriétés structurelles des systèmes linéaires, mais seulement parce que la croissance à l'infini des incertitudes n'est pas plus que linéaire. ∎

Remarque 7.5 Dans le même cas linéaire explicite, et avec les mêmes méthodes, mais dans le cas de systèmes linéarisables par feedback et difféomorphisme, *Nam et Arapostatis* [37] ont obtenu des résultats très semblables, avec des conditions paratiquement équivalentes, dans ce cas, à nos conditions BC2. ∎

Chapitre 8

Commande des systèmes à paramétrage linéaire explicite

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont spécifiques au cas d'un paramétrage linéaire explicite. Elles peuvent être considérées comme supérieurs à celles décrites au chapitre précédent pour plusieurs raisons :

- Les contrôleurs obtenus sont de plus petite taille car on exploite le fait que le régresseur Z_{eq} ne dépende pas de $\dot{x}$, ce qui permet de l'utiliser explicitement au cours de l'estimation et évite le recours à un grand nombre de variables dynamiques supplémentaires.

- On obtient une beaucoup plus large classe de contrôleurs, ce qui permet de tenir compte éventuellement de la strucure de la famille de systèmes (sections 8.2.3 et 8.3).

- Contrairement à ceux du chapitre précédent, certains des algorithmes présentés ici (contrôleurs E3 et E4) ne dépendent pas des coordonnées et sont valables intrinsèquement sur la variété où vivent les systèmes.

La section 8.1.1 trace rapidement la démarche générale de ce chapitre. La section 8.2 regroupe tous les contrôleurs utilisant la commande "certainty equivalence" où l'on ne modifie pas les lois de commande connues dépendant du paramètre; on y présente (8.2.1 et 8.2.2) des algorithmes fondés sur les estimateurs "standard" du chapitre 5, puis (8.2.3) un algorithme reposant sur un estimateur utilisant le système lui-même, et qui ne fonctionne que sous des conditions restrictives. A la section 8.3, on donne des méthodes pour modifier les lois de commande en tenant compte de l'adaptation, ce qui est possible sous certaines conditions restrictives et améliore beaucoup le comportement des contrôleurs construits précédemment.

8.1 Méthode

8.1.1 Choix de l'équation d'observation

Nous précisons ici les trois choix possibles de l'équation d'observation introduits au paragraphe 6.3.1, en donnant en particulier la formule explicite des termes z_{eq} et Z_{eq}.

Equation du système "en x"

L'équation du système

$$\dot{x} = f(p^*, x) + g(p^*, x)u \tag{8.1}$$

est linéaire en p^*, et fournit à priori une équation d'observation de type (6.25) :

$$z_{eq} = Z_{eq}\, p^* \tag{8.2}$$

avec

$$Z_{eq} = a^p + b^p \odot u \tag{8.3}$$

$$z_{eq} = \dot{x} - a^o - b^o u \tag{8.4}$$

Equation transformée par difféomorphisme

L'équation du système transformée par difféomorphisme dépendant de $\hat{p}$ s'écrit, avec

$$\xi = \varphi(\hat{p}, x) \tag{8.5}$$

sous la forme

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{p}, x)[f(p^*, x) + g(p^*, x).u] + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\hat{p}, x)\dot{\hat{p}} \ , \tag{8.6}$$

ce qui fournit une autre équation d'observation (8.2) avec

$$z_{eq} = \dot{\xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{p}, x)[a^o + b^o u] - \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\hat{p}, x)\dot{\hat{p}} \tag{8.7}$$

$$Z_{eq} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{p}, x)[a^p + b^p \odot u] \tag{8.8}$$

Equation de Lyapunov

Enfin une troisième possibilité se présente : utiliser comme équation d'observation l'équation "de Lyapunov", c'est à dire, l'équation différentielle satisfaite par

$$V(t) = V(\hat{p}(t), x(t)) \ , \tag{8.9}$$

qui s'écrit

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)[f(p^*,x) + g(p^*,x).u] + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \tag{8.10}$$

Ceci fournit une autre équation d'observation (scalaire) de type (8.2), avec

$$z_{eq} = \dot{V} - \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)[a^o + b^o u] - \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \tag{8.11}$$

$$Z_{eq} = \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)[a^p + b^p \odot u] \tag{8.12}$$

8.1.2 Choix de l'estimateur

Quel que soit le choix fait ci-dessus, Z_{eq} est une fonction seulement de x, u, et eventuellement $\hat{p}$ et peut donc être considéré comme mesuré, tandis que z_{eq} est également fonction de $\dot{x}$ ou $\dot{\xi}$ ou $\dot{V}$ et n'est donc pas disponible.

On est donc dans le cas envisagé à la section 5.4 de la partie estimation, et l'on va utiliser les méthodes que l'on y a introduites, c'est à dire que l'estimateur sera de la forme

$$\dot{\hat{p}} = -\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \tag{8.13}$$

où $\pi_{P,\hat{p}}$ est la projection définie page 42 (4.24), et destinée à contenir l'estimée $\hat{p}$ dans le domaine Π où les hypothèses restent valides, P est la matrice constante (carrée symétrique définie positive) des "gains d'adaptation", et e est la sortie d'un système d'entrée

$$e_{eq} = Z_{eq}\hat{p} - z_{eq} \ , \tag{8.14}$$

ce système devant

1- être tel que e soit calculable à partir des mesures faites (c'est à dire à partir de la mesure de x, et non de celle de $\dot{x}$);

2- être strictement passif (cf. définition 5.4).

Pour satisfaire la première exigeance, on va choisir ce système *strictement causal*, afin que e soit obtenu en "intégrant au moins une fois" e_{eq}, et plus particulièrement le terme en $\dot{x}$ (ou $\dot{\xi}$ ou $\dot{V}$) qui empêche e_{eq} d'être mesurable. Pour toute la suite, on va choisir ce système de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \Xi(\zeta,\hat{p},x) + e_{eq} \\ e &= \Upsilon(\zeta,\hat{p},x) \end{aligned} \tag{8.15}$$

où ζ est l'état, de même taille que e_{eq} et e.

Ceci définit e mais ne peut être utilisé pour le calculer puisque e_{eq} contient $\dot{x}$ ou $\dot{\xi}$ ou $\dot{V}$ (cf. (6.26), (6.29), ou (6.32)). Il existe cependant toujours une manière de calculer e sans utiliser explicitement ces dérivées, c'est-à-dire que l'on n'a pas besoin d'introduire de

conditions supplémentaire du type de CI1 ou CI2 (chapitre 7) :
- Dans le cas où l'équation d'observation est (8.1), e_{eq} a l'expression suivante (6.26) :

$$e_{eq} = -\dot{x} + f(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)u \ , \tag{8.16}$$

si bien qu'en posant

$$\eta = x + \zeta \ , \tag{8.17}$$

on peut réécrire (8.15) sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\eta} & = & \Xi(\eta - x, \hat{p}, x) + f(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)u \\ e & = & \Upsilon(\eta - x, \hat{p}, x) \end{array} \tag{8.18}$$

Dans le cas où l'équation d'observation est (8.6), e_{eq} a l'expression suivante (6.29) :

$$e_{eq} = -\dot{\xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{p},x)\,[f(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)\,u] + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \ , \tag{8.19}$$

si bien qu'en posant

$$\eta = \xi + \zeta \ , \tag{8.20}$$

on peut réécrire (8.15) sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\eta} & = & \Xi(\eta - \xi, \hat{p}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{p},x)[f(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)u] - \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \\ e & = & \Upsilon(\eta - \xi, \hat{p}, x) \end{array} \tag{8.21}$$

Dans le cas où l'équation d'observation est (8.10), e_{eq} a l'expression suivante (6.32) :

$$e_{eq} = -\dot{V} + \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)\,[f(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)\,u] + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \ , \tag{8.22}$$

si bien qu'en posant

$$\eta = V + \zeta \ , \tag{8.23}$$

on peut réécrire (8.15) sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\eta} & = & \Xi(\eta - V, \hat{p}, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)[f(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)u] - \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \\ e & = & \Upsilon(\eta - V, \hat{p}, x) \end{array} \tag{8.24}$$

dans le cas où l'équation d'observation est (8.10). (8.18), (8.21), ou (8.24) peuvent être utilisés pour le calcul de e puisque seules des variables mesurées interviennent[1]

Quant à la deuxième exigence, la stricte passivité (par rapport à deux fonctions positives $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de ζ, $\hat{p}$ et x) du système entrée-sortie (8.15), elle est définie page 54 et d'après la

[1] Les écritures (8.18) et (8.21) n'ont de sens que si l'on est dans $\mathbb{R}^n$, ou dans un système de coordonnées (présence par exemple de $x - \eta$ ou $\xi - \eta$ qui n'a aucun sens intrinsèque); cette "réalisation" n'est donc valable que localement. En revanche, (8.24) ne dépend pas de coordonnées. On verra plus loin (paragraphe 8.2.3) des cas où l'on peut se passer des réalisations (8.18), (8.21) ou (8.24) et obtenir e de manière plus directe et cette fois indépendante du système de coordonnées.

proposition 5.8, elle entraine que sur toute trajectoire du système bouclé, quelles que soient les commandes, $\mathcal{V}(t)$ et $\mathcal{W}(t)$ sont "petites" (cf. (5.52)) en un sens précisé par l'inégalité :

$$\tfrac{1}{2}\|\hat{p}(t) - p^*\|^2 \; + \; \mathcal{V}(X(t)) \; + \; d\int_0^t \mathcal{W}(X(\tau))d\tau \;\; \leq \;\; \tfrac{1}{2}\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \; + \; \mathcal{V}(X(0)) \quad , \quad (8.25)$$

où $X = (\zeta, \hat{p}, x)$.

Remarque 8.1 Dans le cas de la linéarisation par feedback et difféomorphisme, φ étant le difféomorphisme linéarisant, *Bastin et Campion* [7] aboutissent à une construction identique à (8.21), avec :

$$\Xi(\zeta, \hat{p}, x) \;\; = \;\; \Omega\zeta \qquad (8.26)$$

où Ω est une matrice strictement exponentiellement stable. Cependant, nous avons introduit η comme une variable d'état permattant de calculer e *défini* par (8.15), alors que dans [7], la première équation de (8.21) est introduite comme un *obseravateur adaptatif* de ξ (voir aussi *Bastin et Gevers* [8]), η (noté $\hat{z}$ dans [7]) étant en quelque sorte une estimée de ξ (z dans [7]). Les auteurs sont ensuite conduits à utiliser dans leur estimateur l'"erreur"

$$P\,(z - \hat{z})$$

où P, gain d'adaptation, est la solution, définie positive, de l'équation de Lyapunov

$$\Omega^\top P \; + \; P\Omega \;\; = \;\; -Q \;\; , \qquad (8.27)$$

Q étant définie positive quelconque. Ce P n'a pas le même sens que notre gain P, qui peut être choisi quelconque : interprété dans notre formalisme, la sortie du système (8.15) serait

$$e \;\; = \;\; \Upsilon(\zeta, \hat{p}, x) \;\; = \;\; P\zeta \;\; = \;\; P\,(z - \hat{z})\;,$$

P devant satisfaire (8.27) pour que (8.15) soit une système strictement passif (par rapport à $\mathcal{V} = \zeta^\top P\zeta$ et $\mathcal{W} = \zeta^\top Q\zeta$). ∎

8.1.3 Loi de commande

On peut toujours écrire la loi de commande

$$u \;\; = \;\; u_{\text{ST}}(\hat{p}, x) \; + \; v \qquad (8.28)$$

ou v est nul dans le cas de la commande "certainty equivalence" On va étudier ce premier cas à la section 8.2 puis, à la section 8.3, des méthodes pour étendre, grâce au terme v, les cas où l'on obtient la propriété globale.

8.2 Commande certainty equivalence

Ayant choisi la loi de commande (8.28) avec $v \equiv 0$ et l'adaptation (8.13), il nous reste à déterminer le système passif (8.15) pour obtenir une description complète du contrôleur adaptatif.

8.2.1 Contrôleur avec estimateur ($\mathcal{GF}_{m_1,m_2}$)

Ecriture du contrôleur

L'estimateur $\mathcal{GF}_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}}$, introduit à la section 5.4, est du type décrit au paragraphe 8.1.2 avec le choix suivant de Ξ et Υ:

$$\begin{array}{rcl} \Xi(\zeta,\hat{p},x) & = & -\,\|\zeta\|^{m_1-1}\,(1\,+\,\mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq}\,)^{m_2/2}\,\zeta \\ \Upsilon(\zeta,\hat{p},x) & = & \zeta \end{array} \tag{8.29}$$

c'est-à-dire qu'en définissant r par

$$r \;=\; \|e\|^{m_1-1}\,(1\,+\,\mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq}\,)^{m_2/2}, \tag{8.30}$$

e est donné par

$$\dot{e}\,+\,re \;=\; e_{eq} \tag{8.31}$$

Maintenant, selon le choix de l'équation d'observation, et donc de Z_{eq} et de e_{eq}, on obtient différents contrôleurs.

Estimation sur l'équation "en x"

Le contrôleur est donné par $u = u_{ST}(\hat{p},x)$, (8.13), (8.3) et (8.18), dans lequel Ξ et Υ sont donnés par (8.29), c'est-à-dire qu'il s'écrit :

Contrôleur adaptatif E1 :

$$\begin{array}{rcll} u & = & u_{ST}(\hat{p},x) & (8.32) \\ \dot{\hat{p}} & = & -\,\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) & (8.33) \\ Z_{eq} & = & A^p(x)\,+\,B^p(x)\odot u_{ST}(\hat{p},x) & (8.34) \\ e & = & \eta\,-\,x & (8.35) \\ \dot{\eta} & = & -\,r\,[\eta\,-\,x]\,+\,s_o(\hat{p},x) & (8.36) \\ r & = & \|\eta\,-\,x\|^{m_1-1}(1\,+\,\mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq}\,)^{m_2/2} & (8.37) \end{array}$$

Rappelons que

$$s_o(\hat{p},x) \;=\; f(\hat{p},x)\,+\,g(\hat{p},x)u_{ST}(\hat{p},x) \tag{8.38}$$

(cf. conditions SF définitions 1.3).

Estimation sur l'équation transformée par difféomorphisme

Léquation d'observation choisie est ici (8.2), équation du système après difféomorphisme.

Le contrôleur est donné par $u = u_{ST}(\hat{p},x)$, (8.13), (8.8) et (8.21), dans lequel Ξ et Υ sont donnés par (8.29), c'est-à-dire qu'il s'écrit :

Contrôleur adaptatif E2 :

$$u = u_{ST}(\hat{p}, x) \tag{8.39}$$
$$\dot{\hat{p}} = -\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \tag{8.40}$$
$$Z_{eq} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{p}, x)[A^p(x) + B^p(x) \odot u_{ST}(\hat{p}, x)] \tag{8.41}$$
$$e = \eta - \varphi(\hat{p}, x) \tag{8.42}$$
$$\dot{\eta} = -r\,[\eta - \varphi(\hat{p}, x)] + s(\hat{p}, \varphi(\hat{p}, x)) - \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat{p}, x)\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \tag{8.43}$$
$$r = \|\eta - \varphi(\hat{p}, x)\|^{m_1-1}(1 + \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq})^{m_2/2} \tag{8.44}$$

Rappelons que

$$s(\hat{p}, \varphi(\hat{p}, x)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{p}, x)[f(\hat{p}, x) + g(\hat{p}, x)u_{ST}(\hat{p}, x)] \tag{8.45}$$

(cf. conditions SF définitions 1.3).

Estimation sur l'équation de Lyapunov

Le contrôleur est donné par $u = u_{ST}(\hat{p}, x)$, (8.13) où Z_{eq} est donné par (8.12) et e est donné par (8.24) dans lequel Ξ et Υ sont donnés par (8.29), c'est-à-dire qu'il s'écrit :

Contrôleur adaptatif E3 :

$$u = u_{ST}(\hat{p}, x) \tag{8.46}$$
$$\dot{\hat{p}} = -\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \tag{8.47}$$
$$Z_{eq} = \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p}, x)[A^p + B^p \odot u_{ST}(\hat{p}, x)] \tag{8.48}$$
$$e = \eta - V(\hat{p}, x) \tag{8.49}$$
$$\dot{\eta} = -r\,[\eta - V(\hat{p}, x)] + \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p}, x)s_o(\hat{p}, x) - \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p}, x)\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \tag{8.50}$$
$$avec\ r = \|\eta - V(\hat{p}, x)\|^{m_1-1}(1 + \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq})^{m_2/2} \tag{8.51}$$

Rappelons que s_o est donné par (8.38).

Exemple 8.1 Reprenons la famille de systèmes dans $\mathbb{R}^2$ introduite à l'exemple 1.5, et reprise à l'exemple 6.1 :

$$\mathcal{S}_p : \begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + p\,\theta(x_1) \\ \dot{x_2} = p\,u \end{cases} \tag{8.52}$$

On a vu en (1.29), (1.35) et (1.36), qu'en choisissant

$$u_{ST}(p, x) = -\theta'(x_1)[x_2 + p\,\theta(x_1)] - \frac{1}{p}(\omega_1 x_1 + \omega_2[x_2 + p\,\theta(x_1)]) \ , \tag{8.53}$$

$$\varphi(p,x) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \;+\; p\,\theta(x_1) \end{pmatrix} \;, \tag{8.54}$$

le système en boucle fermée obtenu en commandant $\mathcal{S}_p$ par $u_{\mathrm{ST}}(p,.)$ s'écrit, avec

$$\xi \;=\; \varphi(p,x) \;, \tag{8.55}$$

$$\dot{\xi} \;=\; s(\xi) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1 & -\omega_2 \end{pmatrix} \xi \tag{8.56}$$

Comme on l'a remarqué à l'exemple 6.1, le champ s ne dépend pas de p. On peut alors prendre pour U une fonction quadratique de ξ :

$$U(\xi) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\xi^{\top} Q \xi \;=\; \tfrac{1}{2} q_{11}\xi_1^2 \;+\; q_{12}\xi_1\xi_2 \;+\; \tfrac{1}{2} q_{22}\xi_2^2 \tag{8.57}$$

où la matrice sysmétrique définie positive Q est solution de (1.38). Sans changement de coordonnées, le champ en boucle fermée et la fonction de Lyapunov s'écrivent :

$$s_o(p,x) \;=\; \begin{pmatrix} x_2 \;+\; p\,\theta(x_1) \\ -\,p\,\theta'(x_1)[x_2 \;+\; p\,\theta(x_1)] \;-\; \omega_1 x_1 \;-\; \omega_2[x_2 \;+\; p\,\theta(x_1)] \end{pmatrix} \tag{8.58}$$

$$V(p,x) \;=\; U(\varphi(p,x)) \;=\; \tfrac{1}{2} q_{11} x_1^2 \;+\; q_{12} x_1 \,(x_2 + p\,\theta(x_1)) \;+\; \tfrac{1}{2} q_{22}\,(x_2 + p\,\theta(x_1))^2 \tag{8.59}$$

La commande u_{ST} est définie uniquement si p est non nul. On suppose donc, par exemple que l'on sait que p^* est positif, et même strictement supérieur à 1. On peut alors choisir $\Pi = [\frac{1}{2}, +\infty)$ et $\Pi_1 = [1, +\infty)$ (voir (4.22)-(4.23)). La projection $\pi_{\hat{p},P}$ est simplement une multiplication par une fonction scalaire, qui empêche $\hat{p}$ de sortir de $[\frac{1}{2}, +\infty)$:

$$\pi_{\hat{p},P}(s) \;=\; \rho(\hat{p},s)\,s \;, \quad \text{avec} \quad \rho(\hat{p},s) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{p} \;\geq\; 1 \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \;\leq\; \hat{p} \;\leq\; 1 \text{ et } s \;\geq\; 0 \\ 2(\hat{p} - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \;\leq\; \hat{p} \;\leq\; 1 \text{ et } s \;\leq\; 0 \end{cases} \tag{8.60}$$

La matrice P est ici seulement un nombre positif (car p est de dimension 1), ce qui explique que $\pi_{\hat{p},P}$ ne dépende pas de P. On va choisir, pour simplifier, et parce que ce gain réel n'apporte pas grand chose,

$$P \;=\; 1 \tag{8.61}$$

On peut alors écrire dans ce cas-là les contrôleurs E1, E2, et E3. Dans chacun d'eux, la commande est donnée par

$$u \;=\; u_{\mathrm{ST}}(\hat{p},x) \;=\; -\,\theta'(x_1)[x_2 \;+\; \hat{p}\,\theta(x_1)] \;-\; \frac{1}{\hat{p}}\,(\omega_1 x_1 \;+\; \omega_2[x_2 \;+\; \hat{p}\,\theta(x_1)]) \tag{8.62}$$

et l'estimateur s'écrit de la façon suivante :

Contrôleur E1 : Le régresseur de l'équation du système "en x" s'écrit :

$$Z_{\mathrm{eq}} \;=\; \begin{pmatrix} \theta(x_1) \\ u_{\mathrm{ST}}(\hat{p},x) \end{pmatrix} \tag{8.63}$$

si bien que l'estimateur proprement dit est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} &=& -\rho\,[\theta(x_1)(\eta_1 - x_1) + u_{ST}(\hat{p},x)(\eta_2 - x_2)] \\ \dot{\eta}_1 &=& -r\,[\eta_1 - x_1] + x_2 + p\,\theta(x_1) \\ \dot{\eta}_2 &=& -r\,[\eta_2 - x_2] - \hat{p}\theta'(x_1)[x_2 + p\,\theta(x_1)] - (\omega_1 x_1 + \omega_2[x_2 + p\,\theta(x_1)]) \\ r &=& \|\eta - x\|^{m_1-1}\,(1+\theta(x_1)^2 + u_{ST}(\hat{p},x)^2)^{m_2/2} \end{array}\right. \tag{8.64}$$

On a écrit ρ au lieu de

$$\rho(\ \hat{p}\ ,\ \theta(x_1)(\eta_1 - x_1) + u_{ST}(\hat{p},x)(\eta_2 - x_2)\ ) \tag{8.65}$$

où ρ est la fonction à valeur dans $[0,1]$ décrite en (8.60).

Contrôleur E2 : Le régresseur de l'équation du système transformée par $\varphi(\hat{p},.)$ s'écrit (voir (6.23)) :

$$Z_{eq} = \begin{pmatrix} \theta(x_1) \\ u_{ST}(\hat{p},x) + \hat{p}\theta(x_1)\theta'(x_1) \end{pmatrix} \tag{8.66}$$

si bien que l'estimateur proprement dit est, en posant

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \end{pmatrix} = \varphi(\hat{p},x)\ , \tag{8.67}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} &=& -\rho\left[\theta(x_1)(\eta_1 - \hat{\xi}_1) + (u_{ST}(\hat{p},x) + \hat{p}\theta(x_1)\theta'(x_1))\,(\eta_2 - \hat{\xi}_2)\right] \\ \dot{\eta}_1 &=& -r\,[\eta_1 - \hat{\xi}_1] + \hat{\xi}_2 \\ \dot{\eta}_2 &=& -r\,[\eta_2 - \hat{\xi}_2] - \omega_1\hat{\xi}_1 - \omega_2\hat{\xi}_2 + \theta(x_1)\,\dot{\hat{p}} \\ r &=& \|\eta - \hat{\xi}\|^{m_1-1}\,(\,1 + \theta(x_1)^2 + (u_{ST}(\hat{p},x) + \hat{p}\theta(x_1)\theta'(x_1))^2\,)^{m_2/2} \end{array}\right. \tag{8.68}$$

avec la même remarque sur ρ qu'en (8.65).

Contrôleur E3 : Le régresseur (scalaire) de l'équation "de Lyapunov" s'écrit :

$$Z_{eq} = \left(q_{11}\hat{\xi}_1 + q_{12}\hat{\xi}_2\right)\theta(x_1) + \left(q_{12}\hat{\xi}_1 + q_{22}\hat{\xi}_2\right)(u_{ST}(\hat{p},x) + \hat{p}\theta(x_1)\theta'(x_1)) \tag{8.69}$$

si bien que l'estimateur proprement dit est (η est scalaire) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} &=& -\rho\,Z_{eq}\,[\eta - \hat{\xi}^\top Q\hat{\xi}] \\ \dot{\eta} &=& -r\,[\eta - \hat{\xi}^\top Q\hat{\xi}] - \hat{\xi}^\top\Gamma\hat{\xi} + [q_{12}x_1 + q_{22}\theta(x_1)\,(x_2 + \hat{p}\theta(x_1))]\,\dot{\hat{p}} \\ r &=& \|\eta - \hat{\xi}^\top Q\hat{\xi}\|^{m_1-1}\,(1 + Z_{eq}^2)^{m_2/2} \end{array}\right. \tag{8.70}$$

où $\hat{\xi}$ est toujours donné par (8.67), Γ est le terme de droite de l'équation de Lyapunov (1.38) dont Q est solution, et ρ est toujours donné en (8.65).

Nous reprendrons cet exemple, pour discuter, suivant la forme de la fonction θ, des performances de ces contrôleurs, c'est-à-dire de leur capacité à donner le résultat global. ∎

Comportement

Théorème 8.1 (Résultat local) *Si la famille de systèmes (S_p) satisfait les conditions PLE et satisfait* localement *la condition SF, et que l'on utilise un contrôleur adaptatif de type E1, E2, ou E3, où m_1 et m_2 sont choisis tels que :*

$$m_1 \geq 1 \quad ; \quad m_2 > 0 \tag{8.71}$$

alors il existe un voisinage de $(p^*, 0, 0)$ tel que pour toute condition initiale dans ce voisinage, la solution correspondante n'a pas d'explosion en temps fini, est bornée sur $[0, +\infty)$, et sa composante $x(t)$ reste dans le voisinage de 0 où les conditions SF sont vérifiées; de plus, x tend vers 0.

La **démonstration** est donnée page 112. ▽▽▽

Remarque 8.2 Un résultat local semblable à celui-ci est obtenu dans le cas de la linéarisation par feedback et difféomorphisme, par *Bastin et Campion* dans [7]. ∎

Nous allons maintenant donner pour chacun des contrôleurs E1, E2 ou E3 des conditions pour que la stbilisabilité globale à paramètres connus entraine que le domaine de stabilité du théorème ci-dessus ne soit limité.

Théorème 8.2 (Contrôleur E1) *Supposons les hypothèses suivantes satisfaites :*

- *Le contrôleur est E1,*
- *Les champs f et g dépendent linéairement du paramètre (condition PLE)*

  SF est satisfaite globalement,
- *les conditions de croissance à l'infini suivantes sont satisfaites : Il existe une fonction continue positive k du paramètre et des constantes positives d, α, β, γ, δ telles que, pour tout (p, x) dans $\Pi \times \mathbb{R}^n$,*

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(p,x) \right\| \leq k(p) \text{ Sup } \{ 1 , V(p,x)^\alpha \} \tag{8.72}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial p}(p,x) \right\| \leq k(p) \text{ Sup } \left\{ 1 , V(p,x)^\beta \right\} \tag{8.73}$$

$$\|A^p(x)\| \leq k(p) \text{ Sup } \{ 1 , V(p,x)^\gamma \} \tag{8.74}$$

$$\|B^p(x) \odot u_{ST}(p,x)\| \leq k(p) \text{ Sup } \{ 1 , V(p,x)^\gamma \} \tag{8.75}$$

$$\|s_o(p,x) - s_o(p,y)\| \leq k(p) \text{ Sup} \left\{ 1 , V(p,x)^\delta \right\} \left(1 + \|x-y\|^d\right) \|x-y\| \tag{8.76}$$

avec

$$\begin{array}{l} \alpha < 1 \ ; \ \beta \leq 1 \\ \alpha + \delta \leq 1 \\ \alpha + \beta + \gamma \leq 2 \end{array} \tag{8.77}$$

On peut alors choisir m_1 et m_2 tels que

$$m_1 \geq \text{Sup}\{1, d, \frac{1-\beta}{1-\alpha}\} , \tag{8.78}$$

$$0 \leq m_2 \leq m_1 + 1 , \tag{8.79}$$

$$\alpha + \frac{m_2}{m_1+1}\gamma \leq 1 , \tag{8.80}$$

$$\beta + (1 - \frac{m_2}{m_1+1})\gamma \leq 1 , \tag{8.81}$$

et, si l'on fait un tel choix, toute solution est définie et bornée sur $[0, +\infty)$, et x tend vers 0.

La **démonstration** est donnée page 112. ▽ ▽ ▽

Théorème 8.3 (Contrôleur E2) *Supposons les hypothèses suivantes :*

Le contrôleur est E2,

- *Les champs f et g dépendent linéairement du paramètre (condition PLE)*

SF est satisfaite globalement,

- *les conditions de croissance à l'infini suivantes sont satisfaites : Il existe une fonction continue positive k du paramètre et des constantes positives d, α, β_1, β_2, γ, δ telles que, pour tout (p, x) dans $\Pi \times \mathbb{R}^n$,*

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial \xi}(p,\xi) \right\| \leq k(p) \text{ Sup } \{ 1 , U(p,\xi)^{\alpha} \} \tag{8.82}$$

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial p}(p,\xi) \right\| \leq k(p) \text{ Sup } \left\{ 1 , U(p,\xi)^{\beta_1} \right\} \tag{8.83}$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial p}(p,x) \right\| \leq k(p) \text{ Sup } \left\{ 1 , U(p,\varphi(p,x))^{\beta_2} \right\} \tag{8.84}$$

$$\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x)\ A^p(x) \| \leq k(p) \text{ Sup } \{ 1 , U(p,x)^{\gamma} \} \tag{8.85}$$

$$\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x)\ B^p(x) \odot u_{sT}(p,x) \| \leq k(p) \text{ Sup } \{ 1 , U(p,x)^{\gamma} \} \tag{8.86}$$

$$\| s(p,\xi_1) - s(p,\xi_2) \| \leq k(p) \text{ Sup} \left\{ 1 , U(p,\xi)^{\delta} \right\} \left(1 + \| \xi_1 - \xi_2 \|^d \right) \| \xi_1 - \xi_2 \| \tag{8.87}$$

et

$$\begin{array}{l} \alpha < 1 \ ; \ \beta \leq 1 \\ \alpha + \delta \leq 1 \\ \alpha + \beta + \gamma \leq 2 \end{array} \tag{8.88}$$

avec

$$\beta = Sup\{ \beta_1 , \alpha + \beta_2 \} \tag{8.89}$$

On peut alors choisir m_1 et m_2 tels que

$$m_1 \geq \mathrm{Sup}\{1, d, \frac{1-\beta}{1-\alpha}\} , \tag{8.90}$$

$$0 \leq m_2 \leq m_1 + 1 , \tag{8.91}$$

$$\alpha + \frac{m_2}{m_1+1}\gamma \leq 1 , \tag{8.92}$$

$$\beta + (1 - \frac{m_2}{m_1+1})\gamma \leq 1 , \tag{8.93}$$

et, si l'on fait un tel choix, alors toute solution est définie sur $[0, +\infty)$, et de plus toutes les variables d'état sont bornées et x tend vers 0.

La **démonstration** est donnée page 108. ▽▽▽

Remarque 8.3 Les indices α, β, γ, δ et d ne sont pas les mêmes dans ce théorèmes que dans le théorème 8.2. ∎

Théorème 8.4 (Contrôleur E3) *Supposons les hypothèses suivantes satisfaites :*

Le contrôleur est E3,

- *Les champs f et g dépendent linéairement du paramètre (condition PLE)*

SF est satisfaite globalement,

les conditions de croissance à l'infini suivantes sont satisfaites : Il existe une fonction continue positive k du paramètre et des constantes positives d, α, β, γ telles que, pour tout (p, x) dans $\Pi \times \mathbb{R}^n$,

$$\|\frac{\partial V}{\partial x}(p,x).\ A^p(x)\| \leq k(p)\ \mathrm{Sup}\left\{1\ ,\ V(p,x)^{\alpha+\gamma}\right\} \tag{8.94}$$

$$\|\frac{\partial V}{\partial x}(p,x).\ B^p(x) \odot u_{\mathrm{ST}}(p,x)\| \leq k(p)\ \mathrm{Sup}\left\{1\ ,\ V(p,x)^{\alpha+\gamma}\right\} \tag{8.95}$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial p}(p,x)\right\| \leq k(p)\ \mathrm{Sup}\left\{1\ ,\ V(p,x)^{\beta}\right\} \tag{8.96}$$

$$\tag{8.97}$$

avec

$$\beta \leq 1 \quad ; \quad \alpha + \beta + \gamma \leq 2 \tag{8.98}$$

On peut alors choisir m_1 et m_2 tels que

$$m_1 \geq 1 \tag{8.99}$$

$$0 \leq m_2 \leq m_1 + 1 \tag{8.100}$$

$$\frac{m_2}{m_1+1}(\alpha+\gamma) \leq 1 , \tag{8.101}$$

$$\beta + (1 - \frac{m_2}{m_1+1})(\alpha+\gamma) \leq 1 , \tag{8.102}$$

et, si l'on fait un tel choix, alors toute solution est définie et bornée sur $[0,+\infty)$*, et* x *tend vers* 0.

La **démonstration** est donnée page 110. $\triangledown\triangledown\triangledown$

Remarque 8.4 Les indices α, β, γ de ce théorème sont les mêmes que ceux du théorème 8.2 (et donc ne sont pas les mêmes que ceux du théorème 8.3, voir remarque 8.4). Cependant les indices α et γ sont "agrégés, et seule la somme $\alpha+\gamma$ compte ici. ∎

Remarque 8.5 Les conditions de ces théorèmes sont satisfaits dans le cas de la commande adaptative linéaire. Voir aussi remarque 7.4 page 92. ∎

Les conditions de croissance sur V, U, g et f ne sont pas très facile à interpréter. Nous allons montrer sur un exemple (exemple 8.2), mais cela est assez général, que, si l'on fait de la linéarisation par feedback et de la commande linéaire ensuite pour stabiliser, les conditions données pour avoir une convergence globale demandent aux incertitudes sur les champs d'être au plus linéaires à l'infini. Si l'on ne se restreint pas à la commande linéaire pour stabiliser, on peut tolérer des incertitudes plus que linéaires à l'infini, notament en utilisant un contrôleur de type E3. Un exemple de ceci est donné dans [44].

Exemple 8.2 Reprenons encore une fois la famille $(\mathcal{S}_p)$ donnée par (1.28), et reprise à l'exemple 8.1 de ce chapitre (page 99) :

$$\mathcal{S}_p \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_1} &=& x_2 \;+\; p\,\theta(x_1) \\ \dot{x_2} &=& p\,u \end{array} \right. \tag{8.103}$$

D'après le théorème 8.1, le résultat local tient quelle que soit la fonction réelle θ. En revanche, pour savoir si le résultat global tient (ici, il y a bien stabilité globale à p connu), on doit, d'après les théorèmes 8.2, 8.3 et 8.4, calculer les indices α, β, γ, δ et d.

Rappelons que l'on a :

$$A^p(x) \;=\; \left(\begin{array}{c} \theta(x_1) \\ 0 \end{array} \right) \tag{8.104}$$

$$B^p(x) \;=\; \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \tag{8.105}$$

$$u_{\rm ST}(p,x) \;=\; -\,\theta'(x_1)[x_2 \;+\; p\,\theta(x_1)] \;-\; \frac{1}{p}(\omega_1 x_1 \;+\; \omega_2[x_2 \;+\; p\,\theta(x_1)]) \tag{8.106}$$

$$s_o(p,x) \;=\; \left(\begin{array}{c} x_2 \;+\; p\,\theta(x_1) \\ -\,p\,\theta'(x_1)[x_2 \;+\; p\,\theta(x_1)] \;-\; \omega_1 x_1 \;+\; \omega_2[x_2 \;+\; p\,\theta(x_1)] \end{array} \right) \tag{8.107}$$

$$V(p,x) \;=\; \tfrac{1}{2}\,q_{11}x_1^2 \;+\; q_{12}x_1\,(x_2 + p\,\theta(x_1)) \;+\; \tfrac{1}{2}\,q_{22}\,(x_2 + p\,\theta(x_1))^2 \tag{8.108}$$

$$\varphi(p,x) \;=\; \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \;+\; p\,\theta(x_1) \end{array} \right) \tag{8.109}$$

$$s(\xi) \;=\; \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\omega_1 & -\omega_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right) \tag{8.110}$$

et donc

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(p,x) \;=\; q_{11}\,x_1 \;+\; p q_{12}\,[x_2 + p\theta(x_1)] \;+\; (q_{12}x_1 \;+\; q_{22}[x_2 + p\theta(x_1)])\,\theta'(x_1) \tag{8.111}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}(p,x) = q_{12}\,x_1 + q_{22}\,[x_2 + p\theta(x_1)] \tag{8.112}$$

$$\frac{\partial V}{\partial p}(p,x) = (q_{11}x_1 + q_{22}\,[x_2 + p\theta(x_1)])\,\theta(x_1) \tag{8.113}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p\theta'(x_1) & 1 \end{pmatrix} \tag{8.114}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta(x_1) \end{pmatrix} \tag{8.115}$$

Contrôleur E1 : Si θ et θ' sont des fonctions globalement Lipschitziennes,

$$|\theta(x_1)| \le k\,(1+|x_1|) \quad ; \quad |\theta'(x_1)| \le k \quad ; \quad |\theta''(x_1)| \le k \tag{8.116}$$

et l'on a :

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}(p,x)\right| \le k\,(1+|x_1|+|x_2|) \le k\left(1+\sqrt{V(p,x)}\right) \tag{8.117}$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial p}(p,x)\right| \le k\,(1+|x_1|+|x_2|)(1+|x_1|) \le k\,(1+V(p,x)) \tag{8.118}$$

$$\|A^p(x)\| \le k\,(1+|x_1|) \le k\left(1+\sqrt{V(p,x)}\right) \tag{8.119}$$

$$\|B^p(x)\odot u_{sT}(p,x)\| \le k\,(1+|x_1|+|x_2|) \le k\left(1+\sqrt{V(p,x)}\right) \tag{8.120}$$

$$\begin{aligned}\|s_o(p,x)-s_o(p,y)\| &\le k\,(1+|x_2+p\theta(x_1)|)\,\|x-y\| \\ &\le k\left(1+\sqrt{V(p,x)}\right)\|x-y\|\end{aligned} \tag{8.121}$$

Il est donc suffisant que θ et θ' soient des fonctions globalement lipschitziennes pour que les conditions du théorème soient satisfaites avec

$$\alpha \le \tfrac{1}{2} \; ; \; \beta \le 1 \; ; \; \gamma \le \tfrac{1}{2} \; ; \; \delta \le \tfrac{1}{2} \; ; \; d = 0 \tag{8.122}$$

Il est par ailleurs nécessaire que θ soit sous-linéaire car s'il ne l'est pas, c'est-à-dire si

$$\frac{|\theta(x_1)|}{1+|x_1|}$$

est non borné, alors il est impossible que (8.77) soit satisfait, car en prenant $x_2 = -\theta(x_1)$, on a :

$$V(x_1,-p\theta(x_1),p) = \tfrac{1}{2}q_{11}|x_1|^2 \tag{8.123}$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial p}(p,x_1,-p\theta(x_1))\right| = q_{11}\,|x_1|\,|\theta(x_1)|\,, \tag{8.124}$$

donc, en faisant tendre x_1 vers l'infini, on voit que β est strictement supérieur à 1 si θ n'est pas sous-linéaire.

Il n'est pas suffisant que seulement θ soit globalement Lipschitzienne : cela permet de satisfaire (8.72), (8.73), (8.74) et (8.75) avec $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $\beta \leq 1$, et $\gamma \leq \frac{1}{2}$, mais pour vérifier (8.76), c'est-à-dire majorer $\|s_o(p,x) - s_o(p,y)\|$ en fonction de $\|x-y\|$, on a besoin de quelquechose comme une constante de Lipschitz de θ' Par exemple, si

$$\theta(x) \;=\; \int_0^x \sin(e^\tau)d\tau \quad , \tag{8.125}$$

θ est globalement Lipschitzienne, mais il n'est pas possible de trouver δ fini satisfaisant (8.76). En effet, si l'on considère la suite de x et de y :

$$x^j \;=\; (x_1^j, x_2^j) \quad ; \quad y^j \;=\; (y_1^j, y_2^j) \tag{8.126}$$

avec

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1^j &=& \mathrm{Log}(\frac{3\pi}{2} + 2j\pi) & ; & x_2^j &=& 1 - p\theta(x_1^j) \\ y_1^j &=& \mathrm{Log}(\frac{\pi}{2} + 2j\pi) & ; & y_2^j &=& 1 - p\theta(y_1^j) \end{array}$$

et que l'on fixe p, alors la première composante de $s_o(p,x) - s_o(p,y)$ est nulle et la seconde vaut :

$$-\,p(\sin e^{x_1^j} - \sin e^{y_1^j})) \;-\; \omega_1(x_1^j - y_1^j) \;=\; 2p \;-\; \omega_1 \mathrm{Log}\frac{4j+3}{4j+1} \quad ,$$

qui tend vers $2p$ quand j tend vers $+\infty$ et devrait être majoré par (voir (8.76))

$$k\ \mathrm{Sup}\{\,1\,,\,\left(\tfrac{1}{2}\varrho_{11}\mathrm{Log}^2(\frac{3\pi}{2}+2j\pi) + \varrho_{12}\mathrm{Log}(\frac{3\pi}{2}+2j\pi) + \tfrac{1}{2}\varrho_{22}\right)^\delta\,\}\,(1+\mathrm{Log}\frac{2j+1}{2j})^d\,\mathrm{Log}\frac{2j+1}{2j}$$

qui tend vers 0 quand j tend vers $+\infty$ quels que soient k, δ et d finis.

En résumé, il est nécessaire, pour que $(\mathcal{S}_p)$ donné par (8.2) vérifie les hypothèses du théorème 8.2, que θ soit sous-linéaire ; il est suffisant que θ et θ' soient globalement Lipschitziens, et non suffisant que θ soit seulement globalement Lipschitzien, comme le montre la fonction θ donnée par (8.125), qui est Lipschitzienne, mais pour laquelle la famille $\mathcal{S}_p$ ne satisfait plus les hypothèses.

Contrôleur E2 : Ici, il est facile de se rendre compte que

$$\alpha \;=\; \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \beta_1 \;=\; 0 \quad ; \quad \delta \;=\; 0 \quad ; \quad d \;=\; 0 \tag{8.127}$$

(en fait, on pourrait dire que β_1 vaut $-\infty$). Vu que

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x)\right| \;=\; |\theta(x_1)| \quad , \tag{8.128}$$

et que $\alpha = \frac{1}{2}$, il est nécessaire que θ soit sous-linéaire pour que $\beta = \beta_1 + \alpha$ soit inférieur ou égal à 1. Si θ est sous-linéaire et de plus globalement Lipschitzienne (θ' bornée), on peut vérifier que de plus $\gamma \leq \frac{1}{2}$, ce qui permet de conclure que les hypothèses du théorème 8.3 sont satisfaites.

En résumé, il est nécessaire, pour que $(\mathcal{S}_p)$ donné par (8.2) vérifie les hypothèses du théorème 8.2, que θ soit sous-linéaire ; il est suffisant que θ soit globalement Lipschitzien.

Par exemple, si θ est donné par (8.125), alors, le théorème 8.2 montre qu'en utilisant le contrôleur E2, on obtient un système globalement stable, alors que le théorème 8.3 ne donne pas la stabilité globale si l'on utilise le contrôleur E1.

Contrôleur E3 : On retrouve les mêmes conditions que pour E2. En fait, le gain entre les hypothèses des théorèmes 8.3 et 8.4 vient surtout de ce que le théorème 8.4 ne demande rien sur le champ s, qui, dans cet exemple, est de toute façon linéaire, donc Lipschitzien. ∎

Démonstrations

Nous allons utiliser, pour tous ces théorèmes, le lemme suivant, qui est une conséquence immédiate du lemme de Gronwall :

Lemme 8.5 *Soit $U(t)$ une fonction réelle du temps définie sur l'intervalle de temps $[0,T)$ et vérifiant*

$$\dot{U}(t) \leq -b\,U(t) + (1+U(t))[\sum_i f_i(t)\,] \tag{8.129}$$

où b et ζ sont des réels positifs et (f_i) est une famille (finie) de fonctions positives vérifiant :

$$\int_0^T [\,f_i(\tau)\,]^{k_i} d\tau = S_i < \infty \quad ; \quad k_i \geq 1 \tag{8.130}$$

alors

- *$U(t)$ est borné supérieurement, et l'on a une majoration de la borne en fonction des conditions initiales et des S_i :*

$$U(t) \leq U(0)\mathcal{F}(S) + \mathcal{G}(S) \tag{8.131}$$

avec

$$S = \sup_i S_i^{\frac{1}{k_i}} \tag{8.132}$$

ou $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions continues croissantes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$

- *Si de plus $T = +\infty$, alors $\limsup_{t\to T} U(t) \leq 0$*

Démonstration de ce lemme : Conséquence immédiate du lemme de Gronwall. ▽ ▽ ▽

Démonstration du théorème 8.2 : Considérons une solution $(x, \hat{p}, \zeta)$ du système en boucle fermée. Jusqu'à (8.138), on va conserver les notations Ξ et Υ, sans tenir compte du choix (8.29); on n'explicitera qu'ensuite les conséquences de ce choix. En particulier, on note jusque là ζ et non pas e. On a, d'après (6.34) et (8.15),

$$\dot{x} = s_o(\hat{p}, x) - \dot{\zeta} + \Xi(\zeta, \hat{p}, x) \tag{8.133}$$

Si l'on considère alors à nouveau η, déja défini en (8.17) comme l'état du système permettant le calcul de e, par

$$\eta = x + \zeta\ , \tag{8.134}$$

on peut réécrire (8.133) sous la forme suivante (qui est aussi une conséquence de (8.18)) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\eta} & = & s_o(\hat{p},\eta) \ + \ [s_o(\hat{p},x) - s_o(\hat{p},\eta)] \ + \ \Xi(\zeta,\hat{p},x) \\ x & = & \eta \ - \ \zeta \end{array} \right. \tag{8.135}$$

Ceci apparait comme une perturbation de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\eta} & = & s_o(\hat{p},\eta) \\ x & = & \eta \\ \hat{p} & & constant \end{array} \right. \tag{8.136}$$

par ζ et $\dot{\hat{p}}$. On peut encore préciser cela en posant

$$V_o(t) \ = \ V(\hat{p}(t),\eta(t)) \ , \tag{8.137}$$

qui entraîne, l'expression de $\dot{\hat{p}}$ étant donnée par (8.13) et (8.15),

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}_o \ \leq \ -c\ V_o \ + \ \dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},\eta)\,[s_o(\hat{p},\eta+\zeta) - s_o(\hat{p},\eta) \ + \ \Xi(\zeta,\hat{p},x)] \\ - \ \dfrac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},\eta)\ \pi_{\hat{p},P}\left(PZ_{eq}^{\top}\Upsilon(\zeta,\hat{p},x)\right) \end{array} \tag{8.138}$$

Il s'agit alors de préciser en quoi les termes suivant $-c\ V_o$ sont "petits" Si l'on explicite maintenant Ξ et Υ donnés par (8.29), (8.138) peut se réécrire sous la forme suivante, puisque $e = \Upsilon = \zeta$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}_o \ \leq \ -c\ V_o \ + \ \|\dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},\eta)\| \left[\|s_o(\hat{p},\eta+e) - s_o(\hat{p},\eta)\| \ + \ (\sqrt{1 \ + \ \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq}})^{m_2}\|e\|^{m_1}\right] \\ + \ \|\dfrac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},\eta)\|\ \|\pi_{\hat{p},P}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right)\| \end{array} \tag{8.139}$$

Soit alors T la borne supérieure de l'intervalle de définition maximal de la solution suivie. D'après la proposition 5.9, $\hat{p}(t)$ et $e(t)$ sont bornés sur l'intervalle $[0,T)$, et

$$\varepsilon(t) \ = \ (\sqrt{1 \ + \ \mathrm{tr}Z_{eq}(t)^{\top}Z_{eq}(t)})^{\frac{m_2}{m_1+1}}\ e(t) \ , \tag{8.140}$$

est dans $L^{m_1+1}([0,T))$, des bornes pour e , $\hat{p}$, et pour cette norme $L^{m_1+1}([0,T))$ étant données en (5.59). $\hat{p}$ étant borné, on notera k un majorant de $k(\hat{p})$ sur la trajectoire suivie, ainsi d'ailleurs que toute constante (ne dépendant que des conditions initiales) intervenant par la suite.

On va majorer tous les termes qui suivent $-c\ V_o$ en fonction de ε et de V_o. Pour cela, on remarque que :

Pour une constante $k > 0$ dépendant de la matrice P, et pour tout X dans $\mathbb{R}^l$,

$$\|\pi_{\hat{p},P}(X)\| \ \leq \ k\|X\| \ ; \tag{8.141}$$

D'après (8.3), (8.34), (8.74)-(8.75) on a :

$$\sqrt{1 \ + \ \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq}} \ \leq \ k\ \mathrm{Sup}\ \{\ 1\ ,\ V(p,x)^{\gamma}\ \} \tag{8.142}$$

que l'on peut réexprimer en fontion de $V_o = V(p,\eta)$ et non de $V(p,x)$ grâce au lemme 4 de [42], reproduit page 168 (que l'on utilise avec $q = \frac{1}{1-\alpha}$), et à l'inégalité (B.57), ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \mathrm{tr} Z_{eq}{}^{\top} Z_{eq}} &\leq \mathrm{Sup}\{1, V_o{}^{\gamma}\} + k\ \mathrm{Sup}\{1, V_o{}^{\alpha\gamma}\}(|e|^{\gamma} + |e|^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}) \\ &\leq \mathrm{Sup}\{1, V_o{}^{\gamma}\} + k\ \mathrm{Sup}\{1, V_o{}^{\alpha\gamma}\}(|\varepsilon|^{\gamma} + |\varepsilon|^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}) \qquad (8.143)\end{aligned}$$

Utilisant ces deux remarques ainsi que (8.72), (8.76) et (8.73), on réécrit (8.139) en :

$$\begin{aligned}\dot{V}_o \leq\ & -c\, V_o + k\ \mathrm{Sup}\left\{1\ ,\ V_o{}^{\alpha+\delta}\right\}\left(1 + \|\varepsilon\|^d\right)\|\varepsilon\| \qquad (8.144)\\ &+ k\ \mathrm{Sup}\left\{1\ ,\ V_o{}^{\alpha+\frac{m_2}{m_1+1}\gamma}\right\}\|\varepsilon\|^{m_1} \\ &\quad + k\ \mathrm{Sup}\left\{1\ ,\ V_o{}^{\alpha+\frac{m_2}{m_1+1}\alpha\gamma}\right\}[\|\varepsilon\|^{m_1+\frac{m_2}{m_1+1}\gamma} + \|\varepsilon\|^{m_1+\frac{m_2}{m_1+1}\frac{\gamma}{1-\alpha}}] \\ &+ k\ \mathrm{Sup}\left\{1\ ,\ V_o{}^{\beta+(1-\frac{m_2}{m_1+1})\gamma}\right\}\|\varepsilon\| \\ &\quad + k\ \mathrm{Sup}\left\{1\ ,\ V_o{}^{\beta+(1-\frac{m_2}{m_1+1})\alpha\gamma}\right\}[\|\varepsilon\|^{1+(1-\frac{m_2}{m_1+1})\gamma} + \|\varepsilon\|^{1+(1-\frac{m_2}{m_1+1})\frac{\gamma}{1-\alpha}}]\end{aligned}$$

qui donne finalement, d'après (8.80) et (8.81), et en remplaçant $\mathrm{Sup}\{1, V_o\}$ par $(1+V_o)$, qui le majore,

$$\dot{V}_o \leq -c\, V_o + k(1+V_o)\, P(\|\varepsilon\|) \qquad (8.145)$$

où $P(\|\varepsilon\|)$ est une somme de puissances de $\|\varepsilon\|$, dont les exposants sont :

$$1\ ,\ d{+}1\ ,\ m_1\ ,\ m_1{+}\frac{m_2}{m_1+1}\gamma\ ,\ m_1{+}\frac{m_2}{m_1+1}\frac{\gamma}{1-\alpha}\ ,\ 1{+}(1{-}\frac{m_2}{m_1+1})\gamma\ ,\ 1{+}(1{-}\frac{m_2}{m_1+1})\frac{\gamma}{1-\alpha}\ ,$$

tous inférieurs ou égaux à $m_1 + 1$ d'après (8.78)-(8.81).

On conclut alors du lemme 8.5 que $V_o(t)$ est borné sur $[0,T)$, et donc que η l'est, si bien que la solution $(x,\hat{p},\zeta)$ elle-même l'est. Ceci implique que $T = +\infty$. Alors le lemme 8.5 implique, puisque $V_o(t)$ est positif, que $V_o(t)$, et donc $\eta(t)$ tendent vers 0; de plus, vu (8.30), (8.31) et (6.26), $\dot{e}$ est borné, ce qui entraine, vu que e est de puissance $m_1 + 1^{\text{ième}}$ sommable, que e tend vers 0, ce qui permet de conclure que x tend vers 0 $\triangledown\triangledown\triangledown$

Démonstration du théorème 8.3

Cette preuve est très similaire à la précédente. Nous n'écrivons que ce qui les différencie. Posons

$$\xi = \varphi(\hat{p},x) \qquad (8.146)$$

De la même façon qu'en (6.33)-(6.34), on peut écrire :

$$\dot{\xi} = s(\hat{p},\xi) - e_{eq} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}}\ , \qquad (8.147)$$

où e_{eq} est donné par (6.29) et s par (1.24). Cette dernière équation se réécrit, e étant donné par (8.15),

$$\dot{\xi} = s(\hat{p},\xi) - \dot{\zeta} + \Xi(\zeta,\hat{p},x) + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \qquad (8.148)$$

On analyse cela en posant, de la même manière qu'en (8.134),

$$\eta \;=\; \xi + \zeta \;, \tag{8.149}$$

ce qui permet de transformer (8.148) en

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot\eta &=& s(\hat p,\eta) \;+\; [s(\hat p,\eta+\zeta) - s(\hat p,\eta)] \;+\; \Xi(\zeta,\hat p,x) \;-\; \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat p,x)\;\pi_{\hat p,P}\left(PZ_{eq}^{\top}\Upsilon(\zeta,\hat p,x)\right) \\ \xi &=& \eta - \zeta \;, \end{array} \right. \tag{8.150}$$

où l'expression de $\dot{\hat p}$ est donnée par (8.13) et (8.15). On pose alors

$$V_1(t) \;=\; U(\hat p(t),\eta(t)) \;, \tag{8.151}$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned} \dot V_1 \;\le\; -c\,V_1 \;+\; \frac{\partial U}{\partial\xi}(\hat p,\eta)\,[\,s(\hat p,\eta+\zeta) - s(\hat p,\eta) \;+\; \Xi(\zeta,\hat p,x)\,] \\ -\; \left(\frac{\partial U}{\partial p}(\hat p,\eta) \;+\; \frac{\partial U}{\partial\xi}(\hat p,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat p,x)\right)\pi_{\hat p,P}\left(PZ_{eq}^{\top}\Upsilon(\zeta,\hat p,x)\right) \end{aligned} \tag{8.152}$$

dont on déduit, comme dans la preuve précédente, que V_1 satisfait une inéquation similaire à (8.145)

$$\dot V_1 \;\le\; -c\,V_1 \;+\; k(1+V_1)\,P(\|\varepsilon\|) \tag{8.153}$$

et l'on conclut comme plus haut. ▽ ▽ ▽

Démonstration du théorème 8.4

On pose maintenant

$$V \;=\; U(\hat p,\xi) \;=\; V(\hat p,x) \tag{8.154}$$

et l'on a, par définition de e_{eq} (6.32) :

$$\dot V \;=\; \frac{\partial V}{\partial x}(\hat p,x)s_o(\hat p,x) \;-\; e_{eq} \;+\; \frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat p} \tag{8.155}$$

avec s_o donné par (1.20). On en déduit

$$\dot V \;=\; \frac{\partial V}{\partial x}(\hat p,x)s_o(\hat p,x) \;-\; \dot\zeta \;+\; \Xi(\zeta,\hat p,x) \;+\; \frac{\partial V}{\partial p}(\hat p,x)\dot{\hat p} \tag{8.156}$$

où ζ est une solution de (8.15). En posant

$$\eta \;=\; V + \zeta \;, \tag{8.157}$$

on transforme (8.155) en

$$\begin{array}{rcl} \dot\eta &=& \frac{\partial V}{\partial x}(\hat p,x)s_o(\hat p,x) \;+\; \Xi(\zeta,\hat p,x) \;-\; \frac{\partial V}{\partial p}(\hat p,x)\pi_{\hat p,P}\left(PZ_{eq}^{\top}\Upsilon(\zeta,\hat p,x)\right) \\ V &=& \eta + \zeta \end{array} \tag{8.158}$$

L'analogue de (8.137) ou de (8.151) est alors de définir

$$V_L(t) \;=\; \eta(t) \tag{8.159}$$

Notons que V_L, au contraire de V_o et V_1 n'est pas forcément positif. (8.158) donne :

$$\dot{V}_L \;\leq\; -c\,V_L \;-\; c\zeta \;+\; |\Xi(\zeta,\hat{p},x)| + |\frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\;\pi_{\hat{p},P}\left(PZ_{eq}^{\top}\Upsilon(\zeta,\hat{p},x)\right)| \tag{8.160}$$

et en explicitant Ξ et Υ, donnés par (8.29),

$$\begin{aligned}\dot{V}_L \;\leq\; -c\,V_L \;-\; c\zeta \;+\; (\sqrt{1 \;+\; \mathrm{tr}Z_{eq}{}^{\top}Z_{eq}})^{m_2}|e|^{m_1} \\ +\; |\frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)|\;|\pi_{\hat{p},P}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right)|\end{aligned} \tag{8.161}$$

Z_{eq} étant donné par (8.48), et en definissant toujours ε par (8.140), les inégalités (8.94) (8.102) nous donnent

$$\dot{V}_L \;\leq\; -c\,V_L - c\,\zeta \;+\; k\;\mathrm{Sup}\{1\;,\;V_L-\zeta\;\}\;[|\varepsilon|^{m_1} \;+\; |\varepsilon|] \tag{8.162}$$

$|\zeta| = |e|$ étant borné et plus petit que $|\varepsilon|$, on obtient finalement,

$$\dot{V}_L \;\leq\; -c\,V_L \;+\; k(1+V_L)\;P(|\varepsilon|) \tag{8.163}$$

où $P(|\varepsilon|)$ est une somme de puissances de $|\varepsilon|$, dont les exposants sont 1 et m_1. On conclut alors du lemme 8.5 que $V_L(t)$ est borné supérieurement; comme il est par ailleurs borné inférieurement car ζ est borné (voir (8.159) et (8.157)), on en déduit qu'il est borné, et, toutes les autres variables l'étant aussi, les solutions sont définies sur $[0,+\infty)$. Alors on déduit de (8.30), (8.31) et (6.32), et du fait que x, $\hat{p}$ et η sont bornés, que $\dot{e}$ est borné, ce qui entraine, vu que e est de puissance $m_1 + 1^{\text{ième}}$ sommable, que e tend vers 0; mais alors, $\limsup_{t\to T} V_L(t)$ est négative d'après le lemme et positive d'après (8.159) et (8.157), si bien que V_L tend vers 0. Cela permet de conclure. $\triangledown\triangledown\triangledown$

Démonstration du théorème 8.1 : Considérons une solution $(x(t),\hat{p}(t),\eta(t))$, de condition initiale telle que $x(0)$ soit dans Ω, le domaine de stabilité donné par la condition SF locale (définition 1.3, page 13). Tant que $x(t)$ reste dans Ω, on peut reprendre le début des preuves précédentes, et les inégalités (8.139) ou (8.152) ou (8.161) sont vraies.

Soient alors μ_1 et μ_2 tels que

$$\left.\begin{array}{r} V(p,x) \leq \mu_1 \\ \|p^* - \hat{p}\| \leq \mu_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x \in \Omega \tag{8.164}$$

On définit alors un voisinage compact $\mathcal{K}$ de $(0,p^*,0)$ dans l'espace des (x,p,η) par

$$\mathcal{K} \;:\; \left\{\begin{array}{l} V(\hat{p},x) \leq \mu_1 \\ V(\hat{p},\eta) \leq \mu_1 \\ \|p^* - \hat{p}\| \leq \mu_2 \end{array}\right. \tag{8.165}$$

dans le cas de l'algorithme E1, ou par

$$\mathcal{K} \; : \quad \left\{ \begin{array}{l} V(\hat{p},x) = U(p,\xi) \leq \mu_1 \\ U(\hat{p},\eta) \leq \mu_1 \\ \|p^* - \hat{p}\| \leq \mu_2 \end{array} \right. \tag{8.166}$$

dans le cas de l'algorithme E2, ou encore par

$$\mathcal{K} \; : \quad \left\{ \begin{array}{l} V(\hat{p},x) \leq \mu_1 \\ \eta \leq \mu_1 \\ \|p^* - \hat{p}\| \leq \mu_2 \end{array} \right. \tag{8.167}$$

dans le cas de l'algorithme E3. Ce domaine $\mathcal{K}$ étant compact, en utilisant les constantes de Lipschitz sur $\mathcal{K}$ des diverses fonctions intervenant dans (8.139) ou (8.152) ou (8.161), on déduit de ces inégalités, que, pour un certain $k \geq 0$ et tant que la solution suivie reste dans $\mathcal{K}$,

$$\dot{\mathcal{V}} \;\; \leq \;\; -c\,\mathcal{V} \; + \; k\,(\|e\| + \|e\|^{m_1}) \tag{8.168}$$

avec

$$\mathcal{V} \;\; = \left\{ \begin{array}{ll} V_o & \textit{dans le cas de l'algorithme } E1 \\ V_1 & \textit{dans le cas de l'algorithme } E2 \\ V_{\text{L}} & \textit{dans le cas de l'algorithme } E3 \end{array} \right. \tag{8.169}$$

Il est aisé de vérifier que tant que $\mathcal{V}$ vérifie (8.168), on a la majoration suivante :

$$\mathcal{V}(t) \;\; \leq \;\; \mathcal{V}(0) \; + \; k\left((\frac{1}{c})^{\frac{1}{m_1+1}} (\int_0^t \|e\|^{m_1+1})^{\frac{m_1}{m_1+1}} \; + \; (\frac{1}{c})^{\frac{m_1}{m_1+1}} (\int_0^t \|e\|^{m_1+1})^{\frac{1}{m_1+1}} \right) \tag{8.170}$$

or $\int_0^t \|e\|^{m_1+1}$ est majorée par (5.59), ce qui prouve que pour un certain $\mu_3 > 0$,

$$\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \; + \; \|e(0)\|^2 \;\leq\; \mu_3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\mathcal{V}(t) \;\; \leq \;\; \mathcal{V}(0) \; + \; \frac{1}{4}\mu_1 \right] \tag{8.171}$$

On choisit alors des conditions initiales telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\hat{p}(0),x(0)) \;\leq\; \frac{1}{4}\mu_1 \\ \|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \; + \; \|e(0)\|^2 \;\leq\; \mu_3 \\ \sqrt{\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \; + \; \|e(0)\|^2} \;\leq\; \text{Inf}\,\{\frac{1}{4l_o}\mu_1 \,,\, \mu_2\} \end{array} \right. \tag{8.172}$$

(où l_o est la constante de Lipschitz par rapport à x de $V(p,x)$) dans le cas de l'algorithme E1, ou telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\hat{p}(0),x(0)) \;\leq\; \frac{1}{4}\mu_1 \\ \|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \; + \; \|e(0)\|^2 \;\leq\; \mu_3 \\ \sqrt{\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \; + \; \|e(0)\|^2} \;\leq\; \text{Inf}\,\{\frac{1}{4l_1}\mu_1 \,,\, \mu_2\} \end{array} \right. \tag{8.173}$$

(où l_1 est la constante de Lipschitz par rapport à x de $U(p,x)$) dans le cas de l'algorithme E2, ou encore telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\hat{p}(0),x(0)) \;\leq\; \frac{1}{4}\mu_1 \\ \|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \; + \; \|e(0)\|^2 \;\leq\; \text{Inf}\,\{\mu_3 \,,\, \mu_2\} \\ \sqrt{\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \; + \; \|e(0)\|^2} \;\leq\; \frac{1}{4}\mu_1 \end{array} \right. \tag{8.174}$$

dans le cas de l'algorithme E3. De telles conditions initiales assurent que la solution suivie ne sortira pas du domaine $\mathcal{K}$:

Algorithme E1 :

$$\mathcal{V}(0) \;=\; V(\hat{p}(0), x(0)+e(0)) \;\leq\; V(\hat{p}(0), x(0)) \;+\; l_o|e(0)| \;\leq\; \tfrac{1}{2}\mu_1$$

si bien que (8.171) implique que

$$V(\hat{p}(t), \eta(t)) \;=\; \mathcal{V}(t) \;\leq\; \frac{3}{4}\mu_1 \tag{8.175}$$

et finalement

$$V(\hat{p}(t), x(t)) \;\leq\; \mathcal{V}(t) \;+\; l_o|e(t)| \;\leq\; \mu_1 \tag{8.176}$$

(la majoration de $|e(t)|$ étant obtenue d'après (5.59), proposition 5.9). De plus, d'après (5.59), $\|p^*(t) - \hat{p}(t)\|$ reste inférieur à μ_2; ceci, joint à (8.175) et (8.176) prouve bien que $(x(t), \hat{p}(t), \eta(t))$ reste dans $\mathcal{K}$.

Algorithme E2 :

$$\mathcal{V}(0) \;=\; U(\hat{p}(0), \xi(0)+e(0)) \;\leq\; U(\hat{p}(0), \xi(0)) \;+\; l_1|e(0)| \;\leq\; \tfrac{1}{2}\mu_1$$

si bien que (8.171) implique que

$$U(\hat{p}(t), \eta(t)) \;=\; \mathcal{V}(t) \;\leq\; \frac{3}{4}\mu_1 \tag{8.177}$$

et finalement

$$V(\hat{p}(t), x(t)) \;=\; U(\hat{p}(t), \xi(t)) \;\leq\; \mathcal{V}(t) \;+\; l_1|e(t)| \;\leq\; \mu_1 \tag{8.178}$$

(la majoration de $|e(t)|$ étant obtenue d'après (5.59), proposition 5.9). De plus, d'après (5.59), $\|p^*(t) - \hat{p}(t)\|$ reste inférieur à μ_2; ceci, joint à (8.177) et (8.178) prouve bien que $(x(t), \hat{p}(t), \eta(t))$ reste dans $\mathcal{K}$.

Algorithme E3 :

$$|\mathcal{V}(0)| \;=\; |V(\hat{p}(0), x(0)) + e(0)| \;\leq\; V(\hat{p}(0), x(0)) \;+\; |e(0)| \;\leq\; \tfrac{1}{2}\mu_1$$

si bien que (8.171) implique que

$$|\eta(t)| \;=\; |\mathcal{V}(t)| \;\leq\; \frac{3}{4}\mu_1 \tag{8.179}$$

et finalement

$$V(\hat{p}(t), x(t)) \;\leq\; |\mathcal{V}(t)| \;+\; |e(t)| \;\leq\; \mu_1 \tag{8.180}$$

(la majoration de $|e(t)|$ étant obtenue d'après (5.59), proposition 5.9). De plus, d'après (5.59), $\|p^*(t) - \hat{p}(t)\|$ reste inférieur à μ_2; ceci, joint à (8.179) et (8.180) prouve bien que $(x(t), \hat{p}(t), \eta(t))$ reste dans $\mathcal{K}$.

La solution suivie est donc définie pour tout temps positif et vérifiera (8.168) pour tout temps positif, ce qui entraine que e tend vers 0 car il est L^{m_1+1} de dérivée bornée, et donc que $\mathcal{V}$ tend vers 0, et donc que x tend vers 0. $\triangledown\triangledown\triangledown$

8.2.2 Cas où V ne dépend pas de p

Dans les théorèmes que nous venons de donner, la dépendance en p de V joue un rôle très important ; c'est notament elle qui demande le terme de mormalisation (facteur d'exposant $m_1 - 1$ dans les contrôleurs E1, E2 et E3). Ceci justifie l'étude de ce cas particulier, du reste traité de façon privilégiée dans la littérature [59]. Nous donnons donc ici les résultats des algorithmes donnés plus haut, mais sans normalisation ($m_1 - 1 = 0$) dans le cas particulier où V ne dépend pas de p. Ils pourraient plus ou moins être obtenu en prenant $\beta = -\infty$ dans les résultats précédents.

Théorème 8.6 *Supposons que*

Les champs f et g dépendent linéairement du paramètre (condition PLE)

SF est satisfaite globalement, avec une fonction $V(x)$ ne dépendant pas de p.

On a alors les résultats suivants sur les contrôleurs E1, E2, et E3 :

SI *il existe des constantes positives α, δ et d et une fonction continue positive de $k(p)$, telles que :*

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right\| \leq k(p) \text{ Sup } \{ 1 , V(x)^{\alpha} \} \tag{8.181}$$

$$\|s_o(p,x) - s_o(p,y)\| \leq k(p) \text{ Sup} \Big\{ 1 , V(p,x)^{\delta} \Big\} \left(1 + \|x-y\|^d\right) \|x-y\| \tag{8.182}$$

sont satisfaits avec

$$\alpha < 1 \quad et \quad \alpha + \delta \leq 1 , \tag{8.183}$$

et que l'on utilise le contrôleur E1 avec

$$\begin{array}{l} m_1 \geq \text{Sup } \{d, 1\} \\ m_2 = 0 \end{array} \tag{8.184}$$

OU SI *ni U ni φ ne dépendent de p, et il existe des constantes positives α, δ et d et une fonction continue positive de $k(p)$, telles que :*

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi) \right\| \leq k(p) \text{ Sup } \{ 1 , U(\xi)^{\alpha} \} \tag{8.185}$$

$$\|s(p,\xi_1) - s(p,\xi_2)\| \leq k(p) \text{ Sup} \Big\{ 1 , U(\xi)^{\delta} \Big\} \left(1 + \|\xi_1 - \xi_2\|^d\right) \|\xi_1 - \xi_2\| \tag{8.186}$$

avec

$$\alpha < 1 \quad et \quad \alpha + \delta \leq 1 , \tag{8.187}$$

et que l'on utilise le contrôleur E2 avec

$$\begin{array}{l} m_1 \geq \text{Sup } \{d, 1\} \\ m_2 = 0 \end{array} \tag{8.188}$$

OU SI *l'on utilise le contrôleur E3 avec*

$$\begin{array}{rcl} m_1 & \geq & 1 \\ m_2 & = & 0 \end{array} \tag{8.189}$$

ALORS *toute solution est définie sur* $[0, +\infty)$, *et de plus toutes les variables d'état sont bornées et* x *tend vers* 0.

Démonstration du théorème 8.6 : Il suffit de reprendre les démonstrations des théorèmes 8.2, 8.3 ou 8.4 sans les termes en $\frac{\partial V}{\partial p}$ $\nabla\nabla\nabla$

Remarque 8.6 Ces résultats sont à comparer avec celui obtenu par *Taylor, Kokotovic, Marino et Kanellakopoulos* dans le cas de la "strict matching Assumption" qui justement implique que l'on peut choisir une fonction de Lyapunov indépendante du paramètre. ∎

8.2.3 Un autre choix de Ξ et Υ

Introdution

Tous les estimateurs envisagés dans ce chapitre sont du type (8.15)-(8.13) où Ξ et Υ sont à determiner avec pour seule exigeance, pour pouvoir appliquer les resultats de la section 5.4, que le système (8.15) reliant e à e_{eq} soit *strictement passif.*

Cela ouvre énormément de possibilités. On a vu au paragraphe précédent une possibilité de choix, assez systématique et qui marche dans tous les cas.

On va ici suivre l'idée des exemples 5.2 et 5.3, page 55, qui donnent un moyen pour construire systématiquement un système strictement passif à partir d'un champ de vecteurs et d'une fonction positive décroissante le long de ce champ.

Les propriétés SF donnent une fonction positive V décroissante le long du champ $s_o(p, .)$ à p fixé, ce qui suggère reprendre l'exemple 5.3, page 55, avec $X_1 = (\hat{p}, x)$, $X_2 = \zeta$ et $\mathcal{V} = V$, c'est-à-dire de "tenter" le système entrée-sortie suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\zeta} & = & s_o(\hat{p}, \zeta) + u \\ y & = & \nabla_x V(\hat{p}, \zeta) \end{array} \right. \tag{8.190}$$

où $\nabla_x V$ est le gradient partiel de V par rapport à x, défini par

$$\nabla_x V(p, x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x}(p, x) \right]^\top \tag{8.191}$$

c'est-à-dire de prendre

$$\Xi(\zeta, \hat{p}, x) = s_o(\zeta, \hat{p}) \tag{8.192}$$

$$\Upsilon(\zeta, \hat{p}, x) = \nabla_x V(\hat{p}, \zeta) \tag{8.193}$$

D'après ce qui est dit dans cet exemple, ce système est passif si V ne dépend pas de p, ou si, pour un certain $a > 0$,

$$\frac{\partial V}{\partial p}.\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}\Upsilon(\zeta,\hat{p},x)\right) \geq (a-c)V \tag{8.194}$$

ce qui est en général impossible à assurer si $\frac{\partial V}{\partial p}$ n'est pas identiquement nul.

Nous allons donc faire l'hypothèse, dans toute la suite de ce paragraphe, que $V(p,x)$ ne dépend pas de p.

Le contrôleur

Sous cette hypothèse, voyons ce que devient notre calcul de e; on définit e comme la sortie de (8.190) lorsque l'entrée est e_{eq}, soit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= s_o(\hat{p},\zeta) + e_{eq} \\ e &= \nabla V(\zeta) \end{cases} \tag{8.195}$$

Si l'on a choisi de filtrer l'équation du système lui-même, on a :

$$e_{eq} = \dot{x} - s_o(\hat{p},x)\ , \tag{8.196}$$

si bien que

$$\zeta(t) = -x(t) \tag{8.197}$$

est une solution de (8.196), celle de condition initiale $\zeta(0) = x(0)$. On peut choisir cette solution, ce qui veut dire que l'on prend $e = \nabla_x V(x)$, et nous conduit au contrôleur suivant :

Contrôleur adaptatif E4 (valable si V ne dépend pas de p) :

$$u = u_{ST}(\hat{p},x) \tag{8.198}$$
$$\dot{\hat{p}} = \pi_{\hat{p},P}\left(PZ_{eq}^{\top}\nabla V(x)\right) \tag{8.199}$$
$$Z_{eq} = A^p + B^p \odot u_{ST}(\hat{p},x) \tag{8.200}$$

Ce contrôleur a deux avantages sur tous ceux vus précédemment :

- L'état de cet estimateur est simplement $\hat{p}$, c'est-à-dire que l'on peut éviter l'étape de "filtrage" de e_{eq}, puisque la sortie du filtre est une fonction statique de l'état.
- Alors que les "réalisations" du filtrage de l'erreur de type (8.21) demandent de s'être placé dans un système de coordonnées, ou d'être dans $\mathbb{R}^n$, ce contrôleur adaptatif a un sens indépendamment du système de coordonnées.

Comportement

D'après la proposition 5.10, sur toute trajectoire définie sur $[0,T)$, on a, pour tout t dans $[0,T)$,

$$\begin{cases} V(t) + \frac{1}{2}\|\hat{p}(t) - p^*\|^2 \leq V(0) + \frac{1}{2}\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \\ \int_0^T V(x(t))dt \leq V(0) + \frac{1}{2}\|\hat{p}(0) - p^*\|^2 \end{cases} \tag{8.201}$$

L'analyse de type "perturbation" menée par exemple dans les démonstrations du paragraphe 8.2, consiste à interpréter ces majorations comme des majorations de l'erreur, qui agit comme une perturbation, mais elle a ici peu d'intêret puisque cette erreur est précisément l'état qui nous interésse, et l'on peut faire une analyse directe: d'après la première inégalité de (8.201), $\hat{p}$ et x sont bornés. Ceci plus la dernière équation implique que x tend vers 0. De plus, dans le cas ou les hypothèses ne sont satisfaites que localement, on peut préciser un bassin d'attraction grâce à l'inégalité de la proposition 5.10.

On a le résultat suivant :

Théorème 8.7 *Si l'on utilise un contrôleur adaptatif E4, le paramétrage de la famille $(\mathcal{S}_p)$ étant linéaire explicite (condition PLE), alors $(0,p^*)$ est un équilibre stable (non asymptotiquement stable en général) du système bouclé, et*

Si SF est satisfaite globalement, *toute trajectoire est telle que x et $\hat{p}$ sont bornés et que x tend vers 0,*

- Si SF est satisfaite seulement localement, *alors l'affirmation précédente est valable seulement pour les trajectoires dont les conditions initiales sont telles que*

$$V(x(0)) + \frac{1}{2}\|p^* - \hat{p}\|^2 \leq V_o \tag{8.202}$$

où V_o est le plus grand tel que $\{V(x) \leq V_o\}$ soit contenu dans le domaine de validite de SF

Démonstration : Elle a pratiquement été faite avant de donner le théorème; on peut aussi donner une démonstration plus directe qui consiste à prendre

$$V(x) + \frac{1}{2}\|p^* - \hat{p}\|^2 \tag{8.203}$$

comme fonction de Lyapunov de l'ensemble du système bouclé, à réécrire l'inégalité (5.63) de la proposition 5.10 page 64 sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(V(x) + \frac{1}{2}\|p^* - \hat{p}\|^2\right) \leq -c\,V(x) \tag{8.204}$$

(cette inégalité est du reste facile à retrouver directement en dérivant (8.203)), puis à appliquer un théorème de LaSalle, comme cela est fait dans [59] pour le cas de systèmes linéarisés par feedback avec difféomorphisme (indépendant du paramètre). ▽▽▽

Où l'on retrouve des algorithmes adaptatifs "directs"...

En fait, dans le cas de la linéarisation par feedback, cet algorithme E4 se confond exactement avec celui donné par *Taylor, Kokotovic, Marino et Kanellakopoulos* dans [59]. Se plaçant dans un cas où tous les sustèmes sont linéarisables, par un difféomorphisme indépendant de p, on écrit dans [59] une loi linéarisante et stabilisante $u_{ST}(p,x)$ telle que, en posant

$$\xi = \varphi(x)\,, \tag{8.205}$$

le système en boucle fermée s'écrit

$$\dot{\xi} = s(\xi) = A\xi \tag{8.206}$$

où A est une matrice exponentiellement stable, ce aui permet de prendre pour fonction V

$$V(x) = U(\varphi(x)) = \varphi(x)^\top Q\varphi(x) \tag{8.207}$$

où Q est la matrice symétrique définie positive solution de l'équation de Lyapunov

$$A^\top Q + QA = -\Gamma \tag{8.208}$$

(où Γ est une matrice dèfinie positive arbitraire) et l'algorithme E4 s'écrit dans ces conditions

$$\dot{\hat{p}} = -\pi_{\hat{p},P}\left(PZ_{eq}^\top \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)^\top Q\varphi(x)\right) \tag{8.209}$$

qui est exactement l'algorithme donné dans [59], la méthode de synthèse ayant été dans ce papier non pas notre approche "passivité", mais l'approche "Lyapunov" consistant à chercher à faire décroître la fonction de Lyapunov (8.203).

On retrouve ici le lien, en commande adaptative, entre l'approche "passivité" telle qu'elle a été introduite par *Landau* [31] et l'approche "Lyapunov" introduite par *Parks* [45]. Ce phénomène a également été décrit par *Narendra et Valavani* [38].

Une condition suffisante pour pouvoir appliquer cet algorithme

L'algorithme E4 n'est valable que si il existe une fonction de Lyapunov indépendante de p qui convienne à tous les systèmes.

Comme on l'a vu à la remarque 1.5 il suffit que tous les systèmes soient équivalents par feedback (sans difféomorphisme) pour que cela soit possible : On fait d'abord le feedback qui les rqmène à un système fixé, puis l'on stabilise celui-ci. Nous avons donné une CNS pour que les systèmes soient équivalents par feedback. On a donc la proposition suivante :

Proposition 8.8 *Si la famille (S_p) satisfait SF et PLE, et que de plus*

$$\operatorname{rang}\{b_1^o(x),...,b_m^o(x)\} = m \tag{8.210}$$

$$b_k^i(x) \in \text{Span}\{b_1^o(x),...,b_m^o(x)\} \qquad x \in M^n \quad i=1,...,l \quad k=1,...,m \tag{8.211}$$
$$a^i(x) \in \text{Span}\{b_1^o(x),...,b_m^o(x)\} \qquad x \in M^n \quad i=1,...,l \tag{8.212}$$

alors on peut construire u_{ST} de telle façon que V ne dépende pas de p, et l'algorithme E4 vérifie le théorème 8.7.

Démonstration : Cela a été démontré à la remarque 1.5 page 18 et dans les lignes qui précedent l'ennoncé. $\triangledown\triangledown\triangledown$

8.3 Modification des lois "certainty equivalence"

On a vu aux sections précédentes que, lorsque le paramétrage est linéaire explicite, un cas extrêmement favorable est celui où tous les systèmes de la famille sont stabilisables avec une fonction de Lyapunov indépendante du paramètre p : on peut alors toujours stabiliser le système sans la connaissance du paramètre p^*, et ceci en utilisant une commande certainty equivalence, c'est à dire $u = u_{ST}(\hat{p}, x)$. Nous allons ici chercher à rajouter un terme de commande v :

$$u = u_{ST}(\hat{p}, x) + v \tag{8.213}$$

en calculant v de telle manière qu'il compense l'effet de la dépendance en p de V

Au paragraphe 8.3.1, on donne, sous deux conditions M0 ou M2, qui traduisent explicitement la pssibilité de compenser, par v, totalement (pour M1) ou "partiellement" (pour M2) la dépendance de V en p, deux méthodes (une pour le cas M0, une pour le cas M2) pour modifier les algorithmes E3 ou E4 en y incluant cette modification (on obtient les algorithmes E3bis et E4bis). Au paragraphe 8.3.2, se plaçant dans le cas où les systèmes sont équivalents par feedback et difféomorphisme, on donne, grâce aux résultats du chapitre 2, des conditions suffisantes explicites pour que les conditions M0 ou M2 soient satisfaites, et, dans ce cas, une construction explicite du terme v. Dans ce cas, on peut aussi obtenir un algorithme E2bis, modifié de E2.

8.3.1 Discussion générale

L'analyse de la stabilité du système bouclé obtenu avec les algorithmes E3 et E4 est fondée sur l'évolution de

$$V(t) = V(\hat{p}(t), x(t)) \ , \tag{8.214}$$

donnée par

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{\hat{x}} + \frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat{p}} \tag{8.215}$$

Si le terme $\frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat{p}}$ est absent, les algorithmes E3 et E4 donnent un résultat de stabilité globale dès que l'hypothèse SF de stabilisabilité à paramètres connus est globale. On cherche ici à écrire le terme v de (8.214) de telle façon qu'il annule $\frac{\partial V}{\partial p}\dot{\hat{p}}$ dans (8.215) (où v est présent dans $\dot{x}$).

Il est difficile d'appliquer ce que l'on va faire ici aux algorithmes E1 et E2, qui ne s'analysent pas par (8.163) mais par les équations (8.138) ou (8.152).

Posons

$$Z^{cert} = A^p(x) + B^p(x) \odot u_{ST}(\hat{p}, x) \tag{8.216}$$

L'équation du système bouclé obtenu en commandant $\mathcal{S}_{p^*}$ par (8.213) peut s'écrire:

$$\dot{x} = s_o(\hat{p}, x) + Z^{cert}(p^* - \hat{p}) + g^* v \tag{8.217}$$

et l'équation de la variation de la fonction $V = V(\hat{p}(t), x(t))$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p}, x).s_o(\hat{p}, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p}, x).Z^{cert}(p^* - \hat{p}) + \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p}, x).g^* v + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p}, x).\dot{\hat{p}} \tag{8.218}$$

l'idéal serait, pour se ramener complètement au cas où $V(p, x)$ ne dépend pas de p, d'être capable de calculer v tel que :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p}, x).g(p^*, x)v + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p}, x).\dot{\hat{p}} = 0 \tag{8.219}$$

Cela demande d'une part que cette équation ait une solution en v, et d'autre part qu'on puisse la choisir indépendante de p^* On a ainsi une première condition qui permet à coup sûr de satisfaire la condition M0 :

Définition 8.9 (Condition M0) *On dit que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition M0 si elle satisfait SF et si de plus la fonction de Lyapunov est telle qu'il existe une fonction régulière $\bar{v}_o(p, \delta p, x)$ telle que pour tout p, q dans $\mathcal{P}$, tout δp dans $\mathbb{R}^l$ et tout x dans M^n, on ait :*

$$\frac{\partial V}{\partial x}(p, x)g(q, x)\bar{v}_o(p, \delta p, x) + \frac{\partial V}{\partial p}(p, x)\delta p = 0 \tag{8.220}$$

Il suffit en effet, si cette condition est satisfaite, de prendre

$$v = \bar{v}_o(\hat{p}, \dot{\hat{p}}, x) \tag{8.221}$$

En fait, cette hypothèse, qui fait intervenir deux valeurs du paramètres est difficile à vérifier. Une hypothèse plus naturelle serait de ne demander à $\bar{v}_o$ d'être solution de (8.220) que si $p = q$. Cette hypothèse-là est bien une hypothèse sur *chacun* des systèmes :

Définition 8.10 (Condition M1) *On dit que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition M1 si elle satisfait SF et si de plus la fonction de Lyapunov est telle qu'il existe une fonction régulière $\bar{v}_1(p, \delta p, x)$ telle que pour tout p dans $\mathcal{P}$, tout δp dans $\mathbb{R}^l$ et tout x dans M^n, on ait :*

$$\frac{\partial V}{\partial x}(p, x)g(p, x)\bar{v}_1(p, \delta p, x) + \frac{\partial V}{\partial p}(p, x)\delta p = 0 \tag{8.222}$$

Il est bien clair que, si g ne dépend pas de p, alors M1 implique M0. On a donc :

Proposition 8.11 *Si la famille (S_p) satisfait PLE et SF, et de plus M0, alors les contrôleurs adaptatifs E3 ou E4 modifiés en remplaçant la loi de commande certainty equivalence (8.198) ou (8.46) par :*

$$u = u_{ST}(\hat{p},x) + \bar{v}_o(\hat{p},x,\dot{\hat{p}}) \quad , \tag{8.223}$$

où l'expression de $\dot{\hat{p}}$, donnée par (8.199) ou (8.47) est une fonction de l'état du contrôleur seulement, donne les mêmes résultats exactement que E3 ou E4 dans le cas où V ne dépendait pas de p.
La condition M0 est satisfaite si M1 est satisfaite et que g ne dépend pas de p, c'est-à-dire

$$b_k^i(x) = 0 \qquad x \in M^n \quad i = 1,...,l \quad k = 1,...,m \tag{8.224}$$

Démonstration : découle de ce qui précède. ▽ ▽ ▽

Si cependant la condition M1 est satisfaite, et que g dépend bel et bien de p, alors le v donné par la condition M1 n'est pas solution de (8.219) mais de

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x).g(\hat{p},x)v + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x).\dot{\hat{p}} = 0 \quad , \tag{8.225}$$

ce qui donne, au lieu de (8.219),

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x).g(p^*,x).\bar{v}_1(\hat{p},x,\dot{\hat{p}}) + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x).\dot{\hat{p}} = \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)\ Z^v.(p^* - \hat{p}) \tag{8.226}$$

avec

$$Z^v = G^p(x) \odot \bar{v}_1(\hat{p},x,\dot{\hat{p}}) \tag{8.227}$$

Si l'on définit alors u par

$$u = u_{ST}(\hat{p},x) + \bar{v}_1(\hat{p},x,\dot{\hat{p}}) \quad , \tag{8.228}$$

on peut réécrire (8.217) sous la forme :

$$\dot{x} = s_o(\hat{p},x) + g(\hat{p},x)v + \left[Z^{cert} + Z^v\right](p^* - \hat{p}) \tag{8.229}$$

Suivant une démarche semblable à celle qui a conduit aux algorithmes E3 ou E4, on aboutit alors aux algorithmes modifiés suivants :

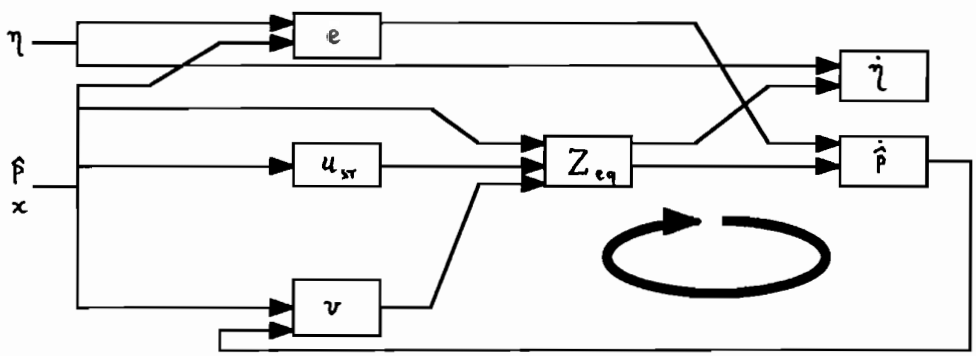
$$\dot{\hat{p}} = -\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right)$$

$$E3\ bis\ : \begin{cases} Z_{eq} = \dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)\left[Z^{cert} + Z^v\right] \\ e = \eta - V(\hat{p},x) \\ \dot{\eta} = -r\,[\eta - V(\hat{p},x)] + \dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)s(\hat{p},x) - \dfrac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \end{cases}$$

$$E4\ bis\ : \begin{cases} Z_{eq} = Z^{cert} + Z^v \\ e = -\nabla_x V(\hat{p},x) = -[\dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)]^{\top} \end{cases} \tag{8.230}$$

Le problème est qu'alors, vu que Z_{eq} dépend de $\bar{v}_1$ qui dépend lui même de $\dot{\hat{p}}$, ces équations, tant dans le cas de E3 que dans celui de E4, sont implicites. Cette difficulté a été rencontrée dans le cas de la linéarisation adaptative par *Kanellakopoulos, Kokotovic et Marino* dans [28], où est donné un exemple dans lesquels ces équations n'ont pas de solution[2] (voir exemple 8.3). Ici, nous allons faire disparaitre le caractère implicite des équations par un "dédoublement" de l'estimation.

Le caractère implicite des équations (8.230) est traduite par le schéma (statique) suivant, où les flèches signifient "... est utilisé pour calculer ..." (Ce schéma représente l'obtention de $\dot{\hat{p}}$ et $\dot{\eta}$ (et u) pour l'algorithme E3bis de (8.230); pour E4bis, il faut supprimer tout ce qui concerne η)



Pour rompre cette boucle, on utilise une nouvelle estimée $\hat{q}$ de p^*, seulement pour le calcul de v. Précisément, on considère le système sous la forme

$$\dot{x} \;=\; f(p^*,x) \;+\; g(p^*,x)u_{ST} \;+\; g(q^*,x)v \tag{8.231}$$

et $\hat{q}$ est alors une estimée de q^*, qui est bien entendu égal à p^* On cherche maintenant v solution non plus de (8.219) ni de (8.225), mais de

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x).g(\hat{q},x)v \;+\; \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x).\dot{\hat{p}} \;=\; 0\ , \tag{8.232}$$

Cette solution existe si la condition M2 est vérifiée :

Définition 8.12 (Condition M2) *On dit que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition M2 si elle satisfait SF et si de plus la fonction de Lyapunov est telle qu'il existe une fonction régulière $\bar{v}_2(p,q,\delta p,x)$ telle que pour tout p, q dans $\mathcal{P}$, tout δp dans $\mathbb{R}^l$ et tout x dans M^n, on ait :*

$$\frac{\partial V}{\partial x}(p,x)g(q,x)\bar{v}_2(p,q,\delta p,x) \;+\; \frac{\partial V}{\partial p}(p,x)\delta p \;=\; 0 \tag{8.233}$$

[2] Il est possible que cela ne pose aucun problème : ces équations sont implicites mais peuvent tout-à-fait avoir une solution ! Il est même assez clair que, localement c'est en généneral le cas. Cependant, il semble naturel de prétendre qu'en général, il existe un ensemble de codimension 1 où l'on ne peut pas "résoudre"

Remarque 8.7 La condition M0 implique la condition M2, avec $\bar{v}_2$ indépendant de q. ∎

Sous cette condition M2, on peut satisfaire (8.232) en prenant $v = \bar{v}_2(\hat{p}, \hat{q}, \dot{\hat{p}}, x)$. L'équation du système bouclé s'écrit alors, au lieu de (8.226),

$$\dot{x} \;=\; s_o(\hat{p},x) \;+\; g(\hat{q},x)v \;+\; \left(Z^{cert} \;,\; Z^v\right)\begin{pmatrix} p^* - \hat{p} \\ q^* - \hat{q} \end{pmatrix} \tag{8.234}$$

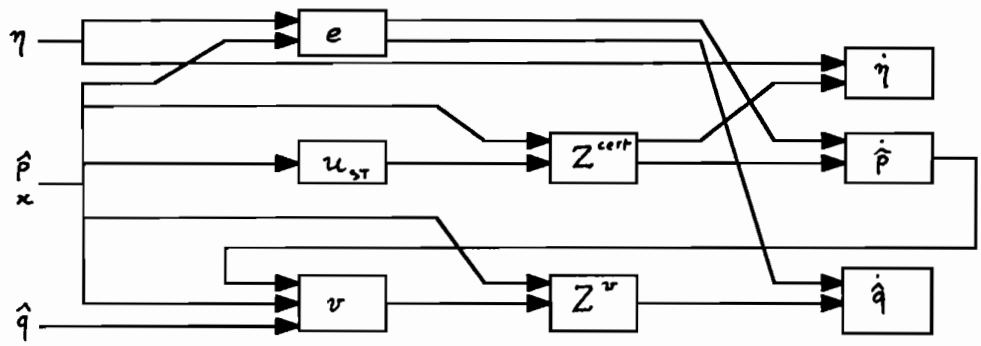
et la "double estimation" s'écrit, au lieu de (8.230),

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{p}} \\ \dot{\hat{q}} \end{pmatrix} \;=\; -\,\pi_{P,\left(\begin{smallmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\end{smallmatrix}\right)}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right)$$

$$E3\ ter\ :\quad \begin{cases} Z_{eq} \;=\; \dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)\left(\, Z^{cert} \;,\; Z^v \,\right) \\ e \;=\; \eta \;-\; V(\hat{p},x) \\ \dot{\eta} \;=\; -\,r\,[\,\eta \;-\; V(\hat{p},x)\,] \;\; + \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)s(\hat{p},x) \;\; - \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\pi_{P,\left(\begin{smallmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\end{smallmatrix}\right)}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \end{cases} \tag{8.235}$$

$$E4\ ter\ :\quad \begin{cases} Z_{eq} \;=\; (\, Z^{cert} \;,\; Z^v \,) \\ e \;=\; -\,\nabla_x V(\hat{p},x) \;=\; -\,[\dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)]^{\top} \end{cases}$$

On a alors bien brisé la boucle dans le schéma précédent, qui devient :



On a le résultat suivant :

Proposition 8.13 *Si la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait PLE et SF, et de plus M2, alors les contrôleurs adaptatifs E3ter ou E4ter modifiés de E3 et E4 obtenus en prenant*

$$u \;=\; u_{ST}(\hat{p},x) \;+\; \bar{v}_2(\hat{p},\hat{q},x,\dot{\hat{p}}) \;\;, \tag{8.236}$$

$\dot{\hat{p}}$ et $\dot{\hat{q}}$ étant donnés par (8.235), donnent les mêmes résultats exactement que E3 ou E4 dans le cas où V ne dépendait pas de p, en remplaçant $\hat{p}$ par $\left(\begin{smallmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\end{smallmatrix}\right)$ et p^* par $\left(\begin{smallmatrix}p^*\\ p^*\end{smallmatrix}\right)$.

Sous réserve que g soit de rang constant maximal (condition RC, page 22), la condition M2 est satisfaite dès que M1 est satisfaite et que $Span\{g_1, ..., g_m\}$ *ne dépend pas de p, c'est-à-dire*

$$b_k^i(x) \in \text{Span}\{b_1^o(x), ..., b_m^o(x)\} \qquad x \in M^n \quad i = 1, ..., l \quad k = 1, ..., m \tag{8.237}$$

Remarque 8.8 L'hypothèse d'"extended matching assumption" pour une famille de systèmes linéarisables par feedback et difféomorphisme, donnée dans [28] implique aussi M2 puisque

Elle implique M1 (démonstration dans [28]),

- Elle implique que l'image de $g(p,x)$ ne dépend pas de p (voir proposition 2.3) ∎

Démonstration de la proposition 8.13 : semblable à celles des théorèmes 8.6 et 8.7, en remplaçant $\hat{p}$ par $\binom{\hat{p}}{\hat{q}}$ et p^* par $\binom{p^*_\bullet}{p^*}$. On peut donner dans le cas de E4ter une preuve "directe", semblable à celle donnée dans [28], toujours en remplaçant $\hat{p}$ par $\binom{\hat{p}}{\hat{q}}$ et p^* par $\binom{p^*_\bullet}{p^*}$.

La dernière assertion (M1+(8.237)$\Longrightarrow$M2) est simple à prouver : M1 fournissant la fonction $\bar{v}_1(\hat{p}, x, \delta p)$, on définit

$$\bar{v}_2(p, q, x, \delta p) = g(\hat{q}, x)^\dagger g(\hat{p}, x)\bar{v}_1(\hat{p}, x, \delta p) \tag{8.238}$$

où $g^\dagger$ est un pseudo-inverse fourni par la proposition A.1; ce $\bar{v}_2$ satisfait (8.233) car tous les $g_k(\hat{p}, x)$ sont dans l'image de $g(\hat{q}, x)$. ▽ ▽ ▽.

8.3.2 Cas de systèmes équivalents par feedback et difféomorphisme

On suppose ici que les systèmes sont équivalents par feedback et difféomorphisme. On a donné au chapitre 2 de conditions pour cela. Notons que dans le cas, souvent traité, ou tous les systèmes de la famille sont linéarisables par feedback et difféomorphisme, ils sont bien équivalents deux à deux. Soit alors, par exemple, $\varphi(p,.)$, $\alpha(p,.)$, $\beta(p,.)$ le difféomorphisme et le feedback qui transforment $\mathcal{S}_p$ en $\mathcal{S}_{\bar{p}}$, fixé (voir définition 1.5, page 19). Si l'on définitit alors $u_{ST}(p,.)$ à partir de $u_{ST}(\bar{p},.)$ par

$$u_{ST}(p, x) = \alpha(p, x) + \beta(p, x)u_{ST}(\bar{p}, \varphi(p, x)) \ , \tag{8.239}$$

alors s, champ bouclé transformé par φ (voir (1.24)) est indépendant de p, c'est-à-dire que pour tout p, le système $\mathcal{S}_p$ bouclé par $u_{ST}(p,.)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= s(\xi) = f(\bar{p}, \xi) + g(\bar{p}, \xi)u_{ST}(\bar{p}, \xi) \\ \xi &= \varphi(p, x) \end{aligned} \tag{8.240}$$

On peut donc prendre U indépendant de p :

$$U(p, \xi) = U(\bar{p}, \xi) = U(\xi) \tag{8.241}$$

Ceci implique que $V(p,x)$ peut s'écrire (voir (1.26)) :

$$V(p, x) = U(\varphi(p, x)) \ , \tag{8.242}$$

et donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial p} \tag{8.243}$$

Dans ces conditions, (8.220) se réécrit

$$\frac{\partial U}{\partial x}(p,x)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x)g(q,x)\bar{v}_o(p,\delta p,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(p,x)\delta p\right] = 0 \ , \tag{8.244}$$

(8.222) se réécrit

$$\frac{\partial U}{\partial x}(p,x)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x)g(p,x)\bar{v}_1(p,\delta p,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(p,x)\delta p\right] = 0 \ , \tag{8.245}$$

et (8.233) se réécrit

$$\frac{\partial U}{\partial x}(p,x)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x)g(q,x)\bar{v}_2(p,q,\delta p,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(p,x)\delta p\right] = 0 \tag{8.246}$$

Il est alors suffisant, pour satisfaire ces équations d'annuler le crochet en facteur de $\frac{\partial U}{\partial x}$. La possibilité d'annuler cela est très proche de la condition FDEM (définition 1.6 page 21). Ceci est précisé par le lemme suivant :

Lemme 8.14 *Si la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **RC** *(g de rang constant maximal), la condition* **FDEM** *(équivalence par feedback et difféomorphisme avec une condition de matching), et la condition* **SF** *(stabilisabilité par feedback), où l'on choisit les lois de commande $u_{ST}(p,.)$ telles que le champ s (champ en boucle fermée transformé par le difféomorphisme donné par FDEM, voir (8.240)) soit indépendant de p, ainsi que la fonction positive U (voir (8.241)), alors*

- *Il existe une fonction $\bar{v}_1(p,\delta p,x)$, linéaire en δp et ayant par rapport à (p,x) la même régularité que les champs f et g, telle que, pour tout p dans Π, tout x dans M^n et tout δp dans $\mathbb{R}^l$, on ait*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x)g(p,x)\bar{v}_1(p,\delta p,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(p,x)\delta p = 0 \tag{8.247}$$

  En particulier, $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition M1.

- **Si, de plus, l'image de $g(p,x)$ ne dépend pas de p,** *((2.2), (2.4), ou (2.5)), alors il existe une fonction $\bar{v}_2(p,q,\delta p,x)$, linéaire en δp et ayant par rapport à (p,q,x) la même régularité que les champs f et g, telle que, pour tout p et q dans Π, tout x dans M^n et tout δp dans $\mathbb{R}^l$*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p,x)g(q,x)\bar{v}_2(p,q,\delta p,x) + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(p,x)\delta p = 0 \tag{8.248}$$

  En particulier, $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition M2.

- **Si, de plus, $g(p,x)$ ne dépend pas de p,** *alors il existe une fonction $\bar{v}_1(p,\delta p,x)$, linéaire en δp et ayant par rapport à (p,x) la même régularité que les champs f et g, telle que, pour tout p et q dans Π, tout x dans M^n et tout δp dans $\mathbb{R}^l$, on ait*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)g(q,x)\bar{v}_o(p,\delta p,x) + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x)\delta p = 0 \qquad (8.249)$$

En particulier, $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition M0.

Démonstration du lemme 8.14 : On définit $\bar{v}_1(p,x,\delta p)$ par

$$\bar{v}_1(p,x,\delta p) = -g(p,x)^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x)\delta p \qquad (8.250)$$

où $g^\dagger$ est le preudo-inverse de g construit à la proposition A.1, qui a la même régularité par rapport à x et p que les g_k car g est de rang constant maximal. Un tel choix satisfait bien (8.247) puisque d'après FDEM,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x)\delta p$$

reste dans l'image de $g(p,x)$.

Pour le deuxième point, comme en (8.238), dans la preuve de la proposition 8.13, il suffit de prendre

$$\bar{v}_2(p,q,x,\delta p) = -g(q,x)^\dagger \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x)\delta p \ , \qquad (8.251)$$

qui satisfait bien (8.248) puisque

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x)\delta p$$

reste dans l'image de $g(q,x)$ vu qu'il reste dans l'image de $g(p,x)$ d'après FDEM, et que cette image ne dépend pas de p et est donc confondue avec l'image de $g(q,x)$.

Pour le troisième point, on définit $\bar{v}_o(p,x,\delta p)$ comme $\bar{v}_2(p,q,x,\delta p)$ en (8.251) : ce dernier ne dépend pas ici de q puisque $g(q,x)$ n'en dépend pas. $\triangledown\triangledown\triangledown$

On peut prendre ce lemme comme l'énnoncé de conditions suffisantes pour M0, M1, ou M2, mais on peut aussi exploiter le fait qu'elles permettent d'annuler le terme en $\dot{\hat{p}}$ "plus en amont", c'est-à-dire avant multiplication par $\frac{\partial U}{\partial x}$; cela permet d'étendre les modifications faites sur les contrôleurs E3 ou E4, qui travaillent "après application de la fonction de Lyapunov" au contrôleur E2, qui travaille seulement " après application du difféomorphisme"

Nous allons ennoncer une résultat assez général utilisant la condition suffisante très simple pour FDEM donnée au théorème 2.9.

On rappelle que la distribution $\mathcal{G}^p$ est la distribution de commande du système $\mathcal{S}_p$:

$$\mathcal{G}^p(x) = \mathrm{Span}\{\ g_1(p,x)\ ,\ \ldots\ ,\ g_m(p,x)\ \} \qquad (8.252)$$

Théorème 8.15 *Supposons que la famille $(\mathcal{S}_p)$ satisfait la condition* **PLE** *(paramétrage linéaire explicite), et la condition* **SF** *(stabilisabilité par feedback), et que de plus*

- *La distribution $\mathcal{G}^p$ vérifie :*

  - *$\mathcal{G}^p$ est indépendante de p,* (8.253)
  - *$\mathcal{G}^p$ est involutive (pour tout p),* (8.254)
  - rang $\mathcal{G}^p = m$ *(condition* **RC***),* (8.255)
  - rang Span$\{\mathcal{G}^p, [f(p,.),\mathcal{G}^p]\} = 2m$ (8.256)

- *Le champ f est tel que*

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} \in \text{Span}\{\mathcal{G}^p, [f(p,.),\mathcal{G}^p]\} \qquad i=1,...,l \tag{8.257}$$

Alors il existe (globalement) une unique famille $(X_1,...,X_l)$ de champs de vecteurs sur $M^n \times \mathcal{P}$ vérifiant (2.23) et (2.25) :

$$\begin{aligned} X_i &\in \mathcal{G} \qquad i=1,...,l \quad , \\ [F, \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i] &\in \mathcal{G} \qquad i=1,...,l \end{aligned}$$

Si de plus :

- *les champs $\frac{\partial}{\partial p_1} + X_1, ..., \frac{\partial}{\partial p_l} + X_l$ ainsi obtenus sont x-complets,*

alors on peut construire globalement φ solution de (2.37)

$$\begin{cases} L_{\frac{\partial}{\partial p_i}+X_i}\varphi(p,x) = 0 \\ \varphi(\bar{p},x) = x \quad , \end{cases} \tag{8.258}$$

$\bar{p}$ étant fixé, quelconque, dans $\mathcal{P}$. (8.239) donne alors u_{ST} tel que le champ s ne dépende pas de p, et (8.251), une fonction $\bar{v}_2(p,q,x,\delta p)$, ayant par rapport à p et x la même régularité que les champs f et g. Les contrôleurs E2ter, E3ter, ou E4ter définis par

$$u = u_{ST}(\hat{p},x) + \bar{v}_2(\hat{p},\hat{q},x,\dot{\hat{p}}) \tag{8.259}$$

avec le "double" estimateur

$$
\left(\begin{array}{c}\dot{\hat{p}}\\ \dot{\hat{q}}\end{array}\right) = -\pi_{P,\left(\begin{smallmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\end{smallmatrix}\right)}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right)
$$

$$
E2\ ter\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} Z_{eq} &=& \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{p},x)\left(\ Z^{cert}\ ,\ Z^{v}\ \right)\\ e &=& \eta - \varphi(\hat{p},x)\\ \dot{\eta} &=& -\,r\,[\,\eta - \varphi(\hat{p},x)\,] \quad + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{p},x)s(\hat{p},x)\\ & & \qquad\quad - \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\pi_{P,\left(\begin{smallmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\end{smallmatrix}\right)}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right)\end{array}\right.
$$

$$
E3\ ter\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} Z_{eq} &=& \dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)\left(\ Z^{cert}\ ,\ Z^{v}\ \right)\\ e &=& \eta - V(\hat{p},x)\\ \dot{\eta} &=& -\,r\,[\,\eta - V(\hat{p},x)\,] \quad + \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)s(\hat{p},x)\\ & & \qquad\quad - \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p},x)\pi_{P,\left(\begin{smallmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\end{smallmatrix}\right)}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right)\end{array}\right. \qquad (8.260)
$$

$$
E4\ ter\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} Z_{eq} &=& (\ Z^{cert}\ ,\ Z^{v}\ )\\ e &=& -\nabla_x V(\hat{p},x) \;=\; -[\dfrac{\partial V}{\partial x}(\hat{p},x)]^{\top}\end{array}\right.
$$

donnent alors les mêmes résultats exactement que E2, E3 ou E4 respectivement dans le cas où V ne dépendait pas de p, en remplaçant $\hat{p}$ par $\left(\begin{smallmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\end{smallmatrix}\right)$ et p^* par $\left(\begin{smallmatrix}p^*\\ p^*\end{smallmatrix}\right)$.

Démonstration : La construction de φ découle du théorème 2.11. S'étant fixé $\bar{p}$, la construction de $u_{ST}(p,x)$ à partir de $u_{ST}(\bar{p},x)$ est donnée en (8.239); en fait, la condition SF donne a priori des lois $u_{ST}(p,x)$, qui ne rendent pas forcément s indépendant de p. (8.239) est un moyen de les réécrire, en n'utilisant $u_{ST}(p,x)$ donné par SF seulement pour $p=\bar{p}$. La construction de U est immédiate, puisque le champ s ne dépend pas de p. La construction de $\bar{v}_2$ est donnée par le lemme 8.14 (deuxième point). L'analyse de stabilité est semblable à celle de la proposition 8.13, ou des théorèmes 8.6 et 8.7, c'est-à-dire que l'on s'est replaçé dans un cas formellement identique à celui où V ne dépendait pas de p, mais que $\hat{p}$ est pemplacé par $\left(\begin{smallmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\end{smallmatrix}\right)$ et p^* par $\left(\begin{smallmatrix}p^*\\ p^*\end{smallmatrix}\right)$. ▽▽▽

Remarque 8.9 En fait, (8.253), (8.254), (8.255) et (8.257) assurent que l'on peut définir localement les champs X_i (théorème 2.9). La condition (8.256) n'est là que pour assurer que la construction du théorème 2.9 peut s'étendre. Si pour d'autres raisons, cette construction s'étend, et que les champs $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$ sont x-complets, alors les conclusions du théorème sont satisfaites. ∎

Remarque 8.10 Si, au lieu de (8.253), on dispose de l'hypothèse que $g(p,x)$ ne dépend pas de p (plus forte), le troisième point du lemme 8.14 permet de construire $\bar{v}_o$, qui répond aux mêmes exigeances que $\bar{v}_2$, mais ne dépend pas de q, c,est-à-dire que M0 est vérifiée ; la proposition 8.11 s'applique donc aux contrôleurs E3bis et E4bis, (mêmes propriétés que E3

ou E4 si V ne dépendait pas de p) mais l'on a le même résultat pour le contrôleur E2bis :

$$E2\ bis\ :\quad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} &=& -\,\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \\ Z_{eq} &=& \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{p},x)\left[Z^{cert}+Z^{v}\right] \\ e &=& \eta-\varphi(\hat{p},x) \\ \dot{\eta} &=& -\,r\,[\eta-\varphi(\hat{p},x)]+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{p},x)s(\hat{p},x)-\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\pi_{P,\hat{p}}\left(PZ_{eq}^{\top}e\right) \end{array}\right. \tag{8.261}$$

puisque sous nos hypothèses, plus fortes que M0, le $\bar{v}_o$ donné par le lemme 8.14 permet de supprimer le terme $\frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}}$ dans (8.147).

Dans le cas de la linéarisation par feedback et difféomorphisme, *Kanellakopoulos, Marino, et Kokotovic* donnent dans [28] exactement ce résultat pour un algorithme qui coïncide avec notre E4bis (sans double estimée), mais qu'ils ont obtenu par une approche "directe", ou "Lyapunov", voir paragraphe 8.2.3, en supposant que g est indépendant de p, après avoir donné le résultat plus général qui consiste à dire que s'il n'arrive aucun problème pour la définition simultanée de $\dot{\hat{p}}$ et v dans les équations (8.230), ce qui est tout à fait possible (voir note 2 page 123), alors on peut utiliser cet algorithme (qui est en quelque sorte notre E4ter où l'on impose $\hat{q}=\hat{p}$) et l'on obtient à nouveau les mêmes propriétés que si V ne dépendait pas de p ; l'hypothèse selon laquelle g ne dépend pas de p est donnée comme condition suffisante pour que les susdits problèmes ne se posent pas.

Dans [7], toujours dans le cas de linéarisation par feedback, *Bastin et Campion* introduisent un algorithme voisin de E2bis, le terme v étant construit grâce à une hypothèse qui serait par exemple impliquée par celle du premier point du lemme 8.14, avec l'hypothèse supplémentaire que les équations implicites (8.230)-(8.225) peuvent être résolues en v et $\dot{\hat{p}}$, mais qui est à la fois plus générale et plus implicite. ∎

Exemple 8.3 Reprenons la famille de systèmes dans $\mathbb{R}^2$ introduite à l'exemple 1.5 donnée par (1.28), et reprise dans ce chapitre aux exemples 8.1 et 8.2 :

$$\mathcal{S}_p\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& x_2+p\,\theta(x_1) \\ \dot{x}_2 &=& p\,u \end{array}\right. \tag{8.262}$$

On a vu, à l'exemple 8.2, que les contrôleurs E1, E2 ou E3 ne donne de convergence globale que si θ est au moins sous-linéaire ; quand au contrôleur E4, il ne peut être mis en oeuvre puisqu'il est ici impossible d'écrire une fonction de Lyapunov indépendante de p. On bâtit ici sur cet exemple les contrôleurs E2ter, E3ter et E4 ter modifiés de E2, E3, E4 qui, eux, assurent la convergence globale quel que soit θ.

Il est clair que les hypothèses du théorème 8.15 sont satisfaites pour tout p non nul, mais que g n'est pas indépendant de p.

On a alors (φ est donné par (8.109), (8.114) et (8.115)) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x)\ =\ \begin{pmatrix} 0 \\ \theta(x_1) \end{pmatrix}\quad ;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)g(q,x)\ =\ \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}\ , \tag{8.263}$$

et il suffit alors de prendre, pour tout q non nul,

$$\bar{v}_2(\hat{p},\hat{q},x,\dot{\hat{p}}) \triangleq -\frac{1}{\hat{q}}\theta(x_1)\dot{\hat{p}} \tag{8.264}$$

pour résoudre (8.248) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{p},x)g(\hat{q},x)\,\bar{v}_2(\hat{p},\hat{q},x,\dot{\hat{p}}) \tag{8.265}$$

Ceci est d'ailleurs donné par le lemme 8.14 et la formule (8.251). La loi de commande est donc donnée ici par :

$$\begin{aligned} u &= u_{ST}(\hat{p},x) + \bar{v}_2(\hat{p},\hat{q},x,\dot{\hat{p}}) \\ &= -\theta'(x_1)[x_2 + \hat{p}\theta(x_1)] - \frac{1}{\hat{p}}(\omega_1 x_1 + \omega_2[x_2 + \hat{p}\theta(x_1)]) - \frac{1}{\hat{q}}\theta(x_1) \end{aligned} \tag{8.266}$$

On a alors :

$$Z^{cert} = \begin{pmatrix} \theta(x_1) \\ u_{ST}(\hat{p},x) \end{pmatrix} \quad ; \quad Z^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{v}_2(\hat{p},\hat{q},x,\dot{\hat{p}}) \end{pmatrix} \tag{8.267}$$

et la double estimation s'écrit de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} &=& -\rho_{\hat{p}}\left[\theta(x_1)(\eta_1 - \hat{\xi}_1) + (u_{ST}(\hat{p},x) + \hat{p}\theta(x_1)\theta'(x_1))(\eta_2 - \hat{\xi}_2)\right] \\ \dot{\hat{q}} &=& -\rho_{\hat{q}}\,\bar{v}_2(\hat{p},\hat{q},x,\dot{\hat{p}})(\eta_2 - \hat{\xi}_2) \\ \dot{\eta}_1 &=& -r\,[\eta_1 - \hat{\xi}_1] + \hat{\xi}_2 \\ \dot{\eta}_2 &=& -r\,[\eta_2 - \hat{\xi}_2] - \omega_1\hat{\xi}_1 - \omega_2\hat{\xi}_2 \\ r &=& \|\eta - \hat{\xi}\|^{m_1-1}\,(1 + \theta(x_1)^2 + (u_{ST}(\hat{p},x) + \hat{p}\theta(x_1)\theta'(x_1))^2)^{m_2/2} \end{array}\right. \tag{8.268}$$

où

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \end{pmatrix} = \varphi(\hat{p},x) \tag{8.269}$$

et $\rho_{\hat{p}}$ et $\rho_{\hat{q}}$ désignent :

$$\begin{aligned} \rho_{\hat{p}} &= \rho(\,\hat{p}\,,\,\theta(x_1)(\eta_1 - x_1) + u_{ST}(\hat{p},x)(\eta_2 - x_2)\,) \\ \rho_{\hat{q}} &= \rho(\,\hat{q}\,,\,\bar{v}_2(\hat{p},\hat{q},x,\dot{\hat{p}})(\eta_2 - \hat{\xi}_2)\,)\,, \end{aligned} \tag{8.270}$$

ρ étant la fonction à valeur dans $[0,1]$ décrite en (8.60).

Contrôleur E3 : On note, pour abréger, la fonction scalaire (c'est $\frac{\partial V}{\partial x}Z^{cert}$) :

$$\mathcal{Z}(\hat{p},x) = \left(q_{11}\hat{\xi}_1 + q_{12}\hat{\xi}_2\right)\theta(x_1) + \left(q_{12}\hat{\xi}_1 + q_{22}\hat{\xi}_2\right)(u_{ST}(\hat{p},x) + \hat{p}\theta(x_1)\theta'(x_1)) \tag{8.271}$$

et l'estimateur s'écrit (η est scalaire) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} &=& -\rho_{\hat{p}}\,\mathcal{Z}(\hat{p},x)\,[\eta - \hat{\xi}^\top Q\hat{\xi}] \\ \dot{\hat{q}} &=& -\rho_{\hat{q}}\,\bar{v}_2(\hat{p},\hat{q},x,\dot{\hat{p}})\left(q_{12}\hat{\xi}_1 + q_{22}\hat{\xi}_2\right)(\eta - \hat{\xi}_2) \\ \dot{\eta} &=& -r\,[\eta - \hat{\xi}^\top Q\hat{\xi}] - \hat{\xi}^\top\Gamma\hat{\xi} \\ r &=& \|\eta - \hat{\xi}^\top Q\hat{\xi}\|^{m_1-1}\,(1 + Z_{eq}^2)^{m_2/2} \end{array}\right. \tag{8.272}$$

où $\widehat{\xi}$, $\rho_{\hat{p}}$ et $\rho_{\hat{q}}$ sont toujours donnés par (8.269) et (8.270), et Γ est le terme de droite de l'équation de Lyapunov (1.38) dont Q est solution.

Contrôleur E4ter : La fonction réelle $\mathcal{Z}$ étant toujours donnée par (8.271), l'estimateur s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} & = & -\rho_{\hat{p}}\, \mathcal{Z}(\hat{p}, x) \\ \dot{\hat{q}} & = & -\rho_{\hat{q}}\, \bar{v}_2(\hat{p}, \hat{q}, x, \dot{\hat{p}}) \left(q_{12}\widehat{\xi}_1 + q_{22}\widehat{\xi}_2\right) \end{array} \right. \tag{8.273}$$

Il n'y a donc ici aucun problème d'équation implicite. Si l'on n'avait pas utilisé de double estimée, l'équation en $\dot{\hat{p}}$ serait, en supposant que $\rho = 1$ pour simplifier :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}} \;=\; & \left(q_{11}\widehat{\xi}_1 + q_{12}\widehat{\xi}_2\right)\theta(x_1) \\ & + \left(q_{12}\widehat{\xi}_1 + q_{22}\widehat{\xi}_2\right)\left(u_{\mathrm{ST}}(\hat{p}, x) + \hat{p}\theta(x_1)\theta'(x_1) - \frac{1}{\hat{p}}\theta(x_1)\dot{\hat{p}}\right) \end{aligned} \tag{8.274}$$

(le terme en $\frac{1}{\hat{p}}\theta(x_1)\dot{\hat{p}}$ est $\bar{v}_1(\hat{p}, x, \dot{\hat{p}}) = \bar{v}_2(\hat{p}, \hat{p}, x, \dot{\hat{p}})$). Ceci ne définit $\dot{\hat{p}}$, c'est-à-dire n'a une solution en $\dot{\hat{p}}$ que si

$$1 + \left(q_{12}\widehat{\xi}_1 + q_{22}\widehat{\xi}_2\right)\frac{1}{\hat{p}}\theta(x_1) \;\neq\; 0$$

ou encore

$$1 + q_{22}\theta(x_1)^2 + \frac{1}{\hat{p}}\left(q_{12}x_1 + q_{22}x_2\theta(x_1)\right) \;\neq\; 0$$

Ceci est faux sur une surface de l'espace des $(\hat{p}, x_1, x_2)$, et il n'est pas possible de s'en tenir éloigné seulement en contreignant $\hat{p}$ à rester dans un certain domaine (indépendant de x).

■

CONCLUSION de la partie COMMANDE

Apports

Nous avons developpé dans cette partie :

- d'une part des contrôleurs adaptatifs "généraux" n'utilisant pas de connaissance sur la structure de la famille $(\mathcal{S}_p)$ autre que la dépendance linéaire en les paramètres. Dans le cas d'un paramétrage linéaire implicite comme explicite, nous avons obtenu un résultat local de stabilité, assez classique. Pour obtenir un résultat global (sous réserve de stabilisabilité globale de chacun des systèmes $\mathcal{S}_p$), nous avons eu recours à des hypothèses sur la croissance à l'infini des incertitudes. Dans le chapitre 8, nous avons détaillés les choix possibles de l'équation d'observation et les répercussions de ce choix sur les exigeances requises pour la stabilité globale. La méthode qui consiste à prendre l'évolution de la fonction de Lyapunov $V(t) = V(\hat{p}, x)$ comme équation d'observation est la moins exigeante. Elle n'est notament pas sensible à la forme du champ bouclé à paramètres connus (s_o ou s). Elle est, à notre connaissance, nouvelle.
- d'autre part, des contrôleurs adaptatifs utilisant des structures particulières de la famille $(\mathcal{S}_p)$. Obtenus soit en ajoutant des termes de commande destinés à compenser les effets néfastes de l'adaptation (section 8.3 et 7.3), soit par un choix particulier dans l'estimation (section 8.2.3), ils ne s'appliquent qu'à des classes restreintes de familles de systèmes mais ne requièrent que peu ou pas d'hypothèses pour étendre le domaine de stabilité dans le cas d'une famille de systèmes tous globalemment stabilisables.

Perspectives

Cela ouvre deux voies pour améliorer les méthodes de commande adaptative ses systèmes non-linéaires d'une part améliorer le fonctionnement des contrôleurs "généraux", notament au niveau de l'estimation, pour qu'ils tolèrent une forme plus générale des incertitudes ; d'autre part étendre les classes de familles auxquelles peuvent s'appliquer des contrôleurs *tenant plus* compte de la structure de la famille, et qui donnent d'excellents résultats.

Enfin, l'hypothèse de linéarité par rapport aux paramètres est restrictive, et il serait souhaitable de pouvoir s'en affranchir. L'idée de considérer ici un paramétrage "implicitement linéaire" était une façon de l'étendre, mais la structure linéaire par rapport aux paramètres reste primordiale dans la partie estimation. La théorie des obervateurs non-linéaire, pourrait ici sans doute être employée avec profit.

Partie IV

ANNEXES

Annexe A

Lemmes et démonstrations divers.

A.1 Pseudo-inverses

Le résultat donné ici dans le cas où g est de rang constant quelconque n'est utilisé que dans des cas où g est en fait de rang constant maximal. On donne toutefois ce résultat un peu plus général, et dont nous n'avons pas trouvé de preuve dans la littérature.

On a souvent besoin de résoudre, en u,

$$g(p,x).u \quad = \quad X(p,x) \tag{A.1}$$

où X est un champ de vecteur régulier, par un u dépendant continûment de p et x, sous l'hypothèse, clairement nécessaire, que $X(p,x)$ reste dans l'image de $g(p,x)$. Rappelons que g est le champ d'applications linéaires (ayant pour espace de départ $\mathbb{R}^m$, fixé) défini en (1.5) à partir des champs $g_1(p,.),...,g_m(p,.)$ par

$$g(p,x) \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & T_xM^n \\ u=(u_1,...,u_m) & \longmapsto & g(p,x)u = \sum_{k=1}^{m} u_k g_k(p,x) \end{array} \right. \tag{A.2}$$

Si de plus le rang de g est constant, le problème est résolu en prenant

$$u \quad = \quad g^\dagger(p,x)X(p,x)$$

$g^\dagger(p,x)$ étant le pseudo-inverse de $g(p,x)$ défini en (A.5) grâce à la proposition ci-dessous. Notons que la construction de $g^\dagger$ nécessite la présence d'une métrique riemannienne sur M^n (et qu'une métrique différente entraine un $g^\dagger$ différent). Ceci n'est pas restrictif, toute variété pouvant être (globalement) munie d'une métrique (cf. par exemple *Spivak* [56]).

Proposition A.1 *Si $g_1(p,.),...,g_m(p,.)$ sont m champs de vecteurs $\mathcal{C}^r$ sur M^n, variété riemmanienne $\mathcal{C}^\infty$ (ou $\mathcal{C}^\omega$), dont la métrique est notée $\gamma(x)(.,.)$, et tels que, pour tout (p,x), le rang de la famille de vecteurs $g_1(p,x),...,g_m(p,x)$ soit égal à $\bar{m} \leq m$, alors il existe m formes*

différentielles $g_1^\dagger(p,.),...,g_m^\dagger(p,.)$ *de même régularité que les champs* $g_1(p,.),...,g_m(p,.)$, *et telles que pour tout* (p,x), *l'endomorphisme de* T_xM^n *défini par*

$$X \quad \mapsto \quad \sum_{k=0}^{m} < g_k^\dagger(p,x) \ , \ X \ > \ g_k(p,x) \tag{A.3}$$

soit exactement la projection orthogonale sur

$$\text{Span } \{g_1(p,x),...,g_m(p,x)\} \tag{A.4}$$

relativement à $\gamma(x)(.,.)$.

g étant défini à partir des g_k par (A.2), l'image de g, notée $Im\ g$, est (A.4). **On définit alors** $g^\dagger$ **par**

$$g^\dagger(p,x).X \ \triangleq \ \begin{pmatrix} < g_1^\dagger(p,x) \ , \ X \ > \\ \vdots \\ < g_m^\dagger(p,x) \ , \ X \ > \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

si bien que (A.3) n'est autre que $g(p,x).g^\dagger(p,x)$, et que l'on a, pour tout (p,x),

$$g(p,x).g^\dagger(p,x) \ = \ \textit{projection } \gamma(x)(.,.)\textit{−orthogonale sur } \text{Im } g(p,x) \tag{A.6}$$

Démonstration de la proposition A.1 :
Construction : Grâce à la métrique γ, on peut définir m formes différentielles (1-formes) $g_1^\top(p,.),...,g_m^\top(p,.)$ à partir des champs $g_1(p,.),...,g_m(p,.)$ par la construction classique d'identification d'un espace à son dual, ou de TM^n à T^*M^n :

$$< g_k^\top(p,x) \ , \ X \ > \ = \ \gamma(x)(g_k(p,x),X) \qquad k=1,...,m \tag{A.7}$$

On définit $A(p,x)$ comme étant la matrice de Gram de la famille de vecteurs $g_1(p,x)$, ..., $g_m(p,x)$, c'est-à-dire par

$$A(p,x) \ = \ [\ A_{i,j}(p,x)\ ] \ = \ [\ \gamma(x)(g_i(p,x),g_j(p,x))\ ] \tag{A.8}$$

c'est une matrice carrée $m \times m$ symétrique positive de rang $\bar{m}$; si l'on définit alors, pour toute matrice symétrique A,

$$\pi(A)$$

comme la projection sur le noyau de A (Ker$A$) parallèlement à l'image de A (ImA), il est clair que

$$A \ + \ \pi(A)$$

est inversible. Ceci nous permet de définir $g^\dagger$ et les $g_k^\dagger$ par

$$g^\dagger(p,x).X \ \triangleq \ \begin{pmatrix} < g_1^\dagger(p,x) \ , \ X \ > \\ \vdots \\ < g_m^\dagger(p,x) \ , \ X \ > \end{pmatrix} \ \triangleq \ [\ A + \pi(A)\ ]^{-1} \begin{pmatrix} < g_1^\top(p,x) \ , \ X \ > \\ \vdots \\ < g_m^\top(p,x) \ , \ X \ > \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

il est alors aisé de vérifier que

$$g(p,x)\ g^{\dagger}(p,x)\ X \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma(x)(g_k(p,x),X)=0 \quad k=1,...,m \\ X & \text{si } X \ = \ \sum_{k=0}^{m} u_k\ g_k(p,x) \text{ pour un certain } (u_1,...,u_m)\in\mathbb{R}^m \end{cases}$$

Régularité : A et les $g_k^{\top}$ ont la même régularité que les g_k; cela est évident pour A, au vu de (A.8), et assez classique pour les $g_k^{\top}$ (voir par exemple [56]). De plus, g étant de rang constant, $\pi(A)$ a également la même régularité en tout point, car si ρ est le module de la valeur propre non nulle de $A(p,x)$ de plus petit module, il existe un voisinage U de (p,x) sur lequel A a 0 pour seule valeur propre de module inférieur ou égal à $\frac{\rho}{2}$, si bien que $\pi(A)$ est donné sur U par la formule suivante, qui est assez facile à vérifier ici, en dimension finie avec A diagonalisable, et qui est donnée dans un contexte beaucoup plus général dans *Dunford et Schwartz* [17, chapitre 7]

$$\pi(A) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho}{2}e^{i\theta}I-A\right)^{-1}d\theta \tag{A.10}$$

Ceci est une fonction analytique dans le domaine des A dont le module de la valeur propre de plus petit module est supérieur à $\frac{\rho}{2}$, ce qui achève la démonstration. $\triangledown\triangledown\triangledown$

A.2 Annexe au chapitre 2

A.2.1 Transformation de champs de vecteurs par un difféomorphisme dépendant de paramètres

Le but de ce paragraphe est d'étudier la façon dont l'action d'un difféomorphisme dépendant d'un paramètre sur un champ de vecteur dépendant d'un paramètre altère la dépendance de ce champs en le paramètre.

On considère *deux variétés* $\mathcal{C}^1$ de dimension n: M et N, et une *famille de difféomorphismes* $\mathcal{C}^1$ de M vers N, dépendant régulièrement d'un paramètre p de $\mathbb{R}^l$: le difféomorphisme d'indice p est donné par:

$$\varphi(p,.) \ : \ \left| \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ x & \longmapsto & \varphi(p,x) \end{array} \right. \tag{A.11}$$

où φ est une application $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^l\times V$ vers N. On considère également une *famille de champs de vecteurs* sur V, dépendant régulièrement du même paramètre p: le champ d'indice p est

$$c(p,.) \ : \ x \ \longmapsto \ c(p,x) \ \in \ T_xM \tag{A.12}$$

On rappelle qu'il est très façile de définir alors $\frac{\partial c}{\partial p}(p,x)$ comme la différentielle en p de l'application de $\mathbb{R}^l$ dans M qui à π dans $\mathcal{P}$ associe $c(\pi,x)$ dans T_xM^n

On rapelle les formules de transport d'un champ de vecteur f par un difféomorphisme φ[1]:

$$\varphi_* f\ (\varphi(x)) \ = \ \varphi'(x).f(x) \tag{A.13}$$

[1]Pour une définition détaillée des "étoiles en bas" et des "étoiles en haut", voir par exemple [56].

et $\varphi^* = (\varphi_*)^{-1}$, c'est-à-dire:

$$\varphi^* g\,(x) \;=\; [\varphi'(x)]^{-1}.g(\varphi(x)) \tag{A.14}$$

On définit alors la famille de champs de vecteurs $\tilde{c}(p,.)$ "transportée" de $c(p,.)$ par $\varphi(p,.)$ de M sur N par:

$$\tilde{c}(p,.) \;=\; \varphi(p,.)_*\; c(p,.) \tag{A.15}$$

ou

$$\tilde{c}(p,\varphi(p,x)) \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x).c(p,x) \tag{A.16}$$

Notre but est de comprendre comment la dépendance de $\tilde{c}$ en le paramètre est reliée à celle de c et de φ, c'est-à-dire le lien entre $\frac{\partial c}{\partial p}(p,x)$ et $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial p}(p,x)$.

Pour se placer dans un cadre plus commode, on définit alors les variétés élargies "phase+ paramètres" $\mathbb{R}^l \times M$ et $\mathbb{R}^l \times N$, et les familles définies ci-dessus induisent tout naturellement:

Un difféomorphisme Φ de $\mathbb{R}^l \times M$ dans $\mathbb{R}^l \times N$ qui laisse inchangée la composante sur $\mathbb{R}^l$:

$$\Phi(p,x) \;=\; (\; p\;,\; \varphi(p,x)\;) \tag{A.17}$$

Deux champs de vecteurs C et $\tilde{C}$ respectivement sur $\mathbb{R}^l \times M$ et sur $\mathbb{R}^l \times N$ dont la composante sur $T\mathbb{R}^l$ est nulle:

$$C(p,x) \;=\; (\; 0\;,\; c(p,x)\;) \tag{A.18}$$

$$\tilde{C}(p,x) \;=\; (\; 0\;,\; \tilde{c}(p,x)\;) \tag{A.19}$$

Le lemme suivant dit tout simplement que, comme espéré, le champ $\tilde{C}$ est le transporté de C par le difféomorphisme φ:

Lemme A.2 *C et $\tilde{C}$ étant définis par (A.18) et (A.19), on a:*

$$\tilde{C} \;=\; \Phi_* C \tag{A.20}$$

La base canonique de $\mathbb{R}^l$ étant $\{e_1,...,e_m\}$, on définit les champs $\frac{\partial}{\partial p_i}$ sur $\mathbb{R}^l \times M$ et $\mathbb{R}^l \times N$ que l'on note (pas trop!) abusivement de la même façon:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}(p,x) \;\triangleq\; (\; e_i\;,\; 0\;) \tag{A.21}$$

et l'on a:

Lemme A.3 *C et $\tilde{C}$ étant définis par (A.18) et (A.19), et les champs A_i et $\tilde{A}_i$, respectivement sur $\mathbb{R}^l \times M$ et sur $\mathbb{R}^l \times N$ par*

$$A_i(p,x) \;=\; (\; 0\;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(p,x)\;) \tag{A.22}$$

$$\tilde{A}_i(p,\varphi(p,x)) \;=\; (\; 0\;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(p,x)\;) \tag{A.23}$$

on a les formules suivantes:

$$\Phi^*[\ \frac{\partial}{\partial p_i}\ ,\ \tilde{C}\ ] \ = \ [\ \frac{\partial}{\partial p_i}\ ,\ C\ ] \ - \ [\ A_i\ ,\ C\ ] \tag{A.24}$$

$$\Phi_*[\ \frac{\partial}{\partial p_i}\ ,\ C\ ] \ = \ [\ \frac{\partial}{\partial p_i}\ ,\ \tilde{C}\ ] \ + \ [\ \tilde{A}_i\ ,\ \tilde{C}\ ] \tag{A.25}$$

$$\text{Ker}\ \varphi' \ = \ \text{Span}\{\ \frac{\partial}{\partial p_1} - A_1\ ,...,\ \frac{\partial}{\partial p_l} - A_l\ \} \tag{A.26}$$

$$\textit{On a d'ailleurs}\ :\ \tilde{A}_i \ = \ \Phi_* A_i \tag{A.27}$$

Démonstration du lemme A.3 : Vu le lemme A.2, on peut écrire

$$\Phi^*[\ \frac{\partial}{\partial p_i}\ ,\ \tilde{C}\ ] \ = \ [\ \Phi^*\frac{\partial}{\partial p_i}\ ,\ \Phi^*\tilde{C}\ ] \ = \ [\ \Phi^*\frac{\partial}{\partial p_i}\ ,\ C\ ] \tag{A.28}$$

Il s'agit donc de calculer le champ $\Phi^*\frac{\partial}{\partial p_i}$. (A.17) conduit à l'expression suivante de la différentielle de Φ au point (p,x), et de son inverse : pour tout $(\delta p, \delta x)$ dans $T_{(p,x)}(\mathbb{R}^l \times M)$ ou $(\delta p, \delta\xi)$ dans $T_{(p,\varphi(p,x))}(\mathbb{R}^l \times N)$:

$$\Phi'(p,x).(\delta p, \delta x) \ = \ (\delta p\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x).\delta p \ + \ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x).\delta x) \tag{A.29}$$

$$\Phi'(p,x)^{-1}.(\delta p, \delta\xi) \ = \ (\delta p\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}^{-1}(p,x).\delta\xi \ - \ \frac{\partial\varphi}{\partial x}^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x).\delta p) \tag{A.30}$$

et donc

$$\Phi^*\frac{\partial}{\partial p_i}(p,x) \ = \ \Phi'(p,x)^{-1}.(\frac{\partial}{\partial p_i}, 0) \ = \ (\ \frac{\partial}{\partial p_i}\ ,\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x}^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(p,x)\ ) \tag{A.31}$$

et finalement

$$\Phi^*\frac{\partial}{\partial p_i} \ = \ \frac{\partial}{\partial p_i} \ - \ A_i, \tag{A.32}$$

d'où (A.24) et de la même manière (A.25). (A.27) découle directement du lemme A.2. (A.26) est vérifié car :

$$\varphi'(p,x).\left[\frac{\partial}{\partial p_i}(p,x) \ - \ A_i(p,x)\right] \ = \ \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(p,x) \ - \ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(p,x) \ = \ 0$$

d'après (A.22) si bien que Ker φ' contient les $\frac{\partial}{\partial p_i}(p,x) - A_i(p,x)$, l'égalité venant de ce que, $\varphi(p,.)$ étant un difféomorphisme pour tout p, φ' est de rang n. $\triangledown\triangledown\triangledown$

On peut traduire ce lemme en termes des familles de champs de vecteurs de départ:

Proposition A.4

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)^{-1}\frac{\partial\tilde{c}}{\partial p_i}(p,\varphi(p,x)) \ = \ \frac{\partial c}{\partial p_i}(p,x) \ - \ [\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}^{-1}.\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(p,.)\ ,\ c(p,.)\ ](x) \tag{A.33}$$

A.2.2 Démonstrations relatives à la section 2.2

Démonstration de la proposition 2.3 : Dans cette proposition, on peut considérer que x est fixé, et l'on s'occupe de la dépendance en p de vecteurs de T_xM^n.

(2.2)$\Longrightarrow$(2.5) : Cela est évident puisque (2.2) implique que $g_k(p',x)$ et $g_k(p'',x)$ sont tous les deux dans $\text{Span}\{g_1(p',x),...,g_m(p',x)\}$.

(2.5)$\Longrightarrow$(2.4) : obtenu en appliquant (2.5) avec

$$p' = p \quad ; \quad p'' = p + \lambda \frac{\partial}{\partial p_i}$$

et en faisant tendre le réel λvers 0 puisque

$$\frac{\partial g_k}{\partial p_i}(p,x) \triangleq \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left[g_k(p + \lambda \frac{\partial}{\partial p_i}, x) - g_k(p,x) \right] \tag{A.34}$$

(2.4)$\Longrightarrow$(2.2) : $\text{Span}\{g_1(p,x),...,g_m(p,x)\}$ étant de rang constant égal à m, (2.4) permet, à l'aide du pseudo-inverse bati à la proposition A.1, d'écrire une matrice carrée $m \times m$, inversible, $\Lambda(p,x)$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial p}(p,x) = g(p,x)\,\Lambda(p,x). \tag{A.35}$$

On fixe alors x et toutes les coordonnées de p sauf une, et (A.35) donne une équation différentielle linéaire non-stationnaire dont la solution est de la forme

$$g(p,x) = g(p_o,x)\,\Gamma(p_o,p,x) \tag{A.36}$$

où $\Gamma(p_o,p,x)$ est la matrice de transition de cette équation différentielle linéaire non-stationnaire. Γ est inversible. Cela prouve que l'image de g est constante quand on fait varier une (quelconque) des coordonnées de p. Cela prouve (2.2). $\triangledown\triangledown\triangledown$

Démonstration du théorème 2.2 :

Condition nécessaire :

Si FE est satisfaite, (1.52) entraine que le span de $g_1(p,x),...,g_m(p,x)$, c'est-à-dire l'image de l'application linéaire $g(p,x)$ est égal, puisque β est inversible, à l'image de l'application linéaire $g(x)$, qui, clairement, ne dépend pas de p, d'où (2.2). Alors, pour p et p' dans $\mathcal{P}$, (1.51) entraîne :

$$f(p',x) - f(p,x) = g(p',x).\alpha(p',x) - g(p,x).\alpha(p,x) \tag{A.37}$$

d'où

$$f(p',x) - f(p,x) \in \text{Span}\{\, g_1(p,x)\,,\,...\,,\,g_m(p,x)\,\} \tag{A.38}$$

puisque ce Span ne dépend pas de p. On obtient (2.3) en faisant tendre p' vers p.

Condition suffisante :

Supposant (2.3) et (2.2) vérifiées pour tout p, on se fixe p_o dans $\mathcal{P}$, et on définit α et β par:

$$\alpha(p,x) = g(p,x)^\dagger [f(p_o,x) - f(p,x)] \quad (A.39)$$
$$\beta(p,x) = g(p,x)^\dagger g(p_o,x) \quad (A.40)$$

où $g(p,x)^\dagger$ est un *pseudo-inverse* de $g(p,x)$, que l'on peut définir de façon régulière d'après la proposition A.1 page 137 en annexe, puisque $g(p,x)$ est de rang constant maximal (condition RC). $\beta(p,x)$ défini par (A.40) est de plus inversible puisque

$$g(p,x)\beta(p,x) = g(p_o,x)$$

est de rang m.

D'après (2.2), on a :

$$\mathrm{Im}g(p,x) = \mathrm{Im}g(p_o,x) \ ,$$

et donc (A.40) implique (1.52) avec $g(x) \triangleq g(p_o,x)$; de même, en intégrant (2.3) sur le segment $[p_o,p]$ dans $\mathcal{P}$ ($\mathrm{Span}\{g_1(.,x),...,g_m(.,x)\}$ est constant sur ce chemin), on a :

$$f(p_o,x) - f(p,x) \in \mathrm{Span}\{g_1(p,x),...,g_m(p,x)\} = \mathrm{Im}g(p,x) \ ,$$

et donc (A.39) implique (1.52) avec $f(x) \triangleq f(p_o,x)$. $\triangledown\triangledown\triangledown$

A.2.3 Démonstrations relatives à le section 2.3

Démonstration du théorème 2.5 :

Propriété locale : D'après le lemme 2.6, il suffit de montrer que, pour tout $(\bar{p},\bar{x})$ dans $\mathcal{P}\times M^n$, l'existence de champs X_i sur un voisinage de $(\bar{p},\bar{x})$ satisfaisant (2.12)-(2.13)-(2.14)-(2.15) pour tout (p,x) dans ce voisinage est une CNS pour qu'il existe un voisinage V de $(\bar{p},\bar{x})$, et φ, "difféomorphisme défini sur V dépendant du paramètre p"[2] tel que les champs $\tilde{f}(p,.)$ et $\tilde{g}_k(p,.)$ sur $\varphi(V)$ définis, pour tout p, par:

$$\tilde{f}(p,.) = \varphi(p,.)_* f(p,.) \quad ; \quad \tilde{g}_k(p,.) = \varphi(p,.)_* g_k(p,.) \quad (A.41)$$

vérifient pour tout (p,x) dans V et $i=1,...,l$:

$$\frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial p_i}(p,x) \in \mathrm{Span}\{\ \tilde{g}_1(p,x),\ ...\ ,\ \tilde{g}_m(p,x)\ \} \quad (A.42)$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_i}(p,x) \in \mathrm{Span}\{\ \tilde{g}_1(p,x),\ ...\ ,\ \tilde{g}_m(p,x)\ \} \quad (A.43)$$

[2] Définition précise: pour tout p, $\varphi(p,.)$ est un difféomorphisme de $(\{p\}\times M^n)\cap V$ sur $\varphi(V)$. Cela demande à V d'avoir une forme un peu particulière: tous les $(\{p\}\times M^n)\cap V$ sont difféomorphes à $\varphi(V)$.

Condition nécessaire : Si il existe un tel "difféomorphisme défini sur V dépendant du paramètre p" $\varphi(p,.)$, on peut définir d'aprés lui (voir (A.17) lemme A.3 page 140) un difféomorphisme Φ de V dans $\Omega \times \varphi(V)$, où Ω est la "projection"[3] de V sur $\mathcal{P}$ par

$$\Phi(p,x) \;=\; (\; p\;,\; \varphi(p,x)\;)\;, \tag{A.44}$$

et les champs $A_1, ..., A_l$ sur V par (A.22). Posons:

$$X_i \;\triangleq\; -A_i \tag{A.45}$$

On peut, comme en (2.18)), définir $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{H} \;\triangleq\; \text{Span}\{\; \frac{\partial}{\partial p_1} + X_1\;, ...,\; \frac{\partial}{\partial p_l} + X_l\;\} \tag{A.46}$$

D'après (A.26), les "iso-φ", c'est-à-dire les sous-variétés de la forme

$$\{\; (p,x)\;/\;\varphi(p,x) \;=\; x_o\} \tag{A.47}$$

(x_o fixé) sont des sous-variétés intégrales de $\mathcal{H}$. Celle qui passe par un point (p_o, x_o) est

$$V_{p_o,x_o} \;=\; \{\; (p,x)\;/\;\varphi(p,x) = \varphi(p_o,x_o)\;\}\;; \tag{A.48}$$

elle peut être considérée comme le graphe de l'application

$$p \;\longmapsto\; [\varphi(p,.)]^{-1}(\varphi(p_o,x_o)) \tag{A.49}$$

qui à p associe le point de M^n qui a, par $\varphi(p,.)$, la même image que x_o par $\varphi(p_o,.)$.

Montrons maintenant que les champs X_i définis par (A.45) satisfont les conditions du théorème pour (p,x) dans V :

- Ils vérifient (2.12) par définition (voir (A.22)).
- (A.48) donne les sous-variétés intégrales de $\mathcal{H}$ défini par (A.46) (ou (2.18)), ce qui implique que $\mathcal{H}$ est involutive et donc (2.13) est vérifié (voir remarque 2.3).
- En appliquant (A.24) au champ F sur V, on a:

$$\Phi^*[\; \frac{\partial}{\partial p_i}\;,\; \tilde{F}\;] \;=\; [\; \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i\;,\; F\;] \tag{A.50}$$

mais d'après (A.43) et le fait que $[\frac{\partial}{\partial p_i}, \tilde{F}](p,x) \;=\; (0, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_i}(p,x))$, le champ de vecteurs $[\frac{\partial}{\partial p_i}, \tilde{F}](p,x)$ est dans $\{0\} \times \text{Span}\{\tilde{g}_1(p,x), ..., \tilde{g}_m(p,x)\}$, qui n'est autre que $\Phi_*\mathcal{G}$, d'où (2.14).

---

[3] $\Omega \;=\; \{\; p\;/\;(\{p\} \times M^n) \cap V \;\neq\; \emptyset\;\}$

- On procéde de la même façon pour démontrer (2.15), en remplaçant F par G_k.

Condition suffisante : On se donne maintenant $(\bar{p}, \bar{x})$ dans $\mathcal{P} \times M^n$ et on suppose qu'il existe un voisinage U de $(\bar{p}, \bar{x})$ et des champs X_i sur U satisfaisant (2.12)-(2.13)-(2.14)-(2.15) pour tout (p, x) dans U

L'idée de la construction de φ est alors la suivante. On peut, à partir des champs $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$, définir la distribution $\mathcal{H}$ par (2.18); d'après (2.13), et elle est involutive. On va alors définir φ de telle manière que ces sous-variétés soient les sous-variétés de niveau de φ; précisément, s'étant fixé $\bar{p}$, on prend pour $\varphi(p, x)$ la composante sur M^n de l'unique point (de $\mathcal{P} \times M^n$) de la sous-variété intégrale de $\mathcal{H}$ passant par (p, x) dont la composante sur $\mathcal{P}$ soit $\bar{p}$. Le difféomorphisme vérifie alors en évidence la "condition aux limites" de (2.16) : $\varphi(\bar{p}, x) \equiv x$.

On écrit tout cela commodément grâce aux flots

$$(t, p, x) \longmapsto \phi_i^t(p, x) \tag{A.51}$$

des champs $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$. Ce qui suit traduit exactement l'explication intuitive qui précède dans la mesure où les champs $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$ engendrent une distribution involutive, ce qui est le cas puisque leurs flots commutent même d'après (2.13). Si ce n'était pas le cas, le procédé de relèvement qui suit garderait un sens, mais n'aurait pas l'interprétation simple ci-dessus.

Les flots ϕ_i (qui laissent évidemment invariantes les sous-variétés intégrales de $\mathcal{H}$) permettent d'écrire l'unique point (de $\mathcal{P} \times M^n$) de la sous-variété intégrale de $\mathcal{H}$ passant par (p, x) dont la composante sur $\mathcal{P}$ soit $\bar{p}$ comme

$$\phi_1^{-(p^1 - \bar{p}^1)} \circ \ldots \circ \phi_l^{-(p^l - \bar{p}^l)}(p, x)$$

quand cette expression a un sens. La composante selon p du flot ϕ_i étant une translation selon $\frac{\partial}{\partial p_i}$, il est clair à la fois que la composante selon $\mathcal{P}$ de ce point est $\bar{p}$ et que c'est le seul à avoir cette propriété sur la sous-variété intégrale de $\mathcal{H}$ passant par (p, x). Nous *définissons* donc φ par:

$$(\ \bar{p}, \varphi(p, x)\ ) \ = \ \phi_1^{-(p^1 - \bar{p}^1)} \circ \ldots \circ \phi_l^{-(p^l - \bar{p}^l)}(p, x) \tag{A.52}$$

Notons que, les flots ϕ_i commutant deux à deux, (A.52) est équivalent à

$$(p, x) \ = \ \phi_1^{p^1 - \bar{p}^1} \circ \ldots \circ \phi_l^{p^l - \bar{p}^l}(\ \bar{p}, \varphi(p, x)\ ) \tag{A.53}$$

L'équation (A.52) définit $\varphi(p, x)$ dès que le menbre de droite a un sens, le fait que la première composante soit $\bar{p}$ étant, comme remarqué plus haut, un tautologie. De plus, il existe un voisinage U' de $(\bar{p}, \bar{x})$ sur lequel la membre de droite en question est bien défini[4]

[4] en effet, si l'on pose $t = \bar{p} - p$, cette expression s'écrit

$$\phi_1^{t^1} \circ \ldots \circ \phi_l^{t^l}(\pi, \xi)$$

dont l'ensemble de définition en (t, p, x) est ouvert et contient $(0, \bar{p}, \bar{x})$ (théorème de continuation sur les flots) ; de plus, l'application

$$(p, x) \longmapsto (\bar{p} - p, p, x)$$

est continue et envoie $(\bar{p}, \bar{x})$ sur $(0, \bar{p}, \bar{x})$.

On considère alors un voisinage u'' de $\bar{x}$ dans $\mathcal{P}$, d'adhérence compacte incluse dans $\{ x \ / \ (\bar{p},x) \in U' \}$; il existe alors Ω, voisinage de $\bar{p}$ dans $\mathcal{P}$ tel que pour tout p dans Ω et tout x dans u'', on ait $\chi_{\bar{p},x}(p) \in u''$ On choisit alors V de la façon suivante:

$$V \triangleq \{ \chi_{\bar{p},x}(p) \ / \ p \in \Omega, x \in u'' \} \ ,$$

et l'on a, d'après l'écriture de V et (A.53)

$$\begin{array}{rcl} (\{p\} \times M^n) \cap V & = & \{ \chi_{\bar{p},x}(p) \ / \ x \in u'' \} \\ \varphi(V) & \subset & u'' \end{array}$$

$\varphi(p,.)$ est donc bien pour tout p un difféomorphisme de $(\{p\} \times M^n) \cap V$ dans $\varphi(V)$.

φ étant maintenant construit, montrons qu'il convient, c'est à dire qu'il transforme f et g en $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ vérifiant (A.43) et (A.42). En effet, si l'on définit à partir de φ le difféomorphisme Φ de V dans $\Omega \times u''$ comme en (A.17), et les champs F, $\tilde{F}$, G_k et $\tilde{G}_k$ à partir de f, $\tilde{f}$, g_k et $\tilde{g}_k$ comme C et $\tilde{C}$ à partir de c et $\tilde{c}$ en (A.19) et (A.18), alors, d'après (A.26), les champs A_i définis par (A.22) vérifient

$$A_i \ = \ - X_i \ ,$$

d'où, d'après le lemme A.3,

$$(\ 0 \ , \ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_i} \ ) \ = \ [\ \frac{\partial}{\partial p_i} \ , \ \tilde{F} \ ] \ = \ \Phi_*[\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i \ , \ F \ ] \qquad \text{(A.54)}$$

$$(\ 0 \ , \ \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial p_i} \ ) \ = \ [\ \frac{\partial}{\partial p_i} \ , \ \tilde{G_K} \ ] \ = \ \Phi_*[\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i \ , \ G_K \ ] \qquad \text{(A.55)}$$

mais d'après (2.14) et (2.15), $\Phi_*[\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i \ , \ F \ ]$ et $\Phi_*[\ \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i \ , \ G_K \ ]$ sont dans $\Phi_* \mathcal{G}$, c'est-à-dire dans la distribution engendrée par les $(0, \tilde{g}_k)$, ce qui, au regard de (A.54) et (A.55) donne (A.43) et (A.42).

Propriété globale : Toujours d'après le lemme 2.6, il suffit de montrer que l'existence (globale) des champs X_i (2.12)-(2.13)-(2.14)-(2.15)-(2.17) est une CNS pour (2.19)-(2.21)-(2.22), c'est à dire pour qu'il existe φ, "difféomorphisme dépendant du paramètre p" tel que les champs $\tilde{f}(p,.)$ et $\tilde{g}_k(p,.)$ sur M^n définis, pour tout p, par (A.41) vérifient pour tout (p,x) dans $\mathcal{P} \times M^n$ et $i = 1, ..., l$, les égalités (A.42) et (A.43).

Condition nécessaire : On reprend exactement la preuve précédente (cas local) en remplaçant V (et $\Omega \times \varphi(V)$) par $\mathcal{P} \times M^n$, et l'on montre que si FDE est satisfaite, il existe des champs X_i définis sur $\mathcal{P} \times M^n$, vérifiant (2.12) à (2.15). Reste à montrer (2.17) c'est à dire que les champs $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$ sont x-complets.

Soient $\phi_i^t(.)$ les flots de ces champs $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$. On définit la projection canonique

$$\pi \ : \ \mathcal{P} \times M^n \longrightarrow \mathcal{P}$$

et l'on considère sa restriction à V_{p_o,x_o} (voir (A.48)). Cette restriction est bijective (car $\varphi(p,.)$ l'est pour tout p) et c'est un difféomorphisme local car $\pi'(p,x)$ envoie $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$ sur $\frac{\partial}{\partial p_i}$,

et donc (d'après (A.26)) $T_{(p,x)}V_{p_o,x_o}$ sur $\mathbb{R}^l$; cette restriction est donc un difféomorphisme de V_{p_o,x_o} dans $\mathcal{P}$. De plus, si l'on définit χ_{p_o,x_o} par

$$\chi_{p',x'}(p) \;=\; \phi_1^{p^1-p'^1} \circ ... \circ \phi_l^{p^l-p'^l}(p',x') \quad , \tag{A.56}$$

on a
- $\pi(\chi_{p_o,x_o}(p)) = p$ (d'après (A.53)), et
- $\chi_{p_o,x_o}(p) \in V_{p_o,x_o}$

χ_{p_o,x_o} peut donc être défini sur $\mathcal{P}$ tout entier comme la réciproque de la restriction de π à V_{p_o,x_o}. Cela implique que $\phi_i^t(p^1,...,p^l,x)$ est défini dès que $(p^1,..,p^i+t,..,p^l)$ est dans $\mathcal{P}$, et donc que, si $\phi_i^t(p^1,...,p^l,x)$ est défini sur $]t_i,t_f[$, t_i (resp t_f) étant fini, la limite de la composante en p de $\phi_i^t(p^1,...,p^l,x)$ quand t tend vers t_i (resp. t_f) est $(p^1,..,p^i+t_i,..,p^l)$ (resp $(p^1,..,p^i+t_f,..,p^l)$), qui est sur la frontière de $\mathcal{P}$ car si il était à l'intérieur de $\mathcal{P}$, le flot serait défini pour $t=t_i$ (resp. $t=t_f$); on vient de démontrer que les champs $\frac{\partial}{\partial p_i}+X_i$ sont x-complets.

Condition suffisante : On reprend encore la preuve du cas local, mais elle est beaucoup plus simple ici, l'ouvert U étant remplacé par $\mathcal{P}\times M^n$, ainsi que U' grâce à l'hypothèse d'x-complétude des champs $\frac{\partial}{\partial p_i}+X_i$. On peut alors se fixer $\bar{p}$ quelconque, la construction de u' n'a pas lieu d'être (i.e. $u'=M^n$), et (A.52) définit φ sur tout $\mathcal{P}\times M^n$

φ étant maintenant construit, on montre qu'il convient de la même façon que dans la démonstration de la propriété locale, les conditions (A.43) et (A.42) étant de toute façon locale. $\triangledown\triangledown\triangledown$

A.2.4 Démonstrations relatives à la section 2.4

Démonstration de la propriété 2.7 : Cette démonstration sera calquée sur celle du théorème 2.5. Comme dans cette preuve, et d'après le lemme 2.8, il suffit de montrer que (2.23)-(2.24)-(2.25)-(2.26) est une CNS pour l'existance d'un "difféomorphisme dépendant du paramètre p" tel que les champs $f(p,.)$ et $\tilde{g}_k(p,.)$ définis, pour tout p, par:

$$\tilde{f}(p,.) \;=\; \varphi(p,.)_* f(p,.) \quad ; \quad \tilde{g}_k(p,.) \;=\; \varphi(p,.)_* g_k(p,.) \tag{A.57}$$

vérifient (A.43) et (A.42), φ devant de plus vérifier (1.72).

Condition nécessaire : Supposons qu'un tel "difféomorphisme dépendant du paramètre p" $\varphi(p,.)$ existe. On dispose d'hypothèses plus fortes que dans le théorème 2.5 on peut donc reprendre sa démonstration sans y rien changer pour obtenir (2.24), (2.25) et (2.26). Reste à vérifier (2.23), qui, avec les notations de la démonstration du théorème 2.5, découle directement de (1.72) et de (A.45).

Condition suffisante : Supposons que (2.23), (2.24), (2.25) et (2.26) soint vérifiées. Comme pour la preuve de la condition nécessaire, on peut reprendre la preuve du théorème 2.5 pour construire φ et montrer qu'il satisfait à (A.57), (A.43) et (A.42), et il ne reste plus qu'a montrer que φ satisfait la condition de matching (1.72), ce qui n'est pas difficile: utilisant

(A.45), (A.26), on a[5]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x).\frac{\partial}{\partial p_i}(p,x) \;+\; \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x).X_i(p,x) \;=\; \varphi'(p,x).\left(\frac{\partial}{\partial p_i}+X_i\right) \;=\; 0$$

d'où

$$< \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p,x)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,x)\;,\;\frac{\partial}{\partial p_i} > \;\in\; \mathrm{Span}\{\; g_1(p,x),...,g_m(p,x)\;\} \qquad \text{(A.58)}$$

car $X_i(p,x)$ est précisément dans Span$\{\; g_1(p,x),...,g_m(p,x)\;\}$. $\triangledown\triangledown\triangledown$

Dèmonstration du théorème 2.9 : On définit la distribution $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{P}\times M^n$ par

$$\mathcal{D}_1 \;=\; \mathrm{Span}\{\; G_1,...,G_m,\frac{\partial}{\partial p_1},...,\frac{\partial}{\partial p_l}\;\} \qquad \text{(A.59)}$$

qui est involutive d'après (2.33) et (2.35), et qui contient $\mathcal{G}$ en évidence.

On définit $\mathcal{D}_2$ par :

$$\mathcal{D}_2 \;=\; \{\; Y \;/\; Y\in\mathcal{D}_1 \;et\; [Y,F]\in\mathcal{D}_1\;\} \qquad \text{(A.60)}$$

C'est une sous-distribution involutive de $\mathcal{D}_1$. Sous-distribution car si $Y\in\mathcal{D}_2$ et $Z\in\mathcal{D}_2$, $\alpha X+\beta Z$ est dans $\mathcal{D}_1$ et

$$[\alpha Y+\beta Z,F] \;=\; \alpha[Y,F] \;+\; \beta[Z,F] \;-\; (L_F\alpha)Y \;-\; (L_F\beta)Z$$

aussi (car $[Y,F]$ sont dans $\mathcal{G}$ et $[Z,F]$ et Y et Z dans $\mathcal{D}_1$), donc $\alpha X+\beta Z$ est bien dans $\mathcal{D}_2$. Involutive car si Y et Z sont dans $\mathcal{D}_2$, $[Y,Z]$ est dans $\mathcal{D}_1$ (car $\mathcal{D}_1$ est involutive) et

$$[[Y,Z],F] \;=\; -[[F,Y],Z] \;-\; [[Z,F],Y]$$

est dans $\mathcal{G}$, donc dans $\mathcal{D}_1$.

On définit enfin $\mathcal{D}_3$ par :

$$\mathcal{D}_3 \;=\; \mathcal{D}_2\cap\mathcal{G} \qquad \text{(A.61)}$$

Il est bien clair que c'est une sous-distridution involutive de $\mathcal{D}_2$.

On note

$$\pi \;\; la\; projection\; canonique\; de\; T(\mathcal{P}\times M^n)\;\; sur\; T\mathcal{P} \qquad \text{(A.62)}$$

L'idée qui sous-tend la suite de cette construction est très simple: Si la famille satisfait FDEM, la distribution $\mathcal{H}$ donnée par la partie condition suffisante du théorème 2.7 (voir remarque 2.4) est une sous distribution involutive de $\mathcal{D}_2$, telle que la restriction de π à $\mathcal{H}$ soit bijective, puisque $\mathcal{H}$ a la propriété que, pour tout i, il existe dans $\mathcal{H}$ un et un seul champ de vecteur de la forme $\frac{\partial}{\partial p_i}+X_i$ où X soit dans $\mathcal{G}$. De plus, si l'on peut construire une telle sous-distribution involutive de $\mathcal{D}_2$, alors les uniques $\frac{\partial}{\partial p_i}+X_i$ conviennent. Détaillons ceci.

[5] avec un petit abus de notation: on écrit $X_i(p,x)$ pour désigner la composante de $X_i(p,x)$ sur T_xM^n

• Tout d'abord, la restriction de π à $\mathcal{D}_2$ est surjective, puisque, au moins localement, (2.34) implique l'existance de fonction $\alpha_{i,k}$ et $\beta_{i,k}$ telles que:

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{i,k} g_k + \sum_{k=1}^{m} \beta_{i,k}[f, g_k] = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{i,k} - L_f \beta_{i,k}) g_k + \left[f, \sum_{k=1}^{m} \beta_{i,k} g_k \right] \quad \text{(A.63)}$$

qui peut se réécrire

$$[\ \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{k=1}^{m} \beta_{i,k} G_k\ ,\ F\ ] = -\sum_{k=1}^{m} (\alpha_{i,k} - L_f \beta_{i,k}) G_k \quad \text{(A.64)}$$

si bien que $\mathcal{D}_2$ contient les champs

$$\frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{k=1}^{m} \beta_{i,k} G_k \quad i = 1, ..., l$$

• Le noyau de la restiction de π à $\mathcal{D}_2$ est en évidence $\mathcal{D}_3$ (qui est l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{D}_2$ de composante nulle sur $T\mathcal{P}$).

On construit maintenant (localement) $\mathcal{H}$. Soit $(\bar{p}, \bar{x})$ dans $\mathcal{P} \times M^n$; $\mathcal{D}_3$ étant une sous-distribution involutive de $\mathcal{D}_2$, elle-même involutive, il existe un voisinage U de $(\bar{p}, \bar{x})$ dans $\mathcal{P} \times M^n$ et un système de coordonnées $q_1, ..., q_l, \xi_1, ..., \xi_n$ sur U tel que

$$\mathcal{D}_2 = \text{Span}\{\frac{\partial}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial}{\partial q_l}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \xi_r}\} \quad \text{(A.65)}$$

$$\mathcal{D}_3 = \text{Span}\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \xi_r}\} \quad \text{(A.66)}$$

(r est un entier compris entre 0 et m). On définit alors, sur U, la distribution

$$\mathcal{H} \triangleq \text{Span}\{\frac{\partial}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial}{\partial q_l}\} \quad \text{(A.67)}$$

$\mathcal{H}$ est clairement involutive, et la restriction de π à $\mathcal{H}$ est un isomorphisme puisque $\mathcal{H} \cap \text{Ker } \pi = 0$

Les vecteurs $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$ recherchés sont alors les images réciproques des $\frac{\partial}{\partial p_i}$ par la restriction de π' à $\mathcal{H}$. Ils conviennent car :

- Les X_i sont dans $\mathcal{G}$, par définition de $\mathcal{D}_1$.
- Les $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$ satisfont de plus (2.24) d'après l'involutivité de $\mathcal{H}$ et le raisonnement de la remarque 2.3.
- Ils satisfont (2.26) car $X_i \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ est involutive, et de plus $[\frac{\partial}{\partial p_i}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{G}$ d'après (2.35).
- Ils (2.25) car, étant dans $\mathcal{D}_2$, ils vérifient

  $$[F, \frac{\partial}{\partial p_i} + X_i] \in \mathcal{D}_1\ ,$$

  mais il est de plus cair que ce crochet a une composante nulle sur $T\mathcal{P}$ (car le coefficient de $\frac{\partial}{\partial p_i}$ (c'est 1) ne dépend pas de x et a donc une dérivée nulle selon F), si bien qu'il est en fait dans $\mathcal{G}$.

▽▽▽

Démonstration du théorème 2.11 : Tous les raisonnements de la démonstration du théorème 2.9 sont ici valides, mais la condition supplémentaire (2.36) implique que la distribution $\mathcal{D}_3$ est nulle car

$$\text{rang}\{\ g_1,...,g_m\ ,\ [f,g_1],...,[f,g_m]\ \} \ = \ 2\,\text{rang}\mathcal{G} \ - \ \text{rang}\mathcal{D}_3 \tag{A.68}$$

On peut donc choisir $\mathcal{H} = \mathcal{D}_2$, et pour $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$ l'image réciproque de $\frac{\partial}{\partial p_i}$ par la restriction de π' à $\mathcal{D}_2$. On a ainsi défini les vecteurs $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$ globalement, et il est clair qu'ils vérifient les conditions (2.23) à (2.26) du théorème 2.7; si de plus on fait l'hypothèse qu'ils sont x-complets, (2.28) est satisfaite, et le théorème 2.7 nous dit que la famille satisfait la condition FDEM.

▽▽▽

Démonstration du corrolaire 2.12 : La compacité de M^n assure que le flot de $\frac{\partial}{\partial p_i} + X_i$ est x-complet.

▽▽▽

A.3 Démonstrations concernant la partie ESTIMATION.

A.3.1 Deux lemmes techniques

Lemme A.5 *Si P est une fonction du temps à valeur dans l'espace des matrices symétriques définies positives vérifiant :*

$$\dot{P} \ \leq \ -k_2\ r\ PZ^\top ZP \qquad k_2 > 0 \tag{A.69}$$

on a la majoration suivante:

$$\int_0^T \|rPZ^\top e\| \ \leq \ \sqrt{\frac{\text{tr}P(0)}{k_2}}\ \sqrt{\int_0^T r\|e\|^2} \tag{A.70}$$

Démonstration du lemme A.5 : Il est clair que:

$$\begin{aligned} \|rPZ^\top e\| \ &= \ r\sqrt{e^\top ZPPZ^\top e} \\ &\leq \ r\sqrt{\|e\|^2\ \text{tr}(ZPPZ^\top)} \end{aligned} \tag{A.71}$$

d'où, avec l'inégalité de Schwartz,

$$\left(\int_0^T \|rPZ^\top e\|\right)^2 \ \leq \ \int_0^T r\|e\|^2\ \int_0^T r\ \text{tr}(ZPPZ^\top) \quad , \tag{A.72}$$

mais, vu (A.69),

$$r\ \text{tr}(ZPPZ^\top) \ = \ \text{tr}(\ r\ Z^\top PPZ\ ) \ \leq \ -\frac{1}{k_2}\ \text{tr}\dot{P} \tag{A.73}$$

Cela entraîne, avec (A.72),

$$\left(\int_0^T \|rPZ^\top e\|\right)^2 \leq (\mathrm{tr}P(0) - \mathrm{tr}P(T)) \int_0^T r\|e\|^2 \quad , \tag{A.74}$$

et finalement (A.70) puisque P est une matrice définie positive décroissante. $\triangledown\triangledown\triangledown$

Lemme A.6 *Soient trois réels a, b, c, et un entier m, avec $a > 0$ et $m > 2$. Il existe alors deux réels α et δ, avec $\alpha > 0$ tels que:*

$$\forall\, \tau > 0 \quad , \quad a\tau^m - b\tau^{m-1} - c\tau^{m-2} \geq \alpha\tau^m - \delta \tag{A.75}$$

Démonstration du lemme A.6 : On choisit α quelconque tel que

$$0 < \alpha < a \tag{A.76}$$

et il s'agit de déterminer δ tel que

$$\forall\, \tau > 0 \quad , \quad \tau^{m-2}\left[(a-\alpha)\,\tau^2 - b\tau - c\right] + \delta \geq 0 \tag{A.77}$$

Définissons

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 + 4c(a-\alpha) \\ \tau_o &= \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2(a-\alpha)} \end{aligned} \tag{A.78}$$

Si l'on prend $\delta > 0$, l'expression dans (A.77) sera positive dès que le trinôme entre crochet est positif; là où il est négatif, τ est plus petit que τ_o, et l'expression est donc minorée par

$$\tau_o^{m-2}\left[(a-\alpha)\,\tau^2 - b\tau - c\right] + \delta \geq 0$$

Il suffit donc de prendre δ tel que

$$\left(b\tau_o^{m-2}\right)^2 - 4\left(\tau_o^{m-2}(a-\alpha)\right)\left(\delta - \tau_o^{m-2}c\right)$$

ce qui s'écrit

$$\delta > \frac{\tau_o^{m-2}\,\Delta}{4\,(a-\alpha)} \tag{A.79}$$

$\triangledown\triangledown\triangledown$

A.3.2 Démonstrations des théorèmes du chapitre 4

Démonstration des théorèmes 4.1 et 4.3

Le théorème 4.1 est une conséquence du théorème 4.3 avec $\Pi = \mathbb{R}^q$: on peut alors prendre $D^\star = +\infty$, et la "projection" π est toujours égale à l'identité. Nous ne démontrerons donc

que le théorème 4.3; on peut toutefois obtenir la démonstration (moins touffue) du théorème 4.1 en considérant que le terme " χ " est toujours nul dans tout ce qui suit (cela équivaut à dire que la projection est toujours égale à l'identité); les références sont celles du théorème 4.3; on donne celles du théorème 4.1 en bas de page.

Point 0 du théorème 4.3:

Vus (4.16) et (4.24), en tout point $\hat{p}$ de la frontière de Π, $\dot{\hat{p}}$ est soit tangent à cette frontière soit dirigé strictement vers l'intérieur de Π; il est donc impossible que $\hat{p}$ sorte de Π, cela démontre le point 0

Point 1 :

On considère la fonction:

$$V_1 \;=\; \tfrac{1}{2}\,\tilde{p}^T\,P^{-1}\,\tilde{p} \tag{A.80}$$

Un calcul simple donne, vu (4.16)[6],

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \;=\; & -re^\top Z\tilde{p} \;-\; \tfrac{1}{2}\tilde{p}^\top P^{-1}\dot{P}P^{-1}\tilde{p} \\ & -\,r\;\tilde{p}^\top P^{-1}\left(\;\pi_{\hat{p},P}(PZ^\top e) \;-\; PZ^\top e\;\right)\quad ,\end{aligned} \tag{A.81}$$

mais, d'après (4.26)[7] et (3.7),

$$-\,re^\top Z\tilde{p} \;-\; \tfrac{1}{2}\tilde{p}^\top P^{-1}\dot{P}P^{-1}\tilde{p} \;\leq\; -\frac{2-k}{2}\,r\,\|e\|^2\quad , \tag{A.82}$$

et d'autre part, d'après la définition de la projection $\pi_{\hat{p},P}$ (4.24), on peut écrire

$$r\;\tilde{p}^\top P^{-1}\left(\;\pi_{\hat{p},P}(PZ^\top e) \;-\; PZ^\top e\;\right) \;=\; -\,\chi(t)\frac{(n^\top PZ^\top e)(n^\top\tilde{p})}{n^\top Pn} \tag{A.83}$$

où $\chi(t)$ est dans $[0,1]$, non nul si et seulement si $\hat{p}$ est sur la frontière d'un Π_λ (voir (4.23)) et $n^\top PZ^\top e$ est négatif. Lorsque $\chi(t)$ est non nul, les facteurs au numérateur sont l'un négatif et l'autre positif: le premier est négatif par définition de $\chi(t)$ et le second positif parce que n est la normale sortante au point $\hat{p}$ à la frontière de Π_λ, convexe, et que $\tilde{p} = \hat{p} - p^*$, p^* étant à l'intérieur de Π_λ; on peut donc écrire

$$r\;\tilde{p}^\top P^{-1}\left(\;PZ^\top e \;-\; \pi_{\hat{p},P}(PZ^\top e)\right) \;=\; \chi(t)\frac{|n^\top PZ^\top e|\;|n^\top\tilde{p}|}{n^\top Pn} \tag{A.84}$$

De plus, (4.35) et la convexité de Π impliquent, p^* étant à l'intérieur de Π,

$$n^\top\tilde{p} \;=\; n^\top(\hat{p} \;-\; p^*) \;\geq\; D^* \tag{A.85}$$

et finalement, d'après (A.81), (A.82) et (A.84),

$$V_1(T) \;-\; V_1(0) \;\leq\; -\frac{2-k}{2}\int_0^T r\|e\|^2 \;-\; D^*\int_0^T \chi\frac{|n^\top PZ^\top e|}{n^\top Pn} \tag{A.86}$$

[6] ou (4.2).
[7] ou (4.7).

χ étant dans $[0,1]$, d'où l'on déduit facilement le point 1 et les inégalités (4.30) et (4.31)[8] car (A.86) implique ($V_1(0)$ restant positif):

$$\int_0^T r\|e\|^2 \leq \frac{2}{2-k} V_1(0) \tag{A.87}$$

$$\text{et} \quad V_1(T) \leq V_1(0) \tag{A.88}$$

Point 2 : (4.16) et (4.24)[9] implique clairement

$$\|\dot{\hat{p}}\| \leq r\|PZ^\top e\| + \chi(t)\frac{|n^\top PZ^\top e|}{n^\top Pn}\|Pn\| \tag{A.89}$$

où χ est défini plus haut. D'autre part, d'après le lemme A.5,

$$\int_0^T \|rPZ^\top e\| \leq \sqrt{\frac{\mathrm{tr}P(0)}{k_2}} \sqrt{\int_0^T r\|e\|^2}$$

Enfin, d'après (A.86) et le fait que P soit une matrice symétrique définie positive décroissante (puisque (4.32)[10] est vérifié), on a :

$$\int_0^T \chi\frac{|n^\top PZ^\top e|}{|\, n^\top Pn\,|}\|Pn\| \leq \frac{\|P(0)\|}{D^*}\,(V_1(0) - V_1(T)) \leq \frac{\|P(0)\|}{D^*}\,V_1(0) \tag{A.90}$$

d'où l'on déduit le point 2 du théorème. $\triangledown\triangledown\triangledown$

Démonstration du théorème 4.4

Nous allons reprendre la démonstration ci-dessus (théorèmes 4.1 et 4.3), le changement essentiel étant que l'on a maintenant (3.8) : $e = Z\tilde{p} - w$ au lieu de $e = Z\tilde{p}$.

Point 0 : La démonstration est la même que pour le théorème 4.3.

Point 1 : On considère la même fonction V_1 qu'en (A.80):

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\,\tilde{p}^T\,P^{-1}\,\tilde{p} \tag{A.91}$$

L'inégalité (A.81), tirée de (4.16), qui reste vrai, est encore vérifiée. En revanche, la présence du bruit w ne permet pas d'obtenir (A.82), mais plutôt, d'après (5.42)[11], (3.8), et (4.17)-(4.39)-(4.40),

$$\begin{aligned} -re^\top Z\tilde{p} - \tfrac{1}{2}\tilde{p}^\top P^{-1}\dot{P}P^{-1}\tilde{p} \leq & -r\left[\, e^\top Z\tilde{p} - \frac{k}{2}\tilde{p}^\top Z^\top Z\tilde{p}\,\right] \\ = & -\tfrac{2-k}{2}\rho\|e\|^{m_1+1} + (1-k)\rho\,\|e\|^{m_1-1}e^\top w \\ & + \frac{k}{2}\rho\|e\|^{m_1-1}\|w\|^2 \end{aligned} \tag{A.92}$$

[8] ou (4.10) et (4.11).
[9] ou (4.2) seulement.
[10] ou (4.12).
[11] ou (4.7).

d'où, d'après le lemme technique A.6 page 151, (ρ est seulement en facteur de l'ensemble et est positif)

$$-re^\top Z\tilde{p} - \tfrac{1}{2}\tilde{p}^\top P^{-1}\dot{P}P^{-1}\tilde{p} \leq -\lambda_1\rho\|e\|^{m_1+1} + \lambda_2\rho\|w\|^{m_1+1} , \tag{A.93}$$

ou λ_1 et λ_2 sont des constantes positives dépendant uniquement de k et m_1.

D'autre part, la partie (A.83) à (A.86) de la démonstration du théorème 4.3 n'utilisant pas la relation (3.7), (A.86) est encore vérifié. Finalement, d'après (A.81), (A.92) et (A.86), on a la majoration suivante:

$$V_1(T) - V_1(0) \leq -\lambda_1\int_0^T \rho\|e\|^{m_1+1} + \lambda_2\int_0^{+\infty}\rho\|w\|^{m_1+1} - D^*\int_0^T \chi(t)\frac{|n^\top PZ^\top e|}{n^\top Pn}(t)\,dt \tag{A.94}$$

$\chi(t)$, défini en (A.83) étant toujours dans $[0,1]$. De plus, (4.37) et (4.39) impliquent

$$\int_0^{+\infty}\rho\|w\|^{m_1+1} \leq \int_0^{+\infty}\|w\|^{m_1+1} \leq {k_w}^{m_1+1}\frac{\tau_w}{m_1+1}\|w(0)\|^{m_1+1} , \tag{A.95}$$

et l'on a finalement:

$$\int_0^T r\|e\|^2 = \int_0^T \rho\|e\|^{m_1+1} \leq \frac{1}{\lambda_1}V_1(0) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}{k_w}^{m_1+1}\frac{\tau_w}{m_1+1}\|w(0)\|^{m_1+1} \tag{A.96}$$

$$\text{et} \quad V_1(T) \leq V_1(0) + \lambda_2{k_w}^{m_1+1}\frac{\tau_w}{m_1+1}\|w(0)\|^{m_1+1} \tag{A.97}$$

d'où l'on déduit facilement le point 1.

Point 2 : Les raisonnements de la démonstration du point 2 pour le théorème 4.3 peuvent être repris, et vu que (4.30) est remplaçé par (4.41), donnent (4.44) et donc le point 2

Annexe B

Reproduction de [42]

ADAPTIVE NONLINEAR CONTROL
an estimation-based algorithm

L. Praly et *J.-B. Pomet*

Proceedings du Colloque International d'Automatique Non-linéaire
Nantes, 1988
(Année "non-linéaire" du C.N.R.S.)
Lecture Notes in Control and Information Sciences, à paraitre

1. INTRODUCTION

We consider a family of non-linear systems with state x in $\mathbb{R}^n$ and input u, indexed by the parameter vector p:

$$J(p,x)\ \dot{x} \;=\; f(p,x) \;+\; u\ g(p,x) \tag{B.1}$$

The maps involved in this equation are smooth with respect to x and linear with respect to p. More precisely (with looseness in the notations):

$$\begin{array}{rcl} J(p,x) & = & J_s(x) \;+\; J_p(x).p \\ f(p,x) & = & f_s(x) \;+\; f_p(x).p \quad , \quad f(p,0) \;=\; 0 \\ g(p,x) & = & g_s(x) \;+\; g_p(x).p \end{array} \tag{B.2}$$

The parameter vector p lies in Π, a smooth closed convex subset of $\mathbb{R}^q$ with a non-empty interior such that:

$J(p,x)$ is invertible for all (p,x) in $\Pi \times \mathbb{R}^n$,

For each system (B.1), i.e. each p in Π, there exists a smooth state feedback control law $u = v(p,x)$ making the origin a global attractor.

The functions J, f, g, v and the set Π being known, our problem is to design a controller which guarentees state regulation and solution boundedness when placed in feedback with

one of the systems (B.1) corresponding to some parameter vector denoted p^*, p^* being unknown.

Usual adaptive controllers have the following form:

$$u = v(\hat{p}, x) + w \tag{B.3}$$

$\hat{p}$ being an updated parameter vector, $v(p, x)$ the so-called "certainty equivalence" control law, and w an additional corrective term eventually added to v.

This has been succesfully performed in the case of a robot arm with as many motors as axis. Two rather different methods have been used. For example:
[Mi-Go] proposes an adaptive controller where the estimation of p^* is performed without taking into account the control law to be used, the certainty equivalence law is feedback linearisation, and some additive terms are added to compensate for the effect of updating $\hat{p}$. This is an estimation-based approach.
[Sl-Li] proposes to update $\hat{p}$ to make a global positive function decrease. The certainty equivalence control law is not feedback linearization there.

In [Ta-Ko-Ma-Ka], an adaptive controller is designed for a family of systems of the type (B.1), specified by the fact that J is the identity matrix and there exist a Hurwitz matrix A and a diffeomorphism $\Phi(x)$ such that:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x)^{-1} A \Phi(x) - f(p, x) \in \text{range } g(p, x) \qquad \forall (p, x) \quad , \tag{B.4}$$

which means that all the systems (B.1) are linearizable via feedback and diffeomorphism and all the dynamic uncertainties (i.e. the part of the fields actually depending on p) are contained in the subspace spanned by the input fields. A global Lyapunov function is used to obtain the update law of $\hat{p}$.

In this paper, we propose an estimation-based adaptive controller, using the certainty equivalence feedback law. We derive its equations in section 2. We establish boundedness of the solutions and convergence of x to zero in section 3. The assumptions we require, collected below, are discussed in section 4. Note that in [Po-Pr,88], we propose an algorithm with corrective terms, which works on a more particular class of systems, but requires far less restrictive assumptions on the growth of the fields at infinity (see assumption A2 below).

ASSUMPTIONS:

Assumption A0 (invertibility): $J(p, x)$ is uniformly invertible for (p, x) in $\Pi \times \mathbb{R}^n$:

$$\| J(p, x)^{-1} \| \leq k \tag{B.5}$$

Assumption A1 ("satisfactory" control law for all p): There exist C^1 functions $V(p, x)$ and $v(p, x)$ defined on $\Pi \times \mathbb{R}^n$, such that:

1- $V(p, x)$ is non negative and is zero if and only if $x = 0$.
2- For any positive M, the set $\{(p, x) \ / \ V(p, x) < M \ , \ p \in \Pi \ and \ |p| \leq M\}$ is

bounded.

3- Let the map F be defined by:

$$F(p,x) \;=\; J(p,x)^{-1}\,[\; f(p,x) \;+\; v(p,x)\; g(p,x)\;] \tag{B.6}$$

There exists a, a strictly positive real number, such that, for any (p,x) in $\Pi \times \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(p,x)\quad F(p,x) \;\leq\; -\; a\; V(p,x) \tag{B.7}$$

Assumption A2 (growth at infinity): There exist a positive continuous function k and positive constants d, α, β, γ, δ such that, for all (p,x) in $\Pi \times \mathbb{R}^n$:

$$\alpha \;<\; 1 \tag{B.8}$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}(p,x)\right| \;\leq\; k(p)\;\mathrm{Sup}\;\{\;1\;,\;V(p,x)^{\alpha}\;\} \tag{B.9}$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial p}(p,x)\right| \;\leq\; k(p)\;\mathrm{Sup}\;\left\{\;1\;,\;V(p,x)^{\beta}\;\right\} \tag{B.10}$$

$$\left\{\begin{array}{l} |f_s(x)| \;\leq\; k(p)\;\mathrm{Sup}\;\{\;1\;,\;V(p,x)^{\gamma}\;\} \\ |f_p(x)| \;\leq\; k(p)\;\mathrm{Sup}\;\{\;1\;,\;V(p,x)^{\gamma}\;\} \\ |v(p,x)\;g_s(x)| \;\leq\; k(p)\;\mathrm{Sup}\;\{\;1\;,\;V(p,x)^{\gamma}\;\} \\ |v(p,x)\;g_p(x)| \;\leq\; k(p)\;\mathrm{Sup}\;\{\;1\;,\;V(p,x)^{\gamma}\;\} \end{array}\right. \tag{B.11}$$

$$\left|J(p,x)^{-1}J_p(x)\right| \;\leq\; k(p) \tag{B.12}$$

$$|F(p,x) \;-\; F(p,y)| \;\leq\; k(p)\;\mathrm{Sup}\left\{\;1\;,\;V(p,x)^{\delta}\;\right\}\;\left(1+|x-y|^{d}\right)|x-y| \tag{B.13}$$

Assumption A3 (realizability): There exist smooth functions $h_s(p,x)$ and $h_p(p,x)$ such that, for x in $\mathbb{R}^n$ and p, q in Π,

$$[J(p,x)^{-1}\begin{pmatrix} J_s(x) \\ J_p(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_s}{\partial x}(p,x) \\ \frac{\partial h_p}{\partial x}(p,x) \end{pmatrix}]\;\frac{\partial}{\partial q}J(q,x)^{-1}[f(q,x)+v(p,x)g(q,x)] = 0 \tag{B.14}$$

Assumption A4 : Π is closed, convex, and has a non-empty interior. p^* is an interior point of Π; i.e.

$$\mathrm{dist}\,(\;p^*\;,\;\textit{boundary of}\;\Pi\;) \;\geq\; D^* \;>\; 0 \tag{B.15}$$

2. THE ADAPTIVE CONTROLLER

As mentioned above, our controller is based on certainty equivalence principle. Namely, u is given by

$$u \;=\; v(\hat{p},x) \tag{B.16}$$

where $\hat{p}$ is an estimate of p^*. To achieve this estimation, we remark that, regardless of the control law actually used, (B.1) can be seen as a linear observation equation for the actual parameter vector p^*:

$$\begin{array}{l} J_s(x(t))\dot{x}(t) - f_s(x(t)) - u(t)g_s(x(t)) \\ \quad = [-J_p(x(t))\dot{x}(t) + f_p(x(t)) + u(t)g_p(x(t))]p^* \end{array} \tag{B.17}$$

Hence, we can think of using a linear estimation algorithm. Unfortunately, $\dot{x}$ is involved in this equation and is not measured. To overcome this difficulty, we integrate (B.17). More precisely, with ϵ a positive constant, we define the "filtered" quantities z and Z, as is usually done in the linear case:

$$\epsilon\dot{Z}(t) + Z(t) = J(\hat{p}(t),x(t))^{-1}\left[-J_p(x(t))\dot{x}(t) + f_p(x(t)) + u(t)g_p(x(t))\right] \quad \text{(B.18)}$$

$$\epsilon\dot{z}(t) + z(t) = J(\hat{p}(t),x(t))^{-1}\left[J_s(x(t))\dot{x}(t) - f_s(x(t)) - u(t)g_s(x(t))\right] \quad \text{(B.19)}$$

This definition cannot be used per se to obtain Z and z since $\dot{x}$ is still explicitely needed. But, if Assumption A3 holds and the control law u is $v(\hat{p},x)$, (B.18) and (B.19) may be realized in:

$$\begin{aligned}
\epsilon\dot{\omega} + \omega &= -\tfrac{1}{\epsilon}\, h_s(\hat{p},x) - \frac{\partial h_s}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \\
&\quad + [J(\hat{p},x)^{-1}J_s(x) - \frac{\partial h_s}{\partial x}(\hat{p},x)]J(\hat{p},x)^{-1}(f(\hat{p},x) + v(\hat{p},x)g(\hat{p},x)) \quad \text{(B.20)} \\
&\quad + J(\hat{p},x)^{-1}(f_s(x) + v(\hat{p},x)g_s(x)) \\
z &= \tfrac{1}{\epsilon}\, h_s(\hat{p},x) + \omega \\
\epsilon\dot{\Omega} + \Omega &= -\frac{1}{\varepsilon}\, h_p(\hat{p},x) - \frac{\partial h_p}{\partial p}(\hat{p},x)\dot{\hat{p}} \\
&\quad + [J(\hat{p},x)^{-1}J_p(x) - \frac{\partial h_p}{\partial x}(\hat{p},x)]J(\hat{p},x)^{-1}(f(\hat{p},x) + v(\hat{p},x)g(\hat{p},x)) \quad \text{(B.21)} \\
&\quad + J(\hat{p},x)^{-1}(f_p(x) + v(\hat{p},x)g_p(x)) \\
Z &= \tfrac{1}{\varepsilon}\, h_p(\hat{p},x) + \Omega
\end{aligned}$$

As seen later, an interesting choice for the initial conditions may be

$$\omega(0) + \frac{1}{\varepsilon}\, h_s(\,\hat{p}(0)\,,\,x(0)\,) = \frac{x(0)}{\varepsilon} \quad , \quad \Omega(0) + \frac{1}{\varepsilon}\, h_p(\,\hat{p}(0)\,,\,x(0)\,) = 0 \quad \text{(B.22)}$$

This is always possible since h_s and h_p, only constrained by (B.14), are defined up to (at least) a constant.

Now, comparing (B.18) and (B.19), we obtain:

$$z(t) = Z(t)p^* + [\,z(0) - Z(0)p^*\,]\, e^{-t/\epsilon} \quad \text{(B.23)}$$

which gives, in the case when the initial conditions are given by (B.22),

$$z(t) = Z(t)p^* + \frac{x(0)}{\varepsilon}\, e^{-t/\epsilon} \quad \text{(B.24)}$$

Without the exponentially decaying term, this would be again a linear observation equation of p^*. But now z and Z can be computed. The estimation algorithm we shall use is the following generalization of least square algorithm: $\hat{p}$ being the estimate of p^*:

$$e = z - Z\hat{p} \quad \text{(B.25)}$$

$$\begin{array}{rcl} \dot{\hat{p}} & = & |e|^{m-1} \ \pi_{\hat{p}}\left(PZ^Te\right) \quad ; \ \hat{p}(0) \in \Pi \\ \dot{P} & = & -|e|^{m-1}PZ^TZP \quad ; \ P(0) = I \end{array} \tag{B.26}$$

where:

$\pi_{\hat{p}}$ is the identity map if $\hat{p}$ lies inside Π and the P^{-1}-orthogonal projection onto the boundary of Π if $\hat{p}$ is on this boundary; namely, in this latter case, with $n(\hat{p})$ the inward unit normal vector to $\partial\Pi$ at $\hat{p}$, for s in $\mathbb{R}^q$,

$$\pi_{\hat{p}}(s) = \begin{array}{ll} s & if \ n(\hat{p})^Ts \geq 0 \\ s - \frac{n(\hat{p})^Ts}{n(\hat{p})^TP\ n(\hat{p})} P\ n(\hat{p}) & if \ n(\hat{p})^Ts < 0 \end{array} ; \tag{B.27}$$

m, larger or equal to 1, is a degree of freedom of the algorithm.

Our complete adaptive controller is (B.16),(B.20),(B.21),(B.25),(B.26).

3. BEHAVIOUR OF THE CLOSED-LOOP SYSTEM

The closed-loop system is made of the adaptive controller in feedback with:

$$\dot{x} = J(p^*,x)^{-1}\left[f(p^*,x) + u\ g(p^*,x)\right] \tag{B.28}$$

Its state is $(x, \hat{p}, P, \omega, \Omega)$. The right-hand side of this non-linear autonomous differential equation is not continuous (because of the projection in (B.26)), but, thanks to Π 's convexity, existence, uniqueness and continuity of solutions hold for such a system (see [Br] prop 3.12).

3.1 A property of the estimation algorithm

As more or less well known in the case $m = 1$, regardless of the control law effectively used, as long as the solution exists, the estimation algorithm (B.26)-(B.25) has the following property, established in Appendix A:

Lemma 1: Under assumptions A0, A3, A4 only, regardless of the control law actually used, i.e. regardless of the function $u(t)$, any solution of the closed-loop system which is defined on the time interval $[\ 0\ ,\ t_f\ )$ (maybe $t_f = \infty$) has the following properties:

- $P(t)$ is symmetric positive definite for any t in $[0, t_f)$ and $P(t) \leq P(0)$. (B.29)
- $\hat{p}(t)$ is bounded and $\dot{\hat{p}}(t) \in \mathrm{L}^1(0, t_f)$ [hence t tends to t_f for some t_f] (B.30)
- $e(t) \in \mathrm{L}^{m+1}(0, t_f)$ (B.31)

and we have the following bounds ($W(0)$ is defined in (B.34) and q is the dimension of the parameter p):

$$\hat{p}(t) \in \Pi \quad \text{and} \quad |p^* - \hat{p}(t)|^2 \leq 2\ W(0) \qquad \forall t \in [0, t_f) \tag{B.32}$$

$$\begin{cases} \int_0^{t_f} |\dot{\hat{p}}| dt \leq (m+1)\ W(0) \\ \int_0^{t_f} |e|^{m+1} dt \leq \sqrt{q\ (m+1)\ W(0)} + \frac{m+1}{D^*} W(0) \end{cases} \tag{B.33}$$

$$\text{where} \quad W(0) \triangleq \frac{1}{2}|p^* - \hat{p}(0)|^2 + \frac{\epsilon |z(0) - Z(0)p^*|^{m+1}}{(m+1)^2}\ ) \tag{B.34}$$

3.2 Boundedness and convergence

Lemma 1 gives us informations only on the $(\hat{p}, P)$-components of solutions of the closed-loop system and on e. The complete behaviour is precised in:

Theorem 1: Let the following index be defined from assumption A2:

$$\eta_1 \;=\; \mathrm{Sup}\ \{\ \alpha+\gamma\ ,\ \alpha+\delta\ ,\ \beta\ \} \tag{B.35}$$

Suppose that assumptions A0, A1, A2, A3, A4 are met and, in the adaptation law (B.26), m is chosen such that:

$$m+1 \;\geq\; \mathrm{Sup}\left\{\ 2\ ,\ d+1\ ,\ \gamma\ ,\ \frac{\gamma}{1-\alpha}\right\} \tag{B.36}$$

Under these conditions, the closed loop system satisfies:

- if $\eta_1 \;\leq\; 1$, all its solutions are defined and bounded on $[0,\infty)$, and x, as well as e and $\dot{\hat{p}}$, tend to zero.

  if $\eta_1 \;>\; 1$, the above conclusion holds locally. Precisely, if $\omega(0)$ and $\Omega(0)$ are chosen to meet (B.22), it holds for solutions such that:

$$\begin{array}{c} \frac{m+1}{2}|\ p^* - \hat{p}(0)\ |^2 \;+\; \epsilon^{\frac{|x(0)|^{m+1}}{m+1}} \;\leq\; C \\ \text{and}\quad P(0) \;=\; I\ ;\ \hat{p}(0) \;\in\; \Pi \end{array} \tag{B.37}$$

  where C is a constant only depending on the constants of the problem.

A complete proof of this theorem is in appendix B. Let us give a sketch of it.

With (B.25),(B.18),(B.19) defining e, z and Z, we have:

$$\begin{aligned} \epsilon\dot{e} \;+\; e \;&=\; \epsilon\dot{z} \;+\; z \;-\; [\ \epsilon\dot{Z} \;+\; Z\ ]\hat{p} \;-\; \epsilon Z\dot{\hat{p}} \\ &=\; \dot{x} \;-\; F(\hat{p}(t), x(t)) \;-\; \epsilon Z\dot{\hat{p}} \end{aligned} \tag{B.38}$$

Hence, letting:

$$y \;=\; x \;-\; \epsilon\, e \quad , \tag{B.39}$$

this equation and (B.18) allow us to write:

$$\begin{aligned} \dot{y} \;&=\; F(\ \hat{p}\ ,\ y\ ) \;\;+\;\; [F(\ \hat{p}\ ,\ y+\epsilon e\ ) - F(\ \hat{p}\ ,\ y\ )] \;+\; \epsilon Z\dot{\hat{p}} \;+\; e \\ \epsilon\dot{Z} \;&=\; -Z \;+\; J(\hat{p},x)^{-1}\,[-J_p(x)\ \dot{x} \;+\; f_p(x) \;+\; v(\hat{p},x)\ g_p(x)] \end{aligned} \tag{B.40}$$

Considering $\dot{\hat{p}}$ and e as functions of time, (B.40) may be seen as a perturbation of the triangular system obtained for $\dot{\hat{p}} \;=\; 0$, $e \;=\; 0$. Without the terms involving $\dot{\hat{p}}$ and e, boundedness of y would be guarenteed by assumption (B.7) and boundedness of Z by the "growth estimates" of assumption A2. Boundedness of (y, Z)-solution of the actually perturbed system (B.40) is to be obtained via a robustness argument using the fact that, e and $\dot{\hat{p}}$ are known to be L^k-functions (Lemma 1). All the conclusions of Theorem 1 follow from this point.

4 DISCUSSION OF THE ASSUMPTIONS

We have proposed an adaptive regulator based on estimation and certainty equivalence principle. It guarentees solution boundedness and asymptotic regulation when placed in feedback with an element of a linearly parameterized family of non-linear systems satisfying assumptions A0 to A3. Let us discuss these assumptions.

4.1 Linear parameterization and invertibility (A0)

Linear parameterization can be considered as a restrictive constraint. To enlarge the field of application, this assumption is invoked for an implicit form. This allows robot arms for example, or explicit homographic parametrization. The drawback of allowing an implicit form is that we have to introduce an assumption (J's invertibility) to make sure that an explicit (nonlinearly parameterized) form can be obtained. Again, to relax this assumption, we ask for it to be satisfied not for all parameter vector p but for those contained in a known convex set Π.

4.2 Satisfactory control law for all p (A1)

Would p be fixed, the possibility of meeting this condition is a non-adaptive control problem. An important aspect is that a global control law is required. Given the function $V(p,x)$, assumption (B.7) is met if the control u satisfies (in the single input case, to simplify the notation):

$$u\ \frac{\partial V}{\partial x}(p,x)g(p,x)\ \leq\ -aV(p,x)\ -\ \frac{\partial V}{\partial x}(p,x)f(p,x) \tag{B.41}$$

Clearly, this is possible for all x such that $\frac{\partial V}{\partial x}(p,x)g(p,x)$ is invertible. Actually, the assumption means that we can find, for each p, a proper function $V(p,.)$ such that, whenever $\frac{\partial V}{\partial x}(p,x)g(p,x)$ is singular, $aV(p,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(p,x)f(p,x)$ is non-positive and the control law (B.41) can be regularized in the neighborhoud of these singularities.

The parametric aspect enters in the fact that that this holds for all p and V depends smoothly on p.

4.2 Realizability (A3)

We have mentioned that the parameter vector observation equation naturally given by the system equation involves the speed of x. To overcome the difficulty, we introduce a first order filter. Assumption A3 is one of the possible sufficient condition allowing us to obtain a realization.

We observe that, for second order systems (similar to robot arms) such as

$$J(p,\chi)\ddot{\chi}\ =\ f(p,\chi,\dot{\chi})\ +\ ug(p,\chi,\dot{\chi})\qquad (\text{the state is}:\ \ x\ =\ \begin{pmatrix}\chi\\ \dot{\chi}\end{pmatrix}\ )\quad ,$$

A3 is always satisfied with:

$$h(p,\chi,\dot{\chi})\ =\ J(p,\chi)\dot{\chi} \tag{B.42}$$

4.4 Growth at infinity (A2)

These assumptions ask, more or less, for the possibility of bounding all the functions given by the problem by a power of the function V They seem to be inherent with the fact that

the adaptation introduces in the closed-loop system the perturbing terms e and $\dot{\hat{p}}$ not taken in account in the design. They are just hoped to be handled by the controller on its own via feedback. Our assumptions limits the strength of their affecting the closed-loop system. To obtain global convergence, we have to bound the values of the exponents α, β, γ, δ; this is restrictive since, for instance, $\alpha + \gamma \leq 1$ more or less asks the open loop fields to be globally lipschitz at infinity. In [Po-Pr,88], we mend the present algorithm, adding a term to the control law as in (B.3). This gives global convergence under far less restrictive conditions on the growth at infinity of the open-loop fields, but under some structural assumptions not needed here.

[Br] H. BREZIS , *Opérateurs maximaux monotones* North holland , 1973.

[Mi-Go] R.H. MIDDLETON / G.C. GOODWIN , *Adaptive computed torque control for rigid links manipulators* Systems & Control Letters, vol.10 No 1, pp. 9-16, 1988

[Po-Pr,88] J.-B. POMET / L. PRALY , *Estimation-based Non-linear Adaptive Control* CDC proceedings, Austin, 1988.

[Sl-Li,86] J.-J. E. SLOTINE / W. LI , *On the adaptive control of robot manipulators* M.I.T., 1986.

[Sl-Li,87] J.-J. E. SLOTINE / W. LI , *Theoretical issues in adaptive manipulator control* M.I.T., 1987

[Ta-Ko-Ma-Ka] D. G. TAYLOR / P. V. KOKOTOVIC / R. MARINO / I. KANELLAKOPOULOS, *Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics* Proceed. of American Control Conference, June 1988.

APPENDIX A: Proof of lemma 1

$P(t)$ clearly remains symmetric. In addition, it remains invertible because the matrix $I + \int_0^t |e(\tau)|^{m-1}\ Z^T(\tau)Z(\tau)d\tau$ is well defined for any t in $[0, t_f)$ and it is not difficult to check (from (B.26)) that it is the inverse of $P(t)$. This proves (B.29).

Now, let (note that $W(0)$ defined in (B.34) is the same as the above $W(t)$ for $t = 0$)

$$W(t) \ = \ \frac{1}{2}\,(p^* - \hat{p})^T P^{-1}(p^* - \hat{p}) \ + \ \epsilon\ \frac{|z(0) \ - \ Z(0)p^*|^{m+1}}{(m+1)^2} e^{-\frac{(m+1)t}{\epsilon}} \tag{B.43}$$

From (B.23),(B.25),(B.26), we get the following inequality in which $\chi(t)$ is 1 if $\hat{p}$ is on the boundary of Π and PZ^Te points outward Π, 0 in the other cases:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) \ \leq \ & -\tfrac{1}{2}|e(t)|^{m+1} \ + \ \chi(t)\frac{(n^TPZ^Te)(n^T(p^* - \hat{p}))}{n^TPn} \\ & +\tfrac{1}{2}|e(t)|^{m-1}|z(0) - Z(0)p^*|^2 e^{-\frac{2t}{\epsilon}} \ - \frac{|z(0) - Z(0)p^*|^{m+1}}{m+1} e^{-\frac{(m+1)t}{\epsilon}} \end{aligned} \tag{B.44}$$

since for any positive E and Y, $-\frac{1}{2}E^{m+1} + \frac{1}{2}Y^2E^{m-1} \ \leq \ -\frac{1}{m+1}E^{m+1} + \frac{1}{m+1}Y^{m+1}$, and (from assumption A4) $n^T(p^* - \hat{p}) \ \leq \ D^*$, and $n^TPZ^Te \ \leq \ 0$ when χ is non-zero,

$$\dot{W}(t) \ \leq \ -\frac{1}{m+1}|e(t)|^{m+1} \ - \ \chi(t)\ D^*\frac{|n^TPZ^Te|}{n^TPn} \tag{B.45}$$

Therefore $W(t)$ is positive decreasing. This, together with (B.43) and (B.29), yields:

$$|p^* - \hat{p}(t)|^2 \;\leq\; 2W(t) \;\leq\; 2W(0) \quad \forall t \in [0, t_f) \tag{B.46}$$

On the other hand, $\hat{p}$ remains in Π because $\dot{\hat{p}}$ points inward Π all along its boundary; this gives (B.32).

We shall now establish (B.30), (B.31), (B.33). (B.43) and (B.45) yield, for any τ in $[0, t_f)$:

$$\int_0^\tau |e|^{m+1} \;\leq\; (m+1)\,[W(0) \;-\; W(\tau)\,] \;\leq\; (m+1)\,W(0) \tag{B.47}$$

This gives (B.31) and the second part of (B.33). Now, from (B.26), with the same definition of χ as in (B.45),

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^\tau |\dot{\hat{p}}| \qquad &\leq \textstyle\int_0^\tau |e|^{m-1}|PZ^Te| \;+\; \int_0^\tau \chi|e|^{m-1}\frac{|n^TPZ^Te||Pn|}{n^TPn} \\ &\leq \textstyle\left(\int_0^\tau |e|^{m+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau |e|^{m-3}e^TZPPZ^Te\right)^{\frac{1}{2}} \;+\; \int_0^\tau \chi|e|^{m-1}\frac{|n^TPZ^Te|}{n^TPn} \end{aligned} \tag{B.48}$$

(we use Shwartz inequality and the fact that $P \leq I$. But

$$0 \;\leq\; \int_0^\tau |e|^{m-3}\, e^TZPPZ^Te \;\leq\; \int_0^\tau \mathrm{tr}(PZ^TZP)\,|e|^{m-1} \;=\; -\int_0^\tau \mathrm{tr}(\dot{P}) \;\leq\; q$$

Then, since $|e|^{m+1} \;\leq\; -(m+1)\dot{W}$ and $\frac{|n^TPZ^Te|}{n^TPn} \leq -\frac{1}{D^*}\dot{W}$, (B.48) implies the second part of (B.33).

APPENDIX B: Proof of theorem 1

Let $[0, t_f)$ be a maximal interval of definition of a solution of the closed-loop system. From (B.32) in lemma 3, we may use the inequalities in assumption A2 replacing $k(\hat{p}(t))$ with

$$\kappa(\; W(0)\;) \;\triangleq\; \mathrm{Sup}\,\left\{\, k(p) \,\middle|\, |p^* - p|^2 \;\leq\; 2W(0)\right\} \tag{B.49}$$

$\kappa(.)$ is a positive increasing function. For the sake of simplicity, in the following, κ will stand for any positive continuous increasing function of $W(0)$ (usually the original κ mixed with some constants independant of t and of the solution we consider).

Now, considering (B.40) and assumption A1, V is clearly a good canditate as a commparison function for y. Hence, let:

$$W_1(t) \;=\; V(\hat{p}(t), y(t)) \quad , \tag{B.50}$$

Along (B.40), we have:

$$\dot{W}_1 \;=\; \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p}, y).F(\hat{p}, y) + \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{p}, y)[F(\hat{p}, y + \epsilon e) - F(\hat{p}, y) + \epsilon Z\dot{\hat{p}} + e] + \frac{\partial V}{\partial p}(\hat{p}, y)\dot{\hat{p}} \tag{B.51}$$

which gives, considering (B.7),(B.9), (B.10) and (B.13),

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 \;\leq\; &- a\,W_1 \;+\; \kappa\;\mathrm{Sup}\,\left\{\,1\;,\; W_1^{\alpha+\delta}\,\right\}\left(1 \;+\; \epsilon^d|e|^d\right)|e| \\ &+ \kappa\;\mathrm{Sup}\,\left\{\,1\;,\; W_1^{\alpha}\,\right\}\left(\epsilon|Z||\dot{\hat{p}}| \;+\; |e|\right) \\ &+ \kappa\;\mathrm{Sup}\,\left\{\,1\;,\; W_1^{\beta}\,\right\}|\dot{\hat{p}}| \end{aligned} \tag{B.52}$$

and finally

$$\begin{aligned}\dot{W}_1 \;\leq\; -\,a\,W_1 \;+\; \kappa\,\mathrm{Sup}\left\{\,1\,,\; W_1^{\mathrm{Sup}\{\alpha+\delta,\beta\}}\,\right\}\left(|\dot{\hat{p}}| \;+\; |e|(1+|e|^d)\right)\\ +\,\kappa\,\mathrm{Sup}\,\{\,1\,,\; W_1^{\alpha}\,\}\,|Z||\dot{\hat{p}}|\end{aligned} \tag{B.53}$$

Similarly, the autonomous part of the Z-equation in (B.40) being linear, we consider the following comparison function:

$$W_2(t) \;=\; \epsilon|Z(t)|^2 \tag{B.54}$$

Along (B.40), we have:

$$\dot{W}_2 = 2\epsilon Z^T\dot{Z} = -2|Z|^2 + 2Z^T J(\hat{p},x)^{-1}\left[-J_p(x)\dot{x} + f_p(x) + v(\hat{p},x)g_p(x)\right] \tag{B.55}$$

From (B.28) and inequalities (B.1) in assumption A1 and (B.11) to (B.12) in assumption A2, one gets:

$$\begin{aligned}&\left|J(\hat{p},x)^{-1}\left[-J_p(x)\dot{x} + f_p(x) + v(\hat{p},x)g_p(x)\right]\right| \;\leq\; \kappa\mathrm{Sup}\left\{1, V(\hat{p},x)^{\gamma}\right\} \qquad \text{(B.56)}\\ &\leq\; \kappa\mathrm{Sup}\left\{1, V(\hat{p},y)^{\gamma}\right\} + \kappa\mathrm{Sup}\left\{1, V(\hat{p},y)^{\alpha\gamma}\right\}\left(|e|^{\gamma} + |e|^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}\right)\end{aligned}$$

where the last inequality is obtained from (B.9) in assumption A2, lemma 4 (given in appendix D), and the fact that, for some positive constant k,

$$(a \;+\; b)^{\gamma} \;\leq\; k\,(a^{\gamma} \;+\; b^{\gamma}) \qquad \forall\, a,b \;\geq\; 0 \tag{B.57}$$

(B.56) and (B.55) yield:

$$\begin{aligned}\dot{W}_2 \;\leq\; -\,\frac{2}{\epsilon}W_2 \;+\; 2\tfrac{\kappa}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{W_2}\;\mathrm{Sup}\;\{1, W_1^{\gamma}\}\\ +\,2\tfrac{\kappa}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{W_2}\;\mathrm{Sup}\;\{1, W_1^{\alpha\gamma}\}\left(|e|^{\gamma} \;+\; |e|^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}\right)\end{aligned} \tag{B.58}$$

To study, the "triangular system" (B.40), let us consider the following comparison function:

$$U(t) \;=\; W_1(t)^{2\gamma} \;+\; 2\,rW_1(t)^{\gamma}\sqrt{W_2(t)} \;+\; s^2\,W_2(t) \tag{B.59}$$

where r and s are two real positive numbers. We have the following majorations:

$$\begin{array}{lll} W_1 \;\leq\; U^{\frac{1}{2\gamma}} & , & \sqrt{W_2}\;\mathrm{Sup}\{\,1\,,\; W_1^{\gamma}\,\} \;\leq\; \frac{\mathrm{Sup}\{\,1\,,\; U\,\}}{s}\\ W_2 \;\leq\; \frac{1}{s^2}U & , & W_1^{\gamma}\;\mathrm{Sup}\{\,1\,,\; W_1^{\gamma}\,\} \;\leq\; \mathrm{Sup}\{\,1\,,\; U\,\} \end{array}\quad , \tag{B.60}$$

and the following equality (where no problem arises when W_2 vanishes, see (B.58)) :

$$\begin{aligned}\dot{U} \;=\; 2\gamma W_1^{\gamma-1}(W_1^{\gamma} \;+\; r\sqrt{W_2})\;\dot{W}_1\\ +\,(\;r\tfrac{W_1^{\gamma}}{\sqrt{W_2}} \;+\; s^2\;)\dot{W}_2\end{aligned} \tag{B.61}$$

with (B.53), (B.58) and (B.60), this yields :

$$\begin{aligned}\dot{U} \;\leq\; -2a\gamma W_1^{2\gamma} - 2r(a\gamma + \tfrac{1}{\epsilon})W_1^{\gamma}\sqrt{W_2} - \tfrac{2}{\epsilon}s^2W_2\\ +2\tfrac{\kappa}{\sqrt{\epsilon}}(r+s)\mathrm{Sup}\{1,U\} + \kappa\mathrm{Sup}\{1,U^{\zeta}\}\left[|\dot{\hat{p}}| + P(|e|)\right]\end{aligned} \tag{B.62}$$

$$\text{where :} \quad \begin{array}{rcl} P(x) & = & x + x^{d+1} + x^{\gamma} + x^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} \\ \zeta & = & \mathrm{Sup}\{1 + \frac{\eta_1 - 1}{2\gamma} \, , \, \frac{1+\alpha}{2}\} \end{array} \tag{B.63}$$

Notice that, since α is smaller than 1,

$$\zeta \leq 1 \iff \eta_1 \leq 1 \tag{B.64}$$

Let us tune the positive numbers r and s so that U is a good comparison function for the behaviour of (y, Z) along (B.40):

Lemma 2 : Let c, d, K be three strictly positive real numbers. There exists a positive number λ such that, *th* and *ch* denoting the usual hyperbollic functions,

$$(1 + \mathrm{th}\lambda)\ Min\ \{c, d\} \ = \ \frac{2}{3}[\ c + d - |c - d|\mathrm{ch}\lambda\ ] \tag{B.65}$$

then if we define r, s, b by:

$$s \ = \ \frac{1}{2}\frac{Min\{c,d\}}{K\sqrt{d}} \ , \ r \ = \ s\mathrm{th}\lambda \ , \ b \ = \ \frac{1}{6}[\ c + d - |c - d|\mathrm{ch}\lambda\ ] \ , \tag{B.66}$$

then b is stricly positive and:

$$\mathrm{X}^2 \ + \ 2r\mathrm{XY} \ + \ s^2\ \mathrm{Y}^2 \text{is positive definite.} \tag{B.67}$$

$$2[c\mathrm{X}^2 + r(c+d)\mathrm{XY} + s^2 d\mathrm{Y}^2] \ \geq \ \left(b \ + \ 2K\sqrt{d}(r+s)\right)\left(\mathrm{X}^2 + 2r\mathrm{XY} + s^2\mathrm{Y}^2\right) \tag{B.68}$$

This lemma is not difficult to prove. Using it with $c = a\gamma$, $d = \frac{1}{e}$, $K = \kappa$, (B.62) yields:

$$If \ \ U(t) \geq 1 \ , \quad then \ \ \dot{U} \leq \ -bU \ + \ \kappa\ U^{\zeta}\ \left(|\dot{\hat{p}}| \ + \ P(|e|)\right) \tag{B.69}$$

with b a strictly positive real number. Our conclusion will follow from the following lemma, established in Appendix C:

Lemma 3: Let $U(t)$ be a positive function defined on the time interval $[0, t_f)$ and such that

$$If \ \ U(t) \geq 1 \ , \quad then \ \ \dot{U}(t) \leq \ -b\ U(t) \ + \ [\ \sum_i f_i(t)\ ]\ U(t)^{\zeta} \tag{B.70}$$

where b and ζ are real positive numbers and (f_i) is a (finite) family of real positive funtions such that:

$$\int_0^{t_f} [\ f_i(\tau)\ ]^{k_i} d\tau \ = \ S_i \ < \ \infty \quad ; \quad k_i \geq 1 \tag{B.71}$$

Then,

- If $\zeta \ \leq \ 1$, U is bounded on $[0, t_f)$ no matter the value of the S_i's and the initial value.
- If $\zeta \ > 1$, U is bounded on $[0, t_f)$ under the following condition:

$$\sum_i \frac{[(\zeta \ - 1)\ S_i\ ]^{1/k_i}}{(b\bar{k}_i)^{1/\bar{k}_i}} \ \leq \ \mathrm{Inf}\ \{\ 1\ ,\ \frac{1}{U(0)^{\zeta - 1}}\ \} \quad \text{with} \ \ \frac{1}{k_i} + \frac{1}{\bar{k}_i} \ = \ 1 \tag{B.72}$$

To use this lemma, let us first check that the needed hypotheses are met in our case: (B.70) is the same as (B.69), and (B.71) follows from lemma 1, with:

$$\begin{array}{c} \sum_i f_i \;=\; \kappa[\; P(|e|) \;+\; |\dot{\hat{p}}|] \\ k_1 = m+1 \;;\; k_2 = \frac{m+1}{d+1} \;;\; k_3 = \frac{m+1}{\gamma} \;;\; k_4 = (m+1)\frac{1-\alpha}{\gamma} \;;\; k_5 = 1 \\ S_i \;=\; \kappa^{k_i} \int_0^{t_f} |e|^{m+1} \quad i = 1,2,3,4 \quad ;\; S_5 \;=\; \kappa \int_0^{t_f} |\dot{\hat{p}}| \end{array} \tag{B.73}$$

Let us come to (B.72). From (B.73), we have:

$$\sum_i \frac{[(\zeta-1)S_i]^{1/k_i}}{(b\bar{k}_i)^{1/\bar{k}_i}} = \kappa \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(b\bar{k}_i)^{1/\bar{k}_i}} \left[(\zeta-1)\int_0^{t_f} |e|^{m+1}\right]^{1/k_i} + \kappa(\zeta-1)\int_0^{t_f} |\dot{\hat{p}}| \tag{B.74}$$

On the other hand, if the initial conditions of the filters are chosen according to (B.22), with assumption A1, $U(0)$ is zero. It follows that (B.72) is satisfied if:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(b\bar{k}_i)^{1/\bar{k}_i}} \left[(\zeta\;-1)\int_0^{t_f} |e|^{m+1}\right]^{1/k_i} \;+\; (\zeta\;-1)\;\int_0^{t_f} |\dot{\hat{p}}| \;\leq\; \frac{1}{\kappa} \tag{B.75}$$

Since α is smaller than 1, $\zeta\;-1$ is equal to $(\eta_1-1)/2\gamma$. b, ζ and the k_i's do not depend on the initial conditions, but κ does (see (B.49)); as explained at the very beginning of this proof, it is a continuous function of $W(0)$. On the other hand, from (B.33), the integrals in (B.75) are upperbounded by a continuous function of $W(0)$ which tends to zero when $W(0)$ does. It follows that, if C is chosen small enough, (B.37) implies (B.75) which implies (B.72).

Now, we may apply this lemma to our system, which gives the boundedness of $U(t)$, no matter the value of the initial conditions if $\eta_1 \leq 1$, and under condition (B.37) if $\eta_1 > 1$.

Since U is a positive definite function of (W_1^γ , $\sqrt{W_2}$), and comparing (B.50), (B.54) and assumption A1, the boundedness of $U(t)$ implies this of $y(t)$ and $Z(t)$. It follows that e is bounded because $\hat{p}$ is bounded (see (B.32)), and (B.23) and (B.25) yield:

$$e(t) \;=\; Z(t)[\; p^* - \hat{p}] \;+\; |z(0) \;-\; Z(0)p^*|\; e^{-\;\frac{t}{\epsilon}}$$

With (B.39), x is bounded too. P and $\dot{\hat{p}}$ are bounded (see (B.26),(B.29). The state of the filters are bounded because they are states of strictly stable linear systems with bounded inputs (see (B.20) and (B.21)).

We have proved (under condition (B.37) if η_1 is larger than 1) that the solution of the closed-loop system we are following is bounded on $[0, t_f)$, which is its maximal definition interval. This implies that $t_f \;=\; \infty$. This would be very classical if the o.d.e. (B.26) were smooth; in spite of the discontinuity introduced by the projection in the estimation algorithm, this follows from the classical process of continuation thanks to the existence result of [Br] prop 3.12 and the fact that the right hand side of (B.26) is bounded by a continuous function.

We now check that $x(t)$ tends to zero:
$\dot{x}(t)$, given by (B.1), is bounded. Hence, considering (B.38), $\dot{e}(t)$ is bounded; this implies that e tends to zero because e^{m+1} belongs to L^1. It follows that (B.52) may be written

$$\dot{W}_1(t) \;\leq\; -aW_1(t) \;+\; \lambda(t) \;+\; \mu(t) \tag{B.76}$$

where λ belongs to L^1 and μ tends to zero. Convergence to zero for W_1 follows. With the property of V given by assumption A1, the same holds for y and therefore x. □

APPENDIX C: Proof of lemma 3

i) Case ζ no larger than 1: Let $[t_1, t_2]$ be a maximum interval on which U remains larger than 1. It is clear that either $t_1 = 0$ or $U(t_1) = 1$, and that, for any t in $[t_1, t_2]$, we have

$$\dot{U}(t) \leq [\, -b + \sum_i f_i(t) \,] \, U(t) \tag{B.77}$$

hence, for any t in $[t_1, t_2]$,

$$U(t) \leq U(t_1)\, e^{-b(t-t_1) + \sum_i \int_{t_1}^{t} f_i(t)} \tag{B.78}$$

but $U(t_1) \leq \text{Sup}\{\, 1 \,,\, U(0) \,\}$, and, with Holder inequality,

$$-b(t-t_1) + \sum_i \int_{t_1}^{t} f_i(t) \leq -b\,(t-t_1) + \sum_i S_i^{1/k_i} (t-t_1)^{1/\bar{k}_i} \tag{B.79}$$

The $\frac{1}{k_i}$'s being smaller than 1, the right hand side of (B.79) is bounded by a constant $\bar{S}$, depending only on b, the k_i's and the S_i's. We have proved that, for any t in $[0, t_f)$,

$$U(t) \leq \text{Sup} \left\{ 1 \,,\, e^{\bar{S}} \,,\, U(0)\, e^{\bar{S}} \right\} \tag{B.80}$$

ii) Case ζ strictly larger than 1: Let λ be defined by

$$U(t) = \lambda(t)^{\frac{1}{\zeta-1}} e^{-b(t-t_1)} \tag{B.81}$$

so that

$$\dot{U}(t) = -bU(t) - \frac{1}{\zeta-1} \dot{\lambda}(t)\, \lambda(t)^{-\frac{\zeta}{\zeta-1}} e^{-b(t-t_1)} \tag{B.82}$$

Finally, (B.70) may be rewritten as follows when $U \geq 1$:

$$-\frac{1}{\zeta-1} \dot{\lambda}(t)\, e^{-b(t-t_1)} \leq [\, \sum_i f_i(t) \,]\, e^{-b\zeta(t-t_1)} \tag{B.83}$$

or

$$\dot{\lambda}(t) \geq -(\zeta-1)\, [\, \sum_i f_i(t) \,]\, e^{-b(\zeta-1)(t-t_1)} \tag{B.84}$$

hence

$$\lambda(t) \geq \lambda(t_1) - (\zeta-1) \int_{t_1}^{t} [\, \sum_i f_i(\tau) \,] e^{-b(\zeta-1)(\tau-t_1)} d\tau \tag{B.85}$$

but

$$\begin{aligned} (\zeta-1) \int_{t_1}^{t} f_i(\tau) e^{-b(\zeta-1)(\tau-t_1)} d\tau &\leq (\zeta-1)\, S_i^{1/k_i} \left(\frac{1}{b\bar{k}_i(\zeta-1)} \right)^{1/\bar{k}_i} \\ &= \frac{[(\zeta-1)S_i]^{1/k_i}}{(b\bar{k}_i)^{1/\bar{k}_i}} \end{aligned} \tag{B.86}$$

$$\text{and, finally, } \lambda(t) \geq \lambda(t_1) - \sum_i \frac{[(\zeta - 1)\, S_i]^{1/k_i}}{(b\bar{k}_i)^{1/\bar{k}_i}} \tag{B.87}$$

Now, it is easy to conclude:
$\lambda(t_1)$ is equal to $U(t_1)^{-(\zeta-1)}$, which is either 1 (if $t_1 \neq 0$) or $U(0)^{-(\zeta-1)}$, so that, if (B.72) is met, we get

$$U(t)^{\zeta - 1} \leq \frac{1}{\text{Inf}\{\ 1\ ,\ U(0)^{-(\zeta-1)} - \sum_i \frac{[(\zeta-1)\, S_i]^{1/k_i}}{(b\bar{k}_i)^{1/\bar{k}_i}}\ \}} \tag{B.88}$$

APPENDIX D: Technical lemma.

Lemma 4: Let V be a smooth real positive function such that, for any x,

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right| \leq k\ \text{Sup}\ \{\ 1\ ,\ V(x)^{1-\frac{1}{q}}\ \} \tag{B.89}$$

then, there exists two positive real numbers λ and μ such that, for any positive t,

$$|\ V(x) - V(y)\ | \leq \lambda\ \text{Sup}\ \{\ 1\ ,\ V(x)^{1-\frac{1}{q}}\ \}\ |x-y| + \mu|x-y|^q \tag{B.90}$$

Remark: This technical result is used in the proof of theorem 1 with $1 - \frac{1}{q} = \alpha$.

Proof: Let $W = \text{Sup}\{\ 1\ ,\ V^{\frac{1}{q}}\}$. With (B.89), we have, at all points where V is larger than 1, $\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| \leq \frac{k}{q}$; so that, for all x, y:

$$|\ W(x) - W(y)\ | \leq \frac{k}{q}\,|x-y| \tag{B.91}$$

It is not difficult to see that (B.91) yields:

$$|\text{Sup}\{\ 1\ ,\ V(x)\ \} - \text{Sup}\{\ 1\ ,\ V(y)\ \}| \leq (\ W(x) + \frac{k}{q}\,|x-y|\ )^q - W(x)^q \tag{B.92}$$

Now, with L and M such that, for any positive a and b, $(\ a+b\ )^q \leq a^q + L\,a^{q-1}b + M\,b^q$, we have

$$|\text{Sup}\{1, V(x)\} - \text{Sup}\{1, V(y)\}| \leq L\text{Sup}\{1, V(x)^{1-\frac{1}{q}}\}\frac{k}{q}|x-y| + M(\frac{k}{q}|x-y|)^q \tag{B.93}$$

The lemma follows. □

Bibliographie

[1] O. AKHRIF / G.L. BLANKENSHIP , *Robust Stabilisation of Feedback Linearizable Systems* Proceedings of the 27th CDC, Austin Texas, 1988.

[2] B.D.O. ANDERSON / R.R. BITMEAD / C.R. JOHNSON / P.V. KOKOTOVIC / R.L. KOSUT / I.M.Y. MAREELS / L. PRALY / B.D. RIEDLE , *Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis* MIT Press, 1986.

[3] V. ARNOLD , *Equations différentielles ordinaires* Mir , 1974

[4] K.J. ASTRÖM / B. WITTENMARK , *Adaptive Control* Addison-Wesley, 1988

[5] J.-P. AUBIN / I. EKELAND , *Non linear Applied Analysis* Wiley-Interscience , 1984

[6] G. BASTIN / G. CAMPION , *Indirect adaptive control of linearly parametrized nonlinear systems* 3rd IFAC Symp. on Adapt. Syst. in Cont. and Sign. Proc., Glasgow U.K., 1989.

[7] G. BASTIN / G. CAMPION , *Indirect adaptive state feedback control of linearly parametrized nonlinear systems* Internal report No AP89.09, Louvain la Neuve, 1989.

[8] G. BASTIN / M. GEVERS , *Stable Adaptive Observers for Time-Varying Nonlinear Systems* IEEE, **AC** 33, No7, 1988.

[9] W.M. BOOTHBY , *Global Feedback Linearisation of Locally Linearisable Systems* in : Algebraic and geometric methods in Nonlinear Control Theory, M. Fliess and M. Hazewinckel (eds.), D. Riedel publishing company, 1986.

[10] H. BREZIS , *Opérateurs maximaux monotones* North holland , 1973.

[11] G. CAMPION / G. BASTIN , *Lyapunov design of an adaptive external linearization Feedback control for manipulators* Analysis and optimization of systems, A. Bensoussan Ed, Springer-Verlag pp. 182-186, 1986.

[12] H. AN CHAE / C.G. ATKESON / J.M. HOLLERBACK , *Estimation of inertial parameters of rigid body links of manipulators.* 24th CDC, 1985.

[13] B. CHARLET , *Stability and Robustness for Nonlinear Systems Decoupled and Linearized by Feedback* Systems & Control Letters, vol.8 No 4, pp. 367-374, 1987

[14] S.-N. CHOW / J. K. HALE , *Metods of Biffurcation Theory.* Grund. der Math. Wiss. 251, Springer-Verlag, 1982.

[15] B. D'ANDREA / J. LEVINE , *Non-linear Control and High-gain Approaches for the Control of a Robot Arm : New Results and Comparisons.* 10^{th} triennal IFAC congress Munich, preprints, vol.4 pp. 308-313, 1987

[16] W. DAYAWANSA / W.M. BOOTHBY / D.L. ELLIOTT , *Global state and feedabck equivalence of nonlinear systems.* Systems & Control Letters, vol.6 No 4, pp. 229-234, 1985.

[17] N. DUNFORD / J.T. SCHWARTZ , *Linear operators.* Interscience, 1957

[18] P. FAURRE / M. CLERGET / F. GERMAIN , *Opérateurs rationnels Positifs* Dunod, 1979.

[19] A. FROMENT, *Commande digitale d'un amortisseur actif* Thèse de docteur ingénieur, Ecole Nat. Sup. Mines de Paris, 1984.

[20] F. R. GANTMACHER , *Théorie des matrices* Dunod , 1960.

[21] P. J. GAWTHROP , *Continuous-Time Self-Tuning Control Vol. 1 Design* Research Studies Press John Wiley & sons , 1986.

[22] G. C. GOODWIN / D.Q. MAYNE ,Ordinary Differential Equations *A Parameter Estimation Perspective of Continuous Time Model Reference Adaptive Control* Automatica, vol. 23 No 1, pp. 57-70, 1987

[23] G.C. GOODWIN / K.S. SIN , *Adaptive Filtering Prediction and Control .* Prentice-Hall , 1984.

[24] J.K. HALE , *Ordinary Differential Equations* Rob. E. Krieger , 1980 (second edition).

[25] C. J. HARRIS / J.F. MILES , *Estimation and feedback in Linear Time-varying Systems: a deterministic theory* SIAM Journ on Control, Vol.13 No2, pp.304-326 , 1975.

[26] M. IKEDA / H. MAEDA / S. KODAMA , *Stability of Linear Systems, aspects of kinematic similarity* Rob. E. Krieger , 1980 (second edition).

[27] P. V. KAILATH , *Linear systems.* Prentice-Hall , 1980.

[28] I. KANELLAKOPOULOS / P. V. KOKOTOVIC / R. MARINO , *Robustness of Adaptive Nonlinear Control under an Extended Matching Condition.* IFAC symposium on Nonlinear Syst. Design, Capri, Italy, 1989.

[29] M.-C. KUNG / B.F. WOMACK , *Stability Analysis of a Discrete-Time Adaptive Control Algorithm Having a Polynomial Input* IEEE, **AC** 28, No12, 1983.

[30] V. LAKSHMIKANTHAM / S. LEELA , *Differential and Integral Inequalities, Vol.1: Ordinary Differential Equations.* Academic press, 1969.

[31] Y. D. LANDAU , *Adaptive Control. The Model Reference Approach.* Dekker, 1979.

[32] S. LEFSCHETZ , *Differential Equations: a Geometric Theory* Dover Publications, 1977 (first published 1957).

[33] G. LUDERS / K.S. NARENDRA , *An Adaptive Observer and Identifier for a Linear System* IEEE **AC** 18 No5 pp.496-499, 1973.

[34] N W. MAC LAHAN , *Ordinary Differential Equations in Engineering and Physical Sciences* Clarendon Press, Oxford, 1956.

[35] R.H. MIDDLETON / G.C. GOODWIN , *Adaptive Computed Torque Control for Rigid Links Manipulators* Systems & Control Letters, vol.10 No 1, pp. 9-16, 1988.

[36] R.K. MILLER / A.N. MICHELL , *Ordinary Differential Equations* Academic Press, 1982.

[37] K. NAM / A. ARAPOSTATIS , *A Model Reference Adaptive Control Scheme for Pure Feedback Nonlinear Systems* IEEE, **AC** No , pp -, 1987

[38] K. S. NARENDRA / L. S. VALAVANI , *A Comparison of Lyapunov and Hyperstability Approaches to Adaptive Control of Continuous systems* IEEE, **AC** 25 No 2, pp 243-247, 1980.

[39] S. NICOSIA / P. TOMEI , *Model Reference Adaptive Control Algorithms for Industrial Robots.* Automatica, vol.20 No5, pp 635-644, 1984.

[40] J.-B. POMET , *A Counter-example to the Robustness of the Property: "Any Solution is Bounded"* Rapport interne CAI Ecole des Mines Fontainebleau, 1987

[41] J.-B. POMET / L. PRALY , *A result on robust boundedness.* Systems & Control Letters, vol.10 No 2, pp 83-92, 1988.

[42] J.-B. POMET / L. PRALY , *Nonlinear Adaptive Control: an estimation-based algorithm.* Coll. Internat. d'Aut. Non-lin., Nantes, 1988. Proceedings: Springer-Verlag, à paraître

[43] J.-B. POMET / L. PRALY , *Indirect Adaptive Nonlinear Control* Proceedings of the 27th CDC, Austin Texas, 1988.

[44] J.-B. POMET / L. PRALY , *Indirect Adaptive Nonlinear Regulation : Prediction error from the Lyapunov equation* soumis au 28ème CDC, 1989.

[45] P. C. PARKS *Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems* IEEE, **AC** 11 No 3, pp 362-367, 1966.

[46] V.M. POPOV , *Hyperstability of Control Systems* Springer-Verlag, 1973.

[47] L. PRALY , Thèse de Doctorat E.N.S. Mines de Paris, Fontainebleau, 1988.

[48] S.S. SASTRY / M. BODSON , *Adaptive Control; Stability, convergence, and robustness.* Prentice-Hall , 1988.

[49] S.S. SASTRY / A. ISIDORI , *Adaptive control of linearizable systems.* Memorandum UCBerkeley/ERL M87/53, 1988.

[50] M. SHUB , *Stabilité globale des systèmes dynamiques* Astérisque (No 56) , S.M.F 1978.

[51] J.-J. E. SLOTINE , *Adaptive Manipulator Control: A Case Study* IEEE, **AC** 33 No 11, pp 995-1003, 1988.

[52] J.-J. E. SLOTINE / J.A. COETSEE , *Adaptive sliding controler synthesis for non-linear systems* Int. J. Cont. Vol43 No6 pp1631-1652, 1986.

[53] J.-J. E. SLOTINE / W. LI , *On the adaptive control of robot manipulators* M.I.T., 1986.

[54] J.-J. E. SLOTINE / W. LI , *Theoretical issues in adaptive manipulator control .* M.I.T., 1987

[55] J. J. SLOTINE / S. S. SASTRY , *Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with applications to robot manipulators* Int. J. Control, vol38 No2, pp 465-492.

[56] M. SPIVAK , *A comprehensive introduction to Diffrential Geometry, Vol. 1* Publish or perish, Houston, 1970.

[57] M. SPIVAK , *Calculus on Manifolds*

[58] D. G. TAYLOR , *Parameter adaptive control for a class of non-linear systems* University of Illinois, 1987

[59] D. G. TAYLOR / P. V. KOKOTOVIC / R. MARINO / I. KANELLAKOPOULOS , *Adaptive Regulation of Nonlinear Systems with a control with Unmodeled Dynamics* IEEE, **AC** 34 No 4, pp 405-2412, 1989.

[60] VIDYASAGAR , *Non-linear System Analysis* Prentice-Hall 1978.

[61] B.L. van der WAERDEN , *Modern Algebra* Frederic Ungar publishing, 1949.

[62] T YOSHIZAWA , *Stability theory by Liapunov's second method.* Publ. of the Math. Soc. of Japan, 1966.