



Algorithmes de résolution d'inéquations variationnelles

Naïma El Farouq

► To cite this version:

Naïma El Farouq. Algorithmes de résolution d'inéquations variationnelles. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1993. Français. NNT : 1993ENMP0363 . pastel-00838268

HAL Id: pastel-00838268

<https://pastel.hal.science/pastel-00838268>

Submitted on 25 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Naïma EL FAROUQ

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité

MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse

**ALGORITHMES DE RÉOLUTION
D'INÉQUATIONS VARIATIONNELLES**

soutenue le 21 janvier 1993 devant le jury composé de

MM. Michel THÉRA

Président et Rapporteur

Christian MICHELOT

Rapporteur

Guy COHEN

Claude LEMARÉCHAL

Examineurs

Table des matières

I Introduction	1
I.1 Motivation et apport original	1
I.2 Organisation du mémoire	3
II Résultats Généraux. Notations	7
II.1 Cas d'un opérateur Ψ quelconque	7
II.2 Cas d'un opérateur intégrable. Problèmes d'optimisation	10
II.3 Cas d'un opérateur de point-selle	14
II.3.1 Opérateur de point-selle quelconque	14
II.3.2 Optimisation avec dualité	15
II.4 Principe du Problème Auxiliaire	17
II.4.1 Cas d'un opérateur non intégrable	17
II.4.1.1 Cas d'un opérateur fortement monotone	17
II.4.1.2 Cas d'un opérateur vérifiant l'hypothèse de Dunn	18
II.4.1.3 Cas d'un opérateur fortement monotone emboîté	18
II.4.2 Cas d'un opérateur intégrable	19
II.4.3 Cas d'un opérateur de point-selle	20
II.4.3.1 Minimisation avec contraintes explicites. Algorithme à un niveau	21
II.4.3.2 Minimisation avec contraintes explicites. Algorithme à deux niveaux	22
II.4.3.3 Lagrangien augmenté	24
II.5 Régularisation d'inéquations variationnelles	28
II.6 Nouvel algorithme de résolution/régularisation	29
III Hypothèse de Dunn Partielle et Forte Monotonie au Premier Niveau	31
III.1 Algorithme parallèle	31
III.2 Convergence de l'Algorithme III.1 dans le cas particulier où $\mathcal{V}^{\text{ad}} = \mathcal{V}$	33
III.3 Convergence de l'Algorithme III.1 en présence de contraintes de type $\mathcal{V}^{\text{ad}}$	38
IV Algorithme de Résolution/Régularisation Simultanées	47
IV.1 Algorithme parallèle	47
IV.1.1 Convergence de l'Algorithme IV.1 dans le cas particulier où $\mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathcal{U}$	48
IV.1.2 Convergence de l'Algorithme IV.1 en présence de contraintes de type $\mathcal{U}^{\text{ad}}$	48
IV.2 Algorithme séquentiel	49
IV.2.1 Convergence de l'Algorithme IV.2 dans le cas particulier où $\mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathcal{U}$	49
IV.2.2 Convergence de l'Algorithme IV.2 en présence de contraintes de type $\mathcal{U}^{\text{ad}}$	55
IV.3 Application à l'opérateur de rotation de $\pi/2$	63
IV.3.1 Algorithme parallèle	64
IV.3.2 Algorithme séquentiel	70
IV.4 Cas d'un opérateur intégrable	77

IV.4.1	Convergence de la version parallèle	77
IV.4.2	Convergence de la version séquentielle	83
IV.4.3	Application numérique	87
IV.5	Cas d'un opérateur de point-selle de Lagrangien	90
V	Forte Monotonie au Premier Niveau et Hypothèse de Dunn au Second Niveau	93
V.1	Algorithme	94
V.2	Théorème de convergence	96
V.3	Exemple d'application	105
VI	Conclusion et Problèmes Ouverts	109
VI.1	Conclusion	109
VI.2	Problèmes ouverts	109

Chapitre I

Introduction

1.1 Motivation et apport original

La théorie des équations et inéquations variationnelles est une théorie qui englobe les problèmes d'optimisation, de minimax, d'équilibre économique et de jeux, ainsi que de nombreux autres problèmes. Cette théorie s'est essentiellement développée par les spécialistes des équations et inéquations aux dérivées partielles. Ces équations et inéquations sont issues en particulier des problèmes de la mécanique et de la physique et peuvent être reformulées en termes d'égalités et inégalités variationnelles, ce qui permet un traitement mathématique complet des équations et inéquations de base.

La résolution d'une inéquation variationnelle peut se formuler ainsi : soient Ψ une application d'un espace de Hilbert $\mathcal{U}$ dans son dual $\mathcal{U}^*$ et $\mathcal{U}^{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$; le problème variationnel posé est de trouver $u^* \in \mathcal{U}^{ad}$ tel que

$$\langle \Psi(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad} \quad (1)$$

Si $\mathcal{U}^{ad} = \mathcal{U}$, (1) devient une équation : trouver $u^* \in \mathcal{U}^{ad}$ vérifiant

$$\Psi(u^*) = 0$$

Dans le cas particulier où Ψ est la dérivée d'une fonction convexe J , u^* minimise J . Si J est non différentiable, la notion de dérivée est remplacée par celle de sous-différentiel ∂J (dans le cas de fonction convexe) qui est un opérateur multivoque. La formulation de (1) dans le cas d'un opérateur Ψ multivoque devient : trouver $u^* \in \mathcal{U}^{ad}$ et $r^* \in \Psi(u^*)$ tels que

$$\langle r^*, u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad}$$

Dans le cas où Ψ ne dérive pas d'un potentiel, le problème de résolution de l'inéquation variationnelle (1) n'a pas en général une interprétation en termes de problème d'optimisation.

Pour résoudre l'inéquation (1), nous étudions le comportement des algorithmes bâtis sur le Principe du Problème Auxiliaire.

Algorithme 1.1 À l'étape k , connaissant u^k , calculer u^{k+1} en résolvant le problème auxiliaire de minimisation

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{ad}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \Psi(u^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \quad (2)$$

La convergence des algorithmes bâtis sur le Principe du Problème Auxiliaire pour la résolution des inéquations variationnelles fût établie dans le cas où l'opérateur vérifie les propriétés suivantes.

1. *La forte monotonie.* Ce cas particulier a été étudié dans [8] où on démontre la convergence forte de la suite générée par l'algorithme vers la solution unique du problème variationnel.
2. *La monotonie et la symétrie* (l'opérateur est le gradient d'une fonction convexe, ce qui ramène la résolution de l'inéquation variationnelle à la résolution d'un problème de minimisation). L'étude des algorithmes dans ce cadre a été effectuée dans [4], [5] et [6]. On obtient des résultats de convergence faible de la suite générée vers une solution du problème d'optimisation. Dans le cas où l'opérateur n'est pas symétrique, F. CHAPLAIS a suggéré le contre-exemple où on considère l'opérateur de rotation de $\pi/2$ qui est monotone non symétrique et pour lequel l'Algorithme du "gradient" diverge. En effet, pour $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$ donné et en prenant $K(u) = \|u\|^2/2$, la suite $\{u^k = (u_1^k, u_2^k)\}$ construite par l'Algorithme I.1 selon le schéma itératif

$$\begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{pmatrix}$$

a sa norme qui croît à chaque pas pour toute valeur strictement positive de ε et ne peut donc converger vers la solution unique $u^* = (0, 0)$.

3. *La monotonie et une "structure de point-selle"* L'opérateur global Ψ est défini sur le produit de deux espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{P}$ et il existe une fonction $L(u, p)$ convexe-concave telle que

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad \Psi(u, p) = (L'_u(u, p), -L'_p(u, p))$$

Cet opérateur est monotone. Il s'agit là du cas particulier des problèmes de recherche de point-selle d'une fonction convexe-concave. Quand L est fortement convexe en u , on obtient des résultats de convergence forte sur $\mathcal{U}$ et faible sur $\mathcal{P}$ [7]. En dehors de cette hypothèse de forte monotonie de la première composante de Ψ en u , on doit avoir recours à d'autres techniques (par exemple la régularisation) pour assurer la convergence.

4. *La forte monotonie emboîtée.* On suppose dans ce cas que l'opérateur est défini sur un produit d'espaces. Cette propriété de forte monotonie emboîtée est moins forte que l'hypothèse de forte monotonie de l'opérateur global et ne garantit même pas la monotonie globale de l'opérateur. On obtient dans le cas où l'opérateur vérifie l'hypothèse de forte monotonie emboîtée des résultats de convergence forte de la suite générée vers la solution unique du problème variationnel [9]. Il est cependant difficile de vérifier pratiquement l'hypothèse de forte monotonie emboîtée. De plus, cette notion introduit une certaine hiérarchie entre les variables qui rompt la symétrie entre les divers joueurs dans l'application aux problèmes d'équilibre de Nash par exemple [10].
5. *L'hypothèse de Dunn.* Cette propriété implique que l'opérateur est monotone et Lipschitzien. Inversement, si l'opérateur est Lipschitzien et fortement monotone, il vérifie la propriété de Dunn. On peut donc dire que pour un opérateur Lipschitzien, l'hypothèse de Dunn est moins forte que l'hypothèse de forte monotonie. Ce résultat est démontré dans [15]. Dans le cas où l'opérateur est un gradient, vérifier l'hypothèse de Dunn est équivalent à vérifier l'hypothèse de Lipschitz et la monotonie simple [17]. On obtient dans ce cas de figure des résultats de convergence forte de la suite $\{\Psi(u^k)\}$ des valeurs de l'opérateur vers sa valeur $\Psi(u^*)$ à la solution, laquelle est unique. Quant à la suite $\{u^k\}$, on ne peut énoncer cependant que des résultats de convergence faible [15].

Ce dernier cas est intéressant dans la mesure où le régularisé d'un opérateur monotone même multivoque est non seulement univoque, monotone et Lipschitzien mais il vérifie également la propriété de Dunn [15], ce qui incite à appliquer l'Algorithme I.1 conçu par le Principe du Problème Auxiliaire non pas à l'opérateur lui-même, mais à l'opérateur régularisé qui vérifie cette propriété de

Dunn. Cette manipulation présente cependant un inconvénient majeur qui est le calcul de l'opérateur régularisé à chaque pas d'itération, lequel est un problème variationnel pratiquement de même nature que le problème de départ. Notre ambition est de faire à chaque itération un seul pas d'algorithme correspondant à la régularisation de l'opérateur.

Notre étude traite donc la résolution des inéquations variationnelles avec un opérateur $\Psi(u)$ seulement monotone (et non symétrique en général). Nous proposons un algorithme itératif effectuant un pas de régularisation suivi d'un pas de minimisation. Cette seconde étape correspond à une itération de l'Algorithme 1.1 appliquée à l'approximation courante de l'opérateur régularisé.

1.2 Organisation du mémoire

Le Chapitre II est un rappel des définitions et résultats connus dans la résolution des inéquations variationnelles, avec un opérateur quelconque, intégrable ou de point-selle. Nous introduisons également la notion de régularisation d'inéquations variationnelles. L'opérateur régularisé d'un opérateur monotone est défini par

$$\Psi_\gamma(u) = \gamma(u - \tilde{v}(u))$$

où γ est un réel strictement positif et $\tilde{v}(u)$ est la solution unique du problème variationnel

$$\tilde{v}(u) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle \Psi(\tilde{v}(u)) + \gamma(\tilde{v}(u) - u), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$$

On pose le problème régularisé qui admet le même ensemble de solutions que le problème (1) de départ et qui est maintenant sans contraintes : trouver $u^* \in \mathcal{U}$ tel que

$$\Psi_\gamma(u^*) = 0 \quad (3)$$

Au lieu d'appliquer directement à l'opérateur Ψ l'Algorithme 1.1, on pourrait l'appliquer à l'opérateur régularisé Ψ_γ qui vérifie l'hypothèse de Dunn.

Algorithme 1.2 À l'étape k , connaissant u^k et v^k calculer u^{k+1} comme la solution du problème auxiliaire

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \Psi_\gamma(u^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \quad (4)$$

où $\Psi_\gamma(u^k) = \gamma(u^k - v^{k+1})$, v^{k+1} étant la solution de l'inéquation variationnelle

$$\langle \Psi(v^{k+1}) + \gamma(v^{k+1} - u^k), v - v^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (5)$$

L'algorithme que nous proposons par la suite calcule u^{k+1} de la même manière que l'Algorithme 1.2; par contre pour le calcul de v^{k+1} , on ne passe plus par la résolution exacte de l'inéquation variationnelle (5) mais seulement par la résolution d'un problème auxiliaire de minimisation.

Algorithme 1.3 (Parallèle en (u, v)) À l'étape k , connaissant u^k et v^k calculer u^{k+1} et v^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires de minimisation

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{U}} & \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \gamma(u^k - v^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \\ \min_{v \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} & \left[\frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle \right] \end{aligned}$$

Algorithme 1.4 (Séquentiel v avant u) À l'étape k , connaissant v^k et u^k calculer v^{k+1} et u^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires de minimisation

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left[\frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle \right]$$

$$\min_{v \in \mathcal{V}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \gamma(u^k - v^{k+1}) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right]$$

L'opérateur global $\Gamma(u, v)$ présent à chaque pas d'itération des algorithmes ci-dessus s'écrit

$$\Gamma(u, v) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(u, v) \\ \mathcal{B}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u - v) \\ \Psi(v) + \gamma(v - u) \end{pmatrix}$$

Il a la particularité de vérifier les propriétés suivantes

- (i) $\mathcal{A}(u, v)$ est fortement monotone en u uniformément en v ;
- (ii) $\mathcal{B}(u, v)$ est fortement monotone en v uniformément en u (forte monotonie au premier niveau);
- (iii) Γ vérifie l'hypothèse de Dunn partielle par rapport à sa première composante, avec la constante γ , à savoir

$$\forall (u, v), (u', v') \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$$

$$\langle \mathcal{A}(u, v) - \mathcal{A}(u', v'), u - u' \rangle + \langle \mathcal{B}(u, v) - \mathcal{B}(u', v'), v - v' \rangle \geq \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u, v) - \mathcal{A}(u', v')\|^2$$

- (iv) $\Psi_\gamma(u) = \mathcal{A}(u, \tilde{v}(u))$ où $\tilde{v}(u)$ est la solution unique du problème

$$\langle \mathcal{B}(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante γ .

La propriété (iv) est une conséquence immédiate de l'hypothèse de Dunn partielle de l'opérateur Γ .

Dans le Chapitre III, nous montrons la convergence de l'Algorithme parallèle bâti sur le Principe du Problème Auxiliaire avec un opérateur global défini sur le produit de deux espaces de Hilbert, non nécessairement issu de la régularisation et qui vérifie la forte monotonie au premier niveau et la propriété de Dunn partielle par rapport à sa première composante. Nous traitons d'abord le cas où le système variationnel original comporte une inéquation variationnelle et une équation, et nous étudions ensuite le cas où le système variationnel comporte deux inéquations variationnelles.

Dans le Chapitre IV, nous montrons la convergence des Algorithmes I.3 et I.4 où l'opérateur global est l'opérateur de résolution/régularisation simultanées. Nous traitons séparément le cas où le problème original est la résolution d'une équation et celui où le problème posé est la résolution d'une inéquation variationnelle. Nous donnons un exemple numérique de la résolution/régularisation simultanées de l'équation où l'opérateur considéré est l'opérateur de rotation de $\pi/2$. Nous étudions aussi la convergence des Algorithmes I.3 et I.4 de résolution/régularisation simultanées dans le cas où l'opérateur original Ψ est un gradient. Cette étude est suivie d'un exemple numérique.

Dans le Chapitre V, nous étudions un cas où les hypothèses sont plus faibles que précédemment. Nous supposons seulement la propriété (ii) de forte monotonie au premier niveau et la propriété (iv) de Dunn pour l'opérateur emboîté (la forte monotonie emboîtée suppose la forte monotonie

de l'opérateur emboîté). L'opérateur global ne vérifie même pas la monotonie simple. Il suffit de considérer l'opérateur linéaire $\Gamma(u, v)$ défini dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\Gamma(u, v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Cet opérateur vérifie bien la forte monotonie au premier niveau. L'opérateur emboîté est l'opérateur nul; il vérifie donc l'hypothèse de Dunn. Pourtant Γ n'est pas monotone.

Cependant, la démonstration de convergence de l'Algorithme bâti sur le Principe du Problème Auxiliaire que nous proposons ne traite que les opérateurs affines, en dimension finie.

Chapitre II

Résultats Généraux. Notations

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et les résultats d'existence et de calcul des solutions d'un problème de résolution d'inéquations variationnelles. Nous considérons un espace de Hilbert $\mathcal{U}$, de dimension quelconque (éventuellement infinie) identifié à son dual $\mathcal{U}^*$ et muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Les topologies forte et faible sont des topologies associées respectivement à la norme $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ et au produit scalaire.

Solent Ψ une application de $\mathcal{U}$ dans son dual $\mathcal{U}^*$ et $\mathcal{U}^{ad}$ une partie convexe fermée de $\mathcal{U}$. Nous posons le problème variationnel suivant : trouver $u^* \in \mathcal{U}^{ad}$ tel que

$$\langle \Psi(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad} \quad (1)$$

Dans le cas où l'opérateur Ψ est intégrable, il existe une fonctionnelle convexe $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $J'(u) = \Psi(u)$ et le problème (1) se ramène au problème d'optimisation

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{ad}} J(u) \quad (2)$$

II.1 Cas d'un opérateur Ψ quelconque

Définition II.1 On dit que l'opérateur Ψ est monotone sur $\mathcal{U}^{ad}$ si

$$\forall u, v \in \mathcal{U}^{ad} \quad \langle \Psi(u) - \Psi(v), u - v \rangle \geq 0 \quad (3)$$

Définition II.2 On dit que l'opérateur Ψ est fortement monotone sur $\mathcal{U}^{ad}$ si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall u, v \in \mathcal{U}^{ad} \quad \langle \Psi(u) - \Psi(v), u - v \rangle \geq \alpha \|u - v\|^2 \quad (4)$$

Définition II.3 On dit que l'opérateur Ψ vérifie l'hypothèse de Dunn sur $\mathcal{U}^{ad}$ si

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall u, v \in \mathcal{U}^{ad} \quad \langle \Psi(u) - \Psi(v), u - v \rangle \geq \frac{1}{A} \|\Psi(u) - \Psi(v)\|^2 \quad (5)$$

Définition II.4 On dit que l'opérateur Ψ vérifie l'hypothèse de Lipschitz sur $\mathcal{U}^{ad}$ si

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall u, v \in \mathcal{U}^{ad} \quad \|\Psi(u) - \Psi(v)\| \leq A \|u - v\|. \quad (6)$$

Lemme II.1

1. Si l'opérateur Ψ vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante A , alors Ψ est monotone et Lipschitzien de constante A .

2. Si l'opérateur Ψ est fortement monotone de constante α et Lipschitzien de constante A , alors Ψ vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante A^2/α .

Lemme II.2 Si l'opérateur Ψ vérifie l'hypothèse de Dunn, alors l'ensemble

$$\Sigma = \{ \Psi(u^*) \mid \langle \Psi(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \}$$

se réduit à un seul point.

La preuve de ces deux lemmes se trouve dans [15, Chapitre III].

Définition II.5 Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux espaces de Hilbert et $\mathcal{U}^*$, $\mathcal{V}^*$ leurs duals respectifs. On considère $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ et $\mathcal{V}^{\text{ad}}$ deux convexes fermés respectivement de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. On introduit l'opérateur $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}^* \times \mathcal{V}^*$. On dit que l'opérateur Γ vérifie l'hypothèse de Dunn partielle par rapport à sa première composante si

$$\begin{aligned} \exists \gamma > 0 \text{ tel que } \quad & \forall (u, v), (u', v') \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{V}^{\text{ad}} \\ & \langle \Gamma_1(u, v) - \Gamma_1(u', v'), u - u' \rangle + \langle \Gamma_2(u, v) - \Gamma_2(u', v'), v - v' \rangle \geq \frac{1}{\gamma} \|\Gamma_1(u, v) - \Gamma_1(u', v')\|^2 \end{aligned}$$

Lemme II.3 Si l'opérateur Γ vérifie l'hypothèse de Dunn partielle par rapport à sa première composante avec la constante γ , alors l'opérateur $\Omega(u) = \Gamma_1(u, \tilde{v}(u))$, où $\tilde{v}(u)$ est une solution du problème variationnel

$$\tilde{v}(u) \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad \langle \Gamma_2(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}}$$

vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante γ .

La preuve de ce lemme se trouve dans [15, Chapitre III].

Remarque II.1 À priori, $\tilde{v}(u)$ n'est pas unique, et donc $\Omega(u)$ n'est pas univoque. Pourtant, le lemme ci-dessus indique que Ω vérifie l'hypothèse de Dunn. Il est donc Lipschitzien et donc univoque. $\square$

Définition II.6 On suppose que l'espace $\mathcal{U}$ est le produit de deux sous-espaces $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ de manière à pouvoir écrire

$$u = (u_1, u_2) \in \mathcal{U} \quad u_1 \in \mathcal{U}_1 \quad u_2 \in \mathcal{U}_2 \quad \mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathcal{U}_1^{\text{ad}} \times \mathcal{U}_2^{\text{ad}} \quad (7)$$

où $\mathcal{U}_1^{\text{ad}}$ (respectivement $\mathcal{U}_2^{\text{ad}}$) est un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}_1$ (respectivement $\mathcal{U}_2$). La notation Ψ_1 (respectivement Ψ_2) désignera la composition de Ψ avec la projection canonique sur $\mathcal{U}_1^*$ (respectivement $\mathcal{U}_2^*$).

On dit que l'opérateur Ψ est fortement monotone emboîté relativement à l'inéquation variationnelle (1) et à la décomposition (7) si

- (i) l'opérateur $\Psi_2(u_1, u_2)$ est fortement monotone en u_2 uniformément en u_1 . Soit $\tilde{u}_2(u_1)$ la solution unique de l'inéquation variationnelle en u_2 paramétrée par u_1

$$\tilde{u}_2(u_1) \in \mathcal{U}_2^{\text{ad}} \quad \langle \Psi_2(u_1, \tilde{u}_2(u_1)), u_2 - \tilde{u}_2(u_1) \rangle \geq 0 \quad \forall u_2 \in \mathcal{U}_2^{\text{ad}}$$

- (ii) l'opérateur $\Omega(u_1) = \Psi_1(u_1, \tilde{u}_2(u_1))$ est fortement monotone en u_1 .

Pour la généralisation de la définition au cas où $\mathcal{U}$ est décomposé en N sous-espaces, avec N supérieur à 2, voir [9].

Lemme 11.4 Si l'opérateur Ψ est fortement monotone sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ de constante α , alors avec la décomposition (7), Ψ est fortement monotone emboîté de constante uniforme α .

Pour la preuve, voir [9].

Lemme 11.5 Soit $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ un opérateur fortement monotone emboîté. On considère le système d'inéquations variationnelles suivant trouver $(u_1^*, u_2^*) \in \mathcal{U}_1^{\text{ad}} \times \mathcal{U}_2^{\text{ad}}$ tel que

$$\langle \Psi_1(u_1^*, u_2^*), u_1 - u_1^* \rangle \geq 0 \quad \forall u_1 \in \mathcal{U}_1^{\text{ad}} \quad (8)$$

$$\langle \Psi_2(u_1^*, u_2^*), u_2 - u_2^* \rangle \geq 0 \quad \forall u_2 \in \mathcal{U}_2^{\text{ad}} \quad (9)$$

soit $\tilde{u}_2(u_1)$ la solution unique de l'inéquation variationnelle en u_2 paramétrée par u_1

$$\tilde{u}_2(u_1) \in \mathcal{U}_2^{\text{ad}} \quad \langle \Psi_2(u_1, \tilde{u}_2(u_1)), u_2 - \tilde{u}_2(u_1) \rangle \geq 0 \quad \forall u_2 \in \mathcal{U}_2^{\text{ad}} \quad (10)$$

soit Ω l'opérateur

$$\Omega(u_1) = \Psi_1(u_1, \tilde{u}_2(u_1))$$

et soit u_1^* la solution unique de l'inéquation variationnelle en u_1 trouver $u_1^* \in \mathcal{U}_1^{\text{ad}}$ tel que

$$\langle \Omega(u_1^*), u_1 - u_1^* \rangle \geq 0 \quad \forall u_1 \in \mathcal{U}_1^{\text{ad}} \quad (11)$$

Alors $(u_1^*, \tilde{u}_2(u_1^*))$ est solution du problème original (8)–(9). Réciproquement, si (u_1^*, u_2^*) est la solution (unique) de (8)–(9), alors $\tilde{u}_2(u_1^*) = u_2^*$ et u_1^* est la solution de (11).

Preuve

- Étant donné $(u_1^*, \tilde{u}_2(u_1^*))$ solution de (11)–(10), on pose $u_2^* = \tilde{u}_2(u_1^*)$ alors (u_1^*, u_2^*) est évidemment solution de (8)–(9).
- En partant maintenant de la solution de (8)–(9), la réciproque est tout aussi évidente. ■

Nous rappelons le théorème ([11], Chapitre II, Théorème 3.1) relatif à l'existence d'une solution u^* à l'inéquation variationnelle (1).

Théorème 11.6 Nous faisons les hypothèses suivantes

(i) Ψ est faiblement continu sur tout sous-espace de dimension finie de $\mathcal{U}$

(ii) Ψ est monotone sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$

(iii) il existe $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ tel que $\lim_{\substack{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}, \\ \|u - \tilde{u}\| \rightarrow 0}} \frac{\langle \Psi(u), u - \tilde{u} \rangle}{\|u\|} = +\infty$.

Alors il existe une solution u^* au problème variationnel (1).

Remarque 11.2 L'hypothèse (iii) est inutile si $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ est borné. De plus, cette hypothèse est automatiquement vérifiée si Ψ est fortement monotone. Sous cette hypothèse, u^* est unique. □

Remarque 11.3 Si Ψ est un opérateur affine associé à un opérateur linéaire non injectif dont le noyau est un sous-ensemble de $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ alors l'hypothèse (iii) ne peut être vérifiée. En effet,

$$\Psi(u) = Au + b$$

où A est un opérateur linéaire possédant un noyau de dimension non nulle et b est un élément de $\mathcal{U}$. Donc,

$$\begin{aligned} \forall \tilde{u} \in \mathcal{U} \quad \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in \ker A}} \frac{\langle \Psi(u), u - \tilde{u} \rangle}{\|u\|} &= \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in \ker A}} \frac{\langle Au + b, u - \tilde{u} \rangle}{\|u\|} \\ &= \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in \ker A}} \frac{\langle b, u - \tilde{u} \rangle}{\|u\|} \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{|\langle b, u - \tilde{u} \rangle|}{\|u\|} \leq \lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \left(\|b\| + \frac{\|\tilde{u}\|}{\|u\|} \right)$$

Cette dernière limite est égale à $\|b\|$. Par conséquent,

$$\forall \tilde{u} \in \mathcal{U} \quad \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in \ker A}} \frac{\langle \Psi(u), u - \tilde{u} \rangle}{\|u\|} \neq +\infty$$

□

II.2 Cas d'un opérateur intégrable. Problèmes d'optimisation

Nous supposons qu'il existe une fonctionnelle $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Psi(u) = J'(u)$, et nous posons le problème d'optimisation suivant

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} J(u) \quad (12)$$

Définition II.7 On dit que la fonctionnelle J est convexe si

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad \forall u, v \in \mathcal{U} \quad J(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v)$$

Définition II.8 On dit que la fonctionnelle J est strictement convexe si

$$\forall \lambda \in]0, 1[\quad \forall u \neq v \in \mathcal{U} \quad J(\lambda u + (1 - \lambda)v) < \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v)$$

Définition II.9 On dit que la fonctionnelle J est fortement convexe de constante α si

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad \forall u, v \in \mathcal{U} \quad J(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v) - \alpha \lambda(1 - \lambda) \|u - v\|^2 / 2$$

Lemme II.7 Si la fonctionnelle J est fortement convexe de constante α , alors elle est strictement convexe.

Définition II.10 On dit que la fonctionnelle J est concave si $-J$ est convexe.

Définition II.11 Soit J une fonctionnelle définie sur $\mathcal{U}$. On appelle domaine de J , l'ensemble

$$\text{dom}(J) = \{u \in \mathcal{U} \mid J(u) < +\infty\}$$

Définition II.12 Soit J une fonctionnelle définie sur $\mathcal{U}$. On appelle épigraphe de J , l'ensemble

$$\text{épi}(J) = \{(u, \mu) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} \mid J(u) \leq \mu\}$$

Définition 11.13 On dit que la fonctionnelle J est propre si son domaine est non vide et si elle n'est nulle part égale à $+\infty$.

Définition 11.14 On dit que la fonctionnelle J est fortement (respectivement faiblement) semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $u \in \mathcal{U}$ et pour toute suite d'éléments $\{u^k\} \subset \mathcal{U}$ telle que $u^k \rightarrow u$ (fort) (respectivement $u^k \rightharpoonup u$ (faible)),

$$J(u) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(u^k) \quad (13)$$

On définit de la même façon la semi-continuité supérieure (s.c.s.) (forte ou faible) en remplaçant (13) par

$$J(u) \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} J(u^k) \quad (14)$$

Si J est semi-continue à la fois inférieurement et supérieurement, alors J est continue.

Lemme 11.8 Une fonctionnelle J est semi-continue inférieurement si et seulement si son épigraphe est fermé.

Lemme 11.9 Si J est une fonctionnelle convexe, s.c.i. forte, alors elle est s.c.i. faible.

Pour la preuve de ces deux lemmes, voir [11].

Définition 11.15 La fonctionnelle J est dite "coercive sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ " si

- soit $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ est borné,
- soit

$$\lim_{\substack{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \\ \|u\| \rightarrow +\infty}} J(u) = +\infty$$

Théorème 11.10 Si la fonctionnelle J est convexe, s.c.i. et coercive sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ alors il existe au moins une solution au problème d'optimisation (12). Si J est strictement convexe, alors ce minimum est unique.

Pour la preuve, voir [11], Chapitre II, Proposition 1.2.

Définition 11.16 On dit que la fonctionnelle J admet une dérivée directionnelle (ou différentielle au sens de Gâteaux) au point $u \in \mathcal{U}$ dans la direction v si $(J(u + hv) - J(u))/h$ admet une limite quand $h \rightarrow 0$ (dans $\mathbb{R}$). Cette limite est notée $DJ(u; v)$.

Si pour tout $v \in \mathcal{U}$, $DJ(u; v)$ existe et si elle est une forme linéaire continue de v , alors J est dite différentiable au sens de Gâteaux (G-différentiable) en $u \in \mathcal{U}$ et il existe un élément noté $J'(u) \in \mathcal{U}$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{U} \quad DJ(u; v) = \langle J'(u), v \rangle$$

Cet élément est appelé le gradient de J en u .

Définition 11.17 On appelle sous-différentiel de J au point $u \in \text{dom}(J)$, l'ensemble

$$\partial J(u) = \{r \in \mathcal{U}^* \mid \forall v \in \mathcal{U} \quad J(v) - J(u) \geq \langle r, v - u \rangle\}.$$

(i) Tout élément r de $\partial J(u)$ est un sous-gradient de J au point u

(ii) si $\partial J(u) \neq \emptyset$, alors J est dite sous-différentiable au point u .

(iii) si J est différentiable, alors $\partial J(u) = \{J'(u)\}$.

Lemme II.11 Si J est convexe, continue et finie en un point $u \in \mathcal{U}$, alors J est sous-différentiable en ce point.

Lemme II.12 Si J est convexe, sous-différentiable et u^* est solution du problème d'optimisation (12), alors

$$\exists r^* \in \partial J(u^*) \quad \langle r^*, u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$$

Si J est différentiable, alors

$$\forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle J'(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$$

Réciproquement, ces conditions caractérisent les solutions de (12).

Pour la preuve de ces deux lemmes, voir [11].

Lemme II.13 Soit J une fonctionnelle différentiable en tout point de $\mathcal{U}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) J est fortement convexe de constante a

$$(ii) \quad \forall u, v \in \mathcal{U} \quad J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v \rangle + \frac{a}{2} \|u - v\|^2$$

$$(iii) \quad \forall u, v \in \mathcal{U} \quad \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq a \|u - v\|^2$$

La preuve de ce lemme se trouve dans [16, Chapitre X].

Lemme II.14 Si J est différentiable et à gradient Lipschitzien de constante A , alors

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \quad J(u) - J(v) \leq \langle J'(v), u - v \rangle + \frac{A}{2} \|u - v\|^2$$

Preuve Pour tous u et v , soit la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = J((1-t)v + tu) - J(v) - t \langle J'(v), u - v \rangle$$

Alors,

$$\varphi'(t) = \langle J'((1-t)v + tu) - J'(v), u - v \rangle$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= J(u) - J(v) - \langle J'(v), u - v \rangle \\ &= \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt \\ &\leq 0 + \int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt \\ &\leq \int_0^1 A \|t(u - v)\| \|u - v\| dt \\ &= \frac{A}{2} \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

Lemme II.15 Si la fonctionnelle J est sous-différentiable et fortement convexe de constante a , alors

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \quad \forall s \in \partial J(v) \quad J(u) \geq J(v) + \langle s, u - v \rangle + \frac{a}{2} \|u - v\|^2 \quad (15)$$

et le sous-différentiel est un opérateur (multivoque) fortement monotone de constante a , c'est-à-dire

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \quad \forall r \in \partial J(u) \quad \forall s \in \partial J(v) \quad \langle s - r, v - u \rangle \geq a \|u - v\|^2 \quad (16)$$

Preuve D'après la Définition II.9, on a

$$\forall t \in]0, 1[\quad \forall u, v \in \mathcal{U} \quad J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v) - at(1-t)\|u - v\|^2/2$$

Par ailleurs, si $s \in \partial J(v)$, le premier membre ci-dessus est supérieur à $J(v) + \langle s, t(u - v) \rangle$. En divisant par t dans l'inégalité ainsi obtenue, puis en laissant tendre t vers zéro, on obtient (15).

Enfin, en additionnant (15) écrit deux fois en intervertissant le rôle de u et v (et de r et s), on obtient (16). ■

Lemme II.16 Soit J une fonctionnelle différentiable, alors le gradient $J'(u)$ vérifie l'hypothèse de Dunn sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ avec la constante A si et seulement si il est monotone et Lipschitzien de constante A .

Preuve (d'après [18])

1. On suppose que J' vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante A , c'est-à-dire

$$\forall u, v \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq \frac{1}{A} \|J'(u) - J'(v)\|^2 \geq 0$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz, on arrive à

$$\|u - v\| \geq \frac{1}{A} \|J'(u) - J'(v)\|$$

Par conséquent, J' est bien monotone Lipschitzien de constante A .

2. On suppose maintenant que J' est monotone Lipschitzien de constante A . On pose, pour x donné,

$$h(u) = J(u) - J(x) - \langle J'(x), u - x \rangle$$

Comme J' est monotone, h est positive et on a $h(x) = 0$ et $h'(x) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad h(x) &\leq h\left(y - \frac{h'(y)}{A}\right) \\ &\leq h(y) + \left\langle h'(y), -\frac{h'(y)}{A} \right\rangle + \frac{A}{2} \left\| \frac{h'(y)}{A} \right\|^2 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est une conséquence de l'hypothèse de Lipschitz de J' . Elle est obtenue en appliquant le résultat du Lemme II.14, avec $u = y$ et $v = y - h'(y)/A$. On arrive donc à

$$\forall x, y \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad h(x) \leq h(y) - \frac{1}{2A} \|h'(y)\|^2$$

En remplaçant h par son expression en fonction de J , on obtient

$$\forall x, y \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad 0 \leq J(y) - J(x) - \langle J'(x), y - x \rangle - \frac{1}{2A} \|J'(y) - J'(x)\|^2 \quad (17)$$

et on a aussi

$$\forall x, y \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad 0 \leq J(x) - J(y) - \langle J'(y), x - y \rangle - \frac{1}{2A} \|J'(y) - J'(x)\|^2$$

En additionnant ces deux dernières inégalités, on arrive à

$$\forall x, y \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle J'(y) - J'(x), y - x \rangle \geq \frac{1}{A} \|J'(y) - J'(x)\|^2$$

Le gradient J' vérifie donc bien l'hypothèse de Dunn avec la constante A . ■

II.3 Cas d'un opérateur de point-selle

II.3.1 Opérateur de point-selle quelconque

Nous considérons deux espaces de Hilbert $\mathcal{U}$ et $\mathcal{P}$. Soient $\mathcal{U}^{\text{ad}} \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{P}^{\text{ad}} \subset \mathcal{P}$ deux sous-ensembles convexes fermés et Φ une fonctionnelle définie sur $\mathcal{U} \times \mathcal{P}$. Le problème de recherche d'un point-selle de la fonctionnelle Φ peut se formuler ainsi : trouver $(u^*, p^*) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$ tel que

$$\forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \forall p \in \mathcal{P}^{\text{ad}} \quad \Phi(u^*, p) \leq \Phi(u^*, p^*) \leq \Phi(u, p^*) \quad (18)$$

Lemme II.17 Soit $\Phi : (u, v) \rightarrow \Phi(u, v)$ une fonctionnelle différentiable convexe en u (respectivement, fortement convexe en u de constante a , uniformément en v), et concave en v (respectivement, fortement concave en v de constante b , uniformément en u). Alors, l'opérateur $(u, v) \rightarrow (\Phi'_u(u, v), -\Phi'_v(u, v))$ est monotone (respectivement, fortement monotone de constante $\min(a, b)$).

Pour la preuve, voir [9].

Lemme II.18 L'ensemble des points-selle est de la forme $U^{\text{opt}} \times P^{\text{opt}}$, c'est-à-dire, si (u_1^*, p_1^*) et (u_2^*, p_2^*) sont des points-selle, alors (u_1^*, p_2^*) et (u_2^*, p_1^*) sont aussi des points-selle.

Lemme II.19 Si la fonctionnelle Φ admet des points-selle, en notant $U^{\text{opt}} \times P^{\text{opt}}$ l'ensemble des points-selle de Φ sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$ et par $\hat{\mathcal{U}}$ et $\hat{\mathcal{P}}$ les ensembles

$$\hat{\mathcal{U}} = \arg \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \sup_{p \in \mathcal{P}^{\text{ad}}} \Phi(u, p) \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{P}} = \arg \max_{p \in \mathcal{P}^{\text{ad}}} \inf_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \Phi(u, p)$$

alors $U^{\text{opt}} = \hat{\mathcal{U}}$ et $P^{\text{opt}} = \hat{\mathcal{P}}$.

Pour la preuve, voir [15, Chapitre III].

Lemme II.20 La fonctionnelle Φ admet au moins un point-selle sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$ si et seulement si elle vérifie l'égalité suivante

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \sup_{p \in \mathcal{P}^{\text{ad}}} \Phi(u, p) = \max_{p \in \mathcal{P}^{\text{ad}}} \inf_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \Phi(u, p)$$

Pour la preuve, voir [3, Chapitre II].

Théorème II.21 Si Φ est convexe-concave, s.c.i. en u pour tout p et s.c.s. en p pour tout u et si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

(i) $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ et $\mathcal{P}^{\text{ad}}$ sont bornés

(ii) il existe $(\bar{u}, \bar{p}) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$ tel que

$$\lim_{\substack{(u, p) \rightarrow (\bar{u}, \bar{p}) \\ (u, p) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}}} \{\Phi(u, \bar{p}) - \Phi(\bar{u}, p)\} = +\infty$$

alors Φ admet un point-selle sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$

Pour la preuve, voir [3, Chapitre II]. Supposons maintenant que Φ est dérivable en u et en p , alors le problème (18) de recherche d'un point-selle de Φ est équivalent aux deux inéquations variationnelles suivantes : trouver $(u^*, p^*) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad & \langle \Phi'_u(u^*, p^*), u - u^* \rangle \geq 0 \\ \forall p \in \mathcal{P}^{\text{ad}} \quad & \langle \Phi'_p(u^*, p^*), p - p^* \rangle \leq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

11.3.2 Optimisation avec dualité

En plus de l'espace de Hilbert $\mathcal{U}$, nous introduisons un autre espace de Hilbert $\mathcal{C}$ identifié à son dual $\mathcal{C}^*$ appelé espace des contraintes, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme associée notée $\|\cdot\|$.

Définition 11.18 Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}$, espace de Hilbert. On dit que $\mathcal{C}$ est un cône de sommet 0 si

$$\forall q \in \mathcal{C} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \lambda q \in \mathcal{C}$$

Par définition, $-\mathcal{C} = \{-q \mid q \in \mathcal{C}\}$. Si $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$, alors $x \geq y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{C}$ définit dans $\mathcal{C}$ une relation d'ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel. On appelle alors $\mathcal{C}$ le cône positif de $\mathcal{C}$ et $-\mathcal{C}$ le cône négatif.

Définition 11.19 On définit le cône conjugué $\mathcal{C}^*$ de $\mathcal{C}$ par

$$\mathcal{C}^* = \{p \in \mathcal{C}^* \mid \langle p, q \rangle \geq 0 \quad \forall q \in \mathcal{C}\}$$

Nous considérons la fonctionnelle $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et l'application $\Theta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ et nous posons le problème d'optimisation sous-contraintes suivant

$$\begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} J(u) \\ \text{sous} \\ \Theta(u) \in -\mathcal{C} \end{cases} \quad (20)$$

$\mathcal{U}^{\text{ad}}$ est un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{C}$ est un cône convexe fermé de $\mathcal{C}$, d'intérieur non vide. Nous notons

$$\mathcal{L}(u, p) = J(u) + \langle p, \Theta(u) \rangle \quad (21)$$

le Lagrangien associé au problème (20) où p est un élément du cône conjugué $\mathcal{C}^*$ de $\mathcal{C}$. Nous supposons l'application Θ $\mathcal{C}$ -convexe dans le sens suivant

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda \Theta(u) + (1 - \lambda) \Theta(v) - \Theta(\lambda u + (1 - \lambda)v) \in \mathcal{C} \quad (22)$$

Cette propriété a pour conséquence le caractère convexe de la fonctionnelle $u \mapsto \langle p, \Theta(u) \rangle$ pour tout $p \in \mathcal{C}^*$.

Remarque 11.4 Dans le cas des contraintes égalité, c'est-à-dire $\mathcal{C} = \{0\}$, la propriété (22) revient à dire que Θ est une application affine. $\square$

Nous introduisons les conditions de qualification des contraintes connues aussi sous le nom des conditions de Slater

- $\Theta(\mathcal{U}^{\text{ad}}) \cap \text{int}(-C^*) \neq \emptyset$ dans le cas des contraintes inégalité
- $0 \in \text{int}(\Theta(\mathcal{U}^{\text{ad}}))$ dans le cas des contraintes égalité.

Théorème II.22 Nous faisons les hypothèses suivantes

- (i) J est une fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement et coercive sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ (cf. Définition II.15)
- (ii) Θ est C -convexe sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ et telle que la fonctionnelle $u \mapsto \langle p, \Theta(u) \rangle$ est semi-continue inférieurement pour tout $p \in C^*$

Alors, si $\mathcal{L}$ admet un point-selle (u^*, p^*) sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times C^*$ c'est-à-dire

$$\forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \forall p \in C^* \quad \mathcal{L}(u^*, p) \leq \mathcal{L}(u^*, p^*) \leq \mathcal{L}(u, p^*)$$

alors u^* est une solution du problème (20).

Réciproquement, si u^* est une solution du problème (20), et si la condition de qualification des contraintes est vérifiée, alors il existe $p^* \in C^*$ tel que (u^*, p^*) est un point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}$.

Théorème II.23 Sous les hypothèses (i) et (ii) du Théorème II.22, si J et Θ sont différentiables, alors u^* est solution du problème (20) si et seulement si

$$\langle J'(u^*) + \Theta'(u^*)p^*, u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$$

et

$$\langle p^*, \Theta(u^*) \rangle = 0 \quad \Theta(u^*) \in -C \quad (23)$$

Les conditions ci-dessus sont les conditions de Kuhn et Tucker pour le problème (20).

Remarque II.5 Si de plus, J et Θ sont différentiables sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$, alors en remplaçant Φ par $\mathcal{L}$ dans (19), nous obtenons le système variationnel suivant trouver $(u^*, p^*) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times C^*$ tel que

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad & \langle J'(u^*) + \Theta'(u^*)^T p^*, u - u^* \rangle \geq 0 \\ \forall p \in C^* \quad & \langle -\Theta(u^*), p - p^* \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

En posant $z = (u, p)^T$ ces deux inéquations variationnelles se réduisent à l'inéquation variationnelle en $z = (z_1, z_2)$ trouver $z^* \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times C^*$ tel que

$$\forall z \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times C^* \quad \langle \Psi(z^*), z - z^* \rangle \geq 0$$

L'opérateur $\Psi(z)$ est défini par

$$\Psi(z) = (J'(z_1) + \Theta'(z_1)^T z_2, -\Theta(z_1))^T \quad (24)$$

Sous les hypothèses " J convexe" et " Θ C -convexe" le Lagrangien $\mathcal{L}(u, p)$ est une fonction convexe-concave. À l'aide du résultat du Lemme II.17, nous pouvons affirmer que l'opérateur Ψ de point-selle défini par (24) est un opérateur monotone. $\square$

II.4 Principe du Problème Auxiliaire

II.4.1 Cas d'un opérateur non intégrable

On considère une fonction auxiliaire $K : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on choisit fortement convexe et différentiable, et un nombre positif ε . Pour $v \in \mathcal{U}$, on introduit le problème auxiliaire suivant

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \Psi(v) - \frac{1}{\varepsilon} K'(v), u \right\rangle \right] \quad (25)$$

Soit $\tilde{u}(v)$ la solution de ce problème. Cette solution est aussi caractérisée par l'inéquation variationnelle suivante

$$\left\langle \frac{1}{\varepsilon} K'(\tilde{u}(v)) + \Psi(v) - \frac{1}{\varepsilon} K'(v), u - \tilde{u}(v) \right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$$

Lemme II.24 Si $\tilde{u}(v) = v$, alors $\tilde{u}(v)$ est solution de (1).

Pour la preuve, voir [8]. Ce lemme suggère l'algorithme de point fixe suivant

Algorithme II.1

(i) Soit $k = 0$, choisir $u^0 \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$.

(ii) À l'étape k , résoudre le problème (25) avec $v = u^k$

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \Psi(u^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \quad (26)$$

soit u^{k+1} la solution de ce problème.

(iii) Si $\|u^{k+1} - u^k\|$ est inférieur à un seuil, fin de l'algorithme, sinon retour au point (ii) avec $k \leftarrow k + 1$.

II.4.1.1 Cas d'un opérateur fortement monotone

Théorème II.25

1. Sous les hypothèses " Ψ est faiblement continu sur tout sous-espace de dimension finie de $\mathcal{U}$, Ψ est fortement monotone de constante a " le problème variationnel (1) admet une solution unique u^*
2. Si K' est fortement monotone de constante b , alors il existe une solution unique u^{k+1} au problème auxiliaire (26).
3. Si de plus Ψ est Lipschitzien de constante A et,

$$0 < \varepsilon < 2ab/A^2$$

alors la suite $\{u^k\}$ engendrée par l'Algorithme II.1 converge fortement vers u^*

Pour la preuve, voir [8].

II.4.1.2 Cas d'un opérateur vérifiant l'hypothèse de Dunn

Théorème II.26

1. Si le problème variationnel (1) admet une solution u^* , si K' est fortement monotone de constante b , alors il existe une solution unique u^{k-1} au problème auxiliaire (26).
2. Si de plus Ψ vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante A et

$$0 < \varepsilon < 2b/A \quad (27)$$

alors la suite $\{\Psi(u^k)\}$ converge fortement vers $\Psi(u^*)$, la suite $\{u^k\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible de $\{u^k\}$ est solution du problème (1).

Pour la preuve, voir [15, Chapitre III].

II.4.1.3 Cas d'un opérateur fortement monotone emboîté

On suppose que le problème variationnel (1) peut se formuler ainsi : trouver $(u_1^*, u_2^*) \in \mathcal{U}_1^{\text{ad}} \times \mathcal{U}_2^{\text{ad}}$ tel que

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1(u_1^*, u_2^*), u_1 - u_1^* \rangle &\geq 0 & \forall u_1 \in \mathcal{U}_1^{\text{ad}} \\ \langle \Psi_2(u_1^*, u_2^*), u_2 - u_2^* \rangle &\geq 0 & \forall u_2 \in \mathcal{U}_2^{\text{ad}} \end{aligned} \quad (28)$$

L'Algorithme II.1 s'écrit, en introduisant deux pas ε_1 et ε_2 et deux fonctions auxiliaires K_1 et K_2

Algorithme II.2 (Parallèle) À l'étape k , connaissant u_1^k et u_2^k , calculer u_1^{k+1} et u_2^{k+1} en résolvant les deux problèmes auxiliaires

$$\min_{u_1 \in \mathcal{U}_1^{\text{ad}}} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} K_1(u_1) + \left\langle \Psi_1(u_1^k, u_2^k) - \frac{1}{\varepsilon_1} K_1'(u_1^k), u_1 \right\rangle \right] \quad (29)$$

$$\min_{u_2 \in \mathcal{U}_2^{\text{ad}}} \left[\frac{1}{\varepsilon_2} K_2(u_2) + \left\langle \Psi_2(u_1^k, u_2^k) - \frac{1}{\varepsilon_2} K_2'(u_2^k), u_2 \right\rangle \right] \quad (30)$$

La version séquentielle de l'Algorithme II.2 " u_1 avant u_2 " (respectivement " u_2 avant u_1 ") consiste à remplacer dans (30) u_1^k par u_1^{k+1} (respectivement, résoudre d'abord (30), ensuite résoudre (29) en remplaçant u_2^k par u_2^{k+1}).

Nous supposons l'opérateur Ψ fortement monotone emboîté, c'est-à-dire

- (i) l'opérateur $\Psi_2(u_1, u_2)$ est fortement monotone en u_2 uniformément en u_1 : soit $\tilde{u}_2(u_1)$ la solution unique de l'inéquation variationnelle en u_2 paramétrée par u_1

$$\tilde{u}_2(u_1) \in \mathcal{U}_2^{\text{ad}} \quad \langle \Psi_2(u_1, \tilde{u}_2(u_1)), u_2 - \tilde{u}_2(u_1) \rangle \geq 0 \quad \forall u_2 \in \mathcal{U}_2^{\text{ad}}.$$

- (ii) l'opérateur

$$\Omega(u_1) = \Psi_1(u_1, \tilde{u}_2(u_1))$$

est fortement monotone en u_1

Ceci se traduit par les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \forall u_1 \in \mathcal{U}_1^{\text{ad}} \quad \forall u_2, u'_2 \in \mathcal{L}_2^{\text{ad}} \quad \langle \Psi_2(u_1, u_2) - \Psi_2(u_1, u'_2), u_2 - u'_2 \rangle &\geq t \|u_2 - u'_2\|^2 \\ \forall u_1, u'_1 \in \mathcal{L}_1^{\text{ad}} \quad \langle \Omega(u_1) - \Omega(u'_1), u_1 - u'_1 \rangle &\geq r \|u_1 - u'_1\|^2 \end{aligned}$$

où t et r sont des constantes réelles strictement positives. Sous ces hypothèses, il existe une solution unique (u_1^*, u_2^*) au problème variationnel (28).

Nous faisons également les hypothèses suivantes il existe des constantes positives telles que, pour tout $u_1, u'_1 \in \mathcal{L}_1^{\text{ad}}$ et pour tout $u_2, u'_2 \in \mathcal{L}_2^{\text{ad}}$

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(u_1, u_2) - \Psi_1(u'_1, u_2)\| &\leq X \|u_1 - u'_1\| \\ \|\Psi_1(u_1, u_2) - \Psi_1(u_1, u'_2)\| &\leq Y \|u_2 - u'_2\| \\ \|\Psi_2(u_1, u_2) - \Psi_2(u'_1, u_2)\| &\leq Z \|u_1 - u'_1\| \\ \|\Psi_2(u_1, u_2) - \Psi_2(u_1, u'_2)\| &\leq T \|u_2 - u'_2\| \\ \|K'_1(u_1) - K'_1(u'_1)\| &\leq C \|u_1 - u'_1\| \\ \|K'_2(u_2) - K'_2(u'_2)\| &\leq D \|u_2 - u'_2\| \\ \langle K'_1(u_1) - K'_1(u'_1), u_1 - u'_1 \rangle &\geq c \|u_1 - u'_1\|^2 \\ \langle K'_2(u_2) - K'_2(u'_2), u_2 - u'_2 \rangle &\geq d \|u_2 - u'_2\|^2 \end{aligned}$$

Théorème II.27 *Sous les hypothèses ci-dessus, à partir de $(u_1^0, u_2^0) \in \mathcal{U}_1^{\text{ad}} \times \mathcal{L}_2^{\text{ad}}$, l'Algorithme II.2 génère une suite $\{(u_1^k, u_2^k)\}$ bien définie. De plus, il existe une fonction h de ε_2 (positive pour $\varepsilon_2 > 0$) telle que, si*

$$0 < \varepsilon_2 < 2dt/T^2 \quad 0 < \varepsilon_1 < h(\varepsilon_2)$$

alors la suite $\{(u_1^k, u_2^k)\}$ converge fortement vers (u_1^, u_2^*) .*

Pour la preuve, voir [9].

II.4.2 Cas d'un opérateur intégrable

Nous supposons qu'il existe une fonctionnelle $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Psi(u) = J'(u)$, et nous posons le problème d'optimisation suivant

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} J(u) \quad (31)$$

Lemme II.28 *Soient F une fonctionnelle convexe et G-différentiable, et ε une constante positive. Soit u^* une solution de*

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} F(u) \quad (32)$$

Si de plus,

$$F''(u^*) = \varepsilon J''(u^*) \quad (33)$$

alors u^ est solution du problème (31).*

Pour la preuve, voir [6].

Soit $\varepsilon > 0$, et K une fonctionnelle convexe et G-différentiable. Nous considérons la fonctionnelle suivante

$$F'' : u \mapsto K(u) + \langle \varepsilon J'(v) - K'(v), u \rangle$$

Nous avons

$$(F'')'(v) = \varepsilon J'(v)$$

Donc, si v est solution de (32), avec $F = F''$ alors v est solution du problème (31). Ceci suggère l'algorithme de point-fixe suivant.

Algorithme II.3

(i) Soit $k = 0$, choisir $u^0 \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$

(ii) À l'étape k , résoudre le problème (25) avec $v = u^k$

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle J'(u^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \quad (34)$$

soit u^{k+1} la solution de ce problème.

(iii) Si $\|u^{k+1} - u^k\|$ ou $\|J(u^{k+1}) - J(u^k)\|$ est inférieur à un seuil, fin de l'algorithme, sinon retour au point (ii) avec $k \leftarrow k + 1$.

Remarque II.6 L'Algorithme II.3 se déduit aussi de L'Algorithme II.1 en remplaçant Ψ par J' $\square$

Théorème II.29 Nous faisons les hypothèses suivantes

(i) J est coercive, convexe, semi-continue inférieurement et ayant une G -dérivée Lipschitzienne de constante A sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$

(ii) La fonctionnelle K est convexe; sa G -dérivée est fortement monotone de constante b , et Lipschitzienne de constante B .

Alors il existe une solution u^* au problème (31) et le problème (34) admet une solution u^{k+1} unique.

(iii) Si ε vérifie l'inégalité

$$0 < \varepsilon < 2b/A$$

alors la suite $\{J(u^k)\}$ est strictement décroissante et converge vers $J(u^*)$. Tout point d'accumulation de la suite $\{u^k\}$ est une solution du problème (31).

(iv) Si de plus J' est fortement monotone de constante a sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ alors u^* est unique et la suite $\{u^k\}$ converge fortement vers u^* , et

$$\|u^{k+1} - u^*\| \leq (1/a)(B/\varepsilon + A)\|u^{k+1} - u^k\| \quad (35)$$

L'inégalité (35) ci-dessus est une "majoration a posteriori de l'erreur" car $\|u^{k+1} - u^k\|$ est calculable en ligne. La preuve de ce théorème se trouve dans [6].

Remarque II.7 Sous l'hypothèse " J est convexe et Lipschitzienne de constante A ", le gradient J' vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante A (voir le Lemme II.16). Par conséquent, avec le résultat du Théorème II.26, on déduit que la suite $\{J'(u^k)\}$ converge fortement vers $J'(u^*)$. $\square$

II.4.3 Cas d'un opérateur de point-selle

Nous considérons deux espaces de Hilbert $\mathcal{U}$ et $\mathcal{P}$. Soit Φ une fonctionnelle définie sur $\mathcal{U} \times \mathcal{P}$ telle que $u \mapsto \Phi(u, p)$ est convexe et s.c.i. en u uniformément en p et $p \mapsto \Phi(u, p)$ est concave et s.c.s. en p uniformément en u . Soient $\mathcal{U}^{\text{ad}} \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{P}^{\text{ad}} \subset \mathcal{P}$ deux sous-ensembles convexes fermés. On pose le problème (18) de recherche d'un point-selle de la fonctionnelle Φ . On suppose Φ différentiable en u et en p et on s'intéresse au système variationnel (19).

Lemme II.30 Soit Λ une fonctionnelle définie sur $\mathcal{U} \times \mathcal{P}$ convexe-concave et différentiable en u et en p qui admet au moins un point-selle (u^*, p^*) sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ tels que

$$\Lambda'_u(u^*, p^*) = \varepsilon \Phi'_u(u^*, p^*) \quad \Lambda'_p(u^*, p^*) = \rho \Phi'_p(u^*, p^*)$$

Alors (u^*, p^*) est aussi un point-selle de Φ sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$

Pour la preuve, voir [6]. Ce lemme suggère l'algorithme itératif suivant en introduisant une fonction auxiliaire $\varphi(u, p)$.

Algorithme II.4

(i) Soit $k = 0$, choisir $(u^0, p^0) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$

(ii) À l'étape k , résoudre le problème auxiliaire suivant : trouver le point-selle (u^{k+1}, p^{k+1}) de la fonctionnelle suivante sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{P}^{\text{ad}}$

$$(u, p) \mapsto \varphi(u, p) + \langle \varepsilon \Phi'_u(u^k, p^k) - \varphi'_u(u^k, p^k), u \rangle + \langle \rho \Phi'_p(u^k, p^k) - \varphi'_p(u^k, p^k), p \rangle$$

(iii) fin de l'algorithme si un certain degré de précision est atteint, sinon retour au point (ii) avec $k \leftarrow k + 1$.

Comme on a deux variables, on peut utiliser un schéma de relaxation soit parallèle soit séquentiel. La version séquentielle (u avant p) peut s'écrire

Algorithme II.5 Dans l'Algorithme II.4, remplacer le pas (ii) par les deux pas suivants

(ii-a) résoudre le problème auxiliaire de minimisation

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \varphi(u, p^k) + \langle \varepsilon \Phi'_u(u^k, p^k) - \varphi'_u(u^k, p^k), u \rangle$$

soit u^{k+1} une solution

(ii-b) résoudre le problème auxiliaire de maximisation

$$\max_{p \in \mathcal{P}^{\text{ad}}} \varphi(u^{k+1}, p) + \langle \rho \Phi'_p(u^{k+1}, p^k) - \varphi'_p(u^{k+1}, p^k), p \rangle$$

soit p^{k+1} une solution.

II.4.3.1 Minimisation avec contraintes explicites. Algorithme à un niveau

Nous considérons le problème d'optimisation sous-contraintes introduit dans le §II.3.2

$$\begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} J(u) \\ \text{sous} \\ \Theta(u) \in -C \end{cases} \quad (36)$$

et nous appliquons l'Algorithme II.4 avec $\Phi = \mathcal{L}$, le Lagrangien défini par (21), $\mathcal{P}^{\text{ad}} = C^*$ et

$$\varphi(u, p) = K(u) + \langle p, \psi(u) \rangle$$

où K et ψ sont des fonctions de même nature que J et Θ respectivement.

Algorithme II.6 Dans l'Algorithme II.4, poser $\Phi = \mathcal{L}$, $\mathcal{P}^{\text{ad}} = C^*$. Le pas (ii) s'interprète alors comme suit

(ii) résoudre le problème auxiliaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in U^{\text{ad}}} K(u) + \langle \varepsilon J'(u^k) - K'(u^k), u \rangle + \langle p^k, (\varepsilon \Theta'(u^k) - \psi'(u^k)), u \rangle \\ \text{sous} \\ \psi(u) + \rho \Theta(u^k) - \psi(u^k) \in -C^* \end{array} \right.$$

Soit u^{k-1} une solution et p^{k-1} un multiplicateur optimal associé à la contrainte ci-dessus.

Le théorème de convergence de cet algorithme est restreint au cas particulier où $U^{\text{ad}} = \mathcal{U}$, $C^* = \{0\}$ (contrainte égalité), J , K quadratiques fortement convexes et Θ et ψ affines. On pose

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle u - f, A(u - f) \rangle$$

$$K(u) = \frac{1}{2} \langle u - g, B(u - g) \rangle$$

$$\Theta(u) = D(u - d)$$

$$\psi(u) = E(u - e)$$

où A et B sont des opérateurs linéaires, symétriques et continus sur $\mathcal{U}$, D et E sont des applications linéaires continues de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{C}$ et f , g , d et e sont des éléments de $\mathcal{U}$.

Théorème II.31 Sous les hypothèses

(i) J et K sont fortement convexes et D et E sont surjectives,

(ii) $DA^{-1}E^T + EA^{-1}D^T - DA^{-1}BA^{-1}D^T$ est fortement monotone sur C^*

les paramètres ε et ρ de l'Algorithme II.6 sont choisis ainsi $\varepsilon = \rho$ et

$$B - \varepsilon A/2 \text{ est fortement monotone sur } \mathcal{U}$$

$$DA^{-1}E^T + EA^{-1}D^T - DA^{-1}(B + \varepsilon A/2)A^{-1}D^T \text{ est fortement monotone sur } C^*$$

Alors, à partir de (u^0, p^0) donné, l'Algorithme II.6 génère une suite unique $\{(u^k, p^k)\}$ qui converge vers l'unique solution (u^*, p^*) du problème (36).

La preuve de ce théorème se trouve dans [6].

II.4.3.2 Minimisation avec contraintes explicites. Algorithme à deux niveaux

Nous appliquons maintenant l'Algorithme II.5 pour la recherche d'un point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}$ avec le choix suivant de la fonction auxiliaire φ

$$\varphi(u, p) = K(u) - \frac{1}{2} \|p\|^2$$

Algorithme II.7 Dans l'Algorithme II.5, poser $\Phi = \mathcal{L}$, $\mathcal{P}^{\text{ad}} = C^*$. Le pas (ii) correspond alors aux deux pas suivants

(i-a) résoudre le problème auxiliaire en u

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} K(u) + \langle \varepsilon J'(u^k) - K'(u^k), u \rangle + \varepsilon \langle p^k, \Theta(u) \rangle$$

soit u^{k+1} une solution.

$$(ii-b) \quad p^{k+1} = P(p^k + \rho \Theta(u^{k+1}))$$

où P désigne la projection sur C^* (si $C^* = \{0\}$, P est alors l'identité).

Théorème II.32 Sous les hypothèses

- (i) J' et K' sont fortement monotones de constantes respectives a et b et Lipschitziennes de constantes respectives A et B ;
- (ii) Θ est C -convexe et Lipschitzienne de constante τ ;
- (iii) $\mathcal{L}$ admet un point-selle (u^*, p^*)

alors u^* est unique, u^{k+1} existe et il est unique; si de plus ε et ρ vérifient les conditions

$$0 < \varepsilon \leq b/A \quad 0 < \rho < 2a/\tau^2$$

alors la suite $\{u^k\}$ générée par l'Algorithme II.7 converge vers u^* . La suite $\{p^k\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible p est tel que (u^*, p) est un point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}$.

La preuve de ce théorème se trouve dans [6].

Remarque II.8 En choisissant $K = J$ et $\varepsilon = 1$ dans l'Algorithme II.7, on obtient l'Algorithme d'Uzawa. Si on choisit $K(u) = \|u\|^2/2$, si $\mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathcal{U}$, et si Θ est affine, alors le pas (ii-a) de l'Algorithme II.7 s'écrit

$$u^{k+1} = u^k - \varepsilon L'_u(u^k, p^k)$$

et on retrouve l'Algorithme d'Arrow-Hurwicz. $\square$

Remarque II.9 La preuve de convergence de l'Algorithme II.7 suppose la forte convexité de la fonctionnelle J , ou alors la convexité de la fonctionnelle J et la "stabilité du Lagrangien en u " [12, Chapitre VIII] dont nous donnons la définition plus loin. $\square$

Nous notons $\mathcal{U}^{\text{opt}}$ l'ensemble des solutions du problème (36) et $\mathcal{P}^{\text{opt}}$ l'ensemble des solutions du problème dual suivant

$$\max_{p \in C^*} \Lambda(p)$$

où Λ est la fonction duale définie par

$$\Lambda(p) = \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \mathcal{L}(u, p) & \text{si } p \in C^* \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (37)$$

Nous notons aussi

$$\hat{U}(p) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \mathcal{L}(u, p) \quad \hat{P}(u) = \arg \max_{p \in C^*} \mathcal{L}(u, p)$$

La fonctionnelle Λ est concave et les inclusions suivantes sont toujours vraies

$$\forall p^* \in \mathcal{P}^{\text{opt}} \quad \mathcal{U}^{\text{opt}} \subset \hat{U}(p^*)$$

$$\forall u^* \in \mathcal{U}^{\text{opt}} \quad \mathcal{P}^{\text{opt}} \subset \hat{P}(u^*)$$

Lemme II.33 La fonction duale Λ est différentiable si et seulement si $\Theta(\hat{U}(p))$ est un singleton pour tout $p \in C^*$.

Pour la preuve, voir [15, Chapitre II].

Définition II.20 Le Lagrangien $\mathcal{L}$ est stable en u si

$$\forall p^* \in P^{\text{opt}} \quad \hat{U}(p^*) = U^{\text{opt}} \quad (38)$$

Remarque II.10 Si J est strictement convexe en u , alors $\mathcal{L}$ est stable en u et la fonction duale Λ est différentiable. $\square$

La stabilité en u du Lagrangien permet de conclure sur la convergence au sens de la topologie faible vers une solution du problème (20) comme le montre le lemme suivant.

Lemme II.34 Soient $u^* \in U^{\text{opt}}$, $p^* \in P^{\text{opt}}$ et une suite $\{u^k\}$ bornée dans $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ telle que $\mathcal{L}(u^k, p^*) \rightarrow \mathcal{L}(u^*, p^*)$. Alors, si $\mathcal{L}$ est stable et semi-continu inférieurement en u , tout point d'accumulation faible u de la suite $\{u^k\}$ est un élément de U^{opt} et (u, p^*) est un point-selle de $\mathcal{L}$.

La preuve de ce lemme se trouve dans [12].

Remarque II.11 Quand la fonctionnelle J n'est pas fortement convexe sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$, d'une part l'égalité (38) n'est pas garantie. Par conséquent, si la suite $\{p^k\}$ converge vers P^{opt} on peut au mieux démontrer que la suite $\{u^k\}$ converge vers $\hat{U}(p^*)$ pour $p^* \in P^{\text{opt}}$ et pas vers l'ensemble des solutions U^{opt} . D'autre part, comme $\hat{U}(p)$ n'est pas nécessairement réduit à un singleton, la fonction duale Λ n'est pas partout différentiable et la remise à jour des variables dans l'Algorithme II.7 avec un pas ρ fixe ou des pas ρ^k ne tendant pas vers zéro n'est plus valable.

Dans le cas où la fonctionnelle J est convexe et le Lagrangien est stable en u , il faut utiliser des "petits pas" ρ^k dans la remise à jour des multiplicateurs p^k . Des méthodes pour assurer la stabilité du Lagrangien en u ont été étudiées dans [12, Chapitre VIII]. $\square$

Une manière de surmonter les difficultés liées à la non-stabilité du Lagrangien et la non-différentiabilité de la fonction duale est l'utilisation du Lagrangien augmenté, à la place du Lagrangien ordinaire [12, Chapitre IX]. Cette "manipulation" correspond à une régularisation de la fonction duale Λ connue sous le nom de la régularisation de Yosida ou de la transformation par proximité de Moreau.

II.4.3 Lagrangien augmenté

Dans le cas des contraintes égalité ($C = \{0\}$), le Lagrangien augmenté associé au problème (36) est défini par

$$\mathcal{L}_c(u, p) = \mathcal{L}(u, p) + \frac{c}{2} \|\Theta(u)\|^2$$

où c est une constante strictement positive. Dans le cas des contraintes inégalité, on ramène formellement le problème de départ (36) au cas des contraintes égalité par la formulation suivante

$$\begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}, \xi \in -C^*} J(u) \\ \text{sous} \\ \Theta(u) - \xi = 0 \end{cases}$$

On définit dans ce cas le Lagrangien augmenté par

$$\mathcal{L}_c(u, p) = J(u) + \phi_c(\Theta(u), p)$$

¹La suite $\{p^k\}$ est décroissante et est une σ -suite, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{\infty} p^k = +\infty$ et $\sum_{k=1}^{\infty} (p^k)^2 < +\infty$.

avec

$$\phi_c(\theta, p) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\xi \in \mathcal{C}} \langle p, \theta - \xi \rangle + \frac{c}{2} \|\theta - \xi\|^2$$

Lemme II.35 La fonction ϕ_c est convexe en θ , concave en p et différentiable en θ et p avec

$$(\phi_c)'_{\theta}(\theta, p) = \Pi(p + c\theta)$$

$$(\phi_c)'_p(\theta, p) = [\Pi(p + c\theta) - p] / c$$

La fonction ϕ_c peut aussi s'écrire

$$\phi_c(\theta, p) = \max_{q \in \mathcal{C}^*} \left(\langle q, \theta \rangle + \frac{1}{2c} \|q - p\|^2 \right)$$

ou encore

$$\phi_c(\theta, p) = \frac{1}{2} (\|\Pi(p + c\theta)\|^2 - \|p\|^2)$$

où Π désigne la projection sur $\mathcal{C}^*$. On a de plus les inégalités suivantes

$$\forall p \in \mathcal{C}^* \quad \forall \theta \in \mathcal{C} \quad \langle p, \theta \rangle \leq \phi_c(\theta, p) \leq 0$$

Lemme II.36 Soient Λ une fonctionnelle concave sur un espace de Hilbert $\mathcal{X}$ et c un réel strictement positif. Soit Λ_c la fonctionnelle définie par

$$\Lambda_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in \mathcal{X}} (\Lambda(y) - \|x - y\|^2 / 2c) \quad (39)$$

Alors

(i) Λ_c est concave et différentiable partout où le sup est atteint dans (39)

(ii) $\Lambda_c(x) \geq \Lambda(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$

(iii) $\sup_{x \in \mathcal{X}} \Lambda_c(x) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \Lambda(x)$ et les points où le sup est atteint sont les mêmes des deux côtés.

Pour la preuve de ces deux lemmes, voir [12].

Remarque II.12 La transformation (39) est connue en Analyse Convexe sous le nom de la régularisation de Yosida ou de la transformation par proximité de Moreau. Le Lagrangien augmenté correspond à la régularisation de la fonction duale définie par (37) comme le montre le théorème ci-après. $\square$

Théorème II.37 Avec la définition du Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_c$ par

$$\mathcal{L}_c(u, p) = J(u) + \phi_c(\Theta(u), p)$$

soit Λ_c la fonctionnelle définie par

$$\Lambda_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \mathcal{L}_c \quad \forall p \in \mathcal{C}^* \quad (40)$$

On fait les hypothèses suivantes

(i) J est convexe, s.c.i. sur un ouvert $\mathcal{O}$ contenant $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ et Lipschitzienne sur tout ouvert borné $\mathcal{B}$ contenu dans $\mathcal{O}$, c'est-à-dire que

$$\forall \mathcal{B} \in \mathcal{O} \quad \exists L_{\mathcal{B}} \quad \forall u, v \in \mathcal{B} \quad |J(u) - J(v)| \leq L_{\mathcal{B}} \|u - v\|$$

(ii) $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ est borné ou bien

$$\forall \{u^k | k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k\| = +\infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} J(u^k)/\|u^k\| = +\infty$$

(iii) Θ est C -convexe et Lipschitzienne de constante τ sur un ouvert $\mathcal{O}$ contenant $\mathcal{U}^{\text{ad}}$

(iv) la condition de qualification des contraintes est vérifiée.

Alors,

- (i) La fonction Λ_r définie par (40) est bien la régularisée —au sens de (39)— de la fonction duale Λ associée au problème (36) .
- (ii) le Lagrangien augmenté a au moins un point-selle sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times C^*$.
- (iii) Les Lagrangiens $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_r$ ont le même ensemble de points-selle $l^{\text{opt}} \times p^{\text{opt}}$ sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times C^*$ et $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times C^*$ respectivement
- (iv) le Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_r$ est stable en u .

Pour la preuve, voir [12].

Remarque II.13 En l'absence de la forte convexité de la fonctionnelle J , l'utilisation du Lagrangien augmenté à la place du Lagrangien ordinaire assure la différentiabilité de la nouvelle fonction duale régularisée Λ_r , ce qui permet l'utilisation de grands pas ρ dans la mise à jour des multiplicateurs p^k et assure en même temps la propriété de stabilité en u . $\square$

Algorithme II.8 (Algorithme d'Uzawa)

- (i) Choisir $p^0 \in C^*$, poser $k = 0$.
- (ii) À l'étape k , résoudre le problème d'optimisation

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \mathcal{L}_r(u, p^k) \quad (41)$$

soit u^k une solution .

- (iii) mettre à jour p^k par

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= p^k + \rho(\mathcal{L}'_r)_p(u^k, p^k) \\ &= p^k \left(1 - \frac{\rho}{c}\right) + \frac{\rho}{c} \Pi(p^k + c\Theta(u^k)) \end{aligned}$$

- (iv) fin de l'algorithme si $\|p^{k+1} - p^k\|$ est inférieur à un seuil, sinon $k \leftarrow k+1$ et retour en (ii).

Théorème II.38 Sous les hypothèses

- (i) J est convexe, s.c.i. sur un ouvert $\mathcal{O}$ contenant $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ et Lipschitzienne sur tout ouvert borné $\mathcal{B}$ contenu dans $\mathcal{O}$, c'est-à-dire

$$\forall \mathcal{B} \subset \mathcal{O} \quad \exists L_{\mathcal{B}} \quad \forall u, v \in \mathcal{B} \quad |J(u) - J(v)| \leq L_{\mathcal{B}} \|u - v\|$$

- (ii) si $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ n'est pas borné, alors

$$\forall \{u^k | k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k\| = +\infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} J(u^k)/\|u^k\| = +\infty$$

- (iii) Θ est C -convexe et Lipschitzienne de constante τ sur un ouvert $\mathcal{O}$ contenant $\mathcal{U}^{\text{ad}}$
 (iv) il existe un point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}_c$ sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathbb{C}^*$ (ce qui est assuré si la condition de qualification des contraintes est vérifiée)
 alors il existe une solution (non nécessairement unique) au problème d'optimisation (41). Si, de plus

$$0 < \rho < 2c$$

alors toute suite $\{(u^k, p^k)\}$ engendrée par l'Algorithme II.8 est bornée et tout point d'accumulation faible est un point-selle de $\mathcal{L}_c$ sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathbb{C}^*$

Pour la preuve, voir [7].

Dans le cas où Θ est additive par rapport à une décomposition de $\mathcal{U}$, on peut aussi proposer l'algorithme suivant.

Algorithme II.9 À l'étape k , connaissant u^k et p^k calculer u^{k+1} et p^{k+1} par

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \left(K(u) + \langle \varepsilon J'(u^k) - K'(u^k) \rangle + \varepsilon \langle \phi_{\Theta}(\Theta(u^k), p^k), \Theta(u) \rangle \right) \quad (42)$$

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= p^k + \rho \phi'_{\rho}(\Theta(u^{k+1}), p^k) \\ &= p^k \left(1 - \frac{\rho}{c} \right) + \frac{\rho}{c} \Pi(p^k + c \Theta(u^k)) \end{aligned}$$

Théorème II.39 Sous les hypothèses

- (i) J est convexe, différentiable, de dérivée Lipschitzienne de constante A sur $\mathcal{U}^{\text{ad}}$
 (ii) Θ est C -convexe et Lipschitzienne de constante τ sur un ouvert $\mathcal{O}$ contenant $\mathcal{U}^{\text{ad}}$
 (iii) Il existe un point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}$, sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathbb{C}^*$ (ce qui est assuré si J est coercive et la condition de qualification des contraintes est vérifiée)
 (iv) K est fortement convexe de constante b et différentiable, de dérivée Lipschitzienne sur tout borné de $\mathcal{U}^{\text{ad}}$
 alors il existe une solution unique au problème (42). Si, de plus

$$0 < \varepsilon < b/(A + c\tau^2)$$

et

$$0 < \rho < 2c \quad \text{si} \quad C = \{0\} \quad (\text{contraintes d'égalité}),$$

ou

$$0 < \rho \leq c \quad \text{si} \quad C \neq \{0\} \quad (\text{contraintes d'inégalité}),$$

alors la suite $\{(u^k, p^k)\}$ générée par l'Algorithme II.9 est bornée et tout point d'accumulation dans la topologie faible est un point-selle de $\mathcal{L}_c$ sur $\mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathbb{C}^*$

Pour la preuve, voir [7].

II.5 Régularisation d'inéquations variationnelles

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'Introduction, il existe des opérateurs monotones non intégrables pour lesquels l'Algorithme bâti sur le Principe du Problème Auxiliaire ne converge pas vers la solution du problème posé (par exemple, l'opérateur de rotation de $\pi/2$ pour lequel l'Algorithme de "gradient" diverge). Le but de la régularisation des inéquations variationnelles est de calculer, à partir de l'opérateur monotone original, un opérateur dit régularisé tel que la nouvelle inéquation variationnelle posée avec cet opérateur admet le même ensemble de solutions que l'inéquation variationnelle originale, et qui vérifie certaines propriétés pour lesquelles il existe déjà un théorème de convergence.

On régularise l'inéquation variationnelle (1) où Ψ est un opérateur monotone en définissant l'opérateur régularisé par

$$\Psi_\gamma(u) = \gamma(u - \tilde{v}(u))$$

où γ est un réel strictement positif et $\tilde{v}(u)$ est la solution unique du problème variationnel

$$\tilde{v}(u) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle \Psi(\tilde{v}(u)) + \gamma(\tilde{v}(u) - u), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$$

et on pose le problème régularisé qui est maintenant sans contraintes trouver $u^* \in \mathcal{U}$ tel que

$$\Psi_\gamma(u^*) = 0 \quad (43)$$

Lemme II.40 Si u^* est solution de (1), alors u^* est aussi solution de (43) et réciproquement.

Lemme II.41 Si Ψ est monotone, alors Ψ_γ vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante γ .

La preuve de ces deux lemmes se trouve dans [15].

Au lieu d'appliquer directement à l'opérateur Ψ l'Algorithme II.1, on pourrait l'appliquer à l'opérateur régularisé Ψ_γ qui vérifie l'hypothèse de Dunn.

Algorithme II.10 À l'étape k , connaissant u^k et v^k calculer u^{k+1} comme la solution du problème auxiliaire

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \Psi_\gamma(u^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \quad (44)$$

où $\Psi_\gamma(u^k) = \gamma(u^k - v^{k+1})$, v^{k+1} étant la solution de l'inéquation variationnelle

$$\langle \Psi(v^{k+1}) + \gamma(v^{k+1} - u^k), v - v^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (45)$$

Théorème II.42 Si le problème variationnel (1) admet une solution u^* sachant que Ψ_γ vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante γ , si K' est fortement monotone et Lipschitzienne de constantes respectives b et B , alors il existe une solution unique u^{k+1} au problème auxiliaire (44). Si de plus

$$0 < \varepsilon < 2b/\gamma$$

alors la suite $\{\Psi_\gamma(u^k)\}$ converge fortement vers $\Psi_\gamma(u^*) = 0$, ce qui signifie que $\|u^k - v^{k+1}\|$ converge vers 0 ; la suite $\{u^k\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible de $\{u^k\}$ est solution des problèmes (1) et (43).

L'algorithme que nous proposons par la suite calcule u^{k+1} de la même manière que l'Algorithme II.10 par contre pour le calcul de v^{k+1} , on ne passe plus par la résolution exacte de l'inéquation variationnelle (45) mais seulement par la résolution d'un problème auxiliaire de minimisation.

II.6 Nouvel algorithme de résolution/régularisation

Algorithme II.11 (Parallèle en (u, v)) À l'étape k , connaissant u^k et v^k calculer u^{k+1} et v^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \gamma(u^k - v^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right]$$

$$\min_{v \in \mathcal{V}} \left[\frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle \right]$$

Algorithme II.12 (Séquentiel v avant u) À l'étape k , connaissant v^k et u^k calculer v^{k+1} et u^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires

$$\min_{v \in \mathcal{V}} \left[\frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle \right]$$

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \gamma(u^k - v^{k+1}) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right]$$

L'opérateur global $\Gamma(u, v)$ présent à chaque pas d'itération de l'algorithme ci-dessus s'écrit

$$\Gamma(u, v) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(u, v) \\ \mathcal{B}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u - v) \\ \Psi(v) + \gamma(v - u) \end{pmatrix}$$

Il a la particularité de vérifier les propriétés suivantes

- (i) $\mathcal{A}(u, v)$ est fortement monotone en u uniformément en v .
- (ii) $\mathcal{B}(u, v)$ est fortement monotone en v uniformément en u .
- (iii) Γ vérifie l'hypothèse de Dunn partielle par rapport à sa première composante avec la constante γ , à savoir

$$\forall (u, v), (u', v') \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \quad \langle \mathcal{A}(u, v) - \mathcal{A}(u', v'), u - u' \rangle + \langle \mathcal{B}(u, v) - \mathcal{B}(u', v'), v - v' \rangle \geq \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u, v) - \mathcal{A}(u', v')\|^2$$

- (iv) $\Psi_\gamma(u) = \mathcal{A}(u, \tilde{v}(u))$ où $\tilde{v}(u)$ est la solution unique du problème

$$\langle \mathcal{B}(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante γ .

Les propriétés (i) (ii) et (iii) sont évidentes (Ψ est supposée monotone). La propriété (iv) est une conséquence immédiate de la propriété (iii) (Lemme II.3). Nous démontrons ci-dessous cette dernière propriété.

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}(u, v) - \mathcal{A}(u', v'), u - u' \rangle + \langle \mathcal{B}(u, v) - \mathcal{B}(u', v'), v - v' \rangle \\ &= \gamma \langle (u - v) - (u' - v'), u - u' \rangle + \gamma \langle (v - u) - (v' - u'), v - v' \rangle \\ & \quad + \langle \Psi(v) - \Psi(v'), v - v' \rangle \\ &\geq \gamma \|u - u'\|^2 + \gamma \|v - v'\|^2 - 2\gamma \langle u - u', v - v' \rangle \\ &= \gamma \|(u - u') - (v - v')\|^2 \\ &= \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u, v) - \mathcal{A}(u', v')\|^2 \end{aligned}$$

Dans le chapitre suivant, nous démontrons la convergence de l'Algorithme II.11 dans le cas d'un opérateur Γ non nécessairement issu de la régularisation et qui vérifie les hypothèses (ii) et (iii) ci-dessus.

Chapitre III

Hypothèse de Dunn Partielle et Forte Monotonie au Premier Niveau

III.1 Algorithme parallèle

Dans ce chapitre, nous montrons la convergence de l'Algorithme bâti sur le Principe du Problème Auxiliaire pour un opérateur défini sur le produit de deux espaces et qui vérifie la forte monotonie au premier niveau et l'hypothèse de Dunn partielle par rapport à sa première composante. Le premier paragraphe est consacré au cas de la résolution d'un système composé d'une équation et d'une inéquation variationnelle. Dans le second paragraphe, on s'intéresse au cas où l'algorithme est appliqué à la résolution d'un système de deux inéquations variationnelles.

Nous considérons deux espaces de Hilbert $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, de dimension quelconque (éventuellement infinie) et munis d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Les topologies forte et faible sont des topologies associées respectivement à la norme $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ et au produit scalaire et $\mathcal{U}^*$ et $\mathcal{V}^*$ sont leurs duaux respectifs.

Soient $\mathcal{U}^{ad} \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{V}^{ad} \subset \mathcal{V}$ deux sous-ensembles convexes fermés. Soit Γ une application de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}^* \times \mathcal{V}^*$. L'opérateur $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$) désigne la composition de Γ avec la projection canonique sur $\mathcal{U}^*$ (respectivement sur $\mathcal{V}^*$). Nous posons le problème variationnel suivant : trouver $(u^*, v^*) \in \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{V}^{ad}$ tel que

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}(u^*, v^*), u - u^* \rangle \geq 0 & \forall u \in \mathcal{U}^{ad} \\ \langle \mathcal{B}(u^*, v^*), v - v^* \rangle \geq 0 & \forall v \in \mathcal{V}^{ad} \end{cases} \quad (1)$$

Nous noterons $\tilde{v}(u)$ la solution paramétrée par u de l'inéquation variationnelle suivante : trouver $\tilde{v}(u) \in \mathcal{V}^{ad}$ tel que

$$\langle \mathcal{B}(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{ad}$$

Nous définissons l'opérateur $\Omega(u)$ par

$$\Omega(u) = \mathcal{A}(u, \tilde{v}(u))$$

Remarque III.1 Nous considérons l'inéquation variationnelle en u suivante : trouver $u^* \in \mathcal{U}^{ad}$ tel que

$$\langle \Omega(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad} \quad (2)$$

Soit u^* une solution de (2) et $v^* = \tilde{v}(u^*)$, alors (u^*, v^*) est une solution du problème variationnel (1) (voir Lemme II.5). $\square$

Algorithme III.1 (Parallèle en (u, v)) À l'étape k , connaissant u^k et v^k calculer u^{k+1} et v^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires de minimisation

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} & \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \mathcal{A}(u^k, v^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \\ \min_{v \in \mathcal{V}^{\text{ad}}} & \left[\frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle \right] \end{aligned}$$

Pour la preuve de la convergence de l'Algorithme III.1, nous faisons les hypothèses suivantes il existe des constantes positives telles que, $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$ et $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}^{\text{ad}}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(u_1, v_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2)\| &\leq Y \|v_1 - v_2\| \\ \|\mathcal{B}(u_1, v_1) - \mathcal{B}(u_2, v_2)\| &\leq Z \|u_1 - u_2\| \\ \|\mathcal{B}(u_1, v_1) - \mathcal{B}(u_1, v_2)\| &\leq T \|v_1 - v_2\| \\ \|K'(u_1) - K'(u_2)\| &\leq C \|u_1 - u_2\| \\ \|L'(v_1) - L'(v_2)\| &\leq D \|v_1 - v_2\| \\ \langle \mathcal{B}(u_1, v_1) - \mathcal{B}(u_1, v_2), v_1 - v_2 \rangle &\geq t \|v_1 - v_2\|^2 \\ \langle K'(u_1) - K'(u_2), u_1 - u_2 \rangle &\geq c \|u_1 - u_2\|^2 \\ \langle L'(v_1) - L'(v_2), v_1 - v_2 \rangle &\geq d \|v_1 - v_2\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}(u_1, v_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2), u_1 - u_2 \rangle \\ &+ \langle \mathcal{B}(u_1, v_1) - \mathcal{B}(u_2, v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u_1, v_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2)\|^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Remarque III.2 Dans le cas où l'opérateur global Γ est l'opérateur de l'algorithme de résolution/régularisation simultanées, c'est-à-dire

$$\Gamma(u, v) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(u, v) \\ \mathcal{B}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u - v) \\ \psi(\gamma) + \gamma(v - u) \end{pmatrix}$$

les constantes Y, Z, T et t sont estimées à $Y = \gamma, Z = \gamma, T = A + \gamma$ et $t = \gamma$. $\square$

Remarque III.3 L'hypothèse (3) de Dunn partielle avec la constante γ entraîne la propriété de Dunn de l'opérateur Ω avec la même constante γ [15, Lemme III.10, p. 36]. $\square$

Lemme III.1 Sous les hypothèses ci-dessus,

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \|\tilde{u}(u_1) - \tilde{u}(u_2)\| \leq S \|u_1 - u_2\|$$

où $S = Z/t$. Dans le cas où l'opérateur global Γ est l'opérateur de l'algorithme de résolution/régularisation simultanées. $S = 1$.

Preuve Posons $v_1 = \tilde{v}(u_1)$ et $v_2 = \tilde{v}(u_2)$. Ces éléments vérifient respectivement les deux inéquations variationnelles

$$\langle \mathcal{B}(u_1, v_1), v - v_1 \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad (4)$$

$$\langle \mathcal{B}(u_2, v_2), v - v_2 \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad (5)$$

En additionnant (4) avec $v = v_2$ à (5) avec $v = v_1$, nous obtenons

$$\langle \mathcal{B}(u_1, v_1) - \mathcal{B}(u_2, v_1), v_2 - v_1 \rangle \geq \langle \mathcal{B}(u_2, v_2) - \mathcal{B}(u_2, v_1), v_2 - v_1 \rangle$$

D'une part, nous avons l'inégalité

$$\langle \mathcal{B}(u_2, v_2) - \mathcal{B}(u_2, v_1), v_2 - v_1 \rangle \geq \ell \|v_1 - v_2\|^2$$

d'autre part,

$$\langle \mathcal{B}(u_1, v_1) - \mathcal{B}(u_2, v_1), v_2 - v_1 \rangle \leq Z \|u_1 - u_2\| \|v_2 - v_1\|$$

Par conséquent,

$$\|v_1 - v_2\| \leq \frac{Z}{\ell} \|u_1 - u_2\|$$

■

III.2 Convergence de l'Algorithme III.1 dans le cas particulier où $\mathcal{V}^{\text{ad}} = \mathcal{V}$

Théorème III.2 *Sous les hypothèses du §III.1, à partir de $(u^0, v^0) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{V}^{\text{ad}}$ l'Algorithme III.1 engendre une suite $\{(u^k, v^k)\}$ bien définie. De plus, il existe une fonction f dépendant d'un paramètre α et de ρ telle que, pour tout $\alpha > 0$ et si*

$$0 < \rho < \frac{2\alpha dt}{T^2(1+\alpha)} \quad (6)$$

alors $f(\alpha, \rho) > 0$, et si de plus

$$0 < \varepsilon < f(\alpha, \rho) \quad (7)$$

alors la suite $\{(u^k, v^k)\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible $\bar{u}$ de la suite $\{u^k\}$ est solution de (2).

Remarque III.4 La borne maximale sur ρ croît de façon monotone de 0 à $2dt/T^2$ lorsque α passe de 0 à $+\infty$. Donc, du point de vue de (6), le α optimal est vers $+\infty$. Cependant, ce choix est défavorable à (7) puisque $f(\alpha, \rho)$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$. D'autre part, quand ρ s'approche de sa borne maximale, la borne supérieure de ε tend vers 0. Celle-ci est maximale pour au moins une valeur de ρ dans $]0, 2\alpha dt/T^2(1+\alpha)[$. En appelant $\mathcal{D}_\alpha$ le domaine de convergence défini par (6) et (7), on obtient un domaine de convergence maximal avec $\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}} \mathcal{D}_\alpha$. □

Preuve Nous écrivons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité vérifiées par u^*, v^*

$$u^k \stackrel{\text{def}}{=} \bar{u}(u^k), u^{k+1} \text{ et } v^{k+1}$$

$$\langle \mathcal{A}(u^*, v^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (8)$$

$$\langle \Omega(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (9)$$

$$\mathcal{B}(u^*, v^*) = 0 \quad (10)$$

$$\mathcal{B}(u^k, w^k) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[\langle K'(u^{k+1}) - K'(u^k), u - u^{k+1} \rangle + \langle \mathcal{A}(u^k, v^k), u - u^{k+1} \rangle \right] \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[L'(v^{k+1}) - L'(v^k) \right] + \mathcal{B}(u^k, v^k) = 0 \quad (13)$$

Soit la fonction de Lyapounov Φ définie par $\Phi(u, v) = \Phi_1(u) + \Phi_2(v) + \Phi_3(u, v)$ où

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\varepsilon} [K(u^*) - K(u) - \langle K'(u), u^* - u \rangle] \quad (14)$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{\rho} [L(v^*) - L(v) - \langle L'(v), v^* - v \rangle] \quad (15)$$

$$\Phi_3(u, v) = \frac{\alpha}{\rho} [L(\tilde{v}(u)) - L(v) - \langle L'(\tilde{v}), \tilde{v}(u) - v \rangle] \quad (16)$$

où α est une constante strictement positive.

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(u^{k+1}) - \Phi_1(u^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [K(u^k) - K(u^{k+1}) - \langle K'(u^k), u^k - u^{k+1} \rangle]}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [\langle K'(u^k) - K'(u^{k+1}), u^* - u^{k+1} \rangle]}_{s_2} \end{aligned}$$

La forte monotonie de K' mène à

$$s_1 \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2$$

En utilisant l'inégalité (12) avec $u = u^*$ nous arrivons à

$$s_2 \leq \langle \mathcal{A}(u^k, v^k), u^* - u^{k+1} \rangle$$

et en prenant $u = u^{k+1}$ dans l'inégalité (8), nous arrivons à la relation suivante

$$s_2 \leq \langle \mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*), u^* - u^{k+1} \rangle$$

Comme l'opérateur global vérifie l'hypothèse de Dunn partielle (3), nous obtenons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} s_2 &\leq -\frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|^2 \\ &\quad + \langle \mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*), u^k - u^{k+1} \rangle + \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^*, v^*), v^k - v^* \rangle \end{aligned}$$

Nous arrivons donc à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|^2 \\ &\quad + \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \|u^{k+1} - u^k\| + \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^*, v^*), v^k - v^* \rangle \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\Delta_2)_k^{k+1} &= \Phi_2(v^{k+1}) - \Phi_2(v^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\rho} [L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle]}_{s_3} + \underbrace{\frac{1}{\rho} [\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), v^* - v^{k+1} \rangle]}_{s_4} \end{aligned}$$

La forte monotonie de L' mène à

$$s_3 \leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2$$

En utilisant les égalités (10) et (13), nous arrivons à

$$s_4 = \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^*, v^*), v^* - v^k \rangle + \underbrace{\langle \mathcal{B}(u^k, v^k), v^k - v^{k+1} \rangle}_{s_5}$$

À l'aide de (11), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} s_6 &= \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^k, w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\leq T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| \end{aligned}$$

Nous arrivons donc à l'inégalité suivante

$$\langle \Delta_2 \rangle_i^{k+1} \leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^*, v^*), v^* - v^k \rangle + T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\|$$

Nous aboutissons finalement à

$$\begin{aligned} \langle \Delta_1 \rangle_k^{k+1} + \langle \Delta_2 \rangle_k^{k+1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|^2 \\ &\quad + \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \|u^{k+1} - u^k\| + T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \langle \Delta_3 \rangle_k^{k+1} &= \Phi_3(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi_3(u^k, v^k) \\ &= \frac{\alpha}{\rho} \left[L(u^{k+1}) - L(w^k) + L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^{k+1}), w^{k+1} - v^{k+1} \rangle + \langle L'(v^k), w^k - v^k \rangle \right] \\ &= \frac{\alpha}{\rho} \left[L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle \right] \\ &\quad + \frac{\alpha}{\rho} \left[L(w^{k+1}) - L(w^k) + \langle L'(v^k), w^k - v^{k+1} \rangle - \langle L'(v^{k+1}), w^{k+1} - v^{k+1} \rangle \right] \\ &\leq -\frac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} \left[\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^k - v^{k+1} \rangle \right]}_{s_6} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} \left[L(w^{k+1}) - L(w^k) \right]}_{s_7} + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} \langle L'(v^{k+1}), w^k - v^{k+1} \rangle}_{s_8} \end{aligned}$$

À l'aide des égalités (11) et (13), nous arrivons à

$$\begin{aligned} s_6 &= \alpha \langle \mathcal{B}(u^k, v^k), w^k - v^{k+1} \rangle \\ &= \alpha \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^k, w^k), w^k - v^{k+1} \rangle + \alpha \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^k, w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\leq -\alpha t \|v^k - w^k\|^2 + \alpha T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$s_7 \leq \frac{\alpha}{\rho} \left[\langle L'(w^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \frac{D}{2} \|w^{k+1} - w^k\|^2 \right]$$

Donc

$$s_7 + s_8 \leq \frac{\alpha D}{2\rho} \|w^{k+1} - w^k\|^2 + \frac{\alpha}{\rho} \langle L'(w^k) - L'(v^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \frac{\alpha}{\rho} \langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^{k+1} - w^k \rangle$$

À l'aide du résultat du Lemme III.1, nous arrivons à

$$s_7 + s_8 \leq \frac{\alpha D S^2}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \frac{\alpha D S}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right]$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\Delta_3)_k^{k-1} &\leq -\frac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k-1} - v^k\|^2 - \alpha t \|v^k - w^k\|^2 + \alpha T \|v^k - w^k\| \|v^{k-1} - v^k\| \\ &\quad + \frac{\alpha DS^2}{2\rho} \|u^{k-1} - u^k\|^2 + \frac{\alpha DS}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k-1} - v^k\| \right] \end{aligned}$$

Nous arrivons finalement à

$$\begin{aligned} \Delta_k^{k-1} &= \Phi(u^{k-1}, v^{k-1}) - \Phi(u^k, v^k) \\ &\leq \left(\frac{\alpha DS^2}{2\rho} - \frac{c}{2\varepsilon} \right) \|u^{k-1} - u^k\|^2 - \frac{(1+\alpha)d}{2\rho} \|v^{k-1} - v^k\|^2 - \alpha t \|v^k - w^k\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|^2 + \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \|u^{k-1} - u^k\| \\ &\quad + \frac{\alpha DS}{\rho} \|u^{k-1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k-1} - v^k\| \right] \\ &\quad + (1+\alpha)T \|v^k - w^k\| \|v^{k-1} - v^k\| \\ &= -\frac{1}{2} (\zeta^k)^T \mathcal{M} \zeta^k \end{aligned}$$

où $(\zeta^k)^T = (\|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|, \|v^k - w^k\|, \|v^{k+1} - v^k\|, \|u^{k+1} - u^k\|)$ et où $\mathcal{M}$ est la matrice symétrique suivante

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2\alpha t & -(1+\alpha)T & -\frac{\alpha DS}{\rho} \\ 0 & -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} & -\frac{\alpha DS}{\rho} \\ -1 & -\frac{\alpha DS}{\rho} & -\frac{\alpha DS}{\rho} & \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha DS^2}{\rho} \right) \end{pmatrix}$$

Nous montrons maintenant qu'il est possible de choisir les paramètres ρ et ε de telle sorte que la matrice $\mathcal{M}$ soit définie positive. Cette dernière propriété se traduit par les quatre conditions suivantes

$$\frac{2}{\gamma} > 0 \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{2}{\gamma} & 0 \\ 0 & 2\alpha t \end{array} \right| > 0$$

qui sont évidentes, et

$$d_1(\alpha, \rho) > 0 \quad d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) > 0$$

avec

$$d_1(\alpha, \rho) = \left| \begin{array}{ccc} \frac{2}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha t & -(1+\alpha)T \\ 0 & -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} \end{array} \right| = \frac{2(1+\alpha)P_1(\rho)}{\gamma\rho} \quad (17)$$

où

$$P_1(\rho) = -\rho T^2(1+\alpha) + 2\alpha t d \quad (18)$$

et $d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) = \det(\mathcal{M})$, c'est-à-dire

$$d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) = \frac{2}{\gamma} \begin{vmatrix} 2\alpha t & -(1+\alpha)T & -\frac{\alpha DS}{\rho} \\ -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} & -\frac{\alpha DS}{\rho} \\ -\frac{\alpha DS}{\rho} & -\frac{\alpha DS}{\rho} & \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha DS^2}{\rho}\right) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2\alpha t & -(1+\alpha)T \\ 0 & -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} \\ -1 & -\frac{\alpha DS}{\rho} & -\frac{\alpha DS}{\rho} \end{vmatrix}$$

Le deuxième terme ci-dessus s'avère être égal à $-\gamma d_1(\alpha, \rho)/2$. Quand au premier, il est développé par rapport à la dernière ligne. On obtient alors

$$\begin{aligned} d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) &= \frac{2\alpha DS}{\rho\gamma} \left(\begin{vmatrix} 2\alpha t & -\frac{\alpha DS}{\rho} \\ -(1+\alpha)T & -\frac{\alpha DS}{\rho} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -(1+\alpha)T & -\frac{\alpha DS}{\rho} \\ \frac{(1+\alpha)d}{\rho} & -\frac{\alpha DS}{\rho} \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha DS^2}{\rho} - \frac{\gamma}{2} \right) d_1(\alpha, \rho) \\ &= -\frac{2\alpha^2 D^2 S^2}{\rho^3 \gamma} (2\rho(\alpha t + (1+\alpha)T) + (1+\alpha)d) + \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha DS^2}{\rho} - \frac{\gamma}{2} \right) d_1(\alpha, \rho) \end{aligned} \quad (19)$$

La condition (17) est vérifiée pour ρ tel que

$$0 < \rho < \frac{2\alpha dt}{T^2(1+\alpha)} \quad (20)$$

Pour ρ vérifiant cette dernière condition, la condition (19) peut se traduire par la nouvelle condition sur ε

$$0 < \varepsilon < f(\alpha, \rho) \quad (21)$$

où

$$f(\alpha, \rho) = \frac{2\gamma\rho^3 d_1(\alpha, \rho)}{\gamma\rho^2 (2\alpha DS^2 + \gamma\rho) d_1(\alpha, \rho) + 4\alpha^2 D^2 S^2 (2\rho(\alpha t + (1+\alpha)T) + (1+\alpha)d)}$$

Nous pouvons donc conclure que sous les conditions (20) et (21), la matrice $\mathcal{M}$ est définie positive. Par conséquent, Δ_i^{i+1} est négatif. La suite $\{\Phi(u^k, v^k)\} = \{\Phi_1(u^k) + \Phi_2(v^k) + \alpha\Phi_3(u^k, v^k)\}$ est décroissante.

De (14), (15) et (16), nous déduisons que

$$\begin{aligned} \Phi_1(u^k) &\geq \frac{c}{2\varepsilon} \|u^k - u^*\|^2 \\ \Phi_2(v^k) &\geq \frac{d}{2\rho} \|v^k - v^*\|^2 \\ \Phi_3(u^k, v^k) &\geq \alpha \frac{d}{2\rho} \|v^k - w^k\|^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$\Phi(u^k, v^k) \geq \frac{c}{2\varepsilon} \|u^k - u^*\|^2 + \frac{d}{2\rho} \|v^k - v^*\|^2 + \alpha \frac{d}{2\rho} \|v^k - w^k\|^2$$

La suite $\Phi(u^k, v^k)$ est donc positive décroissante, elle est alors convergente et la différence entre deux termes consécutifs tend nécessairement vers 0. Nous en déduisons donc que la suite $\{\zeta^k\}$ converge fortement vers $(0, 0, 0, 0)^T$. C'est-à-dire que $\|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|$, $\|v^k - u^k\|$, $\|u^{k+1} - u^k\|$ et $\|v^{k+1} - v^k\|$ convergent fortement vers 0. Comme la suite $\{\Phi(u^k, v^k)\}$ est convergente, elle est bornée et nous pouvons affirmer que la suite $\{u^k, v^k\}$ engendrée par l'Algorithme III.1 est bornée. La suite $\{u^k\}$ définie à partir de u^k par $u^k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{u}(u^k)$ est aussi bornée. Soit $\bar{u}$ un point d'accumulation faible de la suite $\{u^k\}$, nous considérons la sous-suite $\{k_i\}$ telle que $\{u^{k_i}\}$ converge faiblement vers $\bar{u}$. Nous montrons maintenant que $\bar{u}$ vérifie l'inéquation variationnelle (9).

D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} \|\Omega(u^{k_i}) - \Omega(u^*)\| &= \|\mathcal{A}(u^{k_i}, v^{k_i}) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \\ &\leq \|\mathcal{A}(u^{k_i}, v^{k_i}) - \mathcal{A}(u^{k_i}, v^*)\| + \|\mathcal{A}(u^{k_i}, v^*) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \\ &\leq \gamma \|u^{k_i} - v^{k_i}\| + \|\mathcal{A}(u^{k_i}, v^*) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \end{aligned}$$

Comme $\|u^k - v^k\|$ et $\|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|$ convergent tous les deux fortement vers 0, il en est de même pour $\|\Omega(u^{k_i}) - \Omega(u^*)\|$.

D'autre part, comme Ω vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante γ , nous pouvons écrire l'inégalité suivante

$$\langle \Omega(\bar{u}) - \Omega(u^{k_i}), \bar{u} - u^{k_i} \rangle \geq \frac{1}{\gamma} \|\Omega(\bar{u}) - \Omega(u^{k_i})\|^2$$

Comme u^{k_i} converge faiblement vers $\bar{u}$ et $\Omega(u^{k_i})$ comme nous venons de le voir, converge fortement vers $\Omega(u^*)$, par passage à la limite quand k_i tend vers l'infini dans la dernière inéquation, nous pouvons déduire l'égalité

$$\Omega(\bar{u}) = \Omega(u^*)$$

Par ailleurs, l'inéquation variationnelle (12) a pour conséquence

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle \mathcal{A}(u^k, v^k), u - u^{k+1} \rangle &\geq \frac{1}{\varepsilon} \langle K'(u^{k+1}) - K'(u^k), u^{k+1} - u \rangle \\ &\geq -\frac{C'}{\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\| \|u - u^{k+1}\| \end{aligned}$$

Par passage à la limite dans la dernière inégalité pour la sous-suite $\{k_i\}$ et du fait que $\mathcal{A}(u^k, v^k)$ converge fortement vers $\mathcal{A}(u^*, v^*) = \Omega(u^*)$ et qui n'est autre que $\Omega(\bar{u})$, nous obtenons

$$\forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle \Omega(\bar{u}), u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad (22)$$

La relation (22) est équivalente à la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du couple $(\bar{u}, \tilde{v}(\bar{u}))$ (cf. Remarque III.1). ■

III.3 Convergence de l'Algorithme III.1 en présence de contraintes de type $\mathcal{V}^{\text{ad}}$

Théorème III.3 *Sous les hypothèses du §III.1, à partir de $(u^0, v^0) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{V}^{\text{ad}}$, l'Algorithme III.1 engendre une suite $\{(u^k, v^k)\}$ bien définie. De plus, il existe une fonction g dépendant d'un paramètre α et de ρ telle que, pour tout $\alpha > 0$ et si*

$$0 < \rho < \frac{2\alpha dt}{T^2(1+\alpha)} \quad (23)$$

alors $g(\alpha, \rho) > 0$, et si de plus

$$0 < \varepsilon < g(\rho, \alpha)$$

alors la suite $\{(u^k, v^k)\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible $\bar{u}$ de la suite $\{u^k\}$ est solution de (2).

Preuve Nous écrivons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité vérifiées par $u^* \quad v^*$
 $w^k \stackrel{\text{def}}{=} \bar{v}(u^k), u^{k+1}$ et v^{k+1}

$$\langle \mathcal{A}(u^*, v^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (24)$$

$$\langle \mathcal{B}(u^*, v^*), v - v^* \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad (25)$$

$$\langle \Omega(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (26)$$

$$\langle \mathcal{B}(u^k, v^k), v - w^k \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[\langle K'(u^{k+1}) - K'(u^k), u - u^{k+1} \rangle \right] + \langle \mathcal{A}(u^k, v^k), u - u^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (28)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\langle L'(v^{k+1}) - L'(v^k), v - v^{k+1} \rangle \right] + \langle \mathcal{B}(u^k, v^k), v - v^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad (29)$$

Soit la fonction de Lyapounov Φ définie par $\Phi(u, v) = \Phi_1(u) + \Phi_2(v) + \Phi_3(u, v) + \Phi_4(u, v)$ où

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\varepsilon} [K(u^*) - K(u) - \langle K'(u), u^* - u \rangle] \quad (30)$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{\rho} [L(v^*) - L(v) - \langle L'(v), v^* - v \rangle] \quad (31)$$

$$\Phi_3(u, v) = \frac{\alpha}{\rho} [L(\bar{v}(u)) - L(v) - \langle L'(v), \bar{v}(u) - v \rangle] \quad (32)$$

$$\Phi_4(u, v) = \langle \mathcal{B}(u, \bar{v}(u)), v - \bar{v}(u) \rangle \quad (33)$$

où α est une constante strictement positive. Cette fonction de Lyapounov n'est pas différente de la précédente (voir §III.2) dans la mesure où $\Phi_4 \equiv 0$ lorsque $\mathcal{V}^{\text{ad}} = \mathcal{V}$. On a

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(u^{k+1}) - \Phi_1(u^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [K(u^k) - K(u^{k+1}) - \langle K'(u^k), u^k - u^{k+1} \rangle]}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [\langle K'(u^k) - K'(u^{k+1}), u^* - u^{k+1} \rangle]}_{s_2} \end{aligned}$$

La forte monotonie de K' mène à

$$s_1 \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2$$

En utilisant l'inégalité (28) avec $u = u^*$ nous arrivons à

$$s_2 \leq \langle \mathcal{A}(u^k, v^k), u^* - u^{k+1} \rangle$$

et en prenant $u = u^{k+1}$ dans l'inégalité (24), nous arrivons à la relation suivante

$$s_2 \leq \langle \mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*), u^* - u^{k+1} \rangle.$$

Comme l'opérateur global vérifie l'hypothèse de Dunn partielle (3), nous obtenons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} s_2 &\leq -\frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|^2 \\ &\quad + \langle \mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*), u^k - u^{k+1} \rangle + \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^*, v^*), v^k - v^* \rangle \end{aligned}$$

Nous arrivons donc finalement à

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|^2 \\ &\quad + \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \|u^{k+1} - u^k\| + \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^*, v^*), v^k - v^* \rangle \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\Delta_2)_k^{k+1} &= \Phi_2(v^{k+1}) - \Phi_2(v^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\rho} [L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle]}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{\rho} [\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), v^* - v^{k+1} \rangle]}_{s_4} \end{aligned}$$

La forte monotonie de L' mène à

$$s_1 \leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2$$

En utilisant les inégalités (25) avec $u = u^k$ et (29) avec $v = v^*$ nous arrivons à

$$\begin{aligned} s_4 &\leq \langle \mathcal{B}(u^k, v^k), u^* - v^{k+1} \rangle \\ &\leq \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^*, v^*), v^* - v^k \rangle + \underbrace{\langle \mathcal{B}(u^k, v^k), v^k - v^{k+1} \rangle}_{s_5} \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire s_5 de la manière suivante

$$\begin{aligned} s_5 &= \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^k, w^k), v^k - v^{k+1} \rangle + \langle \mathcal{B}(u^k, w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\leq T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| + \langle \mathcal{B}(u^k, w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

Nous arrivons donc à l'inégalité

$$\begin{aligned} (\Delta_2)_k^{k+1} &\leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^*, v^*), v^* - v^k \rangle \\ &\quad + T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| + \langle \mathcal{B}(u^k, w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

Nous aboutissons finalement à

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} + (\Delta_2)_k^{k+1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|^2 \\ &\quad + \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \|u^{k+1} - u^k\| + T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| \\ &\quad + \langle \mathcal{B}(u^k, w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi_1(u^k, v^k) \\ &= \frac{\alpha}{\rho} [L(w^{k+1}) - L(w^k) + L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^{k+1}), w^{k+1} - v^{k+1} \rangle + \langle L'(v^k), w^k - v^k \rangle] \\ &= \frac{\alpha}{\rho} [L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle] \\ &\quad + \frac{\alpha}{\rho} [L(v^{k+1}) - L(w^k) + \langle L'(v^k), w^k - v^{k+1} \rangle - \langle L'(v^{k+1}), w^{k+1} - v^{k+1} \rangle] \\ &\leq -\frac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} [\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^k - v^{k+1} \rangle]}_{s_6} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} [L(w^{k+1}) - L(w^k)]}_{s_7} + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} [\langle L'(v^{k+1}), w^k - w^{k+1} \rangle]}_{s_8} \end{aligned}$$

À l'aide des inégalités (27) avec $v = v^{k+1}$ et (29) avec $v = w^k$ nous arrivons à

$$\begin{aligned} s_6 &\leq \alpha \langle \mathcal{B}(u^k, v^k), w^k - v^{k+1} \rangle \\ &\leq \alpha \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^k, w^k), w^k - v^k \rangle + \alpha \langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \mathcal{B}(u^k, w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\leq -\alpha t \|v^k - w^k\|^2 + \alpha T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$s_7 \leq \frac{\alpha}{\rho} \left[\langle L'(w^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \frac{D}{2} \|w^{k+1} - w^k\|^2 \right]$$

Donc,

$$s_7 + s_8 \leq \frac{\alpha D}{2\rho} \|w^{k+1} - w^k\|^2 + \frac{\alpha}{\rho} \langle L'(w^k) - L'(v^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \frac{\alpha}{\rho} \langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^{k+1} - w^k \rangle$$

À l'aide du résultat du Lemme III.1, nous arrivons à

$$s_7 + s_8 \leq \frac{\alpha DS^2}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \frac{\alpha DS}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right]$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\Delta_3)_k^{k+1} &\leq -\frac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \alpha t \|v^k - w^k\|^2 + \alpha T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| \\ &\quad + \frac{\alpha DS^2}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \frac{\alpha DS}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right] \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\Delta_4)_k^{k+1} &= \langle \mathcal{B}(u^{k+1}, w^{k+1}), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle - \langle \mathcal{B}(u^k, w^k), v^k - w^k \rangle \\ &= \langle \mathcal{B}(u^{k+1}, w^{k+1}), v^{k+1} \rangle + \langle \mathcal{B}(u^k, w^k), v^{k+1} - v^k \rangle - \langle \mathcal{B}(u^k, w^k), v^{k+1} - w^k \rangle \\ &= \underbrace{\langle \mathcal{B}(u^{k+1}, w^{k+1}) - \mathcal{B}(u^k, w^k), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle}_{s_9} + \underbrace{\langle \mathcal{B}(u^k, w^k), w^k - w^{k+1} \rangle}_{s_{10}} \\ &\quad + \langle \mathcal{B}(u^k, w^k), v^{k+1} - v^k \rangle \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire s_9 de la manière suivante

$$\begin{aligned} s_9 &= \langle \mathcal{B}(u^{k+1}, w^{k+1}) - \mathcal{B}(u^{k+1}, w^k), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle + \langle \mathcal{B}(u^{k+1}, w^k) - \mathcal{B}(u^k, w^k), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle \\ &= \langle \mathcal{B}(u^{k+1}, w^{k+1}) - \mathcal{B}(u^{k+1}, w^k), v^{k+1} - v^k + v^k - w^k + w^k - w^{k+1} \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{B}(u^{k+1}, w^k) - \mathcal{B}(u^k, w^k), v^{k+1} - v^k + v^k - w^k + w^k - w^{k+1} \rangle \\ &\leq TS \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|v^{k+1} - v^k\| + \|v^k - w^k\| \right] - t \|w^{k+1} - w^k\|^2 \\ &\quad + Z \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|v^{k+1} - v^k\| + \|v^k - w^k\| \right] + S \|u^{k+1} - u^k\| \\ &\leq ZS \|u^{k+1} - u^k\|^2 + (TS + Z) \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|v^{k+1} - v^k\| + \|v^k - w^k\| \right] \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité (27) traduisant l'optimalité de w^k , nous déduisons l'inégalité ci-dessous

$$s_{10} = \langle \mathcal{B}(u^k, w^k), w^k - w^{k+1} \rangle \leq 0$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\Delta_4)_i^{k+1} &\leq ZS\|u^{k+1} - u^k\|^2 + (TS + Z)\|u^{k+1} - u^k\| \left[\|v^{k+1} - v^k\| + \|v^k - w^k\| \right] \\ &\quad + \langle B(u^k, w^k), v^{k+1} - v^k \rangle \end{aligned}$$

Nous arrivons finalement à

$$\begin{aligned} \Delta_k^{k+1} &= \Phi(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi(u^k, v^k) \\ &\leq \left(ZS + \frac{\alpha DS^2}{2\rho} - \frac{c}{2\varepsilon} \right) \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{(1+\alpha)d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \alpha t \|v^k - w^k\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|^2 + \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \|u^{k+1} - u^k\| \\ &\quad + \left(TS + Z + \frac{\alpha DS}{\rho} \right) \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|v^k - w^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right] \\ &\quad + (1+\alpha)T \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| \\ &= -\frac{1}{2}(\zeta^k)^T \mathcal{M}' \zeta^k \end{aligned}$$

où $(\zeta^k)^T = (\|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|, \|v^k - w^k\|, \|v^{k+1} - v^k\|, \|u^{k+1} - u^k\|)$ et où $\mathcal{M}'$ est la matrice symétrique suivante

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2\alpha t & -(1+\alpha)T & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) \\ 0 & -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) \\ -1 & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) & \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha DS^2}{\rho} - 2ZS\right) \end{pmatrix}$$

Nous montrons maintenant qu'il est possible de choisir les paramètres ρ et ε de telle sorte que la matrice $\mathcal{M}'$ soit définie positive. Cette dernière propriété se traduit par les quatre conditions suivantes

$$\frac{2}{\gamma} > 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{2}{\gamma} & 0 \\ 0 & 2\alpha t \end{vmatrix} > 0$$

qui sont évidentes, et

$$d_1(\alpha, \rho) > 0 \quad d_2'(\alpha, \varepsilon, \rho) > 0$$

avec

$$d_1(\alpha, \rho) = \begin{vmatrix} \frac{2}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha t & -(1+\alpha)T \\ 0 & -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} \end{vmatrix} = \frac{2(1+\alpha)P_1(\rho)}{\gamma\rho} \quad (34)$$

où

$$P_1(\rho) = -\rho T^2(1+\alpha) + 2\alpha dt \quad (35)$$

et

$$d_2'(\alpha, \varepsilon, \rho) = \det(\mathcal{M}') \\ = \frac{2}{\gamma} \begin{vmatrix} 2\alpha t & -(1+\alpha)T & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) \\ -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) \\ \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) & \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha DS^2}{\rho} - 2ZS\right) \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2\alpha t & -(1+\alpha)T \\ 0 & -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} \\ -1 & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) \end{vmatrix}$$

Le deuxième terme ci-dessus s'avère être égal à $-\gamma d_1(\alpha, \rho)/2$. Quand au premier, il est développé par rapport à la dernière ligne. On obtient alors

$$d_2'(\alpha, \varepsilon, \rho) = \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\alpha DS}{\rho} + TS + Z \right) \times \\ \left(\begin{vmatrix} 2\alpha t & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) \\ -(1+\alpha)T & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -(1+\alpha)T & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) \\ \frac{(1+\alpha)d}{\rho} & \left(-TS - Z - \frac{\alpha DS}{\rho}\right) \end{vmatrix} \right) \\ + \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha DS^2}{\rho} - 2ZS - \frac{\gamma}{2} \right) d_1(\alpha, \rho) \\ = -\frac{2}{\gamma \rho^3} (\alpha DS + \rho(TS + Z))^2 (2\rho(\alpha t + (1+\alpha)T) + (1+\alpha)d) \\ + \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha DS^2}{\rho} - 2ZS - \frac{\gamma}{2} \right) d_1(\alpha, \rho) \quad (36)$$

La condition (34) est vérifiée pour ρ tel que

$$0 < \rho < \frac{2\alpha dt}{T^2(1+\alpha)} \quad (37)$$

Pour ρ vérifiant cette dernière condition, la condition (36) peut se traduire par la nouvelle condition sur ε

$$0 < \varepsilon < g(\alpha, \rho) \quad (38)$$

où

$$g(\alpha, \rho) = \frac{2\gamma \rho^3 \alpha d_1(\alpha, \rho)}{g_1(\alpha, \rho)}$$

avec

$$g_1(\alpha, \rho) = \gamma \rho^2 [2\alpha DS^2 + \rho(4ZS + \gamma)] d_1(\alpha, \rho) \\ + 4 [\alpha DS + \rho(TS + Z)]^2 [2\rho(\alpha t + (1+\alpha)T) + (1+\alpha)d]$$

Nous pouvons donc conclure que sous les conditions (37) et (38), la matrice $\mathcal{M}$ est définie positive. Par conséquent, Δ_k^{k-1} est négatif. La suite $\{\Phi(u^k, v^k)\} = \{\Phi_1(u^k) + \Phi_2(v^k) + \Phi_3(u^k, v^k)\}$ est décroissante.

De (30), (31) et (32), nous déduisons que

$$\begin{aligned}\Phi_1(u^k) &\geq \frac{c}{2\varepsilon} \|u^k - u^*\|^2 \\ \Phi_2(v^k) &\geq \frac{d}{2\rho} \|v^k - v^*\|^2 \\ \Phi_3(u^k, v^k) &\geq \alpha \frac{d}{2\rho} \|v^k - w^k\|^2\end{aligned}$$

Donc, comme $\Phi_4(u^k, v^k)$ est positive,

$$\Phi(u^k, v^k) \geq \frac{c}{2\varepsilon} \|u^k - u^*\|^2 + \frac{d}{2\rho} \|v^k - v^*\|^2 + \alpha \frac{d}{2\rho} \|v^k - w^k\|^2$$

La suite $\Phi(u^k, v^k)$ est donc positive décroissante, elle est alors convergente et la différence entre deux termes consécutifs tend nécessairement vers 0. Nous en déduisons donc que la suite $\{\zeta^k\}$ converge fortement vers $(0, 0, 0, 0)^T$. C'est-à-dire que $\|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|, \|v^k - w^k\|, \|u^{k-1} - u^k\|$ et $\|v^{k-1} - v^k\|$ convergent fortement vers 0. Comme la suite $\{\Phi(u^k, v^k)\}$ est convergente, elle est bornée et nous pouvons affirmer que la suite $\{u^k, v^k\}$ engendrée par l'Algorithme III.1 est bornée. La suite $\{w^k\}$ définie à partir de u^k par $w^k \stackrel{\text{def}}{=} \bar{v}(u^k)$ est aussi bornée. Soit $\bar{\pi}$ un point d'accumulation faible de la suite $\{u^k\}$, nous considérons la sous-suite $\{k_i\}$ telle que $\{u^{k_i}\}$ converge faiblement vers $\bar{\pi}$. Nous montrons maintenant que $\bar{\pi}$ vérifie l'inéquation variationnelle (26).

D'une part, nous avons

$$\begin{aligned}\|\Omega(u^k) - \Omega(u^*)\| &= \|\mathcal{A}(u^k, w^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \\ &\leq \|\mathcal{A}(u^k, w^k) - \mathcal{A}(u^k, v^k)\| + \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\| \\ &\leq Y \|w^k - v^k\| + \|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|\end{aligned}$$

Comme $\|w^k - v^k\|$ et $\|\mathcal{A}(u^k, v^k) - \mathcal{A}(u^*, v^*)\|$ convergent tous les deux fortement vers 0, il en est de même pour $\|\Omega(u^k) - \Omega(u^*)\|$.

D'autre part, comme Ω vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante γ , nous pouvons écrire l'inégalité suivante

$$\langle \Omega(\bar{\pi}) - \Omega(u^{k_i}), \bar{\pi} - u^{k_i} \rangle \geq \frac{1}{\gamma} \|\Omega(\bar{\pi}) - \Omega(u^{k_i})\|^2$$

Comme u^{k_i} converge faiblement vers $\bar{\pi}$ et $\Omega(u^{k_i})$, comme nous venons de le voir, converge fortement vers $\Omega(u^*)$, par passage à la limite quand k_i tend vers l'infini dans la dernière inéquation, nous pouvons déduire l'égalité

$$\Omega(\bar{\pi}) = \Omega(u^*)$$

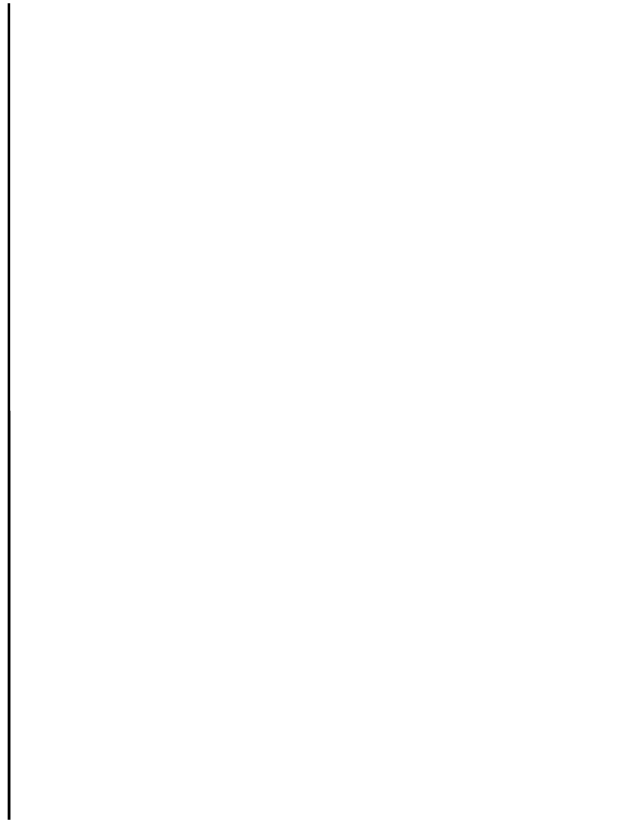
Par ailleurs, l'inéquation variationnelle (28) a pour conséquence

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle \mathcal{A}(u^k, v^k), u - u^{k+1} \rangle &\geq \frac{1}{\varepsilon} \langle K'(u^{k+1}) - K'(u^k), u - u^{k+1} \rangle \\ &\geq -\frac{C}{\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\| \|u - u^{k+1}\|\end{aligned}$$

Par passage à la limite dans la dernière inégalité pour la sous-suite $\{k_i\}$ et du fait que $\mathcal{A}(u^k, v^k)$ converge fortement vers $\mathcal{A}(u^*, v^*) = \Omega(u^*)$ qui n'est autre que $\Omega(\bar{\pi})$, nous obtenons

$$\forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle \Omega(\bar{\pi}), u - \bar{\pi} \rangle \geq 0 \quad (39)$$

La relation (39) est équivalente à la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du couple $(\bar{u}, \bar{v}(\bar{u}))$ (cf. Remarque III.1). ■



Chapitre IV

Algorithme de Résolution/Régularisation Simultanées

Dans ce chapitre, nous montrons la convergence du nouvel algorithme de résolution/régularisation simultanées. Nous donnons le théorème de convergence de la version parallèle dans les deux cas où le problème original est une équation ou une inéquation variationnelle. Nous montrons également la convergence de la version séquentielle de l'algorithme (*v* avant *u*) dans ces deux cas de figure.

Soient Ψ une application d'un espace de Hilbert $\mathcal{U}$ dans son dual $\mathcal{U}^*$ et $\mathcal{U}^{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$. L'opérateur Ψ est supposé monotone. On pose le problème variationnel suivant trouver $u^* \in \mathcal{U}^{ad}$ tel que

$$\langle \Psi(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad} \quad (1)$$

On régularise l'inéquation variationnelle ci-dessus en définissant l'opérateur régularisé par

$$\Psi_\gamma(u) = \gamma(u - \tilde{v}(u))$$

où γ est un réel strictement positif et $\tilde{v}(u)$ est la solution unique du problème variationnel

$$\tilde{v}(u) \in \mathcal{U}^{ad} \quad \langle \Psi(\tilde{v}(u)) + \gamma(\tilde{v}(u) - u), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^{ad}$$

et on pose le problème régularisé qui est maintenant sans contraintes trouver $u^* \in \mathcal{U}$ tel que

$$\Psi_\gamma(u^*) = 0 \quad (2)$$

Nous rappelons l'équivalence entre les problèmes (1) et (2) (voir Lemme II.40). Nous avons aussi le résultat suivant (voir Lemme III.1)

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}^{ad} \quad \|\tilde{v}(u_1) - \tilde{v}(u_2)\| \leq \|u_1 - u_2\| \quad (3)$$

IV.1 Algorithme parallèle

Algorithme IV.1 (Parallèle en (u, v)) À l'étape k , connaissant u^k et v^k calculer u^{k+1} et v^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires de minimisation

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{U}} & \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \gamma(u^k - v^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \\ \min_{v \in \mathcal{U}^{ad}} & \left[\frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle \right] \end{aligned}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes il existe des constantes positives telles que, $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ et $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$

$$\begin{aligned} \|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\| &\leq A\|v_1 - v_2\| \\ \|K'(u_1) - K'(u_2)\| &\leq C\|u_1 - u_2\| \\ \|L'(v_1) - L'(v_2)\| &\leq D\|v_1 - v_2\| \\ \langle K'(u_1) - K'(u_2), u_1 - u_2 \rangle &\geq c\|u_1 - u_2\|^2 \\ \langle L'(v_1) - L'(v_2), v_1 - v_2 \rangle &\geq d\|v_1 - v_2\|^2 \end{aligned}$$

Remarque IV.1 La constante de Lipschitz T introduite au §III.1 est telle que $\forall u \in \mathcal{U}$ et $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$ $\|\Psi(v_1) - \Psi(v_2) + \gamma(v_1 - v_2)\| \leq T\|v_1 - v_2\|$. Elle est estimée à $(A + \gamma)$ et la "copie" de la démonstration du §IV.1.1 mène à des conditions de convergence sur ρ et ε où T est remplacée par cette estimation. Cependant, dans l'exemple où Ψ est l'opérateur de rotation de $\pi/2$, la constante T s'avère intérieure à cette estimation. $\square$

IV.1.1 Convergence de l'Algorithme IV.1 dans le cas particulier où $\mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathcal{U}$

Théorème IV.1 *Sous les hypothèses du §IV.1, à partir de $(u^0, v^0) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, l'Algorithme IV.1 engendre une suite $\{(u^k, v^k)\}$ bien définie. De plus, il existe une fonction f dépendant d'un paramètre α et de ρ telle que, pour tout $\alpha > 0$ et si*

$$0 < \rho < \frac{2\alpha d\gamma}{T^2(1 + \alpha)} \quad (4)$$

alors $f(\alpha, \rho) > 0$, et si de plus

$$0 < \varepsilon < f(\alpha, \rho) \quad (5)$$

alors la suite $\{(v^k, u^k)\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible $\bar{v}$ de la suite $\{v^k\}$ et de la suite $\{u^k\}$ est solution de (1) et de (2).

Pour la preuve de ce théorème, voir le Chapitre III.

IV.1.2 Convergence de l'Algorithme IV.1 en présence de contraintes de type $\mathcal{U}^{\text{ad}}$

Théorème IV.2 *Sous les hypothèses du §IV.1, à partir de $(u^0, v^0) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}^{\text{ad}}$ l'Algorithme IV.1 engendre une suite $\{(u^k, v^k)\}$ bien définie. De plus, il existe une fonction g dépendant d'un paramètre α et de ρ telle que, pour tout $\alpha > 0$ et si*

$$0 < \rho < \frac{2\alpha d\gamma}{T^2(1 + \alpha)} \quad (6)$$

alors $g(\alpha, \rho) > 0$, et si de plus

$$0 < \varepsilon < g(\alpha, \rho) \quad (7)$$

alors la suite $\{(u^k, v^k)\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible $\bar{v}$ de la suite $\{v^k\}$ et de la suite $\{u^k\}$ est solution de (1) et de (2).

Pour la preuve de ce théorème, voir le Chapitre III.

IV.2 Algorithme séquentiel

Algorithme IV.2 (Séquentiel *in vivo*) À l'étape k , connaissant v^k et u^k calculer v^{k+1} et u^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires de minimisation

$$\begin{aligned} \min_{v \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} & \left[\frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle \right] \\ \min_{u \in \mathcal{U}} & \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \gamma(u^k - v^{k+1}) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \end{aligned}$$

Pour la preuve de la convergence de l'Algorithme IV.2, nous faisons les hypothèses suivantes il existe des constantes positives telles que, $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ et $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$

$$\begin{aligned} \|\Psi(v_1) - \Psi(v_2)\| &\leq A\|v_1 - v_2\| \\ \|K'(u_1) - K'(u_2)\| &\leq C\|u_1 - u_2\| \\ \|L'(v_1) - L'(v_2)\| &\leq D\|v_1 - v_2\| \\ \langle K'(u_1) - K'(u_2), u_1 - u_2 \rangle &\geq c\|u_1 - u_2\|^2 \\ \langle L'(v_1) - L'(v_2), v_1 - v_2 \rangle &\geq d\|v_1 - v_2\|^2 \end{aligned}$$

IV.2.1 Convergence de l'Algorithme IV.2 dans le cas particulier où $\mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathcal{U}$

Théorème IV.3 Sous les hypothèses du §IV.2, à partir de $(u^0, v^0) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, l'Algorithme IV.2 engendre une suite $\{(u^k, v^k)\}$ bien définie. De plus, il existe une fonction h dépendant d'un paramètre α et de ρ telle que, pour tout $\alpha > 0$ et si

$$0 < \rho < \min \left(\frac{d}{\gamma}, \frac{2\alpha(1+\alpha)\gamma d}{(1+\alpha)^2(A+\gamma)^2 - \alpha\gamma^2} \right) \quad (8)$$

alors $h(\alpha, \rho) > 0$, et si de plus

$$0 < \varepsilon < h(\alpha, \rho) \quad (9)$$

alors la suite $\{(u^k, v^k)\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible $\bar{u}$ de la suite $\{u^k\}$ et de la suite $\{v^k\}$ est solution de (1) et de (2).

Preuve Nous écrivons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité vérifiées par u^* $u^k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{v}(u^k)$, u^{k+1} et v^{k+1}

$$\tilde{v}(u^*) = u^* \quad (10)$$

$$\Psi(u^*) = 0 \quad (11)$$

$$\Psi(u^k) + \gamma(u^k - u^k) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(K'(u^{k+1}) - K'(u^k) \right) + \gamma(u^k - v^{k+1}) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[L'(v^{k+1}) - L'(v^k) \right] + \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) = 0 \quad (14)$$

Soit la fonction de Lyapounov Φ définie par $\Phi(u, v) = \Phi_1(u) + \Phi_2(v) + \Phi_3(u, v)$ où

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\varepsilon} [K(u^*) - K(u) - \langle K'(u), u^* - u \rangle] \quad (15)$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{\rho} [L(u^*) - L(v) - \langle L'(v), u^* - v \rangle] \quad (16)$$

$$\Phi_3(v) = -\frac{\gamma}{2} \|v - u^*\|^2 \quad (17)$$

$$\Phi_4(u, v) = \frac{\alpha}{\rho} [L(\tilde{v}(u)) - L(v) - \langle L'(v), \tilde{v}(u) - v \rangle] \quad (18)$$

où α est une constante strictement positive.

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(u^{k+1}) - \Phi_1(u^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [K(u^k) - K(u^{k+1}) - \langle K'(u^k), u^k - u^{k+1} \rangle]}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [\langle K'(u^k) - K'(u^{k+1}), u^* - u^{k+1} \rangle]}_{s_2} \end{aligned}$$

La forte monotonie de K' mène à

$$s_1 \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2$$

En utilisant l'égalité (13), nous arrivons à

$$s_2 = \gamma \langle u^k - u^{k+1}, u^* - u^{k+1} \rangle$$

Nous arrivons donc à l'inégalité suivante

$$(\Delta_1)_k^{k+1} \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^* - u^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - v^{k+1}, u^* - u^{k+1} \rangle$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\Delta_2)_k^{k+1} &= \Phi_2(v^{k+1}) - \Phi_2(v^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\rho} [L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle]}_{s_3} + \underbrace{\frac{1}{\rho} [\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), u^* - v^{k+1} \rangle]}_{s_4} \end{aligned}$$

La forte monotonie de L' mène à

$$s_3 \leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2$$

En utilisant les égalités (11) et (14), nous arrivons à

$$s_4 = \underbrace{\langle \Psi(v^k) - \Psi(u^*), u^* - v^k \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle \Psi(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle}_{s_5} + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^{k+1} \rangle$$

$$\begin{aligned} s_5 &= \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k) - \gamma(w^k - u^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &= \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle u^k - v^k, v^k - v^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

Nous arrivons donc à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} (\Delta_2)_k^{k+1} &\leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^k \rangle \\ &\quad + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

Nous aboutissons finalement à

$$\begin{aligned}
 (\Delta_1)_k^{k-1} + (\Delta_2)_k^{k-1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k-1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k-1} - v^k\|^2 \\
 &\quad + \gamma \langle u^k - v^k, u^* - u^{k-1} - u^* + v^k \rangle + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k-1} \rangle \\
 &\quad + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k-1} \rangle + \gamma \langle v^k - v^{k-1}, u^* - u^{k-1} \rangle \\
 &= -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k-1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k-1} - v^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 \\
 &\quad + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k-1} \rangle + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k-1} \rangle \\
 &\quad + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k-1} \rangle + \gamma \langle v^k - v^{k-1}, u^* - u^{k-1} \rangle
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 (\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(v^{k+1}) - \Phi_1(v^k) \\
 &= -\frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - u^*\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|v^k - u^*\|^2 \\
 &= \frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^* - v^{k+1} \rangle
 \end{aligned}$$

Nous arrivons maintenant à

$$\begin{aligned}
 (\Delta_1)_k^{k-1} + (\Delta_2)_k^{k-1} + (\Delta_1)_k^{k+1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k-1} \rangle \\
 &\quad + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k-1} \rangle + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k-1} \rangle + \frac{\gamma}{2} \|u^{k+1} - v^k\|^2 \\
 &\quad + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^* - v^{k+1} - u^* + v^{k-1} \rangle \\
 &= -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k-1} \rangle \\
 &\quad + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k-1} \rangle + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k-1} \rangle + \frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 \\
 &\quad + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, v^k - v^{k-1} - v^k + u^k - u^k + u^{k-1} \rangle \\
 &= -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \left(\frac{d}{2\rho} + \frac{\gamma}{2} \right) \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k-1} \rangle \\
 &\quad + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k-1} \rangle + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k-1} \rangle \\
 &\quad + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^{k+1} - u^k \rangle + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^k - v^k \rangle
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 (\Delta_3)_k^{k-1} &= \Phi_3(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi_3(u^k, v^k) \\
 &= \frac{\alpha}{\rho} \left[L(w^{k+1}) - L(w^k) + L(v^k) - L(v^{k-1}) - \langle L'(v^{k+1}), w^{k+1} - v^{k-1} \rangle + \langle L'(v^k), w^k - v^k \rangle \right] \\
 &= \frac{\alpha}{\rho} \left[L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle \right] \\
 &\quad + \frac{\alpha}{\rho} \left[L(w^{k-1}) - L(w^k) + \langle L'(v^k), w^k - v^{k+1} \rangle - \langle L'(v^{k-1}), w^{k-1} - v^{k-1} \rangle \right] \\
 &\leq -\frac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} \left[\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^k - v^{k+1} \rangle \right]}_{\leq 0} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} \left[L(w^{k-1}) - L(w^k) \right]}_{\leq 0} + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} \left[\langle L'(v^{k+1}), w^k - w^{k+1} \rangle \right]}_{\leq 0}
 \end{aligned}$$

À l'aide des égalités (12) et (14), nous arrivons à

$$\begin{aligned}
 s_6 &= \alpha \langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k), w^k - v^{k+1} \rangle \\
 &= \alpha \langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \Psi(w^k) - \gamma(w^k - u^k), w^k - v^{k+1} \rangle \\
 &= \alpha \underbrace{\langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), w^k - v^k \rangle}_{<0} + \alpha \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\quad - \alpha \gamma \|v^k - w^k\|^2 + \alpha \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$s_7 \leq \frac{\alpha}{\rho} \left[\langle L'(w^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \frac{D}{2} \|w^{k+1} - w^k\|^2 \right]$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 s_7 + s_8 &\leq \frac{\alpha D}{2\rho} \|w^{k+1} - w^k\|^2 + \frac{\alpha}{\rho} \langle L'(w^k) - L'(v^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \frac{\alpha}{\rho} \langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^{k+1} - w^k \rangle \\
 &\leq \frac{\alpha D}{2\rho} \|w^{k+1} - w^k\|^2 + \frac{\alpha D}{\rho} \|w^{k+1} - w^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right]
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 (\Delta_4)^{k+1} &\leq -\frac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \alpha \gamma \|v^k - w^k\|^2 + \alpha \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \alpha \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \frac{\alpha D}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2 \\
 &\quad + \frac{\alpha D}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right]
 \end{aligned}$$

Nous arrivons finalement à

$$\begin{aligned}
 \Delta_k^{k+1} &= \Phi(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi(u^k, v^k) \\
 &\leq \left(\frac{\alpha D}{2\rho} - \frac{c}{2\varepsilon} \right) \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \left(\frac{(1+\alpha)d}{2\rho} + \frac{\gamma}{2} \right) \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \alpha \gamma \|v^k - w^k\|^2 \\
 &\quad - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle + (1+\alpha) \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^{k+1} - u^k \rangle + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^k - v^k \rangle \\
 &\quad + (1+\alpha) \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \frac{\alpha D}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right] \\
 &\leq \left(\frac{\alpha D}{2\rho} - \frac{c}{2\varepsilon} \right) \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \left(\frac{(1+\alpha)d}{2\rho} + \frac{\gamma}{2} \right) \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \alpha \gamma \|v^k - w^k\|^2 \\
 &\quad - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \|u^k - v^k\| \|u^{k+1} - u^k\| \\
 &\quad + (1+\alpha) \langle A + \gamma \rangle \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| + \gamma \|v^{k+1} - v^k\| \|u^k - v^k\| \\
 &\quad + \frac{\alpha D}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \|w^k - v^k\| + \left(\frac{\alpha D}{\rho} + \gamma \right) \|u^{k+1} - u^k\| \|v^{k+1} - v^k\| \\
 &= -\frac{1}{2} (\zeta^k)^T \mathcal{M} \zeta^k
 \end{aligned}$$

où $(\zeta^k)^T = (\|u^k - v^k\|, \|v^k - w^k\|, \|v^{k+1} - v^k\|, \|u^{k+1} - u^k\|)$ et où $\mathcal{M}$ est la matrice symétrique

suivante

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & -\gamma & -\gamma \\ 0 & 2\alpha\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\frac{\alpha D}{\rho} \\ -\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma & -\frac{\alpha D}{\rho} - \gamma \\ -\gamma & -\frac{\alpha D}{\rho} & -\frac{\alpha D}{\rho} - \gamma & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{\alpha D}{\rho} \end{pmatrix}$$

Nous montrons maintenant qu'il est possible de choisir les paramètres ρ et ε de telle sorte que la matrice $\mathcal{M}$ soit définie positive. Cette dernière propriété se traduit par les quatre conditions suivantes

$$2\gamma > 0 \quad \cdot \quad \begin{vmatrix} 2\gamma & 0 \\ 0 & 2\alpha\gamma \end{vmatrix} > 0$$

qui sont évidentes, et

$$d_1(\alpha, \rho) > 0 \quad (19)$$

$$d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) > 0 \quad (20)$$

avec

$$d_1(\alpha, \rho) = \begin{vmatrix} 2\gamma & 0 & -\gamma \\ 0 & 2\alpha\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) \\ -\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma \end{vmatrix} = \frac{2\gamma P_1(\rho)}{\rho} \quad (21)$$

où

$$P_1(\rho) = -\rho((1+\alpha)^2(A+\gamma)^2 - \alpha\gamma^2) + 2\alpha(1+\alpha)\gamma d \quad (22)$$

et

$$d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) = \det(\mathcal{M})$$

$$\begin{aligned} &= \gamma \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -\gamma & -\gamma \\ 2\alpha\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\frac{\alpha D}{\rho} \\ -(1+\alpha)(A+\gamma) & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma & -\frac{\alpha D}{\rho} - \gamma \end{vmatrix}}_{d_{21}} \\ &\quad - \frac{\alpha D}{\rho} \underbrace{\begin{vmatrix} 2\gamma & -\gamma & -\gamma \\ 0 & -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\frac{\alpha D}{\rho} \\ -\gamma & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma & -\frac{\alpha D}{\rho} - \gamma \end{vmatrix}}_{d_{22}} \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\alpha D}{\rho} + \gamma \right) \underbrace{\begin{vmatrix} 2\gamma & 0 & -\gamma \\ 0 & 2\alpha\gamma & -\frac{\alpha D}{\rho} \\ -\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\frac{\alpha D}{\rho} - \gamma \end{vmatrix}}_{d_{13}} + \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha D}{\rho} \right) d_1(\alpha, \rho)$$

On a

$$\begin{aligned} d_{21} &= \gamma^2 \begin{vmatrix} 2\alpha\gamma & -\frac{\alpha D}{\rho} \\ -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\frac{\alpha D}{\rho} - \gamma \end{vmatrix} - \gamma^2 \begin{vmatrix} 2\alpha\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) \\ -(1+\alpha)(A+\gamma) & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma \end{vmatrix} \\ &= \gamma^2 \left(-2\alpha\gamma \left(\frac{(1+\alpha)d + \alpha D}{\rho} + 2\gamma \right) - (1+\alpha)(A+\gamma) \left(\frac{\alpha D}{\rho} - (1+\alpha)(A+\gamma) \right) \right) \\ &= \gamma^2 \underbrace{\left(-\frac{2\alpha(1+\alpha)\gamma d}{\rho} + (1+\alpha)^2(A+\gamma)^2 - \alpha\gamma^2 \right)}_{\frac{2}{3}d_1(\alpha, \rho)} \\ &\quad - \gamma^2 \left(\frac{2\alpha^2\gamma D}{\rho} + 3\alpha\gamma^2 + (1+\alpha)(A+\gamma)\frac{\alpha D}{\rho} \right) \\ &\leq 0 \\ d_{22} &= -\frac{2\alpha\gamma D}{\rho} \left((1+\alpha)(A+\gamma) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + \gamma \right) + \frac{\alpha D}{\rho} \left(\frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma \right) \right) \\ &\quad + \frac{\alpha^2\gamma^2 D^2}{\rho^2} - \frac{\alpha\gamma^2 D(1+\alpha)(A+\gamma)}{\rho} \\ &= -\frac{\alpha\gamma D}{\rho} \left((1+\alpha)(A+\gamma) \left(\frac{2\alpha D}{\rho} + 3\gamma \right) + \frac{\alpha D}{\rho} \left(\frac{2(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma \right) \right) \\ &\leq 0 \\ d_{23} &= -2\alpha\gamma^2 \left(\frac{\alpha D}{\rho} + \gamma \right) \left(\frac{2\alpha D}{\rho} + 3\gamma \right) - \frac{2\alpha\gamma D(1+\alpha)(A+\gamma)}{\rho} \left(\frac{\alpha D}{\rho} + \gamma \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) &= \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha D}{\rho} - \frac{\gamma}{2} \right) d_1(\alpha, \rho) - \frac{1}{\rho^3} [9\alpha\gamma^4\rho^3 + 6\alpha\gamma^2 D\rho^2((1+\alpha)(A+\gamma) + 2\alpha\gamma) \\ &\quad + \alpha\gamma D^2\rho(4\alpha(1+\alpha)(A+\gamma) + 4\alpha^2\gamma + \alpha\gamma) + 2\alpha^2(1+\alpha)\gamma D^2d] \\ &= \frac{1}{\varepsilon\rho^3} (c\rho^3 d_1(\alpha, \rho) - \varepsilon P(\rho)) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} P(\rho) &= \rho^3 \left[\frac{\gamma}{2} d_1(\alpha, \rho) + 9\alpha\gamma^4 \right] + \alpha D\rho^2 [d_1(\alpha, \rho) + 6\gamma^2(1+\alpha)(A+\gamma) + 12\alpha\gamma^3] \\ &\quad + \alpha\gamma D^2\rho [4\alpha(1+\alpha)(A+\gamma) + 4\alpha^2\gamma + \alpha\gamma] + 2\alpha^2(1+\alpha)\gamma D^2d \end{aligned} \quad (23)$$

La condition (19) sur ρ est vérifiée si

$$\rho < \frac{2\alpha(1+\alpha)\gamma d}{(1+\alpha)^2(A+\gamma)^2 - \alpha\gamma^2} \quad (24)$$

La condition (20) liant ρ et ε est vérifiée si

$$\varepsilon < h(\alpha, \rho) = \frac{c\rho^3 d_1(\alpha, \rho)}{P(\rho)} \quad (25)$$

où $d_1(\alpha, \rho)$ est défini par (21) et $P(\rho)$ par (23). Nous pouvons donc conclure que sous les conditions (24) et (25), la matrice $\mathcal{M}$ est définie positive. Par conséquent, Δ_k^{k-1} est négatif. La suite $\{\Phi(u^k, v^k)\} = \{\Phi_1(u^k) + \Phi_2(v^k) + \Phi_3(v^k) + \Phi_4(u^k, v^k)\}$ est décroissante.

De (15), (16) et (18), nous déduisons que

$$\begin{aligned} \Phi_1(u^k) &\geq \frac{c}{2\varepsilon} \|u^k - u^*\|^2 \\ \Phi_2(v^k) + \Phi_3(v^k) &\geq \left(\frac{d}{2\rho} - \frac{\gamma}{2} \right) \|v^k - v^*\|^2 \\ \Phi_4(u^k, v^k) &\geq \frac{c\rho d}{2\rho} \|v^k - v^k\|^2 \end{aligned}$$

Sous les conditions (8) et (9), la suite $\{\Phi(u^k, v^k)\}$ est décroissante. Comme elle est positive, elle est alors convergente et la différence entre deux termes consécutifs tend nécessairement vers 0. Nous en déduisons donc que la suite $\{c^k\}$ converge fortement vers $(0, 0, 0, 0)^T$. C'est-à-dire que $\|u^k - v^k\|$, $\|v^k - w^k\|$, $\|u^{k+1} - u^k\|$ et $\|v^{k+1} - v^k\|$ convergent fortement vers 0. Comme la suite $\{\Phi(u^k, v^k)\}$ est convergente, elle est bornée et nous pouvons affirmer que la suite $\{u^k, v^k\}$ engendrée par l'Algorithme IV.2 est bornée. La suite $\{w^k\}$ définie à partir de u^k par $w^k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{w}(u^k)$ est aussi bornée. Soit $\bar{u}$ un point d'accumulation faible de la suite $\{u^k\}$, nous considérons la sous-suite $\{k_i\}$ telle que $\{u^{k_i}\}$ converge faiblement vers $\bar{u}$. Les suites $\{v^{k_i}\}$ et $\{w^{k_i}\}$ convergent également faiblement vers $\bar{u}$. En passant à la limite dans (12) et (14), nous avons d'une part que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Psi(w^k) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Psi(v^k) = 0$. D'autre part, avec la définition de $w = \tilde{w}(u)$ qui vérifie $\Psi(w) + \gamma(w - u) = 0$, il est facile de montrer que

$$\forall w_1, w_2 \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \gamma(\Psi(w_1) - \Psi(w_2), u_1 - u_2) \geq \|\Psi(w_1) - \Psi(w_2)\|^2$$

En posant dans cette dernière inégalité $w_1 = u^{k_i}$ et $w_2 = \tilde{w}(\bar{u}) = \bar{u}$, et par passage à la limite quand k_i tend vers $+\infty$, comme u^{k_i} converge faiblement vers $\bar{u}$ et $\Psi(u^{k_i})$ converge fortement vers 0, nous obtenons finalement $\Psi(\bar{u}) = 0$, ce qui montre l'optimalité de $\bar{u}$. ■

IV.2.2 Convergence de l'Algorithme IV.2 en présence de contraintes de type $\mathcal{U}^{\text{ad}}$

Théorème IV.4 *Sous les hypothèses du §IV.2, à partir de $(u^0, v^0) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}^{\text{ad}}$ l'Algorithme IV.2 engendre une suite $\{(u^k, v^k)\}$ bien définie. De plus, il existe une fonction l dépendant d'un paramètre α et de ρ telle que, pour tout $\alpha > 0$ et si*

$$0 < \rho < \min \left(\frac{d}{\gamma}, \frac{2\alpha(1 + \alpha)\gamma d}{(1 + \alpha)^2(A + \gamma)^2 - \alpha\gamma^2} \right) \quad (26)$$

alors $l(\alpha, \rho) > 0$, et si de plus

$$0 < \varepsilon < l(\alpha, \rho) \quad (27)$$

alors la suite $\{(u^k, v^k)\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible $\bar{u}$ de la suite $\{u^k\}$ et de la suite $\{v^k\}$ est solution de (1) et de (2).

Preuve Nous écrivons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité vérifiées par u^*
 $n^k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{v}(u^k), n^{k+1} \text{ et } v^{k+1}$

$$\tilde{v}(u^*) = u^* \quad (28)$$

$$\langle \Psi(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (29)$$

$$\langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v - v^k \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad (30)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(K'(u^{k+1}) - K'(u^k) \right) + \gamma(u^k - v^{k+1}) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\langle L'(v^{k+1}) - L'(v^k), v - v^{k+1} \rangle \right] + \langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k), v - v^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad (32)$$

Soit la fonction de Lyapounov Φ définie par $\Phi(u, v) = \Phi_1(u) + \Phi_2(v) + \Phi_3(v) + \Phi_4(u, v) + \Phi_5(u, v)$
 où

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\varepsilon} \left[K(u^*) - K(u) - \langle K'(u), u^* - u \rangle \right] \quad (33)$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{\rho} \left[L(u^*) - L(v) - \langle L'(v), u^* - v \rangle \right] \quad (34)$$

$$\Phi_3(v) = -\frac{\gamma}{2} \|v - u^*\|^2 \quad (35)$$

$$\Phi_4(u, v) = \frac{\alpha}{\rho} \left[L(\tilde{v}(u)) - L(v) - \langle L'(v), \tilde{v}(u) - v \rangle \right] \quad (36)$$

$$\Phi_5(u, v) = \langle \Psi(\tilde{v}(u)) + \gamma(\tilde{v}(u) - u), v - \tilde{v}(u) \rangle \quad (37)$$

où α est une constante strictement positive.

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(u^{k+1}) - \Phi_1(u^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \left[K(u^k) - K(u^{k+1}) - \langle K'(u^k), u^k - u^{k+1} \rangle \right]}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \left[\langle K'(u^k) - K'(u^{k+1}), u^* - u^{k+1} \rangle \right]}_{s_2} \end{aligned}$$

La forte monotonie de K' mène à

$$s_1 \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2$$

En utilisant l'égalité (31), nous arrivons à

$$s_2 = \gamma \langle u^k - u^{k+1}, u^* - u^{k+1} \rangle$$

Nous arrivons donc à l'inégalité suivante

$$(\Delta_1)_k^{k+1} \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^* - u^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - v^{k+1}, u^* - u^{k+1} \rangle$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\Delta_2)_k^{k+1} &= \Phi_2(v^{k+1}) - \Phi_2(v^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\rho} \left[L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle \right]}_{s_3} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \left[\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), u^* - v^{k+1} \rangle \right]}_{s_4} \end{aligned}$$

La forte monotonie de L' mène à

$$s_3 \leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2$$

En utilisant les inégalités (32) avec $v = u^*$ et (29) avec $u = v^k$ nous arrivons à

$$\begin{aligned}
 s_4 &\leq \langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k), u^* - v^{k+1} \rangle \\
 &\leq \underbrace{\langle \Psi(v^k) - \Psi(u^*), u^* - v^k \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle \Psi(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle}_{\geq 0} + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^{k+1} \rangle \\
 s_5 &= \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k) - \gamma(w^k - u^k), v^k - v^{k+1} \rangle + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &= \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle u^k - v^k, v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^k - v^{k+1} \rangle
 \end{aligned}$$

Nous arrivons donc à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
 (\Delta_2)_k^{k+1} &\leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^k \rangle + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle w^k - u^k, v^k - v^{k+1} \rangle
 \end{aligned}$$

Nous aboutissons finalement à

$$\begin{aligned}
 (\Delta_1)_k^{k+1} + (\Delta_2)_k^{k+1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, v^k - u^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \gamma \langle v^k - v^{k+1}, u^* - v^{k+1} \rangle + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &= -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 \\
 &\quad + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - v^{k+1}, u^* - u^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^k - v^{k+1} \rangle.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 (\Delta_3)_k^{k+1} &= \Phi_3(u^{k+1}) - \Phi_3(v^k) \\
 &= -\frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - u^*\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|v^k - u^*\|^2 \\
 &= \frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^* - v^{k+1} \rangle
 \end{aligned}$$

Nous arrivons maintenant à

$$\begin{aligned}
 &(\Delta_1)_k^{k+1} + (\Delta_2)_k^{k+1} + (\Delta_3)_k^{k+1} \\
 &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 \\
 &\quad + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^{k+1} - v^{k+1} \rangle + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &= -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 \\
 &\quad + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, v^k - v^{k+1} - v^k + u^k - u^k + u^{k+1} \rangle + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &= -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \left(\frac{d}{2\rho} + \frac{\gamma}{2} \right) \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^{k+1} - u^k \rangle \\
 &\quad + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^k - v^k \rangle + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^k - v^{k+1} \rangle
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 (\Delta_4)_k^{k+1} &= \Phi_4(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi_4(u^k, v^k) \\
 &= \frac{\alpha}{\rho} \left[L(w^{k+1}) - L(w^k) + L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^{k+1}), w^{k+1} - v^{k+1} \rangle + \langle L'(v^k), w^k - v^k \rangle \right] \\
 &= \frac{\alpha}{\rho} \left[L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle \right] \\
 &\quad + \frac{\alpha}{\rho} \left[L(w^{k+1}) - L(w^k) + \langle L'(v^k), w^k - v^{k+1} \rangle - \langle L'(v^{k+1}), w^{k+1} - v^{k+1} \rangle \right] \\
 &\leq -\frac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} \left[\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^k - v^{k+1} \rangle \right]}_{s_6} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} \left[L(w^{k+1}) - L(w^k) \right]}_{s_7} + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho} \left[\langle L'(v^{k+1}), w^k - w^{k+1} \rangle \right]}_{s_8}
 \end{aligned}$$

À l'aide des inégalités (30) avec $\nu = v^{k+1}$ et (32) avec $\nu = w^k$ nous arrivons à

$$\begin{aligned}
 s_6 &\leq \alpha \langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k), w^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\leq \alpha \langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \Psi(w^k) - \gamma(w^k - u^k), w^k - v^{k+1} \rangle \\
 &= \underbrace{\alpha \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), w^k - v^k \rangle}_{\leq 0} + \alpha \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle - \alpha \gamma \|v^k - w^k\|^2 \\
 &\quad + \alpha \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle
 \end{aligned}$$

Donc,

$$s_6 \leq \alpha \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle - \alpha \gamma \|v^k - w^k\|^2 + \alpha \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle$$

Par ailleurs,

$$s_7 \leq \frac{\alpha}{\rho} \left[\langle L'(w^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \frac{D}{2} \|w^{k+1} - w^k\|^2 \right]$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 s_7 + s_8 &\leq \frac{\alpha D}{2\rho} \|w^{k+1} - w^k\|^2 + \frac{\alpha}{\rho} \langle L'(w^k) - L'(v^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \frac{\alpha}{\rho} \langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^{k+1} - w^k \rangle \\
 &\leq \frac{\alpha D}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \frac{\alpha D}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right]
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 (\Delta_4)_k^{k+1} &\leq -\frac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \alpha \gamma \|v^k - w^k\|^2 + \alpha \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\quad + \alpha \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \frac{\alpha D}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2 \\
 &\quad + \frac{\alpha D}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right]
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$(\Delta_5)_k^{k+1} = \Phi_5(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi_5(u^k, v^k)$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \Psi(w^{k+1}) + \gamma(w^{k+1} - u^{k+1}), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle - \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^k - w^k \rangle \\
&= \langle \Psi(w^{k+1}) - \Psi(w^k), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle + \gamma \langle w^{k+1} - w^k, v^{k+1} - w^{k+1} \rangle \\
&\quad + \gamma \langle u^k - u^{k+1}, v^{k+1} - w^{k+1} \rangle + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^{k+1} - v^k \rangle \\
&\quad + \underbrace{\langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), w^k - w^{k+1} \rangle}_{<0} \\
&\leq \langle \Psi(w^{k+1}) - \Psi(w^k), v^{k+1} - v^k \rangle + \langle \Psi(w^{k+1}) - \Psi(w^k), v^k - w^k \rangle \\
&\quad + \underbrace{\langle \Psi(w^{k+1}) - \Psi(w^k), w^k - w^{k+1} \rangle}_{<0} \\
&\quad + \gamma \langle w^{k+1} - w^k, v^{k+1} - v^k \rangle + \gamma \langle w^{k+1} - w^k, v^k - w^k \rangle - \gamma \|w^{k+1} - w^k\|^2 \\
&\quad + \gamma \langle u^k - u^{k+1}, v^{k+1} - v^k \rangle + \gamma \langle u^k - u^{k+1}, v^k - w^k \rangle \\
&\quad + \gamma \langle u^k - u^{k+1}, w^k - w^{k+1} \rangle + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^{k+1} - v^k \rangle \\
&\leq \langle \Psi(w^{k+1}) - \Psi(w^k), v^{k+1} - v^k \rangle + \langle \Psi(w^{k+1}) - \Psi(w^k), v^k - w^k \rangle \\
&\quad + \gamma \langle w^{k+1} - w^k, v^{k+1} - v^k \rangle + \gamma \langle w^{k+1} - w^k, v^k - w^k \rangle \\
&\quad + \gamma \langle u^k - u^{k+1}, v^{k+1} - v^k \rangle + \gamma \langle u^k - u^{k+1}, v^k - w^k \rangle \\
&\quad + \gamma \langle u^k - u^{k+1}, w^k - w^{k+1} \rangle + \langle \Psi(w^k) + \gamma(w^k - u^k), v^{k+1} - v^k \rangle
\end{aligned}$$

Nous arrivons finalement à

$$\begin{aligned}
\Delta_k^{k+1} &= \Phi(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi(u^k, v^k) \\
&\leq \left(\frac{\alpha D}{2\rho} - \frac{c}{2\varepsilon} \right) \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \left(\frac{(1+\alpha)d}{2\rho} + \frac{\gamma}{2} \right) \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \alpha\gamma \|v^k - w^k\|^2 \\
&\quad - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle + (1+\alpha) \langle \Psi(v^k) - \Psi(w^k), v^k - v^{k+1} \rangle \\
&\quad + \gamma \langle u^k - u^{k+1}, v^k - w^k \rangle + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^k - v^k \rangle + \gamma \langle u^k - u^{k+1}, w^k - w^{k+1} \rangle \\
&\quad + (1+\alpha) \gamma \langle v^k - w^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \frac{\alpha D}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| \left[\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\| \right] \\
&\quad + \langle \Psi(w^{k+1}) - \Psi(w^k), v^{k+1} - v^k \rangle + \langle \Psi(w^{k+1}) - \Psi(w^k), v^k - w^k \rangle \\
&\quad + \gamma \langle w^{k+1} - w^k, v^{k+1} - v^k \rangle + \gamma \langle w^{k+1} - w^k, v^k - w^k \rangle \\
&\leq \left(\gamma + \frac{\alpha D}{2\rho} - \frac{c}{2\varepsilon} \right) \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \left(\frac{(1+\alpha)d}{2\rho} + \frac{\gamma}{2} \right) \|v^{k+1} - v^k\|^2 \\
&\quad - \alpha\gamma \|v^k - w^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \|u^k - v^k\| \|u^{k+1} - u^k\| \\
&\quad + (1+\alpha)(A+\gamma) \|v^k - w^k\| \|v^{k+1} - v^k\| + \gamma \|v^{k+1} - v^k\| \|u^k - v^k\| \\
&\quad + \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right) \|u^{k+1} - u^k\| \|v^{k+1} - v^k\| \\
&\quad + \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \|u^{k+1} - u^k\| \|v^k - w^k\| \\
&= -\frac{1}{2} (\zeta^k)^T \mathcal{N} \zeta^k
\end{aligned}$$

où $(\zeta^k)^T = (\|u^k - v^k\|, \|v^k - w^k\|, \|v^{k+1} - v^k\|, \|u^{k+1} - u^k\|)$ et où $\mathcal{N}$ est la matrice symétrique

suivante

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & -\gamma & -\gamma \\ 0 & 2\alpha\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma\right) \\ -\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma\right) \\ -\gamma & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma\right) & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma\right) & \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha D}{\rho} - 2\gamma\right) \end{pmatrix}$$

Nous montrons maintenant qu'il est possible de choisir les paramètres ρ et ε de telle sorte que la matrice $\mathcal{N}$ soit définie positive. Cette dernière propriété se traduit par les quatre conditions suivantes

$$2\gamma > 0 \quad \cdot \quad \begin{vmatrix} 2\gamma & 0 \\ 0 & 2\alpha\gamma \end{vmatrix} > 0$$

qui sont évidentes, et

$$d_1(\alpha, \rho) > 0 \quad (38)$$

$$d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) > 0 \quad (39)$$

avec

$$d_1(\alpha, \rho) = \begin{vmatrix} 2\gamma & 0 & -\gamma \\ 0 & 2\alpha\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) \\ -\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma \end{vmatrix} = \frac{2\gamma P_1(\rho)}{\rho} \quad (40)$$

où

$$P_1(\rho) = -\rho[(1+\alpha)^2(A+\gamma)^2 - \alpha\gamma^2] + 2\alpha(1+\alpha)\gamma d \quad (41)$$

Les trois conditions ci-dessus sont semblables à celles du paragraphe précédent. La dernière condition se traduit par

$$d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) = \det(\mathcal{N})$$

$$= \gamma \begin{vmatrix} 0 & -\gamma & -\gamma \\ 2\alpha\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma\right) \\ -(1+\alpha)(A+\gamma) & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma\right) \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\gamma \begin{vmatrix} 0 & -\gamma & -\gamma \\ 2\alpha\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma\right) \\ -(1+\alpha)(A+\gamma) & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma\right) \end{vmatrix}}_{d_{21}} - \underbrace{\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma\right) \begin{vmatrix} 2\gamma & -\gamma & -\gamma \\ 0 & -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma\right) \\ -\gamma & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma\right) \end{vmatrix}}_{d_{22}}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right) \underbrace{\begin{vmatrix} 2\gamma & 0 & -\gamma \\ 0 & 2\alpha\gamma & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \\ -\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right) \end{vmatrix}}_{d_{23}} \\
& + \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha D}{\rho} - 2\gamma \right) d_1(\alpha, \rho)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
d_{21} &= \gamma^2 \begin{vmatrix} 2\alpha\gamma & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \\ -(1+\alpha)(A+\gamma) & -\left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right) \end{vmatrix} - \gamma^2 \begin{vmatrix} 2\alpha\gamma & -(1+\alpha)(A+\gamma) \\ -(1+\alpha)(A+\gamma) & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma \end{vmatrix} \\
&= \gamma^2 \left[-2\alpha\gamma \left(\frac{(1+\alpha)d + \alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \right. \\
&\quad \left. - (1+\alpha)(A+\gamma) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma - (1+\alpha)(A+\gamma) \right) \right] \\
&= \gamma^2 \underbrace{\left[-\frac{2\alpha(1+\alpha)\gamma d}{\rho} + (1+\alpha)^2(A+\gamma)^2 - \alpha\gamma^2 \right]}_{\frac{2}{3}d_1(\alpha, \rho)} \\
&\quad - \gamma^2 \left[2\alpha\gamma \left(\frac{\alpha D}{\rho} + \frac{3\gamma}{2} + A \right) + (1+\alpha)(A+\gamma) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \right] \\
&\leq 0 \\
d_{22} &= -2\gamma \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \left[(1+\alpha)(A+\gamma) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \left(\frac{(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma \right) \right] \\
&\quad + \gamma^2 \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right)^2 - \gamma^2 (1+\alpha)(A+\gamma) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \\
&= -\gamma(1+\alpha)(A+\gamma) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \left(\frac{2\alpha D}{\rho} + 2A + 3\gamma \right) \\
&\quad - \gamma \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right)^2 \left(\frac{2(1+\alpha)d}{\rho} + \gamma \right) \\
&\leq 0 \\
d_{23} &= -4\alpha\gamma^2 \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right)^2 - 2\gamma(1+\alpha)(A+\gamma) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \\
&\quad - 2\alpha\gamma^3 \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right) \\
&= -2\alpha\gamma^2 \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right) \left(\frac{2\alpha D}{\rho} + 2A + 3\gamma \right)
\end{aligned}$$

$$- 2\gamma(1 + \alpha)(A + \gamma) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + \gamma \right) \left(\frac{\alpha D}{\rho} + A + 2\gamma \right) \\ \leq 0$$

Finalement,

$$\begin{aligned} d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) &= \left(\frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha D}{\rho} - \frac{5\gamma}{2} \right) d_1(\alpha, \rho) - \frac{1}{\rho^3} \left\{ \rho^3 \gamma \left[4A^3(1 + \alpha) + A^2\gamma(19 + 22\alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A\gamma^2(30 + 38\alpha) + \gamma^3(16 + 21\alpha) \right] + 2\rho^2\gamma \left[(1 + \alpha) \left\{ A^2(d + 4\alpha D) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4d\gamma(A + \gamma) \right\} + \alpha D \left\{ A\gamma(12 + 15\alpha) + \gamma^2(9 + 13\alpha) \right\} \right] \\ &\quad \left. + \rho\gamma\gamma D \left[(1 + \alpha) \left\{ 4A(d + \alpha D) + 8d\gamma \right\} + \alpha D\gamma(5 + 8\alpha) \right] + 2\alpha^2 D^2 d\gamma(1 + \alpha) \right\} \\ &= \frac{1}{\varepsilon\rho^3} (c\rho^3 d_1(\alpha, \rho) - \varepsilon Q(\rho)) \end{aligned}$$

où $Q(\rho) = \rho^3 Q_1(\rho) + \rho^2 Q_2(\rho) + \rho Q_3(\rho) + Q_0$ avec

$$\begin{aligned} Q_1(\rho) &= \frac{5\gamma}{2} d_1(\alpha, \rho) + \gamma \left[4A^3(1 + \alpha) + A^2\gamma(19 + 22\alpha) + A\gamma^2(30 + 38\alpha) + \gamma^3(16 + 21\alpha) \right] \\ Q_2(\rho) &= \alpha D d_1(\alpha, \rho) + 2\gamma \left\{ (1 + \alpha) \left[A^2(d + 4\alpha D) + 4d\gamma(A + \gamma) \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha D \left[A\gamma(12 + 15\alpha) + \gamma^2(9 + 13\alpha) \right] \right\} \\ Q_3(\rho) &= \alpha\gamma D \left\{ (1 + \alpha) \left[4A(d + \alpha D) + 8d\gamma \right] + \alpha D\gamma(5 + 8\alpha) \right\} \\ Q_0 &= 2\alpha^2 D^2 d\gamma(1 + \alpha) \end{aligned}$$

La condition (38) sur ρ est vérifiée si

$$\rho < \frac{2\alpha(1 + \alpha)\gamma d}{(1 + \alpha)^2(A + \gamma)^2 - \alpha\gamma^2}$$

La condition (39) liant ρ et ε est vérifiée si

$$\varepsilon < l(\alpha, \rho) = \frac{c\rho^3 d_1(\alpha, \rho)}{Q(\rho)}$$

où $d_1(\alpha, \rho)$ est défini par (41) et $Q(\rho)$ par (42).

Nous pouvons donc conclure que sous les conditions (24) et (25), la matrice $\mathcal{N}$ est définie positive. Par conséquent, Δ_k^{k+1} est négatif. La suite $\{\Phi(n^k, v^k)\} = \{\Phi_1(n^k) + \Phi_2(v^k) + \Phi_3(v^k) + \Phi_4(n^k, v^k) + \Phi_5(n^k, v^k)\}$ est décroissante. De (33), (34) et (36), nous déduisons que

$$\begin{aligned} \Phi_1(n^k) &\geq \frac{c}{2\varepsilon} \|n^k - n^*\|^2 \\ \Phi_2(n^k) + \Phi_3(v^k) &\geq \left(\frac{d}{2\rho} - \frac{\gamma}{2} \right) \|v^k - v^*\|^2 \\ \Phi_4(n^k, v^k) &\geq \frac{\alpha d}{2\rho} \|v^k - v^*\|^2 \end{aligned}$$

De plus, comme $\Phi_5(n^k, v^k)$ est positive,

$$\Phi(n^k, v^k) \geq \frac{c}{2\varepsilon} \|n^k - n^*\|^2 + \left(\frac{d}{2\rho} - \frac{\gamma}{2} \right) \|v^k - v^*\|^2 + \alpha \frac{d}{2\rho} \|v^k - v^*\|^2$$

Sous les conditions (26) et (27), la suite $\{\Phi(u^k, v^k)\}$ est décroissante. Comme elle est positive, elle est alors convergente et la différence entre deux termes consécutifs tend nécessairement vers 0. Nous en déduisons donc que la suite $\{\zeta^k\}$ converge fortement vers $(0, 0, 0, 0)^T$. C'est-à-dire que $\|u^k - v^k\|$, $\|v^k - w^k\|$, $\|u^{k+1} - u^k\|$ et $\|v^{k+1} - v^k\|$ convergent fortement vers 0. Comme la suite $\{\Phi(u^k, v^k)\}$ est convergente, elle est bornée et nous pouvons affirmer que la suite $\{u^k, v^k\}$ engendrée par l'Algorithme IV.2 est bornée. La suite $\{w^k\}$ définie à partir de u^k par $w^k \triangleq \tilde{v}(u^k)$ est aussi bornée. Soit $\bar{u}$ un point d'accumulation faible de la suite $\{u^k\}$, nous considérons la sous-suite $\{k_i\}$ telle que $\{u^{k_i}\}$ converge faiblement vers $\bar{u}$. Les suites $\{v^{k_i}\}$ et $\{w^{k_i}\}$ convergent également faiblement vers $\bar{u}$. Nous avons d'une part¹

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\Psi_\gamma(u^k)\| &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma \|u^k - w^k\| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\gamma \|u^k - v^k\| + \gamma \|v^k - w^k\| \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\Psi_\gamma(u)$ vérifie la propriété de Dunn avec la constante γ (voir Lemme II.41), on a l'inégalité suivante

$$\langle \Psi_\gamma(\bar{u}) - \Psi_\gamma(u^{k_i}), \bar{u} - u^{k_i} \rangle \geq \frac{1}{\gamma} \|\Psi_\gamma(\bar{u}) - \Psi_\gamma(u^{k_i})\|^2$$

Comme u^{k_i} converge faiblement vers $\bar{u}$ et $\Psi_\gamma(u^{k_i})$, comme nous venons de le voir, converge fortement vers 0, par passage à la limite quand k_i tend vers l'infini dans la dernière inéquation, nous pouvons déduire l'égalité $\Psi_\gamma(\bar{u}) = 0$. Cette égalité est bien la condition nécessaire et suffisante d'optimalité de $\bar{u}$. ■

IV.3 Application à l'opérateur de rotation de $\pi/2$

Le but de cette section est d'illustrer l'application de l'algorithme de résolution/régularisation simultanées dans le cas de l'opérateur Ψ de rotation de $\pi/2$. Cet opérateur est monotone mais ne vérifie pas l'hypothèse de Dunn. Nous rappelons que l'algorithme de "gradient" habituel diverge quand il est appliqué directement à cet opérateur (voir Figure IV.1). Pour $v \in \mathbb{R}^2$ $\Psi(v)$ s'écrit

$$\Psi(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

et l'opérateur de régularisation $\Gamma(u, v)$ introduit au §II.6 s'écrit

$$\Gamma(u, v) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(u, v) \\ \mathcal{B}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v - u) \\ \Psi(v) + \gamma(v - u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u_1 - v_1) \\ \gamma(u_2 - v_2) \\ -v_2 + \gamma(v_1 - u_1) \\ -v_1 + \gamma(v_2 - u_2) \end{pmatrix}$$

¹voir la définition de l'opérateur régularise en début de chapitre

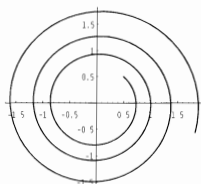


Figure IV.1: Trajectoire engendrée par l'algorithme de "gradient" pour un pas de 0,1

IV.3.1 Algorithme parallèle

En prenant $K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ et $L(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ un pas de l'Algorithme IV.1 s'écrit à l'étape k , connaissant $u^k = (u_1^k, u_2^k)$ et $v^k = (v_1^k, v_2^k)$, calculer u^{k+1} et v^{k+1} selon le schéma suivant

$$\begin{cases} u_1^{k+1} = u_1^k - \varepsilon \gamma (u_1^k - v_1^k) \\ u_2^{k+1} = u_2^k - \varepsilon \gamma (u_2^k - v_2^k) \\ v_1^{k+1} = v_1^k + \rho v_2^k - \rho \gamma (v_1^k - u_1^k) \\ v_2^{k+1} = v_2^k - \rho v_1^k - \rho \gamma (v_2^k - u_2^k) \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire, en posant $W^k = (u_1^k, u_2^k, v_1^k, v_2^k)$,

$$W^{k+1} = MW^k$$

où M est la matrice 4×4 définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \gamma\varepsilon & 0 & \gamma\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 - \gamma\varepsilon & 0 & \gamma\varepsilon \\ \gamma\rho & 0 & 1 - \gamma\rho & \rho \\ 0 & \gamma\rho & -\rho & 1 - \gamma\rho \end{pmatrix}$$

L'étude du spectre de la matrice M révèle que les valeurs de ρ et de ε admissibles (le rayon spectral de la matrice M est strictement inférieur à 1) sont effectivement dépendantes l'une de l'autre (le domaine admissible n'est pas un rectangle). Cependant, ce domaine admissible est plus grand que celui donné par la théorie et de plus, la borne maximale pour ε ne s'annule pas pour ρ tendant vers sa borne maximale. Ce phénomène peut être expliqué d'une part par le fait que nous donnons uniquement des conditions suffisantes, qui sont en général plus sévères que les conditions nécessaires et suffisantes, et d'autre part par le fait que nous appliquons les conditions de convergence pour des opérateurs généraux à un opérateur particulier $\Psi(u_1, u_2) = \left(-\frac{\partial L}{\partial u_1}(u_1, u_2), \frac{\partial L}{\partial u_2}(u_1, u_2)\right)^T$ pour la fonction "point-selle" $L(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle$.

- Le "meilleur" rayon spectral, qui a pu être obtenu pour $\gamma = 0,1$, est de l'ordre de 0,99. Il est obtenu pour $\varepsilon = \rho = 0,101$

- Pour $\gamma = 0,5$, le taux optimal est de l'ordre de 0,707. Il est obtenu pour $\varepsilon = \rho = 1$.
- Pour $\gamma = 1$, le taux optimal est de l'ordre de 0,88. Il est obtenu pour $\varepsilon = 0,42$ et $\rho = 1,06$.
- Pour $\gamma = 5$, le taux optimal est de l'ordre de 0,99. Il est obtenu pour $\varepsilon = 0,07$ et $\rho = 1,32$.

La Figure IV.2 représente une trajectoire engendrée par l'algorithme. Sur la Figure IV.3, on a représenté

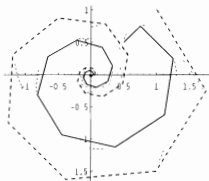


Figure IV.2: Trajectoires engendrées par l'algorithme parallèle pour $\gamma = 0,5$ et $\rho = \varepsilon = 1$: trait continu $\{u^k\}$; trait pointillé $\{v^k\}$

la courbe du taux optimal de convergence en fonction de γ , sur l'intervalle $[0, 5]$. Soit $r(M)$ le rayon

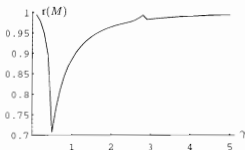
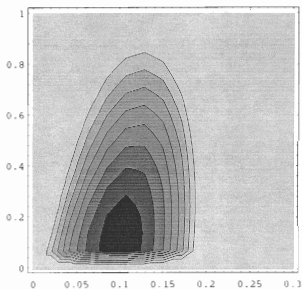
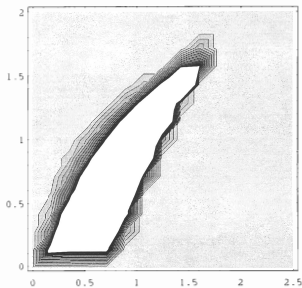


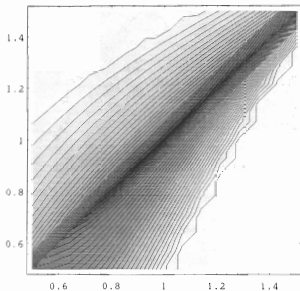
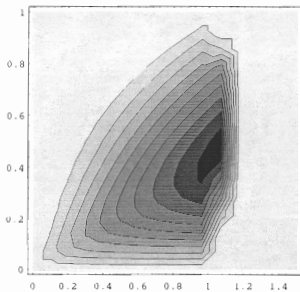
Figure IV.3: Taux optimal de convergence en fonction de γ

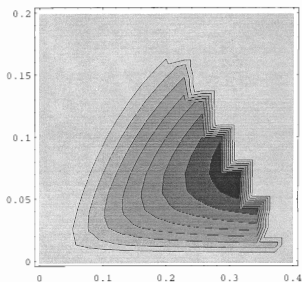
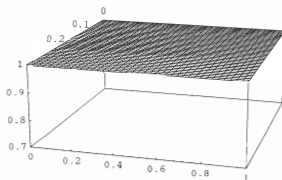
spectral de la matrice M (qui dépend de ρ , ε et γ). Sur les Figures IV.4 à IV.8, on a représenté les courbes de niveaux de la quantité $\min(r(M), 1)$ en fonction de ρ (en abscisse) et ε (en ordonnée) pour différentes valeurs fixées de γ . La ligne de niveau $r(M) = 1$ délimite le domaine de convergence. Nous traçons également le graphe de $\min(r(M), 1)$ en fonction de ρ et de ε pour différentes valeurs fixées de γ (Figures IV.9 à IV.12). Au vu de ces expériences numériques, il apparaît que le meilleur taux de convergence est obtenu pour $\gamma = 0,5$ et $\rho = \varepsilon = 1$. Il est de l'ordre de 0,707.

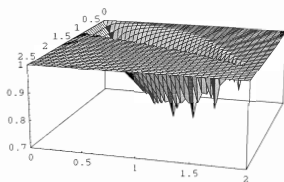
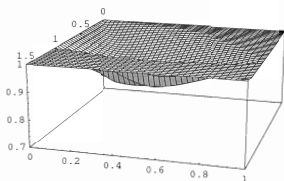
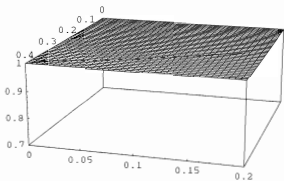
Les constantes introduites au §III.1 sont égales à $Y = \gamma$, $Z = \gamma$, $T = \sqrt{1 + \gamma^2}$, $C = 1$, $D = 1$, $S = 1$, $t = \gamma$, $c = 1$ et $d = 1$. Les conditions sur ρ et ε du Théorème III.2 sont

$$0 < \rho < \frac{2\alpha\gamma}{(1+\alpha)(1+\gamma^2)} \quad 0 < \varepsilon < h(\alpha, \rho)$$

Figure IV.4: Domaine de convergence pour $\gamma = 0.1$ Figure IV.5: Domaine de convergence pour $\gamma = 0.5$

Figure IV.6: Zoom sur la partie "blanche" $\gamma = 0.5$ Figure IV.7: Domaine de convergence pour $\gamma = 1$

Figure IV.8: Domaine de convergence pour $\gamma = 5$ Figure IV.9: $\min(r(M), 1)$ pour $\gamma = 0.1$

Figure IV.10: $\min(r(M), 1)$ pour $\gamma = 0.5$ Figure IV.11: $\min(r(M), 1)$ pour $\gamma = 1$ Figure IV.12: $\min(r(M), 1)$ pour $\gamma = 5$

avec

$$h(\alpha, \rho) = \frac{h_1(\alpha, \rho)}{h_2(\alpha, \rho)}$$

où

$$h_1(\alpha, \rho) = 2(1 + \alpha)\rho^2(2\alpha\gamma - (1 + \alpha)(1 + \gamma^2)\rho)$$

$$h_2(\alpha, \rho) = (2\alpha\gamma - (1 + \alpha)(1 + \gamma^2)\rho)((1 + \alpha)(\gamma\rho^2 + 2\alpha\rho) + 2\alpha^2((1 + \alpha) + 2(\alpha\gamma + (1 + \alpha)\sqrt{1 + \gamma^2})\rho))$$

Indépendamment de α , la borne supérieure sur ρ est maximale pour $\gamma = 1$. En posant $\alpha = 1$, ces conditions deviennent

$$0 < \rho < \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} \quad 0 < \varepsilon < \frac{2\rho^2(\gamma - \rho(1 + \gamma^2))}{(\gamma - \rho(1 + \gamma^2))(\gamma\rho^2 + 2\rho) + (1 + (\gamma + 2\sqrt{1 + \gamma^2})\rho)}$$

Nous traçons la borne supérieure sur ε , c'est-à-dire $h(\alpha, \rho)$ en fonction de ρ et pour différentes valeurs de α , ainsi que la courbe maximale (Figures IV.13 à IV.18). On a choisi les valeurs de α suivantes $\alpha = 0,01$ α variant de 0,1 à 0,9 avec un pas de 0,1 α variant de 0,91 à 0,99 avec un pas de 0,01 $\alpha = 1,3$; $\alpha = 1,5$ $\alpha = 1,7$ α variant de 1 à 9 avec un pas de 1 α variant de 10 à 100 avec un pas de 10 $\alpha = 200$ et $\alpha = 1000$.

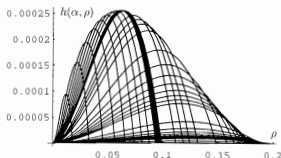


Figure IV.13: $h(\alpha, \rho)$ en fonction de ρ pour $\gamma = 0,1$ et pour les différentes valeurs de α

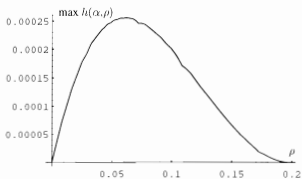
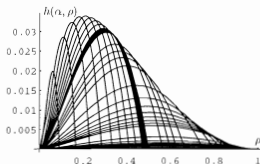
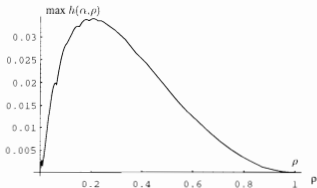
IV.3.2 Algorithme séquentiel

En prenant $K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ et $L(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ un pas de l'Algorithme IV.1 s'écrit à l'étape k , connaissant $v^k = (v_1^k, v_2^k)^T$ et $u^k = (u_1^k, u_2^k)^T$, calculer v^{k+1} et u^{k+1} selon le schéma suivant

$$\begin{cases} v_1^{k+1} = v_1^k + \rho u_2^k - \rho\gamma(v_1^k - u_1^k) \\ v_2^{k+1} = v_2^k - \rho u_1^k - \rho\gamma(v_2^k - u_2^k) \\ u_1^{k+1} = (1 - \varepsilon\gamma + \varepsilon\gamma^2\rho)u_1^k + \varepsilon\gamma(1 - \gamma\rho)v_1^k + \varepsilon\gamma\rho v_2^k \\ u_2^{k+1} = (1 - \varepsilon\gamma + \varepsilon\gamma^2\rho)u_2^k - \varepsilon\gamma\rho v_1^k + \varepsilon\gamma(1 - \gamma\rho)v_2^k \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire $W^{k+1} = NW^k$ en posant $W^k = (v_1^k, u_2^k, u_1^k, v_2^k)^T$ où N est la matrice 4×4 définie par

$$N = \begin{pmatrix} 1 - \gamma\rho & \rho & \gamma\rho & 0 \\ -\rho & 1 - \gamma\rho & 0 & \gamma\rho \\ \varepsilon\gamma(1 - \gamma\rho) & \varepsilon\gamma\rho & (1 - \varepsilon\gamma + \varepsilon\gamma^2\rho) & 0 \\ -\varepsilon\gamma\rho & \varepsilon\gamma(1 - \gamma\rho) & 0 & (1 - \varepsilon\gamma + \varepsilon\gamma^2\rho) \end{pmatrix}$$

Figure IV.14: Courbe maximale en fonction de ρ pour $\gamma = 0,1$ Figure IV.15: $h(\alpha, \rho)$ en fonction de ρ pour $\gamma = 1$ et pour les différentes valeurs de α Figure IV.16: Courbe maximale de ε en fonction de ρ pour $\gamma = 1$

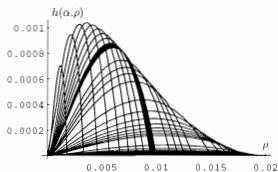


Figure IV.17: $h(\alpha, \rho)$ en fonction de ρ pour $\gamma = 100$ et pour les différentes valeurs de α

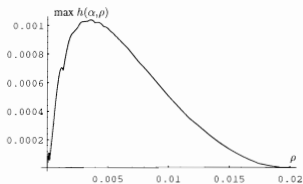


Figure IV.18: Courbe maximale de ε en fonction de ρ pour $\gamma = 100$

Sur le total des expériences numériques, la version séquentielle ne semble pas apporter une amélioration du taux de convergence. Le "meilleur" rayon spectral qui a pu être obtenu est de l'ordre de 0.707. Il est obtenu pour $\gamma = 1$, $\rho = 1$ et $\varepsilon = 0,5$.

Sur la Figure IV.19, on a représenté la courbe du taux optimal de convergence en fonction de γ , sur l'intervalle $[0,1;5]$. En comparant cette courbe à celle de la Figure IV.3, on remarquera que la sensibilité du taux de convergence optimal autour du γ optimal est moins grande que dans le cas de l'algorithme parallèle de résolution/régularisation.

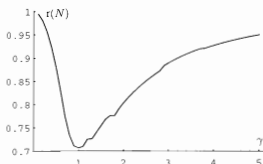


Figure IV.19: Taux optimal de convergence en fonction de γ

La Figure IV.20 représente une trajectoire engendrée par l'algorithme.

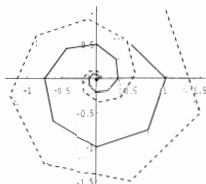
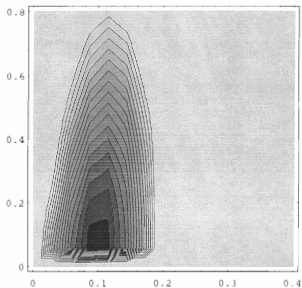
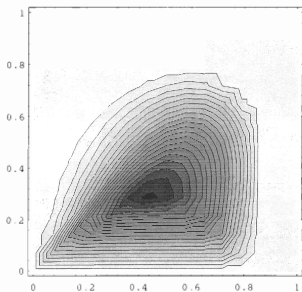
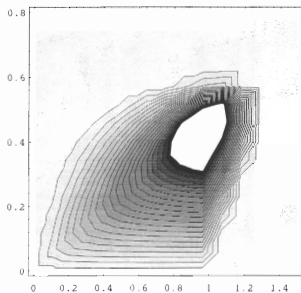
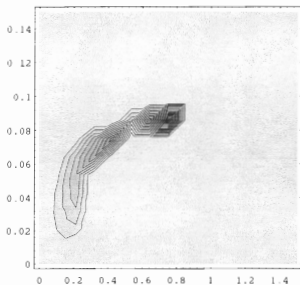
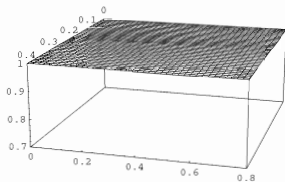
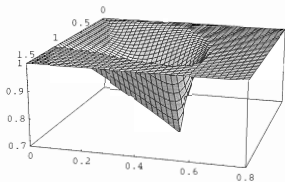
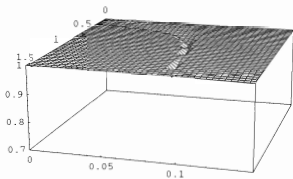


Figure IV.20: Trajectoires engendrées par l'algorithme séquentiel pour $\gamma = 1$, $\rho = 1$ et $\varepsilon = 0,5$: trait continu $\{u^k\}$ trait pointillé $\{v^k\}$

Soit $r(N)$ le rayon spectral de la matrice N (qui dépend de ρ , ε et γ). Sur les Figures IV.21 à IV.24, on a représenté les courbes de niveaux de la quantité $\min(r(N), 1)$ en fonction de ρ (en abscisse) et ε (en ordonnée) pour différentes valeurs fixées de γ . La ligne de niveau $r(N) = 1$ délimite le domaine de convergence. Nous traçons également le graphe de $\min(r(N), 1)$ en fonction de ρ et de ε pour différentes valeurs fixées de γ (Figures IV.25 à IV.27). Nous traçons la borne supérieure sur ε , c'est-à-dire $l(\alpha, \rho)$ en fonction de ρ et pour différentes valeurs de α ainsi que la courbe maximale (Figures IV.28 à IV.33). On a choisi les valeurs de α suivantes : $\alpha = 0,01$ α variant de 0,1 à 0,9

Figure IV.21: Domaine de convergence pour $\gamma = 0.1$ Figure IV.22: Domaine de convergence pour $\gamma = 0.5$

Figure IV.23: Domaine de convergence pour $\gamma = 1$ Figure IV.24: Domaine de convergence pour $\gamma = 10$

Figure IV.25: $\min(r(N), 1)$ pour $\gamma = 0.1$ Figure IV.26: $\min(r(N), 1)$ pour $\gamma = 1$ Figure IV.27: $\min(r(N), 1)$ pour $\gamma = 10$

avec un pas de 0,1 α variant de 0,91 à 0,99 avec un pas de 0,01 $\alpha = 1,3$ $\alpha = 1,5$; $\alpha = 1,7$; α variant de 1 à 9 avec un pas de 1 α variant de 10 à 100 avec un pas de 10 ; $\alpha = 200$ et $\alpha = 1000$.

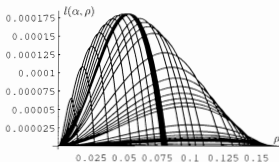


Figure IV.28: $l(\alpha, \rho)$ en fonction de ρ pour $\gamma = 0,1$ et pour les différentes valeurs de α

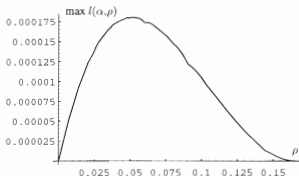


Figure IV.29: Courbe maximale en fonction de ρ pour $\gamma = 0,1$

IV.4 Cas d'un opérateur intégrable

Nous nous intéressons maintenant à la régularisation suivie d'un pas d'optimisation dans le cas où l'opérateur en question dérive d'un problème d'optimisation sans contraintes explicites. Soient J une fonctionnelle définie sur un espace de Hilbert $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}^{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$. Nous posons le problème d'optimisation suivant

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{ad}} J(u) \quad (42)$$

IV.4.1 Convergence de la version parallèle

L'algorithme de résolution/régularisation appliqué au gradient J' s'écrit

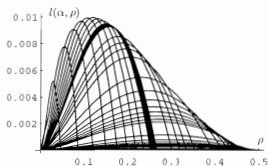


Figure IV.30: $l(\alpha, \rho)$ en fonction de ρ pour $\gamma = 1$ et pour les différentes valeurs de α

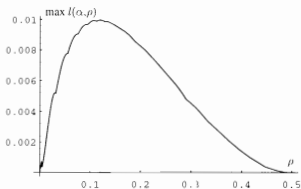


Figure IV.31: Courbe maximale de ε en fonction de ρ pour $\gamma = 1$

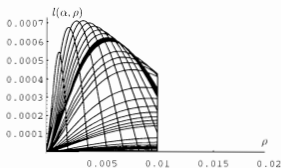
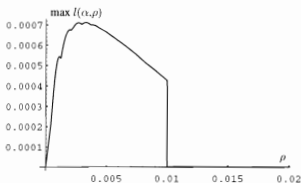


Figure IV.32: $l(\alpha, \rho)$ en fonction de ρ pour $\gamma = 100$ et pour les différentes valeurs de α

Figure IV.33: Courbe maximale de ε en fonction de ρ pour $\gamma = 100$

Algorithme IV.3 (Parallèle en (u, v)) À l'étape k , connaissant u^k et v^k calculer u^{k+1} et v^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires

$$\min_{u \in H} \frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \gamma(u^k - v^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \quad (43)$$

$$\min_{v \in H} \frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle J'(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle \quad (44)$$

Théorème IV.5 Nous faisons les hypothèses suivantes

- (i) J est coercive, convexe, semi-continue inférieurement et ayant une G -dérivée Lipschitzienne de constante A .
- (ii) La fonctionnelle K est convexe : sa G -dérivée est fortement monotone de constante c et Lipschitzienne de constante C .
- (iii) La fonctionnelle L est convexe : sa G -dérivée est fortement monotone de constante d et Lipschitzienne de constante D .

Alors il existe une solution u^* au problème (42) et les problèmes (44) et (43) possèdent une solution (u^{k+1}, v^{k+1}) unique. Si ρ et ε vérifient les inégalités

$$0 < \rho < \frac{2d}{A + \gamma} \quad (45)$$

$$0 < \varepsilon < \frac{2c[2d - \rho(A + \gamma)]}{\gamma(2d - A\rho)} \quad (46)$$

ou bien

$$0 < \varepsilon < \frac{2c}{\gamma} \quad (47)$$

$$0 < \rho < \frac{2d(2c - \varepsilon\gamma)}{A(2c - \varepsilon\gamma) + 2c\gamma} \quad (48)$$

alors la suite $\{J(v^k)\}$ converge vers $J(u^*)$. Tout point d'accumulation faible de la suite $\{u^k\}$ et de la suite $\{v^k\}$ est une solution du problème (42).

Preuve Nous écrivons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité vérifiées par u^* u^{k+1} et v^{k+1}

$$\forall v \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \langle J'(u^*), v - u^* \rangle \geq 0 \quad (49)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[K'(u^{k+1}) - K'(u^k) \right] + \gamma(u^k - v^k) = 0 \quad (50)$$

$$\forall v \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad \frac{1}{\rho} \left[\langle L'(v^{k+1}) - L'(v^k), v - v^{k+1} \rangle \right] + \langle J'(v^k) + \gamma(v^k - u^k), v - v^{k+1} \rangle \geq 0. \quad (51)$$

Soit la fonction de Lyapounov Φ définie par $\Phi(u, v) = \Phi_1(v) + \Phi_2(u)$, où

$$\Phi_1(v) = \frac{1}{\rho} [L(u^*) - L(v) - \langle L'(v), u^* - v \rangle]$$

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{\varepsilon} [K(u^*) - K(u) - \langle K'(u), u^* - u \rangle]$$

Nous étudions la variation $\Delta_k^{k+1} = \Phi(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi(u^k, v^k)$

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(v^{k+1}) - \Phi_1(v^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\rho} [L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle]}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \langle L'(u^k) - L'(v^{k+1}), u^* - v^{k+1} \rangle}_{s_2} \end{aligned}$$

La forte monotonie de L' mène à

$$s_1 \leq -\frac{\rho}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2$$

En utilisant l'inégalité (51) exprimant l'optimalité de v^{k+1} et en prenant $v = u^*$ nous obtenons

$$s_2 \leq \langle J'(v^k) + \gamma(v^k - u^k), u^* - v^{k+1} \rangle$$

En tenant compte de (49) avec $v = v^{k+1}$ nous aboutissons à

$$\begin{aligned} s_2 &\leq \langle J'(v^k) - J'(u^*), u^* - v^k \rangle + \langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\quad + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle v^k - u^k, v^k - v^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

De plus, comme J' est monotone et Lipschitzien de constante A , il vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante A et donc

$$\langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - u^* \rangle \geq \frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2$$

Donc,

$$\begin{aligned} s_2 &\leq -\frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2 + \langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\quad + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle v^k - u^k, v^k - v^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

Nous arrivons donc à

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &\leq -\frac{\rho}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2 + \langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\quad + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle v^k - u^k, v^k - v^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (\Delta_2)_i^{k+1} &= \Phi_2(u^{k+1}) - \Phi_2(u^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [K(u^k) - K(u^{k+1}) - \langle K'(u^k), u^k - u^{k+1} \rangle]}_{s_3} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \langle K'(u^k) - K'(u^{k+1}), u^k - u^{k+1} \rangle}_{s_4} \end{aligned}$$

La forte monotonie de K' a pour conséquence

$$s_3 \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2$$

et l'égalité (50) prise pour $u = u^*$ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} s_4 &= \gamma \langle u^k - v^k, u^* - u^{k+1} \rangle, \\ &= \gamma \langle u^k - v^k, u^* - v^k + v^k - u^k + u^k - u^{k+1} \rangle \\ &= \gamma \langle u^k - v^k, u^* - v^k \rangle - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

Donc,

$$(\Delta_2)_i^{k+1} \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle$$

Finalement, nous arrivons à

$$\begin{aligned} \Delta_i^{k+1} &\leq -\frac{d}{2\rho} + \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 - \frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2 \\ &\quad + \langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^k - u^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle \\ &\leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 - \frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2 \\ &\quad + \|J'(v^k) - J'(u^*)\| \|v^{k+1} - v^k\| + \gamma \|u^k - v^k\| \|v^{k+1} - v^k\| + \gamma \|u^k - v^k\| \|u^{k+1} - u^k\| \\ &= -\frac{1}{2} (\zeta^k)^T \mathcal{M} \zeta^k \end{aligned}$$

où $(\zeta^k)^T = (\|v^{k+1} - v^k\|, \|J'(v^k) - J'(u^*)\|, \|u^{k+1} - u^k\|, \|u^k - v^k\|)$ et où $\mathcal{M}$ est la matrice symétrique suivante :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\rho} & -1 & 0 & -\gamma \\ -1 & \frac{2}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{\varepsilon} & -\gamma \\ -\gamma & 0 & -\gamma & 2\gamma \end{pmatrix}$$

Nous montrons maintenant qu'il est possible de choisir les paramètres ε et ρ de manière à ce que la matrice $\mathcal{M}$ soit définie positive. Cette dernière propriété est vérifiée si ε et ρ vérifient l'une des deux paires de conditions suivantes

$$\frac{2d}{A\rho} - 1 > 0 \quad \det(\mathcal{M}) = \frac{\gamma}{A\varepsilon\rho} [\varepsilon\gamma(-2d + A\rho) - 2c\rho(A + \gamma) + 4cd] > 0$$

ou bien

$$\frac{2\gamma c}{\varepsilon} - \gamma^2 > 0 \quad \det(\mathcal{M}) > 0$$

Les deux premières conditions se traduisent par

$$\rho < \frac{2d}{A} \quad \varepsilon \gamma (2d - A\rho) < 2c [2d - \rho(A + \gamma)]$$

ou encore,

$$\rho < \frac{2d}{A + \gamma} \quad (52)$$

$$\varepsilon < \frac{2c [2d - \rho(A + \gamma)]}{\gamma(2d - A\rho)} \quad (53)$$

Les deux dernières conditions peuvent s'écrire

$$\varepsilon < \frac{2c}{\gamma} \quad (54)$$

$$\rho < \frac{2d(2c - \gamma\varepsilon)}{A(2c - \gamma\varepsilon) + 2c\gamma} \quad (55)$$

Nous pouvons donc conclure que sous les conditions (52) et (53), ou (54) et (55), la matrice $\mathcal{M}$ est définie positive. Par conséquent, Δ_i^{k+1} est négatif. La suite $\{\Phi(n^k, v^k)\} = \{\Phi_1(v^k) + \Phi_2(v^k) + \Phi_3(n^k)\}$ est strictement décroissante. Comme elle est positive, elle converge et la différence entre deux termes consécutifs converge nécessairement vers 0. Nous en déduisons que la suite $\{\zeta^k\}$ converge fortement vers $(0, 0, 0)^T$ c'est-à-dire

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|n^{k+1} - n^k\| = 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|v^{k+1} - v^k\| = 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|n^k - v^k\| = 0$$

et que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|J'(v^k) - J'(n^*)\| = 0$$

De plus, nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \Phi_1(v^k) &\geq 0 \\ \Phi_2(v^k) &\geq \frac{d}{2\rho} \|v^k - n^*\|^2 \\ \Phi_3(n^k) &\geq \frac{c}{2\varepsilon} \|n^k - n^*\|^2 \end{aligned}$$

Comme la suite $\{\Phi(n^k, v^k)\}$ est convergente, nous pouvons affirmer que la suite $\{(n^k, v^k)\}$ est bornée. Soit $\bar{n}$ un point d'accumulation faible de la suite $\{n^k\}$, nous considérons la sous-suite $\{k_i\}$ telle que $\{n^{k_i}\}$ et $\{v^{k_i}\}$ convergent faiblement vers $\bar{n}$ (en effet, $\|n^k - v^k\| \rightarrow 0$). Par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$ dans (51) pour la sous-suite $\{v^{k_i}\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle J'(n^*), v - \bar{n} \rangle &\geq -\frac{D}{\rho} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|v^{k+1} - v^k\| \|v - v^{k+1}\| \\ &\geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\langle J'(n^{k_i}) - J'(\bar{n}), n^{k_i} - \bar{n} \rangle \geq \frac{1}{A} \|J'(n^{k_i}) - J'(\bar{n})\|^2$$

Par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$ dans cette dernière inéquation, nous arrivons à

$$J'(\bar{n}) = J'(n^*)$$

On a donc

$$\langle J'(\bar{n}), v - \bar{n} \rangle \quad \forall v \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$$

De plus, $\bar{n} \in \mathcal{V}^{\text{ad}}$ car $\mathcal{V}^{\text{ad}}$ est convexe fermé donc faiblement fermé. Il est donc bien solution du problème (42). ■

IV.4.2 Convergence de la version séquentielle

La version séquentielle de l'algorithme de résolution/régularisation (v avant u) appliqué au gradient J' s'écrit

Algorithme IV.4 À l'étape k , connaissant v^k et u^k , calculer v^{k+1} et u^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires

$$\min_{v \in \mathcal{L}^{ad}} \frac{1}{\rho} L(v) + \langle J'(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{L'(v^k)}{\rho} v \rangle \quad (56)$$

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \frac{1}{\varepsilon} K(u) + \langle \gamma(u^k - v^{k+1}) - \frac{K'(u^k)}{\varepsilon} u \rangle \quad (57)$$

Théorème IV.6 Nous faisons les hypothèses suivantes

- (i) J est coercive, convexe, semi-continue inférieurement et ayant une G -dérivée lipschitzienne de constante A .
- (ii) La fonctionnelle K est convexe sa G -dérivée est fortement monotone de constante c et Lipschitzienne de constante C .
- (iii) La fonctionnelle L est convexe sa G -dérivée est fortement monotone de constante d et Lipschitzienne de constante D .

Alors il existe une solution u^* au problème (42) et les problèmes (56) et (57) possèdent une solution (v^{k+1}, u^{k+1}) unique. Si ρ et ε vérifient les inégalités

$$0 < \rho < \frac{d}{A + \gamma} \quad (58)$$

$$0 < \varepsilon < \frac{2c(2d - \rho(A + 2\gamma))}{\gamma(2d - \rho(A - 14\gamma))} \quad (59)$$

ou bien

$$0 < \varepsilon < \frac{2c}{\gamma} \quad (60)$$

$$0 < \rho < \frac{d(2c - \gamma\varepsilon)}{A(2c - \gamma\varepsilon) + \gamma(2c + 7\gamma\varepsilon)} \quad (61)$$

alors la suite $\{J(v^k)\}$ converge vers $J(u^*)$. Tout point d'accumulation faible de la suite $\{u^k\}$ et de la suite $\{v^k\}$ est une solution du problème (42).

Preuve Nous écrivons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité vérifiées par u^* , u^{k+1} et v^{k+1}

$$\forall v \in \mathcal{L}^{ad} \quad \langle J'(u^*), v - u^* \rangle \geq 0 \quad (62)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[K'(u^{k+1}) - K'(u^k) \right] + \gamma(u^k - v^k) = 0 \quad (63)$$

$$\forall v \in \mathcal{L}^{ad} \quad \frac{1}{\rho} \left[\langle L'(v^{k+1}) - L'(v^k), v - v^{k+1} \rangle \right] + \langle J'(v^k) + \gamma(v^k - u^k), v - v^{k+1} \rangle \geq 0 \quad (64)$$

Soit la fonction de Lyapounov Φ définie par $\Phi(u, v) = \Phi_1(v) + \Phi_2(v) + \Phi_3(u)$ où

$$\begin{aligned}\Phi_1(v) &= \frac{1}{\rho} [L(u^*) - L(v) - \langle L'(v), u^* - v \rangle] \\ \Phi_2(v) &= -\frac{\gamma}{2} \|v - u^*\|^2 \\ \Phi_3(u) &= \frac{1}{\varepsilon} [K(u^*) - K(u) - \langle K'(u), u^* - u \rangle]\end{aligned}$$

Sous la condition (58) ou (61) sur ρ ,

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &\geq \left(\frac{d}{2\rho} - \frac{\gamma}{2} \right) \|v - u^*\|^2 + \frac{\varepsilon}{2c} \|u - u^*\|^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Nous étudions la variation $\Delta_k^{k+1} = \Phi(v^{k+1} - v^{k+1}) - \Phi(v^k, v^k)$.

$$\begin{aligned}(\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(v^{k+1}) - \Phi_1(v^k) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\rho} [L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle]}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), u^* - v^{k+1} \rangle}_{s_2}\end{aligned}$$

La forte monotonie de L' mène à

$$s_1 \leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2$$

En utilisant l'inégalité (64) exprimant l'optimalité de v^{k+1} et en prenant $v = u^*$ nous obtenons

$$s_2 \leq \langle J'(v^k) + \gamma(v^k - u^k), u^* - v^{k+1} \rangle$$

En tenant compte de (62) avec $v = v^{k+1}$ nous aboutissons à

$$\begin{aligned}s_2 &\leq \langle J'(v^k) - J'(u^*), u^* - v^k \rangle + \langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\quad + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle v^k - u^k, v^k - v^{k+1} \rangle\end{aligned}$$

De plus, comme J' est monotone et Lipschitzien de constante A , il vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante A et donc

$$\langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - u^* \rangle \geq \frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2$$

Donc,

$$\begin{aligned}s_2 &\leq -\frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2 + \langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\quad + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle v^k - u^k, v^k - v^{k+1} \rangle\end{aligned}$$

Nous arrivons donc à

$$\begin{aligned}(\Delta_1)_k^{k+1} &\leq -\frac{d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2 + \langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - v^{k+1} \rangle \\ &\quad + \gamma \langle v^k - u^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle v^k - u^k, v^k - v^{k+1} \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta_2)_k^{k+1} &= \Phi_2(v^{k+1}) - \Phi_2(u^k) \\
&= -\frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - u^k\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|v^k - u^k\|^2 \\
&= \frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \gamma \|v^{k+1}\|^2 + \gamma \langle v^{k+1}, v^k \rangle + \gamma \langle v^{k+1}, u^k \rangle - \gamma \langle v^k, u^k \rangle \\
&= \frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^k - v^{k+1} \rangle
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
(\Delta_3)_k^{k+1} &= \Phi_3(u^{k+1}) - \Phi_3(u^k) \\
&= \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [K(u^k) - K(u^{k+1}) - \langle K'(u^k), u^k - u^{k+1} \rangle]}_{s_3} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [K'(u^k) - K'(u^{k+1}), u^k - u^{k+1}]}_{s_4}
\end{aligned}$$

La monotonie de K' a pour conséquence

$$s_3 \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2$$

et l'égalité (63) prise pour $u = u^*$ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
s_4 &= \gamma \langle u^k - v^{k+1}, u^* - u^{k+1} \rangle \\
&= \underbrace{\gamma \langle u^k - v^k, u^* - u^{k+1} \rangle}_{s_5} + \gamma \langle v^k - v^{k+1}, u^* - u^{k+1} \rangle \\
&= \gamma \langle u^k - v^k, u^* - v^k + v^k - u^k + u^k - u^{k+1} \rangle \\
s_5 &= \gamma \langle u^k - v^k, u^* - v^k \rangle - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(\Delta_3)_k^{k+1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \gamma \langle v^k - v^{k+1}, u^* - u^{k+1} \rangle \\
&\quad + \gamma \langle u^k - v^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\Delta_2)_k^{k+1} + (\Delta_3)_k^{k+1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 \\
&\quad + \underbrace{\gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^* - v^{k+1} - u^k + u^{k+1} \rangle}_{s_6} \\
&\quad + \gamma \langle u^k - v^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_6 &= \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^{k+1} - u^k + u^k - v^k + v^k - v^{k+1} \rangle \\
&= -\gamma \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^{k+1} - u^k \rangle + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^k - v^k \rangle
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(\Delta_2)_k^{k+1} + (\Delta_3)_k^{k+1} &\leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 - \frac{\gamma}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 \\
&\quad + \gamma \langle u^k - v^k, u^* - v^k \rangle + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle \\
&\quad + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^{k+1} - u^k \rangle + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^k - v^k \rangle
\end{aligned}$$

Finalement, nous arrivons à

$$\begin{aligned}
 \Delta_k^{k+1} &\leq -\left(\frac{d}{2\rho} + \frac{\gamma}{2}\right) \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 \\
 &\quad - \frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2 + \langle J'(v^k) - J'(u^*), v^k - v^{k+1} \rangle \\
 &\quad + 2\gamma \langle v^k - u^k, v^k - v^{k+1} \rangle + \gamma \langle u^k - v^k, u^k - u^{k+1} \rangle + \gamma \langle v^{k+1} - v^k, u^{k+1} - u^k \rangle \\
 &\leq -\left(\frac{d}{2\rho} + \frac{\gamma}{2}\right) \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \gamma \|u^k - v^k\|^2 \\
 &\quad - \frac{1}{A} \|J'(v^k) - J'(u^*)\|^2 + \|J'(v^k) - J'(u^*)\| \|v^{k+1} - v^k\| \\
 &\quad + 2\gamma \|u^k - v^k\| \|v^{k+1} - v^k\| + \gamma \|u^k - v^k\| \|u^{k+1} - u^k\| + \gamma \|v^{k+1} - v^k\| \|u^{k+1} - u^k\| \\
 &= -\frac{1}{2} (\zeta^k)^T \mathcal{N} \zeta^k
 \end{aligned}$$

où $(\zeta^k)^T = (\|u^k - v^k\|, \|u^{k+1} - u^k\|, \|v^{k+1} - v^k\|, \|J'(v^k) - J'(u^*)\|)$ et où $\mathcal{N}$ est la matrice symétrique suivante

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 2\gamma & -\frac{\gamma}{\varepsilon} & -2\gamma & 0 \\ -\frac{\gamma}{\varepsilon} & \frac{c}{\varepsilon} & -\gamma & 0 \\ -2\gamma & -\gamma & \frac{d}{\rho} + \gamma & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{2}{A} \end{pmatrix}$$

Nous montrons maintenant qu'il est possible de choisir les paramètres ε et ρ de manière à ce que la matrice $\mathcal{N}$ soit définie positive. Cette dernière propriété est vérifiée sous les conditions suivantes

$$d_1(\varepsilon) > 0 \quad (65)$$

$$d_2(\rho, \varepsilon) > 0 \quad (66)$$

$$d_3(\rho, \varepsilon) > 0 \quad (67)$$

avec

$$\begin{aligned}
 d_1(\varepsilon) &= \begin{vmatrix} 2\gamma & -\gamma \\ -\gamma & \frac{c}{\varepsilon} \end{vmatrix} = \frac{2\gamma c}{\varepsilon} - \gamma^2 & d_2(\rho, \varepsilon) &= \begin{vmatrix} 2\gamma & -\frac{\gamma}{\varepsilon} & -2\gamma \\ -\gamma & \frac{c}{\varepsilon} & -\gamma \\ -2\gamma & -\gamma & \frac{d}{\rho} + \gamma \end{vmatrix} \\
 d_3(\rho, \varepsilon) &= \det(\mathcal{N}) = \begin{vmatrix} 2\gamma & -\frac{\gamma}{\varepsilon} & -2\gamma & 0 \\ -\frac{\gamma}{\varepsilon} & \frac{c}{\varepsilon} & -\gamma & 0 \\ -2\gamma & -\gamma & \frac{d}{\rho} + \gamma & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{2}{A} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

La condition (65) sur ε est vérifiée si

$$\varepsilon < \frac{2c}{\gamma} \quad (68)$$

La condition (66) liant ρ et ε se traduit par

$$\rho < \frac{d(2c - \gamma\varepsilon)}{\gamma(2c + 7\varepsilon\gamma)}$$

et la condition (67) est équivalente à

$$\rho < \frac{2d(2c - \gamma\varepsilon)}{A(2c - \varepsilon\gamma) + 2\gamma(2c + 7\varepsilon\gamma)}$$

On ne retiendra que cette dernière condition sur ρ en fonction de ε .

On peut aussi avoir des conditions sur ε en fonction de ρ et sur ρ indépendamment de ε . En effet, la matrice $\mathcal{N}$ est définie positive sous les conditions suivantes

$$d_1(\rho) > 0 \quad (69)$$

$$d_3(\rho, \varepsilon) > 0 \quad (70)$$

avec

$$d_1(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \frac{2}{A} & 0 & -1 \\ 0 & 2\gamma & -2\gamma \\ -1 & -2\gamma & \frac{d}{\rho} + \gamma \end{vmatrix} = \frac{4\gamma}{A} \left(\frac{d}{\rho} - (A + \gamma) \right)$$

et

$$d_3(\rho, \varepsilon) = \det(\mathcal{N}) = \begin{vmatrix} \frac{2}{A} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2\gamma & -2\gamma & -\gamma \\ -1 & -2\gamma & \frac{d}{\rho} + \gamma & -\gamma \\ 0 & -\gamma & -\gamma & \frac{c}{\varepsilon} \end{vmatrix}$$

La condition (69) sur ρ est vérifiée si

$$\rho < \frac{d}{A + \gamma}$$

La condition (70) liant ρ et ε se traduit par

$$\varepsilon < \frac{2c(2d - \rho(A + 2\gamma))}{\gamma(2d - \rho(A + 14\gamma))}$$

La fin de la preuve est semblable à celle de la preuve du §IV.4.1. ■

IV.4.3 Application numérique

Il est bien connu que des algorithmes tels que l'algorithme du gradient ou celui du gradient à pas optimal convergent de manière très lente quand ils sont appliqués à des problèmes mal conditionnés. De ce fait, afin de bien apprécier le comportement de l'Algorithme III.1, nous proposons de l'appliquer à de tels problèmes. Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le problème de minimisation quadratique suivant

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} u' \mathcal{M} u + b' u \right) \quad (71)$$

où $\mathcal{M}$ est une matrice $n \times n$ symétrique définie positive et b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$

Nous supposons que la matrice $\mathcal{M}$ est mal conditionnée (la plus petite valeur propre de $\mathcal{M}$, $\lambda_{\min}$, et la plus grande, $\lambda_{\max}$, sont telles que le conditionnement $\chi(\mathcal{M}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ est très supérieur à l'unité). Un pas de l'algorithme du gradient s'écrit (en ayant ramené la solution à zéro par un changement d'origine)

$$v^{k+1} = (I - \rho \mathcal{M}) v^k \quad (72)$$

où I est la matrice identité dans $\mathbb{R}^n$. Avec $K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ et $L(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ un pas de l'algorithme de résolution/régularisation s'écrit

$$u^{k+1} = u^k - \varepsilon \gamma (u^k - v^k) \quad (73)$$

$$v^{k+1} = v^k - \rho \mathcal{M} v^k - \rho \gamma (v^k - u^k) \quad (74)$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} = \mathcal{N}(\rho, \varepsilon) \begin{pmatrix} u^k \\ v^k \end{pmatrix}$$

où la matrice $\mathcal{N}(\rho, \varepsilon)$ est la matrice $2n \times 2n$ suivante

$$\mathcal{N}(\rho, \varepsilon) = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon \gamma)I & \varepsilon \gamma I \\ \rho \gamma I & (1 - \rho \gamma)I - \rho \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

On démontre, dans le cas considéré ici où $\mathcal{M}$ est symétrique semi-définie positive, que la matrice $I - \rho \mathcal{M}$ a comme rayon spectral optimal (minimal) $\bar{\mu} = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$, obtenu pour $\bar{\rho} = 2/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$. En prenant dans (74) $\rho = \bar{\rho}$, le ρ optimal pour (72), on va démontrer ci-après que le rayon spectral de $\mathcal{N}$ est supérieur à celui de la matrice $(I - \rho \mathcal{M})$.

À un choix de ρ dans (72) correspondent des valeurs propres $\mu(\rho)$ pour la matrice $(I - \rho \mathcal{M})$ intervenant dans (72). Dans la suite, on notera tout simplement μ une quelconque de ces valeurs propres, mais on se souviendra de la dépendance de μ en ρ (avec notamment la propriété $\lim_{\rho \rightarrow 0} \mu = 1$).

L'idée est d'exprimer les valeurs propres λ de l'opérateur intervenant dans le second membre de (73)–(74) (fonctions de $(\varepsilon, \rho, \gamma)$) comme des fonctions de μ , ce qui sera possible à condition de considérer la même valeur de ρ dans (72) et (74). Pour cela, on note $(u, v)^T$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ et l'on a

$$\lambda u = (1 - \varepsilon \gamma)u + \varepsilon \gamma v \quad (75)$$

$$\lambda v = (I - \rho \mathcal{M})v - \rho \gamma (v - u) \quad (76)$$

De (75), on tire $u = (\lambda - 1 + \varepsilon \gamma)^{-1} \varepsilon \gamma v$, que l'on reporte dans (76), ce qui donne

$$\frac{\lambda(\lambda - 1 + \varepsilon \gamma) + \rho \gamma (\lambda - 1)}{\lambda - 1 + \varepsilon \gamma} v = (I - \rho \mathcal{M})v \quad (77)$$

Cette équation montre que si (μ, v) est une paire de valeur propre–vecteur propre pour $(I - \rho \mathcal{M})$ ⁽²⁾, alors les solutions de l'équation suivante sont des valeurs propres de l'opérateur au second membre de (75)–(76) pour le même vecteur propre v et pour u déduit par la relation (75)

$$\frac{\lambda(\lambda - 1 + \varepsilon \gamma) + \rho \gamma (\lambda - 1)}{\lambda - 1 + \varepsilon \gamma} = \mu \iff \lambda^2 + \lambda((\varepsilon + \rho)\gamma - 1 - \mu) + \mu(1 - \varepsilon \gamma) - \rho \gamma = 0 \quad (78)$$

Cette équation est du second degré car à une valeur propre μ correspondent deux valeurs propres λ puisque le système est de dimension double. Comme la matrice associée à l'algorithme (73)–(74) n'est pas symétrique (si $\varepsilon \neq \rho$), les valeurs propres λ peuvent être réelles ou complexes conjuguées.

Comme la matrice $I - \rho \mathcal{M}$ a comme rayon spectral optimal (minimal) $\bar{\mu} = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$, obtenu pour $\bar{\rho} = 2/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$, la matrice $I - \rho \mathcal{M}$ a une valeur propre égale à $\bar{\mu}$ et une autre égale à $-\bar{\mu}$, les autres valeurs propres étant comprises entre ces deux valeurs.

On va montrer que pour toute valeur propre μ , l'une au moins des deux valeurs propres λ associées via l'équation (78) est telle que

$$|\lambda| > |\mu| \quad (79)$$

²Comme cette matrice est symétrique, μ est forcément réelle

Comme ceci s'applique aussi à la valeur propre $\bar{\mu}$ qui détermine le rayon spectral de l'algorithme (72), on peut en conclure que le rayon spectral pour l'algorithme (73)–(74) est nécessairement supérieur à celui de l'algorithme (72). Cette conclusion est valable pour toute matrice $\mathcal{M}$ symétrique semi-définie positive, mais on n'oubliera pas que cette conclusion s'applique seulement à la situation où l'on se contraint à utiliser le ρ optimal pour (72) (à savoir $\rho = 2/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$) aussi dans l'algorithme (73)–(74).

Preuve de (79) Les λ sont reliées aux μ via l'équation (78) qui est du second degré en λ . Les conditions pour que les racines d'une équation $ax^2 + bx + c = 0$ soient de module inférieur à 1 sont [19, Eqs. (1.149)–(1.150)]

$$c^2 < a^2 \quad \text{et} \quad (c + a)^2 > b^2$$

Pour que les racines soient de module inférieur à $\alpha > 0$, il suffit de faire le changement de variable $x = \alpha y$ et de donner les conditions pour que l'équation $\alpha x^2 y^2 + bxy + c = 0$ aient des racines y de module inférieur à 1. Ces conditions sont donc

$$c^2 < \alpha^4 a^2 \quad \text{et} \quad \alpha^2 b^2 < (c + \alpha^2 a)^2$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a (voir (78))

$$\alpha^2 = \mu^2, \quad c = \mu(1 - \varepsilon\gamma) - \rho\gamma \quad b = (\varepsilon + \rho)\gamma - 1 - \mu \quad a = 1$$

On obtient donc les conditions

$$\underbrace{(\mu(1 - \varepsilon\gamma) - \rho\gamma)^2 < \mu^4}_{(i)} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mu^2((\varepsilon + \rho)\gamma - 1 - \mu)^2 < (\mu(1 - \varepsilon\gamma) - \rho\gamma + \mu^2)^2}_{(ii)}$$

La condition (i) implique

$$\mu(1 - \varepsilon\gamma - \mu) < \rho\gamma < \mu(1 - \varepsilon\gamma + \mu)$$

On observe que le membre de gauche est toujours plus petit que le membre de droite quel que soit le signe de μ . Par ailleurs, ces conditions nécessitent que le membre de droite soit positif puisque $\rho\gamma$ l'est aussi.

La condition (ii) implique

$$\rho\gamma > \frac{2\mu(1 - \varepsilon\gamma + \mu)}{1 + \mu}$$

dans la mesure où $\rho\gamma > 0$. En rapprochant ces conditions, on obtient la condition nécessaire

$$\frac{2\mu(1 - \varepsilon\gamma + \mu)}{1 + \mu} < \mu(1 - \varepsilon\gamma + \mu) \iff 1 < \mu$$

puisque l'on rappelle que $\mu > -1$ et que $\mu(1 - \varepsilon\gamma + \mu)$ doit être positif. La condition $\mu > 1$ est impossible et donc l'une au moins des racines de (78) a un module supérieur à $|\mu|$, C.Q.F.D.

Exemple IV.1 On prend pour $\mathcal{M}$ la matrice symétrique 4×4 suivante

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 10 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 1000 \end{pmatrix}$$

et pour b le vecteur nul. Les valeurs propres de $\mathcal{M}$ sont 0,899 et 1000,1. La solution du problème (71) est le vecteur nul. Un pas de l'algorithme du gradient est décrit par (72) où I est la matrice identité dans $\mathbb{R}^4$. Le meilleur taux de convergence (le plus petit rayon spectral de la matrice $(I - \rho\mathcal{M})$) en fonction de ρ est de l'ordre de 0,998. Il a été obtenu pour $\rho = 0,0019$. Ce taux de convergence est très mauvais.

Algorithme parallèle de résolution/régularisation Avec $K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ et $L(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$, un pas de l'Algorithme (parallèle) IV.3 est décrit par (73)–(74). Le meilleur taux de convergence (le plus petit rayon spectral de la matrice $\mathcal{N}$ de dimension 8×8), pour des valeurs de γ allant de 0,1 à 5, avec un pas de 0,1 a été obtenu pour $\gamma = 0,1$ et il est aussi de l'ordre de 0,998. Il a été obtenu pour $\varepsilon = 7,121$ et $\rho = 0,0019$.

Algorithme séquentiel de résolution/régularisation Avec $K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ et $L(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ un pas de l'Algorithme (séquentiel) IV.4 s'écrit

$$\begin{aligned}v^{k+1} &= v^k - \rho \mathcal{M} v^k - \rho \gamma (v^k - u^k) \\u^{k+1} &= (1 - \varepsilon \gamma + \varepsilon \rho \gamma^2) u^k + \varepsilon \gamma ((1 - \rho \gamma) I - \rho \mathcal{M}) v^k\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} = \mathcal{N}^* \begin{pmatrix} u^k \\ v^k \end{pmatrix}$$

où la matrice $\mathcal{N}^*$ est la matrice suivante

$$\mathcal{N}^*(\rho, \varepsilon) = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon \gamma + \varepsilon \rho \gamma^2) I & \varepsilon \gamma ((1 - \rho \gamma) I - \rho \mathcal{M}) \\ \rho \gamma I & (1 - \rho \gamma) I - \rho \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

Le meilleur taux de convergence qu'on a pu obtenir est de l'ordre de 0,975. Il a été obtenu pour $\gamma = 10^5$, $\rho = 9,29897 \times 10^{-4}$ et $\varepsilon = 1,01024 \times 10^{-5}$. $\square$

Exemple IV.2 On prend pour $\mathcal{M}$ la matrice diagonale 2×2 suivante

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

et pour b le vecteur nul. Le meilleur taux de convergence obtenu avec l'Algorithme du gradient est de l'ordre de 0,98. Il est obtenu pour $\rho = \bar{\rho} = 2/101$. Avec l'Algorithme (séquentiel) IV.4, on arrive à obtenir un taux de convergence égal à 0,859 obtenu pour $\gamma = 10^5$, $\rho = \bar{\rho} = 2/101$ et $\varepsilon = 1,00037 \times 10^{-5}$. $\square$

IV.5 Cas d'un opérateur de point-selle de Lagrangien

Nous nous intéressons maintenant à la régularisation suivie d'un pas d'optimisation dans le cas où l'opérateur en question dérive d'un problème d'optimisation sous contraintes explicites. Nous considérons deux espaces de Hilbert $\mathcal{U}$ et $\mathcal{C}$. $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ est un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{C}$ est un cône convexe fermé de $\mathcal{C}$. Nous considérons la fonctionnelle convexe $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et l'application $\mathcal{C}$ -convexe $\Theta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ et nous posons le problème d'optimisation sous contraintes suivant

$$\begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} J(u) \\ \text{sous} \\ \Theta(u) \in -\mathcal{C} \end{cases} \quad (80)$$

Dans le cas où J et Θ sont différentiables, l'algorithme de résolution/régularisation appliqué à l'opérateur $\Psi(u, p) : (J'(u) + \Theta'(u)^T p, -\Theta(u))^T$ s'écrit, en notant $z = (u, p)$ et $w = (v, q)$

Algorithme IV.5 (Parallèle en (z, w)) À l'étape k , connaissant z^k et w^k calculer z^{k+1} et w^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires

$$\begin{aligned} \min_{z \in \mathcal{H}(w)} & \left[\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{K}(z) + \left\langle \gamma(z^k - w^k) - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{K}'(z^k), z \right\rangle \right] \\ \min_{w \in \mathcal{H}^{\text{ad}}(\mathcal{K})} & \left[\frac{1}{\rho} \mathcal{H}(w) + \left\langle \psi(w^k) + \gamma(w^k - z^k) - \frac{1}{\rho} \mathcal{H}'(w^k), w \right\rangle \right] \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les fonctions auxiliaires $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$ sont de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z) &= K(u) + \frac{1}{2} \|p\|^2 \\ \mathcal{H}(w) &= L(v) + \frac{1}{2} \|q\|^2 \end{aligned}$$

un pas de ce dernier algorithme s'écrit

Algorithme IV.6 À l'étape k , connaissant u^k , p^k , v^k et q^k calculer u^{k+1} , p^{k+1} , v^{k+1} et q^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires en v et u ci-dessous et en effectuant des itérations de pas de gradient pour les variables p et q

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{U}} & \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \gamma(u^k - v^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \\ p^{k+1} &= p^k - \varepsilon \gamma(p^k - q^k) \\ \min_{v \in \mathcal{V}} & \left[\frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle J'(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle + \langle q^k, \Theta'(v^k), v \rangle \right] \\ q^{k+1} &= P \left(q^k + \rho \left[\Theta(v^k) - \gamma(q^k - p^k) \right] \right) \end{aligned}$$

Ici, P désigne la projection sur C^* (si $C = \{0\}$, P est alors l'identité).

Remarque IV.2 Contrairement à l'Algorithme II.7 où la variable duale p est calculée de manière séquentielle, ce nouvel algorithme — même dans sa version séquentielle — calcule les variables duales p et q de manière parallèle par rapport à "leur" variable primale correspondante. $\square$

Chapitre V

Forte Monotonie au Premier Niveau et Hypothèse de Dunn au Second Niveau

Nous considérons une application Ψ d'un espace de Hilbert $\mathcal{W}$ dans son dual $\mathcal{W}^*$ et $\mathcal{W}^{\text{ad}}$ un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{W}$. Nous posons le problème variationnel suivant : trouver $w^* \in \mathcal{W}^{\text{ad}}$ tel que

$$\langle \Psi(w^*), w - w^* \rangle \geq 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}^{\text{ad}} \quad (1)$$

Nous supposons que l'espace $\mathcal{W}$ est le produit de deux sous-espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de manière à pouvoir écrire

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \quad \mathcal{W}^{\text{ad}} = \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad \mathcal{U}^{\text{ad}} \subset \mathcal{U} \quad \mathcal{V}^{\text{ad}} \subset \mathcal{V} \quad (2)$$

où $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ et $\mathcal{V}^{\text{ad}}$ sont des sous-ensembles convexes fermés. Comme Ψ est une application de $\mathcal{W}$ dans son espace dual $\mathcal{W}^* = \mathcal{U}^* \times \mathcal{V}^*$ nous pouvons écrire

$$\Psi(w) = (\mathcal{A}(w), \mathcal{B}(w))$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ désignent respectivement la composition de Ψ avec la projection sur $\mathcal{U}^*$ respectivement $\mathcal{V}^*$.

Sous ces dernières hypothèses, l'inéquation variationnelle (1) est équivalente au système d'inéquations variationnelles suivant : trouver $(u^*, v^*) \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \times \mathcal{V}^{\text{ad}}$ tel que

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathcal{A}(u^*, v^*), u - u^* \rangle &\geq 0 & \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \\ \langle \mathcal{B}(u^*, v^*), v - v^* \rangle &\geq 0 & \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Nous définissons un nouvel opérateur $\Omega(u)$ par

$$\Omega(u) = \mathcal{A}(u, \tilde{v}(u)) \quad (4)$$

$\tilde{v}(u)$ étant la solution paramétrée par u de l'inéquation variationnelle : trouver $\tilde{v}(u) \in \mathcal{V}^{\text{ad}}$ tel que

$$\langle \mathcal{B}(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\text{ad}} \quad (5)$$

Nous ferons plus loin des hypothèses sur $\mathcal{B}$ qui assurent l'existence et l'unicité de $\tilde{v}(u)$. Nous nous intéressons alors à l'inéquation variationnelle en u suivante : trouver $u^* \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$ tel que

$$\langle \Omega(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \quad (6)$$

Par rapport à l'article [9] où l'hypothèse de forte monotonie emboîtée est supposée vérifiée par l'opérateur Ψ , autrement dit l'opérateur $\mathcal{B}(u, v)$ est fortement monotone par rapport à v uniformément.

en u et l'opérateur $\Omega(u)$ est fortement monotone, nous affaiblissons cette dernière hypothèse en supposant que $\Omega(u)$ vérifie uniquement l'hypothèse de Dunn. Il s'agit bien d'une hypothèse plus faible car dans le cas de la forte monotonie enboîtée, modulo des hypothèses de Lipschitz sur les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, Ω est aussi Lipschitzien [9, Lemme 5.1], et nous avons rappelé (Lemme II.1) qu'un opérateur fortement monotone et Lipschitzien vérifie la propriété de Dunn. Grâce au résultat du Lemme II.3, nous pouvons affirmer que l'hypothèse de Dunn sur Ω est plus faible que l'hypothèse de Dunn partielle sur l'opérateur global.

Nous donnons ci-dessous un exemple qui illustre ce résultat et qui montre que notre étude s'adresse à des opérateurs qui ne sont pas nécessairement monotones.

Exemple V.1 On considère $u \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}^{\text{ad}} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u, v) &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} v \\ \mathcal{B}(u, v) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + v\end{aligned}$$

L'opérateur global est l'opérateur linéaire suivant

$$\Psi(u, v) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v \end{pmatrix}$$

Cet opérateur n'est pas monotone. En effet, pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = 0$, le produit scalaire $\langle \Psi(u, v), (u, v) \rangle$ est égal à -1 . Par conséquent, il ne peut pas vérifier l'hypothèse de Dunn partielle. Pourtant, l'opérateur $\mathcal{B}(u, v)$ est fortement monotone en v uniformément en u et l'opérateur $\Omega(u) = \mathcal{A}(u, \tilde{v}(u))$ défini par

$$\Omega(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

vérifie bien l'hypothèse de Dunn avec la constante 2. □

En plus de la forte monotonie de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{V}^{\text{ad}}$ on suppose qu'il est faiblement continu sur tout sous-espace de dimension finie de $\mathcal{V}$, ce qui nous garantit l'existence d'une solution unique paramétrée par u à l'inéquation variationnelle (5) (voir Théorème II.6). Soit u^* une solution de (6) et $v^* = \tilde{v}(u^*)$, alors (u^*, v^*) est une solution de (3) (Lemme II.5).

V.1 Algorithme

L'algorithme que nous proposons est décrit dans le Chapitre III (Algorithme III.1) et le but de l'étude est de donner un théorème de convergence dans le cas où l'opérateur Ω ne vérifie plus l'hypothèse de forte monotonie mais uniquement l'hypothèse de Dunn.

Algorithme V.1 (Parallèle en (u, v)) À l'étape k , connaissant u^k et v^k calculer u^{k+1} et v^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires de minimisation

$$\begin{aligned}\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} & \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \mathcal{A}(u^k, v^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \\ \min_{v \in \mathcal{V}^{\text{ad}}} & \left[\frac{1}{\rho} L(v) + \left\langle \mathcal{B}(u^k, v^k) - \frac{1}{\rho} L'(v^k), v \right\rangle \right]\end{aligned}$$

Nous étudions dans un premier temps la convergence de l'Algorithme V.1 dans le cas simple où $\mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathcal{U}$, $\mathcal{V}^{\text{ad}} = \mathcal{V}$, $K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$, $L(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2$ et où les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs affines. Nous noterons

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u, v) &= Au + Bv + a \\ \mathcal{B}(u, v) &= Cu + Dv + b\end{aligned}$$

Le problème (3) s'écrit maintenant trouver $(u^*, v^*) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ tel que

$$\left. \begin{aligned}\mathcal{A}(u^*, v^*) &= 0 \\ \mathcal{B}(u^*, v^*) &= 0\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

et le problème (6) s'écrit trouver $u^* \in \mathcal{U}$ tel que

$$\Omega(u^*) = 0 \quad (8)$$

Soit $\mathcal{L}^{\text{opt}}$ l'ensemble des solutions du problème (8). Nous rappelons que si u^* est une solution de ce problème, alors $(u^*, \tilde{v}(u^*))$ est une solution du problème initial (7). Une itération de l'Algorithme V.1 s'écrit dans ce cas particulier

$$\begin{aligned}u^{k+1} &= u^k - \varepsilon(Au^k + Bv^k + a) \\ v^{k+1} &= v^k - \rho(Cu^k + Dv^k + b)\end{aligned}$$

Afin de prouver la convergence de l'Algorithme V.1, nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes. Il existe des constantes positives telles que $\forall u, u' \in \mathcal{U}$, et $\forall v, v' \in \mathcal{V}$

$$\|B(v - v')\| \leq Y\|v - v'\| \quad (9)$$

$$\|C(u - u')\| \leq Z\|u - u'\| \quad (10)$$

$$\|D(v - v')\| \leq T\|v - v'\| \quad (11)$$

$$\langle D(v - v'), v - v' \rangle \geq t\|v - v'\|^2 \quad (12)$$

$$\langle \Omega(u) - \Omega(u'), u - u' \rangle \geq r\|\Omega(u) - \Omega(u')\|^2 \quad (13)$$

Remarque V.1 Sous les hypothèses ci-dessus, $\tilde{v}(u)$ est défini explicitement par

$$\tilde{v}(u) = -D^{-1}Cu - D^{-1}b$$

et Ω est l'opérateur affine défini par

$$\Omega(u) = \mathcal{M}u + m$$

où

$$\mathcal{M} = A - BD^{-1}C, \quad m = a - BD^{-1}b$$

□

Lemme V.1 Sous les hypothèses ci-dessus, $\forall u, u' \in \mathcal{U}$,

$$\|\tilde{v}(u) - \tilde{v}(u')\| \leq S\|u - u'\| \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\|\Omega(u) - \Omega(u')\| &= \|\mathcal{M}(u - u')\| \\ &\leq R\|u - u'\|\end{aligned} \quad (15)$$

où $S = Z/t$ et $R = 1/r$

Preuve À l'aide de (12), nous déduisons que D^{-1} est Lipschitzien de constante $1/t$. Comme C est Lipschitzien de constante Z et $\tilde{v}(u) = -D^{-1}Cu - D^{-1}b$, alors (14) est immédiate.

Quant à (15), c'est une conséquence (13) en utilisant l'inégalité de Schwartz au premier membre de (13). ■

Remarque V.2 En définissant la norme d'un opérateur linéaire Q défini sur $\mathcal{U}$ par

$$\|Q\| = \max_{u \in \mathcal{U} - \{0\}} \frac{\|Qu\|}{\|u\|} \quad (16)$$

l'inégalité (15) est équivalente à dire que l'opérateur linéaire $\mathcal{M}$ est borné. □

V.2 Théorème de convergence

Théorème V.2 Nous faisons les hypothèses suivantes

- Le problème (7) admet une solution $\{u^*, v^*\}$
- $\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ est de dimension finie
- les hypothèses (9), (10), (11), (12) et (13) sont vérifiées.

Alors il existe deux polynômes¹ en α et ρ , notés $\mathcal{P}_1(\alpha, \rho)$ et $\mathcal{P}_2(\alpha, \rho)$ et ayant les propriétés suivantes

- soit $\rho_0(\alpha)$ la plus petite racine positive de $\mathcal{P}_1$ (qui existe), alors $\mathcal{P}_1(\alpha, \rho) < 0$ si $0 < \rho < \rho_0(\alpha)$
- si $\alpha > X^2 Y^2 / 4rt$ et si $0 < \rho < (4\alpha rt - X^2 Y^2) / 2\alpha r T^2$ alors $\mathcal{P}_2(\alpha, \rho) > 0$
- si

$$\begin{aligned} 0 < \rho < \min \left(\rho_0(\alpha), \frac{4\alpha rt - X^2 Y^2}{2\alpha r T^2} \right) \\ 0 < \varepsilon < \frac{-\mathcal{P}_2(\alpha, \rho)}{\mathcal{P}_1(\alpha, \rho)} \end{aligned} \quad (17)$$

alors,

- Les suites $\{u^k\}$ et $\{v^k\}$ sont bornées
- la suite $\{\Psi(u^k, v^k)\}$ converge fortement vers $\Psi(u^*, v^*) = 0$
- tout point d'accumulation $\bar{u}$ de $\{u^k\}$ est tel que $\langle \bar{u}, \bar{v}(\bar{u}) \rangle$ est une solution du problème (7).

Nous considérons la fonction

$$\Phi(u, v) = \Phi_1(u) + \alpha \Phi_2(u, v) \quad (18)$$

où α est une constante positive qui sera choisie par la suite et où

$$\Phi_1(u) = \min_{n \in \mathcal{U}(u)} \frac{1}{2\varepsilon} \|u - n^*\|^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \|u - z\|^2$$

z est donc la projection de u sur l'ensemble $\mathcal{U}^{eq}$,

$$\Phi_2(u, v) = \frac{1}{2\rho} \|v - \bar{v}(u)\|^2 = \frac{1}{2\rho} \|v - w\|^2$$

¹dont l'expression explicite sera donnée dans la preuve du théorème

Dans notre cas particulier, l'ensemble $\mathcal{L}^{\text{opt}}$ est égal à $\{u \in \mathcal{M} \mid \Omega(u) = 0\}$. Nous pouvons donc affirmer que z est la solution du problème d'optimisation sous contrainte d'égalité suivant

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{M}} \frac{1}{2\epsilon} \|u - u^*\|^2, \\ \text{sous la contrainte :} \\ \Omega(u^*) = 0 \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de z conduisent au système suivant

$$\Omega(z) = 0 \quad \text{et} \quad \langle z - u, u^* - z \rangle \geq 0 \quad \forall u^* \text{ vérifiant } \Omega(u^*) = 0$$

Lemme V.3 Il existe $X > 0$ tel que

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \|u - z\| \leq X \|\Omega(u) - \Omega(z)\| \quad (19)$$

Remarque V.3 Si Ω était supposé fortement monotone, alors la propriété (19) serait vraie pour tout u et z dans $\mathcal{U}$. Avec seulement l'hypothèse de Dunn sur Ω et son caractère linéaire, nous obtenons la même propriété mais uniquement lorsque z est la projection de u sur $\mathcal{L}^{\text{opt}}$. $\square$

Nous avons besoin des résultats qui suivent pour la preuve du Lemme V.3

Théorème V.4 (de Banach sur l'opérateur inverse [13, Ch. IV, §5, Théorème 3]) Soit $\mathcal{Q}$ un opérateur linéaire borné qui applique biunivoquement un espace de Banach $\mathcal{E}$ sur un espace de Banach $\mathcal{E}_1$. Alors l'opérateur inverse $\mathcal{Q}^{-1}$ est aussi borné.

Corollaire V.5 Soit $\mathcal{Q}$ un opérateur linéaire borné qui applique un espace de Hilbert $\mathcal{D}$ dans un autre espace de Hilbert $\mathcal{D}_1$. Soit S une variété linéaire dans $\text{im } \mathcal{Q}^*$. Alors l'opérateur $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} : S \rightarrow \mathcal{Q}^* I \mathcal{Q} J(S)$$

où I (respectivement J) représente l'isomorphisme canonique de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{D}_1^*$ (respectivement de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$), est fortement monotone.

Preuve Nous démontrons d'abord que l'opérateur $\mathcal{R}$ est inversible. Comme il est surjectif, il suffit de démontrer qu'il est injectif, ou encore que $\ker \mathcal{R} = \{0\}$. Soit x un élément de S tel que $\mathcal{R}x = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^* I \mathcal{Q} J x = 0 &\Rightarrow \langle \mathcal{Q}^* I \mathcal{Q} J x, J x \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle I \mathcal{Q} J x, \mathcal{Q} J x \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \|\mathcal{Q} J x\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow J x \in \ker \mathcal{Q} \end{aligned}$$

Or $\ker \mathcal{Q} = J[(\text{im } \mathcal{Q}^*)^\perp]$ et $S \subset \text{im } \mathcal{Q}^*$ donc $x = 0$. Par ailleurs, $\|I\| = \|J\| = 1$ et comme $\mathcal{Q}$ est borné, $\|\mathcal{Q}\| = \|\mathcal{Q}^*\| = q$, alors $\mathcal{R}$ est borné et $\|\mathcal{R}\| = q^2$. À l'aide du résultat du Théorème V.4, nous déduisons que l'opérateur inverse de $\mathcal{R}$ est borné. Soit $\nu = \|\mathcal{R}^{-1}\|$. Pour un élément x de S , nous pouvons écrire

$$\|\mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} x\|^2 \leq \nu^2 \|\mathcal{R} x\|^2$$

ce qui entraîne

$$\langle \mathcal{Q}^* I \mathcal{Q} J x, J x \rangle = \|\mathcal{Q} x\|^2 \geq \frac{\|\mathcal{Q}^* I \mathcal{Q} J x\|^2}{q^2} \geq \frac{\|x\|^2}{q^2 \nu^2}$$

ce qui achève la démonstration ■

Preuve du Lemme V.3 Il suffit de prouver que $u - z$ est un élément de $\text{im } \mathcal{M}^*$ et d'appliquer le résultat du Corollaire V.5 dans le cas où $S = \text{im } \mathcal{M}^*$. On ne fera plus ici la distinction entre un espace de Hilbert et son dual. La projection z de u sur $\mathcal{U}^{\text{opt}}$ est défini par l'inéquation variationnelle

$$\langle z - u, u^* - z \rangle \geq 0 \quad \forall u^* \text{ vérifiant } \Omega(u^*) = \mathcal{M}u^* + m = 0$$

et elle vérifie aussi

$$\mathcal{M}z + m = 0$$

ce qui mène à

$$\langle z - u, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \text{ vérifiant } \mathcal{M}y = 0$$

Cette dernière proposition est équivalente à dire que $(z - u)$ est orthogonal à $\ker \mathcal{M} = \text{im}(\mathcal{M}^*)^\perp$. Par conséquent, $(u - z)$ est un élément de $\text{im } \mathcal{M}^*$. Nous pouvons donc affirmer, d'après le Corollaire V.5, que

$$\|\Omega(u) - \Omega(z)\| = \|\mathcal{M}(u - z)\| \geq \frac{\|u - z\|}{X}$$

où $X = \|\mathcal{M}\|(\|\mathcal{M}^*\mathcal{M}\|)^{-1}$. ■

Lemme V.6 Soient $\mathcal{U}$ un espace de Hilbert de dimension finie n et $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{U}$ telle que

$$z^{k+1} = Hz^k \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|z^{k+1} - z^k\| = 0$$

alors la suite $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Preuve On considère la décomposition de Jordan $z = \bigoplus_i z_i$ selon les sous-espaces invariants associés aux valeurs propres λ_i de H (on appellera S_i ces sous-espaces). Avec cette décomposition, les itérations s'écrivent

$$z_i^{k+1} = (\lambda_i I_{n_i} + N_i) z_i^k$$

où I_{n_i} est la matrice identité de dimension n_i ($\sum_i n_i = n$) et où

$$N_i = n_i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n_i}$$

On note que $N_i^{n_i} = 0$. De plus $\|z_i^{k+1} - z_i^k\| \rightarrow 0$, $\forall i$.

Alors

$$z_i^{k+1} - z_i^k = (\lambda_i I_{n_i} + N_i)^k ((\lambda_i - 1)I_{n_i} + N_i) z_i^0$$

Posons $b_i = ((\lambda_i - 1)I_{n_i} + N_i) z_i^0$ alors, pour $k \geq n_i$,

$$(\lambda_i I_{n_i} + N_i)^k b_i = \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \lambda_i^{k-j} C_k^j N_i^j \right) b_i \quad (20)$$

où $C'_k = k!/j!(k-j)!$. Compte tenu de la forme de la matrice N_i , on observe que pour la coordonnée n_i , seul le terme $\lambda_i^k b_i$ apporte une contribution non nulle. Si $|\lambda_i| \geq 1$, cette coordonnée de b_i doit être nulle, ou sinon il y a une contradiction avec le fait que $\|z_i^{k+1} - z_i^k\| \rightarrow 0$. Alors, le seul terme dont la coordonnée $n_i - 1$ est non nulle est encore $\lambda_i^k b_i$, dont la coordonnée correspondante doit être nulle, et ainsi de suite. Finalement, tout le vecteur b_i doit être nul si $|\lambda_i| \geq 1$, et alors $z_i^{k+1} = z_i^k = z_i^0$. Or, cette égalité ne peut être vraie pour tout z_i^0 que si $\lambda_i = 1$ et $N_i = 1$, ce qui montre que sous les hypothèses du Lemme V.6, toute valeur propre de module supérieur ou égal à 1 est égale à 1.

Dans le cas où $|\lambda_i| < 1$, le plus grand coefficient de $(\lambda_i I_{n_i} + N_i)^k$ tend vers zéro (voir le second membre de (20)—le plus grand coefficient est d'un ordre inférieur à $k^{n_i} \lambda_i^k$ qui tend vers zéro) et comme $z_i^k = (\lambda_i I_{n_i} + N_i)^k z_i^0$, alors $z_i^k \rightarrow 0$.

Finalement, on a montré que toute valeur propre λ_i de H est soit de module inférieur à 1, soit égale à 1. Pour les composantes z_i sur les sous-espaces S_i associés aux valeurs propres de module inférieur à 1, les suites $\{z_i^k\}$ tendent vers zéro, et pour les autres, elles sont stationnaires. ■

Preuve du Théorème V.2 Nous écrivons les conditions vérifiées par $u^* \quad v^* \quad w^k = \bar{v}(u^k), \quad u^{k+1} \quad v^{k+1} \quad z^{k+1}$

$$Au^* + Bv^* + a = 0$$

$$Cu^* + Dv^* + b = 0$$

$$w^k = -D^{-1}Cu^k - D^{-1}b$$

$$u^{k+1} = u^k - \varepsilon(Au^k + Bv^k + a) \quad (21)$$

$$v^{k+1} = v^k - \rho(Cu^k + Dv^k + b) \quad (22)$$

Quant à z^{k+1} c'est la solution du problème de minimisation suivant

$$\min_{u^k, v^k, w^k} \frac{1}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2$$

et vérifie donc l'inéquation variationnelle d'optimalité associée à ce dernier problème d'optimisation

$$\forall n^* \in \mathcal{U}^{\text{opt}} \quad \langle z^{k+1} - u^{k+1} | u^* - z^{k+1} \rangle \geq 0 \quad (23)$$

Nous considérons la fonction de Lyapounov définie par (18) dont nous étudions la variation sur un pas d'itération

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(u^{k+1}) - \Phi_1(u^k) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - z^{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|u^k - z^k\|^2 \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - z^k\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|u^k - z^k\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - z^{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - z^k\|^2 \\ &= -\frac{1}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \langle u^{k+1} - z^k | u^{k+1} - u^k \rangle}_{s_1} \\ &\quad - \frac{1}{2\varepsilon} \|z^{k+1} - z^k\|^2 + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \langle z^{k+1} - u^{k+1} | z^{k+1} - z^k \rangle}_{s_2} \end{aligned}$$

L'équation (21) nous mène à

$$s_1 = \langle Au^k + Bv^k + a, z^k - u^{k+1} \rangle$$

En prenant $u' = z^k$ dans (23), on arrive à $s_2 \leq 0$. Nous avons donc l'inégalité suivante

$$(\Delta_1)_{k+1}^k \leq -\frac{1}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|z^{k+1} - z^k\|^2 + s_1$$

Comme $\Omega(z^k) = 0$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} s_1 &= \langle Au^k + Bv^k + a - \Omega(z^k), z^k - u^{k+1} \rangle \\ &= \underbrace{\langle Au^k + Bv^k + a - (Au^k + Bv^k + a), z^k - u^k \rangle}_{t_1} \\ &\quad + \underbrace{\langle (Au^k + Bv^k + a) - (Au^k + Bv^k + a), u^k - u^{k+1} \rangle}_{t_2} \\ &\quad + \underbrace{\langle \Omega(u^k) - \Omega(z^k), z^k - u^k \rangle}_{t_3} + \underbrace{\langle \Omega(u^k) - \Omega(z^k), u^k - u^{k+1} \rangle}_{t_4} \end{aligned}$$

Nous avons

$$t_1 = \langle B(v^k - w^k), z^k - u^k \rangle$$

Comme $z^k - u^k \in \text{im} \mathcal{M}^*$ alors $\|z^k - u^k\| \leq X \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\|$ et donc,

$$t_1 \leq XY \|v^k - w^k\| \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\|$$

$$t_2 = \langle B(v^k - w^k), u^k - u^{k+1} \rangle \leq Y \|v^k - w^k\| \|u^{k+1} - u^k\|$$

$$t_3 = \langle \Omega(u^k) - \Omega(z^k), z^k - u^k \rangle \leq -r \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\|^2$$

$$t_4 = \langle \Omega(u^k) - \Omega(z^k), u^k - u^{k+1} \rangle \leq \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\| \|u^{k+1} - u^k\|$$

Nous arrivons finalement à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} (\Delta_1)_{k+1}^k &\leq -\frac{1}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|z^{k+1} - z^k\|^2 - r \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\|^2 \\ &\quad + XY \|v^k - w^k\| \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\| + Y \|v^k - w^k\| \|u^{k+1} - u^k\| \\ &\quad + \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\| \|u^{k+1} - u^k\| \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant $(\Delta_2)_{k+1}^k = \Phi_2(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi_2(u^k, v^k)$.

$$\begin{aligned} (\Delta_2)_{k+1}^k &= \frac{1}{2\rho} \|v^{k+1} - w^{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\rho} \|v^k - w^k\|^2 \\ &= -\frac{1}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + \underbrace{\frac{1}{2\rho} \|w^{k+1} - w^k\|^2}_{t_5} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\rho} \langle w^{k+1} - w^k, v^{k+1} - v^k \rangle}_{t_6} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \langle w^k - v^{k+1}, w^{k+1} - w^k \rangle}_{t_7} \end{aligned}$$

D'après le Lemme V.1, nous avons l'inégalité suivante pour t_5

$$t_5 \leq \frac{S^2}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2$$

$$\begin{aligned}
t_6 &= \langle w^k - v^{k+1}, C u^k + D v^k + b \rangle \\
&= \langle w^k - v^{k+1}, (C u^k + D v^k + b) - (C u^k + D v^k + b) \rangle \\
&= \langle w^k - v^k, D(v^k - w^k) \rangle + \langle v^k - v^{k+1}, D(v^k - w^k) \rangle \\
&\leq -t \|v^k - w^k\|^2 + T \|v^{k+1} - v^k\| \|v^k - w^k\| \\
\\
t_7 &= \frac{1}{\rho} \langle w^k - v^{k+1}, w^{k+1} - w^k \rangle \\
&= \frac{1}{\rho} \langle w^k - v^k + v^k - v^{k+1}, w^{k+1} - w^k \rangle \\
&\leq \frac{S}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| [\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\|]
\end{aligned}$$

Nous aboutissons finalement à

$$\begin{aligned}
(\Delta_2)_k^{k+1} &\leq -\frac{1}{2\rho} \|u^{k+1} - v^k\|^2 - t \|v^k - w^k\|^2 + \frac{S^2}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2 \\
&\quad + T \|v^{k+1} - v^k\| \|v^k - w^k\| + \frac{S}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| [\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\|]
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Delta_k^{k+1} &= (\Delta_1)_k^{k+1} + \alpha (\Delta_2)_k^{k+1} \\
&\leq -\frac{1}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|z^{k+1} - z^k\|^2 - r \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\|^2 \\
&\quad - \frac{\alpha}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \alpha t \|v^k - w^k\|^2 + \frac{\alpha S^2}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2 \\
&\quad + \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\| \|u^{k+1} - u^k\| \\
&\quad + XY \|v^k - w^k\| \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\| + Y \|v^k - w^k\| \|u^{k+1} - u^k\| \\
&\quad + \alpha T \|u^{k+1} - v^k\| \|v^k - w^k\| + \frac{\alpha S}{\rho} \|u^{k+1} - u^k\| [\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\|] \\
&= -\frac{1}{2} (\zeta^k)^T \mathcal{N} \zeta^k - \frac{1}{2\varepsilon} \|z^{k+1} - z^k\|^2
\end{aligned} \tag{24}$$

où $(\zeta^k)^T = (\|u^{k+1} - v^k\|, \|\Omega(z^k) - \Omega(u^k)\|, \|v^k - w^k\|, \|u^{k+1} - u^k\|)$ et où $\mathcal{N}$ est la matrice symétrique suivante

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\rho} & 0 & -\alpha T & \frac{-\alpha S}{\rho} \\ 0 & 2r & -XY & -1 \\ -\alpha T & -XY & 2\alpha t & -Y - \frac{\alpha S}{\rho} \\ \frac{-\alpha S}{\rho} & -1 & -Y - \frac{\alpha S}{\rho} & \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\alpha S^2}{\rho} \end{pmatrix}$$

Nous montrons maintenant qu'il est possible de choisir les paramètres α , ε et ρ de telle sorte que la matrice $\mathcal{N}$ soit définie positive. Cette dernière propriété se traduit par les 4 conditions suivantes

$$\frac{\alpha}{\rho} > 0 \quad \frac{2\alpha r}{\rho} > 0$$

qui sont évidentes, et

$$d_1(\alpha, \varepsilon, \rho) = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\rho} & 0 & -\alpha T \\ 0 & 2r & -XY \\ -\alpha T & -XY & 2\alpha t \end{vmatrix} = \frac{\alpha}{\rho} [-2\alpha r T^2 \rho + 4\alpha r t - X^2 Y^2] > 0 \quad (25)$$

$$d_2(\alpha, \varepsilon, \rho) = \det(\mathcal{N}) > 0 \quad (26)$$

En posant

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1 & \mathcal{N}_2 \\ \mathcal{N}_3 & \mathcal{N}_4 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\rho} & 0 \\ 0 & 2r \end{pmatrix} & \mathcal{N}_2 &= \begin{pmatrix} \alpha T & \frac{-\alpha S}{\rho} \\ -XY & -1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{N}_3 &= \mathcal{N}_2^T = \begin{pmatrix} -\alpha T & -XY \\ \frac{-\alpha S}{\rho} & -1 \end{pmatrix} & \mathcal{N}_4 &= \begin{pmatrix} 2\alpha t & -Y - \frac{\alpha S}{\rho} \\ -Y - \frac{\alpha S}{\rho} & \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\alpha S^2}{\rho} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nous pouvons calculer le déterminant de la matrice $\mathcal{N}$ en utilisant la formule suivante

$$\det(\mathcal{N}) = \det(\mathcal{N}_1) \det(\mathcal{N}_4 - \mathcal{N}_3 \mathcal{N}_1^{-1} \mathcal{N}_2)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{N}_1) &= \frac{2\alpha r}{\rho} \\ \det(\mathcal{N}_4 - \mathcal{N}_3 \mathcal{N}_1^{-1} \mathcal{N}_2) &= \begin{vmatrix} -\alpha \rho T^2 + 2\alpha t - \frac{X^2 Y^2}{2r} & -\left(\frac{\alpha S}{\rho} + \alpha ST + Y + \frac{XY}{2r}\right) \\ -\left(\frac{\alpha S}{\rho} + \alpha ST + Y + \frac{XY}{2r}\right) & \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2\alpha S^2}{\rho} - \frac{1}{2r} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2r\varepsilon\rho^2} [\varepsilon\mathcal{P}_1(\alpha, \rho) + \mathcal{P}_2(\alpha, \rho)] \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(\alpha, \rho) &= \alpha T^2 \rho^3 + 2\rho^2 (\alpha^2 r S^2 T^2 - \alpha t - 2\alpha r STY - \alpha STXY - rY^2 - XY^2) \\ &\quad + 2\alpha\rho (S^2 X^2 Y^2 - 4\alpha r S^2 t - 2\alpha r S^2 T - 2rSY - SXY) - 2\alpha^2 r S^2 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\alpha, \rho) &= \rho^2 (4\alpha r t - 2\alpha r \rho T^2 - X^2 Y^2) \\ &= \frac{\rho^3}{\alpha} d_1(\alpha, \varepsilon, \rho) \end{aligned} \quad (28)$$

On a donc

$$\det \mathcal{N} = \frac{\alpha}{\varepsilon \rho^3} [\varepsilon \mathcal{P}_1(\alpha, \rho) + \mathcal{P}_2(\alpha, \rho)] \quad (29)$$

La condition (25) est vérifiée pour α et ρ vérifiant les conditions suivantes

$$\alpha > \frac{X^2 Y^2}{4rt} \quad (30)$$

$$0 < \rho < \frac{4\alpha r t - X^2 Y^2}{2\alpha r T^2} \quad (31)$$

En conséquence, d'une part pour ρ vérifiant la condition (31), le polynôme $\mathcal{P}_2(\alpha, \rho)$ est strictement positif. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(\alpha, 0) &= -\alpha^2 r S^2 < 0 \\ \mathcal{P}'_{1\rho}(\alpha, 0) &= 2\alpha (S^2 X^2 Y^2 - 4\alpha r S^2 t - 2\alpha r S^2 T - 2rSY - SXY) < 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est une conséquence de la condition (30) sur α . Comme $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_1(\alpha, \rho) = +\infty$, nous déduisons des deux dernières inégalités que le polynôme $\mathcal{P}_1(\alpha, \rho)$ est négatif pour ρ compris entre 0 et sa plus petite racine positive $\rho_0(\alpha)$. Par conséquent, la condition (26) est vérifiée pour ρ et ε vérifiant les conditions

$$0 < \rho < \min \left(\rho_0(\alpha), \frac{4\alpha r t - X^2 Y^2}{2\alpha r T^2} \right) \quad (32)$$

$$0 < \varepsilon < -\frac{\mathcal{P}_2(\alpha, \rho)}{\mathcal{P}_1(\alpha, \rho)} \quad (33)$$

En conclusion, pour α , ρ et ε vérifiant les inégalités (30), (32) et (33), la matrice $\mathcal{N}$ est définie positive. Par conséquent, Δ^{k+1} est négatif. La suite $\{\Phi_1(u^k) + \alpha\Phi_2(u^k, v^k)\}$ est strictement décroissante. Comme elle est positive, elle est convergente et donc bornée, et la différence de deux termes consécutifs tend nécessairement vers 0. Nous en déduisons donc d'après (24) que la suite $\{\zeta^k\}$ converge vers $(0, 0, 0, 0)^T$. En particulier,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\Omega(u^k) - \Omega(z^k)\| = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^{k+1} - u^k\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|Au^k + Bv^k + a\| = 0 \quad (34)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|v^{k+1} - v^k\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|Cu^k + Dv^k + b\| = 0 \quad (35)$$

Soit (u^*, v^*) un élément de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ tel que

$$\begin{aligned} Au^* + Bv^* + a &= 0 \\ Cu^* + Dv^* + b &= 0 \end{aligned}$$

En considérant les suites $\{(u^k - u^*)\}$ et $\{(v^k - v^*)\}$, l'Algorithme V.1 s'écrit

$$\begin{aligned} u^{k+1} - u^* &= (I - \varepsilon A)(u^k - u^*) - \varepsilon B(v^k - v^*) \\ v^{k+1} - v^* &= -\rho C(u^k - u^*) + (I - \rho D)(v^k - v^*) \end{aligned}$$

La suite $\{\zeta^k\} = (u^k - u^*, v^k - v^*)^T$ vérifie d'une part

$$\zeta^{k+1} = H\zeta^k$$

où

$$H = \begin{pmatrix} I_u - \varepsilon A & -\varepsilon B \\ -\rho C & I_v - \rho D \end{pmatrix}$$

et d'autre part, d'après (34) et (35),

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\zeta^{k+1} - \zeta^k\| = 0$$

Grâce au résultat du Lemme V.6, nous déduisons que les suites $\{u^k\}$ et $\{v^k\}$ sont bornées.

Soit $\bar{u}$ un point d'accumulation de la suite $\{u^k\}$. Nous considérons la sous-suite $\{k_i\}$ telle que $\{u^{k_i}\}$ converge vers $\bar{u}$. Nous montrons que $\bar{u}$ est un élément de $\mathcal{L}^{opt}$ autrement dit, $\bar{u}$ vérifie la condition nécessaire et suffisante d'optimalité $\Omega(\bar{u}) = 0$.

D'une part, comme u^{k_i} converge vers $\bar{u}$ et Ω vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante $1/r$, et est donc Lipschitzien de constante $1/r$, alors $\Omega(u^{k_i})$ converge vers $\Omega(\bar{u})$. D'autre part, $\Omega(u^{k_i})$ comme nous venons de le voir, converge vers 0, donc $\Omega(\bar{u}) = 0$. Par conséquent, $\bar{u}$ est bien un élément de $\mathcal{L}^{opt}$ et le couple $(\bar{u}, \bar{v}(\bar{u}))$ est une solution du problème (7), ce qui achève la démonstration. ■

Remarque V.4 Nous limitons notre étude au cas où les contraintes d'ensemble sont absentes et où les opérateurs sont affines. L'exemple suivant montre qu'il est difficile de se prononcer sur la convergence de l'Algorithme V.1 dans le cas d'un opérateur non affine.

Soit $\Omega(u)$ l'opérateur défini par

$$\Omega(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \leq -1 \\ u|u| & \text{si } -1 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq u \end{cases}$$

dont le graphe est représenté sur la Figure V.1. et soit

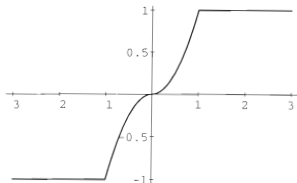


Figure V.1: Courbe de Ω en fonction de u

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &= \Omega(u) - |v| \\ \mathcal{B}(u, v) &= v \end{aligned}$$

Le système d'équations

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &= 0 \\ \mathcal{B}(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

a pour solution unique $(u^*, v^*) = (0, 0)$. Ce que nous avons appelé Ω ci-dessus coïncide bien avec le Ω de la théorie générale défini par

$$\Omega(u) = A(u, \tilde{v}(u))$$

où $\tilde{v}(u)$ est la solution en v paramétrée par u de l'équation $B(u, v) = 0$. Dans cet exemple particulier, $\tilde{v}(u) = 0, \forall u \in \mathbb{R}$, et Ω vérifie bien l'hypothèse de Dunn avec la constante 1. L'Algorithme V.1 s'écrit

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= u^k - \varepsilon(\Omega(u^k) - |v^k|) \\ v^{k+1} &= (1 - \rho)v^k \end{aligned}$$

En posant $\rho \sim dt$ et $\tau = \varepsilon/\rho$, la version continue de l'algorithme ci-dessus s'écrit

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= -\tau(\Omega(u) - |v|) \\ \dot{v} &= -v \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

avec par exemple $\dot{u} = du/dt$. Soit (u_0, v_0) un point au voisinage de $(0, 0)$ avec u_0 et v_0 positifs. On approxime les termes de droite de (36) par leur développement de Taylor au premier ordre autour de (u_0, v_0) afin d'étudier le comportement du système linéaire tangent de (36). On obtient le nouveau système

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau(u_0^2 + 2v_0(u - u_0) - v) \\ -v \end{pmatrix}$$

dont le point d'équilibre se situe à $u = u_0/2$ et $v = 0$. En effectuant le changement de variables

$$u' = u - \frac{u_0}{2} \quad v' = v$$

la matrice du système linéarisé a pour valeurs propres -1 et $-2\tau v_0$. Cette dernière valeur tend vers 0 quand u_0 tend vers 0 (point d'équilibre du système non linéaire). On en déduit qu'au voisinage de 0, la suite $\{u^k\}$ "a du mal" à converger vers 0. Les simulations numériques confirment nos prévisions. $\square$

V.3 Exemple d'application

Nous revenons à l'Exemple V.1 et nous étudions la convergence de l'Algorithme V.1. On a $u \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}, \mathcal{U}^{ad} = \mathbb{R}^2, \mathcal{V}^{ad} = \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} v \\ \mathcal{B}(u, v) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + v \end{aligned}$$

Nous posons le problème suivant trouver $(u^*, v^*) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tel que

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}(u^*, v^*) &= 0 \\ \mathcal{B}(u^*, v^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

L'ensemble S^* des solutions de ce problème est

$$S^* = \{(u_1, u_2, v) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 = u_2 = v\}$$

Un pas de l'Algorithme V.1 s'écrit à l'étape k , connaissant $u^k = (u_1^k, u_2^k)$ et v^k calculer u^{k+1} et v^{k+1} selon le schéma suivant

$$\begin{aligned}u_1^{k+1} &= u_1^k - \varepsilon(-u_1^k + 3u_2^k - 2v^k) \\u_2^{k+1} &= u_2^k - \varepsilon(-u_2^k + v^k) \\v^{k+1} &= v^k - \rho(u_1^k - 2u_2^k + v^k)\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, en posant $W^k = (u_1^k, u_2^k, v^k)^T$

$$W^{k+1} = MW^k$$

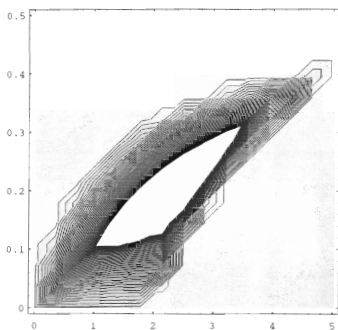
où M est la matrice 3×3 définie comme suit

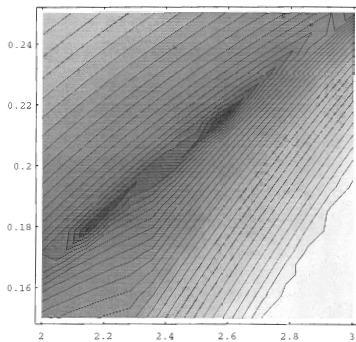
$$M = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & -3\varepsilon & 2\varepsilon \\ 0 & 1 + \varepsilon & -\varepsilon \\ -\rho & 2\rho & 1 - \rho \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de M sont 1, $f_1(\rho, \varepsilon)$ et $f_2(\rho, \varepsilon)$, où

$$\begin{aligned}f_1(\rho, \varepsilon) &= \frac{2 + 2\varepsilon - \rho + \sqrt{\rho(-12\varepsilon + \rho)}}{2} \\f_2(\rho, \varepsilon) &= \frac{2 + 2\varepsilon - \rho - \sqrt{\rho(-12\varepsilon + \rho)}}{2}\end{aligned}$$

Le maximum des modules de f_1 et de f_2 s'annule pour $\rho = \bar{\rho} = 2,4$ et $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = 0,2$, ce qui veut dire que l'Algorithme V.1 converge en un seul pas vers une solution du problème (37). Sur la Figure V.2, on présente le domaine de convergence de l'Algorithme V.1 dans le plan ρ (en abscisse) et ε (en ordonnée) : un point (ρ, ε) est un élément du domaine de convergence si et seulement si $\max\{f_1(\rho, \varepsilon), f_2(\rho, \varepsilon)\} < 1$. Sur la Figure V.3, on fait un zoom autour du point optimal $(\bar{\rho}, \bar{\varepsilon})$.

Figure V.2: Domaine de convergence en fonction de ρ et ϵ

Figure V.3: Zoom autour de $(\bar{\rho}, \bar{z})$

Chapitre VI

Conclusion et Problèmes Ouverts

VI.1 Conclusion

La résolution d'une inéquation variationnelle comporte d'une part des difficultés liées au choix de l'algorithme de résolution et d'autre part aux propriétés vérifiées par l'opérateur impliqué dans l'inéquation variationnelle. Dans ce mémoire, on propose de résoudre une inéquation variationnelle où l'opérateur est monotone (sauf dans la situation considérée où l'opérateur est affine mais peut ne pas être globalement monotone) en utilisant le Principe du Problème Auxiliaire. Ce dernier donne lieu à un algorithme itératif où à chaque pas on résout un problème auxiliaire de minimisation. L'apport original de ce travail porte sur l'affaiblissement des hypothèses dans le cadre d'opérateurs généraux. On donne une preuve de convergence dans le cas où l'opérateur global est défini sur le produit de deux espaces de Hilbert et qui vérifie d'une part l'hypothèse de Dunn partielle par rapport à sa première composante et d'autre part est fortement monotone par rapport à sa deuxième composante. Ceci nous permet de traiter aussi le cas d'opérateurs simplement monotones dans la mesure où on propose un algorithme de résolution/régularisation simultanées dans lequel l'opérateur global obtenu vérifie les propriétés mentionnées ci-dessus.

Dans le Chapitre V, on démontre la convergence du même algorithme avec des hypothèses encore plus faibles que précédemment — on ne suppose même pas la monotonie globale de l'opérateur mais seulement la forte monotonie au premier niveau et l'hypothèse de Dunn pour l'opérateur emboîté. La preuve que nous donnons se limite au cas particulier des opérateurs affines en dimension finie et sans contrainte de type $\mathcal{U}^{\text{ad}}$.

VI.2 Problèmes ouverts

Il reste des questions auxquelles on n'a pas encore donné de réponse et qui mériteraient d'être étudiées. Parmi celles-ci, on peut mentionner les suivantes.

- **Une preuve de convergence de l'algorithme de résolution/régularisation dans le cas particulier d'un opérateur de point-selle de Lagrangien** (les conditions générales s'appliquent bien sûr à ce cas, mais nous cherchons à obtenir des conditions plus spécifiques exploitant la structure particulière des opérateurs "point selle"). Une première tentative a abouti à des conditions de convergence — positivité d'une matrice 8×8 "assez pleine" — difficiles à exploiter. L'utilisation de la méthode adoptée dans [9] mène aussi à des conditions compliquées.
- **L'extension de la résolution/régularisation simultanées au cas des opérateurs multivoques.** L'inéquation variationnelle à résoudre s'écrit dans ce cas : trouver $u^* \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$ et $v^* \in \Psi(u^*)$ tels

que

$$\langle v^*, u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}$$

L'algorithme parallèle de résolution/régularisation s'écrit en introduisant des "petits pas"¹ ρ^k

Algorithme VI.1 (Parallèle en (u, v)) À l'étape k , connaissant u^k et v^k calculer u^{k+1} et v^{k+1} en résolvant les problèmes auxiliaires de minimisation

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left[\frac{1}{\varepsilon} K(u) + \left\langle \gamma(u^k - v^k) - \frac{1}{\varepsilon} K'(u^k), u \right\rangle \right] \quad (1)$$

$$\min_{v \in \mathcal{V}} \left[\frac{1}{\rho^k} L(v) + \left\langle \Psi(v^k) + \gamma(v^k - u^k) - \frac{1}{\rho^k} L'(v^k), v \right\rangle \right] \quad (2)$$

La présentation de cet algorithme comme tel ne paraît pas naturelle. En effet, l'itération (2), qui fait la régularisation, devrait intuitivement converger "plus vite" que l'itération (1), qui fait la résolution. Or, avec l'introduction des petits pas, c'est plutôt le contraire qui va se passer, ce qui rendra les algorithmes très "lents". Des tentatives de preuve de convergence ont été menées à ce sujet. On a aussi étudié la version où on remplace le pas ε par un petit pas $\varepsilon^k = m\rho^k$ où m est une constante positive. Là aussi, on n'a pas eu de résultat sur la convergence de l'algorithme.

- L'extension de la preuve de convergence du Chapitre V à des situations plus générales où il y a des contraintes de type $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ en dimension infinie, et avec des opérateurs non linéaires.
- Enfin, une autre direction qui mériterait d'être exploitée est celle où à chaque étape de l'algorithme de résolution/régularisation, on effectue un pas de résolution —minimisation sans contrainte sur u — suivi d'un nombre fini de pas de régularisation —minimisation sur v —, ce qui veut dire qu'on ne mène pas, à chaque pas la régularisation jusqu'au bout —comme dans l'Algorithme I.2— et en même temps on favorise un peu plus la phase de régularisation.

¹La suite $\{\rho^k\}$ est décroissante et elle vérifie $\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k = +\infty$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} (\rho^k)^2 < +\infty$.

Bibliographie

- [1] A. AUSLENDER. *Optimisation. Méthodes numériques*. Masson, 1976.
- [2] A. AUSLENDER. *Problèmes de Minimax via l'Analyse Convexe et les Inégalités Variationnelles Théorie et Algorithmes*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [3] V. BARBU, Th. PRECUPANU. *Convexity and Optimization in Banach spaces*. D. Reidel Publishing Company, Bucarest, 1986.
- [4] G. COHEN. *Décomposition et Coordination en Optimisation Déterministe Différentiable et Non-Différentiable*. Thèse de Doctorat ès-Sciences Mathématiques, Université de Paris IX-Dauphine, 1984.
- [5] G. COHEN. Optimisation by decomposition and coordination — a unified approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-23, No. 2, pp. 222–232, April 1978.
- [6] G. COHEN. Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 32, No. 3, pp. 277–305, November 1980.
- [7] G. COHEN, D.L. ZHU. Decomposition coordination methods in large scale optimization problems. The nondifferentiable case and the use of augmented Lagrangians. In J.B.Cruz, Ed. *Advances in Large Scale Systems Theory and Applications*, Vol. 1, JAI Press, Greenwich, Connecticut, USA, 1983.
- [8] G. COHEN. Auxiliary problem principle extended to variational inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 59, No. 2, pp. 325–333, November 1988.
- [9] G. COHEN, F. CHAPLAIS. Nested monotony for variational inequalities over product of spaces and convergence of iterative algorithms. *Journal of Optimization and Applications*, Vol. 59, No. 3, December 1988.
- [10] G. COHEN, F. CHAPLAIS. Algorithmes numériques pour les équilibres de Nash. *Revue APIIAFCET* Vol. 20, pp. 273–293, 1986.
- [11] I. EKELAND, R. TEMAM. *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [12] D.L. ZHU. *Optimisation Sous-Différentiable et Méthodes de Décomposition*. Thèse de Doctorat en Mathématiques et Automatique, École des Mines de Paris, Avril 1982.
- [13] A. KOLMOGOROV, S. FOMINE. *Éléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle*. Éditions Mir, Moscou, 1974.
- [14] B. MARTINET. Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives. *Revue d'Automatique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*. R-3, pp. 154–159, 1970.

-
- [15] M.A. MATAOUI. *Contributions à la Décomposition et à l'Agrégation des Problèmes Variationnels*. Thèse de Doctorat en Mathématiques et Automatique, École des Mines de Paris, Septembre 1990.
 - [16] M. MINOUX. *Programmation Mathématique. Théorie et Algorithmes. Tome 2*. Dunod, Paris, 1983.
 - [17] J. B. HIRIART URRUTY, C. LEMARÉCHAL. *Convex Analysis and Optimization Algorithms*, à paraître.
 - [18] Y. NESTOROV. *Efficient Methods for Convex Optimization Problems*. Radio y sviats, Moscou, 1988 (selon communication privée de C. Lemaréchal).
 - [19] E.I JURY. *Sampled-Data Control Systems*. Wiley, 1958.