Autour de l'irrégularité des connexions méromorphes.

Jean-Baptiste Teyssier

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité: Mathématiques

par

Jean-Baptiste Teyssier

Autour de l'irrégularité des connexions méromorphes

Soutenue le 23 septembre 2013 devant la Commission d'examen:

M.	Ahmed ABBES	(Président du jury)
M.	Yves ANDRÉ	(Rapporteur)
M.	Gaëtan CHENEVIER	(Examinateur)
M.	Michel GRANGER	(Rapporteur)
M.	Claude SABBAH	(Directeur de thèse)
M.	Takeshi SAITO	(Rapporteur)

Thèse préparée au
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640
91 128 Palaiseau CEDEX

Résumé

Les deux premières parties de cette thèse s'inscrivent dans le contexte des analogies entre l'irrégularité pour les connexions méromorphes et la ramification sauvage des faisceaux ℓ-adiques. On y développe l'analogue pour les connexions méromorphes de la construction d'Abbes et Saito, tout d'abord dans le cas d'un trait suivant [3], puis en dimension supérieure selon [4].

En première partie, on prouve une formule explicite reliant les invariants produits par la construction d'Abbes et Saito appliquée à un module différentiel $\mathcal{M}$ aux parties les plus polaires des formes différentielles intervenant dans la décomposition de Levelt-Turrittin de $\mathcal{M}$.

Dans la seconde, on généralise en dimension supérieure l'observation issue de la première partie que sur un corps algébriquement clos, les modules produits par la construction d'Abbes et Saito sont des sommes finies de modules exponentiels associés à des formes linéaires. C'est l'analogue de l'un des résultats fondamentaux de [4].

Dans la dernière partie de cette thèse, on montre que le lieu des points stables d'une connexion méromorphe $\mathcal{M}$ le long d'un diviseur lisse est un sous-ensemble de l'intersection des lieux où les faisceaux d'irrégularité de $\mathcal{M}$ et $\mathrm{End}(\mathcal{M})$ sont des systèmes locaux. Enfin, on discute d'une stratégie d'attaque de l'inclusion réciproque, et on démontre à l'aide d'un critère d'André pour les points stables que si elle est vraie en dimension 2, alors elle est vraie en toute dimension.

Abstract

The first two parts of this thesis take place in the realm of analogies between the irregularity phenomenon for meromorphic connections and wild ramification for ℓ-adic sheaves. We develope the analogue for meromorphic connections of Abbes and Saito's construction, first in the case of a trait following [3], and then in higher dimension according to [4].

In the first part, we prove an explicit formula relating the invariants produced by Abbes and Saito's construction applied to a differential module $\mathcal{M}$ to the most polar parts of the differential forms occuring in the Levelt-Turrittin decomposition of $\mathcal{M}$.

In the second part, we generalize to higher dimension the observation coming from the first part that on an algebraically closed field, the modules produced by Abbes and Saito's construction are finite sums of exponential modules associated to linear forms. This is the analogue of one of the fundamental results of [4].

In the last part of this thesis, we prove that the stable point locus of a meromorphic connection with poles along a smooth divisor is a subset of the intersection of the loci where the irregularity sheaves of $\mathcal{M}$ and $\mathrm{End}(\mathcal{M})$ are local systems. Finally, we discuss a strategy to attack the converse inclusion, and we prove that if it is true in dimension 2, then it is true in any dimension. This relies on André's criterion for stable points.

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Claude Sabbah, pour avoir accepté d'encadrer cette thèse et m'avoir inculqué avec générosité et patience tout ce que je sais aujourd'hui des $\mathcal{D}$-modules. Qu'il voit dans ce travail l'expression de ma gratitude.

Cette thèse doit aussi beaucoup aux travaux pionniers d'Ahmed Abbes et Takeshi Saito. Je remercie notamment Ahmed Abbes pour des discussions très stimulantes ainsi que pour l'intérêt porté au présent travail. Je remercie aussi Yves André, Takeshi Saito et Michel Granger pour une lecture à la fois méticuleuse et bienveillante du manuscrit de cette thèse, ainsi que Gaëtan Chenevier pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

De la convivialité du déjeuner de 11h45 à la qualité des échanges scientifiques, le plaisir que j'ai eu à réaliser cette thèse tient aussi aux conditions de travail excellentes offertes par le Centre De Mathématiques Laurent Schwartz. J'en remercie chaleureusement toute l'équipe.

Je remercie aussi vivement Hélène Esnault de me permettre aujourd'hui de poursuivre mon travail outre-Rhin dans des conditions tout aussi exceptionnelles.

Pour finir, j'aimerais remercier Alexei Grinbaum et Alexandre Martin, pour avoir été spontanément présents dans tous les moments qui ont jalonné cette thèse. Des moments de doute aux moments les plus jubilatoires. A vous deux merci.

Table des matières

Introduction

Les deux premières parties de cette thèse s'inscrivent dans le contexte des analogies entre l'irrégularité pour les connexions méromorphes et la ramification sauvage des faisceaux ℓ-adiques. Le point de départ est l'observation dûe à Deligne [10] de

l'analogie entre le fibré à connexion $(\mathcal{O}, d+dx)$ *sur la droite de section horizontale* $\exp(-x)$, *et les faisceaux ℓ-adiques* $\mathcal{L}(\Psi)$ *déduits de revêtements d'Artin-Schreier, sur la droite en caractéristique p.*

On dispose dans ce sens depuis les années 80 de nombreux parallèles entre le nombre d'irrégularité des connexions méromorphes et le conducteur de Swan des faisceaux ℓ-adiques.

Or, c'est un fait ancien que la théorie des connexions méromorphes fournit sur un trait d'égale caractéristique nulle un invariant plus fin que l'irrégularité, à savoir un nombre fini de formes différentielles : si K est un corps de caractéristique nulle et $\mathcal{M}$ un $K((x))$-module différentiel, le théorème de Levelt-Turrittin stipule l'existence d'un entier e et d'une extension galoisienne finie K'/K tels que

$$K'((x^{1/e})) \otimes_{K((x))} \mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\phi \in x^{-1/e}K'[x^{-1/e}]} \mathcal{E}^{\phi} \otimes \mathcal{R}_{\phi} \qquad (0.0.1)$$

où $\mathcal{E}^{\phi} = (K'((x^{1/e})), d+d\phi)$ et $\mathcal{R}_{\phi}$ désigne un $K'((z^{1/e}))$-module différentiel à singularité régulière. Pour un rationnel $r > 1$, on note dans la suite n_{ϕ} le rang de $\mathcal{R}_{\phi}$ et on pose $[\phi] = (1-r) \times$ coefficient le plus polaire de ϕ.

Inspirés par l'analyse micro-locale de Kashiwara et Schapira [21], Abbes et Saito [3] ont associé à tout faisceau ℓ-adique $\mathcal{F}$ sur le point générique d'un trait complet S d'égale caractéristique p, et ce pour tout nombre rationnel $r > 0$, un nombre fini de formes différentielles tordues, généralisant ainsi en rang supérieur la construction du conducteur de Swan raffiné pour les caractères d'Artin-Schreier-Witt développée par Kato [22].

Ces formes sont obtenues comme support d'un faisceau construit à partir de $\mathcal{F}$ via des manipulations de nature géométrique, du foncteur des cycles proches et de la transformation de Fourier ℓ-adique. En particulier, ces ingrédients sont disponibles dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules.

La première partie de cette thèse répond à la question de savoir ce que donne cette construction en égale caractéristique nulle lorsqu'on remplace $\mathcal{F}$ par un module différentiel $\mathcal{M}$. Plus précisément lorsque $r > 1$, on démontre une formule explicite

Théorème 1.

$$\mathfrak{F}\Psi_{\pi}H_r(\mathcal{M}) = \delta_0^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M})} \oplus \bigoplus_{\substack{\phi \in x^{-1/e}K'[x^{-1/e}] \\ \operatorname{ord}_{1/x}\phi = r-1}} \delta_{[\phi]}^{[\mathbb{K}(\phi):\mathbb{K}([\phi])]n^2_{\phi}}, \qquad (0.0.2)$$

où $n^2_{<r-1}(\mathcal{M})$ *est l'entier* $\displaystyle\sum_{\substack{\phi \in x^{-1/e}K'[x^{-1/e}] \\ \operatorname{ord}_{1/x}\phi < r-1}} [\mathbb{K}(\phi):\mathbb{K}]n^2_{\phi}$ *et* $\delta_{[\phi]}$ *désigne le dirac en* $[\phi]$.

qui relie la construction d'Abbes et Saito $\mathfrak{F}\Psi_{\pi}H_r(\mathcal{M})$ appliquée à $\mathcal{M}$ aux formes de degré $\leq r-1$ intervenant dans la décomposition de Levelt-Turrittin de $\mathcal{M}$. En particulier, lorsque $\mathcal{M}$ est de pente unique $r' > 0$, le support du $\mathcal{D}$-module obtenu pour $r = r' + 1$ est ponctuel et correspond à l'ensemble des coefficients dominants (à multiplication par $1-r$ près) des formes de degré r' attachées à $\mathcal{M}$. Il s'agit de l'analogue pour les modules différentiels de [3, 9.3] et [3, 9.10].

Pour démontrer le théorème 1, on commence par se ramener au cas où $K = \mathbb{C}$. Il s'agit d'une manifestation du principe de Lefschetz. La stratégie est alors de réduire le problème à la situation où $\mathcal{M}$ est donné sous forme décomposée tout en contrôlant la façon dont sont affectés les cycles proches qui interviennent dans la construction d'Abbes et Saito. On conclut enfin grâce à divers lemmes d'annulation et à un calcul explicite.

Du fait des difficultés posées par la théorie de la ramification sauvage des corps locaux à corps résiduel non nécessairement parfait, les analogies Irrégularité/Ramification sauvage sont restées confinées jusqu'à présent au cas des courbes. Or grâce aux travaux pionners de Kato, Abbes et Saito [23] [1] [2] [50] [49] [4], on dispose aujourd'hui des prémices d'une théorie de la ramification sauvage en toute dimension dont l'aboutissement est la généralisation de la procédure de spécialisation de [3].

Dans ce contexte, si X est une variété sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, D un diviseur à croisements normaux de X de composantes irréductibles $(D_i)_{i=1,\dots,n}$ et $U = X \setminus D$, le receptable de la construction d'Abbes et Saito associée à $R = a_1D_1 + \cdots + a_nD_n$, $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ [1] est le fibré $T_R = \mathbf{V}(\Omega^1_{X/k}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(R)) \times_X D$ au-dessus de D, et sous une hypothèse de contrôle de la ramification en tout point de D, le spécialisé d'Abbes et Saito d'un faisceaux ℓ-adique sur U est un système local sur T_R de transformée de Fourier à support fini au-dessus de D. Cette propriété de finitude tient à la forme très particulière des faisceaux obtenus par spécialisation, à savoir qu'après restriction à une fibre de T_R, un tel faisceau s'identifie à une somme directe finie d'images inverses par des formes linéaires du faisceau d'Artin-Schreier sur la droite affine. C'est la propriété *d'additivité* [4, 3.1].

Dans le contexte des connexions méromorphes, la construction d'Abbes et Saito fait encore sens. En particulier, pour un hyperplan D de l'espace affine $X = \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, et pour une connexion $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ méromorphe le long de D, notons $\Psi_\pi H_a(\mathcal{M})$ la spécialisation d'Abbes et Saito de $\mathcal{M}$ pour $R = aD$. Soit $x \in D$ et soit $i_{x,D}$ l'inclusion de la fibre $T_{a,x}$ dans T_a. Notons $\rho(\mathcal{M})$ le rang de Poincaré-Katz [2] de $\mathcal{M}$. On démontre dans la deuxième partie de cette thèse le

Théorème 2. *Si $a \geq \rho(\mathcal{M})$, alors le complexe $i^+_{x,D}\Psi_\pi H_a(\mathcal{M})$ est à cohomologie lisse et de plus, $\mathcal{H}^0 i^+_{x,D}\Psi_\pi H_a(\mathcal{M})$ est une somme de modules exponentiels associés à des formes linéaires.*

Ce théorème [3] généralise en dimension supérieure l'observation issue du théorème 1 que sur un corps algébriquement clos, les modules produits par la construction d'Abbes

1. On se contentera de coefficients entiers dans cette introduction, mais comme en dimension 1, on dispose aussi d'une construction pour des coefficients rationnels.

2. Si η est le point générique de D, c'est la plus grande pente qui apparait lorsqu'on restreint $\mathcal{M}$ au point générique du formalisé de $\mathcal{O}_{X,\eta}$ le long de D.

3. La preuve du cas d'une connexion méromorphe le long d'un hyperplan de l'espace affine devrait déjà contenir toutes les idées pour traiter le cas général d'un diviseur lisse dans une variété lisse. Il faut juste faire attention que ce qu'on appelle coordonnées locales en géométrie algébrique sont en fait des morphismes étales, et alors vérifier que de tels morphismes laissent inchangés la validité du théorème 2. Ce point technique ne sera pas abordé dans cette thèse.

et Saito sont de la forme $\mathcal{E}^{\alpha y}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et y coordonnée.

Pour prouver ce résultat, la première difficulté qui intervient est la non-exactitude à gauche de l'image inverse pour les $\mathcal{D}$-modules : elle fait de la notion d'additivité ponctuelle [4] d'un module holonome sur un fibré vectoriel E une notion relativement mauvaise puisque non stable a priori par sous-objet. Pour contourner ce problème, l'idée est d'introduire une condition 7.2.1 plus forte qui a la vertu de bien se comporter vis-à-vis des sous-objets et des cycles proches.

La seconde difficulté est la mise en défaut de la décomposition de Levelt-Turrittin en dimension supérieure à 1. Pour y pallier, on utilise la notion fondamentale de *réseaux canoniques de Malgrange* [37], qui généralise aux connexions méromorphes les réseaux canoniques de Deligne [9] définis dans le cas à singularité régulière. C'est l'outil permettant de montrer que la construction d'Abbes et Saito vérifie la propriété 7.2.1.

On observera que la condition imposée à l'irrégularité de $\mathcal{M}$ dans cette partie est de nature générique, alors que dans [4] elle concerne tous les points du diviseur. Le théorème 2 suggère donc que dans le contexte ℓ-adique, on doit pouvoir obtenir un théorème d'additivité à l'aide d'une condition portant seulement sur le point générique, et ceci au prix de perdre la constance locale du spécialisé d'Abbes et Saito, et donc le caractère fermé du support de son transformé de Fourier, qui en découle dans *loc. it.* Pour les connexions méromorphes, travailler avec cette condition plus faible a cependant le désavantage que l'on obtient a priori pas d'autre information sur les $\mathcal{H}^i$ supérieurs des restrictions que leur lissité. D'autre part, bien que le support d'un $\mathcal{D}$-module cohérent soit toujours fermé, il n'y a rien à dire a priori sur la finitude du support de $\mathfrak{F}\Psi_\pi H_a(\mathcal{M})$ hormis au-dessus du lieu de bonne décomposition formelle de $\mathcal{M}$.

L'un des traits saillants de la théorie des connexions méromorphes en dimension supérieure est la mise en défaut de la décomposition de Levelt-Turrittin au voisinage formel de certains points du diviseur des pôles.

Soient X une variété algébrique complexe, $i : Z \hookrightarrow X$ une hypersurface irréductible lisse et $\mathcal{M}$ une connexion méromorphe sur X à pôles le long de Z. Notons η le point générique de Z. Bien que l'on puisse appliquer tous les résultats connus en dimension 1 à la restriction de $\mathcal{M}$ au point générique du formalisé de $\mathcal{O}_{X,\eta}$ le long de Z, si $P \in Z$, la décomposition (0.0.1) [5] n'a en général pas de raison de descendre en une décomposition de $\mathcal{M}$ sur le point générique de $\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$, car P pourrait être un pôle de l'un des ϕ de (0.0.1) où encore un pôle de la matrice réalisant l'identification (0.0.1). Dans tous les cas, l'obstruction est de nature algébrique. Pour un exemple non trivial de telle non descente, signalons [43].

La bonne notion à introduire dans ce contexte est celle de *bonne décomposition formelle* [46], ou encore de *point stable* et *semi-stable* suivant la terminologie d'André [5]. En particulier pour un point semi-stable, la décomposition de Levelt-Turrittin générique se descend. C'est un résultat fondamental conjecturé par Sabbah [46] et prouvé indépendamment par Kedlaya [26], [27] et Mochizuki [44] qu'on peut toujours se ramener par image inverse à une situation de bonne décomposition formelle après un nombre fini d'éclatements.

Bien avant que l'on dispose de ce résultat de structure spécifique aux connexions

4. Aussi appelée *linéarité ponctuelle* en raison de la forme des modules exponentiels qui interviennent.

5. Dans ce contexte, K est le corps de fonctions de Z. Dans la suite de cette introduction, on fera l'hypothèse simplificatrice que $K' = K$ et $e = 1$.

méromorphes, diverses mesures de l'irrégularité faisant sens pour n'importe quel $\mathcal{D}$-module holonome ont été développées dans les années 80. L'une d'elle est géométrique et correspond à la donnée pour chaque rationnel ≥ 1 d'une sous-variété lagrangienne de $T^*T^*_ZX$: ce sont les *variétés micro-caractéristiques* de Laurent [29] [28]. Mentionnons aussi le *faisceau d'irrégularité* de Mebkhout qui constitue à ce jour la mesure de l'irrégularité la plus complète et la plus souple dont on dispose [39]. Ces deux notions sont reliées via la construction du cycle d'irrégularité de Laurent et Mebkhout [30].

La littérature fait état de diverses caractérisations de la propriété de stabilité d'un point pour une connexion méromorphe. Mentionnons par exemple le critère numérique de Kedlaya [26] où encore le critère combinatoire d'André [5] en terme de spécialisation de polygone de Newton.

Le but de la dernière partie de cette thèse est d'étayer la possibilité que la propriété de stabilité d'un point P soit encodée dans la structure locale au voisinage de P des faisceaux d'irrégularité $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ et $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ et $\mathrm{End}\,\mathcal{M}$. Ceci ne va pas de soi a priori car $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ est un invariant de nature transcendante, si bien que deux connexions méromorphes qui ont même formalisation le long de Z présentent des faisceaux d'irrégularités différents en général. Le résultat principal de la dernière partie de cette thèse est le

Théorème 3. *L'ensemble des points stables de $\mathcal{M}$ est inclus dans l'intersection des lieux lisses de $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ et $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$.*

L'un des ingrédients de la preuve est un théorème d'indépendance par formalisation de la caractéristique d'Euler-Poincaré locale du complexe des solutions de $\mathcal{M}$

Théorème 4. *La valeur de $\chi(R\mathcal{H}om(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}))$ en $x \in Z^{\mathrm{an}}$ ne dépend que de la formalisation $\widehat{\mathcal{M}_x} := \widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}_x$.*

Il permet de voir qu'au voisinage d'un point stable, les caractéristiques d'Euler-Poincaré locales de $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ et $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$ sont constantes. On conclut alors en invoquant la perversité du faisceau d'irrégularité [39] combinée au résultat topologique suivant :

Théorème 5. *Soit Z une variété complexe lisse, et $\mathcal{F}$ un faisceau pervers sur Z de caractéristique d'Euler-Poincaré locale constante. Alors, $\mathcal{F}$ est un système local concentré en degré 0.*

Il s'agit d'une question très intéressante de savoir si la réciproque au théorème 3 est vraie : cela fournirait une caractérisation purement topologique du lieu stable d'une connexion méromorphe. A l'aide du critère combinatoire d'André [5], on montre en section 15 que ladite réciproque est vraie en toute généralité si elle l'est dans le cas où X est de dimension 2. Enfin, après une discussion relative à une stratégie d'attaque du cas général, on traite le cas où seulement un seul ϕ apparait dans (0.0.1).

Première partie

La construction d'Abbes et Saito pour les connexions méromorphes : le cas d'un trait

Sommaire

Dans cette partie, on démontre une formule explicite 2.2.4 reliant la construction d'Abbes et Saito [3] appliquée à un module différentiel $\mathcal{M}$ aux polynômes de Laurent de degré $\leq r-1$ intervenant dans la décomposition de Levelt-Turrittin de $\mathcal{M}$.

Après avoir détaillé la géométrie de la construction et l'énoncé du résultat principal, on commence en 2.3 par réduire le problème au cas où le corps de base est $\mathbb{C}$. Il s'agit d'une manifestation du principe de Lefschetz. La stratégie est alors de se ramener à la situation où $\mathcal{M}$ est donné sous forme décomposée tout en contrôlant la façon dont sont affectés les cycles proches qui interviennent dans la construction d'Abbes et Saito. Ce dernier point est l'objet de 3.2.1. On conclut alors grâce aux lemmes d'annulation de 3.5 et à un calcul explicite.

1 Notations et rappels

1. On désigne par $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, par $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$, et on note $G_{\mathbb{K}}$ le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{K}$. Pour une extension quelconque $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, la présence d'un indice $\mathbb{L}$ sera synonyme de changement de base à une situation sur $\mathbb{L}$. Cet indice sera omis lorsque $\mathbb{L}=\mathbb{K}$.
   Si X est une variété sur $\mathbb{K}$ et P un point fermé de X, on désignera par $\mathbb{K}(P)$ le corps résiduel de P. Il s'agit d'une extension finie de $\mathbb{K}$.
2. Si S est un schéma et $\mathcal{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérent sur S, on note suivant [14] $\mathbf{V}(\mathcal{E})$ pour le spectre de l'algèbre quasi-cohérente $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E}$ et $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ pour le Proj de $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{E}$.
3. On notera $\mathfrak{F}$ la transformation de Fourier sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, et pour un point fermé P de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, on désignera par δ_P le $\mathcal{D}$-module Dirac en P. Dans une coordonnée y de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, le point P correspond à l'orbite sous $G_{\mathbb{K}}$ d'un scalaire $c\in\overline{\mathbb{K}}$. Si $\mu_c(y)$ est le polynôme minimal de c sur $\mathbb{K}$, δ_P est par définition $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}}/\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}}\mu_c(y)$.
4. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{K}((x))$-module différentiel. On rappelle que le théorème de Levelt-Turrittin [52] assure l'existence d'un entier m et d'une extension galoisienne finie $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ tels que
   $$\mathbb{L}((t))\otimes_{\mathbb{K}((x))}\mathcal{M}\simeq\bigoplus_{\omega\in\mathbb{L}[\frac{1}{t}]\frac{1}{t}}\mathcal{E}^{\omega}\otimes\mathcal{R}_{\omega} \tag{1.0.3}$$
   avec $t=x^{1/m}$, $\mathcal{E}^{\omega}=(\mathbb{L}((t)),d+d\omega)$ et $\mathcal{R}_{\omega}$ régulier de rang noté n_{ω}. Le plus petit entier m tel que (1.0.3) ait lieu est *l'indice de ramification de* $\mathcal{M}$. On le notera $m_{\mathcal{M}}$.
   Pour un nombre rationnel $r>0$, on note $\Omega_r(\mathcal{M})$ le fermé de $\mathbf{V}(\mathbb{K}(t))$ constitué des polynômes en $1/t$ de degré r par rapport à la variable $1/x$ apportant une contribution non-nulle dans (1.0.3), et $\Omega_{<r}(\mathcal{M})$ pour $\sqcup_{r'<r}\Omega_{r'}(\mathcal{M})$. On aura à considérer l'application
   $$t_r:\mathbf{V}(\mathbb{K}(t))\longrightarrow\mathbf{V}(\mathbb{K}\tfrac{1}{x^r})$$
   associant à ω son monôme de degré r en la variable $1/x$, ainsi que l'application
   $$c_r:\mathbf{V}(\mathbb{K}(t))\longrightarrow\mathbf{V}(\mathbb{K})$$
   qui associe à ω le coefficient de $t_r(\omega)$.

5. Soit $p : Y \longrightarrow X$ un morphisme de variétés algébriques lisses sur $\mathbb{K}$. Soit Z une hypersurface de X et $\mathcal{M}$ une connexion sur X méromorphe le long de Z. Alors, on sait que l'image inverse $p^+\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ par p admet $p^*\mathcal{M}$ pour $\mathcal{O}_Y$-module sous-jacent. Si on suppose que p est étale au-dessus de $U = X \setminus Z$, alors pour une connexion $\mathcal{N}$ méromorphe le long de $f^{-1}(Z)$, le $\mathcal{O}_X$-module sous-jacent à $p_+\mathcal{N}$ est $p_*\mathcal{N}$. Dans ces conditions, le morphisme d'adjonction $\mathcal{M} \longrightarrow p_+p^+\mathcal{M}$ est l'adjonction usuelle des $\mathcal{O}_X$-modules.

2 La construction d'Abbes et Saito

2.1 Prologue géométrique

On rappelle ici le nécessaire concernant la notion de dilatation. Pour une exposition plus circonstanciée, on pourra se reporter à [3].

Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas sur $\mathbb{K}$, D un sous-schéma fermé de X défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ et E un sous-schéma fermé de $f^{-1}(D)$ défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{J}$ sur Y. Alors $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{J}$, de sorte qu'on dispose d'un morphisme de $\mathcal{O}_Y$-algèbres graduées

$$\theta : f^*(\oplus_{\mathbb{N}}\mathcal{I}^n) \longrightarrow \oplus_{\mathbb{N}}\mathcal{J}^n. \tag{2.1.1}$$

Notons $\widetilde{Y}_E$ (resp. $\widetilde{X}_D$) l'éclaté de Y le long de E (resp. D). Si $\mathfrak{p} \in \widetilde{Y}_E$, alors $\theta^{-1}(\mathfrak{p})$ détermine un élément de $\widetilde{X}_D \times_X Y = \operatorname{Proj} f^*(\oplus_{\mathbb{N}}\mathcal{I}^n)$ si et seulement si $\mathfrak{p}$ est dans l'un des ouverts $D_+(\theta(x))$ de $\widetilde{Y}_E$, avec $x \in \mathcal{I}$ vu dans l'algèbre source comme élément de degré 1. On en déduit que $\cup_{x\in\mathcal{I}}D_+(\theta(x))$ est le plus grand ouvert de $\widetilde{Y}_E$, noté $Y_{(D)}$ sur lequel θ induit un morphisme de schémas $Y_{(D)} \to \widetilde{X}_D \times_X Y$.

Définition 2.1.2. On appelle $Y_{(D)}$ *la dilatation de Y en E par rapport à D.*

Soit $f : Y \to X$ un morphisme séparé de $\mathbb{K}$-schémas localement noethériens et $g : X \to Y$ une section de f. Le morphisme g est alors une immersion fermée. Soit D un sous-schéma fermé de X, de complémentaire U et $i : D \longrightarrow X$ l'injection canonique. Notons encore $Y_{(D)}$ le dilaté de Y en $g(D)$ par rapport à D. Si $E_{[D]}$ désigne le diviseur exceptionnel de $\widetilde{Y}_{g(D)}$ et $E_{(D)}$ l'intersection de $E_{[D]}$ avec l'ouvert $Y_{(D)}$, on dispose du diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_{(D)} \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y_{(D)} \arrow[d, hook] \arrow[ddr, bend left] & \\
E_{[D]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{Y}_{g(D)} \arrow[d] & \\
D \arrow[r] & Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd} \tag{2.1.3}$$

Lemme 2.1.4. *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
E_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{(D)} \arrow[d] & Y \times_X U \arrow[l] \arrow[d] \\
D \arrow[r] & X & U \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

est à carrés cartésiens.

Démonstration. Seul le caractère cartésien du diagramme de gauche pose a priori problème. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left] \arrow[dr, bend right] & & \\
 & E_{(D)} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{(D)} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \widetilde{Y}_{g(D)} \arrow[d] \\
 & D \arrow[r] & X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Puisque $E_{[D]} = \widetilde{Y}_{g(D)} \times_D Y$, on obtient une factorisation canonique de $Z \longrightarrow Y_{(D)}$ à travers $E_{[D]}$. Le fait $Z \longrightarrow E_{[D]}$ se factorise par $E_{(D)}$ provient donc du caractère cartésien du carré supérieur de (8.1.2). $\square$

Supposons de plus que D est un diviseur de Cartier globalement défini par une fonction régulière t. Alors par [15, 21.2.12], i est une immersion régulière donc [15, 16.9.13] assure que la suite des faisceaux conormaux pour $D \xrightarrow{i} X \xrightarrow{g} Y$

$$i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{N}^\vee_{D/Y} \longrightarrow \mathcal{N}^\vee_{D/X} \longrightarrow 0$$

est exacte. Si $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) désigne le faisceau d'idéaux de D dans X (resp. de $g(D)$ dans Y), cette suite s'explicite en

$$0 \longrightarrow i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{g^\sharp} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow 0\,. \tag{2.1.5}$$

Puisque g est une section de f, $f^\sharp$ fournit un scindage

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\sim} i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \oplus \mathcal{I}/\mathcal{I}^2\,. \tag{2.1.6}$$

Supposons de plus que g est une immersion régulière. Alors, $g \circ i$ est aussi régulière et on a suivant [15, 16.9.3] une identification canonique $\operatorname{Sym} \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\sim} \oplus_{\mathbb{N}} \mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}$, d'où une identification $E_{[D]} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$.

Soit U un ouvert affine de X, et notons encore par t la restriction de la fonction régulière t à U. Avec les notations de 2.1.1, $E_{(D)|U} = E_{[D]|U} \cap D_+(\theta(t)) = D_+([f^\sharp(t)])$, avec $[f^\sharp(t)] \in \operatorname{Sym}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ de degré 1. Donc à travers l'identification (2.1.6), $\mathfrak{p} \in E_{[D]|U}$ définit un élément de $E_{(D)|U}$ si et seulement si $\mathfrak{p}$ ne contient pas $0 \oplus [t] \in \operatorname{Sym}(i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \oplus (t)/(t^2))$ vu en degré 1, soit encore que $\mathfrak{p}$ est d'intersection nulle avec le facteur $(t)/(t^2)$ placé en degré 1.

Or $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq i^*\mathcal{O}_X(-D) := \mathcal{O}_D(-D)$ est un fibré en droite sur D trivialisé par t. On a donc un isomorphisme $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes \mathcal{O}_D(D)$ et en utilisant (2.1.6), on en déduit une identification

$$E_{[D]} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_D(D) \oplus \mathcal{O}_D).$$

A travers cette identification $E_{(D)}$ correspond aux $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}(i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_D(D) \oplus \mathcal{O}_D)$ ne rencontrant pas le facteur $\mathcal{O}_D$ placé en degré 1. C'est donc selon [14, 8.4.1] le fibré vectoriel $\mathbf{V}(i^*\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_D(D))$. Du fait de l'identification $\mathcal{N}^\vee_{X/Y} \simeq g^*(\Omega^1_{Y/X})$, on a obtenu la

Proposition 2.1.7 (interprétation différentielle de la fibre spéciale du dilaté)**.** *Avec les notations de 2.1.4, si on suppose de plus que D est un diviseur de Cartier défini par une fonction régulière globalement définie, et si g est une immersion régulière, alors on a une identification*

$$E_{(D)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}((g\circ i)^*\Omega^1_{Y/X}\otimes \mathcal{O}_D(D))\ .$$

2.2 Enoncé du théorème

Soit S un trait complet sur $\mathbb{K}$. Le choix d'une uniformisante x de S induit une identification $S\simeq \operatorname{Spec}\mathbb{K}[\![x]\!]$. Soient $n\geq 1$ et $k\geq 1$ des entiers. On pose $r=k/n$, $t=x^{1/n}$ et on note D_k le diviseur de degré k de $S_n=\operatorname{Spec}\mathbb{K}[\![t]\!]$. Soient s_n le point fermé de S_n, η_n son point générique et $\gamma_n : S_n\to S$ le morphisme d'élévation à la puissance n. Soit $S_{1,n}$ le complété de $S\times S_n$ en l'origine. Le graphe de γ_n induit une immersion fermée $\Gamma_n : S_n\to S_{1,n}$. Pour la structure de S_n-schéma sur $S_{1,n}$ donnée par la seconde projection, on définit $S_{1,n}(D_k)$ comme le dilaté de $S_{1,n}$ en $\Gamma_n(D_k)$ relativement à D_k. On en déduit suivant 2.1.4 le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} T_{D_k} \arrow[r, "i_{n,k}"] \arrow[d] & S_{1,n}(D_k) \arrow[d, "\pi"'] & S\times\eta_n \arrow[l, "j_{n,k}"'] \arrow[d] \\ D_k \arrow[r, "i_k"] & S_n & \eta_n \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

avec une identification canonique

$$T_{D_k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}((\Gamma_n\circ i_k)^*\Omega^1_{S_{1,n}/S_n}\otimes \mathcal{O}_{D_k}(D_k))\ .$$

Concrètement, $\Gamma_n(D_k)$ est le sous-ensemble algébrique de $S_{1,n}$ donné par l'idéal $\mathcal{J}=\big(x-t^n,t^k\big)$. Le choix des variables $y_0=x-t^n$ et $y_1=t^k$ placées en degré 1 fournit une présentation de l'algèbre éclatée de $S_{1,n}$ en $\mathcal{J}$, soit encore un plongement du schéma associé dans $S_{1,n}\times\mathbb{P}^1$. Suivant 2.1, le dilaté $S_{1,n}(D_k)$ en est l'ouvert affine $y_1\neq 0$, donné dans $S_{1,n}\times\mathbb{A}^1$ par l'équation $x-t^n-t^ky=0$, où l'on a posé $y=y_0/y_1$. D'autre part, le choix des coordonnées x et t fournit les identifications

$$\Omega^1_{S_{1,n}/S_n}\simeq \mathbb{K}[\![x,t]\!]\cdot dx \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{s_n}(D_k)\simeq \mathbb{K}\cdot\frac{1}{t^k}\ .$$

Notons T_r le réduit [6] de T_{D_k}, et relions $\frac{dx}{x^r}$ au choix de la coordonnée y sur $S_{1,n}(D_k)$. Dans la situation présente, la suite exacte (2.1.5) s'explicite en

$$0\longrightarrow (x-t^n)/((x-t^n)^2,t^k(x-t^n))\longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2\longrightarrow (t^k)/(t^k)^2\longrightarrow 0\ ,$$

de sorte que (2.1.6) devient $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\simeq(y_0)\oplus(y_1)$. Via l'isomorphisme $\mathcal{N}^\vee_{S_n/S_{1,n}}\simeq\Gamma_n^*\Omega^1_{S_{1,n}/S_n}$, la coordonnée y_0 correspond à la classe de la forme différentielle $d(x-t^n)$, soit encore la classe de dx. On en déduit que, vu dans

$$T_r=\mathbf{V}((\Gamma_n\circ i_k^{\mathrm{red}})^*\Omega^1_{S_{1,n}/S_n}\otimes\mathcal{O}_{s_n}(D_k)), \tag{2.2.2}$$

6. Dans [3], le foncteur des cycles proches est considéré comme à valeur dans la catégorie dérivée des faisceaux sur $T_{D_k,\text{ét}}$. Le fibré T_{D_k} est un schéma sur D_k, non réduit en général. Par invariance du site étale par homéomorphisme universel [12, Exp VIII], on peut tout aussi bien se placer sur le réduit $T^{\mathrm{red}}_{D_k}$ qui est un schéma sur le point fermé s_n de S_n. C'est le point de vue qui doit être adopté lorsqu'on considère les cycles proches pour les $\mathcal{D}$-modules.

la coordonnée $y = y_0/y_1$ correspond exactement à $\frac{dx}{x^r}$. C'est par rapport à cette coordonnée privilégiée du fibré T_r que se feront tous les calculs.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{K}((x))$-module différentiel. Le protagoniste de cet article est le $\mathcal{D}$-module sur $S_{1,n}(D_k)$

$$H_{n,k}\,(\mathcal{M}) := j_{k,n+}\mathcal{H}om(p_2^+\gamma_n^+\mathcal{M}, p_1^+\mathcal{M}),$$

où $p_1 : S \times \eta_n \longrightarrow S$ et $p_2 : S \times \eta_n \longrightarrow \eta_n$ sont les projections canoniques. Soit $\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})$. Notons $[\omega]$ l'image de ω par la composée

$$\mathbf{V}(\mathbb{K}(t)) \xrightarrow{c_{r-1}} \mathbf{V}(\mathbb{K}) \xrightarrow{(1-r)\times} \mathbf{V}(\mathbb{K}\cdot y^\vee) \simeq T_r^\vee\ .$$

Il s'agit d'un point fermé de $T_r^\vee$.

Lemme 2.2.3. *Le point $[\omega]$ est indépendant du choix des uniformisantes x et t.*

Démonstration. Soit en effet $x' = f(x)x$, $f(0) \neq 0$ et $t' = g(t)t$, $g(0) \neq 0$ un autre choix d'uniformisantes de S et S_n respectivement, avec $g(t)^n = f(t^n)$. D'après (2.2.2), on a les égalités suivantes dans $\overline{\mathbb{K}}[T_{r,\overline{\mathbb{K}}}]$

$$y' = \frac{dx'}{x'^r} = \frac{f(0)}{g(0)^k}\frac{dx}{x^r} = g(0)^{n-k}y,$$

d'où on déduit que $y'^\vee = y^\vee/g(0)^{n-k}$. Soit $\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})$ et soit $\widetilde{\omega}$ un $\overline{\mathbb{K}}$-point de $\Omega_{r-1}(\mathcal{M})$ au-dessus de ω. La relation

$$t_{r-1}(\widetilde{\omega}) = \frac{c_{r-1}(\widetilde{\omega})}{x^{r-1}} = \frac{g(t)^{k-n}c_{r-1}(\widetilde{\omega})}{x'^{r-1}}$$

assure que $c_{r-1}(\widetilde{\omega})' = g(t)^{k-n}c_{r-1}(\widetilde{\omega})$. On a donc dans $\overline{\mathbb{K}}[T^\vee_{r,\overline{\mathbb{K}}}]$ les égalités d'idéaux

$$(y'^\vee + (r-1)c_{r-1}(\widetilde{\omega})') = g(0)^{k-n}(y^\vee + (r-1)c_{r-1}(\widetilde{\omega})) = (y^\vee + (r-1)c_{r-1}(\widetilde{\omega})).$$

□

Notons Ψ_π le foncteur des cycles proches par rapport à π pour les modules holonomes sur $S_{1,n}(D_k)$. Le but de ce texte est de démontrer le

Théorème 2.2.4. *On suppose que $r > 1$. Alors, le $\mathcal{D}_{T_r}$-module $\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ ne dépend de n et k que par l'intermédiaire de r, et avec les notations de 1.4, on a la formule*

$$\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) = \delta_0^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M})} \oplus \bigoplus_{\omega\in\Omega_{r-1}(\mathcal{M})} \delta_{[\omega]}^{[\mathbb{K}(\omega):\mathbb{K}([\omega])]n^2_\omega}, \tag{2.2.5}$$

où $n^2_{<r-1}(\mathcal{M})$ est l'entier $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega_{<r-1}(\mathcal{M})} [\mathbb{K}(\omega):\mathbb{K}]n^2_\omega$.

Remarque 2.2.6. Soit R un anneau de valuation discrète complet d'égale caractéristique p, d'idéal maximal $\mathfrak{M}$ et de corps résiduel F, supposé de type fini sur un corps parfait. On note K le corps de fraction de R. Soit $S = \operatorname{Spec} R$ le trait complet associé à R et η_S son point générique. On se donne un entier n multiple de p, un caractère $\chi \in H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et pour un nombre premier $\ell \neq p$, on fixe une injection $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$. On note encore

$\chi : G_K \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ le caractère induit, et $\mathcal{F}$ le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-faisceau étale associé sur η_S.

Si le conducteur de Swan $\mathrm{sw}(\chi)$ de $\mathcal{F}$ vérifie $\mathrm{sw}(\chi) > 1$, Abbes et Saito démontrent [3, 9.10] que le support de $\mathfrak{F}\Psi H_{1,\mathrm{sw}(\chi)+1}(\mathcal{F})$ est réduit à la forme différentielle tordue

$$\mathrm{rsw}(\chi) : F \longrightarrow \Omega^1_R \otimes_R (\mathfrak{M}^{-\,\mathrm{sw}(\chi)-1}/\mathfrak{M}^{-\,\mathrm{sw}(\chi)})$$

donnée par la théorie de la ramification des caractères d'Artin-Schreier-Witt de Kato [3, 10]. Le théorème 2.2.4 pour $\mathcal{M}$ de type exponentiel en est l'exact analogue.

Quant à la finitude du support de $\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ en général (et le fait que celui-ci ne rencontre pas l'origine lorsque $\mathcal{M}$ est purement de pente $r' > 0$ et $r = r' + 1$ dans 2.2.4), il s'agit de l'analogue de [3, 9.3], démontrée dans *loc. it.* lorsque F est parfait.

Remarque 2.2.7. Puisque la construction fait aussi sens lorsque $k \leq n$, on peut se demander ce qu'elle donne dans ce cas. On montre en 5.1.1 qu'il n'y a pas grand chose à en attendre, puisque dans le cas particulier le plus simple où $\mathcal{M}$ est décomposé, on a toujours $\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) \simeq 0$.

2.3 Réduction au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Il va s'agir d'une application du principe de Lefschetz. Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$, $\overline{\mathbb{L}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{L}$ et $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{K}$ dans $\overline{\mathbb{L}}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{K}((x))$-module différentiel.

Proposition 2.3.1. *La formule* (2.2.5) *est vraie pour* $\mathcal{M}_{\mathbb{L}}$ *si et seulement si elle est vraie pour* $\mathcal{M}$.

Démonstration. On commence par observer que les manipulations géométriques intervenant dans la construction d'Abbes et Saito (2.2.1) commutent à l'extension des scalaires, de même que les foncteurs Ψ_π et $\mathfrak{F}$.

Supposons que (2.2.5) soit vraie pour $\mathcal{M}$ et considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}(\mathbb{L}(t)) \arrow[r] \arrow[d, "{[\ \ ]_{\mathbb{L}}}"'] & \mathbf{V}(\mathbb{K}(t)) \arrow[d, "{[\ \ ]}"] \\ T^\vee_{r,\mathbb{L}} \arrow[r] & T^\vee_r \end{tikzcd}$$

On a

$$\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}}) = \delta_0^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M})} \oplus \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})} \bigoplus_{P_\omega \in [\omega] \times_{\mathbb{K}} \mathbb{L}} \delta_{P_\omega}^{[\mathbb{K}(\omega):\mathbb{K}([\omega])] n^2_\omega}. \tag{2.3.2}$$

Soient $\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})$ et $P_\omega \in [\omega] \times_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$. En développant les termes de (2.3.2) grâce aux formules

$$[\mathbb{K}(\omega) : \mathbb{K}([\omega])] = \sum_{\omega' \in P_\omega \times_{[\omega]} \omega} [\mathbb{L}(\omega') : \mathbb{L}([\omega']_{\mathbb{L}})],$$

$$[\mathbb{K}(\omega) : \mathbb{K}] = \sum_{\omega' \in \omega \times_{\mathbb{K}} \mathbb{L}} [\mathbb{L}(\omega') : \mathbb{L}],$$

on observe que la somme triple que l'on obtient se fait sur l'ensemble d'indice $\Omega_{r-1}(\mathcal{M})_{\mathbb{L}} = \Omega_{r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})$. Vue de cette façon, elle s'explicite en

$$\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}}) = \delta_0^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})} \oplus \bigoplus_{\omega\in\Omega_{r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})} \delta_{[\omega]_{\mathbb{L}}}^{[\mathbb{L}(\omega):\mathbb{L}([\omega]_{\mathbb{L}})]n^2_\omega},$$

qui est exactement la formule (2.2.5) pour $\mathcal{M}_{\mathbb{L}}$.

Supposons réciproquement que (2.2.5) est vraie pour $\mathcal{M}_{\mathbb{L}}$, à savoir

$$\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})_{\mathbb{L}} \simeq \delta_0^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})} \oplus \bigoplus_{\omega\in\Omega_{r-1}(\mathcal{M})_{\mathbb{L}}} \delta_{[\omega]_{\mathbb{L}}}^{[\mathbb{L}(\omega):\mathbb{L}([\omega]_{\mathbb{L}})]n^2_\omega}. \tag{2.3.3}$$

Alors, le support de $\mathfrak{F}\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ est réduit à un nombre fini de points fermés et 2.3.1 provient de ce que les multiplicités de ces points sont inchangées par extension des scalaires. □

Soit $\mathcal{N}$ un modèle algébrique de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire un $K[x, x^{-1}]$-module différentiel tel que $\mathcal{M} \simeq K((x)) \otimes_{K[x,x^{-1}]} \mathcal{N}$. Un tel modèle existe d'après [25, 2.4.10].

Soit $\mathbb{K}'/\mathbb{Q}$ l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les coefficients des polynômes de Laurent intervenant dans la matrice de ∂_x dans une base B choisie de $\mathcal{N}$. Si on note $\mathcal{N}_{\mathbb{K}'}$ le $\mathbb{K}'((x))$-module différentiel que le choix de base B définit, le lemme 2.3.1 assure qu'il suffit de prouver 2.2.4 pour $\mathcal{N}_{\mathbb{K}'}$. Puisque le degré de transcendance de $\mathbb{K}'/\mathbb{Q}$ est fini, on peut se donner un plongement de $\mathbb{K}'$ dans $\mathbb{C}$. Via ce choix de plongement, on se ramène toujours par 2.3.1 à démontrer 2.2.4 pour le module différentiel complexe qui se déduit de $\mathcal{N}_{\mathbb{K}'}$ par extension des scalaires.

Dans toute la suite, on supposera que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la coordonnée $y = \frac{dx}{x^r}$ de T_r, il s'agit donc de démontrer

$$\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) = \mathcal{O}_{T_r}^{n^2_{<r-1}(\mathcal{M})} \oplus \bigoplus_{\omega\in\Omega_{r-1}(\mathcal{M})} (\mathcal{E}^{-(r-1)c_{r-1}(\omega)y})^{n^2_\omega}. \tag{2.3.4}$$

3 Quelques lemmes sur les cycles proches

3.1 Le cas complexe. Généralités et exemples

Pour les rudiments concernant les cycles proches pour les $\mathcal{D}$-modules, on pourra consulter [33]. Dans toute cette section, X désigne une variété complexe lisse, $f : X \to \mathbb{C}$ un morphisme lisse de fibre spéciale $Y = f^{-1}(0)$, $i : Y \longrightarrow X$ l'inclusion de Y dans X et $\mathcal{I}$ l'idéal de définition de Y. Soit

$$V_k(\mathcal{D}_X) = \{P \in \mathcal{D}_X, P(\mathcal{I}^l) \subset \mathcal{I}^{l-k} \quad \forall l \in \mathbb{Z}\}$$

la V-filtration de $\mathcal{D}_X$, et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module spécialisable le long de Y (par exemple un module holonome). Alors on dispose pour toute V-filtration U localement image à décalage près de $V_{\cdot}(\mathcal{D}_X)^p$ par une surjection locale $\mathcal{D}_X^p \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$ (c'est la propriété de bonté d'une V-filtration) d'un unique polynôme unitaire b_U vérifiant pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$b_U(t\partial_t + k)U_k \in U_{k-1},$$

avec t équation locale de Y. On dit que b_U est le *polynôme de Bernstein de* $(U_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Il est indépendant du choix de l'équation locale de Y. Puisqu'un sous-module d'un module spécialisable est encore spécialisable, on peut définir pour $m \in \mathcal{M}$ le polynôme de Bernstein de m comme le polynôme de Bernstein de la bonne V-filtration $V_{\cdot}(\mathcal{D}_X)m$ sur $\mathcal{D}_X m$. On notera b_m ce polynôme, et $\mathrm{ord}_Y(m)$ l'ensemble de ses racines.

Soit $\geq$ l'ordre l'exicographique sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit

$$V_a(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \mathrm{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \geq -a-1\}\}$$

et

$$V_{<a}(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \mathrm{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha > -a-1\}\}.$$

D'après [33, 4.3-5], $(V_{a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ (resp. $(V_{<a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ est l'unique bonne V-filtration de $\mathcal{M}$ dont les racines du polynôme de Bernstein sont dans l'intervalle $[-a-1,-a[$ (resp. $]-a-1,-a]$). Si $\Psi_{f,a}\mathcal{M}$ désigne la quotient $V_a(\mathcal{M})/V_{<a}(\mathcal{M})$, on pose

$$\Psi_f\mathcal{M} := \bigoplus_{-1\leq a<0} \Psi_{f,a}\mathcal{M}. \tag{3.1.1}$$

Exemple 3.1.2. *Soit $\mathcal{E}$ une connexion algébrique sur X. Alors, on a une identification canonique $\Psi_f\mathcal{E} \simeq i^+\mathcal{E}$.*

Démonstration. Soit U un ouvert de trivialisation de $\mathcal{E}$ et (s_i) une trivialisation locale de $\mathcal{E}$ sur U. Par lissité de f, on peut toujours choisir U de telle sorte que Y soit le lieu d'annulation d'une coordonnée t. Alors $V_k := \sum V_k(\mathcal{D}_U)s_i$ est une bonne V-filtration de $\mathcal{E}$ sur U. Or par définition de $\mathcal{E}$, $t\partial_t s = t\sum f_i s_i \in V_{-1}$, de sorte que le polynôme de Bernstein $b_{V_{\cdot}} = b_{V_{\cdot}}(t\partial_t)$ de $V_{\cdot}$ divise $t\partial_t$. Mais $b_{V_{\cdot}}$ ne peut être constant, car sinon les s_i s'annuleraient dans les fibres de $\mathcal{E}$ au-dessus de Y. Ainsi $b_{V_{\cdot}} = t\partial_t$ et on a donc $V_a(\mathcal{E}) = V_0 = \sum V_0(\mathcal{D}_U)s_i = \mathcal{E}$ sur U pour $-1 \leq a < 0$, et $V_{<a}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ sur U pour $-1 < a < 0$. D'autre part, $(V_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ admet $t\partial_t - 1$ pour polynôme de Bernstein, donc $V_{<-1}(\mathcal{E}) = V_{-1} = t\sum V_0(\mathcal{D}_U)s_i = t\mathcal{E}$. Par définition de Ψ_f, on en déduit une identification $\Psi_f\mathcal{E} \simeq i^+\mathcal{E}$ indépendante des choix faits, d'où le résultat. □

On dispose du résultat plus général

Proposition 3.1.3. *Soit $\mathcal{E}$ une connexion algébrique sur X et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Alors, on a une identification canonique $\Psi_f(\mathcal{E}\otimes\mathcal{M}) \simeq i^+\mathcal{E}\otimes\Psi_f\mathcal{M}$.*

Démonstration. Soit V une bonne filtration sur $\mathcal{M}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$U_k = \mathcal{E} \otimes V_k.$$

Montrons qu'il s'agit d'une bonne V-filtration de $\mathcal{E}\otimes\mathcal{M}$. On va pour cela utiliser le critère [33, 4.1–9].

Pour $k \in \mathbb{Z}$, il faut commencer par montrer la $V_0(\mathcal{D}_X)$-cohérence de U_k. Puisque $V_0(\mathcal{D}_X)$ est un faisceau d'anneaux localement noethérien et cohérent [33, 4.1-5], il suffit de montrer la finitude locale de U_k sur $V_0(\mathcal{D}_X)$. Soit $m_1, \dots, m_n$ un système de $V_0(\mathcal{D}_X)$-générateurs locaux de V_k et $e_1, \dots, e_n$ un système de $\mathcal{O}_X$-générateurs locaux de $\mathcal{E}$. On va montrer que les $e_i \otimes m_j$ forment un système de $V_0(\mathcal{D}_X)$-générateurs locaux de U_k. On se donne $e \in \mathcal{E}$, $f_1, \dots, f_n$ les coefficients de e dans la base des (e_i), et $m \in V_k$. Pour $P \in V_0(\mathcal{D}_X)$, on désigne par $d(P)$ l'ordre de P. On pose alors

$$d_m = \mathrm{Min}\{\mathrm{Max}(d(P_j)), m = \sum P_j m_j \text{ avec } P_j \in V_0(\mathcal{D}_X)\}.$$

Il faut montrer que

$$e \otimes m \in \sum V_0(\mathcal{D}_X) \cdot (e_i \otimes m_j). \tag{3.1.4}$$

On raisonne par récurrence sur d_m, le cas $d_m = 0$ découlant du fait que le produit tensoriel envisagé est pris sur $\mathcal{O}_X$. Si $d_m > 0$, on choisit des opérateurs P_j qui réalisent d_m et on écrit

$$\sum P_j(e \otimes m_j) = e \otimes m + \sum Q_{ij} e \otimes R_{ij} m_j$$

avec $d_{R_{ij}m_j} < d_m$, de sorte que l'hypothèse de récurrence s'applique à $Q_{ij}e \otimes R_{ij}m_j$. Puisque

$$\sum P_j(e \otimes m_j) = \sum P_j f_i(e_i \otimes m_j) \in \sum V_0(\mathcal{D}_X) \cdot (e_i \otimes m_j),$$

on en déduit que (3.1.4) est vraie, d'où la $V_0(\mathcal{D}_X)$-cohérence de U_k.

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$V_{k_0+k} = V_k(\mathcal{D}_X) V_{k_0} \quad \text{et} \quad V_{-k_0-k} = V_{-k}(\mathcal{D}_X) V_{-k_0}. \tag{3.1.5}$$

Montrons que U vérifie les identités analogues. Le cas $k = 0$ étant immédiat car $V_0(\mathcal{D}_X)$ contient la fonction unité. On peut donc supposer $k > 0$. Il suffit alors de démontrer

$$U_{k_0+k} = U_{k_0+k-1} + \partial_t U_{k_0+k-1} \quad \text{et} \quad U_{-k_0-k} = tU_{-k_0-k+1}. \tag{3.1.6}$$

Seules les inclusions directes posent a priori problème. La seconde relation de (3.1.6) découle immédiatement de (3.1.5) du fait que le produit tensoriel envisagé est pris sur $\mathcal{O}_X$. Prouvons la première relation. Soit $e \in \mathcal{E}$ et $m \in V_{k_0+k}$. On choisit $m_1, m_2 \in V_{k_0+k-1}$ tels que $m = m_1 + \partial_t m_2$. Alors

$$e \otimes m = e \otimes m_1 + \partial_t(e \otimes m_2) - (\partial_t e) \otimes m_2 \in U_{k_0+k-1} + \partial_t U_{k_0+k-1},$$

d'où (3.1.6), et par suite U est une bonne V-filtration.

En particulier pour $a \in \mathbb{C}$, $U_k = \mathcal{E} \otimes V_{a+k}(\mathcal{M})$ définit une bonne filtration de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$. Pour $e \in \mathcal{E}$ et $m \in V_{a+k}(\mathcal{M})$, on a par lissité de $\mathcal{E}$

$$b_{V_{a+}(\mathcal{M})}(t\partial_t + k)(e \otimes m) \in e \otimes b_{V_{a+}(\mathcal{M})}(t\partial_t + k)m + U_{k-1} \subset U_{k-1}.$$

On en déduit que b_U divise $b_{V_{a+}(\mathcal{M})}$, donc $V_a(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) = \mathcal{E} \otimes V_a(\mathcal{M})$. De même $V_{<a}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) = \mathcal{E} \otimes V_{<a}(\mathcal{M})$ et 3.1.3 découle alors de la $\mathcal{O}_X$-platitude de $\mathcal{E}$.

$\square$

Si Y est non lisse, les résultats de [33] ne s'appliquent pas tels quels. On peut néanmoins toujours définir des cycles proches dans ce cas en plongeant X dans $X \times A^1_{\mathbb{C}}$ via l'application graphe de f notée $\Gamma(f)$, puis en prenant les cycles proches suivant la projection par rapport au second facteur. On obtient alors un $\mathcal{D}$-module à support dans X et dans le cas où Y lisse on retrouve bien la définition initiale. Par exemple, si on se donne $n > 0$, Ψ_f est relié à Ψ_{f^n} de la façon suivante

Proposition 3.1.7. *Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a une identification canonique*

$$\Psi_{f^n,a}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} i_+\Psi_{f,na}\mathcal{M} .$$

Pour une preuve de ce résultat, voir [47, 3.3.13].

3.2 Compatibilité à la formalisation

Les cycles proches sont compatibles à la formalisation le long de Y, c'est l'objet de la

Proposition 3.2.1. *Soit $\widehat{f} : \widehat{X} \to \mathbb{C}$ la formalisation de f le long de Y. Alors, pour tout $\mathcal{D}_X$-module spécialisable $\mathcal{M}$, le $\mathcal{D}_{\widehat{X}}$-module $\widehat{\mathcal{M}}$ est spécialisable et on a une identification canonique $\Psi_f\mathcal{M} \simeq \Psi_{\widehat{f}}\widehat{\mathcal{M}}$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{C}$. Posons $U_k = \widehat{\mathcal{O}}_X \otimes V_{a+k}(\mathcal{M})$ et montrons qu'il s'agit de $V_{a+k}(\widehat{\mathcal{M}})$. On commence par établir la bonté de U. Dire que $(V_{a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une bonne V-filtration de $\mathcal{M}$ sur X, c'est dire qu'on dispose localement d'une surjection $\mathcal{D}_X^p \to \mathcal{M} \to 0$ pour laquelle $V_{a+\cdot}(\mathcal{M})$ est à décalage près la filtration image de $V_\cdot(\mathcal{D}_X)^p$. Par tensorisation par $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$, il suffit de prouver qu'à travers l'identification canonique $\mathcal{O}_{\widehat{X}} \otimes \mathcal{D}_X \simeq \mathcal{D}_{\widehat{X}}$, l'espace $\mathcal{O}_{\widehat{X}} \otimes V_k(\mathcal{D}_X)$ correspond à $V_k(\mathcal{D}_{\widehat{X}})$. Ceci découle immédiatement du fait que si (x,t) sont des coordonnées locales avec Y définie par $t=0$, alors $V_k(\mathcal{D}_X)$ et $V_k(\mathcal{D}_{\widehat{X}})$ sont les faisceaux localement libres (sur X et $\widehat{X}$ respectivement) engendrés par les $t^{-k}\partial_x^i(t\partial_t)^j$ si $k<0$ et les $\partial_x^i\partial_t^l(t\partial_t)^j$, $0 \leq l \leq k$ si $k \geq 0$.

Soit b le polynôme de Bernstein de $V_a(\mathcal{M})$, $m \in V_{a+k}(\mathcal{M})$ et $f \in \mathcal{O}_{\widehat{X}}$. On a

$$\begin{aligned} t\partial_t(f \otimes m) &= \partial_t f \otimes tm + f \otimes t\partial_t m \\ &\equiv f \otimes t\partial_t m \quad (U_{k-1}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} b(t\partial_t + k)(f \otimes m) &\equiv f \otimes b(t\partial_t + k)m \quad (U_{k-1}) \\ &\equiv 0 \quad (U_{k-1}), \end{aligned}$$

donc le polynôme de Bernstein de U divise b, et ainsi il vient $V_{a+k}(\widehat{\mathcal{M}}) = \mathcal{O}_{\widehat{X}} \otimes V_{a+k}(\mathcal{M})$ pour tout k. On conclut alors par platitude de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$ sur $\mathcal{O}_X$.

□

3.3 Une définition générale

On considère une variété X lisse sur $\mathbb{K}$ et Y une hypersurface lisse de X donnée comme lieu des zéros d'une fonction f. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome, et $\sigma : \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ une section de la projection $\overline{\mathbb{K}} \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{Z}$ telle que la classe de 0 soit envoyée sur 1.

D'après [7], il fait sens de définir $V_k^\sigma(\mathcal{M})$ comme le sous-faisceau de $\mathcal{M}$ constitué des éléments m dont l'image dans $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{K}}}$ admet un polynôme de Bernstein à racines dans $\sigma(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{Z}) + \mathbb{N}$. Comme dans le cas complexe, on dispose d'un second point de vue sur $V_k^\sigma(\mathcal{M})$: en mimant les propositions 4.2-6 et 4.3-5 de [33], on obtient en effet le

Lemme 3.3.1. *La filtration $V^\sigma(\mathcal{M})$ est l'unique bonne V-filtration de $\mathcal{M}$ dont les racines du polynôme de Bernstein sont dans l'image de σ.*

Suivant [33, 4.3.9], on est amené à définir

$$\Psi_f \mathcal{M} := V_{-1}(\mathcal{M})/V_{-2}(\mathcal{M}).$$

Cette définition est indépendante du choix de σ à isomorphisme non canonique près. Comme application immédiate de 3.3.1, on observe que le foncteur Ψ_f commute à l'extension des scalaires.

3.4 Cycles proches et action par un groupe fini

Dans toute cette section, on se donne une variété lisse complexe Y munie d'une action admissible d'un groupe fini G. Soit $X = Y/G$, $p : Y \to X$ le morphisme de projection et Z une hypersurface lisse de X donnée comme lieu d'annulation d'une fonction régulière f. On suppose p étale au-dessus de $U = X \setminus Z$, et on se donne un $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{M}$ localisé le long de Z, à savoir $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(*Z)$.

Pour $g \in G$, le morphisme d'adjonction $p^+\mathcal{M} \to g_+g^+p^+\mathcal{M} \simeq g_+p^+\mathcal{M}$ induit une action $g_\mathcal{M} : p_+p^+\mathcal{M} \to p_+p^+\mathcal{M}$ de g sur $p_+p^+\mathcal{M}$. D'autre part p est finie, d'où $\mathcal{H}^i p_+ \simeq 0$ pour $i > 0$. Puisque p est étale au-dessus de U, $\mathcal{H}^i p^+\mathcal{M}$ est à support dans $p^{-1}(Z)$ pour $i > 0$, et ainsi $\mathcal{H}^i p_+p^+\mathcal{M} \simeq p_+\mathcal{H}^i p^+\mathcal{M}$ est à support dans Z pour $i > 0$. On en déduit que le complexe $(p_+p^+\mathcal{M})(*Z)$ est concentré en degré 0 et peut donc être considéré comme un objet de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules, ce qui sera implicitement fait dans la suite.

Proposition 3.4.1. *le morphisme canonique* $\mathrm{adj}_\mathcal{M} : \mathcal{M} \to (p_+p^+\mathcal{M})(*Z)$ *identifie* $\mathcal{M}$ *aux G-invariants de* $(p_+p^+\mathcal{M})(*Z)$.

Démonstration. Par construction, $\mathrm{adj}_\mathcal{M}$ se factorise en un morphisme $\mathcal{M} \to ((p_+p^+\mathcal{M})(*Z))^G$. Puisque f agit de façon inversible sur son conoyau, ce morphisme est un isomorphisme dès que sa restriction à U l'est. On est donc ramené au cas où p est étale et $Z = \emptyset$ (en particulier, p est automatiquement galoisien).

Soit $h : X' \to X$ un revêtement étale de X. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "p'"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd}$$

On dispose alors du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} h^+\mathcal{M} \arrow[r, "h^+ \mathrm{adj}_\mathcal{M}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & h^+p_+p^+\mathcal{M} \arrow[d] \\ h^+\mathcal{M} \arrow[r, "\mathrm{adj}_{h^+\mathcal{M}}"] & p'_+p'^+h^+\mathcal{M} \end{tikzcd}$$

où la seconde flèche verticale est la composée du morphisme de changement de base $h^+p_+p^+\mathcal{M} \to p'_+h'^+p^+\mathcal{M}$ avec l'identification canonique $p'_+h'^+p^+\mathcal{M} \simeq p'_+p'^+h^+\mathcal{M}$.

D'après [16, 1.7.3], il s'agit d'un isomorphisme. Or le diagramme

$$\begin{tikzcd} h^+p_+p^+\mathcal{M} \arrow[r, "h^+g_{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\wr"'] & h^+p_+p^+\mathcal{M} \arrow[d, "\wr"] \\ p'_+p'^+h^+\mathcal{M} \arrow[r, "g_{h^+\mathcal{M}}"] & p'_+p'^+h^+\mathcal{M} \end{tikzcd}$$

commute, donc par exactitude de h^+ et 5.2.1

$$\begin{aligned} h^+(p_+p^+\mathcal{M})^G &= h^+\bigcap_G \ker(g_{\mathcal{M}} - \mathrm{id}) = \bigcap_G \ker(h^+g_{\mathcal{M}} - \mathrm{id}) \\ &\simeq \bigcap_G \ker(g_{h^+\mathcal{M}} - \mathrm{id}) = (p'_+p'^+h^+\mathcal{M})^G. \end{aligned}$$

On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} h^+\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & h^+(p_+p^+\mathcal{M})^G \arrow[d, "\wr"] \\ h^+\mathcal{M} \arrow[r] & (p'_+p'^+h^+\mathcal{M})^G \end{tikzcd}$$

Or h est étale, donc le $\mathcal{O}_{X'}$-module sous-jacent à $h^+\mathcal{M}$ est $h^*\mathcal{M}$ et $h^+ \operatorname{adj}_{\mathcal{M}}$ vu comme morphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-module correspond à $h^* \operatorname{adj}_{\mathcal{M}}$. On en déduit par descente pour les faisceaux quasi-cohérents [13, Exp. VIII] que l'énoncé de 3.4.1 est local sur X pour la topologie étale. On est donc ramené au cas où p est un revêtement galoisien trivial, mais alors le résultat est immédiat.

□

Corollaire 3.4.2. $\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$ *est muni d'une action G-équivariante de G, et le morphisme canonique* $\Psi_f\mathcal{M} \to p_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$ *induit un isomorphisme de* $\Psi_f\mathcal{M}$ *sur les G-invariants de* $p_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$.

Démonstration. Pour $g \in G$, la compatibilité des cycles proches avec l'image directe par un morphisme propre [42, 4.8.1] fournit une identification naturelle

$$\Psi_{f\circ p}g_+\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \simeq g_+\Psi_{f\circ p\circ g}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} = g_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}.$$

Le morphisme de $\mathcal{D}_Y$-module $\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \to g_+\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$ induit donc un morphisme $\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \to g_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$, d'où la première partie de 3.4.2.

Par naturalité de l'identification $p_+\Psi_{f\circ p} \simeq \Psi_f p_+$, le morphisme $\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \to g_+\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M}$ donne aussi le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \Psi_f\mathcal{H}^0p_+p^+\mathcal{M} \arrow[r, "\Psi_f\mathcal{H}^0g_{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\wr"'] & \Psi_f\mathcal{H}^0p_+p^+\mathcal{M} \arrow[d, "\wr"] \\ p_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \arrow[r] & p_+\Psi_{f\circ p}\mathcal{H}^0p^+\mathcal{M} \end{tikzcd} \tag{3.4.3}$$

Or par invariance des cycles proches par localisation [33, 4.4-3], la flèche supérieure de 3.4.3 est aussi $\Psi_f g_{\mathcal{M}} : \Psi_f p_+p^+\mathcal{M}(*Z) \longrightarrow \Psi_f p_+p^+\mathcal{M}(*Z)$ et la proposition se déduit alors de 3.4.1 et de l'exactitude de Ψ_f. □

3.5 Trois lemmes d'annulation

Les lemmes d'annulation de ce paragraphe apparaissent déjà dans la littérature [48, 14.22, 14.26]. On rappelle ici les preuves de 3.5.1 et 3.5.3 pour la commodité du lecteur, et on donne une autre preuve de 3.5.2 à l'aide de 3.4.2.

Soit U un ouvert de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ contenant l'origine et $f = f(t, y)$ régulière sur U. Soit $\mathcal{R}$ connexion sur U méromorphe à singularité régulière le long de $t = 0$.

Lemme 3.5.1. *On suppose que $f(0,0) \neq 0$ ou que $f(0, y)$ admet un zéro simple en l'origine. Alors si $k > 0$ et $a > 0$, on a $\Psi_{t^a}(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k} \otimes \mathcal{R}) \simeq 0$ au voisinage de 0.*

Démonstration. Par 3.1.7, il suffit de traiter le cas $a = 1$.

D'après [48, 14.10], on a une identification canonique

$$\widehat{\mathcal{O}_{U,0}} \otimes_{\mathcal{O}_{U,0}} \Psi_t(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k} \otimes \mathcal{R}) \simeq \Psi_t(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0}).$$

Si $f(0, 0) \neq 0$, il fait sens d'effectuer le changement de variable $t' = t/\sqrt[k]{f}$ dans $\widehat{\mathcal{O}_{U,0}}$, de sorte qu'on est ramené par fidèle platitude de $\widehat{\mathcal{O}_{U,0}}$ sur $\mathcal{O}_{U,0}$ à prouver la nullité de $\Psi_t(\mathcal{E}^{1/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0})$.

Si $f(0, y)$ admet un zéro simple en l'origine, alors on pose $y' = f(t, y)$ et on observe que la matrice jacobienne de (t, y') ne s'annule pas en l'origine. Ainsi le couple (t, y') constitue un système de coordonnées au voisinage de l'origine, de sorte que quitte à rétrécir U, on est ramené par fidèle platitude de $\widehat{\mathcal{O}_{U,0}}$ sur $\mathcal{O}_{U,0}$ à prouver la nullité de $\Psi_t(\mathcal{E}^{y/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0})$.

Montrons dons la nullité de $\Psi_t(\mathcal{E}^{y^l/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0})$ avec $l = 0, 1$. D'après [46, 2.1.1], $\widehat{\mathcal{R}_0}$ admet un réseau sur lequel $t\partial_t$ agit via une matrice à coefficients constants et ∂_y agit par 0. En particulier par trigonalisation, $\widehat{\mathcal{R}_0}$ admet un sous-objet propre dès que son rang est >1. Par exactitude de Ψ_t, une récurrence permet de se ramener au cas où $\widehat{\mathcal{R}_0}$ est de rang 1. Alors $\widehat{\mathcal{R}_0}$ admet un générateur m satisfaisant à $t\partial_t m = cm$, $c \in \mathbb{C}$ et $\partial_y m = 0$. Dans tous les cas, la section $s =$ « e^{y^l/t^k} » $\otimes\, m$ est génératrice et satisfait à $t^k(c - t\partial_t)s = ks$ si $l = 0$ et $t^k \partial_y s = s$ si $l = 1$. Le polynôme de Bernstein de s est donc constant. La trivialité de la V-filtration en découle. □

Lemme 3.5.2. *On suppose que $f(0,0) \neq 0$ et soit $g = t^a y^b$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Alors si $k, k' > 0$, on a $\Psi_g(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \mathcal{R}) \simeq 0$ au voisinage de 0.*

Démonstration. On se ramène comme en 3.5.1 à montrer la nullité du module $\Psi_g(\mathcal{E}^{1/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0})$ avec $\widehat{\mathcal{R}_0}$ de rang 1 admettant un générateur m qui vérifie $t\partial_t m = cm$, $c \in \mathbb{C}$ et $\partial_y m = 0$. Si on définit

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ (u, z) & \mapsto & (u^b, z^a), \end{array}$$

on a d'après 3.4.2 une injection canonique

$$\Psi_{t^a y^b}(\mathcal{E}^{1/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0}) \hookrightarrow h_+ \Psi_{(uz)^{ab}}(\mathcal{E}^{1/u^{bk} z^{ak'}} \otimes h^+ \widehat{\mathcal{R}_0}),$$

et on se ramène ainsi à étudier le cas où $a = b$. Par 3.1.7, on peut supposer $a = b = 1$. Par définition, $\Psi_{ty} = \Psi_v \circ \Gamma(g)_+$ où $\Gamma(g)$ désigne le graphe de g et v est donnée par

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^2 \arrow[r, hook, "\Gamma(g)"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "v"] \\ & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

Or $s =$ « $e^{1/t^k y^{k'}}$ » $\otimes m$ engendre $\mathcal{E}^{1/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0}$ et vérifie $t^k y^{k'+1}\partial_y s = -k's$. Donc $s' = s\delta(v - ty)$ engendre $\Gamma(g)_+\mathcal{E}^{1/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}_0}$. Or

$$v\partial_y \cdot s' = \partial_y v \cdot s' = \partial_y \cdot (tys\delta) = ts' + ty(\partial_y s)\delta - yt^2 s\partial_v\delta \in V_{-1}s'.$$

donne par multiplication par y

$$yts' + ty^2(\partial_y s)\delta - y^2t^2 s\partial_v\delta \in V_{-1}s'.$$

Puisque $yts' = vs' \in V_{-1}s'$, on en déduit

$$ty^2(\partial_y s)\delta - y^2t^2 s\partial_v\delta \in V_{-1}s'.$$

D'autre part

$$\partial_v v^2 s' = 2vs' + v^2\partial_v s' = t^2y^2 s\partial_v\delta \in V_{-1}s'$$

d'où finalement $ty^2(\partial_y s)\delta \in V_{-1}s'$. Puisque $k \geq 1$ et $k' \geq 1$, il fait sens de multiplier cette dernière relation par $t^{k-1}y^{k'-1}$. On obtient alors

$$t^k y^{k'+1}(\partial_y s)\delta = -k's\delta = -k's' \in V_{-1}s'$$

Ainsi, $s' \in V_{-1}s'$ est de polynôme de Bernstein constant, d'où 3.5.2.

□

Lemme 3.5.3. *On fait l'hypothèse que $f = t^l g(t,y) + y^m h(t,y)$ avec $g(0,0) \neq 0$, $h(0,0) \neq 0$, $(l,m) \neq (0,0)$. Soit $g = t^a y^b$ avec $(a,b) \neq 0$. Alors si $k > l$ et $k' > 0$, on a $\Psi_g(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \mathcal{R}) \simeq 0$ au voisinage de 0.*

Démonstration. Les cas $l = 0$ ou $m = 0$ étant traités par 3.5.2, on peut raisonner par récurrence sur (l,m) et supposer $l \neq 0$ et $m \neq 0$. Soit $p : \widetilde{U} \to U$ l'éclaté de U en l'origine. Par compatibilité des cycles proches avec les modifications propres [48, 14.12], on a

$$\Psi_g(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \mathcal{R}) \simeq p_+\Psi_{g\circ p}(\mathcal{E}^{f(p_t,p_y)/p_t^k p_y^{k'}} \otimes p^+\mathcal{R}).$$

Démontrons que $\Psi_{g\circ p}(\mathcal{E}^{f(p_t,p_y)/p_t^k p_y^{k'}} \otimes p^+\mathcal{R}) \simeq 0$ sur le diviseur exceptionnel E.

Dans la carte U_0 de $\widetilde{U}$ donnée par $t = u$ et $y = uv$, on a $p(u,v) = (u,uv)$, de sorte que la trace de E sur U_0 est donnée par $u = 0$, et

$$f(p_t,p_y)/p_t^k p_y^{k'} = (u^l g(u,uv) + (uv)^m h(u,uv))/u^{k+k'}v^{k'}.$$

Au voisinage d'un point $v_0 \neq 0$ de U_0, 3.5.1 s'applique immédiatement si $l \neq m$. Dans le cas $l = m$, on observe que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,v_0) = mv_0^{m-1}h(0,0) \neq 0$ de sorte que 3.5.1 s'applique encore. Au voisinage de l'origine de U_0, 3.5.2 s'applique si $l < m$, et sinon $m > 0$ permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

Dans la carte U_1 donnée par les coordonnées $t = u'v'$ et $y = v'$, $p(u', v') = (u'v', v')$, donc $E \cap U_1$ est défini par $u'v' = 0$, et on a

$$f(p_t, p_y)/p_t^k p_y^{k'} = ((u'v')^l g(u'v', v') + v'^m h(u'v', v'))/u'^k v'^{k+k'}.$$

On se place au voisinage de l'origine. Si $l \leq m$, la condition $l > 0$ assure que l'hypothèse de récurrence s'applique, et sinon la situation est justiciable de 3.5.2. $\square$

4 Preuve du théorème

Décrivons les différentes étapes de la démonstration. Une première réduction reposant sur 3.4.1 et la semi-simplicité du membre de droite de (2.3.4) permet d'identifier $\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ et $\Psi_\pi H_{mn,mk}(\mathcal{M})$ pour m entier dès que (2.3.4) est connue pour $\Psi_\pi H_{mn,mk}(\mathcal{M})$, de sorte qu'on est ramené au cas où n est un multiple de $m_{\mathcal{M}}$. Dans ce cas, on se ramene à un calcul explicite avec $\mathcal{M}$ décomposé en observant que x admet une racine n-ième dans la formalisation de $S_{1,n}(D_k)$ le long de la fibre spéciale.

4.1 Réduction au cas où n est un multiple de $m_{\mathcal{M}}$

Soit m un entier naturel. On suppose que la formule (2.3.4) est acquise lorsque n est un multiple de m et on la déduit dans le cas général. Il suffit de montrer que pour tout couple (n, k) avec $n < k$, si la relation (2.3.4) est montrée pour $H_{mn,mk}(\mathcal{M})$, alors elle est vraie pour $H_{n,k}(\mathcal{M})$.

Le morphisme $\nu_m : S_{mn} \to S_n$ donne un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
S_{1,mn}(D_{mk}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi'"'] & S_{1,n}(D_k) \arrow[d, "\pi"] \\
S_{mn} \arrow[r] & S_n
\end{tikzcd}$$

avec p satisfaisant aux conditions de 3.4.1 pour $G = U_m$. Puisque le cube

$$\begin{tikzcd}
S \times \eta_{mn} \arrow[rr, "\mathrm{id} \times \nu_m"] \arrow[dr, "j_{mn,mk}"'] \arrow[dd] & & S \times \eta_n \arrow[dr, "j_{n,k}"] \arrow[dd] & \\
& S_{1,mn}(D_{mk}) \arrow[rr, "p"'] \arrow[dd] & & S_{1,n}(D_k) \arrow[dd] \\
\eta_{mn} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \eta_n \arrow[dr] & \\
& S_{mn} \arrow[rr] & & S_n
\end{tikzcd}$$

est à faces commutatives et cartésiennes, on a

$$\begin{aligned}
p_+p^+ H_{n,k}(\mathcal{M}) &\simeq p_+ j_{mn,mk+}(\mathrm{id} \times \nu_m)^+ \mathcal{H}om(p_2^+ \gamma_n^+ \mathcal{M}, p_1^+ \mathcal{M}) \\
&\simeq p_+ j_{mn,mk+} \mathcal{H}om(p_2^+ \gamma_{mn}^+ \mathcal{M}, p_1^+ \mathcal{M}) \\
&= p_+ H_{mn,mk}(\mathcal{M}).
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

D'après le point 5 des Notations et rappels, l'adjonction $H_{n,k}(\mathcal{M}) \longrightarrow p_+p^+H_{n,k}(\mathcal{M})$ est donnée par

$$H_{n,k}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{O}_{S_{1,mn}(D_{mk})} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{1,n}(D_k)}} H_{n,k}(\mathcal{M}). \tag{4.1.2}$$

Soient u une uniformisante de S_{mn} et $\zeta \in U_m$ une racine primitive. De (4.1.2), on déduit que la décomposition en sous-espaces propres de l'action de ζ sur $p_+H_{mn,mk}(\mathcal{M})$ est

$$H_{n,k}(\mathcal{M}) \oplus uH_{n,k}(\mathcal{M}) \oplus \cdots \oplus u^{m-1}H_{n,k}(\mathcal{M}). \tag{4.1.3}$$

Du fait de la formule $\partial_t u^l w = \frac{l}{m}\frac{u^l}{t}w + u^l\partial_t w$, l'opérateur ∂_t stabilise chacun des facteurs de (4.1.3), donc il s'agit d'une décomposition dans la catégorie des $\mathcal{D}$-modules sur $S_{1,n}(D_k)$. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $w \in H_{n,k}(\mathcal{M})$, la relation

$$(t\partial_t - \frac{l}{m} - a)u^l w = u^l(t\partial_t - a)w$$

montre que si $P \in V_0(\mathcal{D})$ est tel que $b_w(t\partial_t)w = tP(t\partial_t, y, \partial_y)w$, alors

$$b_w(t\partial_t - \frac{l}{m})u^l w = u^l b_w(t\partial_t)w = tu^l P(t\partial_t, y, \partial_y)w = tP(t\partial_t - \frac{l}{m}, y, \partial_y)u^l w,$$

de sorte que $b_{u^l w} = b_{u^l w}(t\partial_t)$ divise $b_w(t\partial_t - \frac{l}{m})$. En utilisant le fait que u agit de façon inversible sur $p_+H_{mn,mk}(\mathcal{M})$, on montre de même que $b_w(t\partial_t - \frac{l}{m})$ divise $b_{u^l w}$. On a donc $b_{u^l w} = b_w(t\partial_t - \frac{l}{m})$, d'où pour $a \in \mathbb{C}$ un isomorphisme d'espaces vectoriels « multiplication par u^l »bien défini

$$\Psi_{\pi,a+\frac{l}{m}} H_{n,k}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\pi,a} u^l H_{n,k}(\mathcal{M})$$

et compatible aux actions de y et ∂_y. D'après (4.1.3) et le fait que l'action de t induit un isomorphisme $\Psi_{\pi,a}H_{n,k}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\pi,a-1}H_{n,k}(\mathcal{M})$ pour tout a, on obtient

$$\Psi_\pi p_+ H_{mn,mk}(\mathcal{M}) \simeq (\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}))^m.$$

Or en combinant 3.1.7 et la compatibilité des cycles proches avec l'image directe par un morphisme propre [42, 4.8.1], on a des identifications canoniques

$$\Psi_\pi p_+ H_{mn,mk}(\mathcal{M}) \simeq \Psi_{\pi^m} H_{mn,mk}(\mathcal{M}) \simeq (\Psi_\pi H_{mn,mk}(\mathcal{M}))^m.$$

Il vient ainsi

$$(\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}))^m \simeq (\Psi_\pi H_{mn,mk}(\mathcal{M}))^m,$$

d'où

$$(\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}))^m \simeq \mathcal{O}_{T_r}^{mn^2_{<r-1}} \bigoplus_{\Omega_{r-1}(\mathcal{M})} (\mathcal{E}^{dt_{r-1}(\omega)})^{mn^2_\omega}. \tag{4.1.4}$$

et la formule (2.3.4) pour $H_{n,k}(\mathcal{M})$ découle de la semi-simplicité du membre de droite de (4.1.4).

4.2 Le cas où n est un multiple de $m_{\mathcal{M}}$

En complétant $S_{1,n}(D_k)$ le long de la fibre spéciale de π, définie par l'idéal (t), on obtient d'après [38, 8.12] le schéma $\widehat{S_{1,n}(D_k)}$ d'anneau de fonctions

$$\mathbb{C}[y][\![x,t]\!]/(x - t^n p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[y][\![t]\!]\ ,$$

où on a posé $p = 1+yt^{k-n}$. D'après 3.2.1, on ne change pas les cycles proches de $H_{n,k}(\mathcal{M})$ en restreignant la situation à $\widehat{S_{1,n}(D_k)}$, ce que l'on fera dans la suite. Or p admet des racines n-ième dans l'anneau de fonctions de $\widehat{S_{1,n}(D_k)}$. Notons z la racine satisfaisant à $z \equiv 1 + yt^{k-n}/n \quad \left(t^{k-n+1}\right)$. Alors $x = (zt)^n$, de sorte que si

$$\gamma_n^+\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\Omega(\mathcal{M})} \mathcal{E}^{\omega(t)} \otimes \mathcal{R}_{\omega(t)}$$

est la décomposition de Levelt-Turrittin (1.0.3) de $\mathcal{M}$, il vient

$$\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) \simeq \bigoplus_{\omega_1,\omega_2\in\Omega(\mathcal{M})} \Psi_t(\mathcal{E}^{\omega_1(zt)-\omega_2(t)} \otimes \mathcal{R}_{\omega_1,\omega_2}),$$

avec $\mathcal{R}_{\omega_1,\omega_2}$ régulier le long de la fibre spéciale. Désignons par $H_{n,k}(\omega_1,\omega_2)(\mathcal{R}_{\omega_1,\omega_2})$ ou même $H_{n,k}(\omega_1,\omega_2)$ quand aucune confusion n'est possible, le terme de cette somme correspondant aux formes ω_1 et ω_2, et écrivons $\omega_i = P_i(t)/t^{q_i}$ avec $\deg P_i < q_i$. $P_i(0) = c_{r-1}(\omega_i)$ est le coefficient dominant de ω_i pour la variable $1/t$. Soit n_ω le rang de $\mathcal{R}_\omega$. La formule (2.3.4) (et par suite le théorème 2.2.4) se déduit des calculs suivants :

Lemme 4.2.1. *Si $\omega \neq 0$, $\Psi_t H_{n,k}(\omega,0) \simeq \Psi_t H_{n,k}(0,\omega) \simeq 0$.*

Par définition, $H_{n,k}(\omega,0) \simeq \mathcal{E}^{\omega(zt)} \otimes \mathcal{R}$ et $H_{n,k}(0,\omega) \simeq \mathcal{E}^{\omega(t)} \otimes \mathcal{R}'$, avec $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ réguliers, donc 4.2.1 est une application immédiate de 3.5.1.

Lemme 4.2.2. *Si $\omega_1 \neq \omega_2$ sont non nulles, alors $\Psi_t H_{n,k}(\omega_1,\omega_2) \simeq 0$.*

Démonstration. Si $q_1 < q_2$,

$$\begin{aligned} t^{q_2}(\omega_1(zt) - \omega_2(t)) &= t^{q_2-q_1}z^{-q_1}P_1(zt) - P_2(t) \\ &\equiv -P_2(0) \quad (t), \end{aligned}$$

de sorte que le lemme 3.5.1 s'applique, et de même si $q_1 > q_2$.
Si $q_1 = q_2 = q$,

$$\begin{aligned} t^q(\omega_1(zt) - \omega_2(t)) &= z^{-q}P_1(zt) - P_2(t) \\ &\equiv P_1(t) - P_2(t) - qP_1(0)yt^{k-n}/n \quad (t^{k-n+1}). \end{aligned}$$

La valuation t-adique de $P_1 - P_2$ est finie et plus petite que $q-1$, donc quelle que soit la façon dont elle se compare à $k-n$, le lemme 3.5.1 s'applique. □

Dans les deux lemmes qui suivent, on utilisera l'observation que $z - 1 = yt^{k-n}/r_n$ avec $r_n = \frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{\zeta\in U_n\setminus\{1\}}(z-\zeta)$ unité de $\mathbb{C}[y][\![t]\!]$.

Lemme 4.2.3. $\Psi_t H_{n,k}(0,0) \simeq \mathcal{O}_T^{n_0^2}$.

Démonstration. On se donne une base de $\mathcal{R}_0$ dans laquelle la matrice de ∂_t est de la forme A/t avec $A \in GL_{n_0}(\mathbb{C})$. Alors

$$H_{n,k}(0,0) \simeq (\mathcal{O}(*T)^{n_0^2}, d + (A\otimes 1 - 1\otimes A)dt/t + A\otimes 1dz/z),$$

et il suffit donc de démontrer que si $B, C \in GL_l(\mathbb{C})$ commutent, alors si on pose

$$\mathcal{H}_{B,C} := (\mathcal{O}(*T)^l, d + Bdt/t + Cdz/z),$$

on a

$$\Psi_t \mathcal{H}_{B,C} \simeq \mathcal{O}_T^l.$$

On raisonne par récurrence sur l.

Supposons $l = 1$ et notons β et γ pour B et C. Si $\beta = 0$, le calcul 3.1.2 et l'insensibilité des cycles proches à la localisation [33, 4.4-3] montrent que

$$\Psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma} \simeq \Psi_t(\mathcal{O}, d + \gamma dz/z) \simeq i^+_{n,k}(\mathcal{O}, d + \gamma dz/z) \simeq \mathcal{O}_T,$$

où la dernière égalité provient de ce que $z \equiv 1$ sur T. Si $l = 1$ et $\beta \neq 0$, la section $s = 1$ est génératrice, et on a

$$t\partial_t s = \beta s + (k-n)\gamma y t^{k-n} s/(zr_n) = \beta s \quad (V_{-1}(\mathcal{D})s).$$

On en déduit que $b_s(t\partial_t)$ divise $t\partial_t - \beta$. Or b_s ne peut être constant car dans le cas contraire t serait inversible, d'où $b_s(t\partial_t) = t\partial_t - \beta$. Ainsi $V_{\textbf{.}}(\mathcal{D})s$ est une bonne filtration dont les racines du polynôme de Bernstein sont dans $[-(-\beta-1)-1, -(-\beta-1)[$, donc $V_m(\mathcal{D})s = V_{-\beta-1+m}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma})$ pour tout entier m. En particulier, tout élément de $\mathcal{H}_{\beta,\gamma}$ est dans l'un des $V_{-\beta-1+m}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma})$, donc si $a \in \mathbb{C} \setminus \{-\beta - 1 + \mathbb{Z}\}$, $V_a(\mathcal{H}_{\beta,\gamma}) = V_{<a}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma})$ et sinon $V_{<a}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma}) = V_{a-1}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma}) = tV_a(\mathcal{H}_{\beta,\gamma})$. Soit β' l'unique élément de $\beta + \mathbb{Z}$ dans l'intervalle $[-1, 0[$. On obtient

$$\begin{aligned}\Psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma} &\simeq \Psi_{t,\beta'} \mathcal{H}_{\beta,\gamma} \simeq \Psi_{t,-\beta-1} \mathcal{H}_{\beta,\gamma} \\ &\simeq V_{-\beta-1}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma})/tV_{-\beta-2}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma}) \\ &= V_0(\mathcal{D})s/V_{-1}(\mathcal{D})s.\end{aligned}$$

Du fait de

$$\partial_y s = t^{k-n} s/(zr_n) \in V_{-1}(\mathcal{D})s, \tag{4.2.4}$$

∂_y agit par 0 sur $\Psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma}$, et on a donc un morphisme bien défini $\mathcal{O}_T \longrightarrow \Psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma}$ associant à « 1 »la classe de s. Puisque $[P(t\partial t, y, \partial_y)s] = [P(\beta, y, 0)s]$ dans $\Psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma}$, ce morphisme est surjectif. Il est aussi injectif, car si $[f(y)s] = 0$, avec $f \neq 0$, alors par application successive de ∂_y, on obtient $[s] = 0$, contradiction. D'où le cas $l = 1$.

Supposons $l > 1$. Puisque B et C commutent, le choix d'un vecteur propre commun permet de définir une suite exacte du type

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_{\beta,\gamma} \longrightarrow \mathcal{H}_{B,C} \longrightarrow \mathcal{H}_{B',C'} \longrightarrow 0\ ,$$

avec B' et C' qui commutent. Donc par passage aux cycles proches, l'hypothèse de récurrence donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_T \longrightarrow \Psi_t \mathcal{H}_{B,C} \longrightarrow \mathcal{O}_T^{l-1} \longrightarrow 0\ . \tag{4.2.5}$$

et 4.2.3 découle alors de

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_T, \mathcal{O}_T) \simeq R^1 Hom_{\mathcal{D}_T}(\mathcal{O}_T, \mathcal{O}_T) \simeq \operatorname{Coker}(\mathcal{O}_T \xrightarrow{\partial_y} \mathcal{O}_T) \simeq 0$$

□

Lemme 4.2.6. *On suppose $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ de degré q. Alors,*

1. *Si $k - n < q$, $\Psi_t H_{n,k}(\omega, \omega) \simeq 0$.*
2. *Si $k - n > q$, $\Psi_t H_{n,k}(\omega, \omega) \simeq \mathcal{O}_T^{n_\omega^2}$.*
3. *Si $k - n = q$, $\Psi_t H_{n,k}(\omega, \omega) \simeq (\mathcal{E}^{-(k/n-1)P(0)y})^{n_\omega^2}$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} t^q(\omega(zt) - \omega(t)) &= z^{-q}P(zt) - P(t) \\ &\equiv (z^{-q} - 1)P(t) \quad (t^{k-n+1}) \\ &\equiv -r_q y t^{k-n} P(t)/r_n \quad (t^{k-n+1}) \\ &\equiv -r_q y t^{k-n} P(0)/r_n \quad (t^{k-n+1}), \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

de sorte que 3.5.1 assure la nullité de $\Psi_t H_{n,k}(\omega, \omega)$ dans le cas $k - n < q$. Si $k - n \geq q$, $\omega_1(zt) - \omega_2(t)$ est polynomiale, donc *2.* et *3.* se déduisent de la combinaison de 3.1.3 et du calcul 4.2.3 de $\Psi_t H_{n,k}(0, 0)(\mathcal{R}_{\omega,\omega})$. □

Ceci achève la preuve de la formule (2.3.4).

5 Appendice

5.1 Nullité des cycles proches pour $r \leq 1$ et $\mathcal{M}$ décomposé

Proposition 5.1.1. *On suppose $k \leq n$ et $\mathcal{M} \simeq \oplus \mathcal{E}^\omega \otimes \mathcal{R}_\omega$ sans partie régulière. Alors $\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) \simeq 0$.*

Démonstration. On a

$$\Psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) \simeq \bigoplus_{\omega_1, \omega_2} \Psi_t(\mathcal{E}^{\omega_1(x) - \omega_2(t^n)} \otimes \mathcal{R}_{\omega_1, \omega_2}),$$

avec $\mathcal{R}_{\omega_1,\omega_2}$ régulier le long de la fibre spéciale. Désignons par $H_{n,k}(\omega_1, \omega_2)$ le terme de cette somme correspondant aux formes ω_1 et ω_2, et écrivons $\omega_i = P_i(x)/x^{q_i}$ avec $\deg P_i < q_i$. $P_i(0)$ est le coefficient dominant de ω_i pour la variable $1/x$. $\mathcal{M}$ étant supposé sans partie régulière, $P_i(0) \neq 0$. Alors en effectuant le changement de variable $u = t$ et $v = t^{n-k} + y$, on a

$$\begin{aligned} \omega_1(x) - \omega_2(t^n) &= \frac{P(t^n + yt^k)}{t^{kq_1}(t^{n-k} + y)^{q_1}} - \frac{P_2(t^n)}{t^{nq_2}} = \frac{P_1(u^k v)}{u^{kq_1} v^{q_1}} - \frac{P_2(u^n)}{u^{nq_2}} \\ &= \frac{u^{nq_2} P_1(u^k v) - u^{kq_1} v^{q_1} P_2(u^n)}{u^{kq_1 + nq_2} v^{q_1}}. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

On se place au voisinage de $v_0 \neq 0$. Si on suppose $nq_2 > kq_1$, (13.3.3) s'écrit $(u^{nq_2 - kq_1} P_1(u^k v) - v^{q_1} P_2(u^n))/u^{nq_2} v^{q_1}$. Si $f(u, v)$ désigne la partie non polaire de cette expression, $f(0, v_0) = -P_2(0)/v_0^{q_1}$ est non nul, donc 3.5.1 s'applique. On raisonne de même avec le cas $nq_2 < kq_1$ en utilisant $P_1(0) \neq 0$. Si $nq_2 = kq_1$, la partie non polaire de (13.3.3) est $f(u, v) = (P_1(u^k v) - v^{q_1} P_2(u^n))/v^{q_1}$ et en évaluant en $(0, v)$ on constate que la situation satisfait les hypothèses de 3.5.1.

On se place au voisinage de $v_0 = 0$. Si on suppose $nq_2 \leq kq_1$, (13.3.3) devient $(P_1(u^k v) - u^{kq_1 - nq_2} v^{q_1} P_2(u^n))/u^{kq_1} v^{q_1}$. Le numérateur de cette expression vaut $P_1(0) \neq 0$, donc 3.5.2 s'applique. Dans le cas contraire, (13.3.3) est exactement $(u^{nq_2 - kq_1} P_1(u^k v) - v^{q_1} P_2(u^n))/u^{nq_2} v^{q_1}$ et on est dans le cadre de 3.5.3. $\square$

5.2 Intersection et exactitude à gauche

Lemme 5.2.1. *Soit $\mathcal{A}$ un catégorie abélienne, M un objet de $\mathcal{A}$ et N_1 et N_2 deux sous objets de M. Soit $\mathcal{B}$ une catégorie abélienne et $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif exact à gauche. Alors on a une identification canonique $F(N_1 \cap N_2) \simeq F(N_1) \cap F(N_2)$.*

Démonstration. On commence par observer que $N_1 \cap N_2$ fait bien sens, comme noyau de

$$\begin{array}{rcl} I_{N_1,N_2} : N_1 \oplus N_2 & \longrightarrow & M \\ (x_1, x_2) & \longrightarrow & x_1 - x_2. \end{array}$$

Alors, $F(N_1)$ et $F(N_2)$ sont des sous-objets de $F(M)$, et par additivité $F(I_{N_1,N_2}) \simeq I_{F(N_1),F(N_2)}$. Mais F commute au noyau, donc

$$F(N_1 \cap N_2) = F(\operatorname{Ker} I_{N_1,N_2}) \simeq \operatorname{Ker} F(I_{N_1,N_2}) \simeq \operatorname{Ker} I_{F(N_1),F(N_2)} = F(N_1) \cap F(N_2)$$

$\square$

Deuxième partie

La construction d'Abbes et Saito pour les connexions méromorphes : le cas d'une connexion à pôles le long d'un hyperplan de l'espace affine

Sommaire

Dans cette partie, on généralise au cas d'une connexion méromorphe le long d'un hyperplan de l'espace affine l'observation conséquente de 2.2.4 que sur un corps algébriquement clos, les modules produits par la construction d'Abbes et Saito sont linéaires. Il s'agit de résultats analogues aux résultats d'additivité obtenus dans [49] [4].

Après une première section consacrée aux sorites sur les modules linéaires, on présente le théorème principal 8.1.3 de cette partie. Pour prouver ce théorème, l'idée est d'introduire une condition 7.2.1 plus forte que la linéarité ponctuelle 7.1.6 que l'on cherche à montrer, et qui a la vertu de bien se comporter vis-à-vis des sous-objets et des cycles proches. L'analyse de cette interaction est traitée en 9.3.1 et 9.3.4.

Le fait que le module produit par la construction d'Abbes et Saito possède bien cette propriété est une application de l'existence des réseaux de Malgrange. Elle fait l'objet de 10.2.1 et 10.2.2.

Enfin, on calcule à titre d'exemple ce que donne la construction d'Abbes et Saito dans un cas particulier de bonne décomposition formelle. Tout comme en dimension 1, le support obtenu rend compte des parties les plus polaires des formes de la décomposition de Levelt-Turrittin.

6 Notations et rappels

1. Soit $\mathcal{M}$ une connexion méromorphe sur une variété algébrique affine lisse X. On note D le lieu des pôles de $\mathcal{M}$, supposé irréductible lisse de point générique η et donné par l'équation $z = 0$. Par théorème de Levelt-Turrittin [5, 2.3.1], on peut trouver un entier e et une extension galoisienne K' du corps de fonction K de D tel que
$$K'((z^{1/e})) \otimes_{\mathcal{O}_{X,\eta}} \mathcal{M}_\eta \simeq \bigoplus_{\phi \in z^{-1/e}K'[z^{-1/e}]} \mathcal{E}^\phi \otimes \mathcal{R}_\phi \tag{6.0.2}$$
avec $\mathcal{E}^\phi = (K'((z^{1/e})), d + \phi dz^{1/e})$, et $\mathcal{R}_\phi$ un $K'((z^{1/e}))$-module à singularité régulière. Si les (ϕ_i) constituent la collection des ϕ intervenant dans (6.0.2), alors on peut toujours supposer que pour $i \neq j$ on a $\phi_i \neq \phi_j$. En particulier, il existe au plus un indice i pour lequel ϕ_i est nul. Notons i_0 cet indice.
Soit D' la normalisation de D dans K' et A' son anneau de fonction. On appellera *lieu non-tournant* de $\mathcal{M}$, où encore *lieu de bonne décomposition formelle* de $\mathcal{M}$ l'ouvert de D des points P au-dessus desquels les parties les plus polaires des $(\phi_i)_{i\neq i_0}$ et $(\phi_i - \phi_j)_{i\neq j}$ sont des inversibles du semi-localisé A'_P et la décomposition (6.0.2) descend à $A'_P((z^{1/e}))$.
D'après un théorème dû à Malgrange [37, 3.2.1] dans le cas analytique, et André [5, 3.4.3] dans le cas algébrique, le lieu non tournant de $\mathcal{M}$ est non vide.

2. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de variétés algébriques complexes lisses. Pour tout module holonome $\mathcal{M}$ sur X, le faisceau quasi-cohérent $f^*\mathcal{M}$ est canoniquement muni d'une structure de module $\mathcal{D}_Y$-module holonome. On dispose donc d'un foncteur de la catégorie des modules holonomes sur X vers la catégorie des modules holonomes sur Y. On note dans ce texte f^+ son foncteur dérivé. On prendra garde que f^+ est noté $f^!$ dans [8, VI], et $\mathbb{L}f^*$ dans [34].

3. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module cohérent sur une variété lisse X, alors on définit le support $\mathrm{Supp}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ par l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels le germe $\mathcal{M}_x$ est

non nul. Comme conséquence immédiate de la relation

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{M}) = \mathrm{Char}(\mathcal{M}) \cap T_X^*X$$

où $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ désigne la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, $\mathrm{Supp}(\mathcal{M})$ est automatiquement un fermé de X.

7 Modules linéaires

7.1 Généralités

Définition 7.1.1. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on appelle *module linéaire sur* E tout module somme directe finie de modules du type $\mathcal{E}^\varphi := (\mathcal{O}_E, d + d\varphi)$ où $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire sur E.

Lemme 7.1.2. *Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux modules linéaires sur $\mathbb{A}^n$, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{\mathbb{A}^n}}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \simeq 0.$$

Démonstration. On se ramène par somme directe au cas où les $\mathcal{E}_i$ sont de rang 1. Par tensorisation, on peut aussi supposer que $\mathcal{E}_1$ est trival. Il faut donc montrer la nullité du premier groupe de cohomologie de De Rham algébrique de $\mathcal{E} := \mathcal{E}_1$ avec $\mathcal{E}$ donné par la 1-forme $a_1dx_1 + \cdots + a_ndx_n$ où $a_i \in \mathbb{C}$. Si $n = 1$, c'est un calcul immédiat. Supposons donc $n > 1$.

Si tous les a_i sont nuls, le complexe de De Rham de $\mathcal{E}$ est le complexe de Koszul $\mathcal{K}(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ pour le module $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ sur l'anneau commutatif $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$. Il est en particulier acyclique en degré > 0.

Si l'un des a_i est non nul, mettons a_1 on peut toujours supposer quitte à faire le changement de coordonnées linéaire $y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$ que $a_2 = \cdots = a_n = 0$. Dans ce cas, $\mathrm{DR}\,\mathcal{E}$ est le complexe de Koszul $\mathcal{K}(\partial_1 + 1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Or ce dernier complexe est quasi-isomorphe au cône du morphisme de complexe

$$\mathcal{K}(\partial_2, \ldots, \partial_n) \xrightarrow{(\partial_1+1)\cdot} \mathcal{K}(\partial_2, \ldots, \partial_n)$$

avec $\mathcal{K}(\partial_2, \ldots, \partial_n)$ quasi-isomorphe à $\mathbb{C}[x_1]$ placé en degré 0, d'où l'annulation voulue. □

Corollaire 7.1.3. *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel algébrique à connexion sur l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ muni des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. On suppose l'existence d'une trivialisation globale de $\mathcal{E}$ sur laquelle les ∂_{x_i} agissent via des matrices à coefficients constants. Alors $\mathcal{E}$ est une connexion linéaire sur $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le rang de $\mathcal{E}$, le cas où $\mathcal{E}$ est de rang 1 étant trivial. Notons $\mathbf{e}$ une base ayant la propriété de l'énoncé. Par intégrabilité de $\mathcal{E}$, les matrices des ∂_{x_i} commutent deux à deux, donc la considération d'une base de triangularisation simultanée assure l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow 0$$

avec $\mathcal{E}_1$ linéaire de rang 1 et $\mathcal{E}_2$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Par récurrence, les $\mathcal{E}_i$ sont linéaires et 7.1.3 se déduit de 7.1.2. □

Corollaire 7.1.4. *Tout sous-objet d'un module linéaire*

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^{\omega_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^{\omega_n} \tag{7.1.5}$$

est isomorphe à une somme directe de certains $\mathcal{E}^{\omega_i}$ intervenant dans (7.1.5)*. En particulier, tout sous-quotient d'un module linéaire est linéaire.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un sous-module de $\mathcal{E}$. Du fait de l'inclusion $\mathrm{Char}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{Char}(\mathcal{E}) = T^*_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, on a $\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = T^*_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$, donc $\mathcal{M}$ est une connexion algébrique.

Raisonnons par récurrence en supposant 7.1.4 acquis pour tous les couples $(\mathcal{M}', \mathcal{E}')$ avec $\mathcal{M}'$ sous-module de $\mathcal{E}'$ satisfaisant à $\operatorname{rg}\mathcal{E}' < \operatorname{rg}\mathcal{E}$ ou ($\operatorname{rg}\mathcal{E}' = \operatorname{rg}\mathcal{E}$ et $\operatorname{rg}\mathcal{M}' < \operatorname{rg}\mathcal{M}$).

Si $\mathcal{M}$ est simple et non nul, alors la restriction de l'un des $p_i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{\omega_i}$ à $\mathcal{M}$ est nécessairement un isomorphisme. Sinon, $\mathcal{M}$ admet un sous-objet propre $\mathcal{N}$. Par hypothèse de récurrence appliquée à $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$, on obtient que $\mathcal{N}$ est linéaire. Quitte à n'en considérer qu'un facteur de rang 1, on peut supposer par ce qui précède que $\mathcal{N}$ est l'un des $\mathcal{E}^{\omega_i}$ de (7.1.5). Par hypothèse de récurrence appliquée à $(\mathcal{M}/\mathcal{N}, \mathcal{E}/\mathcal{N})$, on obtient que $\mathcal{M}$ est une extension de deux modules linéaires. D'après 7.1.2, $\mathcal{M}$ est linéaire et en regardant les restrictions de chaque p_i aux facteurs de rang 1 de $\mathcal{M}$, on voit que ces derniers sont des facteurs intervenant dans la décomposition (7.1.5). □

Dans la définition qui suit, on considère un fibré vectoriel E sur une variété algébrique complexe lisse X et un point x de X. Pour tout couple (Y, Z) de sous-variétés de X tel que Z est inclus dans Y, on note $i_{Z,Y}$ l'inclusion canonique de E_Z dans E_Y. Enfin, on se donne un $\mathcal{D}$-module holonome $\mathcal{M}$ sur E.

Définition 7.1.6. On dit que $\mathcal{M}$ est *$\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de x* si le module $\mathcal{H}^0 i^+_{x,X}\mathcal{M}$ est linéaire. On dit que $\mathcal{M}$ est *$\mathcal{H}^0$-ponctuellement linéaire* si $\mathcal{M}$ est $\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de tout point de X.

7.2 La propriété $L(x)$

On aura à considérer la notion locale voisine suivante : soit M un $\mathcal{D}$-module holonome sur un fibré E de rang l sur $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$, et O le point fermé de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$.

Définition 7.2.1. On dira que M *vérifie la propriété* $L(O)$ si M admet une famille génératrice $\mathbf{e} := (e_1, \ldots, e_m)$ vérifiant

$$\partial_{y_i} e_j = \sum_{u=1}^{m} f_{iju}(t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_l) e_u \tag{7.2.2}$$

où dans cette écriture, les y_i sont des coordonnées sur E, et les f_{iju} sont des éléments de $\mathbb{C}[\![t_1, \ldots, t_n]\!][y_1, \ldots, y_l]$ ayant la propriété que dans la décomposition

$$f_{iju} = \sum_{\nu} P_\nu(y_1, \ldots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n}$$

le degré total $\deg_y P$ de $P_\nu(y_1, \ldots, y_l)$ est plus petit que $\nu_1 + \cdots + \nu_n$.

Dans la situation globale de 7.1.6, on dira aussi que $\mathcal{M}$ *vérifie la propriété* $L(x)$ si pour un choix d'identification $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \simeq \mathbb{C}[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$, le changement de base de $\mathcal{M}$ à $\operatorname{Spec}\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ satisfait à la propriété $L(O)$ au sens précédent.

La propriété $L(x)$ est plus forte que la notion d'$\mathcal{H}^0$-linéarité ponctuelle. C'est l'objet du

Lemme 7.2.3. *Si $\mathcal{M}$ vérifie $L(x)$, alors $\mathcal{M}$ est $\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de x.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{H}^0 i^+_{x,X}\mathcal{M}$ est aussi la restriction à E_x du module $M = \widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}_x$. Une famille génératrice de M vérifiant (7.2.2) induit une famille génératrice de $\mathcal{H}^0 i^+_{x,X}\mathcal{M}$ encore notée $\mathbf{e}$ sur laquelle l'action de ∂_{y_i} s'obtient en évaluant les f_{iju} en $t_1 = \cdots = t_n = 0$. Du fait de la forme très particulière des f_{iju}, on a que $f_{iju}(0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_n)$ est constant.

Soit $\mathbf{e}'$ une sous famille maximale de $\mathbf{e}$ n'admettant pas de relations de liaison non triviale à coefficients constants. Une telle famille existe pour peu que M ne soit pas le module nul, et quitte à renuméroter les e_i, on peut toujours supposer $\mathbf{e}' = (e_1, \ldots, e_k)$, $k \leq n$. Par maximalité, tous les e_i sont dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $\mathbf{e}'$. Donc $\mathbf{e}'$ engendre M comme $\mathcal{D}_{E_x}$-module. En particulier, les relations

$$\partial_{y_i} e_j = a_{ij1}e_1 + \cdots + a_{ijn}e_n, \quad a_{iju} \in \mathbb{C}$$

pour $j = 1, \ldots, k$ donnent des relations

$$\partial_{y_i} e_j = b_{ij1}e_1 + \cdots + b_{ijk}e_k, \quad b_{iju} \in \mathbb{C} \tag{7.2.4}$$

En notant B_i la matrice des $(b_{iju})_{ju}$, on peut écrire les équations (7.2.4) sous la forme

$$\partial_{y_i}\mathbf{e}' = B_i\mathbf{e}'$$

Par application de ∂_{y_j} et commutation de ∂_{y_i} et ∂_{y_j}, on obtient

$$(B_iB_j - B_jB_i)\mathbf{e}' = 0$$

Puisque $\mathbf{e}'$ n'admet pas de relations de liaison non triviale à coefficients constants, il vient $B_iB_j = B_jB_i$. Alors, la connexion $N := (\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_l]^k, B_1dy_1 + \cdots + B_ldy_l)$ est une connexion algébrique intégrable bien définie se surjectant sur M. d'après 7.1.3, N est linéaire. Par 7.1.5, le module M est linéaire.

□

La définition 7.2.1 s'introduit naturellement pour palier au mauvais comportement de la linéarité ponctuelle vis-à-vis des sous-objets. On démontrera en 9.3.4 par l'entremise de la théorie des cycles proches que tout sous-objet d'un module vérifiant $L(x)$ est aussi $\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de x.

8 Le théorème principal

8.1 Enoncé

On commence par rappeler la géométrie sous-jacente à la construction d'Abbes et Saito [4]. Soit X une variété algébrique complexe lisse, D un diviseur à croisements normaux de X et $D_1, \dots, D_m$ les composantes irréductibles de D. On note U le complémentaire de D dans X.

Soit $\widetilde{X \times X}$ l'éclaté de $X \times X$ le long de la réunion des $D_i \times D_i$. On note $X * X$ le complémentaire dans $\widetilde{X \times X}$ des transformées strictes de $D \times X$ et $X \times D$. Localement, si V_1 et V_2 sont deux ouverts de X d'anneaux de fonctions respectifs A_1 et A_2, et si $t_i = 0$ (resp. $s_i = 0$) est l'équation de D_i dans V_1 (resp. V_2), $X * X$ est le schéma d'anneau de fonctions [4, 5.22]

$$\frac{A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2[u_1^{\pm 1}, \dots, u_m^{\pm 1}]}{(t_i \otimes 1 - u_i(1 \otimes s_i))} \tag{8.1.1}$$

Suivant [24, 4.2.8], le schéma $X * X$ s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X * X \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\mathrm{Diag}"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

Avec δ immersion fermée régulière de fibré conormal canoniquement isomorphe à $\Omega^1_X(\log D)$.

Si $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ et $D_{\underline{a}} = a_1 D_1 + \dots + a_m D_m$, on s'intéresse comme en dimension 1 [3, 3] à la dilatation $(X * X)^{\underline{a}}$ de $X * X$ en $\delta(D_{\underline{a}})$ par rapport à $D_{\underline{a}}$. Ce schéma s'insère dans le diagramme commutatif de carré gauche cartésien

$$\begin{tikzcd} T_{\underline{a}} \arrow[r] \arrow[d] & (X * X)^{\underline{a}} \arrow[d, "\pi"'] & U \times U \arrow[l, "j_a"'] \arrow[d] \\ D \arrow[r] & X & U \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{8.1.2}$$

avec $T_{\underline{a}}$ muni d'une identification canonique [4, (5.31.4)]

$$T_{\underline{a}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}(\Omega^1_{X/\mathbb{C}}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D_{\underline{a}})) \ \times_X D.$$

Dans la suite, on se restreint au cas où X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ avec D un hyperplan, et on se donne une connexion $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ méromorphe le long de D. Dans ce cas, $\underline{a}$ est simplement la donnée d'un entier naturel non nul a. On notera $\rho(\mathcal{M})$ où encore ρ le rang de Poincaré-Katz de $\mathcal{M}$ au point générique de D (c'est-à-dire la plus grande pente de la restriction de $\mathcal{M}$ au point générique de D), et $H_a(\mathcal{M})$ pour $j_{a+}\mathcal{H}om(p_2^+\mathcal{M}, p_1^+\mathcal{M})$, où j_a désigne l'inclusion canonique de $U \times U$ dans $(X * X)^a$.

On dira qu'un module holonome $\mathcal{N}$ sur un fibré sur D est *ponctuellement lisse* si les modules de cohomologie du complexe $i^+_{x,X}\mathcal{N}$ sont des connexions algébriques pour tout $x \in D$. Le but de cette seconde partie de thèse est de démontrer le

Théorème 8.1.3. *On suppose que $\rho(\mathcal{M})$ est entier. Alors, si $a \geq \rho(\mathcal{M})$, le $\mathcal{D}_{T_a}$-module $\Psi_\pi H_a(\mathcal{M})$ est ponctuellement lisse et ponctuellement $\mathcal{H}^0$-linéaire.*

8.2 Discussion

Comme conséquence de 12.2.1, la restriction $i^*_{x,D}\mathfrak{F}\Psi_t H_a(\mathcal{M})$ est à support fini pour tout $x \in D$. Néanmoins, du fait de la mise en défaut du lemme de Nakayama pour les faisceaux quasi-cohérents, le support de la restriction à $T_{a,x}$ d'un module holonome $\mathcal{N}$ sur T_a est en général un sous-ensemble strict de $\operatorname{Supp}\mathcal{N} \cap T_{a,x}$.

Abbes et Saito utilisent le foncteur de restriction plutôt que les cycles proches. Ici le choix des cycles proches se justifie par le fait que la restriction à une sous-variété Z de n'importe quel $\mathcal{D}$-module localisé le long de Z donne 0. Une vertu de Ψ est d'être justement insensible à la localisation [33, 4.4-3].

Dans [49, 2.3.7] et [4, 8.15], les auteurs démontrent l'analogue ℓ-adique de 8.1.3 sans hypothèse de lissité sur D, mais au prix d'une hypothèse [4, 8.2] sur la ramification le long de D. Détaillons ici la nature de cette hypothèse. Soit X une variété sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, et D un diviseur lisse de X. On considère le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & U \times_k U \arrow[d, "j_a"] \\ X \arrow[r, "\delta_a"'] & (X * X)^a \end{tikzcd} \tag{8.2.1}$$

Soit ℓ un nombre premier distinct de p, $x \in D$, $\overline{x}$ un point géométrique de X localisé en x, et $\mathcal{F}$ un $\mathbb{F}_\ell$-faisceau localement constant constructible sur U. Alors, le changement de base relatif au diagramme cartésien (8.2.1)

$$\alpha : \delta_a^* j_{a*} H_a(\mathcal{F}) \longrightarrow j_* \delta^* H_a(\mathcal{F}) = j_* \operatorname{End}(\mathcal{F})$$

est injectif, et on dit que *la ramification de $\mathcal{F}$ en $\overline{x}$ est bornée par D_a* si le morphisme $\alpha_{\overline{x}}$ est un isomorphisme. Sous cette condition, l'objet d'étude d'Abbes et Saito est le faisceau $\nu_a(H_a(\mathcal{F}), X) := (j_{a*} H_a(\mathcal{F}))_{|T_a}$.

Dans le contexte des connexions méromorphes, le changement de base α est automatiquement un isomorphisme [16, 1.7.3], et il se pose alors la question de savoir par quoi remplacer la condition d'Abbes et Saito. Lorsqu'on choisit pour point x le point générique η de D, Abbes et Saito démontrent [4, 8.8] que la condition précédente équivaut au fait que la plus grande pente de la restriction de $\mathcal{F}$ au point générique de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}^{sh}_{X,\eta}$ est $\leq a$. Cette condition fait sens pour les $\mathcal{D}$-modules, d'où l'occurrence du rang de Katz générique dans 8.1.3.

Le théorème 8.1.3 suggère que dans le contexte ℓ-adique, on doit pouvoir obtenir un théorème de finitude à l'aide d'une condition portant seulement sur le point générique de D, et ceci au prix de perdre la constance locale de $\nu_a(H_a(\mathcal{F}), X)$.

Du fait que la formation de H_a ne commute pas à l'image inverse, la construction d'Abbes et Saito se prête mal aux arguments de section par des courbes transverses à D (mêmes génériques).

On observera aussi que la construction d'Abbes et Saito peut se définir pour $D_{\underline{a}}$ remplacé par une combinaison linéaire à coefficients rationnels des D_i. Dans le cas où l'un des a_i est rationnel non entier, le schéma $(X * X)^{\underline{a}}$ est normal mais plus nécessairement lisse. Bien qu'on puisse toujours le plonger dans un schéma lisse, on y perd le morphisme structural définissant les cycles proches. On doit donc se restreindre au cas des coefficients entiers. Ce n'est pas une grande restriction dans la mesure où 8.1.3 est un énoncé local, et localement il est toujours loisible de ramifier les variables définissant D.

9 Cycles proches

9.1 Rappels et notations

Dans toute cette section, on fixe une variété complexe lisse X et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome le long d'une hypersurface lisse D définie par l'équation $t = 0$. On rappelle suivant [33] que $\mathcal{D}_X$ est muni de la *filtration de Kashiwara-Malgrange*

$$V_k(\mathcal{D}_X) := \{P \in \mathcal{D}_X, P(\mathcal{I}_D^l) \subset \mathcal{I}_D^{l-k} \quad \forall l \in \mathbb{Z}\}$$

et qu'on appelle *bonne V-filtration* de $\mathcal{M}$ toute filtration exhaustive $(U_k(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ par des $V_0(\mathcal{D}_X)$-modules cohérents tels que localement, il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$U_{-k-k_0}(\mathcal{M}) = t^k U_{-k_0}(\mathcal{M}) \quad \text{et} \quad U_{k+k_0}(\mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{k} \partial_t^i U_{k_0}(\mathcal{M}) \tag{9.1.1}$$

Si m est une section de $\mathcal{M}$, il existe un polynôme de degré minimal b_m pour lequel on a

$$b_m(t\partial_t)m \in V_{-1}(\mathcal{D}_X)m.$$

C'est le *polynôme de Bernstein* de m. Notons $\mathrm{ord}_Y(m)$ l'ensemble de ses racines et soit $\geq$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{C}$, si on définit

$$V_a(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \mathrm{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \geq -a-1\}\}$$

et

$$V_{<a}(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \mathrm{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha > -a-1\}\},$$

la théorie générale stipule que $(V_{a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(V_{<a+k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des bonnes V-filtrations de $\mathcal{M}$, et que ce sont les seules bonnes V-filtrations de $\mathcal{M}$ dont les racines du polynôme de Bernstein sont respectivement dans $[-a-1, -a[$ et $]-a-1, -a]$. Par définition, si on pose $\mathrm{Gr}_a(\mathcal{M}) = V_a(\mathcal{M})/V_{<a}(\mathcal{M})$, on a

$$\Psi_t\mathcal{M} := \bigoplus_{-1\leq a<0} \mathrm{Gr}_a(\mathcal{M}). \tag{9.1.2}$$

Proposition 9.1.3. *Si $\mathcal{M}$ est une connexion méromorphe à singularité régulière le long de D, alors le module $\Psi_t\mathcal{M}$ est une connexion algébrique de rang $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}$ sur D.*

Démonstration. Pour montrer 9.1.3, on sait par [8, VI 1.7] qu'il suffit de montrer que le $\mathcal{O}_D$-module sous-jacent à $\Psi_t\mathcal{M}$ est libre de rang $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}$, soit encore que pour tout $x \in D$, le $\mathcal{O}_{D,x}$-module $(\Psi_t\mathcal{M})_x$ est libre de rang $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}$. Par descente fidèlement plate [13, 1.11], il suffit de montrer que le $\widehat{\mathcal{O}_{D,x}}$-module $(\widehat{\Psi_t\mathcal{M}})_x := \widehat{\mathcal{O}_{D,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{D,x}} (\Psi_t\mathcal{M})_x$ est libre de rang $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}$. Or on dispose d'une identification canonique

$$(\widehat{\Psi_t\mathcal{M}})_x \xrightarrow{\sim} \Psi_t\widehat{\mathcal{M}_x}$$

et on sait d'après Deligne [9] que $\widehat{\mathcal{M}_x}$ est extension successive de connexions régulières de rang 1. On est donc ramené au cas où $\mathcal{M}$ est de rang 1. Alors, on peut se donner une trivialisation locale s de $\mathcal{M}$ vérifiant $t\partial_t s = \alpha s$ pour α dans l'intervalle $]-1,0]$ et telle que l'action des autres dérivations se fait sans pôles. En particulier, $(V_k(\mathcal{D}_X)s)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la V-filtration canonique $(V_{<k}(\mathcal{M}))_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$, de sorte qu'on a localement

$$\Psi_t\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} V_0(\mathcal{D}_X)s/tV_0(\mathcal{D}_X)s \tag{9.1.4}$$

Puisque l'action des dérivations de D se fait sans pôles sur s, le membre de droite de (9.1.4) est localement engendré par s comme $\mathcal{O}_D$-module, et le lemme 9.1.3 est prouvé. □

9.2 Généralités sur les V-filtrations

Lemme 9.2.1. *Soit $U_0(\mathcal{M})$ un $V_0(\mathcal{D}_X)$ sous-module cohérent de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = U_0\mathcal{M}[t^{-1}]$. Alors, la filtration (exhaustive) de $\mathcal{M}$ définie par*

$$U_k(\mathcal{M}) = t^{-k}U_0(\mathcal{M}) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

est une bonne V-filtration de $\mathcal{M}$.

Démonstration. Du fait de la relation $(t\partial_t)t^{-k} = -kt^{-k} + t^{-k}(t\partial_t)$, chaque $U_k(\mathcal{M})$ est un $V_0(\mathcal{D}_X)$-module cohérent. Il faut donc vérifier que les relations de (9.1.1) sont satisfaites pour un certain $k_0 \geq 0$. Par définition, la première relation de (9.1.1) est vérifiée pour tout choix de k_0.

Montrer la seconde relation revient à montrer

$$U_{k+k_0}(\mathcal{M}) = t^k \sum_{i=0}^{k} \partial_t^i U_{k_0}(\mathcal{M}) \tag{9.2.2}$$

pour un k_0 convenable. Du fait de $\partial_t t^{-k} = -kt^{-k-1} + t^{-k-1}t\partial_t$, la stabilité de $U_0(\mathcal{M})$ par $t\partial_t$ entraine $\partial_t U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k+1}(\mathcal{M})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. L'inclusion $\supset$ dans (9.2.2) est donc automatique. Il faut montrer l'inclusion $\subset$ pour un k_0 bien choisi.

Si $e_1, \ldots, e_n$ désigne un système de $V_0(\mathcal{D}_X)$-générateurs de $U_0(\mathcal{M})$, alors on observe que le polynôme $b(T) = b_{e_1}(T)\cdots b_{e_n}(T)$ annule l'opérateur induit par $t\partial_t$ sur $\operatorname{Gr}_0 U(\mathcal{M}) = U_0(\mathcal{M})/U_{-1}(\mathcal{M})$. Par conséquent, le polynôme $b(T+k)$ annule l'opérateur induit par $t\partial_t$ sur $\operatorname{Gr}_k U(\mathcal{M}) = U_k(\mathcal{M})/U_{k-1}(\mathcal{M})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donc si A désigne l'ensemble fini des valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur $\operatorname{Gr}_0 U(\mathcal{M})$, les valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur $\operatorname{Gr}_k U(\mathcal{M})$ sont dans $A-k$. Choisissons k_0 assez grand de telle sorte que $A - k_0$ ne rencontre par $\mathbb{N}$, et montrons (9.2.2) pour ce choix là de k_0. On raisonne par récurrence sur k, le cas $k = 0$ étant tautologique. Par hypothèse de récurrence, on est ramené à montrer l'inclusion

$$U_{k_0}(\mathcal{M}) \subset U_{k_0-1}(\mathcal{M}) + t^k\partial_t^k U_{k_0}(\mathcal{M}),$$

soit encore que le morphisme $T_k : \operatorname{Gr}_{k_0} U(\mathcal{M}) \longrightarrow \operatorname{Gr}_{k_0} U(\mathcal{M})$ induit par l'opérateur $t^k\partial_t^k$ est surjectif. Or, une récurrence permet de voir que

$$t^k\partial_t^k = t\partial_t(t\partial_t - 1)\cdots(t\partial_t - (k-1)),$$

de sorte que T_k admet un polynôme minimal non nul $\mu_{T_k} = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ dont les racines sont de la forme $\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(k-1))$ pour $\lambda \in A - k_0$. Ces racines sont donc non nulles, soit encore $a_0 \neq 0$. On a donc pour tout $m \in U_{k_0}(\mathcal{M})$ l'égalité suivante dans $\mathrm{Gr}_{k_0} U(\mathcal{M})$

$$[m] = -(T_k^d[m] + a_{d-1}T_k^{d-1}[m] + \cdots + a_1 T_k[m])/a_0$$

et la surjectivité souhaitée est prouvée. □

Le lemme qui suit figure dans [33]. Son intérêt réside dans la possibilité qu'il offre de transporter des informations concernant une bonne V-filtration particulière pour $\mathcal{M}$ à toute bonne V-filtration de $\mathcal{M}$.

Lemme 9.2.3. *Soient U et U' deux bonnes V-filtrations de $\mathcal{M}$. Alors, il existe localement des entiers $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$U_{k+k_1} \subset U'_k \subset U_{k+k_2} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Fixons $k_0 \geq 0$ comme dans (9.1.1) pour U. On sait que U_{k_0} est localement finiement engendré comme $V_0(\mathcal{D}_X)$-module, donc comme U' est une filtration exhaustive, on dispose d'un entier $n_0 \geq 0$ tel que

$$U_{k_0} \subset U'_{n_0}$$

Par application de $V_k(\mathcal{D}_X)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient par définition de k_0

$$U_{k_0+k} \subset U'_{n_0+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

soit encore

$$U_{k_0-n_0+k} \subset U'_k \quad \forall k \geq n_0 \tag{9.2.4}$$

Or par application de t^j à l'inclusion $U_{-k_0} = U_{-k_0-n_0+n_0} \subset U'_{n_0}$, il vient

$$U_{-k_0-n_0+n_0-j} \subset U'_{n_0-j} \tag{9.2.5}$$

En combinant (9.2.4) et (9.2.5), on obtient la première des inclusions de (9.2.3) en posant $k_1 = -k_0 - n_0$. L'autre inclusion s'obtient par symétrie. □

9.3 Cycles proches et propriété $L(x)$

Dans le lemme qui suit, la situation est locale : E désigne le fibré trivial de rang m sur $X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$, muni de coordonnées $y_1, \ldots, y_m$, le point fermé de X est noté O et M désigne un module holonome sur E. Soit D le diviseur défini par $t_n = 0$ et E_D la restriction de E à D. On considère sur M la V-filtration associée à E_D.

Lemme 9.3.1. *Si M vérifie la propriété $L(O)$ et si N est un sous-module de M, alors pour tout nombre complexe $a < 0$, le gradué $\mathrm{Gr}_a(N)$ est un sous-module d'un module vérifiant $L(O)$.*

Démonstration. Par exactitude des foncteurs Gr_a, on peut toujours supposer que $N = M$ [33, 4.2-7]. D'autre part, on sait que Gr_a est insensible à la localisation pour tout $a < 0$ [33, 4.4-3]. Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ est une famille génératrice de M donnée par hypothèse $L(O)$ sur M, la suite des modules $M_k := \mathcal{D}_E t_n^{-k}\mathbf{e}, k \in \mathbb{N}$ est une suite croissante exhaustive de sous-modules de $M[t_n^{-1}]$. Par noethérianité de $M[t_n^{-1}]$ [8, V 1.9], $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne à partir d'un certain entier k_0. Alors, la famille des $t_n^{-k_0}e_j$ [7] avec $j = 0, \ldots, m$ fait de $M[t_n^{-1}]$ un module vérifiant la propriété $L(O)$. Dans la suite, on peut donc supposer que $M = M[t_n^{-1}]$.

Soit $\mathbf{e} := (e_1, \ldots, e_m)$ une famille génératrice de M vérifiant (7.2.2) et notons $V(\mathbf{e})$ le $V_0(\mathcal{D}_E)$-module engendré par $\mathbf{e}$. Si $s \in M$, on peut écrire

$$\begin{aligned} s &= \sum P_i(t_j, y_j, \partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_{n-1}}, \partial_{t_n}, \partial_{y_j})e_i \\ &= \sum P_i(t_j, y_j, \partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_{n-1}}, t_n^{-1}(t_n\partial_{t_n}), \partial_{y_j})e_i \end{aligned}$$

où les P_i désignent des polynômes à plusieurs variables et à coefficients complexes. On en déduit que $V(\mathbf{e})[t_n^{-1}] = M$, et alors par 9.2.1

$$V_k(\mathbf{e}) := t_n^{-k}V(\mathbf{e})$$

est une bonne V-filtration de M.

D'après 9.2.3, on peut trouver un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel on a les inclusions

$$V_{-k_0}(\mathbf{e}) \subset V_{<a}(M) \subset V_a(M) \subset V_{k_0}(\mathbf{e})$$

d'où une surjection canonique de $V_0(\mathcal{D}_E)$-modules

$$V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{-k_0}(\mathbf{e}) \twoheadrightarrow V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M) \tag{9.3.2}$$

et une injection canonique de $V_0(\mathcal{D}_E)$-modules

$$\mathrm{Gr}_a(M) \hookrightarrow V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M) \tag{9.3.3}$$

Pour prouver 9.3.1, il suffit d'après (9.3.3) de voir que par restriction des scalaires de $V_0(\mathcal{D}_E)$ à $\mathcal{D}_{E_D}$, le $\mathcal{D}_{E_D}$-module induit par $V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M)$ vérifie la propriété $L(O)$. Du fait de la surjection (9.3.2), il suffit de voir que le $\mathcal{D}_{E_D}$-module induit par

$$V(\mathbf{e}, k_0) := V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{-k_0}(\mathbf{e})$$

vérifie la propriété $L(O)$.

En observant que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$, l'opérateur $t_n^k(t_n\partial_{t_n})^\alpha$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers des opérateurs $(t_n\partial_{t_n})^i t_n^k, i = 0, \ldots, \alpha$, on voit que les classes $[t_n^k e_i], k = -k_0, \ldots, k_0$ forment une famille $V_0(\mathcal{D}_E)$-génératrice finie de $V(\mathbf{e}, k_0)$. Puisque l'action de $t_n\partial_{t_n}$ sur $V(\mathbf{e}, k_0)$ admet un polynôme minimal non nul, disons de degré $d > 0$, la famille des $[(t_n\partial_{t_n})^\alpha t_n^k e_i]$ pour $k = -k_0, \ldots, k_0$ et $\alpha = 0, \ldots, d-1$ engendre $V(\mathbf{e}, k_0)$ comme $\mathcal{D}_{E_D}$-module.

Montrons enfin que les $[(t_n\partial_{t_n})^\alpha t_n^k e_i]$ satisfont à une relation du type (7.2.2). On commence par écrire

$$\partial_{y_i} e_j = \sum_{u=1}^{m} f_{iju}(t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_l)e_u$$

7. Par souci de légèreté, on note ici de façon abusive e_j pour l'image de e_j par $M \longrightarrow M[t_n^{-1}]$, flèche qui n'a pas de raison d'être injective en général.

avec

$$f_{iju} = \sum_{\nu} P_\nu(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n}$$

comme dans (7.2.2), c'est-à-dire tel que $\deg_y P \leq \nu_1 + \cdots + \nu_n$. On a

$$\begin{aligned}\partial_{y_i}[(t_n\partial_{t_n})^\alpha t_n^k e_i] &= [(t_n\partial_{t_n})^\alpha t_n^k \partial_{y_a} e_i] \\ &= \sum_{u=1}^{m} [(t_n\partial_{t_n})^\alpha t_n^k f_{iju}(t_1, \dots, t_n, y_1, \dots, y_l) e_u]\end{aligned}$$

Le point est que

$$t_n\partial_{t_n}(P_\nu(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n}) = \nu_n P_\nu(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n} + P_\nu(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n} t_n \partial_{t_n},$$

de sorte que les monômes $Q_\nu(y_1, \dots, y_l) t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n}$ produits par application de $(t_n\partial_{t_n})^\alpha$ à f_{iju} vérifient encore que $\deg_y Q \leq \nu_1 + \cdots + \nu_n$. Le lemme 9.3.1 s'en déduit. □

Corollaire 9.3.4. *Tout sous-module N d'un $\mathcal{D}_E$-module holonome M vérifiant la propriété $L(O)$ est $\mathcal{H}^0$-linéaire au-dessus de O.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors d'après 7.2.3, le module M est linéaire. Par (7.1.5), on en déduit que le module N est linéaire.

Supposons donc que $n > 0$. On dispose d'après 9.3.1 d'un hyperplan de coordonnée $i_{D,X} : D \hookrightarrow X$ tel que $\mathrm{Gr}_{-1}(N)$ est inclus dans un module vérifiant $L(O)$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathrm{Gr}_{-1}(N)$ est linéaire au-dessus de O.

Or on sait par [33, 4.4-4] que $\mathcal{H}^0 i_{D,X}^+ N$ est un quotient de $\mathrm{Gr}_{-1}(N)$. Par exactitude à droite du foncteur image inverse, on en déduit que $\mathcal{H}^0 i_{O,D}^+ \mathcal{H}^0 i_{D,X}^+ N$ est un quotient de $\mathcal{H}^0 i_{O,D}^+ \mathrm{Gr}_{-1}(N)$ qui est linéaire par hypothèse de récurrence. D'après 7.1.5, le module $\mathcal{H}^0 i_{O,D}^+ \mathcal{H}^0 i_{D,X}^+ N \simeq \mathcal{H}^0 i_{O,D}^+ \circ i_{D,X}^+ N \simeq \mathcal{H}^0 i_{O,X}^+ N$ est donc linéaire.

□

9.4 Cycles proches et propriété $P(x)$

On se place dans les conditions locales de 9.3.

Définition 9.4.1. On dira que M vérifie la *propriété* $P(O)$ si M admet une famille génératrice $\mathbf{e} := (e_1, \dots, e_m)$ vérifiant

$$\partial_{y_i} e_j = \sum_{u=1}^{m} f_{iju}(t_1, \dots, t_n, y_1, \dots, y_l) e_u \tag{9.4.2}$$

où les f_{iju} sont des éléments de $\mathbb{C}[\![t_1, \dots, t_n]\!][y_1, \dots, y_l]$.

Bien sûr, si M vérifie la propriété $L(O)$, alors M vérifie aussi la propriété $P(O)$. On a comme en 9.3 le

Lemme 9.4.3. *Soit N un sous-module d'un module M vérifiant $P(O)$. Alors pour tout nombre complexe a, le gradué $\mathrm{Gr}_a(N)$ est inclus dans un module vérifiant $P(O)$.*

Démonstration. Par exactitude de Gr_a, on peut supposer $N = M$. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice locale de $\mathcal{M}$ donnée par 9.4.1. On définit ici une bonne V-filtration

$$V_k(\mathbf{e}) := V_k(\mathcal{D}_E)\mathbf{e}$$

D'après 9.2.3, on peut trouver un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel on a les inclusions

$$V_{-k_0}(\mathbf{e}) \subset V_{<a}(M) \subset V_a(M) \subset V_{k_0}(\mathbf{e})$$

d'où une surjection canonique de $V_0(\mathcal{D}_E)$-modules

$$V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{-k_0}(\mathbf{e}) \twoheadrightarrow V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M)$$

et une injection canonique de $V_0(\mathcal{D}_E)$-modules

$$\mathrm{Gr}_a(M) \hookrightarrow V_{k_0}(\mathbf{e})/V_{<a}(M)$$

et on obtient 9.4.3 en considérant comme en 9.3.1 les $\partial_t^i(t\partial_t)^j e_k$ et les $t^{i'}(t\partial_t)^j e_k$ pour $i, i' = 0, \ldots, k_0$ et j assez grand. □

Corollaire 9.4.4. *Tout sous-module N d'un module vérifiant la propriété $P(O)$ est ponctuellement lisse au-dessus de O.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n, le cas où $n = 0$ résultant de ce qu'un $\mathcal{D}$-module sur l'espace affine qui est de type fini sur $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_l]$ est une connexion algébrique. Supposons donc que $n > 0$ et soit $a \in \mathbb{C}$. Avec les notations de 9.3, on dispose d'après 9.4.3 d'un hyperplan de coordonnée $i_{D,X} : D \hookrightarrow X$ qui est tel que $\mathrm{Gr}_a(N)$ est inclus dans un module vérifiant $P(O)$. Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Gr}_a(N)$ est ponctuellement lisse au-dessus de O.

Or on sait par [33, 4.4-4] que le complexe $i_{D,X}^+ N$ est quasi-isomorphe au complexe

$$\mathrm{Gr}_0(N) \xrightarrow{t_n} \mathrm{Gr}_{-1}(N)$$

On en déduit un isomorphisme de la catégorie dérivée de $\mathcal{D}_{E_O}$-mod

$$i_{O,X}^+(N) \simeq i_{O,D}^+(\mathrm{Gr}_0(N) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{-1}(N))$$

et on conclut à l'aide de la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{pq} = \mathcal{H}^p i_{O,D}^+(\mathrm{Gr}_q(N)) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q} i_{O,X}^+(N) \quad p \leq 0 \quad \text{et} \quad q = 0, -1$$

□

10 Preuve du théorème principal

10.1 Prologue géométrique

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées de l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ avec D défini par $x_n = 0$. On pose $U = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \setminus D$. Dans cette situation, on a

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n * \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[x_i, t_i, u^{\pm}]/(x_n - ut_n)$$

et

$$(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} * \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}})^{(a)} = \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{C}[x_i, t_i, u^{\pm}, y_1, \ldots, y_n]}{(x_n - ut_n, u - 1 - t_n^a y_n, (x_k - t_k - t_n^a y_k)_{k<n})} \tag{10.1.1}$$

Par conséquent, le choix des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ induit une identification

$$(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} * \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}})^{(a)} \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_n]$$

Ce choix étant fait, les coordonnées verticales de T_a sont $y_1, \ldots, y_n$, et la projection $(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} * \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}})^{(a)} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ du diagramme (8.1.2) est explicitement donnée par $(t, y) \longrightarrow t$. Quant à la première projection $U \times U \longrightarrow U$, elle est donnée dans ce point de vue par la formule

$$(t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (t_1 + y_1 t_n^a, \ldots, t_{n-1} + y_{n-1} t_n^a, t_n + y_n t_n^{a+1}) \tag{10.1.2}$$

10.2 $H_a(\mathcal{M})$ vérifie la propriété $L(x)$

On rappelle que ρ désigne le rang de Poincaré-Katz générique de $\mathcal{M}$. Posons $\delta_{in} = 0$ si $i \neq n$ et $\delta_{in} = 1$ sinon. On a le

Lemme 10.2.1. *Si $\mathcal{M}$ est localement engendré comme $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$-module par un sous-faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$-cohérent stable par les $x_i^{\rho+\delta_{in}} \partial_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, alors $H_a(\mathcal{M})$ vérifie la propriété $L(x)$ pour tout $x \in D$.*

Démonstration. Quitte à translater les coordonnées, on peut supposer que x est l'origine O de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Notons $\mathcal{R}$ un sous-faisceau $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$-cohérent de $\mathcal{M}$ comme dans 10.2.1. On a

$$H_a(\mathcal{M}) \simeq p_1^+ \mathcal{M} \otimes (p_2^+ \mathcal{M})^* \simeq p_1^+ \mathcal{M} \otimes p_2^+ (\mathcal{M}^*)$$

Soit m (resp. e) une section de $\mathcal{R}$ (resp. de $\mathcal{M}^*$) définie au-dessus d'un voisinage de O. On note $p_1^+ m$ et $p_2^+ e$ les sections induites sur $p_1^+ \mathcal{M}$ et $p_2^+ (\mathcal{M}^*)$ respectivement. Par construction de la fibration d'Abbes et Saito, $\partial_{y_i} p_2^+ e = 0$. D'après (10.1.2), il vient

$$\begin{aligned}
\partial_{y_i}(p_1^+ m \otimes p_2^+ e) &= (\partial_{y_i} p_1^+ m) \otimes p_2^+ e \\
&= \frac{\partial}{\partial y_i}(t_i + y_i t_n^{a+\delta_{in}}) p_1^+ \partial_{x_i} m \otimes p_2^+ e \\
&= t_n^{a+\delta_{in}} p_1^+ \partial_{x_i} m \otimes p_2^+ e \\
&= \frac{(t_n + y_n t_n^{a+1})^{a+\delta_{in}}}{(1 + y_n t_n^a)^{a+\delta_{in}}} p_1^+ \partial_{x_i} m \otimes p_2^+ e \\
&= \frac{1}{(1 + y_n t_n^a)^{a+\delta_{in}}} p_1^+ x_n^{a+\delta_{in}} \partial_{x_i} m \otimes p_2^+ e
\end{aligned}$$

avec δ_{in} valant 1 si $i = n$ et 0 sinon.

Soit $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ une famille $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$-génératrice locale de $\mathcal{R}$ au-dessus d'un voisinage U de O, et $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_l)$ une trivialisation locale de $\mathcal{M}^*$ au-dessus du même voisinage, quitte à rétrécir U. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $H_a(\mathcal{M})_k$ le sous-module de $H_a(\mathcal{M})$ défini au-dessus de U engendré par les $p_1^+ m_i \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^k$. La suite des $H_a(\mathcal{M})_k$ est croissante. Montrons qu'elle est aussi exhaustive.

On sait déjà que $\mathcal{N} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_a(\mathcal{M})_k$ contient les $p_1^+ m_i \otimes p_2^+(\mathcal{M}^*)$. Si $\partial \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}$ est d'ordre au plus 1, on a pour tout $i = 1, \ldots, k$ et tout $e \in \mathcal{M}^*$ la relation

$$\begin{aligned} p_1^+\partial m_i \otimes p_2^+ e &= ((p_1^+\partial)p_1^+ m_i) \otimes p_2^+ e \\ &= (p_1^+\partial)(p_1^+ m_i \otimes p_2^+ e) - p_1^+ m_i \otimes (p_1^+\partial)p_2^+ e \\ &\in \mathcal{N} \end{aligned}$$

En raisonnant par récurrence sur l'ordre des opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_U$, on montre que

$$p_1^+ P m_i \otimes p_2^+(\mathcal{M}^*) \subset \mathcal{N}$$

pour tout $P \in \mathcal{D}_U$. Puisque les m_i engendrent $\mathcal{M}$ localement, il vient

$$p_1^+ \mathcal{M} \otimes p_2^+(\mathcal{M}^*) \subset \mathcal{N}$$

et le caractère exhaustif de la suite des $H_a(\mathcal{M})_k$ est prouvé.

Par argument de noethérianité, on a $H_a(\mathcal{M}) = H_a(\mathcal{M})_{k_0}$ pour un entier k_0 assez grand, de sorte que la famille des $p_1^+ m_i \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^{k_0}$ engendre $H_a(\mathcal{M})$ localement au-dessus de U.

De la stabilité du faisceau $\mathcal{R}$ par $x_n^{\rho+\delta_{ln}}\partial_{x_l}$ et de l'inégalité $\rho \leq a$, on déduit la stabilité de $\mathcal{R}$ par $x_n^{a+\delta_{ln}}\partial_{x_l}$, d'où des relations

$$x_n^{a+\delta_{ln}}\partial_{x_l} m_i = f_{li1}(x)m_1 + \cdots + f_{lik}(x)m_k$$

pour $l = 1, \ldots, n$ et $i = 1, \ldots, k$, avec $f_{liu} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}},O}$. D'après le calcul qui précède et (10.1.2), on a

$$\begin{aligned} \partial_{y_l}(p_1^+ m_i \otimes p_2^+ e_j)/t_n^{k_0} &= \frac{1}{(1+y_n t_n^a)^{a+\delta_{in}}} p_1^+ x_n^{a+\delta_{ln}}\partial_{x_l} m_i \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^{k_0} \\ &= \frac{1}{(1+y_n t_n^a)^{a+\delta_{ln}}} \sum_{u=1}^{k} p_1^+ f_{liu}(x_1, \ldots, x_n) m_u \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^{k_0} \\ &= \sum_{u=1}^{k} \frac{f_{liu}(t_1 + y_1 t_n^a, \ldots, t_n + y_n t_n^{a+1})}{(1+y_n t_n^a)^{a+\delta_{ln}}} (p_1^+ m_u \otimes (p_2^+ e_j)/t_n^{k_0}) \end{aligned}$$

En développant les fonctions $f_{liu}(t_1 + y_1 t_n^a, \ldots, t_n + y_n t_n^{a+1})/(1+y_n t_n^a)^{a+\delta_{ln}}$ suivant les puissances des t_i, le fait que a soit plus grand que 1 assure qu'elles satisfont à la condition de (7.2.2). La restriction de la famille des $(p_1^+ m_i \otimes p_2^+ e_j)/t_n^{k_0}$ au-dessus de $\operatorname{Spec}\widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}},O}}$ fait donc de $H_a(\mathcal{M})$ un module satisfaisant la propriété $L(x)$, et le lemme 10.2.1 est prouvé. $\square$

Pour pouvoir conclure la preuve de 8.1.3, il reste donc à exhiber un sous-faisceau de $\mathcal{M}$ comme dans 10.2.1. C'est dû au fait général suivant :

Lemme 10.2.2. *Soit $\mathcal{M}$ une connexion sur $X = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ méromorphe le long du diviseur D donné par $x_n = 0$. On suppose que le rang de Katz ρ de $\mathcal{M}$ est un entier. Alors $\mathcal{M}$ est engendré comme $\mathcal{D}_X$-module par un sous-faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent stable par les $x_i^{\rho+\delta_{in}}\partial_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. Considérons un réseau de Malgrange $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ 12.1.3 pour une section τ de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. C'est un sous-faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X[x_n^{-1}]\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$. Par argument de noethérianité, le $\mathcal{D}_X$-module engendré par $x_n^{-k}\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est égal à $\mathcal{M}$ pour un entier k_0 assez grand. Montrons que le faisceau cohérent $x_n^{-k_0}\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ convient.

Du fait des égalités

$$x_i^\rho \partial_{x_i}(x_n^{-k_0}m) = x_n^{-k_0}(x_i^\rho \partial_{x_i} m)$$

et

$$x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}(x_n^{-k_0}m) = -k_0 x_n^\rho (x_n^{-k_0}m) + x_n^{-k_0}(x_n^{\rho+1}\partial_{x_n} m)$$

valables pour $i < n$ et $m \in \mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$, il suffit de montrer que $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est stable par $x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}$ et les $x_i^\rho \partial_{x_i}, i < n$.

D'après la relation (12.1.4), on a

$$\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}})$$

où l'égalité a lieu dans $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}$. En particulier, pour vérifier que $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est stable par $x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}$ et les $x_i^\rho \partial_{x_i}, i < n$, il suffit de vérifier que $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}})$ est stable par les mêmes opérateurs. Du fait de

$$\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}) := \mathcal{M}^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$$

il suffit par le même argument de démontrer que $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ est stable par $x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}$ et les $x_i^\rho \partial_{x_i}, i < n$.

Soit U un ouvert donné par le théorème 12.1.2 appliqué à $\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}}$. Par construction de $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$, une section de $\mathcal{M}^{\mathrm{an}}$ est une section de $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ dès que sa restriction à U l'est. On en déduit que pour prouver la stabilité de $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ par $x_n^{\rho+1}\partial_{x_n}$ et les $x_i^\rho \partial_{x_i}, i < n$, il suffit de se placer au-dessus de U.

Pour faire apparaitre la décomposition de Levelt-Turrittin, on procède localement sur U à la ramification

$$f_p : (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_{n-1}, t^p)$$

On a localement

$$f_p^+ \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}} \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}^{\phi_i} \otimes \mathcal{R}_{\phi_i} \tag{10.2.3}$$

où $\mathcal{E}^{\phi_i}$ désigne $(\widehat{\mathcal{O}_X}, d + d\phi_i)$ avec $\phi_i = \phi_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ polynôme de Laurent en la variable t à coefficients des fonctions analytiques en $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ et $\mathcal{R}_{\phi_i}$ une connexion méromorphe à singularité régulière le long de D. Par définition

$$\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}}) = \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}} \cap \mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$$

où l'intersection doit se comprendre dans $f_p^+\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}}$, et où $\mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ désigne un réseau localement libre de $f_p^+\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}}$ induisant la décomposition (10.2.3).

Puisque ρ est la plus grande des pentes génériques de $\mathcal{M}$, l'ordre du pôle d'une fonction ϕ_i intervenant dans (10.2.3) est $\leq p\rho$. Ainsi par construction, le réseau $\mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$ a la propriété supplémentaire d'être laissé stable par $t^{p\rho}\partial_{x_i}, i = 0, \ldots, n-1$ et $t^{p\rho+1}\partial_t$.

Pour une section m de $\mathcal{R}_\tau(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$, on a donc

$$x_n^\rho \partial_{x_i} m = t^{p\rho}\partial_{x_i} m \in \mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$$

et du fait de $\partial_t = pt^{p-1}\partial_{x_n}$

$$x_n^{\rho+1}\partial_{x_n} m = t^{p\rho+1}\partial_t m/p \in \mathcal{R}_{p,\tau}(\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{an}}})$$

□

Remarque 10.2.4. Dans le cas de la dimension 2, on peut montrer [8] que $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est localement libre. Dans ce cas, le lemme 10.2.2 signifie que $\mathcal{M}$ admet localement une base dans laquelle la matrice de ∂_{x_n} est à pôle d'ordre au plus $\rho+1$, et la matrice des ∂_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$ est à pôles d'ordre au plus ρ.

Dans un contexte formel le long d'un trait avec une seule dérivation, André obtient dans [5, 3.3.2] ce même résultat par des méthodes algébriques.

11 Un exemple

Dans cette section, on reprend les notations de 8.1.3. L'objectif de cette partie est de calculer le support de $\mathfrak{F}\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{M})$ dans le cas non tournant d'une somme de modules de rang 1 de rang de Poincaré-Katz égal à a.

Soient donc $\omega_1, \ldots, \omega_m$ des formes différentielles sur $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ à pôles le long de $x_n = 0$ et vérifiant $d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_i = 0$. On peut écrire

$$\omega_i = f_{i1}(x)\frac{dx_1}{x_n^a} + \cdots + f_{in}(x)\frac{dx_n}{x_n^{a+1}}$$

où les f_{ij} sont des polynômes avec l'hypothèse que les $f_{in}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0), i = 1, \ldots, n$ (resp. $f_{in}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) - f_{jn}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0), i \neq j$) sont inversibles au voisinage de 0. On note comme d'habitude $\mathcal{E}^{\omega_i}$ la connexion de rang 1 associée à la forme ω_i et on pose

$$\mathcal{M} = \oplus_{i=1}^m \mathcal{E}^{\omega_i} \tag{11.0.5}$$

Il s'agit de démontrer la

Proposition 11.0.6. *Le support de $\mathfrak{F}\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{M})$ est la réunion sur les formes ω_i de* (11.0.5) *des fermés donnés par les idéaux* $(f_{i1} \circ i_{D,X} - y_1, \ldots, f_{in} \circ i_{D,X} - y_n)$.

Démonstration. On commence par traiter le cas où $\mathcal{M} := \mathcal{E}^\omega$ sans hypothèse d'inversibilité [9]. Pour $k < n$, on a en regardant modulo $t_n dt_k, t_n dy_k$ et dt_n les congruences

$$\begin{aligned}
&p_1^* f_k \frac{dx_k}{x_n^a} - p_2^* f_k \frac{dx_k}{x_n^a} \\
=&f_k(t_i + y_i t_n^{a+\delta_{in}})\frac{d(t_k + y_k t_n^a)}{(t_n + y_n t_n^{a+1})^a} - f_k(t)\frac{dt_k}{t_n^a} \\
\equiv&\Big(- a f_k(t) y_n + y_1 \frac{\partial f_k}{\partial t_1}(t) + \cdots + y_{n-1}\frac{\partial f_k}{\partial t_{n-1}}(t)\Big) dt_k + f_k(t_i + y_i t_n^{a+\delta_{in}})\frac{d(y_k t_n^a)}{(t_n + y_n t_n^{a+1})^a} \\
\equiv&\Big(- a f_k(t) y_n + y_1 \frac{\partial f_k}{\partial t_1}(t) + \cdots + y_{n-1}\frac{\partial f_k}{\partial t_{n-1}}(t)\Big) dt_k + f_k(t) t_n^{a-\rho} dy_k + a y_k f_k(t)\frac{dt_n}{t_n}
\end{aligned}$$

8. Voir [37, 3.3.1].

9. C'est un cas particulier de ce qu'André appelle une situation *semi-stable*. Voir [5, 3.2.4]

Pour $k = n$, on a
$$p_1^* f_n \frac{dx_n}{x_n^a} - p_2^* f_n \frac{dx_n}{x_n^a} \equiv f_n(t) dy_n + g(t,y) \frac{dt_n}{t_n}$$
avec $g(t,y)$ une fonction sans pôle qu'on ne précisera pas. On en déduit que $H_a(\mathcal{E}^\omega)$ est à singularité régulière le long de D. D'après 9.1.3, $\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{E}^\omega)$ est une connexion algébrique de rang 1. Soit s la trivialisation de $H_a(\mathcal{E}^\omega)$ dans laquelle les congruences précédentes valent. Si $k \in \mathbb{Z}$ est tel que $t_n^k s$ définit un élément non nul de $V_{<0}(H_a(\mathcal{E}^\omega))$, alors la classe de $t_n^k s$ dans $\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{E}^\omega)$ est une trivialisation locale de $\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{E}^\omega)$. Les équations précédentes prises en $a = \rho$ montrent que l'action de $\partial_{t_k}, k < n$ se fait par la multiplication par
$$-a f_k \circ i_{D,X}(t) y_n + y_1 \frac{\partial f_k}{\partial t_1} \circ i_{D,X}(t) + \cdots + y_{n-1} \frac{\partial f_k}{\partial t_{n-1}} \circ i_{D,X}(t) \tag{11.0.7}$$
tandis que l'action de ∂_{y_k} se fait via la multiplication par $f_k \circ i_{D,X}(t)$.

Pour terminer la preuve de 11.0.6, supposons que 0 est non tournant pour $\mathcal{M} = \mathcal{E}^{\omega_1} \oplus \mathcal{E}^{\omega_2}$, c'est-à-dire que ω_1 et ω_2 sont de la forme
$$\omega_i = f_{i1}(x) \frac{dx_1}{x_n^a} + \cdots + f_{in}(x) \frac{dx_n}{x_n^{a+1}}, \quad i = 1, 2 \tag{11.0.8}$$
avec $f_{in}(0) \neq 0$ et $f_{1n}(0) - f_{2n}(0) \neq 0$. Le calcul des cycles proches des termes diagonaux de $H_a(\mathcal{M})$ est acquis du fait du calcul précédent de $\Psi_{t_n} H_a(\mathcal{E}^{\omega_i})$. Il suffit donc de montrer la nullité des cycles proches de $\mathcal{E}^{p_1^*\omega_1 - p_2^*\omega_2}$.

Pour cela on observe que la partie la plus polaire de l'action de ∂_{t_n} est produite par le terme
$$f_{1n}(t_i + y_i t_n^{a+\delta_{in}}) \frac{d(t_n + y_n t_n^{a+1})}{(t_n + y_n t_n^{a+1})^{a+1}} - f_{2n}(t) \frac{dt_n}{t_n^{a+1}}$$
Elle est de la forme $(f_{1n}(t) - f_{2n}(t) + t_n \cdots)/t_n^{a+1}$. Il suffit donc d'invoquer une version en dimension quelconque du lemme d'annulation 3.5.1, qui se prouve immédiatement en remplaçant la référence à [46, 2.1.1] par [26, 4.1.4]. $\square$

12 Appendice

12.1 Réseaux de Malgrange

On rappelle ici le nécessaire concernant les réseaux de Malgrange [37]. Pour cela, on se donne une variété analytique complexe lisse X, une hypersurface Z de X ainsi qu'une connexion méromorphe formelle $\mathcal{M}$ le long de Z, à savoir un $\widehat{\mathcal{O}_X}(*Z)$-module [10] localement libre de rang fini muni d'une connexion méromorphe à pôles le long de Z.

Pour $\phi \in \widehat{\mathcal{O}_X}$, on note comme d'habitude $\mathcal{E}^\phi$ la connexion méromorphe formelle $(\widehat{\mathcal{O}_X}, d + d\phi)$. On commence par la

Définition 12.1.1. On dit que $\mathcal{M}$ admet une *décomposition admissible* au voisinage d'un point de lissité x de Z si au-dessus d'un ouvert contenant x, la connexion $\mathcal{M}$ se décompose en une somme directe finie de connexions méromorphes formelles du type $\mathcal{E}^\phi \otimes \mathcal{R}_\phi$ avec $\phi \in \widehat{\mathcal{O}_X}(*Z)$ et $\mathcal{R}_\phi$ à singularité régulière le long de Z.

10. Dans cette notation, $\widehat{\mathcal{O}_X}$ désigne la formalisation de $\mathcal{O}_X$ le long de l'idéal défini par Z.

Dans une décomposition admissible, on peut remplacer à loisir un facteur ϕ par $\phi+f$ avec $f \in \widehat{\mathcal{O}_X}$. Quitte à regrouper certains termes, on peut donc toujours choisir les contributions $\mathcal{E}^{\phi_i} \otimes \mathcal{R}_{\phi_i}$, $i = 1, \ldots, n$ de telle sorte que $\phi_i - \phi_j$ soit non nulle et admette un pôle le long de Z pour $i \neq j$. Ceci étant fait, la décomposition 12.1.1 est unique. C'est une telle décomposition qui sera considérée dans toute la suite.

Le premier pas vers la construction des réseaux de Malgrange est le

Théorème 12.1.2. *Il existe un ouvert U du lieu de lissité de Z avec $S := Z \setminus U$ fermé*[11] *de codimension 1 de Z et tel que pour tout $x \in U$, on dispose d'un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ dans lequel Z est défini par $x_n = 0$ et d'un entier p tel que si f_p désigne l'application $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_{n-1}, t^p)$, alors la connexion $f_p^+\mathcal{M}$ admet une décomposition admissible au sens de 12.1.1.*

Dans la suite, on garde les notations de 12.1.2. Soit τ une section de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Pour un point $x \in U$, soit

$$f_p^+\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{E}^{\phi_i} \otimes \mathcal{R}_{\phi_i}$$

la décomposition admissible de $\mathcal{M}$ au-dessus d'un voisinage de x inclus dans U. Notons $\mathcal{R}_{p,\tau}$ le réseau de $f_p^+\mathcal{M}$ somme directe des réseaux de Deligne [9] associés à τ des connexions régulières $\mathcal{R}_{\phi_i}$. Posons $\mathcal{R}_\tau := \mathcal{R}_{p,\tau} \cap \mathcal{M}$. On vérifie alors que $\mathcal{R}_\tau$ ne dépend ni de p ni du choix de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, et on obtient ainsi un réseau bien défini de $\mathcal{M}$ au-dessus de U.

Suivant Malgrange[12], notons $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ le sous-faisceau en $\widehat{\mathcal{O}_X}$-module de $\mathcal{M}$ des sections de $\mathcal{M}$ dont la restriction en dehors de S défini une section de $\mathcal{R}_\tau$. Le théorème fondamental de Malgrange [37, 3.3.1] est alors

Théorème 12.1.3. *Le faisceau $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est cohérent, et on a $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{O}_X}(*Z)\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$.*

On peut transporter le travail de Malgrange dans le contexte algébrique de la façon suivante : soit X une variété algébrique lisse, et soit $\mathcal{M}$ une connexion méromorphe sur X à pôles le long d'une hypersurface Z de X. On se donne une compactification lisse $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ de X tel que $D = \overline{X} \setminus X$ soit un diviseur à croisements normaux, et on fixe une section τ de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Notons $\overline{Z}$ l'adhérence de Z dans $\overline{X}$.

Alors, $(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}$ est une connexion analytique sur $\overline{X}$ méromorphe le long de $D \cup \overline{Z}$. Posons

$$\widehat{(j_*\mathcal{M})}^{\mathrm{an}} := \widehat{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(*(D \cup \overline{Z})) \otimes (j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}$$

D'après [37, 1.2], le sous-faisceau de $(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}$ défini par

$$\mathcal{R}_\tau((j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}) := (j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{R}_\tau(\widehat{(j_*\mathcal{M})}^{\mathrm{an}})$$

est cohérent et vérifie

$$\widehat{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(*(D \cup \overline{Z})) \otimes \mathcal{R}_\tau((j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}) = \mathcal{R}_\tau(\widehat{(j_*\mathcal{M})}^{\mathrm{an}})$$

et

$$(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}} = \mathcal{O}_{\overline{X}}(*(D \cup \overline{Z}))\mathcal{R}_\tau((j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}})$$

11. Ceci signifie que tout point de S est inclus localement dans un fermé analytique de Z de codimension au moins 1.

12. Voir les 3 lignes qui suivent l'énoncé du théorème 3.3.1 de [37].

Par théorème GAGA de Serre, le sous-faisceau $\mathcal{R}_\tau((j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}})$ de $(j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}$ est l'analytifié d'un sous-faisceau cohérent de $j_*\mathcal{M}$. On en déduit par restriction à X un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{M}$ noté $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ et dont $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}})$ est l'analytifié. Il est indépendant du choix de la compactification $\overline{X}$. Pour le voir il suffit d'observer la relation

$$\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}) \tag{12.1.4}$$

qui découle de la fidèle platitude des couples $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x})$ pour $x \in Z$ combinée au lemme général suivant

Lemme 12.1.5. *Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme fidèlement plat, M un A-module, et N un sous-module de M. Alors on a $N = M \cap (B \otimes_A N)$, où l'intersection a lieu dans $B \otimes_A M$.*

Démonstration. Le fait que $M \cap (B \otimes_A N)$ a bien un sens découle du fait que par fidèle platitude, les morphismes $M \longrightarrow B \otimes_A M$ et $B \otimes_A N \longrightarrow B \otimes_A M$ sont des injections.

Le lemme 12.1.5 se déduit alors d'une chasse au digramme dans

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \otimes_A N \arrow[r] & B \otimes_A M \arrow[r] & B \otimes_A (M/N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes et les flèches verticales injectives. □

Comme conséquence de (12.1.4), on a $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(*Z)\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$. Le faisceau $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est appelé le *réseau*[13] *de Malgrange de $\mathcal{M}$ associé à τ.*

12.2 La transformation de Fourier commute à l'image inverse

Dans cet appendice, on se donne un fibré vectoriel E sur une variété algébrique lisse X, on note $E^\vee$ son dual et $\sigma_E : E \times_X E^\vee \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ l'accouplement canonique. On choisit une coordonnée t sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ et on définit la connexion algébrique $\mathcal{E} := (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}, d + dt)$. Soit enfin Y une variété lisse et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme.

$$\begin{tikzcd}
& E \times E^\vee \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
E & & E^\vee
\end{tikzcd}$$

On pose

$$\mathfrak{F}\mathcal{M} := p_{2+}(p_1^+(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} \sigma_E^+\mathcal{E})$$

On a les diagrammes cartésiens

$$\begin{tikzcd}
E_{|Y} \arrow[r, "f_E"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
E_{|Y} \times E^\vee_{|Y} \arrow[r, "f_E \times f_E^\vee"] \arrow[d, "p_{2|Y}"] & E \times E^\vee \arrow[d, "p_2"] \\
E^\vee_{|Y} \arrow[r, "f_E^\vee"] & E^\vee
\end{tikzcd}$$

13. On prendra garde que la terminologie de réseau est trompeuse car on ne sait pas a priori si $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M})$ est localement libre. Il l'est en dimension 2 par propriété de réflexivité de $\mathcal{R}_\tau(\mathcal{M}^{\mathrm{an}})$. Voir la remarque 3.3.2 de [37].

On va montrer que

Proposition 12.2.1. *Pour tout module cohérent $\mathcal{M}$ sur E, on a un isomorphisme canonique*

$$f_E^{\vee +}\mathfrak{F}\mathcal{M} \simeq \mathfrak{F} f_E^{\vee +}\mathcal{M}$$

Démonstration. On a la chaîne d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
f_E^{\vee +}\mathfrak{F}\mathcal{M} &= f_E^{\vee +} p_{2+}(p_1^+(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} \sigma_E^+\mathcal{E}) && (12.2.2)\\
&\simeq p_{2|Y+}(f_E \times f_E^\vee)^+(p_1^+(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} \sigma_E^+\mathcal{E}) && (12.2.3)\\
&\simeq p_{2|Y+}((f_E \times f_E^\vee)^+ p_1^+(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} (f_E \times f_E^\vee)^+\sigma_E^+\mathcal{E}) && (12.2.4)\\
&\simeq p_{2|Y+}(p_{1|Y}^+(f_E^+\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E\times E^\vee}} (f_E \times \sigma_{E_{|Y}}^+\mathcal{E})) && (12.2.5)\\
&= \mathfrak{F} f_E^{\vee +}\mathcal{M} && (12.2.6)
\end{aligned}$$

(12.2.3) vaut par théorème de changement de base pour les $\mathcal{D}$-modules [16, 1.7.3].

(12.2.4) est l'objet [34, 4.1] où l'on prend $M = p_1^+(\mathcal{M})$ et $N = \sigma_E^+\mathcal{E}$ qui est une connexion algébrique (on a donc en particulier pas besoin de dériver le produit tensoriel comme c'est fait dans [34, 4.1]).

(12.2.5) est immédiat.

□

Troisième partie

On a relation between the turning point locus of a meromorphic connection and its irregularity sheaf

Sommaire

Let us consider a smooth complex algebraic variety X, a smooth hypersurface $i : Z \hookrightarrow X$ and let $\mathcal{M}$ be a meromorphic connection on X with poles along Z. The aim of this part is to prove the following

Theorem 12.2.7. *The set of good semi-stable points of $\mathcal{M}$ is a subset of the smooth locus of $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$.*

The strategy can be described as follows: we first prove 12.2.7 in the case where $\mathcal{M}$ is a sum of modules appearing in the right hand side of (0.0.1). Since by 13.2.1 the local Euler-Poincaré characteristic $\chi(\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}))$ of $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ only depends on the formalization of $\mathcal{M}$ along Z, we deduce that $\chi(\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}))$ is constant in the neighbourhood of a good semi-stable point. To conclude, we combine the perversity of $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ with a general theorem 13.1.6 stating that on a smooth variety, the perverse sheaves with constant local Euler-Poincaré characteristic are smooth.

As an immediate corollary of 12.2.7, we get the following

Theorem 12.2.8. *The stable point locus of $\mathcal{M}$ is included in the intersection of the smooth locus of $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$.*

The converse of 12.2.8 will be discussed in 15.1. After a reduction 15.2 to the two dimensional case resting upon André's criterion [5, 3.4.1] for stable points, we will prove it in 15.4 in the special case where only one ϕ occurs in (0.0.1).

13 The protagonists and some preleminary results

13.1 The Irregularity sheaf

The irregularity sheaf has been introduced in [39]. For a detailed treatment of its fundamental properties, one can refer to [40]. As for useful references concerning perverse sheaves, one can mention [21], [41], [11].

In this subsection, X will be a complex manifold, $i : Z \hookrightarrow X$ a closed analytic subvariety of X, $\mathcal{I}_Z$ its defining ideal, $\mathcal{M} \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ a complex of $\mathcal{D}_X$-modules with bounded holonomic cohomology and $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ its characteristic cycle. $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ will denote the derived category of complex of sheaves of $\mathbb{C}$-vector spaces with bounded constructible cohomology and if $\mathcal{F} \in D^b_c(\mathbb{C}_X)$, we will denote by

$$\chi(\mathcal{F}) : x \longrightarrow \sum_k (-1)^k \,\mathrm{rk}\, \mathcal{H}^k \mathcal{F}_x$$

the Euler-Poincaré characteristic of $\mathcal{F}$.

The local algebraic cohomology functor

$$\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathcal{M}) := \varinjlim \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Z^k, \mathcal{M})$$

and the localization functor

$$\mathcal{M}(*Z) := \varinjlim \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_Z^k, \mathcal{M})$$

give rise to the following distinguished triangle of $D^b(\mathcal{D}_X)$

$$\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{M}(*Z) \xrightarrow{+1} \tag{13.1.1}$$

and one can prove [19] by using Bernstein-Sato polynomial that (13.1.1) lies in $D^b_h(\mathcal{D}_X)$. By applying the solution functor $\mathbf{S} = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\quad, \mathcal{O}_X)$, Kashiwara's constructibility theorem [17] asserts that the distinguished triangle of bounded complex of sheaves

$$i^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathcal{M}(*Z)) \longrightarrow i^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathcal{M})) \xrightarrow{+1} \tag{13.1.2}$$

lies in $D^b_c(\mathbb{C}_X)$. Let us define [14]

$$\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}) := i^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{R}\mathcal{M}(*Z))[1] \tag{13.1.3}$$

Hence $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ is the cone of

$$i^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Z(\mathcal{M})) \tag{13.1.4}$$

Of fundamental importance about the irregularity sheaf is the following theorem of Mebkhout [39, 2.1.6]

Theorem 13.1.5. *If Z is an hypersurface, $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ is a perverse sheaf on Z.*

This result will have a crucial role, due to the following general

Theorem 13.1.6. *Let Z be a smooth complex manifold, and let $\mathcal{F}$ be a perverse sheaf on Z with constant Euler-Poincaré characteristic. Then $\mathcal{F}$ is a local system concentrated in degree 0.*

Proof. For the sake of this proof, let us denote by n the dimension of Z. Since $\mathcal{F}$ is perverse, it is generically smooth and the constancy of $\chi(\mathcal{F})$ reads

$$\dim \mathcal{H}^0\mathcal{F}_z - \dim \mathcal{H}^1\mathcal{F}_z + \cdots + (-1)^n \dim \mathcal{H}^n\mathcal{F}_z = \dim \mathcal{H}^0\mathcal{F}_\eta \tag{13.1.7}$$

for every $z \in Z$, with η denoting the generic point of Z. Let us argue on the dimension of Z.

If Z is one dimensional, (13.1.7) simplifies for a given $z \in Z$ into the following equality

$$\dim \mathcal{H}^0\mathcal{F}_z = \dim \mathcal{H}^1\mathcal{F}_z + \dim \mathcal{H}^0\mathcal{F}_\eta$$

Since the perversity condition on $\mathcal{F}$ implies that $\mathcal{H}^0\mathcal{F}$ has no section punctually supported at z [21, 10.3.3], we have

$$\dim \mathcal{H}^0\mathcal{F}_z \leq \mathcal{H}^0\mathcal{F}_\eta,$$

from which we deduce the vanishing of $\mathcal{H}^1\mathcal{F}$, and 13.1.6 follows from the constructibility of $\mathcal{H}^0\mathcal{F}$.

Let us suppose that $n \geq 2$, and take $z_0 \in Z$. According to [39, 2.2.1.5], one can

14. We could either work with $\mathrm{Irr}_Z(\mathcal{M})$ or with its dual $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$. This is harmless for our purpose since by combining Verdier biduality theorem [53] and the hypercohomology spectral sequence, one can see that a bounded constructible complex of sheaves is smooth if and only if its dual is smooth.

choose a neighbourhood U of z_0 with the property that for every $z \in U$ different from z_0, there exists a smooth hypersurface $i : Z' \longrightarrow Z$ passing through z and such that $i^{-1}\mathcal{F}$ is perverse. From the induction hypothesis applied to $(Z', i^{-1}\mathcal{F})$, one gets that $\mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|U}$ is a local system away from z_0, and for every $k \in [\![1, n]\!]$, the sheaf $\mathcal{H}^k\mathcal{F}_{|U}$ has support included in $\{z_0\}$. Since the statement 13.1.7 is local, we will abuse notation by using Z for U in the sequel. Let us prove the vanishing of $\mathcal{H}^k\mathcal{F}_{z_0}$ for $k \in [\![1, n-1]\!]$ [15].

From the following canonical identification in $D^b_c(Z, \mathbb{C})$

$$R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{z_0}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_{z_0}[-2n], \tag{13.1.8}$$

we deduce that the a priori non-zero terms of the hypercohomology spectral sequence [16]

$$E_2^{pq} = R^p\mathcal{H}om(\mathcal{H}^{-q}\mathcal{F}, \mathbb{C}) \Longrightarrow R^{p+q}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}) \tag{13.1.9}$$

are the terms E_2^{pq} with ($p = 0, \dots, 2n$ and $q = 0$) or ($p = 2n$ and $q = 0, \dots, -n$).

Let us prove the degeneracy at sheet 2 of (13.1.9). We start with the following

Lemma 13.1.10. *The sheaves* $E_2^{p,0}$ *are* 0 *for* $p = 1, \dots, 2n-2$.

Proof. By choosing V a small enough ball centered at z_0, one can suppose that the cohomology sheaves of $R\mathcal{H}om(\mathcal{H}^0\mathcal{F}, \mathbb{C})$ are acyclic for $\Gamma(V, \quad)$. Thus we have

$$\Gamma(V, E_2^{2n-k,0}) \simeq \operatorname{Ext}^{2n-k}(\mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|V}, \mathbb{C}),$$

for every k. Hence, Poincaré duality gives a canonical isomorphism

$$\Gamma(V, E_2^{2n-k,0}) \simeq H^k_c(V, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|V})^\vee \tag{13.1.11}$$

Let us denote by $j : V \longrightarrow \overline{V}$, $i : \partial\overline{V} \longrightarrow \overline{V}$ the canonical immersions. By applying the functor $R\Gamma(\overline{V}, \quad)$ to the short exact sequence

$$0 \longrightarrow j_!\mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|V} \longrightarrow \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\overline{V}} \longrightarrow i_*\mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\partial\overline{V}} \longrightarrow 0$$

we end up with an exact triangle

$$R\Gamma(\overline{V}, j_!\mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|V}) \longrightarrow R\Gamma(\overline{V}, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\overline{V}}) \longrightarrow R\Gamma(\partial\overline{V}, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\partial\overline{V}}) \xrightarrow{+1}$$

The associated long exact sequence reads

$$\cdots \to H^{k-1}(\partial\overline{V}, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\partial\overline{V}}) \to H^k_c(V, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|V}) \to H^k(\overline{V}, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\overline{V}}) \to H^k(\partial\overline{V}, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\partial\overline{V}}) \to \cdots$$

Since $\partial\overline{V}$ is a sphere of dimension $2n-1$ and $\mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\partial\overline{V}}$ is constant on it, we have

$$H^{k-1}(\partial\overline{V}, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\partial\overline{V}}) \simeq 0$$

15. This does not follow immediately from the perversity condition [21, (10.3.3)], since this condition implies the vanishing of $H^j_{\{z_0\}}(\mathcal{F})_{z_0}$ for $j < n$, but says a priori nothing about the $H^j_{\{z_0\}}(\mathcal{H}^k\mathcal{F})_{z_0}$ unless $j = 0$ and $k = 0$.

16. Let us recall that this spectral sequence is designed for left exact functors. To turn $R\mathcal{H}om(\ \ , \mathbb{C})$ into such a functor, one has to consider $\mathcal{H}om(\ \ , \mathbb{C})$ as a functor from the opposite category of sheaves on Z to the category of sheaves on Z. From this viewpoint, $\mathcal{F}$ is cohomologically concentrated in degrees ranging from $-n$ to 0.

for $k = 2, \ldots, 2n-1$. As a result, $H^k_c(V, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|V})$ injects in $H^k(\overline{V}, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\overline{V}})$ if $k = 2, \ldots, 2n-1$. By the constructibility property of $\mathcal{H}^0\mathcal{F}$, the cohomology $H^k(\overline{V}, \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{|\overline{V}})$ vanishes for $k > 0$ for V chosen small enough. So from (13.1.11), we deduce that for V small enough, we have

$$\Gamma(V, E_2^{p,0}) \simeq 0$$

for $p = 1, \ldots, 2n-2$.

Hence the stalk of $E_2^{p,0}$ at z_0 is 0 for $k = 1, \ldots, 2n-2$. Since $\mathcal{H}^0\mathcal{F}$ is constant away from z_0, the sheaf $E_2^{p,0} = R^p\mathcal{H}om(\mathcal{H}^0\mathcal{F}, \mathbb{C})$ is also 0 away from z_0, and lemma 13.1.10 is proved. □

From 13.1.10, we deduce that the only terms $E_2^{p,q}$ which could be a priori non zero in (13.1.9) are $E_2^{0,0}$, $E_2^{2n-1,0}$ and the $E_2^{2n,q}$ for $q = 0, \ldots, -n$. We deduce from this that the only differential of (13.1.9) which could be a priori non zero is $d_k : E_k^{0,0} \longrightarrow E_k^{k,-k+1}$ with $k = 2n$. But $-k+1 = -2n+1 < -n$ because $n > 1$, so $E_k^{k,-k+1} \simeq 0$ and then $d_k : E_k^{0,0} \longrightarrow E_k^{k,-k+1}$ has to be 0. Thus, the spectral sequence (13.1.9) degenerates at sheet 2.

We deduce that for $q = 2, \ldots, n-1$, the only contribution to $R^{2n-q}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ on the sheet at infinity is $R^{2n}\mathcal{H}om(\mathcal{H}^q\mathcal{F}, \mathbb{C})$. Then for $q = 2, \ldots, n-1$, we have

$$R^{2n}\mathcal{H}om(\mathcal{H}^q\mathcal{F}, \mathbb{C}) \simeq R^{2n-q}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}) \simeq 0$$

Since the $\mathcal{H}^q\mathcal{F}$ are skyscraper sheaves for $q > 0$, we deduce $\mathcal{H}^q\mathcal{F} \simeq 0$ for $q = 2, \ldots, n-1$.

On the other hand, the only contribution to $R^{2n-1}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ on the sheet at infinity are $R^{2n}\mathcal{H}om(\mathcal{H}^1\mathcal{F}, \mathbb{C})$ and $R^{2n-1}\mathcal{H}om(\mathcal{H}^0\mathcal{F}, \mathbb{C})$. From

$$R^{2n-1}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}) \simeq 0$$

we deduce

$$R^{2n}\mathcal{H}om(\mathcal{H}^1\mathcal{F}, \mathbb{C}) \simeq 0$$

so we also have $\mathcal{H}^1\mathcal{F} \simeq 0$.

Then we have proved that $\mathcal{H}^k\mathcal{F} \simeq 0$ for $k = 1, \ldots, n-1$, so to conclude the proof of 13.1.6, we are left to prove the vanishing of the germ of $\mathcal{H}^n\mathcal{F}$ at z_0. Since we have

$$\dim \mathcal{H}^0\mathcal{F}_{z_0} = (-1)^{n+1} \dim \mathcal{H}^n\mathcal{F}_{z_0} + \dim \mathcal{H}^0\mathcal{F}_\eta$$

it is enough to show that $\mathcal{H}^0\mathcal{F}$ is a local system. For this, we remind [11, 5.1.19] that $\mathcal{F}$ can always be supposed to satisfy $\mathcal{F}^k = 0$ for $k < 0$ and $k > n$. Let us then consider the truncation

$$\tau_n(\mathcal{F}) := 0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Im} d_{\mathcal{F},n-1} \longrightarrow 0$$

It is the kernel of an exact sequence of complexes

$$0 \longrightarrow \tau_n(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}^n\mathcal{F}[-n] \longrightarrow 0 \tag{13.1.12}$$

and the canonical inclusion of complexes $\mathcal{H}^0\mathcal{F}[0] \longrightarrow \tau_n(\mathcal{F})$ is a quasi-isomorphism. Then, (13.1.12) gives rise to a distinguished triangle in $D^b_c(Z, \mathbb{C})$

$$\mathcal{H}^0\mathcal{F}[0] \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}^n\mathcal{F}[-n] \xrightarrow{+1} \tag{13.1.13}$$

where the second and last complex are perverse. Hence $\mathcal{H}^0\mathcal{F}[0]$ is perverse and we are reduced to prove the following

Lemme 13.1.14. *Let $\mathcal{F}$ be a constructible sheaf on a polydisc D of $\mathbb{C}^n$ centered at the origine, with $n \geq 2$. Suppose that $\mathcal{F}$ is perverse and restricts to a local system on the complementary $j : D^* \hookrightarrow D$ of the origin. Then $\mathcal{F}$ is constant.*

Proof. Since $n \geq 2$, $\mathcal{F}_{|D^*}$ is constant. If we denote by m its rank, we have $j_*j^{-1}\mathcal{F} \simeq \mathbb{C}^m_D$. Since $\mathcal{F}$ is perverse, it has no sections supported at 0 and we deduce the following short exact sequence of sheaves

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{C}^m_D \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0 \tag{13.1.15}$$

with $\mathcal{G}$ supported at 0. From the perversity of $\mathcal{F}$ and $\mathbb{C}^m_D$, we get that $\mathcal{G}$ is perverse. Thus it has no non-zero sections supported at the origine, so it is the 0 sheaf, and 13.1.14 is proved. □

Remark 13.1.16. Theorem 13.1.6 can be easily obtained with the use of the Riemann-Hilbert correspondence [16, 7.2.1] combined with Kashiwara-Schapira's identification [21, 11.3.3] of the characteristic variety of an holonomic $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ with the micro-support of $\mathbf{S}(\mathcal{M})$. Both of these results are highly non-trivial, while the proof given here only relies on standard facts about perverse sheaves and is purely topological.

13.2 The Euler-Poincaré characteristic of $\mathrm{Irr}_Z(\mathcal{M})$

In this subsection, X, Z and $\mathcal{M}$ are supposed to be algebraic. As noted in the introduction, $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}) := \mathrm{Irr}^*_{Z^{\mathrm{an}}}(\mathcal{M}^{\mathrm{an}})$ is an analytic invariant. However, we have the following

Theorem 13.2.1. *The value of $\chi(\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}))$ at $x \in Z^{\mathrm{an}}$ only depends on the formalization $\widehat{\mathcal{M}_x} := \widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}_x$.*

Proof. By induction on the number of equation defining Z, the Mayer-Vietoris distinguished triangle [40, 4.2-1]

$$\mathrm{Irr}^*_{Z_1\cap Z_2}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Irr}^*_{Z_1}(\mathcal{M}) \oplus \mathrm{Irr}^*_{Z_2}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Irr}^*_{Z_1\cup Z_2}(\mathcal{M})$$

allows us to suppose that Z is an hypersurface. In that case, the localization functor is exact and is simply $\mathcal{O}_X(*Z)\otimes_{\mathcal{O}_X}$. Thus, one can suppose that $\mathcal{M} = \mathcal{M}(*Z)$.

From the hypercohomology spectral sequence

$$E_2^{pq} = \mathcal{H}^p\mathbf{S}(\mathcal{H}^q\mathcal{M}) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q}\mathbf{S}(\mathcal{M}),$$

we get

$$\chi(\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})) = \sum(-1)^k\chi(\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{H}^k\mathcal{M})),$$

so it is enough to prove 13.2.1 in the case where $\mathcal{M}$ is an actual holonomic $\mathcal{D}_X$-module.

Let us write

$$\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = \sum m_\alpha(\mathcal{M})\overline{T^*_{X_{\alpha,\mathrm{reg}}}X},$$

where $m_\alpha(\mathcal{M})$ is a positive integer, X_α is a closed irreducible subvariety of X and $X_{\alpha,\mathrm{reg}}$ its regular part. Then the local index theorem [18], [20], [35] asserts that

$$\chi(i^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}))(x) = \sum(-1)^{d_\alpha}e(x, X_\alpha)m_\alpha(\mathcal{M}),$$

where d_α denotes the codimension of X_α in X and $e(x, X_\alpha)$ stands for the Euler obstruction defined by Mac-Pherson [32]. This latter invariant is of topological nature and is equal to 0 in case $x \notin X_\alpha$. Then, if X_α is a closed irreducible subvariety of X containing x, we need to show the following

Lemma 13.2.2. *The integer $m_\alpha(\mathcal{M})$ only depends on $\widehat{\mathcal{M}_x}$.*

Let us first recall the definition of $m_\alpha(\mathcal{M})$. Let $F_\mathcal{M}$ be a good filtration for $\mathcal{M}$ defined in a neighbourhood of x and consider its graded module $\mathrm{Gr}_{F_\mathcal{M}}(\mathcal{M})$. If $p : T^*X \longrightarrow X$ denotes the canonical projection, $\mathrm{Gr}_{F_\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ is a coherent sheaf of $p_*\mathcal{O}_{T^*X}$-modules on X. Thus, using the adjunction $\mathcal{O}_{T^*X} \longrightarrow p^*p_*\mathcal{O}_{T^*X}$, $p^* \mathrm{Gr}_{F_\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ canonically defines a coherent sheaf on T^*X. Then if η_α denotes the generic point of $T^*_{X_{\alpha,\mathrm{reg}}}X$, $m_\alpha(\mathcal{M})$ is the length of the restriction of $p^* \mathrm{Gr}_{F_\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ to $\mathcal{O}_{T^*X,\eta_\alpha}$.

By formally following this construction, one could define a notion of characteristic variety for coherent $\widehat{\mathcal{D}_{X,x}}$-modules as a cycle in the formalization $\widehat{T^*X}$ of T^*X along T^*_xX in such a way that $\widehat{F_{\mathcal{M},x}}$ defines a good $\widehat{\mathcal{D}_{X,x}}$-filtration for $\widehat{\mathcal{M}_x}$. Hence, $\mathrm{Char}(\widehat{\mathcal{M}_x})$ is the cycle associated to $\widehat{p}^* \mathrm{Gr}_{\widehat{F_{\mathcal{M},x}}}(\widehat{\mathcal{M}_x})$, with $\widehat{p}$ defined by the following cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T^*X} & \longrightarrow & T^*X \\ {\scriptstyle \widehat{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \operatorname{Spec}\widehat{\mathcal{O}_{X,x}} & \longrightarrow & X \end{array}$$

By faithfullness of $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ over $\mathcal{O}_{X,x}$, this is also the cycle associated to $\widehat{p}^*\widehat{\mathrm{Gr}_{F_\mathcal{M}}(\mathcal{M})_x}$.

Coming back to the proof of 13.2.2, if $\mathcal{N}$ is a holonomic $\mathcal{D}_X$-module satisfying $\widehat{\mathcal{M}_x} \simeq \widehat{\mathcal{N}_x}$, we deduce from the previous discussion that

$$\mathrm{Char}(\widehat{p}^* \widehat{\mathrm{Gr}_{F_\mathcal{M}}(\mathcal{M})_x}) = \mathrm{Char}(\widehat{p}^* \widehat{\mathrm{Gr}_{F_\mathcal{N}}(\mathcal{N})_x}). \tag{13.2.3}$$

Since X_α contains x, the going-down theorem [38, 9.5] applied in an affine neighbourhood of x for $(\overline{T^*_{X_{\alpha,\mathrm{reg}}}X}, x)$ asserts that one can find an irreducible variety Y_α of $\widehat{T^*X}$ dominating $\overline{T^*_{X_{\alpha,\mathrm{reg}}}X}$. If one denotes by η_{Y_α} its generic point, the flatness of the morphism of local rings $\mathcal{O}_{T^*X,\eta_\alpha} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{T^*X},\eta_{Y_\alpha}}$ implies the following equality [17]

$$m_\alpha(\mathcal{M}) = \mathrm{length}_{\eta_\alpha}(p^* \mathrm{Gr}_{F_\mathcal{M}}(\mathcal{M})) = \mathrm{length}_{\eta_{Y_\alpha}}(\widehat{p}^*\widehat{\mathrm{Gr}_{F_\mathcal{M}}(\mathcal{M})_x})$$

and 13.2.2 results from the equality of multiplicies along Y_α coming from (13.2.3). $\square$

13.3 The notion of good semi-stable points

In this section X is algebraic, Z is a smooth hypersurface of X with function field K and $\mathcal{M}$ is a connection on X with meromorphic poles along Z. Since the notion of semi-stable point is local, take X to be affine, Z to be given by a regular section z, and denote by A the function ring of Z. Let us take K' and e as in (0.0.1).

17. If A is a commutative ring, M a finitely generated A-module and if $P \in \operatorname{Spec} A$, we denote $\mathrm{length}_P(M)$ for $\mathrm{length}(A_P \otimes_A M)$.

Definition 13.3.1. One says that a closed point P of Z is a *good semi-stable point* if it satisfies the following conditions:

1. the normalization A' of A in K' is etale above P.
2. the coefficients of lowest degree of the non zero ϕ's occuring in (1.0.3) are units in the semi-local ring A'_P.
3. the decomposition (0.0.1) descends on $A'_P((z^{1/e}))$.

Remark 13.3.2. The notion of semi-stable point appears in [5, 3.2.4]. The terminology good here is meant to express the unit condition, with reference to the notion of good formal decomposition appearing in [46]. As for the etaleness condition, it is automatic at a stable point [5, 3.4.1 2)].

As a preleminary step to the proof of 12.2.7, let us consider the simplest situation

Lemma 13.3.3. *Let $P \in Z$, $z = 0$ a local defining equation for Z and ϕ a regular function defined in a neighbourhood of P which does not vanish at P. Let $\mathcal{R}$ be an algebraic connexion on X with regular singularities along Z. For every $k \geq 0$, one defines $\mathcal{M}_{k,\phi,\mathcal{R}} = \mathcal{E}^{\phi/z^k} \otimes \mathcal{R}$. Then $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}_{k,\phi,\mathcal{R}})$ is a local system of rank k on Z^{an} in a neighbourhood of P.*

Proof. Since ϕ does not vanish at P, by the change of variable $z' = z/\sqrt[k]{\phi}$, one can suppose that $\phi = 1$. Since every regular singular connexion is locally a successive extension of rank one regular singular connexion [9], the exactness of Irr^*_Z allows us to reduce the problem to the case where $\mathcal{R}$ has rank 1. In that case, one can see that the characteristic cycle of $\mathcal{M}_{k,1,\mathcal{R}}$ is contained in the union of $T^*_Z X$ and $T^*_X X$, so every curve passing through a point Q closed enough to P and transversed to Z is non-characteristic for $\mathcal{M}_{k,1,\mathcal{R}}$. Let $f : C \hookrightarrow X$ be such a curve. By Cauchy-Kovalevska theorem [16, 4.3.2], the canonical morphism $f^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M}_{k,1,\mathcal{R}}) \longrightarrow \mathbf{S}(f^+\mathcal{M}_{k,1,\mathcal{R}})$ is an isomorphism. Hence, the germ of $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}_{k,1,\mathcal{R}})$ at Q is that of $\mathrm{Irr}^*_Z(f^+\mathcal{M}_{k,1,\mathcal{R}})$ at Q, so the complex $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}_{k,1,\mathcal{R}})_Q$ is concentrated in degree 0, and from [6, 3.3.6], we obtain that its 0^{th}-cohomology has dimension k. □

14 The proof of 12.2.7

Consider X, Z, $\mathcal{M}$ as in the introduction. Let $P \in Z$ be a good semi-stable point for $\mathcal{M}$. We start with the following reduction

Lemma 14.0.4. *If the theorem 12.2.7 is true in the case where $K' = K$ and $e = 1$, then it is true in general.*

Proof. Choose a local analytic chart $U = V \times D(0,1)$ of X^{an} with coordinates (t, z) centered at P into which Z^{an} is locally given by $z = 0$. Denote by $p : V' \longrightarrow V$ the normalization of V in K'. By the very definition of good semi stable point, we can suppose by shrinking V enough that p is etale trivial with group G. The map

$$\begin{array}{rcl} \pi : V' \times D(0,1) & \longrightarrow & U \\ (t, z') & \longrightarrow & (p(t), z'^e) \end{array}$$

is proper. Since the canonical morphism

$$\mathcal{M} \longrightarrow \pi_+\pi^+\mathcal{M}(*Z^{\mathrm{an}})$$

induced by the adjunction map identifies $\mathcal{M}$ with a direct factor of $\pi_+\pi^+\mathcal{M}(*Z^{\mathrm{an}})$, namely the invariants under $G \times \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, it is enough to prove that

$$\mathrm{Irr}_Z(\pi_+\pi^+\mathcal{M}(*Z^{\mathrm{an}})) = \mathrm{Irr}_Z(\pi_+\pi^+\mathcal{M})$$

is a local system. The compatibility of Irr_Z with proper morphisms [40, 3.6-6] gives (in a neighbourhood of P) a canonical isomorphism

$$\mathrm{Irr}_Z(\pi_+\pi^+\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} R\pi_* \, \mathrm{Irr}_{(z'=0)}(\pi^+\mathcal{M}).$$

Since π is finite, the functor π_* is exact. Then,

$$\mathcal{H}^k \, \mathrm{Irr}_Z(\pi_+\pi^+\mathcal{M}) \simeq \pi_*\mathcal{H}^k \, \mathrm{Irr}_{(z'=0)}(\pi^+\mathcal{M})$$

is the zero sheaf for $k \geq 1$, and is a local system for $k = 0$. □

This reduction being done, theorem 13.2.1 implies that in a neighbourhood of P, the function $\chi(\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}))$ is a sum of Euler-Poincaré characteristic coming from modules of the form appearing in 13.3.3. Hence, it is constant in a neighbourhood of P. Since $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ is perverse, the theorem 12.2.7 follows from 13.1.6.

15 Some thoughts about the converse of 12.2.8

The goal of this subsection is to discuss the following

Conjecture 15.0.5. *The intersection of the smooth locus of* $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ *and* $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$ *is a subset of the stable point locus of* $\mathcal{M}$.

In the sequel, let us fix once for all a point P in the smooth locus of $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$. We recall that η stands for the generic point of Z and that $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ is endowed with a locally finite increasing $\mathbb{Q}_{\geq 1}$-filtration by perverse sheaves $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})\{r\}$ [39, 6.3.3]. We will denote by $\mathrm{Gr}^r \, \mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ its r^{th}-graded piece. Since we have

$$\mathrm{Char}(\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})) = \sum \mathrm{Char}(\mathrm{Gr}^r \, \mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})),$$

the characteristic cycle of $\mathrm{Gr}^r \, \mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ is a multiple of $T_{Z^{\mathrm{an}}}Z^{\mathrm{an}}$ in a neighbourhood of P. By 13.1.6, $\mathrm{Gr}^r \, \mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ is a local system in a neighbourhood of P. The same holds for $\mathrm{Gr}^r \, \mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$.

15.1 André's criterion and micro-caractericity

To establish 15.0.5, one could try to apply André's criterion [5, 3.4.1] for stable points. As a consequence of *loc. cit.*, $P \in Z$ is stable if for every germ of analytic curve $i : C \hookrightarrow X$ cutting Z transversally at P, the Newton polygons [18] $\mathrm{NP}(\mathcal{M}_C)$ and $\mathrm{NP}(\mathrm{End}(\mathcal{M}_C))$ of $i^+\mathcal{M}$ and $i^+\,\mathrm{End}(\mathcal{M})$ are respectively $\mathrm{NP}(\mathcal{M}_\eta)$ and $\mathrm{NP}(\mathrm{End}(\mathcal{M}_\eta))$.

By the work of Ramis [45], the height of the segment of slope $1/(r-1)$ of $\mathrm{NP}(\mathcal{M}_C)$ is equal to the dimension of the r^{th}-graded piece of the irregularity space $\mathrm{Irr}^*_P(\mathcal{M}_C)$. In the same way, the height of the segment of slope $1/(r-1)$ of $\mathrm{NP}(\mathcal{M}_\eta)$ is equal to the dimension of the r^{th}-graded piece of the irregularity space $\mathrm{Irr}^*_{C_{\mathrm{gen}}\cap Z}(\mathcal{M}_{C_{\mathrm{gen}}})$ where C_{gen} is a sufficiently generic germ of curve transverse to Z.

Since in a neighbourhood of P, $\mathrm{Gr}^r\,\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Gr}^r\,\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$ are local systems, one can apply André's criterion if one proves that the formation of $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$ as $\mathbb{Q}_{\geq 1}$-filtered perverse sheaves commutes with the restriction to hypersurfaces transverse to Z and passing through P, that is to say that in a neighbourhood of P, we are in a non (r)-micro characteristic situation for every $r \geq 1$ in the sense of [31].

As pointed out to me by C. Sabbah, this last condition does not follow from the smoothness of the graded pieces of $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M})$ in a neighbourhood of P. Indeed, the work of Laurent and Mebkhout [30] expresses $\mathrm{Char}(\mathrm{Gr}^r\,\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}))$ as an alternate sum of cycles $C_1^+(r), C_2^+(r), C_1^-(r), C_2^-(r)$ of T^*Z canonically defined from the r-micro characteristic cycle $\mathrm{Char}_r(\mathcal{M})$ of $\mathcal{M}$. The (r)-micro characteristic condition has to do with the union of the support of the $C^{\pm}_{1,2}(r)$. This support can be a priori obscenely complicated, and still the $C^{\pm}_{1,2}(r)$ can give rise through various miraculous cancellations to the most simple cycle for $\mathrm{Gr}^r\,\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$.

15.2 Reduction to the two-dimensional case

Let us suppose that Z is given by the equation $z = 0$, and let us denote by $\kappa(P)$ the residue field of P. Then $\kappa(P)[\![z]\!]$ is the ring of functions of a formal curve C_P on X passing through P and transverse to Z. We will note $\mathcal{M}_P$ for $\mathcal{M}_{C_P}$ and following André [5, 3.4.1], we recall that to get the stability of P, it is enough to check the preservation of the generic Newton Polygons of $\mathcal{M}$ and $\mathrm{End}(\mathcal{M})$ by specialization to C_P.

Let us reduce the proof of 15.0.5 to the case where X is two-dimensional [19]. We proceed by induction on the dimension of X and take X to be of dimension ≥ 3 while supposing that 15.0.5 is true in dimension $< \dim X$.

The smoothness assumption on $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ implies that the characteristic variety of $\mathcal{M}$ in a neighbourhood of P is contained in the union of $T^*_Z X$ and $T^*_X X$. Then, any algebraic hypersurface $i : X' \hookrightarrow X$ passing through P and transverse to Z is non characteristic for $\mathcal{M}$ in a neighbourhood of P. Thus by Cauchy-Kovalevska theorem [16, 4.3.2], the canonical morphism $i^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(i^+\mathcal{M})$ is an isomorphism and the same holds for $\mathrm{End}\,\mathcal{M}$, so $\mathrm{Irr}^*_Z(i^+\mathcal{M})$ and $\mathrm{Irr}^*_Z(i^+\,\mathrm{End}\,\mathcal{M})$ are smooth in a neighbourhood of P. From the induction hypothesis applied to $(X', Z', i^+\mathcal{M})$ at P with $Z' := X' \cap Z$, we deduce that P is a stable point of Z' for $i^+\mathcal{M}$. Then, if η' denotes the generic point of Z', we have

$$\mathrm{NP}(\mathcal{M}_P) = \mathrm{NP}(\mathcal{M}_{\eta'}) \quad \text{and} \quad \mathrm{NP}(\mathrm{End}(\mathcal{M}_P)) = \mathrm{NP}(\mathrm{End}(\mathcal{M}_{\eta'})). \tag{15.2.1}$$

18. We will follow André's convention according to which the Newton polygon of a differential module M has $(\mathrm{rk}\,M, 0)$ for higher vertice.

19. In that case, one may hope that the multiplicity of $T^*_P Z$ in $C_1^+(r) + C_2^+(r) + C_1^-(r) + C_2^-(r)$ is computable.

Since $\dim X' \geq 2$, we have $\dim Z' \geq 1$ and so one can deform X' if necessary so that η' is stable for $\mathcal{M}$. In that case, we have

$$\mathrm{NP}(\mathcal{M}_{\eta'}) = \mathrm{NP}(\mathcal{M}_{\eta}) \quad \text{and} \quad \mathrm{NP}(\mathrm{End}(\mathcal{M}_{\eta'})) = \mathrm{NP}(\mathrm{End}(\mathcal{M}_{\eta})) \tag{15.2.2}$$

From André's criterion [5, 3.4.1], the combination of (15.2.1) and (15.2.2) implies the stability of P for $\mathcal{M}$.

15.3 An unconditional consequence of 15.0.5

If 15.0.5 was to hold, we would have $\mathrm{Gr}^r \mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M}) \simeq 0$ in a neighbourhood of P for every rationnal r such that $1/(r-1)$ is not a slope for $\mathrm{NP}(\mathcal{M}_\eta)$. This can be proved unconditionaly. Suppose that $1/(r-1)$ is not a slope for $\mathrm{NP}(\mathcal{M}_\eta)$. Then $\mathrm{Gr}^r \mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ is generically 0 and since it is perverse, it is concentrated in degrees ranging from 1 to $\dim Z$. Since in a neighbourhood of P, it is a subsheaf of an actual sheaf placed in degree 0, it has no other choice than to be the 0 sheaf.

15.4 A simple case

Let us suppose here that only one ϕ occurs in (0.0.1) and let us prove that P is a stable point. This situation is easier to handle, and this for two reasons:

1. In the one slope case, Cauchy-Kovalevska compatibility theorem between the solution functor and non-characteristic immersions will be enough for our purpose. We will not have to check if the (r)-micro characteristic condition is fulfilled.
2. The meromorphic connection $\mathrm{End}\,\mathcal{M}$ is generically regular singular along Z, so by a theorem of Deligne [9, 4.1], it is regular singular along Z and then $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathrm{End}\,\mathcal{M}) \simeq 0$. Thus, $\mathrm{End}\,\mathcal{M}$ plays no role in that case.

The smoothness assumption on $\mathrm{Irr}^*_Z(\mathcal{M})$ implies that the characteristic variety of $\mathcal{M}$ in a neighbourhood of P is contained in the union of $T^*_Z X$and $T^*_X X$, so every curve passing through P and transversed to Z is non-characteristic for $\mathcal{M}$. Let $f : C \hookrightarrow X$ be such a curve. By Cauchy-Kovalevska theorem [16, 4.3.2], the canonical morphism $f^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(f^+\mathcal{M})$ is an isomorphism. As a result, the generic irregularity of $\mathcal{M}$ is that of $\mathcal{M}_C$. Hence by a theorem of Malgrange [36], $\mathrm{NP}(\mathcal{M}_\eta)$ and $\mathrm{NP}(\mathcal{M}_C)$ have the same height. By a general result of André [5, A.1], we have the following inclusion

$$\mathrm{NP}(\mathcal{M}_C) \subset \mathrm{NP}(\mathcal{M}_\eta). \tag{15.4.1}$$

Since $\mathrm{NP}(\mathcal{M}_\eta)$ has only one edge, (15.4.1) is an equality and André's theorem [5, 3.4.1] applies. □

Références

[1] A. Abbes and T. Saito. Ramification of local fields with imperfect residue fields. *Am. J. of Math.*, 124, 2002.

[2] A. Abbes and T. Saito. Ramification of local fields with imperfect residue fields II. In *Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday*. Doc. Mathematica, 2003.

[3] A. Abbes and T. Saito. Analyse micro-locale ℓ-adique en caractéristique $p > 0$: le cas d'un trait. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 45, 2009.

[4] A. Abbes and T. Saito. Ramification and Cleanliness. *Tôhoku Mathematical Journal*, 63, 2011.

[5] Y. André. Structure des connexions méromorphes formelles de plusieurs variables et semi-continuité de l'irrégularité. *Invent. math.*, 170, 2007.

[6] D.G. Babbitt and V.S. Varadarajan. *Local moduli for meromorphic differential equations*, volume 169-170 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1989.

[7] J. Bernstein. Lectures on Algebraic $\mathcal{D}$-modules.

[8] A. Borel et al. *Algebraic $\mathcal{D}$-modules*, volume 2 of *Perspectives in Math.* Academic Press, 1987.

[9] P. Deligne. *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, volume 163 of *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.

[10] P. Deligne. Pourquoi un géomètre algébriste s'intéresse-t-il aux connexions irrégulières ? In *Singularités Irrégulières. Correspondance et Document*, volume 46 of *Documents Mathématiques*. SMF, 2007.

[11] A. Dimca. *Sheaves in Topology*. Universitext. Springer, 2004.

[12] A. Grothendieck. *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*, volume 270 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1963.

[13] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental*, volume 263 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1971.

[14] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique II*, volume 8. Publications Mathématiques de l'IHES, 1961.

[15] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique IV*, volume 32. Publications Mathématiques de l'IHES, 1967.

[16] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *$\mathcal{D}$-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*, volume 236. Birkhauser, 2000.

[17] M. Kashiwara. On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I. *Publ. RIMS*, 10, 1975.

[18] M. Kashiwara. Systèmes d'équations microdifférentielles. notes miméographiées, 1977.

[19] M. Kashiwara. On the holonomic systems of linear differential equations II. *Invent. math.*, 49, 1978.

[20] M. Kashiwara. Index theorem for a maximally overdetermined system of linear differential equations. In *Proc. Jap Acad.*, volume 49-10, 2073.

[21] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on manifolds*. Springer-Verlag, 1990.

[22] K. Kato. Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case. In *Algebraic K-theory and algebraic number theory, Contemp.Math*, volume 83. Amer. Math. Soc., 1989.

[23] K. Kato. Class Field Theory, $\mathcal{D}$-Modules, and Ramification on Higher Dimensional Schemes. *Am. J. of Math.*, 116, 1994.

[24] K. Kato and T. Saito. On the conductor formula of Bloch. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 100, 2004.

[25] N. Katz. On the calculation of some differential Galois groups. *Inven. Math.*, 87, 1987.

[26] K. Kedlaya. Good formal structures for flat meromorphic connections, I : Surfaces. *Duke Math.J.*, 154, 2010.

[27] K. Kedlaya. Good formal structures for flat meromorpohic connexions II : excellent schemes. *J. Amer. Math. Soc.*, 24, 2011.

[28] Y. Laurent. Polygone de Newton et b-fonctions pour les modules micro-différentiels. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 20, 1987.

[29] Y. Laurent. Geometric irregularity and $\mathcal{D}$-modules. In *Eléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, volume 8. Soc.Math. France, 2004.

[30] Y. Laurent and Z. Mebkhout. Pentes algébriques et pentes analytiques d'un $\mathcal{D}$-module. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 32, 1999.

[31] Y. Laurent and Z. Mebkhout. Image inverse d'un $\mathcal{D}$-module et polygone de Newton. *Comp. Math.*, 131, 2002.

[32] R.D. Mac Pherson. Chern classes for singular algebraic varieties. *Ann. of Math.*, 100-2, 1974.

[33] P. Maisonobe and Z. Mebkhout. Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents. In *Séminaire et Congrès*, volume 8. SMF, 2004.

[34] Ph. Maisonobe and T. Torrelli. Image inverse en théorie des $\mathcal{D}$-modules. In *Séminaire et Congrès*, volume 8. SMF, 2004.

[35] B. Malgrange. Rapport sur les théorèmes d'indice de Boutet de Monvel et Kashiwara. In *Analyse et topologie sur les espaces singuliers II-III*, volume 101-102 of *Astérisque*. Soc. Math. France, 1981.

[36] B. Malgrange. *Equations différentielles à coefficients polynomiaux*, volume 96 of *Progress in Math.* Birkhäuser, 1991.

[37] B. Malgrange. Connexions méromorphes 2 : le réseau canonique. *Inv. Math.*, 1996.

[38] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1986.

[39] Z. Mebkhout. Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les $\mathcal{D}_X$-modules. In *The Grothendieck Festschrift III*, volume 88. Birkhäuser, 1990.

[40] Z. Mebkhout. Le théorème de positivité, le théorème de comparaison et le théorème d'existence de Riemann. In *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques, Cours du C.I.M.P.A.*, volume 8 of *Séminaires et Congrès*. SMF, 2004.

[41] Z. Mebkhout and L. Narvaez-Macarro. Le Théorème de Constructibilité de Kashiwara. In *Images directes et constructibilité*, volume 46 of *Travaux en cours*. SMF, Hermann, 1993.

[42] Z. Mebkhout and C. Sabbah. *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents*, volume 35. Hermann, 1989.

[43] T. Mochizuki. On Deligne-Malgrange lattices, resolution of turning points and harmonic bundles. *Annales de l'institut Fourier*, 59, 2009.

[44] T. Mochizuki. *Wild Harmonic Bundles and Wild Pure Twistor $\mathcal{D}$-modules*, volume 340 of *Astérisque*. SMF, 2011.

[45] J.-P. Ramis. *Théorèmes d'indice Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, volume 48 of *Mem. Amer. Math. Soc.* 1984.

[46] C. Sabbah. *Equations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2*, volume 263 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, 2000.

[47] C. Sabbah. *Polarizable twistor $\mathcal{D}$-modules*, volume 300 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, 2005.

[48] C. Sabbah. *Introduction to Stokes Structures*, volume 2060 of *Lecture notes in Mathematics*. Springer, 2012.

[49] T. Saito. Wild ramification and the characteristic cycle of an ℓ-adic sheaf. *Journal de L'Institut Mathématique de Jussieu*, 8, 2009.

[50] T. Saito. Ramification of local fields with imperfect residue fields III. *Math. Ann.*, 352, 2012.

[51] J.-P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. de l'Inst. Fourier*, 6, 1956.

[52] M.T Singer and M. van der Put. *Galois Theory of Linear Differential Equations*, volume 328 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 2000.

[53] J.-L. Verdier. Classe d'homologie associée à un cycle. In *Séminaire de géométrie analytique*, volume 36-37 of *Astérisque*. SMF, 1976.