

Étude et application en micro-onde de l'hybridation de modes dans des systèmes localement résonants

Camille Marguerite Jouvaud

▶ **To cite this version:**

Camille Marguerite Jouvaud. Étude et application en micro-onde de l'hybridation de modes dans des systèmes localement résonants. Autre [cond-mat.other]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2013. Français. NNT : . pastel-00955269

HAL Id: pastel-00955269
https://pastel.hal.science/pastel-00955269

Submitted on 4 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)
SORBONNE PARIS CITE

Spécialité - Matière Condensée et Interfaces

Doctorat en

Physique des ondes

Présentée par

Camille JOUVAUD

Étude et application en micro-onde de l'hybridation de modes dans des systèmes localement résonants

Préparée à l'Institut Langevin - Ondes et Images

sous la direction de Julien de Rosny

Soutenue le 19 décembre 2013

devant le jury composé de :

M.	Abdeddaim	Redha	Membre invité
M.	Bonod	Nicolas	Examinateur
M.	Dauvignac	Jean-Yves	Rapporteur
M.	Decroze	Cyril	Examinateur
M.	Kuhl	Ulrich	Examinateur
M.	Ney	Michel	Examinateur
M.	Ourir	Abdelwaheb	Examinateur
M.	de Rosny	Julien	Directeur de thèse
Mme.	Vigneras	Valérie	Rapporteur

Remerciements

Ces remerciements clôturent mes travaux de thèse, financés par une bourse mixte DGA et CEA et effectués au laboratoire Institut Langevin de l'ESPCI. J'ai eu, au cours de cette thèse, le plaisir et la chance de rencontrer et d'interagir avec de nombreuses personnes, qui ont influencé d'une façon ou d'une autre mes travaux de recherche.

Je tiens en tout premier lieu à exprimer ma profonde gratitude à Julien de Rosny, mon directeur de thèse, pour m'avoir accueillie au laboratoire, pour sa présence quotidienne et son encadrement durant ces trois années. Julien est un directeur exceptionnel, doté de qualités scientifiques hors-pairs, qui laisse une grande liberté dans l'orientation des recherches tout en les recadrant lorsque la boussole ne donne plus vraiment le nord !

Un grand merci à Redha Abdeddaim, pour sa grande disponibilité, son enthousiasme et sa créativité scientifique. Autant de qualités qui nous ont notamment permis d'entreprendre et de mener à bien le projet en IRM. L'imagerie par résonance magnétique est un monde complexe auquel nous avons eu accès grâce à une très agréable collaboration avec Benoit Larrat que je remercie pour avoir accepté de travailler avec de vrais novices sur le sujet. Merci à Abdelwaheb Ourir qui a guidé le début de mes recherches et avec qui j'ai découvert les métamatériaux. Je remercie Fabrice Lemoult pour son aide et ses conseils de grande qualité et à Mathieu Davy pour son soutien et tous ses conseils pour l'après thèse. Je remercie également Abdelhak Souilah, grand mécanicien du laboratoire, pour ces modélisations impeccables lorsqu'on lui présente un fourmillement d'idées de maquettes pas toujours parfaitement ordonnées.

Merci à la direction de l'Institut Langevin d'œuvrer à faire du laboratoire un lieu aussi dynamique qu'enrichissant. J'adresse de chaleureux remerciements pour leur présence bienveillante à Patricia Deanens, Olivier Couture, Claire Prada, Arnaud Tourin et Sébastien Bidault avec qui j'ai pu partager de nombreuses discussions et débats quotidiens.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à l'ensemble du jury de cette thèse et notamment à madame Valérie Vigneras et monsieur Jean-Yves Dauvignac d'avoir accepté de rappor-

ter mes travaux de thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce manuscrit ainsi que pour leurs remarques qui ont permis d'en améliorer la qualité.

Un grand merci à l'ensemble des thésards et postdoctorants que j'ai côtoyés pendant ces trois années de thèse et grâce à qui le quotidien est si agréable. Merci Nico, pour ton accueil dès le premier jour de la thèse, pour ta compagnie et ton soutien durant ces trois années. Merci également Bruno pour les mêmes raisons, pour tes cours de trompette (en Ut !), et pour m'avoir rappelé 30 fois la cartographie du cerveau d'un rat.

Merci à mes collocs de bureaux : au LOA, avec Clément, Nico, Bastien, Youliana, Nicolas Etaix, puis après déménagement au bureau R31 : Nico encore, Emilie, Fabien, Anne, Chen, Yann, Baptiste, Amir, Sylvain, et enfin Marion, le dernier relai féminin dans le bureau, ne te laisse pas faire Marion ! Merci pour ce quotidien partagé avec vous, pour votre bonne humeur, votre curiosité, pour tous ces délicieux goûters et ces instants déco magnétiques.

Merci à la fine équipe de nanas, j'ai nommé : Ariadna, Daria, Emilie, Lorraine et Anne pour nos soirées électroswing, salsa, jeux de société, nos après-midi goûters, expérimentations et découvertes culinaires et pour vos élans sportifs (plus jamais de PPG !) ! !

Merci également à Clément Ement, Charlie, Florian Fish, François du chapeau, Léo, Nadège, Luis et Thomas, pour toutes les soirées, déjeuners d'affaires, apéros, week-end, pauses café, pauses pour rien, et merci à tous de m'avoir envoyé vos images scientifiques, esthétiquement sympathiques. (La quête n'est pas terminée !)

Un merci tout particulier à monsieur Bouissou, mon professeur de physique de première année de classe préparatoire. C'est dans sa salle de cours que m'est venu le goût de la physique. Il ne m'a plus jamais quitté.

Enfin hors du laboratoire, merci à mes colocataires, François, Pierre et Cloé, à mon groupe de musique funk, groove and jazz le 3615 BrassBand et à tous mes amis, du lycée, de la prépa, d'école, des éclés, de Paris et ceux de toujours. Enfin, parce que leur présence à mes côtés m'est essentielle, je remercie du fond du cœur mes proches, mes parents Sylvie et Dominique et mes deux sœurs Claire et Alice.

Ne prenez pas la vie au sérieux, de toute façon, vous n'en sortirez pas vivant.

Bernard Le Bovier de Fontenelle (1657-1757)

Résumé

Le développement de matériaux photoniques, et plus récemment des métamatériaux suscite aujourd'hui un véritable engouement, autant en acoustique qu'en électromagnétisme. Dans ce manuscrit, nous proposons une approche originale des milieux périodiques constitués de résonateurs sub-longueur d'ondes. Par une analyse électrodynamique de ces systèmes, nous mettons en évidence les phénomènes collectifs d'hybridation dus aux interactions électromagnétiques. Une modélisation fondée sur une approximation des résonateurs en dipôles électriques et magnétiques permet une étude analytique. D'une part, cette approche est complémentaire des modèles habituellement utilisés pour décrire l'ouverture de bandes interdites dans les milieux périodiques localement résonants. D'autre part, elle permet de quantifier les propriétés de rayonnement lorsque ces milieux sont de taille finie. Ces travaux sont appliqués à la conception d'une antenne miniature dont le diagramme de rayonnement est contrôlable en fréquence et en directivité. Un dispositif d'imagerie sub-longueur d'onde reposant sur le contrôle de modes propres localisés sur la structure a également été développé. Enfin, les propriétés d'hybridations de modes entre résonateurs demi longueur d'onde sont exploitées pour la conception d'une antenne dédiée à l'Imagerie par Résonance Magnétique. Cette antenne permet de générer et contrôler la distribution du champ magnétique radio-fréquence dans les zones à imager, ce qui s'avère être un défi majeur notamment face à la montée en champ magnétique des IRM.

Mots clés : Électromagnétisme, micro-onde, antenne, matériau photonique, métamatériau, interaction, couplage, hybridation, imagerie sub-longueur d'onde, IRM.

Abstract

Development of photonic media, and more recently of metamaterials has drawn a new interest in acoustic and electromagnetic wave control. In this thesis, we propose an original approach of periodic lattice built with sub-wavelength resonators. Using electrodynamics analysis, we highlight collective phenomena of hybridization due to electromagnetic interactions. A model based on an approximation of resonators as electric and magnetic dipoles allows an analytical study. This approach must, on the one hand, be complementary to exciting models used to describe band gap apparition in locally periodic medium ; and on the other hand, allow quantifying radiation properties of finite size media. This work has been applied to the design of a miniature antenna whose radiation pattern is controllable both in frequency and directivity. A sub-wavelength imaging device was also developed. It is based on the control of localized eigen-modes. Finally, hybridization properties of modes between half wavelength resonators are exploited to design an antenna dedicated to Magnetic Resonance Imaging. This antenna is used to generate and control the distribution of the radio-frequency magnetic field in the imaging volume which is a major challenge with the field rise of MRI.

Keyworlds : Electromagnetism, microwave, antenna, photonic media, metamaterial, interactions, coupling effects, hybridization sub-wavelength imaging, MRI.

Table des matières

Introduction **1**

I Ondes en milieux complexes **3**
I.1 Propagation des ondes électromagnétiques 4
I.1.1 Équations de Maxwell 4
I.1.1.1 Les équations de Maxwell 4
I.1.1.2 Les équations dérivées des équations de Maxwell 5
I.1.2 Équation d'onde et fonction de Green 6
I.1.2.1 Équation d'onde en présence de sources 6
I.1.2.2 Fonction de Green scalaire monochromatique en espace libre 6
I.1.2.3 Fonction de Green dyadic 7
I.1.3 Propagation et confinement des ondes 8
I.2 Milieux périodiques, globalement et localement résonants 9
I.2.1 Les milieux photoniques 9
I.2.2 Les métamatériaux 11
I.2.2.1 Les théories d'homogénéisation 13
I.2.2.2 Métamatériaux anisotropes 13
I.2.2.3 Métamatériaux ajustables 14
I.3 Limites de l'imagerie conventionnelle 15
I.3.1 Limite de résolution 15
I.3.2 Super focalisation 16
I.3.3 Microscopies champs proches et champs lointains 17
I.3.4 Super-résolution 18
I.4 Antennes et milieux finis localement résonants 20
I.4.1 Antennes et directivité 20
I.4.2 Antennes et surfaces haute impédance 21
I.4.3 Systèmes à compensation de phase 22
I.5 Conclusion 23

II Propagation d'onde et couplage dans des milieux localement résonants **25**
II.1 Interactions dans des milieux ordonnés de résonateurs sub-longueur d'onde 28
II.1.1 Mode propre de résonateurs 28
II.1.2 Milieu infini de résonateurs de type Split Ring Resonators 32
II.1.3 Levées de dégénérescence et hybridation de modes dans un réseau fini de résonateurs sub-longueur d'onde 33
II.2 Approche électrodynamique des interactions dans des réseaux de résonateurs 36

II.2.1 Impédance propre d'un résonateur unique . . . 36
II.2.2 Couplage entre résonateurs : expression de l'impédance mutuelle . 37
II.2.3 Approche matricielle des interactions dans un milieu de résonateurs sub-longueur d'onde . . . 38
II.2.4 Impédance et fonction de Green . . . 39
II.2.5 Approximation et interactions dipolaires . . . 41
II.3 Application du modèle dipolaire . . . 45
II.3.1 Relation de dispersion d'un réseau infini de résonateurs . . . 45
II.3.2 Modes propres d'un réseau fini de résonateur sub-longueur d'onde . 47
II.3.3 Vecteurs propres d'un réseau fini de résonateur sub-longueur d'onde 49
II.4 Bandes interdites et structures de bandes pour des systèmes infinis localement résonants . . . 51
II.4.1 Bandes interdites d'hybridation : existant et observation . . . 51
II.4.2 Structures de bandes pour des systèmes infinis continus . . . 56
II.4.2.1 Réseau nD dans un espace nD . . . 57
II.4.2.2 Réseau (n-1)D dans un espace nD . . . 59
II.4.2.3 Réseau 1D dans un espace 3D . . . 59
II.4.3 Structure de bandes pour des réseaux infinis discontinus de résonateurs sub-longueur d'onde . . . 60
II.4.3.1 Réseaux de dimension nD dans un espace de dimension nD 60
II.4.3.2 Réseaux de dimension (n-1)D dans un espace de dimension nD . . . 61
II.4.3.3 Discussion . . . 61
II.5 Conclusion . . . 62

III Rayonnement de milieux localement résonants 63
III.1 Rayonnements complexes de milieux finis de résonateurs . . . 64
III.1.1 Facteur de qualité du rayonnement d'un faible nombre de cellules résonnantes . . . 65
III.1.2 Diagrammes de rayonnement de structures composées d'un faible nombre de résonateurs . . . 69
III.1.2.1 Rayonnement de résonateurs uniques . . . 69
III.1.2.2 Rayonnements asymétriques de résonateurs hybridés . . . 70
III.1.2.3 Influence des symétries . . . 75
III.1.3 Discussion sur le champ proche, le champ lointain . . . 76
III.2 Localisation de modes . . . 78
III.2.1 Orthogonalité de familles de vecteurs propres . . . 79
III.2.2 Algorithme ESPRIT . . . 80
III.2.3 Algorithme de Matching pursuit . . . 83
III.3 Conclusion . . . 86

IV Imagerie super-résolue et antennes miniatures 89
IV.1 Rayonnement de modes propres, application à une antenne beamforming . 91

IV.1.1 Rayonnement de modes propres d'une structure finie de résonateurs sub-longueur d'onde . . . 91
IV.1.2 Résonateur à fréquence fondamentale ajustable . . . 94
IV.1.3 Réseau de résonateurs ajustables . . . 96
IV.1.4 Amélioration de l'antenne à balayage spatial et fréquentiel . . . 97
IV.2 Imagerie sub-longueur d'onde par modes localisés . . . 97
IV.2.1 Contrôle de modes . . . 98
IV.2.2 Champ lointain de modes localisés . . . 100
IV.2.3 Réalisation expérimentale . . . 101
IV.2.4 Transposition en optique. . . . 103
IV.3 Conclusion . . . 105

V Hybridation de modes pour l'Imagerie à Résonance Magnétique 107
V.1 L'imagerie par Résonance Magnétique . . . 109
V.1.1 La Résonance Magnétique Nucléaire . . . 109
V.1.1.1 Historique . . . 109
V.1.1.2 Le Moment Magnétique Nucléaire . . . 110
V.1.1.3 Frequence de Larmor . . . 110
V.1.1.4 Mesure du signal RMN . . . 111
V.1.2 Imagerie par Résonance Magnétique . . . 112
V.1.2.1 Développement et Fonctionnement . . . 112
V.1.2.2 Les enjeux en IRM . . . 115
V.1.3 État de l'art sur les antennes radio-fréquence . . . 116
V.2 L'hybridation de modes . . . 118
V.2.1 Hybridation de modes entre résonateurs électromagnétiques . . . 118
V.2.2 Excitation de modes hybrides . . . 120
V.2.2.1 Discussion sur l'adaptation d'impédance . . . 122
V.3 Application de l'hybridation de modes à une antenne RF en IRM . . . 123
V.3.1 Application en imagerie 7 Tesla pour petit animal . . . 124
V.3.1.1 Validation du concept sur un gel . . . 124
V.3.1.2 Validation sur un cas réel : imagerie du cerveau d'un rat . 126
V.3.1.3 Influence de la fréquence fondamentale des résonateurs . . 126
V.3.2 Application en imagerie 3 Tesla pour humain . . . 128
V.3.3 Application en imagerie 7 Tesla pour humain . . . 129
V.4 Perspectives . . . 132
V.4.1 Géométries des sources et des résonateurs . . . 132
V.4.2 Système d'adaptation et contrôle des modes . . . 135
V.4.3 Imagerie de différents atomes . . . 135
V.5 Conclusion . . . 136

Conclusion générale et Perspectives 137

Introduction

En physique des solides, les propriétés de la matière cristalline proviennent de la périodicité des arrangements atomiques. Dans ces milieux, les électrons présentent une structure de bande qui explique leurs caractères isolant, semi-conducteur ou encore conducteur. Les travaux sur les structures de bandes ont été étendus au domaine de l'optique avec l'apparition des cristaux photoniques. Ces structures périodiques constituées de matériaux diélectriques sont pour les photons ce que sont les cristaux pour les électrons.

Aujourd'hui ce domaine s'est encore élargi avec l'étude de matériaux périodiques localement résonants aussi bien en acoustique, en optique qu'en micro-ondes. Contrairement aux cristaux photoniques, les motifs élémentaires de ces derniers sont résonants. Grâce à cette propriété, les ondes qui s'y propagent présentent des comportements tout à fait originaux. Que ce soit pour le guidage, la transmission de données ou encore l'imagerie, les milieux localement résonants apportent des solutions nouvelles pour opérer un contrôle sur les ondes.

Dans les milieux localement résonants, lorsque la longueur d'onde est grande devant la périodicité, une onde se propage comme dans un milieu effectif. Le milieu est alors considéré comme un "métamatériau". Reposant sur ce principe, des propriétés et des applications originales ont été prédites pour de tels milieux, telles que la réfraction négative, les hyper-lentilles, les capes d'invisibilités... Dans ces milieux, le couplage électromagnétique entre les "atomes" est en général négligé. Il peut pourtant avoir un impact important sur la propagation. L'étude et la prise en compte quantitative des phénomènes de couplage entre résonateurs identiques, appelés hybridation de modes, est l'objet de ce manuscrit. En particulier, nous nous concentrons sur des assemblages mésoscopiques d'un faible nombre de résonateurs. A partir des résultats obtenus, nous proposons des applications en imagerie et pour la conception d'antennes miniatures.

Dans le premier chapitre, après avoir introduit certaines propriétés de la propagation des ondes électromagnétiques, nous présentons les principaux résultats obtenus dans le domaine des milieux localement résonants. Nous discutons en particulier des applications utilisant ces matériaux comme par exemples des lentilles. Nous montrons que le dénominateur commun des différentes techniques développées en focalisation et en imagerie sub-longueur d'onde est d'effectuer une conversion des vecteurs d'onde en utilisant des mi-

lieux présentant une structuration sub-longueur d'onde. Réciproquement, ces matériaux peuvent être utilisés pour rayonner efficacement de l'énergie. Une revue des principales applications à la réalisation d'antennes est présentée.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons avec une approche électrodynamique, les phénomènes d'hybridation qui surviennent entre les résonateurs de ces milieux. L'expression d'une matrice de couplage entre les résonateurs, liée à la fonction de Green ainsi que l'expression du mode propre fondamental des résonateurs permet de mettre en place une relation matricielle régissant le système. Une approximation en dipôles électriques et magnétiques des résonateurs permet d'obtenir une expression analytique de cette relation. Les fonctions propres de la structure sont extraites et le comportement discret de milieux de taille finie décrypté. Pour des milieux de taille infinie, le diagramme de bande est tracé, mettant en évidence des phénomènes d'anisotropie et de couplage. Enfin, le modèle dipolaire développé est étendu de façon à extraire les relations de dispersion de milieux infinis de résonateurs. Notamment, une discussion sera menée sur la présence de bandes interdites dans les relations de dispersion.

Ces travaux sont exploités dans le troisième chapitre pour étudier le rayonnement de structures finies composées de résonateurs sub-longueur d'onde. Avec une structure continue, les hautes fréquences spatiales du champ (liées aux détails les plus fins d'une structure) ne se propagent pas en champ lointain : ce sont des composantes évanescentes. Il est analytiquement montré ici que les milieux localement résonants permettent de convertir des ondes évanescentes en ondes propagatives. Les détails sub-longueur d'onde de la structure peuvent ainsi être mesurés en champ lointain. Une analyse du rayonnement en fonction des caractéristiques de la structure est menée. Dans le but de caractériser les modes propres d'une structure à partir de mesures en champ proche et en champ lointain, des algorithmes non linéaires d'identification sont employés.

Dans le quatrième chapitre, nous abordons les milieux localement résonants d'une manière originale qui consiste à travailler sur la structuration d'un milieu de façon à contrôler ses modes propres. Une antenne miniature au diagramme de rayonnement ajustable à la fois en fréquence et en directivité est conçue. Celle-ci s'inscrit dans le cadre des recherches liées au déploiement de nombreux types de réseaux de communication sans fil. Un dispositif d'imagerie sub-longueur d'onde en champ lointain est également réalisé. Celui-ci est conçu grâce à un réseau hétérogène qui présente des modes propres localisés spatialement et fréquentiellement. Une relation directe entre le spectre fréquentiel mesuré en champ lointain et la position des cellules résonantes est opérée. Ce dispositif permet ainsi d'imager en champ lointain des sources complexes sub-longueur d'onde placées en champ proche du réseau.

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, nous concevons et expérimentons une antenne radio-fréquence destinée à des applications d'Imagerie par Résonance Magnétique. Celle-ci repose sur l'hybridation de modes dans une structure constituée d'un faible nombre de résonateurs. L'objectif principal de cette antenne est de pallier aux problèmes d'homogénéités des champs magnétiques dans les IRM à forts champs tout en apportant une flexibilité mécanique sur la forme de l'antenne et une flexibilité sur les fréquences de fonctionnement.

CHAPITRE I

Ondes en milieux complexes

Table des matières

I.1 Propagation des ondes électromagnétiques **4**
I.1.1 Équations de Maxwell 4
I.1.2 Équation d'onde et fonction de Green 6
I.1.3 Propagation et confinement des ondes 8
I.2 Milieux périodiques, globalement et localement résonants **9**
I.2.1 Les milieux photoniques 9
I.2.2 Les métamatériaux 11
I.3 Limites de l'imagerie conventionnelle **15**
I.3.1 Limite de résolution 15
I.3.2 Super focalisation 16
I.3.3 Microscopies champs proches et champs lointains 17
I.3.4 Super-résolution 18
I.4 Antennes et milieux finis localement résonants **20**
I.4.1 Antennes et directivité 20
I.4.2 Antennes et surfaces haute impédance 21
I.4.3 Systèmes à compensation de phase 22
I.5 Conclusion **23**

L'histoire des progrès dans la compréhension des phénomènes ondulatoires permet de faire un grand voyage dans le temps. Du début du XVI^e siècle avec l'apparition de l'optique géométrique jusqu'au XXI^e siècle avec le développement de l'optique atomique, les connaissances n'ont cessé de croitre. De nombreuses applications ont vu le jour dans le domaine des communications, dans le domaine militaire, en médecine et en astronomie.

Les progrès les plus récents concernent l'étude de phénomènes qui trouvent leurs origines dans les interférences des ondes multiplement diffusées dans des milieux désordonnés ou ordonnés. Dans ce domaine, la photonique, la phononique et les métamatériaux constituent des axes majeurs de recherche. Ces milieux complexes permettent d'élaborer de nouvelles techniques de focalisation, d'imagerie, de détection. Par exemple, des dispositifs mettant en œuvre les conversions d'ondes évanescentes en ondes propagatives pour aller au-delà de la limite de diffraction ont été développés. La complexité de ces milieux a entrainé le développement de nombreuses approches et méthodes de calculs permettant d'approximer et d'expliquer au mieux les résultats obtenus expérimentalement.

Ce chapitre est consacré aux concepts fondamentaux qui permettent d'étudier ces milieux complexes. Après un rappel sur la propagation d'ondes en milieu homogène, un état de l'art sur les milieux périodiques résonants est mené. Les principaux travaux antérieurs sur les milieux complexes en rapport avec ce manuscrit sont exposés. Les limites de l'imagerie classique sub-longueur d'onde sont abordées. En particulier, nous nous attarderons sur des techniques d'imagerie qui ont permis d'aller au-delà de la limite de diffraction. Pour clore ce chapitre, quelques applications employant des milieux localement résonants dans le domaine des antennes sont exposées.

I.1 Propagation des ondes électromagnétiques

I.1.1 Équations de Maxwell

L'électromagnétisme a pour but d'étudier les interactions entre les particules chargées en mouvement. Le champ électromagnétique est aux charges ce que le champ gravitationnel est aux masses. La présence d'une charge induit un champ électrique. Si la charge est en mouvement, elle induit en plus un champ magnétique. Le champ électromagnétique n'est pas mesuré directement : c'est par ses effets qu'on le détecte, par exemple par les forces électromagnétiques qu'il induit.

I.1.1.1 Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont les équations fondamentales qui régissent l'interaction entre les champs, les charges et les courants. Elles sont la synthèse de différentes lois

découvertes antérieurement : la loi de Gauss($\sim$ 1840), la loi de Faraday ($\sim$ 1834), le théorème d'Ampère ($\sim$ 1825). Maxwell a su harmoniser ces lois et obtenir un système complet avec l'introduction des courants de déplacement. Ces lois relient le champ électrique $\vec{E}$, l'induction électrique $\vec{D}$, le champ magnétique $\vec{H}$ et l'induction magnétique $\vec{B}$. Dans un milieu homogène, isotrope et linéaire, les équations de Maxwell macroscopiques s'écrivent :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{I.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{I.2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{I.3}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \tag{I.4}$$

où $\vec{J}$ est la densité de courant électrique et ρ la densité de charges électriques. Le champ magnétique est lié à l'induction magnétique par la perméabilité et l'aimantation : $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} - \vec{M}$. Le champ électrique est lié à l'induction électrique par la permittivité et la polarisation : $\vec{D} = \epsilon\vec{E} + \vec{P}$.

La première équation relie le champ électrique aux sources du milieu considéré. Elle exprime que le flux du champ électrique à travers toute surface fermée est égal à la somme des charges dans la surface sur ϵ_0 (loi de Gauss). La deuxième équation est l'équation du flux magnétique : celui-ci, à travers toute surface fermée est nul. C'est une propriété intrinsèque de $\vec{B}$ qui montre qu'il n'existe pas de monopole magnétique. La troisième équation décrit les phénomènes d'induction et montre comment la variation d'un champ magnétique entraine la création d'un champ électrique (loi de Faraday). La dernière équation relie le champ magnétique à ces sources et au champ électrique. Elle montre qu'un champ électrique variable ou qu'une charge en mouvement est source de champ magnétique (loi d'Ampère).

I.1.1.2 Les équations dérivées des équations de Maxwell

Dans les milieux homogènes isotropes, le rotationnel des équations de Maxwell (I.3) et (I.4) permet d'obtenir les équations de propagation (appelées équations de d'Alembert) vérifiées par le champ magnétique et le champ électrique. Tous deux vérifient la relation (donnée ici pour le champ électrique) :

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0, \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{I.5}$$

Cette équation différentielle linéaire met en évidence le fait que l'espace et le temps pour une onde sont intimement liés. Une variation dans l'espace entraine une modification dans le temps du champ. C'est par ce phénomène de couplage que l'onde se propage. Grâce à l'invariance temporelle et à l'invariance spatiale, indépendantes l'une de l'autre, nous allons chercher des solutions de cette équation dans le domaine de Fourier. On peut

effectuer deux transformées de Fourier : l'une sur la variable temporelle et l'autre sur la variable spatiale. Dans l'espace des $\omega - k$, l'équation d'Alembert prend la forme :

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\Psi(\mathbf{k}, \omega) = 0. \tag{I.6}$$

On peut ainsi écrire une solution élémentaire de l'opérateur d'Alembert dans l'espace des $\omega - k$ sous la forme d'une onde plane :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{j(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{I.7}$$

à la condition que $|k|^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$. Nous utilisons ici la notation complexe. Le champ réel est déduit en prenant la partie réelle de son expression complexe : $\Psi_{Réel}(\mathbf{r}, t) = \Re(\Psi(\mathbf{r}, t))$.

Le nombre d'onde k est directement lié à la longueur d'onde par la relation $k = 2\pi/\lambda$. La direction du vecteur d'onde $\vec{k}$ indique la direction de propagation de l'onde. Dans un milieu homogène isotrope, $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$ forment un trièdre direct.

Par soucis de simplicité, dans la suite, nous considérerons le champ Ψ pour désigner aussi bien un champ scalaire ou un champ vectoriel (par exemple $\vec{E}$ ou $\vec{B}$).

I.1.2 Équation d'onde et fonction de Green

I.1.2.1 Équation d'onde en présence de sources

En présence d'une distribution de sources f, il apparait un terme à droite de l'équation d'Alembert :

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t). \tag{I.8}$$

Pour résoudre cette équation, il est courant d'utiliser le formalisme de Green qui permet décrire l'équation (I.8) sous forme intégrale. A cette fin, nous introduisons la fonction de Green qui est solution de l'équation d'onde pour une source ponctuelle :

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r'}, t, t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r'}, t, t')}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r'})\delta(t - t'). \tag{I.9}$$

Ainsi $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ est le champ mesuré au point $\mathbf{r}$ et au temps t pour une source ponctuelle en $\mathbf{r}'$ qui émet un dirac au temps t'. Le champ Ψ est alors donné par :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')f(\mathbf{r}', t')d\mathbf{r}'dt'. \tag{I.10}$$

L'équation à résoudre est donc une équation du type $\pounds G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. La fonction de Green est le noyau de l'opérateur $\pounds^{-1}$.

I.1.2.2 Fonction de Green scalaire monochromatique en espace libre

En espace libre, la résolution de l'équation en scalaire (I.8) permet d'obtenir la forme des fonctions de Green pour des milieux de dimension 1D, 2D et 3D. En régime harmo-

nique,et dans l'espace réel ces fonctions s'écrivent :

Espace 1D $: G(x) = \frac{1}{2jk} e^{-jk|x|}$

Espace 2D $: G(\rho) = \frac{1}{4j} \left[J_0(k|\rho|) - jN_0(k|\rho|) \right]$
G est ici exprimé à l'aide de la fonction de Bessel et de la fonction de Neumann de premier ordre. La forme asymptotique de ces fonctions donne :
$G(\rho) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k|\rho|}} e^{-j(k|\rho| - \frac{\pi}{4})}$

Espace 3D $: G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|}$

Les expressions de la fonction de Green scalaire ont donc été obtenues pour différentes dimensions de l'espace dans lesquels sont considérés les champs. Nous verrons dans la suite du manuscrit que la dimension de l'espace dans lequel est considéré un objet modifie fortement la propagation des ondes qui s'y propagent. Pour cela nous utiliserons les différentes expressions de la fonction de Green précédemment calculées. La fonction de Green considérée jusqu'à présent était scalaire. Qu'en est-il lorsque l'on considère la polarisation des sources et des champs ?

I.1.2.3 Fonction de Green dyadic

Si on considère à présent l'équation dans laquelle sont prises en compte toutes les composantes du champ électrique et du champ magnétique, on doit travailler avec la fonction de Green dyadic. Celle-ci est un tenseur de dimension 6. L'élément (G_{ij}) de ce tenseur correspond au champ sur la composante "j" du à la composante de la source sur "i". Le terme de source est donc un vecteur de dimension 6 tel que :

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}, \quad \Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \tag{I.11}$$

L'expression de la fonction de Green Dyadic en fonction du vecteur champ Ψ est alors :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \overline{\overline{\mathbf{G}}}(r - r_0, t - t_0) \mathbf{S}(r_0, t_0) dt_0 dr_0. \tag{I.12}$$

L'équation d'onde peut être réécrite :

$$\Delta \overline{\overline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r'}, t, t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overline{\overline{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r'}, t, t')}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r'}) \delta(t - t') \mathbf{I}, \tag{I.13}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice unité de dimension 6.

L'expression de la fonction de Green dyadic est directement extraite des deux expressions des champs :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0}(jk+\frac{1}{r})\left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})-\mathbf{p}}{r}\right]\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \\ &+ \frac{k^2}{\epsilon_0}\mathbf{r}\times(\mathbf{p}\times\mathbf{r})\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} + j\omega\mu_0(jk+\frac{1}{r})(\mathbf{r}\ \times\mathbf{m})\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= (jk+\frac{1}{r})\left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{m})-\mathbf{m}}{r}\right]\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \\ &+ k^2\mathbf{r}\times(\mathbf{m}\times\mathbf{r})\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} + j\omega(jk+\frac{1}{r})(\mathbf{p}\ \times\mathbf{r})\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\end{aligned} \tag{I.14}$$

Ces équations sont les expressions des champs émis par un dipôle électrique et un dipôle magnétique. $\mathbf{p}$ est le moment électrique et $\mathbf{m}$ le moment magnétique.

En général, dans la suite du manuscrit, lorsque l'on fera appel à la fonction de Green, nous utiliserons la fonction de Green Dyadic, car elle prend en compte toutes les polarisations à la fois des sources et des champs.

I.1.3 Propagation et confinement des ondes

Les propriétés des ondes issues d'une source diffèrent selon la distance à laquelle elles sont observées/mesurées. L'espace autour d'une source ou d'un diffuseur est couramment considéré en zones distinctes : un champ proche, un champ intermédiaire et un champ lointain. Nous nous intéressons tout particulièrement à deux zones, celle de champ proche et celle de champ lointain.

Le champ proche est la zone de champ réactif . Dans cette zone, on ne peut pas faire d'approximation en ondes planes. Les phénomènes de propagation y sont négligeables devant les phénomènes quasi-statiques. En ce qui concerne les antennes de type monopôle ou dipôle, la zone de champ proche est observée à une distance inférieure à $\lambda/2\pi$. Dans l'expression de champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ émis pour des dipôles magnétiques et électriques, les termes en $1/r^3$ sont en général considérés comme les termes de champ proche.

La zone de champ lointain est la zone où les ondes peuvent être considérées comme planes. Elle est définie pour des distances supérieures à $2D^2/\lambda$ où D est la plus grande dimension de la source étudiée. Les termes en $1/r$ rendent compte du champ lointain.

En réalité, la distinction entre ces deux zones est réalisée en regardant s'il l'on doit y considérer les ondes évanescentes ou pas. Une condition de la propagation d'une onde peut directement être extraite de l'équation de d'Alembert. Pour cela, il faut que $k^2-(w^2/c^2)>0$. Toute onde dont le vecteur d'onde est supérieur à $k_0=\omega/c$ est donc évanescente alors qu'une onde telle que $k<k_0$ se propage en champ lointain. Ainsi, lorsque qu'une onde rencontre un objet, cet objet diffracte une onde dont le spectre couvre potentiellement tout l'espace de Fourier. Toute l'information sur les détails sub-longueur d'onde de l'objet est portée par les ondes dont le vecteur d'onde est supérieur à k_0. Elle n'est donc pas propagée en champ lointain. La propagation est un filtre passe-bas de fréquences spatiales.

Cette contrainte spatiale constitue un enjeu majeur dans le domaine des ondes en milieux complexes. Pour aller chercher l'information sub-longueur d'onde, de nombreuses approches ont été développées. Nous en verrons les méthodes et quelques applications dans les deux parties suivantes. De plus, nous verrons qu'il est souvent question de savoir s'il est nécessaire de prendre en compte tous les champs ou s'il est intéressant de se limiter à certain d'entre eux.

Dans la partie suivante, un domaine d'étude assez récent est présenté. Il porte sur l'étude de matériaux périodiquement agencés, dont les propriétés permettent de contrôler les ondes qui s'y propagent.

I.2 Milieux périodiques, globalement et localement résonants

La maitrise des matériaux est la base de toute nouvelle technologie. Un objectif dans le domaine des ondes est de parfaitement contrôler les propriétés optiques des matériaux. Il est notamment intéressant technologiquement de savoir développer des matériaux artificiels qui par exemple répondent à une illumination dans une bande de fréquence déterminée en la réfléchissant entièrement ou en autorisant une propagation dans une direction donnée ou encore en la confinant dans un volume spécifique. Les retombées potentielles dans ces domaines sont donc très nombreuses. Ordonner les milieux pour mieux y contrôler les ondes, comprendre leurs comportements périodiques, analyser les phénomènes d'interactions et de résonances au sein de ces milieux sont autant d'apports des milieux périodiques résonants. Dans les domaines des milieux ordonnés, les milieux photoniques sont les plus connus. Ils sont particulièrement développés pour obtenir de nouvelles fonctionnalités en optique. Liés aux matériaux photoniques par leurs arrangements périodiques de cellules, les métamatériaux ont originalement été pensés pour concevoir des matériaux dont l'indice de réfraction est négatif. L'engouement pour ces recherches a ouvert l'éventail d'applications issues des métamatériaux. Les recherches sont aujourd'hui orientées autant en chimie et en télécommunication qu'en imagerie. Un troisième domaine de recherche, plus vaste encore, est celui des matériaux localement résonants qui ont pour la plupart la caractéristique d'être de taille finie et/ou inhomogène.

Contrairement aux études présentées dans la première partie, les milieux étudiés à présent ne sont plus homogènes isotropes. Les méthodes permettant d'expliquer la propagation des ondes dans ces milieux se sont multipliées, notamment pour prendre en compte les phénomènes sub-longeurs d'onde qui surviennent.

I.2.1 Les milieux photoniques

Introduits en 1887 par Rayleigh, les cristaux photoniques sont un équivalent des cristaux atomiques, ces derniers étant des arrangements périodiques d'atomes ou molécules. Ces cristaux classiques présentent un potentiel périodique dans lequel se propagent les électrons. Les électrons dans ces milieux se comportent comme une onde. Pour certains niveaux d'énergie, la propagation est interdite. Lorsque la propagation des électrons est

interdite dans toutes les directions de l'espace, on parle de bandes interdites complètes. A la fois les éléments et la géométrie du réseau déterminent leurs propriétés.

Dans les milieux photoniques, les "atomes" sont des éléments macroscopiques. Ils présentent un indice périodique. Ces milieux se comportent pour les photons comme un cristal se comporte pour les électrons. Ils peuvent être conçus pour contrôler la propagation des photons, prévoir des bandes interdites ou encore des comportement inusuels tels que des modes localisés. Un enjeu majeur est de réaliser des guides d'onde et des cavités sans parois qui présentent des facteurs de qualité élevés tels que dans le domaine des micro-ondes.

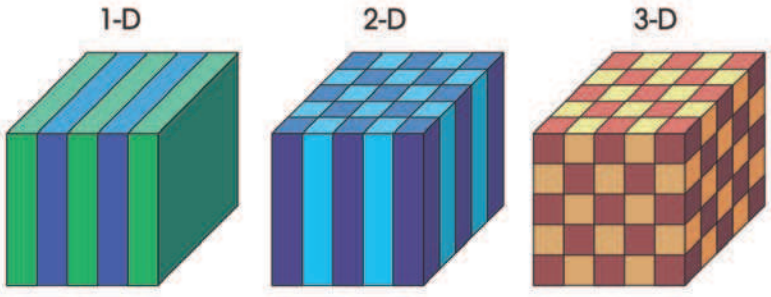
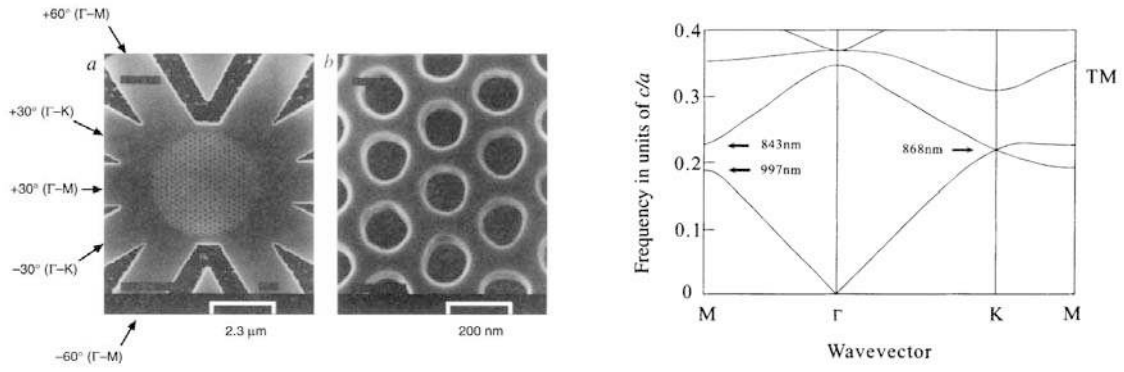


Figure I.1 – Exemple de cristaux photoniques 1D, 2D et 3D. Les différentes couleurs présentent des diélectriques de permittivités différentes.

Les premières réalisations de cristaux photoniques ont eu lieu dans le domaine des micro-ondes [1], les chercheurs se heurtant à des difficultés technologiques pour des fréquences plus élevées. La première démonstration d'un cristal photonique 2D en optique fut réalisée en 1996 avec des semi-conducteurs [2] (cf. figure I.2). Les versions tridimensionnelles des cristaux sont en plein essor avec le développement du multicouche et de l'auto-assemblage.



(a) (b)

Figure I.2 – (a) Configuration en étoile pour contrôler les propriétés de transmission d'un réseau photonique 2D. Le réseau est détaillé sur l'image de droite. Le diamètre des trous est de 105μm. (b) Calcul de la structure de bande pour une version infinie du réseau photonique présenté en (a). Images issues de [2].

L'étude des réseaux photoniques se fait à l'aide des théories de bandes interdites et de diagrammes de dispersion. Le théorème de Floquet-Bloch qui permet de calculer les solutions de l'équation de Schrödinger pour un potentiel périodique donné a été étendu

aux équations de Maxwell pour les cristaux photoniques. Il donne notamment les fonctions propres du milieu qui sont du type :

$$\Phi(x) = e^{ikx}.u_{\vec{k}}(x) \tag{I.15}$$

avec $u_{\vec{k}}(x)$ une fonction périodique de périodicité égale au pas du réseau. Il est usuel de travailler dans l'espace réciproque, c'est à dire dans l'espace des vecteurs d'onde k. Les vecteurs d'onde, du fait de la périodicité du milieu, sont tracés dans la première zone de Brillouin qui définit la maille primitive de l'espace réciproque.

Dans les milieux photoniques, les effets de résonance qui bloquent ou modifient les trajectoires des photons sont dus à des effets d'interférences globales sur le réseau. On est dans un régime de Bragg. La longueur d'onde est de l'ordre de la périodicité du cristal. Ce sont donc principalement les dimensions du maillage, la périodicité qui influent sur la fréquence des résonances. Dans certaines configurations, les cristaux photoniques peuvent se comporter comme des matériaux présentant un indice de réfraction inférieur à celui du vide voir négatif [3, 4]. Ils sont alors sur ce point analogues à des métamatériaux.

I.2.2 Les métamatériaux

Les métamatériaux sont des matériaux artificiels dont les propriétés physiques sont déterminées par l'assemblage de cellules élémentaires sub-longueur d'ondes. La longueur d'onde de travail étant bien supérieure à la distance inter-cellules et à la dimension de ces cellules, des théories d'homogénéisation prévoient que l'onde se comporte comme si elle était dans un milieu homogène dont les propriétés physiques sont celles des cellules élémentaires (cf. fig I.3).

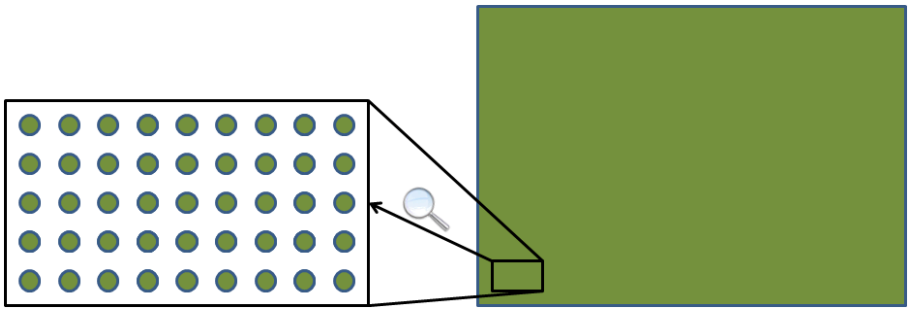


Figure I.3 – Ensemble de résonateurs sub-longueur d'onde homogénéisé en un milieu avec des paramètres effectifs.

L'idée des métamatériaux a débuté avec la publication de Victor Velesago "The electrodynamics of substance with simultaneously negative value of ϵ et μ" en 1968 qui envisage et étudie théoriquement pour la première fois un matériau dont l'indice est négatif, donc un matériau dont à la fois la permittivité et la perméabilité sont négatives. Les caractéristiques d'un tel matériau sont très diverses. Il présente par exemple les propriétés d'amplifier les ondes évanescentes, d'inverser l'effet doppler, de présenter une vitesse de groupe et une vitesse de phase de signes contraires. Les applications de tels milieux sont nombreuses dans des domaines très divers tels qu'en électronique, en télécommunication,

en instrumentation médicale et en stockage de données. Deux applications ont particulièrement éveillé les esprits : les lentilles parfaites qui utilisent l'amplification d'ondes évanescentes (cf. fig I.4) et la cape d'invisibilité qui nécessite des métamatériaux à gradient d'indice pour réaliser des transformations "optiques" de l'espace.

En 1996, John Pendry démontre théoriquement qu'en "diluant" le métal, c'est à dire en utilisant un réseau de tige, il est possible de diminuer la fréquence plasma du matériau et d'obtenir ainsi un milieu avec une permittivité négative [5]. Dans le milieu, la permittivité est donnée par :

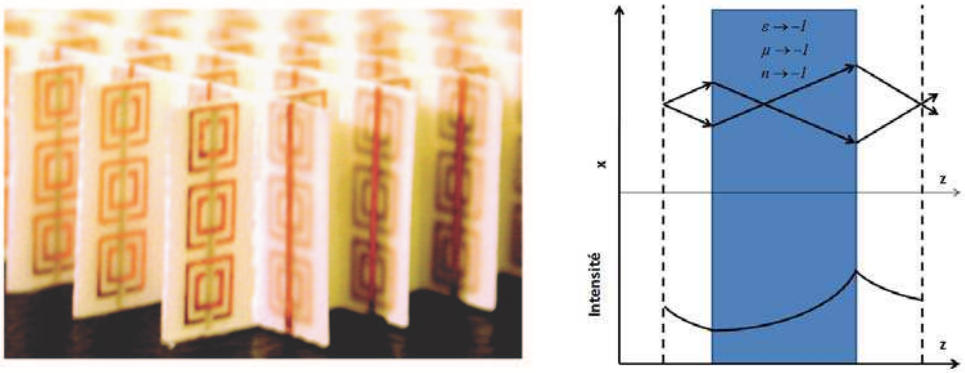
$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad avec \quad \omega_p^2 = \frac{n_{eq}e^2}{\epsilon_0 m_{eff}} \tag{I.16}$$

où ω_p est la fréquence plasma du métal. Or la densité équivalente d'électron est donnée par $n_{eq} = n\pi r^2/a$ et la masse effective des électrons, qui est modifiée par le couplage entre les fils est égale à $m_{eff} = 1/2\mu_0 r^2 e^2 n \ln(a/r)$ où a est la distance inter fils et r le rayon des fils. De cette façon, l'expression de la fréquence plasma devient :

$$\omega_p^2 = \frac{2\pi c^2}{a^2 \ln(a/r)}. \tag{I.17}$$

Il démontre également qu'il est possible d'obtenir du magnétisme artificiel en utilisant un motif métallique, le Split Ring Resonator (SRR) qui est un simple anneau fendu [6]. Cet anneau présente une résonance de type "magnétique" et la cellule répond donc à une sollicitation magnétique. Grâce à l'introduction de la fente sur l'anneau, la perméabilité est négative entre la fréquence de résonance du motif et la fréquence plasma "magnétique" du matériau. Pour montrer son résultat, Pendry utilise un modèle de type électrons élastiquement liés.

L'unification du réseau de tige et du réseau de SRR lui permet de démontrer la possi-



(a) (b)

Figure I.4 – (a) Milieu présentant théoriquement un indice négatif réalisé par Smith *et al* [7]. (b) Schéma d'une lentille "parfaite" imaginée par Pendry. Pour une direction d'incidence i à partir d'une source ponctuelle S, la direction de réfraction est – i de sorte que phase et groupe d'onde ont des vitesses opposées dans le matériau d'indice négatif.

bilité de concevoir un matériau d'indice négatif tel que l'avait envisagé Velesago [8]. Ce matériau présenté figure I.4 a été réalisé expérimentalement par Smith *et al.* en 2000 [7].

Alors que dans le domaine des micro-ondes, les résonateurs métalliques sont particulièrement bien adaptés, dans le domaine optique les pertes avec de tels résonateurs sont particulièrement élevées. Une solution alternative est d'utiliser des résonateurs diélectriques et d'utiliser tout particulièrement leur résonance de Mie [9]. La dimension de ces résonateurs conditionne la fréquence de résonance de ces cellules et il est possible de juxtaposer fréquentiellement leur résonance électrique et leur résonance magnétique. De nombreux travaux ont lieu sur cet axe de recherche [10–12].

I.2.2.1 Les théories d'homogénéisation

Les métamatériaux présentent des caractéristiques physiques qui diffèrent fortement de celles des matériaux classiques. Leurs paramètres, qui sont effectifs, reposent entièrement sur des critères d'homogénéisation. Une question qui se pose est celle de l'existence et l'unicité de solutions d'onde en présence de métamatériaux notamment lors d'une interface entre un milieu d'indice positif et un milieu d'indice négatif. La question se pose également pour les métamatériaux hétérogènes. Différentes techniques d'homogénéisation sont considérées. Une première technique par ondes de Bloch considère un milieu infini en faisant tendre la période du réseau vers 0 [13]. Les techniques de moyenne des champs au sein de cellules composant le milieu sont également très utilisées [14, 15]. Les paramètres effectifs du milieu sont alors obtenus en sommant les réponses collectives des cellules du réseau. Une troisième technique courante est celle de l'homogénéisation par convergence à double échelle qui consiste à "capturer" les oscillations du réseau périodique lorsque la période tend vers 0. Elle a l'avantage d'effectuer une homogénéisation locale ce qui permet de considérer des milieux périodiques finis [16, 17].

Les théories d'homogénéisation reposent sur des hypothèses comme de faibles interactions entre cellules et la petite taille des cellules élémentaires, qui les rendent difficiles à mettre en œuvre. En micro-onde, les dimensions totales du réseau dépassent rarement 10 longueurs d'onde. Nous verrons dans la suite du manuscrit que dans de telles dimensions, des effets de bords et de couplage interviennent et que le principe d'homogénéisation n'est plus toujours applicable.

I.2.2.2 Métamatériaux anisotropes

L'anisotropie pour un matériau consiste à se comporter différemment selon la direction de la propagation d'onde. Il a été montré que la plupart des métamateriaux présentent une forte anisotropie. Elle est en général directement issue de la géométrie des résonateurs utilisés, ceux-ci ne respectant pas par exemple certaines symétries de rotation. Ces matériaux anisotropes ont des propriétés particulièrement intéressantes pour les applications de guidage des ondes électromagnétiques. La difficulté est de pouvoir mesurer cette anisotropie ce qui nécessite de travailler sur le matériau avec plusieurs angles d'incidence.

A cette fin, plusieurs méthodes ont été développées. A partir de mesures de transmission et de réflexion, Li *et al.* retrouvent les paramètres constitutifs d'un métamatériau anisotrope [18]. Guth *et al* , en proche infrarouge ont travaillé sur des métamatériaux constitués

de résonateurs en forme de U. Ils montrent que connaitre les propriétés optiques du milieu nécessite de connaitre les tenseurs de la permittivité, de la perméabilité et de la chiralité du milieu qui affectent fortement ces propriétés [19]. Ces tenseurs sont ici calculés à partir de mesures ellipsométriques spectroscopiques. Ils parviennent à différencier le rôle du couplage magnéto-électrique, de la dispersion spatiale, et du rôle des modes de résonances type électrique ou type magnétique. Kriegler a étudié des métamatériaux photoniques bi-anisotropes [20]. Il étudie la bi-anisotropie avec une description de type électrique et retrouve les paramètres effectifs du matériau. Les propriétés de bi-anisotropie peuvent également venir de l'environnement des résonateurs. Ainsi Jiang et al ont prouvé expérimentalement que le substrat sur lequel reposait les cellules était à l'origine de la réponse anisotrope [21]. Grâce à ces propriétés, des matériaux biréfringents ont vu le jour [22].

I.2.2.3 Métamatériaux ajustables

Il est rapidement apparu intéressant de pouvoir ajuster la fréquence de résonance des cellules des métamatériaux à l'aide d'un paramètre extérieur. Reynet et Acher [23] furent parmi les premiers à développer un tel matériau. A l'aide d'une tension externe et d'une varicap (diode semi-conductrice), la résonance a pu être ajustée sur plus d'une octave. D'autres solutions ont été proposées, telle que l'utilisation de composants photoélectriques [24]. Les applications pour les méta-matériaux ajustables sont nombreuses. On citera comme application le développement de filtres de rejection ultra-sélectifs [25], le développement d'antennes synthétiques [26]. Hand et Cummer ont également développé

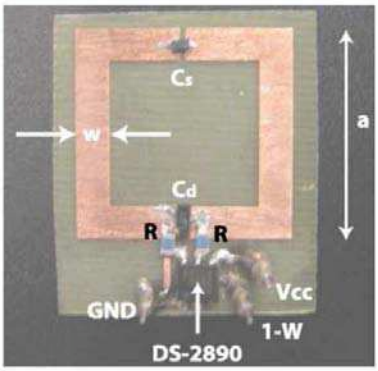


Figure I.5 – Photographie d'une SRR rendue ajustable à l'aide d'un circuit électronique parallèle comprenant une capacité variant entre 0.63 et 3.67 pF par [27].

des métamatériaux ajustables en ajoutant des capacités en parallèles des fentes de Split Ring Resonators [27] tel que présenté sur la figure I.5. Une application de nos travaux sera inspirée de ces travaux dans le chapitre IV du manuscrit.

Les milieux localement résonants, par la structuration qu'ils présentent et par leur caractère résonant permettent de travailler avec de grands vecteurs d'onde et pour certains d'aller par ce biais au delà de la limite de diffraction. Différentes approches permettant de passer au-delà de la limite de diffraction dans le but de réaliser de l'imagerie sub-longueur d'onde sont présentées dans la suite de ce chapitre.

I.3 Limites de l'imagerie conventionnelle

Divers travaux ont été menés pour étudier et passer outre la limite de résolution des systèmes électromagnétiques. L'objectif de ces travaux est d'utiliser les propriétés de milieux ou d'objets micro-structurés pour pouvoir capter de l'information sub-longueur d'onde et la convertir en champ lointain. Cela consiste en fait à utiliser des milieux où l'invariance par translation n'est pas respectée de façon à pouvoir convertir des fréquences spatiales. De la même façon qu'une lentille transforme un faisceau d'ondes planes en un faisceau à multiples vecteurs d'onde, ces milieux permettent de gagner des degrés de liberté spatiaux et d'aller au-delà de la limite de diffraction.

I.3.1 Limite de résolution

La limite de résolution est la distance minimale qu'il doit y avoir entre deux points pour qu'ils soient correctement distinguables par un appareil de mesures. En dessous de cette distance, les taches de diffraction de deux objets ne peuvent plus être séparées. Ce phénomène est présenté figure I.6. Sur la première image, les deux objets sont résolus alors que sur les deux suivantes, la distance qui les sépare ne permet plus d'en faire la distinction. La limite de diffraction par un microscope a été approximée par Ernst Abbe en 1873 : une onde de longueur d'onde λ se propageant dans un milieu d'indice n et convergeant vers un spot avec un angle θ créera une tache focale sur ce spot de diamètre :

$$d = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}. \tag{I.18}$$

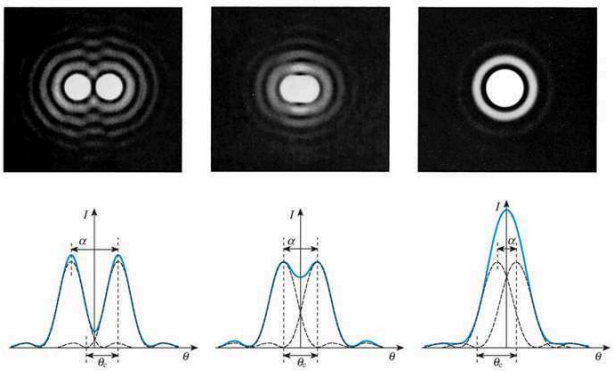


Figure I.6 – Images de diffraction de deux objets plus ou moins rapprochés. La distance pour les deux dernières images entre les tiges est inférieure à la limite de résolution.

Cette distance est la limite de diffraction. Dans le vide, elle est donc égale pour une incidence normale à $\lambda/2$. Les domaines de l'imagerie, des télécommunications, des études de la matière molle et des sols en sciences de la terre sont directement impactés par ce phénomène. La limite de résolution est à l'origine de beaucoup de recherches scientifiques. De nouvelles approches sont apparues tout particulièrement pour le contrôle des fronts d'ondes, la focalisation et l'imagerie avec des résolutions inférieures à cette limite. Des travaux sur l'ouverture numérique des appareils d'imagerie ont eu lieu. Les techniques de

champs proches s'avèrent des solutions particulièrement utilisées dans ce domaine. Dans un autre domaine, plus récent, l'utilisation de milieux avec de grand indice de réfraction s'avère efficace pour réduire la limite de résolution. Ce sont les travaux récents sur des milieux résonants qui seront étudiés plus en détails dans ce manuscrit.

I.3.2 Super focalisation

En 1997, Derode *et al.* utilisent un milieu 2D de diffuseurs et le retournement temporel pour fortement diminuer la largeur de la tache focale mesurée après la traversée de ce milieu par un signal acoustique large bande [28]. L'expérience est schématisée figure I.7(a). Un pulse ultra-sonore est envoyé sur un milieu diffusant. Le signal est mesuré à la sortie du milieu, retourné temporellement et ré-envoyé dans le milieu. Le retournement temporel permet de mettre tous les vecteurs d'onde en phase. La tache focale est alors mesurée. Sa largeur est diminuée d'un facteur 6 par rapport à l'ouverture initiale de la barrette d'émission (cf. figI.7(c)).

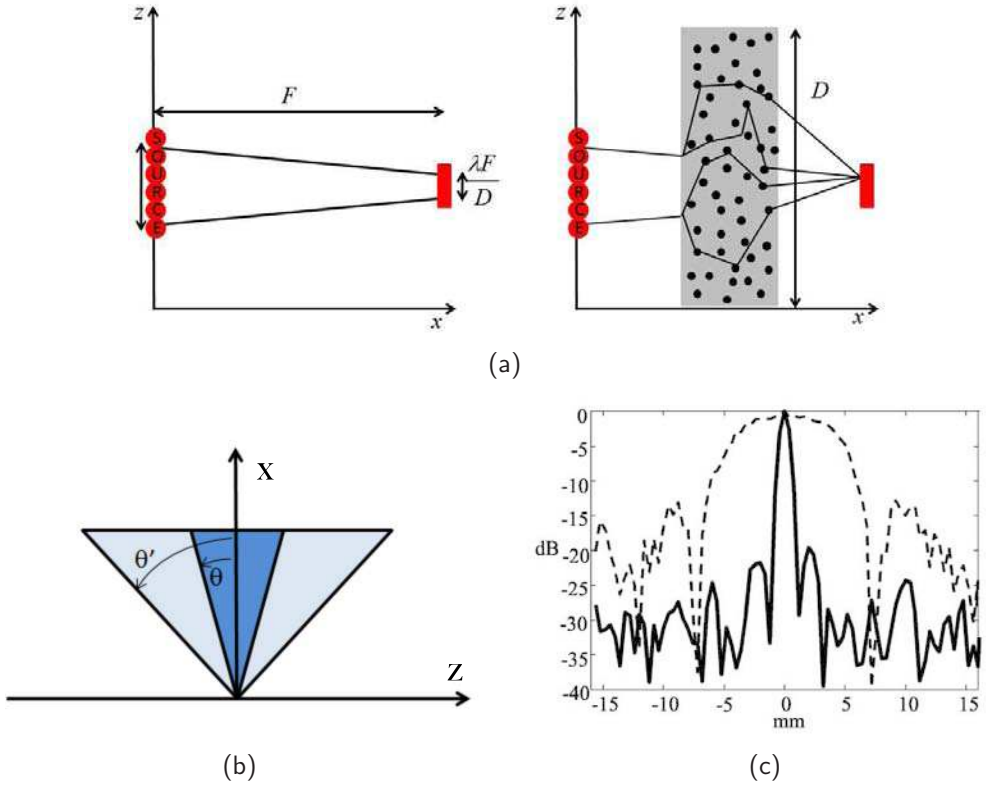


Figure I.7 – (a) Expérience de focalisation sans et à travers un milieu multidiffusant. (b) Schéma représentant les vecteurs d'onde accessibles sans (zone foncée) et avec milieu multidiffusant (zone claire). (c) Directivité de l'onde renversée temporellement autour d'un point focal choisi. Comparaison entre deux mesures, avec (ligne continue) et sans milieu multiplement diffusant, mesure issue de [28].

L'idée, ici, est de récupérer des composantes angulaires plus élevées. Schématiquement, utiliser un tel milieu de diffuseurs revient à ouvrir virtuellement l'ouverture de la barrette d'émission. Comme schématisé figure I.7(b), le milieu permet de focaliser avec un angle

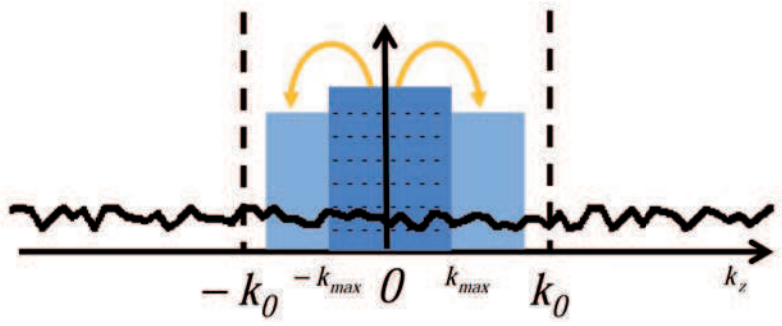


Figure I.8 – Schématisation dans l'espace des k des effets de récupérations de degrés spatiaux pour un milieu homogène (zone hachurée) et un milieu multiplement diffusant. La ligne noire correspond à l'ensemble des vecteurs d'onde que peut potentiellement émettre un objet diffractant.

d'ouverture θ' plutôt qu'avec une ouverture θ qu'on aurait obtenue avec une propagation dans un milieu homogène.

On peut interpréter ce phénomène dans l'espace des k. Avec le milieu multi-diffusant, on gagne de l'information en récupérant des composantes de k qui seraient perdues sans le milieu.

En effet, dans le milieu homogène, k est compris entre $-k_{max}$ et k_{max} où $k_{max} \simeq k_0 \sin\theta$ (cf. figure I.8). Grâce à la diffusion, on a une conversion de k : $k'_{max} \simeq k_0 \sin\theta'_{max}$ où θ'_{max} est donné par l'ouverture angulaire virtuelle. Le milieu joue le rôle d'une lentille qui permettrait d'augmenter l'étalement des vecteurs propres de façon à maximiser les "k" mesurables.

Avec cette expérience, on obtient une focalisation sub-résolue. Ce n'est pas encore de l'imagerie sub-longueur d'onde. Aujourd'hui, la solution classique pour réaliser de l'imagerie sub-longueur d'onde est la microscopie champ proche.

I.3.3 Microscopies champs proches et champs lointains

En microscopie, les enjeux sont immenses autant en champ lointain qu'en champ proche. En microscopie champ lointain, on détecte le champ diffracté à grande distance. Seules les ondes qui ont pu se propager jusqu'au détecteur sont utilisées, c'est-à-dire celles dont les fréquences spatiales appartiennent à l'intervalle $[-k_0, k_0]$. La résolution est limitée à $\lambda/2$.

En microscopie champ proche, on va chercher à « récupérer » la part la plus large possible des fréquences spatiales de l'objet en détectant à la fois les ondes progressives et les ondes évanescentes qu'il diffracte. Les ondes évanescentes restant à la surface de l'objet, il faut approcher un détecteur le plus près possible de cette surface. Ainsi, on ramène les vecteurs d'ondes supérieurs à k_0 qui sont évanescents dans la zone de propagation c'est à dire dans la zone des vecteurs d'onde appartenant à l'intervalle $[-k_0; k_0]$. Ce phénomène est schématisé figure I.9.

La question qui se pose est ici de savoir comment les ondes évanescentes présentes à

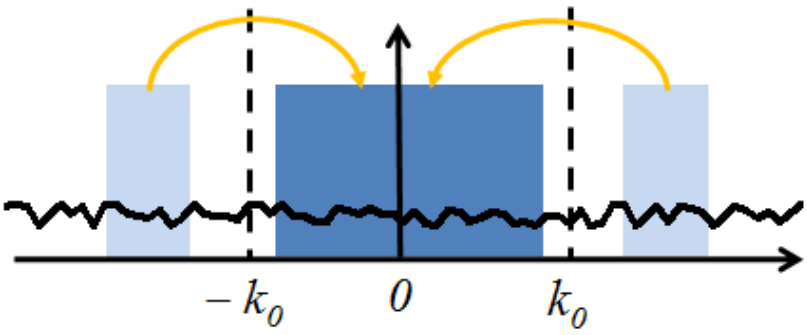


Figure I.9 – Schématisation dans l'espace des vecteurs d'onde de la conversion d'ondes évanescentes en ondes propagatives. La ligne noire correspond à l'ensemble des vecteurs d'onde que peut potentiellement émettre l'objet diffractant.

la surface qui ne se propagent pas, peuvent être captées avec une sonde. C'est en fait le principe de réciprocité qui permet de comprendre ce phénomène. Si un objet de petite dimension diffracte une onde progressive sous forme (entre autre) d'ondes évanescentes, réciproquement, une onde évanescente sera diffractée par un objet de même dimension sous forme d'onde progressive. La résolution dépend alors de la distance pointe-surface : plus la distance est faible, plus les ondes de « grande évanescence » peuvent être captées, et donc, plus la résolution du dispositif est grande.

Le principe de la microscopie champ proche fut proposé par Synge et démontré en 1972 par Nicholls [29]. Depuis une trentaine d'années, des techniques expérimentales permettant d'obtenir des images notamment surfaciques avec des résolutions sub-longueur d'onde [30], et des mesures de champs électromagnétiques confinés [31] ont vu le jour. Elles reposent ainsi sur l'observation des ondes évanescentes en champ proche des objets à imager. Des travaux ont utilisé l'interaction entre une sonde très pointue et un échantillon dans le but de réaliser une image par spectroscopie et de modifier la surface de l'échantillon étudié avec une résolution bien inférieure à la demi-longueur d'onde [32] .

Une technique originale est celle de Sentenac *et al* qui proposent un système d'imagerie avec lequel l'illumination et les mesures sont effectuées en champ lointain et qui permet d'atteindre une résolution inférieure à un dixième de longueur d'onde [33]. Un échantillon est déposé sur un substrat nano-structuré périodique éclairé avec une incidence variante. Le réseau présente de forts pics de réflexion, dus à l'excitation par le rayonnement incident de modes propres de la structure. La réflexion est très sensible avec l'angle et la polarisation de l'onde incidente. Ici encore le concept consiste à convertir par effet de réseau des k sub-longueur d'onde en k propagatifs. Ce principe sera réutilisé au cours de nos études, les milieux finis localement résonants ayant la propriété de convertir des ondes évanescentes en ondes propagatives.

I.3.4 Super-résolution

Concernant les défis visant à réaliser de la focalisation sub-longueur d'onde et de la super-résolution, différents travaux originaux ont été effectués. A l'institut Langevin, il a été montré qu'il était possible de focaliser une onde électromagnétique sur des antennes espacées d'un trentième de longueur d'onde seulement grâce au retournement temporel

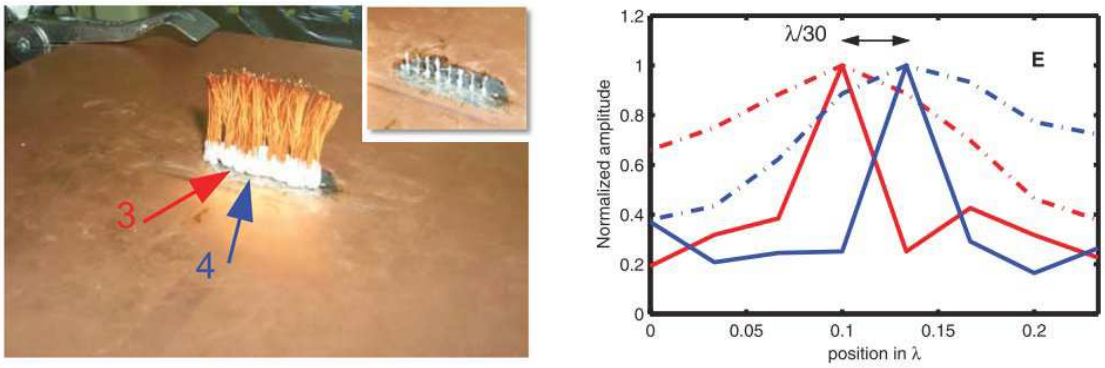


Figure I.10 – (a) Photographie d'un réseau d'antennes surplombé d'un milieu dense de fils de cuivre résonants. (b) Taches focales obtenues en focalisant sur deux tiges du réseau d'antennes distantes de $\lambda/30$ en utilisant une opération de retournement temporel [34].

lorsque ces dernières sont insérées dans un milieu micro-structuré résonant [34]. Le milieu diffusant est présenté figure I.10. Les détails évanescents convertis en mode propagatifs sur les micro-structures sont rétro-convertis en détails évanescents lors de l'expérience de retournement temporel. Ces résultats ont été obtenus dans un milieu constitué de diffuseurs résonnants désordonnés. Une résolution de $\lambda/30$ a été obtenue lors de cette expérience.

Ici encore, les auteurs tirent parti des propriétés d'un milieu fini de résonateurs sub-longueur d'onde pour provoquer la conversion d'ondes évanescentes en ondes propagatives. C'est également le cas dans les travaux de Zhang *et al*. Employant un milieu de résona-

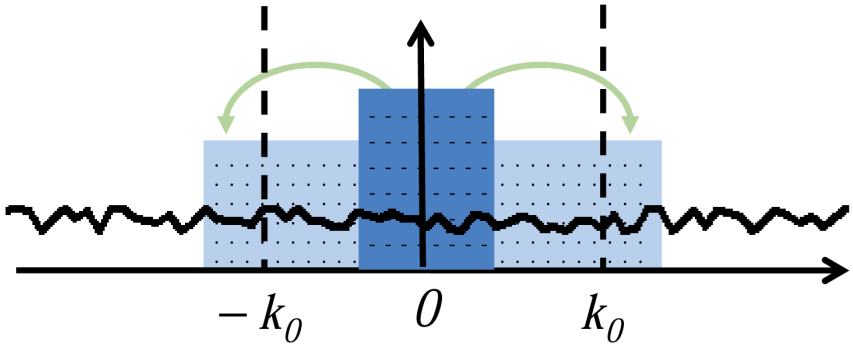


Figure I.11 – Schématisation dans l'espace des vecteurs d'onde de la conversion d'ondes propagatrices en ondes évanescentes. La ligne noire correspond à l'ensemble des vecteurs d'onde que peut potentiellement émettre l'objet diffractant.

teurs sub-longueur d'onde, Zhang *et al* ont réalisé l'étude théorique et expérimentale d'un métamatériau acoustique 2D composé d'un réseau de résonateurs de Helmholtz [35]. Leur dispositif permet de focaliser et d'imager des sources sonores à travers différentes lentilles fabriquées avec ce métamatériau. En imagerie clinique, la limite de diffraction pose également problème. Viessmann et al ont réussi à imager des micro-bulles jouant le rôle d'agents de contraste flottant dans un fantôme en gel [36]. En localisant spatialement ces micro-bulles, ils ont réussi à reconstruire une cartographie du champ de bulles avec une résolution très sub-longueur d'onde. Ces principes ont été repris et étudiés par Lemoult

et al. avec un réseau ordonné fini de résonateurs électriques demi-longueur d'onde [37]. Il a été montré que ce réseau présente des modes propres sub-longueur d'onde dus aux interactions dans le milieu. Une expérience utilisant le renversement temporel et une décomposition sur les modes propres du milieu a permis de focaliser une onde sur une dimension sub-longueur d'onde.

L'interaction entre une onde et un milieu de résonateurs à fort facteur de qualité est donc bien une solution pour aller au-delà de la limite de diffraction. Les milieux de taille finie grâce aux interactions entre les cellules qui les composent ouvrent un domaine d'applications particulièrement original et innovant. En pratique, pour des questions de modélisation, ce sont des milieux ordonnés périodiques résonants qui sont préférés.

Un autre grand domaine d'applications des milieux localement résonants est celui des antennes.

I.4 Antennes et milieux finis localement résonants

Les antennes classiques, usuelles, doivent avoir des dimensions supérieures à la demi-longueur d'onde pour fonctionner efficacement. L'introduction des structures de type cristaux photoniques et de type métamatériau a permis de concevoir des antennes miniatures présentant une puissance efficace et une bande passante très acceptables. Les nouveaux composants tels que des résonateurs compacts ou des guides d'onde en métamatériaux offrent la possibilité d'applications sans précédent. Les antennes à métamatériaux les plus récentes permettent d'obtenir un rayonnement de plus de 95% de l'énergie qui leur est apportée. Ces antennes se comportent comme si elles étaient de dimensions supérieures à la demi-longueur d'onde. Que ce soit pour les communications sans fil, pour la conception d'antennes ultra directives, pour des applications radars ou en microcapteurs, l'introduction de milieux localement résonants apparait donc comme une source d'amélioration importante dans le domaine des antennes. Quelques domaines particulièrement développés sont explicités ci-dessous.

I.4.1 Antennes et directivité

Une technique classique pour réaliser des antennes directives est d'utiliser un plan réflecteur métallique et une surface semi-réfléchissante autour d'une antenne. L'orientation de la surface semi-réfléchissante permet de choisir la directivité de l'antenne [38]. Des contraintes sur la phase imposent une épaisseur minimum de la cavité de l'ordre de $\lambda/2$, λ étant la longueur d'onde d'émission. Utiliser un métamatériau permet à la fois un contrôle de la phase en réflexion et en transmission. Ainsi une configuration développée par Ourir *et al.* consiste à remplacer la surface semi-réfléchissante par une méta-surface dont les paramètres peuvent varier en fonction d'une tension appliquée sur la surface (cf. figure I.12). L'antenne obtenue, fine de $\lambda/30$ permet un balayage spatial de 40° [39].

Chen *et al.* ont réalisé une antenne extrêmement directive en utilisant un métamatériau main gauche [40]. Ce matériau est structuré avec des capacités variables dans le but de

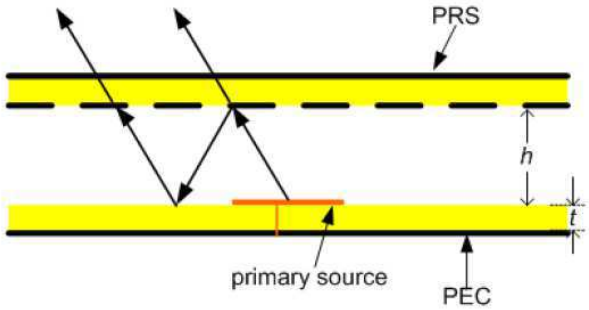


Figure I.12 – Vue schématique d'une antenne directive à cavité composée de méta-surface en PEC (Perfectly Electrically Conductive) et en PRS (Partially Reflecting Surface) [39].

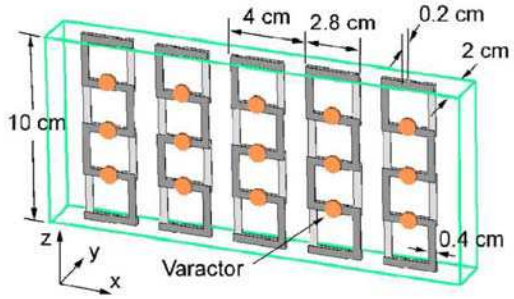


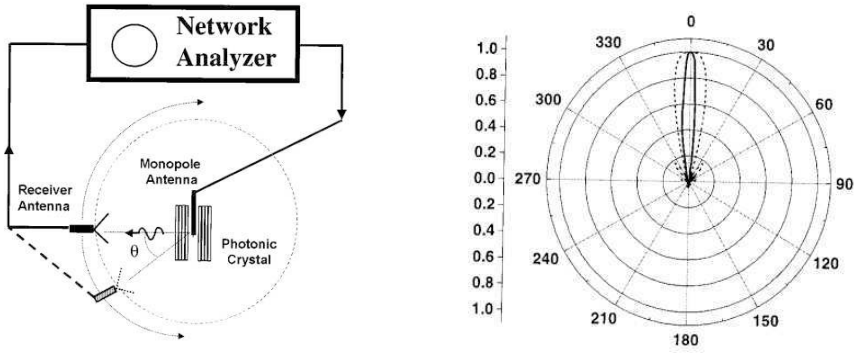
Figure I.13 – Vue schématique d'une antenne directive à métamatériaux main gauche composée structures en "S" et de capacités ajustables [40].

contrôler les propriétés de phase et de permettre de scanner avec un angle de 80°. Cette antenne est présentée sur la figure I.13.

De nombreuses antennes directives ont ainsi été développées avec des structures types métamatériaux [41]. Les cristaux photoniques sont également employés. De Lustrac *et al.* utilisent un cristal photonique ajustable pour intensifier la puissance rayonnée par une antenne. Le cristal est placée autour de l'antenne. En modifiant le courant grâce à des diodes électriques insérées dans le cristal, le matériau peut être rendu transparent ou réfléchissant. Une antenne très compacte, émettant jusqu'à un angle de 30° a ainsi été développée [42]. Une cavité formée d'un cristal photonique tridimensionnel, couplée avec un monopole (cf. figure I.14), a permis à Temelkuran *et al.* de concevoir une antenne avec une directivité maximale dont l'angle peut varier de 310°.

I.4.2 Antennes et surfaces haute impédance

Les surfaces haute impédance présentent la propriété essentielle de n'autoriser la propagation des ondes électromagnétiques sur leur surface que dans une bandes de fréquences restreinte. Ces surfaces présentent ainsi une ou plusieurs bandes interdites. Elles permettent donc de supprimer les ondes des surfaces, ce qui permet d'augmenter le rendement d'antennes placées en champ proche des surfaces. Cette propriété est également utilisée pour réduire le couplage mutuel entre différents éléments par exemple d'antennes microrubans [26, 44]. Un second intérêt important de ces surfaces est qu'elles permettent



(a) (b)

Figure I.14 – (a) Dispositif expérimental déployé par [43] pour mesurer sous différents angles une antenne constituée d'un monopole et d'une cavité constituée d'un cristal photonique tridimensionnel. (b) Mesures du diagramme de rayonnement à la fréquence de résonance de la cavité.

à une onde incidente d'être totalement réfléchie et de rester en phase avec elle-même. Auparavant constituées de matériaux photoniques, les surfaces hautes impédances sont aujourd'hui également développées avec des métamatériaux grâce au caractère résonant de ces derniers [45, 46].

Des systèmes d'adaptation d'impédance constitués de métamatériaux ont également été conçus. Le métamatériau est placé autour de l'antenne, souvent un dipôle, à adapter [47].

I.4.3 Systèmes à compensation de phase

Les systèmes à compensation de phase constitués de métamatériaux permettent la conception de nouveaux guides d'onde [48]. Les lignes de transmission main gauche sont des filtres passe haut et permettent une avance de phase et les ligne de transmission main droite sont des filtres passe-bas qui apportent un retard de phase. Une alternance de ces lignes permet de compenser, de contrôler la phase sur une ligne [49]. Ainsi, une compensation de la dispersion sur une ligne de transmission est réalisée en utilisant la réfraction négative pour des applications dans le domaine temporel [50].

Dans le domaine des antennes, les milieux localement résonants ont permis d'explorer des approches nouvelles pour rendre les antennes plus efficaces, plus compactes, plus directives. Il est cependant important de noter que des techniques similaires ont été déployées avant et en parallèe de l'essor des métamatériaux [51]. En effet, des techniques utilisant des réseaux de résonateurs sub-longueur d'onde (réseaux de patchs), des adaptations d'impédance (antennes Yagi) sont étudiées depuis des décennies.

I.5 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre introductif à la présentation de différents outils qui seront utiles tout au long de notre étude. Dans un premier temps, nous avons présenté les modèles qui permettent de modéliser la propagation des ondes électromagnétiques. Des méthodes de résolution de l'équation d'onde en présence de sources, utilisées dans le chapitre II, ont été revues notamment avec la résolution de la fonction de Green scalaire et la fonction de Green dyadic.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux travaux de recherche menés dans le domaine des milieux périodiques localement et globalement résonants. Le développement et la diversification des recherches, notamment, dans les domaines des métamatériaux et des milieux photoniques a permis de nombreuses innovations notamment pour passer au-delà de la limite de diffraction. Ce sont les propriétés apportées par la structuration sub-longueur d'onde de ces milieux qui sont particulièrement utilisées : l'introduction de milieux complexes permet d'augmenter et de jouer avec les degrés de liberté spatiaux. Les techniques permettant de focaliser spatialement une onde au sein de milieux hétérogènes ont été introduites. Inversement, des techniques utilisant des milieux localement ont permis d'intéressantes innovations dans le domaine de antennes.

Différentes méthodes ont été développées pour étudier des milieux localement résonants finis et infinis. De nombreuses théories utilisent des théories de Bragg comme en cristaux photoniques [52]. En électromagnétisme, Shamonina *et al.* a étudié des milieux de résonateurs magnétiques de type SRR avec un approche matricielle prenant en compte le couplage mutuel entre les résonateurs du milieu [53]. Dans le chapitre suivant, nous étudions et développons un modèle analytique matriciel permettant de retrouver et de mettre en évidence les phénomènes d'hybridation qui interviennent dans des milieux finis et infinis, localement résonants.

CHAPITRE II

Propagation d'onde et couplage dans des milieux localement résonants

Table des matières

II.1 Interactions dans des milieux ordonnés de résonateurs sub-longueur d'onde **28**

II.1.1 Mode propre de résonateurs 28

II.1.2 Milieu infini de résonateurs de type Split Ring Resonators . . 32

II.1.3 Levées de dégénérescence et hybridation de modes dans un réseau fini de résonateurs sub-longueur d'onde 33

II.2 Approche électrodynamique des interactions dans des réseaux de résonateurs **36**

II.2.1 Impédance propre d'un résonateur unique 36

II.2.2 Couplage entre résonateurs : expression de l'impédance mutuelle 37

II.2.3 Approche matricielle des interactions dans un milieu de résonateurs sub-longueur d'onde 38

II.2.4 Impédance et fonction de Green 39

II.2.5 Approximation et interactions dipolaires 41

II.3 Application du modèle dipolaire **45**

II.3.1 Relation de dispersion d'un réseau infini de résonateurs 45

II.3.2 Modes propres d'un réseau fini de résonateur sub-longueur d'onde 47

II.3.3 Vecteurs propres d'un réseau fini de résonateur sub-longueur d'onde 49

II.4 Bandes interdites et structures de bandes pour des systèmes infinis localement résonants **51**

II.4.1 Bandes interdites d'hybridation : existant et observation . . . 51

II.4.2 Structures de bandes pour des systèmes infinis continus 56

II.4.3 Structure de bandes pour des réseaux infinis discontinus de résonateurs sub-longueur d'onde 60
II.5 Conclusion **62**

Dans le vide, à une fréquence donnée, les variations spatiales d'un champ électromagnétique ne sont jamais plus rapides que la demi-longueur d'onde du vide. Il n'est ainsi pas possible de contrôler l'onde avec des variations inférieures à la demi-longueur d'onde. Travailler dans un milieu d'indice plus élevé ou dans des milieux hétérogènes avec une structuration sub-longueur d'onde permet d'outrepasser cette limite .

Lorsque les hétérogénéités sont résonantes, elles agissent comme autant de sources secondaires efficaces qui confèrent des propriétés particulière au "matériau". Nous avons vu dans le chapitre précédent que parmi ces matériaux, de nombreux travaux ont concernés les métamatériaux et les cristaux photoniques. Nous allons aborder ce problème par le biais des matériaux localement résonants. Nous verrons que certaines des propriétés de ces milieux sont fortement dépendantes de la dimension du matériau avec en particulier l'apparition de modes résonants qui se couplent avec le vide. De même, selon que les milieux soient de natures ordonnée ou désordonnée, selon le facteur de qualité des résonateurs, ou encore selon les symétries que présentent les milieux, nous verrons que les propriétés de la propagation différent fortement.

Ce chapitre porte sur la propagation d'ondes électromagnétiques au sein de milieux constitués de résonateurs sub-longueur d'onde, placés à des distances elles-mêmes sub-longueur d'onde les uns des autres. Ce travail porte plus particulièrement sur la propagation d'ondes au cœur de structures planes 1D ou 2D de tailles finies et infinies lorsqu'elles sont excitées en leur sein par de petites sources électromagnétiques. Comment se comportent les ondes dans de tels milieux, peut-on extraire des caractéristiques propres au milieu et comment expliquer le rayonnement d'informations sub-longueur d'onde en champ lointain ? Pour répondre à ces questions, nous effectuons une étude sur les interactions électromagnétiques survenant entre les éléments résonants de ces milieux. Nous nous fonderons dans ce chapitre sur des résultats expérimentaux et de simulations.

Dans une première partie, après avoir étudié les caractéristiques de résonateurs seuls, des effets d'interactions fortes seront présentés lorsque ceux-ci sont placés en réseau, proches les uns des autres. Connaissant les caractéristiques des résonateurs étudiés individuellement, des levées de dégénérescence de modes sont mises en évidence. Un comportement de type "modal" est extrait par l'observation des champs magnétiques ou électriques à la surface du milieu. L'observation d'un rayonnement d'énergie en champ lointain contenant de l'information sub-longueur d'onde est également présentée.

Pour analyser ces comportements, nous proposons dans une deuxième partie de travailler avec un formalisme matriciel basé sur une approche électrodynamique. Un tel formalisme est couramment utilisé dans le milieu des antennes et en électronique. Pour appuyer le caractère ondulatoire de notre étude, une analogie entre la fonction de Green

habituellement utilisée pour décrire la propagation d'ondes et notre formaliste basé sur l'expression d'impédances sera présentée. De façon à approfondir l'étude analytique de ces milieux, un modèle reposant sur l'approximation que chaque inclusion du milieu se comporte comme une somme de dipôles électriques et magnétiques est proposé. Chaque inclusion est ainsi réduite à l'expression d'un scalaire. Grâce à cette approche, les termes de champ proche et de champ lointain apparaissent explicitement. Elle permet d'obtenir une expression analytique des interactions électromagnétiques et de construire un opérateur de couplage qui met en évidence les phénomènes d'hybridation de modes dans le milieu. En nous appuyant sur ces résultats, les caractéristiques des milieux, lorsqu'ils sont infinis, sont extraites. Pour les milieux finis, l'étude permet d'obtenir les expressions analytiques des modes et vecteurs propres des structures.

En dernière partie, nous discuterons les résultats de ce modèle et nous en présenterons une évolution dans différents types de milieux : discrets, continus, fermés, ouverts et de différentes dimensions. Cette approche est complémentaire des travaux de Yariv [54] qui porte sur entre autre sur l'apparition de bandes interdites lorsque l'on considère l'interaction entre des résonateurs à forts facteurs de qualité et un guide d'onde.

II.1 Interactions dans des milieux ordonnés de résonateurs sub-longueur d'onde

De nombreuses études sur les métamatériaux se concentrent sur l'homogénéisation des paramètres des milieux tels que la permittivité ou encore la perméabilité. Une condition généralement admise pour pouvoir homogénéiser est un faible couplage entre les résonateurs de ces milieux. De plus, pour pouvoir envisager un métamatériau parfait, il faut que les dimensions du milieu soient infinies. Ici, on s'intéresse au cas inverse. Les interactions entre résonateurs sont très fortes et le milieu n'est pas forcément de dimension infinie. On ne peut plus appliquer de théorie d'homogénéisation. Les interactions dépendent très fortement des caractéristiques propres des résonateurs qui constituent le milieu. Dans le but d'étudier les phénomènes d'hybridation dans des milieux de résonateurs sub-longueur d'onde, nous nous intéressons dans ce chapitre au cas de milieux constitués de Split Ring Resonators (SRR).

Dans cette partie, les effets obtenus lorsque l'on étudie la propagation d'onde électromagnétiques dans des milieux de taille finie sont présentés. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la résonance fondamentale de résonateurs. Deux types deux cellules dont les symétries diffèrent seront plus particulièrement étudiée. Dans une deuxième temps nous nous pencherons sur le comportement de milieux infinis constitué de tels résonateurs. Enfin, nous observons quels sont les effets des interactions entre les résonateurs lorsque les milieux sont de taille finie.

II.1.1 Mode propre de résonateurs

Pour mettre en évidence les effets d'interactions mutuelles qui interviennent dans des milieux finis et infinis de résonateurs, les caractéristiques propres de ces résonateurs élec-

tromagnétiques sub-longueur d'onde doivent être connues.

Dans un premier temps, deux types de cellules résonantes sont étudiées. Ces cellules sont de simples anneaux fendus de type Split Ring Resonator. La première cellule résonante est un SRR à 3 gaps et la seconde un SRR à 4 gaps. Ces résonateurs sont présentés figure II.1. Ces deux géométries présentent des symétries différentes. La structure à 3 gaps est asymétrique du point de vue du plan (Oyz), la seconde est symétrique du point de vue des 3 plans principaux de l'espace. Nous verrons en quoi les symétries modifient fortement la réponse de réseaux constitués de ces résonateurs.

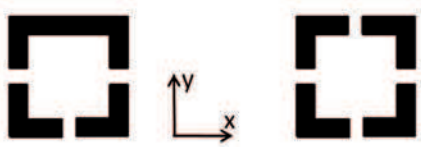


Figure II.1 – Schéma des deux géométries de SRRs, à 3 gaps, et à 4 gaps.

Considérons la première cellule, asymétrique. Nous nous intéressons au mode fondamentale de cette cellule.

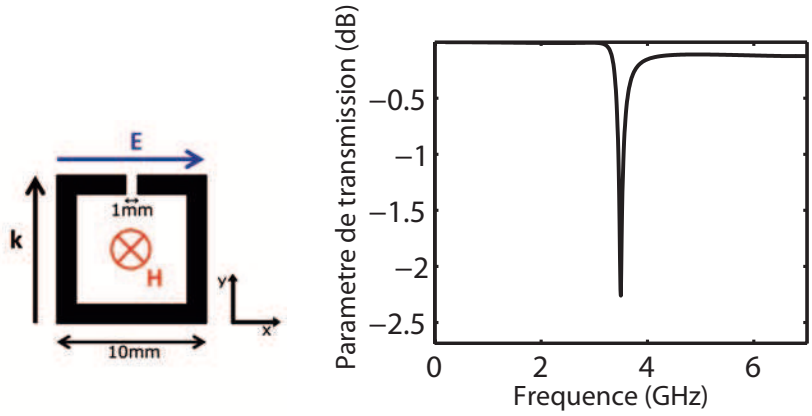


Figure II.2 – (a) Schéma d'un Split Ring Resonator excité par une onde plane, (b) paramètre de transmission du même SRR excité par une onde plane polarisée tel que présenté en (a).

Les résultats ci-dessous sont issus de simulations numériques de type FDTD effectuées sur le logiciel CST Microwave. L'excitation ainsi que les dimensions du résonateur sont données sur la figure II.2. Le résonateur est placé dans un guide d'onde avec des parois PEC (Perfect Electric Conductors) sur les plans latéraux (Oyz) et PMC (Perfect Magnetic Conductor) sur les plans (Oxy). Celui-ci est excité par une onde plane telle que sur la figure II.2. Le paramètre de transmission est présenté figure II.2. La résonance fondamentale du SRR a lieu pour 3.5 GHz. Cette résonance est à la fois magnétique et électrique. Notons que la résonance magnétique est artificielle : le matériaux n'est pas magnétique. La résonance magnétique est liée à la géométrie circulaire de la cellule. Notons que la simulation est effectuée avec un SRR à un gap. Notons que dans la suite du manuscrit, nous considérerons alternativement des SRRs à un gap et des SRRs à 3 gaps pour étudier

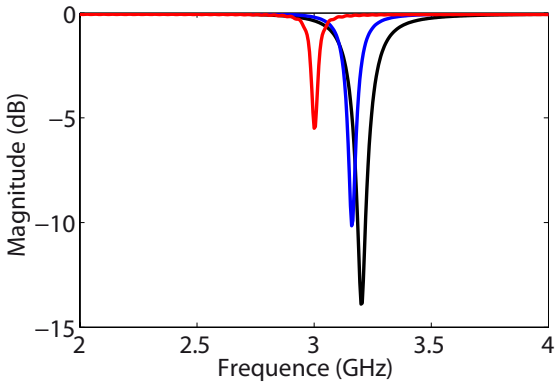


Figure II.3 – Coefficient de transmission calculé par simulation FDTD d'un SRR à un gap pour différentes distances des conditions limites.

des cellules antisymétriques.

Il faut être vigilant au fait que l'on ne mesure pas vraiment avec ces conditions de simulation le mode fondamental du résonateur. Les conditions limites qui ont été ajoutées pour le calcul FDTD modifient la réponse du résonateur qui se couple avec le guide d'onde que constituent ces conditions limites. A titre d'exemple, sur la figure II.3 sont tracés trois coefficients de transmission obtenus pour une même simulation dans laquelle on ne modifie que la distance des conditions limites au résonateur. Un décalage en fréquence et une modification du facteur de qualité du résonateur sont clairement observés. Pour accéder aux caractéristiques réelles du mode fondamental, il faut avoir accès à la réponse en espace libre de la cellule. Une méthode efficace pour les mesurer est d'exciter le résonateur grâce à une petite boucle de courant non adaptée dans la bande de fréquence de travail. Nous utiliserons cette méthode dans la suite de nos études.

Reprenons l'étude du mode fondamental des SRRs. Les cellules sont à présent excitées en champ proche à l'aide d'une simple boucle de courant de trois millimètres de diamètre. Celle-ci est placée de façon à émettre un champ électromagnétique qui puisse exciter magnétiquement et électriquement les SRRs. Elle se couple avec les résonateurs en émettant un champ magnétique parallèle à son axe, donc perpendiculaire au plan des résonateurs et un champ électrique dans le plan des résonateurs.

Les signaux temporels émis et reçus aux bornes d'une telle boucle de courant placée en champ proche des SRRs étudiés sont présentés sur la figure II.4. Les coefficients de réflexion sont déduits de la transformée de Fourier des signaux temporels mesurés aux bornes de la boucle de courant. Ils sont tracés sur les figures II.5. Lorsqu'elle est étudiée seule, la boucle n'est pas adaptée et n'émet aucune énergie dans la bande de fréquence utilisée, son rayon étant très petit devant la longueur d'onde (courbes en pointillées sur II.5). Les coefficients de réflexion obtenus lorsque la boucle est accolée aux résonateurs (courbes en traits continues) sont donc principalement imputables aux résonateurs. On observe clairement une résonance à 5.5 GHz pour le SRR à 3 gaps et une résonance à 7.3 GHz pour le SRR à 4 gaps. Ces résonances respectives correspondent au mode fondamental

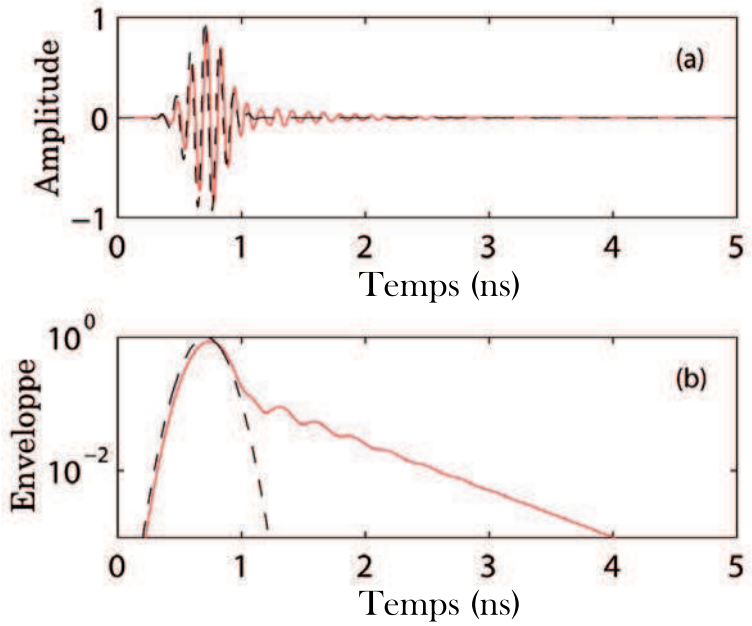


Figure II.4 – En noir (et pointillé) : réponse temporelle mesurée aux bornes d'une petite boucle de courant seule non adaptée. En rouge : réponse temporelle mesurée aux bornes d'une petite boucle de courant placée en champ proche d'un SRR à 3 gaps. La bande passante en fréquence est comprise entre 6 et 11 GHz. En (a) sont présentés les amplitudes des signaux des ondes RF. En (b) sont présentées les enveloppes de ces signaux.

des cellules. Ces résultats justifient que nous supposions que près de leur résonance ω_0, les SRRs se comportent comme de simples circuits RLC. On peut dans ce cas exprimer la résonance fondamentale en fonction de paramètres propres de la cellule : $\omega_0 = 1/\sqrt{L_s C_s}$. L_s et C_s sont respectivement l'inductance et la capacitance équivalente des résonateurs. Notons pour la suite que le facteur de qualité de la résonance d'un SRR à 3 gaps est très supérieur à celui d'un SRR à 4 gaps.

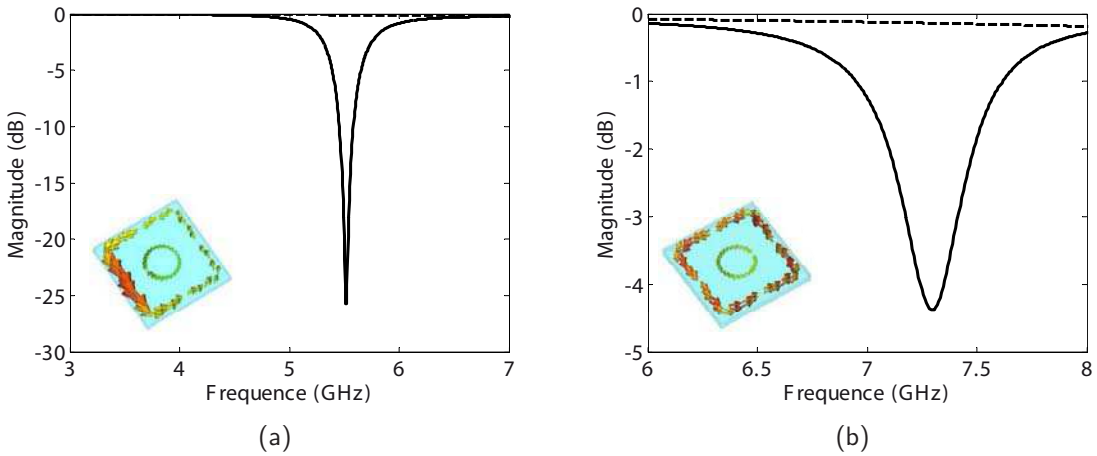


Figure II.5 – La courbe continue est la dépendance fréquentielle du coefficient de réflexion d'une petite boucle de courant placée en champ proche du réseau de SRR à 3 gap (a) et à 4 gaps. En pointillé est représenté le coefficient de réflexion de la source seule. Les deux sous figures montrent la distribution du courant à la résonance.

Les distributions de courant obtenues en ω_0 pour les deux types de résonateurs sont également présentées sur la figure II.5. Dans les deux cas, on observe que le courant électrique forme une boucle de courant fermée, induisant un comportement équivalent à un dipôle magnétique. Du fait de la géométrie plane des SRRs, le moment magnétique induit est perpendiculaire au plan décrit par les SRRs. La différence entre les répartitions de courant vient de la brisure de symétrie sur la cellule à 3 gaps. Pour les deux géométries, la distribution de charges induit des dipôles électriques dans le plan des cellules. Parce que le SRR à 4 gaps est symétrique, la distribution de charges du mode fondamental est antisymétrique par rapport aux deux plans de symétrie (xOz) et (yOz). Ainsi les 4 dipôles électriques induits sur la cellule s'annulent deux à deux. Au contraire, sur la cellule à 3 gaps, un dipôle électrique fort est induit sur l'axe (Ox). On observe de ce fait une augmentation de la densité de courant sur le coté sans gap du SRR à 3 gaps. Dans la partie suivante, nous proposerons une méthode analytique pour évaluer le couplage entre plusieurs résonateurs électromagnétiques, en nous basant sur ces observations.

II.1.2 Milieu infini de résonateurs de type Split Ring Resonators

Considérons à présent un milieu infini constitué d'un réseau de SRRs périodiquement agencés sur un maillage carré. Pour analyser un tel réseau, sa relation de dispersion est calculée numériquement avec le logiciel CST microwaves. Celle-ci est tracée dans la première zone de Brillouin, c'est à dire dans la cellule élémentaire de l'espace réciproque. La réponse que l'on obtient pour un milieu infini est similaire à celle obtenue pour les

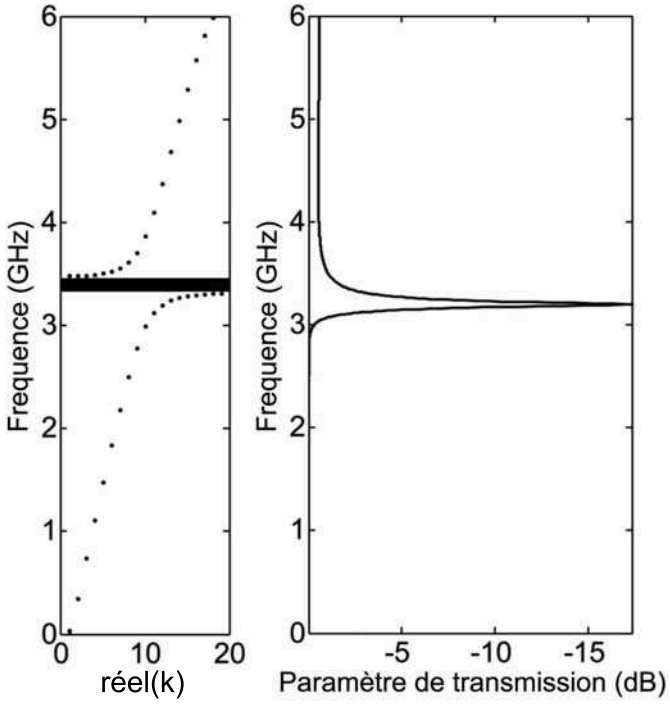


Figure II.6 – Relation de dispersion d'un milieu infini de résonateurs et paramètre de transmission d'un SRR excité par une onde plane.

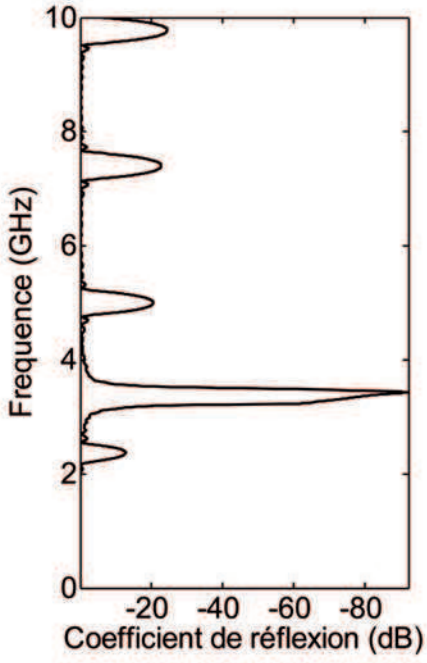


Figure II.7 – Coefficient de réflexion d'un réseau 2D de SRRs de coté 10 mm distantes de 50 mm.

cellules qui le composent étudiées individuellement. En effet, sur la courbe de dispersion fig.II.6, on note la présence d'une bande interdite au niveau de la fréquence de résonance des résonateurs composant le milieu. Cela signifie que si l'on place un milieu semi-infini dans un guide d'onde, excité par une onde plane, il n'y aura aucune propagation pour les fréquences comprises dans la bande interdite. L'onde sera totalement réfléchie. Ici, le résultat est obtenu pour l'excitation du milieu infini avec une source extérieure. Nous verrons par la suite que cette relation est différente si l'on considère le même milieu, sans guide d'onde, cette fois-ci excité par des sources locales. La figure II.7 présente une relation de dispersion quand la périodicité du milieu est suffisamment grande pour que l'on aie à considérer la diffraction de Bragg. Dans ce cas de figure, on observe des bandes interdites dues à la périodicité du milieu, typiques des cristaux photoniques. Dans la suite du document, nous considérons toujours des milieux où cette diffraction ne doit pas être prise en compte.

Si l'on garde un agencement similaire mais cette fois-ci avec un milieu de taille finie, il n'est plus possible de considérer que le milieu se comporte comme un milieu de taille infinie, i.e de façon similaire aux résonateurs qui le composent. Des effets de bord interviennent et des effets de couplage entre les résonateurs sont perceptibles. Ces effets sont présentés dans le paragraphe suivant.

II.1.3 Levées de dégénérescence et hybridation de modes dans un réseau fini de résonateurs sub-longueur d'onde

Nous nous intéressons à présent aux phénomènes de couplage qui surviennent lorsque des résonateurs sont placés suffisamment proches et qu'ils sont en nombre fini. La figure



Figure II.8 – Schéma du réseau plan fini de 4 par 4 SRR

II.8 schématise un milieu fini de résonateurs de type SRRs périodiquement agencés.

La distance qui sépare les résonateurs est inférieure à un dixième de longueur d'onde. Dans les simulations qui vont suivre, la distance entre les résonateurs est de 1 mm et les résonateurs font 10 mm de coté, soit une périodicité du réseau de 11 millimètre. L'ensemble composé du milieu et de la source est étudié en espace ouvert. La source est identique à celle utilisée pour mesurer les SRRs seuls (en bleu sur la figure II.8).

Nous avons tracé le coefficient de réflexion obtenu sur une petite boucle de courant placée en champ proche d'un réseau de 4 par 4 SRRs à 3 gaps sur la figure II.9. On y observe une forte levée de dégénérescence du mode fondamental : un grand nombre de résonances apparaissent autour de la fréquence fondamentale ω_0 des résonateurs. La présence de plusieurs résonances met en évidence une discrétisation du vecteur d'onde sur la structure, ce phénomène était relié au couplage qui intervient entre les résonateurs et à la taille finie du réseau. Ces résonances correspondent à des modes de type Fabry-Perot. Dans une première approximation, on peut considérer que chaque résonance peut être associée à un mode propre résonant du milieu. Nous verrons dans la suite que ce n'est pas exacte-

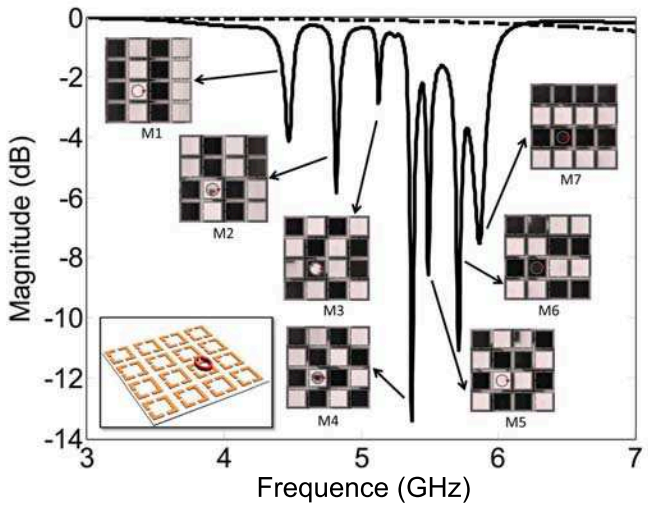


Figure II.9 – Paramètre de réflexion obtenu sur la boucle de courant placée en champ proche d'un réseau de 4 par 4 SRRs à 3 gaps. La courbe noire en pointillés représente le paramètre de réflexion obtenu lorsque la boucle est alimentée seule.

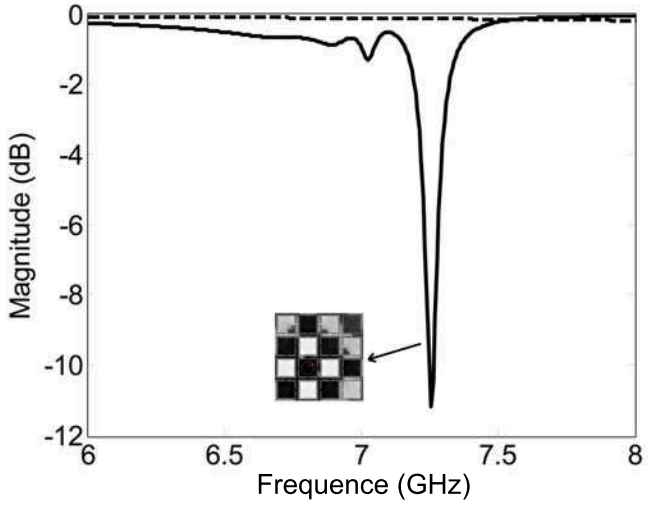


Figure II.10 – Paramètre de réflexion obtenu sur la boucle de courant placée en champ proche d'un réseau de 4 par 4 SRRs à 4 gaps. La courbe noire en pointillée représente le paramètre de réflexion obtenu lorsque la boucle est alimentée seule.

ment le cas, ces résonances étant généralement dues à une superposition de modes propres.

Il est possible en observant la distribution du champ magnétique d'avoir une première évaluation directe de ce comportement présentant des modes propres résonants. Du fait de la géométrie du système comprenant le milieu et la source, le champ électrique est essentiellement contenu dans le plan (Oxy) et le champ magnétique est perpendiculaire au plan de la structure. On peut donc observer facilement la variation du champ magnétique à la surface du réseau. Sur la figure II.9, les petites icônes associées à certaines résonances représentent les valeurs obtenues en simulation de la phase du champ magnétique complexe H_z. Un SRR de couleur blanche présente un déphasage de π par rapport à un SRR de couleur noire. On observe une évolution des modes, notamment un comportement qui semble évoluer dans les basses fréquences sur l'axe (Oy), puis, passé la fréquence propre ω_0, qui évolue sur l'axe (Ox). On observe ainsi que la complexité du motif augmente avec la fréquence (mode M1, M2, M3) sur l'axe (Oy). Pour le mode M4, la fluctuation spatiale du motif est maximale : les courants de deux cellules accolées sont opposés en direction. Puis lorsque la fréquence continue d'augmenter, la complexité des motifs diminue, mais cette fois sur l'axe (Ox). En exprimant ceci en terme de vecteur d'onde, les composantes ak_x et ak_y (sur Ox, Oy) des modes M1, M4 et M7 sont respectivement données par $(\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(0, \frac{\pi}{4})$ où a est la période du réseau. Il apparait que le couplage est principalement vertical dans les basses fréquences alors qu'il serait horizontal dans les hautes fréquences. Ce comportement est dû à l'asymétrie de la cellule élémentaire à 3 gaps. En effet, lorsque l'on effectue la même étude mais cette fois-ci pour un réseau constitué de cellules à 4 gaps, on n'observe plus de levée de dégénérescence. Seul le mode M4 est visible. Il semble que seul un mode résonne. Le coefficient de réflexion d'un réseau de 4 par 4 SRRs à 4 gaps est présenté sur la figure II.10.

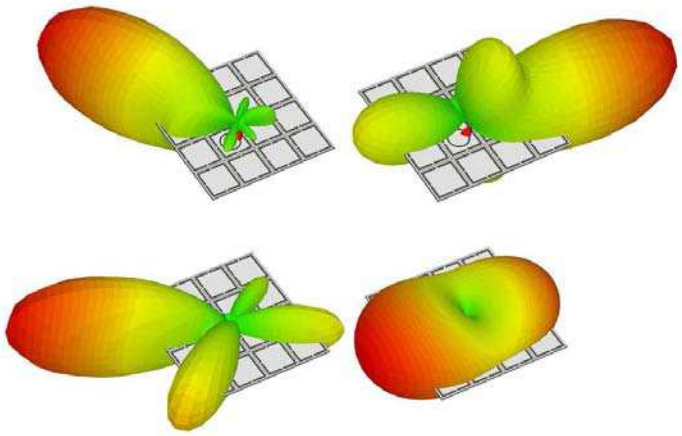


Figure II.11 – Simulation des diagrammes de rayonnement d'une structure de 4 par 4 SRRs à 3 gaps calculés à différentes fréquences (f=4GHz, 5GHz, 5.5 GHz et 6GHz). La structure est excitée par une petite boucle de courant.

Les diagrammes de rayonnement de ces deux structures ont été calculés à des fréquences où les résonances ont lieu. Une importante variation de ces diagrammes avec les fréquences est observée (voir la figure II.11 pour un réseau fini de SRRs à 4 gaps).

Pour analyser et expliquer ces résultats, un formalisme permettant de tenir compte des interactions entre tous les résonateurs du milieu est utilisé et présenté dans la partie suivante.

II.2 Approche électrodynamique des interactions dans des réseaux de résonateurs

Dans le but d'étudier les interactions entre les résonateurs d'un réseau de taille finie, un formaliste matriciel est utilisé. Il consiste à lier le comportement propre des résonateurs aux interactions électromagnétiques survenant dans le milieu.

II.2.1 Impédance propre d'un résonateur unique

Dans un premier temps, attachons nous à la description d'un résonateur, considéré seul. Nous recherchons une relation entre la tension et le courant parcourant la cellule, pour toute fréquence. Nous travaillons sur le mode fondamental des résonateurs. Proche de la fréquence de résonance de ce mode, un résonateur peut être approximé à un circuit RLC dont l'impédance propre est Z_p.

Cette impédance est égale à :

$$Z_p = j\omega L_p + \frac{1}{j\omega C_p} + R_p \tag{II.1}$$

Le terme capacitif est essentiellement dû à la présence des fentes dans la cellule. Le

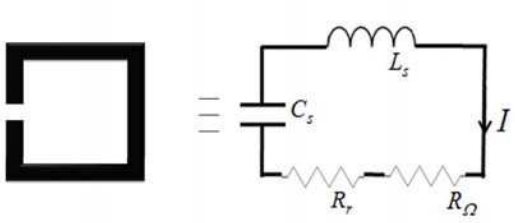


Figure II.12 – Circuit équivalent à un SRR

terme inductif est dû à la propagation sur la boucle que constitue le SRR. La fréquence de résonance du mode propre de la cellule est ainsi égale à la pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{L_p C_p}$. Le terme résistif R_p modélise les pertes ohmiques R_Ω et les pertes radiatives R_r. Nous considèrerons dans certains cas qu'il est purement radiatif. Ce terme est directement lié à la géométrie du résonateur. Notons que ce terme dépend de l'environnement du résonateur et qu'il ne peut descendre en dessous d'une valeur que nous calculerons par la suite. Cette remarque nous permettra ensuite d'obtenir une approximation originale de la valeur de la résistance radiative, en considérant deux résonateurs et en opérant un passage à la limite lorsque la distance qui les sépare tend vers 0 ($a \to 0$) de l'interaction mutuelle entre les deux résonateurs. Nous verrons que ce résultat est important pour la suite.

Grâce à cette modélisation, on évalue l'action du résonateur sur lui même et sur son environnement en exprimant sa force électromotrice : $fem = Z_p I$. I est le courant parcourant le résonateur.

II.2.2 Couplage entre résonateurs : expression de l'impédance mutuelle

Dans une même logique, on va chercher à exprimer l'influence des cellules environnant un résonateur "i" du milieu. La fem totale qui est exercée sur le résonateur R_i est la somme des fem induites par l'ensemble des résonateurs R_j (avec $i \neq j$) du milieu sur ce résonateur. Soit Z_{ij} l'expression de l'impédance mutuelle. Le terme Z_{ij} est en fait directement lié à la force électromotrice que reçoit le résonateur "i" lorsque le résonateur "j" émet et que tous les courants sur les autres résonateurs du milieu sont nuls : $Z_{ij} = \dfrac{U_i}{I_j} \mid_{I_k=0}$. Z_{ij} dépend notamment de la fréquence, et de la différence de position entre les deux résonateurs.

La fem reçue par le résonateur "i" due au résonateur "j" est alors exprimée par :

$$fem_{ij} = Z_{ij} I_j \tag{II.2}$$

En s'inspirant des lois de Kirchhoff qui expriment l'équilibre des potentiels dans un circuit électrique, une équation d'équilibre dans le milieu est mise en place. Cette équation met en jeu la force électromotrice des résonateurs seuls et la force électromotrice issue des interactions mutuelles entre les résonateurs telle que :

$$\sum fem \;\; = \;\; 0. \tag{II.3}$$

Pour un résonateur se trouvant à la position (l,m) sur un repère orthogonal décrivant le plan du milieu, on obtient en développant cette dernière expression l'équation :

$$(j\omega L_p + \frac{1}{j\omega C_p} + R_p)I(l,m) + \sum_{l'\neq l, m'\neq m} Z_m(l'-l, m'-m)I(l',m') \quad = \quad 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Le premier terme de l'équation correspond à la différence de potentiel électrique induit par le résonateur (l,m). Le second terme décrit les effets de couplages mutuels entre les cellules du milieu. L'équation (II.4) est l'équation fondamentale permettant de modéliser le couplage dans un milieu constitué de résonateurs. On peut ainsi écrire un nombre d'équations égal au nombre de résonateurs. Une approche similaire est développée par Shamonina, Syms, Solimar *et al* [55, 56].

II.2.3 Approche matricielle des interactions dans un milieu de résonateurs sub-longueur d'onde

On souhaite décrire le comportement propre de la structure, ce qui permettra ensuite d'envisager sa réponse électromagnétique lorsqu'elle est soumise à un champ extérieur. Le système linéaire d'équations (II.4) obtenues pour chaque résonateur équivaut à une équation matricielle. Pour simplifier l'étude, nous ordonnons les inclusions du milieux : le résonateur se trouvant à la position (l,m) sera le $(l-1)N+m$ élément de la matrice avec N le nombre de résonateurs sur l'un des cotés du milieu et $m \in [1..N]$. On construit ainsi une matrice de couplage dont les termes sont les $Z_{lm,l\neq m}, (l,m) \in [1..N]$.

Pour un ensemble de 3 résonateurs, on obtient une matrice de dimension 3 de type :

$$\mathbf{Z}_m = \begin{pmatrix} 0 & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & 0 & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(II.5)}$$

Le terme en (l,m) de la matrice $\mathbf{Z}_m$ est égale à l'interaction mutuelle entre la cellule l et la cellule m. Pour un milieu 1D, la matrice $\mathbf{Z}_m$, issue des expressions de forces électromotrices est une matrice de type Toeplitz. Pour une milieu 2D, c'est une matrice de Toeplitz par bloc.

De la même façon, on construit une matrice d'impédance propre. Cette matrice est une matrice diagonale $\mathbf{Z}_p$, de dimension NxN, dont les termes diagonaux sont les impédances propres des résonateurs du milieu.

Le système total de N résonateurs est alors décrit par N équations. La forme matricielle de ce système donne l'équation :

$$\mathbf{Z}_p\mathbf{I} + \mathbf{Z}_m\mathbf{I} = \mathbf{S}. \qquad \text{(II.6)}$$

où $\mathbf{I}$ et $\mathbf{S}$ sont le vecteur courant et le vecteur source, à N composantes complexes. Le vecteur $\mathbf{S}$ modélise les effets de la source qui génère la force électromotrice sur les cellules.

En inversant l'équation (II.6), on peut déduire numériquement le courant sur chaque

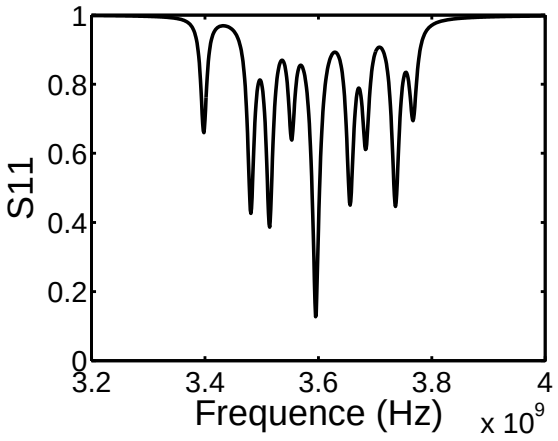


Figure II.13 – Coefficient de réflexion obtenu avec le modèle dipolaire pour un réseau de 4 fois 4 résonateurs électromagnétiques.

cellule du milieu, à chaque fréquence, pour un vecteur d'excitation donné $\mathbf{S}$. L'expression obtenue des courants est : $\mathbf{I} = (\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_p)^{-1}\mathbf{S}$. A partir des vecteurs courant obtenus, il est possible de reconstituer le coefficient de réflexion que l'on mesure sur la source :

$$S_{11} = \frac{S/I_{source} - Z_0}{S/I_{source} + Z_0} \tag{II.7}$$

Le coefficient de réflexion $S11$ obtenu pour une structure composée de 9 résonateurs électromagnétiques est tracé sur la figure II.13. Certains termes de l'équation (II.7) sont évalués grâce à un modèle dipolaire présenté dans la suite de ce chapitre. Par une approche électrodynamique, nous obtenons donc une reconstitution des coefficients de réflexion mesurés en simulation et expérimentalement pour des réseaux finis de SRRs.

Par la suite, la matrice de couplage sera explicitée. Ceci permettra d'accéder à une description du système en terme de modes et vecteurs propres. Cette caractérisation est indépendante de l'excitation que subit la structure et est donc propre au milieu.

II.2.4 Impédance et fonction de Green

Nous avons obtenu dans la partie précédente l'équation (II.6) qui permet de décrire le comportement collectif des résonateurs d'un milieu. Ici nous allons montrer que cette approche est entièrement équivalente à l'approche classiquement utilisée en théorie des ondes et qui utilise les fonctions de Green.

La théorie des fonctions de Green est un outil mathématique puissant qui permet d'analyser les phénomènes physiques régis par des équations différentielles non-homogènes. En électromagnétisme, la fonction de Green est utilisée pour résoudre l'équation de propagation de Helmholtz, la fonction de Green permettant de relier linéairement une distribution

vectorielle d'un champ à une distribution vectorielle de sources.

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r'}) q(\mathbf{r'}) \mathrm{d}^3 r' \tag{II.8}$$

q est la distribution de source. ϕ est le vecteur champ, de dimension 6, qui contient les 3 composantes spatiales des champs électriques et magnétiques.

Dans la théorie classique de la diffusion le champ $\phi(\omega, \mathbf{r})$ est solution de l'équation différentielle inhomogène :

$$\left[\nabla^2 + k_0^2 - \sigma(r)\right] \phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \tag{II.9}$$

f est le terme de source. Les effets dus aux hétérogénéités dans le milieu sont pris en compte dans l'expression de σ. L'introduction de la fonction de Green en espace libre G_0 qui est solution de l'équation $(\nabla^2 + k_0^2) G_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ engendre une forme intégrale de l'équation (II.9).

$$\int [\delta(\mathbf{r\text{-}r'}) + \sigma(r') G_0(\mathbf{r,r'})] \phi(\mathbf{r'}) \mathrm{d}^3 r' = \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r'}) f(\mathbf{r'}) \mathrm{d}^3 r'. \tag{II.10}$$

Le terme de droite est le champ ϕ_0 dû à la distribution de source f sans les hétérogénéités.

L'équation (II.10) est très proche d'une équation de type (II.6). En ré-introduisant un formalisme d'impédance, cette équation peut être réécrite de la façon suivante :

$$(\mathbf{1} + \mathbf{Z}_m / z_p) \mathbf{I} = \mathbf{S} / z_p \tag{II.11}$$

Chaque résonateur du milieu est décrit par son impédance propre z_p. Dans notre cas précis, tous les résonateurs ont la même impédance propre. $\mathbf{Z}_m$, qui décrit les interactions mutuelles est équivalent au terme $\int \sigma(r') G_0(\mathbf{r,r'})$. Le terme $\mathbf{S}/z_p$, relatif aux sources du milieu est équivalent au terme ϕ_0 soit $\int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r'}) f(\mathbf{r'}) \mathrm{d}^3 r'$. L'approche de diffusion classique peut ainsi être remplacée par un modèle d'impédance, lorsque le champ continu peut être approximé par un champ discontinu.

En pratique, on ne mesure pas directement une fonction de Green. On enregistre ou on envoie un courant ou une tension à un élément rayonnant. En conséquence, il est souvent nécessaire de faire appel à une théorie équivalente à celle des fonction de Green mais cette fois sous forme d'impédance. Cela a été réalisé par [57] dans le but de décrire les relations de renversement du temps en terme d'impédance et de matrice d'impédance. Les relations sont alors valides pour tout type de réseaux constitués d'éléments résonants. Dans [57], dans une approximation en champ lointain, renverser temporellement un champ électromagnétique consiste à enregistrer les courants induits dans une petite tige et une antenne magnétique (boucle de courant) et de les renverser temporellement.

Le formalisme lié à l'expression d'impédances est donc tout à fait approprié pour décrire les interactions électromagnétiques qui ont lieu entre les éléments sub-longueur d'onde résonants des milieux étudiés. Dans la partie suivante, nous présentons une approximation

dipolaire qui permet de d'expliciter les termes de l'impédance mutuelle du milieu.

II.2.5 Approximation et interactions dipolaires

Nous avons présenté un formalisme général permettant de décrire le couplage dans un réseau de résonateurs. Ce formaliste a pour but d'interpréter les résultats numériques et expérimentaux qui ont été présentés dans la première partie de ce chapitre. Ce formalisme va nous permettre d'interpréter les phénomènes d'interaction qui interviennent dans ces milieux. Deux types de milieux ont été envisagés. Un milieu composé de résonateurs asymétriques (SRRs à 3 gaps) et un milieu composé de résonateurs symétriques (SRRs à 4 gaps). Ces deux types de résonateurs bien que très similaires interagissent différemment avec le champ électromagnétique. On a vu que le SRR à 4 gaps avait une distribution de courant relative au comportement d'un dipôle magnétique, tandis que le SRR à 3 gaps avait une distribution de courant présentant à la fois le comportement d'un dipôle magnétique et celui d'un dipôle électrique. Dans le but d'étudier ces milieux, une approximation dipolaire s'avère parfaitement appropriée. Elle consiste à approximer chaque résonateurs par un dipôle magnétique et/ou à un dipôle électrique. Une telle approximation a été étudiée et développée par Sersic *et al.* [58,59]. Contrairement à ce qui est parfois fait dans la littérature, nous n'approximons pas un SRR seulement à un résonateur magnétique. Le SRR à 3 gaps, du fait de son asymétrie est modélisé par un dipôle électrique et un dipôle magnétique tandis que le SRR à 4 gaps est modélisé uniquement à l'aide d'un dipôle magnétique. Pour les deux cellules étudiées, la figure II.14 schématise l'approximation dipolaire réalisée.

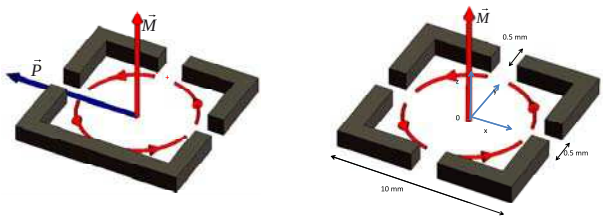


Figure II.14 – Modélisations dipolaires réalisées pour deux géométries d'anneaux fendus.

Cette modélisation est applicable à tous types de résonateurs et est pertinente lorsque l'on souhaite travailler autour de la fréquence du mode fondamental de résonateurs.

Avec l'approximation dipolaire, la description d'un résonateur est largement simplifiée puisqu'elle se réduit à l'étude du courant qui le parcourt, soit à un scalaire. Pour des conducteurs fins, le moment magnétique au centre de la structure, ainsi que le moment électrique sont donnés par :

$$\mathbf{m} = 1/2 \int \mathbf{I}(l)\mathbf{r} \times d\mathbf{l} \tag{II.12}$$

$$\mathbf{p} = 1/j\omega \int \partial_l \mathbf{I}(l)\mathbf{r} d\mathbf{l} \tag{II.13}$$

Près de la fréquence fondamentale, la cellule est ainsi réductible un seul degrés de liberté : son amplitude complexe, soit l'intensité de courant (complexe) **I**. Cette observation permet d'exprimer les moments magnétiques et électriques proportionnellement à **I**. Pour le SRR à 4 gaps, on assume le fait que le courant est uniformément distribué à la surface du résonateur. Pour le SRR à 3 gaps, le courant peut être approximé par la somme de deux courants. Un courant I_0 uniformément distribué autour du SRR et un courant nul sur tous les cotés excepté le coté sans gap. On obtient avec ces approximations des expressions simplifiées des moments magnétiques et électriques en fonction des courants :

$$\mathbf{m} = SI\mathbf{u}_m \tag{II.14}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{I}d}{j\omega}\mathbf{u}_d \tag{II.15}$$

où S est la surface équivalente du dipôle magnétique et $\mathbf{u}_m$ est sa direction. d représente la longueur équivalent du dipôle électrique et $\mathbf{u}_d$ sa direction.

Étant donné le caractère résonant des cellules, nous pouvons supposer que **m** et **p** ne dépendent que très faiblement de la fréquence ainsi que de la position de la cellule dans milieu. A partir de ces expressions dipolaires, nous pouvons évaluer le flux électromagnétique reçu sur une cellule 2 lorsque la cellule 1 émet un champ électromagnétique. Nous exprimons donc la force électromotrice induite sur la cellule 2 par la cellule 1 :

$$emf_{21} = -j\omega \iint \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 + \oint \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_2. \tag{II.16}$$

Le premier et le second termes correspondent respectivement à la force électromotrice induite par le dipôle magnétique et le dipôle électrique. $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{B}_1$ sont le champ électrique et le champ magnétique générés par la cellule 1 sur la cellule 2. Leur expression est issue de l'expression bien connue du rayonnement de dipôles magnétiques et électriques.

$$\mathbf{E} = \frac{e^{jk_0 r}}{4\pi r\epsilon_0}\left[\left(jk_0 + \frac{1}{r}\right)\left[\frac{3(\mathbf{u_r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u_r} - \mathbf{p}}{r}\right] + k_0^2\mathbf{u}_r \times (\mathbf{p}\times\mathbf{u_r}) + j\frac{k_0}{c_0}\left(jk_0 + \frac{1}{r}\right)(\mathbf{u_r}\times\mathbf{m})\right], \tag{II.17}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e^{jk_0 r}}{4\pi r}\left[\left(jk_0 + \frac{1}{r}\right)\left[\frac{3(\mathbf{u_r}\cdot\mathbf{m})\mathbf{u_r} - \mathbf{m}}{r}\right] + k_0^2\mathbf{u_r} \times (\mathbf{m}\times\mathbf{u_r}) + j\omega\left(jk_0 - \frac{1}{r}\right)(\mathbf{p}\times\mathbf{u_r})\right]. \tag{II.18}$$

Avec la configuration géométrique définie sur la figure. II.15, cette expression devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{I\eta e^{jk_0 r}}{4\pi r}\left[d\left(1-\frac{j}{k_0 r}\right)\left[\frac{3\cos(\theta)\mathbf{u_r}-\mathbf{u}_d}{r}\right]\right.\\ &\left.-jdk_0\left(\mathbf{u}_d-\cos(\theta)\mathbf{u}_r\right)-k_0 S\left(-k_0+\frac{j}{r}\right)(\mathbf{u}_\theta)\right], \qquad \text{(II.19)}\\ \mathbf{B} &= \frac{Ie^{jk_0 r}\mu_0}{4\pi r}\left[-S\left(jk_0+\frac{1}{r}\right)\frac{\mathbf{u}_m}{r}+Sk_0^2\mathbf{u}_m\right.\\ &\left.+\left(jk_0+\frac{1}{r}\right)d\sin(\theta)\mathbf{u}_m\right]. \qquad \text{(II.20)}\end{aligned}$$

avec $\eta = 1/(\epsilon_0\omega)$. Pour simplifier l'expression (II.16), nous faisons l'hypothèse que les champs électriques et magnétiques sont constants sur le domaine d'intégration.

$$emf = -i\omega\mathbf{B}_1.S\mathbf{u}_m + \mathbf{E}_1.d\mathbf{u}_d \qquad \text{(II.21)}$$

De cette façon, l'expression de la fem ne dépend que de $\mathbf{r}$ et de l'angle θ.

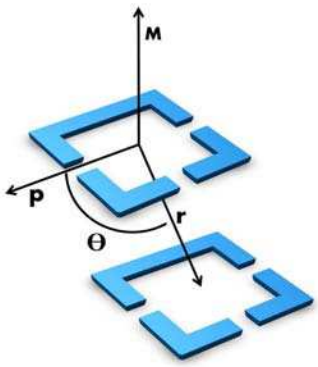


Figure II.15 – Vue schématique utilisée pour l'estimation de l'interaction entre dipôles, ici entre des cellules à 3 gap. θ est l'angle entre le vecteur distance **r** qui sépare les deux cellules et le moment électrique dipolaire.

Dans le cas de dipodes magnétiques alignés sur l'axe perpendiculaire au plan du réseau, la partie qui dépend de l'induction magnétique ne dépend pas de θ. On peut réécrire la fem en fonction de θ et r :

$$\begin{aligned}emf_{12}(r,\theta) &= \frac{I\eta e^{jk_0 r}}{4\pi r^3 k_0}\left[S^2\left(-jk_0^4 r^2-k_0 r^3+jk_0^2\right)\right.\\ &\left.+d^2\left(-jk_0^2 r^2\sin^2(\theta)+[rk_0-j]\left[3\cos^2(\theta)-1\right]\right)\right]. \qquad \text{(II.22)}\end{aligned}$$

Lorsque l'on se limite aux termes en $1/r^3$, la valeur maximale et la valeur minimale de la fem sont obtenues respectivement pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$:

$$\begin{aligned}emf_0 &= \frac{jI\omega}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{-2d^2}{\omega^2}+\frac{S^2}{c^2}\right), \qquad \text{(II.23)}\\ emf_{\pi/2} &= j\frac{I\omega}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{d^2}{\omega^2}+\frac{S^2}{c^2}\right). \qquad \text{(II.24)}\end{aligned}$$

A partir de cette expression il est possible de comparer le poids relatif des interactions

magnétiques et électriques. Lorsque $d \geq S\omega/c$, les effets dus aux dipôles électriques sont largement supérieurs aux effets dus aux dipôles magnétiques. Dans ce cas, lorsque θ augmente, la fem passe d'une valeur négative à une valeur positive. Notons ici encore que l'expression de la fem peut être ramenée à la fonction de Green par l'équivalence :

$$fem/\mathbf{I} \equiv \sigma(r')G(\mathbf{r}, \mathbf{r'}) \tag{II.25}$$

Pour évaluer les force électromotrices que nous avons obtenues avec le modèle dipolaire, nous les avons comparées à celles obtenues en utilisant l'expression bien connue de l'inductance mutuelle entre deux boucles (formule de Neumann). Cette expression est notamment utilisée par Shamonina *et al* [53].

$$M_{1/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\dot{\mathbf{l}}_2}{d_{12}} \tag{II.26}$$

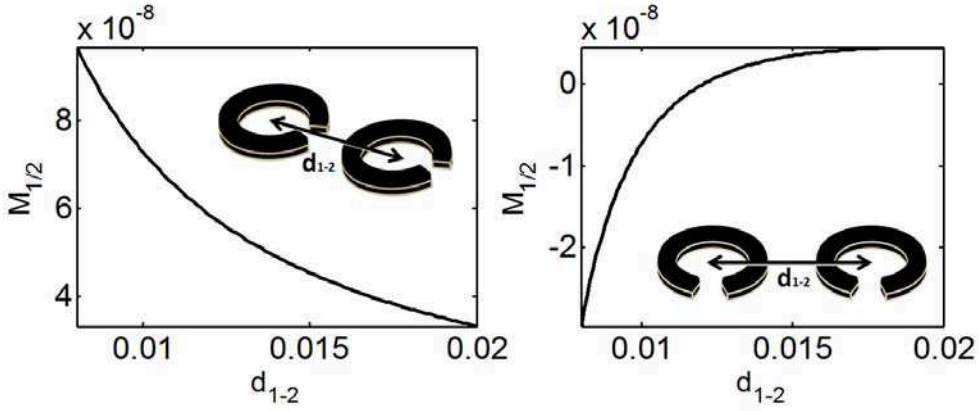


Figure II.16 – Inductance mutuelle obtenue avec l'expression (II.26) pour des SRRs décalés perpendiculairement ou parallèlement aux gaps.

Cette expression est obtenue en développant l'expression du flux généré par la boucle 1 sur le contour C_2. d_{12} est la distance entre les deux boucles. Les valeurs calculées sont du même ordre de grandeur et présentent des variations similaires à celles obtenues avec le modèle dipolaire.

Dans cette partie, nous avons ainsi obtenu analytiquement une expression des interactions mutuelles qui surviennent entre les résonateurs d'un milieu ordonné. Dans un premier temps nous allons utiliser les résultats obtenus pour obtenir la relation de dispersion de milieux infinis de SRRs à 3 gaps et de SRRs à 4 gaps.

II.3 Application du modèle dipolaire

II.3.1 Relation de dispersion d'un réseau infini de résonateurs

Intéressons-nous à un milieu de taille infinie de résonateurs sub-longueur d'onde. Le fait d'utiliser un milieu infini périodique nous permet une étude quantitative en utilisant un formalisme de type ondes de Floquet-Bloch [60]. Nous supposons que le courant dans la cellule (l+1,m+1) est égal à l'expression :

$$I(l+1,m+1) \quad = \quad e^{ik_x l + ik_y m} I(l,m). \tag{II.27}$$

Cette approche n'est qu'un cas particulier du formalisme de Floquet-Bloch et peut être directement reliée au théorème de Bloch qui donne les solutions de l'équation de Schrödinger, indépendante du temps pour un potentiel périodique donné. Ces fonctions d'onde sont alors de la forme :

$$\phi(x) \quad = \quad e^{ikx}.u_{\vec{k}}(x) \tag{II.28}$$

où $u_{\vec{k}}(x)$ est une fonction périodique.

Si l'on se limite à l'interaction avec les 4 plus proches voisins, c'est à dire dans notre cas à l'interaction avec les résonateurs placés en (l,m-1),(l,m+1),(l+1,m) et (l+1,m), l'équation (II.4) se simplifie :

$$(j\omega L_p + \frac{1}{j\omega C_p} + R_p) I(l,m) + \sum_{(l',m')\in[-1,1],(l',m')\neq 0} Z_m(l'-l, m'-m) I(l',m') = 0. \tag{II.29}$$

En introduisant l'expression des courants (II.27), et en notant que $Z_m(l+1,m) = Z_m(l-1,m)$, l'équation devient :

$$\begin{aligned}(j\omega L_p + \frac{1}{j\omega C_p} + R_p) I(l,m) \\ + \left[Z_m(l+1,m)(e^{-ik_x l} + e^{ik_x l}) + Z_m(l,m+1)(e^{-ik_y m} + e^{ik_y m}) \right] I(l,m) = 0.\end{aligned} \tag{II.30}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\begin{aligned}(j\omega L_p + \frac{1}{j\omega C_p} + R_p) I(l,m) \\ + 2\left[Z_m(l+1,m)\cos(k_x a) + Z_m(l,m+1)\cos(k_y a) \right] I(l,m) = 0.\end{aligned} \tag{II.31}$$

En restant dans l'approximation dipolaire, et en ne considérant que les termes de champs

proches (en $1/r^3$), on a les expressions des Z_m :

$$\begin{aligned} Z_m(l+1,m) &= \frac{j\omega}{4\pi\epsilon_0 r^3}(\frac{-2d^2}{\omega^2}+\frac{S^2}{c^2}) \\ Z_m(l,m+1) &= j\frac{\omega}{4\pi\epsilon_0 r^3}(\frac{d^2}{\omega^2}+\frac{S^2}{c^2}) \end{aligned} \tag{II.32}$$

On extrait alors une expression de la pulsation en fonction de k_x et k_y.

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1+C_pC_m^{-1}[-2\cos(k_xa)+4\cos(k_ya)]}{1-L_mL_p^{-1}[2\cos(k_xa)+2\cos(k_ya)]}}. \tag{II.33}$$

Dans cette équation, directement issue des équations (II.31) et (II.32), C_m est donnée par $4\pi\epsilon_0 a^3/d^2$ et L_m est donnée par $\mu_0 S^2/4\pi a^3$. Lorsque C_m est très grande et L_m très faible, il n'y a pas de couplage, ω est égales à ω_0. Lorsque $L_m >> L_p$ et $C_m \sim C_p$, le couplage inductif domine et la relation (II.33) est la relation de dispersion d'onde magnéto-inductives. [53, 61, 62]. Cette expression peut également être obtenue à l'aide d'un formalisme Lagrangien [63, 64].

Pour une petite boucle carrée dont les dimensions sont données figure II.14, l'inductance propre est évaluée à 2,4 nH. Ce modèle électrique équivalent est évalué en utilisant [65] (p. 245), les courants étant supposés uniformes. Cette valeur est surévaluée car les courants ne sont en réalité pas complètement uniformes tout autour de la boucle. Une inductance de 0,4 nH (respectivement 0,5 nH) pour la SRR à 3 gaps (respectivement SRR à 4 gaps) est plus cohérente avec les résultats de simulation. Une capacité de 1,6 pF (respectivement 0,8 pF) est ensuite déduite à partir de la fréquence de résonance de la cellule seule.
On peut également évaluer C_m et L_m avec le modèle dipolaire. La longueur du dipôle est approximée par la largeur du gap dans les SRR. d est nul dans le cas du SRR à 4 gaps car il n'y a pas de moment électrique. On obtient une estimation de l'inductance de 0,1 nH. Cette estimation est proche de la valeur trouvée avec la formule de la double intégrale de Neumann.

En utilisant ces valeurs, la courbe de dispersion pour le réseau de SRR à 3 gaps (Fig II.17(a)) et la courbe de dispersion pour le réseau de SRR à 4 gaps (Fig II.17(b)) sont tracées. Dans le cas du réseau à 3 gaps, la courbe de dispersion n'est pas la même dans la direction ΓXM et dans la direction $\Gamma X'M$ car la cellule est anisotrope.

Grâce à l'équation (II.33), on observe que pour un réseau infini, l'intervalle de fréquence pouvant se propager en fonction du vecteur d'onde est fortement augmenté du fait du couplage. Celui-ci est compris entre les valeurs $\omega_0(1-6C_pC_m^{-1})/(1+4L_mL_p^{-1})$ et la valeur $\omega_0(1+6C_pC_m^{-1})/(1-4L_mL_p^{-1})$. Ces deux extrema sont en accord avec le splitting fréquentiel obtenu sur les figures II.9 et II.10.

Nous avons retrouvé en analysant des milieux infinis de SRRs à 3 gaps et 4 gaps des caractéristiques constatées sur les figures II.9 et II.10. Cependant, on observe ici que les nombres d'onde supportés par le milieu forment un continuum alors qu'ils sont quantifiés dans un milieu de taille finie. De plus, les résultats obtenus ne sont pas suffisants pour

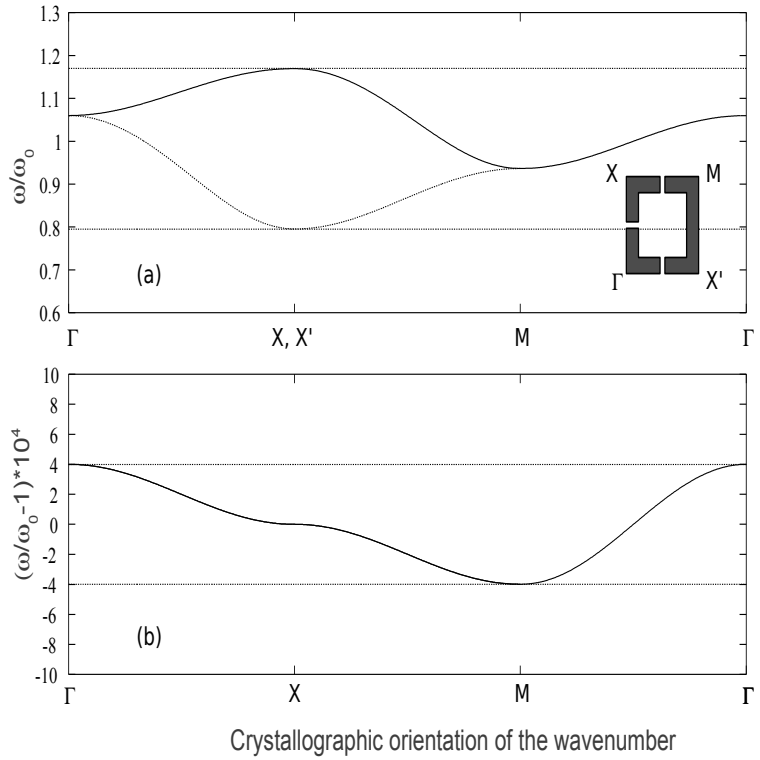


Figure II.17 – Relations de dispersion pour un milieu plan infini de cellules à 3 gaps (a) et à 4 gaps (b). La relation est tracée sur les 4 axes majeur de la zone de Brillouin. La ligne continue suit le chemin ΓXM, la ligne discontinue suit le chemin $\Gamma X'M$. Les lignes discontinues horizontales présentent les valeurs maximales et minimales des courbes.

expliquer les phénomènes d'interactions fortes, les levées de dégénérescence et le rayonnement de milieux finis qui ont été observés dans la première partie de ce chapitre. Pour ce faire, une analyse modale est développée.

II.3.2 Modes propres d'un réseau fini de résonateur sub-longueur d'onde

Intéressons-nous au cas de réseaux finis de résonateurs sub-longueur d'onde. Nous avons grâce à une approche matricielle obtenu l'équation (II.6) qui relie les sources, les courants et les impédances mutuelles et propres d'une structure. Les termes de la matrice de couplage $\mathbf{Z}_m$ ont été analytiquement développés à partir d'une modélisation dipolaire. Grâce au principe de réciprocité, cette matrice de couplage $\mathbf{Z}_m$ est symétrique. Elle est à valeurs complexes, les champs dipolaires étant complexes. On peut procéder à une décomposition en valeurs singulières (SVD) de $\mathbf{Z}_m$ ce qui permet d'exprimer $\mathbf{Z}_m$ en fonction de ces valeurs propres, et de ces vecteurs propres associés.

$$\mathbf{Z}_m = \sum \mathbf{U}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}} \lambda_n \mathbf{U}_n, \tag{II.34}$$

λ_n sont les valeurs propres complexes de $\mathbf{Z}_m$ et $\mathbf{U}_n$ sont les vecteurs propres complexes associés. Les vecteurs $\mathbf{U}_n$ forment une base orthonormale. Ils forment également une base orthonormale pour la matrice d'impédance propre $\mathbf{Z}_p$ car celle-ci est déjà diagonale et

proportionnelle à la matrice identité. On peut donc écrire :

$$\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_p \;=\; \sum \mathbf{U}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}(\lambda_n + z_p)\mathbf{U}_n, \tag{II.35}$$

z_p est l'impédance propre des résonateurs. On déduit de cette dernière équation l'expression analytique des courants dans le milieu :

$$\mathbf{I} \;=\; \sum \frac{\mathbf{U}_n^H \mathbf{U}_n}{\lambda_n + z_p}\mathbf{S}. \tag{II.36}$$

Il y a un phénomène de résonance lorsque le dénominateur de l'équation (II.36) qui donne la variation fréquentielle des courants dans le milieu, tend vers zéro. Parce que la partie réelle de $\lambda_n + z_p$ est toujours positive et pratiquement constante, le minimum au dénominateur est obtenu lorsque la partie imaginaire d'une valeur propre λ_n est égale à la partie imaginaire de $-z_p$. Lorsque ce critère est atteint pour une valeur propre λ_x, on a excitation du mode x lié à cette valeur propre. Cependant, bien que les cellules du milieu soient fortement résonantes et donc que z_p varie fortement avec la fréquence (contrairement aux valeurs propres λ_n), ce critère n'est pas toujours atteint. S'il n'est pas atteint, le mode x n'est alors pas résonant. La valeur propre λ_x ne s'exprime pas. On peut grâce à cette expression, expliquer les phénomènes résonants et les levées de dégénérescence de modes dans un milieu fini excité localement.

Nous avons appliqué ce modèle aux deux milieux, constitués de cellules à 3-gaps ou de cellules à 4-gaps introduits dans la section précédente. La partie réelle de l'impédance propre est prise à 0.07 Ohm. C'est la résistance radiative d'une petite boucle de courant de même rayon que nos SRRs [66]. Cette valeur est très approximative, les géométrie étant plus complexes qu'une simple boucle. Ce terme décrit le double effet des perte radiatives et des pertes ohmiques d'une cellule. Sur la figure II.18 est tracée en pointillé la variation fréquentielle du courant obtenu sur une cellule d'un milieu de 16 SRRs à 3 gaps excité localement. En traits continus (rouge) sont tracées les parties imaginaires des valeurs propres de la matrice de couplage et en trait discontinu à points (noire) est tracée la variation de la partie imaginaire de l'impédance propre. On observe bien des phénomènes de résonances lorsque $z_p \cong -\lambda_n$. Sur la figure II.19, les mêmes éléments sont tracés mais cette fois-ci pour le milieu constitué de cellules à 4 gaps. Une seule résonance est observée.

Pour le réseau de SRRs à 3 gaps, le couplage est important du fait de la présence d'une résonance électrique sur la SRR. Les valeurs propres sont suffisamment distinctes pour que l'on puisse observer plusieurs résonances. Certains modes sont quand même dégénérés, c'est pourquoi on ne compte pas 16 résonances. Pour le réseau à 4 gaps, les valeurs propres du milieu ont des valeurs très proches les unes des autres et la condition $z_p \cong -\lambda_n$ se produit pour toutes les valeurs propres dans un très faible intervalle de fréquence. Ainsi, le couplage magnétique étant faible, et on ne peut observer de levée de dégénérescence du mode fondamental. Il faudrait que les résonances aient des facteurs de qualité très élevés pour qu'il y aie levée de dégénérescence. La résonance observée est donc due à une superposition de tous les modes. Ces résultats permettent d'expliquer les courbes de

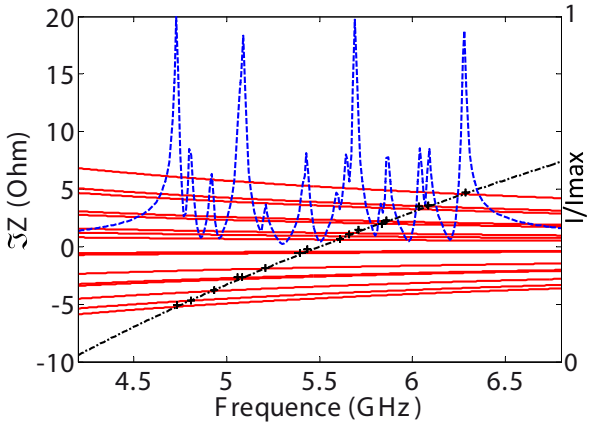


Figure II.18 – La courbe en traits continus rouge et la courbe noire en traits discontinus à points représentent respectivement les parties imaginaires des valeurs propres et de l'impédance propre z_p obtenus analytiquement pour un milieu de cellules à 3-gaps. La courbe en traits discontinus bleue est le module du courant obtenu sur une cellule du milieu.

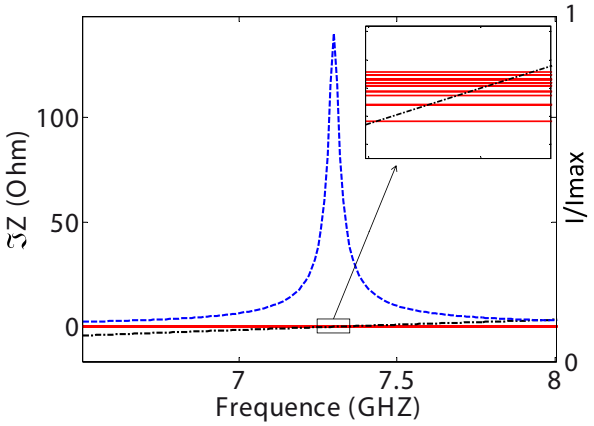


Figure II.19 – La courbe en traits continus rouge et la courbe noire en traits discontinus à points représentent respectivement les parties imaginaires des valeurs propres et de l'impédance propre z_p obtenus analytiquement pour un milieu de cellules à 4-gaps. La courbe en traits discontinus bleue est le module du courant obtenu sur une cellule du milieu. L'icône en haut à droite est un zoom permettant de présenter la distinction des modes.

coefficients de réflexion obtenues dans la partie précédente.

II.3.3 Vecteurs propres d'un réseau fini de résonateur sub-longueur d'onde

Grâce au modèle dipolaire nous avons pu mettre en évidence le comportement résonant d'un milieu constitué de résonateurs sub-longueur d'onde placés proches les uns des autres. Intéressons-nous à une description de ce milieu à l'aide de vecteurs propres. Du fait de la symétrie du problème, les solutions pour les vecteurs propres sont données par le produits

des deux solutions : $I(i_x, i_y) = I_0\psi_x(i_x)\psi_y(i_y)$. Les résonateurs étant tous identiques, l'impédance mutuelle ne dépend que de la différence de position entre 2 résonateurs. On obtient une solution approchée pour l'amplitude complexe du vecteur propre à la position (i_x,i_y) :

$$U^{(n_x,n_y)}_{(i_x-1)M_y+i_y} \quad \propto \quad I_0 \sin(k_x^{n_x} a i_x) \sin(k_y^{n_y} a i_y) \tag{II.37}$$

avec $k_x^{n_x} = n_x\pi/a(M_x-1)$ et $k_y = n_y\pi/a(M_y-1)$ pour $(n_x, n_y)\epsilon[1 : M_x-1]\times[1 : M_y-1]$. Ainsi il y a M_xM_y modes, M_x étant le nombre de cellules sur l'axe x et M_y le nombre de cellules sur l'axe y. Plus le réseau est grand, plus cette expression est exacte. Les expressions de $k_x^{n_x}$ et $k_y^{n_y}$ sont obtenues en posant le courant nul en dehors du milieu [53]. Toute réponse du réseau sera donc une somme pondérée de ces modes propres, qui forment une base orthonormale pour le milieu. En ne tenant compte que des effets dus aux champs proches, c'est à dire aux termes en $1/r^3$ dans l'expression du rayonnement des dipôles, on obtient une expression analytique de **ZI**.

$$\begin{aligned} \mathbf{ZI} &= \sum_{i_x,i_y} [Z_x\delta_{i_x,i_x-1} + Z_y\delta_{i_y,i_y+1}] I^{n_x,n_y}(i_x, i_y) && \text{(II.38)} \\ &= \sum_{i_x,i_y} [2Z_x \cos(k_x^{n_x} a i_x) + 2Z_y \cos(k_y^{n_y} a i_y)] I_0. && \text{(II.39)} \end{aligned}$$

L'expression des valeurs propres est donc :

$$\lambda_{(n_x,n_y)} \quad = \quad 2Z_x \cos(\frac{\pi n_x}{M_x-1}) + 2Z_y \cos(\frac{\pi n_y}{M_y-1}), \tag{II.40}$$

Z_x et Z_y sont les impédances mutuelles sur l'axe x et l'axe y directement issues des expressions de fem (II.23).

Sur la figure II.20 sont présentés les modes propres d'une structure de 4 par 4 SRRs à 3 gaps, obtenus analytiquement. On retrouve bien les distributions de champ magnétique obtenus en simulation et présentés sur la figure II.9. On observe sur cette figure notamment que l'ordre des modes que l'on obtient par calcul est identique à celui obtenu en simulations. Le comportement anisotrope du réseau est de cette façon également mis en évidence.

Notons que pour le milieu à 4 gaps, les valeurs Z_x et Z_y sont égales. Ainsi, lorsque l'on échange n_x et n_y, on obtient les mêmes valeurs propres. On peut donc en conclure que pour un milieu carré de SRRs doublement symétriques ou possédant une symétrie de rotation de 90 degrés, au moins la moitié des modes sont dégénérés. Il y a $N*(N-1)/2$ paires de modes avec les mêmes valeurs propres.

Nous avons développé un modèle permettant de comprendre et de retrouver les caractéristiques de milieux de résonateurs sub-longueur d'onde. Ce modèle permet d'évaluer les forces d'interactions qui agissent entre les résonateurs du milieu et d'évaluer par ce biais les effets du couplage sur le comportement résonant du milieu. La force du couplage électrique par rapport au couplage magnétique a été mise en évidence. Les modes propres du milieu ont été analytiquement obtenus.

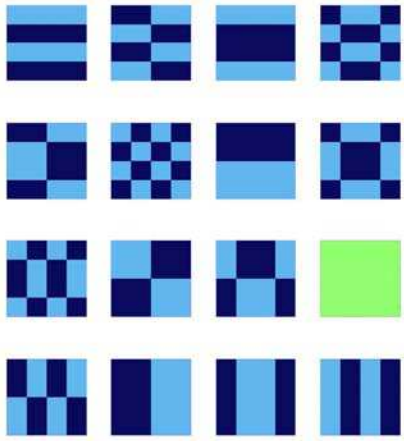


Figure II.20 – Visualisation de la phase des 16 vecteurs propres obtenus avec le modèle dipolaire, pour un milieu de 4 part 4 cellules à 3-gap .

Ce modèle permet en outre de connaître la distribution en courant dans un milieu constitué de résonateurs électromagnétiques sub-longueur d'onde. Dans la partie suivante, toujours en nous basant sur une approximation dipolaire, nous analysons la réponse de milieux infinis excités localement ou par une onde plane. A partir du lien établi entre la matrice de couplage que nous avons calculée et la fonction de Green, nous étudions la présence de bandes interdites dans les relations de dispersion de réseaux infinis de résonateurs en fonction des dimensions des milieux dans lesquels ils sont étudiés. Nous cherchons à comprendre comme se couplent ces réseaux avec le "vide" et à savoir si ces réseaux autorisent la propagation d'onde des "modes du vide".

II.4 Bandes interdites et structures de bandes pour des systèmes infinis localement résonants

II.4.1 Bandes interdites d'hybridation : existant et observation

Au cours de ce chapitre, nous avons étudié des milieux plans de résonateurs périodiquement agencés sur des échelles sub-longueur d'onde. Les relations de dispersion de tels milieux, lorsque les résonateurs sont approximés par des dipôles électriques et magnétiques ont été obtenues. Les relations de dispersion ont été calculées en considérant la propagation d'ondes et les phénomènes d'hybridation de modes pour des milieux localement excités.

D'après la relation de dispersion tracée figure II.21 qui a été calculée pour un milieu infini de résonateurs (formés de dipôles électriques et magnétiques), seule une bande de fréquence, autour de la fréquence de résonance des cellules du milieu, autorise la propagation des ondes. Ainsi seules les ondes ayant des fréquences qui correspondent aux fréquences des modes propres du systèmes peuvent se propager.

Nous allons comparer ce résultats aux résultats obtenus avec d'autres approches. Pour cela, nous nous référons aux travaux de Yariv [54] qui a étudié des structures multi-couches

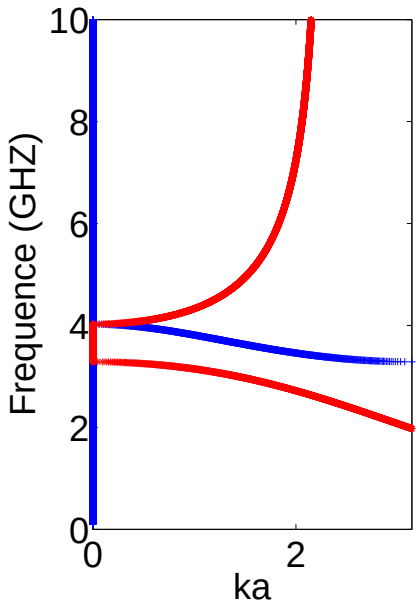
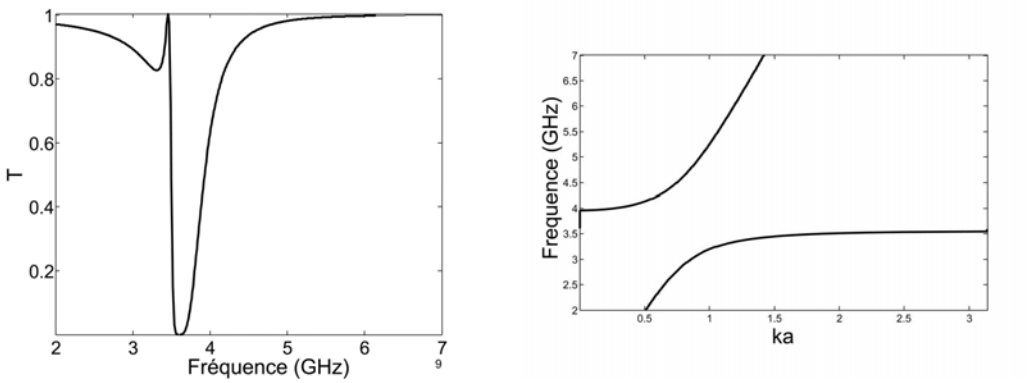


Figure II.21 – Courbe de dispersion issue du modèle dipolaire pour un réseau bidimensionnel de SRRs. En bleue est tracée la partie réelle et en rouge la partie imaginaire du vecteur d'onde.

unidimensionnelles, de Lemoult [67] qui a étudié des milieux infinis de cylindres (infinis sur leur axe) et de Shamonina [61] qui a étudié des milieux infinis plans de SRRs.

Yariv mène une approche matricielle basée sur une analyse type diffusion pour décrire la propagation d'onde dans un réseau de résonateurs couplés à un guide d'onde. Cette approche exclut le couplage champ proche entre les résonateurs. Elle lui permet d'obtenir les relations de dispersion de chaînes de résonateurs dans un milieu contenant un continuum d'ondes propagatives. Il obtient les coefficients de réflexion et de transmission en fonction du couplage entre le guide d'onde et chaque résonateur, en fonction des pertes dans la cavité et en fonction de la fréquence de résonance de la cavité. La figure II.22



(a) (b)

Figure II.22 – (a) Coefficient de transmission et (b) courbe de dispersion obtenus pour une chaîne de résonateurs à forts facteur de qualité, placée dans un guide d'onde.

présente le coefficient de transmission et la courbe de dispersion issus de la modélisation développée par Yariv. La courbe de dispersion obtenue présente une bande interdite et ne présente pas de modes discrets résonants. Lemoult, qui étudie des structures périodiques bidimensionnelles dans des espaces bidimensionnels obtient également des courbes de dispersion présentant une large bande interdite au dessus de la fréquence de résonance des résonateurs du milieu [37].

Plaçons nous dans les conditions d'études des travaux de Yariv. Si l'on reprend les réseaux de résonateurs de type SRRs que nous avons étudiés, nous observons que la courbe de dispersion de ces derniers est fortement modifiée lorsque l'on modifie l'environnement des réseaux. En plaçant un réseau de SRRs dans un espace dont la dimension est égale à celle du réseau, nous allons montrer que nous obtenons des courbes de dispersion présentant une bande interdite importante situé au delà de la fréquence de résonance des résonateurs.

Pour cela, considérons un réseau 1D de résonateurs, excité par une onde plane tel que présenté sur la figure II.23(a). Différentes configurations ont été étudiées. La première est un réseau unidimensionnel de SRRs (figure II.23(a)). Sur la figure II.23(b) est tracé le coefficient de transmission de cette dernière structure lorsqu'elle est placée dans un guide avec des conditions aux limites sur le champ magnétique et le champ électrique.

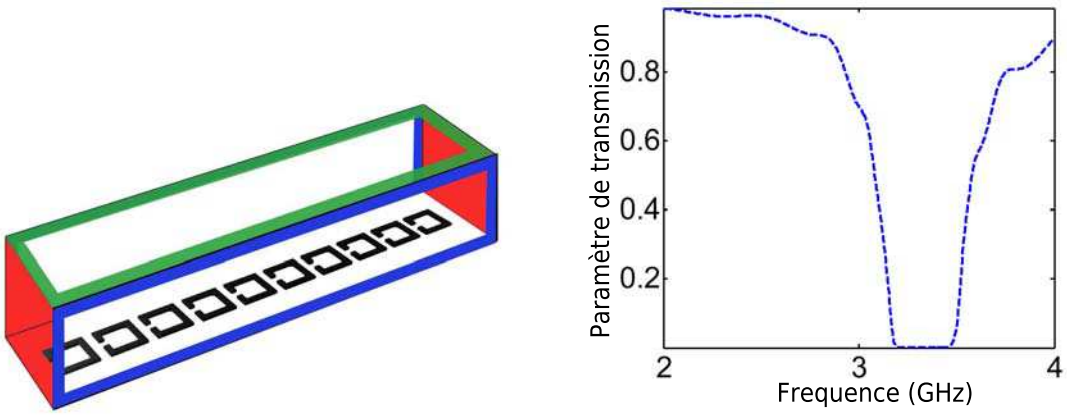
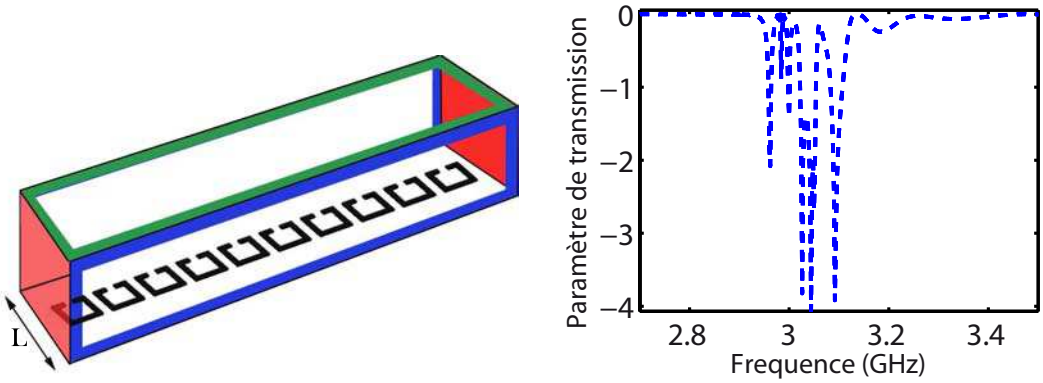


Figure II.23 – (a) Structure simulée, composée de 10 SRRs à un gap. Les conditions limites sont égales à $H_{transverse=0}$ sur (Oxz) et $E_{transverse=0}$ sur les plans (Oxy). L'excitation est réalisée avec une onde plane (en rouge). (b) Coefficient de transmission pour la structure simulée.

Une bande interdite est observée à partir et au dessus de la fréquence de résonance des résonateurs. On observe pas de résonances individuelles.

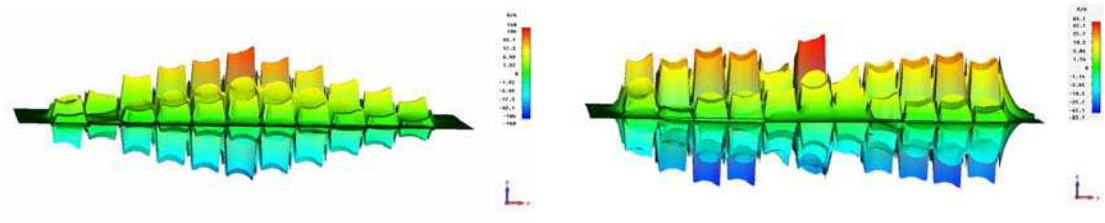
Si, maintenant, on étudie dans les mêmes conditions un réseau unidimensionnel où les SRRs sont tournés de 90° par rapport au réseau précédent, on n'observe plus sur la figure II.24 de bande interdite mais un ensemble de résonances marquées. Cet ensemble de



(a) (b)

Figure II.24 – (a) Structure simulée, composée de 10 SRRs dont les fentes sont placées transversalement au champ électrique issu de l'onde plane. Les conditions limites sont égales à $H_{transverse=0}$ sur (Oxz) et $E_{transverse=0}$ sur les plans (Oxy) pour L=25mm. L'excitation est réalisée par une onde plane (en rouge). (b) Coefficient de transmission pour la structure simulée.

résonances peut également être décrit comme une bande atténuée (et non pas une bande interdite).



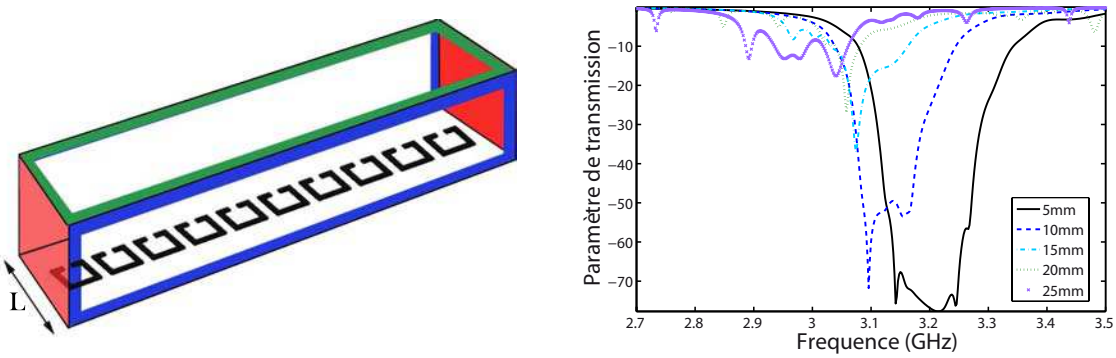
(a) (b)

Figure II.25 – Carte de l'amplitude du champ magnétique (a) sur une résonance et (b) hors d'une résonance pour la configuration présentée figure II.24

Le couplage entre les résonateurs dans la seconde configuration est très fort, comparé au couplage dans la première configuration. Ce point permet interprétation de les derniers résultats. Le milieu "vu" par la structure dans le second cas est vu comme un milieu 2D alors qu'il est "vu" comme un milieu 1D dans le premier cas.

Pour vérifier cette hypothèse, nous avons fait varier la distance des conditions limites autour du réseau unidimensionnel. Lorsque L, qui conditionne la distance des conditions limites électriques, diminue (cf. II.26(a)), une bande interdite très marquée apparait. Lorsque L est grand, cette bande interdite est très peu marquée et on observe des résonances discrètes telles que sur la figure II.24. La dimension de l'espace dans lequel est considéré le réseau est donc primordiale.

Une différence entre nos travaux et ceux de Yariv et Lemoult vient également de la présence dans la relation de dispersion de la courbe des ondes planes se propageant dans



(a) (b)

Figure II.26 – (a) Structure simulée, composée de 10 SRRs dont les fentes sont placées transversalement au champ électrique issu de l'onde plane. Les conditions limites sont égales à $H_{transverse=0}$ sur (Oxz) et $E_{transverse=0}$ sur les plans (Oxy). L'excitation est réalisée par une onde plane (en rouge). (b) Paramètre de transmission de la structure simulée pour différentes valeurs de L.

le vide et ne couplant pas au milieu. Ces ondes sont absentes de la relation de dispersion obtenue avec le modèle dipolaire. Les travaux de Shamonina [61] qui étudient des réseaux 1D et 2D en espace libre de résonateurs sub-longueur d'onde sont révélateurs. Pour prendre en compte le couplage entre les résonateurs du milieu et les ondes propagatives du milieu, une ligne de transmission couplée aux résonateurs est ajoutée. Cette méthode permet d'extraire de la courbe de dispersion les ondes planes qui se propagent dans l'espace et qui ne se couplent pas avec le réseau. Elle obtient ainsi la relation de dispersion tracée en figure II.27 où figurent à la fois les modes résonants de la structure et les ondes planes ne couplant pas avec cette dernière.

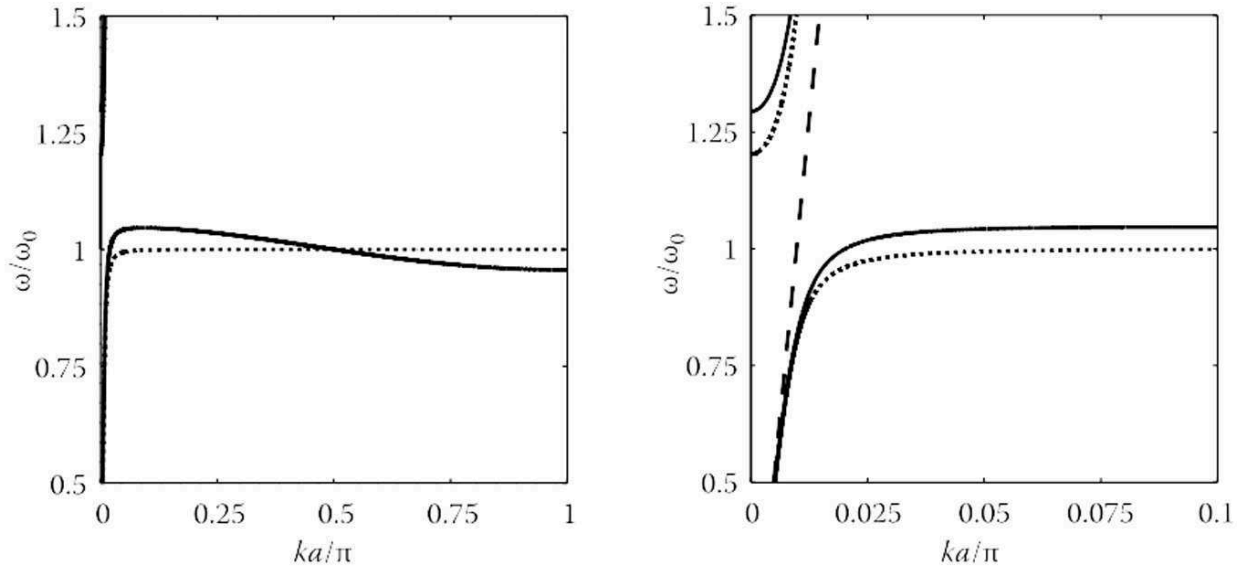


Figure II.27 – Courbe de dispersion obtenue par Shamonina et al [61] pour un réseau 1D de SRR couplé à une ligne de transmission. La figure de droite est un zoom de la figure de gauche.

La question qui se pose est la suivante : pourquoi n'observe-t'on pas sur notre relation de dispersion les ondes en $k = \omega/c$, qui se propagent dans le vide et qui ne se couplent pas avec la structure ? Il semble que le réseau ne supporte pas les modes propagatifs du vide. Plusieurs éléments peuvent être la cause de problème. La dimension du milieu intervient, et notamment cette dimension comparée à la dimension de l'espace dans lequel est considéré le milieu. La discrétisation du milieu doit également être prise en compte, et donc la distance inter-cellules. Contrairement aux derniers travaux présentés, nous souhaitons montrer que les ondes planes sont prises en comptes dans notre modélisation. Nous allons étudier ces différents points en repartant de l'équation fondamentale que nous avons obtenue qui relie l'impédance propre des résonateurs, les interactions dans le milieu et les sources.

II.4.2 Structures de bandes pour des systèmes infinis continus

Nous souhaitons reprendre notre modèle en utilisant le fait que le terme de couplage que nous obtenions dans l'équation est directement relié à la fonction de Green dans le milieu. Pour cela, nous recherchons d'abord les expressions de cette dernière en fonction des dimensions des espaces dans lesquels les structures sont considérés. Dans les calculs qui suivront, c, la vitesse de la lumière est posée égale à 1.

Reprenons l'équation (II.4) (II.6) obtenue précédemment :

$$(\mathbf{Z}_m + z_p)\mathbf{I} = \mathbf{S} \tag{II.41}$$

Cette équation lie la résonance fondamentale d'une cellule aux interactions mutuelles qui ont lieu entre les cellules résonantes du milieu. Le résonateur sera modélisé par son facteur de qualité Q et par sa résonance fondamentale ω_0. Nous avons vu que ce deuxième terme correspondait en fait, avec un formalisme plus ondulatoire, à la fonction de Green. L'équation peut être réécrite par (en ôtant les termes de sources) :

$$\sum_i (G_p(r_j - r_i, \omega))I_i + Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)I_j = 0. \tag{II.42}$$

Dans un premier temps, nous allons supposer que la distance entre les cellules est infinitésimale. Selon la dimension "p" de l'espace dans lequel on se trouve, une expression intégrale de cette équation permet d'obtenir l'équation :

$$1/a \int G_p(r_j - r_i, \omega)I(r_i)d^n r_i \quad + Q \quad (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)I(r_j) = 0. \tag{II.43}$$

où "n" est la dimension du réseau ($n \ll p$). Ainsi, une transformée de Fourier d'ordre "p" du premier terme de l'équation permet de passer à la forme intégrale :

En effectuant une transformée de Fourier à n dimensions, l'équation devient :

$$\left[1/a\, \tilde{G}_p(k, \omega, \mathbf{r}) + Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)\right] I(k) = 0. \tag{II.44}$$

avec $dim(r) = p - n$ et $dim(k) = n$. Pour un réseau de dimension "n", la transformée de Fourier à n-dimensions des fonctions de Green à p-dimensions doit donc être calculée. A cette fin, les expressions données dans le partie 1 du chapitre I pourraient être utilisées. Cependant une méthode plus élégante consiste à partir de la transformée de Fourier à p-dimensions des fonctions de Green et à effectuer une transformée de Fourier inverse à (p-n) dimensions.

Pour cela, on utilise donc l'expression générale de $\tilde{G}$ donnée par $\tilde{G}(k_x, k_y, k_z, \omega) = \dfrac{1}{\omega^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}$ directement issue de l'équation (I.5). Effectuons ce calcul pour un réseau 2D, contenu dans un espace 3D. On souhaite donc calculer $\tilde{G}(k_x, k_y, z)$ qui est donné par :

$$\tilde{G}(k_x, k_y, z) = \int \frac{e^{ik_z z}}{\omega^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2} dk_z \tag{II.45}$$

En cherchant les pôles de la fonction à intégrer et en utilisant le théorème des résidus, on obtient l'expression :

$$\tilde{G}(k_x, k_y, z) = i\pi \frac{e^{i\omega'|z|}}{\omega'} \tag{II.46}$$

ou encore

$$\tilde{G}(k_x, k_y, 0) = \frac{i\pi}{\omega'} \tag{II.47}$$

avec $\omega' = \sqrt{\omega^2 - k_x^2 - k_y^2}$.

On calcule de la même manière pour toutes les fonctions de Green dans les différents espaces. Le tableau récapitule ces résultats.

$\tilde{\tilde{G}}(\vec{k}, \omega)$	p=1	p=2	p=3
n=1	$\dfrac{1}{\omega^2 - k_x^2}$	$i\pi \dfrac{e^{ik_x y}}{k_x}$	$i\pi$
n=2	×	$\dfrac{1}{\omega^2 - k_x^2 - k_y^2}$	$i\pi \dfrac{e^{ik_\perp z}}{k_\perp}, k_\perp = \sqrt{w^2 - k_x^2 - k_y^2}$
n=3	×	×	$\dfrac{1}{\omega^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}$

Table II.1 – Expressions des transformées de Fourier à n dimension dans un espace à p dimension de la fonction de Green.

Il convient ensuite reprendre l'équation (II.44) et de la résoudre en utilisant les expressions de la fonction de Green.

II.4.2.1 Réseau nD dans un espace nD

Dans un premier temps, nous traitons des réseaux de dimension n qui occupent tous l'espace, n=p. Dans ce cas, on obtient l'équation caractéristique suivante :

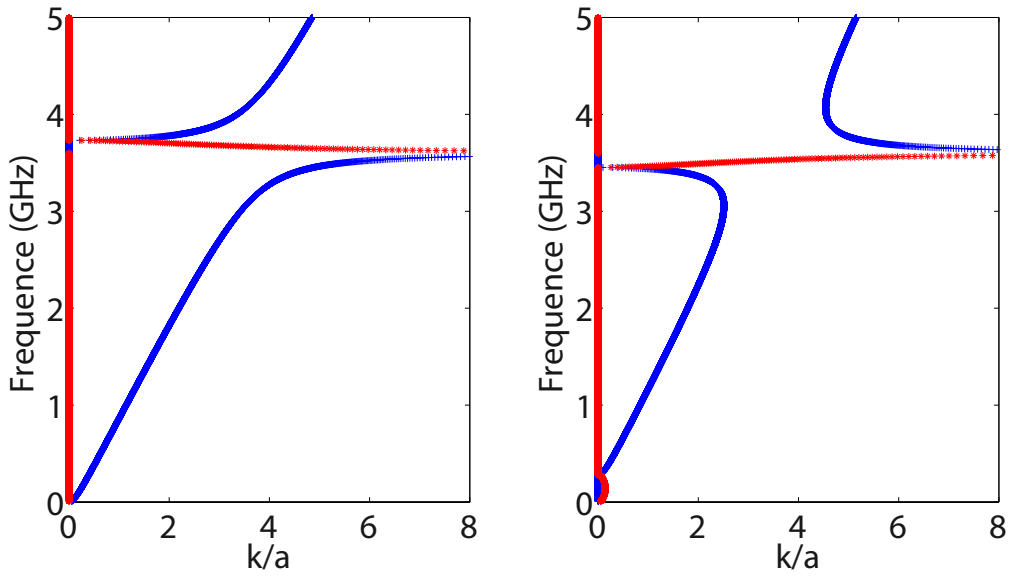


Figure II.28 – Courbes de dispersion obtenues pour un réseau de résonateurs infini continu de dimension n dans un espace de dimension n. En bleu, la partie réelle de k est tracée, en rouge sa partie imaginaire. La seconde courbe est obtenue pour une valeurs d'impédance propre des résonateurs égale à l'opposée de l'impédance propre utilisée pour la première courbe.

$$Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) + \frac{1}{\omega^2 - k^2} = 0 \tag{II.48}$$

Dans les calculs qui vont suivre, le facteur de qualité des résonateurs est égal à 12 et la fréquence de résonance est égale à $\omega_0 = 3.6GHz$. De cette dernière équation, on extrait la relation de dispersion du réseau :

$$k^2 = \omega^2 - \frac{1}{Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \tag{II.49}$$

On retrouve dans cette relation la bande interdite classiquement observé dans les études présentées précédemment [54]. On note également que l'on retrouve "le cône de la lumière". Dans le cas où le réseau est de même dimension du milieu, les résonateurs sont en fait désadaptés. Tout se passe comme si les ondes à des fréquences pas trop proches de ω_0 (fonction de Q) ne "voient" pas le réseau.

Notons que si on inverse le signe de l'impédance propre, la courbe de dispersion obtenue (figure II.28(b)) présente des vitesses de phase négatives. On retrouve un comportement type main gauche, très caractéristique des métamatériaux.

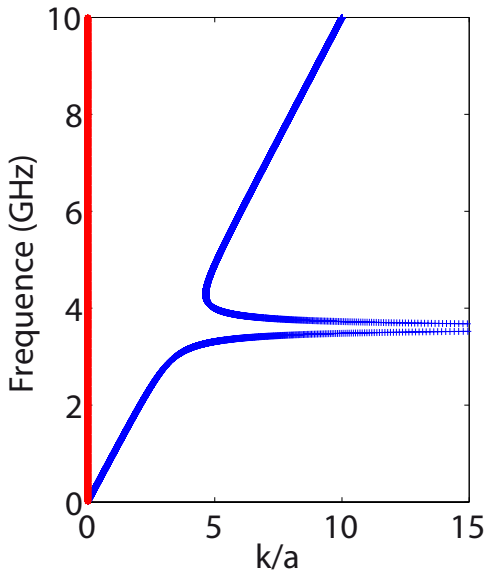


Figure II.29 – Courbe de dispersion obtenue pour un milieu continu 1D infini dans un espace 2D de résonateurs. En bleu, la partie réelle de k est tracée, en rouge sa partie imaginaire.

II.4.2.2 Réseau (n-1)D dans un espace nD

Pour un réseau 1D dans un espace 2D ou un réseau 2D dans un espace 3D, l'équation devient :

$$Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) + \frac{i\pi}{2\sqrt{\omega^2 - k^2}} = 0 \tag{II.50}$$

Soit :

$$k^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{\omega_0^2}{Q^2(\omega^2 - \omega_0^2)}\right) \tag{II.51}$$

La courbe de dispersion de ce réseau est tracée sur la figure II.29. Il n'y a pas de bande interdite dans la relation de dispersion.On retrouve autour de la résonance ω_0 un comportement similaire à celui que nous avons observé avec des réseaux infinis 2D de SRRs. Cependant on observe également sur cette courbe le "cône de la lumière". D'après ce calcul, le réseau est donc transparent lorsque l'on s'éloigne de $ka \approx 1$, ce qui n'est pas le cas avec le modèle dipolaire.

II.4.2.3 Réseau 1D dans un espace 3D

L'équation pour un réseau 1D dans un espace à 3 dimensions est donnée par :

$$Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) + i\pi = 0 \tag{II.52}$$

Il n'y a pas de solution à cette équation. Dans le cas d'un réseau de résonateurs parfait sans perte, il n'y a pas de bande d'hybridation et ω ne dépend donc pas du vecteur d'onde.

C'est comme si aucun mode du milieu ne dépendait du réseau. Toute onde se propageant dans ce milieu se comporte comme si le réseau n'était pas présent. Ainsi, le réseau ne supporte pas les modes propagatifs du vide. D'un autre point de vue, ceci signifie qu'une source locale sur le réseau ne peut générer des ondes planes dans le milieu 3D environnant.

En conclusion, lorsque le réseau et l'espace ont la même dimension, les résultats sont cohérents avec les études de Yariv, de Lemoult et de Shamonina. On obtient une bande interdite près de la résonance propre des résonateurs. Pour un réseau 2D dans un espace 3D, on retrouve des résultats similaires à ceux présentés dans le début de ce chapitre, cependant les résultats diffèrent encore beaucoup, notamment du point de vu du "cône de lumière". Pour se rapprocher des milieux réels et comprendre les différences entre ces différents phénomènes, nous allons à présent étudier des milieux infinis discontinus.

II.4.3 Structure de bandes pour des réseaux infinis discontinus de résonateurs sub-longueur d'onde

Reprenons encore une fois l'équation $z_p\mathbf{I} + \mathbf{Z}_m\mathbf{I} = \mathbf{S}$. Cette fois-ci le terme Z_m n'est plus égal à la transformée de Fourier spatiale de la fonction de Green. C'est une somme discrète de la fonction de Green. On cherche donc à résoudre l'équation :

$$Z_0(\omega) + \sum G(na)e^{ikna} = 0. \tag{II.53}$$

Les étapes de calculs ci-dessous permettent de passer dans l'espace des k :

$$\begin{aligned} & Z_0(\omega) + \sum G(na)e^{ikna} \\ &= Z_0(\omega) + \int G(X)e^{ikX} III_a(X)dX \\ &= Z_0(\omega) + \tilde{G}(k_x) \times III_{1/a}(n) \\ &= Z_0(\omega) + \tilde{G}(k_x) \times \sum \delta(k_x - \frac{2\pi n}{a}) \\ &= Z_0(\omega) + \sum \tilde{G}(k_x - 2\pi n/a) \end{aligned} \tag{II.54}$$

Nous allons ainsi chercher, pour différentes dimensions d'espace, les solutions de l'équation :

$$Z_0(\omega) + \sum \tilde{G}(k_x - 2\pi n/a) = 0 \tag{II.55}$$

II.4.3.1 Réseaux de dimension nD dans un espace de dimension nD

On cherche à résoudre l'équation :

$$Z_0(\omega) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k_x - \frac{2\pi n}{a})^2 - \omega^2} = 0 \tag{II.56}$$

On utilise pour cela la formule de décomposition de la fonction cotangente :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2-\beta^2} = \frac{\pi\cot(\alpha-\beta)-\pi\cot(\alpha+\beta)}{2\beta} \tag{II.57}$$

On obtient :

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{(k_x-\frac{2\pi n}{a})^2-\omega^2} = \frac{a}{4\omega}\left(\cot(-\frac{k_x a}{2}-\frac{\omega a}{2})-\cot(-\frac{k_x a}{2}+\frac{\omega a}{2})\right) \tag{II.58}$$

Pour vérifier que cette équation est cohérente avec les développements précédents, on peut faire tendre le pas du réseau 'a' vers 0. Dans ce cas, la somme infinie tend vers $\frac{1}{k_x^2-\omega^2}$ et on retrouve l'équation que l'on avait pour milieu continu de résonateurs :

$$k^2 = \omega^2 + \frac{2\omega_0\omega}{Q(\omega^2-\omega_0^2)}. \tag{II.59}$$

Ce calcul est cohérent avec le modèle utilisé pour un milieu continu. Les travaux sur la relation de dispersion obtenue lorsqu'on ne fait pas d'approximation sur l'équation (II.58) sont en cours. Pour retrouver les résultats obtenus sur le réseau de résonateurs 2D étudié le long de ce chapitre, il faut réaliser ce calcul pour un réseau de dimension (n-1) dans un espace de dimension n.

II.4.3.2 Réseaux de dimension (n-1)D dans un espace de dimension nD

Pour se ramener complètement au cas de réseaux 2D dans un espace 3D que nous avons étudiés durant ce chapitre, il faudrait procéder de même, en reprenant l'équation II.55 et en utilisant l'expression de la fonction de green d'un réseau de dimension 2 dans un espace de dimension 3. L'équation à résoudre est la suivante :

$$Z_0(\omega) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\omega^2-(k_x-\frac{2\pi n}{a})^2}} = 0 \tag{II.60}$$

Cette équation diverge et ne nous permet pas de pousser ce calcul pour retrouver le comportement de réseaux plans de SRRs.

II.4.3.3 Discussion

Selon les dimensions des réseaux et des dimensions des espaces dans lesquels on étudie les réseaux, les résultats obtenus sur les relations de dispersion diffèrent fortement. La dimension dans laquelle est étudiée un réseau va modifier le comportement des ondes qui s'y propagent. Selon les cas, les modes résonants du réseau vont s'imposer. Dans d'autre cas, le réseau sera transparent. Nous notons qu'avec cette dernière étude, nous ne retrouvons pas le comportement que nous avions observé en début de chapitre. En effet le cône de la lumière n'est pas présent dans notre relation de dispersion alors qu'il l'est dans

ces derniers calculs (cf. figure II.29). Sur nos réseaux, il n'y a pas de bande interdite et la propagation d'onde est seulement autorisée sur un faible intervalle de fréquence autour de la fréquence fondamentale des résonateurs. Une question qui reste ouverte est donc de savoir si un réseau infini de résonateurs sub-longueur d'onde empêche ou autorise la propagation des ondes du cône du lumière tel qu'on peut l'observer sur les relations de dispersion contradictoires figure II.17 et figure II.29.

II.5 Conclusion

Nous nous sommes consacrés au cours de ce chapitre à la compréhension des phénomènes qui permettent la conversion de champs oscillants à de très petites échelles spatiales par rapport à la longueur d'onde en ondes propagatives, par des milieux de tailles finies constitués de résonateurs sub-longueur d'onde. Nous avons réalisé une étude électrodynamique complète basée sur un formalisme matriciel et une modélisation dipolaire du milieu [68]. La propagation des champs issus des résonateurs est issue de l'expression du rayonnement en champ proche et en champ lointain de dipôles électriques et magnétiques. Cette étude permet de retrouver et d'expliquer analytiquement les résultats que nous avons obtenus en simulation et expérimentalement. Nous avons montré que pour des réseaux de résonateurs de taille finie, la réponse électromagnétique est discrétisée, ce phénomène étant directement dû aux interactions mutuelles entre les éléments résonnants du milieu. Le milieu est équivalent à un milieu de N oscillateurs couplés dont les caractéristiques peuvent être calculées, le comportement modal mis en évidence. Les relations de dispersion de tels milieux lorsqu'ils sont de dimensions infinies ont été explicitées. Celles-ci ont été comparées aux relations obtenues par d'autres méthodes et dans des environnements différents. Nous montrons que la dimension dans laquelle est considéré un milieu modifie fortement la relation de dispersion du milieu. Selon la dimension des milieux, le réseau peut soit provoquer des bandes interdites ou il peut devenir totalement transparent. Dans le chapitre suivant, nous analysons les phénomènes de rayonnement et notamment de rayonnement d'informations sub-longueur d'onde de réseaux finis de résonateurs sub-longueur d'onde.

CHAPITRE III

Rayonnement de milieux localement résonants

Table des matières

III.1 Rayonnements complexes de milieux finis de résonateurs **64**
III.1.1 Facteur de qualité du rayonnement d'un faible nombre de cellules résonnantes 65
III.1.2 Diagrammes de rayonnement de structures composées d'un faible nombre de résonateurs 69
III.1.3 Discussion sur le champ proche, le champ lointain 76
III.2 Localisation de modes **78**
III.2.1 Orthogonalité de familles de vecteurs propres 79
III.2.2 Algorithme ESPRIT 80
III.2.3 Algorithme de Matching pursuit 83
III.3 Conclusion **86**

Nous avons étudié les modes sur des arrangements infinis de résonateurs sub-longueur d'onde qui présentent un nombre d'onde inférieur à k_0. Dans de tels cas, il ne peut y avoir de couplage entre l'onde sur le réseau et l'extérieur : la structure ne peut pas rayonner. En réalité, ce phénomène n'est valable que pour des réseaux de dimensions infinies.

Lorsque le milieu est de taille finie, les propriétés de rayonnement diffèrent fortement. Nous proposons dans ce chapitre d'étudier les raisons et les mécanismes qui permettent à des structures de taille finie de rayonner. Nous nous penchons notamment sur le processus de rayonnement d'informations sub-longueur d'onde, processus équivalent à une conversion d'ondes évanescentes en ondes propagatives par des réseaux constitués d'un nombre relativement important de cellules résonantes. Nous expliquons par ce biais comment des détails qui seraient portés par des ondes évanescentes sont transmis en champ lointain. Les contributions respectives dans les interactions du champ proche et du champ lointain sont évaluées. Les caractéristiques du rayonnement sont examinés. Nous verrons que l'analyse en termes de diagonalisation de la matrice de couplage permet de déduire le rayonnement dans le cas limite où le réseau est constitué de 2 ou 3 cellules résonantes.

Après avoir étudié le champ rayonné, nous cherchons à savoir s'il est possible d'estimer les fréquences complexes de résonances des modes d'une structure à partir de mesures en champ propre ou en champ lointain et ce, notamment lorsque les modes sont proches. Cette étude repose sur l'utilisation d'algorithmes non linéaires. Ce sujet est fondamental pour des applications en télécommunication et pour des applications d'imagerie.

III.1 Rayonnements complexes de milieux finis de résonateurs

Dans le chapitre précédent, grâce à une analyse dipolaire, le comportement de milieux de tailles finies constitués de résonateurs sub-longueur d'onde a été analysé. Des modes propres dont le nombre d'onde est plus petit que la longueur d'onde ont été mis en évidence. Dans ces milieux, grâce au caractère résonant des cellules, de l'information sub-longueur d'onde circule. Nous allons étudier comment cette information qui est initialement portée par des ondes qui sont évanescentes dans le vide va, grâce à la taille finie du réseau, être convertie en information portée par des ondes propagatives.

III.1.1 Facteur de qualité du rayonnement d'un faible nombre de cellules résonnantes

A partir des expressions des courants obtenues dans le chapitre précédent (partie I.3.2), il est possible d'extrapoler le diagramme de rayonnement de réseaux finis de résonateurs sub-longueur d'onde. Ces diagrammes sont estimés à partir du calcul de la propagation des champs électromagnétiques issus des courants sur les résonateurs. Le calcul est réalisé en utilisant les résultats du modèle dipolaire qui permet d'obtenir l'expression du champ électrique en champ lointain :

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}) = \sum_n \left[\frac{d}{jk}(\mathbf{u}_r \wedge (\mathbf{u}_{d_n} \wedge \mathbf{u}_r)) + S(\mathbf{u}_{m_n} \wedge \mathbf{u}_r) \right] \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \frac{I_n}{\epsilon_0 c} \tag{III.1}$$

où $\mathbf{u}_{d_n}$ et $\mathbf{u}_{m_n}$ correspondent respectivement à la direction du dipôle électrique et du dipôle magnétique du résonateur "n". I_n est la valeur du courant sur le résonateur "n" à la fréquence à laquelle est calculé le rayonnement.

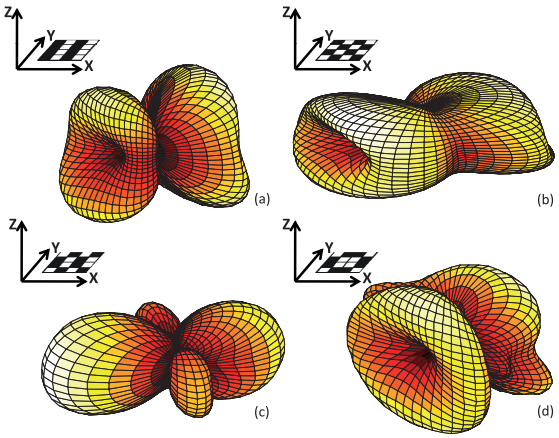


Figure III.1 – Diagrammes de rayonnement calculés à 4 fréquences différentes pour une structure de 16 résonateurs modélisés chacun par la somme d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique.

Sur la figure III.1 sont présentés 4 diagrammes de rayonnement calculés à partir des distributions de courants considérées à des fréquences différentes, pour une structure de 16 résonateurs électromagnétiques. Chacun de ces diagrammes résulte des interférences complexes entre les ondes émises par tous les dipôles magnéto-électriques. A chaque diagramme est associé un facteur de qualité.

Une évaluation théorique de ces diagrammes est un problème fastidieux. Dans le cas de réseaux de très grandes tailles, si l'on suppose qu'il n'y a pas de pertes ohmiques, il n'y a pas d'atténuation des modes propres sub-longueur d'onde car la périodicité du champ est bien inférieure à λ_0. L'information sub-longueur d'onde ne peut donc pas être convertie en ondes propagatives. Cependant, dans le cas d'un milieu de dimensions finies, les modes sub-longueur d'onde se couplent avec l'espace libre et peuvent ainsi se propager

en champ lointain. Mathématiquement, on peut modéliser ce phénomène en multipliant les vecteurs propres par une fonction rectangle. De ce fait, la transformée de Fourier des modes propres contient dans ce cas des composantes dont la période spatiale est égale ou supérieure à la longueur d'onde. En effet, dans l'espace des k, un mode sub-longueur d'onde est convolué par un sinus cardinal. Une partie du spectre est donc convertie dans l'intervalle $[-k_0, k_0]$. Ainsi un mode sub-longueur d'onde peut rayonner par le biais de ces composantes propagatives.

De façon à quantifier cet effet, nous avons extrait le facteur de qualité de chaque résonance du milieu. On sait qu'une résonance en ω_n survient lorsque $\Im\lambda_n + \Im Z_s \approx 0$ (cf. équation II.4). Autour de cette résonance en ω_n, on peut supposer que $\lambda_n + Z_s$ est linéarisable en fréquence. De cette façon, l'expression des courants (cf. équation II.36) peut être approximée par :

$$\mathbf{I} \simeq \sum \frac{\mathbf{U}_n^H \mathbf{U}_n}{\Re(\lambda'_n)\left(1 + j\frac{\omega-\omega_n}{\Re(\lambda'_n)}\frac{\partial\Im\lambda'_n}{\partial\omega}\right)}\mathbf{S}, \tag{III.2}$$

où $\lambda'_n = \lambda_n + Z_s$. Les λ'_n sont les valeurs propres de matrice de couplage additionnée à la matrice des résonances fondamentales. De cette dernière équation, on peut directement extraire le facteur de qualité Q_n de la n-ième résonance :

$$Q_n = \frac{\partial\Im\lambda'_n}{\partial\omega}\frac{\omega_n}{\Re\lambda'_n}. \tag{III.3}$$

La valeur du facteur de qualité est donc conditionnée à la partie imaginaire et à la partie réelle de la valeur propre λ_n. Pour simplifier, nous développerons par la suite ces calculs dans un réseau de taille finie et linéaire. Ils seront aisément généralisables au cas 2D. Pour un réseau 1D de résonateurs, on peut réécrire la n-ième valeur propre à partir du n-ième vecteur propre :

$$\lambda'_{n_x} = \sum_{l_x,m_x=1}^{M_x} Z(a[l_x - m_x])U^*_{n_x}(l_x)U_{n_x}(m_x). \tag{III.4}$$

Dans cette expression, $Z(x)$ est une fonction donnant l'impédance mutuelle entre deux résonateurs distants de la longueur x. a est la période du réseau. De cette façon, $Z(0)$ est égale à l'impédance propre des résonateurs. En remplaçant, l'impédance mutuelle Z par sa transformée de Fourier $\tilde{Z}$ l'expression précédente devient :

$$\lambda'_{n_x} = \frac{1}{2\pi}\int_{k_x=-\infty}^{\infty}\sum_{l_x,m_x=1}^{N_x}\tilde{Z}(k_x)e^{2\pi i(k_x a[l_x-m_x])}U^*(l_x)U(m_x)dk_x. \tag{III.5}$$

En introduisant la transformée de Fourier $\tilde{U}_{n_x}$ des vecteurs propres U_{n_x}, on obtient

$$\lambda'_{n_x} = \frac{1}{2\pi}\int_{k_x=-\infty}^{\infty} \tilde{Z}(k_x)\left|\tilde{U}_{n_x}(k_x a)\right|^2 dk_x. \quad \text{(III.6)}$$

Cette expression devient pour un réseau bidimensionnel :

$$\lambda'_{n_x,n_y} = \frac{1}{2\pi}\int_{k_x,k_y=-\infty}^{\infty} [\tilde{Z}(k_x,k_y)]\left|\tilde{U}_{n_x,n_y}(k_x a,k_y a)\right|^2 dk_x dk_y. \quad \text{(III.7)}$$

L'expression III.3 montre que le facteur de qualité dépend du ratio entre $\partial\Im\lambda'_{n_x}/\partial\omega$ et $\Re\lambda'_{n_x}$. Étudions comment varient les parties réelles et imaginaires de λ'_n en fonction de la fréquence. Les calculs sont explicités pour un réseau linéaire.

Dans le cas d'un milieu infini, les vecteurs propres sont des fonctions sinusoïdales (en k_x). De ce fait, leur transformée de Fourier est un dirac centré en k_x.

D'après l'équation III.6, l'expression de la partie imaginaire de λ' est :

$$\Im\lambda'_{n_x} = \frac{1}{2\pi}\int_{k_x=-\infty}^{\infty} [\Im\tilde{Z}(k_x)]\left|\tilde{U}_{n_x}(k_x a)\right|^2 dk_x. \quad \text{(III.8)}$$

Puisque la transformée de vecteurs propres est un dirac, l'expression de la partie imaginaire de λ' devient :

$$\Im\lambda'_{n_x} = \frac{1}{2\pi}\Im\tilde{Z}(k_x^R) + \frac{1}{2\pi}\Im\tilde{Z}(-k_x^R), \quad \text{(III.9)}$$

où k_x^R est le nombre d'onde à la résonance. Or, les résonances du milieu surviennent quand la fréquence obéit à la relation de dispersion donnée par l'équation II.33 avec $k_x^{n_x} = n_x\pi/a(M_x+1)$. A ces fréquences, $\Im\lambda'_{n_x} \sim 0$. De la même façon, $\partial\Im\lambda'_n/\partial\omega$ est non nulle et ne dépend que très faiblement de la taille du réseau.

L'expression III.6 montre que $\Re\lambda'_{n_x}$ dépend du produit des transformées de Fourier de la matrice de couplage et des vecteurs propres. Le produit de ces deux transformées est ainsi nul puisque c'est le produit d'un dirac par un terme nul. Le facteur de qualité est ainsi infini pour $k > k_0$. Ce produit est régularisé en ajoutant des pertes ohmiques R_ω. Les pertes se traduisent par l'apparition d'une partie réelle sur Z qui est constante sur tout l'intervalle des k. Le facteur de qualité est alors fini et donné par $Q \propto \frac{\partial\Im Z}{\partial\omega}\frac{1}{R_\omega}$.

Sur la figure III.2 sont présentées la partie réelle (traits continus rouges) et la partie imaginaire (traits discontinus noirs) de la transformée de Fourier de l'impédance mutuelle entre deux dipôles dans le cas d'un réseau infini 1D de résonateurs sub-longueur d'onde. On observe clairement que la partie réelle de la transformée de Fourier de l'impédance est strictement nulle pour les $|k| > k_0$. Elle ne contient pas de composantes évanescentes. En traits discontinus (bleus) est tracée la transformée de Fourier d'un vecteur propre de ce réseau.

Une structure infinie de résonateurs sub-longueur d'onde ne rayonne donc pas. Si l'on travaille à présent avec un réseau de taille finie, le résultat issu du calcul du facteur de qualité est fortement modifié. Dans ce cas, les vecteurs propres ne sont plus des fonctions

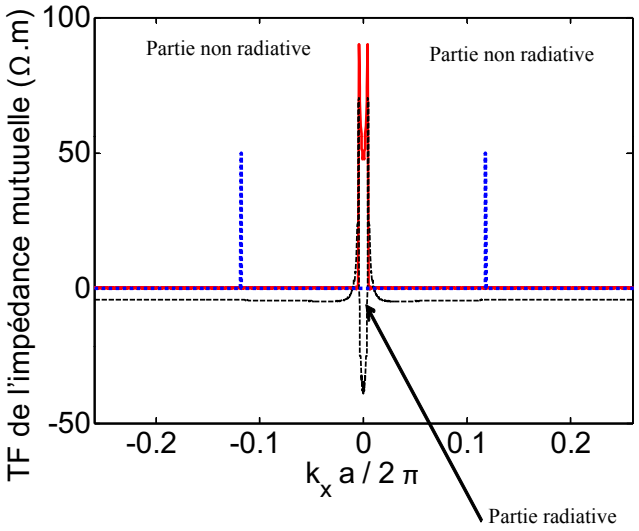


Figure III.2 – Partie réelle (courbe rouge) et partie imaginaire (courbe noire) de la transformée de Fourier de la matrice de couplage Z calculées pour un milieu infini 1D de dipôles électriques distants deux à deux de la distance "a". La courbe bleue représente la transformée de Fourier d'un vecteur propre du milieu.

sinusoïdales d'extension infinie, mais des fonctions sinusoïdales bornées par la taille du réseau. En effet, les vecteurs propres ont été multipliés par une fonction fenêtre. Leur transformée de Fourier est proportionnelle à un sinus cardinal :

$$U_{n_x} \quad \propto \quad \mathrm{sinc}((k_x - k_x^R)L), \tag{III.10}$$

L étant la dimension sur x du réseau.

Si $k_x^R \gg 1$, alors la valeur absolue de U_{n_x} est approximée à un dirac en k_x^R. Ce qui induit d'après l'équation (III.11) que $\Im\lambda' \propto \frac{1}{2\pi}\Im\tilde{Z}(k_x^R) + \frac{1}{2\pi}\Im\tilde{Z}(-k_x^R)$. $\Im\lambda'$ n'est donc pas modifiée par le caractère fini de la structure. Concernant la partie réelle, comme $\Re\tilde{Z}$ est nulle pour $k > k_0$, on peut écrire :

$$\Re\lambda'_{n_x} \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-k_0}^{k_0} [\Re\tilde{Z}(k_x)] \left|\tilde{U}_{n_x}(k_x a n_x)\right|^2 dk_x. \tag{III.11}$$

Dans la partie radiative, entre $-k_0$ et k_0, la transformée de Fourier des vecteurs propres présentent quelques oscillations (cf. figure III.3). La partie réelle des valeurs propres est de cette façon faible mais non nulle dans la partie radiative. Ainsi, dans ce cas, le fort facteur de qualité Q_n est dû au rayonnement des ondes hors de la structure.

Ce formalisme est valable pour des systèmes qui présentent un nombre de cellules relativement grand ($\sim 5; 6$). Qu'en est-il du rayonnement des structures si ce nombre est très faible ?

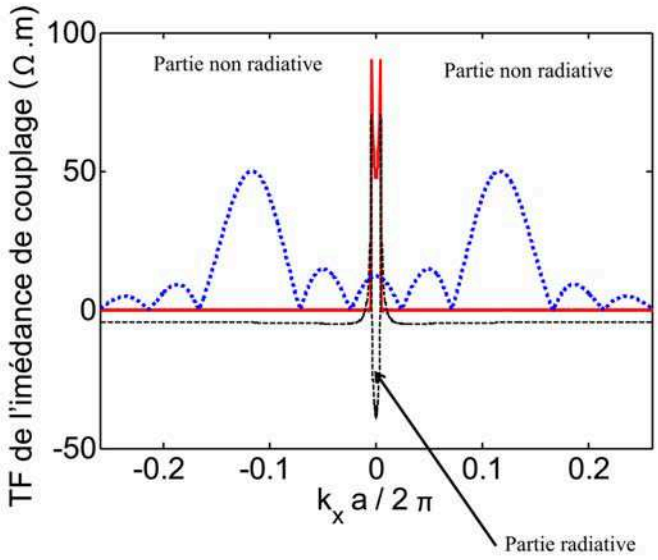


Figure III.3 – Partie réelle (courbe rouge) et partie imaginaire (courbe noire) de la transformée de Fourier de la matrice de couplage Z calculées pour un milieu fini 1D de dipôles électriques distants de la longueur "a". La courbe bleue représente la transformée de Fourier d'un vecteur propre du milieu.

III.1.2 Diagrammes de rayonnement de structures composées d'un faible nombre de résonateurs

Dans la partie précédente, on a pu constater et expliquer en utilisant un modèle dipolaire pourquoi un assemblage fini de résonateurs sub-longueur d'onde pouvait rayonner et plus particulièrement pourquoi il pouvait rayonner de l'information sub-longueur d'onde. On a montré que l'information sub-longueur d'onde d'une structure est portée par les modes propres de cette structure. Chaque mode résonne à une fréquence qui lui est propre. Cependant, du fait des symétries, et de la largeur des modes, plusieurs modes peuvent être excités simultanément. Le diagramme de rayonnement à une fréquence d'une telle structure résulte donc de la somme pondérée des diagrammes de rayonnement des différents modes excités à cette fréquence.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au rayonnement de structures constituées d'un très faible nombre de résonateurs dans le but de déduire les principaux paramètres qui agissent sur le rayonnement.

III.1.2.1 Rayonnement de résonateurs uniques

Dans un premier temps, nous allons considérer le rayonnement de résonateurs seuls.

Plusieurs études ont porté sur le rayonnement de résonateurs sub-longueur d'onde excités localement. Des études ont récemment été menées sur la modification du rayonnement d'une source lorsque l'on approche cette dernière d'une nanoparticule d'argent [69]. L'influence de la distance entre la particule et la source est étudiée, le rayonnement pouvant être totalement modifié spatialement lorsque l'on fait varier même très faiblement cette

distance. Une application de ces études consiste à fabriquer des nano-antennes optiques présentant une forte directivité [69–73].

Ici, nous allons faire interagir non pas un résonateur dipolaire et une source mais la réponse électrique et magnétique fondamentale de nos résonateurs. Nous allons donc étudier le rayonnement de résonateurs que nous approximons par une superposition d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique.

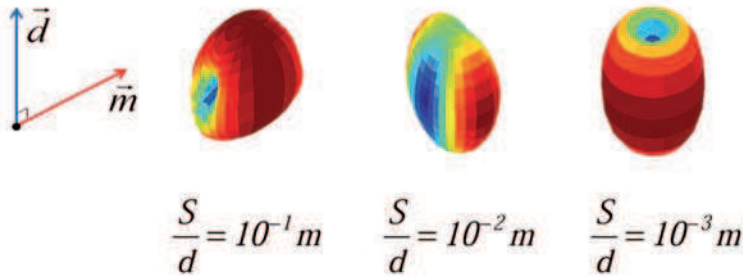


Figure III.4 – Variation du diagramme de rayonnement d'un résonateur constitué d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique perpendiculairement agencés, dont les poids relatifs varient

Le poids respectif des dipôles électriques et magnétiques est proportionnel aux valeurs respectives d et S. Ces valeurs sont directement issues de la géométrie du résonateur. En fonction du rapport S/d, le rayonnement est soit dipolaire, soit une superposition pondérée des deux rayonnements dipolaires électrique et magnétique. La figure III.4 présente les rayonnements obtenus lorsqu'on applique à ce résonateur le modèle dipolaire qui a été développé dans le chapitre précédent. Pour le premier diagramme, le rayonnement du dipôle magnétique est prépondérant. Le deuxième diagramme est issu de la somme des rayonnements des deux dipôles. Le troisième diagramme est celui du dipôle électrique.

Dans le cas des SRRs à 3 fentes que nous avons étudiés, le poids du dipôle électrique est bien plus important que celui du dipôle magnétique. Pour expliquer les rayonnements que nous obtiendrons, nous nous référerons par la suite à des sommes de dipôles électriques.

III.1.2.2 Rayonnements asymétriques de résonateurs hybridés

Intéressons-nous à présent à des structures composées de quelques résonateurs. Les coefficients de réflexion obtenus pour une structure de deux SRRs décalés parallèlement à leur fente, et pour une structure de deux SRRs décalés perpendiculairement à leurs fentes sont présentés sur la figure III.5 . Ces calculs sont issus du modèle dipolaire développé dans le chapitre II. La dimension des dipôles électriques est égale à $d = 5mm$, la surface effective des dipôles magnétiques est égale à $S = 10^{-6}m^2$. Les dipôles sont excités localement par une petite source non adaptée placée en champ proche de l'un d'entre eux. Ils résonnent à la fréquence $f_0 = 3.6GHz$. Pour les deux configurations, on observe une levée de dégénérescence sur le mode fondamental des cellules : les deux modes de la structure sont résonants et bien distincts. Lorsque les fentes sont alignées, le couplage

est plus important que lorsqu'ils sont décalés l'un par rapport à l'autre. Ce résultat peut facilement être expliqué par la dépendance en θ de l'expression des champs issus d'un dipôle électrique II.20. Pour chaque configuration, les diagrammes de rayonnement aux deux fréquences de résonance sont tracés sur la même figure III.5.

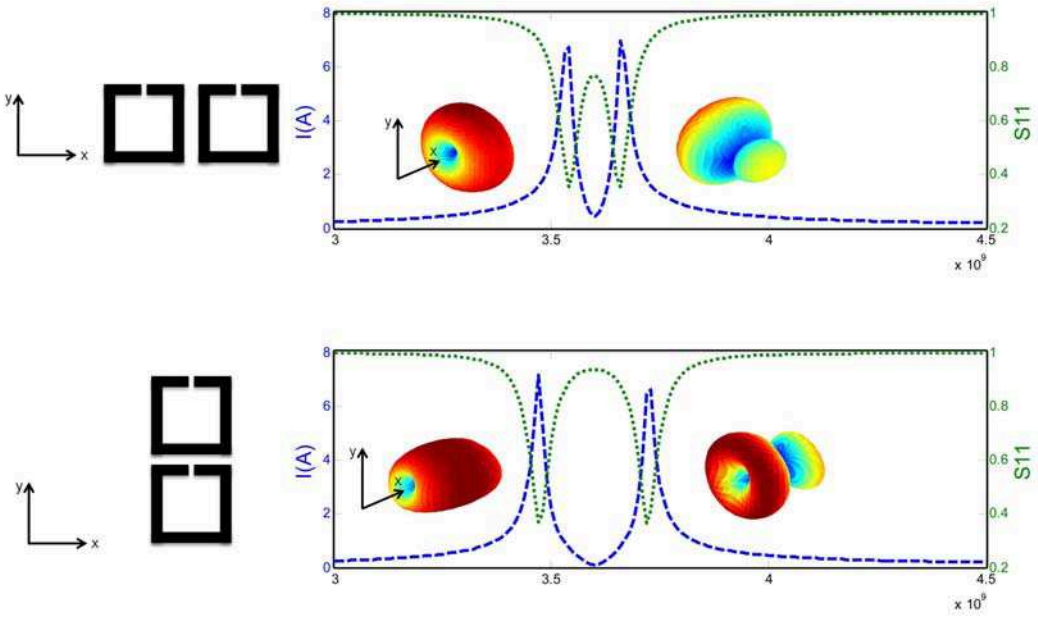


Figure III.5 – Coefficients de réflexion et rayonnements calculés avec le modèle dipolaire pour 2 cellules résonantes couplées l'une à l'autre, décalées parallèlement aux fentes.

Pour expliquer la différence entre les diagrammes de rayonnement des deux structures, et expliquer que ceux-ci puissent être asymétriques, nous avons calculé les diagrammes de rayonnement des vecteurs propres des deux configurations de SRRs. Ces diagrammes sont tracés pour les deux configurations sur la figure III.6 et sur la figure III.7. On reconnait sur ces figures les rayonnements d'un mode mode "pair" de type (++) et d'un mode mode "impair" de type (+−).

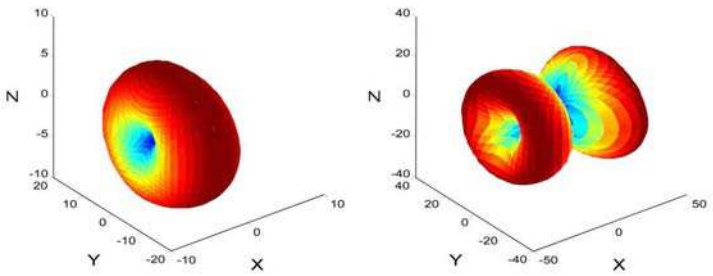


Figure III.6 – Rayonnement des modes propres de 2 cellules résonantes couplées l'une à l'autre, décalées perpendiculairement aux fentes. Le calcul est effectué avec le modèle dipolaire.

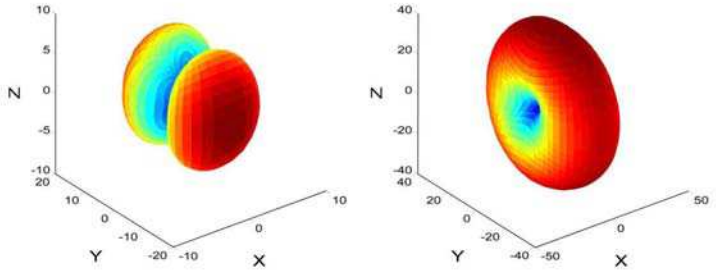


Figure III.7 – Rayonnement des modes propres de 2 cellules résonantes couplées l'une à l'autre, décalées parallèlement aux fentes. Le calcul est effectué avec le modèle dipolaire.

Les diagrammes de rayonnement des modes propres sont symétriques par rapport aux plans (Oxz) et (Oyz). Pourtant on observe, comme sur la figure III.5 , des diagrammes de rayonnement asymétriques. Cette asymétrie ne peut être due à une différence de modules des diagrammes sommés. En plus de prendre en compte l'asymétrie introduite par la source, c'est donc vers l'effet de phase que nous nous sommes tournés. A partir du modèle dipolaire, l'amplitude et la phase des vecteurs propres et des valeurs propres sont calculées. Celles-ci sont tracées sur la figure III.8 pour deux dipôles électriques distants de $a = 8mm$.

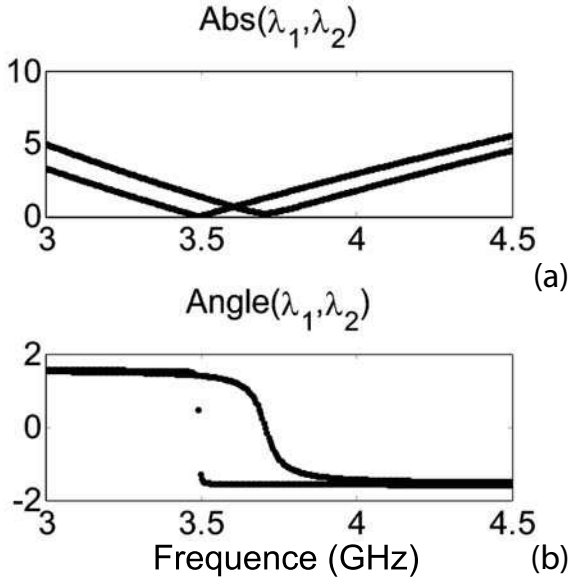


Figure III.8 – Amplitudes et phases des valeurs propres d'un système de 2 résonateurs couplés distants de 8 mm (a) de 16 mm (b).

On observe que la levée de dégénérescence est importante, les deux modes propres de la structure sont parfaitement différentiés fréquentiellement. Les valeurs propres sont déphasées entre les fréquences propres du couple de résonateurs. C'est dans cet intervalle que l'on trouve des diagrammes de rayonnement asymétriques. A l'aide du modèle dipolaire, on montre que le rayonnement dépend directement de la différence de phase entre les

valeurs propres. Le champ rayonné s'écrit :

$$\Phi(\omega) \propto \sum_{n=1,2} e^{ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}_n} \left[\frac{\mathbf{U}_{n,1}(\mathbf{U}_{n,1}^H \mathbf{S})}{\lambda_1} + \frac{\mathbf{U}_{n,2}(\mathbf{U}_{n,2}^H \mathbf{S})}{\lambda_2} \right] \tag{III.12}$$

où $\mathbf{S}$ est le vecteur source.

On comprend ainsi que les asymétries obtenues des diagrammes de rayonnement sont possibles grâce au déphasage entre les valeurs propres de la structures étudiée et à l'asymétrie de la source. A partir de cette constatation, on peut chercher la condition pour que le diagramme de rayonnement d'une structure à deux résonateurs soit nul dans une direction. On choisit pour cet exemple que le système ne rayonne pas sur un coté de l'alignement des dipôles.

Cette condition est obtenue pour lorsque

$$\left(\frac{\mathbf{U}_{n,1}(U_{n,1}^H \mathbf{S})}{\lambda_1} + \frac{\mathbf{U}_{n,2}(\mathbf{U}_{n,2}^H \mathbf{S})}{\lambda_2} \right) \cdot \left(e^{ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}/|r|}, e^{-ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}/|r|} \right) = 0 \tag{III.13}$$

où "." représente le produit scalaire. Cette expression se simplifie lorsque l'on considère que la source n'est placée que sur le premier résonateur en :

$$\frac{e^{ika} + e^{-ika}}{\lambda_1} + \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{\lambda_2} = 0 \tag{III.14}$$

car $\mathbf{U}_1 = \binom{1}{1}$ et $\mathbf{U}_1 = \binom{1}{-1}$. Comme $ka \ll 1$, l'équation devient : $\lambda_1 - (jka)\lambda_2 = 0$.

On peut ainsi tracer cette fonction et retrouver les fréquences pour lesquelles sont obtenues les plus fortes interférences destructives dans une direction de l'espace. Dans le cas

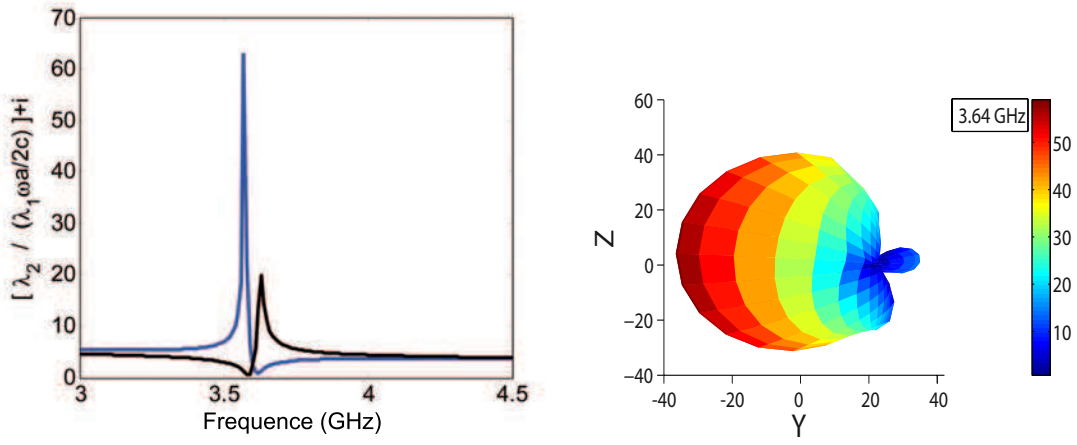


Figure III.9 – (a) Recherche du maximum d'interférences destructives dans le diagramme de rayonnement de deux résonateurs couplés distants de 8 millimètres, pour deux directions opposées. (b) Diagramme de rayonnement obtenu pour la structure à deux résonateurs à la fréquence 3.64 GHz,

appliqué à une distance entre les résonateurs de $a = 8mm$, on obtient deux pics pour lesquels l'asymétrie du diagramme de rayonnement est maximale. Ces courbes sont tracées

en figure III.9.

Lorsque $a < \lambda$, le couplage entre les résonateurs est fort. Que la levée de dégénérescence soit importante ou non, on observe que la variation de la différence de phase des valeurs propres est la même. Elle s'effectue simplement sur un intervalle de fréquence plus étroit pour un couplage faible. Ainsi, en modifiant faiblement la distance séparant les 2 résonateurs, et donc indirectement le couplage, on ne change globalement pas l'évolution des diagrammes de rayonnement. Cette analyse est correcte si l'on reste dans des configurations où les résonateurs sont proches. Dès que $a < \lambda$, les diagrammes associés à chaque vecteur propre sont modifiés.

Plus la distance est grande, plus les diagrammes de rayonnement sont complexes et plus ils présentent de lobes. De plus, passé une certaine distance, on atteint des limites concernant la justification physique que l'on peut donner aux résultats. Des diagrammes de rayonnement des vecteurs propres des deux mêmes résonateurs, lorsque l'on augmente la distance entre eux, sont présentés fig.III.10.

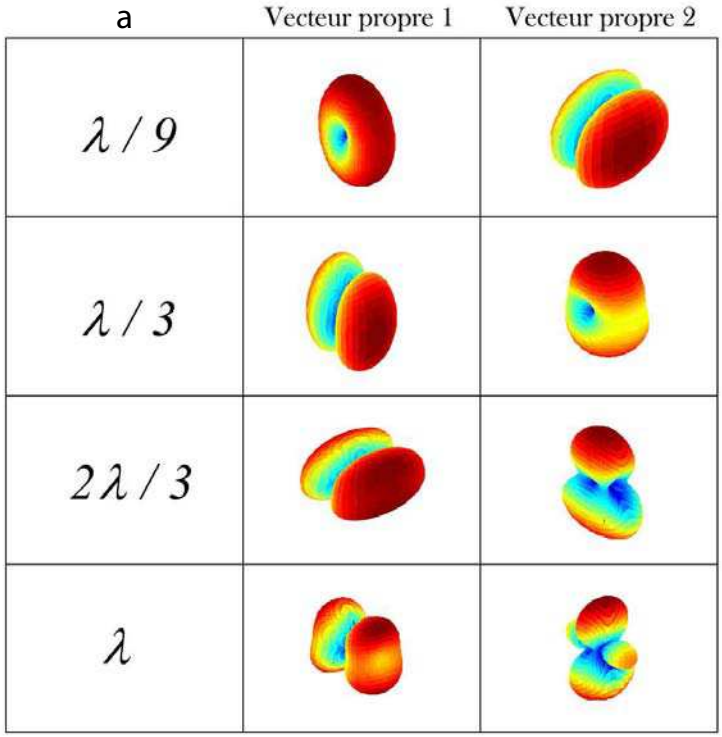


Figure III.10 – Variation des diagrammes de rayonnement des modes propres d'une structure à deux SRRs distants a.

Jusqu'à une distance de $\lambda/3$, les diagrammes associés aux modes propres de deux résonateurs sont identiques. On notera une inversion entre les diagrammes de rayonnement des 1^{er} et 2^{nd} vecteurs propres lorsque l'on passe de $a = \lambda/9$ à $a = \lambda/3$. Cette inversion est due à un croisement des valeurs propres. On peut donner une justification simple à l'inversion de modes qui se produit. En effet, lorsque les résonateurs sont proches, le terme de champ proche, en $1/r^3$, du rayonnement dipolaire domine. Lorsque la distance est augmentée, le terme qui domine est le terme en $1/r$. Cependant, lorsque $a \gg \lambda/3$,

les résonateurs sont très éloignés l'un de l'autre et la notion d'hybridation perd son sens. Les valeurs propres sont alors approximativement égales. La transition apparait en fait pour une valeur égale à $a \approx \lambda/3$. C'est une valeur que l'on trouve couramment dans la littérature des métamatériaux. En effet, les cellules résonantes doivent être distantes d'au moins $\lambda/3$ pour que l'on puisse commencer à appliquer les critères d'homogénéisation [74]. Le résultat que l'on obtient par l'observation des modes propres d'une structure et de leur rayonnement est donc cohérent avec les critères issus des théories d'homogénéisation.

Dans cette partie, on a donc montré qu'en maitrisant les phénomènes d'hybridation dans une structure composée d'un très faible nombre de résonateurs, il est possible de contrôler son diagramme de rayonnement. Dans la partie suivante, on s'intéresse aux problèmes des symétries qui interviennent dans ces structures.

III.1.2.3 Influence des symétries

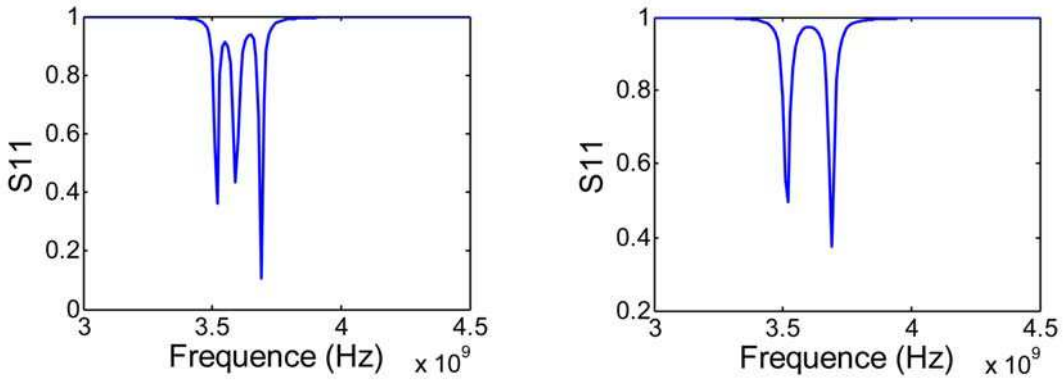
Dans le but d'explorer les effets de symétrie et d'asymétrie dans des milieux constitués de résonateurs sub-longueur d'onde, nous nous intéressons à présent à la réponse en champ proche et en champ lointain d'une structure composée de trois résonateurs alignés tels que présentés sur la figure III.11. Nous avons vu au cours de ce chapitre que selon les symétries



Figure III.11 – Schéma d'un structure à 3 SRRs dont les dipôles électriques sont alignés.

qu'elle présente, une structure à N cellules résonantes a au plus N modes fondamentaux et que ceux-ci, du fait des symétries, peuvent être dégénérés. La structure, composée de SRRs à 4 fentes, que nous avons étudiée présente une symétrie de rotation de 90°. Dès lors, elle possède N(N-1)/2 paires de modes qui ont les mêmes valeurs propres. En plus des symétries de rotation, il faut également prendre en compte les symétries miroirs qui provoquent également des dégénérescences de modes. Sur la figure III.12 sont tracés les coefficients de réflexion pour la structure III.11 pour deux excitations différentes. Dans le premier cas, la structure est excitée sur un résonateur se trouvant au bord, dans le second cas, elle est excitée à partir du résonateur central.

Analysons la différence entre ces deux coefficients de réflexion obtenus. En ce référant à la phase des courants, les trois modes de la structure à trois résonateurs peuvent être écrits de la façon suivante : (+ + +), (+ 0 -) et (+ - +). Le 0 représente un nœud de mode, ou la phase n'est pas définie. Deux de ces modes sont symétriques, et un est antisymétrique. On comprend que, pour des raisons de symétrie, le second mode, le mode (+0−) ne puisse être excité lorsque la source est placée au centre de la structure. Autrement dit, un mode antisymétrique ne peut être excité par une source placée sur un point de symétrie du réseau. De la même façon, seuls trois des modes d'une structure de cinq résonateurs alignés seront excités si la source est placée au centre de la structure. Il est ainsi bien nécessaire de porter attention aux symétries d'une structure lorsque l'on souhaite travailler sur les



(a) (b)

Figure III.12 – Coefficients de réflexion d'une structure à 3 SRRs excitée (a) sur le SRR de gauche, (b) sur le SRR central.

modes résonants qu'elle présente.

Dans ce dernier paragraphe, on a vu que le rayonnement en champ lointain d'une structure finie constituée de cellules résonantes dépend de nombreux critères, le premier, indispensable, étant le caractère fini de la structure. La disposition géométrique des résonateurs, par les symétries qu'elle induit et l'orientation des résonateurs influe également fortement. La distance entre les résonateurs modifie la force du couplage et donc les levées de dégénérescence des modes fondamentaux des résonateurs, ceci étant également intimement lié au facteur de qualité du mode fondamental des cellules, le tout modifiant un paramètre clé : la phase des valeurs propres du milieu qui induit des interférences constructives ou destructives du champ électromagnétique en champ lointain. Enfin le type d'excitation utilisée modifie également le rayonnement de la structure. En analysant de cette façon, pour un très faible nombre de résonateurs les propriétés qui engendrent le rayonnement, le contrôle de ce dernier pour des structures finies composées de résonateurs sub-longueur d'onde est facilité.

III.1.3 Discussion sur le champ proche, le champ lointain

Dans ce paragraphe, nous abordons le problème des termes dans l'expression des champs rayonnés qu'il faut prendre en compte pour correctement décrire le comportement d'onde dans des réseaux finis de résonateurs sub-longueur d'onde. Doit-on prendre en compte les termes de champ lointain lorsque l'on veut décrire les interactions entre les résonateurs du milieu. Doit-on prendre en compte seulement les plus proches voisins ou tous les résonateurs du réseau ?

La problématique porte tout d'abord sur la distinction entre champ proche, champ induit et champ lointain. Étudions le rayonnement d'un dipôle électrique. Supposons un dipôle placé à l'origine d'un repère classique, dans le vide, avec un moment électrique dipolaire $\vec{p}$. A partir des équations de Maxwell, on peut exprimer le champ magnétique

et le champ électrique spatial.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\nabla \times [\nabla G(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}] = \frac{1}{\epsilon_0}[k^2\mathbf{p} + (\mathbf{p}\cdot\nabla)\nabla]G(\mathbf{r}) \tag{III.15}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = j\omega\nabla G(\mathbf{r}) \times \mathbf{p} \tag{III.16}$$

Avec $k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$ en $\mathbf{r} \neq 0$. La fonction de Green dans ces conditions et son gradient s'expriment :

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-j\omega\mathbf{r}}}{4\pi r} \tag{III.17}$$

$$\nabla G(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}}(jk + \frac{1}{r})G(\mathbf{r})\frac{e^{-j\omega\mathbf{r}}}{4\pi r} \tag{III.18}$$

Cette équation décrit à la fois le champ proche et le champ lointain émis par le dipôle. La limite $\omega \to 0$ donne le champ en régime électrostatique, avec une décroissance en $1/r^3$. Le champ lointain correspond au terme en $1/r$.

Au cours de différents développements, nous avons été confrontés à faire le choix d'approximations et à ne pas toujours considérer ces trois champs. Dans quelles conditions peut-on négliger certains de ces champs, quels sont leurs influences dans la propagation des ondes en milieux complexes ? Rappelons que l'onde dans les milieux complexes que nous étudions a une vitesse de phase différente de sa vitesse de groupe, ce qui permet de travailler avec des vecteurs d'onde plus petits que $k_0 = \omega/c$. On a vu qu'un objet plus petit que la longueur d'onde diffracte une onde possédant des composantes évanescentes à ces fréquences. Celles-ci ne se propagent pas et restent localisées au voisinage de l'objet. Elles décroient exponentiellement avec la distance à la surface. Il est nécessaire de pouvoir capter les informations qu'elles contiennent. Par principe de réciprocité, si un petit objet éclairé par une onde propagative génère une onde évanescente, l'objet peut à l'inverse convertir une onde évanescente en une onde propagative. Le microscope à champ proche repose sur ce principe. C'est également le cas des milieux complexes ce qui nous permet de travailler avec de l'information sub-longueur d'onde convertie en ondes propapatives au moyen d'interférences complexes. Il est important de noter que le terme de champ proche ne signifie pas ondes évanescentes. Les ondes évanescentes sont contenues dans les 3 termes de champs et au cours des développements que nous avons pu faire, c'est indirectement que ces ondes sont prises en compte. Lorsque nous parlons de champ proche, c'est donc toujours en nous référant au terme en $1/r^3$ de l'expression du rayonnement de dipôles. Dans la littérature, ce terme fait souvent référence directement au champ évanescent.

Une question liée et qui concerne particulièrement le rayonnement est de savoir combien de plus proches voisins doivent être pris en compte pour décrire correctement le couplage dans un réseau fini de cellules résonantes. S'il est suffisant, comme nous l'avons fait pour un réseau de taille infinie, de ne prendre en compte que les plus proches voisins pour obtenir une bonne approximation de la relation de dispersion d'un réseau, ce n'est plus le cas lorsque l'on s'intéresse aux pertes dues aux rayonnements d'un réseau fini de cellules.

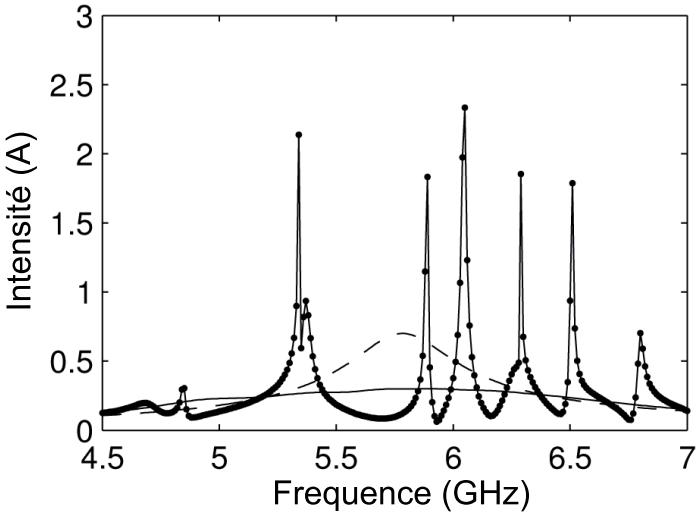


Figure III.13 – Densité de courant sur une cellule d'un réseau de 4 par 4 cellules résonantes, sans perte. La ligne continue est obtenue lorsque seul le champ proche des plus proches voisins (termes en $1/r^3$) est pris en compte. La ligne hachurée résulte des effets des plus proches voisins en prenant en compte tous les termes d'interactions en $1/r$, en $1/r^2$ et en $1/r^3$. Le ligne continue à points est obtenue lorsque tous les termes d'interactions sont pris en comptes.

En effet, nous avons montré que les pertes radiatives pouvaient être déduites de la transformée de Fourier de la matrice de couplage décrivant les interactions réciproques entre les cellules. Cette dernière est issue de l'intégrale continue de la fonction de Green dyadic. Or la partie imaginaire de la transformée de Fourier de cette fonction est nulle pour les nombres d'onde supérieurs à k_0. C'est également le cas pour la partie réelle de la transformée de Fourier de l'impédance de couplage. Ainsi, le rayonnement est dû à un effet global du réseau concernant toutes les inclusions du réseau. Contrairement aux pertes ohmiques, cet effet est non local et ne peut pas être correctement décrit en ne tenant compte que des plus proches voisins et de la résistance radiative des cellules considérées seules. Sur la figure III.13, on retrouve bien le fait que le réseau n'a pas de résonance lorsque l'on ne considère que les plus proches voisins dans la matrice de couplage.

Nous avons étudié les propriétés du champ lointain pour des structures finies de résonateurs sub-longueur d'onde. Nous souhaitons à présent savoir s'il est possible à partir de telles mesures d'extraire certains paramètres d'une structure qui lui seraient propres, indépendants de son environnement. Il apparait notamment intéressant entre autre pour l'imagerie, les télécommunications de pouvoir extraire des informations sur le couplage de la structure avec son environnement immédiat. Ceci est l'objet de l'étude dans la partie suivante de ce chapitre.

III.2 Localisation de modes

Nous avons vu qu'une structure composée d'un nombre fini de résonateurs sub-longueur d'onde couplés présente des résonances marquées associées aux modes de la structure.

Ainsi, une structure à N résonateurs possède N modes. Ceux-ci peuvent être dégénérés ou non. Dans cette partie, en nous appuyant sur les résultats présentés dans le chapitre II sur le comportement discrétisé de ces structures, nous cherchons à développer des moyens permettant d'identifier les modes propres d'une structure à partir de mesures en champ lointain.

En pratique, il s'avère intéressant d'avoir accès à cette base de modes à partir de mesures de champs proches et de champs lointains. En effet, on peut citer par exemple les travaux de Ourir *et al* [75] où les techniques d'imagerie utilisées nécessitent des mesures au préalable de toutes les réponses fréquentielles, entre tous les résonateurs de la structure et ceux pour tous les points de mesure. L'identification des modes permettait d'éviter cette étape fastidieuse.

Puisque tous les modes ne sont pas résonants, ce n'est pas une "lecture directe". En effet du fait des dégénérescences de modes, des symétries, de l'atténuation dans les milieux, il n'est pas possible dans le cas général d'associer simplement un pic de résonance à un mode. Cependant, il est possible d'utiliser des algorithmes mathématiques permettant d'extraire les caractéristiques des modes en partant par exemple d'une mesure en champ proche telle qu'un coefficient de réflexion, ou encore une mesure en champ lointain telle qu'un diagramme de rayonnement. Dans un premier temps, on se posera la question de l'orthogonalité de la base que l'on peut construire à partir des modes propres d'une structure. Notons que l'on se restreint toujours par ailleurs à une description où chaque résonateur est associé à un scalaire. Dans un second temps, dans le but de décrire un réseau à l'aide de ces modes propres, et notamment à l'aide d'une base orthonormée de modes propres, deux algorithmes mathématiques sont présentés. Ceux-ci ont pour but d'extraire de mesures en champ proche ou en champ lointain les caractéristiques complexes de modes propres.

III.2.1 Orthogonalité de familles de vecteurs propres

Si analytiquement, on ne considère que les interactions en champ proche (soit les interactions en $1/r^3$) d'un réseau fini de résonateurs, la matrice de couplage du réseau est purement imaginaire et de rang N. Elle est diagonalisable. On obtient en exécutant une décomposition en valeurs propres de la matrice une base orthogonale formée par les vecteurs propres. La structure présente ainsi N vecteurs propres orthonormés.
Si à présent on considère tous les champs, champs proches, champs intermédiaires et champs lointains, la matrice n'est plus hermitienne mais seulement symétrique complexe. Sauf cas particulier, on peut supposer qu'elle est diagonalisable et évaluer ses valeurs propres $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ et vecteurs propres qui sont complexes.

En mesure champ proche d'un milieu sans perte ohmique, les structures présentent donc un ensemble de N modes propres orthogonaux permettant de décrire leurs comportements électromagnétiques.

On s'intéresse aux champs lointains émis par les vecteurs propres qui forment une base orthogonale en champ proche. La famille de vecteurs obtenue en mesure champ lointain ne constitue plus nécessairement une base orthonormale. Ceci vient du fait que le diagramme de rayonnement obtenu est le résultat des interférences complexes de rayonnement des di-

pôles. Ainsi, alors que mesurer les modes propres en champs proches permet d'obtenir des vecteurs propres orthogonaux, ce n'est plus le cas lorsque l'on mesure leurs diagrammes de rayonnement en champ lointain.

L'étude précédente nous montre que les familles de vecteurs propres que l'on peut construire à partir de mesures en champ proche ou champ lointain sont dans la plupart des cas de dimensions inférieures au nombre de résonateurs. Pour détecter les modes propres d'une structure finie, nous allons exploiter leurs caractéristiques spectrales plutôt que leurs diagrammes. Ainsi, pour retrouver les fréquences de résonance des modes, nous allons appliquer des algorithmes non linéaire d'identification.

III.2.2 Algorithme ESPRIT

En analyse modale, la transformée de Fourier, qui consiste à projeter un signal sur un ensemble de sinusoïdes, est adaptée aux cas où le signal décroît peu, ce qui signifie un amortissement modal très faible. Dans le cas contraire, la résolution intrinsèquement limitée de la transformée de Fourier (qui est liée au fenêtrage temporel du signal) peut devenir gênante. Ainsi si deux résonances sont proches, leurs spectres se recouvrent et une transformée de Fourier ne permet pas de les détecter. Des techniques de haute résolution telles que l'algorithme ESPRIT permettent d'analyser le signal directement comme une somme discrète de sinusoïdes exponentiellement décroissantes et sont bien adaptées pour estimer des modes dont l'écart fréquentiel est proche de l'élargissement spectral dû à l'amortissement, ce qui le cas dans nos mesures. Cette technique repose sur l'hypothèse que toutes les résonances sont décrites par un pôle complexe dans l'espace des fréquences. Les signaux étudiés sont donc réécrits sous la forme $\sum A_i e^{j\omega t-\gamma t}$ où ω est la pulsation de la sinusoïde, γ son amortissement, et A_i son amplitude.

L'algorithme ESPRIT est couramment utilisé pour la localisation de sources et l'analyse spectrale [76, 77]. ESPRIT signifie "Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Techniques" soit l'estimation des paramètres d'un signal par technique d'invariance rotationelle. Il procure une bonne estimation des paramètres γ, ω et A de ce signal [78]. Une description détaillée de cet algorithme est disponible dans les travaux de [79, 80]. Nous avons appliqué cet algorithme à différents signaux : des signaux issus de notre modèle dipolaire, des signaux de simulation et enfin des signaux de mesures expérimentales. On se base ici sur l'invariance par translation dans le temps des signaux. L'algorithme s'applique directement sur des mesures temporelles. Pour les signaux numériques et les signaux expérimentaux, on effectue donc une transformée de Fourier pour passer en temporel. Pour que l'algorithme fonctionne, il est nécessaire de faire l'hypothèse que toutes les fréquences complexes des modes sont différentes, hypothèse respectée par les structures que nous étudions. Cet algorithme nécessite de plus de connaitre en amont le nombre de modes de la structure ce qui est notre cas. Dans le cas contraire, il est possible avec d'autres algorithmes de retrouver ce nombre.

L'algorithme consiste en la constitution d'une matrice de covariance directement à partir du signal temporel et en sa décomposition en valeurs et vecteurs propres ainsi qu'une

succession d'autres étapes que je ne décrirai pas ici. La thèse [81] en donne une bonne description. L'algorithme permet d'obtenir la fréquence complexe des modes ainsi que leur amplitude. La partie réelle de la fréquence complexe représente la fréquence d'un mode et la partie imaginaire sa largeur.

Nous avons appliqué ESPRIT aux 3 types de signaux. Les résultats sont tracés en fréquentiel. Sur les figures III.14, III.15 et III.16 sont présentés les paramètres Z11 de mesures en champ proche de réseaux de 4 par 4 SRRs à 3 fentes, issues respectivement de simulations FDTD, du modèle théorique dipolaire (chaque cellule est un dipôle électrique et un dipôle magnétique) et de mesures expérimentales. Sur ces figures sont également présentés les pôles (ω, A) calculés avec ESPRIT ainsi que la reconstitution du signal lorsque l'on somme toutes les sinusoïdes décroissantes obtenues. Les reconstructions que l'on obtient à partir des positions fréquentielles et des amplitudes des modes sont très correctes bien que l'algorithme soit perturbé par le fait que peu de modes sont réellement excités, entre 6 et 10, alors que le nombre de modes théoriques est de seize.

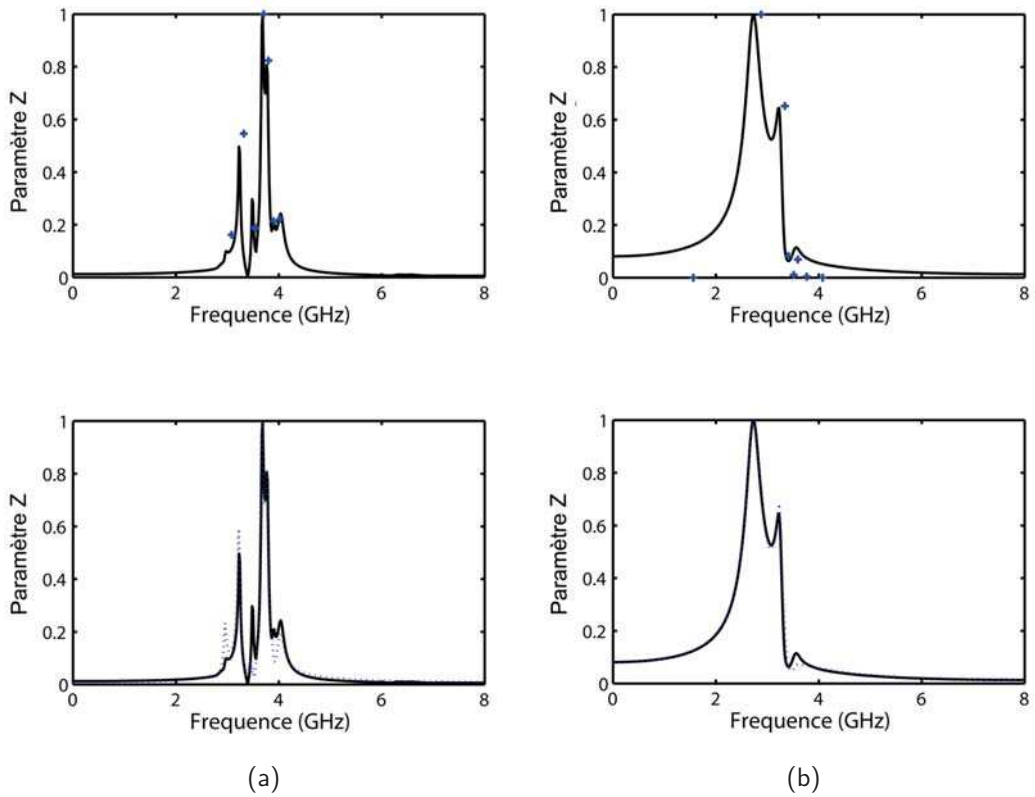


Figure III.14 – Paramètre Z11 (courbe continue noire) et sa reconstruction (croix et courbe pointillée bleue) par ESPRIT pour des signaux issus de simulations FDTD numériques d'un réseau de 4 par 4 SRRs (a) à 3 fentes et (b) à 4 fentes.

Nous souhaitons que les pôles calculés ne dépendent pas de la position de l'excitation. Considérons deux mesures issues de deux excitations différentes d'un même milieu. Pour vérifier la cohérente de cet algorithme, il faut effectuer ce calcul pour plusieurs excitations de la structure. Nous avons effectué ces étapes pour les 3 types de signaux. Pour les signaux issus du modèle dipolaire, l'algorithme donne des résultats très cohérents. Une

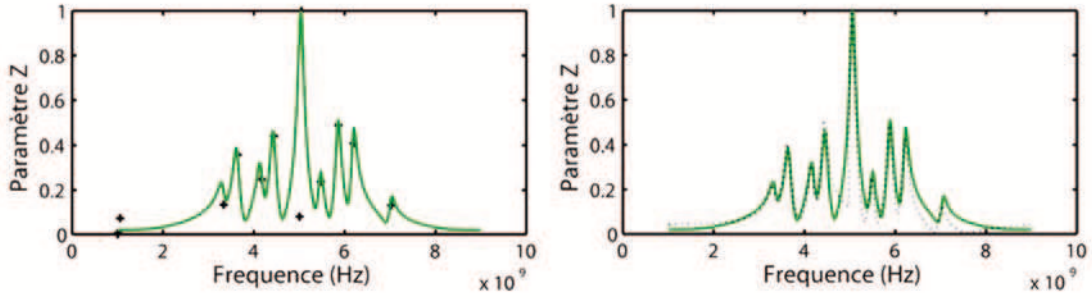


Figure III.15 – Paramètre Z11 et sa reconstruction par ESPRIT pour des signaux issus du modèle dipolaire. Les croix sont les couples (ω, A) calculé avec ESPRIT, la courbe pointillée noire est la reconstruction du signal obtenu.

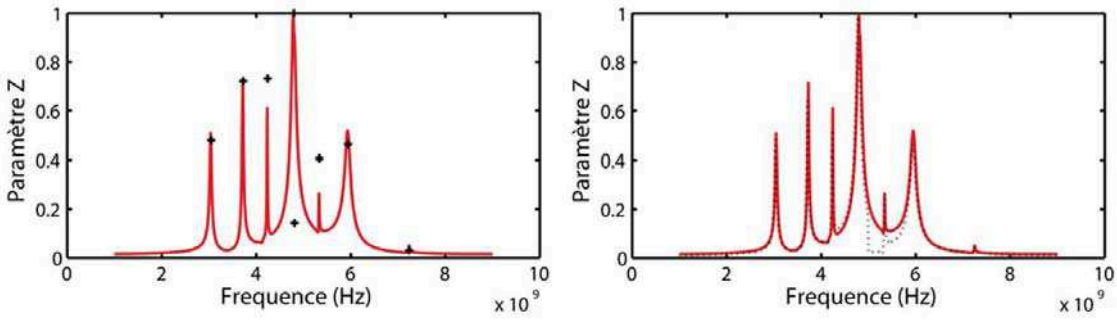


Figure III.16 – Paramètre Z11 et sa reconstruction par ESPRIT pour des signaux issus de mesures expérimentales. Les croix sont les couples (ω, A) calculés avec ESPRIT, la courbe pointillée noire est la reconstruction du signal obtenu.

seule "base" est trouvée et il est possible de la réutiliser ensuite quelque soit la source utilisée. Pour les signaux issus de simulation (dans laquelle des pertes sont introduites) et pour les mesures expérimentales, les résultats sont moins bons. Des résultats sur les fréquences des modes pour un même réseau excité en deux points différents sont présentés figure III.17. Ces signaux sont issus de simulations. L'erreur sur les valeurs des fréquences entre les deux mesures est d'au moins 19%.

Pour comprendre l'origine de ce dysfonctionnement, nous avons testé la robustesse de l'algorithme au bruit. A cette fin, nous avons appliqué ESPRIT à un signal test simple construit à partir d'une somme de fonctions sinusoïdales amorties auxquelles on ajoute un bruit aléatoire. Les résultats sont présentés figure III.18 pour deux types signaux. Le premier signal (III.18(a), (c), (e)) n'est pas bruité. Le second signal (III.18(b),(d) et (f)) l'est avec un rapport signal sur bruit de 10 dB.

On peut observer que l'algorithme n'est pas robuste pour des signaux même faiblement bruités. Les valeurs obtenues sont très approximatives et ne nous permettraient pas de travailler sur des structures où les modes sont très rapprochés. Notons de plus que plus le nombre de modes est élevé moins l'algorithme est robuste. Ceci pose fortement problème car nos mesures présentent toujours une petite part de bruit. De plus, pour les simulations, les calculs sont effectués pour un temps fini ce qui induit une sorte d'imperfection

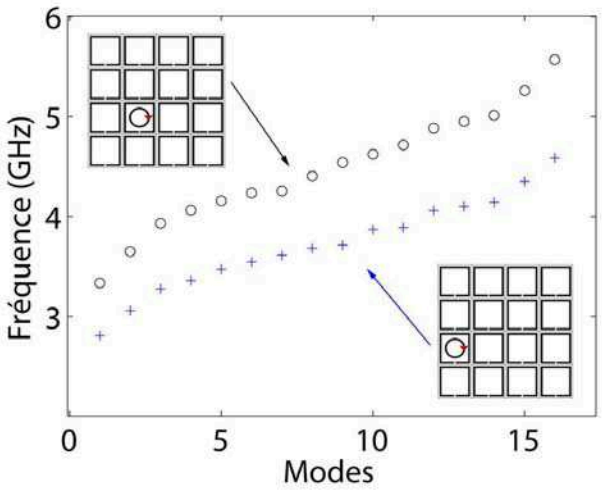


Figure III.17 – Schémas de deux configurations d'excitation d'un réseau de 4 par 4 SRRs à une fente et fréquences des modes obtenues avec ESPRIT appliqué aux signaux temporels mesurés sur la boucle de courant, en "o" pour la première configuration et en "+" pour la seconde.

dans les signaux. et nous souhaitons que la description de la structure soit indépendante de l'excitation.

Cet algorithme, même s'il n'est pas robuste au bruit permet cependant d'avoir une idée du facteur de qualité des résonances. Il permet ainsi de calculer l'atténuation de chaque mode. Sur la figure III.19 sont présentées les parties imaginaires des pulsations, calculées directement avec ESPRIT pour un signal issu d'une mesure expérimentale. Plus le facteur de qualité, i.e, plus la partie imaginaire de la pulsation est petite, plus la résonance du mode associé est piquée. Cette information se révèle intéressante notamment d'un point de vue statistique, pour évaluer la variation du facteur de qualité en fonction du couplage entre les résonateurs du milieu.

Parce que cet algorithme est trop sensible au bruit, nous avons dans un second temps utilisé pour la reconnaissance de mode un second algorithme, qui a l'avantage particulier de s'appliquer directement aux signaux fréquentiels, et qui est à priori plus robuste à l'introduction de bruit dans les signaux.

III.2.3 Algorithme de Matching pursuit

Le Matching Pursuit (MP) est une technique numérique dont le but est de rechercher la meilleure projection d'une information à plusieurs dimensions en utilisant un certain dictionnaire D. L'idée principale est de représenter un signal en une somme pondérée de fonctions g_n prises dans D [82, 83].

$$S(\omega) = \sum_n \alpha_n g_n(\omega) \tag{III.19}$$

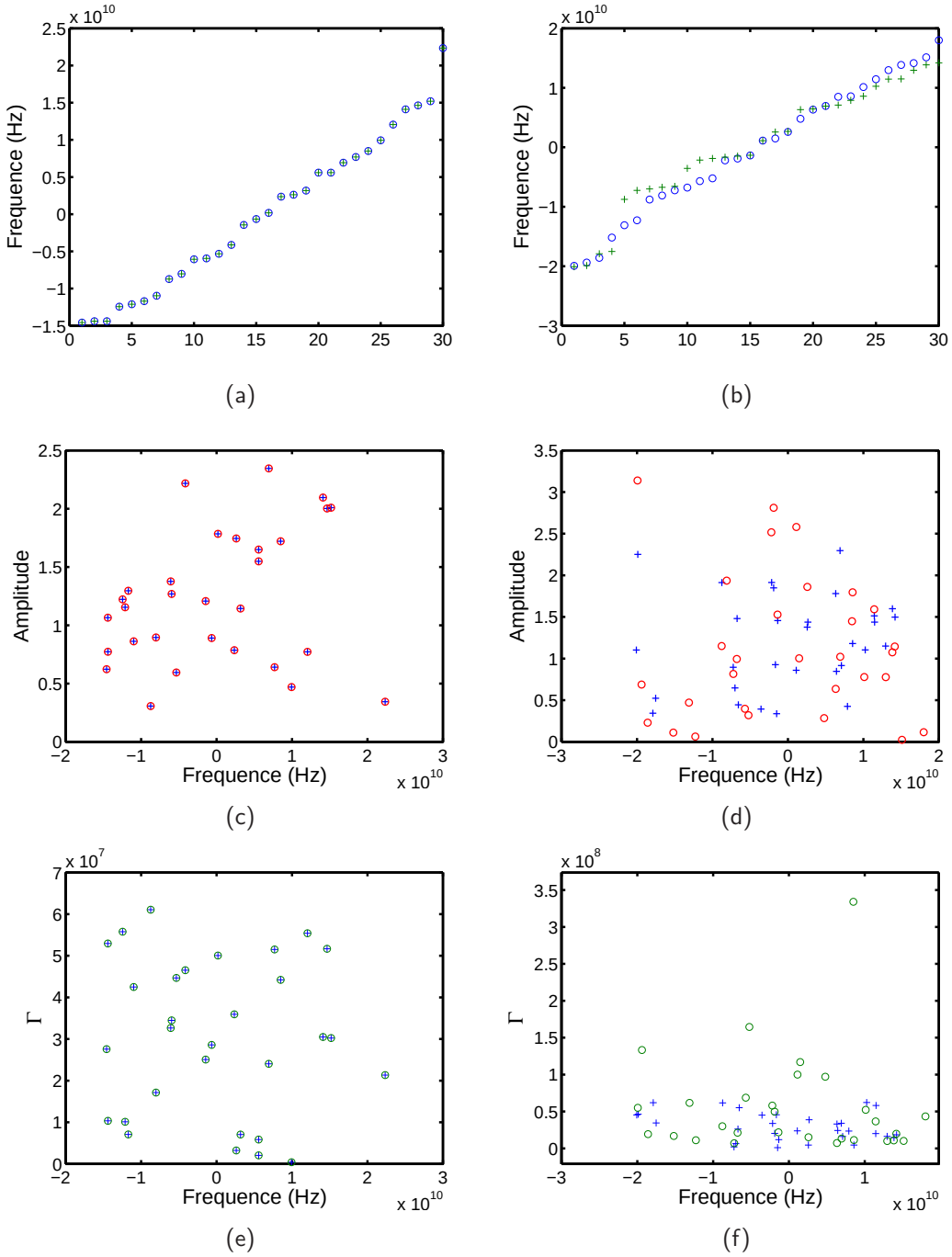


Figure III.18 – Test de stabilité de l'algorithme ESPRIT pour un signal construit (a), (c), (e) sans bruit, et (b),(d), (f) avec bruit. Les "cercles" indiquent les points du signal initial et les "croix" les points du signal reconstitué.

Le MP est un algorithme glouton. Il fait étape par étape un choix optimal local dans le but d'obtenir un résultat optimum [84]. L'algorithme procède de la sorte : après le choix d'un dictionnaire de fonctions qui est approprié pour le signal étudié, le matching pursuit, dans un premier temps trouve la fonction dans le dictionnaire appelé atome dont la corrélation avec le signal étudié est la plus élevée. Cet atome est ensuite soustrait au signal initial. Ce processus est itéré sur le nouveau signal issu de la dernière soustraction.

Du fait de l'invariance temporelle de nos mesures, comme pour l'algorithme ESPRIT,

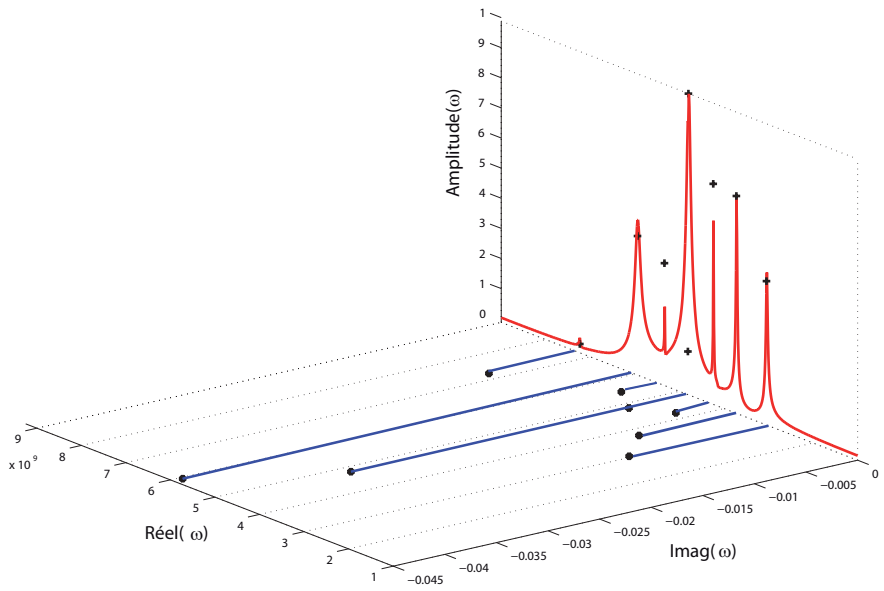


Figure III.19 – En rouge est tracé le paramètre Z d'un signal de 4 par 4 cellules résonantes couplées ; en points noirs les amplitudes et fréquences des modes retrouvés avec ESPRIT et en bleu les partie imaginaires de la fréquence des modes.

nous pouvons utiliser une famille de lorentzienne.

L'algorithme MP a l'avantage par rapport à l'algorithme ESPRIT de s'appliquer directement à des signaux fréquentiels ce qui permet de ne pas être limité par une fenêtre temporelle. De plus nous avons pu observer qu'il est très robuste au bruit. En figure III.20 ont été tracés des signaux tests construits à partir d'une somme de lorentziennes (en trait rouge), et leurs reconstitutions avec l'algorithme MP (en pointillé noir). Ces courbes sont obtenues après 4 itérations de l'algorithme. La courbe en vert est la valeur absolue de la différence entre le signal initial et le signal reconstitué. La figure III.20(a) présente un signal très bruité dont les résonances sont parfaitement retrouvées avec le MP. Le RSB est ici de 7dB. Les caractéristiques des lorentzienne sont parfaitement retrouvées. Sur la figure III.20(b) l'algorithme est appliqué à un signal pour lequel les fréquences de résonances sont suffisamment espacées. L'algorithme fonctionne très bien. Si par contre, l'écart fréquentiel entre deux résonances est trop faible, l'algorithme les confond et les approxime par une seule lorentzienne tel que sur la figure III.20(c). Ceci constitue un inconvénient majeur pour la recherche de modes propres de structures résonantes.

Les deux approches algorithmiques que nous avons utilisées sont intéressantes et permettent encore une fois de mettre en évidence la discrétisation de la réponse de milieux de taille finie constitués de résonateurs sub-longueur d'onde. Cependant, ces approches ne sont fonctionnelles pour le moment que pour des signaux pas ou très faiblement bruités en ce qui concerne l'algorithme ESPRIT. L'algorithme MP ne permet pas de séparer deux modes dont les fréquences de résonance sont trop proches. Il n'est donc pas envisageable d'utiliser notamment expérimentalement ces méthodes.

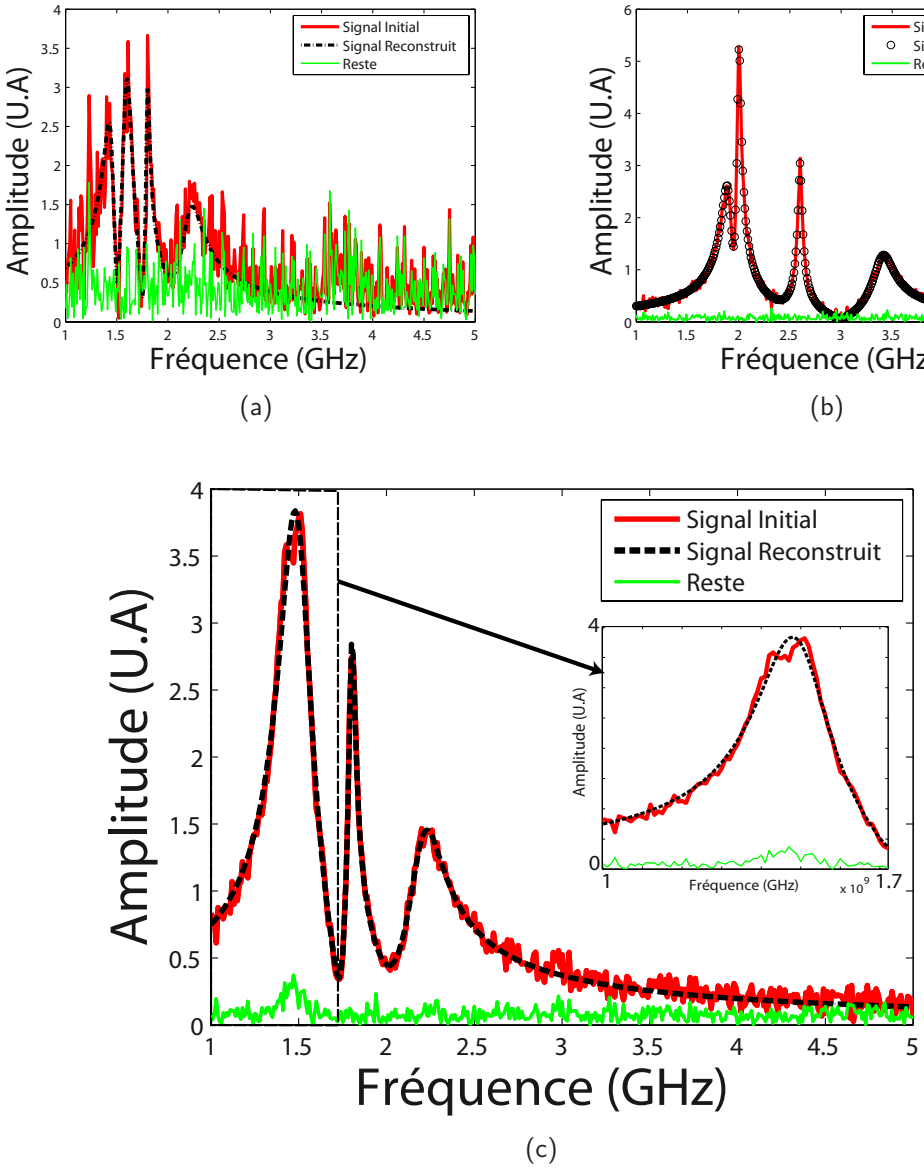


Figure III.20 – Matching Pursuite sur des signaux test somme de lorentziennes.(a) Sur un signal fortement bruité (7dB), (b) une signal classique présentant 4 résonances, (c) un signal présentant 4 résonances dont deux ayant des fréquences très proches. Le reconstitution ne voit pas les deux résonances et les approxime par une unique lorentzienne.

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux propriétés de rayonnement de structures constituées d'un nombre fini de résonateurs sub-longueur d'ondes. Il a été montré que la conversion d'ondes évanescentes en ondes propagatives était due au caractère fini du milieu ainsi qu'aux interactions entre les cellules résonantes. C'est le couplage des modes sub-longueur d'onde avec l'espace libre qui permet leur rayonnement en champ lointain. Nous avons étudié la configuration des diagrammes de rayonnement, notamment la relation entre ces derniers et les symétries et asymétries du réseau. Enfin, nous avons

discuté de la nécessité de prendre en compte le champ lointain lorsque l'on considère le couplage entre les résonateurs. Nous avons montré que garder uniquement le champ proche dans le modèle donnait des résultats qui ne permettaient plus d'expliquer le rayonnement d'informations sub-longueur d'ondes en champ lointain.

Dans une seconde partie, nous avons travaillé sur l'extraction des modes propres d'un milieu de taille finie à partir d'algorithmes mathématiques. Ceci nous permet d'accéder aux fréquences complexes de ces modes ainsi qu'à leurs amplitudes. Ils permettent de plus de calculer l'atténuation de chaque mode. Ces résultats bien qu'ils soient confrontés aux problèmes de pertes et de bruits lors des mesures de signaux restent utiles pour l'analyse de signaux émis par des milieux de taille finie de résonateurs. Cette étude montre que le contrôle et l'exploitation des modes propres d'un réseau de taille finie composé de résonateurs tous identiques est extrêmement délicate. Dans le chapitre suivant, nous tenons compte de ces résultats. Nous tirons à la fois partie de la complexité des modes sur les structures et tentons une approche originale consistant à concevoir des structures pour choisir la configuration spatiale et fréquentielle de ces modes.

CHAPITRE IV

Imagerie super-résolue et antennes miniatures

Table des matières

IV.1 Rayonnement de modes propres, application à une antenne beamforming **91**

IV.1.1 Rayonnement de modes propres d'une structure finie de résonateurs sub-longueur d'onde 91

IV.1.2 Résonateur à fréquence fondamentale ajustable 94

IV.1.3 Réseau de résonateurs ajustables 96

IV.1.4 Amélioration de l'antenne à balayage spatial et fréquentiel . . 97

IV.2 Imagerie sub-longueur d'onde par modes localisés **97**

IV.2.1 Contrôle de modes 98

IV.2.2 Champ lointain de modes localisés 100

IV.2.3 Réalisation expérimentale 101

IV.2.4 Transposition en optique. 103

IV.3 Conclusion **105**

Lorsqu'une onde est diffractée par un objet, les détails sub-longueur d'onde de l'objet sont portés par des ondes dont les variations spatiales sont sub-longueur d'ondes. Ces ondes ont un vecteur d'onde plus grand que le vecteur d'onde du vide. Ces composantes restent confinées au voisinage des structures, il n'est donc plus possible d'y avoir accès. C'est pour cette raison que la résolution des systèmes d'imageries classiques ou de focalisation est limitée à $\lambda/2$. Lorsque l'on souhaite contrôler ou focaliser une onde sur une échelle sub-longueur d'onde, ou encore obtenir des images avec des résolutions inférieures à la limite de diffraction, il faut donc trouver des dispositifs permettant de convertir les ondes évanescentes en ondes propagatives.

Les méthodes classiques consistent à utiliser un objet sub-longueur d'onde comme convertisseur d'ondes évanescentes en ondes propagatives. La théorie de l'imagerie champ proche a vu le jour dès les années 70. Les premiers grands résultats expérimentaux ont été obtenus dans les années 80 avec les travaux de Pohl *et al*, qui ont introduit la spectroscopie en champ proche en balayant avec une sonde extrêmement fine la surface d'objets à imager. Cette méthode reste, en optique, la méthode de référence et est encore sujette à débat. Le dispositif développé par Sentenac *et al* en est issue. L'équipe utilise une structure périodique 2D, illuminée avec des incidences variantes, pour réaliser de l'imagerie sub-longueur d'onde à partir de mesures en champ lointain [33].

Plus récemment, dans le domaine des métamatériaux, Pendry a introduit en 2001 le concept de "super lentille" composée d'un méta-matériau d'indice négatif [85]. Ces metamatériaux compensent la décroissance exponentielle des ondes évanescentes, brisant par ce biais la limite de Rayleigh. Cet effet n'a cependant été observé que pour des lentilles de très faible épaisseur.

A la suite de ce travail, le concept de métamatériau a permis le développement de nombreuses méthodes pour dépasser la limite de diffraction. Ainsi, une autre possibilité est d'utiliser une "magnifying hyperlens", formée avec un métamatériau composé d'un arrangement périodique et cylindrique de résonateurs [18, 86]. Grâce à cet arrangement, les ondes évanescentes sont converties progressivement en ondes propagatives. Dans ce type de structure, on peut également tirer avantage de la forte dispersion ce qui a été démontré avec une structure périodique de résonateurs électriques demi-longueur d'onde [37]. Récemment, de l'imagerie en champ lointain de motifs sub-longueur d'onde a été réalisée avec un réseau de Split Ring Resonator [75].

Les travaux sur la propagation de l'information sub-longueur d'onde sont également menés dans le domaine des antennes, et ce dans le but de miniaturiser celles-ci de façon à les intégrer à des objets de plus en plus petits. Ces recherches entrent notamment dans le cadre du développement des télécommunications sans fil. La recherche d'antennes larges

bandes, efficaces, multi-fréquentielles, capables d'être adaptées à leur environnement est un réel défi technologique. Le développement de substrats de très grandes permittivités, des chargements capacitifs, le contrôle de modes supérieurs de résonateurs [87], l'utilisation d'éléments parasites associés à l'élément alimenté [88] sont en plein essor.

Utilisant les propriétés de milieux finis localement résonants, des SRRs et des monopoles ont été utilisés pour le design d'antennes miniatures [89]. Des antennes très larges bandes formées de SRRs ont été étudiées [90]. Les métamatériaux ont aussi été utilisés pour accorder la fréquence de travail d'antennes [91], ou encore pour réaliser des systèmes à conjugaison de phase [92].

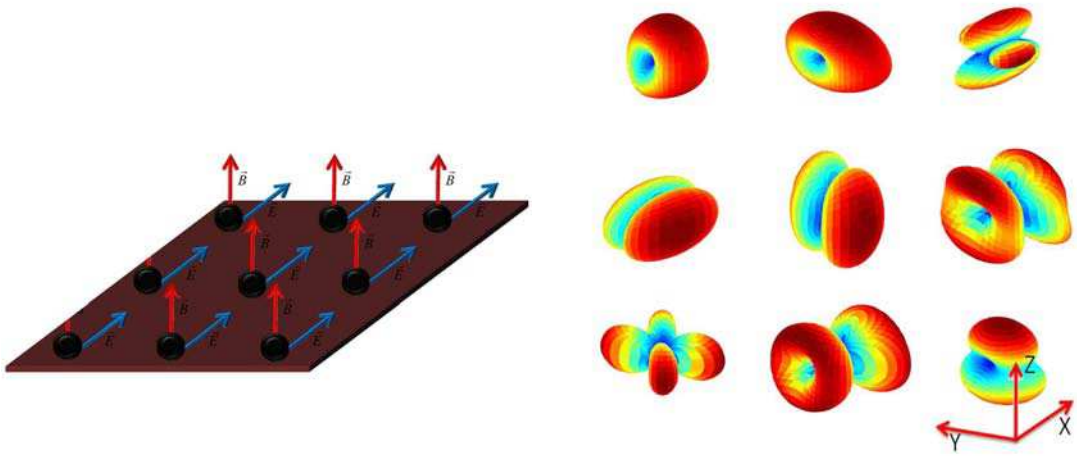
Nous avons vu dans les chapitres précédents que les milieux de taille finie, composés d'arrangements de résonateurs électromagnétiques sub-longueur d'onde ont la propriété de convertir des ondes évanescentes en ondes propagatives. Il est possible grâce à l'utilisation de tels milieux de capter en champ lointain des ondes contenant des petites fréquences spatiales. Cette propriété est due aux interactions fortes dans le milieu, entre les inclusions résonantes, qui induisent des modes sub-longueur d'onde résonants. L'usage de milieux complexes composés de structures plus petites que la demi-longueur d'onde s'avère ainsi être une solution nouvelle pour outrepasser le critère de Rayleigh.

Dans ce chapitre, les réseaux de tailles finies de résonateurs sub-longueur d'onde seront abordés sous différents aspects. Le premier aborde ces milieux en tant qu'éléments rayonnants. La variation du diagramme de rayonnement, qui propage des petites fréquences spatiales, et qui varie selon les modes excités est exploitée. Cette approche nous a permis de concevoir une antenne miniature dont le diagramme de rayonnement est contrôlable spatialement et fréquentiellement. Dans une seconde partie, nous proposons un système original d'imagerie sub-longueur d'onde en champ lointain. Celui-ci repose sur le design d'une structure finie de résonateurs dont les modes propres sont localisés, ceci permettant de créer une relation directe entre le champ lointain du réseau et le champ proche de l'objet à imager.

IV.1 Rayonnement de modes propres, application à une antenne beamforming

IV.1.1 Rayonnement de modes propres d'une structure finie de résonateurs sub-longueur d'onde

Dans le chapitre précédent, les caractéristiques de milieux composés de résonateurs sub-longueur d'onde périodiquement agencés ont été étudiées avec une approche électrodynamique. Le caractère fini et périodique de tels milieux permet d'effectuer des décompositions modales pour décrire ces systèmes. Ceux-ci présentent des modes résonants discrets dont des configurations électromagnétiques spatiales de champs sont propres à chacun. Le milieu peut être décrit à l'aide de N fréquences propres et N vecteurs propres associés, indépendants de toute excitation.



(a) (b)

Figure IV.1 – (a) Structure simulée de 3 par 3 cellules constituées chacune d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique. (b) Diagrammes de rayonnement calculés théoriquement des neuf modes de cette structure.

On cherche à comprendre comment de telles structures rayonnent. Les vecteurs propres associés à chaque mode présentent tous des répartitions de champs magnétiques et électriques propres et distinctes. De ce fait, l'excitation d'un mode, donc d'un vecteur propre, induit un rayonnement du milieu caractéristique à ce mode. Cela vient du fait que de l'information contenant des petites fréquences spatiales est transmise en champ lointain. Ainsi, chaque mode présente un diagramme de rayonnement différent et bien particulier. A titre d'exemple, la figure IV.1 présente l'ensemble des diagrammes de rayonnement pour chaque vecteur propre d'une structure de 3 par 3 couples de dipôles électriques et magnétiques, modélisée avec le modèle dipolaire présenté dans le chapitre II.

L'excitation par une source d'une structure finie de résonateurs entraine ainsi l'excitation de plusieurs des modes du milieu. La réponse obtenue peut alors être décomposée sur la base orthogonale que forment les vecteurs propres du milieu. On obtient en excitant chaque mode individuellement une famille de diagrammes de rayonnement que nous allons exploiter.

Dans cette partie nous tirons partie de la variabilité fréquentielle du diagramme de rayonnement d'une structure finie de résonateurs sub-longueur d'onde pour réaliser une antenne dont le diagramme de rayonnement est ajustable en fréquence et en directivité.

Considérons un simple Split Ring Resonator à une fente, dont le mode fondamental résonne à 3,5 GHz. Nous assemblons 16 résonateurs de ce type en un réseau plan carré tel que présenté sur la figure IV.2. La structure est imprimée sur un substrat diélectrique duroïde de 1 millimètre d'épaisseur. Les résonateurs sont placés sur un réseau dont la périodicité est de dix millimètres.

La structure a été caractérisée par simulation FDTD, sur le logiciel CST Microwave. Elle est excitée par une petite boucle de courant positionnée en champ proche d'un résonateur,

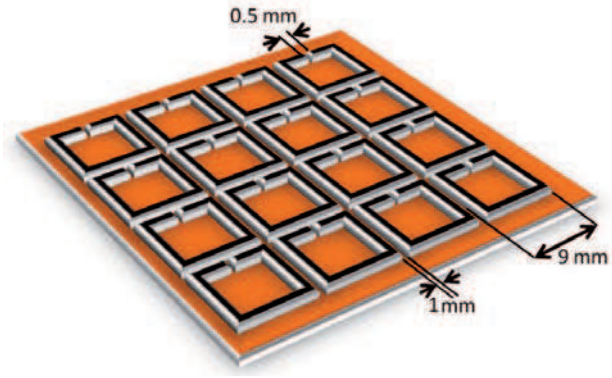


Figure IV.2 – Schéma du réseau plan de 4 par 4 SRRs

qui émet un champ magnétique perpendiculaire au plan du réseau. Cette boucle de courant est alimentée par un port 50 Ohm. La géométrie de cette boucle permet de générer un champ dont la polarisation est adaptée à l'excitation des cellules du réseau.

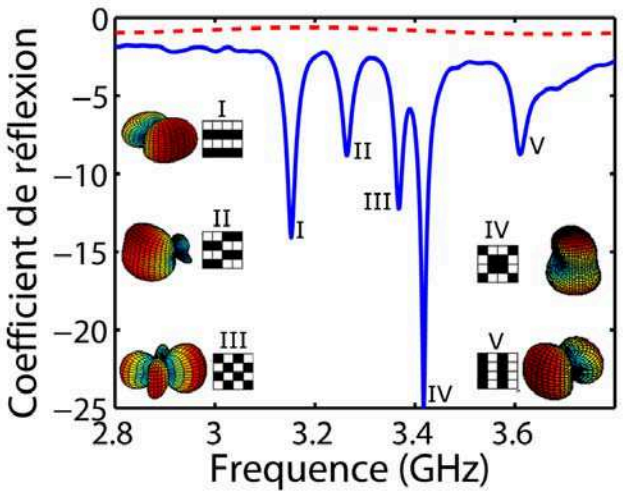


Figure IV.3 – Coefficient de réflexion simulé d'une structure 4 fois 4 excitée par une boucle de courant. Pour chaque résonance est représenté le mode excité et le diagramme de rayonnement qui lui correspond.

Sur la figure IV.3 sont tracés les coefficients de réflexion mesurés sur la boucle lorsque celle-ci est considérée seule (courbe pointillée) et lorsqu'elle est positionnée en champ proche de la structure de SRRs (courbe continue). Dans ce second cas, les résonateurs couplent fortement. On observe une levée de dégénérescence de résonance dans une bande de fréquence allant de 3,1 GHz à 3,6 GHz. Avec cette configuration, cinq résonances sont observables. Elles sont soit dues à des résonances de modes seuls, soit à des résonances issues d'une superposition de modes (donc dégénérés). Les diagrammes de rayonnement que l'on obtient en simulation pour plusieurs fréquences sont tracés figure IV.3. On constate que l'on obtient des diagrammes type multipolaires (monopolaires, dipolaires quadripolaires). Plus le mode est complexe, plus l'ordre du diagramme de directivité est grand.

Expérimentalement, les mesures sont effectuées en connectant la boucle de courant à un

analyseur de réseau de type Agilent 8722ES. Les mesures du diagramme de rayonnement de la structure soumise à cette excitation sont réalisées dans une chambre anéchoïque à l'aide d'une antenne cornet, placée approximativement à huit longueurs d'onde de la structure à mesurer. La structure est placée sur une plate forme tournante. Au différentes fréquences de résonance, on mesure bien des diagrammes de rayonnement distincts tel que prédits par la théorie. Grâce à l'effet Purcell, l'adaptation de la source a lieu à la résonance des modes de la structure ce qui permet d'obtenir une bonne efficacité de radiation. Notons que l'effet Purcell signifie que le taux d'émission spontanée d'une source placée dans en champ proche d'un milieu résonant est gouverné par le facteur de qualité des résonances du milieu [93]. Nous avons numériquement estimé une efficacité moyenne de 80%.

IV.1.2 Résonateur à fréquence fondamentale ajustable

Nous avons obtenu une antenne plus petite que la demi longueur d'onde dont le diagramme de rayonnement varie avec la fréquence. En effet, à chaque fréquence correspond un ensemble de lobes principaux de rayonnement. Nous souhaitons tirer profit de cette propriété pour développer une antenne dont le diagramme de rayonnement est ajustable à une fréquence fixée. A cette fin, nous utilisons des SRRs dont la fréquence de résonance est ajustable.

Le réseau présenté jusqu'alors était constitué de SRRs dont la fréquence fondamentale était fixée à 3,5 GHz. Si l'on modifie toutes les fréquences de résonances des cellules du réseau de la même manière, on observe que l'ensemble des résonances est à son tour décalé linéairement en fréquence. Reprenons le résultat de l'étude dipolaire menée dans le chapitre précédent. On a vu, grâce à l'équation II.36 qu'un mode est résonant lorsque la partie imaginaire de la valeur propre qui lui est associée est égale à la partie imaginaire de l'impédance propre des résonateurs qui le constituent. Nous allons donc manipuler l'impédance propre de résonateurs pour modifier les fréquences auxquelles surviennent les zéros de cette équation.

Sur la figure IV.4, les courbes noires correspondent à la variation de l'impédance propre en fonction la fréquence pour deux fréquences de résonances différentes ($\omega_0 = 5.5GHz$ et $\omega_0 = 5.5GHz$). En rouge sont tracées les valeurs propres de l'impédance mutuelle. Ces dernières ne sont pas sensibles à la variation de l'impédance propre des résonateurs. En effet, la variation fréquentielle des valeurs propres dans notre cas est très faible dans cette bande de fréquence, les modes restent donc dans le même ordre et à la même distance fréquentielle les uns des autres lorsque l'on fait varier la fréquence. Ainsi, modifier le mode fondamental des résonateurs revient à décaler l'ensemble de la courbe noire dans les plus basses ou plus hautes fréquences. L'égalité $\lambda_n - Z_p = 0$ issue de l'équation II.36 est alors elle aussi décalée en fréquence.

Sur la figure IV.4, on montre ainsi que les modes "I" à "V" de la figure IV.3 sont observables à deux fréquences différentes grâce à la modification de la fréquence propre de l'ensemble des résonateurs.

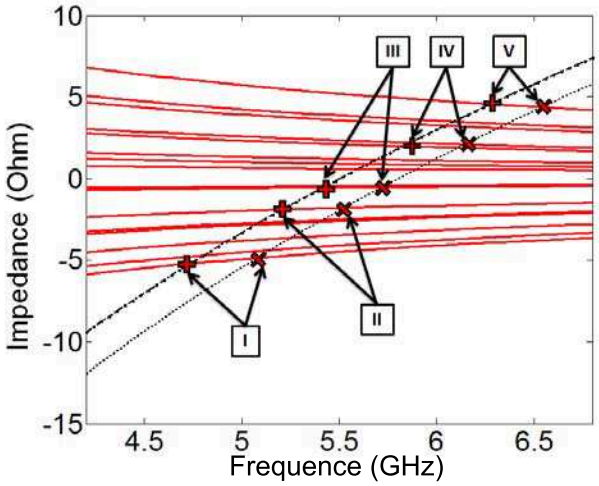


Figure IV.4 – En rouge sont tracées les valeurs propres de la structure étudiée et en noire, les impédances propres de deux résonateurs ayant des fréquences de résonances différentes ($\omega_0 = 5.5GHz$ et $\omega_0 = 5.5GHz$).

Réalisation expérimentale : Pour effectuer expérimentalement ce décalage en fréquence, l'idée est d'insérer dans la structure du résonateur SRR une capacité variable. La capacité de cet élément discret varie avec la tension appliquée à ces bornes.

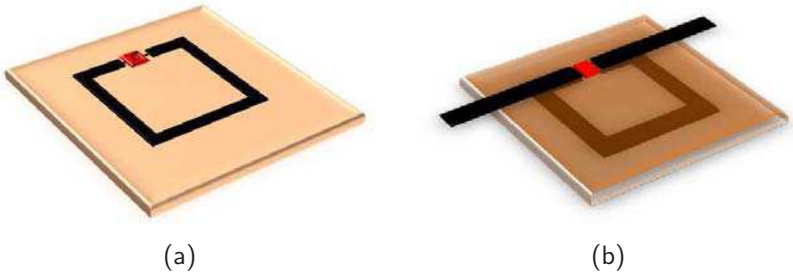


Figure IV.5 – Schéma d'un SRR dont la fréquence de résonance est rendue variable par l'ajout d'une capacité variable (a) sur la fente du SRR, (b) sur la fente mais sous le substrat.

Nous souhaitions placer la varicap en parallèle du gap du SRR (voir figure IV.5). Cependant, il n'est pas possible de polariser un tel dispositif : une telle configuration n'est donc pas réalisable dans la mesure où l'on court-circuiterait la capacité. La solution pour laquelle nous avons opté consiste à placer la capacité de l'autre coté du substrat, sous la fente du SRR et de l'alimenter avec un circuit indépendant tel que présenté sur la figure IV.5(b). Dans ce cas, la capacité n'est pas en contact direct avec le résonateur. Elle influe sur le mode fondamental de celui-ci par couplage. Avec ce dispositif, lorsque la tension augmente de 0 à 30 V, la capacité des varicaps décroit de 6.5 à 0.5 nF et la résonance du mode fondamental se décale vers des plus hautes fréquences. L'accord en fréquence obtenu est ainsi de 200 MHz pour chaque résonance (6% de la bande passante).

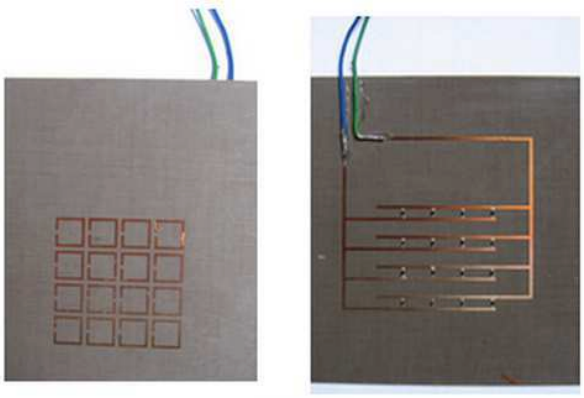


Figure IV.6 – Photographies des deux faces de l'antenne miniature.

IV.1.3 Réseau de résonateurs ajustables

Seize capacités variables sont donc insérées dans le réseau de 16 SRRs. Pour les alimenter, un circuit les plaçant toutes en parallèle est réalisé et imprimé sous le substrat. De cette façon, toutes les varicaps sont soumises à la même variation de tension. L'antenne imprimée est présentée en figure IV.6. Les deux faces du substrat imprimé y sont photographiées.

La figure IV.7 présente les coefficients de réflexion obtenus sur une petite boucle de courant pour différentes tensions appliquées aux bornes des capacités. On obtient bien

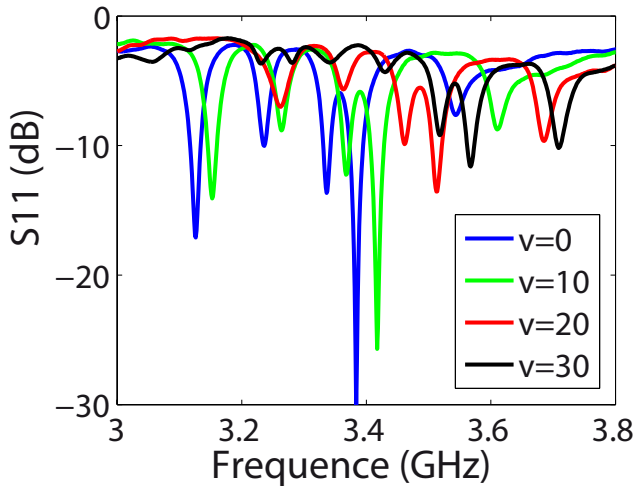


Figure IV.7 – Coefficients de réflexion, mesurés expérimentalement, sur l'antenne magnétique pour 4 tensions aux bornes des capacités : 0, 10, 20, 30 Volt.

un décalage en fréquence de l'ensemble des modes du réseau. La diminution du facteur de qualité des résonances lorsque l'on augmente la tension est due aux capacités, dont la résistante augmente avec la tension appliquée : cette diminution n'est pas due à un effet du réseau mais à l'augmentation de la résistance des capacités variables. À une fréquence donnée, en faisant varier la tension aux bornes des capacités, on est donc capable de faire résonner différents modes de la structure et ainsi capable de sélectionner les différents

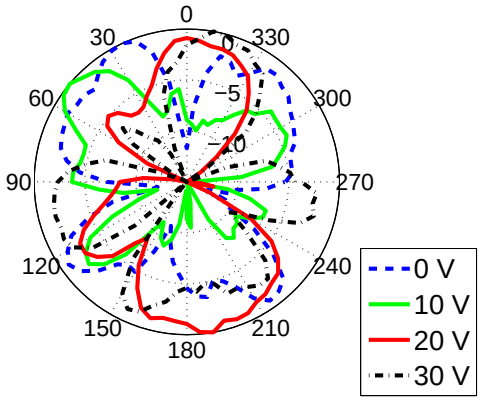


Figure IV.8 – Diagrammes de rayonnement mesurés expérimentalement dans le plan de l'antenne pour 4 tensions aux bornes des capacités : 0, 10, 20, 30 Volt, à la fréquence 3,5 GHz.

diagrammes de rayonnement des modes du réseau.

La figure IV.8 présente des diagrammes de rayonnement mesurés pour différentes tensions à différentes fréquences.

L'antenne présentée est donc une antenne miniature à multiples diagrammes de rayonnement dont les diagrammes peuvent tous être obtenus pour différentes fréquences dans une bande passante de 200 MHz.

IV.1.4 Amélioration de l'antenne à balayage spatial et fréquentiel

Une première amélioration à apporter à cette antenne consisterait à contrôler individuellement les tensions appliquées aux bornes des capacités. De cette façon, on contrôlerait la fréquence du mode fondamental de chaque résonateur. On augmente ainsi le nombre de degrés de liberté pour le contrôle des diagrammes de rayonnement. Ainsi, les modes de la structure pourraient être modifiés, et le nombre de diagrammes de rayonnement accessibles serait largement augmenté. On pourrait par ce biais, mieux contrôler les diagrammes de rayonnement et modifier les directivités de l'antenne accessibles.

Une alternative pour le contrôle de la fréquence de résonance des résonateurs serait de modifier la permittivité du substrat ou encore d'utiliser une structure bi-couche, en modifiant les résonances mécaniquement. Ces méthodes seraient particulièrement adaptées pour une utilisation de cette antenne dans des fréquences beaucoup plus hautes telles que dans le terahertz ou les fréquences optiques.

IV.2 Imagerie sub-longueur d'onde par modes localisés

Dans cette partie, un système original d'imagerie sub-longueur d'onde en champ lointain est présenté. Celui-ci permet d'atteindre des résolutions inférieures à $\lambda/10$.

IV.2.1 Contrôle de modes

Nous utilisons dans cette partie un réseau fini de résonateurs sub-longueur d'onde pour réaliser un système d'imagerie en champ lointain. Plusieurs systèmes utilisant ce type de réseau ont déjà été étudiés. Après ceux de Sentenac *et al* [33], des travaux tels que ceux de Ourir [37,75] utilisent une décomposition sur les modes d'un réseau fini de résonateurs pour reconstruire l'image d'une source magnétique en champ lointain. Ceux-ci excitent tour à tour les cellules d'un réseau et enregistrent ces signaux. Une corrélation entre cette banque de signaux et un signal mesuré suite à une excitation par une source complexe permet alors de remonter à l'image de cette même source. L'hypothèse nécessaire ici est que les signaux mesurés en champ lointain sont décorrélés les uns des autres. Dans ce cas, et dans le cas des réseaux que nous étudions, la répartition des modes propres est imposée par la géométrie du système. Nous avons vu que du fait des pertes et des symétries, nous n'étions pas capable d'obtenir les N résonances correspondant aux N modes. On ne peut donc pas faire de reconstitution d'une source à partir de mesures en champ lointain car un signal mesuré ne pourra être projeté sur une base de diagrammes de rayonnement de la structure de façon unique. Pour pallier ce problème, [75] utilise en plus d'une discrimination fréquentielle une discrétisation spatiale.

Nous avons opté pour une autre solution nous permettant de réaliser de l'imagerie sub-longueur d'onde. Pour cela, nous souhaitons contrôler la position fréquentielle et spatiale des modes et ainsi obtenir un nombre de résonances distinctes égal au nombre de cellules résonantes qui constituent le milieu. En observant la figure II.18 du chapitre II, on comprend qu'il faut que toutes valeurs propres soient dissociées pour qu'il y ait un nombre de résonances égale au nombre de cellules. Comme nous l'avons vu au chapitre II, une solution consiste à modifier la matrice de couplage du réseau pour en modifier les valeurs propres. Cette solution s'avère fastidieuse et très complexe à mettre en œuvre. C'est pourquoi nous avons choisi de travailler directement sur les impédances propres des résonateurs en modifiant leur résonance fondamentale. Une méthode originale est de modifier en amont les modes d'une structure en travaillant par exemple sur la translation en fréquence de l'impédance propre Z_p des cellules.

Sur la figure IV.9, quatre cellules dont les impédances propres diffèrent, placées en champ proches les unes des autres, sont mises en résonances. En donnant à chaque cellule une résonance différente, on fait en sorte que chaque mode soit dissocié fréquentiellement. La figure IV.10 présente deux coefficients de réflexion. Le premier a été obtenu en excitant un réseau de 3 par 3 SRRs tous semblables, le second en excitant un réseau de 3 par 3 SRRs résonants tous à des fréquences différentes. Dans le second cas, on peut facilement associer une fréquence de résonance à une position de l'espace, i.e. au SRR dont le mode fondamental correspond à cette résonance.

Pour modifier la fréquence du mode fondamental d'un résonateur, plusieurs méthodes sont possibles. La plus simple est de modifier les paramètres géométriques des cellules. Une autre est d'ajouter un élément discret telle une varicap qui modifierait l'inductance et/ou la capacitance équivalente du résonateur comme nous l'avons fait dans la partie précédente de ce chapitre. Il est également possible de travailler sur les propriétés du sub-

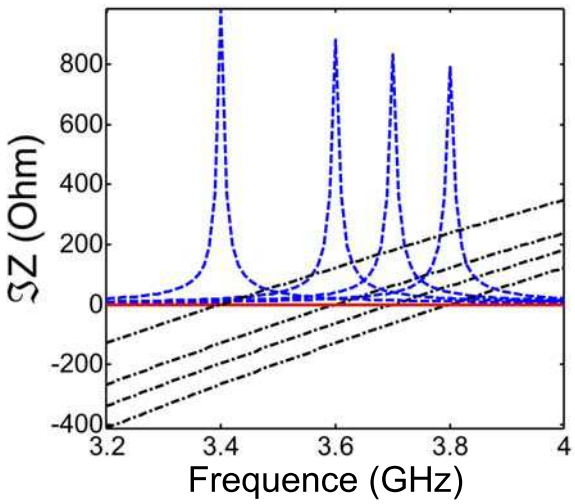


Figure IV.9 – Impédance propre z_p (noire), valeurs propres λ_n (rouge) et courant sur une cellule (bleu) d'un réseau de 4 SRRs à 3 gaps résonants à des fréquences différentes.

strat sur lequel sont gravées les cellules résonantes.

Cette approche a été validée expérimentalement en modifiant les paramètres géométriques d'un SRR à une fente. Une étude paramétrique sur le logiciel CST en simulant la réponse d'une cellule résonante pour différents paramètres géométriques a été réalisée. Celle-ci est présentée figure IV.11. Les paramètres h, g et ϵ varient entre les différentes cellules. Une variation de 1.5 GHz à 3 GHz a été obtenue.

Sur la figure IV.11 sont tracés les coefficients de réflexion obtenus sur une petite boucle

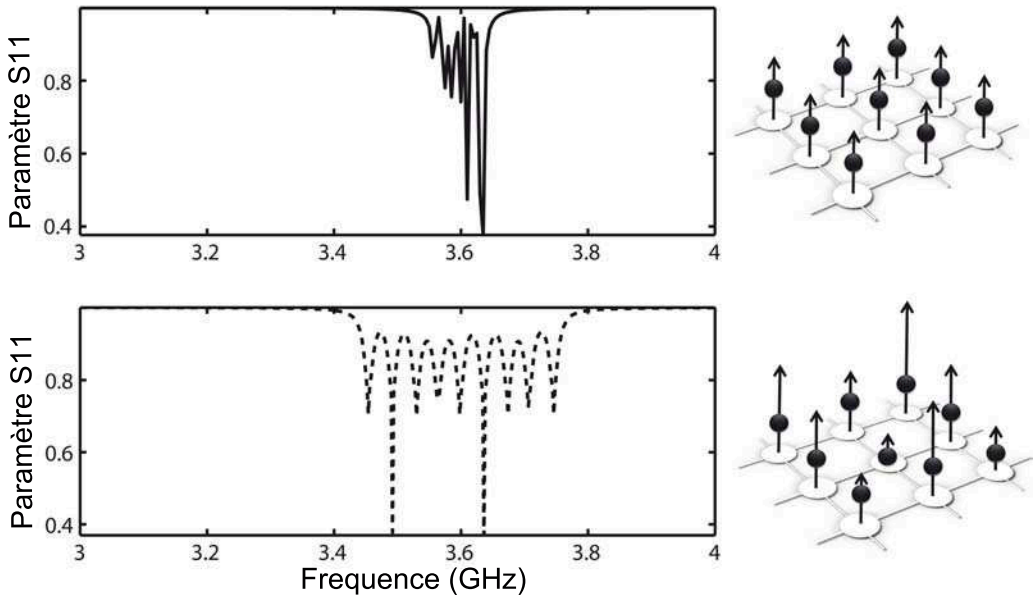
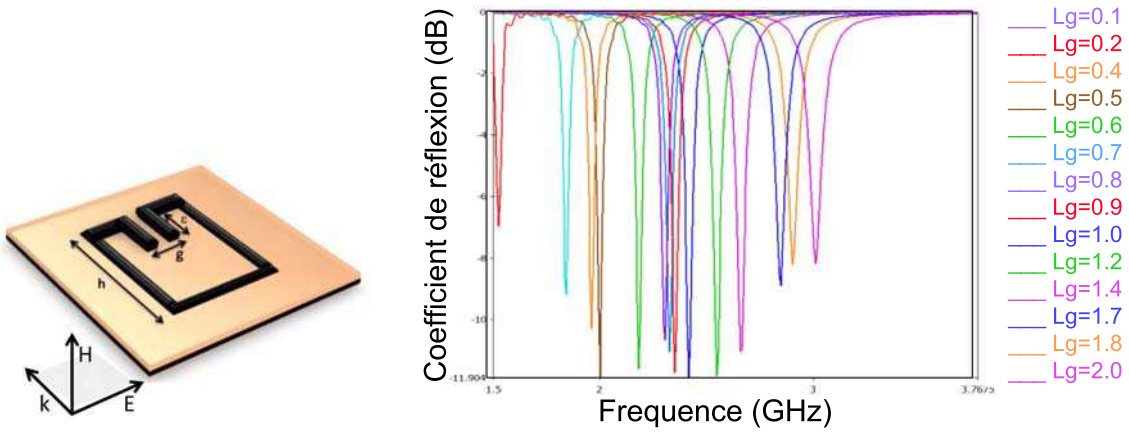


Figure IV.10 – Coefficient de réflexion calculés avec le modèle dipolaire d'un réseau de 3 par 3 cellules toutes identiques, où plusieurs modes sont dégénérés (a) et coefficient de réflexion d'un réseau "parfait" de 3 par 3 cellules où aucun mode n'est dégénéré (b).



(a) (b)

Figure IV.11 – (a) Schéma du SRR utilisé, (b) Coefficient de réflexion de N SRRs dont la fréquence de résonance varie du fait des modifications de leur géométrie.

de courant placée en champ proche des différentes cellules résonantes. De très bons facteurs de qualité sont observés, ceci permettant de dissocier parfaitement les résonances. Il est important de noter ici que ces coefficients sont mesurés pour chaque cellule SRR lorsqu'elles sont considérées seules. On estime ainsi la fréquence du mode fondamental du SRR.

Dans un second temps, ces cellules de fréquences de résonances différentes ont été réparties pour obtenir le spectre désiré. La distance entre les cellules ayant les fréquences de résonance les plus proches est maximisée de façon à minimiser le couplage. En effet le couplage est d'autant plus intense que les fréquences sont proches. Pour cela, nous avons écrit un algorithme permettant d'obtenir la disposition spatiale optimale de N cellules en fonction d'une famille de N fréquences.

La mesure de la fréquence de leur mode fondamental doit être réajustée lorsque les SRRs sont placées en réseau, et ce de façon à prendre en compte le couplage entre les cellules car il provoque un faible déplacement fréquentiel de la résonance. Il sera également important de prendre en compte le milieu environnant la mesure, celui-ci possédant une permittivité plus ou moins élevée qui fera varier la fréquence de résonance de l'ensemble des modes.

Un réseau de 20 cellules résonantes a été simulé et fabriqué. Celui-ci est présenté figure IV.12.

IV.2.2 Champ lointain de modes localisés

Grâce au réseau conçu, à chaque SRR est associée une fréquence. L'intérêt est ici que l'on a l'équivalence en champ lointain et ce grâce au fait que chaque mode, qui était auparavant étendu sur le réseau, est à présent localisé sur un des résonateurs du réseau. Lorsque l'on excite un SRR, on obtient un maximum en amplitude à sa fréquence de résonance sur les mesures en champ proche et en champ lointain . Si à présent le réseau est excité par une source complexe, un nombre fini de maximums est obtenu et ceux-ci sont alors associés aux cellules qui résonnent. Il y a donc une relation directe entre le champ lointain

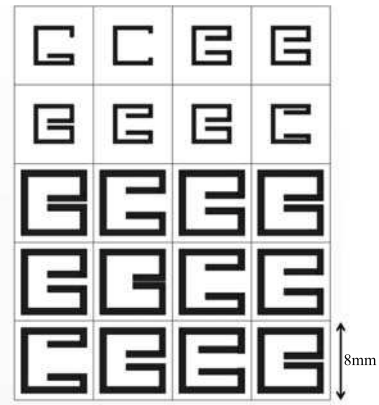


Figure IV.12 – Schéma du réseau de 4 par 5 cellules résonant à des fréquences différentes.

et les cellules du réseau. Une source complexe dont les motifs sont de l'ordre de $\lambda/10$ peut ainsi être reconstituée. Pour cela, le champ lointain est mesuré en plusieurs positions. Les diagrammes de rayonnement sont à priori homogènes, cependant la diversité des cellules résonantes fait que les diagrammes de rayonnement diffèrent d'une cellule à l'autre. Les mesures en champ lointain sont donc effectuées en plusieurs positions ce qui permet de s'assurer que l'on n'est pas sur un nœud d'un diagramme. Il suffit ensuite de sommer ces mesures, d'en déduire les poids des différentes fréquences excitées et de constituer ainsi une image de la source.

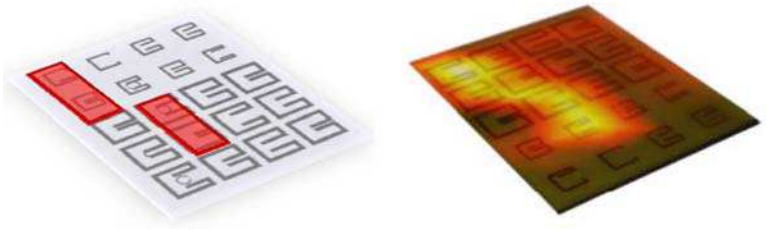
Nous avons effectué des simulations de ce dispositif. On cherche à imager une source complexe plane représentée par les zones rouges sur la figure IV.13(a). Des résultats de simulation pour le réseau décrit précédemment sont présentés sur les figures IV.13(b) et (c). Figure IV.13(c), quatre résonances marquées sont mesurées sur le champ moyen rayonné par la structure. La reconstitution obtenue simplement à partir des poids relatifs mesurés aux différentes fréquences est représentée en figure IV.13(b).

IV.2.3 Réalisation expérimentale

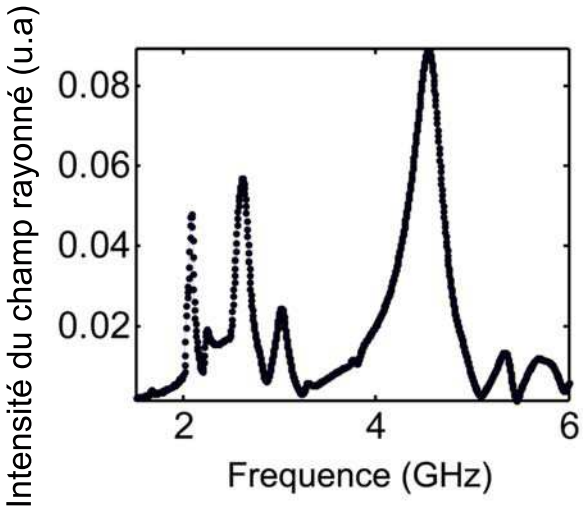
Ce dispositif d'imagerie a été validé expérimentalement. Le réseau réalisé est imprimé sur un substrat FR4 de permittivité 4 ($tan\delta \simeq 0.02$). Les dimensions totales du réseau sont de 57 sur 45 millimètres. Le réseau fabriqué est présenté figure IV.14(a) ainsi que le dispositif de mesure en champ lointain figure IV.14(b). Le signal est enregistré à l'aide de huit antennes Vivaldi placées dans le plan du réseau, sur les 8 directions principales. Pour les mesures, différentes sources ont été testées et imagées. Les sources consistent en des petits réseaux de quatre boucles disposées selon deux géométries. L'une de ces sources est photographiée figure IV.14(a).

La figure IV.15 montre les mesures réalisées lorsque l'on excite chaque SRR individuellement, de façon à connaitre la fréquence de leur mode fondamental lorsqu'elles sont placées dans le réseau.

Deux résultats d'imagerie sont présentés sur la figure IV.16(c).

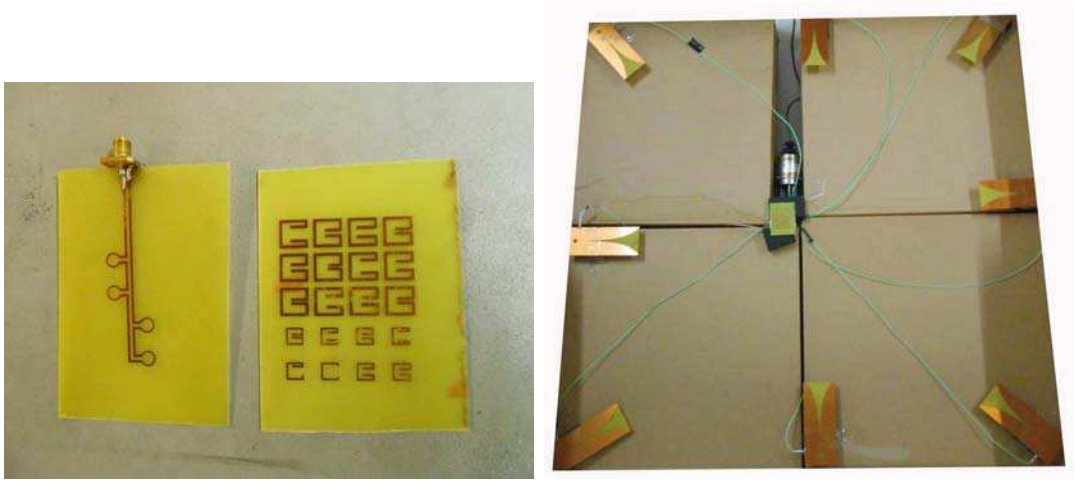


(a) (b)



(c)

Figure IV.13 – (a) Schéma du réseau et de la source simulés (b) Image issue de la reconstitution à partir des mesures en champ lointain (c) Mesure du champ lointain (sur une direction principale de l'espace).



(a) (b)

Figure IV.14 – (a) Photographie du réseau imprimé ainsi que d'une des sources imagées (b) Photographie du montage expérimental de mesure en champ lointain.

La résolution obtenue dans cette configuration est de $\lambda/10$. Elle correspond à la périodicité du réseau constitué. Pour augmenter la résolution, il serait intéressant de diminuer la fréquence de résonance des résonateurs, ou de la même manière, de diminuer la taille

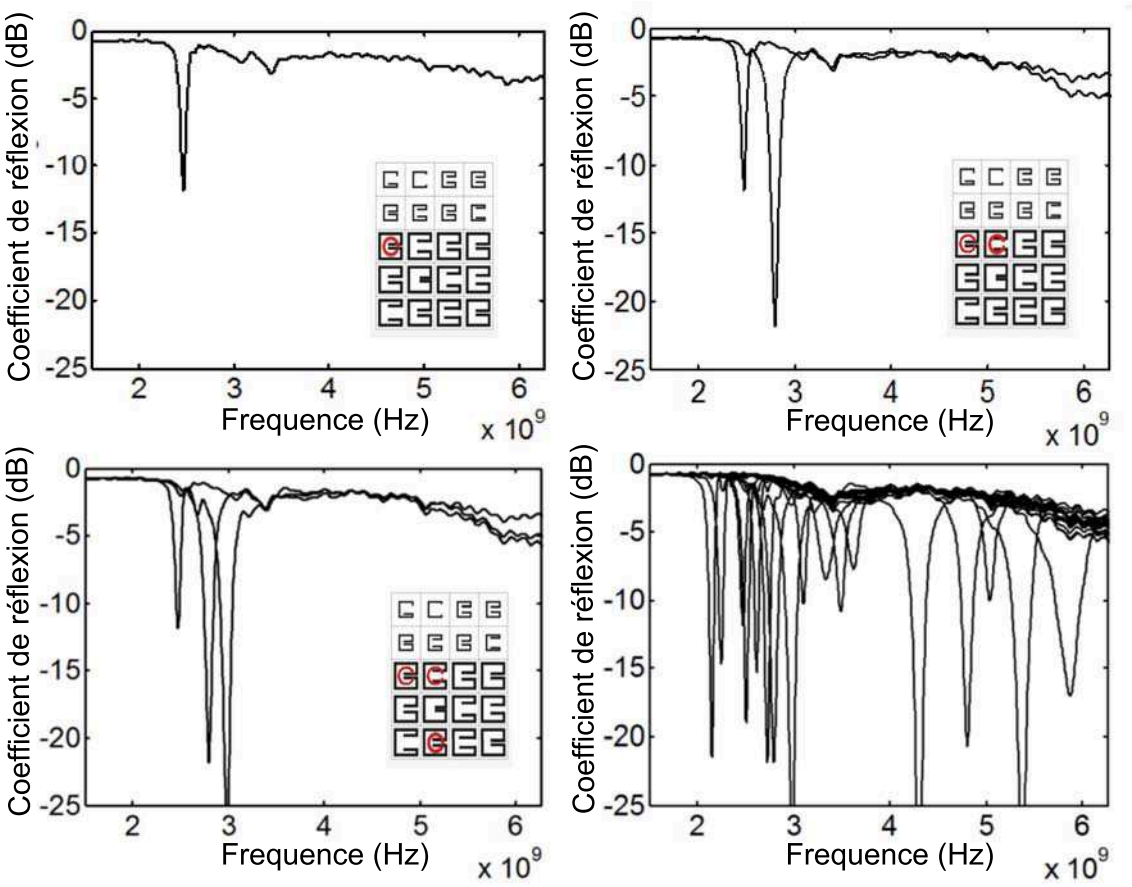


Figure IV.15 – Coefficients de réflexion obtenus pour l'excitation de différentes SRRs du réseau par une petite boucle de courant. La quatrième figure présente les coefficients de réflexion lorsque tous les SRRs sont excités individuellement.

des cellules pour des fréquences de résonance égales. Pour améliorer la qualité de l'image, on peut également envisager de faire plusieurs fois la mesure en modifiant (par exemple par une translation ou rotation) la position du réseau sur la source que l'on souhaite imager. L'information est ainsi multipliée. Les mesures peuvent être corrélées, ce qui permet notamment de pallier des problèmes de type décalage de fréquences des résonateurs par le milieu ou par la source elle-même.

IV.2.4 Transposition en optique.

Des simulations ont été réalisées pour constituer un réseau équivalent dans les ondes terahertz et les ondes optiques. Des tests numériques d'imagerie sub-longueur d'onde en champ lointain ont été effectué. Pour des fréquences de l'ordre du THz, le principe fonctionne.

En effet, en modifiant les caractéristiques géométriques de résonateurs en U dont le comportement est proche de celui des SRR, on peut obtenir suffisamment de résonances sur un réseau de quelques cellules. Des coefficients de réflexion lorsque l'on fait varier les tailles des cotés des résonateurs en U sont présentés figure IV.17. Les pertes sont

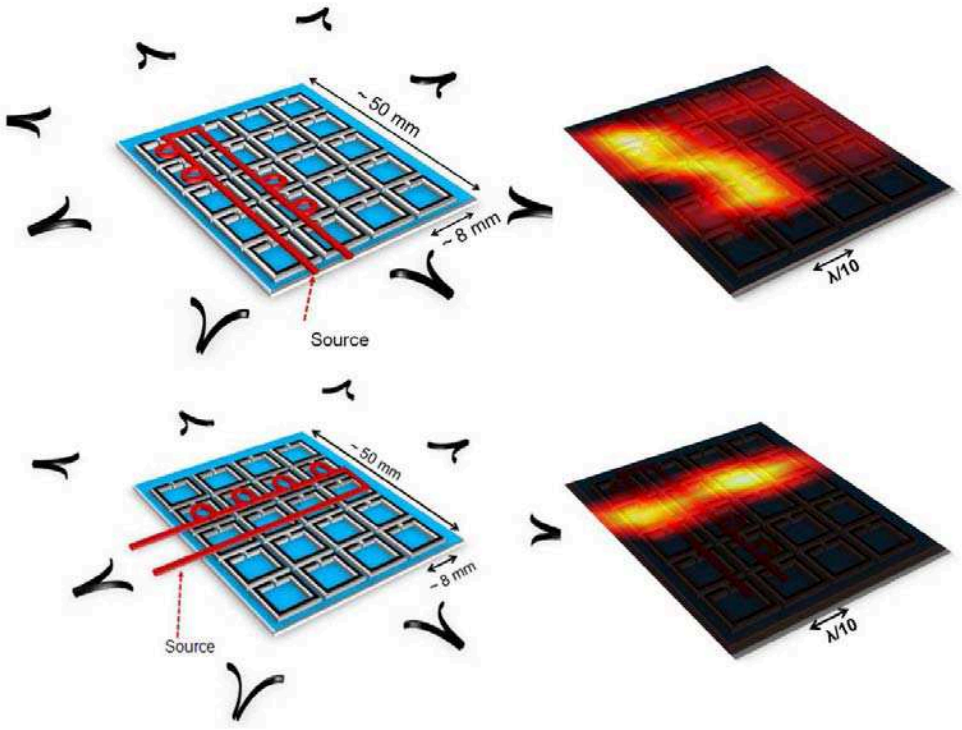


Figure IV.16 – Schéma de la source et du réseau utilisés ainsi que des reconstitutions des différentes sources réalisée à partir des mesures en champ lointain.

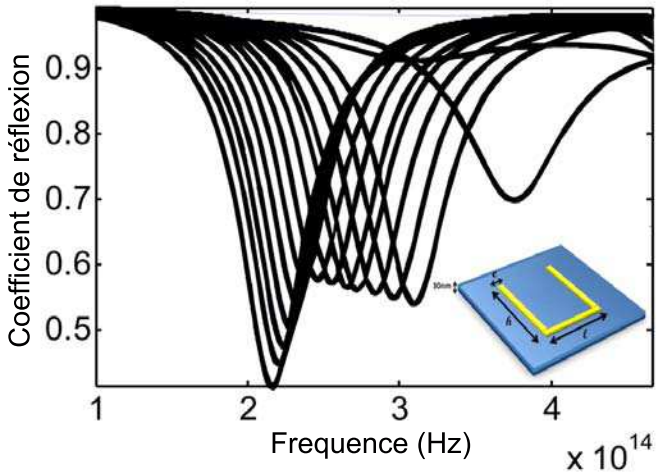


Figure IV.17 – Coefficients de réflexion obtenus sur une source de courant non adaptée dans le domaine des fréquences terahertz pour différents résonateurs en U excités localement.

encore suffisamment faibles pour que l'on puisse constituer un réseau fonctionnel. La taille du réseau est cependant limitée à une demi longueur d'onde car les facteurs de qualité des résonateurs sont faibles. Pour le domaine de l'optique, du fait des pertes et du faible facteur de qualité des résonateurs, aucun réseau n'a pour l'instant pu être dessiné. Cependant les études paramétriques ont été réalisées pour des résonateurs en forme de U. Il serait intéressant de les réaliser pour des résonateurs de type diélectrique, en utilisant leur résonance de Mie, qui semblent être une solution pertinente en imagerie.

IV.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des applications s'appuyant sur les études présentées dans les chapitres deux et trois. Nous avons utilisé le rayonnement d'informations sub-longueur d'onde en champ lointain par une structure finie de résonateurs sub-longueur d'onde pour réaliser une antenne miniature au diagramme de rayonnement variable en fréquence et en directivité [94].

Pour passer outre les limites dues aux pertes et au bruit lors des mesures et pour faciliter le contrôle des modes d'un milieu, nous avons dans une seconde partie montré qu'il est possible d'envisager ces milieux autrement, en les dessinant de façon à contrôler et choisir en amont le type de modes résonants que l'on souhaite. Lorsque toutes les cellules sub-longueur d'onde d'un réseau périodique résonnent à la même fréquence, les modes propres forment en champ proche une base orthonormée. Les modes sont non localisés et il est nécessaire d'utiliser des algorithmes élaborés (tel que le renversement temporel, ou le Matching Pursuit) pour réaliser de l'imagerie en champ lointain. Dans notre cas, parce qu'on utilise un réseau constitué de cellules résonant toutes à des fréquences différentes, les modes forment une base orthogonale canonique. Chaque fréquence est en relation directe avec une position du réseau. Ceci permet de lier directement les mesures fréquentielles du champ lointain à la distribution spatiale de la source. Une résonance en ω en champ lointain signifie que la cellule qui résonne à cette fréquence ω est excitée en champ proche par la source. Il devient ainsi aisé de faire de l'imagerie sub-longueur d'onde en champ lointain. On obtient des images avec une résolution égale à la taille des résonateurs du milieu, soit dans l'application présentée ici une résolution de $\lambda/10$. La limite de résolution de Rayleigh est ainsi dépassée. Ce principe d'imagerie en champ lointain a été validé par des simulations et des mesures expérimentales. Il permet d'effectuer simplement de l'imagerie sub-longueur d'onde en champ lointain de sources complexes magnétiquement polarisées.

CHAPITRE V

Hybridation de modes pour l'Imagerie à Résonance Magnétique

Table des matières

V.1 L'imagerie par Résonance Magnétique **109**
V.1.1 La Résonance Magnétique Nucléaire 109
V.1.2 Imagerie par Résonance Magnétique 112
V.1.3 État de l'art sur les antennes radio-fréquence 116
V.2 L'hybridation de modes **118**
V.2.1 Hybridation de modes entre résonateurs électromagnétiques . 118
V.2.2 Excitation de modes hybrides 120
V.3 Application de l'hybridation de modes à une antenne RF en IRM . . **123**
V.3.1 Application en imagerie 7 Tesla pour petit animal 124
V.3.2 Application en imagerie 3 Tesla pour humain 128
V.3.3 Application en imagerie 7 Tesla pour humain 129
V.4 Perspectives **132**
V.4.1 Géométries des sources et des résonateurs 132
V.4.2 Système d'adaptation et contrôle des modes 135
V.4.3 Imagerie de différents atomes 135
V.5 Conclusion **136**

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude d'une antenne radio-fréquence dont les principes reposent sur l'hybridation de modes, et destinée à des applications d'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). L'IRM est une technique d'imagerie médicale non invasive permettant d'imager dans plusieurs plans de l'espace le signal de résonance nucléaire d'un noyau donné, généralement le proton. La résolution des images étant directement liée au champ permanent des IRM, on assiste actuellement à une montée en champ des IRM : les champs magnétiques permanents atteignent des valeurs toujours plus hautes (typiquement, les IRM sont passés de 1.5 Tesla à 7 Tesla chez l'homme).

Le développement de ces nouvelles générations d'IRM implique une adaptation des émetteurs et récepteurs radio-fréquence (RF) requis pour créer et capter le signal utile. La montée en champ modifie fortement les distances électromagnétiques au sein de la chambre d'imagerie. En effet, les longueurs d'onde du champ RF diminuent lorsque l'on augmente le champ statique des IRM et il devient compliqué de concevoir des antennes émettant un champ homogène dans ces cavités. Un des problèmes majeurs est l'homogénéisation des zones d'excitation des spins des atomes que l'on souhaite imager. Ces montées en champ induisent de plus des problèmes liés à la pénétration des ondes dans les tissus, tels que des artéfacts et des interférences. De plus, les questions d'encombrement dans les IRM clinique ainsi que la réduction de l'exposition des personnes aux ondes électromagnétiques sont encore des défis à relever.

Dans ce chapitre, un système d'antenne RF pour l'IRM est présenté. Cette antenne est constituée de deux principaux éléments qui, couplés entre eux, résonnent à la fréquence de travail de l'IRM. Le premier élément est une antenne de surface, une antenne dite "magnétique". Elle est alimentée par un courant radiofréquence proche de la fréquence de Larmor du noyau à imager. Cette antenne est associée à un circuit d'adaptation. Le second élément est un exaltateur de champ magnétique constitué d'un ensemble de résonateurs électromagnétiquement hybridés. Le couplage entre les résonateurs induit des modes hybrides dans la structure dont les différentes configurations spatiales de champ s'avèrent utiles pour réaliser des images IRM. Cet ensemble joue à la fois le rôle d'émetteur et de récepteur. Il permet d'obtenir un champ homogène dans une large zone spatiale d'imagerie et ainsi des images avec un bon rapport signal sur bruit même loin de l'antenne magnétique. J'énoncerai dans un premier temps les principes fondamentaux de la Résonance Magnétique Nucléaire (RMN), son développement et son application en Imagerie par Résonance Magnétique. En deuxième partie, le projet d'antenne RF que nous avons mené, utilisant un exaltateur de champ magnétique est présenté. Les principes physiques de ce système et les mesures expérimentales que nous avons effectuées sont traités dans une troisième partie. Pour clore ce chapitre, nous exposerons différentes pistes de travail

pour améliorer le dispositif actuel.

V.1 L'imagerie par Résonance Magnétique

V.1.1 La Résonance Magnétique Nucléaire

La Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) est une méthode d'analyse de la matière. Elle repose sur une propriété particulière de certains noyaux atomiques possédant un spin nucléaire lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique. Placé dans un champ magnétique très intense, ces atomes acquièrent une aimantation nucléaire qui est détectable par une mise en résonance avec un champ électromagnétique radiofréquence.

La spectroscopie par RMN est une technique à présent couramment utilisée en physique et chimie ainsi qu'en biologie (elle permet de remonter à la structure de molécules). Les études des propriétés de la RMN et du comportement des spins magnétiques sont complexes. Je me limiterai à exposer les éléments permettant d'expliquer l'enjeu de notre étude.

V.1.1.1 Historique

La RMN remonte à la découverte du spin en 1925 par Samuel Goudsmit et George Uhlenbeck. Ceux-ci énoncent que le moment magnétique des particules élémentaires, et des noyaux atomiques ne peuvent avoir qu'un nombre discret de valeurs selon un axe donné. Le moment magnétique discret est ainsi caractérisé par une propriété quantique intrinsèque à chaque particule élémentaire ou noyau atomique, appelé le spin. Celui-ci est soit pour un fermion, égal à un demi entier, soit pour un boson, égal à un entier. Selon l'atome étudié, les états des spins diffèrent. Pour l'atome d'hydrogène, qui est l'atome principalement étudié en RMN et en IRM, le noyau est constitué d'un proton. Il présente donc un spin 1/2 avec deux états : 1/2 ou -1/2. A l'état d'équilibre, en l'absence de champ magnétique extérieur et avec agitation thermique, la probabilité que les spins soient à 1/2 ou -1/2 est la même. Pour un grand nombre de protons, le moment magnétique global est alors nul.

En 1946, Félix Bloch et Edward Purcell découvrent qu'un matériau plongé dans un champ magnétique statique et soumis à un rayonnement électromagnétique RF spécifique émet lui-même une onde RF. Ils découvrent que les noyaux de différents atomes absorbent les ondes radio à différentes fréquences. Ils réalisent en 1946 les premières mesures du magnétisme nucléaire par induction magnétique, méthode à la base des méthodes actuelles de détection RMN. En 1970, Raymond Damidian découvre que la structure et l'abondance de l'eau dans le corps humain est la clé pour l'imagerie RMN et que l'eau émet un signal détectable. C'est le début du développement à plus grande échelle de la RMN et de l'imagerie par résonance magnétique. La RMN repose sur de nombreux fondamentaux physiques dont le principal est le moment magnétique nucléaire porté par les particules élémentaires.

V.1.1.2 Le Moment Magnétique Nucléaire

Les protons et neutrons d'un noyau atomique possèdent un moment cinétique intrinsèque $\vec{s}$ dont l'amplitude est caractérisée par le spin (vectoriel). Le moment cinétique de spin des noyaux atomiques est la résultante des moments de particules individuelles $\vec{s}$ qui dépend donc du nombre de particules composites et de leurs orientations relatives.

$$\vec{S} = \sum_{Neutrons,Protons} \vec{s_i} \tag{V.1}$$

Tous les atomes ne possèdent pas de spin nucléaire c'est-à-dire un nombre quantique de spin non nul. Seuls ceux qui auront un spin nucléaire pourront faire l'objet d'études en RMN. Le moment magnétique $\vec{\mu}$ est proportionnel au moment cinétique de spin $\vec{S}$. $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$. γ est le rapport gyromagnétique qui est constant et propre à chaque isotope.

Lorsque les particules quantiques sont placées dans un champ magnétique B_0, la particule subit un couple auquel est associé une énergie potentielle magnétique E_s qui est donnée par

$$E_s = -\mu B_0 \tag{V.2}$$

Sous l'effet d'un champ magnétique, la probabilité que le spin d'une particule soit aligné avec le champ magnétique croît légèrement, et la probabilité que ce même spin soit aligné en sens contraire diminue légèrement. Il s'ensuit une levée de dégénérescence qui consiste en une séparation du moment cinétique en plusieurs niveaux d'énergie (effet Zeeman). La figure V.1 présente les niveaux d'énergie du moment cinétique pour le proton pour un nombre quantique S=1/2.

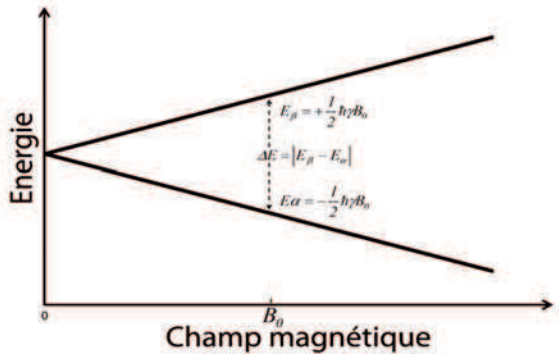


Figure V.1 – Effet Zeeman pour un atome d'hydrogène (courbe issue de wikipédia).

V.1.1.3 Frequence de Larmor

La différence d'énergie $\triangle E_s$ entre deux états quantiques de spin est égale à :

$$\triangle E_s = g_e \gamma \hbar B_0 \tag{V.3}$$

avec $\gamma = q/2m$. $\hbar$ est la constante de Planck, m est l'état de spin, q est la charge de la particule considérée. g_e est un nombre sans dimension appelé facteur de Landé. Il varie en fonction de la particule étudiée ($g = 5.568$ pour le proton). Cette différence correspond à

l'énergie de rayonnement électromagnétique qui peut être absorbée par le noyau atomique. Le retour à l'équilibre est appelé relaxation magnétique longitudinale. En reliant énergie et fréquence par $E = h\nu$, on obtient la fréquence de Larmor qui ne dépend que du rapport gyromagnétique γ et de B_0.

$$f = \frac{\gamma}{2\pi} B_0 \tag{V.4}$$

Tout système libre possédant un rapport gyromagnétique constant, placé dans un champ magnétique B_0 non aligné avec le moment magnétique du système, sera entraîné dans un mouvement de précession à la fréquence f. C'est à cette fréquence, propre à chaque isotope que sont donc effectuées les études de RMN. Une autre méthode, plus intuitive permet de retrouver la fréquence de Larmor. Prenons un ensemble d'atomes. En l'absence de champ magnétique, les moments magnétiques quantiques prennent n'importe quelle direction dans l'espace. Le moment magnétique est donc nul en moyenne. En présence d'un champ magnétique externe, les moments magnétiques se mettent à tourner autour de la direction du champ externe telle que le fait une toupie en mécanique classique (cf Fig. V.2). Le moment magnétique décrit un cône de révolution dont l'angle dépend de l'amplitude du champ magnétique. Plus le champ est élevé, plus l'angle décroit. Le vitesse angulaire du moment magnétique est alors donnée par :

$$\omega = \gamma B_0 \tag{V.5}$$

On retrouve ainsi la fréquence de précession de Larmor.

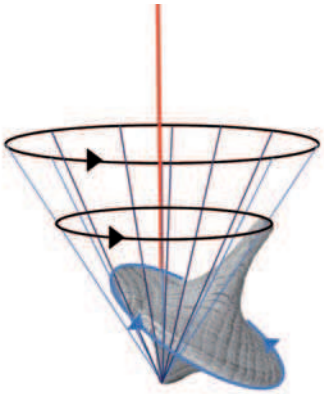


Figure V.2 – Représentation Schématique du spin

La fréquence de Larmor est propre à chaque noyau atomique. Dans un échantillon constitué uniquement d'un même atome, tous les noyaux devraient résonner à la même fréquence. Cependant, il a été observé et théorisé que les interactions inter et intramoléculaires modifient légèrement la fréquence de précession des spins. Cette propriété peut être utilisée pour étudier les atomes voisins des noyaux imagés. La spectroscopie RMN, très utilisée pour la caractérisation de molécules en chimie est basée sur l'étude de ces décalages fréquentiels.

V.1.1.4 Mesure du signal RMN

Une expérience typique de RMN comporte 3 étapes principales :

1. Utiliser un champ magnétique constant B_0 pour orienter les spins nucléaires des atomes pour induire une aimantation macroscopique ;
2. Exciter ces spins par une onde radio-fréquence à la fréquence de Larmor des atomes, ce qui fait basculer cette aimantation hors de l'axe du champ B_0 extérieur ;
3. Après l'excitation, enregistrer l'onde électromagnétique rayonnée par cette aimantation lors de son retour à l'équilibre.

En résumé, placé dans un champ magnétique statique, un groupe de spins possède une aimantation dite longitudinale dans l'axe et dans le même sens que B_0. Les spins s'orientent dans l'axe du champ, soit dans le même sens ("parallèle"), soit dans le sens contraire ("antiparallèle"). L'aimantation résulte du fait que la proportion de spins parallèles (sur B_0) est plus grande que la proportion de spins antiparallèles et également du fait de l'absence d'aimantation transversale (les spins ne sont pas en phase). Les spins ont un mouvement de rotation et décrivent un cône autour de l'axe de B_0 : c'est le mouvement de précession. La vitesse de précession est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique statique. En appliquant une onde électromagnétique radio-fréquence à la fréquence de Larmor, on provoque un phénomène de résonance, un transfert d'énergie entre l'onde RF et les spins en précession : les spins changent de l'état $+1/2$ à l'état $-1/2$, l'aimantation résultante bascule d'un angle qui dépend de l'intensité ainsi que du temps pendant lequel l'onde RF est appliquée. Le phénomène de relaxation traduit ensuite le retour à l'équilibre de l'aimantation. Le système restitue donc l'énergie absorbée sous forme d'ondes RF, ce qui constitue le signal enregistré en RMN. Il est relevé par deux temps caractéristiques :

- Le temps T_1 : une ré-augmentation de l'aimantation longitudinale, dans l'axe du champ B_0, qui suit une courbe exponentielle croissante,
- le temps T_2 : une chute de l'aimantation transversale, liée au déphasage des spins, qui suit une courbe exponentielle décroissante.

Ces temps dépendent des environnements des spins. Les contrastes entre les tissus visibles sur les images IRM sont directement liés à ces différences de temps de relaxation.

V.1.2 Imagerie par Résonance Magnétique

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) est une technique d'imagerie médicale. Elle permet à partir de la mesure d'un signal RMN d'obtenir des images 2D et 3D d'un corps et ce de façon non invasive avec une bonne résolution et sans employer de rayonnement ionisant.

V.1.2.1 Développement et Fonctionnement

L'IRM a vu le jour dès les années 1970, notamment grâce à Raymond Vahan Damadian qui voulait appliquer la RMN à la détection des tumeurs. Les techniques vont ensuite évoluer très rapidement. Les premières images de tissus humains seront produites en 1975 par Peter Mansfield. L'IRM est rapidement devenue une technique dominante du domaine de l'imagerie médicale. L'IRM en pratique clinique ne s'intéresse qu'au noyau d'hydrogène 1H, le proton, car il est très abondant dans le corps humain. D'autres noyaux présents dans

le corps humain ont des propriétés magnétiques : ^{13}C, ^{19}F, ^{31}P, ^{23}Na. Étant donné leur très faible proportion dans les milieux biologiques par rapport à ^{1}H, et la nécessité d'une chaîne radio-fréquence adaptée à leur fréquence de résonance, ils sont surtout étudiés dans le domaine de la recherche.

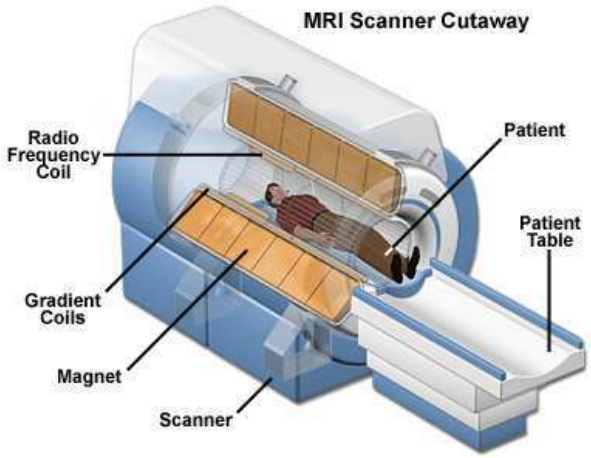


Figure V.3 – Représentation schématique globale d'un IRM, image issue u site du MagnetLab.

Les éléments principaux, présentés sur la figure V.3 d'un appareil d'IRM sont :
- Un aimant permanent ;
- Une antenne radio-fréquence ;
- Des gradients.

Le champ permanent : Un appareil d'IRM est constitué d'un aimant permanent qui produit le champ magnétique constant principal B_0. Les valeurs de ce champ varie pour les IRM cliniques entre 0.1 et 7 Tesla. Des études pré-cliniques sont en cours pour des IRM de plus de 10 Tesla, les recherches allant jusque 17 Tesla chez l'animal. Les principales recherches sur l'aimantation permanente portent sur :
- un champ magnétique d'intensité élevée afin d'améliorer le rapport signal sur bruit ;
- une bonne stabilité temporelle (le champ magnétique doit dériver le moins possible) ;
- une bonne homogénéité du champ.

Aujourd'hui, l'aimant supraconducteur est l'aimant qui répond le plus à ces 3 critères. Il est constitué d'une bobine de fils conducteur très fins mise à très basse température de façon à ce que sa résistance soit nulle. Ceci permet d'avoir un ampérage élevé et une absence de pertes par effet joule. Par contre, cela nécessite une lourde enceinte cryogénique autour de l'aimant.

L'augmentation des champs magnétiques permanents permet une amélioration importante de la qualité des images obtenues par IRM. Cependant, cela introduit certaines complications notamment vis à vis de l'homogénéité du champ.

L'antenne radio-fréquence : Pour exciter et faire résonner les spins des atomes que l'on veut imager, il est nécessaire d'émettre un signal radio-fréquence à la fréquence de Larmor de ces atomes.

Les antennes utilisées en IRM sont très variables et peuvent être classées de trois manières différentes :

- Selon leur géométrie : volumique et surfacique.
- Selon leur mode de fonctionnement : émettrice-réceptrice, réceptrice ou émettrice seule.
- Selon l'association ou non de différents éléments d'antennes : linéaire, en quadrature de phase ou en réseau phasé.

En réception, les antennes RF doivent avoir le meilleur rapport signal/bruit possible. Les antennes de surface sont les antennes les plus utilisées. Ce sont en général de simples boucles métalliques, circulaires ou rectangulaires, placées au dessus de la zone d'intérêt. Ce sont également des réseaux de boucles découplées entre elles. La sensibilité d'une antenne de surface diminue avec la distance à celle-ci et est en général limitée à environ une distance égale à son rayon ce qui constitue une limitation à leur utilisation. La profondeur de pénétration et l'homogénéité du champ dans un élément à imager est un problème majeur de l'imagerie IRM par antenne de surface. Il est possible d'utiliser simultanément pour l'acquisition et l'émission plusieurs antennes de surface déphasées ce qui permet d'augmenter la zone d'imagerie.

Les antennes volumiques procurent une meilleure homogénéité de champ radio-fréquence mais la sensibilité est en général réduite par rapport aux antennes de surface. De plus, cela impose de pouvoir entourer l'élement à imager avec l'antenne (difficile par exemple avec le torse). Les antennes volumiques les plus connues et répandues sont les antennes de type birdcage (cage à oiseau).

Les constructeurs d'antennes participent activement à l'amélioration des antennes en augmentant notamment le nombre d'éléments. Pour des champs permanents supérieurs à 3 Tesla, les longueurs d'onde diminuent ce qui pose des problèmes d'homogénéité et poussent les recherches vers de la transmission parallèle. Celle-ci a cependant un coût élevé et est très compliquée électroniquement et ne fonctionne pour l'instant pas très bien.

Les gradients : Pour former les images RMN, il faut réussir à localiser spatialement le signal qui a été reçu par l'antenne radio-fréquence réceptrice. Ceci est réalisé grâce à l'introduction de gradients de champs magnétiques. Trois bobines métalliques sont enfermées dans un cylindre en fibres de verre et placées dans le tunnel de l'aimant. On les nomme respectivement : bobine X, bobine Y et bobine Z. Le passage d'un courant électrique dans ces bobines crée des variations d'intensité du champ magnétique dans le tunnel, de façon linéaire dans le temps et dans l'espace. En fonction de sa géométrie, chaque bobine fait varier le champ magnétique selon un axe spécifique. Les gradients sont appliqués dans les 3 dimensions de l'espace à des temps différents au moment des impulsions RF et induisent un gradient de vitesse de précession des spins selon le même axe. Les protons qui tournent plus vite ou moins vite que la fréquence de Larmor ne vont donc pas entrer en résonance. Les gradients permettent ainsi de déterminer la localisation spatiale des signaux enregistrés.

V.1.2.2 Les enjeux en IRM

Les progrès de l'IRM portent sur la rapidité, la résolution, et la multi-modalité. On assiste aux développements de nombreuses applications différentes : la spectroscopie qui donne des informations biochimiques in vivo, l'IRM fonctionnelle, l'IRM de diffusion, l'IRM de perfusion, etc. L'imagerie multimodale est utilisée dans la prise en charge des tumeurs malignes et des cancers du cerveau. Deux axes sont particulièrement étudiés : l'amélioration de la qualité des images et la montée en champ des IRM.

Amélioration de la qualité de l'image. Améliorer la qualité de l'image consiste dans un premier temps à travailler sur sa résolution spatiale. Celle-ci dépend de la matrice spatiale d'enregistrement de l'image, du champ de vue et de l'épaisseur de la coupe. Le contraste doit également être optimisé en fonction de l'objectif de l'étude.

Montée en fréquence. Monter en champ, permet de nettement améliorer la résolution des images, ce qui est particulièrement recherché pour l'imagerie du cerveau. La résolution spatiale est la dimension du plus petit détail observable et mesurable : le voxel. La montée en puissance des champs statiques des IRM permet de diminuer la taille des voxels et donc d'affiner la résolution. Cependant, plus le champ magnétique statique est élevée, plus la fréquence de travail l'est. Les problèmes liés à la pénétration des ondes dans les tissus (interférences, artefacts...) exigent un travail de recherche en amont afin d'optimiser l'appareil et d'exploiter correctement sa puissance. La recherche de nouvelles antennes RF est particulièrement nécessaire dans les hautes fréquences. Les études commencent à être satisfaisantes pour l'imagerie du cerveau mais ce n'est pas le cas pour des objets de plus grandes tailles tels que le torse, pour lesquels les chercheurs obtiennent paradoxalement une meilleure définition avec un champ plus faible. Des travaux de recherche sont donc poursuivis en vue des utilisations cliniques à haut champ.

En outre, plus les champs sont d'intensité élevée, plus ils requièrent des précautions afin de limiter leurs influences à l'extérieur de l'IRM. Plusieurs tonnes d'acier sont nécessaires pour l'isolation ce qui génère un coût et un encombrement très élevés. L'appareil représente aujourd'hui lui-même un investissement de l'ordre de 10 millions de dollars.

Il reste enfin la question des effets potentiels des ondes électromagnétiques sur les êtres vivants. Le débit d'absorption spécifique, plus connu sous sa dénomination SAR pour Specific Absorption Rate, augmente avec la montée en champ des IRM. Or il provoque un échauffement des tissus exposés. Les "points chauds" présentés par certaines antennes empêchent leurs utilisations en imagerie clinique. Un objectif des antennes RF est donc d'obtenir des champs RF avec un champ magnétique fort et le plus homogène possible tout en maintenant le champ électrique le plus faible possible.

Si aucun effet néfaste n'a été prouvé à ce jour, et malgré la faible toxicité supposée des ondes électromagnétiques - par exemple par rapport aux rayons X- le principe de précaution recommande une forte prudence en ce qui concerne le très haut champ.

V.1.3 État de l'art sur les antennes radio-fréquence

Face à la montée en fréquence de l'IRM et à un besoin toujours plus grand en résolution des images, de nombreuses études sont réalisées pour concevoir des antennes radio-fréquence fonctionnelles dans les hauts champs et ce notamment pour contrer les problèmes d'inhomogénéité dûs à la diminution des longueurs d'ondes de travail. Une méthode conventionnelle pour parer à l'inhomogénéité du champ B_1 émis par l'antenne RF est d'utiliser séparément plusieurs boucles émettrices et/ou réceptrice et d'effectuer de la recombinaison de signaux. Cependant, cette réalisation du champ B_1 n'est pas toujours adaptée aux formes des objets que l'on souhaite imager et le champ reste toujours peu homogène. Parmi les travaux sur les antennes RF, McVeigh *et al* ont étudié l'inhomogénéité des antennes de type boucles de courant [95]. Styles *et al* utilisent des boucles de courant concentriques pour réaliser l'émission et la réception du signal RF, les boucles étant liées à un ensemble de diodes et de lignes de transmission pour être découplées [96]. Solis [97] a conçu des antennes de surface de type boucles de courant avec plusieurs fentes pour améliorer la sensibilité de ces antennes et augmenter la profondeur d'imagerie. Des antennes dont la structure est plus complexe ont également été développées, telles que celle de Battocletti [98] qui est constituée de trois boucles de courant, déphasées de façon à réduire les interférences entre elles.

En parallèle des développement d'antennes surfaciques, des antennes RF volumiques ont été étudiées, notamment la très utilisée "birdcage". Cette "cage à oiseau" est consti-

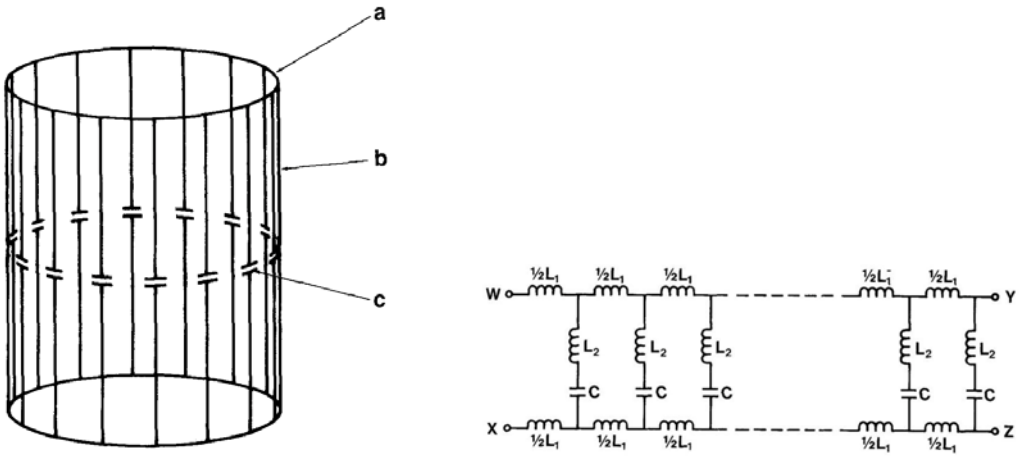
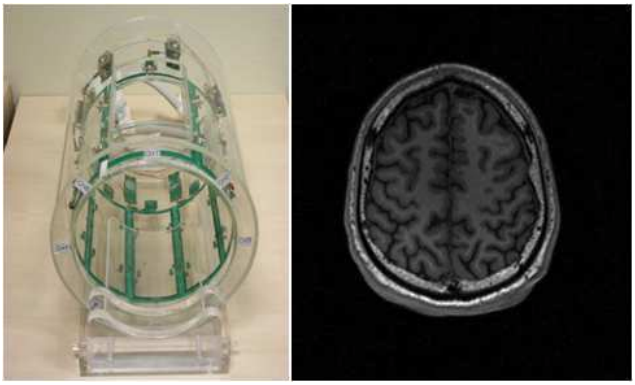


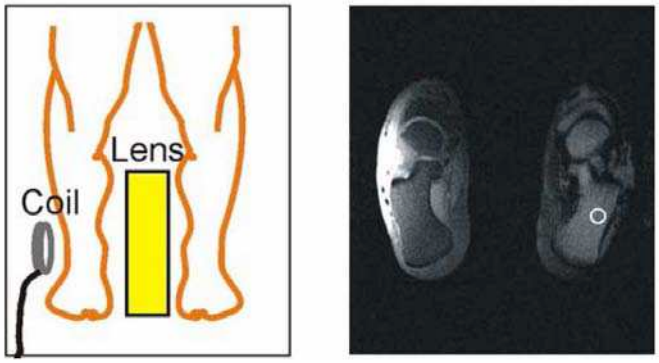
Figure V.4 – (a) Schéma d'une birdcage. 'a' représente les anneaux circulaires liant les lignes à retard, 'b' représente les lignes à retard et 'c' les capacités, (b) Schéma électrique d'une birdcage. Les points w et x sont respectivement connectés aux points y et z. Figures issues de [99].

tuée de lignes à retard et d'éléments discrets tels que des capacités (cf figure V.4). Les lignes à retard constituent des résonateurs électriques de type résonateurs demi-longueur d'onde et sont reliées électriquement entre eux par des anneaux conducteurs. L'adaptation de l'ensemble de cette antenne RF à la fréquence de Larmor est réalisée grâce à de

nombreuses capacités en série sur les dipôles et entre les dipôles [100, 101]. Ces antennes volumiques sont très efficaces pour obtenir une carte de champ magnétique homogène pour des IRM avec des champs statiques inférieurs à 7 Tesla. Pour des champs supérieurs, elles se heurtent comme les autres antennes à la diminution de la longueur d'onde et à l'apparition de zéros de champ ou "d'hyperchamp" dans les zones à imager. De plus, les antennes volumiques actuelles restent des outils complexes à concevoir, qui apportent un fort encombrement et ne sont pas toujours adaptées aux éléments à imager (tels qu'un torse). L'historique et une description plus précise des antennes RF de type birdcage peuvent être trouvés dans l'article [102].



(a)



(b)

Figure V.5 – (a)Photographie d'une antenne de type birdcage et image réalisée avec cette antenne.(b) Schéma d'imagerie et image réalisée avec la méta-lentille de Freire et al [103].

D'autres types d'antennes ont vu le jour telles que des antennes multi-canaux [104]. Une approche originale consiste à exploiter le domaine des métamatériaux, domaine en plein essor. Freire *et al* ont par exemple fabriqué un réseau 3D de Split Ring Resonator et de capacités ajustables pour constituer une méta-lentille de perméabilité $\mu = -1$ [103]. Cette méta-lentille placée à distance d'une antenne de surface permet de créer une source virtuelle plus proche des objets que l'on souhaite imager. Sur l'image V.5(b) l'antenne de surface est placée à gauche du premier genou et la lentille entre les deux genoux. Ils obtiennent une bonne profondeur de champ et une amélioration de l'homogénéité dans la zone d'imagerie. Toujours dans le domaine des métamatériaux, on peut également citer

les travaux de Khennouche *et al* [105] qui couplent des cellules couramment utilisées dans les métamatériaux avec des antennes de surface pour augmenter la profondeur de champ de ces dernières.

Nos travaux portent sur une antenne RF. Cette antenne diffèrent des antennes RF précédemment exposées : elle repose sur l'exploitation des propriétés d'un type de couplage appelé l'hybridation de modes. Dans la section suivante, les principes de l'hybridation de modes sont présentés ainsi que l'exaltation de champs magnétiques que l'hybridation permet d'obtenir entre des résonateurs électriques.

V.2 L'hybridation de modes

Après un bref rappel sur les propriétés d'une structure composée d'un nombre fini de résonateurs couplés, un type d'interaction électromagnétique appelé l'hybridation de modes qui concerne certains modes d'une structure de résonateurs électriques placés en champs proches les uns des autres est décrite. Ces modes hybrides nous permettent de générer des champs magnétiques homogènes dans une zone d'intérêt qui correspond pour un IRM à la zone à imager.

V.2.1 Hybridation de modes entre résonateurs électromagnétiques

Nous avons vu grâce au modèle dipolaire développé dans les chapitres précédents, qu'un ensemble constitué de plusieurs résonateurs placés en champs proches les uns des autres et couplant fortement entre eux possédait un nombre de modes égal au nombre de résonateurs composant cet ensemble. Ainsi, une structure à N résonateurs possède N modes qui ont des distributions de courants sur les résonateurs toutes orthogonales entre elles. Les modes de cette structure forment une base orthogonale permettant de décrire les réponses électromagnétiques lorsqu'elle subit une excitation.

Dans notre étude, le nombre de résonateurs composant le système est très faible. Pour simplifier l'étude, nous choisissons des résonateurs de type dipôles électriques qui résonnent à $\lambda/2$. La fréquence du mode fondamental, issue de calculs numériques, est présentée en traits discontinus (rouge) sur la figure V.6 pour un dipôle électrique de longueur 400 mm. Lorsque deux résonateurs identiques à ce dernier sont placés en champ proche l'un de l'autre (soit approximativement une distance inférieure à $\lambda/3$), et donc couplés dans la direction de propagation, on n'observe pas la réponse de deux systèmes indépendants qui résonnent à la même fréquence, mais celle d'un ensemble à deux résonateurs.

L'ensemble des deux résonateurs est un système complet possédant deux modes (cf. fig V.6, courbe en points, noire) l'un symétrique et l'autre anti-symétrique. L'un des modes, est caractérisé par le fait que les courants sur les deux résonateurs sont en phase, ce mode étant usuellement appelé le mode électrique. Pour ce mode les champs électriques

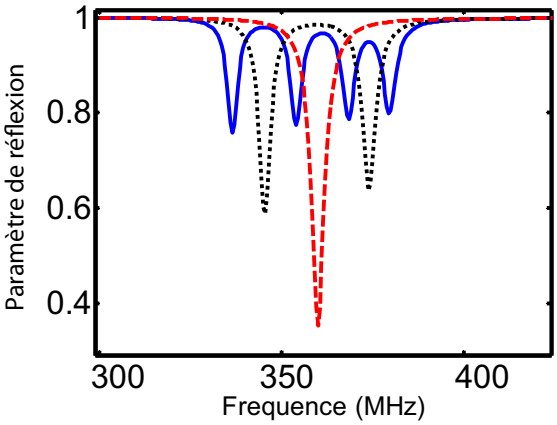


Figure V.6 – Paramètres de réflexion de l'antenne RF, obtenus pour 1 (courbe rouge discontinue),2 (courbe noire) et 4 (courbe bleue continue) résonateurs électriques couplés.

s'ajoutent. Pour le second mode, appelé mode magnétique, les courants vont dans un sens opposé. Dans ce cas précis, on observe cette fois-ci (cf. Fig V.7), une sommation constructive de champ magnétique entre les deux lignes de courant.

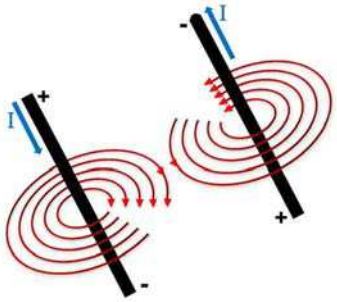


Figure V.7 – Schéma de deux lignes conductrices parcourues par des courants de sens opposés. En rouge sont représentées les lignes de champ magnétique.

L'hybridation de modes a été étudiée par Christ *et al.*, plus particulièrement en plasmonique lorsque des brisures de symétrie sont introduites dans des métamatériaux [106, 107]. Le principe d'hybridation a également été repris par Abdeddaim et al [108]. Ceux-ci ont montré que des modes hybrides entre des résonateurs identiques permettent d'obtenir un indice négatif sans avoir recours à des résonateurs magnétiques. Cet effet repose sur le fait qu'à partir de résonateurs électriques, on parvient à générer un mode présentant une résonance magnétique avec un fort facteur de qualité. Nous nous intéresserons dans la suite essentiellement à ce mode magnétique, i.e. au mode qui permet d'avoir un champ magnétique constructif entre les deux résonateurs tel que présenté sur la figure V.7.

Plus on augmente le nombre de résonateur, plus le nombre de modes est grand. Pour une structure de quatre résonateurs, on obtient quatre modes et donc quatre résonances si ces modes sont résonants (cf. fig V.6, courbe pleine, bleue). Quatre distributions de courants différentes sont donc obtenues. Sur la figure V.8, les quatre distributions de courant

obtenues sont présentées. Seules deux de ces distributions (la deuxième et la troisième sur la figure) permettent d'avoir une sommation constructive de champ magnétique au sein de l'espace formé par les 4 résonateurs. Pour les deux autres distributions, on observe des zéros de champ magnétique au centre de la zone à imager.

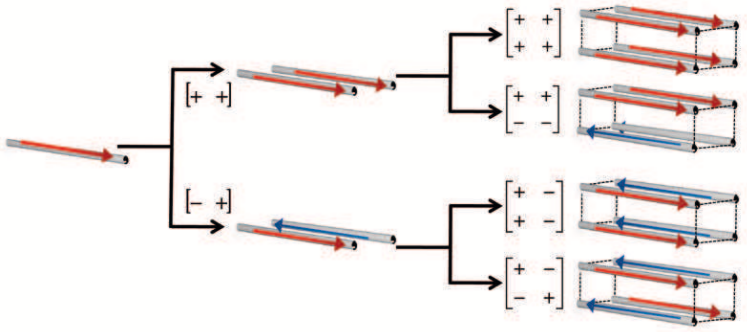


Figure V.8 – Modes propres de structures à 1,2 ou 4 résonateurs. En rouge et bleu sont représentés les courants sur les résonateurs.

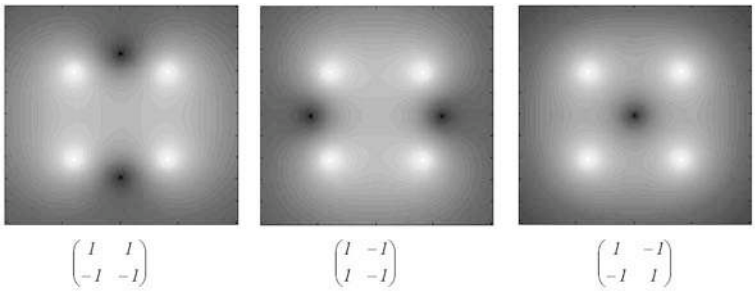


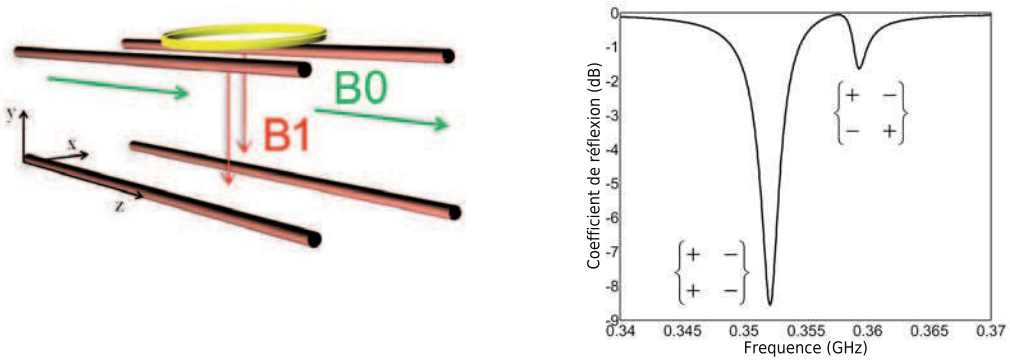
Figure V.9 – Cartes de champs magnétiques transverses des modes hybrides modélisés à partir de la propagation du champ magnétique issus des courants sur les tiges.

Un modèle analytique simple considérant la propagation du champ magnétique issu des courants sur des tiges permet de mettre en évidence ces configurations de champ magnétiques. Sur la figure V.9, les cartes de champs magnétiques entre les résonateurs sont présentées pour 3 modes d'une structure à 4 résonateurs électriques. Les notations '1' ou '-1' indiquent la phase du courant dans les 4 tiges.

V.2.2 Excitation de modes hybrides

Nous souhaitons utiliser certains modes hybrides d'une structure de plusieurs résonateurs couplés pour obtenir dans une zone ciblée une exaltation de champ magnétique. Étudions à présent l'excitation des modes d'une telle structure lorsqu'elle est constituée de quatre résonateurs électriques. Une boucle de courant permet d'exciter une telle structure.

Nous plaçons l'antenne de surface, sur l'un des plans contenant l'axe des dipôles (axe z). Elle est placée au dessus de la structure de quatre résonateurs électriques tel que sur le schéma V.10(a). La boucle considérée seule est désadaptée. Placée au dessus du système, elle se couple avec les quatre résonateurs. La longueur et la distance entre les résonateurs



(a) (b)

Figure V.10 – (a) Schéma du système boucle plus 4 résonateurs électriques, (b) Coefficient de réflexion obtenu sur la boucle de courant couplée aux 4 résonateurs.

sont choisies de façon à ce que le mode magnétique du système à quatre tiges soit à la fréquence 300 MHz. Ici la longueur des tiges est de 400 mm et la distance qui les sépare est de 50 mm.

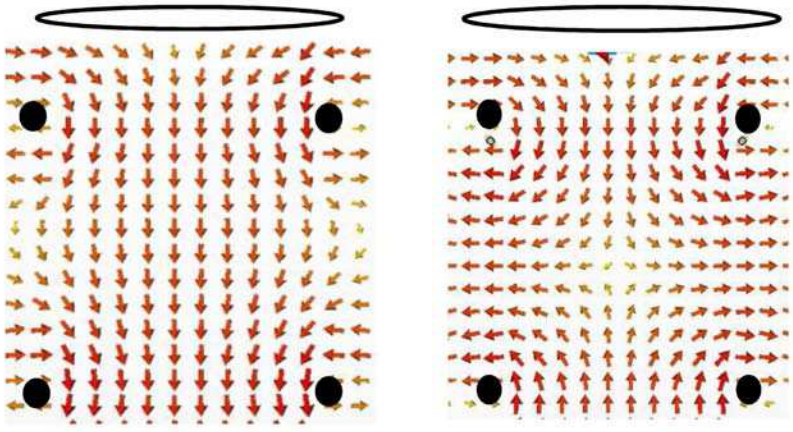
Sur la figure V.10(b) est tracé le coefficient de réflexion mesuré sur la boucle de courant lorsque celle-ci est placée en champ proche des résonateurs.

On observe deux résonances, correspondant à deux modes du système à quatre résonateurs. Deux des modes de cette structures ne peuvent être excités du fait de la géométrie et de la disposition de l'antenne boucle. En effet, celle-ci brise la symétrie du système sur le plan (zOx) et induit une symétrie sur le plan (yOz). Seuls les modes symétriques du point de vue du plan (yOz) peuvent être excités soit les modes 3 et 4 de la figure V.8. Sur la figure V.11 sont présentées les lignes de champs aux deux résonances des modes excités par la boucle de courant. Le premier mode permet d'obtenir un champ homogène entre les quatre résonateurs alors que du fait des interférences destructives, le second mode présente un nœud de champ. Parmi ces deux modes, seul le mode 3 (i.e fig V.8) présente donc un champ magnétique homogène.

Observons les cartes de champ magnétique obtenues avec et sans le système de résonateurs hybridés. Dans la simulation, le diamètre des tiges est de 1 mm. Le métal utilisé est du cuivre avec pertes. La boucle de courant est excitée avec un port 50 Ohm. Les conditions limites sont "ouvertes". Sur la figure V.12(a), on peut observer le champ magnétique tangentiel dans le plan(0xy) émis par une boucle de courant seule placée en espace libre. Ces résultats sont issus de simulation FDTD réalisé avec le logiciel CST microwave. Notons que lorsqu'elle est étudiée seule, l'antenne boucle est adaptée, et ce de façon à pouvoir comparer les cartes de champs.

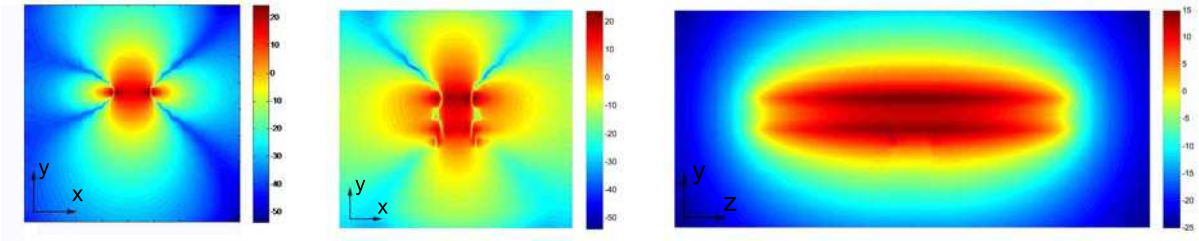
La carte de champ magnétique présentée fig V.12(b) est obtenue lorsque l'antenne de surface est couplée aux résonateurs. Seule le mode "constructif" est tracé.

On observe une déformation des lignes de champs et une homogénéisation du champ magnétique dans la zone entre les quatre tiges. L'ajout du système à quatre tiges peut



(a) (b)

Figure V.11 – Cartes de champs magnétiques dans le plan z0y de l'IRM, obtenue en simulation pour la première résonance (a) et la seconde résonance (b) du spectre V.10(b)



(a) (b) (c)

Figure V.12 – Carte obtenue par simulation du champ magnétique issu d'une boucle de courant couplée à un système de 4 résonateurs électriques,(a) dans le plan x0y avec l'antenne de surface seule, (b) dans le plan x0y et (c) dans le plan y0z avec l'antenne de surface couplée à l'exaltateur.

être considéré comme une transformation d'espace qui permet d'aplanir les lignes de champs issues de l'antenne de surface. Notons que l'homogénéité du champ magnétique est également largement augmentée dans le plan (0yz) et ce du fait de l'exaltation du champ dû à la résonance électrique des résonateurs demi-longueur d'onde. La carte de champ magnétique dans le plan (0yz) est présentée figure V.12(c). Par la suite, nous nous intéressons tout particulièrement au premier mode qui permet d'obtenir un champ homogène entre les résonateurs.

V.2.2.1 Discussion sur l'adaptation d'impédance

Dans ce paragraphe, nous discutons de l'importance et de la complexité de l'adaptation d'impédance dans de tels systèmes couplés.

Considérons un système de N tiges, couplés à un émetteur. Selon l'émetteur considéré, tous les N modes de la structure ne sont pas nécessairement excités. Notamment, les modes qui permettent de générer un champ magnétique fort dans la structure peuvent ne pas être excités. C'est ici qu'entre en jeu l'antenne émettrice. Celle-ci, considérée seule, doit être non adaptée. C'est ensuite le couplage de cette antenne au système résonant qui

permet d'obtenir une résonance forte à la fréquence du mode sélectionné. En effet, par un effet de type Purcell, l'antenne, couplée au système, est adaptée sur les modes résonants de ce dernier.

Considérons à présent une antenne boucle couplée à un système à quatre tiges tel que sur la configuration présentée figure V.10(a).

Sur la figure V.13(a) est tracé le paramètre de réflexion obtenu sur la boucle de surface lorsqu'elle est placée au dessus du système. Le mode magnétique constructif est sur la résonance de plus faible fréquence qui n'est pas bien adaptée à la fréquence que l'on souhaite, ici 300 MHz. En contrôlant des paramètres de l'antenne tels que sa position, ou encore en utilisant des éléments discrets ajustables tels que des capacités variables, il est possible de modifier l'adaptation des modes résonants. Ainsi, c'est l'adaptation de la boucle magnétique émettrice sur le système qui va permettre d'exciter convenablement un mode. Cette adaptation peut varier fortement avec la position de la boucle et notamment avec la distance entre la boucle et l'exaltateur de champ.

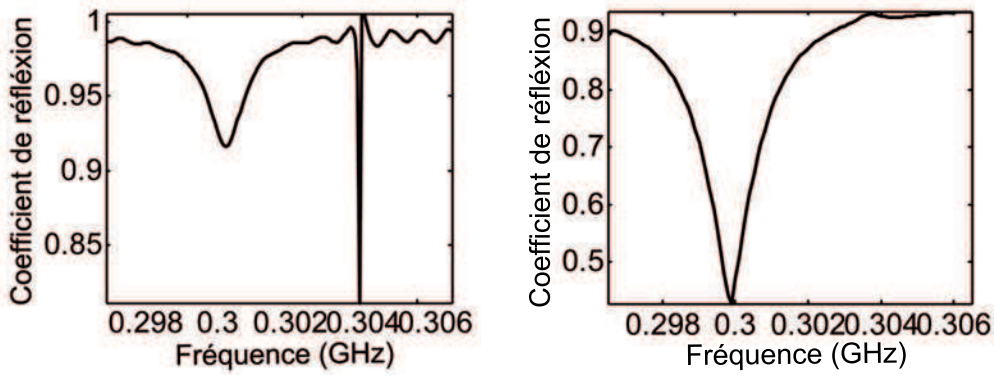


Figure V.13 – Paramètre de réflexion de l'antenne magnétique couplée au système à 4 tiges (a) sans système d'adaptation , (b) après une adaptation à l'aide d'éléments discrets de type varicap.

La figure V.13(b) présente le paramètre de réflexion sur la boucle lorsqu'il y a eu adaptation sur le mode de plus basse fréquence grâce à un circuit d'adaptation formé de capacités variables et positionné sur la boucle de courant.

Pour pouvoir contrôler l'adaptation de l'antenne, il est donc indispensable de laisser des degrés de liberté sur l'adaptation du système complet et ce notamment du fait des variations des propriétés électromagnétiques de la zone que l'on souhaite éclairer (variation de la permittivité notamment) et d'éventuel blindage positionné autour du système.

V.3 Application de l'hybridation de modes à une antenne RF en IRM

Comme nous l'avons vu dans la première partie, la construction d'images en RMN nécessite une antenne radio-fréquence. Cette antenne est placée au centre de l'IRM, là

où l'aimant permanent génère un champ magnétique statique homogène fort B_0 (sur l'axe (Oz)). L'ajout de l'antenne RF ne doit pas perturber ce champ statique. Le champ magnétique RF doit avoir ses composantes principales dans le plan (xy) pour basculer l'aimantation alignées sur l'axe (Oz). La conception de telles antennes n'est pas aisée. De plus, il n'est pas facile d'utiliser des antennes à résonance électrique, la conversion d'un champ électrique en un champ magnétique étant complexe. Nous avons développé une antenne RF constituée d'un système complet reposant sur l'hybridation de modes et permettant de générer un champ magnétique dans un IRM à partir de résonateurs quelconques couplés. Selon les champs statiques $\mathbf{B}_0$ des IRM, selon la taille des zones que l'on souhaite imager, les propriétés telles que les dimensions, l'adaptation et la géométrie de cette antenne RF doivent être adaptées. Dans cette partie, trois dispositifs adaptés à des IRM 3 Tesla Humain, 7 Tesla animal et humain sont présentés.

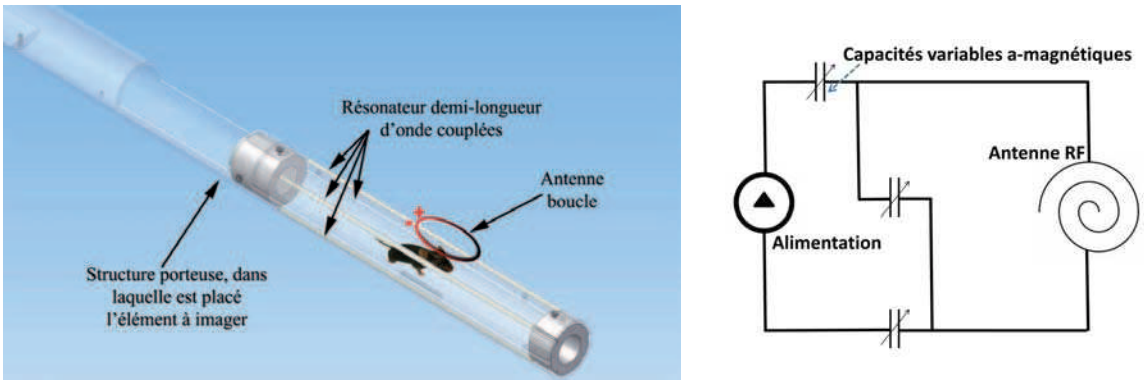
V.3.1 Application en imagerie 7 Tesla pour petit animal

L'étude de l'application de l'hybridation de mode à des IRM 7 Tesla pour petit animal a été menée théoriquement et expérimentalement. A 7 Tesla, la fréquence de Larmor de l'hydrogène est de 300 MHz soit une longueur d'onde de un mètre. Le tube interne de l'IRM, dans lequel on peut travailler fait 80 millimètres de diamètre. Les dimensions de la zone à imager dans ce cas sont petites. Elles sont de l'ordre de 30 à 40 mm soit $\lambda/25$. Nous travaillons donc dans des dimensions bien inférieures à la longueur d'onde. Il y a peu de problèmes de fluctuations du champ dans la zone et l'amplitude de l'onde ne décroit pas fortement dans la zone d'imagerie.

En pratique, le système est constitué de quatre tiges en cuivre (non ferromagnétiques), dont la longueur peut être modifiée grâce à un système télescopique (tiges imbriquées). Le système télescopique permet de modifier la fréquence de résonance des tiges et de s'adapter ainsi au milieu que l'on souhaite imager. Les tiges sont placées sur les arêtes longues d'un parallélépipède rectangle à face carrée. Le tout est placé sur un tube de plexiglas. Les quatre tiges sont placées sur les cotés d'un carré de coté 35 mm. L'antenne excitatrice que nous avons simulée et réalisée est une boucle surfacique de 3.5 mm de diamètre dont la réponse peut être modifiée grâce à l'ajout de 3 capacités a-magnétiques ajustables en fréquence. Deux des capacités servent à l'adaptation de l'antenne, la troisième sert au réglage fréquentiel. L'antenne de surface est imprimée sur un substrat diélectrique de permittivité $\varepsilon = 4$. Elle est placée à plat au dessus des 4 tiges. Un schéma CAO du prototype fabriqué est présenté figure V.14.

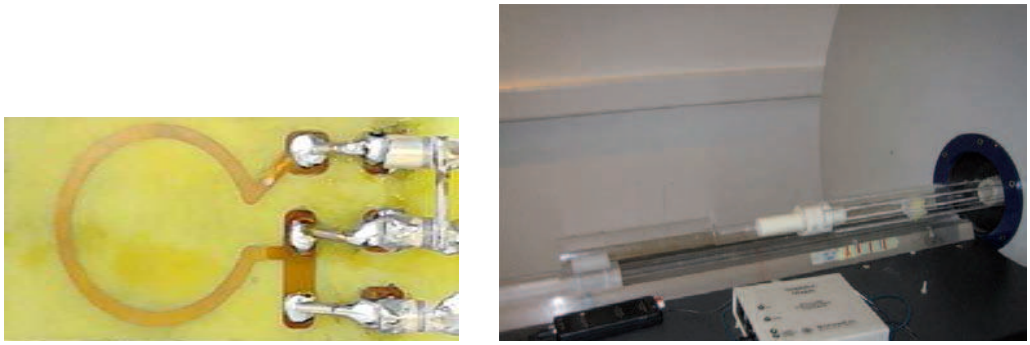
V.3.1.1 Validation du concept sur un gel

Les expériences menées ont consisté à démontrer la fonctionnalité du système. Elles ont eu lieu à l'ESPCI sur un IRM petit animal de Bruker. Elles se sont déroulées en deux temps. Une première mesure d'un gel de gélatine en présence des résonateurs est effectuée ainsi qu'une seconde mesure en l'absence des tiges. Les gels présentent une répartition homogène de molécules d'eau, ce qui permet d'établir des images directement reliées à l'homogénéité du champ. Les photos de l'antenne boucle utilisée ainsi que de la mise en



(a) (b)

Figure V.14 – (a) Schéma CAO du prototype de l'antenne RF et de son socle. (b) Schéma électrique du circuit d'adaptation réalisé pour l'adaptation les antennes de surfaces à la fréquence de Larmor.



(a) (b)

Figure V.15 – Photographies (a) de l'antenne boucle, (b) de l'IRM et du prototype d'antenne RF.

œuvre de l'antenne sont présentées figure V.15. Le circuit d'adaptation constitué de 3 capacités variables a-magnétique est schématisé figure V.14(b).

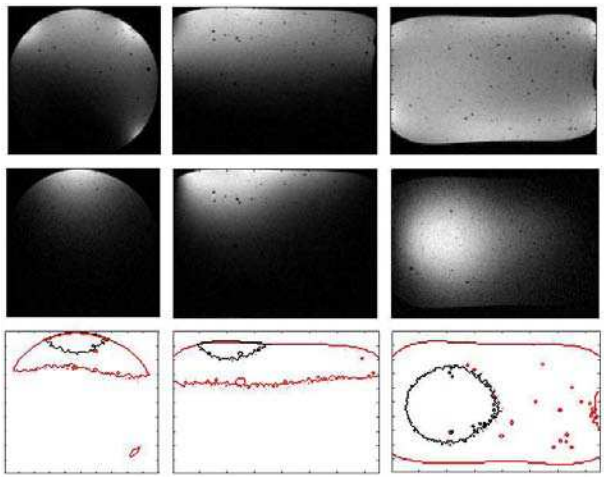


Figure V.16 – Mesures sur 3 coupes d'un gel de gélatine avec (ligne 1) et sans l'antenne (ligne 2). La troisième ligne correspond au contour du champ lorsqu'il est à 50% du maximum de champ, pour les deux mesures.

Sur la figure V.16 sont tracées les 3 coupes d'une acquisition (gradient écho rapide) IRM 7 Tesla sur un gel de gélatine d'agra lorsque notre exaltateur est utilisé (sur la première ligne de la figure) et lorsque seule l'antenne boucle est utilisée (sur la deuxième ligne). La troisième ligne présente les zones où le champ est encore à 50% de son amplitude maximale pour les deux cas de figures. On observe que l'homogénéité du champ est largement augmentée. On observe notamment qu'en plus de gagner en SNR sur l'axe de l'antenne de surface, on gagne également en SNR sur les deux autres axes du repère.

V.3.1.2 Validation sur un cas réel : imagerie du cerveau d'un rat

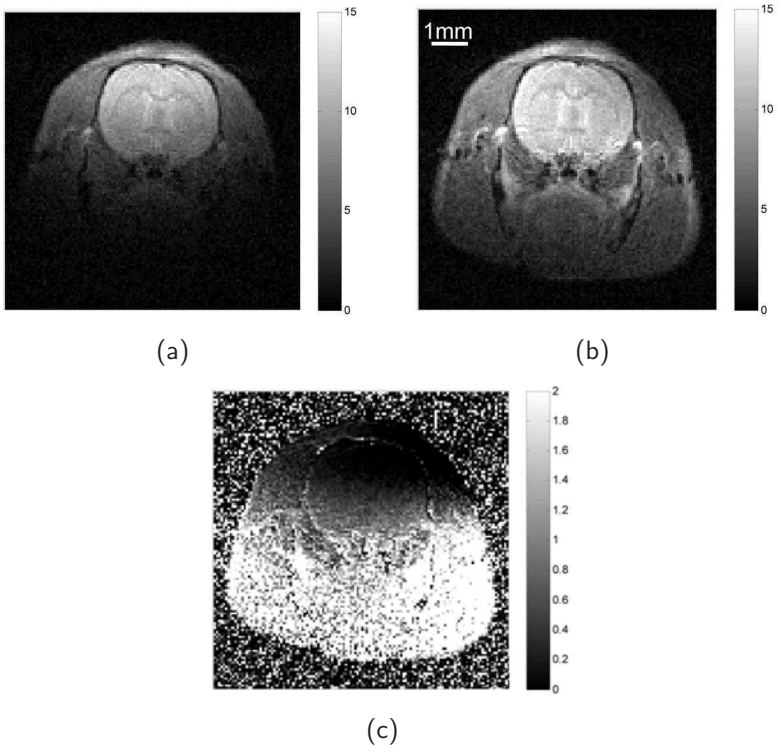
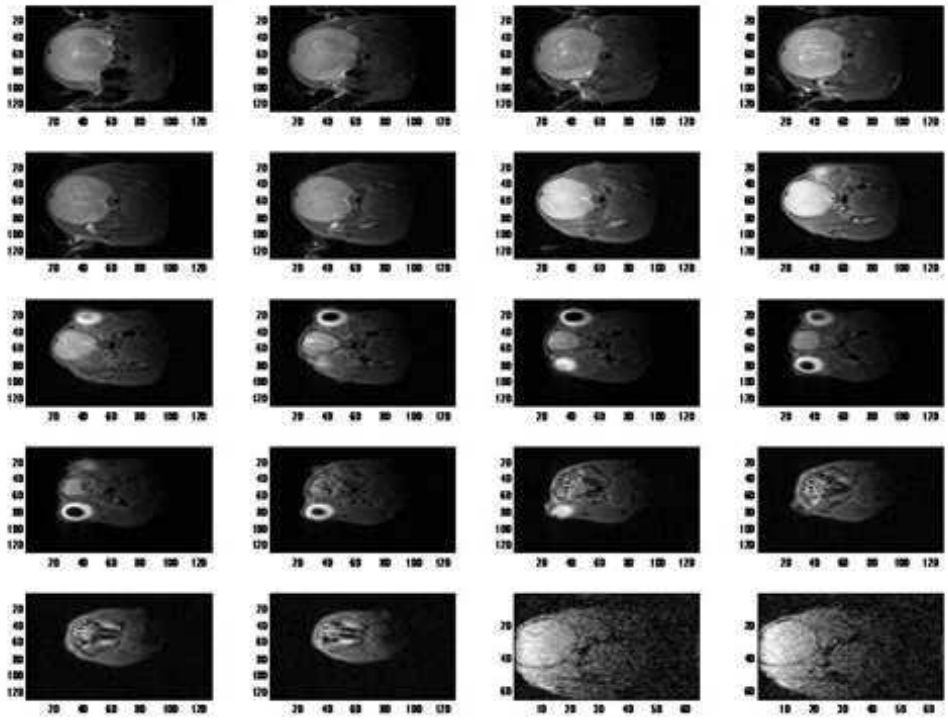


Figure V.17 – Coupes coronales, sur l'axe (Oz), du crâne d'une souris mesurées avec (a) et sans (b) l'exaltateur de champ avec un IRM 7 Tesla animal.

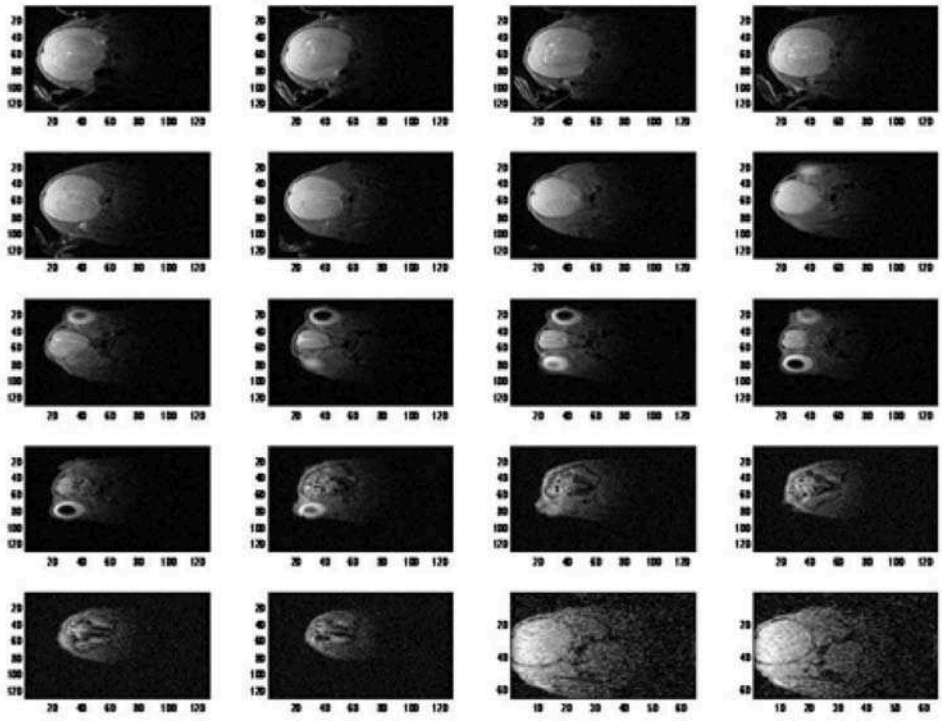
Des mesures ont été réalisées sur des rats. Des images de ces mesures sont présentées figure V.17 et V.18. Sur la figure V.17, la première image est mesurée avec l'exaltateur de champ magnétique, la deuxième seulement avec l'antenne boucle et la troisième est la différence entre ces deux premières images. Sur cette dernière image, les zones blanches sont les zones où le signal est augmenté. On observe que l'on gagne largement en homogénéité et en rapport signal sur bruit en profondeur, i.e loin de l'antenne boucle.

V.3.1.3 Influence de la fréquence fondamentale des résonateurs

Le mode excité à la fréquence de Larmor dépend directement de la longueur des tiges. Jusqu'ici les quatre résonateurs électriques utilisés avaient tous la même longueur. En rendant indépendantes ces quatre longueurs, on peut faire varier les distributions de champ des modes excités. En effet, les tiges de tailles différentes (mais proches) résonnent alors



(a)



(b)

Figure V.18 – Coupes coronales, sur l'axe (Oz), du crâne d'un rat mesurées sans (a) et avec (b) l'exaltateur de champ. Figure (c) est présenté la différence (b)-(a).

indépendamment à des fréquences différentes. Ainsi à une fréquence, elles sont plus ou moins résonantes ce qui modifie l'intensité du courant qui les parcourt et donc l'amplitude du champ qu'elles émettent. On peut ainsi modifier les cartes de champs magnétiques obtenues sur les modes résonants et illuminer plus ou moins une certaine zone de l'espace d'imagerie.

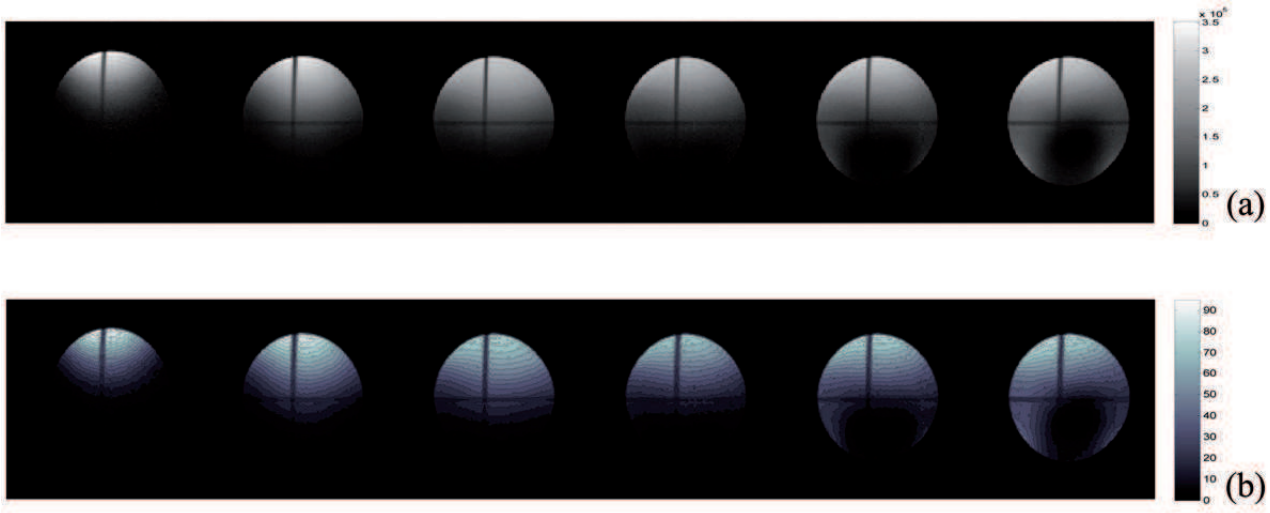


Figure V.19 – (a) Coupes transversales d'images IRM effectuées avec une boucle de courant couplées à un exaltateur de champ sur un gel de gélatine pour différentes longueurs de tige (b) Lignes de champs pour différentes amplitudes de champ.

Les images sur la figure V.19 sont mesurées pour différentes longueurs de tiges. La première correspond à des tiges très longues de plus de 600 mm et donc complètement désadaptées. Sur la deuxième image, seules les tiges hautes sont adaptées. La dernière image vers la droite montre un mode qui présente un zéro de champ. Toutes ces configurations présentent des distributions différentes. Nous avons réaliser beaucoup de manipulations pour évaluer l'impact de la longueur des tiges. C'est un paramètre très fort et très intéressant à utiliser pour le contrôle des modes et donc des cartes de champs magnétiques. Pour palier à des problèmes d'inhomogénéité, il s'avère ainsi vraiment intéressant lors d'une expérience de mesurer différentes configurations et de les combiner de façon à construire des distributions de champs homogènes ce qui permettra d'obtenir de meilleures images.

V.3.2 Application en imagerie 3 Tesla pour humain

Passer de l'IRM 7 Tesla petit animal au 3 Tesla Humain correspond simplement à faire une homothétie spatiale de l'ensemble de la structure. A 3 tesla, la fréquence de Larmor de l'hydrogène est de 128 MHz. La longueur d'onde de travail est donc de 2.34 mètre. Si l'on souhaite par exemple imager une tête humaine, on conçoit une structure composée de 4 dipôles électriques espacés de 250 mm. Les dimensions de la boucle de courant sont également agrandie à un diamètre de 250 mm. Les cartes de champ obtenues en simulation sur les modes hybrides constructifs sont très bonnes et la zone de champ homogène est largement augmentée par rapport à une simple antenne de surface. Les antennes de type birdcage sont très performantes sur des IRM 3 Tesla humain. Les défis à relever sont

pour les IRM 7 telsa humain, où les effets d'inhomogénéité de champ posent fortement problème.

V.3.3 Application en imagerie 7 Tesla pour humain

Les expérimentations sur un IRM 7 Tesla humain ont eu lieu dans le centre de recherche en neurosciences NeuroSpin, au CEA Saclay. Dans un IRM 7 Tesla clinique, la longueur d'onde est la même que pour l'imagerie 7 tesla petit animal sauf que les dimensions des zones à imager sont plus grandes. Le rapport de la longueur d'onde divisée par la taille moyenne de la zone à imager qui a été divisé par 10. Il est de ce fait beaucoup plus dur de générer des champs homogènes dans tout l'espace des zones à imager. La longueur des tiges est toujours de 400 mm. L'antenne boucle a elle un diamètre beaucoup plus grand, de l'ordre de 250 mm.

Design de l'antenne boucle. Les dimensions de l'antenne sont telles que l'on a un retard de phase du courant sur la boucle et si l'on utilise le champ tel quel, on obtient des interférences destructives. Pour pallier ce problème, on introduit en série sur la ligne de la boucle des capacités dont les valeurs varient entre 3 et 5 pF. Ces capacités permettent de contrer le retard de phase qui a lieu sur la ligne.

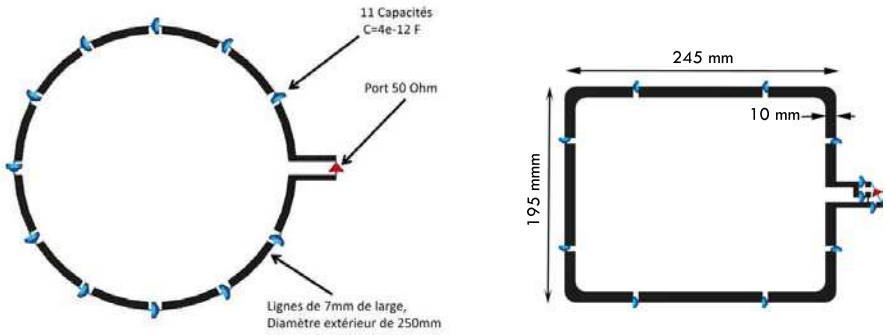
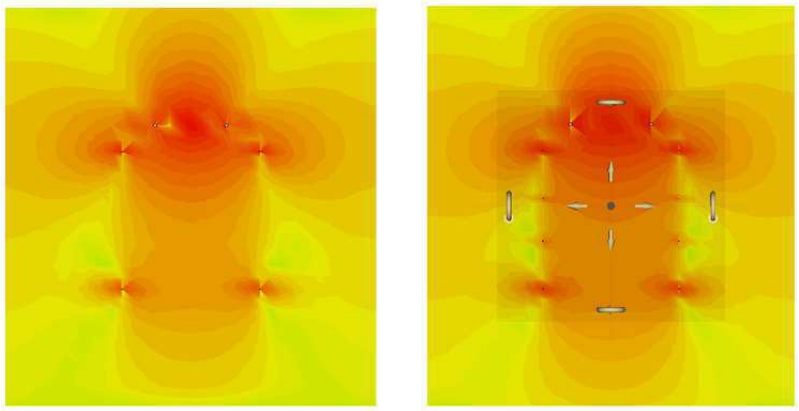


Figure V.20 – Antennes constituées d'une boucle de courant et de capacités séries (a) de forme circulaire (b) de forme rectangulaire et munie d'un circuit d'adaptation. Nous avons opté pour la géométrie (b).

Sur la figure V.20 deux antennes possibles sont présentées. Nous avons réalisé la seconde dont la géométrie rectangulaire permet de mieux exciter les résonateurs électriques. Le système d'adaptation placé à l'entrée de l'antenne boucle est le même que celui utilisé pour l'IRM 7 Tesla petit animal.

Imagerie d'un substrat à faible permittivité. Nous avons réalisé des simulations du système antenne boucle couplée aux résonateurs. Les résonateurs électriques sont placés à une distance inférieure à $\lambda/3$ ce qui permet encore un couplage important entre eux. On obtient bien une structure à 4 modes et on parvient bien à exciter deux de ces modes dont l'un donne une distribution de champ magnétique intéressante pour l'imagerie. A ce stade, aucun objet à imager n'est placé dans la zone à imager. Le champ n'étant pas

suffisamment homogène lorsque les tiges sont trop écartées (plus de 260 mm), une solution consiste à placer entre elles des tiges non adaptées qui jouent le rôle de guide d'onde. On place donc, tel que représenté sur la figure V.21 des tiges de longueur inférieure (300 mm) ce qui permet d'améliorer la distribution du champ entre les tiges. Des images mesurées avec cette configuration sont présentées sur la figure V.22.



(a) (b)

Figure V.21 – Distribution du champ magnétique pour un système (a) constitué de 4 tiges, (b) de 8 tiges dont 4 non résonantes

Le prototype développé dans ce dernier cas de figure est donc tout à fait fonctionnel pour des objets à imager dont la permittivité est faible. Cependant dans la plupart des cas, on ne travaille pas avec de tels objets et les permittivités sont beaucoup plus élevées.

Imagerie d'un substrat à forte permittivité. La permittivité d'un diélectrique dépend de la fréquence à laquelle il est étudié. La permittivité relative (partie réelle) de l'eau à une fréquence de 300 MHz est de 78, donc assez élevée. De plus, les pertes sont non négligeables. Modélisons une tête humaine par une sphère d'eau de 200 mm de diamètre. Cette boule constitue un résonateur de Mie. On ne peut plus utiliser notre exaltateur de champ comme pour les deux dernières configurations. Cette fois-ci en plus de l'antenne de surface et des tiges demi-longueur d'onde, le couplage avec ce troisième résonateur, le résonateur de mie, doit être pris en compte. Le défi majeur en IRM 7 Tesla humain est donc de contrer la dispersion qui a lieu lorsque l'onde se propage dans la zone à imager.

La figure V.23(a) présente le schéma de prototype simulé et expérimenté. Le champ magnétique sur deux plans d'imagerie est présenté sur les figures V.23(b-e) pour deux résonances proches de 300 MHz de l'ensemble des systèmes couplés. On y observe très clairement des configurations de champ dues aux modes de Mie de la sphère d'eau.

Sur la V.24, quatre mesures d'un même gel dont la partie réelle de la permittivité est de 78 sont réalisées. Le prototype expérimental est présenté sur la figure V.25. Pour la première, seule l'antenne de surface est utilisée. Une dispersion spatiale de 63% est obtenue. La dispersion spatiale est obtenue en calculant le rapport de l'écart type du signal sur le signal moyen. Pour la deuxième image V.24(b), nous avons réalisé une image en utilisant une birdcage. C'est actuellement l'antenne "single channel" qui permet d'avoir la meilleure homogénéité de champ en IRM 7 Tesla humain. La dispersion obtenue est de 60%. Pour

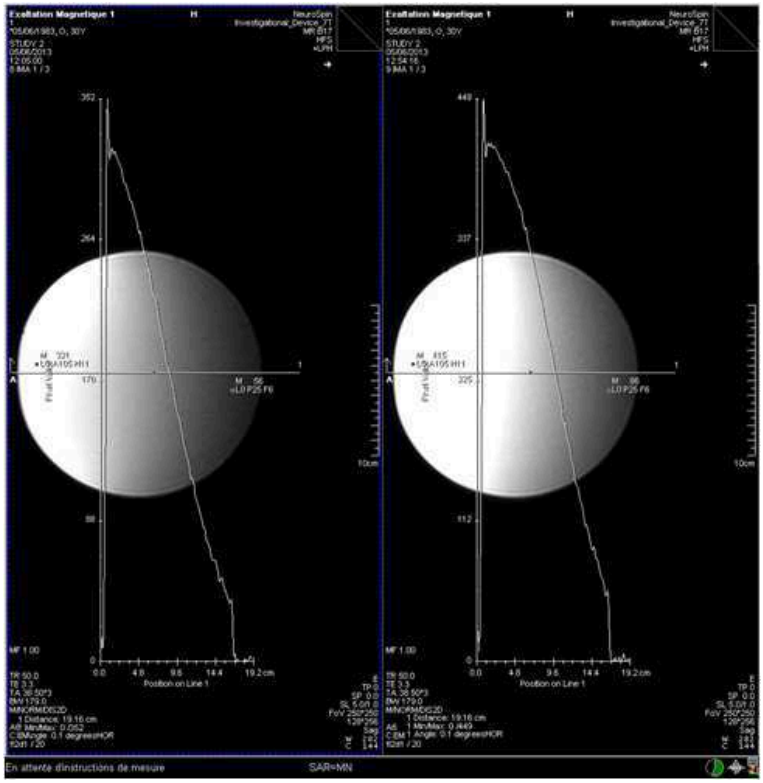


Figure V.22 – Image IRM d'un gel de permittivité 3 avec l'antenne de surface seule et avec l'antenne de surface couplée à l'exaltateur de champ magnétique. L'antenne de surface est sur cette image située à gauche des gels.

l'image V.24(c), l'antenne de surface est couplée à un exaltateur composé de 4 résonateurs demi-longueur d'onde. Un gain en dispersion de 8% est obtenu comparé à l'antenne de surface seule. La dispersion du signal est calculée à 55%. Ce prototype n'apportait pas une amélioration suffisante. Nous l'avons amélioré en ajoutant sous la sphère un plan réflecteur composé de résonateurs demi-longueur d'onde. On obtient alors un gain de 25% par rapport à l'antenne seule et un gain de 22% par rapport à la birdcage (cf.V.24(d)). Les résultats expérimentaux sont donc très concluants même si une forte dispersion reste à corriger pour devenir acceptable pour l'analyse des images par un médecin.

Nous souhaitons cependant aller plus loin et obtenir des images plus homogènes. Pour contrer les modes de Mie qui imposent les lignes de champ dans la zone à imager et notamment les zéros de champ, il apparait intéressant de travailler avec les résonateurs de façon à ce que le champ soit imposé par les résonateurs demi-longueur d'onde. Briser la symétrie de la structure serait potentiellement un moyen de modifier les lignes de champ. Cela permettrait d'aller à l'encontre des résonances de Mie qui imposent sans les tiges des distributions de champs symétriques.

Les résultats devraient être meilleurs dans un gel qui modélise mieux une tête humaine puisque la permittivité sera alors égale à 50 et non à 78, ce qui modifie fortement la position fréquentielle des modes de mie de la tête et augmente considérablement la longueur d'onde dans la tête humaine.

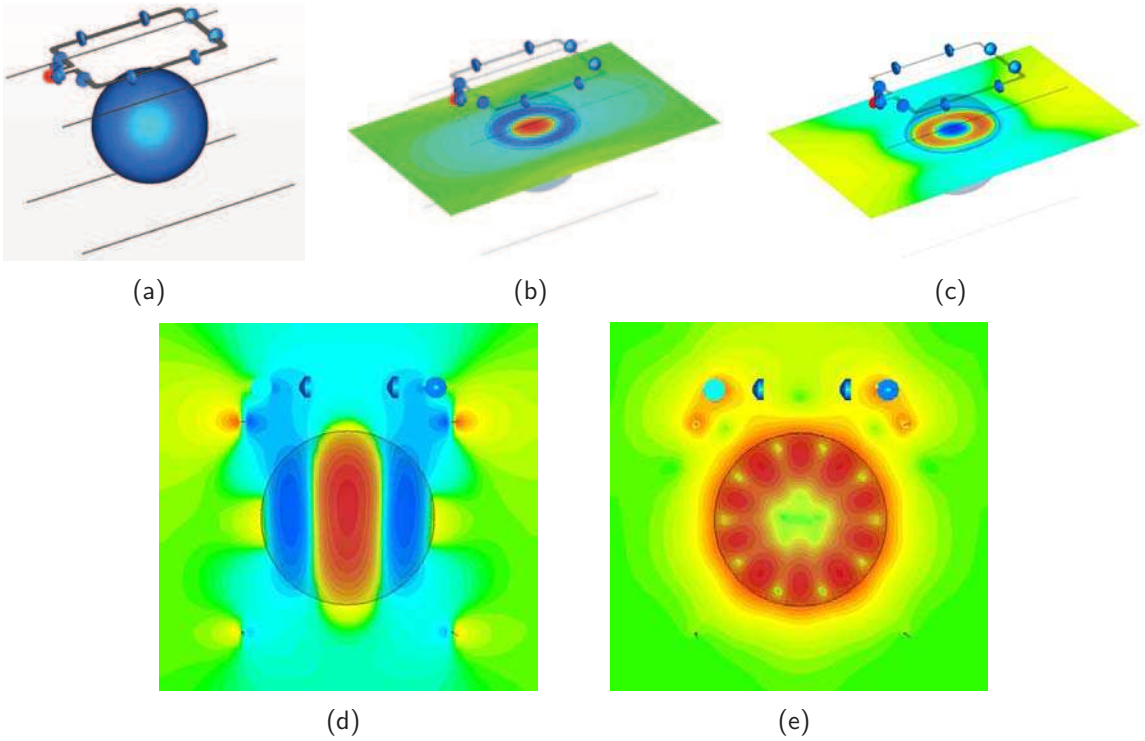


Figure V.23 – (a) Schéma du montage, simulé en FDTD, coupes du champ magnétique pour deux fréquences différentes (b) et (c) sur le plan (z0x), (d) et (e) sur le plan (x0y).

V.4 Perspectives

V.4.1 Géométries des sources et des résonateurs

Jusqu'ici, on a utilisé une antenne de surface, une simple boucle de courant adaptable comme antenne d'émission et de réception. Il est envisageable de modifier la façon dont est excité le système de résonateurs hybridés. Nous envisageons d'utiliser les antennes suivantes :

Antennes multi-éléments Il est possible d'utiliser simultanément plusieurs antennes de surface. Placer deux antennes boucles sur et sous la zone à imager peut permettre de nettement améliorer l'homogénéité du champ magnétique RF. La figure V.26 présente une carte de champ lorsque deux boucles sont utilisées de part et d'autre de la zone d'imagerie. Aucun déphasage n'est introduit sur les boucles qui sont alimentées par le même canal.

Placer deux antennes boucles sur deux cotés adjacents tel que sur la figure V.27 permet d'exciter simultanément plusieurs modes de la structure. On additionne ainsi les deux modes dégénérés :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{V.6}$$

Dans cette configuration, les deux boucles sont reliées à la même alimentation, un petit circuit d'adaptation est inséré sur l'une d'entre elle de façon à introduire un déphasage de $\pi/2$. Ainsi le champ magnétique généré tourne à la vitesse de Larmor sur l'axe (Oz)

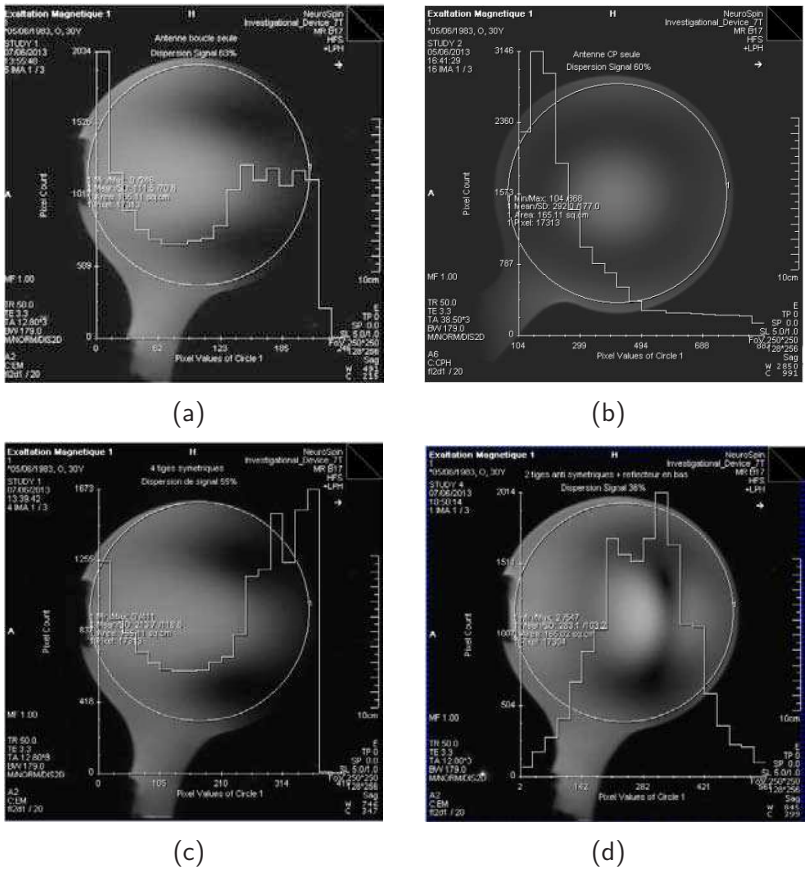


Figure V.24 – Images d'IRM 7 Tesla réalisées sur un gel de permittivité 78. (a) avec une antenne RF de surface, (b) avec une birdcage, (c) avec un exaltateur de champ constitué de 4 résonateurs demi-longueur d'onde, (d) avec un exaltateur de champ et un réflecteur de champ.

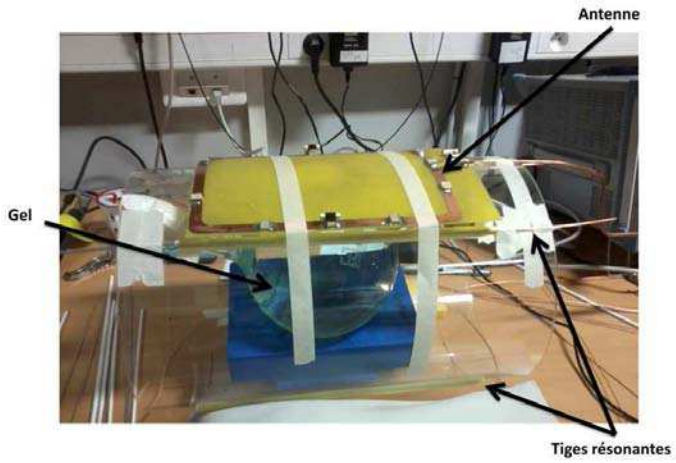


Figure V.25 – Photographie du prototype expérimental et images du gel obtenues pour quatre configurations.

de l'IRM et suit la rotation des spins.

Antenne dipôle électrique Il est possible également d'utiliser à la place d'une boucle de courant un dipôle électrique non adapté tel que présenté sur la figure V.28. La symétrie

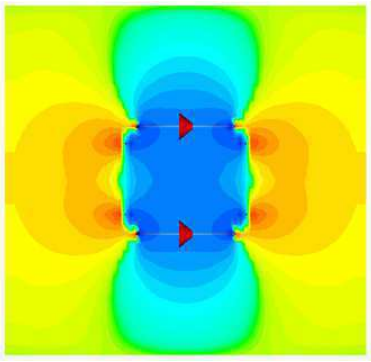


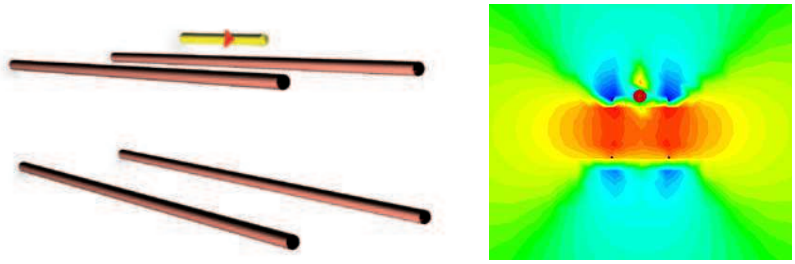
Figure V.26 – Carte de champ magnétique obtenue à 300 MHz pour une excitation RF constituée de deux antennes de surface.



(a) (b)

Figure V.27 – (a) Schéma d'une configuration pour l'imagerie IRM utilisant deux boucles de courant en quadrature. (b) Sommation des deux modes dégénérés d'une structure à 4 résonateurs électriques.

imposée par le dipôle électrique diffère de celle de la boucle de courant. Dans ce cas, les modes excités d'une structure à 4 tiges sont les modes 1 et 2 de la figure V.8. Les résonateurs électriques formant l'exaltateur sont alors directement excités par le champ électrique issu du petit dipôle électrique.



(a) (b)

Figure V.28 – Schéma d'une configuration pour l'imagerie IRM utilisant un dipôle électrique non résonant.

Dans ce cas de figure, il apparait intéressant de placer l'alimentation directement sur l'un des résonateurs de l'exaltateur. Une telle configuration est possible. Il faut cependant veiller à ne pas briser les symétries. Par exemple, placer la connexion sur un seul des résonateurs entraine une brisure de symétrie sur les deux plans (Oyz) et (Ozx) qui empêche l'excitation de modes "constructifs" pour le champ magnétique RF.

Géométrie et types de résonateurs utilisés La théorie, les simulations ainsi que les expérimentations ont principalement été menées avec des résonateurs électriques demi-longueur d'onde et une excitation magnétique (la boucle de courant). L'hybridation de modes n'est pourtant pas limitée à l'hybridation de résonateurs électriques, ni à une excitation magnétique. Des résonateurs de type magnétiques, électriques, magnétoélectriques et même diélectriques peuvent être utilisés.

V.4.2 Système d'adaptation et contrôle des modes

L'exaltateur de champ que nous avons proposé se distingue très fortement des antennes RF existantes dans le sens où il permet une flexibilité sur le contrôle des modes constitués par les résonateurs hybridés qui le composent. En effet, considérons un système de quatre résonateurs électriques demi-longueur d'onde couplés. Ce système présente quatre modes orthogonaux. Considérons une image réalisée avec un mode de type $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Pour palier aux diminutions d'amplitude de champ sur les bords de l'image, il apparait intéressant de créer une image avec ce précédent mode puis de le combiner avec une image obtenue en changeant le mode de travail, tel que le mode suivant $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ qui présente un champ magnétique fort entre les tiges et un zéro de champ au centre de l'image.

Il est classique pour les antennes RF destinées à l'IRM de multiplier les canaux d'acquisition pour améliorer la qualité des images. Ces antennes sont complexes et nécessitent l'utilisation de nombreux composants. Elles sont de plus configurées pour une carte de champs bien précise dans un intervalle de fréquences restreint. La superposition d'images résultant de mesures sur différents modes que nous pouvons effectuer avec l'exaltateur est une méthode simple pour palier aux problèmes d'inhomogénéité dans la zone d'imagerie sans diminuer le RSB. Au lieu d'utiliser un nombre N d'antennes en réseau, on travaille avec N modes résonants d'une structures de résonateurs couplés.

V.4.3 Imagerie de différents atomes

Un apport particulièrement de l'exaltateur est qu'il permettra d'imager plusieurs atomes avec une seule et même antenne. En contrôlant l'hybridation de modes, le couplage avec l'antenne de surface, et en augmentant la plage accessible de fréquence de résonance fondamentale des résonateurs, il est possible, par deux mesures consécutives, d'imager deux atomes dans un élément. Le système serait par exemple consécutivement adapté à la fréquence de Larmor de l'hydrogène puis adapté à la fréquence d'un second atome présent dans le corps à imager. Ce type d'antenne RF a déjà été étudié par Réo [109] et Petroff [110] qui étudient des antennes doubles pour l'hydrogène et respectivement le ^{13}C ou le ^{31}P.

Une seconde méthode consistera à utiliser des résonateurs plus complexes présentant plusieurs résonances. Un résonateur peut être conçu de façon à résonner aux fréquences de Larmor de deux atomes. Pour ce faire, la géométrie des résonateurs pourra être modifiée ou des éléments discrets tels que des diodes varicap ou encore des commutateurs électroniques introduits dans la structure.

V.5 Conclusion

Nous avons conçu une antenne radio-fréquence pour l'Imagerie par Résonance Magnétique. Cette antenne est constituée de résonateurs hybridés, couplés à une antenne de surface. Elle peut jouer le rôle d'émetteur comme de récepteur et délivre un champ magnétique dont la distribution spatiale est issue des modes propres de l'ensemble des résonateurs qui la constituent. Le contrôle des modes d'une telle structure permet de choisir des configurations de champs qui permettent d'obtenir des images avec une bonne résolution et dans une zone élargie par rapport aux simples antennes de surface usuelles. Combiner les modes, modifier l'adaptation en fréquence, configurer l'antenne pour s'adapter aux formes des éléments à imager sont autant d'apports intéressants de cette nouvelle famille d'antennes RF.

Conclusion générale et Perspectives

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à des milieux finis et infinis localement résonants. Les propriétés d'arrangements périodiques de résonateurs sub-longueur d'onde ont été abordées sous un angle électrodynamique dans le but de décrire les interactions électromagnétiques mutuelles entre les résonateurs du milieu. Cette approche est fondée sur l'expression d'une part en terme d'impédance du mode propre fondamental des résonateurs des milieux et d'autres part sur une matrice de couplage mutuel prenant en compte les interactions entre les résonateurs. Par cette approche, le comportement de structures composées d'arrangements périodiques de résonateurs sub-longueur d'onde a été explicité. Une approximation consistant à modéliser les cellules par la somme d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique permet d'obtenir des équations analytiques de ce formalisme matriciel. Le rayonnement des dipôles a permis de décrire les interactions réciproques entre les cellules du milieu. Cette modélisation tient compte à la fois des effets de champ proche et des effets de champ lointain.

Pour des milieux infinis, le comportement anisotrope de réseaux de SRRs a été mis en évidence et quantifié. Une extension de ce modèle permet de mettre en évidence les zones de bandes interdites dans le spectre fréquentielle de ces milieux. Nous montrons que ce comportement est lié à la dimension de l'espace environnant le milieu étudié.

Lorsque les réseaux sont de taille finie, les caractéristiques des modes propres, avec l'expression des vecteurs propres et des valeurs propres, ont été extraites du modèle. Cette analyse nous a permis d'obtenir une description de la structure indépendante des excitations électromagnétiques qu'elle subit. Le spectre fréquentiel a été caractérisé en fonction du type de résonateurs et de la structuration du milieu. Les phénomènes d'apparition de résonances est interprété comme une levée de dégénérescence de résonateurs identiques.

Le modèle développé nous a permis de nous intéresser aux propriétés du rayonnement de structures lorsqu'elles sont de taille finie. Nous avons montré que la conversion d'ondes évanescentes en ondes propagatives était entièrement liée au caractère fini de la structure ainsi qu'aux effets de résonances fortes des cellules du réseau. Les diagrammes de rayonnement sont interprétés, notamment leurs dépendances avec les symétries que présente la structure et au type et la position des sources utilisées. Nous avons utilisé des algorithmes d'identification non linéaires permettant de caractériser les modes propres d'une structure

à partir de mesure du champ en champ proche ou en champ lointain.

La manipulation, le contrôle des interactions entre objets sub-longueur d'onde permet d'innover dans de nombreux domaines. Ces innovations sont tout à fait essentielles dans le domaine des télécommunications, avec les antennes intelligentes, capables de s'adapter à leur environnement donc à des conditions externes changeantes, d'être ajustables en fréquence, en diagramme de rayonnement et ce tout en restant miniatures. En tenant comptes de nos précédents résultats et en utilisant des structures composées d'un faible nombre de résonateurs sub-longueur d'onde, nous avons travaillé directement avec les modes propres résonants de ces structures.

En modifiant de même manière la fréquence fondamentale des résonateurs de telles structures, nous avons montré que l'ensemble de ses modes propres peut être décalé en fréquence. Ce phénomène nous a permis de réaliser une antenne miniature donc le diagramme de rayonnement est ajustable et contrôlable en fréquence.

Une seconde approche a reposé sur le fait que les modes propres d'une structure composée de résonateurs tous identiques ne sont pas toujours résolus en fréquence. Nous avons ainsi choisi de travailler directement sur la géométrie des résonateurs d'un réseau pour modifier en amont les phénomènes d'hybridations. Le réseau conçu est constitué de résonateurs dont les fréquences fondamentales sont toutes distinctes et contenues dans un petit intervalle de fréquence. De cette manière, chaque mode de la structure est localisé sur une cellule et résonne à une fréquence qui lui est propre. Une association entre l'espace réel et le spectre fréquentiel est réalisée. Celle-ci est étendue au champ lointain. Ce travail a permis de réaliser un système d'imagerie sub-longueur d'onde de sources planes large bande. Une diversification et un meilleur contrôle des diagrammes de rayonnement de réseau finis de cellules sub-longueur d'onde sera possible en utilisant des éléments discrets sur les réseaux, permettant de piloter individuellement les fréquences de résonance des cellules.

Enfin, nous avons utilisé les études réalisées sur l'hybridation de modes pour concevoir une antenne radio-fréquence destinée à l'Imagerie par Résonance Magnétique. Cette antenne repose sur le couplage entre des résonateurs pour obtenir à partir de configurations spatiales de modes des distributions de champ magnétique homogènes dans une zone d'intérêt. La combinaison de modes symétriques et anti-symétriques, le contrôle fréquentiel de l'antenne sont des éléments particulièrement innovants de cette antenne. Nous avons obtenu des résultats très probants avec des rapports signal sur bruit augmentés de 150% par rapport aux antennes magnétiques RF classiquement utilisées en IRM. Dans le futur proche, des études sur le contrôle des modes et sur le couplage entre les objets à imager et l'exaltateur sont encore à mener pour améliorer le dispositif et obtenir de meilleures distributions de champ pour les IRM 7 Tesla humain.

Nous avons donc vu que pour aller au delà de la limite de diffraction, quel que soit le type d'onde et les domaines d'étude, il est nécessaire de travailler sur les vecteurs d'onde et d'aller chercher l'information sub-longueur d'onde pour la convertir en champ lointain en s'approchant des structures. Les techniques de microscopie champ proche, de super focalisation, de super résolution, les techniques d'imagerie plasmonique multimodale reposent toutes sur ce principe. C'est pourquoi l'essor des matériaux localement résonants qui permet de travailler sur le couplage entre une onde et un ensemble de cellules résonantes ouvre

de belles perspectives. Soit par les propriétés de diversification du vecteur d'onde, soit par la conversion d'ondes évanescentes en ondes propagatives qu'ils procurent, ces milieux permettent une grande souplesse dans l'ingénierie des phénomènes de propagation.

Références

[1] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter et K. M. Leung : Photonic band-structure - the face-centered-cubic case employing nonspherical atoms. *Physical Review Letters*, 67(17):2295–2298, octobre 1991.

[2] T. F. Krauss, R. M. DeLaRue et S. Brand : Two-dimensional photonic-bandgap structures operating at near infrared wavelengths. *Nature*, 383(6602):699–702, octobre 1996.

[3] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski et B. Djafarirouhani : Acoustic band-structure of periodic elastic composites. *Physical Review Letters*, 71(13): 2022–2025, septembre 1993.

[4] M. S. Kushwaha, P. Halevi, G. Martinez, L. Dobrzynski et B. Djafarirouhani : Theory of acoustic band-structure of periodic elastic composites. *Physical Review B*, 49(4):2313–2322, janvier 1994.

[5] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewartt et Youngs : Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Phys Rev Lett*, 76(25):4773–4776, Jun 1996.

[6] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins et W. J. Stewart : Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. 47(11):2075–2084, 1999.

[7] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser et S. Schultz : Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Physical Review Letters*, 84(18):4184–4187, mai 2000.

[8] J. B. Pendry : Negative refraction makes a perfect lens. *Phys Rev Lett*, 85(18):3966–3969, Oct 2000.

[9] L. Oyhenart et V. Vigneras : Study of finite periodic structures using the generalized mie theory. *European Physical Journal-applied Physics*, 39(2):95–100, août 2007.

[10] I. Vendik, M. Odit et D. Kozlov : 3d metamaterial based on a regular array of resonant dielectric inclusions. *Radioengineering*, 18(2):111–116, juin 2009.

[11] F. Zhang, L. Kang, Q. Zhao, J. Zhou et D. Lippens : Magnetic and electric coupling effects of dielectric metamaterial. *New Journal of Physics*, 14:033031, mars 2012.

[12] J.C. Ginn, I. Brener, D.W. Peters, J.R. Wendt, J.O. Stevens, P.F. Hines, L.I. Basilio, L.K. Warne, J.F. Ihlefeld, P.G. Clem et M.B. Sinclair : Realizing optical magnetism from dielectric metamaterials. *Physical Review Letters*, 108(9):097402, février 2012.

[13] M. H. Belyamoun, A. Bossavit et S. Zouhdi : Effective parameters of split-ring arrays, numerically determined by frequency-dependent homogenization. *Metamaterials V*, 7711:SPIE ; BPHOT ; FWO ; ICO, 2010.

[14] I. E. Psarobas : Effective-medium description of dielectric-chiral photonic crystals. *Optics Communications*, 162(1-3):21–25, avril 1999.

[15] D. R. Smith et J. B. Pendry : Homogenization of metamaterials by field averaging (invited paper). *Journal of the Optical Society of America B-optical Physics*, 23(3):391–403, mars 2006.

[16] G. Allaire : Homogenization and 2-scale convergence. *Siam Journal On Mathematical Analysis*, 23(6):1482–1518, novembre 1992.

[17] D. Felbacq et G. Bouchitte : Left-handed media and homogenization of photonic crystals. *Optics Letters*, 30(10):1189–1191, mai 2005.

[18] J. Li, L. Fok, X. Yin, G. Bartal et X. Zhang : Experimental demonstration of an acoustic magnifying hyperlens. *Nature materials*, 8(12):931–934, 2009.

[19] N. Guth, B. Gallas, J. Rivory, J. Grand, A. Ourir, G. Guida, R. Abdeddaim, C. Jouvaud et J. de Rosny : Optical properties of metamaterials : Influence of electric multipoles, magnetoelectric coupling, and spatial dispersion. *Physical Review B*, 85(11):115138, mars 2012.

[20] C.E. Kriegler, M.S. Rill, S. Linden et M. Wegener : Bianisotropic photonic metamaterials. *Ieee Journal of Selected Topics In Quantum Electronics*, 16(2): 367–375, mars 2010.

[21] Z.H. Jiang, S. Yun, D. Ma, P. Gorman, D.H. Werner, Z. Liu et T.S. Mayer : Experimental verification of substrate-induced bianisotropy in optical metamaterials. *2012 Ieee Antennas and Propagation Society International Symposium (apsursi)*, page Inst Electr Electron Engineers ; IEEE Antennas & Propaga Soc, 2012.

[22] P. Weis, O. Paul, C. Imhof, R. Beigang et M. Rahm : Strongly birefringent metamaterials as negative index terahertz wave plates. *Applied Physics Letters*, 95(17):171104, octobre 2009.

[23] O. Reynet et O. Acher : Voltage controlled metamaterial. *Applied Physics Letters*, 84(7):1198–1200, 2004.

[24] A. Degiron, J.J. Mock et D.R. Smith : Modulating and tuning the response of metamaterials at the unit cell level. *Optics Express*, 15(3):1115–1127, février 2007.

[25] I. Gil, J. Bonache, J. Garcia-Garcia et F. Martin : Tunable metamaterial transmission lines based on varactor-loaded split-ring resonators. *Ieee Transactions On Microwave Theory and Techniques*, 54(6):European Microwave Assoc, juin 2006.

[26] R. F. J. Broas, D. E. Sievenpiper et E. Yablonovitch : An application of high-impedance ground planes to phased array antennas. *Ieee Transactions On Antennas and Propagation*, 53(4):1377–1381, avril 2005.

[27] T. Hand et S. Cummer : Controllable magnetic metamaterial using digitally addressable split-ring resonators. *Ieee Antennas and Wireless Propagation Letters*, 8:262–265, 2009.

[28] A. Derode, P. Roux et M. Fink : Robust acoustic time-reversal with high-order multiple-scattering. *Physical Review Letters*, 75(23):4206–4209, décembre 1995.

[29] E. A. Ash et G. Nicholls : Super-resolution aperture scanning microscope. *Nature*, 237(5357):510–&, 1972.

[30] D. W. Pohl, W. Denk et M. Lanz : Optical stethoscopy - image recording with resolution lambda/20. *Applied Physics Letters*, 44(7):651–653, 1984.

[31] R. Möller O. Marti : *Photons and local Probes*. tome E 300 de Nato ASI Series, 1995.

[32] E. Betzig et J. K. Trautman : Near-field optics - microscopy, spectroscopy, and surface modification beyond the diffraction limit. *Science*, 257(5067):189–195, juillet 1992.

[33] A. Sentenac, P. Chaumet et K. Belkebir : Beyond the rayleigh criterion : Grating assisted far-field optical diffraction tomography. *Physical Review Letters*, 97(24):243901, décembre 2006.

[34] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin et M. Fink : Focusing beyond the diffraction limit with far-field time reversal. *Science*, 315(5815):1120–1122, Feb 2007.

[35] S. Zhang, L.i Yin et N. Fang : Design of acoustic metamaterials for super-resolution ultrasound imaging. *Proceedings of the Asme International Mechanical Engineering Congress and Exposition 2007, Vol 10, Pts A and B : Mechanics of Solids and Structures*, page Amer Soc Mech Engineers, 2008.

[36] O. M. Viessmann, R. J. Eckersley, K. Christensen-Jeffries, M. X. Tang et C. Dunsby : Acoustic super-resolution with ultrasound and microbubbles. *Physics in medicine and biology*, 58(18):6447–58, septembre 2013.

[37] F. Lemoult, M. Fink et G. Lerosey : Revisiting the wire medium : an ideal resonant metalens. *Waves in Random and Complex Media*, 21(4):591–613, 2011.

[38] G. V. Tentini : Partially reflecting sheet arrays. *IRE Trans, Antennas and propagation*, 4:666–671, 1956.

[39] S-N. Ourir, A. Burokur, R. Yahiaoui et A. de Lustrac : Directive metamaterial-based subwavelength resonant cavity antennas - applications for beam steering. *Comptes Rendus Physique*, 10(5):414–422, juin 2009.

[40] H. Chen, L. Wu, B.and Ran, T. Grzegorczyk et J. Kong : Controllable left-handed metamaterial and its application to a steerable antenna. *Applied Physics Letters*, 89(5):053509, juillet 2006.

[41] L. Zhou, H. Q. Li, Y. Q. Qin, Z. Y. Wei et C. T. Chan : Directive emissions from subwavelength metamaterial-based cavities. *Applied Physics Letters*, 86(10):101101, mars 2005.

[42] A. Delustrac, T. Brillat, F. Gadot et E. Akmansoy : The use of controllable photonic band gap (cpbg) materials : An antenna application. *Optical and Quantum Electronics*, 34(1-3):265–277, janvier 2002.

[43] B. Temelkuran, M. Bayindir, E. Ozbay, R. Biswas, M. M. Sigalas, G. Tuttle et K. M. Ho : Photonic crystal-based resonant antenna with a very high directivity. *Journal of Applied Physics*, 87(1):603–605, janvier 2000.

[44] R. F. J. Broas, D. F. Sievenpiper et E. Yablonovitch : A high-impedance ground plane applied to a cellphone handset geometry. *Ieee Transactions On Microwave Theory and Techniques*, 49(7):1262–1265, juillet 2001.

[45] I.K. Kim, H. Wang, S.J. Weiss et V.V. Varadan : Embedded wideband metaresonator antenna on a high-impedance ground plane for vehicular applications. *Ieee Transactions On Vehicular Technology*, 61(4):1665–1672, mai 2012.

[46] Y. Pang, H. Cheng, Y. Zhou, Z. Li et J. Wang : Ultrathin and broadband high impedance surface absorbers based on metamaterial substrates. *Optics Express*, 20(11):12515–12520, mai 2012.

[47] R. W. Ziolkowski et A. D. Kipple : Application of double negative materials to increase the power radiated by electrically small antennas. *Ieee Transactions On Antennas and Propagation*, 51(10):2626–2640, octobre 2003.

[48] K. B. Thapa, A. Vishwakarma, R. Singh et S. P. Ojha : Electromagnetic wave propagation through single negative index material. *Journal of Ovonic Research*, 6(3):105–115, mai 2010.

[49] S. Gupta, D.L. Sounas, Hoang V.N., Q. Zhang et C. Caloz : Crlh-crlh c-section dispersive delay structures with enhanced group-delay swing for higher analog signal processing resolution. *Ieee Transactions On Microwave Theory and Techniques*, 60(12):3939–3949, décembre 2012.

[50] C. Y. Cheng et R. W. Ziolkowski : Tailoring double-negative metamaterial responses to achieve anomalous propagation effects along microstrip transmission lines. *Ieee Transactions On Microwave Theory and Techniques*, 51(12):IEEE MTT S, décembre 2003.

[51] J. Lanteri, C. Migliaccio, J. Y. Dauvignac et C. Pichot : Improvement of reflectarray performances at millimeter waves by reduction of the cell size. *PIERS 2006 Cambridge : Progress in Electromagnetics Research Symposium, Proceedings*, 2006.

[52] M. Dubois, M. Farhat, E. Bossy, S. Enoch, S. Guenneau et P. Sebbah : Flat lens for pulse focusing of elastic waves in thin plates. *Applied Physics Letters*, 103(7):071915, 2013.

[53] E. Shamonina, V. A. Kalinin, K. H. Ringhofer et L. Solymar : Magnetoinductive waves in one, two, and three dimensions. *Journal of Applied Physics*, 92(10):6252–6261, novembre 2002.

[54] Y. Xu, Y. Li, R. K. Lee et A. Yariv : Scattering-theory analysis of waveguide-resonator coupling. *Physical Review E*, 62(5):7389–7404, novembre 2000.

[55] R. R. A. Syms, E. Shamonina, V. Kalinin et L. Solymar : A theory of metamaterials based on periodically loaded transmission lines : Interaction bet-

ween magnetoinductive and electromagnetic waves. *Journal of Applied Physics*, 97(6):064909, mars 2005.

[56] O. Sydoruk, O. Zhuromskyy, E. Shamonina et L. Solymar : Phonon-like dispersion curves of magnetoinductive waves. *Applied Physics Letters*, 87(7): 072501, août 2005.

[57] J. de Rosny, G. Lerosey et M. Fink : Theory of electromagnetic time-reversal mirrors. *IEEE Transactions On Antennas and Propagation*, 58(10):3139–3149, octobre 2010.

[58] I. Sersic, M. Frimmer, E. Verhagen et A. F. Koenderink : Electric and magnetic dipole coupling in near-infrared split-ring metamaterial arrays. *Physical Review Letters*, 103(21):213902, novembre 2009.

[59] I. Sersic, C. Tuambilangana, T. Kampfrath et A. F. Koenderink : Magnetoelectric point scattering theory for metamaterial scatterers. *Phys. Rev. B*, 83:245102, Jun 2011.

[60] L. Brillouin : *Wave Propagation In Periodic Structure*. McGraw-Hill, New York, 1946.

[61] E. Shamonina et L. Solymar : Magneto-inductive waves supported by metamaterial elements : components for a one-dimensional waveguide. *Journal of Physics D-applied Physics*, 37(3):Int Phys Dielectr Grp, février 2004.

[62] O. Sydoruk, O. Zhuromskyy, A. Radkovskaya, E. Shamonina et L. Solymar : *Theory and Phenomena of Metamaterials*, chapitre 7, pages 36–1–36–13. Metamaterials handbook. CRC Press/Taylor & Francis, 2009.

[63] H. Liu, D. A. Genov, D. M. Wu, Y. M. Liu, Z. W. Liu, C. Sun, S. N. Zhu et X. Zhang : Magnetic plasmon hybridization and optical activity at optical frequencies in metallic nanostructures. *Phys. Rev. B*, 76:073101, Aug 2007.

[64] Na Liu, Hui Liu, Shining Zhu et Harald Giessen : Stereometamaterials. *Nature Photonics*, 3(3):157–162, mars 2009.

[65] C.A. Balanis : *Antenna theory : analysis and design/Constantine A. Balanis*. J. Wiley, New York, 1982.

[66] S. J. Orfanidis : Electromagnetic waves and antennas. Book, August 2010. Chap. 16, pp. 655 (http ://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/).

[67] F. Lemoult, G. Lerosey, J. de Rosny et M. Fink : Resonant metalenses for breaking the diffraction barrier. *Physical Review Letters*, 104(20):203901, mai 2010.

[68] C. Jouvaud, A. Ourir et J. de Rosny : Surface waves radiation by finite arrays of magnetoelectric resonators. *Progress In Electromagnetics Research-pier*, 132: 177–198, 2012.

[69] N. Bonod, A. Devilez, B. Rolly, S. Bidault et B. Stout : Ultracompact and unidirectional metallic antennas. *Physical Review B*, 82(11):115429, septembre 2010.

[70] M. Kerker, D. S. Wang et C. L. Giles : Electromagnetic scattering by magnetic spheres. *Journal of the Optical Society of America*, 73(6):765–767, 1983.

[71] J. Li, A. Salandrino et N. Engheta : Shaping light beams in the nanometer scale : A yagi-uda nanoantenna in the optical domain. *Physical Review B*, 76(24): 245403, décembre 2007.

[72] B. Rolly, B. Stout, S. Bidault et N. Bonod : Crucial role of the emitter-particle distance on the directivity of optical antennas. *Optics Letters*, 36(17):3368–3370, septembre 2011.

[73] B. Rolly, B. Stout et N. Bonod : Boosting the directivity of optical antennas with magnetic and electric dipolar resonant particles. *Optics Express*, 20(18): 20376–20386, août 2012.

[74] A. Andryieuski, R. Malureanu et A.V. Lavrinenko : Wave propagation retrieval method for chiral metamaterials. *Optics Express*, 18(15):15498–15503, juillet 2010.

[75] A. Ourir, G. Lerosey, Fabrice L., M. Fink et J. de Rosny : Far field subwavelength imaging of magnetic patterns. *Applied Physics Letters*, 101(11):111102, septembre 2012.

[76] S. Shahbazpanahi, S. Valaee et M. H. Bastani : Distributed source localization using esprit algorithm. *Ieee Transactions On Signal Processing*, 49(10):2169–2178, octobre 2001.

[77] X. S. Guo, Q. Wan, B. Wu et W. L. Yang : Parameters localisation of coherently distributed sources based on sparse signal representation. *Iet Radar Sonar and Navigation*, 1(4):261–265, août 2007.

[78] A. Paulraj, R. Roy et T. Kailath : Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques- esprit. *Circuits, Systems and Computers, 1985. Nineteeth Asilomar Conference on*, pages 83–89, 1985.

[79] R. Badeau, G. Richard et B. David : Fast adaptive esprit algorithm. *2005 IEEE/SP 13th Workshop on Statistical Signal Processing (SSP), Vols 1 and 2*, page IEEE, 2005.

[80] M.G. Christensen, A. Jakobsson et S.H. Jensen : Sinusoidal order estimation using the subspace orthogonality and shift-invariance properties. *Conference Record of the Forty-first Asilomar Conference On Signals, Systems & Computers, Vols 1-5*, page Naval Postgrad Sch ; ATK Miss Res ; IEEE Signal Proc Soc, 2007.

[81] P. Stephanut : *Application des algorithmes de haute résolution à la localisation de mobiles en milieu confiné.* Thèse de doctorat, Lille1, 2010.

[82] S. G. Mallat et Z. F. Zhang : Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *Ieee Transactions On Signal Processing*, 41(12):3397–3415, décembre 1993.

[83] J. Tropp et A. Gilbert : Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *Ieee Transactions On Information Theory*, 53(12):4655–4666, décembre 2007.

[84] T. Tony Cai et Lie Wang : Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise. *Ieee Transactions On Information Theory*, 57(7):4680–4688, juillet 2011.

[85] J. B. Pendry : Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, 85(18):3966–3969, octobre 2000.

[86] Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong, C. Sun et X. Zhang : Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects. *Science*, 315(5819):1686–1686, 2007.

[87] P. Salonen, M. Keskilammi et M. Kivikoski : New slot configurations for dual-band planar inverted-f antenna. *Microwave and Optical Technology Letters*, 28(5):293–298, 2005.

[88] Y. J. Wang, C. K. Lee, W. J. Koh et Y. B. Gan : Design of small and broadband internal antennas for imt-2000 mobile handsets. *Ieee Transactions On Microwave Theory and Techniques*, 49(8):IEEE Microwave Theory & Tech Soc ; IEEE Denver Sect ; IEEE Pikes PeakEOLEOLSect ; Natl Inst Stand & Technol ; Inst Telecommun Sci ; Appl Microwave &EOLEOLWireless ; RCR Wireless, août 2001.

[89] K. Alici et E. Ozbay : Electrically small split ring resonator antennas. *Journal of Applied Physics*, 101(8):083104, avril 2007.

[90] D. . O. Kim, N. . I. Jo, H. . A. Jang et C. . Y. Kim : Design of the ultrawideband antenna with a quadruple-band rejection characteristics using a combination of the complementary split ring resonators. *Progress In Electromagnetics Research-pier*, 112:93–107, 2011.

[91] X. Cheng, D.E. Senior, J. J. Whalen et Y. Yoon : Electrically small tunable split ring resonator antenna. *2010 Ieee Antennas and Propagation Society International Symposium*, page IEEE ; URSI, 2010.

[92] A. R. Katko, S. Gu, J.P. Barrett, B. Popa, G. Shvets et S.A. Cummer : Phase conjugation and negative refraction using nonlinear active metamaterials. *Physical Review Letters*, 105(12):123905, septembre 2010.

[93] E. M. Purcell : Spontaneous emission probabilities at radio frequencies. *In Proceedings of the American Physical Society*, volume 69, pages 674–674. American Physical Society, April 1946.

[94] C. Jouvaud, J. de Rosny et A. Ourir : Adaptive metamaterial antenna using coupled tunable split-ring resonators. *Electronics Letters*, 49(8), avril 2013.

[95] E. R. Mcveigh, M. J. Bronskill et R. M. Henkelman : Phase and sensitivity of receiver coils in magnetic-resonance-imaging. *Medical Physics*, 13(6):806–814, novembre 1986.

[96] P. Styles, M. B. Smith, R. W. Briggs et G. K. Radda : A concentric surface-coil probe for the production of homogeneous-b1 fields. *Journal of Magnetic Resonance*, 62(3):397–405, 1985.

[97] S. E. Solis, R. Wang, D. Tomasi et A. O. Rodriguez : A multi-slot surface coil for mri of dual-rat imaging at 4 t. *Physics In Medicine and Biology*, 56(12):3551–3561, juin 2011.

[98] J. H. Battocletti, R. E. Halbach, A. Sances, S. J. Larson, R. L. Bowman et V. Kudravcev : Flat crossed-coil detector for blood-flow measurement using nuclear magnetic-resonance. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 17(2):183–191, 1979.

[99] C. E. Hayes : An efficient, highly homogeneous radiofreqradio coil for whole-body nmr imaging at 1.5t. *Journal of magnetic resonance*, 63:622–628, 1985.

[100] N. Avdievich et H. Hetherington : High-field head radiofrequency volume coils using transverse electromagnetic (tem) and phased array technologies. *Nmr In Biomedicine*, 22(9):960–974, novembre 2009.

[101] N.I. Avdievich, H.P. Hetherington, A.M. Kuznetsov et J.W. Pan : 7t head volume coils : Improvements for rostral brain imaging. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 29(2):461–465, février 2009.

[102] C. E. Hayes : The development of the birdcage resonator : a historical persperctive. *Wiley InterScienceNMR Biomed*, 22:908–918, 2009.

[103] M. J. Freire, L. Jelinek, R. Marques et M. Lapine : On the applications of mu(r) =-1 metamaterial lenses for magnetic resonance imaging. *Journal of Magnetic Resonance*, 203(1):81–90, mars 2010.

[104] M. A. Cloos, N. Boulant, M. Luong, G. Ferrand, E. Giacomini, M. . F. Hang, C. J. Wiggins, D. Le Bihan et A. Amadon : Parallel-transmission-enabled magnetization-prepared rapid gradient-echo t1-weighted imaging of the human brain at 7 t. *Neuroimage*, 62(3):2140–2150, septembre 2012.

[105] M. S. Khennouche, F. Gadot, B. Belier et A. de Lustrac : Different configurations of metamaterials coupled with an rf coil for mri applications. *Applied Physics A-materials Science & Processing*, 109(4):1059–1063, décembre 2012.

[106] A. Christ, Y. Ekinci, H. H. Solak, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev et O. J. F. Martin : Controlling the fano interference in a plasmonic lattice. *Physical Review B*, 76(20):201405, novembre 2007.

[107] A. Christ, O. J. F. Martin, Y. Ekinci, N.A. Gippius et S.G. Tikhodeev : Symmetry breaking in a plasmonic metamaterial at optical wavelength. *Nano Letters*, 8(8):2171–2175, août 2008.

[108] R. Abdeddaim, A. Ourir et J. de Rosny : Realizing a negative index metamaterial by controlling hybridization of trapped modes. *Physical Review B*, 83(3):033101, janvier 2011.

[109] N. V. Reo, C. S. Ewy, B. A. Siegfried et J. J. H. AckermanN : High-field c-13 nmr-spectroscopy of tissue invivo - a double-resonance surface-coil probe. *Journal of Magnetic Resonance*, 58(1):76–84, 1984.

[110] O. A. C. Petroff, J. W. Prichard, T. Ogino, M. Avison, J. R. Alger et R. G. Shulman : Combined h-1 and p-31 nuclear-magnetic-resonance spectroscopic studies of bicuculline-induced seizures invivo. *Annals of Neurology*, 20(2):185–193, août 1986.