THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS - DIDEROT - PARIS 7

Spécialité

Acoustique Physique

(ED 518 - Matière Condensée et Interfaces)

Préparée à l'Institut Langevin - Ondes et Images

Présentée par

Nicolas VIARD

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS - DIDEROT

Contribution expérimentale à l'étude de la diffusion multiple des ultrasons en régimes de propagation linéaire et non linéaire

---

Soutenue le 5 février 2014

devant le jury composé de :

M.	CONOIR	Jean-Marc	Rapporteur
M.	TOURNAT	Vincent	Rapporteur
M.	BOU MATAR	Olivier	Examinateur
M.	GRIMAL	Quentin	Examinateur
M.	BARRIÈRE	Christophe	Directeur de thèse
M.	DERODE	Arnaud	Co-Directeur de thèse

Remerciements

Pour la direction et l'encadrement de cette thèse, je tiens à remercier Christophe Barrière et Arnaud Derode. J'ai retrouvé chez eux, dans leur encadrement, des qualités que j'avais déjà pu apprécier pendant les cours qu'ils dispensent à l'université : rigueur, soin et précision dans les discussions scientifiques, explications claires, et honnêteté intellectuelle. Outre ces qualités, j'ai apprécié qu'ils soient exigeants à mon égard. Je me souviendrai des campagnes expérimentales menées au début de ma thèse avec Arnaud, et je retiendrai son enthousiasme contagieux lors des discussions et des réunions partagées, un enthousiasme qui force à progresser et qui donne le plaisir de travailler. Ses encouragements répétés m'ont donné confiance et m'ont permis d'achever ce travail. En plus de ses grandes qualités scientifiques, j'ai particulièrement apprécié, chez Christophe, sa capacité à démêler et clarifier les raisonnements sur lesquels je butais. Cette qualité a beaucoup bénéficié à l'écriture de ce manuscrit, notamment.

Je les remercie aussi pour m'avoir accordé leur confiance et donné l'opportunité de m'exprimer dans des conférences.

Jean-Marc Conoir et Vincent Tournat ont accepté de rapporter ce travail de thèse. Qu'ils en soient chaleureusement remerciés. Je remercie également Olivier Bou Matar, président du jury, et Quentin Grimal d'avoir bien voulu endosser le rôle de membres du jury.

C'est avec Bruno Giammarinaro, alors en stage de Master, que nous avons monté l'expérience de transmission cohérente en régime non linéaire et c'est avec lui que les premiers résultats ont été obtenus. Je le remercie et lui souhaite bonne chance pour la fin de sa thèse.

J'ai apprécié de travailler avec Valentin Leroy, grâce à qui les expériences dans les milieux bulleux ont pu être réalisées. Sa passion pour les bulles, son enthousiasme, sa curiosité n'excluaient aucune démarche ni aucun résultat, ce qui a facilité le travail prospectif que nous avons mené. Bonne chance au nouveau thésard, Olivier Lombard.

On arrive généralement dans son atelier avec quelques idées en tête –au mieux, un schéma griffonné–, et l'on en ressort avec une dessin technique et la promesse d'obtenir la pièce d'ici quelques jours. C'est le travail d'Abdelhak Souilah, que je remercie pour son

efficacité et sa bonne humeur constante.

Je remercie également Gianmarco Pinton pour m'avoir autorisé à utiliser son code de simulation numérique et pour le temps qu'il m'a consacré.

J'ai partagé mes années de thèse entre deux bureaux. D'abord dans le vieux bâtiment P de l'ESPCI, en compagnie de Clément, Youliana, Bastien, Nicolas Etaix, Alice et Camille. Puis, rue Jussieu, avec Fabien, Amir, Yann, Anne, Emilie, Baptiste, Sylvain et Camille de nouveau. Mention spéciale à cette dernière qui est arrivée après moi mais qui s'est débrouillée pour finir avant moi. Chacun, à sa façon, a contribué à rendre cette aventure des plus agréables. J'ai tant aimé travailler en votre compagnie, que j'ai dû me forcer à déménager pour mieux me concentrer sur la préparation de mon oral.

Nous n'avons pas partagé de bureau, mais c'est probablement avec Bruno Osmanski, camarade de Master puis de thèse, que j'ai bu le plus de bières. En général, on rigolait bien... jusqu'à ce qu'il me perde dans une démonstration de traitement de signal.

Un grand merci à Christelle, Lorraine et Patricia pour le travail qu'elles font au laboratoire, leur participation à son animation. Elles en font un univers si chaleureux. Je remercie par la même occasion Stéphanie, partie du laboratoire à la fin de ma première année de thèse.

Merci aux inconditionnels du QPUC, compagnons de soirées, de week-end ou de Haxball, partenaires de tennis ou de course à pieds, qui ont fait du labo plus qu'un simple lieu de travail.

Une pensée pour mes amis extérieurs au laboratoire, soutien, exutoire et échappatoire de la thèse. Je les remercie pour s'être régulièrement souciés de l'avancée de mes travaux, malgré des réponses pas toujours très intelligibles.

Enfin, je remercie ma famille, au premier rang desquels, mes parents et mon frère qui m'ont soutenu tout au long de ma thèse. Je suis très reconnaissant envers mes parents qui m'ont laissé prendre la voie qui est la mienne tout en m'encourageant continûment. Cette voie, je dois dire que je l'ai prise un peu sous l'influence de mon grand père.

J'ai partagé le quotidien intime de cette thèse avec Véronique. Je la remercie pour son soutien indéfectible...

Résumé

Ces travaux de thèse expérimentaux portent sur la propagation linéaire et non linéaire d'ultrasons en milieux aléatoires fortement hétérogènes.

En régime non linéaire, nous étudions la transmission cohérente d'une onde de choc à travers deux milieux aléatoires hétérogènes modèles : une forêt de tiges métalliques immergées dans l'eau, et un gel bulleux. L'expérience montre que les effets de la non linéarité et de la diffusion multiple y sont découplés. Nous exploitons alors l'étendue spectrale de l'onde de choc incidente, pour mesurer l'atténuation et la vitesse de groupe de l'onde cohérente, sur un large intervalle de fréquences. En comparant nos mesures à une théorie linéaire de la diffusion, incluant des corrélations de paires entre centres diffuseurs, nous étendons son domaine de validité, et nous montrons par la même qu'une onde de choc constitue un bon outil de spectroscopie des milieux fortement hétérogènes. À l'aide du même dispositif expérimental, nous observons pour la première fois une coda ultrasonore transmise par un milieu bulleux.

Dans un régime de propagation linéaire, nous exploitons la coda engendrée par la diffusion multiple pour mesurer les paramètres de transport des forêts de tiges métalliques immergées. Nous présentons des mesures impulsionnelles et résolues en fréquence de la constante de diffusion des ultrasons dans ces milieux. Ces dernières montrent tout l'intérêt d'étudier la coda, qui fournit des mesures mieux résolues que l'onde cohérente. Enfin, nous présentons les premières mesures résolues en fréquence de la vitesse de transport pour ces milieux modèles. Avec ces mesures, nous disposons maintenant d'un milieu hétérogène synthétique parfaitement caractérisé en régime linéaire.

Mots clés : ultrasons, diffusion multiple, propagation non linéaire, milieu effectif, milieu aléatoire, onde de choc, approximation de la diffusion, milieu hétérogène.

Abstract

THIS experimental thesis work focuses on the linear and nonlinear propagation of ultrasounds in highly heterogeneous random media.

In the nonlinear regime, we investigate the coherent transmission of a shock wave through two models of heterogeneous random media : a forest of metal rods immersed in water, and a bubbly gel. The experiment shows that the effects of the nonlinearity and of the multiple scattering are decoupled. We then take advantage of the large spectrum of the incident shock wave to measure the attenuation and the group velocity of the coherent wave in the medium, on a very large frequency band. By comparing our measurements to a linear theory including second order spatial correlations between scatterers, we extend its range of validity, and we show that a shock wave is a promising tool for spectroscopy of highly heterogeneous medium. Using the same experimental setup, we report the first measurement of an ultrasonic coda transmitted by a bubbly medium.

In the linear propagation regime, we use the coda generated by the multiple scattering to measure the transport parameters in the forests of metal rods immersed. We present both broadband and frequency-resolved measurements of the diffusion constant of ultrasounds in these media. These latters show the interest to study the coda, which provides better frequency-resolved measurements than the coherent wave. Finally, we present the first frequency-resolved measurements of the velocity of transport for these model media. With these measurements, we now have a fully characterized synthetic heterogeneous medium.

Keywords : ultrasounds, multiple scattering, nonlinear propagation, effective medium, random medium, shock wave, diffusion approximation, heterogeneous medium.

Table des matières

Introduction **ix**

1 Diffusion multiple et non linéarité : état de l'art **1**
1.1 Introduction à la théorie de la diffusion multiple en régime linéaire 2
1.1.1 Fonction de Green de la propagation en milieu homogène non dissipatif 2
1.1.2 Propagation linéaire en milieu hétérogène non dissipatif 4
1.1.3 Intensités cohérente et incohérente 7
1.2 Propagation non linéaire en milieu homogène 9
1.2.1 Équations constitutives à l'ordre 2 9
1.2.2 Équation de propagation non linéaire dans un fluide thermo-visqueux 11
1.2.3 Propagation non linéaire d'une onde plane 13
1.3 Propagation non linéaire en milieu hétérogène 18
1.3.1 Cas des milieux faiblement hétérogènes 19
1.3.2 Propagation non linéaire dans les milieux granulaires 21
1.3.3 Un autre système physique faisant référence à la propagation non linéaire en milieu hétérogène 23
1.3.4 Objectifs de la thèse 24

2 Transmission cohérente d'une onde de choc à travers un milieu multiplement diffuseur **27**
2.1 Une configuration expérimentale originale 28
2.1.1 Longueurs caractéristiques 29
2.1.2 Expériences préliminaires 33
2.2 Transmission en régime non linéaire 36
2.2.1 Dispositif expérimental 36
2.2.2 Étude de la transmission balistique 38
2.3 Étude de la transmission cohérente 41
2.3.1 Fonction de Green du champ moyen 41
2.3.2 Calcul de l'opérateur de masse 43
2.3.3 Retour à l'expérience 44
2.3.4 Évaluation d'un libre parcours moyen résolu en fréquence 49
2.3.5 Éstimation de la vitesse de groupe 53
2.3.6 Non linéarité et diffusion multiple 54
2.4 Transmission cohérente à travers des milieux de bulles 57
2.4.1 Comportement d'une bulle 57
2.4.2 Conception des échantillons 58

2.4.3 Mesure de la transmission à hautes fréquences 61
2.5 Conclusion 63

3 Étude de l'intensité incohérente en régime linéaire 65
3.1 De l'équation du transfert radiatif à l'équation de la diffusion. 67
3.1.1 L'équation du transfert radiatif 67
3.1.2 Courant moyen de particule et densité locale d'énergie 67
3.1.3 Approximation pré-isotrope 68
3.1.4 Équation de la diffusion 69
3.1.5 Terme source et conditions aux limites 69
3.2 Méthode expérimentale 71
3.2.1 Principe de l'expérience et montage idéal 71
3.2.2 Sources et récepteurs équivalents 72
3.2.3 Choix des transducteurs 74
3.2.4 Choix des échantillons multiplement diffuseurs 76
3.2.5 Profil des sources et récepteurs équivalents 77
3.2.6 Nombre de sources et récepteurs 78
3.2.7 Calcul de l'intensité et moyenne sur le désordre 79
3.3 Résultats 81
3.3.1 Extension latérale du halo de diffusion en régime impulsionnel . . . 81
3.3.2 Évaluation de la constante de diffusion en régime impulsionnel . . . 84
3.3.3 Évolution temporelle du spectre 86
3.3.4 Évaluation de la constante de diffusion en régime quasi-harmonique 88
3.3.5 Vers une mesure de la vitesse d'énergie 89
3.4 Conclusion 91

Conclusion et Perspectives 93

A Propagation non linéaire d'une onde divergente cylindrique 97
A.1 Équation de propagation non linéaire en coordonnées cylindriques 97
A.2 Distance de formation du choc d'une source cylindrique infinie divergente . 99

Introduction

Les équations de l'acoustique sont fondamentalement non linéaires. Lorsqu'une onde acoustique porte une perturbation d'amplitude "finie", la non linéarité, qui est modélisée par les termes non linéaires de l'équation d'Euler, de l'équation de continuité et de l'équation d'état, s'exprime par une distorsion progressive de la forme d'onde, et l'apparition dans le domaine de Fourier de fréquences harmoniques. La distorsion de l'onde est un phénomène cumulatif dont la manifestation est d'autant plus rapide que l'amplitude de la perturbation est élevée. Dans certains cas, l'onde va jusqu'à former un choc, soit une discontinuité de pression acoustique.

La non linéarité en acoustique n'est pas une simple curiosité intellectuelle, puisqu'elle permet d'expliquer, par exemple, la formation du bang sonique, ou bien de former des images de meilleure qualité en échographie médicale. Dans les applications de thérapie médicale, le besoin de concentrer de fortes énergies en une région nécessite le recours à un modèle de propagation non linéaire. En acoustique sous marine, elle est à l'origine des sonars à émission paramétrique, qui engendrent des faisceaux très directifs en regard de leurs fréquences. La plupart de ces applications concerne des milieux quasi-homogènes ou faiblement hétérogènes, où en particulier la diffusion multiple peut être négligée devant la diffusion simple.

L'étude de la propagation linéaire, dans les milieux fortement hétérogènes, constitue un champ généralement bien distinct. Elle concerne des domaines très variés comme l'optique, la sismologie, le transport des électrons dans des conducteurs désordonnés ou bien sûr l'acoustique. En acoustique, il a par exemple été montré que la focalisation à travers un milieu hétérogène aléatoire peut être de meilleure qualité que celle obtenue en milieu homogène. Les milieux fortement hétérogènes aléatoires sont des milieux dans lesquels les techniques classiques d'imagerie échouent. On cherche alors plutôt à les caractériser par des paramètres statistiques, tels qu'une distance moyenne entre deux événements de diffusion, ou encore par une constante de diffusion, qui gouverne la propagation de l'onde.

La diffusion multiple et la non linéarité n'ont, en acoustique, pas souvent été étudiées ensemble. On relèvera pourtant le paradoxe suivant : d'un côté, la diffusion multiple rallonge les chemins parcourus par l'onde, ce qui est bénéfique aux effets non linéaires cumulatifs, de l'autre, la diffusion multiple disperse l'énergie dans le milieu, ce qui leur nuit. Déterminer lequel de ces deux effets peut dominer le régime de propagation, dans une situation physique donnée, n'est pas trivial.

Ce travail de thèse réunit les deux domaines dans une démarche expérimentale et prospective. Le manuscrit se divise en trois parties. Au premier chapitre, nous introduirons les concepts fondamentaux qui permettent la description de la propagation non linéaire en milieu homogène et celle, linéaire, en milieu fortement hétérogène. La propagation en régime non linéaire dans les milieux hétérogènes sera abordée via une étude bibliographique. Les objectifs et les spécificités de cette thèse seront alors présentés.

Dans un milieu fortement hétérogène qui n'est pas trop épais devant sa longueur caractéristique de diffusion, une partie mesurable de l'onde transmise conserve sa cohérence spatiale et temporelle, d'où l'approche "onde cohérente". Nous l'étudierons au chapitre 2 en régime de propagation non linéaire. Nous nous intéresserons notamment à la transmission cohérente d'une onde de choc, autrement dit d'une onde très non linéaire, à travers deux milieux hétérogènes aléatoires synthétiques "discrets". Nous y mesurerons son atténuation et sa vitesse de groupe.

Dans le troisième chapitre, nous reviendrons à un régime de propagation linéaire. Dans un milieu hétérogène plus dense ou plus épais que ceux considérés au chapitre 2, nous estimerons la constante de diffusion des ultrasons, en nous intéressant à la partie incohérente de l'onde transmise. Nous présenterons des mesures impulsionnelles, ainsi que des mesures résolues en fréquence de la constante de diffusion. L'idée est de caractériser le mieux possible la transmission incohérente de l'échantillon en régime linéaire, pour pouvoir plus tard l'étudier en régime non linéaire.

CHAPITRE 1

Diffusion multiple et non linéarité : état de l'art

DANS ce chapitre, nous introduisons les notions élémentaires nécessaires à la description de la propagation ultrasonore en régimes linéaire et non linéaire en milieu hétérogène. Ces concepts seront introduits par étapes, de la propagation linéaire en milieu homogène, à la propagation non linéaire en milieu hétérogène.

Rappeler quelques éléments de propagation linéaire en milieu homogène présente l'intérêt d'introduire le formalisme de Green. La propagation linéaire en milieu hétérogène, puis la propagation non linéaire en milieu homogène sont alors décrites.

La propagation non linéaire en milieu hétérogène est souvent abordée par le biais de cas limites. On sait par exemple décrire la propagation non linéaire d'un faisceau acoustique confiné, en milieu faiblement hétérogène où la rétro-diffusion (diffusion forte) peut être négligée. Les études expérimentales et numériques existant dans ce domaine seront discutées, et leurs principales conclusions dégagées. Nous présenterons enfin les objectifs de cette thèse.

1.1 Introduction à la théorie de la diffusion multiple en régime linéaire

Si p_0, ρ_0, et $\vec{v}$ sont les valeurs à l'équilibre de la pression, de la masse volumique et de la vitesse d'écoulement d'un fluide homogène, alors on exprime la propagation d'une onde acoustique dans ce milieu en terme des écarts, par rapport à cet état d'équilibre, des trois grandeurs physiques pression, masse volumique et vitesse particulaire. On note ces derniers p_a, ρ_a et $\vec{v}_a$. En régime linéaire comme en régime non linéaire, la perturbation acoustique engendre des variations qui sont particulièrement faibles devant les valeurs à l'équilibre. Ainsi, il est d'usage d'écrire $p_a = \epsilon p_0$, $\rho_a = \epsilon \rho_0$ et $v_a = \epsilon c_0$, où c_0 est la vitesse de propagation de la perturbation acoustique, et $\epsilon << 1$ est le nombre de Mach acoustique. Nous reviendrons sur ce nombre quand il sera question de propagation non linéaire. En régime linéaire, seuls les termes d'ordre $O(\epsilon)$ sont conservés.

1.1.1 Fonction de Green de la propagation en milieu homogène non dissipatif

Les briques élémentaires avec lesquelles se construit l'équation d'onde sont, l'équation d'Euler, l'équation de continuité, ainsi qu'une équation d'état reliant la pression à la masse volumique. En retenant uniquement les termes d'ordre $O(\epsilon)$, il vient, en régime linéaire,

pour un fluide homogène non dissipatif :

$$\Delta \mathbf{\Phi} - \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.1}$$

$\mathbf{\Phi}(\vec{r}, t)$ est une fonction qui décrit une quantité physique attachée à l'onde, qui se propage à la vitesse c_0. Elle dépend de la position $\vec{r}$ et du temps t. La fonction $\mathbf{\Phi}$ peut représenter un vecteur tel que la vitesse particulaire ou le déplacement, ou un scalaire, tel que la pression ou le potentiel acoustiques. Le principe de superposition s'applique en régime linéaire : si deux fonctions sont solutions de l'équation d'onde pour deux conditions initiales différentes, alors, toute combinaison linéaire de ces deux fonctions est solution pour la même combinaison linéaire des conditions initiales. Ainsi, une source dont les extensions spatiale et temporelle sont quelconques, se décompose en une infinité de sources ponctuelles et impulsionnelles, avec des positions, des "temps d'allumage" et des amplitudes différents. En un point de l'espace, le champ est obtenu en sommant les contributions de chacune des sources ponctuelles.

La solution d'une équation linéaire pour une source impulsionnelle est appelée fonction de Green de cette équation. Au membre de droite de l'équation d'onde (1.1), on rajoute le terme source $s(\vec{r}_0, t_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\delta(t - t_0)$. Celui-ci représente une source ponctuelle située au point $\vec{r}_0$, émettant un signal infiniment bref au temps t_0. On note G_0 la fonction de Green de l'équation d'onde. Son expression est [1] :

$$G_0(\vec{r}, t) = -\frac{\delta(t - t_0 - |\vec{r} - \vec{r}_0|/c_0)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{1.2}$$

On retrouve dans l'expression de G_0, la vitesse de propagation de l'onde, dont l'expression est $c_0 = 1/\sqrt{\rho_0 \chi_0}$, où ρ_0 est la masse volumique du fluide au repos et $\chi_0 = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P}$ est sa compressibilité. Dans un milieu homogène et immobile sans onde, ρ_0 et χ_0 ne dépendent ni de la position [1], ni du temps. Du fait de la conservation de l'énergie, l'amplitude de l'onde est inversement proportionnelle à la distance à la source. En effet, l'onde s'étale sur une sphère dont le rayon croît au fur et à mesure de la propagation. On parle à ce propos d'atténuation "géométrique".

Les ondes sinusoïdales planes sont fonctions propres de l'opérateur d'Alembertien : $\Box = \Delta - \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Elles forment donc une base sur laquelle il est commode de décomposer un champ quelconque vérifiant l'équation d'onde. En régime monochromatique, la fonction d'onde s'écrit $\phi = \psi(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$. En introduisant cette expression dans l'équation d'onde, on obtient l'équation de Helmholtz :

$$\Delta\psi(\vec{r}) + k_0^2 \psi(\vec{r}) = 0, \tag{1.3}$$

où ${k_0}^2 = {\omega_0}^2/{c_0}^2$ est le carré du nombre d'onde. La solution de l'équation de Helmholtz pour une source impulsionnelle (équation de Green) est la fonction de Green monochro-

1. En négligeant la gravité.

matique $G_0(\vec{r}, \omega)$, dont l'expression est :

$$G_0(\vec{r}, \omega) = -\frac{e^{jk_0|\vec{r}-\vec{r}_s|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_s|}. \tag{1.4}$$

La fonction de Green en variables $(\vec{k}, \omega)$ est obtenue par une transformée de Fourier à trois dimensions sur $\vec{r}$ de la fonction de Green en variables $(\vec{r}, \omega)$:

$$G_0(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{k^2 - k_0^2}. \tag{1.5}$$

1.1.2 Propagation linéaire en milieu hétérogène non dissipatif

Nous considérons dans cette section le cas d'un milieu hétérogène, statique et non dissipatif. Les hétérogénéités proviennent des variations spatiales de la masse volumique $\rho_0(\vec{r})$ et de la compressibilité $\chi_0(\vec{r})$. Celles-ci entraînent des variations spatiales de la vitesse du son $c(\vec{r})$. À l'ordre $O(\epsilon)$, les équations d'Euler, de continuité et d'état s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p_a, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \mathrm{div}\vec{v}_a = 0, \tag{1.7}$$

$$p_a = -\frac{1}{\chi_0}\mathrm{div}\vec{u}_a. \tag{1.8}$$

$\vec{u}_a$ est le déplacement des particules de fluide. En dérivant deux fois l'équation d'état (1.8) par rapport au temps, il vient :

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_0}\mathrm{div}\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t}.$$

Cette équation est réécrite à l'aide de l'équation d'Euler (1.6), pour exprimer la dérivée temporelle de la vitesse particulaire en fonction du gradient de la pression. Il vient :

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_0}\mathrm{div}\left(-\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p_a\right).$$

En développant le terme de divergence, et en écrivant $c(\vec{r}) = 1/\sqrt{\rho_0(\vec{r})\chi_0(\vec{r})}$, on obtient l'équation de propagation linéaire, en milieu hétérogène, pour la surpression acoustique p_a :

$$\Delta p_a - \frac{1}{c^2(\vec{r})}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\rho_0.\vec{\nabla} p_a. \tag{1.9}$$

En régime monochromatique, on a $p_a(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r})e^{-i\omega t}$, et l'équation d'onde devient l'équation de Helmholtz "inhomogène" :

$$\Delta\Psi(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2(\vec{r})}\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\rho_0.\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}). \tag{1.10}$$

L'équation est réécrite de sorte que son membre de gauche soit identique au membre de gauche de l'équation de Helmholtz en milieu homogène, en introduisant une vitesse de référence c_{ref} telle que $c(\vec{r}) = c_{ref} + \delta c(\vec{r})$, et le nombre d'onde k_{ref} lui correspondant. On obtient ainsi l'équation :

$$\Delta\Psi(\vec{r}) + k_{ref}^2\Psi(\vec{r}) = k_{ref}^2\mu(\vec{r})\Psi(\vec{r}), \tag{1.11}$$

où μ désigne un opérateur sans dimension caractérisant l'hétérogénéité du milieu. L'équation de Helmholtz homogène est retrouvée pour $\mu = 0$. Son expression est donnée par :

$$\mu(\vec{r}) = \left(1 - \frac{c_{ref}^2}{c^2(\vec{r})}\right) + \frac{1}{k_{ref}^2\rho_0}\vec{\nabla}(\rho_0).\vec{\nabla}. \tag{1.12}$$

Le choix de c_{ref} est crucial et doit être fait en connaissance de l'hétérogénéité du milieu. Pour un milieu hétérogène décrit par une fonction $\mu(\vec{r})$ continue, prendre c_{ref} égale à la vitesse moyenne du milieu peut s'avérer commode. Pour un milieu hétérogène dilué, avec des hétérogénéités discrètes, on préférera choisir $c_{ref} = c_0$, la vitesse du fluide environnant. Dans ce cas, on aura $k_{ref} = k_0$.

Dans les configurations expérimentales majoritairement étudiées aux chapitres deux et trois, des diffuseurs solides sont entourés d'un milieu fluide et les variations de masse volumique sont inférieures à celles de la compressibilité. Le second terme du potentiel, qui ne dépend que des variations de masse volumique, est alors négligé. Au demeurant, le premier terme qui dépend de $c(\vec{r})$, dépend tout de même à la fois de $\chi_0(\vec{r})$ et de $\rho_0(\vec{r})$.

Pour l'équation de Helmholtz "inhomogène", l'équation de Green équivalente est donnée par :

$$\Delta G + k_{ref}^2 G = k_{ref}^2\mu(\vec{r})G + \delta(\vec{r} - \vec{r}_s), \tag{1.13}$$

dont la solution est [2] :

$$G(\vec{r};\vec{r}_s) = G_0(\vec{r};\vec{r}_s) + k_{ref}^2\int G_0(\vec{r};\vec{r}_1)\mu(\vec{r}_1)G(\vec{r}_1;\vec{r}_s)d^3r_1. \tag{1.14}$$

La solution s'exprime donc sous une forme implicite, c'est-à-dire que son expression dépend d'elle-même. Elle peut être développée de façon récursive en une somme infinie d'intégrales, en remplaçant, dans le second membre de l'équation (1.14), successivement la fonction $G(\vec{r};\vec{r}_s)$ par son expression. L'expression (1.15) est la solution de l'équation (1.13) après avoir opéré les deux premières substitutions :

$$\begin{aligned} G(\vec{r};\vec{r}_s) = {} & G_0(\vec{r};\vec{r}_s) + \\ & + k_{ref}^2\int G_0(\vec{r};\vec{r}_1)\mu(\vec{r}_1)G_0(\vec{r}_1;\vec{r}_s)d^3r_1 + \\ & + k_{ref}^4\int G_0(\vec{r};\vec{r}_1)\mu(\vec{r}_1)G_0(\vec{r}_1;\vec{r}_2)\mu(\vec{r}_2)G_0(\vec{r}_2;\vec{r}_s)d^3r_2d^3r_1 + \\ & + k_{ref}^6\int G_0(\vec{r};\vec{r}_1)\mu(\vec{r}_1)G_0(\vec{r}_1;\vec{r}_2)\mu(\vec{r}_2)G_0(\vec{r}_2;\vec{r}_3)\mu(\vec{r}_3)G(\vec{r}_3;\vec{r}_s)d^3r_3d^3r_2d^3r_1. \end{aligned} \tag{1.15}$$

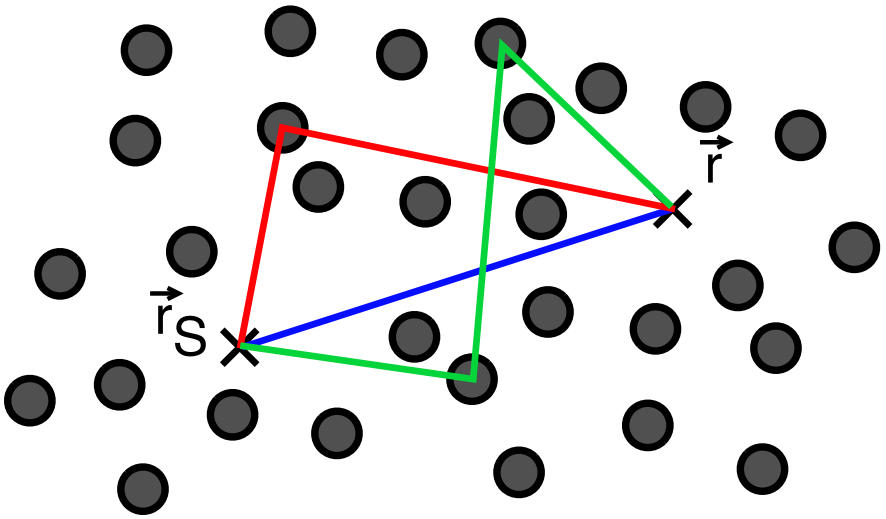


Figure 1.1 – Représentation schématique du chemin direct (bleu) et de contributions de diffusion simple (rouge) et de diffusion double (vert) entre une source $\vec{r}_s$ et un récepteur $\vec{r}$, ponctuels, enfouis au sein d'un milieu hétérogène. Notons que deux chemins qui se croisent n'interagissent pas en régime linéaire, ce qui n'est *a priori* plus le cas en régime non linéaire.

La première ligne de ce développement est égale à la fonction de Green d'espace libre homogène G_0 prise pour la vitesse de référence c_{ref}. Elle correspond donc à un trajet direct de l'onde entre la source ($\vec{r}_s$) et le point d'observation ($\vec{r}$) dans un milieu de vitesse c_{ref} (cf. figure 1.1). L'intégrale de la deuxième ligne porte sur la variable $\vec{r}_1$, seul argument de l'opérateur μ. Sous l'intégrale, ce dernier est convolué par les fonctions de Green d'espace libre $G_0(\vec{r};\vec{r}_1)$ et $G_0(\vec{r}_1;\vec{r}_s)$, qui correspondent respectivement aux trajets de l'onde entre l'hétérogénéité et le point d'observation, et entre la source et l'hétérogénéité. Cette seconde ligne peut donc s'interpréter approximativement comme la contribution de l'ensemble des chemins de diffusion simple. Un raisonnement similaire sur la troisième ligne montre que celle-ci peut s'interpréter en terme de chemins de diffusion double (l'intégrale porte sur les variables $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, positions de deux hétérogénéités). La quatrième ligne, correspondrait approximativement aux contributions de diffusion triple, si la fonction $G(\vec{r}_3,\vec{r}_s)$ était remplacée par la fonction $G_0(\vec{r}_3,\vec{r}_s)$. En l'occurrence, le développement a été arrêté, tout en conservant une forme exacte de la solution. Cette quatrième ligne cache donc toutes les contributions d'ordre de diffusion strictement supérieur à deux.

Le développement à l'infini de la fonction $G(\vec{r};\vec{r}_s)$, faisant apparaître tous les ordres successifs de diffusion, est appelé développement de Born. L'approximation de Born, ou approximation de diffusion simple, consiste à ne garder que les deux premières lignes de ce développement. C'est l'hypothèse usuelle qui est faite en échographie ultrasonore médicale pour l'imagerie des tissus mous, faiblement hétérogène, où l'on considère que tout chemin d'ordre de diffusion strictement supérieur à un, porte une énergie négligeable devant les contributions de diffusion simple. Cette hypothèse permet une localisation

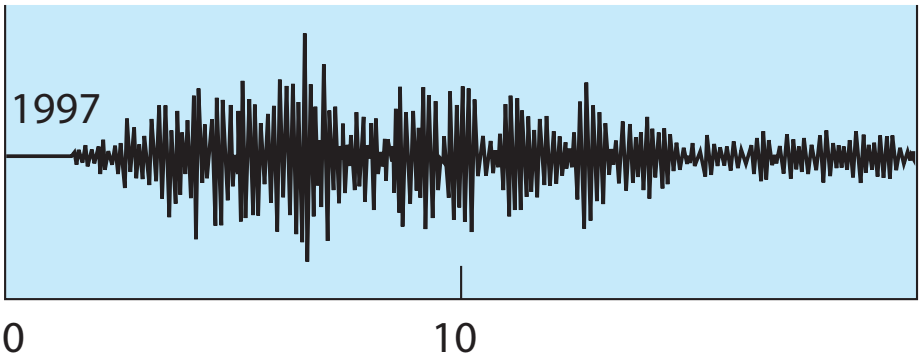


Figure 1.2 – Composante verticale du déplacement au sol mesurée par U. Wegler au mont Merapi (Java) après émission brève à l'aide d'une source à air comprimée (dans "Coda wave interferometry" [3].)

précise –à la limite de la résolution du système, donnée par les lois de la diffraction– des diffuseurs qui sont à l'origine des échos. Dans le cas d'un milieu fortement hétérogène, cette approximation n'est pas valable. En effet, l'information reçue par un transducteur en rétro-diffusion ne porte plus d'indication précise de localisation puisque, pour un temps t donné, il existe, au sein du milieu, un grand nombre de chemins de diffusion de même longueur $c_{ref}t$ que l'onde a pu emprunter.

Soulignons au passage, que c'est bien la fonction de Green d'espace libre G_0 (correspondant à la vitesse de référence c_{ref}), qui décrit la propagation de l'onde entre deux événements de diffusion, sans qu'aucune approximation n'ait été faite sur la taille des hétérogénéités. Le trajet de l'onde entre deux diffusions peut en particulier avoir lieu au sein d'une même hétérogénéité.

Le développement de Born est exact mais son emploi délicat, car la série de ses termes n'est pas systématiquement décroissante. Dans certaines configurations, un ordre élevé de diffusion peut en effet représenter la contribution dominante à l'amplitude de l'onde [2].

Un signal typique de la diffusion multiple est représenté sur la figure 1.2. Le milieu de propagation est réel –les profondeurs du volcan Merapi à Java–, et le signal correspond au déplacement vertical mesuré au sol après qu'un canon à air comprimée ait tiré un signal court. Le signal dure plusieurs secondes. On appelle "*balistique*" la partie du signal correspondant aux "premières arrivées", et "*coda*" la partie de l'onde qui suit, correspondant aux signaux de diffusion multiple.

1.1.3 Intensités cohérente et incohérente

Le formalisme développé au paragraphe précédent traite de la propagation linéaire en milieu hétérogène, sans autres hypothèses que celle de variations relatives de masse volumique plus faibles que celles de compressibilité. Nous considérons maintenant une catégorie particulière de milieux hétérogènes : les milieux "aléatoires". Ces milieux, sans aucune périodicité, sont traités comme une réalisation d'un processus aléatoire. Ils sont alors décrits par un modèle statistique. Les quantités physiques ayant du sens dans ce

cadre sont par exemple, la valeur moyenne et la variance de l'onde diffusée ou de son intensité. Une réalisation de l'onde propagée dans le milieu s'écrit alors [4] :

$$\phi(\vec{r},t) = \langle\phi(\vec{r},t)\rangle + \delta\phi(\vec{r},t). \tag{1.16}$$

La réalisation $\phi(\vec{r},t)$ est donc la somme de sa moyenne d'ensemble sur (toutes) les réalisations du désordre $\langle\phi(\vec{r},t)\rangle$, plus un terme de fluctuations $\delta\phi(\vec{r},t)$, propre à la réalisation et qui, par définition, est nul en moyenne. On parle d'onde cohérente pour $\langle\phi(\vec{r},t)\rangle$ et d'onde incohérente pour désigner $\delta\phi(\vec{r},t)$.

L'intensité $I(\vec{r},t)$ d'une réalisation ϕ est donnée par :

$$I(\vec{r},t) = |\phi(\vec{r},t)|^2 = \underbrace{|\langle\phi(\vec{r},t)\rangle|^2}_{I_{\text{coh}}} + \underbrace{|\delta\phi(\vec{r},t)|^2}_{I_{\text{incoh}}} + 2\text{Re}\{\langle\phi(\vec{r},t)\rangle\delta\phi(\vec{r},t)\}. \tag{1.17}$$

$I(\vec{r},t)$ est donc la somme de l'intensité cohérente I_{coh} (l'intensité de l'onde moyenne), de l'intensité incohérente I_{incoh} (l'intensité des fluctuations de l'onde moyenne), et d'un terme croisé faisant interférer l'onde cohérente et ses fluctuations. Ce troisième terme disparaît au passage à la moyenne :

$$\langle I(\vec{r},t)\rangle = |\langle\phi\rangle|^2 + \langle|\delta\phi|^2\rangle. \tag{1.18}$$

$\langle I(\vec{r},t)\rangle$ est la moyenne d'ensemble de l'intensité. Elle obéit rigoureusement à l'équation de Bethe-Salpeter [2].

Aux chapitres 2 et 3, ces développements théoriques connus seront brièvement étoffés. Voici cependant les grandes lignes des développements à venir.

Le champ cohérent ou la fonction de Green moyenne obéit à une équation appelée équation de Dyson. Sa résolution permet de montrer que la fonction de Green moyenne $\langle G\rangle$ est équivalente à celle d'un milieu homogène fictif (aussi appelé "milieu effectif"), avec une célérité effective, et présentant une atténuation effective caractérisée par une longueur caractéristique l_e, appelée *libre parcours moyen élastique*.

L'intensité cohérente est, entre autres, atténuée par diffusion sur les hétérogénéités. Ces pertes par diffusions nourrissent l'intensité incohérente. Le lien formel entre intensités cohérente et incohérente est donné par l'identité de Ward [2].

Au chapitre 3, nous montrerons brièvement que l'intensité incohérente obéit sous certaines approximations, pour un milieu suffisamment épais (i.e. d'épaisseur $L >> l_e$), à l'équation de la diffusion. Nous mesurerons l'intensité moyenne transmise à travers un milieu hétérogène aléatoire synthétique qui vérifie la condition $L >> l_e$, et nous en déduirons une constante de diffusion pour les ultrasons dans ce milieu.

Laissons maintenant de côté les milieux hétérogènes, pour introduire les principales conséquences d'une propagation non linéaire en milieu homogène.

1.2 Propagation non linéaire en milieu homogène

Les développements théoriques qui précèdent ont été faits dans le cadre de l'acoustique linéaire. Dans cette section, nous dérivons l'équation de propagation des ondes acoustiques dans un fluide homogène et thermo-visqueux, en prenant en compte les termes non linéaires quadratiques. Dans un tel milieu, les origines physiques de la non linéarité quadratique –dite "classique"– sont la convection de l'onde par elle même et la réponse non linéaire du milieu à une sollicitation mécanique. Elles sont modélisées par les termes non linéaires des équations constitutives de l'acoustique mentionnées précédemment : l'équation de continuité, l'équation d'état et l'équation de Navier-Stokes qui, pour un fluide thermo-visqueux, remplace l'équation d'Euler. À ces équations, étant donnée l'atténuation, il est nécessaire d'adjoindre une quatrième équation qui décrit l'évolution de l'entropie.

Considérer les quantités physiques du second ordre liées à la perturbation acoustique permet de rendre compte de nombreux phénomènes physiques inexpliqués par la théorie linéaire, comme la création de composantes harmoniques des fréquences initiales lors de la propagation, l'interaction paramétrique [5–7] ou encore l'auto-démodulation non linéaire [8–10].

Nous avons introduit plus tôt le nombre de Mach acoustique $\epsilon << 1$, qui permet d'exprimer la petitesse de la perturbation acoustique devant les valeurs à l'équilibre. Dans les développements qui suivent, nous retenons les termes d'ordre inférieur ou égal à $O(\epsilon^2)$.

1.2.1 Équations constitutives à l'ordre 2

Équation de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes traduit la conservation de la quantité de mouvement dans un fluide thermo-visqueux :

$$\rho \frac{D\vec{v}_a}{Dt} = \vec{\nabla}(-p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}). \tag{1.19}$$

L'opérateur $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_a.\vec{\nabla})$ est la dérivée particulaire (ou substantielle), qui, appliquée à la vitesse particulaire $\vec{v}_a$, exprime la variation de vitesse d'une particule de fluide dans la description eulérienne. $(\overline{\overline{I}})_{ij} = \delta_{ij}$ est le tenseur identité de rang deux et $\overline{\overline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses. Son expression est donnée par :

$$\tau_{ij} = \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right) D_{kk}\delta_{ij} + 2\eta D_{ij}, \tag{1.20}$$

qui introduit les viscosités de cisaillement η et de volume ζ. Cette dernière, aussi appelée viscosité seconde, joue un rôle important dans la dissipation des ondes acoustiques. $D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_{a_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{a_j}}{\partial x_i})$ est le tenseur taux de déformation, dérivée temporelle du tenseur des déformations usuellement introduit en mécanique des milieux déformables. En remarquant que $\vec{\nabla}\, D_{kk} = \vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{v}_a) = \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{v}_a)) + \Delta\vec{v}_a = \Delta\vec{v}_a$ [2] et en ne conservant que les termes linéaires et quadratiques de la perturbation acoustique, l'équation de Navier-Stokes

2. Loin des parois le champ de vitesse est irrotationnel.

devient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + \vec{\nabla} p_a - \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) \vec{\Delta} \vec{v}_a = -\rho_a \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} - \rho_0 (\vec{v}_a . \vec{\nabla}) \vec{v}_a. \tag{1.21}$$

Les termes linéaires et quadratiques ont été regroupés respectivement dans les membres de gauche et de droite de l'équation. Dans cette approximation, seul le terme $\rho_a \vec{v}_a . \vec{\nabla} \vec{v}_a \sim \epsilon^3$ est négligé.

Équation de continuité

L'équation de continuité exprime la conservation de la masse. Son expression exacte est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\, \rho \vec{v}_a = 0. \tag{1.22}$$

Comme pour l'équation de Navier-Stokes, l'équation de continuité est développée en fonction des variables acoustiques. Les termes linéaires et quadratiques y sont regroupés respectivement à gauche et à droite du signe égal :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \,\text{div}\, \vec{v}_a = -\rho_a \,\text{div}\, \vec{v}_a - \vec{v}_a . \vec{\text{grad}} \rho_a. \tag{1.23}$$

Contrairement à l'équation de Navier-Stokes, le développement de l'équation de continuité à l'ordre $O(\epsilon^2)$ est exact.

Équation d'état

On choisit d'écrire l'équation d'état thermodynamique en fonction des variables (p, ρ, s), afin de relier l'excès de masse volumique ρ_a et les variations d'entropie s_a à la surpression acoustique p_a dans le fluide. Compte tenu de la variété des interactions entre les molécules constituant différents fluides, il n'existe pas d'équation d'état universelle pour décrire le comportement de ces derniers. Nous avons donc recours à un développement de Taylor autour des valeurs de masse volumique et d'entropie à l'équilibre, ρ_0 et s_0. Cette méthode est valable même en régime non linéaire, où les variations des quantités physiques restent faibles devant leurs valeurs à l'équilibre. L'équation d'état s'écrit alors :

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0, s} \rho_a + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_0, s} {\rho_a}^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{\rho, s_0} s_a + O({\rho_a}^3, {s_a}^2). \tag{1.24}$$

L'atténuation est supposée linéaire, ce qui revient à écrire que $O(s_a) \sim O(\epsilon^2)$. Le développement de la pression est donc limité à l'ordre $O(s_a)$ de la variation d'entropie, ce qui revient à dire que la chaleur dégagée ne défocalise pas l'onde, ou encore qu'il n'y a pas de lentille d'origine thermique. Le terme croisé, qui couple les variations de masse volumique et d'entropie est d'ordre $O(s_a)O(\rho_a) \sim O(\epsilon^3)$ et peut donc être négligé. Le développement de Taylor se réécrit donc de la façon suivante :

$$p_a \simeq A\frac{\rho_a}{\rho_0} + \frac{B}{2}\frac{{\rho_a}^2}{{\rho_0}^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) s_a, \tag{1.25}$$

où $A = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0,s}$ est l'inverse du coefficient de compressibilité, et $B = {\rho_0}^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_0,s} = 2{\rho_0}^2{c_0}^3 \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{\rho_0,s}$ caractérise la variation thermodynamique de célérité d'une onde, sous l'action d'une surpression [11].

Équation générale du transport de chaleur

Lors de sa propagation au sein d'un fluide thermo-visqueux, l'onde est atténuée par les frottements des particules. La dissipation d'énergie étant un phénomène irréversible, elle s'accompagne d'un accroissement d'entropie. L'équation qui régit les variations d'entropie est l'équation générale du transport de chaleur ou équation de l'entropie. En régime linéaire, cette équation s'écrit [12] :

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s_a}{\partial t} = \kappa \Delta T_a, \tag{1.26}$$

où l'on suppose que κ, la conductibilité thermique, est constante. T_0 est la température du milieu à l'équilibre, et $T_a = T - T_0$ représente les variations de température liées au passage de la perturbation acoustique. En régime linéaire, au même titre que la surpression p_a ou l'excès de masse ρ_a, T_a obéit à l'équation de propagation : $\Delta T_a = -\frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2 T_a}{\partial t^2}$. Il vient, après intégration par rapport au temps :

$$s_a = \frac{-\kappa}{\rho_0 {c_0}^2 T_0}\frac{\partial T_a}{\partial t}. \tag{1.27}$$

Cette approche linéaire de l'évolution de l'entropie suppose que l'atténuation de l'onde est faible sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde [13].

Au paragraphe suivant, l'équation d'onde non linéaire quadratique en milieu homogène est dérivée à partir des équations (1.21), (1.23), (1.25) et (1.27).

1.2.2 Équation de propagation non linéaire dans un fluide thermo-visqueux

Pour modifier les termes quadratiques des équations (1.21), (1.23), (1.25) et (1.27), ces mêmes équations sont utilisées dans leur version linéaire. L'erreur introduite est alors d'ordre $O(\epsilon^3)$, donc compatible avec l'ordre d'approximation choisi ici. Les équations (1.21) et (1.23) sont réécrites en faisant apparaître la densité lagrangienne d'énergie en régime linéaire :

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}\rho_0 \vec{v}_a^{\,2} - \frac{{p_a}^2}{2\rho_0 {c_0}^2}.$$

Avec $\rho_0(\vec{v}_a.\vec{\nabla})\vec{v}_a = \vec{\nabla}(\rho_0 \vec{v}_a^{\,2}/2)$ et $\rho_a \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\vec{\nabla}(\frac{{p_a}^2}{2\rho_0 {c_0}^2})$, l'équation (1.21) devient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + \vec{\nabla} p_a - \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\vec{\Delta}\vec{v}_a = -\vec{\nabla}\mathcal{L}. \tag{1.28}$$

De même, avec $\rho_a \operatorname{div} \vec{v}_a = -\frac{1}{2}\frac{1}{\rho_0 {c_0}^4}\frac{\partial {p_a}^2}{\partial t}$ et $\vec{v}_a.\vec{\operatorname{grad}}\rho_a = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{{c_0}^2}\frac{\partial \vec{v}_a^{\,2}}{\partial t}$, l'équation (1.23) se réécrit :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_a = \frac{1}{\rho_0 {c_0}^4}\frac{\partial {p_a}^2}{\partial t} + \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{1.29}$$

L'équation (1.25) est utilisée afin d'exprimer l'excès de masse volumique en fonction de la surpression acoustique. En s'aidant de la relation linéaire ${\rho_a}^2 = {p_a}^2/{c_0}^4$ et en remplaçant s_a par son expression (1.27), on obtient :

$$\rho_a = \frac{p_a}{{c_0}^2} - \frac{B}{2A}\frac{{p_a}^2}{\rho_0 {c_0}^4} + \frac{\kappa}{\rho_0 {c_0}^4 T_0}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)\frac{\partial T_a}{\partial t}. \tag{1.30}$$

À l'aide des relations thermodynamiques $\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho = \rho^2\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s^{\,2} = \left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right)\frac{Tc^2}{\rho^2}$, et en notant que $\frac{\partial T_a}{\partial t} = \frac{\partial T_a}{\partial \rho_a}\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial T_a}{\partial \rho_a}\frac{\partial p_a}{\partial t}$, on réécrit le troisième terme du membre de droite, pour obtenir l'équation suivante :

$$\rho_a = \frac{p_a}{{c_0}^2} - \frac{B}{2A}\frac{{p_a}^2}{\rho_0 {c_0}^4} + \frac{\kappa}{\rho_0 {c_0}^4}\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right)\frac{\partial p_a}{\partial t}, \tag{1.31}$$

où C_V et C_P sont respectivement les chaleurs spécifiques à volume et pression constants du fluide.

L'équation d'état (1.31) est ensuite introduite dans l'équation de continuité (1.29), qui est dérivée par rapport au temps. En lui retranchant la divergence de l'équation (1.28) [3], l'équation d'onde pour la surpression acoustique est enfin obtenue :

$$\Delta p_a - \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \frac{b}{{c_0}^2}\frac{\partial^3 p_a}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 {c_0}^4}\frac{\partial^2 {p_a}^2}{\partial t^2} - \left(\Delta + \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathcal{L}. \tag{1.32}$$

Comme précédemment, les termes linéaires et quadratiques ont été regroupés de part et d'autre du signe égal de l'équation. Dans le membre de gauche, parmi les termes linéaires, le troisième terme modélise l'atténuation. Le paramètre b, appelé coefficient d'absorption et homogène à un temps, tient compte de l'atténuation par conduction de chaleur et de l'atténuation due à la viscosité du milieu :

$$b = \underbrace{\frac{1}{\rho_0 {c_0}^2}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)}_{\text{VISCOSITÉ}} + \underbrace{\frac{\kappa}{\rho_0 {c_0}^2}\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right)}_{\text{THERMIQUE}}. \tag{1.33}$$

Parmi les deux termes quadratiques, le premier est proportionnel au coefficient de non linéarité du milieu, $\beta = 1 + \frac{B}{2A}$. Celui-ci tient compte des deux origines de la non linéarité quadratique cumulative. Le terme unité, qui provient de l'équation de continuité (1.29), correspond à la non linéarité d'origine hydrodynamique (ou convective). Le rapport $\frac{B}{2A}$ provient lui de l'équation d'état (1.30) et mesure l'importance relative du terme quadratique de cette relation, par rapport au terme linéaire. Cette contribution est communément appelée "non linéarité thermodynamique". Dans les conditions normales de température et de pression, pour l'eau, on a $\frac{B}{2A} = 2,5$ [14].

3. Pour le terme visqueux, on a : $\operatorname{div} \vec{\Delta}\vec{v} \simeq -\frac{1}{\rho_0 {c_0}^4}\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}$.

Intéressons-nous maintenant au second terme quadratique de l'équation (1.32). Ce dernier trouve son origine dans certains termes quadratiques des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Il est proportionnel à la densité lagrangienne d'énergie $\mathcal{L}$, à laquelle est appliqué un opérateur qui, au signe près, correspond au d'Alembertien. En régime linéaire, pour une onde plane, la relation d'impédance lie la surpression à la vitesse particulaire par la formule $p_a = \pm\rho_0 c_0 v_a$ (+ pour une onde "progressive", et − pour une onde "régressive"). En utilisant cette relation d'ordre $O(\epsilon)$ pour réécrire la densité lagrangienne d'énergie d'une onde plane ($O(\epsilon^2)$), cette dernière s'annule. Bien sûr, dans la pratique, les conditions expérimentales ne permettent jamais d'engendrer une onde parfaitement plane. Cependant, certaines configurations courantes –loin d'une source divergente, ou au foyer d'un transducteur focalisé– présentent en bonne approximation les caractéristiques d'une onde plane.

Enfin, ce terme non linéaire modélise une non linéarité locale, par opposition à la non linéarité cumulative discutée au paragraphe précédent. Ses manifestations diverses –différence entre coordonnées spatiales et matérielles, pression de radiation aux interfaces et relation d'impédance non linéaire– ne produisent pas de distorsion s'accumulant avec la distance parcourue. Les non linéarités locales sont généralement négligeables devant les non linéarités cumulatives, après seulement quelques longueurs d'onde parcourues [11].

Equation de Westervelt

La condition la moins restrictive pour simplifier l'équation (1.32) consiste à négliger les effets locaux de la non linéarité, devant ceux dits cumulatifs, c'est-à-dire à se placer au moins à quelques longueurs d'onde de la source dans un fluide homogène. À cette condition, l'équation de propagation (1.32) devient :

$$\Delta p_a - \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \frac{b}{{c_0}^2}\frac{\partial^3 p_a}{\partial t^3} = -\frac{\beta}{\rho_0 {c_0}^4}\frac{\partial^2 {p_a}^2}{\partial t^2}. \tag{1.34}$$

C'est l'équation de Westervelt [5].

1.2.3 Propagation non linéaire d'une onde plane

Equation de Burgers

À une dimension d'espace, dans le cadre de l'approximation quadratique, l'équation de Westervelt peut se factoriser comme suit :

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{b}{2c_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\beta p_a}{\rho_0 {c_0}^3}\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{\text{ONDE RÉGRESSIVE}}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{b}{2c_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\beta p_a}{\rho_0 {c_0}^3}\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{\text{ONDE PROGRESSIVE}} p_a = 0. \tag{1.35}$$

Les deux termes de la factorisation correspondent respectivement aux opérateurs de propagation pour des ondes régressive et progressive.

Une onde progressive obéit donc à l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial p_a}{\partial z} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial p_a}{\partial t} - \frac{\beta p_a}{\rho_0 {c_0}^3}\frac{\partial p_a}{\partial t} - \frac{b}{2c_0}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0. \tag{1.36}$$

En factorisant $\frac{1}{c_0}\frac{\partial p_a}{\partial t}$ aux deuxième et troisième termes, on reconnaît les deux premiers termes d'un développement limité ($\frac{\beta p_a}{\rho_0 c_0^2} << 1$), ce qui permet de réécrire l'équation (1.36) selon :

$$\frac{\partial p_a}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial p_a}{\partial t} - \frac{b}{2c_0}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0, \tag{1.37}$$

avec

$$c \approx c_0\left(1 + \frac{\beta p_a}{\rho_0 {c_0}^2}\right). \tag{1.38}$$

L'équation (1.38) montre que la vitesse de propagation de l'onde n'est pas constante le long de la forme d'onde, mais qu'elle dépend de l'amplitude de pression. Avec la relation d'impédance, l'expression de la vitesse devient $c = c_0 + \beta v_a$. Les surpressions ($p_a > 0$) se propagent à une vitesse supersonique, tandis que les détentes ($p_a < 0$) voyagent à une vitesse subsonique.

Onde plane harmonique dans un fluide parfait

Dans un fluide parfait, le terme d'atténuation est nul. La solution harmonique (pulsation ω) de l'équation de Burgers "non dissipative" est alors :

$$p_a(z,t) = p_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c(v_a)}\right)\right], \tag{1.39}$$

où p_m est l'amplitude de la pression acoustique. Afin de suivre l'évolution de la forme d'onde au cours de la propagation, on introduit le temps retardé $\tau = t - z/c_0$. Dans le référentiel lié aux zéros de la forme d'onde, seuls points se propageant à la vitesse constante c_0, l'équation (1.39) devient :

$$p_a(z,t) = p_m \sin\left(\omega\left(\tau + \frac{z}{c_0}\left(\frac{\beta v_a/c_0}{1+\beta v_a/c_0}\right)\right)\right). \tag{1.40}$$

Comme les surpressions "rattrapent" progressivement les détentes au cours de la propagation (effet cumulatif), il existe une distance L_c, au delà de laquelle une discontinuité apparaît entre deux branches continues de la forme d'onde. En effet, pour un τ donné, il ne peut y avoir physiquement qu'une seule valeur de pression. Pour calculer cette distance, exprimons le produit $\omega\tau$ en fonction des autres variables du problème d'après (1.40). On obtient, après avoir écarté les termes d'ordre $O(\epsilon^2)$ (correspondant ici à une non linéarité cubique) :

$$\omega\tau = \underbrace{\arcsin(\frac{p_a}{p_m})}_{\text{arcsinus}} - \underbrace{zk_0\beta\epsilon\frac{p_a}{p_m}}_{\text{branche d'hyperbole}}. \tag{1.41}$$

$\omega\tau$ s'exprime donc comme une somme de deux termes, fonctions de p_a/p_m. Au voisinage de zéro, le premier terme se comporte comme une droite de pente 1, tandis que le second,

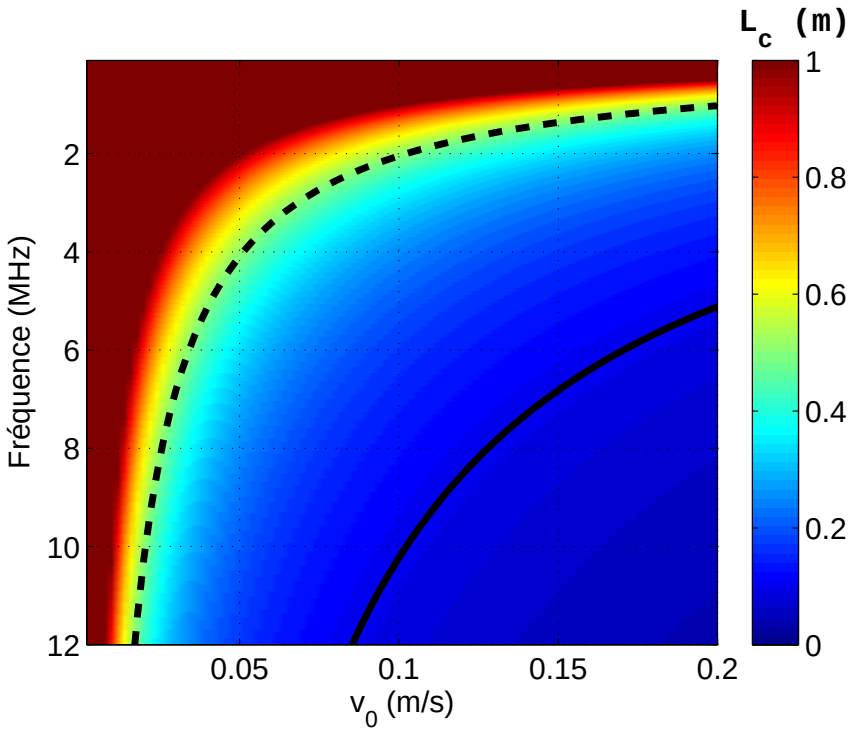


Figure 1.3 – Distance de formation du choc L_c pour une onde plane se propageant dans l'eau. Les lignes tiretée et continue indiquent respectivement une distance de choc égale à 50 et 10 cm. La vue est "saturée" à 1 m.

hyperbolique, dégénère en droite de pente $-zk_0\beta\epsilon$. Au cours de la propagation, la pente du second terme croît avec la distance z jusqu'à ce qu'elle compense exactement le premier terme. La distance à laquelle apparaît la discontinuité est obtenue pour $-zk\beta\epsilon = -1$. C'est la distance de formation du choc L_c :

$$L_c = \frac{1}{k_0\beta\epsilon}. \tag{1.42}$$

Cette distance est la distance caractéristique des effets non linéaires. Nous l'avons représentée sur la figure 1.3 en fonction de la fréquence et de l'amplitude de la vitesse particulaire émise v_0. Elle est d'autant plus petite que la fréquence ou l'amplitude émise sont grandes.

Avant le choc

L'évolution, au cours de sa propagation, d'un paquet d'ondes de fréquence centrale 1 MHz [4], est représentée sur la figure 1.4. Dans le domaine temporel, elle illustre bien la distorsion progressive de la forme d'onde. Dans le domaine de Fourier, cette distorsion se traduit par la création en cascade d'harmoniques des fréquences initiales. L'interaction non linéaire quadratique de l'onde primaire (fréquences fondamentales) avec elle-même crée d'abord le second harmonique (centré autour de 2 MHz). Ce dernier interagit ensuite

4. La forme temporelle de ce signal est typique de celle des signaux utilisés lors des expériences décrites aux chapitres 2 et 3.

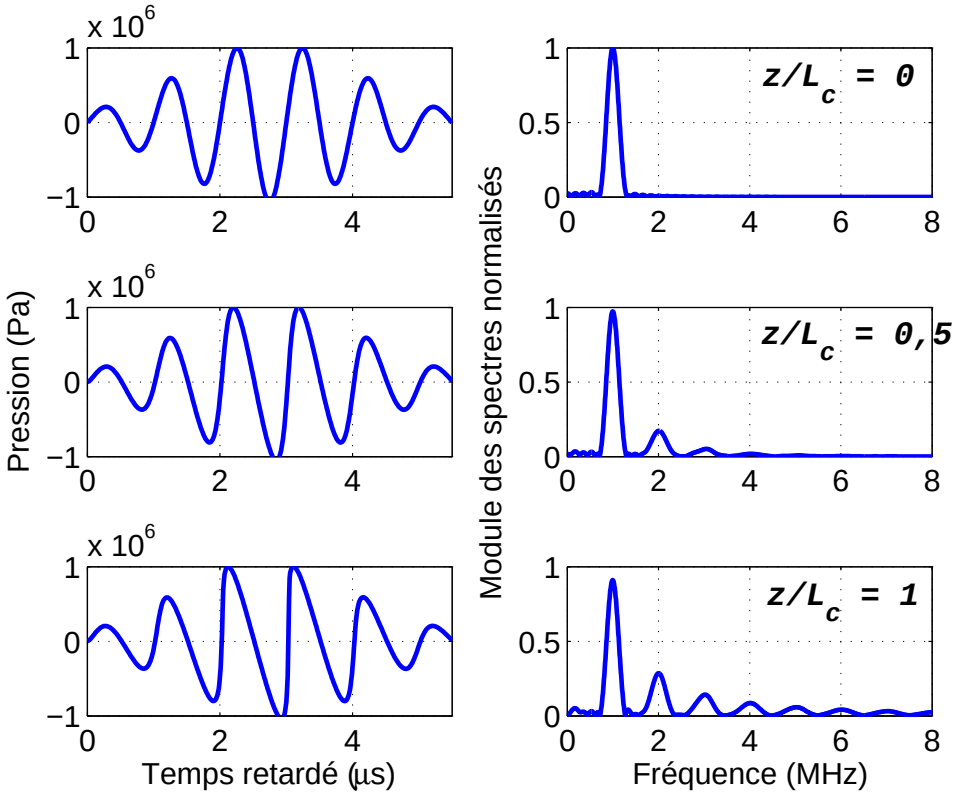


Figure 1.4 – Évolution, au cours de sa propagation, de la forme d'onde d'un paquet d'ondes centré à la fréquence 1 MHz, d'amplitude initiale $p_m = 1$ MPa. Le module des spectres associés est normalisé par la valeur maximale du spectre à l'émission ($z/L_c = 0$).

avec l'onde primaire, au cours de sa propagation, pour donner naissance au troisième harmonique, et ainsi de suite.

Amplitude des harmoniques

Un traitement perturbatif de l'équation de Burgers permet de déterminer la dépendance des amplitudes des harmoniques en fonction de l'amplitude du fondamental. Lorsque l'amplitude des harmoniques créés par la propagation non linéaire reste faible devant celle de la fréquence fondamentale ($z << L_c$), il est possible de les traiter comme des ondes secondaires créées par la propagation non linéaire, agissant comme une perturbation de l'onde primaire.

La pression s'écrit alors :

$$p_a = p_a^I(\epsilon) + p_a^{II}(\epsilon^2) + O(\epsilon^3), \tag{1.43}$$

où p_a^I et p_a^{II} représentent les pressions des ondes primaires et secondaires respectivement. En introduisant le développement (1.43) dans l'équation de Burgers non dissipative (équa-

tion (1.36), avec $b = 0$), on obtient respectivement aux ordres $O(\epsilon)$ et $O(\epsilon^2)$:

$$\frac{\partial p_a^I}{\partial z} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial p_a^I}{\partial t} = 0, \tag{1.44a}$$

$$\frac{\partial p_a^I I}{\partial z} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial p_a^I I}{\partial t} = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p_a^I \frac{\partial p_a^I}{\partial t}. \tag{1.44b}$$

Les équations (1.44) décrivent un problème "découplé". L'onde primaire obéit à une équation de propagation linéaire sans perte (équation (1.44a)), tandis que les ondes secondaires sont créées continûment par la propagation non linéaire de l'onde primaire (terme source de l'équation 1.44b), puis se propagent linéairement.

En effectuant le changement de variable $\tau = t - z/c_0$, et en posant $p_a^I(\tau) = p_m e^{j\omega\tau}$, il vient à l'ordre $O(\epsilon^2)$:

$$\frac{\partial p_a^{II}}{\partial z}\Big)_\tau = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} j\omega {p_a^I}^2(\tau). \tag{1.45}$$

τ et z étant des variables indépendantes et p_a^{II} étant nulle à la source, il vient en intégrant sur z :

$$p_a^{II}(z,\tau) = \frac{j\omega\beta}{\rho_0 c_0^3} z {p_a^I}^2(\tau) = \frac{j\omega\beta}{\rho_0 c_0^3} z p_m^2 e^{2j\omega\tau}. \tag{1.46}$$

Le second harmonique varie donc quadratiquement avec p_m, l'amplitude de pression du fondamental. Son amplitude croît par ailleurs linéairement avec la distance z à la source (effet cumulatif).

Ce calcul peut être généralisé aux ordres supérieurs, dans la limite où un traitement perturbatif est toujours possible. Il montre alors que $p_a^{(n)} \propto p_m^n$, où $p_a^{(n)}$ est l'amplitude de l'harmonique n, d'ordre $O(\epsilon^n)$.

Au-delà du choc

Au-delà de la distance de formation du choc, la solution implicite utilisée jusqu'ici n'est plus valable, car elle devient multivaluée. Pour un temps donné correspondent plusieurs valeurs de pression, ce qui n'est physiquement pas acceptable. Pour rendre la forme d'onde monovaluée, il est nécessaire d'introduire un choc.

Dans la théorie des chocs faibles [15], le choc est une discontinuité de première espèce dont l'amplitude est modérée. Au niveau du choc, certaines grandeurs acoustiques (p_a, ρ_a, v_a, e_a, s_a) varient par saut. Les variations d'entropie donnent alors lieu à une dissipation d'énergie à travers le choc. On dépasse ainsi la limite du modèle de fluide parfait, inapproprié au choc.

En écrivant les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie à travers le choc, on peut montrer (relations de Rankine-Hugoniot) que la variation d'entropie Δs au niveau du choc est proportionnelle au cube de la variation de pression Δp. La constante de proportionnalité étant positive, et l'entropie ne pouvant que croître dans un fluide en mouvement ($\Delta s > 0$), il ne peut exister que des chocs de compression ($\Delta p > 0$) (cf. [16], chap. IX).

Onde plane harmonique dans un fluide thermo-visqueux

En présence d'absorption, l'onde est progressivement atténuée au cours de sa propagation. L'expression de la forme d'onde est donnée par :

$$p_a(z,t) = p_m \exp(-\alpha z) \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c(v_a)}\right)\right], \tag{1.47}$$

où $\alpha = \frac{b\omega^2}{2c_0}$ est le coefficient d'atténuation thermo-visqueuse.

La décroissance du logarithme de l'amplitude est donc proportionnelle au carré de la fréquence. On a dans l'eau : $\alpha \approx 24.10^{-15} f^2$ Np/m. La distance caractéristique de l'atténuation de l'onde par absorption est donnée par :

$$L_a = 1/\alpha. \tag{1.48}$$

L'atténuation agit à l'encontre des effets non linéaires à deux titres. En effet, elle diminue l'amplitude du fondamental, et elle atténue les harmoniques engendrés par la propagation non linéaire, avec d'autant plus d'efficacité que l'ordre de ces harmoniques est élevé.

On définit le nombre de Gol'dberg, Γ_G, comme le rapport de la longueur d'atténuation sur la distance de choc :

$$\Gamma_G = \frac{L_a}{L_c}. \tag{1.49}$$

Ce nombre compare donc les effets de la non linéarité à ceux de l'absorption. Si $\Gamma_G \ll 1$ l'absorption domine les effets non linéaires. Au contraire, si $\Gamma_G \geq 1$, alors les effets non linéaires dominent, et il peut y avoir formation d'une onde de choc.

Interaction non linéaire de deux ondes

L'interaction non linéaire quadratique de deux ondes planes harmoniques de fréquences f_1 et f_2 se propageant conjointement, crée des ondes "filles" aux fréquences $f_1 \pm f_2$ [5].

Lorsqu'un train d'onde se propage non linéairement, la composante de basse fréquence issue de l'interaction de ses composantes fréquentielles est usuellement appelée auto-démodulation non-linéaire [8, 9, 18].

1.3 Propagation non linéaire en milieu hétérogène

En milieu hétérogène, il n'existe pas, à notre connaissance, d'équation d'onde en régime de propagation non linéaire, qui soit exacte et résolue. Une première démarche consiste à sommer l'équation d'onde linéaire en milieu hétérogène (équation (1.9)) avec l'équation de propagation non linéaire quadratique en milieu homogène (équation (1.34)). Elle aboutit

5. La relation de dispersion impose à ces ondes planes d'être colinéaires pour interagir. Dans la pratique, la diffraction assouplit un peu cette condition [7, 17].

à l'équation généralisée de Lighthill-Westervelt [19] [6] :

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - c_0^2(\vec{r})\Delta p_a + \frac{c_0^2(\vec{r})}{\rho_0(\vec{r})}\vec{\nabla}\rho_0(\vec{r}).\vec{\nabla}p_a = \frac{\beta(\vec{r})}{\rho_0(\vec{r})}\frac{\partial^2 p_a^2}{\partial t^2}, \tag{1.50}$$

où le coefficient non linéaire β peut, comme les autres paramètres du milieu, varier spatialement.

Deux hypothèses sont nécessaires à cette équation. D'une part, elle suppose que le terme non linéaire est celui d'une onde quasi-plane. D'autre part, hétérogénéité et non linéarité ne sont pas couplées.

Si,

$$\eta = \max\left(\frac{c(\vec{r}) - c_{ref}}{c_{ref}}\right), \tag{1.51}$$

caractérise le degré d'hétérogénéité du milieu, alors le terme de couplage non linéarité-hétérogénéité doit être négligeable devant le terme linéaire *a priori* dominant, soit :

$$\frac{\eta\epsilon^2}{\epsilon} << 1. \tag{1.52}$$

L'équation de Lighthill-Westervelt peut se résoudre numériquement, au prix d'approximations plus ou moins poussées. Une très bonne revue de ces méthodes est donnée dans [20].

1.3.1 Cas des milieux faiblement hétérogènes

Nous mentionnons ici quelques développements récents, qui traitent de la propagation non linéaire en milieu faiblement hétérogène. Ils concernent les domaines d'application tels que l'aéro-acoustique –en particulier l'étude du bang sonique [21, 22]–, l'acoustique sous-marine, ou les applications médicales (imagerie et thérapie en milieu faiblement hétérogène) [23, 24].

Dans ces milieux, la majorité des méthodes de résolution numérique s'inspire de l'équation "KZ hétérogène" [25, 26], dérivée de l'équation (1.50) en la rendant paraxiale [22, 23, 27]. L'approximation paraxiale repose sur l'hypothèse d'une source de taille caractéristique bien supérieure à la longueur d'onde moyenne émise. Dans la région où le faisceau reste collimaté le long de l'axe de propagation, l'opérateur Laplacien est alors simplifié dans la direction de propagation.

A titre d'exemple, Ganjehi et coll. [22] s'intéressent à l'étude de la propagation du bang sonique dans la couche limite atmosphérique. Le modèle qu'ils développent repose sur l'approximation de milieu faiblement hétérogène. Les modifications de l'atmosphère sont vues comme une perturbation des termes homogènes, ce qui conduit à une nouvelle écriture de l'équation KZ pour un milieu faiblement hétérogène. Dans un premier temps, l'approximation parabolique standard limite à $\pm 15^\circ$ l'angle maximal par lequel peut être vue la source par rapport à son axe. Puis, un développement grand angle de l'opérateur de

6. Il est aussi possible de prendre en compte une absorption thermo-visqueuse variant spatialement.

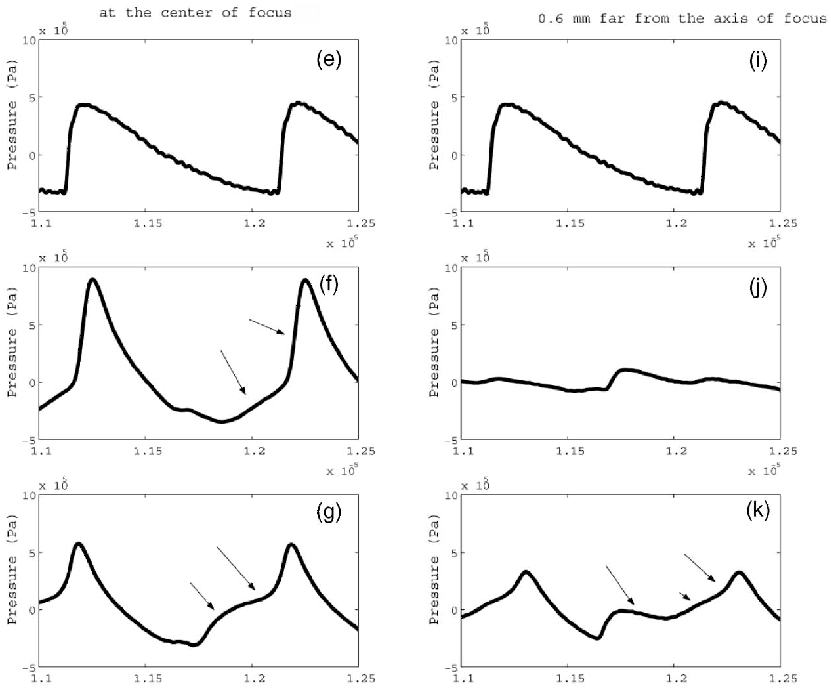


Figure 1.5 – D'après [22] : Mesure expérimentale d'une onde de choc. (e) : Avant diffusion par un cylindre de silicone ($\varnothing = 3$ mm), (f) : 2 mm après le cylindre (au foyer), (g) : 5 mm après le foyer. Mesures sur l'axe (colonne de gauche) et à 0,6 mm de l'axe (colonne de droite).

diffraction repousse cette limite à $\pm 40^{\circ}$. La diffraction étant antagoniste à la non linéarité, leur couplage est négligé aux grands angles.

Des résultats de simulations numériques sont comparés à des expériences de diffusion d'une onde de choc par un cylindre de silicone présentant un contraste de vitesse du son de près de 30 % avec le fluide environnant (de l'eau). L'accord est bon sur les intervalles d'angle donnés plus haut. Par ailleurs, ces résultats numériques et expérimentaux sont aussi en bon accord qualitatif avec de vrais signaux du bang sonique. Comme dans [28], la mesure d'un temps de montée du choc est utilisée pour quantifier les changements de la forme d'onde causés par son interaction avec l'hétérogénéité.

Dagrau et coll. [20] proposent une méthode de résolution de l'équation (1.50) dans l'approximation "one-way". Fondée sur l'acoustique de Fourier, elle repousse le domaine de validité jusqu'à des angles de $\pm 90^{\circ}$par rapport à l'axe de la source. La méthode est validée par comparaison à des cas génériques. Elle ne prend cependant pas non plus en compte la rétro-diffusion, puisqu'elle s'appuie sur une progression plan par plan propre à l'acoustique de Fourier et un schéma numérique à pas fractionnés [7].

7. Le schéma numérique à pas fractionnés consiste à résoudre pas à pas séparément les équations modélisant chacun des effets (non linéarité, diffraction, hétérogénéité) auxquels l'onde est soumise [29]. Sur une distance de propagation environ égale à la plus faible longueur de corrélation des effets en jeu, ces derniers sont en effet raisonnablement découplés. Leur couplage est induit par l'itération du procédé pas par par, pour rendre compte de la propagation sur de plus longues distantes.

Dans le domaine des applications médicales, Pinton et coll. [24] proposent une résolution numérique directe de l'équation généralisée de Lighthill-Westervelt. Les cas étudiés portent sur des contrastes faibles (5 % au maximum), où la diffusion multiple est négligeable. La résolution de l'équation à 3 dimensions et la nécessité d'un maillage fin pour prendre en compte les harmoniques, demandent un temps de calcul qui limite en pratique l'utilisation du code à une non linéarité faible (soit quelques harmoniques).

Baudoin et coll. [30] s'intéressent à l'atténuation d'une onde de choc par une solution de particules rigides en suspension. La taille des particules ($\sim$ 10 nm) est beaucoup plus petite que la longueur d'onde ($\sim$ 1 mm), et par conséquent, la diffusion multiple est négligeable. Un modèle théorique, basé sur l'équation de Burgers généralisée au cas de la propagation d'une onde dans une suspension de particules rigides, est développé et comparé aux résultats expérimentaux. Ceux-ci montrent que l'onde de choc est un excellent outil de spectroscopie des milieux faiblement hétérogènes.

Pour traiter le cas de milieux plus fortement hétérogènes, Del Pino [31] et Groot-Hedlin [32] évoquent la résolution numérique directe des équations constitutives de l'acoustique. De fortes non linéarités et hétérogénéités peuvent *a priori* être simulées ainsi, mais ces méthodes ne sont pas encore réellement applicables à cette situation, en raison du très grand temps de calcul nécessaire, même sur les calculateurs actuellement les plus performants.

1.3.2 Propagation non linéaire dans les milieux granulaires

Les milieux granulaires, fortement hétérogènes à certaines échelles, font l'objet d'un grand nombre d'études dans le domaine de l'acoustique. Présentant des comportements fluide ou solide, on les rencontre souvent dans la nature –sables, dunes, roches, sédiments– ou dans l'industrie –agroalimentaire, pharmaceutique. Ils sont le siège de phénomènes complexes, dont l'origine vient en partie des interactions de contact entre les grains qui constituent le milieu. La théorie du contact de Hertz-Mindlin [33, 34] décrit la force de contact entre deux grains. Cette force, ou la contrainte qui lui est associée, ne dépend pas linéairement de la déformation. La non linéarité de cette relation s'explique principalement par le fait que la surface de contact entre deux grains ne reste pas constante, mais augmente avec la déformation. C'est une non linéarité "non classique" par opposition à la non linéarité d'origine convective et thermodynamique dans un fluide ou un solide homogènes.

Le son se propage à travers les contacts et est par conséquent un outil bien adapté pour sonder un milieu granulaire. Les billes ou grains étant solides, les milieux granulaires permettent la propagation d'ondes longitudinales et transversales. Des conversions de mode peuvent avoir lieu entre les deux types d'ondes, ce qui constitue une richesse et une complexité supplémentaires par rapport à un milieu comme l'atmosphère.

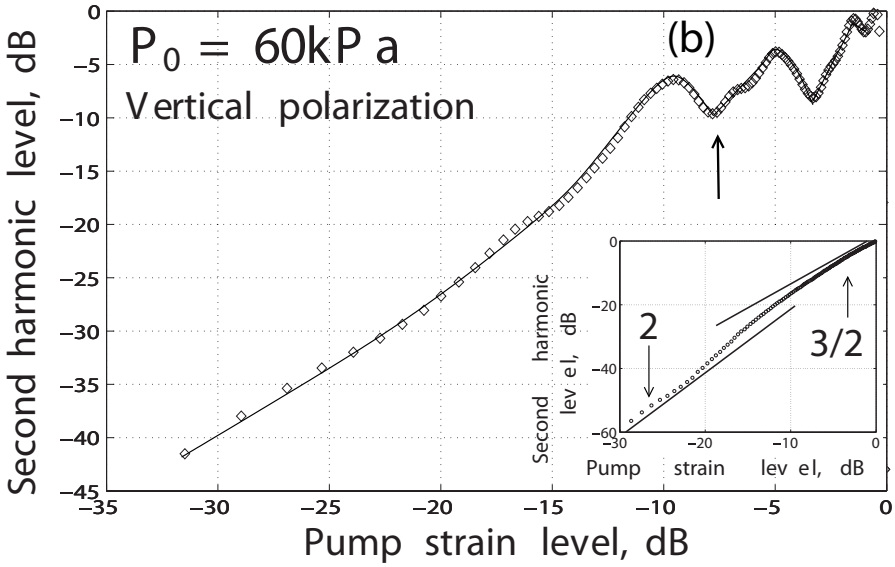


Figure 1.6 – D'après [35] : Amplitude de la seconde harmonique en fonction de l'amplitude d'excitation (à une fréquence de 5 kHz), dans un milieu granulaire constitué de billes de verre identiques ($\varnothing = 2$ mm). Modèle théorique en médaillon.

Approche "champ moyen" des milieux granulaires

À "basse" fréquence, la longueur d'onde moyenne est beaucoup plus grande que le diamètre des grains. Les dimensions du milieu sont plus petites que la distance caractéristique de la diffusion l_e et la diffusion multiple est donc négligeable. Tournat et coll. [35], étudient la génération du second harmonique longitudinal créé par une onde transversale de fréquence 5 kHz ($\lambda \sim 4$ cm), au sein d'un milieu de billes de verre identiques ($\varnothing = 2$ mm). Les ondes longitudinales et transversales ne se propageant pas à la même vitesse, il y a asynchronisme entre la source (onde transversale pompe) et le second harmonique (onde longitudinale). Les auteurs observent cependant une dépendance quadratique de l'amplitude du second harmonique en fonction de l'amplitude d'excitation u_{in}, jusqu'à un certain seuil (cf. figure 1.6). Au-delà de ce seuil, l'amplitude de l'harmonique oscille avant de retrouver un comportement monotone ($\propto u_{in}^{3/2}$). Ces oscillations traduisent une transition entre deux régimes différents de contact inter-grains. Pour des amplitudes d'excitation modérées, la transmission de l'onde à travers le milieu se fait majoritairement au travers des contacts déjà établis (contacts forts). L'amplitude du second harmonique croît alors proportionnellement au carré de l'amplitude d'excitation. Au-delà du seuil, la transmission de l'onde à travers le milieu se fait par les battements des contacts faibles. L'amplitude du second harmonique croît alors proportionnellement à la puissance 3/2 de l'amplitude d'excitation.

Brunet et coll. [36] étudient la réponse d'un milieu constitué de billes de verre ($\varnothing \sim 600 - 800$ μm), à une sollicitation longitudinale de fréquence 50 kHz. Ils mesurent les amplitudes des fréquences du fondamental et du second harmonique en fonction de l'amplitude d'excitation ϵ_{in}. Le second harmonique montre d'abord une dépendance quadra-

tique avec l'amplitude d'excitation, comme dans la référence [35]. Cependant, passé un certain seuil ($\epsilon_{in} >\sim 3\%$ de la contrainte statique), les auteurs mettent en évidence un comportement hystérétique de l'amplitude de la seconde harmonique, en suivant un cycle montée-descente avec l'amplitude d'excitation. Cette hystérésis est la marque d'une modification irréversible du milieu, qui correspond à sa compaction. Enfin, plus récemment, Wildenberg et coll. [37], ont montré dans une configuration expérimentale similaire à la précédente, que la génération du second harmonique augmente avec le raidissement du milieu.

Diffusion multiple dans les milieux granulaires

À plus hautes fréquences, le libre parcours moyen élastique est inférieur aux dimensions du milieu. En régime de propagation linéaire, Jia [38] observe à 500 kHz l'existence d'une "*coda*" dans des milieux granulaires synthétiques (billes de verre de $\varnothing = 0,6 - 0,8$ mm, $\lambda_{\text{moyen}} \sim 1,5$ mm). Il mesure la transmission par des échantillons de différentes épaisseurs et détermine une constante de diffusion du son dans le milieu.

Dans un rapport de taille de grain sur longueur d'onde similaire ($f = 100$ kHz, $\varnothing = 2$ mm, $\lambda_{\text{moyen}} \sim 3$ mm), Tournat et coll. étudient la propagation non linéaire dans des billes de verre [10] [8]. Ils s'intéressent dans un premier temps à l'auto-démodulation non linéaire, composante basse fréquence de l'interaction non linéaire des fréquences contenues dans le paquet d'onde initial 1.2.3. Lorsque l'amplitude d'excitation, ou la distance entre l'émetteur et le récepteur augmentent, des oscillations à plus basses fréquences apparaissent en effet au niveau de l'onde balistique (cf. figure 1.7).

À plus haute fréquence, la nature des contacts entre les grains du milieu impose une forte dissipation de l'énergie acoustique [39, 40]. S'il y a génération de l'harmonique de fréquence double, celui-ci est dissipé au niveau des contacts, et ne peut être mesuré. Les auteurs mesurent l'atténuation du fondamental pour différentes amplitudes émises et montrent que cette dernière n'est pas simplement linéaire. C'est une limite intrinsèque aux milieux granulaires. Pour avoir une "coda", il est nécessaire de travailler à des fréquences suffisamment hautes pour équilibrer le rapport de la taille des grains et de la longueur d'onde. Or, à ces fréquences, les harmoniques créés par la propagation non linéaire sont dissipés au niveau des contacts.

1.3.3 Un autre système physique faisant référence à la propagation non linéaire en milieu hétérogène

Hopkins et coll. [41] s'intéressent à la propagation unidimensionnelle d'une onde à la surface d'une couche mince d'hélium superfluide sur un substrat de verre. Ce type d'onde, appelée "third sound" [16], est une onde très non linéaire, puisque sa vitesse de propagation dépend de l'épaisseur de la couche mince, et donc de son amplitude. Les auteurs s'interrogent sur la possible influence de la non linéarité sur la transmission du milieu.

8. Le libre parcours moyen élastique n'est pas estimé, mais l'observation d'une coda montre que celui-ci est inférieur aux dimensions du milieu.

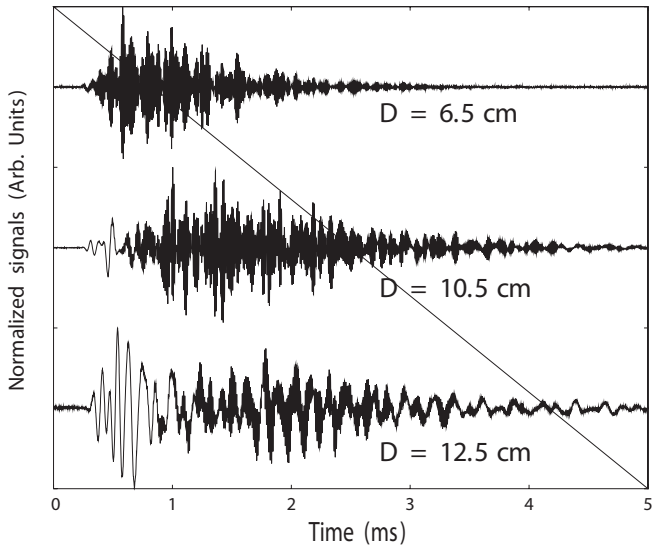


Figure 1.7 – D'après [10] : Signaux mesurés après propagation à travers différentes épaisseurs d'un milieu granulaire constitué de billes de verre identiques ($\varnothing = 2$ mm) à pression statique (300 kPa) et amplitude émise constantes.

L'ensemble substrat de verre et hélium est maintenu à 1 K, condition nécessaire pour obtenir l'état superfluide de l'hélium. Le substrat de verre est entaillé sur sa largeur, à des positions aléatoirement réparties sur sa longueur (cf. figure 1.8 gauche). Chaque entaille change l'épaisseur de la couche mince et donc la vitesse de l'onde. Celle-ci est générée par effet Joule, le long d'un filament d'aluminium parallèle aux entailles.

La longueur de localisation l_{loc}, caractérise l'hétérogénéité du milieu. Elle est fixée par la statistique des hétérogénéités (les entailles). La distance caractéristique des effets non linéaires l_{NL} (l'équivalent d'une distance de choc) est changée en variant la puissance électrique dans le filament d'aluminium, et donc l'amplitude initiale de l'onde.

En régime linéaire ($l_{NL} >> l_{loc}$), les auteurs s'attendent à une décroissance exponentielle de la transmission, avec l'épaisseur de l'échantillon. C'est effectivement ce qu'ils observent (cf. figure 1.8 droite). Dans un régime très non linéaire ($l_{loc} >> l_{NL}$), les auteurs constatent que la transmission est constante et égale à *un* quelle que soit l'épaisseur de l'échantillon. Enfin, dans un régime intermédiaire ($l_{loc} \sim l_{NL}$), les auteurs font varier la transmission à une profondeur donnée, en jouant sur le rapport des deux longueurs caractéristiques.

Parce que le système étudié est de nature différente, cette étude sort du cadre de cette thèse. Elle montre toutefois, que non linéarité et hétérogénéité peuvent aboutir à des résultats étonnants.

1.3.4 Objectifs de la thèse

Comme nous l'avons vu, la propagation non linéaire en milieu faiblement hétérogène fait l'objet d'études théoriques, numériques et expérimentales, où le couplage possible

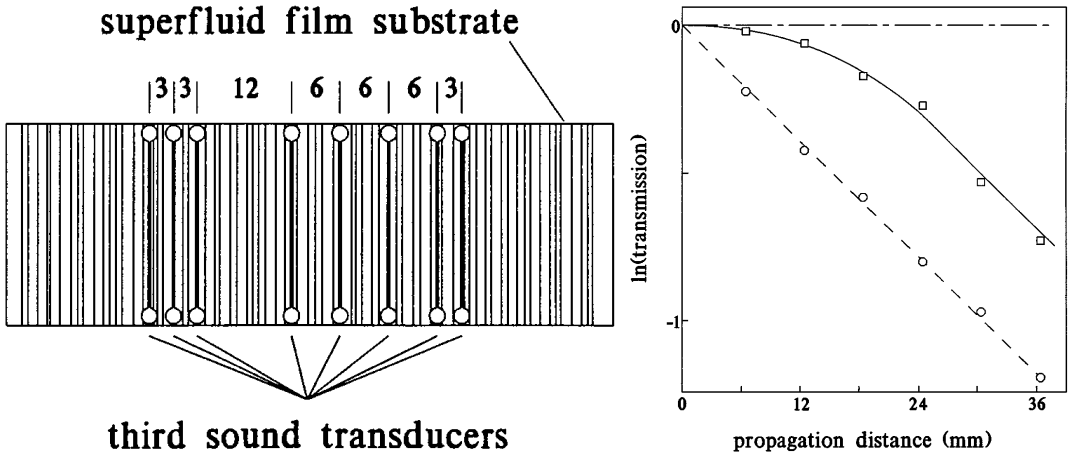


Figure 1.8 – D'après [41] : À gauche, schéma du montage expérimental. Les rainures sont alignées perpendiculairement à la longueur de l'échantillon. Les nombres donnent les distances relatives entre transducteurs récepteurs (en mm). À droite, logarithme de la transmission en fonction de la profondeur, mesuré pour trois niveaux d'excitation différents. La transmission est influencée par le degré de non linéarité (régime linéaire ⇔ ligne tiretée, régime très non linéaire ⇔ tiret-point, régime intermédiaire ⇔ ligne continue).

entre non linéarité et hétérogénéité n'est pas pris en compte. Les schémas numériques employés ne permettent généralement pas de rendre compte de la rétro-diffusion. C'est parfaitement justifié dans ce cadre, où le degré d'hétérogénéité des milieux est faible. D'autres auteurs proposent des simulations numériques directes de l'équation de Lighthill-Westervelt (1.50), ou des équations constitutives de l'acoustique. Ces simulations sont très coûteuses en temps de calcul. Leurs maillages spatial et temporel les limitent en pratique à la propagation faiblement non linéaire.

L'étude de la propagation du son dans les milieux granulaires montre que ceux-ci sont le siège de phénomènes variés. On y observe différents modes de contact entre les grains, des phénomènes de relaxation particuliers, des modifications irréversibles, de la diffusion multiple et des effets non linéaires. L'observation de ces derniers est problématique dans certains régimes de diffusion multiple. En effet, pour observer une *coda*, le libre parcours moyen élastique doit être inférieur aux dimensions du milieu. Sans changer ces dernières –ni la taille des grains–, il est nécessaire d'augmenter la fréquence de travail. Or, les contacts entre les grains dissipent les hautes fréquences. La marque de la non linéarité ne peut alors être observée que sur les composantes de plus basses fréquences (composantes auto-démodulées), ou sur le fondamental.

Dans les expériences s'intéressant à la *coda* dans les milieux granulaires [38], la contrainte statique appliquée au milieu, nécessaire à créer les chaines de forces permettant une propagation acoustique efficace, impose de travailler dans une enceinte confinée. Les signaux mesurés après l'onde balistique proviennent donc en partie de rebonds sur les parois limitant le milieu. La comparaison à des modèles de diffusion pour en déduire les paramètres statistiques du milieu nécessite donc d'y inclure des conditions aux limites réalistes, déli-

cates à intégrer.

La problématique de cette thèse expérimentale est double. Dans un premier temps (cf. chapitre 2), nous avons étudié la transmission cohérente d'une onde de choc, très non linéaire, à travers des milieux aléatoires fortement hétérogènes.

Deux milieux hétérogènes aléatoires "discrets" ont été étudiés. Le premier est une forêt de tiges identiques en acier, immergée dans l'eau. Le second est constitué d'un gel dans lequel des bulles de gaz identiques sont piégées. Nos milieux se distinguent par deux points de ceux présentés dans l'étude bibliographique. D'une part, les hétérogénéités qui les composent présentent des contrastes relatifs de vitesse du son et de masse volumique très importants avec le milieu environnant. D'autre part, les hétérogénéités ne sont pas en contact.

Contrairement aux expériences dans les milieux granulaires, nous avons travaillé en immersion, sans contact entre l'émetteur, ou le récepteur, et le milieu. Cela permet de reproduire plus facilement les expériences, et de s'assurer que l'amplitude transmise dans le milieu est toujours la même, point important en régime non linéaire.
Nous avons par ailleurs travaillé avec des récepteurs dont la taille caractéristique est de l'ordre de la longueur d'onde, ce qui permet d'une part de bien contrôler le processus de moyenne pour l'obtention de l'onde cohérente, et d'autre part de pouvoir étudier l'onde incohérente, la partie multiplement diffusée des signaux. Nous ferons en particulier état de la première observation de *coda* à travers des milieux bulleux.

La deuxième partie (cf. chapitre 3) de cette thèse s'intéresse justement à la partie incohérente de l'onde transmise, dans un régime de propagation linéaire. Deux précédentes études en rétro-diffusion [42, 43] ont fourni des mesures différentes de la constante de diffusion des ultrasons dans les assemblages de tiges. Nous voulons trancher en mesurant la constante de diffusion à l'aide d'une troisième méthode, basée sur la mesure du champ incohérent en transmission. Nous avons travaillé sur des échantillons suffisamment larges et hauts par rapport à leur épaisseur, pour s'affranchir des conditions aux limites.

CHAPITRE 2

Transmission cohérente d'une onde de choc à travers un milieu multiplement diffuseur

Nous étudions dans ce chapitre la transmission cohérente, d'une onde acoustique non linéaire, à travers deux milieux hétérogènes aléatoires discrets, multiplement diffuseurs. Le premier consiste en un arrangement aléatoire d'inclusions solides immergées dans l'eau. La transmission cohérente de ce milieu a déjà fait l'objet d'études en régime linéaire. Celles-ci ont permis de mesurer une atténuation et une vitesse pour l'onde moyenne. Le deuxième milieu est un arrangement aléatoire de bulles de gaz statiques piégées dans un gel aqueux.

En régime non linéaire, ces deux milieux offrent une configuration d'étude originale :

- Les diffuseurs présentent un contraste élevé avec le milieu environnant ;
- Les diffuseurs, élastiques ou fluides, sont sans contacts susceptibles de dissiper l'énergie acoustique. Il est donc possible d'y propager des ultrasons aux fréquences de l'ordre du MHz, auxquelles la diffusion y est forte.

Nous voulons répondre à la question suivante : que se passe-t-il quand une onde d'amplitude modérée à élevée, correspondant à un régime de propagation non linéaire, est envoyée dans ces milieux fortement hétérogènes ?

Au chapitre 1, nous avons identifié les limites des approches théoriques et numériques déjà développées pour l'étude de la propagation acoustique non linéaire en milieu hétérogène.

Dans le cas de nos milieux très fortement hétérogènes, nous adoptons donc une approche expérimentale. Deux configurations sont *a priori* envisageables : focaliser fortement à l'entrée du milieu, et voir si des effets non linéaires se développent en son sein. Émettre fort, loin du milieu, afin qu'une onde de choc se forme dans l'eau avant de le rencontrer et mesurer sa transmission. Nous expliquerons pourquoi nous avons retenu cette deuxième configuration.

2.1 Une configuration expérimentale originale

Insonifier un milieu à l'aide d'un transducteur mono-élément, émettant une onde d'amplitude suffisamment élevée, correspondant à un régime de propagation non linéaire, et dont la forme reste la plus stable possible à travers l'échantillon n'est pas chose aisée. Une source de dimension caractéristique inférieure ou égale à la longueur d'onde engendre une onde divergente dont la forme est stable. Mais parce que l'onde diverge, et parce que la surface émettrice est petite, la puissance qu'elle délivre localement reste limitée.

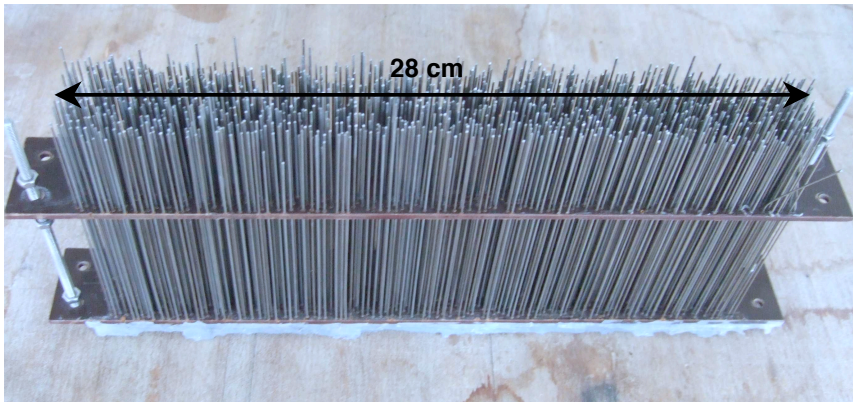


Figure 2.1 – Photo d'une forêt de tiges.

Une source de dimension caractéristique bien supérieure à la longueur d'onde émet plus d'énergie, mais présente l'inconvénient d'engendrer une forme d'onde dont les variations spatio-temporelles sont plus complexes. En régime impulsionnel, ces variations ont pour origine les interférences entre l'onde directe et l'onde "de bord" émises par le transducteur. Les transducteurs focalisés ont l'avantage de pouvoir concentrer beaucoup d'énergie en une région précise. Cependant, la forme d'onde qu'ils engendrent n'est jamais stable [44]. Comme nous le verrons plus loin, elle l'est, par contre, pour un transducteur plan, au-delà d'une certaine distance. Nous avons donc choisi de travailler avec un transducteur plan de taille caractéristique grande devant la longueur d'onde.

2.1.1 Longueurs caractéristiques

Nous sommes ici principalement intéressés par la propagation non linéaire en régime de diffusion multiple (au sens du mot anglais "scattering"). Cependant, notre configuration expérimentale dépend aussi de la diffraction induite par la source acoustique, et de l'atténuation par absorption. Le choix de la configuration expérimentale résulte donc d'un compromis entre non linéarité, diffusion, diffraction et atténuation. À chacun de ces effets est associée une longueur caractéristique : la distance de formation du choc est la distance caractéristique des effets non linéaires cumulatifs, la distance de Rayleigh tient compte de la diffraction, et la longueur d'absorption et le libre parcours moyen élastique rendent compte de l'atténuation par absorption et par diffusion.

Libre parcours moyen élastique

Le libre parcours moyen élastique l_e dépend directement du choix de l'échantillon. Nous avons dans un premier temps travaillé avec des forêts de tiges d'acier de diamètre égal à $2r_d = 0,8$ mm, et de densité n égale à 12 tiges/cm^2, immergées dans l'eau.

Ces échantillons ont été conçus au laboratoire [42]. Les tiges sont maintenues entre deux plaques d'époxy préalablement trouées sur le même plan (cf. figure 2.1). La position des trous est générée pseudo-aléatoirement en imposant une distance d'exclusion d_{exc} pour éviter que deux tiges ne soient en contact. Cette distance est proportionnelle à la distance moyenne entre deux tiges qui dépend de la densité de tiges. Elle vaut par exemple 1,88 mm

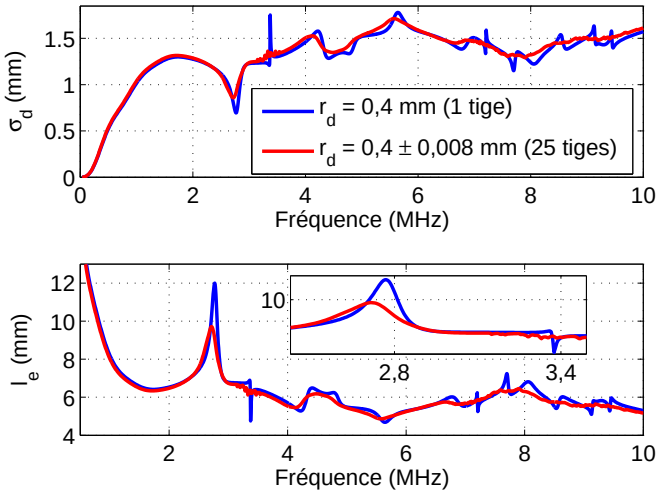


Figure 2.2 – (a) : Section efficace totale de diffusion d'une tige d'acier de diamètre $2r_d = 0,8$ mm ($c_L = 5,7$ mm/μs, $c_T = 3$ mm/μs, $\rho_d = 7850$ kg/m^3) immergée dans l'eau ($c_0 = 1,5$ mm/μs). (b) : Libre parcours moyen élastique l_e en fonction de la fréquence pour une densité de tiges n égale à 12 tiges/cm^2.

pour $n = 12$ tiges/cm^2. Le fait d'imposer une distance d'exclusion entre les tiges entraîne l'apparition de corrélations spatiales entre les diffuseurs.

Le libre parcours moyen élastique l_e est, en première approximation (cf. § 2.3.2), inversement proportionnel à la densité n des diffuseurs et à leur section efficace totale de diffusion σ_d [1]. Celle-ci est définie comme le rapport de la puissance diffusée sur la puissance incidente par unité de longueur (à 2D, par unité de surface à 3D). Elle est une mesure du pouvoir diffusant de l'hétérogénéité, et peut être calculée analytiquement dans le cas d'une tige solide immergée dans un fluide. Nous l'avons d'ailleurs représentée en fonction de la fréquence, ainsi que le libre parcours moyen élastique l_e, pour une densité de tiges n égale à 12 tiges/cm^2 (6 % de remplissage surfacique), sur la figure 2.2.

La section efficace totale de diffusion rend compte à la fois des comportements rigides et résonnants de la tige, et de leurs interférences. Comme les résonances sont plus ou moins en phase avec la diffusion rigide, il apparaît des "creux" ou des "pics" dans la section efficace totale de diffusion [46].

Un creux dans la section efficace totale de diffusion traduit un faible pouvoir diffusant, et correspond à un maximum local du libre parcours moyen élastique. À une fréquence donnée, si le libre parcours moyen élastique est plus élevé, alors le milieu est plus transparent. On note par exemple une résonance qui va dans ce sens à la fréquence de 2,75 MHz. À cette fréquence, le libre parcours moyen vaut environ 12 mm. À l'inverse, la résonance très piquée à la fréquence de 3,38 MHz traduit un pouvoir diffusant plus fort et le libre parcours moyen élastique est donc plus faible à cette fréquence ($l_e \sim 4,8$ mm). Sur l'inter-

1. La prise en compte des corrélations spatiales entre diffuseurs modifie la valeur du libre parcours moyen élastique [45]. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 2.3.2. On se contente pour le moment de l'ordre de grandeur des valeurs fournies par l'expression $l_e \simeq (n\sigma_d)^{-1}$.

valle de fréquence 4-10 MHz, bien qu'elles soient d'amplitudes plus faibles, les résonances donnent cette allure accidentée aux deux courbes de la section efficace totale de diffusion et du libre parcours moyen élastique.

Chaque position des résonances est déterminée par les paramètres du milieu environnant ($c_0 = 1,5$ mm/μs, $\rho_0 = 1000$ kg/m^3), les paramètres élastiques de la tige ($c_L = 5,7$ mm/μs, $c_T = 3$ mm/μs, $\rho_d = 7850$ kg/m^3), ainsi que par son rayon.

Si le rayon nominal r_d des tiges est égal à 0,4 mm, la mesure systématique de ce dernier sur un ensemble de tiges a montré que le rayon de la tige est bien décrit par une loi statistique donnée par une gaussienne de moyenne 0,4 mm et d'écart-type 0,08 mm [42]. Les courbes rouges de la figure 2.2, ont été calculées en moyennant la section efficace totale de diffusion sur 25 tiges différentes.

On voit que la polydispersité du rayon des tiges lisse les courbes de la section efficace totale de diffusion et du libre parcours moyen élastique. À 2,75 MHz par exemple, le libre parcours moyen élastique, ne vaut plus que 10 mm après moyenne sur 25 tiges. Les résonances étroites, y compris celle à 3,38 MHz, ont quant à elles complètement disparu.

Aux fréquences inférieures à la résonance à 2,75 MHz, le libre parcours moyen élastique doit augmenter, ce qui est observé en dessous de 2 MHz sur la figure 2.2. À plus haute fréquence, dans la limite "géométrique", la section efficace totale de diffusion tend vers $4r_d = 1,6$ mm. Le libre parcours moyen élastique l_e est donc à peu près égal à 5 mm, une valeur proche de celles observées sur l'intervalle 4-10 MHz.

Pour avoir une diffusion forte, il faut donc se placer soit autour de 1,5-2 MHz, soit autour de 3-4 MHz. En choisissant de travailler autour de 3-4 MHz, on se place dans une configuration plus favorable à la non linéarité puisque la distance de formation du choc L_c est inversement proportionnelle à la fréquence. En incluant la résonance dans la bande étudiée, on enrichit notre problème d'un point au comportement singulier. Nous travaillerons donc autour de 3 MHz.

Contraintes expérimentales liées à la diffraction

La fréquence choisie impose une limite supérieure aux dimensions du capteur. En effet, il est techniquement difficile d'assurer une réponse homogène de la surface émettrice, si le rayon de cette dernière est trop grand devant la longueur d'onde. Dans l'eau, la longueur d'onde λ correspondant à la fréquence 3,5 MHz vaut 0,43 mm. Pour cette même fréquence, le diamètre maximal proposé par le constructeur est $2r = 38$ mm [2].

Nous travaillerons en régime impulsionnel, émettant un train d'onde apodisé de 3 ou 4 périodes. Dans cette configuration, sur l'axe z du capteur, les ondes venant du bord et du centre du capteur interfèrent, modifiant la forme d'onde, et se traduisant par l'alternance de maxima et de minima d'amplitude entre $z = 10$ mm et $z = 60$ mm (cf. figures 2.3). Au-delà, la forme d'onde se stabilise. Le dernier maximum d'amplitude est situé à la distance r^2/λ du plan de la source.

2. Ce diamètre est générique pour les tailles de boîtiers de capteurs.

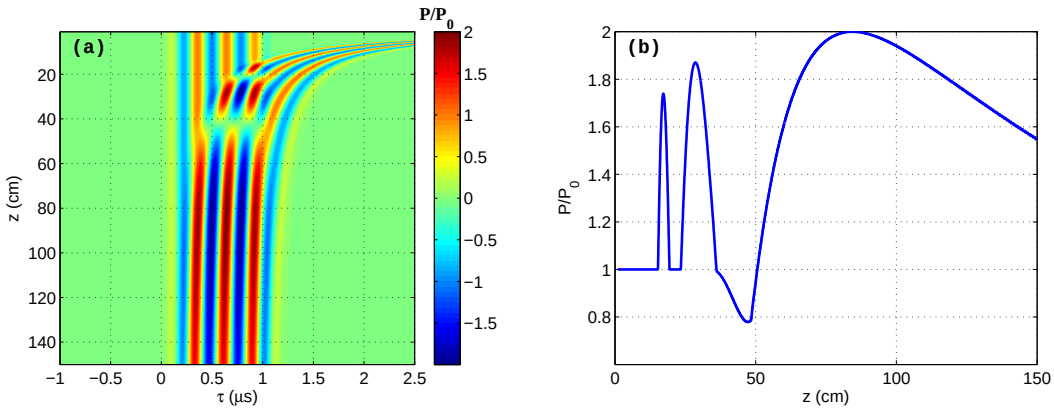


Figure 2.3 – Pression rayonnée par un transducteur plan de diamètre $2r = 38$ mm, de fréquence centrale 3,5 MHz, obtenue à l'aide de la formule de Stepanishen [47] (régime impulsionnel linéaire). (a) : Pression sur l'axe z du transducteur en fonction du temps retardée $\tau = t - z/c_0$. (b) : Pression effective sur l'axe ($x = 0$).

De façon à s'affranchir des effets de champ proche, il est nécessaire dans nos expériences que la forme d'onde soit stable du point de vue de la diffraction, entre le moment où l'onde pénètre dans le milieu, et le moment où elle en ressort. Le milieu à étudier doit donc être placé au delà de la zone d'interférences de l'onde directe et de l'onde de bord.

La distance caractéristique de la diffraction est la distance de Rayleigh, $d_R = \pi r^2/\lambda \sim 2,6$ m. Avant cette distance, le faisceau acoustique reste assez confiné le long de l'axe de propagation ce qui est favorable au développement de la non linéarité. Au-delà de cette distance, le faisceau acoustique diverge, ce qui se traduit par une diminution de l'amplitude sur l'axe. Sur la figure 2.4, on a représenté la pression "effective" –valeur maximale de l'enveloppe de la pression– dans un plan perpendiculaire à la source, et passant par l'axe de celle-ci. La coordonnée z correspond à la distance depuis la source (profondeur) tandis que la dimension latérale est décrite par la coordonnée x. Les hautes pressions acoustiques sont bien contenues dans un rayon de 10 mm autour de l'axe de la source ($-10 < x < 10$), entre 60 et 120 cm. C'est la zone dans laquelle nous devons placer notre échantillon.

Distance de formation du choc et longueur d'absorption

Du point de vue de la diffraction, nous venons de montrer qu'il est nécessaire de placer l'échantillon sur l'axe du transducteur, dans l'intervalle 60-120 cm. Examinons maintenant les effets de l'atténuation thermo-visqueuse. À 3,5 MHz, dans l'eau, la longueur d'atténuation par absorption $L_a = 1/\alpha$ (1.48) est égale à 3,4 m [48]. Cette distance est plus grande que la borne supérieure de l'intervalle défini comme optimale du point de vue de la diffraction. L'absorption est donc moins critique que la diffraction dans notre configuration expérimentale[3].

3. L'atténuation par absorption est proportionnelle, dans l'eau, au carré de la fréquence. En toute rigueur, il faut donc aussi considérer l'atténuation des fréquences harmoniques créées par la propagation

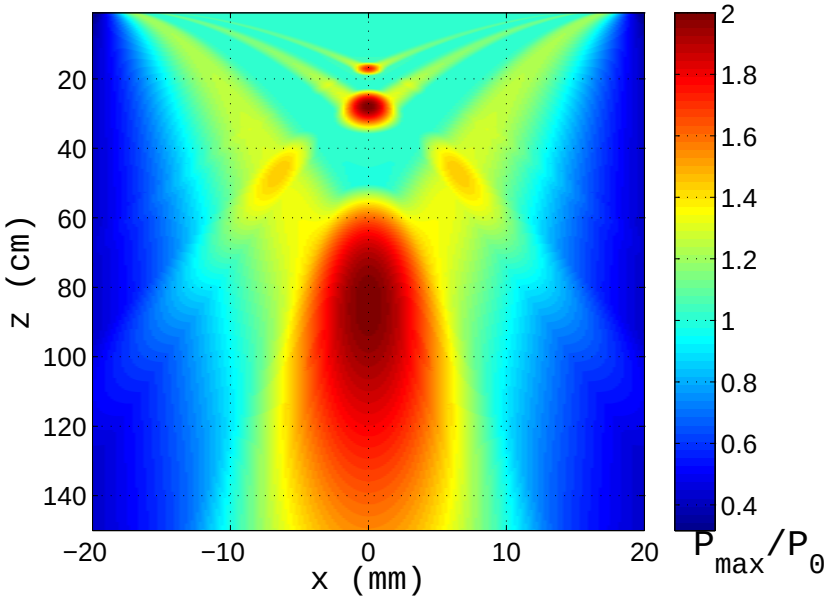


Figure 2.4 – Pression effective rayonnée par un transducteur plan de diamètre $2r = 38$ mm, de fréquence centrale 3,5 MHz, en fonction des coordonnées latérale (x) et de profondeur (z).

Le calcul de la distance de formation du choc L_c dépend de l'amplitude d'excitation. Pour que l'onde de choc soit pleinement formée avant de pénétrer le milieu hétérogène, il faut que l'onde ait parcouru une distance supérieure à 1,5 fois la distance de formation du choc. En prenant cette dernière égale à 0,5 m, on obtient à l'aide de la relation (1.42), une vitesse particulaire à l'émission v_0 égale à 0,059 m/s (dans l'eau, $c_0 \simeq 1500$ m/s et $\beta \simeq 3,5$). Dans ce cas, le nombre de Gol'dberg (1.49) $\Gamma_G = L_a/L_c \sim 10$ est supérieur à 1, et les effets non linéaires dominent l'atténuation.

Pour les besoins de l'expérience, il faut pouvoir passer d'un régime linéaire à un régime non linéaire, sans changer la distance source-échantillon. La distance de choc dépendant de l'amplitude v_0 émise, c'est en variant cette dernière, qu'il sera possible de l'ajuster pour passer d'un régime linéaire à un régime non linéaire. Les longueurs caractéristiques de notre problème sont résumées sur la figure 2.5.

2.1.2 Expériences préliminaires

Signal à la source

Le générateur (Tektronik, AFG 3101) émet un train d'onde de quatre périodes à une fréquence centrale de 3,5 MHz, fenêtré par une gaussienne (figure 2.6.a). L'apodisation gaussienne permet d'abaisser le niveau des lobes secondaires à -20 dB en dessous de celui du lobe principal, sans trop élargir ce dernier, comme le montre la figure 2.6.b.

non linéaire. Par exemple, L_a vaut 85 cm à 7 MHz.

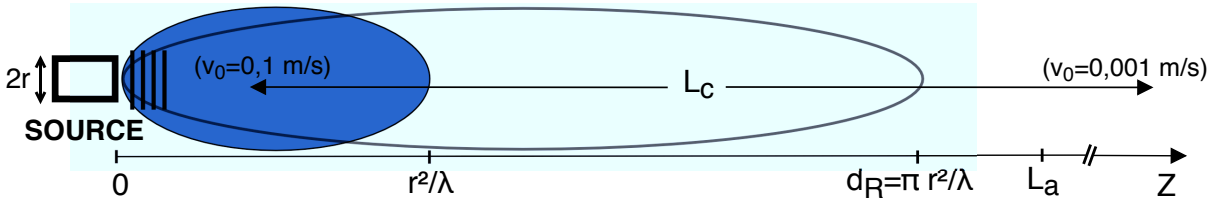


Figure 2.5 – Comparaison des longueurs caractéristiques dans notre configuration expérimentale : transducteur circulaire plan de $\varnothing = 38$ mm, en régime impulsionnel (fréquence centrale $f_0 = 3,5$ MHz). Les ellipses bleue et blanche symbolisent respectivement la zone d'interférences et le secteur sur lequel le faisceau acoustique reste collimaté. La distance de formation du choc L_c est inversement proportionnelle à l'amplitude de vitesse particulaire émise v_0.

Après avoir été amplifié (amplificateur AR, 75A250A, 75 W, 10 kHz-250 MHz), le signal est émis par un transducteur circulaire plan de diamètre $2r = 38$ mm, de fréquence centrale nominale f_c égale à 3,5 MHz, et dont la largeur de bande à -6 dB, $\Delta f/f_c$, est égale à 100%. Les signaux émis, mesurés très près de la surface émettrice à l'aide d'un interféromètre optique [49,50], sont représentés sur la figure 2.6.c, où chaque couleur correspond à une tension délivrée par le générateur [4]. On peut y lire que l'amplitude maximale émise dépasse 0,1 MPa. Les spectres associés sont représentés sur la figure 2.6.d. Ils sont normalisés par la valeur maximale du spectre obtenu pour l'amplitude la plus élevée (courbe rouge). L'amplitude des premiers lobes secondaires est inférieure à -20 dB, et les spectres des signaux émis ne montrent pas de non linéarité à la source.

Pression rayonnée dans l'eau

Le champ de pression rayonné par le transducteur a été mesuré en champ proche et lointain (entre 50 et 90 mm) à l'aide d'un hydrophone ONDA "Golden Lipstick", d'élément actif de diamètre 200 μm, calibré sur la bande de fréquence 0,5-20 MHz grâce à l'interféromètre optique mentionné plus haut. Ces mesures ont montré que la distance optimale de la source à l'échantillon est comprise entre 70 et 80 cm.

Sur la figure 2.7, on a représenté les signaux mesurés sur l'axe du transducteur à $z \simeq 73$ cm et $z \simeq 80$ cm de la surface de ce dernier. Les courbes de spectre en bleu confirment que le premier niveau d'excitation ($v_0 = 0,005$ m/s) reste linéaire, malgré la grande distance qui sépare les deux plans de mesure du plan de la source : l'amplitude du spectre autour de 7 MHz est à peine supérieure au niveau du bruit, et environ 30 dB la séparent de l'amplitude à 3,5 MHz (figures 2.7.b et 2.7.d).

Pour les deux autres niveaux d'excitation ($v_0 = 0,044$ m/s et $v_0 = 0,069$ m/s), la forme d'onde mesurée est typique d'une onde très non linéaire (courbes vertes et rouges des figures 2.7.a et 2.7.c). Tout comme l'amplitude maximale de la pression, elle ne varie pas d'un plan de mesure à l'autre. Pour $v_0 = 0,044$ m/s, la pression maximale mesurée vaut 0,1 MPa (courbes vertes des figures 2.7.a et 2.7.c). Elle vaut 0,16 MPa pour $v_0 = 0,069$ m/s

4. La précision des mesures optiques de la vitesse particulaire est ± 5 %.

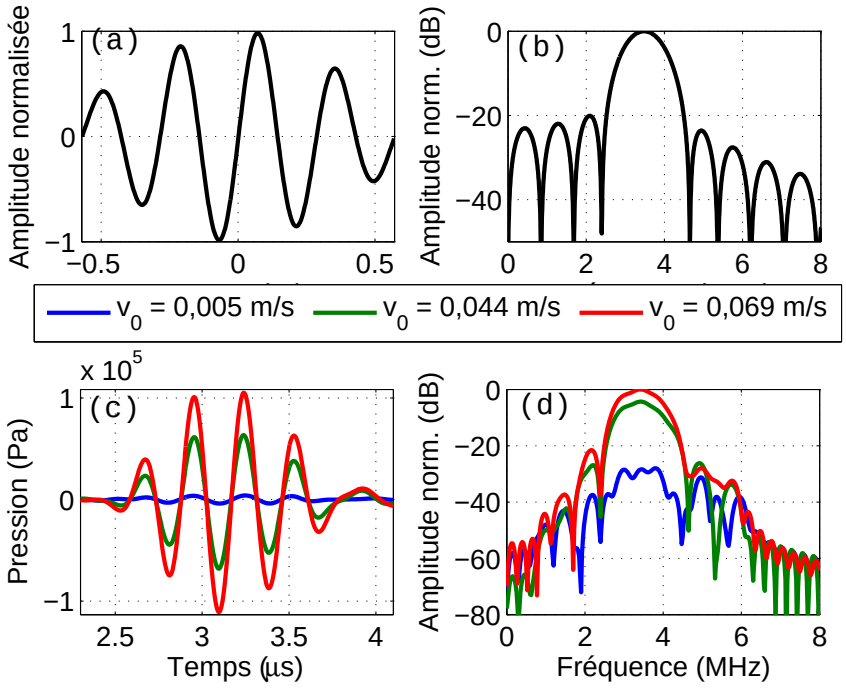


Figure 2.6 – (a) et (b) : Signal du générateur et son spectre (amplitude en dB).
(c) et (d) : Signaux et spectres correspondants, émis par le transducteur (mesure à l'interféromètre optique), pour différentes amplitudes d'excitation. Les spectres sont normalisés par le maximum du spectre à l'amplitude la plus élevée (courbe rouge).

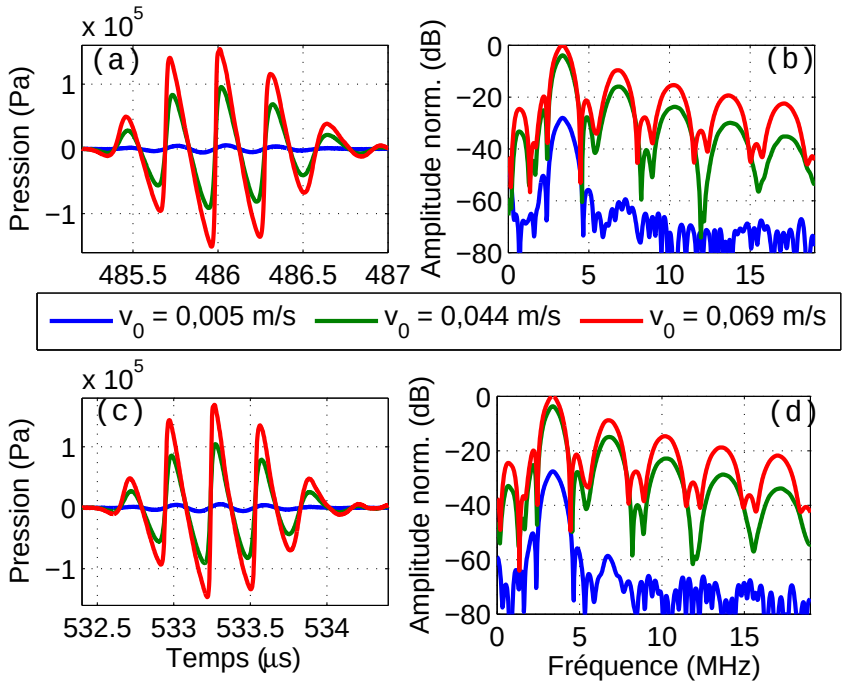


Figure 2.7 – Pressions mesurées à l'aide de l'hydrophone, sur l'axe du transducteur en $z \simeq 73$ cm (a), et en $z \simeq 80$ cm (c), pour différents niveaux d'excitation. (b) et (d) : Spectres associés, normalisés par le maximum du spectre de la mesure à $z \simeq 73$ cm, à l'amplitude la plus élevée [courbe rouge de la figure (b)].

(courbes rouges des figures 2.7.a et 2.7.c). Comme on peut l'observer sur les courbes vertes et rouges des figures 2.7.b et 2.7.d, le raidissement de la forme d'onde se traduit dans le spectre par l'apparition d'harmoniques des fréquences initiales. Ceux-ci sont d'ailleurs engendrés bien au-delà de la limite haute de l'intervalle de calibration de l'hydrophone.

On notera par ailleurs la présence d'une composante de basse fréquence, autour de 0,7 MHz, qui n'apparaît pas en régime linéaire. Nous avons mesuré l'évolution de son amplitude en fonction de l'amplitude émise v_0. On trouve une dépendance linéaire avec ${v_0}^2$, qui indique que son processus de génération est non linéaire. Il s'agit de l'auto-démodulation non linéaire du train d'ondes initial [8, 9], dont la durée approximative, égale à 1,5 μs, correspond à une fréquence d'environ 0,7 MHz.

Finalement, les mesures de la pression rayonnée dans l'eau montrent qu'il est possible d'obtenir une onde de choc (pour $v_0 = 0,069$ m/s, $L_c \simeq 42$ cm) dont la forme temporelle est stable sur l'axe de la source, à des distances de celle-ci comprises entre 70 et 80 cm. En régime non linéaire, la stabilité de la forme d'onde dans l'eau, entre l'endroit où elle pénètre le milieu et celui où elle en ressort, sera primordiale pour l'évaluation du libre parcours moyen élastique (cf. 2.3.4), notamment pour s'affranchir de la propagation dans l'eau sur une distance équivalente à la longueur de l'échantillon.

Nous avons aussi mesuré le champ acoustique suivant un axe perpendiculaire à celui du transducteur, à 71 cm de celui-ci. Il est représenté, en régime non linéaire, sous forme d'un B-scan (représentation position-temps) sur la figure 2.8.a. Sur la figure 2.8.b, on a représenté l'amplitude maximale de la pression suivant un diamètre du transducteur, dans les régimes linéaire (tirets) et non linéaire (trait continu). La largeur à -6 dB du faisceau acoustique est approximativement égale à 20 mm dans les deux cas, ce qui corrobore les résultats des calculs théoriques selon la formule de Stepanishen, correspondant à un régime linéaire (cf. § 2.1.1). L'amplitude des bords du faisceau acoustique est un peu plus élevée en régime linéaire. Ceci s'explique par la diffraction de la fréquence fondamentale, plus forte, que celle des fréquences harmoniques, créées dans le volume balayé par l'onde. Nous vérifions ainsi que le faisceau reste bien collimaté avant d'atteindre le milieu multiplement diffuseur. Cela nous assure en particulier, que nos expériences ne sont pas polluées par des échos venant de réflexions sur les deux plaques inférieure et supérieure le limitant.

2.2 Transmission en régime non linéaire

2.2.1 Dispositif expérimental

Le schéma de l'expérience est représenté sur la figure 2.9. Il reprend le matériel présenté à la section précédente. Un train d'onde de 4 périodes de fréquence centrale 3,5 MHz est engendré à l'aide du générateur de fonction arbitraire Tektronik, avant d'être amplifié par l'amplificateur AR. Le signal résultant est émis dans l'eau à l'aide du transducteur circulaire plan de diamètre 38 mm caractérisé plus haut. Nous faisons varier l'amplitude v_0

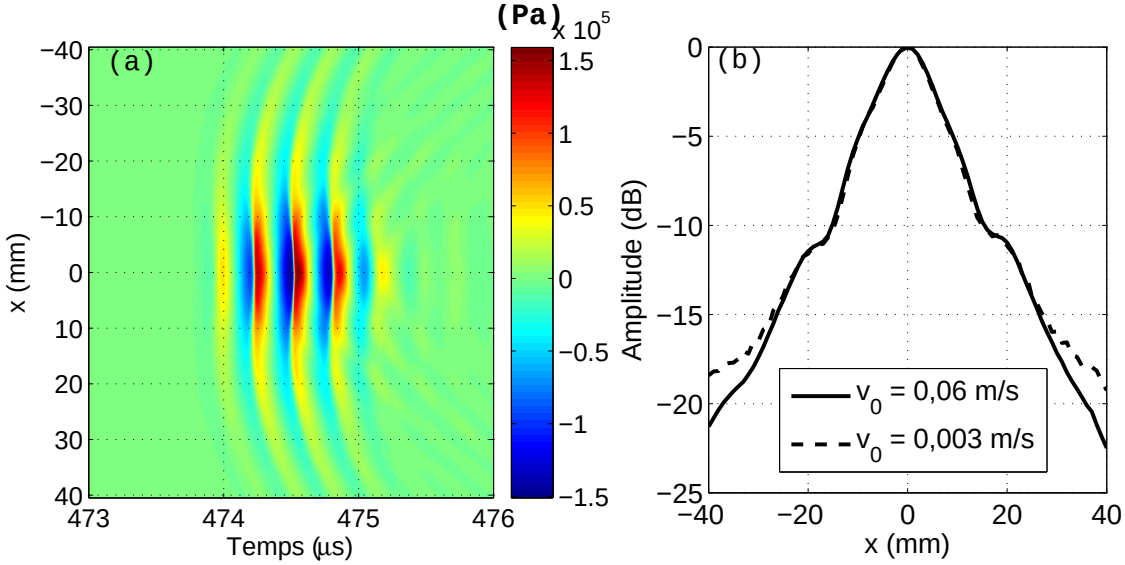


Figure 2.8 – (a) : Mesure de la pression dans l'eau, à $z \simeq 71$ cm de la source.
(b) : Amplitude maximale mesurée suivant un diamètre du transducteur.

de la vitesse particulaire émise de 0,003 à 0,07 m/s. L'amplitude la plus faible correspond seule à un régime de propagation linéaire. Ce dernier est non linéaire pour $v_0 > 0,003$ m/s. Pour des valeurs suffisamment élevées ($v_0 > 0,056$ m/s, $L_c < 52$ cm), une onde de choc est formée lors de la propagation dans l'eau, avant d'atteindre le milieu multiplement diffuseur. L'échantillon est la forêt de tiges d'acier décrite au paragraphe 2.1.1. L'hydrophone ONDA "Golden Lipstick" ($\varnothing$= 200 μm, 0,5-20 MHz), placé derrière l'échantillon –à 80 cm de la source quelle que soit son épaisseur L–, mesure une réalisation $\phi(t)$ de l'onde transmise. En travaillant à cette distance, nous avons montré précédemment que notre configuration est optimisée du point de vue de la diffraction, de l'atténuation et des effets non linéaires.

Afin d'estimer l'onde cohérente $\langle\phi(t)\rangle$, l'acquisition est répétée plusieurs centaines de fois ($N = 400$ réalisations) le long de l'échantillon en déplaçant la source et l'hydrophone qui se font face en permanence. Pour chaque épaisseur L d'échantillon, cette mesure est répétée pour six amplitudes d'excitation.

Une ligne de référence est acquise dans l'eau, en l'absence d'échantillon. Elle permet de corriger le défaut de parallélisme entre les axes de translation latérale du transducteur et de l'hydrophone. Celui-ci est en effet critique pour le passage à la moyenne car, il n'est pas négligeable en comparaison des longueurs d'onde associées aux fréquences harmoniques engendrées par la propagation non linéaire (à 14 MHz, $\lambda = 0,1$ mm dans l'eau). S'il y a déphasage des signaux entre deux positions différentes, celui-ci ne doit être que la conséquence de la propagation dans la forêt de tiges.

Enfin, la calibration de l'hydrophone sur l'intervalle 0,5-20 MHz a montré que sa sensibilité dépend de la fréquence, nécessitant l'application d'un facteur correctif. Les fréquences

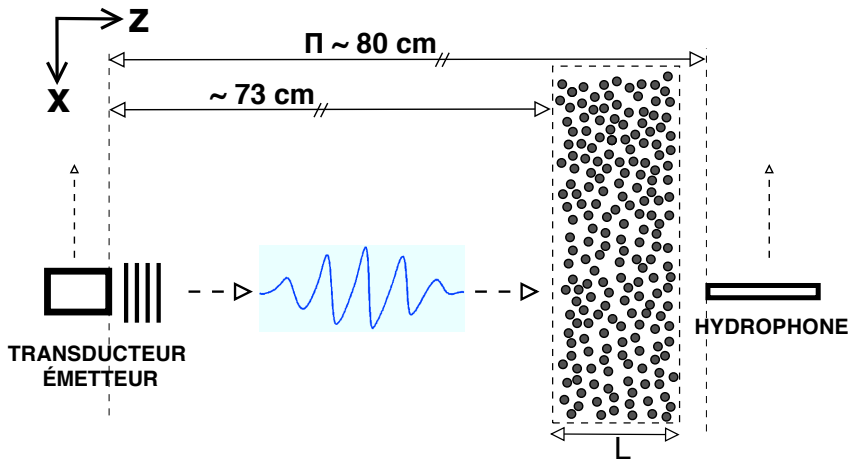


Figure 2.9 – Dispositif expérimental.

n'appartenant pas à cet intervalle sont filtrées lors de cette étape.

2.2.2 Étude de la transmission balistique

Dans un premier temps, examinons la transmission balistique, c'est-à-dire les premiers instants des signaux bruts transmis. La figure 2.10 représente une partie des signaux transmis à travers l'échantillon d'épaisseur $L = 30$ mm, dans le cas de l'amplitude d'excitation maximale ($v_0 = 0,07$ m/s). Sur le B-scan 2.10.a, la pression (en Pascal) est codée en échelle de couleurs. Le front balistique (située entre 534 et 536 μs) se démarque assez nettement du reste par la cohérence spatiale des signaux transmis. Cette cohérente spatiale n'empêche cependant pas l'alternance de zones d'ombres (entre 10 et 25 mm par exemple) et de zones claires (entre -30 et -20 mm par exemple) le long du front. Sur le B-scan 2.10.b, on a représenté le signe de ces mêmes signaux. Grâce à cette représentation, on confirme la forte cohérence spatiale présente au niveau du front balistique –alternance très nette de rayures bleues et rouges–, mais on révèle aussi, pour des arrivées plus tardives, une cohérence spatiale d'extension moins large.

Sur la figure 2.11, nous avons représenté trois signaux issus de la figure 2.10, en fonction du temps. Dix millimètres au moins séparent chaque position des deux autres. Bien que les amplitudes mesurées soient similaires (de l'ordre de 10^4 Pa), on observe sur cette figure trois formes d'onde bien différentes. Sur les figures 2.11.a et 2.11.b, on distingue clairement un premier paquet d'ondes d'une durée équivalente à l'onde incidente, autour de 535 μs, tandis que sur la figure 2.11.c, la forme d'onde transmise a perdu toute ressemblance avec l'onde incidente. Il est intéressant de constater aussi, entre les figures 2.11.a et 2.11.b, que la phase du signal transmis semble opposée. En effet, sur la figure 2.11.a, les pressions négatives sont rognées tandis que les pressions positives, très piquées, concentrent les hautes fréquences. Cette forme dissymétrique, caractéristique de la diffraction en régime non linéaire est inversée dans le cas de la figure 2.11.b : en valeur absolue, les pressions négatives sont plus grandes que les pressions positives. Enfin, on constate que les chocs

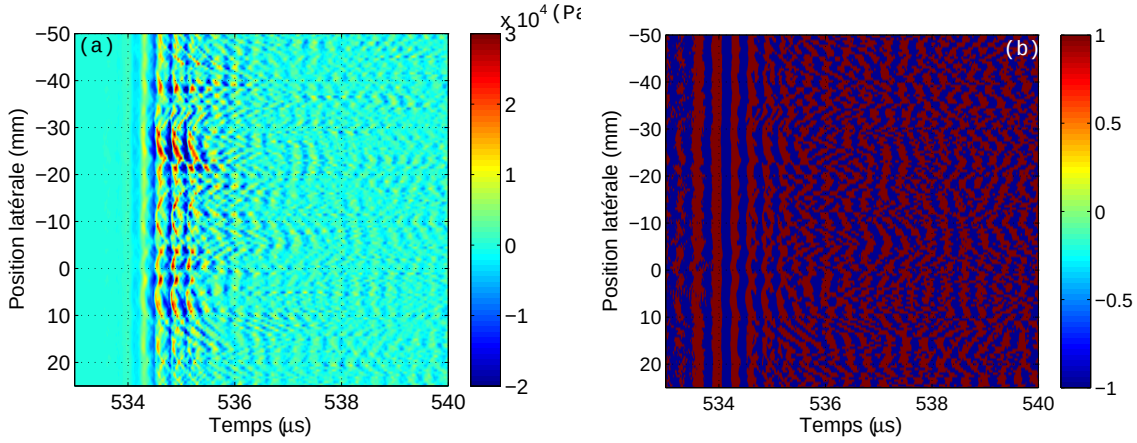


Figure 2.10 – (a) : Représentation B-scan des signaux transmis dans le cas de l'échantillon d'épaisseur $L = 30$ mm, pour l'amplitude d'émission la plus élevée. L'échelle de couleur indique la pression mesurée en Pascals. (b) : Représentation 1-bit des mêmes signaux. Le zéro de la position latérale correspond au centre de l'échantillon.

transmis ne sont plus lisses comme dans le cas d'une propagation dans l'eau, mais qu'ils présentent de temps à autres des accidents de phase.

Pierce [28] et Ganjehi [22] ont aussi observé une variabilité des formes d'onde mesurées ou simulées en régime non linéaire à travers des milieux hétérogènes (cf. § 1.3.1). Ils travaillent néanmoins avec des contrastes faibles, où les hétérogénéités (atmosphère ou cylindres de silicone immergés dans l'eau) correspondent à des variations relatives de vitesse et de masse volumique généralement inférieures à 10 %. Pour caractériser les changements de l'onde de choc à travers ces milieux, ils mesurent le temps de montée du choc de 10 à 90% des valeurs minimale et maximale.

Notre configuration expérimentale présente des contrastes bien supérieurs, correspondant à des variations relatives de plusieurs centaines de pourcents. C'est pourquoi les signaux transmis perdent parfois toute ressemblance avec le signal incident, comme on peut le voir sur la figure 2.11.

Malgré la très grande variabilité des formes d'onde, nous avons estimé un temps de montée du choc, pour chaque épaisseur traversée, dans le cas où l'amplitude émise est la plus élevée. Pour une épaisseur donnée, le temps de montée du choc de chaque réalisation est donc mesuré : on calcule d'abord la dérivée temporelle de la réalisation, puis on repère sa valeur maximale dans un intervalle donné. Le temps de montée du choc est alors égal à l'intervalle de temps séparant les deux zéros de la dérivée entourant la position de la valeur maximale. Le temps moyen de montée du choc pour l'épaisseur considérée est obtenu par moyenne des temps de montée mesurés sur chaque réalisation. On a représenté sur la figure 2.12 le temps moyen de montée du choc en fonction de l'épaisseur L. L'écart-type y est représenté sous forme de barre d'erreur [5].

5. Ne disposant que d'une seule réalisation de la transmission dans l'eau (signal "référence"), nous évaluons l'erreur sur le temps de montée du choc du signal "référence" à partir du bruit électronique.

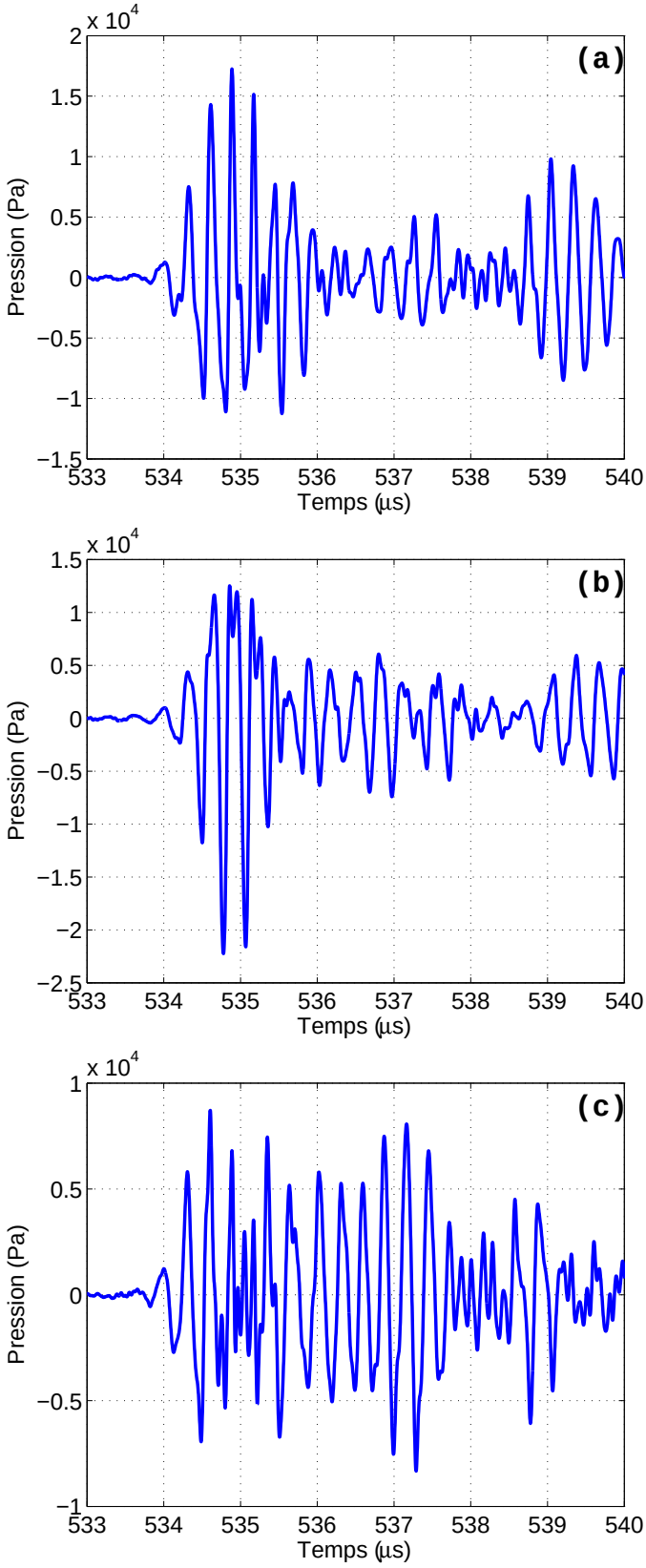


Figure 2.11 – Trois réalisations de la transmission à travers l'échantillon d'épaisseur $L = 30$ mm. Les positions latérales sont $x = -45$ mm (a), $x = -4,5$ mm (b) et $x = 12$ mm (c).

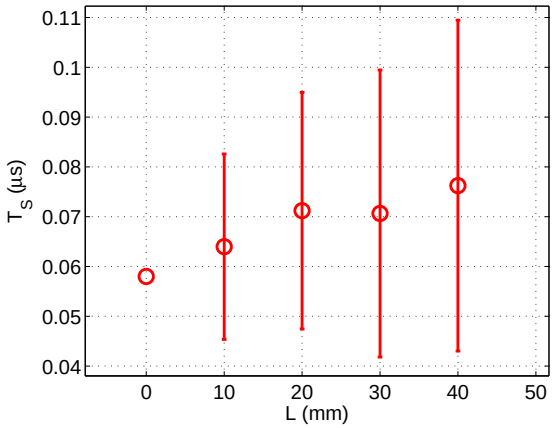


Figure 2.12 – Temps moyen de montée du choc en fonction de l'épaisseur L traversée. Pour chaque épaisseur, la moyenne porte sur $N = 400$ réalisations. Les barres d'erreur représentent les écarts-types. L'erreur sur le premier point –0,002 μs– ($L = 0$) est contenue dans le cercle.

Le temps moyen de montée du choc est affecté par la traversée du milieu puisqu'il croît, comme l'écart-type, avec l'épaisseur traversée. Pierce et Ganjehi [22,28] observent aussi un accroissement du temps de montée. Cependant, celui-ci s'accompagne d'une augmentation de l'amplitude du choc après l'hétérogénéité. Cette augmentation est expliquée par un repliement du front d'onde : l'hétérogénéité joue le rôle de lentille acoustique.

Dans notre configuration, l'arrangement aléatoire de diffuseurs forts favorise l'atténuation du champ cohérent par diffusion et les interférences destructives. L'onde balistique, après avoir traversé les échantillons les plus épais, est très chahutée. Pour certaines réalisations, les pics négatifs de la dérivée sont plus élevés en valeur absolue que les pics positifs, ce qui signifie, pour le signal de pression, que les pentes les plus fortes correspondent à des détentes. Le second principe de la thermodynamique interdit les chocs de détente. On peut alors se demander si le temps de montée du choc est un paramètre pertinent.

Notre configuration expérimentale montre une grande variabilité des signaux transmis. L'étude signal par signal de la transmission n'est pas très adaptée et reste plutôt qualitative. Cela invite à suivre l'approche statistique usuelle de la diffusion multiple, en passant à l'étude de la moyenne de l'onde transmise.

2.3 Étude de la transmission cohérente

2.3.1 Fonction de Green du champ moyen

La fonction de Green du champ moyen, ou fonction de Green moyenne, obéit rigoureusement à l'équation de Dyson [51] :

$$\langle G(\vec{r};\vec{r}_s)\rangle = G_0(\vec{r};\vec{r}_s) + \int G_0(\vec{r};\vec{r}_1)\Sigma(\vec{r}_1;\vec{r}_2)\langle G(\vec{r}_2;\vec{r}_s)\rangle d^3r_2 d^3r_1. \tag{2.1}$$

Cette équation, comme l'équation (1.14) donnant l'expression de la fonction de Green du milieu multiplement diffuseur (cf. § 1.1.2), est une relation fermée, qui peut être développée de façon récursive. Elle dépend de l'opérateur Σ, appelé opérateur de masse ("self-energy" en anglais), qui rend compte de l'hétérogénéité dans le milieu.

Dans le cas de nos milieux synthétiques discrets (un seul type de diffuseur, répliqué et réparti aléatoirement dans le milieu), l'opérateur Σ se développe en une somme infinie de termes d'ordre $O(S^p)$, avec $0 < p < \infty$. S désigne la matrice de diffusion du diffuseur. Pour un milieu dans lequel il n'y aurait qu'un seul et unique diffuseur, S résume dans un opérateur tous les événements de diffusion –simple et multiple– sur ce diffuseur.

Pour aller plus loin, on suppose que le milieu aléatoire est statistiquement homogène. Les paramètres statistiques qui le décrivent sont donc invariants par translation dans l'espace. Ainsi, l'opérateur de masse qui dépend *a priori* de $\vec{r}_1$ et de $\vec{r}_2$ ne dépend plus, sous cette hypothèse, que de la différence $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Le terme intégral de l'équation de Dyson (2.1) se transforme alors en un double produit de convolution, lui même équivalent, après transformée de Fourier spatiale ($\vec{k}$ est la variable duale de $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$), à un simple double produit. En variable ($\vec{k}$, ω), il vient :

$$\langle G(\vec{k},\omega)\rangle = G_0(\vec{k},\omega) + G_0(\vec{k},\omega)\,\Sigma(\vec{k},\omega)\,\langle G(\vec{k},\omega)\rangle. \tag{2.2}$$

G_0 est donnée par l'expression (1.5) du paragraphe 1.1.1. Il vient, après l'avoir remplacée :

$$\langle G(\vec{k},\omega)\rangle = \frac{1}{{k_0}^2 - \Sigma(\vec{k},\omega) - k^2}\,^{6}. \tag{2.3}$$

L'expression de la fonction de Green moyenne $\langle G(\vec{k},\omega)\rangle$ diffère donc de celle de $G_0(\vec{k},\omega)$, à l'opérateur de masse Σ près. Dans le cas où ce dernier ne dépend que de la pulsation ω, on peut écrire :

$$\langle G(\vec{k},\omega)\rangle = \frac{1}{{k_{eff}}^2 - k^2}, \tag{2.4}$$

avec k_{eff}, le nombre d'onde effectif donné par :

$${k_{eff}}^2(\omega) = {k_0}^2(\omega) - \Sigma(\omega). \tag{2.5}$$

En variable ($\vec{r}$, ω), la fonction de Green moyenne s'écrit :

$$\langle G(\vec{r},\,\omega)\rangle = -\frac{e^{jk_{eff}|\vec{r}-\vec{r}_s|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_s|} = -\frac{e^{-\mathrm{Im}\{k_{eff}\}|\vec{r}-\vec{r}_s|}e^{j\mathrm{Re}\{k_{eff}\}|\vec{r}-\vec{r}_s|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_s|}. \tag{2.6}$$

Pour le champ moyen, le milieu est comme homogène, isotrope, avec une vitesse et une atténuation effectives. Σ "corrige" le nombre d'onde naturel k_0. L'atténuation effective est directement reliée à la partie imaginaire du nombre d'onde effectif, tandis que la vitesse effective (de phase ou de groupe) est définie à partir de la partie réelle du nombre d'onde

6. On prend $c_{ref} = c_0$ et donc $k_{ref} = k_0$.

effectif.

Sur une distance z, l'onde moyenne est atténuée d'un facteur $\exp[-(\mathrm{Im}\{k_{eff}\}z)]$, et l'intensité cohérente l'est donc de $\exp[-(2\mathrm{Im}\{k_{eff}\}z)]$. Le libre parcours moyen élastique l_e est défini comme la distance caractéristique d'atténuation par diffusion de l'intensité cohérente :

$$l_e = \frac{1}{2\,\mathrm{Im}\{k_{eff}\}}. \tag{2.7}$$

On note respectivement c_ϕ et c_{gr}, les vitesses effectives de phase et de groupe. Elles sont données par :

$$c_\phi = \omega/\mathrm{Re}\{k_{eff}\}, \tag{2.8a}$$

$$c_{gr} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{dRe}\{k_{eff}\}. \tag{2.8b}$$

Nous avons maintenant une expression explicite de la fonction de Green moyenne, qui dépend de l'opérateur de masse. Au paragraphe suivant, nous détaillons deux approximations qui permettent le calcul de Σ.

2.3.2 Calcul de l'opérateur de masse

Cas d'un milieu très dilué

L'Independant Scattering Approximation (ISA) [2] consiste à ne retenir de l'expression de Σ que le terme d'ordre 1 en S, la matrice de diffusion du diffuseur. Physiquement, l'ISA néglige toutes les séquences de diffusion en boucle, ainsi que les séquences de diffusion sur des diffuseurs corrélés, sans toutefois restreindre l'ordre de diffusion. Elle s'applique dans le cas de milieux très dilués. Dans cette approximation, l'absence de corrélation des séquences de diffusion impose donc de ne retenir que le premier terme du développement :

$$\Sigma = \sum_{\alpha=1}^{M} \langle S_\alpha \rangle, \tag{2.9}$$

où S_α est la matrice de diffusion du diffuseur α et M le nombre de diffuseurs du milieu. Le nombre d'onde effectif k_{eff} est alors donné par [52] :

$$k_{eff}^2 = k_0^2 - ns(\vec{k}_0, \vec{k}_0), \tag{2.10}$$

où $S(\vec{k}_0, \vec{k}_0)$ désigne l'amplitude de diffusion vers l'avant du diffuseur. En reprenant la définition du libre parcours moyen élastique (équation (2.7)), on arrive donc à :

$$l_e = \frac{1}{2n\mathrm{Im}\{s(\vec{k}_0, \vec{k}_0)\}}. \tag{2.11}$$

Or, la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion vers l'avant est reliée, via le théorème optique, à la section efficace totale de diffusion σ_d du diffuseur [7]. Le libre parcours moyen

7. Le théorème optique découle de la conservation d'énergie (cf. pp 53-54 dans [2]).

élastique prend la forme que nous avions dévoilée plus tôt (cf. § 2.1.1) :

$$l_e = \frac{1}{n\sigma_d}, \tag{2.12}$$

avec n la densité surfacique de tige, et σ_d, la section efficace totale de diffusion d'une tige.

Prise en compte des corrélations entre diffuseurs

Il a été montré que la théorie précédente échoue à prédire de façon précise le libre parcours moyen élastique dans le cas de nos forêts de tiges suffisamment concentrées [45]. Un raffinement de la théorie précédente, consiste à inclure dans le calcul de Σ le seul terme de son développement étant d'ordre 2 en S [53] [8]. Ce dernier permet de prendre en compte les corrélations spatiales d'ordre 2 entre positions des diffuseurs. Celles-ci apparaissent pour des diffuseurs de taille finie, notamment quand une distance d'exclusion est imposée lors de la confection des échantillons.

Notons ici que le calcul analytique du terme d'ordre 2 en S, apparaissant dans l'expression de Σ, remplace des diffuseurs non ponctuels mais caractérisés par une directivité $s(\vec{k}_1, \vec{k}_1)$, par des diffuseurs ponctuels mais de même directivité. Finalement, à l'ordre 2 en S, l'expression du nombre d'onde effectif k_{eff} est donnée par [42] :

$$k_{eff}^2 = k_0^2 - ns(\vec{k}_0, \vec{k}_0) - n^2 s^2(\vec{k}_0, \vec{k}_0) \int_0^\infty \frac{i\pi}{2} H_0^1(k_0 r) J_0(k_{eff} r)[1 - g(r)] r \mathrm{d}r, \tag{2.13}$$

avec $g(r)$ la fonction de distribution radiale. Les deux premiers termes du membre de droite correspondent à l'expression du nombre d'onde effectif dans l'approximation de l'ISA. Le troisième terme apparaît donc comme une correction à l'ordre 2 en S. Ce terme rend compte des corrélations spatiales entre centres diffuseurs, via la fonction de distribution radiale [9].

Afin de calculer k_{eff}, l'expression implicite (2.13) du nombre d'onde effectif est évaluée une première fois en prenant k_{eff} égal au nombre d'onde donné par l'ISA ("k_{ISA}"). Puis cette première estimation est introduite à la place de k_{ISA}. Après une dizaine d'itérations, k_{eff} converge dans notre cas [45].

2.3.3 Retour à l'expérience

Hypothèse de l'ergodicité spatiale

En toute rigueur, l'onde cohérente $\langle \phi(t) \rangle$ est égale à la moyenne d'ensemble de l'onde transmise. On a :

$$\langle \phi(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \phi_i(t), \quad N \to \infty, \tag{2.14}$$

8. Pour des forêts de tiges encore encore plus denses, on trouvera un modèle à l'ordre 4 dans [54].

9. La fonction de distribution radiale est reliée à la fonction de corrélation de paire g_2, fonction de la distance r entre 2 diffuseurs : $g_2(r) = g(r) - 1$. $g(r)$ caractérise "l'ordre" dans notre milieu désordonné. Elle est telle que $ng(r)$ représente la concentration moyenne de diffuseur à la distance r d'un diffuseur situé en $r = 0$ [42].

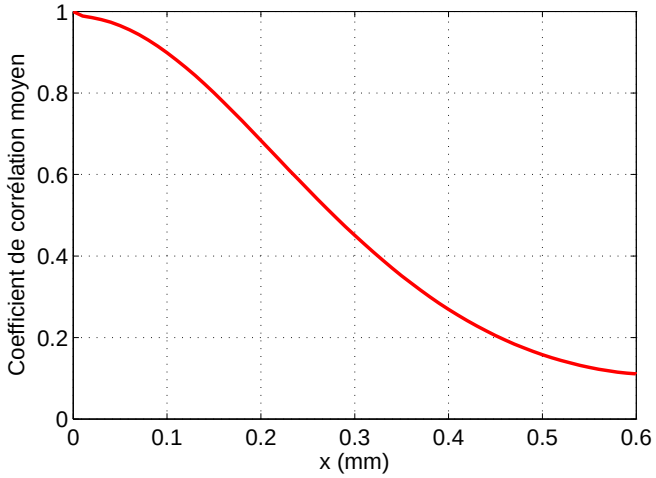


Figure 2.13 – Coefficient de corrélation moyen des signaux transmis à travers l'échantillon d'épaisseur $L = 40$ mm, en fonction du déplacement latéral x.

où l'indice i représente une réalisation particulière du désordre (un tirage aléatoire).

Cependant, en configuration expérimentale, il n'est bien sûr pas possible d'obtenir une vraie moyenne d'ensemble. Pour une épaisseur donnée L, nous n'avons qu'un seul échantillon dont l'extension latérale est limitée ($\sim$ 28 cm). Ainsi, nous faisons l'hypothèse d'ergodicité spatiale. Celle-ci consiste à remplacer la moyenne d'ensemble, c'est-à-dire la moyenne sur plusieurs tirages aléatoires, par une moyenne sur différentes positions le long de l'échantillon. À cette fin, l'émetteur et le récepteur sont montés sur deux plateformes de translation parallèles. Le nombre total N de positions est déterminé par le pas entre deux positions voisines, ainsi que par la distance totale de balayage. Cette dernière est fixée à 20 cm afin que les positions les plus extrêmes, situées à 4 cm des bords de l'échantillon, ne ressentent pas ces derniers.

Pour déterminer le pas spatial dx, nous avons mesuré la corrélation de l'onde transmise en fonction du déplacement latéral le long de l'échantillon [10]. La mesure de corrélation, pour être moyennée, est répétée sur différents intervalles (largeur $\sim$ 1 mm) le long de l'échantillon. Sur chaque intervalle, la corrélation est calculée par rapport à un signal "référence" en début d'intervalle. Sur la figure 2.13, nous avons représenté la corrélation "moyenne" du signal transmis dans le cas du milieu le plus épais ($L = 40$ mm). Il faut un décalage de 0,3 mm pour que la corrélation chute à 0,5 dans le cas de cette échantillon. En prenant un pas dx égal à 0,5 mm, on est donc sûr que deux positions voisines sont décorrélées [11].

Comme nous le mentionnons au paragraphe 2.2.1, avant d'être moyennées, ces 400

10. C'est bien le transducteur et l'hydrophone qui se déplacent, mais comme ils sont toujours face à face, le déplacement latéral du transducteur et de l'hydrophone peut être "vu" comme le déplacement latéral de l'échantillon, à transducteur et hydrophone fixes.

11. Le pas dx dépend de l'épaisseur de l'échantillon. La ressemblance des signaux transmis à travers l'échantillon le plus fin ($L = 10$ mm) n'est jamais "nulle" et un raffinement aurait consisté à choisir un pas différent pour chaque épaisseur. Cependant, nous avons préféré garder un pas dx identique pour chaque épaisseur.

pseudo-réalisations sont recalées temporellement pour corriger le défaut de parallélisme entre les axes de translation du transducteur et de l'hydrophone. Nous verrons au paragraphe 2.3.4 que ce recalage est essentiel pour la bonne estimation du libre parcours moyen élastique.

L'onde cohérente dans le domaine temporel

Sur la figure 2.14, on a représenté l'estimation $\bar{\phi}(t)$ de l'onde cohérente, transmise à travers l'échantillon d'épaisseur $L = 20$ mm, situé à 73 cm de la source. L'amplitude émise vaut 0,07 m/s et la distance de choc correspondante est égale à 42 cm [12]. L'onde cohérente est comparée à un signal de référence (même amplitude émise, transmission dans l'eau, sans échantillon), ainsi qu'à une réalisation $\phi_i(t)$ de l'onde transmise. L'amplitude de cette dernière est équivalente à celle de l'onde cohérente. En comparaison, l'amplitude du signal de référence est environ huit fois plus élevée. La durée du signal de référence est environ égale à 1,6 μs. Cette durée est légèrement supérieure à la durée du signal d'excitation (4 périodes à 3,5 MHz, soit $\sim 1,14$ μs), en raison de l'inertie du transducteur assez résonant. La durée de l'onde transmise dépasse celle de la fenêtre temporelle d'enregistrement. Les oscillations qui suivent l'arrivée du premier paquet d'onde (l'onde balistique) sont caractéristiques de la diffusion multiple. La partie incohérente de ces oscillations est éliminée quand toutes les réalisations de l'onde transmise sont moyennées. Après moyenne, on remarque toutefois qu'il subsiste encore des oscillations qui n'étaient pas présentes dans le signal de référence, et qui ont déjà été observées [46]. Elles révèlent la résonance des tiges à la fréquence 2,75 MHz [13]. L'onde cohérente, comme la référence, est manifestement distordue par les effets non linéaires. Ici, l'épaisseur de l'échantillon est de l'ordre de $3\,l_e$, ce qui signifie qu'après approximativement trois événements de diffusion, l'onde de choc résiste à la moyenne.

L'onde cohérente dans le domaine de Fourier

Les spectres associés aux signaux de la figure 2.14 sont représentés sur la figure 2.15. Ils sont normalisés par la valeur maximale du spectre de "référence". Dans l'espace de Fourier, le raidissement de la forme d'onde se traduit par l'apparition de hautes fréquences, multiples entiers des fréquences fondamentales initialement émises. On remarque que malgré la diffusion multiple et le processus de moyenne permettant l'obtention de l'onde cohérente, cette dernière conserve les caractéristiques d'une onde de choc. Bien que les spectres s'étalent au-delà de 15 MHz, nous nous limitons dans un premier temps à l'étude des quatre premiers harmoniques.

12. Le temps de montée du choc de l'onde cohérente a été mesuré. Il vaut respectivement 0,07 μs, 0,10 μs, 0,11 μs et 0,12 μs pour les épaisseurs 10, 20, 30 et 40 mm. Comme le temps de montée moyen du choc, il croît donc avec l'épaisseur traversée.

13. En passant dans le milieu, l'onde excite tour à tour les diffuseurs (tiges) qu'elle rencontre. À la résonance, des ondes circonférencielles apparaissent à la surface des tiges. Ces dernières rayonnent dans le fluide, avec un retard de phase qui correspond au temps de génération, propagation à la surface des diffuseurs et de rayonnement dans le fluide. La partie de ces ondes "secondaires" rayonnée vers l'avant contribue au champ cohérent, mais arrive après le balistique.

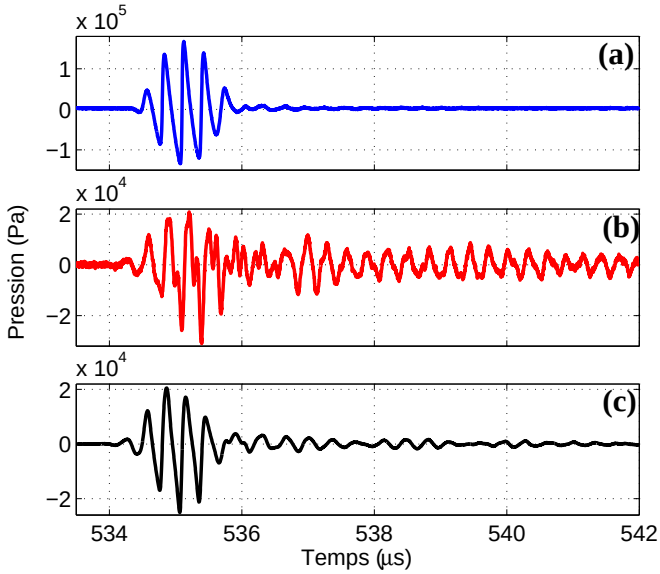


Figure 2.14 – L'onde cohérente (c) est comparée au signal de référence (transmission dans l'eau, (a)) et à une réalisation de la transmission (b), dans le cas de l'échantillon d'épaisseur $L = 20$ mm. L'amplitude émise, $v_0 = 0,07$ m/s, correspond à une distance de choc $L_c = 42$ cm.

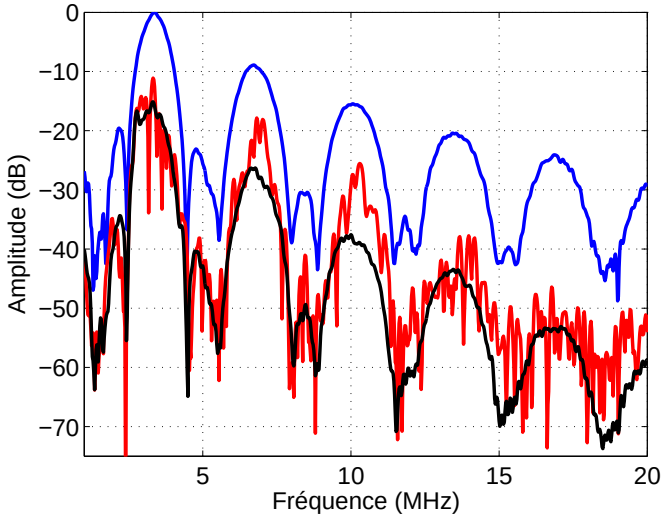


Figure 2.15 – Spectres des signaux de la figure 2.14. Le spectre de "référence" dans l'eau est en bleu, celui de la réalisation en rouge, et celui de l'onde cohérente en noir. Les spectres sont normalisés par le maximum du spectre de "référence".

Sur la figure 2.16, nous avons représenté l'amplitude de ces dernières en fonction de l'amplitude émise. Les fréquences considérées sont, de haut en bas, $3,35$ MHz, $6,7$ MHz, $10,05$ MHz et $13,4$ MHz [14]. La transmission cohérente dans le cas des échantillons d'épaisseur égale à 20 et 40 mm (carrés verts et croix bleues respectivement) est comparée à la

14. Le signal émis est initialement centré à 3,5 MHz, mais le spectre de l'onde transmise dans l'eau est maximal à 3,4 MHz.

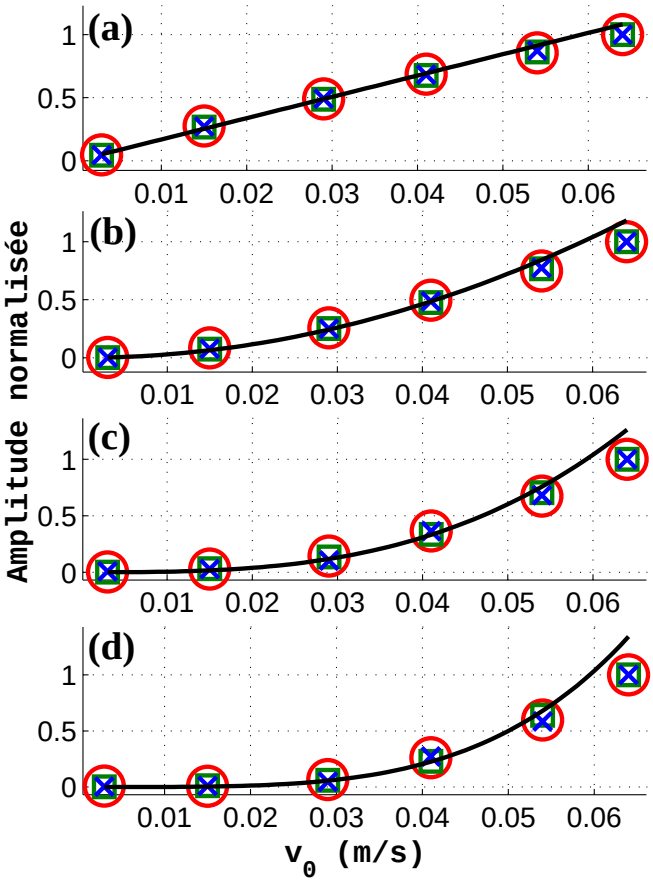


Figure 2.16 – Amplitudes spectrales aux fréquences $3,35$ MHz (a), $6,7$ MHz (b), $10,05$ MHz (c) et $13,4$ MHz (d), en fonction de l'amplitude émise v_0. La transmission à travers les échantillons d'épaisseurs 20 et 40 mm (carrés et croix respectivement) est comparée à la transmission dans l'eau (cercles).

transmission dans l'eau (cercles rouges). Chaque courbe est normalisée par sa valeur à la plus haute amplitude émise. Sur cette figure, on remarque qu'à une fréquence donnée, les mesures à travers les deux échantillons se superposent parfaitement avec les mesures en transmission dans l'eau. Ceci indique que dans notre configuration expérimentale, la diffusion multiple ne change pas le comportement d'une composante fréquentielle donnée avec l'amplitude émise.

Les lignes continues correspondent à des ajustements à deux paramètres $\{p_1, p_2\}$, de type $p_1 {v_0}^{p_2}$. Le pré-facteur p_1 est laissé libre tandis que le paramètre p_2 est contraint de prendre une valeur entière entre 1 et 4 compris. On retient le binôme $\{p_1, p_2\}$ pour lequel l'erreur au carré est minimale. Dans l'approximation d'onde plane, nous avons vu plus tôt (cf. § 1.2.3) que l'amplitude de l'harmonique de rang p est proportionnelle à l'amplitude émise élevée à la puissance p. Les exposants (paramètre p_2) attendus dans cette approximation –$A_{f_0} \propto v_0$, $A_{2f_0} \propto {v_0}^2$, etc...– sont retrouvés pour nos données à condition d'exclure les deux derniers points de chaque courbe, correspondant à des régimes très non linéaires (i.e., $z > L_c$).

Ceci est probablement la marque d'une extra-atténuation non linéaire de l'onde de choc. Dans un tel régime, le transfert d'énergie des fréquences fondamentales vers leurs harmoniques d'ordres supérieurs est très efficace. Ces derniers étant davantage atténués, il en résulte une atténuation accrue de l'onde émise, communément appelée "extra-atténuation non linéaire", même si le mécanisme d'atténuation reste l'atténuation thermo-visqueuse linéaire.

En écho à la figure 2.7 du paragraphe 2.1.2, nous avons représenté sur la figure 2.17, le spectre de l'onde cohérente pour trois niveaux d'émission, lorsque l'épaisseur du milieu traversé est égale à 40 mm. On note premièrement que les niveaux relatifs des différents harmoniques sont très semblables, que l'onde se soit propagée dans l'eau uniquement (figure 2.7), ou qu'elle ait traversé l'échantillon d'épaisseur $L = 40$ mm (figure 2.17), excepté pour la composante de basse fréquence ($f \sim 0,7$ MHz). En effet, le niveau relatif de ce dernier, qui n'apparaît qu'en régime de propagation non linéaire, est beaucoup plus élevé après la traversée de l'échantillon de 40 mm. Ceci confirme que la diffusion multiple est plus faible pour des fréquences inférieures à 1 MHz, que pour des fréquences supérieures à 3 MHz.

On note enfin la présence d'un maximum local à 2,75 MHz, indépendamment du régime de propagation, et qui n'apparaissait pas sur les spectres après propagation dans l'eau (cf. figure 2.7). Ce maximum local correspond à la première résonance des tiges, déjà discutée à propos des figures 2.2 et 2.14.c. À cette fréquence, le libre parcours moyen élastique l_e est plus élevé, donc le milieu est plus "transparent". Plus le milieu est épais, plus il filtre l'onde cohérente, en privilégiant la transmission de l'énergie à cette fréquence, relativement aux autres. On notera que ce maximum local apparaît déjà sur le spectre de l'onde cohérente, après traversée de l'échantillon d'épaisseur $L = 20$ mm (cf. courbe noire de la figure 2.15). Mais il ne correspond alors pas au maximum du spectre. L'effet de filtrage est moins visible, car l'échantillon est moitié moins épais.

2.3.4 Évaluation d'un libre parcours moyen résolu en fréquence

Afin de déterminer le libre parcours moyen élastique en fonction de la fréquence, on définit un coefficient de transmission du milieu en énergie, résolu en fréquence, comme le rapport de l'énergie transmise à travers l'échantillon (de longueur $L > 0$), sur l'énergie transmise dans l'eau ($L = 0$) [45] :

$$T_C(L,\Omega) = \frac{\displaystyle\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\bar{\Phi}(L,\omega)|^2 \mathrm{d}\omega}{\displaystyle\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\bar{\Phi}(0,\omega)|^2 \mathrm{d}\omega}, \tag{2.15}$$

où $\bar{\Phi}(L,\omega)$ est la transformée de Fourier de l'estimation de l'onde cohérente, $\bar{\phi}(L,t)$ et $\Omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ la fréquence angulaire moyenne de la mesure.

Dans notre configuration expérimentale, la durée des signaux enregistrés est égale à 10 μs, ce qui fixe la résolution fréquentielle à 0,1 MHz. En conséquence, les bornes de

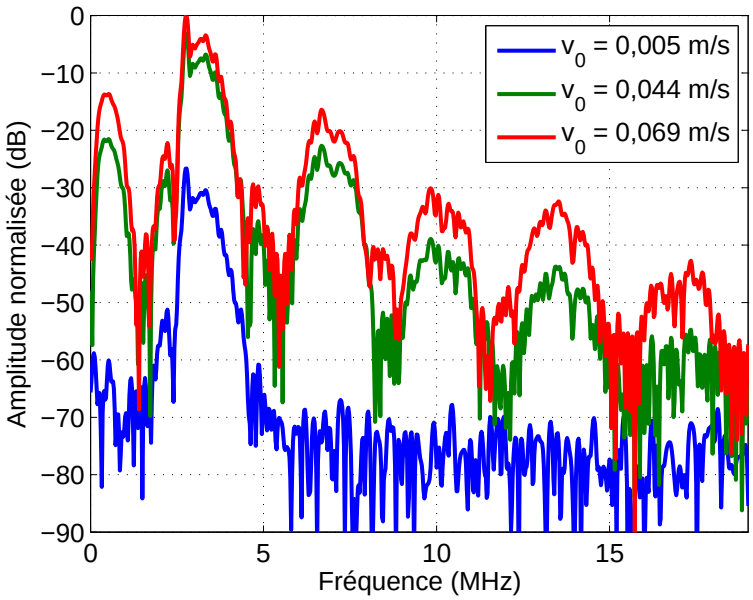


Figure 2.17 – Spectres de l'onde cohérente après traversée de l'échantillon d'épaisseur L=40 mm, pour différentes amplitudes d'émission. Les courbes sont normalisées par le maximum du spectre à l'amplitude d'excitation la plus élevée.

l'intégrale sont choisies de façon à ce que $\delta f = (\omega_2 - \omega_1)/2\pi = 0,1$ MHz.

A travers l'échantillon, l'intensité de l'onde cohérente décroit exponentiellement selon $\exp(-K_{ext}L)$, avec $K_{ext} = 1/l_e + 1/L_a$, le coefficient d'extinction qui tient compte de l'atténuation par diffusion (cf. § 2.3.1) et par absorption thermo-visqueuse (cf. § 1.2.3).

L'absorption thermo-visqueuse opère dans l'eau environnante, à son interface avec les tiges, ainsi que dans ces dernières. Il a été montré [42] que les pertes thermo-visqueuses à l'interface entre l'eau et les tiges, ainsi que les pertes dans les tiges sont négligeables devant les pertes par diffusion causées par les tiges. Ainsi, l'écriture du coefficient T_C, qui permet de s'affranchir des pertes dans l'eau, ne dépend que du libre parcours moyen l_e.

À Ω fixé, le libre parcours moyen est obtenu par ajustement linéaire du logarithme népérien du coefficient de transmission, par rapport à la variable épaisseur du milieu L. Celle-ci prend les valeurs suivantes : 10, 20, 30 et 40 mm. La figure 2.18 montre $\ln[T_C(\Omega, L)]$ en fonction de l'épaisseur traversée L, aux fréquences $2,8$ MHz et $10,4$ MHz. Les droites rouges correspondent aux meilleurs ajustements linéaires obtenus au sens des moindres carrés. Leurs pentes différentes indiquent que le libre parcours moyen élastique varie avec la fréquence.

Sur la figure 2.19, le libre parcours moyen élastique est représenté en fonction de la fréquence, pour les deux niveaux d'excitation les plus bas. Au niveau d'excitation le plus faible, $v_0 = 0,003$ m/s ($L_c = 9,7$ m $>> D$), s'il y a génération d'harmoniques, ceux-ci restent dans le bruit, et le libre parcours moyen ne peut qu'être évalué sur la bande des fréquences fondamentales. Pour l'excitation juste supérieure ($v_0 = 0,016$ m/s, $L_c = 1,83$ m $> D$), le niveau du second harmonique est suffisamment élevé, et le libre parcours

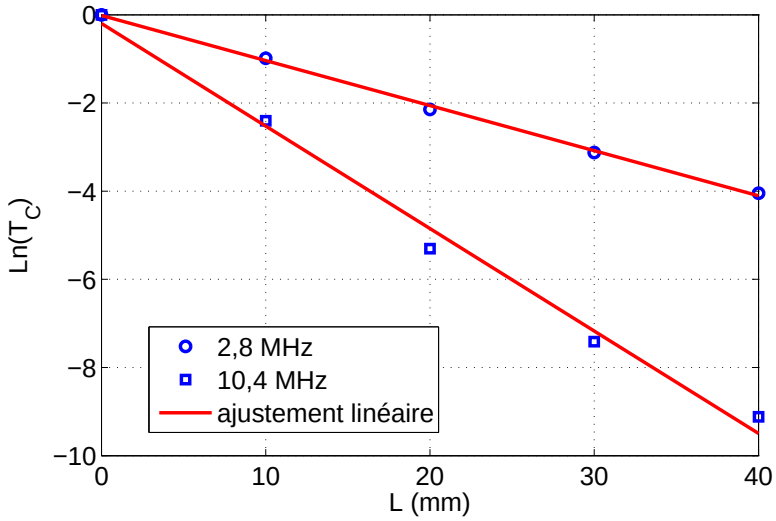


Figure 2.18 – Logarithme népérien de la transmission T_C en fonction de l'épaisseur L à deux fréquences (2,75 MHz et 10,4 MHz). En rouge : meilleurs ajustements linéaires au sens des moindres carrés. Leur pente fournit une estimation de $l_e(\omega)$.

moyen élastique est estimé sur les intervalles de fréquences 2,4-4,4 MHz et 5,8-7,8 MHz. Sur la bande de fréquence associée au fondamental, les deux estimations sont en bon accord. Elles témoignent du comportement résonant déjà commenté plus haut à la fréquence 2,75 MHz. Le libre parcours moyen élastique vaut alors environ 10,5 mm, valeur deux fois supérieure à celle mesurée à 3,5 MHz. La comparaison de ces mesures avec les valeurs théoriques de l'Independant Scattering Approximation (ISA) et celles du modèle à l'ordre 2 (cf. § 2.3.2) incluant les corrélations est sans appel. L'ISA restitue assez justement le comportement du libre parcours moyen à la résonance, mais surestime ce dernier en dehors de la résonance. Ce n'est pas le cas avec le modèle du 2^{nd} ordre de diffusion multiple, qui reproduit plus fidèlement nos mesures sur tout l'intervalle de fréquence. Sur la bande de fréquences associée au second harmonique, les valeurs expérimentales du libre parcours moyen élastique sont sensiblement plus petites, puisque ce dernier varie de 4,2 à 6,2 mm. On constate à nouveau que nos mesures de l_e sont en très bon accord avec les calculs du modèle à l'ordre 2 de diffusion multiple.

Au niveau d'excitation le plus élevé ($v_0 = 0,07$ m/s, $L_c = 0,42$ m $< D$), les harmoniques deux à six sont bien détectés pour permettre l'estimation du libre parcours moyen élastique sur les bandes de fréquences associées. Nos mesures de l_e pour ce niveau d'émission sont représentées sur la figure 2.20.

Sur les bandes de fréquences associées aux quatre premiers harmoniques, l'accord des valeurs expérimentales avec le modèle à l'ordre 2 est très bon. Il se dégrade légèrement autour des harmoniques cinq et six, pour lesquels nos valeurs expérimentales sont légèrement plus faibles que celles du modèle, traduisant une transmission expérimentale moins élevée que celle donnée par la théorie. L'analyse des signaux filtrés autour de ces "hautes" fréquences montre un décalage temporel non compensé par la comparaison au signal de référence acquis dans l'eau. Il conduit à sous-estimer le niveau de ces composantes spectrales

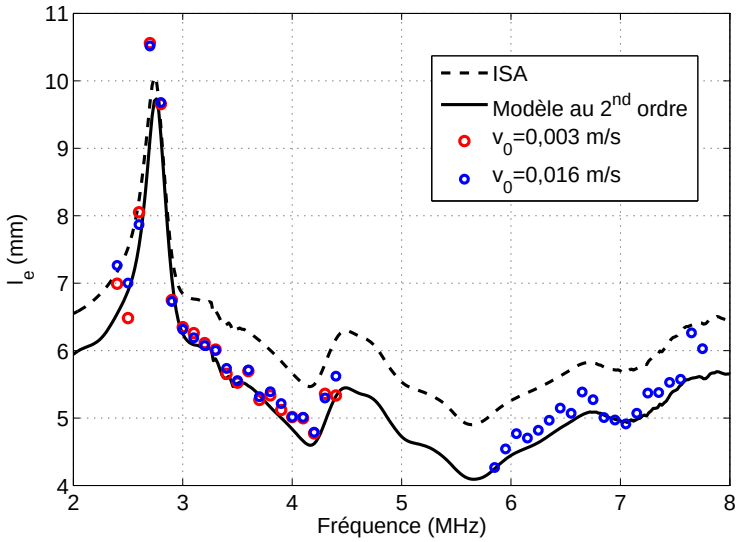


Figure 2.19 – Libre parcours moyen élastique en fonction de la fréquence. Les valeurs obtenues en régime linéaire (rouge) et en régime non linéaire (bleu) sont comparées aux prédictions linéaires de l'ISA (ligne tiretée) et du modèle à l'ordre 2 incluant les corrélations spatiales entre diffuseurs (ligne continue).

lors de la sommation cohérente, et donc leur transmission. Ce décalage peut provenir de petites vibrations dans l'eau transmises aux supports du transducteur et de l'hydrophone, ou encore d'une légère dérive de la vitesse du son dans l'eau au cours de l'expérience. En effet, d'après nos mesures, autour de 20°C, la vitesse du son dans l'eau varie avec la température selon la loi : $c_0(\mathrm{m/s}) = 1500 + [T(^\circ\mathrm{C} - 25,2)8/3]$. Une variation de température de 0,1°C change donc la vitesse du son dans l'eau d'environ 0,3 m/s. Sur la distance de propagation $D = 80$ cm, entre l'émetteur et l'hydrophone, une telle variation engendre un décalage temporel de 108 ns, égal à plus du double de la période d'une composante de fréquence 20 MHz.

Malgré tout, la courbe théorique donnée par le modèle du 2nd ordre, reste dans les barres d'erreur de nos mesures, comprises entre 5 et 15 %[15]. L'erreur est minimale à la résonance, et systématiquement supérieure à 12 % autour des harmoniques cinq et six. Nos mesures étendent donc le domaine de validité du modèle à l'ordre 2, dont le calcul repose en particulier sur l'hypothèse de diffuseurs ponctuels. En dehors de la résonance, l'ISA surestime systématiquement nos valeurs expérimentales de 20 à 25 %. Cela montre la nécessité de prendre en compte les corrélations spatiales entre diffuseurs, malgré un remplissage surfacique assez faible de 6 %.

Notons enfin que nous obtenons les mêmes valeurs de libre parcours moyen élastique à des niveaux d'émission intermédiaires –sur les bandes de fréquences associées aux harmoniques 3 et 4–, mais nous ne les représentons pas ici par souci de lisibilité.

15. L'erreur sur l_e est une erreur sur l'interpolation de la décroissance de la transmission.

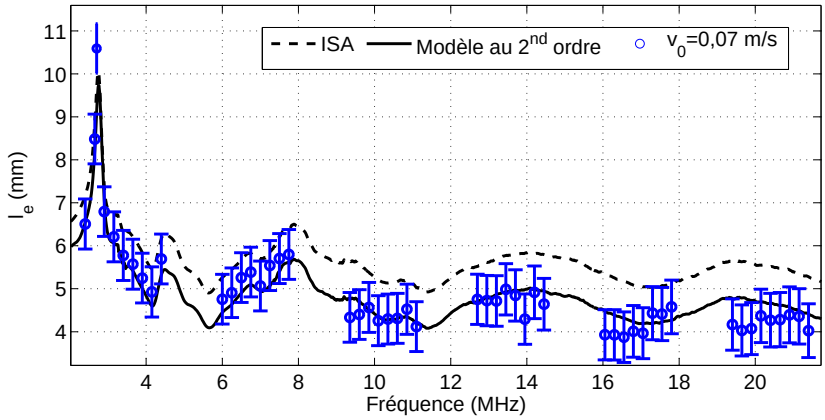


Figure 2.20 – Libre parcours moyen élastique en fonction de la fréquence. Les valeurs obtenues en régime non linéaire ($v_0 = 0,07$ m/s) sont comparées aux calculs linéaires issus de l'ISA (ligne tiretée) et du modèle au 2nd ordre de diffusion multiple (ligne continue).

2.3.5 Éstimation de la vitesse de groupe

Outre le libre parcours moyen élastique, nous avons aussi estimé la vitesse effective de l'onde cohérente (cf. § 2.3.1), en fonction de la fréquence.

La vitesse de groupe c_{gr} (équation (2.8b)) est plus simple à mesurer que celle de phase c_ϕ (équation (2.8a)), car elle est la vitesse de propagation de l'enveloppe d'une paquet d'onde assez resserré en fréquence.

Afin d'estimer la vitesse de groupe c_{gr} à une fréquence angulaire Ω donnée, l'onde cohérente $\bar{\phi}(L,t)$ et le signal de référence $\phi(0,t)$ sont convolués à un signal quasi monochromatique de fréquence centrale Ω (cf. figure 2.21). La forme temporelle de ce signal fixe la résolution fréquentielle. Nous avons choisi un paquet d'onde gaussien d'une durée égale à 20 μs, et d'écart type σ_T égal à 4 μs. Par conséquent notre résolution fréquentielle σ_F est égale à 0,04 MHz. La vitesse de groupe de l'onde cohérente se déduit ensuite de la différence des temps d'arrivée des maxima des enveloppes des deux signaux obtenus à l'étape précédente.

Avec les notations de la figure 2.9, le temps d'arrivée du maximum de l'enveloppe de la référence est : $t_{ref} = \frac{\Pi}{c_0}$. Celui de l'onde cohérente est égal à : $t_{coh} = \frac{\Pi}{c_0} - \frac{L}{c_0} + \frac{L}{c_{gr}}$. La différence des temps d'arrivée avec et sans échantillon est donc : $\Delta t = t_{coh} - t_{ref} = -L/c_0 + L/c_{gr}$, d'où la vitesse de groupe :

$$c_{gr} = \frac{L}{\Delta t + L/c_0}. \tag{2.16}$$

La transmission ayant été mesurée à travers quatre milieux d'épaisseurs différentes, nous disposons de quatre estimations de la vitesse de groupe à chaque fréquence. La vitesse de groupe que l'on retient est la moyenne de ces quatre estimations.

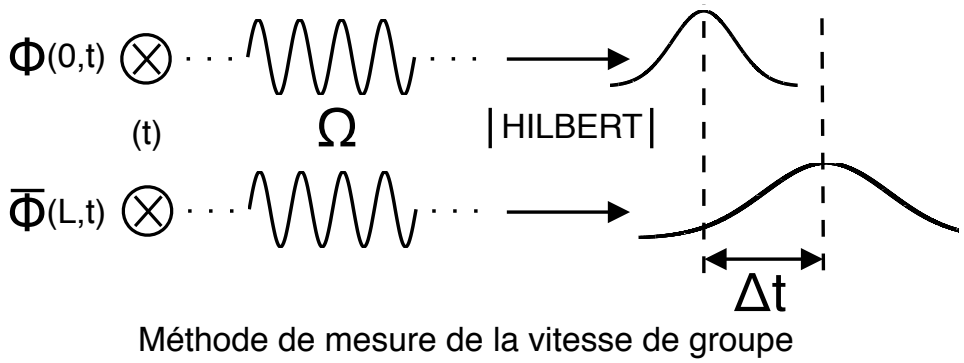


Figure 2.21 – La différence de temps d'arrivée de l'onde cohérente $\bar{\phi}(L,t)$ et de la référence $\phi(0,t)$ est notée Δt. À une fréquence angulaire Ω donnée, nous l'obtenons par convolution du signal de référence et de l'onde cohérente à un paquet d'onde gaussien, de fréquence angulaire porteuse Ω. Δt correspond à la différence des temps d'arrivée (t_{coh} et t_{ref}) des maxima des enveloppes des deux signaux obtenus à l'étape précédente.

On a représenté sur la figure 2.22 la vitesse de groupe en fonction de la fréquence. Comme pour l'estimation du libre parcours moyen élastique, nos valeurs expérimentales sont comparées au modèle du 2$^{\text{nd}}$ ordre de diffusion multiple. Ce dernier prédit un comportement constant, avec des valeurs comprises entre 1,49 et 1,51 mm/μs, sauf dans l'intervalle de fréquence 2,4-4,4 MHz. En effet, à la résonance, la vitesse de groupe chute à 1,45 mm/μs. Elle atteint aux fréquences supérieures, 1,53 mm/μs (à 2,9 puis à 4,2 MHz), puis chute de nouveau à 1,48 mm/μs (à 2,4 MHz).

En régime linéaire, comme en régime non linéaire, nos mesures reproduisent bien ces variations sur la bande de fréquence 2,4-4-4 MHz (cf. médaillon de la figure 2.22). Plus étonnant, sur les bandes de fréquence associées aux harmoniques 2 à 4, les variations expérimentales et théoriques de la vitesse de groupe, qui sont pourtant de l'ordre du pourcent, sont elles aussi en bon accord. Il faut s'intéresser aux harmoniques cinq et six pour que nos mesures s'écartent des valeurs théoriques.

Pour une meilleure lisibilité, les barres d'erreur ne sont pas représentées sur la figure 2.22. Celles-ci incluent une erreur statistique (variance calculée sur les quatre estimations de la vitesse de groupe à chaque fréquence) ainsi qu'une erreur systématique d'origine expérimentale ($\delta c_0 = 0,01$ mm/μs, $\delta L = 1$ mm et $\delta(\Delta t) = 1/125$ μs). Elles valent au plus 10 %, sur tout l'intervalle de fréquence.

2.3.6 Non linéarité et diffusion multiple

L'excellent accord de nos mesures avec un modèle théorique fondé sur l'hypothèse d'une propagation linéaire montre qu'une onde de choc se propage linéairement dans la forêt de tiges immergées. Autrement dit, la diffusion multiple n'est pas couplée à la non linéarité dans nos expériences.

Revenons sur les deux principales longueurs caractéristiques de notre configuration expérimentale. La distance de formation du choc, caractéristique de la non linéarité, est

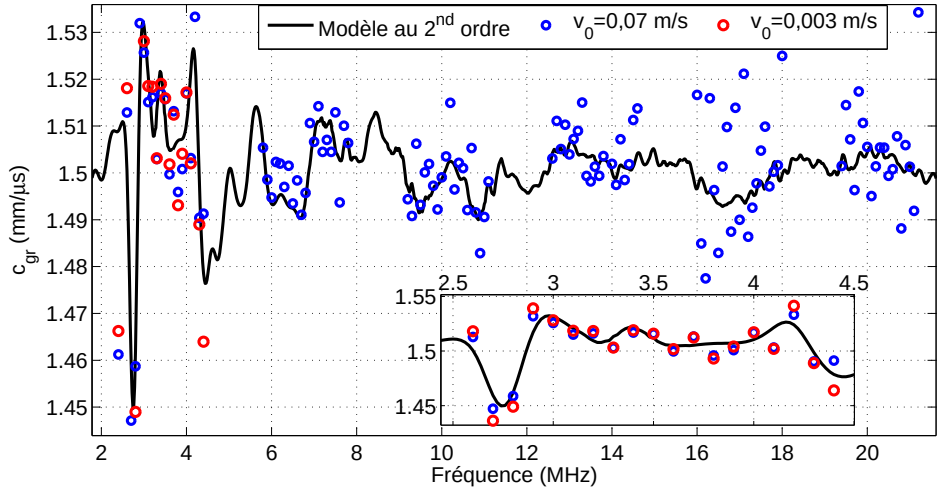


Figure 2.22 – Vitesse de groupe c_{gr} de l'onde cohérente en fonction de la fréquence. Les valeurs obtenues dans les régimes linéaire (rouge) et non linéaire (bleu) sont comparées aux calculs linéaires issus du modèle au 2nd ordre de diffusion multiple. En médaillon, zoom sur l'intervalle de fréquences 2,5-4,5 MHz, où se situent les plus grandes variations de c_{gr}.

fonction de l'excitation. Elle est minimale (42 cm) lorsque l'amplitude émise est maximale (0,07 m/s). Le libre parcours moyen élastique, caractéristique de la diffusion multiple, est de l'ordre d'une dizaine de millimètres au maximum. Ainsi, dans la configuration la plus favorable à la non linéarité, la distance de formation du choc est au minimum quarante fois plus grande que le libre parcours moyen élastique. L'onde qui pénètre dans l'échantillon le plus épais ($L = 40$ mm) parcourt au plus un dixième de la distance de choc, quand elle est, dans le même temps, diffusée de quatre à dix fois selon la fréquence. Il y a bien à la fois de la non linéarité et de la diffusion multiple, mais le rapport de la distance de formation du choc sur le libre parcours moyen élastique est en faveur de la diffusion multiple.

Sans sacrifier la diffusion multiple, c'est-à-dire sans augmenter le libre parcours moyen élastique, arriverions-nous, dans des conditions expérimentales réalistes, à équilibrer le rapport L_c/l_e ?

Notre variable d'ajustement est la distance de formation du choc. Les diffuseurs étant de forme cylindrique ($\varnothing = 2r_d$), l'onde diffusée est une onde cylindrique divergente. On note v_d l'amplitude de sa vitesse particulaire. À quelles conditions l'onde diffusée peut-elle former un choc sur une distance comparable au libre parcours moyen élastique ?

Nous avons reporté la démonstration de l'équation de propagation non linéaire pour une onde cylindrique divergente dans l'annexe A. Elle est accompagnée du calcul de la distance de formation du choc de cette même onde, inspiré de [13].

Dans un fluide parfait, pour une onde cylindrique divergente de pulsation caractéristique

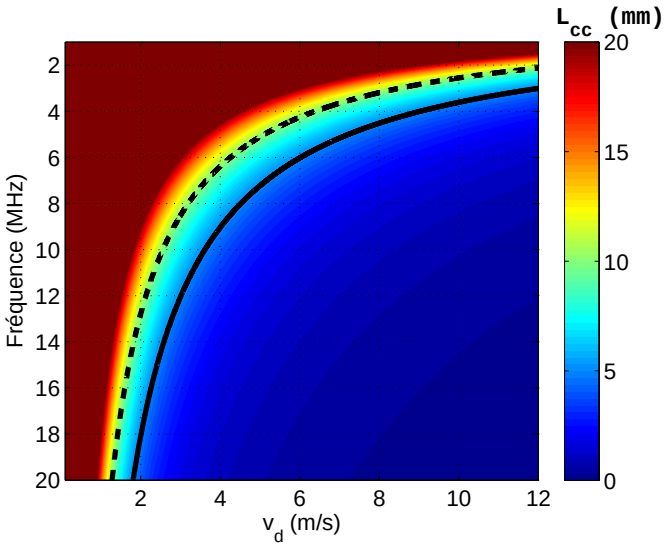


Figure 2.23 – Distance de choc pour une onde cylindrique divergente représentée en fonction de la fréquence et de l'amplitude diffusée. Le rayon de la source r_d est égal à celui d'une tige, soit 0,4 mm. Les lignes tiretée et continue indiquent respectivement $L_{cc} = 10$ mm et $L_{cc} = 5$ mm. La vue est "saturée" pour faire ressortir l'aire d'intérêt.

ω, le produit $\omega\tau$ (cf. § 1.2.3) est donné par :

$$\omega\tau = \arcsin\left(\frac{p_a}{p_m}\sqrt{\frac{r}{r_d}}\right) - \underbrace{2\sqrt{rr_d}k\beta\epsilon}_{\Gamma}\left(\frac{p_a}{p_m}\sqrt{\frac{r}{r_d}}\right). \tag{2.17}$$

Cette équation est l'analogue de l'équation (1.41) du chapitre 1 pour une onde cylindrique divergente. Comme pour l'onde plane, pour chaque $\omega\tau$ de l'équation (2.17) il ne peut y avoir qu'une seule valeur de surpression ou de vitesse particulaire. Il y a nécessité d'introduire un choc quand $\Gamma = 1$. On obtient ainsi la distance de formation du choc, L_{cc}, pour une onde divergente cylindrique :

$$L_{cc} = \frac{1}{4r_0k^2\beta^2\epsilon^2}. \tag{2.18}$$

Nous avons représenté cette distance en fonction de la fréquence et de l'amplitude de la vitesse particulaire v_d, diffusée par le diffuseur, sur la figure 2.23 (à comparer à L_c, représentée sur la figure 1.3 pur une onde plane). r_d est pris égal au rayon d'une tige, soit 0,4 mm. Les lignes tiretée et en trait plein indiquent respectivement une distance de formation du choc égale à 10 et 5 mm. Elles délimitent donc une aire correspondant à un rapport L_c/l_e compris entre 2 et 1. On peut lire en particulier qu'à 3,5 MHz, il faudrait que l'amplitude v_d de l'onde diffusée par une tige soit au minimum de 10 m/s (correspondant à une surpression diffusée de 15 MPa), pour que la distance de formation du choc soit égale à 5 mm.

Compte tenu des limites expérimentales décrites au début de ce chapitre, liées à l'absorption et à la conception d'un transducteur de puissance à hautes fréquences, c'est un régime que l'on ne peut pas atteindre.

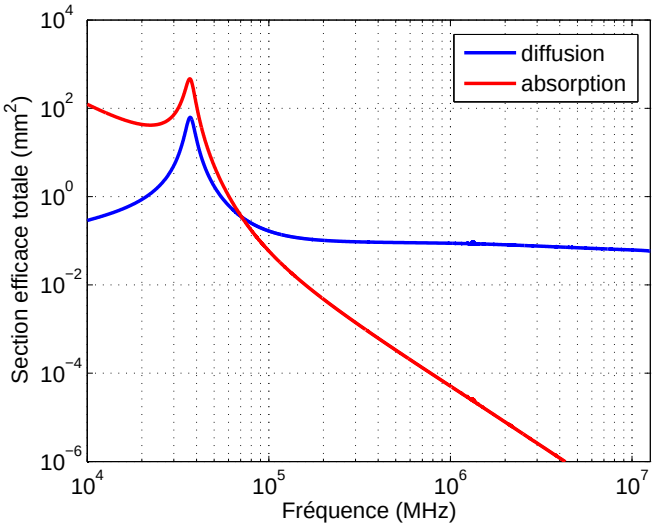


Figure 2.24 – Section efficace totale de diffusion σ_d et section efficace d'absorption σ_a d'une bulle d'air de rayon R_0 =85 μm, immergée dans un gel.

Pour conclure sur la transmission cohérente d'une onde de choc à travers nos "forêts de tiges", non linéarité et diffusion multiple étant découplées dans ces expériences, l'équation de Lighthill-Westervelt (1.50) pourrait finalement être appropriée à leur modélisation. Rappelons par ailleurs que nous envisagions, en introduction de ce chapitre, de travailler en focalisant sur l'échantillon multiplement diffuseur. Au vu des calculs précédents, il est évident qu'une onde de choc ne pourra pas se former ainsi.

2.4 Transmission cohérente à travers des milieux de bulles

Après avoir étudié la transmission cohérente d'un milieu fluide parsemé d'hétérogénéités solides, nous nous intéressons maintenant à celle d'un gel aqueux rempli de bulles de gaz. Ces dernières présentent un comportement singulier, caractérisé par une résonance à "basse" fréquence (la longueur d'onde associée est très grande devant leur taille), appelée fréquence de Minnaert. Elles sont par ailleurs connues pour être des résonateurs non linéaires [55–57].

2.4.1 Comportement d'une bulle

Sur la figure 2.24, nous avons représenté la section efficace totale de diffusion σ_d et la section efficace d'absorption σ_a d'une bulle d'air de rayon $R_0 = 85$ μm, immergée dans un gel (masse volumique et vitesse du son de l'eau). Celles-ci prennent en compte les atténuations thermique, visqueuse et radiative. La section efficace totale de diffusion montre une résonance à basse fréquence autour de 37 kHz, puis un plateau, pour les fréquences supérieures, dont l'amplitude est inférieure de trois ordres de grandeur à celle de la résonance.

La résonance a lieu à la fréquence de Minnaert ω_M, donnée par :

$$\omega_M = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_e}} = 2\pi f_M. \tag{2.19}$$

Elle est inversement proportionnelle au rayon R_0 de la bulle, et dépend par ailleurs de la pression de l'air à l'équilibre P_0, du rapport γ des capacités calorifiques à pression constante et volume constant, et de la masse volumique du gel ρ_e, égale à celle de l'eau ρ_0. C'est la fréquence fondamentale de résonance de la bulle.

La résonance de la section efficace totale de diffusion est accompagnée d'une résonance de la section efficace d'absorption d'amplitude plus élevée. Donc à la résonance, la diffusion est certes forte, mais la dissipation l'est encore plus. Il n'est alors pas évident d'observer de la diffusion multiple autour de la fréquence de résonance.

Mais aux fréquences auxquelles la section efficace totale de diffusion décrit un plateau (10^5-10^7 MHz), la section efficace d'absorption devient très petite devant cette dernière. Avec notre dispositif expérimental, il est donc possible d'étudier la diffusion multiple d'un milieu bulleux dans le domaine du MHz. Pour y mesurer une coda, il faut néanmoins disposer d'échantillons stables, suffisamment épais ($L > l_e$).

2.4.2 Conception des échantillons

Le protocole de fabrication des échantillons a été mis au point par Valentin Leroy au laboratoire Matière et Systèmes Complexes (Université Paris Diderot, UMR CNRS) [58]. Un échantillon est constitué d'une cellule étanche contenant un gel (gel coiffant dilué avec de l'eau) dans lequel les bulles sont injectées.

Caractérisation de cellule remplie de gel

Les dimensions de la cellule sont : 14 cm × 14 cm ×3 cm. Ses parois ont été choisies les plus transparentes possibles aux ultrasons dans la gamme de fréquence du MHz. Dans le cas contraire, leurs échos se superposeraient à la coda que nous cherchons à mesurer.

Autant pour le vérifier que pour isoler par la suite la réponse des bulles à une sollicitation acoustique, il est important de bien caractériser la cellule sans bulles en mesurant l'atténuation des ondes la traversant [16]. Nous avons mesuré la transmission acoustique de la cellule dans la configuration expérimentale décrite au paragraphe 2.2.1, c'est-à-dire en la plaçant à la limite des champs proche et lointain de la même source. L'hydrophone était placé derrière la cellule. La réponse de la cellule en fonction de la fréquence est égale au rapport des modules des spectres de l'onde transmise à travers la cellule et de l'onde de "référence" correspondant à une transmission dans l'eau. Nous l'avons représentée sur la figure 2.25. Sur la bande de fréquence 2-12 MHz (courbe bleue), la mesure peut être approchée par une droite (rouge). La ligne tiretée noire correspond à l'amplitude de la

16. La vitesse du son dans le gel a été mesurée. À l'erreur de mesure près, elle est égale à celle du son dans l'eau.

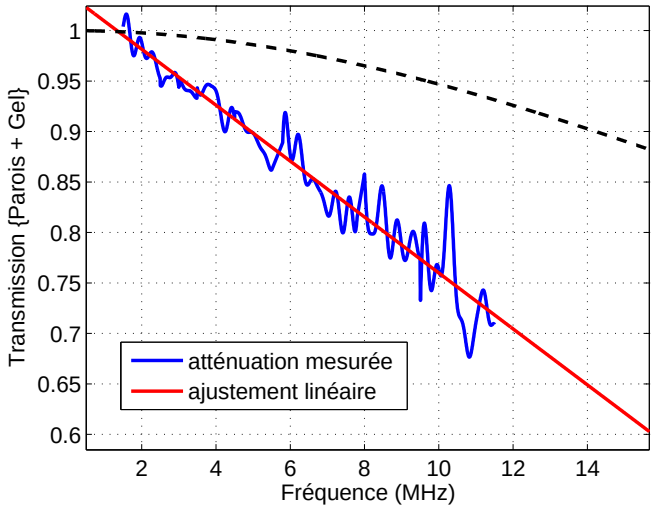


Figure 2.25 – Transmission acoustique de la cellule mesurée en fonction de la fréquence. La réponse de la cellule comprend les pertes par réflexions sur les deux parois la délimitant, ainsi que l'atténuation par le gel. La courbe tiretée correspond au carré de la transmission en amplitude d'une paroi en plastique ($\rho_p = 1400$ kg/m^3, $c_p = 2500$ m/s) d'épaisseur 10 μm.

transmission de deux parois en plastique ($\rho_p = 1400$ kg/m^3, $c_p = 2500$ m/s) de 10 μm d'épaisseur chacune. L'écart entre cette courbe et la mesure montre que le gel est le principal responsable de l'atténuation par la cellule sans bulles.

Injection des bulles

Les bulles sont formées par injection de gaz –azote, pollué au Perfluorohexane (C_6F_{14}) pour diminuer leur solubilité dans le gel– dans la cellule remplie de gel, via un capillaire dont la position est commandée par un système de moteurs trois axes. Le capillaire est déplacé à vitesse fixe et le débit de gaz est maintenu constant. Les bulles se forment le long de la trajectoire du capillaire. Le système a été calibré, afin de connaître le rayon des bulles formées en fonction du débit et de la vitesse du capillaire. Cette méthode permet de créer des bulles de rayon aussi petit que 60 μm. Après injection, l'immobilité des bulles est assurée par la contrainte seuil du gel, qui compense la poussée d'Archimède.

Les bulles sont injectées sur un volume de $8 \times 8 \times 1 = 64$ cm^3 correspondant à 9 rideaux de bulles (8×8 cm^2) parallèles entre eux, et perpendiculaires à l'axe de propagation [17]. Le temps nécessaire à l'injection est environ 4h. Le pas d_z entre deux rideaux de bulles est aléatoire ce qui confère un léger désordre initial au milieu dans la direction de propagation. En moyenne, $\langle d_z \rangle \simeq 1,25$ mm, et l'épaisseur totale du milieu de bulles vaut environ 10 mm. Un rideau de bulles est constitué de 81 lignes horizontales séparées deux à deux par un pas $d_y = 1$ mm. Sur une même ligne, la distance séparant deux bulles voisines est notée d_x.

Nous décrivons au paragraphe suivant la transmission d'un échantillon pour lequel le pas

17. La transmission à travers un rideau de bulles est étudiée dans [58].

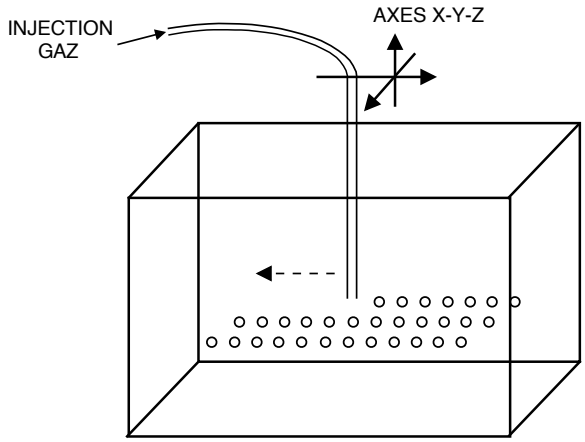


Figure 2.26 – Appareillage pour l'injection des bulles dans le gel : le gaz est injecté dans le gel via un capillaire dont le déplacement est assuré par un système de moteurs trois axes. Le rayon des bulles dépend du débit ainsi que de la vitesse du capillaire.

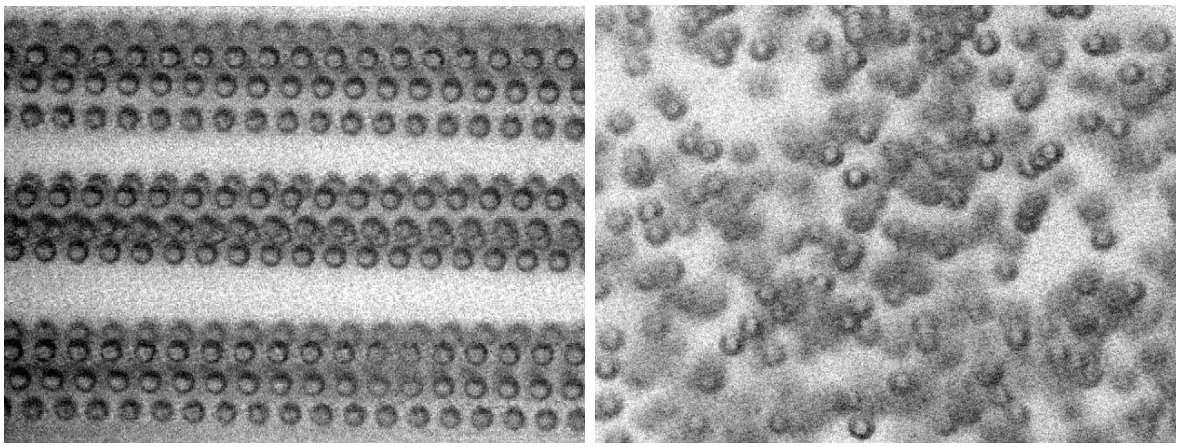


Figure 2.27 – Photos de l'échantillon avant et après brassage. Les vues font 4×3 cm^2.

d_x est égal à 100 μm. La densité de bulles est donnée par $n = (d_x d_y d_z)^{-1} \simeq 8$ bulles/mm^3. Le rayon moyen des bulles est $R_0 = 75$ μm, et la fraction volumique de gaz déduite est $(4\pi R_0^3/3)/(d_x d_y d_z) \simeq 1,4\%$. Le remplissage en gaz du gel est donc très faible.

Le désordre est obtenu par brassage du gel à l'aide d'une tige métallique. La figure 2.27 montre l'échantillon avant et après l'étape de brassage.

Au vu de la fraction volumique de gaz, la théorie de l'ISA devrait suffire à décrire la transmission dans cet échantillon [59], où le libre parcours moyen élastique l_e vaut environ 1,6 mm à 3 MHz [18]. L'épaisseur L de l'échantillon est donc supérieure au libre parcours moyen élastique.

18. À 3 MHz, $\sigma_d \sim 0,08$ mm^2 (cf. figure 2.24) et $l_e = (n\sigma_d)^{-1} \simeq 1,56$ mm.

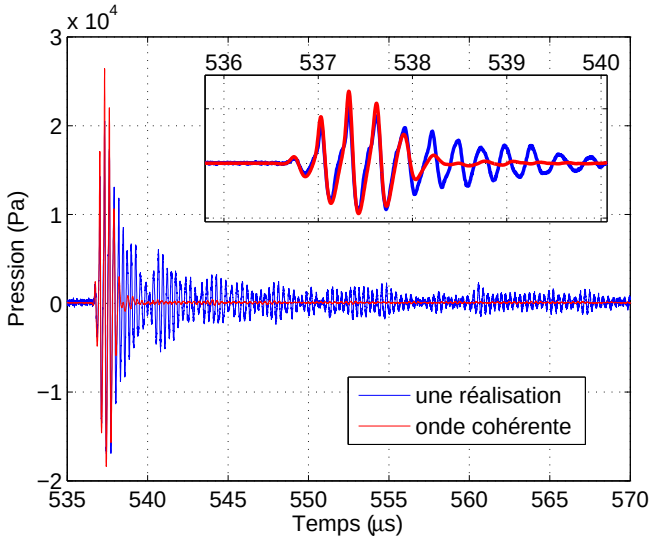


Figure 2.28 – Une réalisation de la transmission est comparée à l'estimation de l'onde cohérente dans le cas d'un milieu bulleux d'épaisseur $L = 10$ mm et de densité 8 bulles/mm^3. En médaillon, zoom sur le balistique.

2.4.3 Mesure de la transmission à hautes fréquences

Pour mesurer la transmission d'une onde de choc à travers l'échantillon présenté sur la figure 2.27, nous avons adapté au milieu bulleux le protocole expérimental utilisé dans le cas des forêts de tiges. Afin de couvrir une plus grande bande de fréquences, nous avons programmé deux tirs centrés aux fréquences 2 et 3,5 MHz, à chaque position. L'amplitude émise de la vitesse particulaire (à 3,5 MHz) est égale à 0,07 m/s. Par ailleurs, nos échantillons bulleux étant tridimensionnels, leur balayage ne décrit plus une simple ligne, mais une surface carrée [19].

Nous avons représenté sur la figure 2.28, une réalisation de la transmission obtenue pour un tir de fréquence centrale 3,5 MHz. Pour la première fois, une coda est mesurée par transmission ultrasonore à travers un milieu bulleux. Cette observation est possible car, d'une part le milieu n'est pas "auto-moyennant" (les bulles ne bougent pas), et d'autre part, il est sollicité dans une plage fréquentielle favorable à la diffusion multiple. La réalisation est comparée à la transmission cohérente (la moyenne porte sur 210 réalisations).

La transmission cohérente à travers les bulles (transmission à travers la cellule contenant le gel et les bulles, déconvoluée de la transmission à travers la cellule contenant le gel) est représentée en fonction de la fréquence sur la figure 2.29.a. Les croix bleues correspondent aux valeurs mesurées. Elles sont comparées à l'amplitude de transmission théorique calculée dans le cadre de l'ISA (courbe tiretée rouge) et dans le cadre du modèle au 2^{nd} ordre de diffusion multiple (courbe continue noire).

Les valeurs théoriques de l'ISA sont légèrement supérieures à celles du modèle au second ordre. L'écart est maximal à 1,5 MHz (35 %), puis reste inférieur à 4 % au-délà de 3 MHz.

19. Le balayage couvre une surface de 2×1 cm^2.

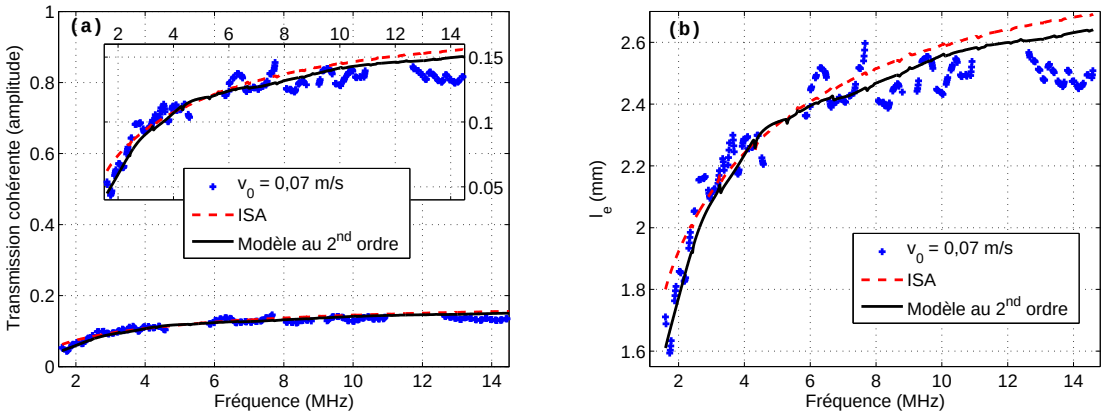


Figure 2.29 – (a) : Transmission cohérente par un gel bulleux (croix bleues), comparée à la transmission théorique d'un nuage de bulles de rayon 75 μm, de densité 8 bulles/mm^3 et d'épaisseur 10 mm obtenue dans le cadre de l'ISA (courbe tiretée rouge) et dans le cadre du modèle au 2^{nd} ordre de diffusion multiple (courbe continue noire). (b) : Libre parcours moyen élastique en fonction de la fréquence, estimé à partir de la transmission cohérente de l'échantillon d'épaisseur 10 mm, et comparé aux valeurs théoriques.

Comme nous le prévoyions au paragraphe 2.4.2, la prise en compte des corrélations ne modifie que très peu la transmission de l'échantillon puisque les hétérogénéités sont très peu concentrées dans ce dernier (1,4 %).

La comparaison de nos mesures avec les valeurs théoriques montre un excellent accord sur les bandes de fréquences 1,5-4,5 MHz et 5,8-7,7 MHz. Entre 1,5 et 7,7 MHz, la transmission mesurée passe de 0,05 à 0,14.

Sur l'intervalle 8-11 MHz, l'accord reste très bon, mais nos valeurs expérimentales sont systématiquement inférieures aux valeurs théoriques. Enfin, sur l'intervalle 12,6-14,6 MHz, cette tendance s'accentue : l'écart entre nos mesures et les valeurs théoriques évolue entre 7 et 15 %.

Le libre parcours moyen élastique est évalué à partir de la transmission cohérente $T(f)$ (figure 2.29.a) à l'aide de la relation suivante :

$$l_e(f) = \frac{-L}{\ln(T(f)^2)}. \tag{2.20}$$

Nous l'avons représenté en fonction de la fréquence sur la figure 2.29.b. Il croît avec la fréquence, de 1,6 mm à $f = 1,5$ MHz, à 2,5 mm à $f = 14,6$ MHz. L'accord avec les valeurs théoriques est excellent entre 1,6 MHz et 8 MHz, puis sur l'intervalle de fréquences 8-14,6 MHz, comme pour la transmission cohérente, on peut voir que les valeurs théoriques sont légèrement supérieures aux valeurs expérimentales.

Pour conclure brièvement, nous montrons avec ces derniers résultats que notre dispositif expérimental permet de mesurer proprement le libre parcours moyen élastique sur un

autre milieu hétérogène, de nature très différente du premier. Le milieu étant très dilué, la théorie de l'ISA suffit à décrire l'atténuation par les bulles. Comme dans le cas des forêts de tiges, mais à plus basse fréquence, nous observons cependant un léger désaccord entre les valeurs théoriques et nos mesures. Voici donc quelques pistes afin d'améliorer la mesure.

Contrairement aux forêts de tige, dans les milieux bulleux nous avons évalué le libre parcours moyen élastique à partir des données de transmission d'une seule épaisseur. Son estimation est donc moins robuste.

Le recalage des signaux n'est pas aussi évident dans le cas d'un balayage à deux dimensions. Il demande au préalable la mesure d'une matrice de signaux de référence[20]. Cette mesure rallonge le temps de l'expérience et la rend plus sensible à d'éventuels changements de température. Pour améliorer notre dispositif, on peut alors imaginer ne déplacer que l'échantillon et laisser le transducteur et l'hydrophone face à face en positions fixes. Dans ce cas, l'acquisition d'une seule référence devrait suffire.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une configuration expérimentale originale reposant sur l'insonification en régime non linéaire d'un milieu constitué de diffuseurs élastiques sans contact, présentant un fort contraste par rapport au milieu environnant.

Nous nous sommes d'abord intéressés à la transmission balistique, qui montre des formes d'onde très variées, perdant parfois toute ressemblance avec l'onde incidente. Elles présentent à la fois les caractéristiques de la non linéarité –distorsion et dissymétrie de la forme d'onde– et celle de la diffusion multiple –perte en amplitude et durée supérieure au signal incident. Quand l'onde incidente est une onde de choc, l'onde transmise n'en garde pas systématiquement le caractère. Cependant, le temps de montée du choc, un paramètre souvent mesuré pour rendre compte des variations dans la forme temporelle d'une onde de choc, a été évalué. Comme dans de précédentes études, nous observons qu'il croît avec l'épaisseur traversée.

À travers l'étude de la transmission cohérente, nous avons montré que malgré la diffusion multiple, l'onde cohérente conserve la forme typique de l'onde de choc incidente. Nous avons par ailleurs observé que le comportement des harmoniques de l'onde cohérente en fonction de l'amplitude émise est identique à celui des harmoniques de l'onde transmise dans l'eau, et ce quelle que soit l'épaisseur traversée. Ceci indique que dans notre configuration expérimentale, chaque composante spectrale est diffusée indépendamment des autres. Il n'y a pas de couplage entre la non linéarité et la diffusion multiple.

Nous avons mis à profit cette dernière observation pour mesurer le libre parcours moyen élastique, distance caractéristique de décroissance de l'intensité cohérente, ainsi que la vitesse de groupe de l'onde cohérente, sur une grande bande de fréquences. Nos résultats étendent le domaine de validité du modèle linéaire au second ordre de diffusion multiple,

20. Plutôt qu'une simple ligne.

qui se base sur l'approximation de diffuseurs ponctuels. Ils invalident par ailleurs les prédictions de l'ISA, qui surestime le libre parcours moyen élastique partout en dehors de la résonance.

Enfin, nous avons testé notre dispositif de mesure de transmission cohérente sur des échantillons de bulles, connues pour être des diffuseurs forts, au même titre que les tiges d'acier. Nous avons pu observer pour la première fois une *coda* ultrasonore en transmission de ces milieux. Nous avons ensuite mesuré la transmission cohérente d'un nuage de bulles. La concentration en bulles dans le gel étant faible, l'ISA décrit bien la transmission cohérente.

CHAPITRE 3

Étude de l'intensité incohérente en régime linéaire

Nous délaissons dans ce chapitre les termes quadratiques de l'équation d'onde. En régime linéaire, l'intensité moyenne, ou la fonction de corrélation du champ, obéit rigoureusement à l'équation de Bethe-Salpeter. Sous certaines approximations, dont l'une consiste à considérer la propagation de l'onde comme analogue à celle de particules opérant une marche aléatoire, cette équation se ramène à une équation de la diffusion qui ne dépend que d'un seul paramètre, la constante de diffusion que l'on notera D. L'intensité moyenne de l'onde acoustique se répand donc dans le milieu comme la chaleur ou comme les électrons d'un conducteur désordonné, la "halo" diffus croissant autour de la source en $\sqrt{Dt}$.

Le paramètre D a déjà été mesuré à l'aide de deux méthodes différentes sur un milieu synthétique développé au laboratoire. Les méthodes étaient basées sur des mesures en rétro-diffusion. Arnaud Tourin [60, 61] et Victor Mamou [42] ont étudié l'affinement du cône de rétro-diffusion cohérente, dont la largeur, en régime de diffusion, dépend de la constante de diffusion [1]. La méthode est cependant limitée par la résolution spatiale des transducteurs qui ne permet pas de suivre l'affinement du cône au-delà d'un certain temps, sans savoir si le régime de diffusion est déjà établi. Alexandre Aubry [43] mesurait l'extension spatiale du halo de diffusion sur la face de l'échantillon "visible" en rétro-diffusion, après avoir séparé les contributions de diffusion multiple de celles de diffusion simple. Chacune de ces méthodes a donné des résultats différents [2].

Notre objectif ici est de valider ou d'invalider les mesures précédentes, en évaluant la constante de diffusion à l'aide d'une troisième méthode s'appuyant sur des mesures en transmission du milieu. Au-delà d'une validation, il est fondamental d'avoir un échantillon dont on connaît D avec certitude –on connaît déjà son libre parcours moyen élastique l_e. L'échantillon pourrait alors servir d'étalon pour d'autres études.

Ce chapitre débute sur quelques développements théoriques, au bout desquels nous parviendrons à l'équation de la diffusion, dont la solution sera discutée dans notre configuration. Nous présenterons ensuite en détail le protocole expérimental, suivi des résultats obtenus.

1. En régime de diffusion, la largeur angulaire typique du cône de rétro diffusion cohérente est proportionnelle à $\lambda_0/\sqrt{Dt}$.

2. 2 mm$^2/\mu$s [42] et 2,4 mm$^2/\mu$s [43]

3.1 De l'équation du transfert radiatif à l'équation de la diffusion.

On considère ici la transmission à travers un milieu hétérogène bidimensionnel d'épaisseur L au moins supérieure au libre parcours moyen élastique l_e. Tout effet d'interférence est négligé. La propagation de l'intensité de l'onde est supposée analogue à celle de particules classiques subissant des collisions sur les hétérogénéités du milieu, et n'interférant pas entre elles.

3.1.1 L'équation du transfert radiatif

La grandeur fondamentale qui décrit la propagation de l'intensité de l'onde est l'intensité spécifique, ou luminance, $I(\vec{r},\vec{u},t)$, avec $\vec{r}=(x,z)$. Dans une vision particulaire, elle donne le nombre de particules présentes au point $\vec{r}$ et se propageant dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ à l'instant t. $I(\vec{r},\vec{u},t)$ est une densité de puissance, par unité de longueur et d'angle (exprimée à 2d en $\mathrm{W.m^{-1}.rad^{-1}}$ [3].). L'équation qui régit l'intensité spécifique est l'équation du transfert radiatif (ETR) [4] dont l'expression est :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t}+\vec{u}.\vec{\mathrm{grad}}I=-\frac{I}{l}+\frac{1}{l_e}\int_{2\pi}I(\vec{r},\vec{u},t)p(\vec{u}|\vec{u}\,')\mathrm{d}\theta_{\vec{u}\,'}, \tag{3.1}$$

avec c la vitesse des particules ou vitesse de transport, supposée indépendante de $\vec{r}$ et t. La fonction $p(\vec{u}|\vec{u}\,')$ est appelée fonction de phase. Elle donne la probabilité qu'une particule se propageant initialement dans la direction $\vec{u}\,'$ soit redirigée, après diffusion, dans la direction $\vec{u}$. $\mathrm{d}\theta_{\vec{u}\,'}$ est l'angle infinitésimal centré autour de la direction $\vec{u}\,'$.

Dans notre analogie, l'ETR peut être vue comme une équation bilan sur le nombre de particules contenues dans un volume mésoscopique. Les pertes –par absorption ou par diffusion– sont comptabilisées par le premier terme du membre de droite I/l. On a $\frac{1}{l}=\frac{1}{l_e}+\frac{1}{l_a}$, avec l_a la distance caractéristique des pertes par absorption. Le gain par diffusion de particules se propageant initialement dans toutes les directions et redirigées après diffusion dans la direction $\vec{u}$ est modélisé par le second terme.

3.1.2 Courant moyen de particule et densité locale d'énergie

Le vecteur courant moyen de particule, $\vec{J}(\vec{r},t)$, est défini par la relation suivante :

$$\vec{J}(\vec{r},t)=\int_{2\pi}I(\vec{r},\vec{u},t)\vec{u}\mathrm{d}\theta_{\vec{u}}. \tag{3.2}$$

3. À trois dimensions, elle s'exprime en $\mathrm{W.m^{-2}.sr^{-1}}$

4. La démonstration qui permet de passer de l'équation de Bethe-Salpeter à l'équation du transfert radiatif est donnée par exemple dans l'annexe A de [62]. Elle repose sur une transformée de Wigner du champ, qui permet d'introduire la notion de luminance à partir des équations fondamentales.

Il indique la direction moyenne prise par les particules au point $\vec{r}$, à l'instant t. Outre cette nouvelle grandeur, on définit la densité locale d'énergie, notée $U(\vec{r},t)$, par :

$$U(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int_{2\pi} I(\vec{r},\vec{u},t)\mathrm{d}\theta_{\vec{u}}. \tag{3.3}$$

Elle s'exprime en J.m^{-2} et correspond dans notre analogie au nombre de particules présentes au point $\vec{r}$ à l'instant t. Il a été démontré que cette grandeur obéit, sous certaines approximations (développées ci-dessous), à une équation de la diffusion [4].

3.1.3 Approximation pré-isotrope

Bien qu'étant déjà une simplification, l'ETR ne peut être résolue analytiquement sauf dans les cas de milieux infinis [63] ou semi-infinis [62]. L'approximation pré-isotrope, ou approximation de la diffusion, repose sur l'hypothèse suivante : au fil des diffusions, l'intensité spécifique perd progressivement sa dépendance angulaire sans jamais toutefois la perdre totalement. À deux dimensions d'espace, elle consiste à développer l'intensité spécifique $I(\vec{r},\vec{u},t)$ en série de Fourier pour n'en retenir que les deux premiers termes exprimés en fonction de $U(\vec{r},t)$ et de $\vec{J}(\vec{r},t)$. On écrit pour cela :

$$I(\vec{r},\vec{u},t) \approx \alpha\, U(\vec{r},t) + \beta\, \vec{J}(\vec{r},t).\vec{u}, \tag{3.4}$$

où les valeurs de α et β sont imposées par les relations entre I, $\vec{J}$ et U. À deux dimensions, $\alpha = c/2\pi$ et $\beta = 1/\pi$.

En intégrant l'ETR sur toutes les directions $\mathrm{d}\theta_{\vec{u}}$ et en utilisant (3.4), il vient [4] :

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\vec{r},t) + div\vec{J}(\vec{r},t) = 0, \tag{3.5}$$

qui exprime la conservation de l'énergie.

L'intégration sur toutes les directions $\mathrm{d}\theta_{\vec{u}}$ de l'ETR projetée sur $\vec{u}$ conduit, toujours en utilisant (3.4), à :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}(\vec{r},t) + \frac{c}{2}\vec{grad}\,U(\vec{r},t) = -\frac{\vec{J}(\vec{r},t)}{l^*}, \tag{3.6}$$

avec :

$$l^* = \frac{l_e}{1-\langle\cos\rangle}. \tag{3.7}$$

$\langle\cos\rangle$ est le cosinus moyen de l'angle de diffusion. Il est défini par :

$$\langle\cos\rangle = \int \cos(\vec{u},\vec{u}\,')p(\vec{u}|\vec{u}\,')\mathrm{d}\theta_{\vec{u}\,'}. \tag{3.8}$$

Il mesure l'anisotropie de la diffusion par un diffuseur. Il est nul dans le cas d'un milieu où la diffusion est isotrope ($l^* = l_e$), et tend vers *un* dans le cas d'une diffusion piquée vers l'avant ($l^* >> l_e$).

l^* est appelée "libre parcours moyen de transport" et correspond à la longueur caractéristique de "perte de directivité". Si l'on imagine le processus de diffusion incohérente

comme la marche aléatoire d'une particule, où l_e serait la taille moyenne de chaque pas, l^* est la distance caractéristique de perte de mémoire de la direction initiale.

3.1.4 Équation de la diffusion

En dérivant l'équation (3.5) par rapport au temps et en la sommant avec la divergence de l'équation (3.6) (multipliée par $-c$), on arrive à :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{c}{l^*}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2}c^2 \Delta U, \tag{3.9}$$

qui est une équation de propagation satisfaite par la densité d'énergie locale $U(\vec{r}, t)$.

Pour se ramener à l'équation de la diffusion, on fait l'hypothèse que U et sa dérivée temporelle varient lentement à l'échelle de l^*/c. Si T est le temps caractéristique de variation de U, on doit avoir $T >> l^*/c$[5]. L'équation (3.9) devient alors :

$$\Delta U - \frac{1}{D}\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{3.10}$$

U satisfait donc à une équation de diffusion dont les solutions ont longuement été étudiées dans la littérature [64].

La constante de diffusion D du milieu est définie par la relation suivante[6] :

$$D = cl^*/2. \tag{3.11}$$

La constante de diffusion dépend donc du libre parcours moyen de diffusion ainsi que de la vitesse c identifiée plus haut comme la vitesse des "particules". En toute rigueur, c ne correspond ni à la vitesse de propagation de l'onde dans le fluide environnant, ni à la vitesse de groupe de l'onde cohérente. c est appelée vitesse de transport et correspond à la vitesse à laquelle l'énergie incohérente se propage dans le milieu. On la notera dans la suite c_{tr}.

3.1.5 Terme source et conditions aux limites

On rappelle que le milieu est une tranche d'épaisseur L, infinie dans la dimension latérale correspondant à la variable x. On choisit une source ponctuelle dans la dimension latérale (positionnée en $x = 0$), et dont la dépendance vis-à-vis de la profondeur et du temps est donnée par la fonction $s(z, t)$.

La solution de l'équation de la diffusion s'obtient par séparation des variables d'espace en notant $U(x, z, t) = U_x(x, t)U_z(z, t)$ [65]. Dans la dimension latérale, la dépendance en x s'exprime par $\exp(-x^2/4Dt)$. Au temps t, la taille caractéristique du halo de diffusion dans la dimension x est donc donnée par $\sqrt{Dt}$. Suivant l'autre dimension d'espace (z),

5. En prenant $l^* \sim 6$ mm et $c \sim 1,5$ mm/μs, il vient que $T >> 4$ μs. Nous verrons plus loin que cette condition est vérifiée dans notre configuration expérimentale.

6. En dimension d, le coefficient de diffusion s'écrit cl^*/d

l'équation de la diffusion, sans absorption, s'écrit :

$$\frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{1}{D}\frac{\partial U_z}{\partial t} = s(z,t). \tag{3.12}$$

L'expression exacte du second membre $s(z,t)$ [66] dépend de l'intensité cohérente (intensité du champ moyen) dont la décroissance a pour longueur caractéristique le libre parcours moyen de diffusion l_e et alimente progressivement le halo de diffusion. L'équation (3.12), complétée des conditions aux limites à appliquer sur les deux faces de l'échantillon (annulation du flux entrant [4]) permet le calcul de la solution analytique du problème. Cependant, cette solution étant trop compliquée pour être exploitée ici, on préfère faire une première approximation sur le terme source $s(z,t)$ qui consiste à le réécrire sous la forme plus simple : $s(z,t) = \delta(t)\delta(z_0 - z)$, où $z_0 = l^*$ [67], et l^* le libre parcours moyen de transport tenant compte de l'anisotropie de nos diffuseurs [7]. Cette expression simplifiée de $s(z,t)$, indépendante de l'intensité cohérente, traduit physiquement une source à l'intensité diffuse, ponctuelle dans le temps et dans l'espace, et située à la profondeur $z = z_0$, dans l'échantillon. Autrement dit, l'onde incidente pénètre dans l'échantillon et commence à diffuser en $z = z_0$. Cette simplification du terme source ne change pas ou peu –et uniquement aux temps courts– les courbes d'intensité transmise, pour les épaisseurs d'échantillon et les valeurs de libre parcours moyen considérées [42].

Le flux de particules sortant dans la direction perpendiculaire à la face arrière de l'échantillon est $J_z(t) = -D\frac{dU}{dz}$, dont une expression détaillée est donnée par Page et coll. [68]. Ainsi, une première stratégie pour tenter de mesurer la constante de diffusion consiste à approcher la courbe des temps de vol obtenue expérimentalement [8], par la solution de l'équation de la diffusion –la fonction de Green de notre problème– donnée par [64] [9] :

$$U(x,z,t) = \frac{\exp(-x^2/4Dt)}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-t/\tau_a) \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-D\beta_m^2 t) D K(\beta_m, z) K(\beta_m, 0), \tag{3.13}$$

avec

$$K(\beta_m, z) = \sqrt{2}\frac{\beta_m \cos(\beta_m z) + \frac{1}{z_0}\sin(\beta_m z)}{\sqrt{(\beta_m^2 + H^2)(L + \frac{H}{\beta_m^2 + H^2}) + H}}, \tag{3.14}$$

où $H = 1/z_0$ et les β_m sont solutions de l'équation implicite :

$$\tan(\beta L) = \frac{\beta(2H)}{\beta^2 - H^2}. \tag{3.15}$$

Toutefois, cette stratégie se heurte à plusieurs inconvénients, notamment le nombre de paramètres d'ajustement à prendre en compte en plus de D : il faut en effet tenir compte du temps caractéristique d'absorption τ_a, mais aussi de z_0 dont la relation avec l^* n'est qu'approximative. Notons qu'il existe une expression alternative de U [42] plus simple

7. z_0 est la profondeur de la "source diffuse équivalente". La "vraie" source est en surface, à $z = 0$, mais elle n'est pas diffuse.

8. Une courbe des temps de vol est représentée en bas de la figure 3.9.

9. Pour prendre en compte les pertes thermo-visqueuses, nous avons multiplié cette solution par $\exp(-t/\tau_a)$, avec $\tau_a = l_a/c$, le temps caractéristique de l'absorption thermo-visqueuse

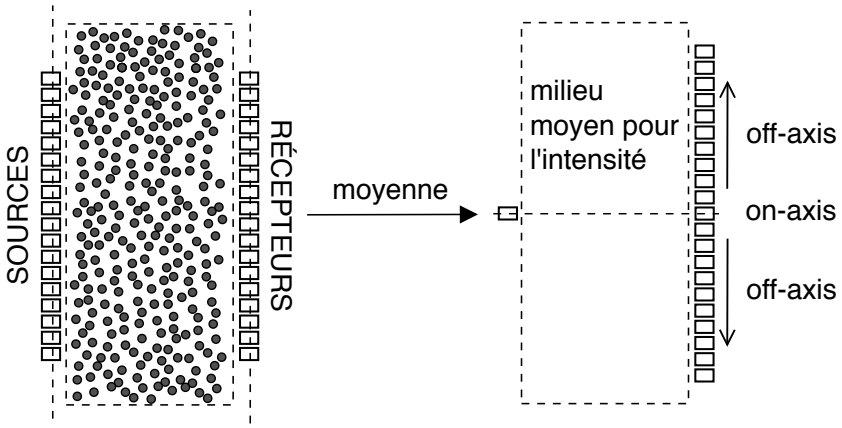


Figure 3.1 – Schéma du montage idéal (à gauche) et configuration équivalente après calcul de l'intensité et moyenne sur le désordre (à droite).

que celle de [68] parce que plus approchée. Elle repose sur une expression différente des conditions aux limites. Mais pour plus simple qu'elle soit, cette expression de U nécessite également trois paramètres d'ajustement : l^*, τ_a et D. Pour s'affranchir de cette difficulté et éviter d'approcher une courbe avec trois paramètres libres, il existe une astuce utilisée avec profit par Page et coll. Elle consiste à étudier, non pas le "halo" $U(x, z, t)$, mais le ratio $R(x, t)$ à un temps t donné, entre les intensités hors d'axe et sur l'axe, c'est-à-dire $U(x, L, t)/U(0, L, t)$. En effet, indépendamment de la présence d'absorption et de la valeur de z_0, ou même des conditions aux limites aux deux faces de l'échantillon (autrement dit, l'astuce est valable pour les deux solutions données par [68]. et [42].), ce rapport s'écrit simplement :

$$R(x,t) = \frac{U_x(x,t)}{U_x(0,t)} = \exp\left(-x^2/4Dt\right). \tag{3.16}$$

Il représente la croissance, au fil du temps, du halo moyen de diffusion autour de la position de la source, et ne dépend que de la constante de diffusion D. Ce rapport n'est valable que dans le cas d'émetteurs et de récepteurs ponctuels. C'est cette idée que nous allons mettre à profit pour mesurer D en transmission, indépendamment de la présence d'absorption et des conditions aux limites.

3.2 Méthode expérimentale

3.2.1 Principe de l'expérience et montage idéal

On souhaite mesurer l'intensité moyenne transmise à travers une tranche d'un milieu multiplement diffuseur. Pour cela, on voudrait idéalement travailler dans la configuration suivante (cf. figure 3.1) : N sources ponctuelles alignées en entrée du milieu (face avant) faisant face à N récepteurs ponctuels alignés en sortie du milieu (face arrière). Le déroulement de l'expérience serait le suivant :

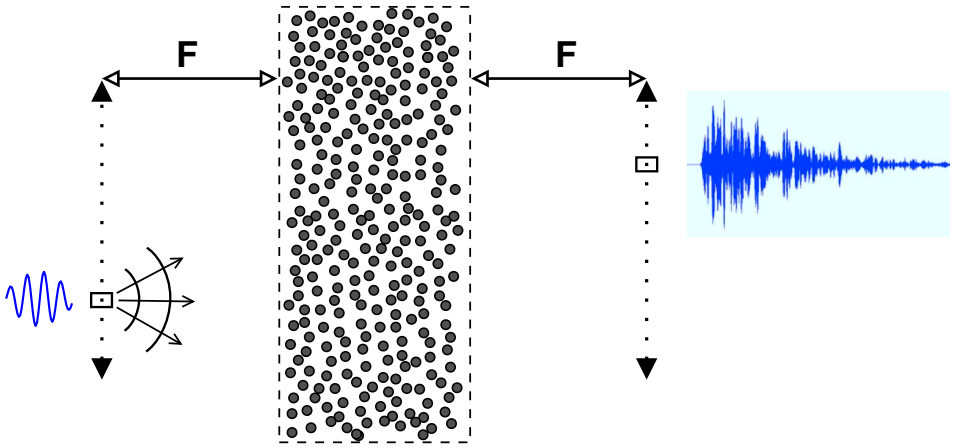


Figure 3.2 – Dispositif expérimental.

1. Acquisition des N^2 signaux de la matrice de transmission : pour chaque émetteur, on enregistre le champ transmis sur tous les récepteurs.
2. Calcul de l'intensité transmise par intégration du carré de chaque signal de la matrice de transmission sur une petite fenêtre temporelle glissante.
3. Calcul de l'intensité moyenne transmise par moyenne des N^2 intensités transmises sur tous les couples émetteur-récepteur espacés de la même distance.

Ces trois points résument bien le principe de l'expérience. Cependant, la première étape n'est pas réalisable dans la configuration expérimentale brièvement décrite ci-dessus. En effet, nos émetteurs et récepteurs sont de grande taille et, placés au contact du milieu, ils le perturbent en compliquant les conditions aux limites. Des réflexions successives du faisceau incident sur la face avant de l'échantillon et sur le transducteur émetteur, ainsi que des réflexions du faisceau transmis sur le transducteur récepteur et la face arrière de l'échantillon peuvent polluer les signaux enregistrés. La configuration expérimentale retenue –détaillée au paragraphe suivant– est donc différente, mais elle permet de se ramener à celle décrite ici.

Les points 2 et 3 ne présentent pas quant à eux de difficulté particulière. Ils correspondent tous deux à deux étapes de traitement de signal.

3.2.2 Sources et récepteurs équivalents

Pour limiter les réflexions parasites, nous avons initialement envisagé de travailler avec un unique émetteur et un unique récepteur. L'émetteur et le récepteur sont alors déplacés sur deux axes parallèles à l'échantillon, situés respectivement à la même distance F de la face avant et de la face arrière de celui-ci (cf. figure 3.2). F est de l'ordre de quelques dizaines de millimètres, ce qui permet l'acquisition de données non perturbées par les réflexions parasites, sur plusieurs dizaines de microsecondes.

Dans un premier temps, on enregistre la réponse en transmission du milieu à une sollicitation quasi impulsionnelle (une sinusoïde de quelques périodes) pour toutes les positions

d'émetteur et de récepteur. L'ensemble des signaux acquis -il y en a autant qu'il y a de positions de récepteur multiplié par le nombre de positions d'émetteur- forme alors la matrice h_{ij}, appelée matrice des réponses impulsionnelles du milieu ou matrice de transmission. Les indices i et j renvoient respectivement aux numéros des positions émettrices et réceptrices. Les nombres de positions émettrices et réceptrices dépendent principalement du pas entre deux positions voisines, ainsi que de la distance entre les deux positions extrêmes. Tout comme F, ces deux paramètres seront fixés après avoir présenté les mesures de directivité des capteurs. Toute "l'information" du milieu est contenue dans la matrice h_{ij}.

Pour se ramener à la configuration de sources et de récepteurs au contact du milieu multiplement diffuseur, on applique des lois de retards en émission et en réception, afin de focaliser sur les faces avant et arrière de l'échantillon. Dans la pratique, on fixe une ouverture A centrée sur le point focal source ou récepteur désiré. On décale ensuite temporellement les réponses impulsionnelles incluses dans l'ouverture, de sorte qu'il y ait interférences constructives aux points de focalisation choisis, et on en fait la somme cohérente. Pour une focalisation au point E avec une ouverture A_E d'éléments émetteurs, et au point R avec une ouverture A_R d'éléments récepteurs, on écrit :

$$k_{ER}(t) = \sum_{i \in A_E} \sum_{j \in A_R} \alpha_{iE}\, \beta_{jR}\, \delta(t - \tau_{iE} - \tau_{jR}) * h_{ij}(t). \tag{3.17}$$

k_{ER}(t) est le champ acoustique au point R, position du récepteur équivalent (ou virtuel) obtenu par focalisation à la sortie de l'échantillon, après avoir focalisé en émission au point E, position de l'émetteur équivalent (ou virtuel) situé à l'entrée de l'échantillon. Les τ_{iE} (respectivement τ_{jR}) représentent les retards appliqués pour focaliser en entrée (respectivement en sortie) du milieu multiplement diffuseur. Ils sont calculés en prenant en compte la vitesse du son c dans l'eau et la distance entre émetteurs réels et virtuels, ou récepteurs réels et virtuels. L'expression des τ_{iE} est donnée par :

$$\tau_{iE} = \frac{\sqrt{(A/2)^2 + F^2} - \sqrt{(x_i - x_E)^2 + F^2}}{c}, \tag{3.18}$$

où $\sqrt{(A/2)^2 + F^2}$ est la distance entre le point focal (l'émetteur virtuel) et l'émetteur réel le plus éloigné du point focal. L'expression des retards appliqués pour focaliser en réception est similaire et s'obtient par simple remplacement des indices i et E par les indices j et R respectivement.

Les matrices α et β contiennent les coefficients d'apodisation appliqués à chaque voie. Par défaut, ils sont tous égaux à 1. Toutefois, on peut appliquer un jeu de coefficients différents, par exemple pour compenser des variations de sensibilités entre les éléments piézoélectriques d'un réseau, ou pour limiter l'ouverture A de la lentille, ou encore pour l'apodiser de façon à contrôler la forme du faisceau ultrasonore focalisé.

Dans la section suivante, nous présentons les transducteurs choisis ainsi que leur directivité. La connaissance de cette dernière est essentielle pour fixer les paramètres F et A,

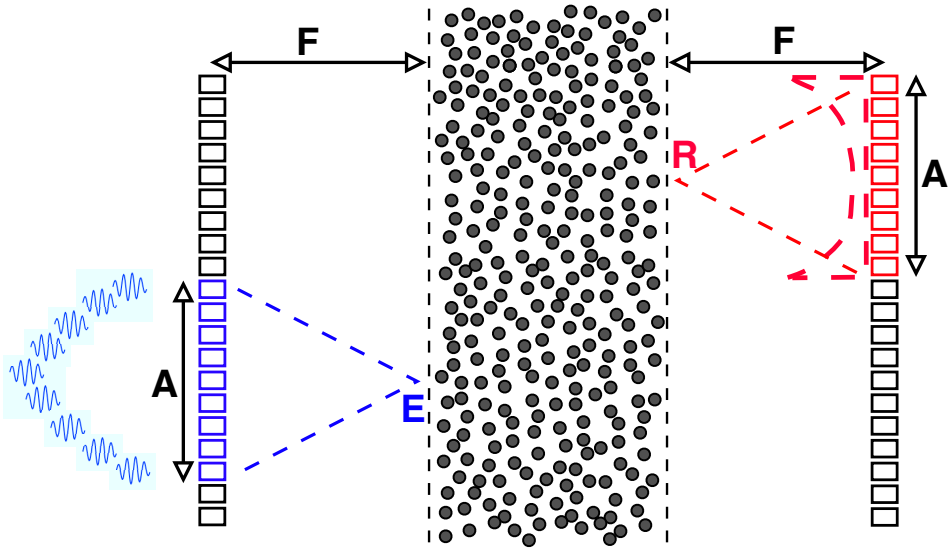


Figure 3.3 – L'équation (3.17) permet de passer de la matrice h_{ij} décrivant la transmission entre le jeu d'émetteurs-récepteurs réels à la matrice k_{ER} décrivant la transmission entre le jeu d'émetteurs-récepteurs équivalents qui sont au contact du milieu. Le paramètre A est l'ouverture de nos sources/récepteurs réels.

ainsi que les coefficients d'apodisation α et β.

3.2.3 Choix des transducteurs

Genèse

Lors d'une première campagne expérimentale, nous avions choisi deux transducteurs mono-éléments centrés sur la fréquence 3,2 MHz. Ce choix était justifié par leur faible encombrement –optimal du point de vue des réflexions parasites– et leur petit nombre –possibilité de caractériser leur directivité, pas de problème de différence de sensibilité (comme par exemple avec les éléments d'un réseau). Cependant, dans une telle configuration, le temps d'acquisition de la matrice de transmission était supérieur à deux jours pour les échantillons les plus épais, nécessitant un grand nombre de moyennes par position. Pendant ces longues expériences, nous avons observé des variations de la température de l'eau (fluide environnant). Celles-ci provoquaient une variation de vitesse du son, rendant les données difficilement exploitables sans un recalage très délicat des signaux.

Caractéristiques générales

Les résultats que nous présentons plus loin sont donc issus d'une campagne expérimentale dans laquelle la réception est assurée par un réseau linéaire de 64 éléments. Les éléments de ce réseau ont les mêmes caractéristiques –à leur sensibilité près– que le mono-élément émetteur. D'ouverture rectangulaire, légèrement focalisés dans la hauteur ($\sim$ 10 mm), leur largeur nominale dans la dimension horizontale est égale à 0,387 mm. Elle est donc inférieure à la longueur d'onde (à 3,2 MHz, $\lambda_{eau} = c_{eau}/f \sim 0,47$ mm), ce qui permet aux éléments d'être peu directifs.

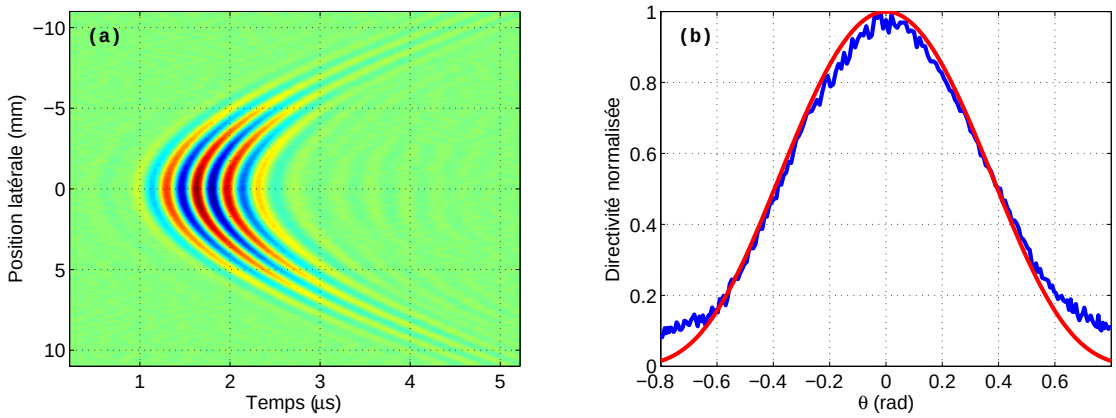


Figure 3.4 – (a) : Champ rayonné par un transducteur mono-élément, mesuré par l'interféromètre optique dans un plan à 10 mm de la surface. (b) : Directivité $d(\theta)$ mesurée (bleu) et ajustement gaussien d'écart type (rouge).

L'utilisation d'un réseau linéaire en réception permet un gain de temps considérable puisque le temps nécessaire à l'acquisition de la matrice de transmission n'excède pas une dizaine d'heures pour les échantillons les plus épais [10]. En revanche, l'utilisation du réseau nous oblige à appliquer une compensation à la sensibilité de chaque voie du réseau [11]. Celle-ci est intégrée dans les coefficients β.

Directivité d'un élément

La directivité du mono-élément utilisé comme émetteur a été mesurée à l'aide de l'interféromètre optique déjà utilisé au chapitre 2 (cf. § 2.1.2) [49]. Sur la figure 3.4.a, on a représenté le B-scan correspondant au déplacement engendré par le transducteur dans un plan situé à une dizaine de millimètres de la surface. La directivité $d(\theta)$ de l'élément est estimée en prenant, par exemple, le maximum de chaque signal temporel (cf. figure 3.4.b).

L'ouverture effective du mono-élément est alors déterminée, en approchant la mesure par une gaussienne dont l'expression (3.19) est donnée par la transformée de Fourier 1D d'espace d'une gaussienne de largeur à mi hauteur σ_{eff} :

$$d(\theta) = \exp -\frac{2\pi^2\sigma_{eff}^2(\tan\theta)^2}{\lambda^2}. \tag{3.19}$$

Le paramètre σ_{eff} est optimisé pour minimiser l'erreur au carré entre les courbes expérimentale et la théorique. On trouve $\sigma_{eff} = 0,22$ mm, soit une ouverture effective totale de 0,44 mm, légèrement supérieure à l'ouverture nominale annoncée plus haut. C'est probablement le couplage mécanique entre l'élément câblé et ses proches voisins qui explique que l'ouverture effective mesurée est supérieure à l'ouverture d'un élément. Ce résultat suggère de travailler, en émission, avec un pas entre deux positions consécutives égal à

10. Avec l'utilisation du réseau, nous nous sommes autorisés, à une position donnée, un nombre de moyenne très supérieur en comparaison de la configuration deux mono-éléments.

11. La sensibilité d'une voie du réseau dépend de la réponse mécanique de l'élément piézo-électrique mais aussi de l'électronique qui le commande.



Figure 3.5 – Photo du montage expérimental. Un train d'onde est émis par un mono-élément et se propage à travers une forêt de tiges ($\varnothing = 0,8$ mm, $L = 46$ mm, $n = 29,54$ tiges/cm^2). Les ondes transmises, multiplement diffusées, sont enregistrées sur un réseau de 64 éléments.

0,5 mm. Le pas en réception est fixé par le pas du réseau, soit $\delta = 0,417$ mm.

Lors de la formation de voies, on choisit le nombre d'éléments utilisés pour la focalisation en fonction de la directivité des mono-éléments. Nous supposons que tous les éléments du réseau ont la même directivité [12]. En considérant qu'un mono-élément éclaire efficacement une zone de 45° d'ouverture (sur le diagramme de directivité 3.4.b, on voit que l'élément éclaire d'une amplitude supérieure à 0,5 la zone comprise entre $-0,4$ et $0,4$ radians soit $\pm 23°$), il semble à ce stade raisonnable de prendre une ouverture A environ égale à F.

3.2.4 Choix des échantillons multiplement diffuseurs

Nous avons choisi de travailler sur des échantillons "forêts de tiges" en acier [13] de densité 29,54 tiges/cm^2 (14 % de remplissage surfacique, $d_{exc} = 1,2$ mm). Cette densité, comparée à celle des échantillons du même type utilisés au chapitre 2 (12 tiges/cm^2), se prête mieux à des expériences dans lesquelles on souhaite atteindre le régime de diffusion.

La section efficace totale de diffusion d'une tige est rappelée sur la figure 3.6, où l'on a représenté par ailleurs le libre parcours moyen élastique l_e, et le libre parcours moyen de transport l^*, pour la densité 29,54 tiges/cm^2. Le calcul des deux libres parcours moyen tient compte des corrélations spatiales d'ordre 2 entre centres diffuseurs.

On remarque que les valeurs du libre parcours moyen élastique sont sensiblement plus faibles (comparées à celles de la figure 2.2), ce qui est cohérent avec la densité de tiges qui est plus élevée. Intégré sur l'intervalle de fréquence 2-4 MHz, l_e est égal à 3,15 mm (Derode

12. La directivité d'un autre élément a été mesurée et mène à la même ouverture effective.

13. On rappelle les propriétés élastiques de l'acier : la vitesse des ondes longitudinales c_L est égale à 5,7 mm/μs, la vitesse des ondes transverses c_T à 3 mm/μs et la masse volumique ρ vaut 7,85 kg/L. L'impédance acoustique est égale au produit de la densité du milieu par la vitesse des ondes dans ce dernier (dans le cas d'une onde plane). Une mesure du degré d'hétérogénéité du milieu peut être donnée par le rapport des impédances acoustiques dans l'eau et dans l'acier pour les ondes longitudinales. Celui-ci est de l'ordre de 40.

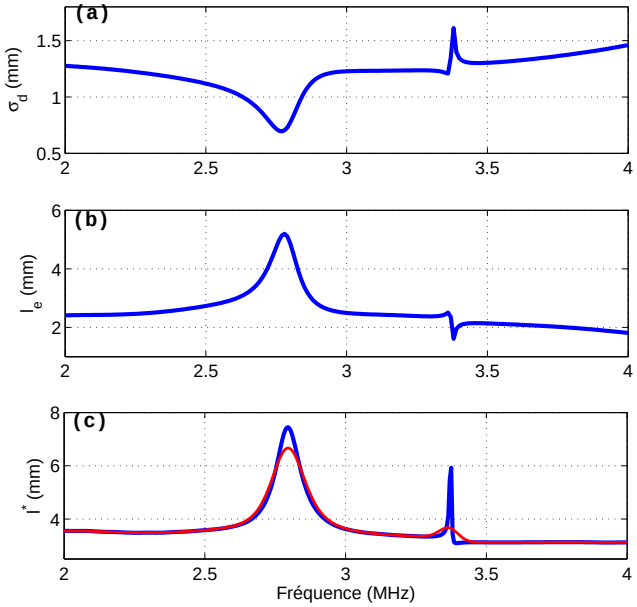


Figure 3.6 – (a) : Section efficace de diffusion d'une tige d'acier de diamètre 0,8 mm ($c_L = 5,7$ mm/μs, $c_T = 3$ mm/μs, $\rho_0 = 7850$ kg/m^3), immergée dans l'eau ($c_0 = 1,5$ mm/μs). (b) : Libre parcours moyen élastique l_e en fonction de la fréquence pour une densité de tiges égale à 29,54 tiges/cm^2. Les corrélations spatiales entre diffuseurs sont prises en compte. (c) : Libre parcours moyen de transport l^* en fonction de la fréquence. Tout comme pour le libre parcours moyen élastique l_e, le calcul du cosinus moyen de diffusion, $\langle\cos\rangle$, tient compte des corrélations spatiales entre diffuseurs. La courbe rouge est obtenue par convolution de la courbe bleue avec une gaussienne d'écart-type σ_f égal à 32 kHz, pour tenir compte des limites de la résolution fréquentielle (cf. § 3.3.4).

et coll. [45]). Nous avons travaillé avec deux échantillons d'épaisseurs 25 et 46 mm, correspondant donc respectivement à des épaisseurs "optiques" de 8 et 15 libres parcours moyen élastiques. Nos conditions expérimentales sont donc semblables à celles de Vellekoop et coll. [69].

Les tiges étant cylindriques et parallèles, et la hauteur des éléments piézo-électriques très grande devant la longueur d'onde, on considérera que l'ensemble du dispositif est à deux dimensions.

3.2.5 Profil des sources et récepteurs équivalents

L'objectif de sources et récepteurs équivalents de profil "ponctuel" n'est pas réalisable. Néanmoins, pour contrôler le profil de nos sources et récepteurs équivalents, nous appliquons un jeu de coefficients d'apodisation à l'émission et à la réception. En fixant F à 40 mm, nous avons dans un premier temps utilisé une fonction d'ouverture rectangulaire avec un rapport $F/A = 1$. Le profil latéral est représenté en bleu sur la figure 3.7.a. La largeur à mi hauteur du lobe central est environ égale à 0,7 mm, et l'amplitude des lobes

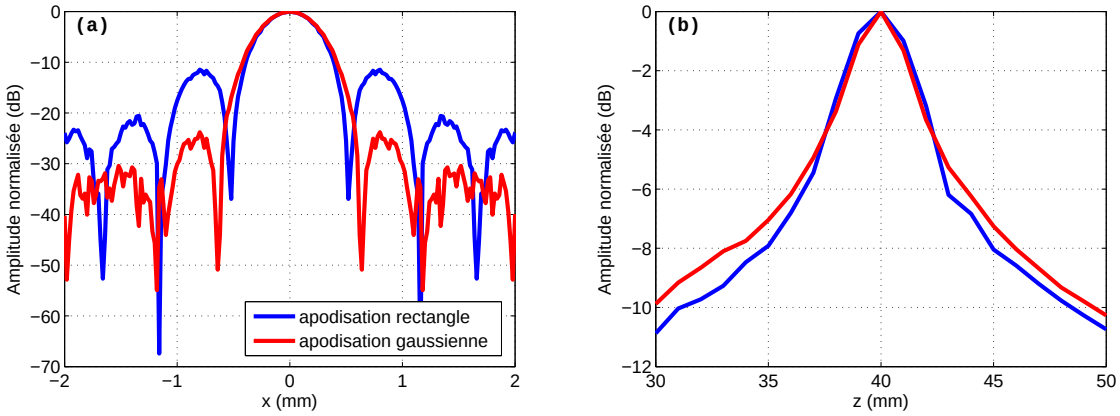


Figure 3.7 – (a) : Profils latéraux des taches focales pour des apodisations rectangulaire (bleue) et gaussienne d'écart-type $\sigma = 10$ mm (rouge), d'ouvertures respectives égales à 40 mm et 60 mm. (b) : Profils des sources équivalentes suivant z.

secondaires (-12 dB) n'est pas négligeable devant celle du lobe principal. Ce profil en sinus cardinal est typique d'une ouverture rectangulaire.

La courbe rouge correspond au profil obtenu après apodisation gaussienne d'écart-type $\sigma = 12,5$ mm, pour un rapport $F/A = 2/3$. L'ouverture est prise légèrement supérieure ($A = 60$ mm), afin que la largeur à mi hauteur du lobe principal soit égale à celle obtenue dans le cas de l'apodisation rectangulaire. L'apodisation gaussienne diminue très nettement l'amplitude des lobes secondaires, puisque ceux-ci sont renvoyés à -25 dB.

Dans la direction z, la profondeur de champ de nos sources et récepteurs équivalents est à peu près égale à 7 mm, pour les deux apodisations (cf. 3.7.b).

3.2.6 Nombre de sources et récepteurs

Émetteurs et récepteurs réels. Compte tenu de la directivité des éléments, et de la longueur des échantillons (280 mm), qui doivent être vus comme infinis dans la direction latérale, nous avons travaillé suivant l'axe x sur 133 mm centrés sur le milieu de l'échantillon. Cette longueur correspond à 5 positions adjacentes du réseau récepteur. Elle fixe donc le nombre de positions réceptrices à $64 \times 5 = 320$. Le pas en émission (0,5 mm) fixe le nombre de positions émettrices à 267. Les signaux sont échantillonnés à la fréquence $f_e = 40$ MHz, et numérisés sur 12 bits. Pour un milieu multiplement diffuseur insonifié par une impulsion de 1 μs qui engendre une coda d'environ 400 μs (soit 16000 pas temporels), la totalité de la matrice enregistrée pour un seul échantillon diffusant représente $320 \times 267 \times 16000 \sim 1,4 \cdot 10^9$ valeurs.

Sources et récepteurs équivalents. Le pas dx entre deux sources ou récepteurs virtuels voisins est fixé à 0,5 mm. Cette distance est suffisante pour que deux positions voisines enregistrent deux signaux décorrélés d'au moins 50% (cf. figure 2.13). Compte tenu de la valeur du pas, et des ouvertures A choisies dans les cas des apodisations rectangulaire et gaussienne, nous avons donc pu recréer respectivement $N = 187$ et $N = 147$

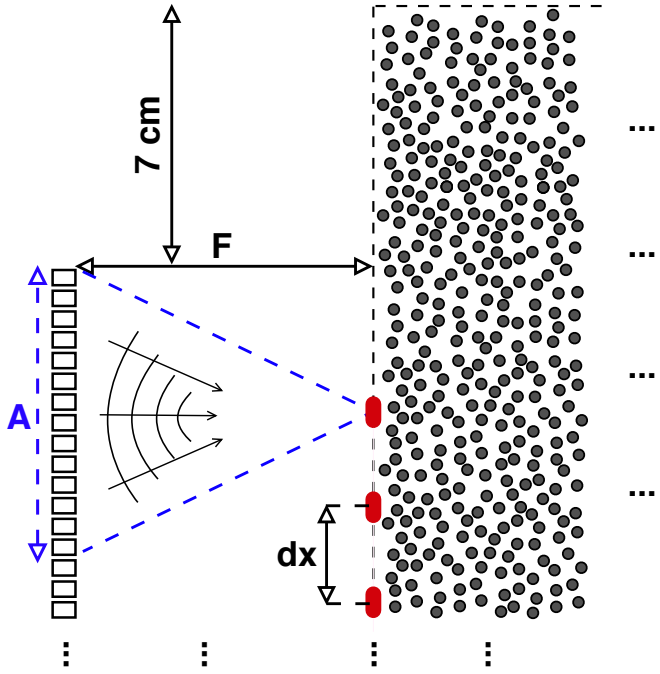


Figure 3.8 – Résumé des choix expérimentaux. $F = 40$ mm, $A = 40 - 60$ mm, $\mathrm{d}x = 0,5$ mm (le schéma ne respecte pas les échelles). L'écart entre les positions extrêmes des émetteurs ou des récepteurs réels avec les bords de l'échantillon est égal à 73 mm. En position extrême, les sources ou récepteurs équivalents se retrouvent à environ 90 mm des bords de l'échantillon.

sources/récepteurs équivalents. Si l'apodisation rectangulaire présente un profil latéral moins propre (présence de lobes secondaires plus élevés), elle permet donc toutefois de moyenner davantage. L'ensemble de ces choix expérimentaux est résumé sur la figure 3.8.

3.2.7 Calcul de l'intensité et moyenne sur le désordre

Calcul de l'intensité. À l'issue de la formation de voies, nous nous retrouvons à la fin de la première étape présentée dans la section 3.2.1. Le calcul de l'intensité –seconde étape– se fait par intégration du carré des signaux sur une petite fenêtre temporelle glissante. Le choix de la durée de la fenêtre, δt, résulte d'un compromis : δt doit être suffisamment grande afin de lisser les fluctuations, tout en étant suffisamment petite pour suivre l'évolution temporelle de l'intensité qui se fait à une échelle de temps de l'ordre de L^2/D. Nous avons choisi une fenêtre de durée $\delta t = 2$ μs, soit environ 6 périodes à la fréquence 3 MHz, ou encore 2 à 3 fois la durée de l'impulsion initiale.

Moyenne sur le désordre. On moyenne ensuite les intensités sur tous les couples (x_E, x_R) d'émetteur et de récepteur espacés de la même distance $n\mathrm{d}x = |x_E - x_R|$. Dans notre configuration, la moyenne porte donc sur N réalisations quand l'émetteur et le récepteur sont alignés ($n = 0$). Elle porte sur $2(N - n)$ réalisations pour $1 \leq n \leq N$. Soulignons que le nombre de moyennes décroît linéairement avec n. Ainsi, quel que soit le nombre N d'émetteurs et de récepteurs virtuels, en position extrême la moyenne ne porte que sur

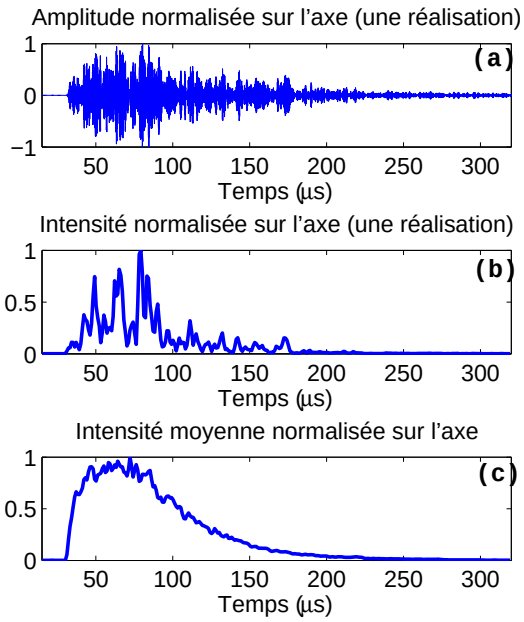


Figure 3.9 – (a) : Signal obtenu en sortie de l'échantillon d'épaisseur $L = 46$ mm, après formation de voie en configuration émetteur-récepteur virtuels face à face. (b) : Intensité transmise correspondante. (c) : Intensité moyenne transmise dans la même configuration.

deux réalisations. La qualité de notre estimation de l'intensité moyenne décroit donc avec l'écart entre émetteurs et récepteurs virtuels.

Sur la figure 3.9, on a représenté une réalisation du champ transmis $\Psi(x_E, x_R, t)$ à travers l'échantillon de 46 mm d'épaisseur, mesuré dans la configuration émetteur et récepteur équivalents face à face. Le signal physique s'étale sur plus de 300 μs : lors de la traversée de l'échantillon, l'onde est diffusée de nombreuses fois sur les tiges. L'ordre de diffusion, donné par le rapport ct/l_e, augmente proportionnellement avec le temps. L'intensité transmise correspondante est tracée au centre de la figure 3.9. Elle présente de nombreuses fluctuations, qui s'effacent pour laisser place à une courbe beaucoup plus lisse quand on moyenne sur les 187 réalisations émetteur et récepteur virtuels face à face (bas de la figure).

Après tous ces traitements, le résultat final à partir duquel nous cherchons à estimer la constante de diffusion du milieu est $\bar{I}(x,t)$, qui constitue une estimation de l'intensité moyenne, au temps t, transmise depuis un point source situé sur une face de l'échantillon jusqu'à un point récepteur situé sur la face opposée, à une distance x hors de l'axe de la source. Il s'agit de comparer $\bar{I}(x,t)$ à la fonction de Green de l'intensité moyenne dans notre problème (équation (3.16)).

3.3 Résultats

3.3.1 Extension latérale du halo de diffusion en régime impulsionnel

La prise en compte de l'extension latérale $e(x)$ de nos sources et récepteurs équivalents modifie l'expression du rapport $R(x,t)$ introduit au paragraphe 3.1.5. Pour une apodisation gaussienne en émission et en réception, on a $e(x) = \exp\left(-x^2/(2\sigma^2)\right)$, où σ^2 est la variance de l'extension latérale de nos sources et récepteurs virtuels. L'extension latérale du halo de diffusion est donnée par le double produit de convolution du rapport $R(x,t)$ par le profil de la source et du récepteur $e(x)$. Le choix de l'apodisation gaussienne simplifie l'expression finale du rapport d'intensité puisque le double produit de convolution revient à additionner les variances. On obtient :

$$\frac{\bar{I}(x,t)}{\bar{I}(0,t)} = \exp\left(-x^2/(2W(t)^2)\right), \tag{3.20}$$

avec $W^2 = 2Dt + 2\sigma^2$, la nouvelle variance (égale au carré de l'extension latérale du halo de diffusion). Dans le cas de l'apodisation rectangulaire, le profil des sources et émetteurs virtuels est donné par la fonction sinus cardinal. Le double produit de convolution ne donne donc plus exactement une gaussienne. Cependant, parce que l'extension latérale de nos sources devient vite très inférieure à l'extension du halo de diffusion $\sqrt{2Dt}$, on considérera que l'équation (3.20) reste valable dans le cas d'une apodisation rectangulaire, à condition que le régime de diffusion soit établi.

Les halos de diffusion en mesurés en transmission des deux échantillons sont représentés sur les figure 3.10 ($L = 25$ mm) et 3.11 ($L = 46$ mm).

Afin d'estimer l'extension latérale du halo de diffusion, on approche à chaque temps t le logarithme népérien de la formule (3.20) par un ajustement linéaire en fonction de x^2. La pente de la courbe approchée est égale à $(2W)^{-1}$. Ainsi, quel que soit t, l'ajustement linéaire donne une valeur de W dont le comportement, en régime de diffusion, suit une loi linéaire en fonction du temps t avec une pente égale à $2D$. On note $x_{\min}$ et $x_{\max}$ les bornes inférieure et supérieure de l'ajustement. Si le choix de $x_{\min}$ ne se pose pas ($x_{\min} = 0$), celui de $x_{\max}$ est critique comme on peut le voir sur la figure 3.11.d. Aux temps courts ($t \sim 60$ μs), la courbe en logarithme présente une rupture de pente autour de $x^2 \sim 1000$ mm^2. Celle-ci indique que le comportement du ratio R n'est pas gaussien sur l'ensemble du domaine de x^2 accessible à ces temps-là. Physiquement, cela veut dire que le régime de diffusion n'est pas encore établi. Il met d'autant plus de temps à s'établir que l'on s'éloigne dans la dimension latérale [63].

La borne $x_{\max}$ peut être déterminée selon différentes méthodes. Une estimation *a priori* de la constante de diffusion permettrait d'évaluer à chaque temps t une largeur théorique du halo de diffusion et d'en déduire une position $x_{\max}$. On peut aussi, quel que soit le temps, imposer une limite inférieure au rapport (3.20), par exemple $1/e$, $1/e^2$, ..., le seuil fixé correspondant à une valeur de $x_{\max}$. Enfin, on peut imposer à chaque point

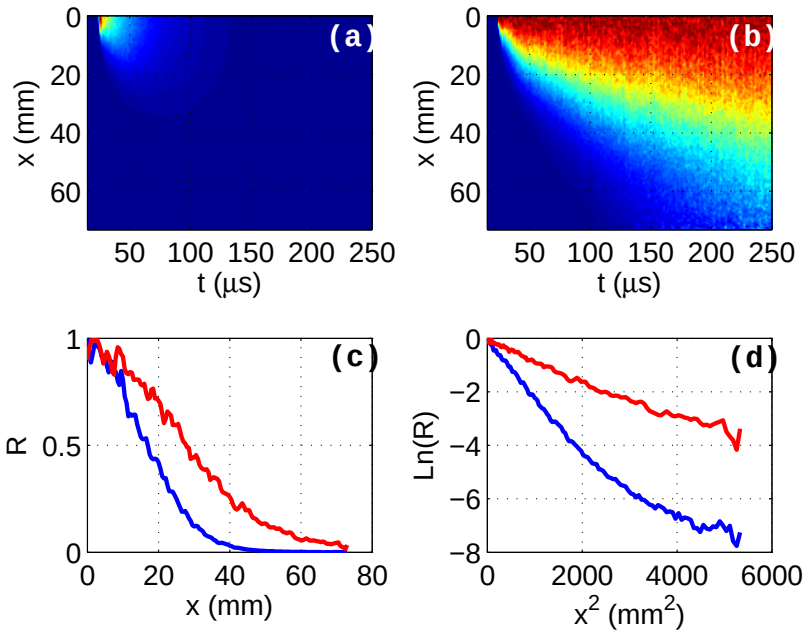


Figure 3.10 – Intensité moyenne transmise à travers l'échantillon d'épaisseur $L = 25$ mm. (a) : $I(x,t)$. (b) : $R(x,t)$. Intensité normalisée $R(x,t)$ prise aux temps $t = 60$ μs (courbe bleue) et $t = 120$ μs (courbe rouge) en échelles linéaire (c) et logarithmique (d).

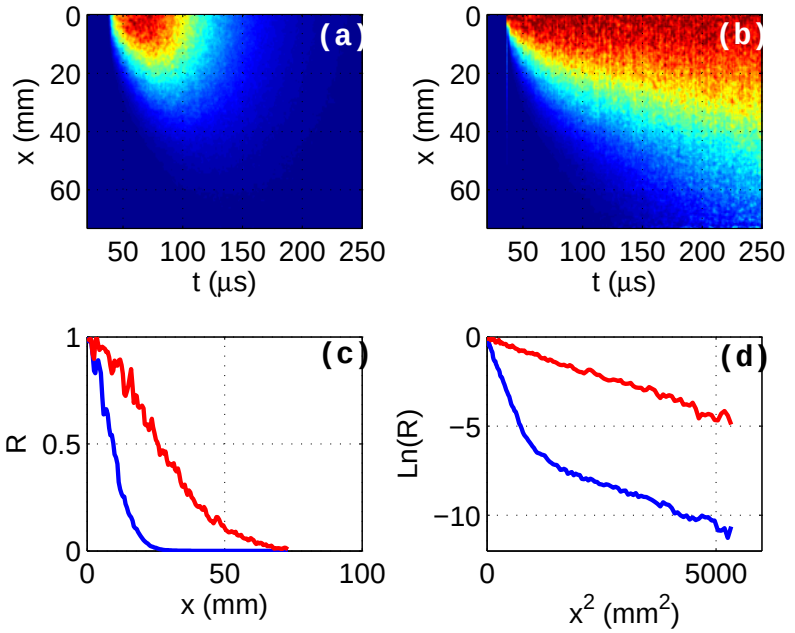


Figure 3.11 – Idem figure 3.10, pour l'échantillon d'épaisseur $L = 46$ mm.

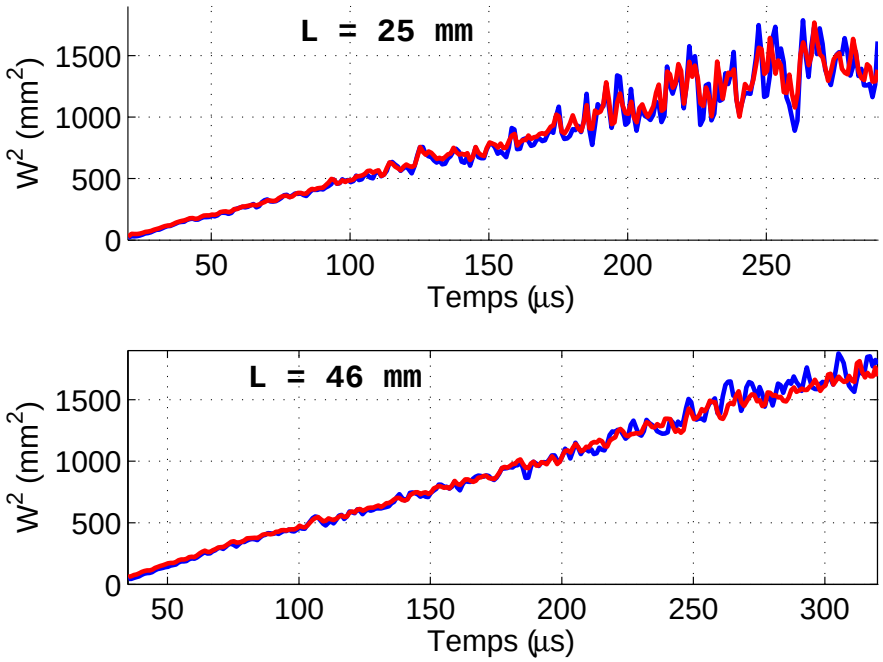


Figure 3.12 – Extension latérale du halo de diffusion W^2 en fonction du temps, calculée après apodisation gaussienne (courbes bleues) ou rectangulaire (courbes rouges).

expérimental un poids –une importance– inversement proportionnel à la variance de ce dernier. Dans tous les cas, la borne $x_{\max}$ n'est jamais prise supérieure à l'épaisseur L de l'échantillon, afin de ne pas donner plus de "poids" à la dimension latérale (x) qu'à la dimension profondeur (z) bornée par L [14]. Cela permet aussi d'éviter de travailler sur des données trop peu moyennées. Ces différentes façons d'estimer $W^2(t)$ à partir du rapport (3.20) donnent des résultats différents, assortis chacun d'une incertitude $\delta W^2(t)$. *In fine*, pour chaque temps t, la valeur finale de $W^2(t)$ est prise égale à la moyenne de la plus petite valeur de $W^2(t) - \delta W(t)^2$ et de la plus grande valeur de $W(t)^2 + \delta W(t)^2$. Ces deux valeurs définissent par ailleurs une barre d'erreur.

L'extension latérale $W^2(t)$ du halo de diffusion est représentée en fonction du temps sur la figure 3.12. Pour l'échantillon le plus fin comme pour le plus épais, le comportement de $W^2(t)$ semble linéaire. Ceci constitue un indice de l'établissement du régime de diffusion. On notera que si le choix de l'apodisation ne change pas la tendance des courbes, il semble néanmoins que les fluctuations de $W^2(t)$ sont plus faibles après l'apodisation rectangulaire. Cela est probablement dû au plus grand nombre de moyennes dans le cas de l'apodisation rectangulaire.

14. Paasschens [63] montre qu'à deux dimensions, la condition de convergence de l'ETR vers l'ED est $(ct)^2 >> r^2$, soit $(ct)^2 >> {x_{\max}}^2 + L^2$.

3.3.2 Évaluation de la constante de diffusion en régime impulsionnel

La constante de diffusion est estimée par ajustement linéaire de l'extension latérale du halo de diffusion en fonction du temps sur l'intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$, paramètres qui là encore doivent être choisis avec discernement.

Détermination de la borne $t_{\max}$. Le halo de diffusion s'étale depuis la source, dans la direction latérale, sur une extension donnée par $\sqrt{2Dt}$. A deux dimensions, cette extension est nécessairement limitée par $\sqrt{l^*{}_{\max} ct}$, avec $l^*{}_{\max}$, la valeur maximale que peut prendre le libre parcours moyen de transport. Sur l'intervalle de fréquence 2-4 MHz, la valeur moyenne de l^* est environ égale à 4 mm (cf. figure 3.6). La valeur maximale, atteinte pour $f \sim 2,8$ MHz, vaut 6,35 mm. Le milieu étant limité dans la dimension latérale, le critère suivant est retenu pour la borne supérieure : $t_{\max}$ est le temps à partir duquel plus de 5% du halo de diffusion a atteint les bords du milieu. La distance minimale h entre les sources et récepteurs virtuels et le bord de l'échantillon étant égale à 90 mm, on obtient $t_{\max} = 0,37h^2/(c^*_{\max}) \sim 310$ μs.

Détermination de la borne $t_{\min}$. En toute logique, $t_{\min}$ correspond au temps à partir duquel le régime de diffusion est établi, dont l'évaluation est critique.

Paasschens propose une solution à l'équation du transfert radiatif pour un milieu infini à deux dimensions [63] :

$$U(r,t) = \frac{e^{-ct/l}}{2\pi r}\delta(ct-r) + \frac{1}{2\pi lct}\left(1-\frac{r^2}{c^2t^2}\right)^{-1/2} \times \\ \times \exp\left[l^{-1}(\sqrt{c^2t^2-r^2}-ct)\right]\Theta(ct-r). \tag{3.21}$$

Cette solution ne correspond pas à nos conditions aux limites et repose sur l'hypothèse de diffusion isotrope ($l_e = l^* = l$). Elle n'est donc pas directement applicable à notre cas, mais elle peut donner quelques ordres de grandeurs pertinents. En prenant une distance source-récepteur $r = 5l^*$ puis $r = 10l^*$, on obtient que la largeur $W^2(t)$ de la solution de l'ETR est à 2% près égale à celle de l'équation de la diffusion pour des temps t respectivement supérieurs à $10l^*/c$ et $30l^*/c$.

Afin de prendre en compte plus précisément les spécificités de notre expérience, vu l'absence de solution analytique, nous avons réalisé une simulation numérique fondée sur une marche aléatoire anisotrope dans une tranche d'épaisseur L. Plusieurs millions de particules sont "émises" en un point d'un côté de la tranche à la profondeur l^*. La fonction de phase $p(\vec{u}|\vec{u}')$ est donnée par la section efficace différentielle de diffusion de nos tiges, moyennée sur l'intervalle de fréquence 2-4 MHz. À chaque pas, une longueur p (distribuée exponentiellement avec pour moyenne l_e) et un angle $\theta = (\vec{u}, \vec{u}')$ sont tirés au sort. Pour une particule, la simulation s'arrête dès qu'elle atteint l'un des deux bords de la tranche. Sur le bord opposé, on compte en chaque position, à chaque temps, les particules qui ressortent de la tranche. La pente de ${W_{ETR}}^2$ croît dans un premier temps rapidement, puis se stabilise à $\pm 2\%$ après un temps égal à $8l^*/c$ pour l'échantillon d'épaisseur $L = 5l^*$,

Apodisation	rectangulaire	gaussienne
$L = 25$ mm	$2,79 \pm 0,08$ mm$^2/\mu$s	$2,73 \pm 0,11$ mm$^2/\mu$s
$L = 46$ mm	$2,95 \pm 0,04$ mm$^2/\mu$s	$3,08 \pm 0,05$ mm$^2/\mu$s

Table 3.1 – Mesure de D en fonction de l'épaisseur L de l'échantillon et de l'apodisation.

et $12l^*/c$ pour l'échantillon d'épaisseur $L = 10l^*$. En supposant que la vitesse c est égale à la vitesse de propagation du son dans l'eau, et en prenant par sécurité, la valeur maximale de l^*, on trouve $t_{\min} \sim 35$ μs pour l'échantillon le plus fin, et $t_{\min} \sim 52$ μs pour l'échantillon le plus épais.

Détermination de D. Une fois t_{min} et t_{max} déterminés, Pour estimer la constante de diffusion D, on procède de deux façons à l'ajustement linéaire de l'extension latérale $W^2(t)$ du halo de diffusion : ajustement avec poids constant et ajustement avec poids inversement proportionnel à la variance du point considéré. Dans chaque configuration [15], les deux méthodes d'ajustement produisent chacune une valeur de D assortie d'une incertitude δD. Comme pour $W^2(t)$, on retient pour D la moyenne entre la plus petite valeur de $D - \delta D$ et la plus grande valeur de $D + \delta D$.

Les valeurs de D sont réunies dans le tableau 3.1. Curieusement, la constante de diffusion est sensiblement supérieure dans le cas de l'échantillon le plus épais, alors que D est une grandeur intensive. Nous verrons pourquoi au paragraphe 3.3.3. Dans le cas de l'échantillon le moins épais, l'apodisation rectangulaire mène à une valeur légèrement plus élevée que l'apodisation gaussienne. C'est le cas contraire avec l'échantillon le plus épais. Par contre, l'erreur est systématiquement supérieure dans le cas de l'apodisation gaussienne.

Notons que nous aurions pu procéder autrement pour l'estimation de D. En effet, une bonne connaissance du temps t, ainsi qu'une mesure précise de σ et l'évaluation de $W^2(t)$ permettent en théorie, d'évaluer à chaque temps t la constante de diffusion D [16].

Néanmoins, on ne connaît pas précisément l'origine du temps t. En effet, dans l'approximation de la diffusion, la source à l'intensité diffuse est supposée ponctuelle en espace et en temps, et localisée en $z_0 = l^*$. Afin d'en tenir compte, il faudrait imposer un décalage temporel de z_0/c. Bien sûr, ce décalage, tout comme $2\sigma^2$, doit se faire ressentir aux temps courts et demande en plus une bonne connaissance de $2\sigma^2$ et de l^*.

Par ailleurs, d'un point de vue physique, le démarrage de la source à l'intensité diffuse ne se fait pas instantanément à z_0/c, mais de façon progressive et non "impulsionnelle", ni en temps, ni en espace, ce qui rend encore plus difficile la détermination d'un "instant d'allumage" (origine des temps) et d'une taille initiale de la source diffuse.

15. Une configuration = une apodisation + une épaisseur.
16. À chaque temps t, on soustrait $2\sigma^2$ à $W^2(t)$, et on obtient D en divisant le résultat par $2t$.

3.3.3 Évolution temporelle du spectre

Nous venons de voir qu'en régime impulsionnel, les valeurs de la constante de diffusion D diffèrent sensiblement entre l'échantillon le plus fin et l'échantillon le plus épais. Or, D est une grandeur intensive et ne devrait donc pas dépendre de l'épaisseur du milieu.

Il a été montré que le libre parcours moyen élastique dépend de la fréquence (cf. chapitre 2) [45]. En l'occurrence, sur l'intervalle 2-4 MHz, il présente un pic de résonance à 2,8 MHz. Le libre parcours moyen de transport l^* se calcule à partir du libre parcours moyen élastique l_e et de la section efficace de diffusion d'une tige. Ainsi, sans même connaître la vitesse de transport c_{tr}, il est raisonnable de penser que la constante de diffusion peut dépendre de la fréquence. Par conséquent, il est tout aussi raisonnable que les constantes de diffusion mesurées en régime impulsionnel diffèrent, car les spectres des signaux transmis sont différents.

Notons ici que les signaux tirés n'étaient pas les mêmes pour les deux épaisseurs étudiées. Le signal émis était un train d'ondes de deux périodes pour l'échantillon le plus fin et de trois périodes pour l'échantillon le plus épais afin de transmettre suffisamment d'énergie. Par ailleurs, le milieu est dispersif et agit comme un filtre dont la fonction de transfert dépend de son épaisseur. Etayons ce dernier point.

Sans tenir compte de nos conditions aux limites, dans un milieu infini, à une distance L de la source, la densité spectrale de puissance devrait être proportionnelle à $\exp(-\tau_D/t)$, avec $\tau_D = L^2/D$, le temps de diffusion, ou temps de Thouless. Si D observe un maximum à la fréquence f_0 sur notre bande de fréquences considérée, alors τ_D devrait être minimal à cette même fréquence, et la densité spectrale de puissance (DSP) devrait y présenter un pic. Ce pic devrait être de moins en moins prononcé à mesure que le temps t devient supérieur à τ_D. En effet, pour $t \gg \tau_D$, la DSP est proportionnelle à $1 - \tau_D/t \to 1$ indépendamment du temps et de la fréquence.

L'effet de filtrage lié à la dispersion du milieu devrait donc être très fort aux temps courts, mais disparaître aux temps supérieurs au temps de Thouless τ_D. Au-delà de ce temps, le spectre du signal transmis doit correspondre au spectre du signal initial. Le temps de Thouless peut être évalué à l'aide d'une estimation *a priori* de la constante de diffusion D selon l'équation 3.11 :

$$D_{\max} = \frac{{l^*}_{\max} c_{tr}}{2}. \tag{3.22}$$

En prenant ${l^*}_{\max} = 6,5$ mm et $c_{tr} = 1,5$ mm/μs ($D_{max} = 4,9$ mm^2/μs), on trouve $\tau_D = 430$ μs pour l'échantillon d'épaisseur 46 mm et $\tau_D = 128$ μs pour l'échantillon d'épaisseur 25 mm. L'effet de filtrage lié à la réponse du milieu se fait donc ressentir sur un temps plus long dans le cas du milieu le plus épais. Nous avons enregistré environ 300 μs de signal. Le régime où le spectre est stabilisé ne devrait pas être atteint dans le cas de l'échantillon le plus épais. Il devrait l'être, par contre, dans le cas de l'échantillon le plus fin.

C'est justement ce que montre la figure 3.13, qui présente l'évolution de la densité spectrale de puissance des signaux transmis. On y a représenté la densité spectrale de

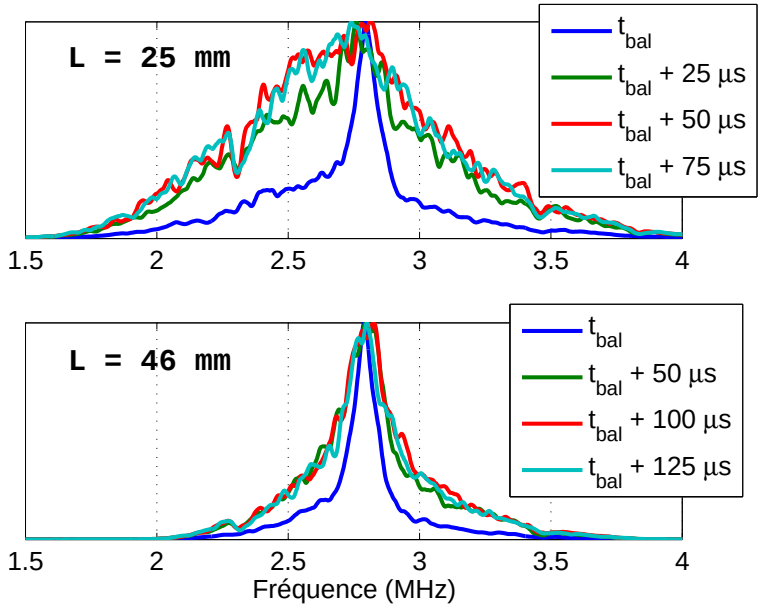


Figure 3.13 – Densité spectrale de puissance de l'onde transmise, calculée sur des fenêtres de 25 μs, et moyennée sur les 180 réalisations de l'onde transmise en configuration source et récepteur équivalents face à face. t_{bal} est le temps d'arrivée du balistique. Il vaut environ 17 μs pour l'échantillon le plus fin, et 31 μs pour l'échantillon le plus épais.

puissance moyennée sur les 187 réalisations de l'onde transmise en configuration source et récepteur équivalents face à face. Elle est calculée à différents temps, sur un intervalle de 25 μs. Le temps $t_{bal} = L/c$ correspond au temps d'arrivée du balistique. Il vaut environ 17 μs pour l'échantillon le plus fin et 31 μs pour l'échantillon le plus épais.

Les spectres évoluent bien avec le temps, mais ils n'évoluent pas à la même vitesse. En effet, il faut attendre 75 μs après le temps d'arrivée du balistique pour voir se figer la densité spectrale de puissance dans le cas de l'échantillon le plus fin. Comme attendu, ce temps est supérieur pour l'échantillon le plus épais, puisque pour cet échantillon, la densité spectrale de puissance se fige à partir 125 μs. Ceci explique le fait que nous ayons trouvé des valeurs différentes : la constante de diffusion D mesurée en régime impulsionnel est une valeur moyennée en fréquence, et les composantes fréquentielles n'ont pas le même poids, au même instant, dans les deux échantillons du fait de leur épaisseur différente. Les signaux diffusés à travers l'échantillon le plus épais présentent, à un instant t donné, un spectre plus étroit et plus piqué autour de 2,8 MHz (fréquence pour laquelle l^* est plus élevé). Il est alors logique d'avoir obtenu une valeur de D apparemment plus grande pour cet échantillon, si l'on suppose que la vitesse de transport reste la même, indépendamment de la fréquence.

Les résonances individuelles des tiges induisent des variations de la densité spectrale de puissance avec le temps. Le rythme auquel se font ces variations dépend de l'épaisseur du milieu. Ces évolutions du spectre, avec le temps, justifient de s'intéresser maintenant aux valeurs de la constante de diffusion dans un régime fréquentiel ou quasi harmonique. Comme pour le libre parcours moyen élastique, peut-on observer, pour la constante de diffusion, une dépendance vis-à-vis de la fréquence ?

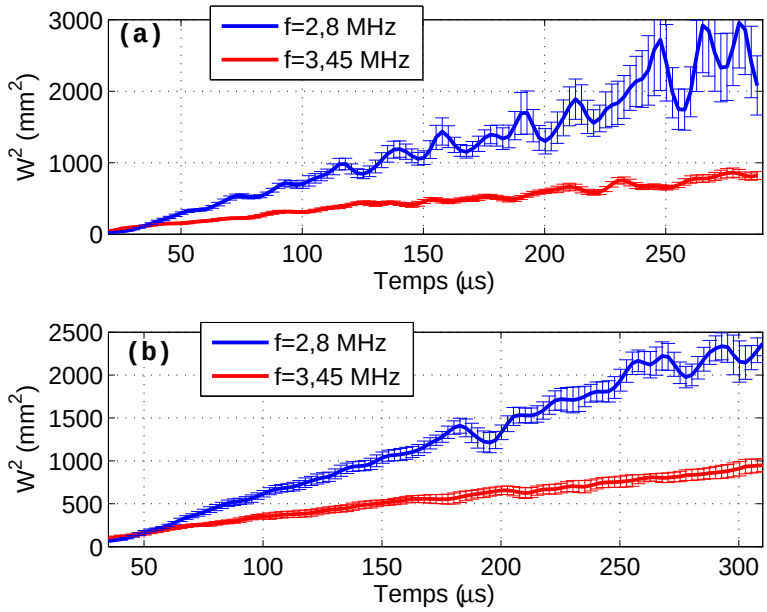


Figure 3.14 – Extension latérale $W^2(t)$ du halo de diffusion en régime quasi harmonique, pour deux fréquences (2,8 MHz et 3,45 MHz), pour les échantillons d'épaisseur (a) 25 mm et (b) 46 mm.

3.3.4 Évaluation de la constante de diffusion en régime quasi-harmonique

Afin d'évaluer la constante de diffusion en régime quasi-harmonique, nous appliquons exactement le même traitement qu'en régime impulsionnel, excepté que les signaux sont filtrés à l'aide de filtres gaussiens d'écart-type $\sigma_f = 32$ kHz, et de fréquence centrale f_0 comprise entre 2,2 et 3,8 MHz. Le choix de l'écart-type σ_f assure une résolution temporelle de 5 μs.

Dans un premier temps, on calcule l'extension latérale du halo de diffusion en régime quasi-monochromatique. Sur la figure 3.14, on a représenté l'extension latérale du halo de diffusion aux fréquences 2,8 et 3,45 MHz pour les deux épaisseurs. On observe que l'extension latérale du halo de diffusion croît nettement plus vite à 2,8 MHz, ce qui confirme que la constante de diffusion dépend de la fréquence.

Pour évaluer la constante de diffusion D, on considère le même intervalle de temps qu'en régime impulsionnel ce qui est cohérent avec l'idée que nous ne connaissons pas précisément le libre parcours moyen de transport l^* et sa dépendance avec la fréquence. Toutefois, afin de ne pas ressentir les effets de bord liés au filtrage en bandes étroites de fréquence, nous réduisons l'intervalle de temps en augmentant (respectivement diminuant) la borne inférieure t_{min} (respectivement borne supérieure t_{max}) de 10 μs.

Nous avons représenté sur la figure 3.15 la constante de diffusion en fonction de la fréquence. Malgré des barres d'erreur supérieures, ce qui est logique vu qu'il n'y a plus autant de "moyennage en fréquence", nos résultats expérimentaux montrent qu'autour de

2,8 MHz la constante de diffusion D est supérieure de 50% à ses valeurs aux autres fréquences. En effet, elle vaut approximativement 2,5-3 mm$^2/\mu$s sur l'intervalle de fréquence 2-4 MHz, sauf à la fréquence de 2,8 MHz, où elle vaut 4,5 mm$^2/\mu$s. Cette valeur supérieure à la résonance peut s'expliquer par la valeur plus élevée du libre parcours moyen de transport à cette même fréquence (cf. figure 3.6.c), sous réserve que la vitesse de transport ne change pas autour de 2,8 MHz, ce qui reste à démontrer.

Ce comportement résonant permet par ailleurs d'expliquer les différences entre les valeurs de D estimées en régime impulsionnel. En effet, dans le cas de l'échantillon le plus épais ($2,95 \pm 0,04$ mm$^2/\mu$s), la densité spectrale de puissance est davantage piquée autour de la fréquence de résonance, c'est-à-dire là où la constante de diffusion est plus élevée. Dans le cas de l'échantillon le plus fin ($D = 2,79 \pm 0,08$ mm$^2/\mu$s), le support du spectre reste centré sur la fréquence de résonance, mais il est surtout plus large. La valeur de D résultante est plus faible.

On remarquera aussi un creux significatif à la fréquence de 3,45 MHz, pour laquelle, la constante de diffusion est sensiblement plus faible. Les deux épaisseurs donnent des valeurs de la constante de diffusion très proches : $1,35 \pm 0,11$ mm$^2/\mu$s pour l'échantillon le plus fin et $1,38 \pm 0,08$ mm$^2/\mu$s pour l'échantillon le plus épais. La position de ce creux est extrêmement proche de celle d'une résonance des diffuseurs individuels (cf. figure 3.6.c), attendue à 3,38 MHz. La différence de position (2%) pourrait être due à une mauvaise estimation des paramètres élastiques de l'acier utilisé.

Enfin, un creux est également observé à 2,3 MHz, une fréquence à laquelle aucune résonance des tiges n'est attendue (cf. figure 3.6). Ce creux, à 2,3 MHz, contrairement à celui à 3,45 MHz, n'est pas significatif car il correspond à un domaine de fréquence ou le rapport signal à bruit est beaucoup plus faible [17].

3.3.5 Vers une mesure de la vitesse d'énergie

La vitesse de transport c_{tr} est la vitesse à laquelle l'énergie se propage dans le milieu. Elle n'a *jamais* été mesurée auparavant dans ces forêts de tiges. Grâce aux mesures de D résolues en fréquence, il est maintenant possible de l'estimer en fonction de la fréquence.

c_{tr} est définie à partir de D et l^*. Idéalement, il faut donc deux mesures indépendantes de D et l^* pour obtenir c_{tr}. l^* est un paramètre très délicat à mesurer. Ici, nous l'estimons à partir des résultats expérimentaux sur l_e, qui ont montré un très bon accord avec le modèle prenant en compte les corrélations entre sites diffuseurs (cf. chapitre 2). Il ne reste alors qu'à évaluer le "cosinus moyen" pour en déduire une valeur de l^* à chaque fréquence. Le calcul du "cosinus moyen" intègre lui aussi les corrélations spatiales entre centres diffuseurs, via le calcul de la fonction de phase. Après avoir calculé $l^*(f)$, on convolue ce dernier à une gaussienne d'écart-type 32 kHz, pour prendre en compte la résolution fréquentielle (cf. courbe rouge de la figure 3.6.c).

La vitesse de transport c_{tr} est représentée en fonction de la fréquence sur la figure 3.16. On se restreint à l'intervalle de fréquence 2,6-3,6 MHz, qui contient d'une part la fréquence

17. La fréquence centrale est égale à 3,2 MHz, et la largeur de bande Δf à 1 MHz.

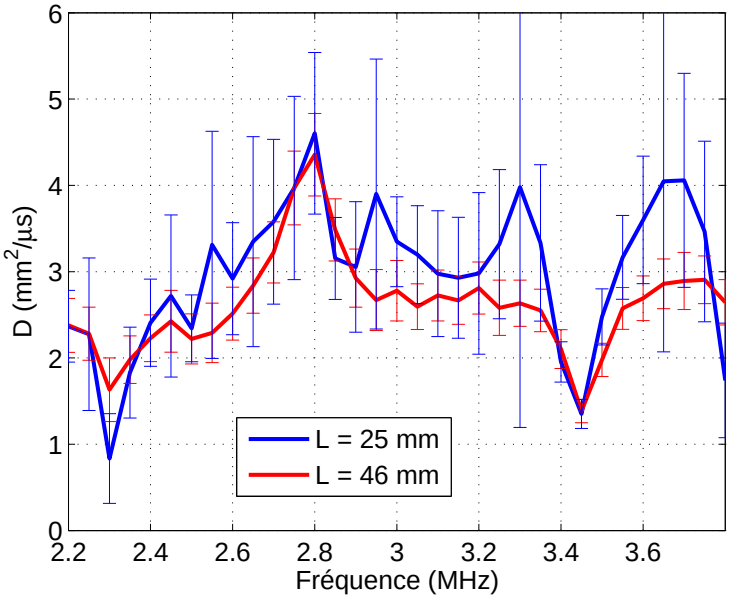


Figure 3.15 – Estimations de la constante de diffusion D en fonction de la fréquence, à partir des deux jeux de données correspondant aux deux échantillons d'épaisseur $L = 25$ mm (bleu) et $L = 46$ mm (rouge).

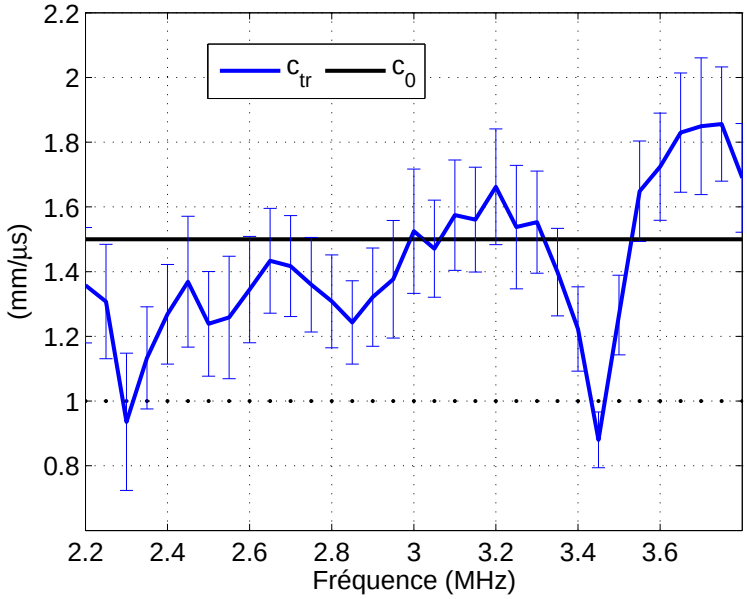


Figure 3.16 – Vitesse de transport c_{tr} en fonction de la fréquence. La droite noire représente la vitesse du son dans l'eau.

de résonance pour laquelle la densité spectrale de puissance atteint un maximum, et d'autre part la fréquence centrale des signaux émis.

Sur cet intervalle, la vitesse de transport c_{tr} présente deux creux très significatifs, aux deux fréquences de résonances identifiées sur la courbe de la constante de diffusion en

fonction de la fréquence. À 2,85 MHz, la vitesse de transport est égale à 1,25 mm/μs. Elle chute à 0,9 mm/μs à la fréquence de 3,45 MHz, une valeur bien plus faible que la vitesse du son dans l'eau (droite noire de la figure 3.16) ou dans l'acier. On remarque donc que les deux résonances se traduisent toutes les deux par un ralentissement du transport, mais pour l'une (2,85 MHz) la constante de diffusion présente un maximum, tandis que pour l'autre (3,45 MHz) la constante de diffusion présente un minimum.

Enfin, notons qu'avoir vu la résonance à 3,45 MHz, alors qu'elle est invisible sur l'onde cohérente, illustre l'intérêt des expériences sur la *coda*. En effet, pour ces dernières, la résolution fréquentielle est bien meilleure que pour les mesures du champ cohérent (cf. § 2.3.4).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des mesures de l'intensité moyenne transmise à travers un milieu hétérogène synthétique. Ces mesures ont été utilisées afin d'estimer la constante de diffusion des ultrasons dans le milieu. L'objectif initial était de valider ou d'invalider des mesures précédentes réalisées en rétro-diffusion.

Afin de ne pas perturber les conditions aux limites du milieu, nous avons dans un premier temps acquis la matrice de transmission entre des émetteurs et des récepteurs réels, situés loin de l'échantillon. Puis, au moyen d'une formation de voies discutée dans ce chapitre, nous nous sommes ramenés à un jeu de sources et de récepteurs virtuels situés sur les faces avant et arrière du milieu.

Après avoir moyenné l'intensité sur les positions des sources et récepteurs virtuels, nous avons pu mesurer l'extension latérale W^2 du halo de diffusion en fonction du temps pour deux échantillons d'épaisseurs différentes. En régime impulsionnel, $W^2(t)$ dépend linéairement du temps, ce qui est une preuve indéniable que le régime de diffusion est établi.

Nous avons ensuite estimé la constante de diffusion pour les deux échantillons. Les deux valeurs que nous trouvons sont différentes, ce qui est contradictoire avec la nature intensive du paramètre *constante de diffusion*, puisque les deux échantillons ne diffèrent que par leur épaisseur. Elles sont par ailleurs très supérieures au valeurs trouvées par Victor Mamou et Alexandre Aubry.

En rappelant dans un premier temps que la mesure résolue en fréquence du libre parcours moyen de transport, avait montré que ce dernier dépend de la fréquence, nous avons montré par la suite que le milieu agit comme un filtre. En régime impulsionnel, la constante de diffusion est alors moyennée sur les fréquences. Elle dépend à la fois du spectre de l'onde incidente, mais aussi de l'épaisseur du milieu.

Mesurer une "vraie" valeur de D impliquait donc une mesure résolue en fréquence de ce paramètre.

En régime quasi-monochromatique, la mesure de D est nettement dégradée puisque l'effet de moyenne sur les fréquences est perdu. Cependant, sur l'intervalle de fréquences 2,2-3,8 MHz, nous observons un comportement résonant de la constante de diffusion, avec une valeur 50 % supérieure à 2,8 MHz, fréquence de résonance du libre parcours moyen élastique. C'est cette résonance qui explique l'écart entre les deux valeurs mesurées de la constante de diffusion en régime impulsionnel. Nous observons par ailleurs une autre résonance, à la fréquence de 3,45 MHz, où la constante de diffusion présente un minimum local. L'observation de cette seconde résonance montre l'importance des mesures portant sur la *coda*, qui offrent une meilleure résolution fréquentielle que celles portant sur l'onde cohérente.

Enfin, nos mesures résolues en fréquence de la constante de diffusion ont été mises à profit afin d'estimer pour la première fois la vitesse de transport dans les forêts de tiges. Celle-ci est très significativement plus faible aux deux fréquences de résonances de la constante de diffusion. C'est un résultat très intéressant, qui montre que la vitesse de transport est affectée de la même manière aux deux fréquences de résonances, alors même que l'une d'elle se traduit physiquement par une plus grande "transparence" du milieu, tandis que l'autre correspond à une plus grande "opacité" du milieu.

Conclusion et Perspectives

Conclusion générale

Au chapitre 1, après avoir introduit les concepts élémentaires, nécessaires à la description de la propagation linéaire en milieu fortement hétérogène d'une part, puis à celle de la propagation non linéaire en milieu homogène d'autre part, nous avons abordé la propagation non linéaire en milieu hétérogène à travers une étude bibliographique. La simulation numérique est l'outil privilégié pour l'étude de la propagation non linéaire en milieu faiblement hétérogène. Les termes de couplage entre l'hétérogénéité du milieu et la non linéarité sont alors négligés. La propagation non linéaire dans les milieux granulaires est, quant-à elle, l'objet d'études expérimentales et théoriques. La non linéarité provient des contacts entre les grains qui constituent le milieu. Ces contacts dissipent l'énergie des "hautes" fréquences et la non linéarité est étudiée via la composante auto-démodulée ou le fondamental. Nous avons alors exposé les principaux objectifs de cette thèse, en présentant en particulier les spécificités et les originalités des configurations expérimentales que nous envisagions.

Au chapitre 2, nous nous sommes intéressés à la transmission d'une onde de choc à travers deux milieux fortement hétérogènes : une forêt de tiges d'acier et un gel bulleux. L'étude des différentes distances caractéristiques dans notre configuration expérimentale montre que celle-ci est optimale quand l'échantillon est placé à la limite des champs proche et lointain de la source.

Nous avons montré qu'alors même que l'étude des signaux bruts révèle une très grande variabilité des formes d'onde transmises, l'onde cohérente transmise à travers les tiges conserve la forme de l'onde de choc incidente. Le comportement des harmoniques de l'onde cohérente en fonction de l'amplitude émise est identique à celui des harmoniques de l'onde transmise dans l'eau. La diffusion multiple domine la non linéarité, et chaque composante spectrale est diffusée indépendamment des autres.

Le libre parcours moyen élastique ainsi que la vitesse de groupe de l'onde cohérente ont été estimés sur une large bande de fréquences composée des harmoniques engendrés par la propagation non linéaire. Nos valeurs expérimentales, qui invalident les valeurs

de l'ISA (pour un remplissage surfacique de seulement 6 %), sont en excellent accord avec celles de la théorie linéaire à l'ordre deux de diffusion multiple, qui prennent en compte les corrélations spatiales entre centres diffuseurs. Elles étendent le domaine de validité de cette théorie à des fréquences où la longueur d'onde est inférieure au diamètre des hétérogénéités, alors même que la théorie repose sur l'approximation de diffuseur ponctuel. Enfin, nous avons montré que l'amplitude qu'il faudrait émettre pour que la non linéarité s'exprime après une diffusion n'est pas accessible expérimentalement dans ces forêts de tiges.

La faible fraction volumique de gaz du milieu bulleux étudié en fait un milieu hétérogène dilué, sans "interaction" des constituants. Les valeurs théoriques de la transmission cohérente sont donc presque identiques pour les théories de diffusion multiple aux ordres 1 et 2, contrairement au cas des milieux de tiges métalliques. Nous les avons comparées aux valeurs mesurées. Elles sont en bon accord. Enfin, grâce à nos mesures spatialement résolues, ainsi qu'à la stabilité des échantillons, nous avons pu mesurer la première coda à travers un milieu bulleux.

La coda diffuse présentant un potentiel d'applications riche, nous nous sommes ensuite intéressés à une méthode de caractérisation des paramètres de transport (D, c_{tr}), résolue en fréquence. Au chapitre 3, nous avons présenté des mesures, en régime linéaire, de la constante de diffusion des ultrasons pour deux forêts de tiges de même densité, mais d'épaisseurs différentes. Après avoir mesuré l'intensité transmise, nous avons estimé l'intensité moyenne transmise, puis la largeur latérale du halo de diffusion en fonction du temps. En régime impulsionnel, bien que les échantillons soient de même densité, nous avons trouvé deux valeurs sensiblement différentes de la constante de diffusion.

Nous avons alors montré que le milieu agit comme un filtre dont la fonction de transfert dépend à la fois de son épaisseur et du temps. Cette analyse, ainsi que nos précédentes mesures du libre parcours moyen élastique, nous ont poussé à estimer la constante de diffusion en régime quasi-monochromatique. Son comportement en fonction de la fréquence montre deux résonances, dont une correspond à une valeur plus élevée de la constante de diffusion, et l'autre à une valeur plus faible. Ces mesures ont permis les premières estimations de la vitesse de transport en fonction de la fréquence pour les ultrasons dans les forêts de tiges. Cette dernière est égale à la vitesse du son dans l'eau, sauf aux deux fréquences de résonance, où elle chute notablement. Cet effet est surprenant : on pouvait en effet s'attendre à ce que les fluctuations de $D = cl^*/2$ avec la fréquence soient uniquement dues à celles de l^*.

Ces expériences ont également permis de lever l'incertitude qui pesait sur les mesures de D précédemment effectuées dans le même type d'échantillons, fondées sur le cône de rétro-diffusion cohérente, et qui avaient donné des résultats contradictoires. À l'issue de ces nouvelles expériences, on dispose d'un jeu convainquant de données qui permettent de considérer la forêt de tiges comme un milieu "étalon", multiplement diffuseur et résonant, dont on maîtrise bien tous les paramètres de transport, ce qui est un point de départ essentiel pour la caractérisation de "vrais" milieux (aciers, bétons, etc...).

Perspectives

Nos mesures en régime non linéaire ont un intérêt applicatif en contrôle non destructif des matériaux. La méthode employée est relativement simple à mettre en oeuvre, puisqu'elle ne nécessite qu'un seul élément émetteur. Elle pourrait être appliquée sur des matériaux réels multiplement diffuseurs –acier à gros grains ou béton poreux par exemple–, afin de mesurer leurs paramètres statistiques sur une grande bande de fréquences.

Outre la mesure des paramètres statistiques du milieu, on peut envisager une caractérisation "multi-échelles" de ce dernier, en s'appuyant sur des techniques de séparation de la diffusion simple et de la diffusion multiple [70, 71]. Tirant profit du contenu spectral très large offert par l'onde de choc, il pourrait être possible de déceler des défauts de tailles caractéristiques très différentes à l'aide des signaux de diffusion simple. Par exemple, dans l'acier la vitesse des ondes de compression est égale à 5700 m/s, et la longueur d'onde à 3 MHz vaut 2 mm. Elle ne vaut plus que 0,3 mm à 18 MHz.

L'utilisation d'un réseau bidimensionnel d'éléments émetteur permettrait de s'affranchir de la diffraction en contrôlant le champ émis (synthèse de front d'onde plan par filtre inverse), et apporterait une souplesse d'utilisation. Il pourrait être en particulier intéressant d'adapter la configuration expérimentale du chapitre 2 à l'étude des signaux rétro diffusés plus communément mesurés dans le contexte du contrôle non destructif des matériaux.

Pour observer des effets non linéaires dans les milieux bulleux, il faudra exciter les bulles à des fréquences proches de la résonance de Minnaert. Or, non linéarité forte rime avec amplitude élevée, et la conception d'un transducteur de puissance à ces fréquences est complexe.

L'étude de la coda en régime linéaire a montré que celle-ci est moins limitée en termes de résolution fréquentielle que les mesures du champ cohérent. À présent que les techniques de caractérisation linéaires de la coda sont maîtrisées, il sera intéressant d'analyser la coda issue de l'interaction d'une onde de choc avec un milieu hétérogène. En régime linéaire, des techniques de détection de changements reposent sur l'étude de la décorrélation de ces signaux. La sensibilité à des petits changements augmente-t-elle si l'onde incidente est une onde de choc ? La non linéarité exacerbe-t-elle la sensibilité de la coda à un petit changement ?

ANNEXE A

Propagation non linéaire d'une onde divergente cylindrique

DANS cette annexe, l'équation de Burgers est dérivée en coordonnées cylindriques. La distance de formation du choc est calculée pour une onde cylindrique divergente.

A.1 Équation de propagation non linéaire en coordonnées cylindriques

On part de l'équation de Westervelt [1] (1.34) appliquée au cas d'un fluide parfait ($b = 0$) :

$$\Delta p_a - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = \frac{-\beta}{\rho_0 c_0}\frac{\partial^2 p_a^2}{\partial t^2}. \tag{A.1}$$

La symétrie du problème invite à travailler en coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'axe z étant celui du cylindre, infini dans cette direction. La symétrie de la source indique que la pression acoustique est nécessairement radiale : $p_a = p_a(r)$ ($\frac{\partial}{\partial\theta} \equiv 0$, $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$) et donc $\Delta p_a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_a}{\partial r}\right)$. L'équation (A.1) se réécrit :

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_a}{\partial r} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = \frac{-\beta}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 p_a^2}{\partial t^2}. \tag{A.2}$$

Afin de suivre l'onde divergente au cours de sa propagation, on introduit le temps retardé $\tau = t - (r - r_d)/c_0$ [2], où r_d est la position de la source, soit le rayon du cylindre. On a alors, $\frac{\partial}{\partial t}\Big)_r = \frac{\partial}{\partial \tau}\Big)_r$ et $\frac{\partial}{\partial r}\Big)_t = \frac{\partial}{\partial r}\Big)_\tau - \frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial \tau}\Big)_r$, et l'équation (A.2) devient :

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial r^2} - \frac{2}{c_0}\frac{\partial^2 p_a}{\partial r \partial \tau} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_a}{\partial r} - \frac{1}{r c_0}\frac{\partial p_a}{\partial \tau} = \frac{-\beta}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 p_a^2}{\partial \tau^2}. \tag{A.3}$$

1. Comme usuellement donc, le terme local est négligé.
2. Pour une onde convergente : $\tau = t + (r - r_d)/c_0$.

L'adimensionnement des termes d'une équation permet de mettre en valeur l'ordre de ces derniers. On définit les grandeurs adimensionnées comme suit : $\tilde{r} = kr$, $\tilde{\tau} = \omega\tau$ et $\tilde{p} = p_a/p_m$, où ω est une pulsation caractéristique de la forme d'onde, k le nombre d'onde correspondant et p_m est l'amplitude de pression uniforme à la source.

Quand elle est adimensionnée, l'équation (A.3) s'écrit :

$$\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial\tilde{r}^2} - 2\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial\tilde{r}\partial\tilde{\tau}} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\tau}} = -\beta\epsilon\frac{\partial^2\tilde{p}^2}{\partial\tilde{\tau}^2}, \tag{A.4}$$

où $\epsilon = p_m/(\rho_0 c_0^2)$ est le nombre de Mach acoustique ($\epsilon << 1$).

Afin de simplifier l'opérateur Δ, qui est le point délicat de ce calcul, on fait l'hypothèse suivante : $kr >> 1$. Cette hypothèse justifie l'introduction d'une coordonnée spatiale "lente" $\tilde{r}_l = \epsilon\tilde{r}$, dont la signification physique est que les variations spatiales du front d'onde (décrites par le terme Δp_a) sont bien plus lentes que les oscillations de la phase (terme en $\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2}$). Autrement dit, une variation δr est d'un ordre de petitesse inférieure à $c_0\delta t$.

Avec cette nouvelle coordonnée spatiale, tous les termes proportionnels à $\frac{1}{\tilde{r}^2}$ de l'équation (A.4) vont être cubiques, donc disparaître dans le cadre de l'approximation non linéaire quadratique. L'équation (A.4) devient alors :

$$2\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial\tilde{r}\partial\tilde{\tau}} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\tau}} = \beta\epsilon\frac{\partial^2\tilde{p}^2}{\partial\tilde{\tau}^2}. \tag{A.5}$$

L'intégration de cette équation sur la variable τ mène à l'équation suivante :

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{2\tilde{r}}\tilde{p} = \beta\epsilon\tilde{p}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{\tau}},$$

qui après redimensionnement devient :

$$\frac{\partial p_a}{\partial r} + \frac{1}{2r}p_a = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3}\,p_a\,\frac{\partial p_a}{\partial\tau}. \tag{A.6}$$

L'équation (A.6) [3] est l'équation de propagation non linéaire d'une onde cylindrique divergente dans un fluide parfait. Elle est obtenue d'une autre façon, mais avec les mêmes hypothèses, par Rudenko (p. 64 de la référence [13]). Le terme non linéaire est logiquement celui de l'équation de Burgers. Comme les non linéarités locales ont été négligées, on peut écrire cette équation indifféremment en fonction de p_a ou v_a.

3. Pour une onde convergente, le signe du membre de droite est opposé.

A.2 Distance de formation du choc d'une source cylindrique infinie divergente

On effectue dans un premier temps le changement de variable non linéaire suivant : $\zeta = 2\sqrt{r r_d}$, donc $r = \frac{\zeta^2}{4r_d}$, $dr = \frac{\zeta}{2r_d} d\zeta$ et $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{2r_d}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \zeta}$.

L'équation (A.6) devient :

$$\frac{2r_d}{\zeta}\frac{\partial p_a}{\partial \zeta} + \frac{2r_d}{\zeta^2} p_a = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p_a \frac{\partial p_a}{\partial \tau}.$$

On prend ensuite en compte la divergence caractéristique de l'onde cylindrique en $1/\sqrt{r}$, grâce au changement de variable $\xi = p_a\sqrt{\frac{r}{r_d}}$, donc $p_a = \xi\sqrt{\frac{r_d}{r}} = \frac{2r_d}{\zeta}\xi$.

On a alors :

$$\frac{4r_d^2}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) + \frac{4r_d^2}{\zeta^3}\xi = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3}\frac{4r_d^2}{\zeta^2}\,\xi\,\frac{\partial \xi}{\partial \tau},$$

et finalement :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3}\,\xi\,\frac{\partial \xi}{\partial \tau}. \tag{A.7}$$

Donc $\xi(\zeta, \tau)$ obéit rigoureusement à l'équation de propagation non linéaire d'une onde plane. Par analogie, la position du choc se trouve avec la relation (1.41) :

$$\omega\tau = \arcsin\left(\frac{\xi}{\xi_m}\right) - \zeta k\beta\epsilon\frac{\xi}{\xi_m}, \tag{A.8}$$

où $\xi_m = p_m\sqrt{\frac{r_d}{r_d}} = p_m$, amplitude de la pression à la source. D'où,

$$\omega\tau = \arcsin\left(\frac{p_a}{p_m}\sqrt{\frac{r}{r_d}}\right) - 2\sqrt{r r_d}k\beta\epsilon\left(\frac{p_a}{p_m}\sqrt{\frac{r}{r_d}}\right). \tag{A.9}$$

Une discontinuité apparaît dans la forme d'onde quand la pente du second terme compense la pente -1 de l'arcsinus au voisinage de 0, c'est-à-dire pour :

$$L_{cc} = \frac{1}{4r_d k^2\beta^2\epsilon^2}, \tag{A.10}$$

où L_{cc} est la distance de formation du choc d'une onde cylindrique divergente.

Références

[1] L. E. Landau et E. M. Lifschitz : *Physique théorique Tome 2 : théorie des champs*. Edition MIR, Moscou, 1989.

[2] E. Akkermans et G. Montambaux : *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. Cambridge University Press, 2007.

[3] R. Snieder : *Coda wave interferometry, in "2004 McGraw-Hill Yearbook of Science & Technology"*. McGraw-Hill, New York, 2004.

[4] A. Ishimaru : *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. New York : Academic Press, 1978.

[5] P. J. Westervelt : Parametric acoustic array. *Journal of the Acoustical Society of America*, 35:535–537, 1963.

[6] J. Marchal et P. Cervenka : Modeling of the parametric transmission with the spatial fourier formalism. optimization of a parametric antenna. *Acta Acustica united with Acustica*, 90:49–61, 2004.

[7] C. Barrière et D. Royer : Diffraction effects in the parametric interaction of acoustic waves : application to measurements of the nonlinearity parameter b/a in liquids. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 48:1706–1715, 2001.

[8] H. O. Berktay : Possible exploitation of nonlinear acoustics in underwater transmitting applications. *Journal of Sound and Vibration*, 2:435–461, 1965.

[9] M. Rénier, C. Barrière et D. Royer : Optical measurements of the self-demodulated displacement and its interpretation in terms of radiation pressure. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121:3341–3348, 2007.

[10] V. Tournat et V. E. Gusev : Nonlinear effects for coda-type elastic waves in stressed granular media. *Phys. Rev. E : Stat., Nonlinear, Soft Matter Phys.*, 80: 011306, 2009.

[11] M. F. Hamilton et D. T. Blackstock : *Nonlinear Acoustics*. Academic, New York, 1998.

[12] S. Makarov et M. Ochmann : Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, part i. *Acta Acustica united with Acustica*, 82:579–606, 1996.

[13] O. V. Rudenko et S. I. Soluyan : *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics*. Consultants Bureau, 1977.

[14] R. T. Beyer : *Nonlinear Acoustics*. Naval Ship Systems Command, Washington, DC, 1974.

[15] G. B. Whitham : On the propagation of weak shock waves. *J. Fluid Mech.*, 1:290–318, 1956.

[16] L. E. Landau et E. M. Lifschitz : *Physique théorique Tome 6 : Mécanique des fluides*. Edition MIR, Moscou, 1971.

[17] O. Bou Matar : *Mesure de vibration par vibromètre acoustique, importance des effets non linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Tours, 1997.

[18] P. Cervenka et P. Alais : Fourier formalism for describing nonlinear self-demodulation of a primary narrow ultrasonic beam. *Journal of the Acoustical Society of America*, 88:473–481, 1990.

[19] G. Taraldsen : A generalized weservelt equation for nonlinear medical ultrasound. *Journal of the Acoustical Society of America*, 109:1329–1333, 2001.

[20] F. Dagrau, M. Rénier, R. Marchiano et F. Coulouvrat : Acoustic shock wave propagation in a heterogeneous medium : A numerical simulation beyond the parabolic approximation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 130:20–32, 2011.

[21] R. O. Cleveland, J. P. Chambers, H. E. Bass, R. Raspet, D. T. Blackstock et M. F. Hamilton : Comparison of computer codes for the propagation of sonic boom waveforms through isothermal atmospheres. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100:3017–3027, 1996.

[22] L. Ganjehi, R. Marchiano, F. Coulouvrat et J.-L. Thomas : Evidence of wave front folding of sonic booms by a laboratory-scale deterministic experiment of shock waves in a heterogeneous medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124:57–71, 2008.

[23] Y. Jing et R. O. Cleveland : Modeling the propagation of nonlinear three-dimensional acoustic beams in inhomogeneous media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 122:1352–1364, 2007.

[24] G. F. Pinton, J. Dahl, S. Rosenzweig et G. E. Trahey : A heterogeneous nonlinear attenuating full-wave model of ultrasound. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 56:474–488, 2009.

[25] E. A. Zabolotskaya et R. V. Khokhlov : Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams. *Soviet physics Acoustics*, 15:35–40, 1969.

[26] V. P. Kuznetsov : Equations of nonlinear acoustics. *Soviet physics Acoustics*, 16: 467–470, 1971.

[27] P. Blanc-Benon, B. Lipkens, L. Dallois, M. F. Hamilton et D. T. Blackstock : Propagation of finite amplitude sound through turbulence : Modeling with geometrical acoustics and the parabolic approximation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111:487–498, 2002.

[28] A. D. Pierce et D. J. Maglieri : Effects of atmospheric irregularities on sonic-boom propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51:702–721, 1972.

[29] Y.-S. Lee et M. F. Hamilton : Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97:906–917, 1995.

[30] M. Baudoin, J.-L. Thomas, F. Coulouvrat et C. Chanéac : Scattering of ultrasonic shock waves in suspensions of silica nanoparticles. *Journal of the Acoustical Society of America*, 129:1209–1220, 2010.

[31] S. Del Pino, B. Després, P. Havé, H. Jourdren et P. F. Piserchia : 3d finite volume simulation of acoustic waves in the earth atmosphere. *Computers & Fluids*, 38:765–777, 2009.

[32] C. D. de Groot-Hedlin : Nonlinear synthesis of infrasound propagation through an inhomogeneous, absorbing atmosphere. *Journal of the Acoustical Society of America*, 132:646–656, 2012.

[33] R. D. Mindlin : Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16:259–268, 1949.

[34] L. E. Landau et E. M. Lifschitz : *Theory of Elasticity*. Pergramon Press, Oxford, 1993.

[35] V. Tournat, V. E. Gusev, V. Y. Zaitsev et B. Castagnède : Acoustic second-harmonic generation with shear to longitudinal mode conversion in granular media. *Europhys. Lett.*, 66:798–804, 2004.

[36] T. Brunet, X. Jia et P. A. Johnson : Transitional nonlinear elastic behaviour in dense granular media. *Geophys. Res. Lett.*, 35:19308, 2008.

[37] S. van den Wildenberg, M. van Hecke et X. Jia : Evolution of granular packings by nonlinear acoustic waves. *Europhys. Lett.*, 101:14004, 2013.

[38] X. Jia : Codalike multiple scattering of elastic waves in dense granular media. *Physical Review Letters*, 93:154303, 2004.

[39] K. Johnson : *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[40] L. Fillinger, V. Y. Zaitsev, V. E. Gusev et B. Castagnède : Nonlinear relaxational absorption/transparency for acoustic waves due to thermoelastic effect. *Acta Acustica united with Acustica*, 92:24–34, 2006.

[41] V. A. Hopkins, J. Keat, G. D. Meegan, T. Zhang et J. D. Maynard : Observation of the predicted behavior of nonlinear pulse propagation in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1102–1105, 1996.

[42] V. Mamou : *Caractérisation ultrasonore d'échantillons hétérogènes multiplement diffuseurs*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris VII, 2005.

[43] A. Aubry : *Approche matricielle de l'opérateur de propagation des ondes ultrasonores en milieu diffusant*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2008.

[44] M. A. Fink et J.-F. Cardoso : Diffraction effects in pulse-echo measurement. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 31:313, 1984.

[45] A. Derode, V. Mamou et A. Tourin : Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in a random medium. *Phys. Rev. E : Stat., Nonlinear, Soft Matter Phys.*, 74:036606, 2006.

[46] A. Derode, A. Tourin et M. Fink : Random multiple scattering of ultrasound. i. coherent and ballistic waves. *Phys. Rev. E*, 64:036605, Aug 2001.

[47] P. R. Stepanishen : Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle. *Journal of the Acoustical Society of America*, 49:1629–1638, 1971.

[48] J. J. Markham, R.rt T. Beyer et R. B. Lindsay : Absorption of sounds in fluids. *Reviews of Modern Physics*, 23:353, 1951.

[49] C. Barrière et D. Royer : Optical measurement of large transient mechanical displacements. *Appl. Phys. Lett.*, 79(6):878–880, 2001.

[50] D. Royer, N. Dubois et M. Fink : Optical probing of pulsed, focused ultrasonic fields using a heterodyne interferometer. *Appl. Phys. Lett.*, 61(2):153–155, 1992.

[51] S. M. Rytov, Y. A. Kravtsov et V. I. Tatarskii : *Principles of Statistical Radiophysics 4 : Wave Propagation Through Random Media*. Springer Verlag, Berlin Heidelbert, 1989.

[52] L. L. Foldy : The multiple scattering of waves. *Physical Review*, 67:107–119, 1945.

[53] J. Keller : Stochastic equation and wave propagation in random media. *Proc. Symp. Appl. Math.*, 16:145–170, 1964.

[54] A. N. Norris et J.-M. Conoir : Multiple scattering by cylinders immersed in fluid : High order approximations for the effective wavenumbers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 129:104–113, 2011.

[55] D. V. Vlasov, E. A. Zabolotskaya et Y. A. Kravtsov : Acoustic phase conjugation in water containing bubbles. *Soviet Physics Acoustics*, 29:69–70, 1983.

[56] F. V. Bunkin, Y. A. Kravtsov et G. A. Lyakhov : Acoustic analogues of nonlinear-optics phenomena. *Soviet Physics Uspekhi*, 29:607–619, 1986.

[57] N. P. Andreeva, K. Karshiev et L. M. Sabirov : Phase conjugation of sound beams during quarter-wav interaction in a liquid containing gas bubbles. *Soviet Physics Acoustics*, 37:425–426, 1991.

[58] V. Leroy, A. Strybulevych, M. G. Scanlon et J. H. Page : Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles. *European Physical Journal E*, 29: 123–130, 2009.

[59] T. Brunet, M. Raffy, B. Mascaro, J. Leng, R. Wunenburger, O. Mondain-Monval, O. Poncelet et C. Aristégui : Sharp acoustic multipolar-resonances in highly monodisperse emulsions. *Applied Physics Letters*, 101:011913, 2012.

[60] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B. van Tiggelen et M. Fink : Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves. *Physical Review Letters*, 79:3637–3639, 1997.

[61] A. Tourin : *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores.* Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris VII, 1999.

[62] R. Pierrat : *Propagation et émission du rayonnement en milieu diffusant. Application à l'imagerie des milieux complexes.* Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2007.

[63] J. C. J. Paasschens : Solution of the time-dependent boltzmann equation. *Phys. Rev. E : Stat., Nonlinear, Soft Matter Phys.*, 56:1135–1141, 1997.

[64] H. S. Carslaw et J. C. Jaeger : *Conduction of heat in solids*. Clarendon, Oxford, 1990.

[65] J. X. Zhu, D. J. Pine et D. A. Weitz : Internal reflection of diffusive light in random media. *Physical Review A*, 44:3948–3959, 1991.

[66] M. N. Ozisik : *Heat conduction*. John Wiley and Sons, 1993.

[67] D. J. Durian : Influence of boundary reflection and refraction on diffusive photon transport. *Physical Review E*, 50:857–866, 1994.

[68] J. H. Page, H. P. Schriemer, A. E. Bailey et D. A. Weitz : Experimental test of the diffusion approximation for multiply scattered sound. *Physical Review E*, 52:3106–3114, 1995.

[69] I. M. Vellekoop, P. Lodahl et A. Lagendijk : Determination of the diffusion constant using phase-sensitive measurements. *Physical Review E*, 71:056604, 2005.

[70] A. Aubry et A. Derode : Ultrasonic imaging of highly scattering media from local measurements of the diffusion constant : Separation of coherent and incoherent intensites. *Physical Review E*, 75:026602, 2007.

[71] A. Aubry et A. Derode : Detection and imaging in a random medium : A matrix method to overcome multiple scattering and aberration. *Journal of Applied Physics*, 106:044903, 2009.