

Solutions analytiques en dynamique non-linéaire avec couplage fluide-structure

Romain Mege

▶ **To cite this version:**

Romain Mege. Solutions analytiques en dynamique non-linéaire avec couplage fluide-structure. Autre. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1126 . pastel-00971808

HAL Id: pastel-00971808
https://pastel.hal.science/pastel-00971808

Submitted on 3 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE

L'UNIVERSITE PARIS EST

Spécialité : Mécanique des Matériaux et des Structures

Présentée par :

Romain MEGE

Sujet de la thèse :

Solutions analytiques en dynamique des structures non-linéaires avec couplage fluide-structure

Soutenue le 4 Décembre 2013 devant le jury composé de :

A. Ehrlacher (Pr.) (HDR) (Dr.)	Président
M. Brocato (Pr.) (HDR) (Dr.)	Rapporteur
I. Politopoulos (HDR) (Dr.)	Rapporteur
A. Pecker (Pr.) (Dr.)	Examinateur
J.F. Caron (Pr.) (HDR) (Dr.)	Examinateur
L. Borsoi	Examinateur
N. Joubert	Examinateur
Olivier BAVEREL (HDR) (Dr.)	Directeur de thèse

Table des matières

1 Introduction **9**
- 1.1 Objet de la thèse : . . . 9
- 1.2 Contexte global : . . . 10
  - 1.2.1 Forte évolution de la population mondiale . . . 10
  - 1.2.2 Accroissement des problématiques environnementales : . . . 11
  - 1.2.3 Evolution croissante des besoins énergétiques mondiaux : . . . 12
- 1.3 Un besoin croissant de sécurité . . . 15
  - 1.3.1 Philosophie de la gestion du risque des Centrales Nucléaires de Production d'Electricité Françaises (CNPE) . . . 15
  - 1.3.2 Méthodes de dimensionnement des équipements des CNPE : . . . 19
  - 1.3.3 Conclusion : . . . 25
- 1.4 Les râteliers de stockage de combustibles usés : . . . 25
  - 1.4.1 Description des râteliers : . . . 26
- 1.5 Le dimensionnement des structures glissantes immergées soumises à un séisme quelconque : . . . 27
  - 1.5.1 Les méthodes actuelles de dimensionnement : . . . 28
- 1.6 Théories développées dans cette thèse : . . . 31
  - 1.6.1 Théorie de couplage fluide-structure développée : . . . 31
  - 1.6.2 Méthode de résolution du problème dynamique non-linéaire : . . . 31
- 1.7 Applications possibles aux autres domaines du génie civil : . . . 32
  - 1.7.1 Ponts anciens avec des piles à section rectangulaires : . . . 32
  - 1.7.2 Ouvrages de stockage d'eau : . . . 32
  - 1.7.3 Ouvrages en maçonnerie : . . . 34
  - 1.7.4 Maintenance et sécurité des ouvrages existants . . . 34
- 1.8 Organisation de la thèse : . . . 35

2 Etude et modélisation de l'intéraction fluide-structure **39**
- 2.1 Introduction . . . 39
- 2.2 Eléments de théorie . . . 40
  - 2.2.1 Nombres adimensionnels . . . 40
  - 2.2.2 Variables adimensionnelles . . . 41
  - 2.2.3 Equations du système . . . 42
  - 2.2.4 Masse ajoutée : . . . 44
  - 2.2.5 Méthode de calcul : . . . 46
- 2.3 Etude d'un modèle classique de couplage fluide-structure : Couplage entre tubes infinis concentriques - Méthode de Fritz : . . . 47
  - 2.3.1 Description géométrique : . . . 47

2.3.2 Mise en équation du système : . . . 47
2.3.3 Solutions du modèle de Fritz : . . . 48
2.4 Changement de référentiel et poussée d'Archimède généralisée . . . 49
2.4.1 Equations d'équilibre du système dans un référentiel Galiléen : . . . 49
2.4.2 Equations d'équilibre du système dans un référentiel non-Galiléen : . . . 50
2.4.3 Généralisation à 3 dimensions : . . . 51
2.4.4 Généralisation pour un système à N structures : . . . 52
2.4.5 Généralisation au système continu : . . . 54
2.5 Solutions analytiques du couplage entre deux parallélépipèdes : . . . 56
2.5.1 Etat de l'art : . . . 56
2.5.2 Etude du couplage entre deux parallélépipèdes concentriques : . . . 57
2.5.3 Etude du couplage entre deux parallélépipèdes non-concentriques : . . . 64
2.5.4 Comparaison des différentes modèles : . . . 64
2.6 Solutions pseudo-analytiques du couplage d'un quadrillage de cube . . . 69
2.6.1 Description du modèle . . . 69
2.6.2 Modélisation du fluide . . . 70
2.6.3 Minimisation de l'énergie totale du fluide : . . . 72
2.6.4 Détermination des matrices de couplage fluide-structure : . . . 77
2.7 Résultats : . . . 81
2.7.1 Résultats de calcul de pression issus du modèle de couplage fluide-structure : 81
2.8 Conclusion : . . . 83

3 Etude d'une structure glissante sous chargement sismique tridimensionnel 87
3.1 Introduction . . . 87
3.2 Hypothèses de l'étude : . . . 88
3.2.1 Modélisation du frottement : . . . 88
3.2.2 Hypothèse de non-basculement : . . . 89
3.2.3 Signaux sismiques : . . . 92
3.3 Etude d'une poutre glissante . . . 94
3.3.1 Description du modéle . . . 95
3.3.2 Mise en équation du problème . . . 95
3.3.3 Projection des équations sur les bases de modes propres de la poutre 'sèche' et définition de la base de modes propres de la structure immergée :103
3.3.4 Résolution du problème : . . . 114
3.4 Généralisation à un système complèxe . . . 124
3.5 Conclusion : . . . 125

4 Résultats : Comportement couplé de structures immergées glissantes 129
4.1 Introduction . . . 129
4.2 Application à des cas simples : . . . 130
4.2.1 Masse ponctuelle immergée glissante : . . . 130
4.2.2 Système masses-ressort immergé glissant : . . . 134
4.3 Propos importants en introduction des résultats : . . . 139
4.4 Paramètres des simulations : . . . 140
4.4.1 Hypothèses sur la structure : . . . 141
4.4.2 Chargements sismiques : . . . 144
4.4.3 Coefficients de frottement : . . . 144
4.4.4 Hypothèses de couplage fluide-structure : . . . 144

4.5 Validation du modèle analytique en l'absence de couplage fluide-structure : . . . 144
4.5.1 Résultats du modèle de masse glissante sans couplage fluide-structure : . 145
4.5.2 Résultats du modèle masses-ressort sans couplage fluide-structure : . . . 145
4.5.3 Résultats du modèle poutre sans couplage fluide-structure : 147
4.6 Validation du modèle analytique en présence de couplage fluide-structure modélisé par des matrices de masses ajoutées diagonales sans actualisation de géométrie :149
4.6.1 Résultats du modèle de masse glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée diagonale sans actualisation de géométrie : . . . 149
4.6.2 Résultats du modèle masses-ressort glissant avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée diagonale sans actualisation de géométrie : 152
4.6.3 Résultats du modèle poutre glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée diagonale sans actualisation de géométrie : . . . 155
4.7 Résultats du modèle analytique en présence de couplage fluide-structure modélisé par des matrices de masses ajoutées pleines avec actualisation de géométrie : . . 158
4.7.1 Résultats du modèle de poutre glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée pleine avec actualisation de géométrie à partir d'une position initiale centrée $(0, 0)$: 158
4.7.2 Résultats du modèle de poutre glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée pleine avec actualisation de géométrie à partir d'une position initiale côté $(0.1, 0)$: 158
4.7.3 Résultats du modèle de poutre glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée pleine avec actualisation de géométrie à partir d'une position initiale coin $(0.1, 0.1)$: 159
4.8 Conclusion : 161

5 Conclusion **163**
5.1 Contenus de la thèse : 163
5.2 Voies d'amélioration et recherches complémentaires : 165
5.2.1 Amélioration des modèles actuels : 165
5.2.2 Solutions analytiques en dynamique non linéaire couplée de N structures indépendantes : 166
5.2.3 Prise en compte du basculement dans les calculs de masses ajoutées (notions d'inertie ajoutée) : 167

A Article PVP 2010 - 25630 **169**

B Article Icone 19 - 43307 **181**

Mots-clés : Couplage fluide-structure, solutions analytiques, dynamique non-linéaire, actualisation de géométrie, actualisation de couplage, modes propres immergés.

Résumé

Avec la hausse des niveaux de dimensionnement sismique il est devenu nécessaire de limiter les chargements internes dans les structures, notamment en utilisant des dispositifs glissants. Ces dispositifs plafonnent les efforts internes en déclenchant un glissement de la structure. Il devient cependant nécessaire d'estimer l'amplitude des déplacements de corps rigide, notamment pour les structures stockées dans des réservoirs. Dans ce cas, il est nécessaire de prévenir les impacts entre la structure glissante et les bords du réservoir pour contrôler les risques de fuite. Parmi les structures glissantes immergées, on citera les ponts, les structures côtières en maçonnerie, les rateliers de stockage de combustible nucléaire, ...

Les équations de dynamique associées au comportement de ces structures sont non-linéaires et nécessitent l'utilisation de simulations numériques coûteuses en temps de calcul et ne permettant pas de faire des études de sensibilité rapides. On propose donc une méthode de résolution quasi-analytique de ces équations en développant, dans un premier temps, l'évaluation analytique des matrices de masses ajoutées du couplage fluide-structure, dans un second temps, la résolution quasi-analytique du glissement d'une structure quelconque immergée dans un fluide avec une actualisation de la géométrie de lames d'eau.

Les résultats obtenus présentent une bonne adéquation avec des simulations numériques et offrent un temps de calcul quasiment instantané compatible avec des études paramètriques ou stochastiques de ces structures.

Key-words : fluid-structure interactions, analytical solutions, non linear dynamics, geometrical updating, fluid-structure interaction updating, immersed eigenmodes.

Abstract

As the seismic loadings are increasing in accordance to the recent regulations regarding Earthquake design, the use of sliding devices in structures is becoming more common. These devices limitate the internal forces by creating a rigid body sliding. It is then necessary to estimate the global displacement of the structure, especially concerning structures that are immersed in a reservoir. In this case, the displacement must be well estimated in order to prevent impacts between the sliding structure and the boundaries of the reservoir. We can find such structures in : bridges, costal structures in brick and masonry, or in the nuclear industry with the underwater fuel storage racks, ...

The governing equations for the behaviour of these structures are non linear and must be solved using time-consuming computer simulations which are not fit for a stochastic study. Our method consists in, firstly, evaluating analytically the added masses of the fluid-structure interaction, secondly, a semi-analytical solving of the governing equations including the updating of the dimensions of the fluid layers surrounding the sliding structure.

The results of this new method are in accordance with the numerical simulations and can be obtained in a short time (1 or 2 seconds) which offers the possibility to make a stochastic analysis of the non linear behaviour.

Remerciements :

Cette thèse a été réalisée dans un contexte tout à fait atypique et n'aurait pas pu être finalisée sans le soutien et la bienveillance de certaines personnes que je souhaite très sincèrement remercier :

- Olivier Baverel, mon Directeur de thèse, qui a su le premier me montrer que la recherche n'était pas uniquement un travail abstrait individuel mais bien un travail opérationnel collectif dans lequel la créativité, l'efficacité et la réalisation finale avaient une place primordiale.
- Alain Ehrlacher, Président du Département GMM de l'Ecole des Ponts-ParisTech pour l'influence qu'il a eu sur mon parcours professionnel depuis mon premier jour en tant qu'élève dans le département GMM jusqu'à aujourd'hui. Ses conseils ont toujours été éclairés et cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans ses interventions régulières.
- Jean-François Caron, Directeur du département MSA du laboratoire Navier de l'Ecole des Ponts-ParisTech, pour avoir accepté dans son équipe un doctorant aussi atypique et avoir eu l'amitié de me faire participer à des projets de constructions réelles.
- Maurizio Brocato, Directeur adjoint du laboratoire GSA de l'ENSAPM, pour m'avoir accueilli incognito dans son équipe me permettant ainsi de consacrer du temps à la recherche en parallèle de mes activités à l'Ecole des Ponts.
- Richard Thummel, Directeur des études de l'Ecole des Ponts-ParisTech, pour m'avoir donné plus de libertés dans ma gestion du temps et avoir suivi mes avancées à distance.
- Les membres de mon jury de thèse pour leur participation à cette étape importante de ma carrière.
- Alain Pecker, PDG de Géodynamique et Structure, pour m'avoir donné la passion de la dynamique des structures.
- Hassane, Soazig, James, Chrstine et Joinell, membres de l'équipe du département GCC, pour la qualité de leur travail quotidien et leur soutien dans toutes les épreuves survenues pendant la réalisation de cette thèse.
- Ioannis Stefanou et Arthur Lebée, chercheurs de l'équipe MSA, et Cyril Douthe, chercheur IFSTTAR, pour les sessions de brainstorming sur les solutions analytiques de problèmes complexes et les nuits de préparation du module de Mécanique des Structures.
- Les membres et les techniciens de l'équipe MSA pour leur amitié.
- Les membres de l'équipe GSA au si bel accent !
- Mes parents, Pascale et Philippe, pour leurs encouragements et leurs présences tout au long de ces années à travers les joies et les difficultés.
- Mon frère et sa femme, Alexandre et Clémence, pour leur aide dans la rédaction du manuscrit en bord de Loire et sa correction.
- Ma grand-mère, Monique, qui a su soutenir mon effort de recherche par des coqs au vin, steaks au poivre et autres mets délicats nécessaires à la production scientifique de qualité !
- Janine, pour ses moments de détente si agréables et propices à la production scientifique à la cafétaria de l'Ecole des Ponts.
- Les aéroports de Paris, Berlin, Milan, New-York, Hong Kong, d'avoir gentillement mis à disposition des salles d'attente me permettant de rédiger des parties de ma thèse.
- Les gares de Paris, Lyon, Marseille, Orléans, Londres, Trouville-Deauville, Strasbourg, Amsterdam, d'avoir gentillement mis à disposition des salles d'attente me permettant de rédiger des parties de ma thèse.
- Les cocolous Rémi, Sandrine, Mathieu, May, Yann, Jungmin, Florent, Catherine, Isabelle,

pour ses soirées de détente et votre présence régulière à mes côtés.
- La famille Mège qui, chaque année, me rappelle les choses importantes de la vie et m'aide à garder les pieds sur terre.
- Mes collégues de l'Ecole des Ponts-ParisTech, pour cette ambiance si particulière et si sympathique.
- Enfin : Céline, Sébastien, Célia, Eric, Sara, Cécile, Emilie, Roger, Michel, Myriam, Evelyne, Barbara, Annie, Sébastien, Jorge, Lucia, Cécilia, Martina, Roberta, Jean-Elie, Marios, William, pour l'influence qu'ils ont eu sur ce travail et sur ma vie.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Objet de la thèse :

Le présent document présente des solutions analytiques et quasi-analytiques pour l'étude du comportement de structures glissantes et immergées soumises à des séismes quelconques. Ce problème simplifié modélise, notamment, le comportement des râteliers de stockage de combustible dans les centrales nucléaires, celui de piles de pont situées dans des zones fortement sismiques ou de réservoirs de stockage d'eau potable ou usée.

L'objectif des modèles et méthodes de résolution proposés est de permettre un calcul quasi-instantané des masses de couplage fluide-structure et du comportement dynamique des structures immergées avec frottement. Ce temps de calcul est très faible (quelques secondes pour un signal sismique d'une durée de 20 secondes) par rapport aux simulations éléments-finis classiquement utilisées pour ce genre de résolution (temps de calcul d'environ une heure pour un signal sismique d'une durée de 10 secondes).

Ce temps de calcul quasi-instantané nous permet :
- de complexifier le modèle utilisé, notamment en autorisant l'actualisation de la géométrie du fluide ou en prenant en compte l'amortissement lié à la variation temporelle des masses de couplage fluide-structure.
- de faire un grand nombre de simulations avec la variation de certains paramètres. Cela ouvre la voie à des simulations stochastiques qui sont tout à fait indiquées pour ces problèmes non-linéaires au comportement chaotique.

On présentera d'abord le contexte global d'augmentation des besoins énergétiques au niveau mondial, puis nous préciserons les principes de dimensionnement des équipements des centrales nucléaires, enfin nous détaillerons les méthodes actuelles de calcul ainsi que celles que nous développerons dans cette thèse, enfin nous présenterons d'autres objets d'application des théories.

1.2 Contexte global :

1.2.1 Forte évolution de la population mondiale

Le contexte global dans lequel s'insère cette thèse est une complexification croissante des problèmes et problématiques liés au développement au niveau mondial. Les Nations Unies projettent une très forte augmentation de la population mondiale [4]. La figure (1.1) présente différentes projections de la population mondiale parmi lesquelles la projection médiane donne : 3M en 1960, 7M aujourd'hui, 10M en 2080.

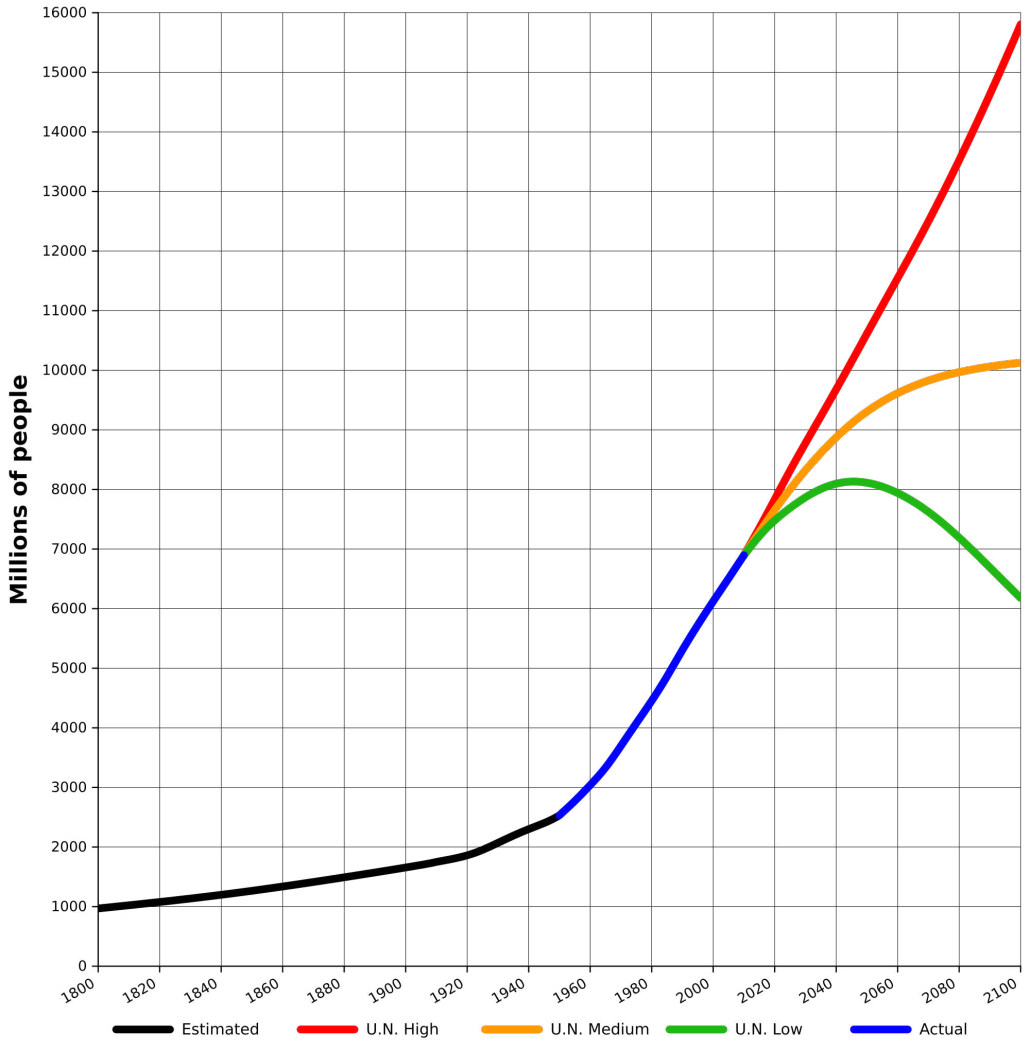


FIGURE 1.1 – Prévisions de l'évolution de la population mondiale [5]

L'évolution démographique prédite par les Nations Unies n'est cependant pas uniforme. Chaque pays a une évolution démographique propre qui est le résultat de l'évolution des conditions de vie (notamment des conditions médicales), des politiques de contrôle ou de favorisation de la natilité (exemple de la Chine), de l'état de développement du pays, etc... Les figures (1.2) présentent les projections des Nations Unies respectivement pour 2 pays développés (France, Etats-Unis) et 2 pays en développement (Chine et Inde).

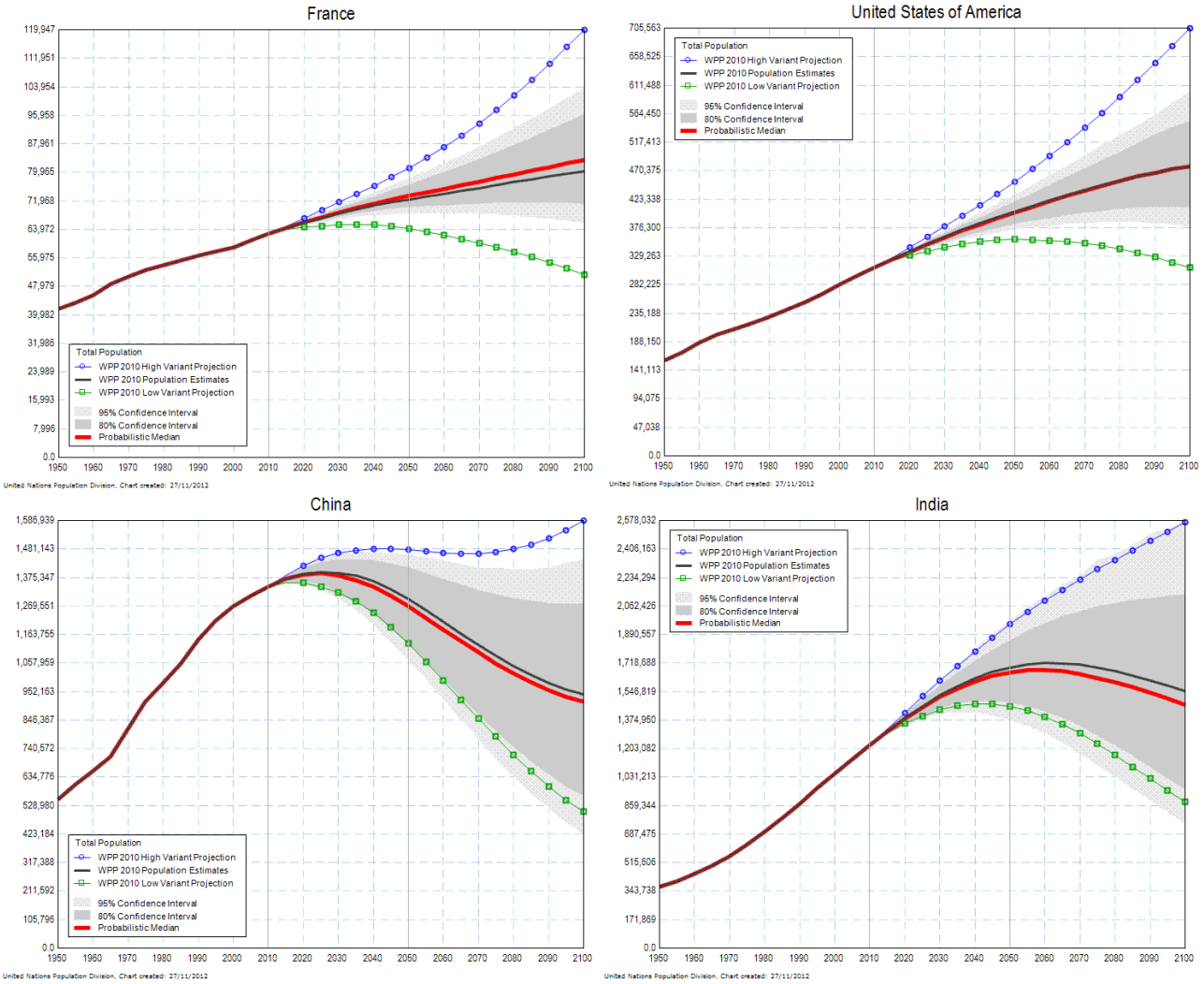


FIGURE 1.2 – Evolutions de la population - Haut à gauche : France, haut à doite : USA, bas à gauche : Chine, bas à droite : Inde [4]

Ces évolutions démographiques se traduisent en accroissement phénoménal des besoins en équipements, infrastructures de tranports, logements, centrales de production d'énergie, centres de production de richesses... L'espace de notre planète est limité, cet accroissement des besoins imposent une forte concentration urbaine, et donc des solutions nouvelles pour permettre de bonnes conditions de vie, d'habitat et de travail dans un contexte de plus en plus artificiel. A cela s'ajoutent des programmes de plus en plus extrêmes tels que tunnels de grande longueur, stades gigantesques, tours de grande hauteur, infrastructures de production d'énergie toujours plus puissantes et plus sûres, etc...

1.2.2 Accroissement des problématiques environnementales :

A cette nécessité de développement s'ajoute une omniprésence des problématiques environnementales. Les économies des pays industrialisés se développent fortement autour de ces nouveaux domaines de compétence. Les enjeux du développement durable doivent actuellement être insérés dans tout projet de constructions nouvelles, de rénovation/réhabilitation de bâtiments et infrastructures existantes et plus généralement ces

problématiques doivent accompagner la démarche de réflexion de l'ingénieur lors de chacune des étapes du développement d'un projet.

Parmi ces enjeux, nous citerons :
- Gérer les ressources naturelles de manière optimisée,
- Assurer le confort et la santé des utilisateurs et des sociétés,
- Préserver la biodiversité, et plus largement le respect du monde naturel,
- Penser la conception d'un bâtiment et d'une infrastructure dans sa globalité : conception, construction, usage, recyclage, démantèlement, fin de vie,
- Protéger les sociétés contre les aléas naturels, industriels, humains, ...,
- Inclure les enjeux sociétaux locaux et mondiaux dans la démarche de projet, ...

Cette liste (loin d'être exhaustive) d'enjeux entraine une complexification des processus de conception, de construction, voire de décision, et la remise en cause permanente des solutions techniques proposées par les ingénieurs. Ceci requiert de la part des ingénieurs qui développent des projets une souplesse d'esprit, une capacité d'écoute et une aptitude à tenir compte de multiples facteurs non strictement techniques, les obligeant à gérer un monde évoluant du compliqué vers le complexe.

1.2.3 Evolution croissante des besoins énergétiques mondiaux :

Cette croissance démographique associée à la prise de conscience des pays développés de s'inscrire dans le développement durable et à la nécessité de développement des pays émergents implique une demande croissante d'énergie au niveau mondial. Le détail des consommations finales en Millions de Tonnes équivalent pétrole entre 1971 et 2010 sont présentés ci-dessous. Les schémas (1.3, 1.4) présentent la répartition géographique de cette consommation. Les schémas (1.5, 1.6) présentent la répartition par source d'énergie.

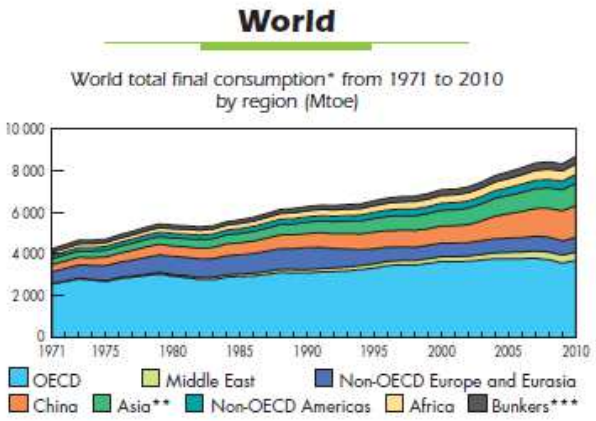


FIGURE 1.3 – Evolution de la consommation finale énergétique mondiale entre 1971 et 2010 (en MTeP) [1]

Les projections de l'évolution de la consommation énergétique finale mondiale se font selon deux scénarios principaux :

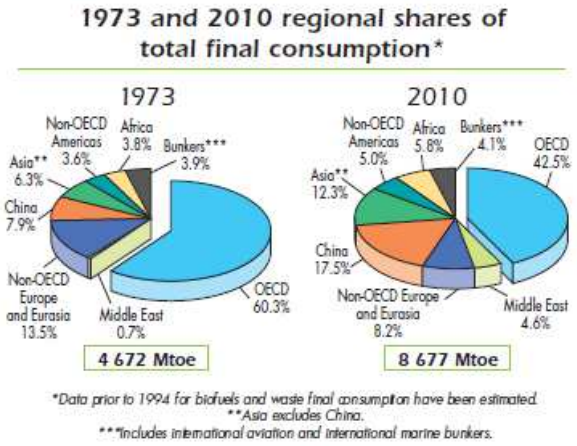


FIGURE 1.4 – Détails de la répartition en zone géographique de la consommation finale en énergie en 1971 et 2010 [1]

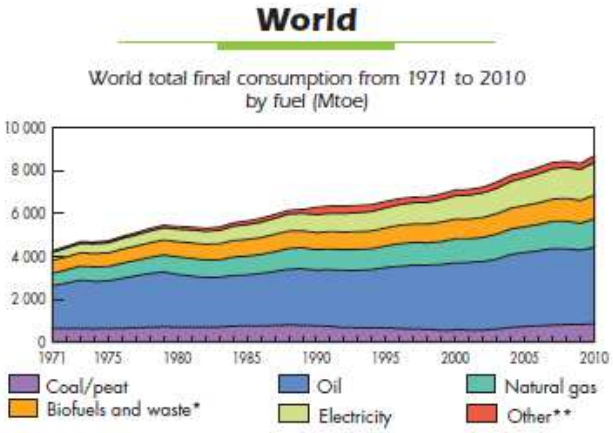


FIGURE 1.5 – Evolution de la consommation finale mondiale par type de sources d'énergie entre 1971 et 2010 [1]

Le scénario NPS (New Policies Scenario) : Il considère les politiques énergétiques actuellement annoncées ou en application au niveau des différents états. Elle présente une évolution réaliste en 'business as usual'.

Le scénario 450S : Il considère des politiques plus ambitieuse en termes de limitation de la prodution de CO2 qui ne sont pour l'instant pas encore mises en oeuvre dans les pays impliqués dans cette analyse.

Les projections concernant la répartition par région de la consommation finale d'énergie mondiale et celles concernant la répartition par source d'énergie sont respectivement présentées dans les figures (1.7) et (1.8).

Cette demande énergétique croissante bien que mondiale nécessite un développement local des ressources énergétiques : soit par des économies d'énergie, soit par des accords d'échanges internationaux, soit par des constructions nouvelles et des améliorations

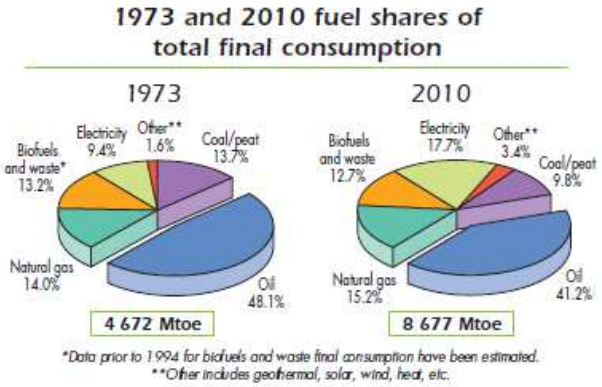


FIGURE 1.6 – Détails de la répartition de la consommation finale d'énergie mondiale par sources d'énergie en 1971 et en 2010 [1]

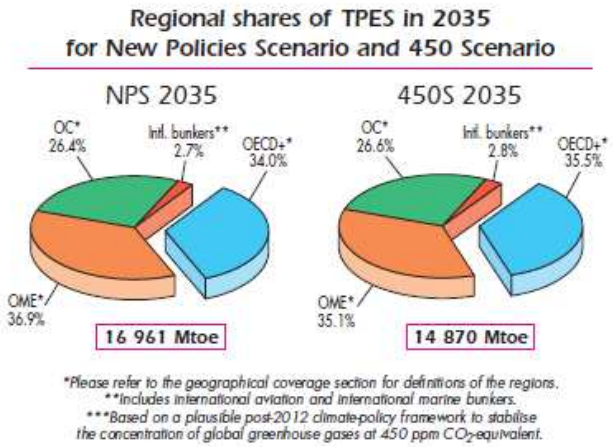


FIGURE 1.7 – Projection en 2035 de la répartition des consommations finales mondiales par région du monde [1]

d'équipements existants. Sur ce dernier point, il est donc indispensable pour chacun des états de construire, améliorer, entretenir et développer les modes de production d'électricité. Dans ce développement, il est important de considérer les impacts sociétaux et environnementaux de chaque mode de production d'énergie afin de s'inscrire dans une démarche de développement durable.

Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur la production d'énergie nucléaire qui selon les données de l'IEA (International Energy Agency) devrait passer selon les estimations les plus minorantes de 718,96 MTeP en 2010 à 1204,23 MTeP en 2035. Cela représente une augmentation de 67,50% de la production d'énergie de type nucléaire entre 2010 et 2035 et donc des constructions d'infrastructures de production d'énergie nucléaire au niveau mondial. A cela s'ajoute le maintien, l'amélioration et la mise à niveau de sureté des installations existantes.

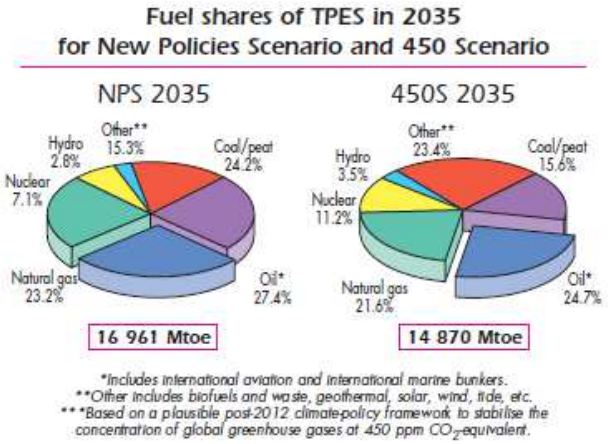


FIGURE 1.8 – Projection en 2035 de la répartition des consommations finales mondiales par sources d'énergie [1]

1.3 Un besoin croissant de sécurité

En parallèle de cette croissance naturelle des besoins énergétiques et d'infrastructures, les sociétés deviennent de plus en plus averses aux risques. Cette aversion aux risques est d'autant plus sensible qu'elle est liée à la perception du risque plus qu'au risque objectif. Ainsi un individu percevra un risque industriel létal même faible comme moins acceptable qu'un risque naturel de même gravité mais de plus grande fréquence d'occurence. Cela se traduit dans le domaine nucléaire en visant un dimensionnement de centrale nucléaire dont les probabilités d'occurence d'accident grave sont plus faibles que des accidents naturels de même gravité.

1.3.1 Philosophie de la gestion du risque des Centrales Nucléaires de Production d'Electricité Françaises (CNPE)

Afin de bien comprendre la qualité du dimensionnement des ouvrages de génie civil et des équipements des centrales nucléaires, il est nécessaire de présenter les méthodes d'anticipation et de quantification des risques utilisées dans le secteur nucléaire.

On définit le risque à partir de deux composantes indépendantes : la gravité et la probabilité d'occurrence du dommage qui regroupe fréquence et durée d'exposition. Ces deux composantes sont visualisées sur un graphique présentant en abscisse la probabilité d'occurrence et en ordonnée la gravité. Ce graphique présente une tendance générale de diminution de la probabilité d'occurrence pour les événements avec les conséquences les plus dramatiques. Cette courbe de tendance est appelée la courbe de Farmer. Elle définit trois zones : risque individuel de la vie quotidienne, risque moyen de temps en temps et risque collectif rare. Dans cette dernière zone, on trouve les risques majeurs parmi lesquels les risques liés aux accidents nucléaires.

Cette représentation permet de tirer certaines conclusions. Tout d'abord, il existe deux manières de gérer le risque :

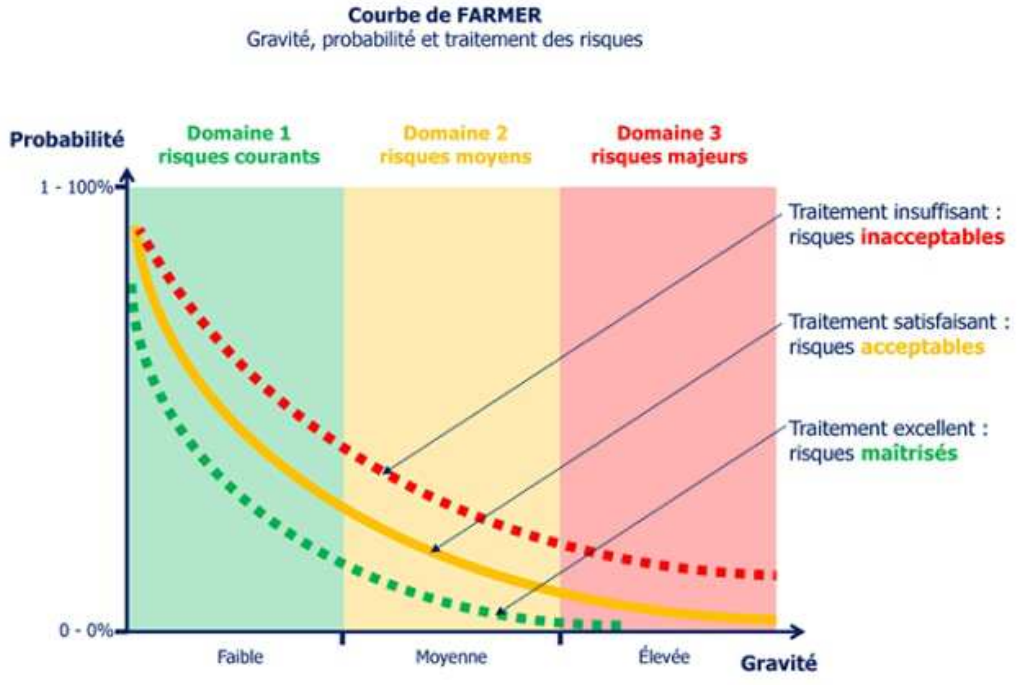


FIGURE 1.9 – Courbe de Farmer - Application au traitement hospitalier [16]

- On peut agir sur la probabilité d'occurrence de ce risque. Cela rejoint le principe de 'Sûreté'.
- On peut diminuer les conséquences d'un événement grave à l'aide de dispositifs actifs ou passifs.

Une action combinée sur ces deux paramètres permet de rendre acceptable l'occurrence de risques initialement grave à forte probabilité d'occurrence (donc au-dessus de la courbe de Farmer des événements 'acceptables').

Il est important de noter qu'il n'existe pas de probabilité nulle pour des événements aux conséquences dramatiques. Si cela met à mal la tendance des pays industrialisés à avoir une aversion aux risques et à chercher à l'annihiler au point de ne plus l'afficher, on peut se poser la question : quelle est une probabilité acceptable d'occurrence d'un accident nucléaire majeur.

Pour répondre à cela, il faut définir ce qu'est un accident nucléaire majeur et le rattacher à un référentiel existant. On parle d'accident nucléaire majeur lorsqu'il y a des rejets mineurs avérés à l'extérieur de la centrale. Ce type de risques est donc comparable aux accidents naturels majeurs imprévisibles : séisme, crue millénaire, tsunami, chute de météorite, ... La figure ci-dessous représente les risques naturels et les risques industriels majeurs.

Dans le domaine du nucléaire, on considère un risque majeur acceptable lorsqu'on trouve une probabilité d'occurrence de 10^{-6} par an, qui peut se lire " un accident nucléaire majeur tous les millions d'année ". Les centrales actuelles sont conçues et améliorées pour

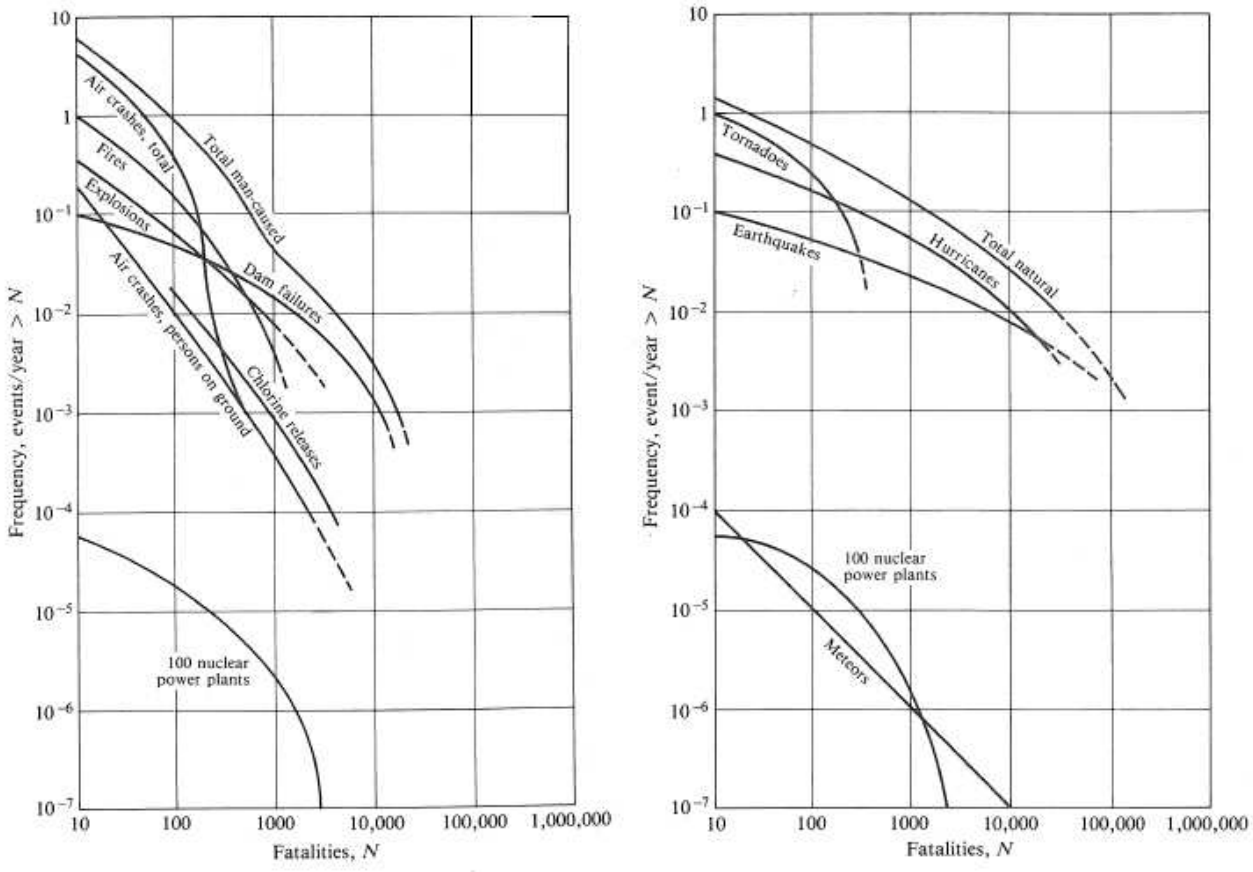


FIGURE 1.10 – A gauche : Risques d'origine industrielle, à droite : Risques d'origine naturelle [1]

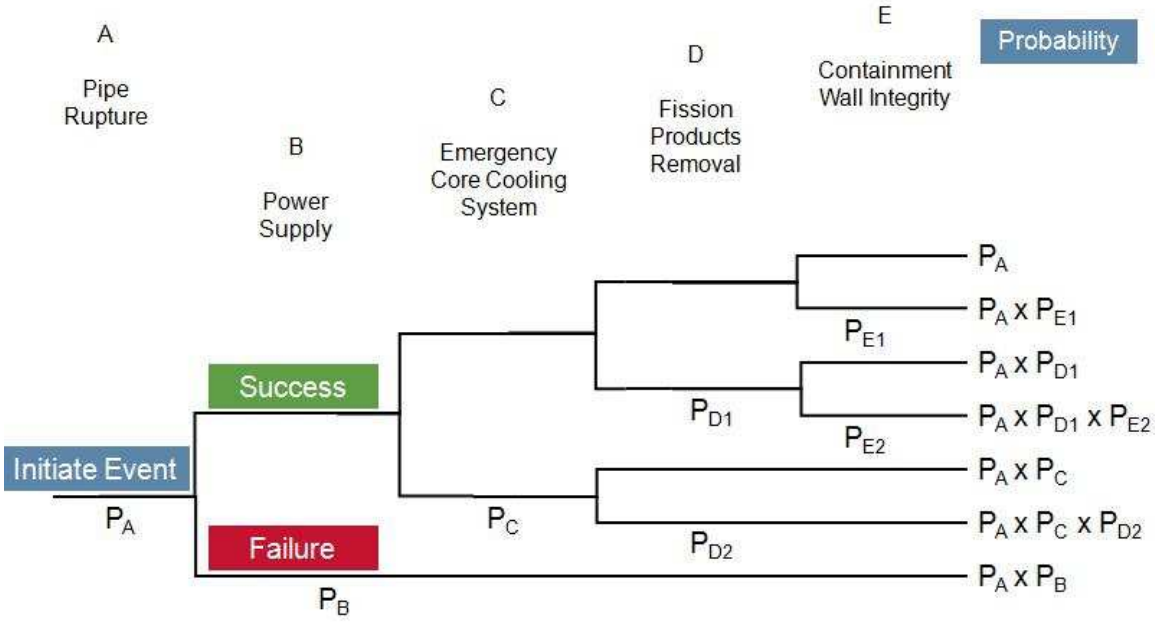


FIGURE 1.11 – Exemple d'étude de chaîne de probabilité aboutissant à un rejet important de matières radioactives [1]

vérifier cette probabilité. La probabilité de dimensionnement de l'EPR correspond à une probabilité d'occurence de la fusion du coeur de 4.10^{-7} par centrale par an.

La méthode d'obtention de cette probabilité consiste à définir des chaines de conséquences aboutissant à l'événement grave étudié et d'associer des probabilités de défaillance des différents systèmes. A partir de ces probabilités, on étudie les chaînes d'événements aboutissant à un accident aux conséquences inacceptables et on obtient une probabilité d'occurrence de cet accident. (voir fig. 1.11).

Remarques : *Cependant, force est de constater qu'il faut remettre en cause cette méthode d'évaluation du risque, on ne pourrait pas expliquer le fait que nous avons tous connus au moins quatre accidents nucléaires majeurs au cours des 60 dernières années : Three Miles Island (28 mars 1979), Tchernobyl (26 avril 1986), Tokai Mura (30 septembre 1999), Fukushima (11 mars 2011). Cela n'inclut pas les accidents nucléaires liés aux activités militaires. Il convient donc de prendre un certain recul vis-à-vis des études probabilistes de sûreté réalisées étant donné que les probabilités de défaillance humaine sont difficilement quantifiables et certaines chaines de conséquences sont encore inconnues.*

Cette méthode suppose que nous ayons une connaissance approximative des paramètres caractérisant : les sollicitations, les matériaux, les structures, ... Ces connaissances approximatives sont utilisées pour étudier la résistance de chaque équipement individuel et la probabilité de rupture obtenue est insérée dans la chaine d'événement. On passe ensuite à l'équipement suivant jusqu'à obtenir la probabilité d'occurence d'un accident majeur. Nous allons maintenant voir comment est obtenue cette probabilité de rupture et plus généralement comment sont dimensionnés les équipements de la centrale.

1.3.2 Méthodes de dimensionnement des équipements des CNPE :

Les équipements situés à l'intérieur de la centrale sont dimensionnés en utilisant deux méthodes : la méthode déterministe et la méthode stochastique. La méthode déterministe correspond à la méthode historique de dimensionnement des CNPE et la méthode stochastique commence à être introduite dans l'évaluation des risques.

Actuellement, les deux méthodes sont utilisées de manière complémentaire : la méthode stochastique évalue la fréquence d'occurrence des différentes événements déclencheurs des accidents nucléaire et son intensité. La méthode déterministe est ensuite utilisée pour réaliser l'ensemble des calculs des structures à partir d'un tirage de variables au sein des variables aléatoires définies par la méthode stochastique. On obtient une réponse sur la défaillance ou non de l'équipement. On effectue ensuite d'autres tirages aléatoires jusqu'à obtenir la probabilité de défaillance de l'équipement.

Cette méthode est toujours en phase de développement : la détermination des fonctions de probabilités nécessite un fort effort de R&D actuellement en cours dans les grandes industries nucléaires françaises. En parallèle de cela, il est nécessaire de développer des méthodes de calcul déterministes rapides pour calculer les risques de défaillance sur un grand nombre de tirages au sein des variables aléatoires.

1.3.2.1 Méthode déterministe :

La méthode déterministe d'évaluation de la sûreté et de dimensionnement d'une installation nucléaire consiste à supposer une défaillance sévère au sein du système et d'étudier son comportement en réaction à cette défaillance. On peut citer des exemples tels que :

- Rupture 'guillotine' d'une tuyauterie primaire : il s'agit d'une rupture de la tuyauterie instantanée. Chaque partie de tuyauterie se déplace dans une direction diamétralement opposée. La pression d'eau interne provoque un jet qui amplifie ce déplacement et augmente la taille de la brèche. Cette taille de brèche influence très fortement le débit de la fuite et donc la diminution de pression du circuit primaire.
- Rupture 'guillotine' d'une tuyauterie rattachée au circuit primaire au niveau d'un piquage : il s'agit par exemple de la rupture du piquage de la ligne d'expansion du pressuriseur. La principe est similaire à la rupture guillotine d'une tuyauterie primaire avec un diamètre de tuyauterie plus faible, une tuyauterie secondaire plus souple que la tuyauterie primaire (ce qui a tendance à augmenter la taille de la brèche) et une orientation de la rupture perpendiculaire à l'axe de la tuyauterie primaire (ce qui est fortement dimensionnant pour les ancrages du circuit primaire). Ce type de rupture est arrivé lors des épreuves hydrauliques préliminaires au démarrage des réacteurs 1450MWe.
- Chute d'un pont roulant : Ceci correspond à un évènement secondaire aggravant pouvant survenir suite à un séisme par exemple.
- Séisme de caractéristiques prédéfinies : Nous détaillerons ce point par la suite.

Une fois l'évènement déclenchant déterminé, des études sont effectuées pour déterminer les conditions les plus pénalisantes pour les structures et les équipements touchés. En fonction de la structure ou du critère de dimensionnement concernés, on utilisera différentes conditions initiales de déclenchement de l'événement. Précisons cela sur un exemple.

Exemple : chute d'une barre de combustible sur une structure lors de son transport par un pont roulant :

Nous considérons la chute d'une barre de combustible sur une structure lors de son transport. La barre de combustible est attachée à son extrémité haute au pont roulant. L'événement considéré est une rupture du dispositif de connection au pont roulant pouvant intervenir à tout instant lors du transport (déplacement lattéral, vertical ou pont à l'arrêt). On considère classiquement deux chutes possibles : une chute verticale de la barre de combustible et une chute avec rotation de 90° de la barre de combustible entraînant un impact avec une barre parfaitement horizontale (cf. figure 1.12).

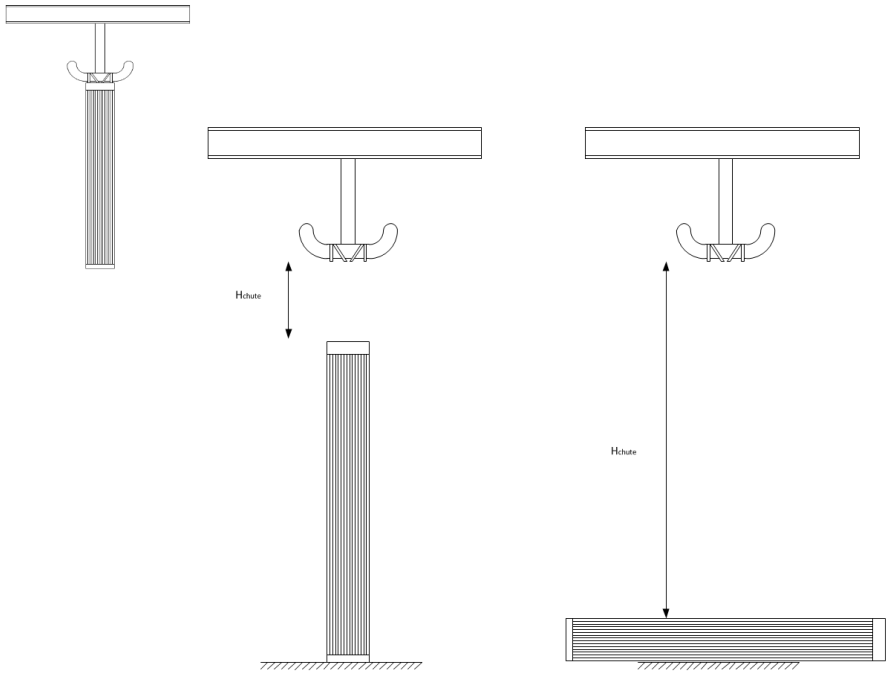


FIGURE 1.12 – Cas de chargement considérés - Gauche : chute verticale, Droite : chute horizontale

Dans le premier cas de chargement, la hauteur de chute est plus faible, mais la zone d'impact étant réduite, on observe un poinçonnement du plancher. Dans le deuxième cas, la hauteur de chute (et donc l'énergie cinétique à dissiper) est nettement plus grande mais la zone d'impact est plus conséquente. Ce deuxième cas est dimensionnant lorsqu'on étudie une chute de combustible sur un équipement. Dans ce cas, la zone d'impact peut être très petite.

Si la définition de la méthode de dimensionnement déterministe ne se concentre que sur la détermination de la sollicitation, elle suppose en fait une connaissance parfaite de la structure. En effet, il est nécessaire de connaître d'une manière aussi détaillée les structures et les équipements impactés par l'évènement considéré. Ceci suppose une connaissance parfaite : de la géométrie, des caractéristiques des matériaux utilisés, de l'état de contrainte initial, de l'historique d'utilisation des équipements pour évaluer leur vieillissement (et les évolutions des caractéristiques matériaux associées), d'une modélisation

adaptée aux chargements et aux critères considérés. Ce n'est jamais le cas et le calcul réalisé représente donc une approximation, une modélisation de la réalité.

Exemple de définition du chargement sismique des équipements :

– Intensité du séisme de dimensionnement :

L'approche française retenue pour la définition de l'aléa sismique est la Règle Fondamentale de Sûreté RFS I.2.c [15]. Elle repose sur une étude historique détaillée des séismes ayant eu lieu en France. Cette histoire sismique française est estimée pouvoir représenter assez fidèlement l'intensité des séismes par zone sismique sur une période de l'ordre de 1000 ans. Afin de prendre en compte l'aspect aléatoire du positionnement de l'épicentre du séisme, on considère qu'un séisme est susceptible de se reproduire dans la position la plus défavorable pour la centrale tout en restant compatible avec les données géologiques et sismiques. On considère aussi qu'un séisme d'une zone tectonique voisine peut créer un chargement sismique dimensionnant pour l'ouvrage. Ainsi, on suppose que les séismes des zones tectoniques adjacentes peuvent se produire à la limite de la zone tectonique à la plus courte distance de la centrale. Ceux ayant lieu sur la zone sismique de l'ouvrage sont supposés se produire à la verticale de l'ouvrage.

Cette étude historique permet de définir l'intensité d'un ou de plusieurs Séismes Maximaux Historiquement Vraisemblables (SMHV). Cette intensité s'exprime en échelle MSK (Medvedev-Sponheuer-Karnik). Afin de dimensionner les centrales aux séismes exceptionnels, on ajoute arbitrairement un degré d'intensité au SMHV pour définir les Séisme Majoré de Sécurité (SMS). Cette marge permet de couvrir une réévaluation éventuelle du SMHV ou de son spectre, résultant du progrès des connaissances méthodologiques ou historiques locales.

$$I_{SMS} = I_{SMHV} + 1 \tag{1.1}$$

Où les intensités sont exprimées en échelle MSK.

– Contenu spectral du séisme de dimensionnement :

Le contenu spectral de la sollicitation est déduit de l'analyse historique sismique du site. Cette étude permet d'établir pour chaque séisme l'intensité du séisme à l'épicentre ou son intensité sur une courbe d'isointensité, appelé isoséiste. Les études des caractéristiques du sol permettent d'analyser la propagation des ondes sismiques pour chaque séisme historique et d'en déduire : la position de l'épicentre et la profondeur focale (distance entre l'épicentre et le foyer) et le contenu fréquentiel de séisme à la surface.

On obtient ainsi des spectres de dimensionnement correspondant au Séisme Majoré de Sécurité. Ces spectres de dimensionnement peuvent être multiples pour une même implantation. Cela correspond à différentes localisations d'épicentre et donc différentes compositions spectrales du séisme. Ces spectres sont ensuite utilisés sur des modèles simplifiés de structures et on obtient des spectres de dimensionnement de plancher correspondant aux accélérations ressentis au niveau du plancher de l'équipement considéré. La

figure (1.13) présente un exemple de spectre d'un séisme de dimensionnement réduit au niveau du plancher de 8m pour un amortissement de 4%. Le séisme de dimensionnement réduit correspond à des configurations transitoires de l'équipement. Ces configurations étant temporaires, on considère un séisme plus faible correspondant le plus souvent à une intensité de SMHV.

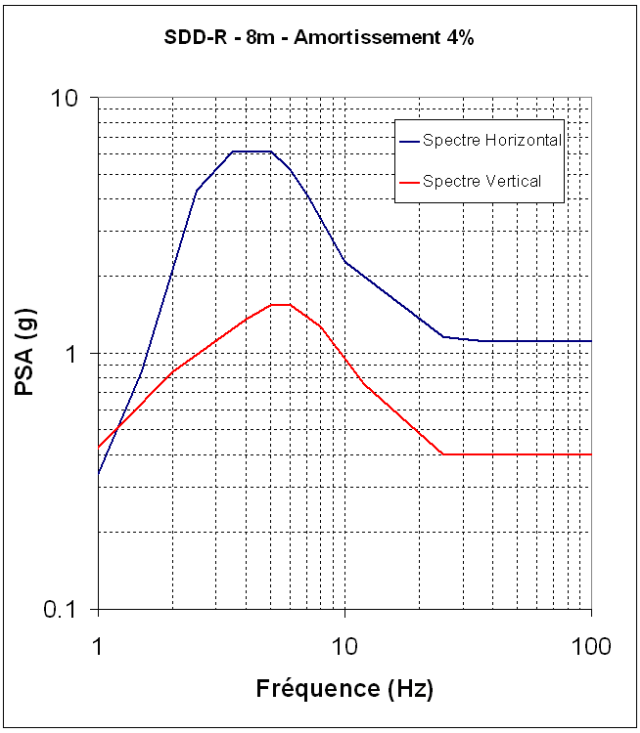


FIGURE 1.13 – Exemple de spectre de séisme de dimensionnement réduit - plancher de 8m - 4% d'amortissement

Les calculs déterministes non-linéaires sont effectués à partir de signaux sismiques temporels d'une durée d'environ 10 secondes. Ces signaux temporels sont obtenus à partir des spectres de dimensionnement. Ils sont générés en tirant aléatoirement des déphasages en fonction des fréquences du spectre puis en recâlant les signaux temporels obtenus afin de représenter au mieux le comportement classique d'un séisme réel avec une phase d'intensité croissante, une phase forte et enfin une phase de relâche avec amortissement faible. Les figures (1.14), (1.15) et (1.16) présentent un exemple de séisme généré à partir d'un spectre de dimensionnement.

Il est nécessaire de générer de multiples signaux temporels à partir d'un spectre de dimensionnement afin de couvrir tous les séismes possibles. Les phases étant tirées aléatoirement, il est possible de trouver des signaux temporels moins pénalisants en fonction des tirages. Ces tirages de variables aléatoires rejoignent la méthode de dimensionnement stochastique.

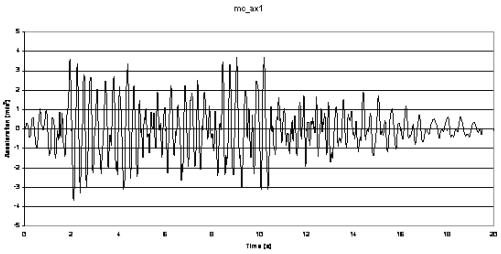


FIGURE 1.14 – Exemples de signal sismique synthétique - Accélération suivant x

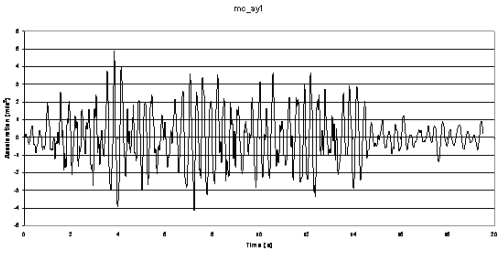


FIGURE 1.15 – Exemples de signal sismique synthétique - Accélération suivant y

1.3.2.2 Méthode stochastique :

Nous avons vu dans la partie précédente que la génération de signaux temporels synthétiques à partir de spectres de dimensionnement faisait intervenir des tirages aléatoires des déphasages. Dans le cas d'un calcul de structure sous chargement sismique, il convient d'utiliser plus de variables aléatoires. On peut citer les recommandations de l'Electric Power Research Institute [17].

Ce document recommande l'utilisation de 20 variables aléatoires se regroupant suivant 3 groupes :
- 3 variables sur l'aléa sismique : $X_{SpectrumShape}$ (1.17), X_{Hor} (1.18) et X_{Vert},
- 10 variables sur le comportement sismique de la structure : X_{Damp}, X_{Freq}, $X_{ModShape}$, X_{Tors}, $X_{ModesComb}$, X_{Tr}, X_{Inc}, X_{VSVGM}, X_{SSI} et $X_{DirComb}$,
- 7 variables sur la résistance de la structure : f_C, X_{Aug}, f_Y, X_{Eqc}, X_{Eqf}, X_{Dlim} et X_{Rug}.

Les variables portant sur le chargement sismique ont été développées dans la partie précédente.

Les variables portant sur le comportement sismique de la structure prennent en compte la mauvaise connaissance de l'état réel de la structure. On peut citer notamment les variables aléatoires portant sur l'amortissement, les fréquences propres et la forme des modes propres.

Les variables portant sur la résistance de la structure prennent en compte la méconnaissance de l'historique de chargements de la structure, les endommagements éventuels et le vieillissement des matériaux. On peut citer les variables aléatoires portant sur la contrainte

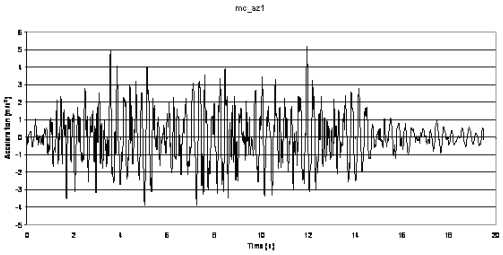


FIGURE 1.16 – Exemples de signal sismique synthétique - Accélération suivant z

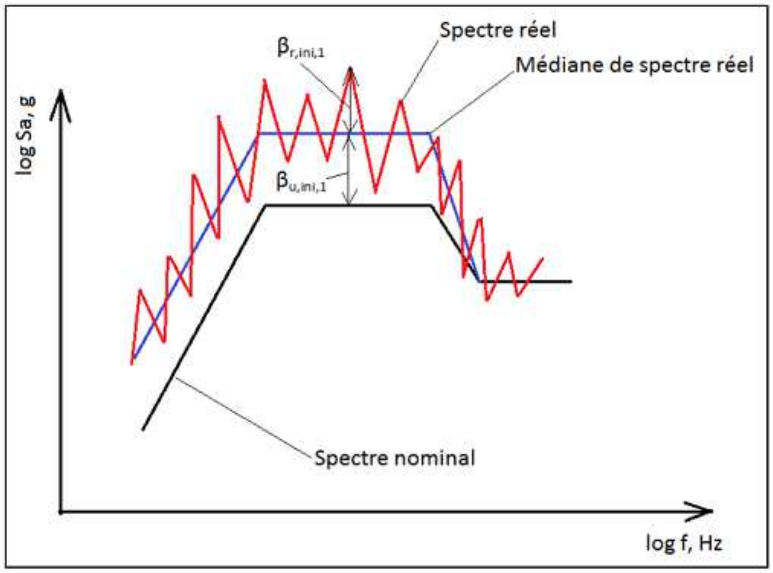


FIGURE 1.17 – Exemples de définition des variables aléatoires sur les spectres de dimensionnement

de limite d'élasticité, la contrainte ultime de résistance en traction et la contrainte ultime de résistance en compression.

La méthode de dimensionnement stochastique se déroule ensuite en 3 étapes :
- Détermination des fonctions de probabilités des différentes variables aléatoires,
- Tirage aléatoire parmi les variables aléatoires,
- Calcul de la structure : défaillance ou non.

La première étape est réalisée a priori et fixe la définition des fonctions de probabilités associées à chaque variable aléatoire. Les deux étapes suivantes se font de manière itérative. On tire un jeu de variables aléatoires et on exécute un calcul de la structure dont le résultat est une défaillance ou non de la structure. On répète ces étapes jusqu'à ce que les fonctions de probabilité de chaque variables soient bien représentées. On en déduit une probabilité de défaillance de l'équipement concerné.

Cette méthode n'est pour l'instant pas validée par l'Autorité de Sureté Nucléaire.

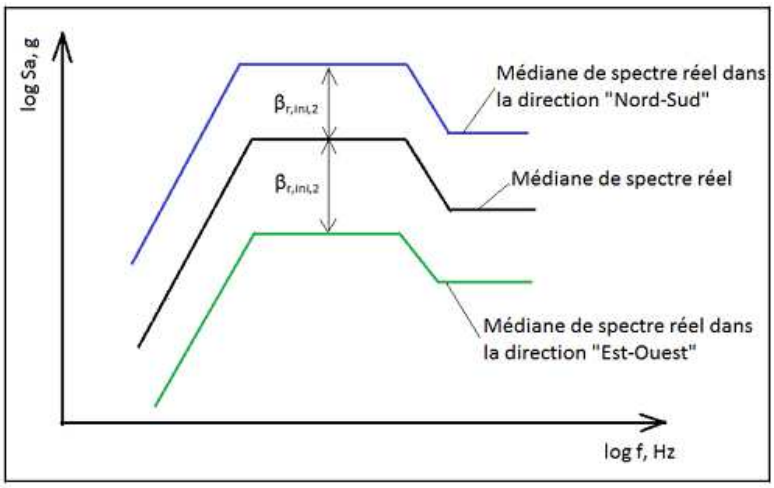


FIGURE 1.18 – Exemples de tirage aléatoire sur la répartition des solicitations Nord-Sud et Est-Ouest

1.3.3 Conclusion :

Ces méthodes de dimensionnement sont utilisées pour définir les chargements identifiés comme causes possibles d'accident nucléaire majeur. Ces méthodes sont ensuite utilisées pour justifier la tenue des équipements et du génie civil à ces chargements. Actuellement, seule la méthode déterministe (historique) est validée par l'ASN, mais des discussions sont en cours pour introduire des méthodes stochastiques, notamment dans l'évaluation de la durée de vie des cuves des centrales. Ces méthodes permettraient notamment la justification de l'augmentation de la durée de vie des centrales nucléaires françaises actuellement en exploitation (ce qui ne serait pas forcément possible avec une méthode déterministe).

1.4 Les râteliers de stockage de combustibles usés :

Dans les centrales nucléaires, le circuit primaire et les équipements de sûreté recueillent la majorité des attentions des ingénieurs intervenant sur la conception et sont conçus pour rester principalement dans le domaine élastique avec de rares incursions dans le domaine plastique dans des cas de sollicitations extrêmes (rupture guillotine doublement débattue du circuit primaire). Néanmoins, il existe d'autres zones de la CNPE dans lesquelles sont stockées une grande quantité de la radioactivité. Il s'agit notamment de la piscine de stockage de combustible (neuf et usé).

Ces piscines sont prévues pour contenir 792 assemblages combustible au maximum, soit l'équivalent d'environ 5 coeurs complets. Etant donné les difficultés logistiques et de sécurité des transports des combustibles nucléaires, ceux-ci sont stockés (dans leur majorité) pendant la quasi-totalité de la durée de vie de la centrale (soit entre 40 et 60 ans). Les sollicitations sismiques considérées sont donc les mêmes que les plus pénalisantes utilisées pour le dimensionnement de la centrale.

Ces équipements sont très complexes à dimensionner étant donné :

– la multiplicité des possibilités de remplissage des râteliers,
– l'élancement des modules individuels qui en font des structures souples,
– la masse importante déplacée pour les modules les plus chargés,
– les propriétés du contact qui évoluent au cours de l'oxydation et de l'irradiation des différentes surfaces (acier et fond de piscine),
– le fort confinement des lames d'eau (fort couplage fluide-structure),
– le niveau élevé de sollicitation sismique du plancher support des râteliers. Il est plus important que la sollicitation source au niveau du sol.

1.4.1 Description des râteliers :

Les râteliers de stockage de combustible sont situés dans la piscine du bâtiment combustible (BK). Il est composé d'un certain nombre de modules connectés les uns aux autres. La figure (1.19) représente l'implantation d'un râtelier classique.



FIGURE 1.19 – Piscine de désactivation des combustibles usés [11]

Chaque module est une structure en acier inoxydable composée d'un arrangement vertical rectangulaire d'alvéoles carrées. Ces alvéoles sont conçues pour accueillir les assemblages combustibles. Le revêtement intérieur des alvéoles est fait d'acier renforcé en bore afin de contrôler la radioactivité et interdire toute réaction en chaîne entre les assemblages combustibles adjacents. Les figures (1.20) et (1.21) représentent un module individuel classique.

Les dimensions d'un module dépendent du nombre d'alvéoles mais elles sont classiquement de 2,5m × 2,5m pour sa plaque de base et environ 5,5m de hauteur, dont 5m correspondant à la hauteur des barres combustibles. Il sont immergés dans une piscine d'une profondeur de 14m environ, afin de permettre le transport des barres de combustible dans l'eau en maintenant une profondeur d'immersion de 3m.

Chaque module est connecté au module adjacent au niveau de sa plaque de base épaisse à l'aide d'une plaque de connection épaisse. Cette liaison en pied de module connecte de manière rigide les plaques de base des modules individuels. Cette connection empêche les basculements des modules, qui en leur absence basculeraient à la moindre sollicitation.

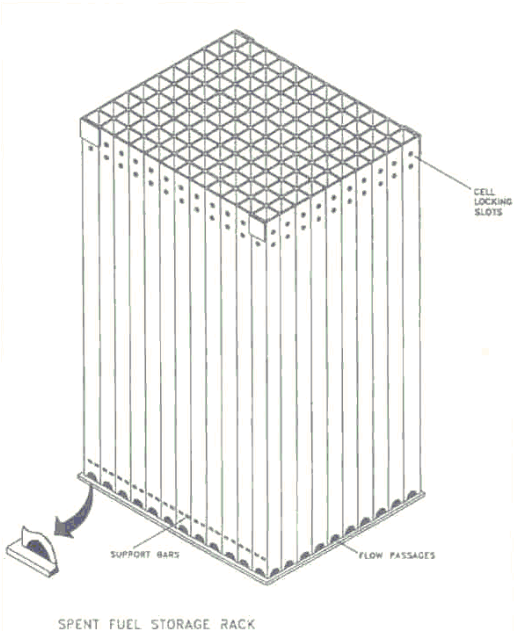


FIGURE 1.20 – Vue d'ensemble d'un module individuel [12]

Les modules reposent simplement sur le sol à l'aide de pieds équipés de patins cylindriques fixés sur les plaques de base. Ils autorisent le glissement des modules avec des frottements. Les différentes usures, oxydations et irradiations des surfaces des pieds et du liner de la piscine fournissent une grande variété de coefficients de frottement. La réglementation actuellement en vigueur recommande d'utiliser des coefficients de frottement solide pouvant varier entre 0,2 et 0,8 afin de maximiser soit le déplacement de la structure, soit les contraintes dans les râteliers.

Des essais plus précis peuvent montrer un comportement plus complexe qu'un frottement de Coulomb solide. Ces comportements complexes sont souvent chaotiques et difficiles à modéliser. L'approximation d'un frottement de Coulomb solide permet d'identifier des cas limites afin d'étudier le comportement de glissement maximum des râteliers et celui de contraintes maximales.

1.5 Le dimensionnement des structures glissantes immergées soumises à un séisme quelconque :

Les théories développées dans cette thèse concernent le dimensionnement des structures glissantes immergées soumises à un séisme quelconque. Ce dimensionnement consiste à étudier les glissements maximaux ainsi que les contraintes maximales au sein des structures. Chacun de ces résultats étant obtenus pour des coefficients de frottement plus ou moins élevés. Habituellement, on choisit un coefficient de frottement adapté à l'étude effectuée et on détecte les valeurs extremes du paramètre adapté (contraintes maximales dans les plaques, soudures et connections ou déplacements maximaux en pied ou en tête de modules).

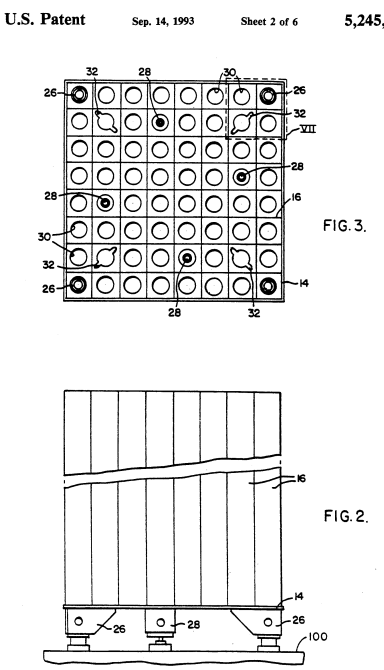


FIGURE 1.21 – Coupe verticale et horizontale d'un module individuel [13]

1.5.1 Les méthodes actuelles de dimensionnement :

Une fois le coefficient de frottement choisi, les méthodes de dimensionnement actuelles s'executent en deux fois :
- Détermination des masses de couplage fluide-structure (hypothèses des masses ajoutées) à partir de la géométrie initiale,
- Calcul en dynamique non-linéaire à partir d'un signal sismique choisi.

1.5.1.1 Détermination des masses de couplage fluide-structure :

Actuellement, il existe deux types de méthodes de détermination des masses de couplage fluide-structure : les méthodes approchées analytiques ou quasi-analytiques, les méthodes numériques.

Méthodes analytiques : Les méthodes analytiques approchées s'inspirent de la théorie de calcul de masse de couplage de Fritz [18] entre deux cylindres concentriques infinis. Une série de tables de conversion ont été réalisées pour des formes non-cylindriques. Dans le cas de structures de bases rectangulaires, les articles [19], [20] et [21] fournissent des résultats quasi-analytiques approchés pour les masses de couplage.

Tous ces modèles approchés donnent les masses de couplage approchées dans des configurations simplifiées : configuration centrée ou faiblement excentrée, couplages fluide-structure alignés avec les accélérations du module (pas d'effet de coin), écoulement fluide 2D ou 3D approchée (avec un écoulement vertical diminuant d'un coefficient arbitraire la vitesse du fluide).

Ils permettent une approximation rapide des masses de couplage fluide-structure impliquée dans le modèle. Il est souvent nécessaire de compléter ces modèles de simulation éléments finis pour s'assurer qu'on se trouve dans le domaine de validité du modèle utilisée. Ces solutions analytiques permettent de suivre les actualisations de géométrie avec des approximations parfois fortes sur l'écoulement ou les propriétés de symétrie ou de diagonalité des matrices de couplage.

Méthodes numériques :

Pour les géométries complexes ou les calculs plus fins avec prise en compte d'une surface libre, on utilise des logiciels de calcul numérique. Il existe actuellement plusieurs types de simulations numériques : des modélisations d'écoulement fluide, des éléments finis de pression, des modèles de propagation thermique, des modèles de particules-fluide.

Les modèles d'écoulement fluide :

Ils s'inspirent des logiciels de calcul d'écoulement de l'aéronautique. Cependant, ils sont le plus souvent adaptés à des écoulements non confinés et ils se focalisent sur l'étude de comportement d'écoulement turbulent éventuellement non stationnaire. Ils ne sont pas adaptés à l'étude des masses de couplage fluide-structure qui imposent des écoulements non turbulents.

Les éléments-finis de pression :

Cette méthode consiste à mailler le fluide en considérant des propagations d'ondes dans le fluide considéré. On impose ensuite des conditions aux limites en déplacement et en pression, permettant notamment de modéliser la surface libre de la piscine.

Cependant, la théorie des masses ajoutées suppose un fluide parfait incompressible ce qui est incompatible avec une propagation d'ondes dans le fluide. Il est donc nécessaire de se mettre à la limite des caractéristiques du fluide en tolérant une faible compressibilité. Cela introduit une erreur dans le résultat obtenu.

Ce modèle présente l'inconvénient de ne pas permettre de modification de la géométrie sans remailler la totalité du fluide. De plus, le fluide présente des grandes variations de tailles caractéristiques entre les lames d'eau intermodules d'épaisseur de quelques dizaines de centimètres, les lames d'eau latérales sont de quelques centaines de centimètres, et la lame d'eau au-dessus des râteliers de quelques mètres d'épaisseur. Afin d'avoir une bonne convergence du calcul, il est nécessaire de mailler la totalité du fluide avec des mailles ayant des dimensions de l'ordre de la plus petite dimension du fluide. Cela impose une quantité énorme d'éléments finis et donc un temps de calcul considérable.

Par contre, il permet la prise en compte efficace des effets de coin et de l'écoulement vertical lié à la surface libre de la piscine.

Modèles de propagation thermique :

Ces modèles reposent sur les analogies entre la diffusion thermique et les théories d'écoulements potentiels. Ils résolvent l'équation de propagation thermique $\Delta T = 0$ avec des termes sources et conditions aux limites en température et en flux thermique. Dans cette analogie, les flux thermiques représentent les conditions aux limites en déplacement.

Cette méthode utilise les mêmes équations que celles permettant le calcul des masses ajoutées. Par contre, elle présente les mêmes limites que le calcul avec les éléments finis de pression.

Modéles de particules fluide :

Dans ce modèle le fluide est maillé par un ensemble de particules représentant un volume de fluide environnant. La taille du volume de fluide peut varier d'une particule à l'autre et permet de réduire le nombre d'éléments. La totalité des conditions aux limites peuvent être modélisées. L'évolution de géométrie est prise en compte par une modification des tailles caractéristiques des particules fluides. En cas de changement fort de géométrie, certaines particules fluides peuvent être crées ou disparaître. Cette méthode est la plus prometteuse mais présente un investissement très lourd en terme de capacité et de temps de calcul. Elle ne permet pas actuellement de faire des calculs sur une géométrie donnée en moins de quelques minutes. Cela ne permet pas pour l'instant de faire des simulations avec actualisation de la géométrie en moins de plusieurs heures.

1.5.1.2 Calcul dynamique non-linéaire :

Les méthodes de calcul dynamique non-linéaire actuelles font appel aux logiciels de calculs numériques et principalement des méthodes éléments-finis. Les résolutions temporelles des calculs éléments-finis peuvent être explicite ou implicite.

Le schéma explicite suppose l'ensemble des chargements connus à l'instant t pour résoudre les déplacements de la structure à l'instant $t + dt$. Le schéma implicite nécessite la résolution des déplacements en $t + dt$ avec les chargements extérieurs calculés à l'instant $t + dt$. Il est donc nécessaire de résoudre les équations avec les chargements extérieurs comme inconnues. Le document [14] présente une explication détaillée des différents schémas d'intégration temporelle.

Les schémas implicites malgré leur compléxité présentent une stabilité inconditionnelle. Les schémas explicites nécessitent de choisir un intervalle dt suffisamment petit pour permettre une convergence vers la solution. Cependant, seuls les algorithmes explicites permettent de traiter des problèmes non-linéaires (ce qui est le cas de notre étude).

Parmi les différents logiciels éléments-finis possibles, on peut citer : Code_Aster, ANSYS, Abaqus, Pythagore, etc... Au-delà des différences de types d'éléments disponibles, des facilités de paramétrisation, des capacités de visualisation et prise en compte de complexité, les différences principales concernant notre problème portent sur la modélisation du couplage fluide-structure et celle du frottement, ainsi que sur la compatibilité entre ces deux éléments.

Nous avons eu l'occasion d'utiliser Code_Aster et ANSYS dans le cadre de cette thèse. Les résultats sont similaires et sont effectués dans des temps comparables. Ainsi un calcul sans actualisation de géométrie et pour une configuration initiale donnée s'effectue en environ une heure pour un signal sismique d'une dizaine de secondes.

Remarques :

Certains articles traitent du couplage entre deux logiciels numériques. L'un calculant les masses de couplage fluide-structure à partir des déplacements actualisés de la structure et l'autre exécutant le calcul temporel éléments-finis non-linéaires sur un pas de temps et ainsi de suite. Cependant ce comportement complet peut introduire des biais non négligeables et éventuellement donner une convergence vers une solution qui n'est pas la solution réelle. Il convient donc de faire une analyse très fine de convergence de la solution pour ne pas faire d'erreur parfois conséquente.

1.6 Théories développées dans cette thèse :

L'objectif principal de la théorie développée dans cette thèse est de permettre un calcul le plus proche possible de la réalité avec un temps de calcul quasi-instantané. Cela permet d'utiliser une méthode de dimensionnement stochastique afin de simuler un grand nombre de séismes et de conditions initiales possibles qui sont extrêmement importants pour ce problème hautement chaotique.

1.6.1 Théorie de couplage fluide-structure développée :

Afin de répondre aux objectifs que nous nous sommes fixés, nous allons développer une méthode analytique approchée de calcul des masses de couplage fluide-structure. Cette méthode analytique permet un calcul quasi-instané adapté à nos exigences.

Elle modélise le couplage entre modules au sein d'un quadrillage de modules. Ce couplage prend en compte les efforts non alignés avec les accélérations des modules qu'on nommera 'effet de coin'. La méthode employée utilise les équations de conservation de la masse associées à l'incompressibilité du fluide. On calcule ensuite l'énergie cinétique du fluide en négligeant l'énergie stockée dans les zones à écoulement complexe (les intersections entre lames d'eau). On minimisera enfin cette énergie pour en déduire les profils de pression au sein des lames d'eau et en déduire les masses de couplage entre modules.

Ces masses de couplage sont calculées pour une configuration géométrique quelconque et peut donc être actualisée avec les déplacements des modules.

1.6.2 Méthode de résolution du problème dynamique non-linéaire :

La méthode de résolution du problème dynamique non-linéaire doit répondre à son tour à l'exigence de calcul quasi-instantané et à celle de prise en compte de la majorité des caractéristiques de la structure réelle. Elle utilise le constat que la non-linéarité du problème porte sur l'évolution des masses de couplage fluide-structure et celle de la réaction

du sol en fonction du temps. Par contre, il n'y a pas de non-linéarité sur le domaine de définition des coordonnées spatiales. On peut donc discrétiser l'étude temporelle afin de se ramener à un problème quasi-linéaire par morçeaux et une résolution spatiale linéaire en utilisant les modes propres.

Le modèle ainsi développé prendra en compte les évolutions temporelles des masses de couplage fluide-structure ainsi que leurs effets dissipatifs. Il sera donc nécessaire de déterminer les modes propres immergés du système puis on projetera les équations d'équilibre sur ces modes propres. Les effets dissipatifs seront supposés comme des amortissements modaux. Puis on considérera un pas de temps suffisamment faible pour supposer les chargements extérieurs constants et on résoudra les équations sous ces hypothèses. Enfin, on testera les changements de conditions du contact à la fin du pas de temps. Ces solutions quasi-analytiques sont quasi-instantanées.

1.7 Applications possibles aux autres domaines du génie civil :

Le domaine principal d'applications de la théorie qui sera présenté dans les chapitres suivants concerne le nucléaire étant donné l'impact potentiel d'une défaillance dans ce secteur et les exigences réglementaires qui lui sont associées notamment dans le domaine sismique nécessitant une remise à niveau permanente. Néanmoins, les théories et résultats qui seront présentés ne se limitent pas au nucléaire.

1.7.1 Ponts anciens avec des piles à section rectangulaires :

Les ouvrages de génie civil tels que les ponts sont un domaine d'application possible de la théorie présentée dans cette thèse. Ces ouvrages sont un cas particulier des méthodes utilisées. On considère ici un domaine fluide infini dans la direction perpendiculaire au pont et un quadrillage unidirectionnel de structures.

Les frottements servent à modéliser les ponts de maçonnerie où les blocs peuvent glisser les uns sur les autres (cf. figure 1.22), ou les ponts plus récents sur lesquels s'appliquent de grandes sollicitations sismiques. Sur ces derniers, les dispositifs de supportage autorisent le glissement d'ensemble de la pile du pont. C'est notamment le cas du pont Rion-Antirion reliant la Grèce à la péninsule du Péloponèse (cf. figure 1.23).

1.7.2 Ouvrages de stockage d'eau :

Parmi les domaines d'application, on pourra citer les infrastructures de stockage de fluide de grande taille. Cela peut concerner les réservoirs d'eau potable des grandes villes. Dans les villes les plus anciennes, ces infrastructures présentent un réel enjeu étant donné qu'il s'agit souvent de structures existantes anciennes qu'il convient de réévaluer avec les nouvelles normes sismiques lorsqu'elles sont rénovées (cf. figure 1.24). Il conviendra donc d'utiliser les théories les plus récentes de couplage fluide-structure sous chargements sismiques afin d'obtenir les résultats les plus pertinents possibles.

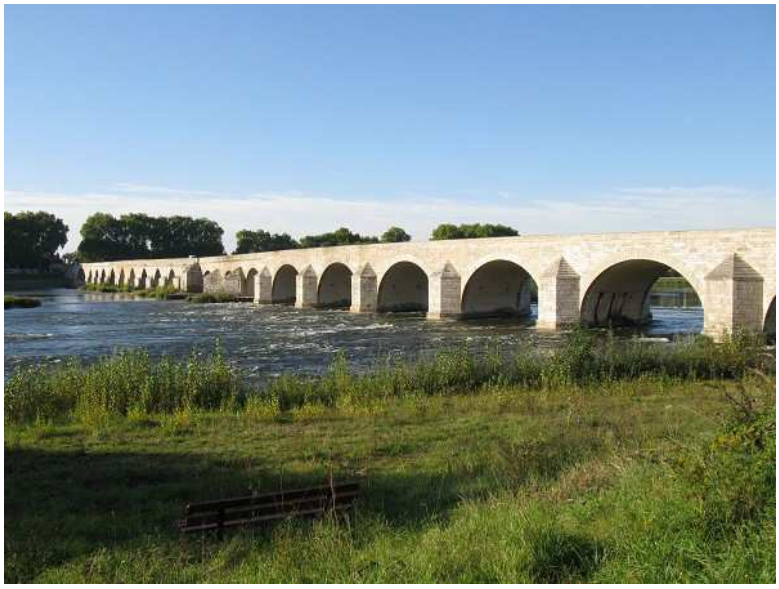


FIGURE 1.22 – Pont de Beaugency sur la Loire [2]



FIGURE 1.23 – Pont Rion-Antirion [10]

Parmi les autres infrastructures de stockage d'eau, on pourra citer les centres de retenue et redistribution de la pluie en vue de leur traitement ultérieur. Ces centres de stockage représentent de grands volumes le plus souvent cachés au grand public et font donc partie intégrante d'ouvrages publics de grande taille. Il n'est donc pas étonnant de trouver un centre de retenue d'eau de pluie sous des stades, des centres commerciaux, des parkings, etc... La figure (1.25) représente le centre de retenue d'eau de pluie située sous le stade de France. Un dimensionnement précis de ces infrastructures est nécessaire étant donné le double enjeu de sureté de l'infrastructure de stockage et de la structure située au-dessus.

Ces problématiques sont communes à tous les pays développés. La figure (1.26) présente le plus grand bassin de rétention au monde. Il est réalisé au Japon dans la métropole de Tokyo et s'étend entre la commune de Saitama et celle de Tokyo.



FIGURE 1.24 – Réservoir de stockage d'eau potable de Montsouris (inauguration en 1874) [2]

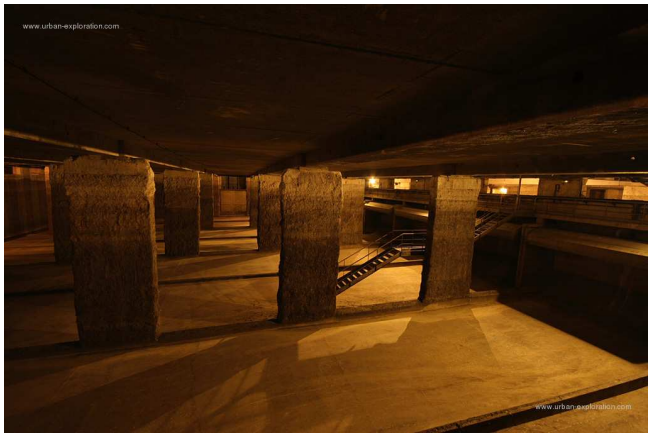


FIGURE 1.25 – Bassin de rétention d'eau de pluie de la Plaine Saint-Denis situé sous le stade de France [3]

1.7.3 Ouvrages en maçonnerie :

Les ouvrages en maçonnerie peuvent aussi utiliser la théorie qui sera développée dans cette thèse. Les joints entre blocs participent quasiment exclusivement à la dissipation d'énergie lors des mouvements de la structure. Cette dissipation d'énergie pourra être modélisée en utilisant des systèmes avec des masses de couplage fluide-structure ayant une faible amplitude et une grande variation temporelle ($m_H(t) << 1$ et $m_H(t)$ d'ordre 1).

De la même manière, le frottement solide lors du déplacement représente d'autres effets dissipatifs des déplacements absolus de la structure notamment au niveau des extrémités du mur ou des murs avec coulis de remplissage (voir figure (1.27)). Les valeurs des masses de couplage et des coefficients de frottement pourront être recalées après différentes simulations et un calage des déplacements des différents blocs.

1.7.4 Maintenance et sécurité des ouvrages existants

Sur ces ouvrages existants, parmi les enjeux de sureté principaux concernant le manque d'informations sur l'état de la structure :
- Il n'existe souvent pas de plan de la structure réelle.
- Le vieillissement des matériaux n'est pas étudié.



FIGURE 1.26 – Réservoir géant à Saitama dans la banlieue de Tokyo [6]

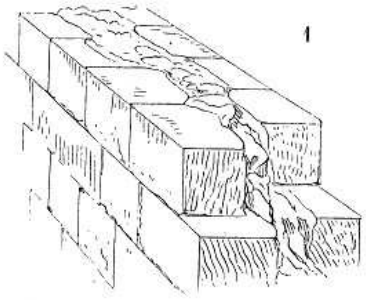


FIGURE 1.27 – Mur à double parements avec coulis de remplissage [7]

- Certains matériaux et certaines techniques constructives ne sont plus connus actuellement.
- Nous n'avons pas la connaissance de l'histoire des chargements sur la structure et donc on ne connait pas l'endommagement de la structure et des matériaux.

Ces absences de données nécessitent de faire un certain nombre d'hypothèses et d'études complémentaires sur la structure. Ces informations complémentaires nécessitent parfois des essais destructifs sur la structure. Afin d'éviter d'anticiper le comportement de la structure malgré ces incertitudes, il est nécessaire d'utiliser des méthodes de dimensionnement stochastiques. Les solutions analytiques développées dans cette thèse se révèlent donc particulièrement utiles.

1.8 Organisation de la thèse :

Nous avons présenté dans le chapitre I le contexte global d'augmentation des besoin énergétiques mondiaux et du besoin de sécurité des populations. Nous avons ensuite détaillé comment ces besoins sont intégrés dans le dimensionnement des centres de production d'énergie et notamment des centrales nucléaires au travers de l'introduction progressive des méthodes stochastiques. Ces nouvelles méthodes imposent le développement de modèles simplifiés fiables permettant un calcul rapide de problèmes complexes de dynamique non linéaire avec des couplages fluide-structure qui sera le domaine d'étude de

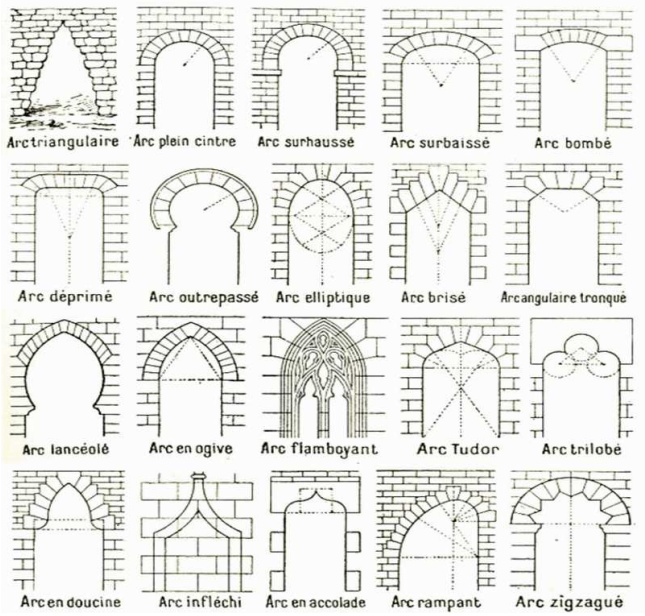


FIGURE 1.28 – Les formes d'arc recensées dans [7]

notre thèse. Nous avons ensuite détaillé les contenus scientifiques qui seront utilisés et les domaines d'application possibles des théories qui seront développées dans les chapitres II et III.

Le chapitre II porte sur les méthodes de détermination des masses de couplage fluide-structure. Nous présenterons une étude bibliographique de l'état de l'art, puis nous résumerons les bases théoriques de la théorie des masses ajoutées. Puis nous présenterons des nouvelles méthodes de calcul des masses ajoutées dans le cas du couplage entre deux rectangles dans des positions concentriques et non concentriques. Enfin, nous présenterons une méthode de calcul du couplage mutli-structure dans un quadrillage de structures à base rectangulaire et nous présenterons les résultats des différents modéles que nous comparerons aux modèles existants.

Le chapitre III développe les méthodes de résolution du problème de dynamique non-linéaire couplé avec actualisation des géométries des lames d'eau. Il étudie le comportement d'une poutre glissante avec un frottement de Coulomb solide immergée dans un fluide et soumise à un séisme quelconque. Les matrices de masses de couplage utilisées dans ce chapitre sont issus des modèles développés dans le chapitre II. Nous présenterons les méthodes de détermination des bases de modes propres immergées correspondant aux différents états du contact, puis nous donnerons une méthode de résolution analytique sur un pas de temps fixé, enfin nous présenterons les méthodes de passage d'un pas de temps au pas de temps suivant dans les cas de changement de conditions de contact. Les résultats de ce problème couplé seront présentés dans le chapitre IV.

Le chapitre IV présente les résultats issus des théories développées dans les chapitres II et III. Ils sont obtenus en comparant les résultats pseudo-analytiques de la thèse à des simulations analytiques sur des configurations identiques. Cela permet de valider les modèles développés sur des cas simplifiés. Puis, on utilise pleinement les méthodes de

résolution rapide des problèmes non-linéaire couplés avec actualisation de la géométrie et prise en compte des termes non diagonaux des matrices de couplage afin de présenter l'influence de ces paramètres habituellement négligés dans la réponse de la structure. Enfin, nous montrerons que le comportement chaotique de ce système ne permet pas de donner des règles générales sur des modèles trop simplifiés et qu'il est nécessaire de modéliser le plus finement possible le comportement vibratoire de la structure à dimensionner.

Le chapitre V donnera une conclusion à ce travail de recherche et proposera des pistes d'amélioration et de développement.

Bibliographie

[1] Atlas du Paris souterrain, A. Clément et G. Thomas.

[2] Site : www.urban-exploration.com.

[3] "World Population Prospects, the 2010 Revision", United Nations Population Division. Version June 25, 2013.

[4] Site : Wikipedia.org, 'World population', http ://en.wikipedia.org/wiki/World_population.

[5] Site : http ://www.michaeljohngrist.com.

[6] E. Viollet-Le-Duc, Dictionnaire raissoné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle, 1856.

[7] Key World Energy Statistics, International Energy Agency, 2012.

[8] Formation GPIS, Areva.

[9] http ://fr.structurae.de.

[10] http ://www.planete-tp.com.

[11] http ://enseignants.edf.com.

[12] In-Yong Kim, Fuel Storage and Handling System, Korea Power Engineering Co.

[13] Brevet US5245641A Spent Fuel Storage Rack.

[14] http ://www.code-aster.org/V2/doc/default/fr/man_r/r5/r5.06.04.pdf.

[15] RFS I.2.c, Règle Fondamentale de Sûreté ASN, 1er octobre 1981.

[16] www.qualite-securite-soins.fr.

[17] EPRI TR-103959, Electric Power Research Institute

[18] R.J. Fritz, The effect of liquids on the dynamic motions of immersed solids, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, 94, 167-173, 1972.

[19] J. Stabel, M. Ren and H. Swelim, Calculation of seismic loads on fuel storage racks under consideration of fluid-structure interaction, Trans. SMIRT-12, 1993.

[20] M. Ren and J. Stabel, Comparison of different analytical formulations for FSI between fuel storage racks, Trans. SMIRT-15, 1999.

[21] J. Stabel and M. Ren, Fluid-structure-interaction for the analysis of the dynamics of fuel storage racks in the case of seismic loads, Nuclear Engineering and Design, 206, 167-176, 2001.

Chapitre 2

Etude et modélisation de l'intéraction fluide-structure

2.1 Introduction

Ce chapitre porte sur l'étude du couplage fluide-structure appliquée à des structures à section rectangulaire immergées dans un fluide contenu dans un réservoir de base rectangulaire. Les lames d'eau considérées dans les théories qui seront développées dans ce chapitre sont supposées confinées, c'est-à-dire de faible épaisseur par rapport aux grandeurs caractéristiques de la structure. On limitera notre étude aux écoulements plan autour de la structure en mouvement.

Des modèles analytiques ont été développés sur ce sujet entre les années 1930 et 1950 dans le domaine de l'aéronautique et du génie civil. Les problèmes les plus proches portent sur l'étude du comportement des barrages [1], [2], [11], [12], [15] et des réservoirs de liquide [7], [10], [13], [14], [16] sous séisme ou vibrations. Ils présentent des modélisations de masse morte et de masse oscillante pour caractériser le comportement de la surface libre.

Dans les années 1960 à 1980, les modéles analytiques ont été développés dans l'industrie nucléaire, notamment pour vérifier la durée de vie des tuyauteries du circuit primaire des centrales et la tenue des revêtements des crayons d'assemblage combustible. Ces documents restent la propriété de cette industrie et n'ont que rarement été diffusés dans la communauté scientifique.

Après les années 1980, les modèles analytiques se sont raréfiés pour s'orienter vers des résolutions numériques qui sont maintenant intégrées dans la plupart des logiciels éléments finis de référence. On pourra citer notamment : Code_Aster, ANSYS, Abaqus, Pythagore, Catia, ... Les modèles analytiques disparaissent peu à peu du paysage scientifique sauf pour apporter des simplifications dans les calculs avec de nombreux éléments. On voit apparaitre les méthodes d'homogénéisation pour des faisceaux de tubes [19], [22], [24], [25], [26] et [27].

Le développement des problèmes couplés de dynamique complexe avec couplage fluide-structure a donné un nouveau souffle aux solutions analytiques approchées et notamment dans l'industrie nucléaire. L'un des seuls équipements ayant un comportement dynamique

sortant naturellement du domaine linéaire est le râtelier de stockage de combustible. On voit donc ressurgir des modèles analytiques au début des années 1990. C'est le cas des articles [2], [3], [4], [6], [17], [21], [23] et [28]. Cependant, le passage d'une géométrie cylindrique à une géométrie rectangulaire ne se fait pas de manière simple et de nombreuses hypothèses simplificatrices ont été effectuées limitant fortement les domaines de validité des modèles.

Afin d'améliorer ces résultats, on cherche à développer des modèles répondant aux objectifs qui animent cette thèse, à savoir :
- Modéliser le plus finement possible la physique du système réel,
- Développer des modèles analytiques ou quasi-analytiques avec un temps de calcul le plus court (si possible presque instantané).

Ainsi, nous présenterons dans un premier temps les éléments théoriques associés au couplage fluide-structure et notamment à la théorie des masses ajoutées. Puis, nous détaillerons le modèle analytique historique développé par R.J. Fritz [1]. Nous étudierons le cas du couplage entre deux poutres infinies de section rectangulaires concentriques et non concentriques en développant une nouvelle théorie, nous comparerons nos résultats à ceux des méthodes existantes et aux résultats éléments-finis. Enfin, nous présenterons un modèle de couplage multi-structure adapté à un quadrillage de structures de bases rectangulaires.

2.2 Eléments de théorie

Dans cette partie, nous présenterons les bases théoriques du couplage fluide-structure et notamment de la théorie des masses ajoutées. Pour cela nous nous inspirerons sensiblement de l'ouvrage [5] qui est une référence dans le domaine. Les équations permettant d'établir la théorie des masses ajoutées sont directement issues de cet ouvrage.

Nous considérerons dans l'ensemble de notre étude un fluide incompressible dans lequel est immergé un solide de géométrie quelconque. Nous supposons que la seule force extérieure s'appliquant sur le système est la gravité. Nous présenterons dans un premier temps les bases de la théorie du couplage fluide-structure, puis nous introduirons certaines hypothèses simplificatrices afin de présenter la théorie des masses ajoutées.

2.2.1 Nombres adimensionnels

Afin de pouvoir évaluer l'influence du fluide sur la réponse dynamique du râtelier de stockage, nous avons besoin d'étudier plus en détails le comportement de ce fluide. Le comportement d'un fluide est régi par un certain nombre de grandeurs caractéristiques. Classiquement ces grandeurs adimensionnelles sont les nombres de *Froude*, de *Reynolds* et de *Cauchy* et sont définies de la manière suivante :

$$F_R = \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}$$
$$R_E = \frac{\rho_F U_0 L}{\mu} \tag{2.1}$$
$$C_Y = \frac{\rho_F U_0^2}{E}$$

Avec :
- U_0 : Une vitesse caractéristique du fluide,
- L : Une dimension caractéristique du domaine où a lieu l'interaction fluide-structure,
- g : La gravité,
- ρ_F : La masse volumique du fluide,
- E : Le module d'Young du solide,
- μ : La viscosité du fluide,
- t : Le temps.

Cependant, dans le cas d'une interaction fluide-structure, la valeur caractéristique de la vitesse du fluide U_0 est trés difficile à quantifier et est une conséquence du phénomène que nous cherchons à étudier. Ainsi, il est plus commode d'utiliser une grandeur de vitesse caractéristique directement rattachée au solide plutôt qu'au fluide. Nous utiliserons donc c_s la célérité d'une onde dans le solide. Les nombres adimensionnels utilisés deviennent le nombre de *Froude Dynamique*, le nombre de *Stokes* et le nombre de *masse* :

$$F_d = \frac{c_s}{\sqrt{gL}}$$
$$S_T = \frac{\rho_F c_S L}{\mu} \tag{2.2}$$
$$\mathcal{M} = \frac{\rho_F c_S^2}{E} = \frac{\rho_F}{\rho_S}$$

Où ρ_S est la masse volumique du solide.

2.2.2 Variables adimensionnelles

Nous définissons de la même façon des variables adimensionnelles. Les variables du fluide s'écrivent :

$$\bar{\underline{U}} = \frac{\underline{U}}{c_S}$$
$$\bar{p} = \frac{p}{\rho_F c_S^2} \tag{2.3}$$

Où $\underline{U}$ est la vitesse réelle des particules fluides, et p est la pression en tout point du fluide.

Le temps adimensionnel se définit comme :

$$\bar{t} = \frac{t c_S}{L} \tag{2.4}$$

On adimensionne les variables liées au solide. Ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\xi}} &= \frac{\underline{\xi}}{\xi_0} \\ \bar{\underline{\underline{\sigma}}} &= \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{E} \\ \mathcal{D} &= \frac{\xi_0}{L} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Où $\underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X}$ est le vecteur déplacement défini en tout point du solide, et $\underline{\underline{\sigma}}$ est la contrainte réelle. ξ_0 est une grandeur caractéristique du déplacement de la structure et $\mathcal{D}$ est une grandeur appelée *déplacement réduit* qui caractérise les effets de grands déplacements.

2.2.3 Equations du système

Maintenant que les variables de chaque domaine ont été définies, il faut écrire les équations d'équilibre des systèmes fluide et solide, ainsi que les équations de continuité aux interfaces.

2.2.3.1 Equations de champ pour le fluide :

L'incompressibilité du fluide s'écrit :

$$div\bar{\underline{U}} = 0 \tag{2.6}$$

Et la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\bar{\underline{U}}}{d\bar{t}} = -\frac{1}{F_D^2}\underline{e_z} - \underline{\nabla}\bar{p} + \frac{1}{S_T}\Delta\bar{\underline{U}} \tag{2.7}$$

2.2.3.2 Equations d'équilibre du solide :

L'équilibre du système s'écrit :

$$\mathcal{D}\frac{\partial^2\bar{\underline{\xi}}}{\partial\bar{t}^2} = -\frac{1}{F_D^2} + div\bar{\underline{\underline{\sigma}}} \tag{2.8}$$

Les caractéristiques du matériau donnent :

$$\mathcal{D}\frac{1}{2}\left(\nabla^t\bar{\underline{\xi}} + \nabla\bar{\underline{\xi}}\right) = (1+\nu)\bar{\underline{\underline{\sigma}}} - \nu Tr(\bar{\underline{\underline{\sigma}}})\underline{\underline{1}} \tag{2.9}$$

2.2.3.3 Conditions d'interface :

Les conditions d'interface en déplacement s'expriment :

$$\bar{\underline{U}}(\tilde{\underline{x}}) = \mathcal{D}\frac{\partial\bar{\underline{\xi}}}{\partial\bar{t}}(\underline{\bar{X}}) \tag{2.10}$$

Avec :
- $\underline{\tilde{x}} = \frac{\underline{x}}{L}$: La position actuelle adimensionnée des particules de fluide,
- $\underline{\bar{X}} = \frac{\underline{X}}{L}$: La position initiale adimensionnée des particules du solide.

Les conditions d'interface en contrainte s'expriment :

$$\mathcal{M}\left[-\bar{p}(\underline{\tilde{x}})\underline{\underline{1}} + \frac{2}{S_T}\underline{\underline{\bar{d}}}(\underline{\tilde{x}})\right].\underline{n}(\underline{\tilde{x}}) = \underline{\underline{\bar{\sigma}}}(\underline{\bar{x}}).\underline{n}(\underline{\bar{x}}) \tag{2.11}$$

Où :
- $\underline{\underline{\bar{d}}} = \frac{1}{2}(\nabla^t \underline{\bar{U}} + \nabla \underline{\bar{U}})$,
- $\underline{n}(\underline{\bar{x}})$: Le vecteur normal sortant du solide.

2.2.3.4 Hypothèse de petits déplacements :

Nous nous intéressons aux petits mouvements d'un solide dans le fluide. Nous supposerons le fluide initialement au repos avec une pression initiale Ces hypothèses se modélisent par :

$$\mathcal{D} << 1, \quad \underline{U} = \underline{0}, \quad P = P_0. \tag{2.12}$$

Le chargement appliqué est le déplacement du solide. Celui-ci étant supposé faible, il est naturel de faire un développement limité des variables du fluide par rapport au paramètre $\lambda = \mathcal{D}$.

$$\underline{U} = \underline{0} + \lambda \underline{u}, \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \lambda \underline{\underline{\sigma}}. \tag{2.13}$$

En injectant ce développement limité dans les équations d'équilibre du fluide, on obtient à l'ordre 0 en λ.

$$-\underline{\nabla} P_0 = -\frac{1}{F_D^2}\underline{e_z} \tag{2.14}$$

A l'ordre 1 en λ, les équations d'équilibre du fluide s'écrivent :

$$\begin{cases} div\underline{u} = 0 \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\underline{\nabla} p + \frac{1}{S_T}\Delta \underline{u} \end{cases} \tag{2.15}$$

Et les conditions aux limites :

$$\underline{u} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{2.16}$$

Comme indiqué dans [5], la condition dynamique s'obtient plus difficilement du fait de l'existence du champ de précontrainte $\underline{\underline{\Sigma_0}}$ et des variations géométriques de l'interface. Nous ne donnerons donc que le résultat de l'effort infinitésimal d'interface :

$$\underline{df} = \underline{T} dA^{\underline{X}} \tag{2.17}$$

Avec :

$$dA^{\underline{X}} = \underline{dA}^{\underline{X}}.\underline{n_0} \tag{2.18}$$

Et :

$$\underline{T} = \mathcal{M}\left[\underline{\underline{\sigma}} + (-\underline{\nabla} P_0)\,.\underline{\xi}\,\underline{\underline{1}} - P_0\left(div\underline{\xi}\right)\underline{\underline{1}} - P_0\left(\underline{\underline{\nabla}}\underline{\xi}\right)^T\right].\underline{n_0} \tag{2.19}$$

Où $\underline{dA}^{\underline{X}}$ correspond à un élément de surface orienté dans la configuration de référence de la structure et $\underline{n_0}$ est un vecteur normal de la surface dans la configuration de référence.

On projette ensuite cet effort sur le déplacement en faisant l'hypothèse d'une dynamique simple décrite par une seule fonction du temps :

$$\underline{\xi}\,(\underline{X}, t) = q(t)\underline{\phi}(\underline{X}) \tag{2.20}$$

La projection des efforts exercés par le fluide à l'interface sur le déplacement $\underline{\phi}(\underline{X})$ vaut :

$$F_{FS} = \int_{\partial\Omega_{FS}} \underline{\phi}.\underline{dF} = F^0_{FS} + \lambda f_{FS} \tag{2.21}$$

Nous nous intéressons aux fluctuations de cet effort lors de la mise en mouvement de la structure, soit :

$$f_{FS} = \mathcal{M}\int_{\partial\Omega_{FS}} \underline{\phi}.\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}dA - q(t)\mathcal{M}\int_{\partial\Omega_{FS}} \left\{(\underline{\phi}.\underline{n})(\underline{\nabla} P_0.\underline{\phi}) + P_0\left[(div\underline{\phi})(\underline{\phi}.\underline{n}) - \underline{n}.(\underline{\underline{\nabla}}\underline{\phi})\underline{\phi}\right]\right\} dA \tag{2.22}$$

Le deuxième terme de l'expression est proportionnel au déplacement de la structure et peut être interprêté comme une raideur. Elle se décompose en :
- Une raideur de gradient : $k^G_A = \mathcal{M}\int_{\partial\Omega_{FS}}(\underline{\phi}.\underline{n})(\underline{\nabla} P_0.\underline{\phi})dA$,
- Une raideur de forme : $k^F_A = \mathcal{M}\int_{\partial\Omega_{FS}}\left[(div\underline{\phi})(\underline{\phi}.\underline{n}) - \underline{n}.(\underline{\underline{\nabla}}\underline{\phi})\underline{\phi}\right] dA$

Nous ne nous intéresserons pas aux détails de ces raideurs qui ne correspondent pas au domaine de notre étude. Nous nous focalisons donc sur l'évaluation de l'effort infinitésimal variationnel d'interaction entre le fluide et la structure f_{FS} et notamment sur sa dépendance en $\ddot{q}(t)$ qui est intégrée dans le premier terme. Celle-ci étant difficile à établir dans le cas général, nous restreignons notre étude aux conditions de validité de la théorie des masses ajoutées.

2.2.4 Masse ajoutée :

Nous nous plaçons maintenant dans la cadre de la théorie des *Masses Ajoutées*. Celle-ci repose sur une hypothèse de petits déplacements où le mouvement du solide se fait à une échelle de temps courte devant le temps de diffusion et devant le temps de passage des ondes de gravité à la surface du fluide soit :

$$S_T >> 1, \quad F_D >> 1. \tag{2.23}$$

Par ailleurs, afin de simpliflier les calculs, nous négligeons la pression initiale du fluide $P_0 = 0$. Les effets de cette 'précharge' n'ont pas d'influence sur le calcul des masses ajoutées.

Les équations du fluide s'écrivent donc :

$$\begin{cases} div\underline{u} = 0 \\ \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\underline{\nabla} p \end{cases} \tag{2.24}$$

Et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \underline{u}.\underline{n} = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t}.\underline{n} \\ \\ \mathcal{M} p \underline{n} = -\underline{T} \end{cases} \tag{2.25}$$

On suppose un mouvement de corps rigide du râtelier. Celui-ci est défini par un seul paramètre $q(t)$ et une fonction de forme $\underline{\phi}(\underline{X})$. Cette fonction de forme décrit entièrement le mouvement aux interfaces fluide-structure.

$$\underline{\xi}(\underline{X}, t) = q(t)\underline{\phi}(\underline{X}) \tag{2.26}$$

$q(t)$ est le paramètre de chargement du système. A l'aide de la forme des conditions cinématiques et de la linéarité des équations, on peut exprimer le champs de vitesse et la pression du fluide à l'aide de ce paramètre. Ainsi :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \dot{q}(t)\underline{\phi}_u(\underline{x}), \tag{2.27}$$

$$p(\underline{x}, t) = \ddot{q}(t)\phi_p(\underline{x}). \tag{2.28}$$

Les équations régissant le comportement du fluide se réduisent à :

$$div\underline{\phi_u} = 0 \tag{2.29}$$

$$\underline{\phi_u} = -\underline{\nabla}\phi_p \tag{2.30}$$

A l'interface,

$$\underline{\phi_u}.\underline{n} = \underline{\phi}.\underline{n} \tag{2.31}$$

En éliminant $\underline{\phi_u}$, on se ramène à un problème de Laplace sur ϕ_p :

$$\Delta\phi_p = 0 \tag{2.32}$$

Avec les conditions d'interface :

$$-\underline{\nabla}\phi_p.\underline{n} = \underline{\phi}.\underline{n} \tag{2.33}$$

En posant f_{FS} la projection sur $\underline{\phi}$ des efforts exercés par le fluide sur l'interface, on trouve :

$$f_{FS} = \int_{\partial\Omega_{FS}} \mathcal{M}\left(-p\underline{n}\right).\underline{\phi}dA \tag{2.34}$$

Soit en utilisant l'expression de la pression :

$$f_{FS} = -\ddot{q}\left[\int_{\partial\Omega_{FS}} \mathcal{M}\phi_p\underline{n}.\underline{\phi}dA\right] = -m_A\ddot{q} \tag{2.35}$$

On introduit ainsi la masse ajoutée adimensionnelle m_A. Elle modifie l'équation d'équilibre adimensionnelle en présence de fluide de la manière suivante :

$$\left(1 + m_A\right)\ddot{q} + q = 0 \tag{2.36}$$

2.2.5 Méthode de calcul :

Dans cette thèse, nous utiliserons une propriété particulière de la masse ajoutée liée à l'expression de l'énergie cinétique du fluide. En effet, à l'instant t, l'énergie cinétique du fluide s'écrit :

$$E_c = \int_{\Omega_F} \frac{1}{2}\mathcal{M}\|\underline{u}\|^2 d\Omega = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \int_{\Omega_F} \mathcal{M}\|\underline{\phi_u}\|^2 d\Omega \tag{2.37}$$

Or :

$$\|\underline{\phi_u}\|^2 = \|\underline{\nabla}\phi_p\|^2 = div\left(\phi_p\underline{\nabla}\phi_p\right) - \phi_p\Delta\phi_p \tag{2.38}$$

Le dernier terme est nul et l'on peut écrire :

$$\int_{\Omega_F} \|\underline{\phi_u}\|^2 d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \phi_p\underline{\nabla}\phi_p.\left(-\underline{n}\right)dA \tag{2.39}$$

En utilisant les conditions d'interface fluide-structure et en supposant que les autres interfaces du fluide sont soit immobiles ($\underline{\nabla}\phi_p = \underline{0}$), soit libres ($\phi_p = 0$), on trouve :

$$\int_{\Omega_F} \|\underline{\phi_u}\|^2 d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \phi_p\underline{\phi}.\underline{n}dA \tag{2.40}$$

L'énergie cinétique s'exprime donc en fonction de la masse ajoutée :

$$E_c = \int_{\Omega_F} \frac{1}{2}\mathcal{M}\|\underline{u}\|^2 d\Omega = \frac{1}{2}m_A\dot{q}^2 \tag{2.41}$$

La masse ajoutée m_A s'identifie donc comme le coefficient inertiel qui permet d'exprimer l'énergie cinétique du fluide en fonction de la variable qui définit la vitesse du solide $\dot{q}$. Nous utiliserons cette formulation de la masse ajoutée dans les théories que nous développerons dans les parties 2.5 et 2.6.

2.3 Etude d'un modèle classique de couplage fluide-structure : Couplage entre tubes infinis concentriques - Méthode de Fritz :

2.3.1 Description géométrique :

L'article [1] est l'un des premiers à poser les bases de la théorie du calcul des masses ajoutées. Nous présenterons rapidement les résultats de cet article fondateur. Le système étudié est composé de deux cylindres infinis concentriques séparés par une lame d'eau annulaire. On note, a, le rayon du cylindre interne, et b, le rayon du cylindre externe.

Ce modèle est aussi valable pour des cylindres de dimensions finies. En notant L la longueur sur laquelle les deux cylindres sont en vis-à-vis, les hypothèses de Fritz se vérifient assez bien si on suppose $L >> b$.

2.3.1.1 Notations :

Le cylindre interne a une vitesse $\underline{V_1} = \dot{x_1}\underline{u_x}$. Le cylindre externe a une vitesse $\underline{V_2} = \dot{x_2}\underline{u_x}$. On suppose que la géométrie ne change pas, c'est-à-dire que le déplacement relatif $x_2 - x_1$ est petit par rapport à la distance annulaire $b - a$. On définie un potentiel $\phi(r, \theta)$ pour calculer la vitesse :

$$V_r(r,\theta) = -\frac{\partial \phi}{\partial r}(r,\theta)\,; \quad V_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r,\theta) \quad r \in [a,b] \tag{2.42}$$

Où V_r est la vitesse radiale du fluide et V_θ la vitesse tangentielle du fluide.

2.3.2 Mise en équation du système :

On suppose que le liquide est un fluide parfait incompressible. Les parois des cylindres sont supposées parfaitement étanches. Ainsi les conditions aux limites s'écrivent :

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r}(a,\theta) = \dot{x_1}\cos\theta \tag{2.43}$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r}(b,\theta) = \dot{x_2}\cos\theta \tag{2.44}$$

Et l'incompressiblité s'exprime :

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{2.45}$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, la solution est recherchée sous la forme :

$$\phi(r,\theta) = f(r)\cos\theta \tag{2.46}$$

On déduit de (2.45) et (2.46) :

$$r^2 f'' + r f' - f = 0 \tag{2.47}$$

2.3.3 Solutions du modèle de Fritz :

Les conditions aux limites permettent de déterminer les vitesses solutions de cette équation différentielle :

$$V_r = \left(\frac{B}{r^2} - A\right)\cos\theta \tag{2.48}$$

$$V_\theta = \left(\frac{B}{r^2} + A\right)\sin\theta \tag{2.49}$$

Avec :

$$B = \frac{b^2a^2}{b^2 - a^2}(\dot{x_1} - \dot{x_2}) \tag{2.50}$$

$$A = \frac{\dot{x_1}a^2 - \dot{x_2}b^2}{b^2 - a^2} \tag{2.51}$$

La vitesse en chaque point du fluide étant déterminé par un nombre restreint de paramètres (x_1, x_2), on peut utiliser les équations de Lagrange pour déterminer les équations du système. Le fluide étant supposé parfait et l'écoulement irrotationnel, le fluide ne possède pas d'énergie potentielle, ni de forces dissipatives, seulement une énergie cinétique. La force appliquée par le fluide en réaction à une variation du paramètre x_i est donnée par :

$$F_i = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x_i}} \tag{2.52}$$

Où T est l'énergie cinétique du fluide définie pour une longueur de cylindre L par :

$$T = \frac{1}{2}\rho L \int_a^b \int_0^{2\pi} r(V_r^2 + V_\theta^2) dr d\theta \tag{2.53}$$

On en déduit l'expression de l'effort excercé par le fluide en réponse au mouvement du cylindre intérieur x_1 ou extérieur x_2.

$$F_1 = -M_H\ddot{x_1} + (M_1 + M_H)\ddot{x_2} \tag{2.54}$$

$$F_2 = (M_1 + M_H)\ddot{x_1} - (M_1 + M_2 + M_H)\ddot{x_2} \tag{2.55}$$

Où F_1 et F_2 sont respectivement les efforts excercés par le fluide sur le cylindre intérieur et extérieur. Les masses ajoutées introduites sont définies par :
- $M_1 = \pi a^2 L\rho$: masse d'eau déplacée par le cylindre intérieur,
- $M_2 = \pi b^2 L\rho$: masse d'eau contenue par le cylindre extérieur,
- $M_H = M_1\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}$: masse de couplage hydrodynamique.

Les masses M_1 et M_2 correspondent à des volumes d'eau respectivement déplacé et contenu dans les cylindres. Elles ont une influence sur leurs cylindres respectifs similaires à la poussée d'Archimède. Ce point sera détaillé dans le paragraphe §2.4.

La masse hydrodynamique M_H correspond à la masse couplant réellement les mouvements entre les deux cylindres. Elle lie de manière inertielle chacun des déplacements initiallement indépendants.

2.4 Changement de référentiel et poussée d'Archimède généralisée

Nous avons vu dans les parties précédentes que le couplage fluide-structure de type masse ajoutée entre deux structures peut s'exprimer sous la forme d'une matrice de masse de couplage fluide-structure. Prenons l'exemple de deux structures A et B. On peut ainsi déterminer les efforts appliqués par l'interaction fluide-structure sur chacune des structures immergées :

$$\begin{pmatrix} \underline{F}_{IFS\to A} \\ \underline{F}_{IFS\to B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M_A}} & \underline{\underline{M_{AB}}} \\ \underline{\underline{M_{AB}}}^T & \underline{\underline{M_B}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \underline{\ddot{U}}_A \\ \underline{\ddot{U}}_B \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

Nous verrons dans la suite de ce chapitre que les matrices $\underline{\underline{M_A}}$ et $\underline{\underline{M_B}}$ et $\underline{\underline{M_{AB}}}$ servent à calculer les matrices $\underline{\underline{M_A^1}}$ et $\underline{\underline{M_B^1}}$ qui sont les matrices de masses d'eau déplacées utilisées dans le calcul de la poussée d'Archimède généralisée. Elles sont diagonales lorsque la répartition de masse de la structure est uniforme et que les axes principaux de la structure sont alignés avec ceux du repère.

Afin de comprendre le principe de la poussée d'Archimède généralisée, nous limiterons notre étude à la direction $\underline{e_x}$ du système. On obtient donc un système simplifié (les indices x ne sont pas utilisés pour un soucis de clarté) :

$$\begin{pmatrix} F_{IFS\to A} \\ F_{IFS\to B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_A & M_{AB} \\ M_{AB} & M_B \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \ddot{U}_A \\ \ddot{U}_B \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

2.4.1 Equations d'équilibre du système dans un référentiel Galiléen :

Plaçons-nous dans un référentiel Galiléen. Le système est composé de deux structures A et B soumises à certaines forces extérieures $\underline{F}_{ext}^T = (F_{ext\to A}, F_{ext\to B})$ en plus du couplage fluide-structure $\underline{F}_{IFS}$. Dans le cas général, les structures ne sont pas indépendantes et on peut écrire l'équation générale d'équilibre en référentiel galiléen (pour rappel on se limite ici à l'étude du comportement suivant la direction $\underline{e_x}$:

$$\underline{\underline{M}}.\underline{\ddot{U}} + \underline{\underline{C}}.\underline{\dot{U}} + \underline{\underline{K}}.\underline{U} = \underline{F_{ext}} + \underline{F_{IFS}} \tag{2.58}$$

En détaillant l'expression du couplage fluide-structure, cette équation se réécrie :

$$\underline{\underline{M}}.\underline{\ddot{U}} + \underline{\underline{C}}.\underline{\dot{U}} + \underline{\underline{K}}.\underline{U} = \underline{F_{ext}} + \begin{pmatrix} M_A & M_{AB} \\ M_{AB} & M_B \end{pmatrix} .\underline{\ddot{U}} \tag{2.59}$$

2.4.2 Equations d'équilibre du système dans un référentiel non-Galiléen :

Nous nous plaçons maintenant dans un référentiel non-Galiléen. On suppose que celui-ci a un déplacement $U_s(t)$ par rapport à un référentiel Galiléen. On définit $\underline{U_g}$ le vecteur déplacement des deux structures dans le référentiel Galiléen et $\underline{U_{ng}}$ le vecteur déplacement des deux structures dans le référentiel non-Galiléen. Ils sont reliés par :

$$\underline{U_{ng}} = \underline{U_g} + \begin{pmatrix} U_s(t) \\ U_s(t) \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

On a vu dans le paragraphe précédent l'équation d'équilibre dans un référentiel Galiléen (2.59). On peut ainsi écrire l'équation d'équilibre dans un référentiel quelconque :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}.\left[\ddot{\underline{U_{ng}}} - \begin{pmatrix} \ddot{U}_s(t) \\ \ddot{U}_s(t) \end{pmatrix}\right] + \underline{\underline{C}}.\left[\dot{\underline{U_{ng}}} - \begin{pmatrix} \dot{U}_s(t) \\ \dot{U}_s(t) \end{pmatrix}\right] + \underline{\underline{K}}.\left[\underline{U_{ng}} - \begin{pmatrix} U_s(t) \\ U_s(t) \end{pmatrix}\right] = \\ \underline{F_{ext}} + \begin{pmatrix} M_A & M_{AB} \\ M_{AB} & M_B \end{pmatrix}.\left[\ddot{\underline{U_{ng}}} - \begin{pmatrix} \ddot{U}_s(t) \\ \ddot{U}_s(t) \end{pmatrix}\right] \end{aligned} \tag{2.61}$$

On voit ainsi apparaître 4 nouveaux termes :

- $\underline{\underline{M}}.\begin{pmatrix} \ddot{U}_s(t) \\ \ddot{U}_s(t) \end{pmatrix}$: correspond à l'accélération d'entraînement classique. Elle est habituellement utilisée pour modéliser les chargements sismiques,
- $\underline{\underline{C}}.\begin{pmatrix} \dot{U}_s(t) \\ \dot{U}_s(t) \end{pmatrix}$: correspond à une force d'amortissement d'entraînement. Celle-ci est identiquement nulle si la matrice d'amortissement est uniquement obtenue à l'aide d'amortisseurs réels (dont les extrémités subissent la même vitesse de déplacement du référentiel non-Galiléen et donc ne crée aucun effort supplémentaire),
- $\underline{\underline{K}}.\begin{pmatrix} U_s(t) \\ U_s(t) \end{pmatrix}$: correspond à une force de raideur d'entraînement. Celle-ci est identiquement nulle si la matrice de raideur est uniquement obtenue à l'aide de ressorts réels (dont les extrémités subissent le même déplacement du référentiel non-Galiléen et donc ne crée aucun effort supplémentaire),
- $\begin{pmatrix} M_A & M_{AB} \\ M_{AB} & M_B \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \ddot{U}_s(t) \\ \ddot{U}_s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_A^1 \ddot{U}_s(t) \\ M_B^1 \ddot{U}_s(t) \end{pmatrix}$: correspond à la poussée d'Archimède. Elle est appliquée sur chaque structure en considérant une masse d'eau déplacée $M_A^1 = M_A - M_{AB}$ pour la structure A et $M_B^1 = M_B - M_{AB}$ pour la structure B. On utilise habituellement l'exposant 1 pour définir cette masse d'eau déplacée.

En considérant une structure simple (composée de raideurs et amortissements réels), on peut écrire l'équation d'équilibre dans un référentiel quelconque :

$$\underline{\underline{M}}.\ddot{\underline{U_{ng}}} + \underline{\underline{C}}.\dot{\underline{U_{ng}}} + \underline{\underline{K}}.\underline{U_{ng}} = \underline{F_{ext}} - \left[\underline{\underline{M}} - \begin{pmatrix} M_A^1 & 0 \\ 0 & M_B^1 \end{pmatrix}\right].\ddot{\underline{U_s}} + \begin{pmatrix} M_A & M_{AB} \\ M_{AB} & M_B \end{pmatrix}.\ddot{\underline{U_{ng}}} \tag{2.62}$$

Cette définition de la poussée d'Archimède a été effectuée en considérant un référentiel non-Galiléen quelconque ayant une unique direction de déplacement. Cette direction étant

quelconque, on peut définir une poussée d'Archimède généralisée correspondant aux trois directions de déplacements possibles en translation.

2.4.3 Généralisation à 3 dimensions :

Nous nous intéressons dans cette thèse au comportement dynamique d'une structure immergée soumise à un séisme quelconque. Sous ces hypothèses, on suppose que le centre de gravité de la Terre est le centre d'un référentiel Galiléen. Le référentiel local (correspondant par exemple au plancher sur lequel repose notre structure, au fond de mer sur lequel vient s'ancrer notre pile de pont ou bien le corps du patient sur lequel nous analysons le comportement individuel d'un organe) est supposé non-Galiléen.

Les mouvements de translation du référentiel local par rapport au référentiel Galiléen sont notés :

$$\underline{U_g}(t) = \begin{pmatrix} U_{gx}(t) \\ U_{gy}(t) \\ U_{gz}(t) \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

On suppose ici qu'il n'y a que des mouvements de translation entre les deux référentiels. Nous présenterons rapidement une extension du modèle aux cas où les dimensions des surfaces de support des structures considérées sont non négligeables et entraînent des déplacements différenciels entre supports. Ceux-ci pourront être modélisés par une rotation d'entraîntement supplémentaire qui compléxifie très sensiblement les équations d'équilibre en référentiel non-Galiléen.

On cherche à déterminer l'équation d'équilibre dans le référentiel local (non-Galiléen) soumis au chargement sismique défini précédemment. En utilisant une méthode similaire à celle présentée dans le cas unidirectionnel, on exprime l'équilibre dans le référentiel absolu Galiléen et on transpose le système de coordonnées vers le référentiel local.

On utilisera les notations suivantes :

- $\underline{U} = (U_{Ax}U_{Ay}U_{Az}U_{Bx}U_{By}U_{Bz})^T$: est le vecteur regroupant les déplacements tridimensionnels des deux structures dans le référentiel local non-Galiléen,
- $\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M_{mA}}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M_{mB}}} \end{pmatrix}$: est la matrice de masse du système,
- $\underline{\underline{C}}$: est la matrice d'amortissement du système,
- $\underline{\underline{K}}$: est la matrice de raideur du système,
- $\underline{\underline{M_{IFS}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M_A}} & \underline{\underline{M_{AB}}} \\ \underline{\underline{M_{AB}}}^T & \underline{\underline{M_B}} \end{pmatrix}$: est la matrice de masse de couplage fluide-structure, avec :
  $\underline{\underline{M_A}} = \begin{pmatrix} M^A_{xx} & M^A_{xy} & M^A_{xz} \\ M^A_{yx} & M^A_{yy} & M^A_{yz} \\ M^A_{zx} & M^A_{zy} & M^A_{zz} \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{M_B}} = \begin{pmatrix} M^B_{xx} & M^B_{xy} & M^B_{xz} \\ M^B_{yx} & M^B_{yy} & M^B_{yz} \\ M^B_{zx} & M^B_{zy} & M^B_{zz} \end{pmatrix}$ et $\underline{\underline{M_{AB}}} = \begin{pmatrix} M^{AB}_{xx} & M^{AB}_{xy} & M^{AB}_{xz} \\ M^{AB}_{yx} & M^{AB}_{yy} & M^{AB}_{yz} \\ M^{AB}_{zx} & M^{AB}_{zy} & M^{AB}_{zz} \end{pmatrix}$,
- $\underline{F_{ext}} = \left(F_x^{ext\to A} F_y^{ext\to A} F_z^{ext\to A} F_x^{ext\to B} F_y^{ext\to B} F_z^{ext\to B}\right)^T$: est le vecteur des chargements extérieurs (autres que le couplage fluide-structure et le chargement sismique),
- $\underline{U_g} = (U_{gx}U_{gy}U_{gz}U_{gx}U_{gy}U_{gz})^T$: est une extension de la notation du déplacement du sol.

A l'aide de ces notations et en utilisant des hypothèses similaires à celles du paragraphe précédent, on est capable d'écrire l'équation d'équilibre en référentiel non-Galiléen :

$$\left(\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M_{IFS}}}\right).\underline{\ddot{U}} + \underline{\underline{C}}.\underline{\dot{U}} + \underline{\underline{K}}.\underline{U} = \underline{F_{ext}} - \left(\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{M_1}}\right).\underline{\ddot{U}_g} \tag{2.64}$$

Lorsque la masse de couplage fluide-structure varie au cours du temps, une matrice d'amortissement liée à l'interaction fluide-structure apparaît. Nous présenterons la méthode d'obtention de cette matrice dans le chapitre 3 détaillant l'utilisation des masses ajoutées dans l'étude du comportement vibratoire non-linéaire d'une structure immergée. Cela ne modifie pas les conclusions qui pourront être apportées dans ce chapitre.

On introduit une matrice de masse d'eau déplacée $\underline{\underline{M_1}}$ intervenant dans la poussée d'Archimède généralisée. Elle s'obtient à partir de la matrice de masse de couplage fluide-structure :

$$\underline{\underline{M_1}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M_1^A}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M_1^B}} \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

Les matrices $\underline{\underline{M_1^A}}$ et $\underline{\underline{M_1^B}}$ sont définies par (en utilisant les définitions de $\underline{\underline{M_{IFS}}}$) :

$$\underline{\underline{M_1^A}} = \underline{\underline{M_A}} + \underline{\underline{M_{AB}}}, \tag{2.66}$$

$$\underline{\underline{M_1^B}} = \underline{\underline{M_B}} + \underline{\underline{M_{AB}}}^T, \tag{2.67}$$

Remarques :
- *Dans des configurations géométriques simples, la matrice $\underline{\underline{M_1}}$ est diagonale.*
- *Lorsque la répartition de masse de la structure est uniforme, la matrice $\underline{\underline{M_1}}$ est proportionnelle à la matrice de masse de la structure $\underline{\underline{M}}$. On voit ainsi apparaître une masse réduite de la structure appliquée au chargement sismique.*
- *Lorsque la répartition de masse n'est pas uniforme, le centre de poussée de l'eau déplacée n'est pas situé au même endroit que le centre de gravité de la structure. Cela entraînera des rotations et la matrice $\underline{\underline{M_1}}$ n'est plus obligatoirement diagonale.*

Dans notre modélisation, nous considérerons que les rotations obtenues (dans le cas où le centre de masse de l'eau déplacée et le centre de gravité de la structure ne sont pas confondus) sont négligeables. Par contre, nous n'imposons pas de condition sur la forme de la matrice $\underline{\underline{M_1}}$. Cela pourra d'ailleurs changer la base de modes propres considérée pour le calcul du comportement dynamique non linéaire de la structure immergée.

2.4.4 Généralisation pour un système à N structures :

Nous avons vu dans le paragraphe §2.4.3 comment s'applique la poussée d'Archimède généralisée sur un système à 2 DDLs. Considérons maintenant un système complèxe à N DDLs. La démarche précédente est applicable pour déterminer les équations d'équilibre simplifiées dans un référentiel non-Galiléen qui correspond au cas d'une structure soumise à un séisme.

Nous utilisons les notations :

- $\underline{U} = (U_{1x}U_{1y}U_{1z}U_{2x}U_{2y}U_{2z}\dots U_{Nx}U_{Ny}U_{Nz})^T$: est le vecteur de dimension 3N recensant les déplacements tridimensionnels des N structures dans le référentiel local non-Galiléen,
- $\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M_{m1}}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M_{m2}}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \ddots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M_{mN}}} \end{pmatrix}$: est la matrice de masse du système (dimension $3N \times 3N$),
- $\underline{\underline{C}}$: est la matrice d'amortissement du système (dimension $3N \times 3N$),
- $\underline{\underline{K}}$: est la matrice de raideur du système (dimension $3N \times 3N$),
- $\underline{\underline{M_{IFS}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M_{11}^{IFS}}} & \underline{\underline{M_{12}^{IFS}}} & \dots & \underline{\underline{M_{1N}^{IFS}}} \\ \underline{\underline{M_{12}^{IFS^T}}} & \underline{\underline{M_{22}^{IFS}}} & \dots & \underline{\underline{M_{2N}^{IFS}}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{M_{1N}^{IFS^T}}} & \underline{\underline{M_{2N}^{IFS^T}}} & \dots & \underline{\underline{M_{NN}^{IFS}}} \end{pmatrix}$: est la matrice de masse de couplage fluide-structure, avec : $\underline{\underline{M_{ij}^{IFS}}} = \begin{pmatrix} M_{xx}^{ij} & M_{xy}^{ij} & M_{xz}^{ij} \\ M_{yx}^{ij} & M_{yy}^{ij} & M_{yz}^{ij} \\ M_{zx}^{ij} & M_{zy}^{ij} & M_{zz}^{ij} \end{pmatrix}$,
- $\underline{F_{ext}} = \left(F_x^{ext\to1}F_y^{ext\to1}F_z^{ext\to1}F_x^{ext\to2}F_y^{ext\to2}F_z^{ext\to2}\dots F_x^{ext\to N}F_y^{ext\to N}F_z^{ext\to N}\right)^T$: est le vecteur des chargements extérieurs (autres que le couplage fluide-structure et le chargement sismique) (dimension $3N$),
- $\underline{U_g} = (U_{gx}U_{gy}U_{gz}U_{gx}U_{gy}U_{gz}\dots U_{gx}U_{gy}U_{gz})^T$: est une extension de la notation du déplacement du sol (dimension $3N$).

A l'aide de ces notations et en utilisant des hypothèses similaires à celles du paragraphe précédent, on est capable d'écrire l'équation d'équilibre en référentiel non-Galiléen :

$$\left(\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M_{IFS}}}\right).\ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{C}}.\dot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}}.\underline{U} = \underline{F_{ext}} - \left(\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{M_1}}\right).\ddot{\underline{U}_g} \tag{2.68}$$

Pour les systèmes à N DDLs, lorsque la masse de couplage fluide-structure varie au cours du temps, une matrice d'amortissement liée à l'interaction fluide-structure apparaît.

On introduit une matrice de masse d'eau déplacée $\underline{\underline{M_1}}$ (de dimension 3N $\times$ 3N) intervenant dans la poussée d'Archimède généralisée. Elle s'obtient à partir de la matrice de masse de couplage fluide-structure :

$$\underline{\underline{M_1}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M_1^1}} & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M_1^2}} & \underline{\underline{0}} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M_1^N}} \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

Les matrices $\left(\underline{\underline{M_1^i}}\right)_{i\in[1,N]}$ sont définies par (en utilisant les définitions de $\underline{\underline{M_{IFS}}}$) :

$$\underline{\underline{M_1^i}} = \sum_{j=1}^{N} \underline{\underline{M_{ij}}}, \tag{2.70}$$

Les remarques faites dans le paragraphe précédent sont toujours valables.

2.4.5 Généralisation au système continu :

Dans l'étude dynamique du système couplé fluide-structure, nous utiliserons des fonctions continues pour décrire les déplacements de la structure. Il est donc nécessaire d'introduire une extension de la définition de la poussée d'Archimède généralisée à un modèle continu.

Cette définition continue nécessite l'utilisation de matrices de couplage fluide-structure continue. Celles-ci peuvent être déterminées analytiquement ou à partir d'un prolongement continu de fonctions discrètes. Nous utiliserons ici uniquement les résultats de cette démarche sous la forme d'une matrice de masse de couplage fluide-structure dépendant de la position $\underline{x}$, $\underline{\underline{M_{IFS}}}(\underline{x})$.

On utilisera les notations suivantes :

- $\underline{U(\underline{x})} = (U_x(\underline{x})U_y(\underline{x})U_z(\underline{x}))^T$: est le vecteur recençant les fonctions de déplacements tridimensionnels dans le référentiel local non-Galiléen,
- $\underline{\underline{M}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M_{xx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M_{xy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M_{xz}}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{M_{yx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M_{yy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M_{yz}}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{M_{zx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M_{zy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M_{zz}}}(\underline{x}) \end{pmatrix}$: est la définition continue de la matrice de masse du système,
- $\underline{\underline{C}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C_{xx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{C_{xy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{C_{xz}}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{C_{yx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{C_{yy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{C_{yz}}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{C_{zx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{C_{zy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{C_{zz}}}(\underline{x}) \end{pmatrix}$: est la définition continue de la matrice d'amortissement du système,
- $\underline{\underline{K}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{K_{xx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{K_{xy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{K_{xz}}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{K_{yx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{K_{yy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{K_{yz}}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{K_{zx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{K_{zy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{K_{zz}}}(\underline{x}) \end{pmatrix}$: est la définition continue de la matrice de raideur du système,
- $\underline{\underline{M_{IFS}}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} M_{xx}^H(\underline{x}) & M_{xy}^H(\underline{x}) & M_{xz}^H(\underline{x}) \\ M_{yx}^H(\underline{x}) & M_{yy}^H(\underline{x}) & M_{yz}^H(\underline{x}) \\ M_{zx}^H(\underline{x}) & M_{zy}^H(\underline{x}) & M_{zz}^H(\underline{x}) \end{pmatrix}$,
- $\underline{F_{ext}}(\underline{x}) = \left(F_x^{ext}(\underline{x})F_y^{ext}(\underline{x})F_z^{ext}(\underline{x})\right)^T$: est le vecteur des fonctions de chargements extérieurs (autres que le couplage fluide-structure et le chargement sismique),
- $\underline{U_g(\underline{x})} = (U_{gx}(\underline{x})U_{gy}(\underline{x})U_{gz}(\underline{x}))^T$: est une extension de la notation du déplacement du sol. Avec les hypothèses retenues, il faut noter que chacune des fonctions U_{gx}, U_{gy} et U_{gz} ne dépendent pas de la position et sont donc des fonctions constantes (ces fonctions peuvent évoluer avec le temps).

A l'aide de ces notations et en utilisant des hypothèses similaires à celles du paragraphe précédent, on est capable d'écrire l'équation d'équilibre en référentiel non-Galiléen :

$$\left[\underline{\underline{M}}(\underline{x}) + \underline{\underline{M_{IFS}}}(\underline{x})\right].\ddot{\underline{U}}(\underline{x}) + \underline{\underline{C}}(\underline{x}).\dot{\underline{U}}(\underline{x}) + \underline{\underline{K}}(\underline{x}).\underline{U}(\underline{x}) = \underline{F_{ext}}(\underline{x}) - \left[\underline{\underline{M}}(\underline{x}) - \underline{\underline{M_1}}(\underline{x})\right].\ddot{\underline{U}_g}(\underline{x}) \tag{2.71}$$

Dans une modélisation continue, lorsque la masse de couplage fluide-structure varie au cours du temps, une matrice de fonctions d'amortissement liée à l'interaction fluide-structure apparaît.

On introduit une matrice de fonctions de masse d'eau déplacée $\underline{\underline{M_1}}(\underline{x})$ (de dimension 3×3) intervenant dans la poussée d'Archimède généralisée. Elle s'obtient à partir de la matrice de fonctions de masse de couplage fluide-structure :

$$\underline{\underline{M_1}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M^1_{xx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M^1_{xy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M^1_{xz}}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{M^1_{yx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M^1_{yy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M^1_{yz}}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{M^1_{zx}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M^1_{zy}}}(\underline{x}) & \underline{\underline{M^1_{zz}}}(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{2.72}$$

Remarques : *Les fonctions de la matrice n'ont pas de propriétés particulières à ce stade. On se servira du fait que les déplacements du sol sont projetés uniformément sur la structure pour simplifier les composantes projetées sur chacun des modes propres. Il est important de voir que les fonctions de masses de couplage fluide-structure peuvent ne pas suivre les répartitions de masse de la structure. On peut ainsi obtenir des résultats contre-intuitifs dans certains cas. Par exemple, si la matrice de masses de couplage $\underline{\underline{M_1}}(\underline{x})$ est antisymétrique par rapport au centre de gravité de la structure, les modes propres antisymétriques de la structure seront sollicités (grâce à la projection de la matrice de masse de couplage fluide-structure sur les modes) au même titre que ceux symétriques (qui seront sollicités par la matrice de masse de la structure).*

Ce dernier résultat est particulièrement intéressant dans le cas où l'espace de définition des positions initiales est discontinu (ce qui correspond au cas de plusieurs structures déformables intéragissant entre elles). Cela est dû au fait que les modes propres des structures indépendantes sont définis sur chaque structure individuelle et la matrice de couplage fluide-structure est le seul élément créant un lien entre les structures. La matrice de fonctions de masse de couplage fluide-structure $\underline{\underline{M_{IFS}}}(\underline{x})$ permet de déterminer des modes propres couplant le comportement de chaque structure individuelle. La matrice de fonctions de masse d'eau déplacée $\underline{\underline{M_1}}(\underline{x})$ permet de projeter la sollicitation sismique sur ces nouveaux modes globaux en prenant en compte une sollicitation d'ensemble et non la somme de chaque sollicitation sur des modules individuels.

Un autre modèle possible dans le cas de plusieurs structures continues déformables intéragissant les unes sur les autres consiste à coupler le modèle à N DDLs présenté dans le paragraphe précédent avec la modélisation continue. Pour cela, on remplace chacune des composantes des matrices par des fonctions continues. Les N DDLs correspondent ici à N structures initiallement indépendantes couplées entre elles par des masses de couplage

fluide-structure. Ce dernier modèle sera détaillé dans la partie §2.6. *On proposera notamment des solutions analytiques pour les couplages au sein d'un quadrillage de structures déformables élancées de section carrée.*

2.5 Solutions analytiques du couplage entre deux parallélépipèdes :

On s'intéresse ici aux solutions analytiques de couplage fluide-structure entre deux paralallélépides rectangles. L'un étant contenu dans le deuxième. Il s'agit d'un modèle simplifié d'une piscine considérée comme fixe contenant une structure mobile. La structure mobile est supposée avoir les directions principales de sa section alignées avec celles de la section de la piscine. Le cas général considéré est représenté dans le schéma ci-dessous :

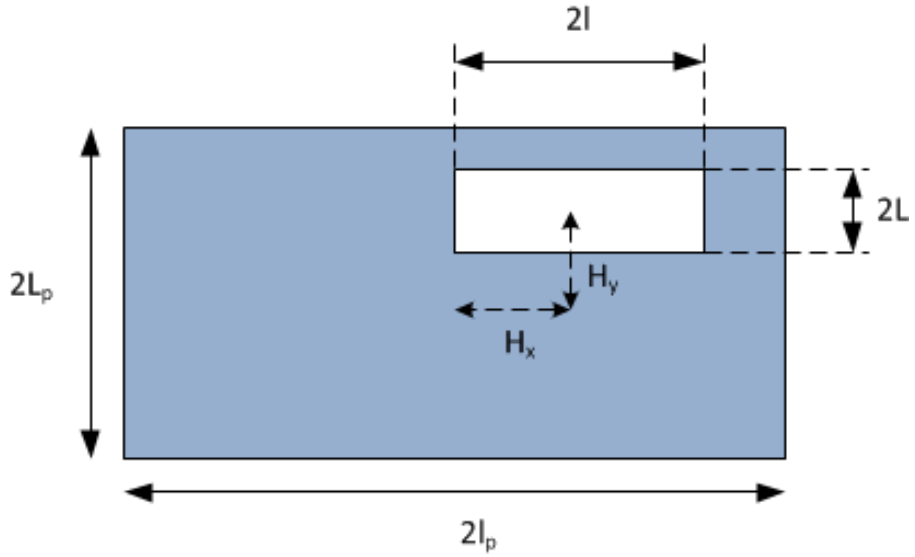


FIGURE 2.1 – Configuration générale étudiée

2.5.1 Etat de l'art :

Les articles de référence sur ce sujet ont été rédigés par J. Stabel et M. Rem dans [2] et [3]. Ils traitent des écoulements 2D et 3D autour d'un parallélépipéde rectangle immergé en considérant différentes positions initiales. Ce modèle permet d'approcher le calcul des masses ajoutées du couplage fluide-structure dans des cas de fort confinement. Ils considérent un écoulement constant dans l'épaisseur des lames d'eau et variant linéairement le long des parois de la structure mobile. Cette variation linéaire est du :

- Au déplacement de la structure qui, par conservation de la masse, entraîne une variation linéaire de l'écoulement moyen,
- A un écoulement vertical arbitraire uniforme sur l'ensemble de la structure qui lui aussi fait varier linéairement la vitesse d'écoulement moyenne dans l'épaisseur d'une lame d'eau. Ce résultat est obtenu à l'aide de l'équation de conservation de la masse avec une perte de masse constante sur l'ensemble des lames d'eau.

Dans le cas d'un écoulement plan autour d'une structure à section carrée, ils obtiennent les expressions analytiques des masses de couplage :

$$M_x x = \frac{\rho c^3 L}{2h}\left[\frac{1}{3\left(1-\epsilon_1^2\right)}+\frac{1}{1-\epsilon_2^2}\right] \tag{2.73}$$

$$M_y y = \frac{\rho c^3 L}{2h}\left[\frac{1}{3\left(1-\epsilon_2^2\right)}+\frac{1}{1-\epsilon_1^2}\right] \tag{2.74}$$

Les variables utilisées sont représentées dans la figure 2.2 complétée des relations (2.75) et du fait que h représente l'épaisseur moyenne des lames d'eau. On remarque que le modèle utilisé fait apparaître uniquement les composantes diagonales de la matrice de masses de couplage fluide-structure et que les solutions analytiques ne sont données que pour une configuration de carrés concentriques ou non.

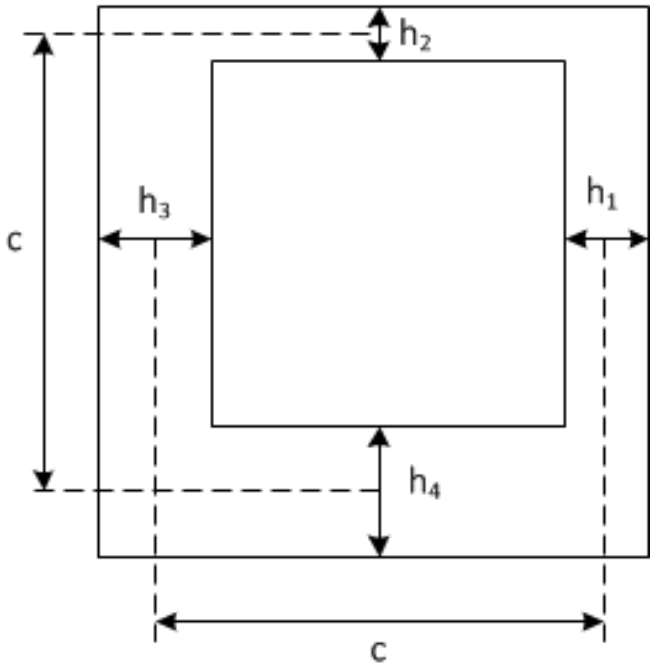


FIGURE 2.2 – Définitions des variables des solutions présentées dans [3]

$$h_1 = h\left(1-\epsilon_1\right),\ h_2 = h\left(1-\epsilon_2\right),\ h_3 = h\left(1+\epsilon_1\right),\ h_4 = h\left(1+\epsilon_2\right). \tag{2.75}$$

Nous comparerons donc les matrices de masse de couplage obtenues dans le modèle analytique de Stabel et Rem, celles obtenues par les modèles développés dans cette thèse et celles obtenues par calcul éléments-finis pour des configurations de structure à base carrée concentriques et non concentriques.

2.5.2 Etude du couplage entre deux parallélépipèdes concentriques :

Dans un premier temps, nous considérerons un cas déjà traité de manière approchée dans la littérature, le calcul approché des masses de couplage entre deux parallélépipèdes de sections rectangles concentriques.

2.5.2.1 Solutions analytiques enrichies :

Dans cette partie nous étudierons le cas simplifié traité par [2], [3]. Nous proposerons une méthode plus complète en considérant des vitesses de fluide respectant les conditions d'incompressibilité à partir d'une seule hypothèse simplificatrice sur la répartition de vitesse de la lame d'eau faisant face au déplacement nommée 'Domaine 1'. Les vitesses dans les autres directions et les autres lames d'eau sont déduites de cette hypothèse et de l'équation d'incompressibilité du fluide.

On limite notre étude aux écoulements fluides plan. C'est-à-dire qu'on suppose que la vitesse verticale du fluide est nulle $U_z(\underline{x}) = 0$. Il est possible d'utiliser ensuite un coefficient correcteur prennant en compte l'échappement du fluide par le dessus en appliquant la méthode proposée dans l'article [3]. En l'absence de coefficient correcteur, on surestimera la valeur de la masse de couplage fluide-structure.

Une fois, les expressions analytiques des vitesses déterminées en tout point du fluide, nous en déduirons la valeur des masses de couplages fluide-structure entre la structure mobile et la piscine. Etant donné que nous étudions une tranche de fluide, nous obtiendrons une masse linéique qu'il faudra multiplier par la hauteur de la structure pour obtenir une masse de couplage. Enfin, nous simulerons des géométries équivalentes par éléments finis et nous comparerons ces résultats à notre modèle enrichi et à celui présenté par Stabel et Rem décrit dans le paragraphe 2.5.1.

2.5.2.2 Description du modèle étudié :

La configuration étudiée consiste en 2 rectangles concentriques séparés par une lame d'eau. Nous supposons que la lame d'eau a la même épaisseur partout. Le cas étudié est représenté dans la figure 2.3. On se place dans le cas d'un couplage par tranches, c'est-à-dire qu'on considère le fluide confiné verticalement. La vitesse suivant z est donc nulle et les différentes variables seront indépendantes de z. Nous nous intéresserons donc à un râtelier de hauteur unitaire. La géométrie du système est entièrement définie par la donnée de $2l$, la largeur du râtelier, $2L$, la longueur du râtelier et a l'épaisseur de la lame d'eau. Nous considérons dans un premier temps que le râtelier est animé d'un mouvement de translation à une vitesse $V_0\underline{e}_y$. L'objectif est maintenant d'évaluer les masses hydrodynamiques pour un mouvement de translation du râtelier dans le plan (x, y).

Problème identifié dans la géométrie du système :

La géométrie retenue présente des discontinuités fortes dans la définition de l'imperméabilité des surfaces de la structures mobile et de la piscine. Ces discontinuités sont situées aux angles droits de chacune des structures. Elles déterminent totalement la vitesse de l'écoulement à ces points :
– Angle situé en (l, L) de la structure mobile :

$$\underline{U}(l, L) = V_0\underline{e}_y \tag{2.76}$$

– Angle situé en $(l + a, L + a)$ de la piscine :

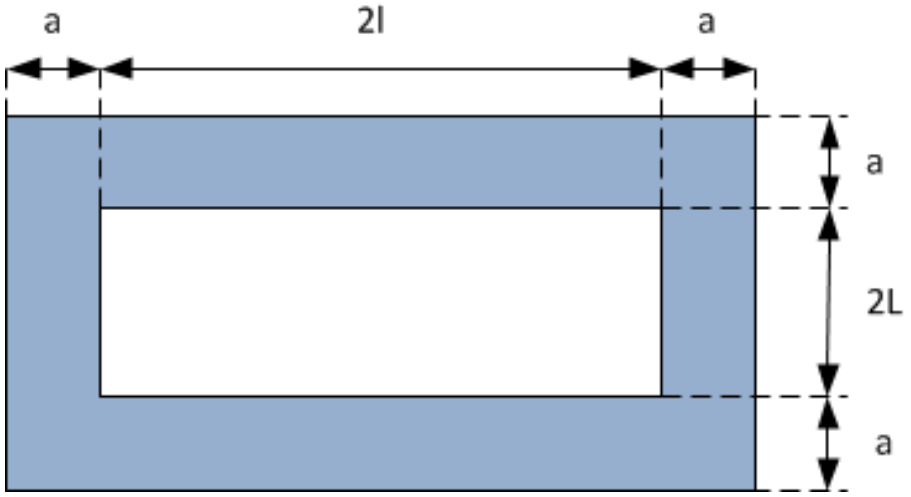


FIGURE 2.3 – Configuration centrée avec lame d'eau de même épaisseur

$$\underline{U}(l+a, L+a) = \underline{0} \tag{2.77}$$

Une résolution complète du système montre qu'on ne peut pas trouver de champ de vitesse simple répondant à la fois à ces conditions aux limites et aux conditions d'incompressibilité. C'était d'ailleurs l'un des principaux obstacles rencontrés dans cette étude. Il est donc nécessaire de trouver une géométrie approchée répondant à la double exigence de :

- avoir des conditions d'imperméabilités des structures continues,
- maintenir une énergie cinétique totale du système simplifié proche de celle de la structure réelle.

2.5.2.3 Géométrie approchée permettant une résolution analytique :

La géométrie réelle présente certaines discontinuités difficiles à prendre en compte analytiquement. Ces discontinuités portent sur les conditions aux limites. Elles sont situées au niveau des angles droits et complexifient trés fortement les fonctions de forme admissibles. Dans un souci de simplification, nous considérerons donc une modélisation de la piscine trés proche de celle évoquée précédemment, mais ne faisant pas intervenir de discontinuités.

Dans cette configuration simplifiée, les angles droits sont remplacés par des arcs de cercle. Ainsi pour un coin de la piscine, les angles droits intérieur et extérieur sont remplacés par deux cercles concentriques. Le cercle intérieur ayant un rayon $\epsilon << a$ et le cercle extérieur un rayon $a + \epsilon \approx a$. Cette modélisation est représentée dans la figure 2.4.

Par ailleurs, la géométrie du système et les chargements étant fortement symmétriques, nous ne considérerons qu'un quart du modèle et nous déduirons le comportement du fluide pour le modèle complet par des symmétries précisées dans le paragraphe suivant.

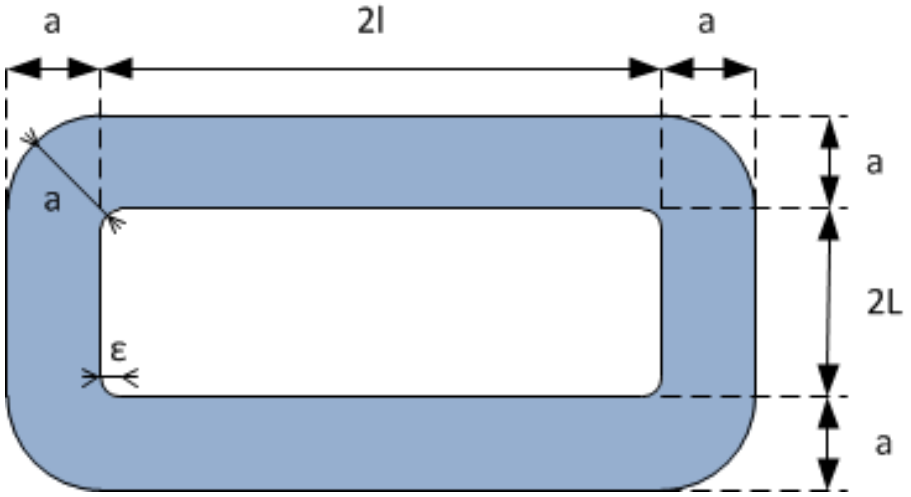


FIGURE 2.4 – Configuration centrée modifiée

2.5.2.4 Mise en équation du système

Afin de pouvoir obtenir une solution analytique approchée, il nous faut évaluer la vitesse en tout point du fluide. Nous découpons donc le système en 3 parties suivant la figure 2.5. Chaque partie possède son propre système de coordonnées (x_i, y_i) défini sur le schéma. $\underline{U_i}$ est la vitesse des particules dans la partie i. Les vitesses sont définies par des équations d'équilibre et conditions aux limites propres à chaque domaine, mais elles doivent aussi vérifier des conditions de continuité entre chaque domaine.

Domaine 1 :

- Incompressibilité du fluide

$$\frac{\partial U_1^x}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1^y}{\partial y_1} = 0 \tag{2.78}$$

- Condition aux limites

$$U_1^y(x_1, 0) = V_0, \quad U_1^y(x_1, a) = 0 \tag{2.79}$$

- Symmétrie par rapport au plan $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} U_1^x(x_1, y_1) &= -U_1^x(-x_1, y_1) \\ U_1^y(x_1, y_1) &= U_1^y(-x_1, y_1) \end{aligned} \tag{2.80}$$

Domaine 2 :

- Incompressibilité du fluide

$$\frac{\partial (r_2 U_2^r)}{\partial r_2} + \frac{\partial U_2^\theta}{\partial \theta_2} = 0 \tag{2.81}$$

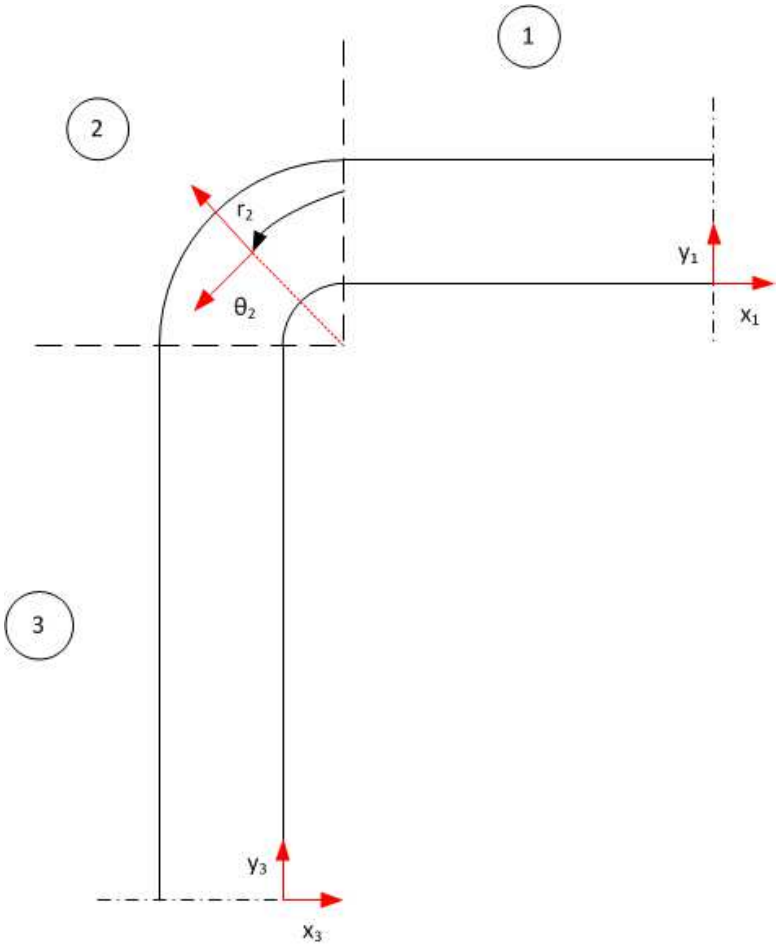


FIGURE 2.5 – Détails des coordonnées de chaque domaine

- Condition aux limites

$$U_2^r(\epsilon, \theta_2) = V_0 \cos\theta_2, \quad U_2^r(a, \theta_2) = 0 \tag{2.82}$$

Domaine 3 :

- Incompressibilité du fluide

$$\frac{\partial U_3^x}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3^y}{\partial y_3} = 0 \tag{2.83}$$

- Condition aux limites

$$U_3^x(0, y_3) = 0, \quad U_3^x(-a, y_3) = 0 \tag{2.84}$$

- Antiymmétrie par rapport au plan $y_3 = 0$

$$\begin{aligned} U_3^x(x_3, y_3) &= -U_3^x(x_3, -y_3) \\ U_3^y(x_3, y_3) &= U_3^y(x_3, -y_3) \end{aligned} \tag{2.85}$$

Equations de continuité entre les domaines 1 et 2 :

$$\begin{array}{l} U_2^r(r_2,0) = U_1^y(-l,r_2) \\ U_2^\theta(r_2,0) = -U_1^x(-l,r_2) \end{array} \tag{2.86}$$

Equations de continuité entre les domaines 2 et 3 :

$$\begin{array}{l} U_2^r\left(r_2,\frac{\pi}{2}\right) = -U_3^x(-r_2,L) \\ U_2^\theta\left(r_2,\frac{\pi}{2}\right) = U_3^y(-r_2,L) \end{array} \tag{2.87}$$

2.5.2.5 Approximation des fonctions de forme des vitesses :

Il n'existe pas de solutions simples au problème défini par les jeux d'équations (2.78 – 2.87). Nous allons donc considérer des expressions simplifiées des champs de vitesse dans chaque domaine. Ainsi, nous considérons un sous-ensemble de l'ensemble des champs de vitesse admissibles. La solution exacte est le champ de vitesse respectant toutes les équations d'équilibre et conditions et minimisant l'énergie cinétique du fluide. La solution obtenue sur un sous-ensemble des champs de vitesse admissibles surestimera l'énergie cinétique du fluide et donnera donc une borne supérieure des masses hydrodynamiques.

Les champs de vitesse simplifiés sont :

$$U_1^y(x_1,y_1) = \alpha_1(x_1) + \beta_1(x_1)y_1, \tag{2.88}$$

$$U_2^r(r_2,\theta_2) = \alpha_2(a-r_2)\cos\theta_2, \tag{2.89}$$

$$U_3^x(x_3,y_3) = \alpha_3 y_3 \left[1 - \left(\frac{y_3}{L}\right)^2\right] x_3\,(x_3+a). \tag{2.90}$$

Où α_1, β_1 sont des fonctions indéterminées dépendant uniquement de x_1. α_2, α_3 sont des constantes indéterminées. Ces hypothèses respectent les conditions de symmétrie et d'antisymmétrie du problème. Aucune hypothèse n'est faite sur les autres champs de vitesse. Ceux-ci seront déduits des différentes équations et conditions aux limites.

2.5.2.6 Résolution du problème :

Dans le domaine 1 :

Les conditions aux limites définies en (2.79) permettent de déterminer :

$$\alpha_1(x_1) = V_0, \quad \beta_1(x_1) = -\frac{V_0}{a}$$

En injectant ce résultat dans l'équation d'équilibre et en utilisant les conditions des symmétries par rapport au plan $x_1 = 0$, on détermine :

$$U_1^x(x_1,y_1) = \frac{V_0}{a}x_1$$

La vitesse du fluide dans le domaine 1 est donc entièrement déterminée et vaut :

$$\begin{cases} U_1^x(x_1, y_1) = \frac{V_0}{a} x_1 \\ \\ U_1^y(x_1, y_1) = \frac{V_0}{a}(a - y_1) \end{cases} \tag{2.91}$$

Dans le domaine 2 :

La condition de continuité entre les domaines 1 et 2 permet de déterminer :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \tfrac{V_0}{a} \\ U_2^\theta(r_2, 0) &= \tfrac{V_0}{a}(a - r_2) \end{aligned} \tag{2.92}$$

Cette expression et l'équation d'incompressibilité (2.81) permettent de déduire l'expression de la vitesse du fluide dans le domaine 2 :

$$\begin{cases} U_2^r(r_2, \theta_2) = \frac{V_0}{a}(a - r_2)\cos\theta_2 \\ \\ U_2^\theta(r_2, \theta_2) = \frac{V_0}{a}(a - 2r_2)\sin\theta_2 + \frac{V_0}{a} l \end{cases} \tag{2.93}$$

Dans le domaine 3 :

L'incompressibilité permet de déduire la forme de la vitesse U_3^y :

$$U_3^y(x_3, y_3) = -\alpha_3 \left[2\left(\frac{y_3}{L}\right)^2 - \left(\frac{y_3}{L}\right)^4 \right] (2x_3 + a) + \beta_3 \tag{2.94}$$

Où β_3 est une constante indéterminée.

La condition de continuité entre les domaines 2 et 3 permet de déterminer :

$$\alpha_3 = \frac{V_0}{a}, \;\; \beta_3 = \frac{V_0}{a} l$$

Les vitesses du domaine 3 s'écrivent donc :

$$\begin{cases} U_3^x(x_3, y_3) = -\frac{V_0}{a}\frac{4}{L}\frac{y_3}{L}\left[1 - \left(\frac{y_3}{L}\right)^2\right] x_3 \left(x_3 + a\right) \\ \\ U_3^y(x_3, y_3) = \frac{V_0}{a}\left[2\left(\frac{y_3}{L}\right)^2 - \left(\frac{y_3}{L}\right)^4\right](2x_3 + a) + \frac{V_0}{a} l \end{cases} \tag{2.95}$$

2.5.2.7 Détermination de la masse hydrodynamique :

Les champs de vitesse étant déterminés dans chacune des régions, nous pouvons calculer l'énergie cinétique du fluide. Il est intéressant de séparer les contributions de chacun des domaines afin de d'évaluer leurs influences respectives sur la masse de couplage.

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\rho \int_{x_1=-l}^{0} \int_{y_1=0}^{a} \left[U_1^x(x_1, y_1)\right]^2 + \left[U_1^y(x_1, y_1)\right]^2 dx_1 dy_1 \\ &= \frac{1}{2} M_1^{eau} V_0^2 \frac{l^2 + a^2}{3a^2} \end{aligned} \tag{2.96}$$

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}\rho \int_{r_2=0}^{a} \int_{\theta_2=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[U_2^r(r_2,\theta_2)\right]^2 + \left[U_2^\theta(r_2,\theta_2)\right]^2 r_2 dr_2 d\theta_2 \\
&= \frac{1}{2} M_2^{eau} V_0^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{l}{a\pi} + \left(\frac{l}{a}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{2.97}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3 &= \frac{1}{2}\rho \int_{x_3=-a}^{0} \int_{y_3=0}^{L} \left[U_3^x(x_3,y_3)\right]^2 + \left[U_3^y(x_3,y_3)\right]^2 dx_3 dy_3 \\
&= \frac{1}{2} M_3^{eau} V_0^2 \left[\frac{124}{225}\left(\frac{a}{L}\right)^2 + \frac{107}{945} + \left(\frac{l}{a}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{2.98}
$$

Où les M_i^{eau} sont les masses d'eau contenues dans le volume défini par le domaine i. L'effort excercé par le fluide sur le râtelier est obtenu à l'aide de l'équation de Lagrange. On peut ensuite en déduire la masse hydrodynamique appliquée sur le râtelier en réponse à un déplacement dans la direction $\underline{e_y}$:

$$
M_{Hy} = 4\left\{ M_1^{eau}\frac{l^2+a^2}{3a^2} + M_2^{eau}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{l}{a\pi} + \left(\frac{l}{a}\right)^2\right] + M_3^{eau}\left[\frac{124}{225}\left(\frac{a}{L}\right)^2 + \frac{107}{945} + \left(\frac{l}{a}\right)^2\right]\right\} \tag{2.99}
$$

Des résultats similaires sont obtenus dans la direction $\underline{e_x}$. Il est aussi possible de déterminer les masses de couplage hydrodynamiques appliquées sur la piscine en considérant une vitesse sur la piscine et en encastrant la structure immergée. Ce modéle présente le grand avantage d'avoir des solutions analytiques qui sont obtenues instantanément. Nous allons maintenant comparer les différents modèles existant dans des configurations identiques pour connaître leurs domaines de validité.

2.5.3 Etude du couplage entre deux parallélépipèdes non-concentriques :

Dans le cas où les deux parallélipipédes ne sont plus concentriques, il est difficile de trouver facilement une expression approchée simple de l'écoulement fluide autour de la structure. Nous allons donc utiliser un modèle simplifié où nous considérons que, pour une position donnée, la vitesse du fluide est la même suivant l'épaisseur de la lame d'eau et correspond à la vitesse moyennée sur l'épaisseur. Il s'agit du modèle développé dans le cas de quadrillage de cubes dans le paragraphe 2.6 mais appliqué à un seul cube.

Nous comparerons ces résultats à ceux de l'article [3] et à ceux obtenus par simulation éléments finis. Cela nous permettra de vérifier le domaine de validité de la théorie mais aussi de remarquer certaines propriétés sur la matrice de couplage fluide-structure en fonction de la position de référence de la structure dans le réservoir.

2.5.4 Comparaison des différentes modèles :

Dans cette partie, nous comparerons les résultats obtenus par le modèle de Stabel et Ren, ceux obtenus par notre modéle enrichi pour une configuration centrée, ceux du mo-

dèle analytique de quadrillage appliqué à une structure individuelle pour une configuration excentrée et ceux obtenus par simulation éléments-finis à l'aide du logiciel $ANSYS^{TM}$.

Les résultats obtenus par éléments finis le sont en considérant une tranche de fluide de 1m de hauteur ayant les mêmes configurations géométriques. Le fluide est modélisé par des éléments volumiques de pression dynamiques. On applique ensuite un chargement sinusoïdal en déplacement dans la direction souhaitée à une très faible fréquence pour respecter les hypothèses de couplage fluide-structure ne prennant en compte que les masses ajoutées. On mesure ensuite les efforts maximaux appliqués au niveau de chacune des conditions aux limites en déplacement (encastrement et déplacement imposés) pour en déduire les efforts appliqués sur chaque structure.

Nous considérerons une structure carrée de 1m de côté et de 1m de hauteur. On étudie trois positions différentes :
- Une position *centrée* où la structure est au centre de la piscine,
- Une position *côté* où la structure est approchée du bord droit en divisant par deux l'épaisseur de la lame d'eau de droite,
- Une position *coin* où la structure est approchée du coin en haut à droite en divisant par deux les épaisseurs des lames d'eau de droite et d'en haut.

Nous testerons ensuite différentes dimensions de lame d'eau afin de vérifier les domaines de validité de chaque théorie. Nous considérerons que le modèle éléments finis donne la solution la plus proche de la solution réelle. Les résultats sont exprimés sous la forme de matrice de masses de couplage dont la forme générique est :

$$\underline{\underline{M^{IFS}}} = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{pmatrix} \tag{2.100}$$

Les résultats sont présentés dans le tableau 2.1 en considérant une densité du fluide $\rho = 1020 kg/m$ correspondant à la densité de l'eau contenant du bore dissous.

2.5.4.1 Interprétations :

Configuration centrée :

Dans les cas où la stucture est centrée dans le réservoir d'eau, la théorie de Stabel & Ren et les solutions analytiques enrichies développées dans cette thèse donnent une surévaluation des masses de couplage. Cela est dû au fait que l'on considère le volume d'eau réel mais qu'on ne considère qu'une partie des profils de vitesse possible pour l'écoulement fluide. Cette limitation restreint les mouvements possibles au sein du fluide et entraîne donc une surévaluation des efforts produits.

Epaisseur	Position	Mod. Stabel & Ren	Mod. thèse	Mod. EF
0.1	centrée	$\begin{pmatrix} 9050 & 0 \\ 0 & 9050 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7974 & 0 \\ 0 & 7974 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7321 & 0 \\ 0 & 7321 \end{pmatrix}$
	côté	$\begin{pmatrix} 9805 & 0 \\ 0 & 11314 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7367 & 0 \\ 0 & 7529 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7917 & 0 \\ 0 & 8130 \end{pmatrix}$
	coin	$\begin{pmatrix} 12068 & 0 \\ 0 & 12068 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8217 & 850 \\ 850 & 8217 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8837 & 891 \\ 891 & 8837 \end{pmatrix}$
0.2	centrée	$\begin{pmatrix} 5875 & 0 \\ 0 & 5875 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4776 & 0 \\ 0 & 4776 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4013 & 0 \\ 0 & 4013 \end{pmatrix}$
	côté	$\begin{pmatrix} 6365 & 0 \\ 0 & 7344 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3683 & 0 \\ 0 & 3764 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4337 & 0 \\ 0 & 4459 \end{pmatrix}$
	coin	$\begin{pmatrix} 7834 & 0 \\ 0 & 7834 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4108 & 425 \\ 425 & 4108 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4836 & 465 \\ 465 & 4836 \end{pmatrix}$
0.5	centrée	$\begin{pmatrix} 4590 & 0 \\ 0 & 4590 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3896 & 0 \\ 0 & 3896 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2070 & 0 \\ 0 & 2070 \end{pmatrix}$
	côté	$\begin{pmatrix} 4973 & 0 \\ 0 & 5738 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1473 & 0 \\ 0 & 1506 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2212 & 0 \\ 0 & 2287 \end{pmatrix}$
	coin	$\begin{pmatrix} 6120 & 0 \\ 0 & 6120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1643 & 170 \\ 170 & 1643 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2447 & 191 \\ 191 & 2447 \end{pmatrix}$

TABLE 2.1 – Comparaison de l'estimation des matrices de masses de couplage entre deux carrés concentriques ou non

Les solutions analytiques enrichies donnent une meilleure évaluation de la masse ajoutée dans tous les cas. Cela est dû au fait qu'on considère un plus grand espace de solutions possibles. Cela a tendance à limiter la surévaluation. De plus, l'évaluation des masses ajoutées est très bonne dans le cas où les épaisseurs des lames d'eau sont de 0.1 m et de 0.2 m. Par contre, elle se dégrade dans le cas de lames d'eau ayant une épaisseur similaire à la largeur de la structure. On sort dans ce cas du cadre des lames d'eau confinées.

Les solutions de Stabel et Ren surestiment fortement les masses ajoutées dans chacun des cas. Afin de bien comprendre ces surestimations, nous représentons les profils des pressions obtenus par simulation éléments finis dans la figure 2.6. Les vitesses peuvent se déduire du gradient du champ de pression (à une contante d'intégration temporelle près).

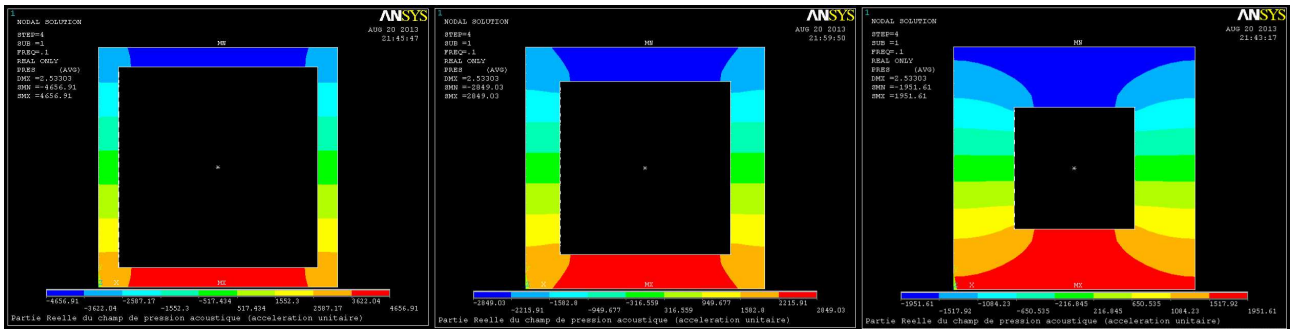


FIGURE 2.6 – Comparaison des profils de pression dans le cas d'une accélération suivant Y de la structure immergée en position centrée

On remarque dans les cas moins confinés qu'il devient nécessaire d'utiliser des profils de vitesse plus complexes : par exemple, des profils quadratiques ou exponentiels dans les lames d'eau en vis-à-vis du déplacement de la structure. Par contre, un profil de vitesse linéaire est pertinent sur les lames d'eau lattérales.

Configuration côté :

Dans le cas où la structure immergée est rapprochée d'un des bords du réservoir, les solutions de Stabel & Ren donnent à nouveau toujours une surestimation des masses ajoutées. Par contre, la solution analytique (correspondant au modèle de quadrillage fluide appliqué à un seul module) donne des résultats sous-estimant les masses ajoutées dans les 3 configurations de lames d'eau d'épaisseur moyenne 0.1 m, 0.2 m et 0.5 m.

Cette sous-estimation n'est pas systématique. En effet, le profil de vitesse utilisé restreint l'espace de solution des déplacements admissibles dans le fluide et a donc tendance à surestimer les masses de couplage. Cependant, dans notre modèle, nous négligeons les masses d'eau (et l'énergie cinétique associée) situées aux intersections du quadrillage fluide. Dans le cas, où l'épaisseur des lames d'eau est très faible devant les longueurs et largeurs caractéristiques des structures immergées mobiles cette hypothèse n'a que très peu d'influence et on surestimera donc les masses ajoutées. Dans les cas considérés ici, nous sommes à la limite de validité de cette hypothèse dans la configuration 0.1 m et elle n'est plus vérifiée pour les deux autres configurations (0.2 m et 0.5 m).

Pour ces deux configurations, il est intéressant d'avoir les deux modèles analytiques pour se donner des bornes encadrant les masses ajoutées réelles. Néanmoins, l'amplitude de l'erreur effectuée est nettement plus faible dans notre modèle.

Dans tous les modèles, on remarque aussi que les masses de couplage m_{yy} sont plus grandes que m_{xx}. Cela peut paraître contre-intuitif étant donné que la structure est approché du bord par une translation dans la direction $\underline{e_x}$. Ce phénomène est du au fait que même si la vitesse d'écoulement est plus grande dans le canal fluide de plus petite épaisseur, il stocke aussi moins de masse. Le paramètre pertinent d'estimation des masses de couplage étant l'énergie cinétique du fluide, il est important d'avoir à la fois une vitesse élevée et un masse de fluide importante.

Cet équilibre est obtenu lorsqu'on accélére la structure suivant Y car les lames d'eau d'épaisseur 0.2 m voient un profil de vitesse relativement élevé et ont une masse d'eau conséquente. Alors que dans le cas d'une accélération suivant X, la lame d'eau en face de l'accélération a un mouvement à grand vitesse mais un masse d'eau faible. Les lames d'eau latéral ont des profils de vitesse changeant de signe donc une énergie cinétique relativement faible et la lame d'eau à l'opposé du déplacement est trop large pour avoir une forte vitesse d'écoulement.

Afin d'illustrer ces propos, les profils de pression dans le cas d'une accélération suivant Y sont représentés dans la figure 2.7.

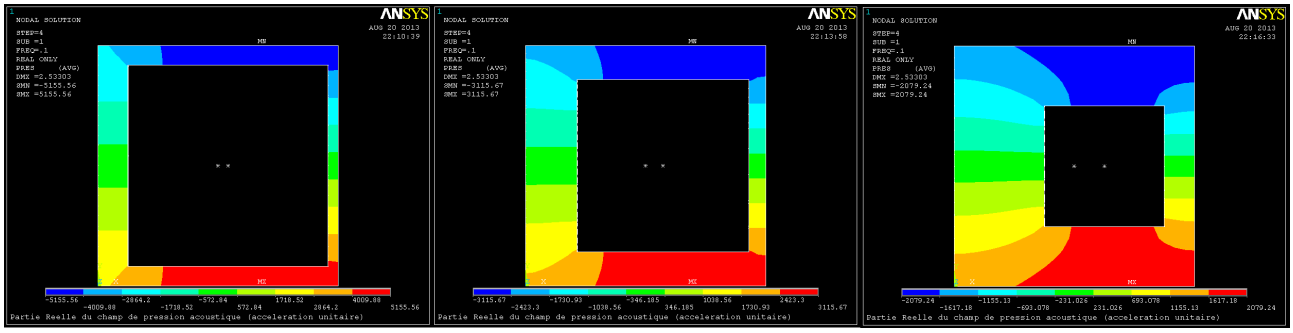


FIGURE 2.7 – Comparaison des profils de pression dans le cas d'une accélération suivant Y de la structure immergée en position côté

Configuration coin :

Dans le cas où la structure immergée est rapprochée d'un des bords du réservoir, les solutions de Stabel & Ren donnent à nouveau toujours une surestimation des masses ajoutées. Par contre, la solution analytique (correspondant au modèle de quadrillage fluide appliqué à un seul module) donne des résultats sous-estimant les masses ajoutées dans les 3 configurations de lames d'eau d'épaisseur moyenne 0.1 m, 0.2 m et 0.5 m. De même que dans la configuration côté, cette sous-estimation n'est pas systématique.

De plus, on voit apparaître le phénomène d'effet de coin qui correspond à la présence de termes non-diagonaux dans la matrice de masses ajoutées. Ils ne sont souvent pas pris en compte dans la littérature existante sur le sujet et notamment dans le modèle de Stabel & Ren. Ces termes apparaissent lorsque la configuration géométrique ne possède plus de plan de symétrie. Cela a lieu quasiment tout le temps dans le cas de structure glissante dès lors que l'on actualise la géométrie des lames d'eau lors du glissement.

On remarque dans le cas considéré ici que les amplitudes de ces masses ajoutées ne sont pas négligeables. Elle représente environ 10% de la masse ajoutée principale. Elles peuvent donc avoir une importance forte sur le comportement dynamique de la structure dans le cas des lames d'eau confinées.

Dans cette configuration coin, nous observons à nouveau un encadrement des termes diagonaux par les résultats des deux modèles analytiques. Le modèle développé dans cette thèse donne là aussi une meilleure estimation de l'ensemble de la matrice de masse ajoutée (et pas uniquement des termes diagonaux).

On représente dans la figure 2.8 les profils de pression dans le cas d'une accélération suivant Y.

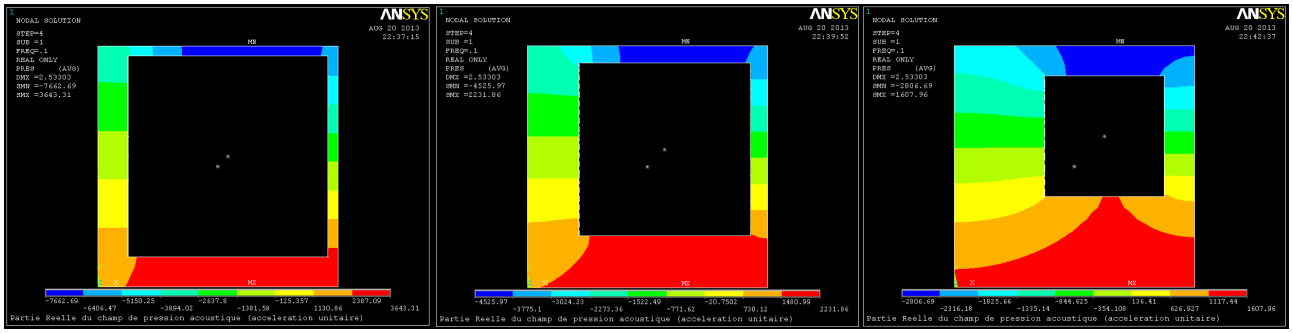


FIGURE 2.8 – Comparaison des profils de pression dans le cas d'une accélération suivant Y de la structure immergée en position coin

2.6 Solutions pseudo-analytiques du couplage d'un quadrillage de cube

Dans cette partie, nous présenterons une méthode pseudo-analytique d'obtention des matrices de masse de couplage fluide-structure pour un quadrillage confiné de structures carrées immergées. Au cours de son déplacement, afin de prendre en compte le cas de structures fortement confinées, chaque structure aura un couplage avec l'ensemble des autres structures.

Dans le cas de structure confinée, les masses de couplage obtenues évoluent très fortement avec les changements de géométrie des lames d'eau. Il est donc important de fournir une méthode suffisamment générale pour prendre en compte une variation temporelle de la géométrie (et donc de la masse de couplage) et suffisamment rapide pour permettre un calcul quasi-instantané. Les changements de géométrie peuvent casser des symétries existantes. Il est donc nécessaire que les matrices de couplage prennent en compte les 'effets de coin' (correspondant à des ruptures de diagonalisation dans les matrices de masses).

2.6.1 Description du modèle

On considère une piscine avec $N \times M$ cubes immergés. On se place à une altitude fixe et nous chercons à évaluer les masses de couplage au sein de cette tranche de fluide. On a N cubes dans la direction $\underline{e_y}$ et M cubes dans la direction $\underline{e_x}$. Cette configuration est représentée dans la figure 2.9.
Pour des raisons de simplification, on considère que chaque cube est identique de dimension $L_x x L_y x H$. Le module (i, j) est positionné à la i^{eme} ligne et j^{eme} colonne. On note la position géométrique du centre du cube $(X_{ij}(t), Y_{ij}(t))$:

$$\forall\ (i,j) \in [1,N] \times [1,M]\,,\ X_{ij}(t) = X_{ij}^0 + A_{ij}(t), \tag{2.101}$$

$$\forall\ (i,j) \in [1,N] \times [1,M]\,,\ Y_{ij}(t) = Y_{ij}^0 + B_{ij}(t). \tag{2.102}$$

Avec :
- $\left(X_{ij}^0, Y_{ij}^0\right)$ est la position initiale du module (i, j),
- $(A_{ij}(t), B_{ij}(t))$ est le déplacement du centre du module (i, j).

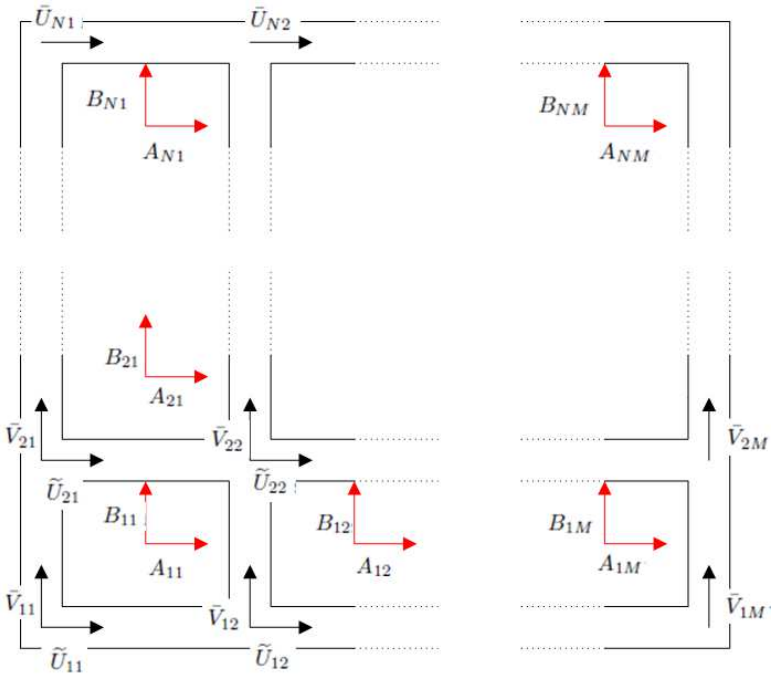


FIGURE 2.9 – Configuration des lames d'eau et notations

Les mouvements de chaque module influencent l'épaisseur des lames d'eau les entourant. On obtient les épaisseurs avec :

$$\forall\ (i,j) \in [1, N+1] \times [1, M]\,, h_{ij}^{U}(t) = e_{ij}^{U} + B_{ij}(t) - B_{(i-1)j}(t), \tag{2.103}$$

$$\forall\ (i,j) \in [1, N] \times [1, M+1]\,, h_{ij}^{V}(t) = e_{ij}^{V} + A_{ij}(t) - A_{i(j-1)}(t). \tag{2.104}$$

Avec :
- $h_{ij}^{U}(t), h_{ij}^{V}(t)$ sont les épaisseurs à l'instant t considéré dans les directions X et Y,
- e_{ij}^{U}, e_{ij}^{V} sont les épaisseurs initales des lames d'eau dans les directions X et Y.

Ces équations se généralisent pour prendre en compte les cas particuliers des lames d'eau extrêmales. On définit donc les épaisseurs fictives de ces lames d'eau :

$$A_{i0} = A_{i(M+1)} = B_{0j} = B_{(N+1)j} = 0 \tag{2.105}$$

2.6.2 Modélisation du fluide

Nous faisons les mêmes hypothèses que l'article d'Antunes & Moreira [29]. Il s'agit d'un modèle simplifié d'écoulement fluide :
- L'écoulement fluide s'effectue dans le plan (X, Y),
- Les épaisseurs des lames d'eau sont faibles par rapport aux caractéristiques géométriques des modules :

$$h_{ij}^{U}(t) << L_x, L_y, H \tag{2.106}$$

$$h_{ij}^{V}(t) << L_x, L_y, H \tag{2.107}$$

On néglige les aspects purement dissipatifs du fluide. Celui-ci sera déduit des évolutions temporelles des matrices de masse et modélisé par un coefficient d'amortissement généralisé inclus dans le comportement dynamique décrit dans le chapitre 3.

Les vitesses des particules fluides sont notées $u_{ij}(x, y, t)$ et $v_{ij}(x, y, t)$, respectivement pour les canaux orientés dans la direction X et Y. On note la vitesse moyenne d'écoulement du fluide dans chacun de ces canaux :

$$U_{ij}(x, t) = \frac{\int_{y=0}^{h_{ij}^{U}(t)} u(x, y, t)\, dy}{h_{ij}^{U}(t)}, \tag{2.108}$$

$$V_{ij}(y, t) = \frac{\int_{x=0}^{h_{ij}^{V}(t)} v(x, y, t)\, dx}{h_{ij}^{V}(t)}. \tag{2.109}$$

Nous nous intéressons aux chargements sismiques appliqués sur une structure immergée. Dans ces conditions, les fréquences caractéristiques des sollicitations sont inférieures à 20Hz. Dans ce domaine fréquentiel, on supposera que le fluide agit comme un fluide parfait incompressible. Ainsi l'équation de conservation de la masse s'écrit à l'aide des valeurs moyennes de vitesse d'écoulement :

$$\frac{dh_{ij}^{U}}{dt} + h_{ij}^{U}\frac{\partial U_{ij}}{\partial x} = 0, \tag{2.110}$$

$$\frac{dh_{ij}^{V}}{dt} + h_{ij}^{V}\frac{\partial V_{ij}}{\partial y} = 0. \tag{2.111}$$

En utilisant les définitions des épaisseurs de lames d'eau (eqns. (2.103) et (2.104)), les relations (2.110) et (2.111) démontrent qu'à un instant t donné, la vitesse du fluide évolue linéairement dans la direction du canal fluide considéré :

$$U_{ij}(x, t) = \frac{\dot{B}_{(i-1)j}(t) - \dot{B}_{ij}(t)}{h_{ij}^{U}(t)}x + \bar{U}_{ij}(t), \tag{2.112}$$

$$V_{ij}(y, t) = \frac{\dot{A}_{i(j-1)}(t) - \dot{A}_{ij}(t)}{h_{ij}^{V}(t)}y + \bar{V}_{ij}(t). \tag{2.113}$$

On note $\bar{U}_{ij}(t)$ et $\bar{V}_{ij}(t)$ les vitesses moyennes du fluide à l'entrée du canal respectivement selon les directions X et Y. Dans l'étude du comportement du fluide, on suppose que la géométrie des canaux (et donc le déplacement des modules) est une donnée d'entrée connue de notre système.

L'objectif de cette partie est de présenter une méthode de calcul quasi-analytique des vitesses moyennes d'entrée dans les canaux. Une fois toutes ces vitesses déterminées, nous pouvons en déduire les vitesses moyennes en tout point du fluide, en déduire la répartition de pression et donc connaître les masses de couplage entre chaque module.

Pour une configuration donnée, le nombre d'inconnues du système est $(2M \times N + M + N)$. Les équations de continuité de l'écoulement à chaque intersection permettent de réduire ce nombre :

$$\forall\,(i,j) \in [1, N+1] \times [1, M+1]\,,$$

$$\bar{U}_{i(j-1)}(t) + \frac{\dot{B}_{(i-1)(j-1)}(t) - \dot{B}_{i(j-1)}(t)}{h^U_{i(j-1)}(t)} L_x + \bar{V}_{(i-1)j}(t) + \frac{\dot{A}_{(i-1)(j-1)}(t) - \dot{A}_{(i-1)j}(t)}{h^V_{(i-1)j}(t)} L_y = \bar{U}_{ij}(t) + \bar{V}_{ij}(t)$$

Avec :

$$\bar{U}_{i0}(t) = \bar{U}_{i(M+1)}(t) = \bar{V}_{0j}(t) = \bar{V}_{(N+1)j}(t) = 0. \tag{2.114}$$

On obtient ainsi $((N+1)(M+1) - 1)$ équations indépendantes.

Il y a $(N+1)(M+1)$ intersections dans le quadrillage fluide. Cependant, il faut noter que l'équation de continuité sur l'angle en haut à droite du quadrillage fluide n'est pas indépendante. Elle dépend totalement des autres relations et ne doit pas être comptée pour la réduction du nombre d'inconnues.

Il reste donc $N \times M$ inconnues indépendantes qui doivent être déterminées à l'aide de nouvelles équations. Ces inconnues restantes sont liées individuellement à chacun des modules. Nous considérons qu'il s'agit de la vitesse moyenne d'écoulement dans la lame d'eau située 'en-dessous' de chaque module. Afin de différencier les inconnues restantes, nous utiliserons la notation $\widetilde{U}_{ij}(t)$ où :

$$\forall\,(i,j) \in [1, N] \times [1, M]\,,\ \widetilde{U}_{ij}(t) = \bar{U}_{ij}(t) \tag{2.115}$$

2.6.3 Minimisation de l'énergie totale du fluide :

La résolution du système des $N \times M$ inconnues indépendantes restant nécessite l'introduction de nouvelles équations. Les inconnues choisies $\left(\widetilde{U}_{ij}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$ étant indépendantes, il est possible d'écrire des équations de minimisation de l'énergie totale du système. Avec les hypothèses de modélisation, la seule énergie présente dans le système considéré est l'énergie cinétique du fluide. L'énergie cinétique représente donc l'énergie totale du système. En écrivant les minimisations de l'énergie cinétique totale du fluide pour chaque inconnue restante du système, on obtient $N \times M$ nouvelles équations qui nous permettront de résoudre totalement le système.

Dans cette partie, nous expliquerons les méthodes d'obtention analytique de ces nouvelles équations. Nous présenterons tout d'abord une méthode de calcul de l'énergie cinétique et des dérivées pour chaque lame d'eau. Puis, nous présenterons la méthode de détermination des matrices de couplage que nous illustrerons dans des exemples simples.

2.6.3.1 Etude des lames d'eau verticales :

Dans cette partie nous nous concentrons sur l'étude des lames d'eau *verticales* qui correspondent aux canaux orientés dans la direction Y. En utilisant la relation (2.113), on peut exprimer l'énergie cinétique d'une lame d'eau :

$$\begin{gathered}\forall\,(i,j)\in[1,N]\times[1,M+1]\,,\\ \begin{cases} E_{ij}^{V} &= \int_{x=0}^{h_{ij}^{V}}\int_{y=0}^{L_y}\int_{z=0}^{H}\rho v_{ij}^{2}(x,y,t)dxdydz \\ &= \frac{\rho H h_{ij}^{V}}{2}\left[L_y\bar{V}_{ij}^{2}+L_y^{2}\bar{V}_{ij}\frac{\dot{A}_{i(j-1)}-\dot{A}_{ij}}{h_{ij}^{V}}+\frac{L_y^{3}}{3}\left(\frac{\dot{A}_{i(j-1)}-\dot{A}_{ij}}{h_{ij}^{V}}\right)^{2}\right] \end{cases}\end{gathered} \tag{2.116}$$

L'énergie cinétique des lames d'eau verticales dépend quadratiquement de la vitesse moyenne d'écoulement en entrée de canal $\bar{V}_{ij}(t)$. Cette vitesse d'écoulement en entrée de canal vertical dépend linéairement des inconnues du système $\widetilde{U}_{ij}(t)$ et du chargement (déplacement des modules) $\dot{A}_{ij}(t)$ et $\dot{B}_{ij}(t)$. En utilisant les équations de continuité (2.114) de chaque intersection située en amont de la lame d'eau considérée, on obtient :

$$\bar{V}_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{i}\left(\widetilde{U}_{k(j-1)}(t)-\widetilde{U}_{kj}(t)\right)+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\dot{A}_{k(j-1)}(t)-\dot{A}_{kj}(t)}{h_{ij}^{V}(t)}L_y+\sum_{k=1}^{i}\frac{\dot{B}_{(k-1)j}(t)-\dot{B}_{kj}(t)}{h_{kj}^{U}(t)}L_x \tag{2.117}$$

En injectant cette équation dans l'expression de l'énergie cinétique au sein de canal vertical, on peut déterminer l'expression analytique des dérivées de l'énergie cinétique par rapport aux inconnues indépendantes du système $\left(\widetilde{U}_{kl}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$. Ces dérivées dépendent linéairement des inconnues du système $\left(\widetilde{U}_{kl}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$.

$$\begin{gathered}\forall\,(k,l)\in[1,N]\times[1,M]\,,\ \forall\,(i,j)\in[1,N]\times[1,M]\,,\\ \frac{\partial E_{ij}^{V}}{\partial\widetilde{U}_{kl}}=\frac{\rho H h_{ij}^{V}}{2}\left(2L_y\frac{\partial\bar{V}_{ij}}{\partial\widetilde{U}_{kl}}\bar{V}_{ij}(t)+L_y^{2}\frac{\partial\bar{V}_{ij}}{\partial\widetilde{U}_{kl}}\frac{\dot{A}_{(i-1)j}(t)-\dot{A}_{ij}(t)}{h_{ij}^{V}(t)}\right)\end{gathered} \tag{2.118}$$

2.6.3.2 Etude des lames d'eau horizontale :

Dans cette partie nous nous concentrons sur l'étude des lames d'eau *horizontales* qui correspondent aux canaux orientés dans la direction X. En utilisant la relation (2.112), on peut exprimer l'énergie cinétique d'une lame d'eau :

$$\begin{gathered}\forall\,(i,j)\in[1,N+1]\times[1,M]\,,\\ E_{ij}^{H}=\int_{x=0}^{L_x}\int_{y=0}^{h_{ij}^{U}(t)}\int_{z=0}^{H}\rho u_{ij}^{2}(x,y,t)dxdydz\\ =\frac{\rho H h_{ij}^{U}}{2}\left[L_x\bar{U}_{ij}^{2}(t)+L_x^{2}\bar{U}_{ij}(t)\frac{\dot{B}_{(i-1)j}(t)-\dot{B}_{ij}(t)}{h_{ij}^{U}(t)}+\frac{L_x^{3}}{3}\left(\frac{\dot{B}_{(i-1)j}(t)-\dot{B}_{ij}(t)}{h_{ij}^{U}(t)}\right)^{2}\right]\end{gathered} \tag{2.119}$$

Dans la plupart des canaux horizontaux (tous sauf celui situé 'tout en haut' du quadrillage fluide), la vitesse moyenne d'entrée est une des inconnues du système. Dans ce cas, la minimisation de l'énergie cinétique du système s'écrit facilement :

$$\forall\,(k,l)\in[1,N]\times[1,M]\,,\forall\,(i,j)\in[1,N]\times[1,M]\,,$$
$$\frac{\partial E^H_{ij}}{\partial \widetilde{U}_{kl}} = \frac{\rho H h^U_{ij}}{2}\left(2L_x\bar{U}_{ij}(t)+L_x^2\frac{\dot{B}_{(i-1)j}(t)-\dot{B}_{ij}(t)}{h^U_{ij}(t)}\right)\ si\ i=k\ \&\ j=l, \tag{2.120}$$
$$\frac{\partial E^H_{ij}}{\partial \widetilde{U}_{kl}} = 0\ si\ i\neq k\ \&\ j\neq l$$

Ces dérivés de l'énergie cinétique dépendent linéairement des inconnues du système $\left(\widetilde{U}_{kl}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$.

La dernière rangée de lames d'eau horizontales doit être considérée indépendemment car la vitesse moyenne d'entrée n'est pas directement reliée à une inconnues. Pour la déterminer, il faut considérer la continuité de l'écoulement sur l'ensemble des intersections reliant les inconnues du système au canal horizontal considéré. En faisant une récurrence sur chaque intersection et en utilisant l'expression (2.114), on trouve l'expression de la vitesse moyenne d'entrée dans les derniers canaux horizontaux en fonction des inconnues et des données d'entrée du système :

$$\bar{U}_{(N+1)j} = \sum_{m=1}^{j}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left(\widetilde{U}_{n(m-1)}(t)-\widetilde{U}_{nm}(t)\right)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\dot{A}_{n(m-1)}(t)-\dot{A}_{nm}(t)}{h^V_{nm}(t)}L_y+\sum_{n=1}^{N+1}\frac{\dot{B}_{(n-1)m}(t)-\dot{B}_{nm}(t)}{h^U_{nm}(t)}\right. \tag{2.121}$$

Les dérivés de l'énergie cinétique par rapport aux inconnues du système $\left(\widetilde{U}_{kl}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$ des derniers canaux horizontaux sont obtenues à l'aide de l'équation (2.121). Ces dérivées dépendent linéairement des inconnues $\left(\widetilde{U}_{kl}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$.

$$\forall\,(k,l)\in[1,N]\times[1,M]\,,\ \forall\,(i,j)\in[1,N]\times[1,M]\,,$$
$$\frac{\partial E^H_{(N+1)j}}{\partial \widetilde{U}_{kl}} = \frac{\rho H h^H_{(N+1)j}}{2}\left(2L_y\frac{\partial \bar{U}_{(N+1)j}}{\partial \widetilde{U}_{kl}}\bar{U}_{(N+1)j}(t)+L_y^2\frac{\partial \bar{U}_{(N+1)j}}{\partial \widetilde{U}_{kl}}\frac{\dot{A}_{Nj}(t)-\dot{A}_{(N+1)j}(t)}{h^U_{(N+1)j}(t)}\right) \tag{2.122}$$

2.6.3.3 Minimisation de l'énergie :

L'énergie cinétique totale du fluide E_{tot} est la somme des énergies cinétiques de chacun des lames d'eau horizontales et verticales, ainsi que celles contenues au niveau des intersections. Les hypothèses effectuées sur les dimensions des lames d'eau font que l'énergie des intersections dépend au second ordre des quantités $h^U_{ij}(t)$ et $h^V_{ij}(t)$, alors que celle des lames d'eau ne dépendent qu'au premier ordre de ces quantités. On peut donc négliger leur impact sur l'évolution de l'énergie cinétique totale.

Dans le cas où cette hypothèse n'est plus vérifiée ou si l'étude nécessite une plus grande précision, il est possible de donner un ordre de grandeur de l'énergie cinétique des intersections en supposant :
- *Soit que la vitesse du fluide dans l'intersection est constante et égale à la vitesse moyenne la plus élevée (surestimation de l'énergie cinétique),*
- *Soit que la vitesse du fluide dans l'intersection est constante et égale à la vitesse moyenne la plus faible (sous-estimation de l'énergie cinétique),*
- *Soit que l'intersection est découpée en quatre section égale où la vitesse du fluide est égale à la vitesse moyenne de la lame d'eau adjacente (estimation au plus près).*

Les calculs des dérivées de l'énergie dans chacune des lames d'eau (2.118), (2.120) et (2.122) ont fait apparaître une dépendance linéaire avec les inconnues restantes du système $\left(\widetilde{U}_{kl}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$, et les chargements $\left(\dot{A}_{ij}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$ et $\left(\dot{B}_{ij}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$. En sommant chaque dérivée, on obtient le jeu d'équation de minimisation de l'énergie cinétique en fonction des inconnues $\left(\widetilde{U}_{kl}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$:

$$\underline{\underline{K}}.\underline{\widetilde{U}} = \underline{\underline{\alpha}}.\underline{\dot{A}} + \underline{\underline{\beta}}.\underline{\dot{B}} \tag{2.123}$$

Avec :
- $\underline{\widetilde{U}} =^T \left(\widetilde{U}_{11} \dots \widetilde{U}_{1M}\widetilde{U}_{21} \dots \widetilde{U}_{NM}\right)$ est le vecteur des $N \times M$ inconnues,
- $\underline{\dot{A}} =^T \left(\dot{A}_{11} \dots \dot{A}_{1M}\dot{A}_{21} \dots \dot{A}_{NM}\right)$ est le vecteur des $N \times M$ chargements horizontaux,
- $\underline{\dot{B}} =^T \left(\dot{B}_{11} \dots \dot{B}_{1M}\dot{B}_{21} \dots \dot{B}_{NM}\right)$ est le vecteur des $N \times M$ chargements verticaux,

Les matrices de dimension (NM, NM) $\underline{\underline{K}}$, $\underline{\underline{\alpha}}$ et $\underline{\underline{\beta}}$ sont totalement déterminées analytiquement à l'aide des équations (2.118), (2.120) et (2.122).

2.6.3.4 Exemples :

Dans la partie précédente, nous avons montré que la minimisation de l'énergie totale correspond à la résolution d'un système linéaire. Dans cette partie, nous présenterons les solutions analytiques pour des configurations simples. Nous supposerons notamment que le déplacement des modules est très faible et ne modifie pas la géométrie des lames d'eau. On supposera que les épaisseurs initiales des lames d'eau sont identiques (i.e. $h_{ij}^U(t) \approx e_{ij}^U = e$ et $h_{ij}^V(t) \approx e_{ij}^V = e$) et que les modules ont une base carrée (i.e. $L_x = L_y = L$).

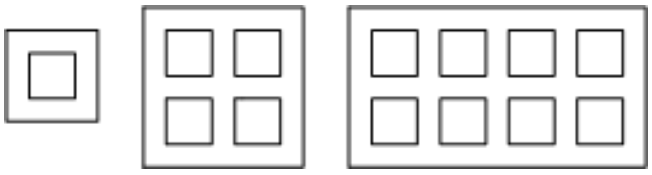


FIGURE 2.10 – Configurations considérées

- Configuration (1×1) **:**

Il s'agit de l'exemple classique de deux cubes concentriques dont nous avons donné les résultats analytiques dans la partie (2.5.4). On trouve ici la relation linéaire simple :

$$8\widetilde{U}_{11} = -4\frac{L}{e}\dot{A}_{11}(t) + 4\frac{L}{e}\dot{B}_{11}(t) \tag{2.124}$$

- Configuration (2×2) **:**

La configuration (2×2) permet de faire apparaître les caractéristiques des matrices obtenues même sur un cas relativement simple. Celles-ci sont presque toujours pleines et une solution quasi-analytique est donc nécessaire pour ne pas avoir trop de temps de calcul.

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -4 & -2 \\ 6 & 8 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 12 & 6 \\ -2 & -2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \tag{2.125}$$

$$\underline{\underline{\alpha}} = \frac{L}{e}\begin{pmatrix} -8 & -4 & 3 & 1 \\ -6 & -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -8 & -4 \\ 2 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \tag{2.126}$$

$$\underline{\underline{\beta}} = \frac{L}{e}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \tag{2.127}$$

- Configuration (2×4) **:**

Cette configuration fait apparaître certains éléments de régularité des matrices.

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 12 & 6 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 8 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 12 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 6 & 8 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \tag{2.128}$$

$$\underline{\underline{\alpha}} = \frac{L}{e}\begin{pmatrix} -8 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -8 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -8 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \tag{2.129}$$

$$\underline{\underline{\beta}} = \frac{L}{e}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \tag{2.130}$$

2.6.4 Détermination des matrices de couplage fluide-structure :

2.6.4.1 Equations de Lagrange :

Afin de déterminer les matrices de couplage fluide-structure, nous devons considérer le système complet $\{$*structure + fluide* $\}$. Les énergies du système couplé sont : $T = T_s + T_f$, l'énergie cinétique décomposée respectivement entre la structure et le fluide, $V = V_S$, l'énergie potentielle qui se limite à celle de la structure, Q, la puissance des efforts dissipatifs (frottement, amortissement fluide, visqueux, etc... Dans notre modèle, le fluide a une influence sur l'énergie cinétique totale et sur les effets dissipatifs.

Nous préciserons dans l'étude dynamique du système couplé détaillée dans le chapitre 3 comment les effets dissipatifs du fluide sont modélisés. Nous ne nous focaliserons donc pas sur une analyse précise de la composition du terme Q.

Si on considére chaque module comme un cube de masse M, de raideur de fixation au sol K avec un amortissement c, les énergies liées à la structure s'écrivent :

$$\begin{cases} T_S(t) = \frac{1}{2}M\left(\dot{A}^2(t) + \dot{B}^2(t)\right), \\ V_S(t) = \frac{1}{2}K\left(A^2(t) + B^2(t)\right), \\ Q(t) = -c\left(\dot{A}\delta A(t) + \dot{B}\delta B(t)\right). \end{cases} \tag{2.131}$$

Les hypothèses faites sur la modélisation du fluide imposent que T_f est une fonction dépendant des variables : $\left(A_{ij}(t), B_{ij}(t), \dot{A}_{ij}(t), \dot{B}_{ij}(t)\right)$. Cette fonction dépend quadratiquement des vitesses de déplacements des modules $\left(\dot{A}_{ij}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$ et $\left(\dot{B}_{ij}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$, et de manière complexe (polynôme à coefficients positifs et négatifs) des déplacements des modules $(A_{ij}(t))_{[1,N]\times[1,M]}$ et $(B_{ij}(t))_{[1,N]\times[1,M]}$.

En utilisant l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \tag{2.132}$$

Avec :
- T l'énergie cinétique totale du système,
- V l'énergie potentielle totale du système,
- q_i les coordonnées généralisées du système,
- Q_i l'effort dissipatif lié à la coordonnée généralisée q_i.

En transposant l'équation de Lagrange du système simple de module présenté dans l'équation (2.131) et en considérant les coordonnées généralisées $(A_{ij}(t))_{[1,N]\times[1,M]}$ et $(B_{ij}(t))_{[1,N]\times[1,M]}$, on trouve l'équation d'équilibre du système couplé. Cette équation d'équilibre permet de bien comprendre l'influence du couplage fluide structure sur la dynamique de la structure.

$$\forall (i,j) \in [1,N]\times[1,M],$$
$$M\ddot{A}_{ij} + C\dot{A}_{ij} + KA_{ij} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_f}{\partial \dot{A}_{ij}}\right) - \frac{\partial T_f}{\partial A_{ij}} = 0, \tag{2.133}$$

$$\forall (i,j) \in [1,N]\times[1,M],$$
$$M\ddot{B}_{ij} + C\dot{B}_{ij} + KB_{ij} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_f}{\partial \dot{B}_{ij}}\right) - \frac{\partial T_f}{\partial B_{ij}} = 0, \tag{2.134}$$

On définit ainsi les efforts de couplage fluide-structure appliqués sur chaque module par :

$$\underline{F}_{ij}^{IFS} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_f}{\partial \dot{A}_{ij}}\right) + \frac{\partial T_f}{\partial A_{ij}} \\ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_f}{\partial \dot{B}_{ij}}\right) + \frac{\partial T_f}{\partial B_{ij}} \end{pmatrix} \tag{2.135}$$

2.6.4.2 Simplification du calcul des forces de couplage fluide-structure :

L'énergie cinétique du fluide T_f est déterminée analytiquement à l'aide des équations (2.116) et (2.119). Elle est exprimée à l'aide des inconnues du système $\left(\widetilde{U}_{ij}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$ et des coordonnées généralisées (les déplacements et vitesses des modules) $A_{ij}, B_{ij}, \dot{A}_{ij}, \dot{B}_{ij}$. Les inconnues du système fluide étant totalement dépendantes des coordonnées généralisées, on peut réécrire les dérivées de l'expression des forces de couplage (2.135) sous la forme :

$$\left(\frac{\partial T_f}{\partial A_{ij}}\right)_0 = \frac{\partial T_f}{\partial A_{ij}} + \sum_{k,l} \frac{\partial T_f}{\partial \widetilde{U}_{kl}} \frac{\partial \widetilde{U}_{kl}}{\partial A_{ij}} \tag{2.136}$$

On note $\left(\frac{\partial T_f}{\partial A_{ij}}\right)_0$ la dérivée partielle de l'énergie cinétique du fluide lorsqu'elle est exprimée uniquement en fonction des coordonnées généralisées $T_f\left(A_{ij}, B_{ij}, \dot{A}_{ij}, \dot{B}_{ij}\right)$. La minimisation de l'énergie cinétique du fluide par rapport aux inconnues du système fluide $\left(\widetilde{U}_{ij}(t)\right)_{[1,N]\times[1,M]}$ nous permet de déduire que le deuxième terme de l'équation est nul. Les dérivées $\frac{\partial T_f}{\partial A_{ij}}$ sont déterminées analytiquement en utilisant la même méthode que celle utilisée pour minimiser l'énergie cinétique du fluide présentée dans le paragraphe (2.6.3.3).

On calcule de la même manière les autres dérivées $\left(\frac{\partial T_f}{\partial \dot{A}_{ij}}\right)_0$, $\left(\frac{\partial T_f}{\partial B_{ij}}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial T_f}{\partial \ddot{B}_{ij}}\right)_0$.

Dans le cas où les déplacements des modules sont faibles ou lents, on peut négliger les termes aux dépendances complexes liés aux dérivées : $\left(\frac{\partial T_f}{\partial A_{ij}}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial T_f}{\partial B_{ij}}\right)_0$. Sous cette hypothèse, on retrouve le fait que le couplage peut être modélisé par une matrice de masse ajoutée.

Remarque 1 : *La méthode itérative présentée dans la partie dynamique du chapitre 3 permet de trouver un compromis intéressant. A chaque itération, les dépendances complexes liées à* $\left(\frac{\partial T_f}{\partial A_{ij}}\right)_0$ *et* $\left(\frac{\partial T_f}{\partial B_{ij}}\right)_0$ *sont négligées. Par contre, la géométrie considérée pour le calcul de l'énergie cinétique totale du fluide correspond à la géométrie des lames d'eau au début du pas de temps. Ainsi, on limite notre étude au calcul de matrices de masse ajoutée dans lesquelles les changements de géométrie sont pris en compte.*

Remarque 2 : *L'énergie cinétique totale du fluide comporte des termes quadratiques couplés dans sa dépendance en* $\left(\dot{A}_{ij}, \dot{B}_{ij}\right)$. *Les dérivées* $\left(\frac{\partial T_f}{\partial \dot{A}_{ij}}\right)_0$ *et* $\left(\frac{\partial T_f}{\partial \dot{B}_{ij}}\right)_0$ *font donc apparaître des termes de couplage entre les directions X et Y entre différents modules. Cela correspond à la généralisation de ce que nous avons appelé effet de coin dans l'étude du couplage fluide-structure sur un cube immergé excentré.*

Sous cette dernière hypothèse, le couplage fluide-structure peut être modélisé sous la forme de 4 matrices de masse ajoutée. Celles-ci sont définies par :

$$\underline{F}_{ij}^{IFS} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_f}{\partial \dot{A}_{ij}}\right) \\ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_f}{\partial \dot{B}_{ij}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_k \sum_l M_{xx}^H(i,j,k,l)\ddot{A}_{kl} - \sum_k \sum_l M_{xy}^H(i,j,k,l)\ddot{B}_{kl} \\ -\sum_k \sum_l M_{yx}^H(i,j,k,l)\ddot{A}_{kl} - \sum_k \sum_l M_{yy}^H(i,j,k,l)\ddot{B}_{kl} \end{pmatrix} \tag{2.137}$$

$$\underline{F}_{ij}^{IFS} = \begin{pmatrix} -M_{xx}^H . \underline{\underline{\ddot{A}}} - M_{xy}^H . \underline{\underline{\ddot{B}}} \\ -M_{yx}^H . \underline{\underline{\ddot{A}}} - M_{yy}^H . \underline{\underline{\ddot{B}}} \end{pmatrix} \tag{2.138}$$

2.6.4.3 Notations condensées :

En utilisant une notation différente, on peut condenser chacun des tenseurs :

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\ddot{A}}} &=^T \left(\ddot{A}_{11} \dots \ddot{A}_{1M} \ddot{A}_{21} \dots \ddot{A}_{2M} \dots \ddot{A}_{NM}\right), \\ \underline{\tilde{\ddot{B}}} &=^T \left(\ddot{B}_{11} \dots \ddot{B}_{1M} \ddot{B}_{21} \dots \ddot{B}_{2M} \dots \ddot{B}_{NM}\right), \end{aligned} \tag{2.139}$$

$$\begin{aligned} \underline{\widetilde{F_x^{IFS}}} &=^T \left(F_{11}^x \dots F_{1M}^x F_{21}^x \dots F_{2M}^x \dots F_{NM}^x\right), \\ \underline{\widetilde{F_y^{IFS}}} &=^T \left(F_{11}^y \dots F_{1M}^y F_{21}^y \dots F_{2M}^y \dots F_{NM}^y\right), \end{aligned} \tag{2.140}$$

$$\widetilde{\underline{\underline{M_{xx}^H}}} = \begin{pmatrix} \widehat{\underline{\underline{M_{11}^{xx}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{12}^{xx}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{1M}^{xx}}}} \\ \widehat{\underline{\underline{M_{21}^{xx}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{22}^{xx}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{2M}^{xx}}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widehat{\underline{\underline{M_{N1}^{xx}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{N2}^{xx}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{NM}^{xx}}}} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\underline{\underline{M_{xy}^H}}} = \begin{pmatrix} \widehat{\underline{\underline{M_{11}^{xy}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{12}^{xy}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{1M}^{xy}}}} \\ \widehat{\underline{\underline{M_{21}^{xy}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{22}^{xy}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{2M}^{xy}}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widehat{\underline{\underline{M_{N1}^{xy}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{N2}^{xy}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{NM}^{xy}}}} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\underline{\underline{M_{yx}^H}}} = \begin{pmatrix} \widehat{\underline{\underline{M_{11}^{yx}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{12}^{yx}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{1M}^{yx}}}} \\ \widehat{\underline{\underline{M_{21}^{yx}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{22}^{yx}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{2M}^{yx}}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widehat{\underline{\underline{M_{N1}^{yx}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{N2}^{yx}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{NM}^{yx}}}} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\underline{\underline{M_{yy}^H}}} = \begin{pmatrix} \widehat{\underline{\underline{M_{11}^{yy}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{12}^{yy}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{1M}^{yy}}}} \\ \widehat{\underline{\underline{M_{21}^{yy}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{22}^{yy}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{2M}^{yy}}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widehat{\underline{\underline{M_{N1}^{yy}}}} & \widehat{\underline{\underline{M_{N2}^{yy}}}} & \dots & \widehat{\underline{\underline{M_{NM}^{yy}}}} \end{pmatrix}, \tag{2.141}$$

La composante (k,l) de la matrice $\widehat{\underline{\underline{M_{ij}^{\alpha\beta}}}}$ s'exprime (α et β pouvant prendre les valeurs $[x,y]$) :

$$\widehat{M}_{ij}^{\alpha\beta}(k,l) = M_{\alpha\beta}^H(i,k,j,l) \tag{2.142}$$

Avec ces notations, on peut réécrire le couplage fluide-structure sous la forme synthètique :

$$\widetilde{\underline{F_x^{IFS}}} = -\widetilde{\underline{\underline{M_{xx}^H}}}.\underline{\tilde{\ddot{A}}} - \widetilde{\underline{\underline{M_{xy}^H}}}.\underline{\tilde{\ddot{B}}} \tag{2.143}$$

$$\widetilde{\underline{F_y^{IFS}}} = -\widetilde{\underline{\underline{M_{yx}^H}}}.\underline{\tilde{\ddot{A}}} - \widetilde{\underline{\underline{M_{yy}^H}}}.\underline{\tilde{\ddot{B}}} \tag{2.144}$$

2.6.4.4 Généralisation du résultat :

Les matrices de masses ajoutées hydrodynamiques sont obtenues de manière quasi-analytiques en suivant la démarche présentée ci-dessus. Elle permet un calcul quasi-instantané des matrices de couplage pour une configuration donnée et pour une tranche de fluide d'altitude comprise entre z et $z + \Delta z$ (en supposant un déplacement moyen de chacune des tranches de module).

Un calcul quasi-instantané présente le double avantage de permettre une actualisation de la géométrie des lames d'eau en fonction du déplacement des modules et permet de prendre en compte un déplacement différent en fonction des altitudes. On obtient pour chacune des matrices un échantillonage suivant z à une période spatiale de Δz.

De la même manière, au cours du calcul dynamique, on considérera un échantillonnage temporel à une période ΔT (la méthode sera présentée dans le détail dans l'étude dynamique). Cela permet de calculer à chaque itération temporelle une valeur actualisée des matrices de couplage hydrodynamique. Ainsi pour la i^{eme} itération, on connait les matrices de couplage des itérations $(i, i-1, i-2, \dots, 0)$.

Il est ensuite possible d'utiliser différentes fonctions de lissage pour l'échantillonnage spatial (connu sur l'ensemble du domaine de définition à une période Δz) et pour l'échantillonnage temporel (connu sur son historique jusqu'à la i^{eme} itération à une période ΔT). Une fois ce travail effectué, on peut trouver des fonctions continues décrivant chacune des matrices de couplage hydrodynamique. On supposera ces résultats pour l'étude dynamique couplée :

$$\widetilde{\underline{\underline{M^H_{xx}}}}(z,t),\ \widetilde{\underline{\underline{M^H_{xy}}}}(z,t),\ \widetilde{\underline{\underline{M^H_{yx}}}}(z,t),\ \widetilde{\underline{\underline{M^H_{yy}}}}(z,t). \tag{2.145}$$

2.7 Résultats :

2.7.1 Résultats de calcul de pression issus du modèle de couplage fluide-structure :

Les résultats présentés dans cette partie portent sur les répartitions de pression déduites du calcul des matrices de masse de couplage fluide-structure par rapport à celles obtenues à l'aide d'un logiciel éléments finis ($ANSYS^{TM}$). Nous considérerons différentes configurations géométriques sur lesquelles nous appliquerons des chargements quelconques.

Dans chacune des configurations de piscine, nous simplifierons les géométries considérées en modélisant des modules carrés de dimensions $L_x = L_y = L = 2.5m$ et une épaisseur de fluide égale sur chacune des lames d'eau $e = 0.03m$.

2.7.1.1 - Configuration (1×1)

On considère un cas académique d'un module seul centré dans une piscine. On accélère le module dans la direction X. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 2.11. Les résultats éléments finis sont représentés dans la partie gauche et ceux obtenus par une méthode analytique sont à droite. On observe une bonne adéquation entre les deux résultats.

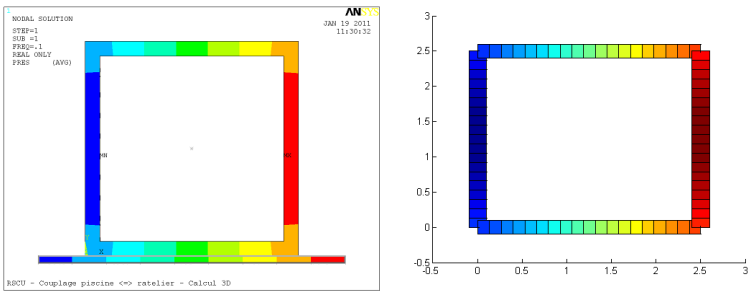


FIGURE 2.11 – Configuration (1, 1) - Accélération dans la direction X

2.7.1.2 - Configuration (2×4)

On considère une configuration de piscine avec (2×4) modules. On accélère le module $(1, 3)$ dans la direction X puis dans la direction Y. Les résultats sont présentés respectivement dans les figures 2.12 pour l'accélération suivant X, et 2.13 pour l'accélération dans

la direction Y. Les résultats éléments finis sont représentés dans la partie gauche et ceux obtenus par une méthode analytique sont à droite. On observe une bonne adéquation entre les deux résultats.

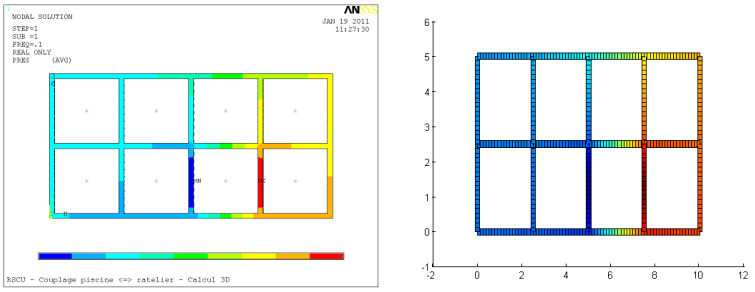


FIGURE 2.12 – Configuration (2, 4) - Accélération dans la direction X

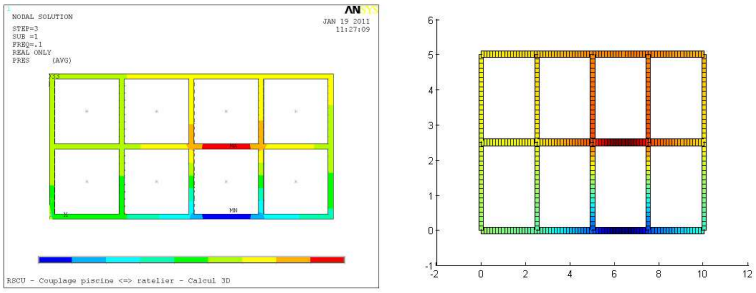


FIGURE 2.13 – Configuration (2, 4) - Accélération dans la direction Y

2.7.1.3 - Configuration (3×4)

On considère une configuration de piscine avec (3×4) modules. On accélère de manière symétrique en direction du centre de la piscine les modules à chaque coin dans la direction X puis dans la direction Y. Les résultats sont présentés respectivement dans les figures 2.14 pour l'accélération suivant X, et 2.15 pour l'accélération dans la direction Y. Les résultats éléments finis sont représentés dans la partie gauche et ceux obtenus par une méthode analytique sont à droite. On observe une bonne adéquation entre les deux résultats.

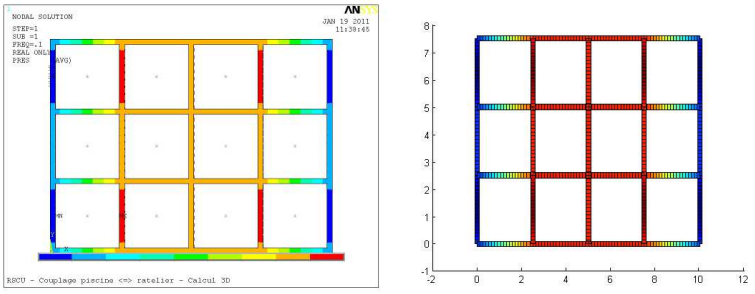


FIGURE 2.14 – Configuration (3, 4) - Accélération symétrique suivant la direction X

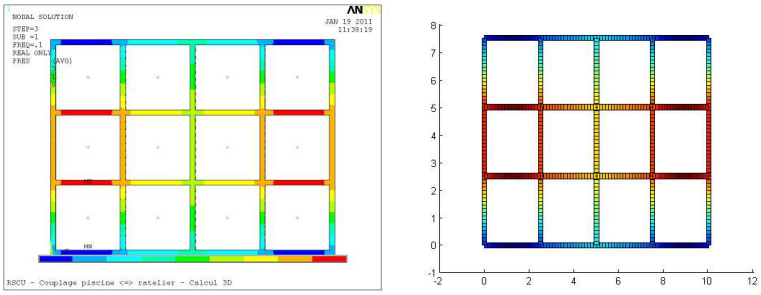


FIGURE 2.15 – Configuration (3, 4) - Accélération symmétrique suivant la direction Y

2.8 Conclusion :

Nous avons vu dans ce chapitre les fondements théoriques de masses ajoutées de couplage fluide-structure ainsi que les modèles analytiques historiques ayant fondé cette théorie. Nous avons ensuite présenté les modèles analytiques approchés récents que nous avons enrichis dans le cas de parallélépipédes rectangles concentriques. Nous avons ensuite présenté un modèle analytique approché pour les couplages de quadrillage de structure. Enfin, nous avons présenté des comparaisons entre les différents modèles existants et les solutions éléments finis.

Les modèles développés dans cette thèse présentent une bonne adéquation avec les résultats éléments finis dans le cas des lames d'eau confinées et donnent un ordre de grandeur acceptable pour des lames d'eau d'épaisseur proche des dimensions caractéristiques de la structure. Au-delà de cette épaisseur, il est préférable d'utiliser une approche d'écoulement dans un milieu infini.

Les solutions développées proposent une avancée très sensible dans la prise en compte des effets de coin, c'est-à-dire l'évaluation des termes non diagonaux des matrices de masse de couplage fluide-structure qui apparaissent dès que la géométrie des lames d'eau ne présentent plus de plan de symétrie. Cela intervient dans quasiment toutes les configurations de structure glissante immergée dès lors qu'on actualise les géométries des lames d'eau avec le déplacement de la structure. Cet effet de coin peut être non négligeable lorsqu'on se rapproche du bord du réservoir. Cette condition étant l'un des critères de dimensionnement de ces structures, il est donc essentiel de la prendre en compte.

Nos modèles répondent donc à la double exigence que nous nous sommes fixés dans cette thèse :

- Modélisation la plus fine possible du comportement réelle de la structure : Cet objectif est rempli dans le cas des lames d'eau confinées avec notamment la prise en compte des effets de coin, une description plus fine des profils de vitesse dans le fluide pour des configurations centrées ainsi que la possibilité de pouvoir actualiser la géométrie des lames d'eau en fonction du déplacement de la structure immergée,
- Temps de calcul quasiment instantané : Cet objectif est aussi rempli étant donné qu'il s'agit de solution analytique ou quasi-analytique impliquant la résolution d'un système linéaire d'équations de faible dimension.

Nous verrons dans le chapitre 3 comment ces matrices de couplage sont intégrées dans les modèles de dynamique non-linéaire et comment l'évolution des géométries des lames d'eau est intégrée dans ce calcul.

Bibliographie

[1] R.J. Fritz, The effect of liquids on the dynamic motions of immersed solids, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, 94, 167-173, 1972.

[2] J. Stabel, M. Ren and H. Swelim, Calculation of seismic loads on fuel storage racks under consideration of fluid-structure interaction, Trans. SMIRT-12, 1993.

[3] M. Ren and J. Stabel, Comparison of different analytical formulations for FSI between fuel storage racks, Trans. SMIRT-15, 1999.

[4] J. Stabel and M. Ren, Fluid-structure-interaction for the analysis of the dynamics of fuel storage racks in the case of seismic loads, Nuclear Engineering and Design, 206, 167-176, 2001.

[5] E. de Langre, Fluides et Solides, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2006.

[6] A.I. Soler, K.P. Singh, Dynamic coupling in a closely spaced two-body system vibrating in a liquid medium : the case of fuel racks. The 3rd Keswick International Conference in Nuclear Plants, 1982.

[7] G.W. Housner, Dynamic pressures on accelerated fluid containers, Bulletin of the seismological society of America, 1957.

[8] H. Jeffreys, Free oscillations of water in an alliptical lake, Proc. London Math. Soc., Vol. 23, 1924.

[9] H.M. Westergaard, Water pressures on dams during earthquakes, Trans. ASME, Vol. 98, 1933.

[10] L.M. Hoskins, L.S. Jacobsen, Water pressure in a tank caused by a simulated earthquake, Bulletin of Seismic Society of America, Vol. 24, 1934.

[11] L.S. Jacobsen, Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank an of a fluid surrounding a cylindrical pier, Bulletin of Seismic Society of America, Vol. 39, 1949.

[12] P.W. Werner, K.J. Sundquist, On hydrodynamic earthquake effects, Trans. American Geophysics Union, Vol. 30, 1949,

[13] L.S. Jacobsen, R.S. Ayre, Hydrodynamic experiments with rigid cylindrical tanks subjected to transiant motions, Bulletin of Seismic Society of America, Vol. 11, 1951.

[14] E.W. Graham, A.M. Rodriguez, Characteristics of fuel motion which affects airplane dynamics, Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, No. 2, 1952.

[15] C.N. Zangar, Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquakes, Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis, Vol. 10, No. 2, 1953.

[16] G.W. Housner, Earthquake pressures on fluid containers, California Institute of Technology, 1954.

[17] F. Axisa, J. Antunes, B. Villard, Overview of numerical methods for predicting flow-induced vibrations, ASME Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 100 : 7-14, 1988.

[18] A. Bonnet, J. Luneau, Théorie de la dynamique des fluides, Cepadues-Editions, Toulouse, 1989.

[19] R-J. Gibert, Vibrations des structures, Eyrolles, 1988.

[20] P. Huerre, Mécanique des fluides, Ecole Polytechnique, 1998.

[21] H. J-P. Morand, R. Ohayon, Interactions Fluides-Structures, Masson, 1992.

[22] L. Hammami, Contributions à l'étude de l'intéraction fluide-structure dans les faiseaux de tubes par une homogénéisation, Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 1990.

[23] A. Preumont, A. Raymackersa, On the influence of the fluid on the seismic response of FBR Cores, 10th S.M.I.R.T., Los Angeles, 1989.

[24] J. Planchard, F.N. Remy, P. Sonneville, A simplified method for determining acoustic and tube eigenfrequencies in heat exchangers, ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 104 : 175-179, 1982.

[25] J. Planchard et al., Natural frequencies of tube bundle in an uncompressible fluid, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 41 : 47-68, 1983.

[26] J. Planchard, M. Ibnou Zahir, Asymptotic expansion of resonance frequencies of elastic tube bank in a liguid, ASME, PVP Conference, Vol. 6, 17-25, 1984.

[27] J. Planchard, Comportement dynamique des faisceaux de tubes immergés dans un fluide : Aspects théoriques et numériques de la dynamique des structures, p. 165-245, Collection de la Direction des études et recherches d'EDF.

[28] R. Moudrik, Etude du comportement sismique d'un ratelier de stockage d'assemblages combustibles usés en piscine, Thèse de doctorat du CEA, 1996.

[29] M. Moreira, J. Antunes, A nonlinear model for fluid-coupled vibrations of spent nuclear racks, Ecole Polytechnique, Paris, 2004.

Chapitre 3

Etude d'une structure glissante sous chargement sismique tridimensionnel

3.1 Introduction

Ce chapitre porte sur l'étude du comportement dynamique d'une structure immergée glissante soumise à un séisme quelconque. La théorie développée permet de s'adapter à n'importe quelle structure pouvant être décrite par ses N premiers modes propres avec deux conditions d'appui encastrée en pied-libre, et libre-libre. Le couplage fluide-structure utilisé dans ce chapitre reprend les résultats développés dans le chapitre 2.

Les premiers articles portant sur le comportement dynamique des structures rigides avec des conditions de contact datent de la fin du XIX^{eme} siècle et du début du XX^{eme} . On peut citer notamment les articles [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34] et [35]. Ils traitent du comportement dynamique des particules solides rigides ou de structures rigides mobiles individuelles. Ils définissent les conditions de roulement ou de basculement mais n'arrivent à estimer le comportement et le déplacement que dans des cas académiques simples.

Les études sur le comportement en basculement des solides rigides se sont aussi fortement développées dans les années 1980. Ils considèrent notamment des chargements tridimensionnels sur des structures rigides avec des conditions de contact unilatéral avec frottement. Les articles [13], [14], [15] et [16] évaluent les conditions d'initiation des basculements mais aussi celles du début des instabilités aboutissant au renversement complet de la structure. Ils relient cela au spectre de dimensionnement sismique ou à l'intensité du signal sismique.

Ces thématiques sont revenues au goût du jour récemment notamment dans l'entretien et l'estimation des risques des bâtiments historiques pendant les sollicitations sismiques. Les articles [17], [18], [19], [20], [21], [22] et [23] étudient notamment les cas d'empilement de structures rigides avec conditions de contact unilatéral ou frottant. Ils traitent aussi des mouvements complexes d'ondulation de colonnes cylindriques avec décollement et estiment les déplacements maximaux de ces structures.

Les premières solutions analytiques du comportement des structures glissantes sous chargement sismique datent des années 1980. On peut citer notamment les articles [1]

et [2] qui traitent de l'étude des glissements d'une masse ponctuelle et les articles [1], [10], [11] et [12] qui traitent de l'étude des glissements des systèmes masses-ressort sous chargements sismiques unidirectionnels ou tridimensionnels simplifiés.

Les études analytiques des structures glissantes immergées sous chargement sismiques restent relativement limitées. Elles sont concentrées dans l'industrie nucléaire sur l'étude des râteliers de stockage de combustible. On citera une thèse de référence sur le sujet [24] et les articles [25], [26] et [27]. Ils apportent des avancées sur les méthodes de résolution analytiques, numériques et expérimentales de ces problèmes couplés chaotiques. Ils donnent aussi des évaluations sur la sélection des différents modèles de frottement parmi lesquels on peut citer [3], [4], [5], [6] et [7].

Notre travail s'inscrit dans le prolongement de ces articles en proposant des solutions quasi-analytiques sur des modèles de structures plus complexes :
- Prise en compte du comportement vibratoire interne de la structure (N modes propres considérés),
- Modélisation plus fine des masses ajoutées du couplage fluide-structure,
- Actualisation de la géométrie des lames d'eau.

En parallèle de cette modélisation plus fine du système, nous cherchons un temps de calcul quasiment instantané et donc compatible avec des études paramétriques de modéle stochastique.

Ce chapitre présente donc les méthodes de résolution des problèmes de dynamique non-linéaire de structures immergées sous chargement sismique. Dans un premier temps, nous détaillerons les hypothèses du modèle. Puis, nous développerons la méthode de résolution quasi-analytique pour une poutre immergée glissante sous séisme. Ce modéle sera ensuite étendu aux structures complexes décrites par leurs bases modales. Enfin, nous appliquerons ces modéles sur des cas simplifiés de masse glissante immergée et de système masses-ressort glissant immergé.

3.2 Hypothèses de l'étude :

Nous présentons dans ce paragraphe les différentes hypothèses de modélisation qui seront appliqués à l'ensemble des modèles qui sont développés dans ce chapitre. On précisera notamment :
- Modélisation du frottement,
- Hypothèses de non-basculement,
- Description des signaux sismiques utilisés.

3.2.1 Modélisation du frottement :

Nous avons cité en introduction différents modèles de frottement répondant à différents hypothèses de linéarisation des équations, de modélisations microscopiques fines ou d'adéquations avec des résultats expérimentaux. Cependant, le comportement chaotique des structures glissantes immergées ne permet pas de statuer sur le modèle représentant

le mieux la physique macroscopique du système réel. Nous choisissons donc un modèle le plus simple possible de frottement sur lequel il sera possible d'utiliser une méthode de dimensionnement stochastique et ainsi d'évaluer plus finement ce comportement hautement non-linéaire.

Nous modélisons le frottement sous la forme d'un frottement de Coulomb solide. Il s'agit d'une modélisation réglementaire simplifiée. On considère deux coefficients de frottement : un frottement statique μ_S et un coefficient dynamique μ_D. Pour des raisons de stabilité des équations, on doit avoir :

$$\mu_D \leq \mu_S \tag{3.1}$$

Remarque : *Il est tout à fait possible d'adapter les équations qui seront présentées à d'autres modèles de frottement en estimant à chaque pas de temps la valeur du coefficient de frottement et de le remplacer dans les équations déjà obtenues.*

3.2.2 Hypothèse de non-basculement :

Nous négligerons le basculement des structures étudiées. Cette hypothèse est vérifiée si on étudie des structures dont les coefficients de frottement sont suffisamment faibles pour que le glissement se déclenche avant le basculement. Si on considère un cube rigide uniforme soumis à un séisme, on peut définir la zone de déclenchement du glissement et celle de déclenchement du basculement.

Le cube considéré est représenté dans la figure 3.1. Le cube étant uniforme, son centre de gravité est confondu avec son centre géométrique.

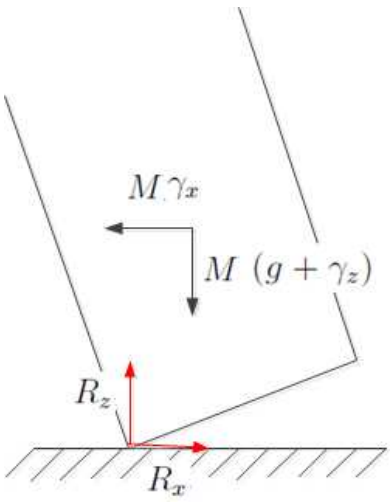


FIGURE 3.1 – Schéma d'un cube basculant

On considère un instant donné du séisme. L'accélération verticale totale vaut $(g + \gamma_z)$. On cherche les valeurs d'accélérations horizontales (γ_x, γ_y) déclenchant le premier basculement ou le premier glissement.

3.2.2.1 Détermination du premier glissement :

L'équilibre statique du cube permet rapidement de trouver les valeurs d'accélération limites à partir desquelles le glissement se déclenche. On trouve que ses accélérations limites $(\gamma_{Sx}, \gamma_{Sy})$ évoluent sur un cercle défini par :

$$\gamma_{Sx}^2 + \gamma_{Sy}^2 = \mu_S^2 \left(g + \gamma_z\right)^2 \tag{3.2}$$

Le déclenchement du glissement borne la valeur de l'effort de réaction horizontal par un maximum qui correspond à la limite de déclenchement du glissement.

3.2.2.2 Détermination du premier basculement :

L'équilibre statique en rotation du cube dans chacun des plans de basculement permet rapidement de trouver les valeurs d'accélération limites à partir desquelles les basculements se déclenchent. On trouve ses accélérations limites $(\gamma_{Bx}, \gamma_{By})$ définis par :

$$\|\gamma_{Bx}\| = \left(g + \gamma_z\right) \frac{a}{H} \tag{3.3}$$

$$\|\gamma_{By}\| = \left(g + \gamma_z\right) \frac{b}{H} \tag{3.4}$$

Une fois le basculement déclenché, la dynamique de la structure est complexe et son comportement en rotation influence très fortement l'effort vertical au point de contact au sol. Dans les phases d'accroissement de l'angle de basculement, l'effort de réaction vertical est plus grand que celui d'un cube sans basculement. Dans les phases de diminution de l'angle de basculement (phase de descente), l'effort de réaction vertical est plus faible que celui d'un cube sans rotation. Il s'annule même lorsque le cube est très proche du sol. Le cube décolle donc pendant quelques instants avant de toucher le sol. Cela déclenche le glissement du cube.

3.2.2.3 Domaine de validité de l'hypothèse de non-basculement :

On peut représenter les domaines de déclenchement des premiers glissements et premiers basculements sur un même schéma. Nous considérerons plusieurs configurations géométriques du cube pour illuster les différents cas possibles. Nous représentons dans les schémas ci-dessous les seuils de déclenchement du premier glissement et du premier basculement.

Ces diagrammes se lisent de la manière suivante : Le système est initiallement au repos et se situe donc à l'origine du repère. Puis le signal sismique se déclenche. Celui-ci étant aléatoire, tous les trajets de chargement sont possibles et peuvent être représentés sur ces schémas. Lorsqu'une ligne est franchie (soit le cercle, soit les droites) l'instabilité correspondante est initié. Il s'agira du début du glissement si le cercle est franchi, et du début du basculement si une des lignes est franchie.

Lorsqu'un glissement est initié, les efforts latéraux transmis par le séisme sont bornés. Il ne sera donc pas possible de déclencher un basculement lorsque la totalité du cercle se trouve à une plus grande distance de l'origine que les droites des seuils de déclenchement des basculements. La réciproque n'est pas vraie. C'est-à-dire qu'il est possible qu'un cube en train de basculer puisse déclencher une phase de glissement.

Structure 'aplatie' :

Les résultats de cette configuration sont représentés dans la figure 3.2. On remarque qu'ici seul le glissement peut se déclencher.

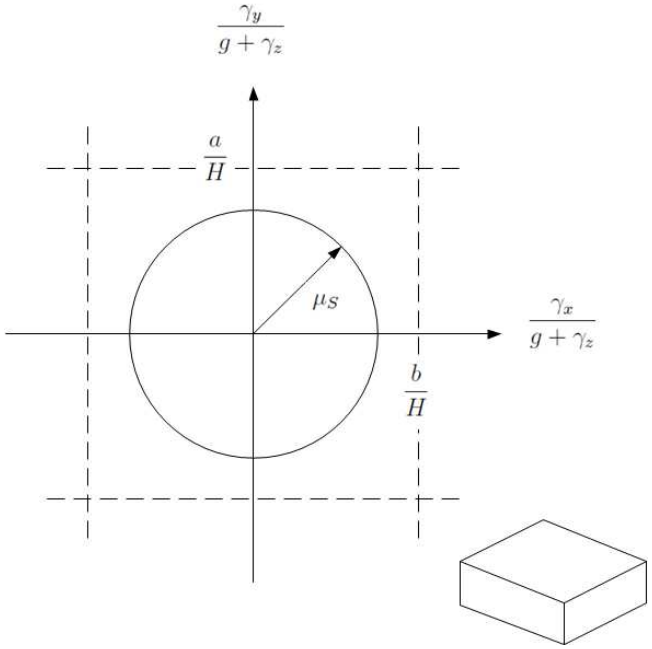


FIGURE 3.2 – Seuils de déclenchement du basculement et du glissement pour une structure aplatie

Structure instable sur un côté :

Les résultats de cette configuration sont représentés dans la figure 3.3. On remarque que la structure a deux comportements distincts en fonction de l'axe de sollicitation. Elle pourra basculer sans glissement pour une sollicitation suivant $\underline{e_y}$ et glisser sans basculement pour une sollicitation suivant $\underline{e_x}$.

Structure élancée :

Les résultats de cette configuration sont représentés dans la figure 3.4. On remarque que la structure élancée réagit au séisme principalement par un comportement de basculement. En fonction de l'évolution temporelle du séisme, il est possible qu'un glissement se déclenche notamment dans les phases où la structure revient à sa position 'stable' après un basculement.

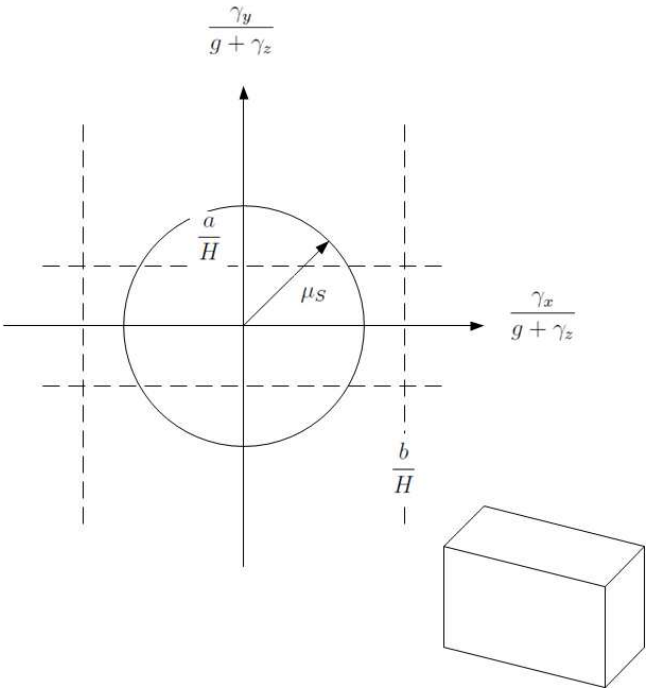


FIGURE 3.3 – Seuils de déclenchement du basculement et du glissement pour une structure instable sur un côté

Structure au comportement complexe :

Les résultats de cette configuration sont représentés dans la figure 3.5. On remarque que, dans cette configuration, le trajet de chargement influence très fortement les comportements futurs de la structure. En effet, il est possible de déclencher soit un glissement, soit un basculement. Lorsque le glissement est déclenché en premier, il est possible que les basculements ne soient plus possibles tant que le glissement est actif (ce sera le cas lorsque le coefficient de frottement dynamique est nettement plus faible que le coefficient de frottement statique). Alors que si un basculement est déclenché en premier, la suite du comportement est incertaine.

Il est important d'identifier ces structures afin de proposer un contrôle actif permettant d'orienter le chemin de chargement vers les zones de glissement plutôt que sur les zones de basculement. On peut penser notamment à des oscillateurs harmoniques accordés orientés dans les bonnes directions et accordés aux fréquences principales de réponse de la structure.

3.2.3 Signaux sismiques :

Afin de donner une portée générale à notre modèle nous ne faisons pas d'hypothèses fortes sur les signaux sismiques utilisés. Il peut s'agir de signaux sismiques réels issus de mesure, de signaux synthétiques issus de spectre de dimensionnement ou de signaux parfaits choisis par l'utilisateur (sommes de sinusoïdes prédéfinies, bruit blanc, chargements créneaux, impacts, ...).

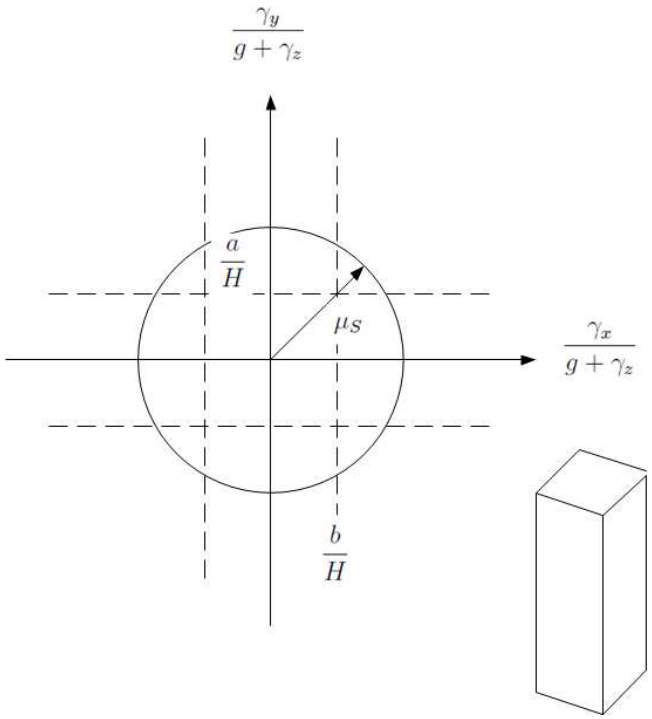


FIGURE 3.4 – Seuils de déclenchement du basculement et du glissement pour une structure élancée

3.2.3.1 Signaux sismiques temporels :

Les signaux sismiques temporels correspondent à la donnée d'entrée de notre modèle. Il n'est pas nécessaire de la modifier. Cependant, on suppose ces signaux sismiques échantillonnés à une période ΔT_S suffisamment petite pour représenter tous les contenus fréquentiels pertinents. Cet échantillonnage agit comme une filtre passe-bas sur notre système. La fréquence de coupure est directement liée au choix de ΔT_S. Ce principe est énoncé dans le Théorème d'échantillonage de Nyquist-Shannon [2] :

$$\frac{1}{\Delta T_S} \geq 2 f_M \tag{3.5}$$

Avec f_M la fréquence maximale d'intérêt de notre étude.

3.2.3.2 Signaux générés à partir des spectres de dimensionnement :

Les règles de dimensionnement sismique ont été historiquement définies sur des spectres de dimensionnement. La méthode de détermination des spectres de dimensionnement des centrales nucléaires est donnée dans le chapitre I. Les calculs déterministes non-linéaires sont effectués à partir de signaux sismiques temporels et nécessitent donc de générer des signaux temporels à partir des spectres de dimensionnement. En tirant aléatoirement des déphasages pour chacune des fréquences.

On obtient ainsi un signal sismique temporel qui est ensuite tronqué à la durée du séisme. Puis à l'aide d'une transformée de Fourrier, on vérifie que le spectre du signal généré suit des propriétés proches de celles du spectre de dimensionnement. Si tel est

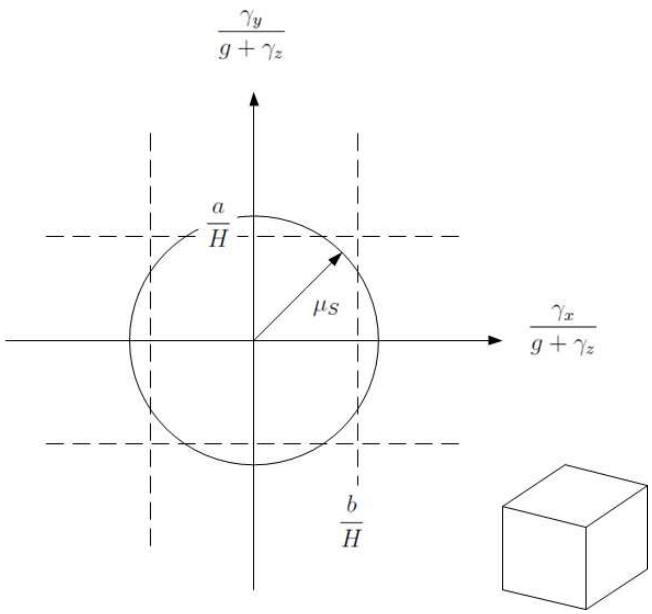


FIGURE 3.5 – Seuils de déclenchement du basculement et du glissement pour une structure au comportement complexe

le cas, on conserve ce signal. Sinon, on peut booster l'influence de certaines fréquences sous-évaluées. On regarde l'impact sur le signal sismique temporel. Si celui-ci garde une allure similaire aux signaux sismiques réels (phase de croissance du signal, phase forte, phase de décroissance), on le conserve. Dans le cas contraire, on recommence au tirage aléatoire des déphasages des fréquences entre elles.

Il est nécessaire de générer de multiples signaux temporels à partir dun spectre de dimensionnement afin de couvrir tous les séismes possibles. Les phases étant tirées aléatoirement, il est possible de trouver des signaux temporels moins pénalisants en fonction des tirages. Ces tirages de variables aléatoires rejoignent la méthode de dimensionnement stochastique.

Séismes EUR : *Les résultats obtenus à la fin de ce chapitre seront obtenus à l'aide des séismes EUR qui ont été générés à partir des spectres de dimensionnement issus des normes européennes. On utilisera notamment des signaux correspondant à un sol de raideur moyenne.*

3.3 Etude d'une poutre glissante

Dans le cas des structures immergées élancées, les caractéristiques chaotiques de la réponse de la structure glissante rendent nécessaires une modélisation plus fine. Afin d'atteindre cette objectif, nous modélisons la structure élancée sous la forme d'une poutre droite et uniforme soumise à un couplage fluide-structure sous chargement sismique aléatoire. Ce modèle plus détaillé permettra d'étudier la pertinence d'une troncature des modes propres.

3.3.1 Description du modéle

Le modèle poutre glissante est représenté par une poutre de section S, de longueur l et matrice d'inertie $\underline{\underline{I}}$ composée d'un matériau homogène de masse volumique ρ et de module d'Young E. On supposera que la poutre peut glisser sans basculer. On considérera donc une poutre dont les rotations sont bloquées en $z = 0$ et avec une extrémité libre en $z = L$.

On fait l'hypothèse que les axes principaux de la section sont confondus avec les directions X et Y. On peut simplifier l'expression de l'inertie en se donnant les caractéristiques I_{xx} et I_{yy}. Les valeurs des inerties peuvent être obtenues à partir des premières fréquences propres mesurées sur la structure réelle sèche. On utilise alors une méthode des moindres carrés pour obtenir une bonne estimation :
– soit de la valeur des N premières fréquences d'oscillation propre suivant X et Y,
– soit de la forme des N premiers modes propres de la structure,
– soit d'un critère mixte donnant une pondération aux deux critères précédents.
Une bonne estimation des fréquences propres permet de rendre compte de manière pertinente des phénomènes de résonance de la structure. Une bonne estimation des déformées modales permet une meilleure évaluation de la masse de couplage fluide-structure. Dans le cas des lames d'eau de faible épaisseur, la masse modale ajoutée par le couplage est sensiblement supérieure à la masse modale de la structure sèche. Une bonne estimation de la déformée modale est donc nécessaire.

Les masses linéiques de couplage fluide-structure sont représentées par des fonctions $m^{\alpha}_{xx}(z,t)$, $m^{\alpha}_{xy}(z,t)$ et $m^{\alpha}_{yy}(z,t)$. L'exposant (α) sera remplacé par H pour la masse hydrodynamique, 1 pour la masse de couplage de type Archimède. La masse de couplage d'Archimède est uniformément répartie sur la hauteur et ne dépend donc pas de z. De plus, on a $m^{1}_{xy}(t) = 0$. Les méthodes d'obtention de ces fonctions sont présentées dans le chapitre 2. Elles correspondent à une hypothèse de couplage fluide-structure d'un écoulement confiné plan. Ces masses linéiques de couplage ont à la fois une dépendance spatiale et temporelle. La dépendance temporelle est liée à l'actualisation de la géomètrie des lames d'eau. La dépendance spatiale (ici uniquement suivant z) représente l'évolution de la géométrie des lames d'eau en fonction de l'altitude lors de la mise en flexion de la structure. Ce dernier point est représenté dans la figure 3.6.

Les hypothèses portant sur le glissement sont présentées dans la partie (3.2.1). De plus, on suppose que le séisme vertical ne fait pas décoller la structure (c'est-à-dire $|\gamma_z(t)| < g$). On néglige dans cette partie la rotation autour de l'axe vertical $\underline{e_z}$. Les seuls mouvements considérés sont donc des mouvements de corps rigide de translation et de mise en flexion de la poutre correspondant à des flèches suivant $\underline{e_x}$ et $\underline{e_y}$.

3.3.2 Mise en équation du problème

Le système étudié peut se mettre en équation sous la forme suivante :

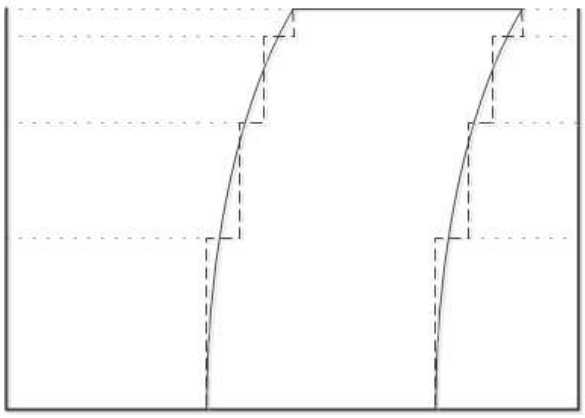


FIGURE 3.6 – Schéma réprésentant les déplacements utilisés pour le modèle de détermination du couplage fluide-structure en fonction de la mise en flexion de la structure

$$\begin{cases} \left(\rho S + m_{xx}^H(z,t)\right)\ddot{u}_x(z,t) + m_{xy}^H(z,t)\ddot{u}_y(z,t) + \left(\dot{m}_{xx}^H(z,t) + c\right)\dot{u}_x(z,t) + \dot{m}_{xy}^H(z,t)\dot{u}_y(z,t) \\ \qquad + EI_{xx}\dfrac{d^4u_x}{dz^4}(z,t) = R_x(t)\delta_0(z) + \left(m_{xx}^1 - \rho S\right)\gamma_x(t) \\ \\ \left(\rho S + m_{yy}^H\right)\ddot{u}_y(z,t) + m_{xy}^H(z,t)\ddot{u}_x(z,t) + \left(\dot{m}_{yy}^H(z,t) + c\right)\dot{u}_y(z,t) + \dot{m}_{xy}^H(z,t)\dot{u}_x(z,t) \\ \qquad + EI_{yy}\dfrac{d^4u_y}{dz^4}(z,t) = R_y(t)\delta_0(z) + \left(m_{yy}^1 - \rho S\right)\gamma_y(t) \\ \\ R_z(t) = \displaystyle\int_{z=0}^{L}\left(\rho S - m_{zz}^1\right)dz\,(\gamma_z(t) + g) \end{cases} \tag{3.6}$$

Avec $\delta_0(z)$ une fonction Dirac valant 1 pour $z = 0$ et c l'amortissement de la structure sèche.

On introduit des fonctions de formes $\underline{\phi}_i(z)$ correspondant à des fonctions de modes propres de la poutre. Les fonctions de modes propres $\underline{\phi}_i(z)$ ont des composantes suivant $\underline{e}_x$ et $\underline{e}_y$ que l'on note ϕ_{xi} et ϕ_{yi}. Le déplacement se réécrit :

$$U_x(z,t) = \underline{\phi_x}^T(z)\underline{q}(t)$$
$$U_y(z,t) = \underline{\phi_y}^T(z)\underline{q}(t)$$

Ces équations se réécrivent sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_i \Bigg[\left(\rho S + m_{xx}^H\right)(z,t)\phi_{xi}(z)\ddot{q}_i(t) + m_{xy}^H(z,t)\phi_{yi}(z)\ddot{q}_i(t) + \left(\dot{m}_{xx}^H(z,t) + m_l 2\xi_i\omega_i\right)\phi_{xi}(z)\dot{q}_i(t) \\
\qquad\qquad + \dot{m}_{xy}^H(z,t)\phi_{yi}(z)\dot{q}_i(t) + EI_{xx}\dfrac{d^4\phi_{xi}}{dz^4}(z)q_i(t)\Bigg] = R_x(t)\delta_0(z) + \left(m_{xx}^1 - \rho S\right)\gamma_x(t) \\
\\
\displaystyle\sum_i \Bigg[\left(\rho S + m_{yy}^H\right)(z,t)\phi_{yi}(z)\ddot{q}_i(t) + m_{xy}^H(z,t)\phi_{yi}(z)\ddot{q}_i(t) + \left(\dot{m}_{yy}^H(z,t) + m_l 2\xi_i\omega_i\right)\phi_{yi}(z)\dot{q}_i(t) \\
\qquad\qquad + \dot{m}_{xy}^H(z,t)\phi_{xi}(z)\dot{q}_i(t) + EI_{yy}\dfrac{d^4\phi_{yi}}{dz^4}(z)q_i(t)\Bigg] = R_y(t)\delta_0(z) + \left(m_{yy}^1 - \rho S\right)\gamma_y(t) \\
\\
\qquad\qquad R_z(t) = \displaystyle\int_{z=0}^{H}\left(\rho S - m_{zz}^1\right)dz\,(\gamma_z(t) + g)
\end{array}\right. \tag{3.7}$$

Introduisant : ξ_i le coefficient d'amortissement du mode i, ω_i la pulsation propre du mode i. Ces coefficients d'amortissement et ces pulsations dépendent de la base de mode propre considéré. Dans la suite, nous préciserons différentes notations pour distinguer les différentes bases de modes propres.

En projetant sur le mode propre $\phi_j(z)$, on peut réécrire cette équation :

$$\left(\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M_{IFS}}}\right)\underline{\ddot{q}}(t) + \left(\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{C_{IFS}}}\right)\underline{\dot{q}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{q}(t) = \underline{R} - \underline{F} + \underline{F_{IFS}} \tag{3.8}$$

En introduisant :

$$\begin{cases}
\underline{\underline{M}} = \int_{z=0}^{L} \rho S \underline{\underline{\phi}}^T . \underline{\underline{\phi}}(z) dz & \left(M_{ij} = \int_{z=0}^{L} \rho S \left(\phi_{xi}(z).\phi_{xj}(z) + \phi_{yi}(z).\phi_{yj}(z) \right) dz \right) \\
\underline{\underline{M_{IFS}}} = \int_{z=0}^{L} \underline{\underline{\phi}}^T . \underline{\underline{M^H}} . \underline{\underline{\phi}}(z,t) dz & \left(M_{ij}^{IFS} = \int_{z=0}^{L} \left(m_{xx}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{xj}(z) + m_{xy}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{yj}(z) \right. \right. \\
& \left. \left. + m_{xy}^H(z,t)\phi_{yi}(z).\phi_{xj}(z) + m_{yy}^H(z,t)\phi_{yi}(z).\phi_{yj}(z) dz \right) \right) \\
\underline{\underline{C}} = \int_{z=0}^{L} \rho S 2 \xi_i \omega_i \underline{\underline{\phi}}^T . \underline{\underline{\phi}}(z) dz & \left(C_{ij} = \int_{z=0}^{L} \rho S 2 \xi_i \omega_i \left(\phi_{xi}(z).\phi_{xj}(z) + \phi_{yi}(z).\phi_{yj}(z) \right) dz \right) \\
\underline{\underline{C_{IFS}}} = \int_{z=0}^{L} \underline{\underline{\phi}}^T . \underline{\underline{\dot{M}^H}} . \underline{\underline{\phi}}(z,t) dz & \left(C_{ij}^{IFS} = \int_{z=0}^{L} \left(\dot{m}_{xx}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{xj}(z) + \dot{m}_{xy}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{yj}(z) \right. \right. \\
& \left. \left. + \dot{m}_{xy}^H(z,t)\phi_{yi}(z).\phi_{xj}(z) + \dot{m}_{yy}^H(z,t)\phi_{yi}(z).\phi_{yj}(z) \right) dz \right) \\
\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \dots \\ & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N^2 \end{pmatrix} & \text{Les } \omega_i \text{ dépendent de la base modale sélectionnée.} \\
\underline{R} = \underline{\underline{\phi}}^T(0).\underline{R}(t) & R_i(t) = \left(\phi_{xi}(0) R_x(t) + \phi_{yi}(0) R_y(t) \right), \\
\underline{F} = \int_{z=0}^{L} \rho S \underline{\underline{\phi}}^T(z) \underline{\gamma}(t) dz & F_i(t) = \int_{z=0}^{L} \rho S \left(\phi_{xi}(z)\gamma_x(t) + \phi_{yi}(z)\gamma_y(t) \right) dz \\
\underline{F_{IFS}} = \int_{z=0}^{L} \underline{\underline{\phi}}^T(z) . \underline{\underline{M^1}}(z) . \underline{\gamma}(t) dz & F_i(t) = \int_{z=0}^{L} \left(m_{xx}^1 \phi_{xi}(z)\gamma_x(t) + m_{yy}^1 \phi_{yi}(z)\gamma_y(t) \right) dz
\end{cases}$$

La modélisation du couplage fluide-structure retenue dans cette thèse modifie sensiblement les équations classiques de la dynamique des structures. Elle fait apparaître les matrices de couplage fluide-structure $\underline{\underline{M_{IFS}}}$, $\underline{\underline{C_{IFS}}}$ et $\underline{F_{IFS}}$. Ces termes sont complexes à déterminer et varient fortement au cours du temps. Ils rendent donc l'équation hautement non linéaire. Cela s'ajoute à la non-linéarité du contact frottant au niveau du sol.

La modélisation du couplage fluide-structure retenue dans cette thèse est innovante par rapport aux couplages habituellement utilisés avec des solutions analytiques ou quasi-analytiques. Celle-ci fait apparaître un couplage des directions X et Y dans les matrices de masse ajoutée :

$$\int_{z=0}^{L} \left(m_{xy}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{yj}(z) + m_{xy}^H(z,t)\phi_{yi}(z).\phi_{xj}(z) \right) dz$$

Ainsi qu'un terme dissipatif lié à la variation temporelle des masses de couplages hydrodynamiques :

$$\begin{aligned} C_{ij}^{IFS} = \int_{z=0}^{L} & \left(\dot{m}_{xx}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{xj}(z) + \dot{m}_{xy}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{yj}(z) \right. \\ & \left. + \dot{m}_{xy}^H(z,t)\phi_{yi}(z).\phi_{xj}(z) + \dot{m}_{yy}^H(z,t)\phi_{yi}(z).\phi_{yj}(z) \right) dz \end{aligned}$$

Les non-linéarités de contact peuvent être facilement intégrées dans le choix de la base de modes propres. Les conditions aux limites (notamment au niveau du sol) permettent de modéliser de manière pertinente : la phase adhérente (à l'aide d'un encastrement) et la phase glissante par une glissière dans les directions $\underline{e_x}$ et $\underline{e_y}$. Le changement d'état du contact correspondra à un changement de base modale. On peut considérer cette non-linéarité comme une fonction temporelle linéaire par morçeaux dont on calculera la solution analytique.

Les non-linéarités issues du couplage fluide-structure sont plus complexes à gérer. Elles impactent directement le comportement vibratoire de la poutre en modifiant la matrice de masse. Cette modification est double :
- Modification de la pulsation propre (diminution) par ajout de masses modales effectives,
- Modification de la forme des modes propres car la répartition de masses du couplage fluide-structure peut ne pas suivre celle de la structure initiale,
- Couplage des directions X et Y dans les déformées des modes propres.

3.3.2.1 Exemples de modification de modes propres par les hypothèses faites sur le couplage fluide-structure

Afin d'illustrer les deux premiers phénomènes, considérons les trois structures ci-dessous (cf. fig. 3.7) : une poutre console simple, une poutre console immergée avec un couplage fluide-structure plan $(\underline{e_x}, \underline{e_y})$ sans variation de couplage en fonction de l'altitude, une poutre console immergée avec un couplage fluide-structure avec une variation linéaire en fonction de l'altitude (linéarisation de la dépendance en z).

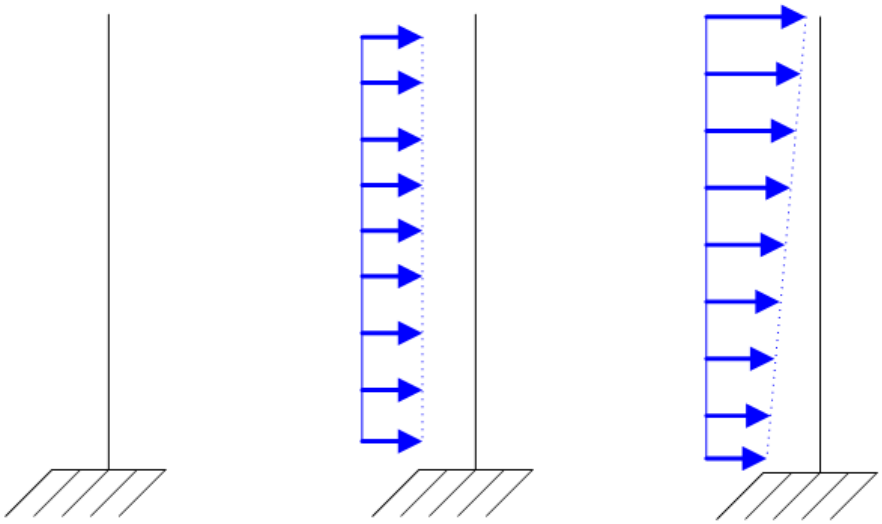


FIGURE 3.7 – A gauche : Poutre console sans couplage fluide-structure. Au milieu : Poutre console avec une masse ajoutée fluide uniforme. A droite : Poutre console avec une masse ajoutée variant linéairement sur la hauteur de la poutre.

Les modes et les pulsations propres dans les trois cas sont obtenus en résolvant les équations d'équilibre 3.9, 3.10 et 3.11. Les conditions aux limites sont similaires quel que soit le couplage fluide-structure utilisé et sont présentées dans l'équation 3.12 :

$$EI\phi^{(4)}(z) - \rho S\omega^2\phi(z) = 0 \tag{3.9}$$

$$EI\phi^{(4)}(z) - \left(\rho S + m^H\right)\omega^2\phi(z) = 0 \tag{3.10}$$

$$EI\phi^{(4)}(z) - \left(\rho S + m^H\frac{z}{L}\right)\omega^2\phi(z) = 0 \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, & \phi'(0) = 0 \\ M(L) = EI\phi''(L) = 0, & V(L) = EI\phi^{(3)}(L) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

3.3.2.2 Résolution du premier exemple (poutre console simple) :

La première équation est un équilibre dynamique classique d'une poutre console vibrante. En utilisant la méthode détaillée dans [1], on trouve une base de solutions de type :

$$\phi(z) = A_1\sin(az) + A_2\cos(az) + A_3\sinh(az) + A_4\cosh(az) \tag{3.13}$$

Avec $a^4 = \frac{\omega^2\rho S}{EI}$.

Les coefficients A_1, A_2, A_3 et A_4 sont déterminés à l'aide des conditions aux limites et doivent satisfaire :

$$\begin{cases} A_3 = -A_1 \\ A_4 = -A_2 \end{cases}, \tag{3.14}$$

$$\begin{pmatrix} \sin(aL) + \sinh(aL) & \cos(aL) + \cosh(aL) \\ \cos(aL) + \cosh(aL) & \sinh(aL) - \sin(aL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Cette dernière équation n'admet des solutions non nulles que si son déterminant est nul est les inconnues a doivent vérifier :

$$1 + \cos(aL)\cosh(aL) = 0 \tag{3.16}$$

Il y a une infinité de solution. On peut donner les valeurs approchées des premières pulsations propres.

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{1.875}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ \omega_2 = \left(\frac{4.694}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \\ \omega_3 = \left(\frac{7.855}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \end{cases}, \tag{3.17}$$

Pour des pulsations d'ordres supérieures, il est possible de donner une approximation asymptotique, qui se révèle être une bonne approximation pour $n \geq 3$.

$$\omega_n \approx \left(\frac{(2n-1)\,\pi}{2L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{3.18}$$

La forme des modes propres obtenus est donnée par :

$$\phi(z) = A_1 \left[\sin(az) - \sinh(az) \frac{\sin(aL) + \sinh(aL)}{\cos(aL) + \cosh(aL)} \left(\cosh(az) - \cos(az) \right) \right] \tag{3.19}$$

3.3.2.3 Résolution du deuxième exemple (poutre console immergée avec couplage fluide-structure uniforme) :

La deuxième équation correspond à l'équilibre dynamique d'une poutre console avec une masse linéique plus élevée. Toutes les équations de l'exemple précédent sont vérifiées en modifiant $a^4 = \frac{\omega^2 \left(\rho S + m^H \right)}{EI}$. Cela modifie uniquement la pulsation propre et la forme des modes reste inchangée :

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{1.875}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S + m^H}} & , \\ \omega_2 = \left(\frac{4.694}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S + m^H}} & , \\ \omega_3 = \left(\frac{7.855}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S + m^H}} \end{cases} \tag{3.20}$$

Pour des pulsations d'ordres supérieurs, il est possible de donner une approximation asymptotique, qui se révèle être une bonne approximation pour $n \geq 3$.

$$\omega_n \approx \left(\frac{(2n-1)\,\pi}{2L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S + m^H}} \tag{3.21}$$

3.3.2.4 Résolution du troisième exemple (poutre console immergée avec couplage fluide-structure évoluant linéairement en z) :

Le troisième système étudié correspond à la résolution de l'équation :

$$EI\phi^{(4)}(z) - \left(\rho S + m^H \frac{z}{L} \right) \omega^2 \phi(z) = 0 \tag{3.22}$$

A défaut de solution analytique simple, nous recherchons les solutions de l'équation différentielle du 4ème ordre sous la forme :

$$\phi(z) = P(z) e^{\alpha z} \tag{3.23}$$

Où $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ représente un polynôme de dégré infini à déterminer. Les conditions aux limites en $z = 0$ s'écrivent :

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 + \alpha a_0 = \quad \Rightarrow a_1 = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Celles en $z = L$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \left[P''(L) + 2\alpha P'(L) + \alpha^2 P(L) \right] e^{\alpha L} = 0, \\ \left[P^{(3)}(L) + 3\alpha P''(L) + 3\alpha^2 P'(L) + \alpha^3 P(L) \right] e^{\alpha L} = 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

Soit en remplaçant par l'expression du polynome :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \left[(i+2)(i+1)a_{i+2}L^i + 2(i+1)\alpha a_{i+1}L^i + \alpha^2 a_i L^i\right] = 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left[(i+3)(i+2)(i+1)a_{i+3}L^i + 3\alpha(i+2)(i+1)a_{i+2}L^i + 3\alpha^2(i+1)a_{i+1}L^i + \alpha^3 a_i L^i\right] = 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

En se servant des résultats de 3.24, l'équation différentielle (3.23) peut se réécrire sous la forme suivante : Pour $i = 0$:

$$2a_4 + 2\alpha a_3 + \alpha^2 a_2 = 0 \tag{3.27}$$

Pour $i \neq 0$:

$$\begin{aligned}(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)a_{i+4} + 4\alpha(i+3)(i+2)(i+1)a_{i+3} + 6\alpha^2(i+2)(i+1)a_{i+2} \\ +4\alpha^3(i+1)a_{i+1} + \left[\alpha^4 - \beta_0\right] a_i + \beta_1 a_{i-1} = 0\end{aligned} \tag{3.28}$$

Avec $\beta_0 = \rho S\omega^2$ et $\beta_1 = \frac{m^H\omega^2}{L}$.

Les équations ci-dessus correspondent à des systèmes d'équations linéraires qui peuvent s'écrire sous forme matricielle de dimension infinie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \\ \cdots & & & \cdots & h_1 & \cdots & & & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots & h_2 & \cdots & & & & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Avec :

$$\begin{cases} d_1 = \begin{pmatrix} \vdots \\ \beta_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, & d_2 = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha^4 - \beta_0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ d_3 = \begin{pmatrix} \vdots \\ 4\alpha^3(i+1) \\ \vdots \end{pmatrix}, & d_4 = \begin{pmatrix} \vdots \\ 6\alpha^2(i+2)(i+1) \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ d_5 = \begin{pmatrix} \vdots \\ 4\alpha(i+3)(i+2)(i+1) \\ \vdots \end{pmatrix}, & d_6 = \begin{pmatrix} \vdots \\ (i+4)(i+3)(i+2)(i+1) \\ \vdots \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\begin{cases} h_1 = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^2 L + 2\alpha \\ \vdots \\ \alpha^2 L^i + 2i\alpha L^{i-1} + i(i-1)L^{i-2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ h_2 = \begin{pmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^3 L + 3\alpha^2 \\ \alpha^3 L^2 + 3\alpha^2 L + 6\alpha \\ \vdots \\ \alpha^3 L^i + 3i\alpha^2 L^{i-1} + 3i(i-1)\alpha L^{i-2} + i(i-1)(i-2)L^{i-3} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.31}$$

Si on se limite aux polynômes d'ordre entier, il est possible de déterminer les valeurs de α annulant le déterminant. Puis une utilisation du pivot de Gauss permet de trouver les valeurs de tous les coefficients a_i sauf un (les modes propres étant définis à une constante près). On gardera par exemple a_2. Après une manipulation des expressions des exponentielles, on peut démontrer qu'on obtient une base de modes propres qui correspond à une combinaison d'un polynôme et d'exponentielles.

La répartition de la masse de couplage fluide sur notre système a une grande influence sur la forme des modes propres et complexifie trés nettement la résolution analytique du système. Dans la suite, nous supposerons soit que la masse de couplage fluide suit la même répartition spatiale que la masse de la structure, soit nous projeterons la contribution de la masse de couplage fluide sur la base de modes propres de la structure 'sèche'. Dans ce deuxième cas, on définira une base de modes propres de la structure immergée comme combinaison linéaire des modes propres de la structure sèche. On calculera ensuite les réponses des oscillateurs à 1DDL de la structure immergée.

3.3.3 Projection des équations sur les bases de modes propres de la poutre 'sèche' et définition de la base de modes propres de la structure immergée :

3.3.3.1 Définition des bases de modes propres considérées :

Afin de limiter le nombre d'hypothèses utilisées, nous allons projeter les masses linéiques de couplage sur la base de modes propres de la poutre 'sèche'. Nous utiliserons deux bases de modes propres. Chacune correspondant à un état du contact :
- une base de modes propres de poutre glissante (glissement sans basculement en pied - extrémité haute libre),
- une base de modes propres de poutre console (encastrée-libre) ce qui correspond à une phase d'adhérence de la structure.

Modes propres de poutre glissante sans basculement : La poutre glissante sans basculement vérifie les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \underline{\phi}'(0) = \underline{0},\ \underline{\phi}^{(3)}(0) = \underline{0}, \\ M(L) = EI\underline{\phi}''(L) = \underline{0},\ V(L) = EI\underline{\phi}^{(3)}(L) = \underline{0}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Nous rappelons rapidement l'expression des modes propres d'une poutre console. Nous supposerons que les axes du repère $(\underline{e_x}, \underline{e_y})$ sont alignés avec les axes principaux de la section de la poutre. Ainsi, il n'y a pas de couplage entre les directions de flexion de la poutre. On peut donc distinguer les modes propres de flexion dans chacune des directions :

$$\phi_1^x(z) = 1,\ \phi_{i+1}^x(z) = \cos(a_i^x z) + \frac{\cos(a_i^x L)}{\cosh(a_i^x L)} \cosh(a_i^x z) \tag{3.33}$$

$$\phi_1^y(z) = 1,\ \phi_{i+1}^y(z) = \cos(a_i^y z) + \frac{\cos(a_i^y L)}{\cosh(a_i^y L)} \cosh(a_i^y z) \tag{3.34}$$

Les coefficients a_i^x et a_i^y correspondent aux pulsations spatiales des modes propres. Elles sont identiques suivant les deux directions et vérifient l'équation :

$$\forall i,\ \tan(a_i L) = -\tanh(a_i L) \tag{3.35}$$

$$a_1 L \approx 2.365,\ a_i L \approx (i-1)\pi + \frac{3\pi}{4}. \tag{3.36}$$

Modes propres de poutre console : La poutre console vérifie les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \underline{\psi}(0) = \underline{0},\ \underline{\psi}'(0) = \underline{0}, \\ M(L) = EI\underline{\psi}''(L) = \underline{0},\ V(L) = EI\underline{\psi}^{(3)}(L) = \underline{0}. \end{cases} \tag{3.37}$$

Nous rappelons rapidement l'expression des modes propres d'une poutre console. Nous supposerons que les axes du repère $(\underline{e_x}, \underline{e_y})$ sont alignés avec les axes principaux de la section de la poutre. Ainsi, il n'y a pas de couplage entre les directions de flexion de la poutre. On peut donc distinguer les modes propres de flexion dans chacune des directions :

$$\psi_i^x(z) = \sin(b_i^x z) - \sinh(b_i^x z) + \frac{\sinh(b_i^x L) + \sin(b_i^x L)}{\cosh(b_i^x L) + \cos(b_i^x L)} (\cosh(b_i^x z) - \cos(b_i^x z)) \tag{3.38}$$

$$\psi_i^y(z) = \sin(b_i^y z) - \sinh(b_i^y z) + \frac{\sinh(b_i^y L) + \sin(b_i^y L)}{\cosh(b_i^y L) + \cos(b_i^y L)} (\cosh(b_i^y z) - \cos(b_i^y z)) \tag{3.39}$$

Les coefficients b_i^x et b_i^y correspondent aux pulsations spatiales des modes propres. Elles sont identiques suivant les deux directions et vérifient l'équation :

$$1 + \cos(b_i L)\cosh(b_i L) = 0, \tag{3.40}$$

$$b_1 L \approx 1.875,\ b_2 L \approx 4.694,\ b_i L \approx (2i-1)\frac{\pi}{2}. \tag{3.41}$$

Pour des raisons de simplicité, nous considérerons N modes propres dans chaque direction sur chaque base modale. Néanmoins, l'ensemble des résultats présentés est valable quel que soit le nombre de modes considérés dans chaque direction sur chacune des bases modales.

Changement de bases de modes propres : Au cours d'une sollicitation sismique, l'état du contact peut évoluer passant d'une phase d'adhérence à une phase de glissement. Il est donc nécessaire de définir une méthode de passage d'une base de modes propres à l'autre. On trouve la relation de changement de bases de modes propres en projetant le déplacement sur la base de modes propres de poutre glissante sans basculement $\underline{\phi}_i$ et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres.

$$q_i^x(t)\|\phi_i^x\|^2 = \int_{z=0}^{L} \phi_i^x(z)u_x(z,t)dz = \int_{z=0}^{L} \left(\phi_i^x(z)U_{0x}(t) + \phi_i^x(z)\sum_{j=1}^{N}\psi_j^x(z)q_{xcj}(t)\right)dz, \tag{3.42}$$

$$q_i^y(t)\|\phi_i^y\|^2 = \int_{z=0}^{L} \phi_i^y(z)u_y(z,t)dz = \int_{z=0}^{L} \left(\phi_i^y(z)U_{0y}(t) + \phi_i^y(z)\sum_{j=1}^{N}\psi_j^y(z)q_{ycj}(t)\right)dz, \tag{3.43}$$

On introduit $\underline{U_0}(t)$ le déplacement du point de contact de la poutre glissante. On peut résumer cela sous la forme :

$$\underline{q_x}(t) = \underline{\underline{T}}.\underline{q_{xc}}(t) + \underline{L}.U_{0x}(t) \tag{3.44}$$

$$\underline{q_y}(t) = \underline{\underline{T}}.\underline{q_{yc}}(t) + \underline{L}.U_{0y}(t) \tag{3.45}$$

On définie ainsi une matrice de changement de bases $\underline{\underline{T}}$ et un vecteur de projection du déplacement de corps rigide $\underline{L}$. Ces tenseurs ne dépendent pas de la direction considérée.

$$T(i,j) = \frac{\int_{z=0}^{L}\phi_i(z)\psi_j(z)dz}{\|\phi_i\|^2} \tag{3.46}$$

$$L(i) = \frac{\int_{z=0}^{L}\phi_i(z)dz}{\|\phi_i\|^2} \tag{3.47}$$

La base de modes propres sur laquelle sont projetées les équations de la dynamique du système dépend de l'état du contact. Pendant la phase d'adhérence (correspondant à l'état initial de la structure) la base utilisée sera celle d'une poutre console présentée dans les équations (3.38) et (3.39). Lorsque la structure est suffisamment sollicitée pour commencer un glissement on projette les équations sur la base modale de poutre glissante sans basculement présentée dans les équations (3.33) et (3.34).

Le passage d'une base à l'autre lors du changement de l'état du contact nécessite le stockage des déplacements de corps rigide de la poutre. Les hypothèses sur l'absence de basculement font correspondre ces déplacements de corps rigide au déplacement du point de contact $\underline{U_0}(t)$.

3.3.3.2 Projection sur la base de modes propres de poutre console - phase adhérente :

Nous nous plaçons dans une phase adhérente de la structure. La base de modes propres utilisée est celle d'un poutre console. Nous numéroterons les modes propres de manière à regrouper les modes suivant $\underline{e_x}$ et $\underline{e_y}$ dans un unique vecteur de modes propres. En considérant N modes propres dans chaque direction, on notera :

$$\underline{\phi}(z) = \begin{pmatrix} \phi_1^x(z) \\ \vdots \\ \phi_N^x(z) \\ \phi_1^y(z) \\ \vdots \\ \phi_N^y(z) \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

On obtient ainsi un vecteur de dimension $2N$. On utilisera la notation $\phi_i(z)$ pour désigner la i^{eme} composante du vecteur $\underline{\phi}(z)$.

La projection des équations d'équilibre s'effectue en utilisant les expressions des modes propres dans les expressions (3.8). On obtient ainsi :

$$
\begin{cases}
\underline{\underline{\tilde{M}}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{2N} \end{pmatrix} & m_i = \int_{z=0}^{L} \rho S \phi_i^2(z) \\
\underline{\underline{\tilde{M_{IFS}}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A^M}} & \underline{\underline{B^M}} \\ {}^T\underline{\underline{B^M}} & \underline{\underline{D^M}} \end{pmatrix} & \Big(A_{ij}^M = \int_{z=0}^{L} m_{xx}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{xj}(z)dz, \\ & B_{ij}^M = \int_{z=0}^{L} m_{xy}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{yj}(z)dz, \\ & D_{ij}^M = \int_{z=0}^{L} m_{yy}^H(z,t)\phi_{yi}(z).\phi_{yj}(z)dz \Big) \\
\underline{\underline{\tilde{C}}} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2N} \end{pmatrix} & c_i = 2\xi_i \omega_i m_i \\
\underline{\underline{\tilde{C_{IFS}}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A^C}} & \underline{\underline{B^C}} \\ {}^T\underline{\underline{B^C}} & \underline{\underline{D^C}} \end{pmatrix} & \Big(A_{ij}^C = \int_{z=0}^{L} \dot{m}_{xx}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{xj}(z)dz, \\ & B_{ij}^C = \int_{z=0}^{L} \dot{m}_{xy}^H(z,t)\phi_{xi}(z).\phi_{yj}(z)dz, \\ & D_{ij}^C = \int_{z=0}^{L} \dot{m}_{yy}^H(z,t)\phi_{yi}(z).\phi_{yj}(z)dz \Big) \\
\underline{\underline{\tilde{K}}} = \begin{pmatrix} m_1\omega_{x1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_N\omega_{xN}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{N+1}\omega_{y1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{2N}\omega_{yN}^2 \end{pmatrix} & \Big(\omega_{xi} = b_i^2 \sqrt{\frac{EI_{xx}}{\rho S}},\ \omega_{yi} = b_i^2 \sqrt{\frac{EI_{yy}}{\rho S}} \Big)
\end{cases}
\tag{3.49}
$$

$$
\begin{cases}
\underline{\tilde{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
\underline{\tilde{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{x1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{xN} \\ \tilde{f}_{y1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{yN} \end{pmatrix} \qquad \left(\tilde{f}_{xi}(t) = \int_{z=0}^{L} \rho S \phi_{xi}(z) \gamma_x(t) dz,\ \tilde{f}_{yi}(t) = \int_{z=0}^{L} \rho S \phi_{yi}(z) \gamma_y(t) dz \right) \\
\underline{\tilde{F_{IFS}}} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{x1}^{IFS} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{xN}^{IFS} \\ \tilde{f}_{y1}^{IFS} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{yN}^{IFS} \end{pmatrix} \qquad \left(\tilde{f}_{xi}^{IFS}(t) = \int_{z=0}^{L} m_{xx}^{1} \phi_{xi}(z) \gamma_x(t) dz,\ \tilde{f}_{y1}^{IFS} = \int_{z=0}^{L} m_{yy}^{1} \phi_{yi}(z) \gamma_y(t) dz \right)
\end{cases}
$$

La répartition spatiale des masses de couplage fluide-structure peut enlever l'orthogonalité des modes propres lors de la projection sur les matrices de masse. Cela entraîne l'apparition d'une matrice pleine $\underline{\underline{M^{\tilde{IFS}}}}$ qui modifie sensiblement les modes propres de la structre immergée par rapport à ceux de la structure sèche. Cependant, la connaissance de l'expression analytique des modes propres de la structure sèche et celle de l'expression quasi-analytique des fonctions $m_{xx}^{H}(z)$, $m_{xy}^{H}(z)$ et $m_{yy}^{H}(z)$ permettent un calcul quasi-instantané de la matrice $\underline{\underline{M^{\tilde{IFS}}}}$. De même la matrice $\underline{\underline{C^{\tilde{IFS}}}}$ et les vecteurs $\underline{\tilde{F}}$ et $\underline{\tilde{F_{IFS}}}$ s'obtiennent instantanément à l'aide des expressions quasi-analytiques des différentes fonctions.

Dans le cas le plus général où la repartition des masses de couplage fluide ne suit pas la répartition uniforme de masse de la poutre, il est nécessaire d'introduire la base de 2N modes propres immergés $\underline{\tilde{\phi}}(z)$ et les pulsations propres associées $\tilde{\omega_i}$. Les pulsations propres de la structure immergée vérifient la relation :

$$
det \left[\underline{\underline{\tilde{K}}} - \tilde{\omega_i}^2 \left(\underline{\underline{\tilde{M}}} + \underline{\underline{\tilde{M_{IFS}}}} \right) \right] = 0 \tag{3.50}
$$

Une fois les pulsations propres obtenues, on recherche les vecteurs propres de la structure immergée sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs propres de la structure sèche. On définie ainsi la matrice instantanée de changement de bases :

$$\underline{\tilde{\phi}}(z) = \underline{\underline{R}}.\underline{\phi}(z),\ \left(\tilde{\phi}_j(z) = \sum_{k=1}^{2N} R_{jk}\phi_k(z)\right) \tag{3.51}$$

On détermine les coefficients de cette matrice en résolvant le système linéaire de $4N^2$ équations :

$$\forall (i,j) \in [1,2N]^2, m_i\omega_i^2 R_{ji} - m_i\tilde{\omega}_j^2 R_{ji} - \int_{z=0}^{L} \tilde{\omega}_j^2 \sum_{k=1}^{2N} \phi_i(z) M_{ik}^{IFS} R_{jk}\phi_k(z)dz = 0 \tag{3.52}$$

En posant ${}^T\underline{R_v} = (R_{11} \dots R_{12N} R_{21} \dots R_{22N} \dots R_{12N} \dots R_{2N2N})$, on se ramène au système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{H_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{H_2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{H_{2N}}} \end{pmatrix} .\underline{\tilde{R}_v} = \underline{0} \tag{3.53}$$

Avec :

$$\begin{cases} k = i & H_{ii}^j = m_i\left(\omega_i^2 - \tilde{\omega}_j^2\right) - \tilde{\omega}_j^2 \int_{z=0}^{L} \phi_i^2(z) M_{ii}^{IFS} dz, \\ k \neq i & H_{ik}^j = -\int_{z=0}^{L} \tilde{\omega}_j^2 \phi_i(z) M_{ik}^{IFS} \phi_k(z) dz \end{cases} \tag{3.54}$$

Remarque : La matrice permettant de déterminer les coefficients de $\underline{\underline{R}}$ est de dimension $4N^2 * 4N^2$. Une analyse plus fine des composantes non nulles de cette matrice permet de réduire sa taille en la considérant comme la somme d'une matrice de dimension $2N * 2N$ et d'un vecteur diagonal de dimension $1 * 2N$. Cela permet d'accélérer sensiblement le temps de calcul si cela s'avère nécessaire.

Les modes propres de la structure immergée étant déterminés à partir des modes propres de la poutre sèche (connus analytiquement), on peut exprimer le déplacement en tout point de la poutre sous la forme :

$$\underline{U}(z,t) = \sum_{i=1}^{2N} \underline{\tilde{\phi}_i}(z)\tilde{q}_i(t),\ \underline{\tilde{\phi}_i}(z) = \sum_{k=1}^{2N} R_{ik}\underline{\phi_k}(z) \tag{3.55}$$

Les tenseurs d'ordre 1 correspondent aux composantes suivant $(\underline{e_x}, \underline{e_y})$. On remarque à ce titre que les modes propres de la structure imergée peuvent coupler les deux directions du plan alors que les modes propres de la structure sèche sont découplés selon les deux directions.

On projette maintenant l'équation de la dynamique sur la base modale de la structure immergée. Le système se réécrit :

$$\underline{\underline{\tilde{M}}}.\underline{\ddot{\tilde{q}}}(t) + \underline{\underline{\tilde{C}}}.\underline{\dot{\tilde{q}}}(t) + \underline{\underline{\tilde{K}}}.\underline{\tilde{q}}(t) = -\underline{\tilde{F}} + \underline{\tilde{F_{IFS}}} \tag{3.56}$$

Dans le cas général, la matrice d'amortissement n'est pas diagonalisable dans la même base que les matrices de masse et de raideur. Afin de simplifier le système, il convient de faire des hypothèses complémentaires sur cette matrice d'amortissement $\underline{\underline{\tilde{\tilde{C}}}}$ composée de deux termes : un amortissement structurel et un amortissement fluide lié à l'évolution temporelle des masses de couplage. Parmi les méthodes classiquement utilisées, on peut citer une décomposition de Rayliegh-Ritz $\left[\underline{\underline{\tilde{\tilde{C}}}} = \alpha\underline{\underline{\tilde{\tilde{M}}}} + \beta\underline{\underline{\tilde{\tilde{K}}}}\right]$, la définition d'un amortissement modal pré-défini $[\xi(\omega)]$. Ces méthodes peuvent être utilisées pour simplifier l'amortissement lié au couplage fluide-structure. Cela introduira un biais dans les résultats qui ne sera pas évalué dans cette thèse et représente un sujet de recherche à part entière. Dans la suite de ce rapport, nous considérerons un amortissement modal immergé $\tilde{\xi}_i$.

Sous ces hypothèses, on se ramène à l'étude d'un oscilateur à un degré de liberté amorti soumis à une excitation sismique quelconque :

$$\ddot{\tilde{q}}_i(t) + 2\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i\dot{\tilde{q}}_i(t) + \tilde{\omega}_i{}^2\tilde{q}_i(t) = \frac{1}{\tilde{m}_i}\left(-\tilde{\tilde{F}}_i(t) + \tilde{\tilde{F}}_i^{IFS}(t)\right) \tag{3.57}$$

Avec :

$$\underline{\tilde{\tilde{F}}}(t) = \underline{\underline{R}}^T.\underline{\tilde{F}}(t) = \int_{z=0}^{L} \rho S\underline{\underline{R}}^T.\underline{\underline{\phi}}^T(z).\underline{\gamma}(t)dz \tag{3.58}$$

$$\underline{\tilde{\tilde{F_{IFS}}}}(t) = \underline{\underline{R}}^T.\underline{\tilde{F_{IFS}}}(t) = \int_{z=0}^{L} \rho S\underline{\underline{R}}^T.\underline{\underline{\phi}}^T(z).\underline{\underline{M^1}}.\underline{\gamma}(t)dz \tag{3.59}$$

Nous obtenons $2N$ équations d'oscillateurs à 1 degré de liberté amortis soumis à une excitation sismique quelconque. La résolution du problème non-linéaire d'une poutre glissante immergée sous sollicitation sismique quelconque sera présentée dans la partie 3.3.4.

3.3.3.3 Projection sur la base de modes propres de poutre glissante sans rotation - phase de glissement :

Nous nous plaçons dans une phase de glissement de la structure. La base de modes propres utilisée est celle d'une poutre glissante sans rotation. Nous numérotons les modes propres de manière à regrouper les modes suivant $\underline{e_x}$ et $\underline{e_y}$ dans un unique vecteur de modes propres. En considérant N modes propres dans chaque direction, on notera :

$$\underline{\psi}(z) = \begin{pmatrix} \psi_1^x(z) \\ \vdots \\ \psi_N^x(z) \\ \psi_1^y(z) \\ \vdots \\ \psi_N^y(z) \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

On obtient ainsi un vecteur de dimension 2N. On utilisera la notation $\psi_i(z)$ pour désigner la i^{eme} composante du vecteur $\underline{\psi}(z)$.

La projection des équations d'équilibre s'effectue en utilisant les expressions des modes propres dans les expressions (3.8). On obtient ainsi :

$$
\begin{cases}
\overline{\underline{\underline{M}}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{2N} \end{pmatrix} & m_i = \int_{z=0}^{L} \rho S \psi_i^2(z) \\
\overline{\underline{\underline{M_{IFS}}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A^M}} & \underline{\underline{B^M}} \\ {}^T\underline{\underline{B^M}} & \underline{\underline{D^M}} \end{pmatrix} & \Big(A_{ij}^M = \int_{z=0}^{L} m_{xx}^H(z,t)\psi_{xi}(z).\psi_{xj}(z)dz, \\ & B_{ij}^M = \int_{z=0}^{L} m_{xy}^H(z,t)\psi_{xi}(z).\psi_{yj}(z)dz, \\ & D_{ij}^M = \int_{z=0}^{L} m_{yy}^H(z,t)\psi_{yi}(z).\psi_{yj}(z)dz \Big) \\
\overline{\underline{\underline{C}}} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2N} \end{pmatrix} & c_i = 2\xi_i \omega_i m_i \\
\overline{\underline{\underline{C_{IFS}}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A^C}} & \underline{\underline{B^C}} \\ {}^T\underline{\underline{B^C}} & \underline{\underline{D^C}} \end{pmatrix} & \Big(A_{ij}^C = \int_{z=0}^{L} \dot{m}_{xx}^H(z,t)\psi_{xi}(z).\psi_{xj}(z)dz, \\ & B_{ij}^C = \int_{z=0}^{L} \dot{m}_{xy}^H(z,t)\psi_{xi}(z).\psi_{yj}(z)dz, \\ & D_{ij}^C = \int_{z=0}^{L} \dot{m}_{yy}^H(z,t)\psi_{yi}(z).\psi_{yj}(z)dz \Big) \\
\overline{\underline{\underline{K}}} = \begin{pmatrix} m_1\omega_{x1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_N\omega_{xN}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{N+1}\omega_{y1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{2N}\omega_{yN}^2 \end{pmatrix} & \Big(\omega_{xi} = a_i^2 \sqrt{\frac{EI_{xx}}{\rho S}},\ \omega_{yi} = a_i^2 \sqrt{\frac{EI_{yy}}{\rho S}} \Big)
\end{cases}
\tag{3.61}
$$

$$
\begin{cases}
\underline{\overline{R_f}} = \begin{pmatrix} \overline{R_{fx1}} \\ \vdots \\ \overline{R_{fxN}} \\ \overline{R_{fy1}} \\ \vdots \\ \overline{R_{fyN}} \end{pmatrix} & \left(\begin{array}{r} \overline{R_{fxi}}(t) = -\mu \left[\rho S - m^1_{zz}\right] L \left[g - \gamma_z(t)\right] \dfrac{\psi_{xi}(0)\dot{U}_x(0,t)}{\sqrt{\dot{U}_x(0,t)^2 + \dot{U}_y(0,t)^2}}, \\ \overline{R_{fyi}}(t) = -\mu \left[\rho S - m^1_{zz}\right] L \left[g - \gamma_z(t)\right] \dfrac{\psi_{yi}(0)\dot{U}_y(0,t)}{\sqrt{\dot{U}_x(0,t)^2 + \dot{U}_y(0,t)^2}} \end{array} \right) \\
\underline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} \overline{f}_{x1} \\ \vdots \\ \overline{f}_{xN} \\ \overline{f}_{y1} \\ \vdots \\ \overline{f}_{yN} \end{pmatrix} & \left(\overline{f}_{xi}(t) = \int_{z=0}^{L} \rho S \psi_{xi}(z)\gamma_x(t)dz,\ \overline{f}_{yi}(t) = \int_{z=0}^{L} \rho S \psi_{yi}(z)\gamma_y(t)dz \right) \\
\underline{\overline{F_{IFS}}} = \begin{pmatrix} \overline{f}^{IFS}_{x1} \\ \vdots \\ \overline{f}^{IFS}_{xN} \\ \overline{f}^{IFS}_{y1} \\ \vdots \\ \overline{f}^{IFS}_{yN} \end{pmatrix} & \left(\overline{f}^{IFS}_{xi}(t) = \int_{z=0}^{L} m^1_{xx} \psi_{xi}(z)\gamma_x(t)dz,\ \overline{f}^{IFS}_{y1} = \int_{z=0}^{L} m^1_{yy} \psi_{yi}(z)\gamma_y(t)dz \right)
\end{cases}
$$

Les équations sont proches de celles obtenues dans le paragraphe §3.3.3.2. Mis à part le changement des fonctions de modes propres utilisées, on fait apparaître un terme non-linéaire d'effort modal de frottement $\underline{\overline{R_f}}(t)$ correspondant à la projection de l'effort de frottement (aligné avec la direction exactement opposée à la vitesse du point de contact) sur la base modale de la poutre glissante.

De même que pour la phase adhérente, la répartition spatiale des masses de couplage fluide-structure peut enlever l'orthogonalité des modes propres de la poutre sèche lors de la projection sur les matrices de masse. Cela entraîne l'apparition d'une matrice pleine $\underline{\underline{\overline{M^{IFS}}}}$ qui modifie sensiblement les modes propres de la structure immergée par rapport à ceux de la structure sèche. Cependant, la connaissance de l'expression analytique des modes propres de la structure sèche et celle de l'expression quasi-analytique des fonctions $m^H_{xx}(z,t)$, $m^H_{xy}(z,t)$ et $m^H_{yy}(z,t)$ permettent un calcul quasi-instantané de la matrice $\underline{\underline{\overline{M^{IFS}}}}$. De même la matrice $\underline{\underline{\overline{C^{IFS}}}}$ et les vecteurs $\underline{\overline{F}}$ et $\underline{\overline{F_{IFS}}}$ s'obtiennent instantanément à l'aide des expressions quasi-analytiques des différentes fonctions.

Dans le cas le plus général où la repartition des masses de couplage fluide ne suit pas la répartition uniforme de masse de la poutre, il est nécessaire d'introduire la base de 2N modes propres immergées $\underline{\tilde{\psi}}(z)$ et les pulsations propres associées $\overline{\omega_i}$. Les pulsations propres de la structure immergée vérifient la relation :

$$det\left[\underline{\underline{\overline{K}}} - \overline{\omega_i}^2\left(\underline{\underline{\overline{M}}} + \underline{\underline{\overline{M_{IFS}}}}\right)\right] = 0 \tag{3.62}$$

Une fois les pulsations propres obtenues, on recherche les vecteurs propres de la structure immergée sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs propres de la structure sèche. On définie ainsi la matrice instantanée de changement de base :

$$\underline{\overline{\psi}}(z) = \underline{\underline{\overline{R}}}.\underline{\psi}(z),\ \left(\overline{\psi_j}(z) = \sum_{k=1}^{2N}\overline{R}_{jk}\psi_k(z)\right) \tag{3.63}$$

On détermine les coefficients de cette matrice en résolvant le système linéaire de $4N^2$ équations :

$$\forall(i,j)\in[1,2N]^2, m_i\omega_i^2\overline{R}_{ji} - m_i\tilde{\omega}_j^2\overline{R}_{ji} - \int_{z=0}^{L}\tilde{\omega}_j^2\sum_{k=1}^{2N}\psi_i(z)M_{ik}^{IFS}\overline{R}_{jk}\psi_k(z)dz = 0 \tag{3.64}$$

En posant ${}^T\underline{\overline{R_v}} = \left(\overline{R}_{11}\dots\overline{R}_{1\,2N}\overline{R}_{21}\dots\overline{R}_{2\,2N}\dots\overline{R}_{1\,2N}\dots\overline{R}_{2N\,2N}\right)$, on se ramène au système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\overline{H_1}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{\overline{H_2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{\overline{H_{2N}}}} \end{pmatrix}.\underline{\overline{R_v}} = \underline{0} \tag{3.65}$$

Avec :

$$\begin{cases} k = i & \overline{H}_{ii}^j = m_i\left(\omega_i^2 - \overline{\omega}_j^2\right) - \overline{\omega}_j^2\int_{z=0}^{L}\psi_i^2(z)\overline{M}_{ii}^{IFS}dz, \\ k \neq i & \overline{H}_{ik}^j = -\int_{z=0}^{L}\tilde{\omega}_j^2\psi_i(z)\overline{M}_{ik}^{IFS}\psi_k(z)dz \end{cases} \tag{3.66}$$

Remarque : La matrice permettant de déterminer les coefficients de $\underline{\underline{\overline{R}}}$ est de dimension $4N^2 * 4N^2$. Une analyse plus fine des composantes non nulles de cette matrice permet de réduire sa taille en la considérant comme la somme d'une matrice de dimension $2N * 2N$ et d'un vecteur diagonal de dimension $1 * 2N$. Cela permet d'accélérer sensiblement le temps de calcul si cela s'avère nécessaire.

Les modes propres de la structure immergée étant déterminés à partir des modes propres de la poutre sèche (connus analytiquement), on peut exprimer le déplacement en tout point de la poutre sous la forme :

$$\underline{U}(z,t) = \sum_{i=1}^{2N}\underline{\overline{\psi_i}}(z)\overline{q}_i(t),\ \underline{\overline{\psi_i}}(z) = \sum_{k=1}^{2N}R_{ik}\underline{\psi_k}(z) \tag{3.67}$$

Les tenseurs d'ordre 1 correspondent aux composantes suivant $(\underline{e_x}, \underline{e_y})$. On remarque à ce titre que les modes propres de la structure immergée peuvent coupler les deux directions du plan alors que les modes propres de la structure sèche sont découplés selon les deux directions.

On projette maintenant l'équation de la dynamique sur la base modale de la structure immergée. Le système se réécrie :

$$\overline{\overline{M}}.\ddot{\underline{q}}(t) + \overline{\overline{C}}.\dot{\underline{q}}(t) + \overline{\overline{K}}.\underline{q}(t) = -\overline{\underline{F}} + \overline{\underline{F_{IFS}}} + \overline{\underline{R_f}} \tag{3.68}$$

Dans le cas général, la matrice d'amortissement n'est pas diagonalisable dans la même base que les matrices de masse et de raideur. Afin de simplifier le système, il convient de faire des hypothèses complémentaires sur cette matrice d'amortissement $\overline{\overline{C}}$ composée de deux termes : un amortissement structurel et un amortissement fluide lié à l'évolution temporelle des masses de couplage. Parmi les méthodes classiquement utilisées, on peut citer une décomposition de Rayliegh-Ritz $\left[\overline{\overline{C}} = \alpha\overline{\overline{M}} + \beta\overline{\overline{K}}\right]$, la définition d'un amortissement modal pré-défini $\left[\overline{\xi}\left(\overline{\omega}\right)\right]$. Ces méthodes peuvent être utilisées pour simplifier l'amortissement lié au couplage fluide-structure. Cela introduira un biais dans les résultats qui ne sera pas évalué dans cette thèse et représente un sujet de recherche à part entière. Dans la suite de ce rapport, nous considérerons un amortissement modal immergé $\overline{\xi_i}$.

Sous ces hypothèses, on se ramène à l'étude d'un oscilateur à un degré de liberté amorti soumis à une excitation sismique quelconque :

$$\ddot{\overline{q_i}}(t) + 2\overline{\xi_i}\overline{\omega_i}\dot{\overline{q_i}}(t) + \overline{\omega_i}^2\overline{q_i}(t) = \frac{1}{\overline{m_i}}\left(-\overline{\overline{F_i}}(t) + \overline{\overline{F}}_i^{IFS}(t) + \overline{\overline{R}}_i^f(t)\right) \tag{3.69}$$

Avec :

$$\overline{\overline{\underline{F}}}(t) = \overline{\overline{\underline{R}}}^T.\overline{\underline{F}}(t) = \int_{z=0}^{L} \rho S\overline{\overline{\underline{R}}}^T.\overline{\overline{\underline{\psi}}}^T(z).\underline{\gamma}(t)dz \tag{3.70}$$

$$\overline{\overline{\underline{F_{IFS}}}}(t) = \overline{\overline{\underline{R}}}^T.\overline{\underline{F_{IFS}}}(t) = \int_{z=0}^{L} \rho S\overline{\overline{\underline{R}}}^T.\overline{\overline{\underline{\psi}}}^T(z).\overline{\overline{\underline{M^1}}}.\underline{\gamma}(t)dz \tag{3.71}$$

Nous obtenons $2N$ équations d'oscillateurs à 1 degré de liberté amortis soumis à une excitation sismique quelconque ainsi qu'aux efforts de frottement variant au cours en fonction de la réponse temporelle du système. La résolution du problème non-linéaire d'une poutre glissante immergée sous sollicitation sismique quelconque sera présentée dans la partie 3.3.4.

3.3.4 Résolution du problème :

Nous avons vu dans les paragraphes précédents la méthode d'obtention des équations non-linéaires d'oscilateurs à un degré de liberté soumis à une excitation sismique quelconque et à un effort de frottement (pouvant être nul dans la phase adhérente). Ces équations s'écrivent dans le cas d'une poutre en phase adhérente :

$$\forall i \in [1, 2N],\ \ddot{\tilde{q}}_i(t) + 2\tilde{\xi}_i\tilde{\omega}_i\dot{\tilde{q}}_i(t) + \tilde{\omega}_i{}^2\tilde{q}_i(t) = \tilde{f}_i(t) - \tilde{f}_i^{IFS}(t) \tag{3.72}$$

Ces équations s'écrivent dans le cas d'une poutre en phase glissante :

$$\forall i \in [1, 2N],\ \ddot{\overline{q_i}}(t) + 2\overline{\xi_i}\overline{\omega_i}\dot{\overline{q_i}}(t) + \overline{\omega_i}^2\overline{q_i}(t) = \overline{f_i}(t) - \overline{f_i}^{IFS}(t) + \overline{R_i}^f(t) \tag{3.73}$$

Nous utiliserons une méthode similaire de résolution pour les deux phases du comportement de la structure. Pour simplifier les expressions utilisées, nous ne différencierons pas les coordonées généralisées des modes propres immergés de la poutre console et ceux de la poutre glissante sans basculement. La transition d'une phase glissante à une phase adhérente (et vice-versa) sera présentée en réintroduisant la différenciation de notations. Nous utiliserons les notations simplifiées de l'équation suivante :

$$\forall i \in [1, 2N],\ \ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = f_i(t) - f_i^{IFS}(t) + R_i^f(t) \tag{3.74}$$

Avec $R_i^f(t) = 0$ dans la phase adhérente. Cette équation est fortement non-linéaire et ne peut pas se résoudre de manière analytique sans hypothèse simplificatrice complémentaire. Nous proposons donc de simplifier l'expression des efforts modaux en les supposant constants par morceaux suivant un échantillonnement bien choisi de période ΔT.

Remarque : Le choix de la période n'est pas anodin. En effet, cela correspond à un filtre passe-bas. Ce qui est cohérent avec le fait que la sollicitation sismique correspond principalement à une sollicitation basse-fréquence. Cependant, les non-linéarités et les évolutions de masses de couplages fluide-structure peuvent introduire un comportement haute-fréquence non négligeable dans la réponse de la structure. Il convient donc de bien choisir cette période. Le choix retenu dans cette thèse est de prendre une période donnant la même fréquence que la fréquence d'échantillonnement du signal sismique temporel. Néanmoins, le temps de calcul étant quasiment instantané, il est possible de rafiner les signaux pour faire une étude de sensibilité si nécessaire.

3.3.4.1 Résolution du système à un pas de temps donné :

Dans cette partie, nous nous plaçons sur l'intervalle de temps $[k\Delta T, (k+1)\Delta T]$. On définit la fonction $r_i^k(t)$ telle que :

$$\forall t \in [0, \Delta T], r_i^k(t) = q_i(k\Delta T + t) \tag{3.75}$$

Les chargements modaux sont supposés constants sur l'intervalle de définition des fonctions $r_i(t)$. On se ramène ainsi aux équations d'oscillateurs harmoniques amortis soumis à un chargement constant :

$$\ddot{r}_i^k(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{r}_i^k(t) + \omega_i^2 r_i^k(t) = f_i(k\Delta T) - f_i^{IFS}(k\Delta T) + R_i^f(k\Delta T) = \omega_i^2 V_i(k\Delta T) \tag{3.76}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{r}_i^{k+1}(0) = \dot{r}_i^k(\Delta T), \\ r_i^{k+1}(0) = r_i^k(\Delta T). \end{cases} \tag{3.77}$$

Pour la première itération :

$$\begin{cases} \dot{r}_i^0(0) = 0, \\ r_i^0(0) = 0. \end{cases} \tag{3.78}$$

On trouve les solutions classiques analytiques de ces systèmes simples :

$$r_i^k(t) = \left[\frac{\dot{r}_i^k(0) + \xi_i \omega_i \left(r_i^k(0) - V_i(k\Delta T) \right)}{\omega_{Di}} \sin(\omega_{Di} t) + \left(r_i^k(0) - V_i(k\Delta T) \right) \cos(\omega_{Di} t) \right] e^{-\xi_i \omega_i t} \tag{3.79}$$

Avec :
- $\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$, la pulsation réduite du i^{eme} mode,
- $V_i(k\Delta T) = \frac{1}{\omega_i^2} \left(f_i(k\Delta T) - f_i^{IFS}(k\Delta T) + R_i^f(k\Delta T) \right)$ le déplacement modal équivalent des efforts extérieurs à l'instant t_k du début de l'intervalle de temps considéré.

Une fois les résultats de la fonction $r_i^k(t)$ connus sur l'intervalle de temps $[k\Delta T, (k+1)\,\Delta T]$. On doit se ramener aux grandeurs réelles (déplacements et déformations de la poutre, efforts au point de contact) pour vérifier si la condition de contact évolue : transition d'une phase adhérente vers une phase glissante, et vice-versa. Nous considérerons les deux cas de figure en considérant l'état du contact au début du k^{eme} pas de temps.

3.3.4.2 Poutre initiallement adhérente :

Au début du chargement sismique, la poutre est initiallement au repos. Il s'agit donc de la condition initiale de la structure. Cependant, le chargement sismique étant aléatoire, il est possible que la structure se retrouve à nouveau dans cet état à un autre instant du chargement. Nous considérons ici la poutre dans un état de contact adhérent au début du k^{eme} pas de temps. La structure peut avoir une déformation (et donc un effort de réaction horizontal non nul) au début du pas de temps.

Les solutions des équations des oscilateurs harmoniques amortis sous chargements sismiques quelconques sont présentées dans [1]. Ceux-ci correspondent à l'évolution temporelle des coordonées généralisées associées aux modes propres immergés de la poutre console sur l'intervalle $[k\Delta T, (k+1)\,\Delta T]$. Afin de connaître le jeu de résultats analytiques à utiliser pour le pas de temps suivant, il faut vérifier que les conditions de début de glissement n'ont pas été vérifiées pendant l'intervalle temporel considéré.

Pour cela, on détermine l'effort horizontal imposé au niveau du point de contact par la déformation élastique de la poutre à la fin du pas de temps. On le compare ensuite à l'effort vertical correspondant au chargement sismique du début du pas de temps (Le signal sismique vertical est lui aussi approximé par un signal constant par morceau) multiplié par le coefficient de frottement. En cas de dépassement, on change d'état de contact et on entre dans une phase de glissement sans rotation au pas de temps suivant.

Détermination de l'effort horizontal en fin de pas de temps : L'effort horizontal appliqué en pied de poutre s'obtient à partir des composantes de cet effort suivant $\underline{e_x}$ et $\underline{e_y}$. Nous pouvons les déterminer à partir des modes propres de la structure sèche. En effet :

$$\begin{cases} R_{fx}(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_{xi}^{(3)}(0) q_{xi}(t), \\ R_{fy}(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_{yi}^{(3)}(0) q_{yi}(t). \end{cases} \tag{3.80}$$

On détermine la valeur de ces efforts à $t_{k+1} = (k+1)\,\Delta T$ en utilisant l'expression du déplacement dans les deux bases modales (sèches et immergées) et en projetant sur un mode $\psi_i(z)$. On trouve ainsi une relation entre la valeur des coordonnées généralisées $q_{xi}(t_{k+1})$ et $q_{yi}(t_{k+1})$ et celles des $\tilde{q}_i(t_{k+1})$.

$$\underline{U}(z,t) = \sum_{j=1}^{2N} \tilde{\psi}_j(z)\tilde{q}_j(t) = \sum_{i=1}^{2N} \psi_i(z) q_i(t)$$

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\int_{z=0}^{L} \psi_i(z)\tilde{\psi}_j(z)dz}{\int_{z=0}^{L} \psi_i^2(z)dz}\tilde{q}_j(t) = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\sum_{k=1}^{2N} R_{jk} \int_{z=0}^{L} \psi_i(z)\psi_k(z)dz}{\int_{z=0}^{L} \psi_i^2(z)dz}\tilde{q}_j(t)$$

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{2N} R_{ji}\tilde{q}_j(t) \tag{3.81}$$

Or dans la phase adhérente :

$$\forall j \in [1, 2N],\ \tilde{q}_j(t_{k+1}) = r_j^k(\Delta T) \tag{3.82}$$

On obtient ainsi :

$$q_i(t_{k+1}) = \sum_{j=1}^{2N} R_{ji} r_j^k(\Delta T) \tag{3.83}$$

Les efforts horizontaux s'expriment donc en fonction des solutions analytiques :

$$\begin{cases} R_{fx}(t_{k+1}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{2N} R_{ji}\phi_i^{(3)}(0) r_j^k(\Delta T), \\ R_{fy}(t_{k+1}) = \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} R_{ji}\phi_i^{(3)}(0) r_j^k(\Delta T). \end{cases} \tag{3.84}$$

En utilisant les expressions analytiques de l'équation (3.84), l'effort horizontal total s'écrit :

$$R_f(t_{k+1}) = \sqrt{R_{fx}^2(t_{k+1}) + R_{fy}^2(t_{k+1})} \tag{3.85}$$

Détermination de l'effort vertical en fin de pas de temps : Afin de pouvoir détecter le début du glissement au cours de l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}]$, nous devons comparer l'effort horizontal total en fin de pas de temps, à l'effort vertical au même instant. En appliquant l'hypothèse de signaux constants par morçeaux des efforts horizontaux au signal sismique vertical, on trouve un effort vertical de réaction égal à :

$$R_v(t_{k+1}) = \left(\rho S - m_{zz}^1\right) L \left(g - \gamma_z(t_k)\right) \tag{3.86}$$

Cette équation n'est valable que sous l'hypothèse où les vibrations normales de la poutre sont négligées. Selon l'axe vertical, la poutre est considérée comme un solide indéformable immergé soumis à un champ de pesanteur apparent $(g - \gamma_z(t))$. La grandeur $(\rho S - m^1_{zz})$ correspond à une masse réduite de la structure correspondant à la poussée d'Archimède.

L'hypothèse de comportement vertical considéré comme rigide se vérifie lorsque les fréquences propres longitudinales sont en-dehors des fréquences caractèristiques sismiques. On supposera qu'on se trouve dans ce domaine lorsque $f > 40Hz$.

Condition de changement d'état du contact : Le glissement est déclenché au cours du k^{eme} pas de temps $[t_k, t_{k+1}]$ si la condition de non-glissement n'est plus vérifiée à la fin du pas de temps. Cela correspond à :

$$\sqrt{R^2_{fx}(t_{k+1}) + R^2_{fy}(t_{k+1})} > \mu \left(\rho S - m^1_{zz}\right) L \left(g - \gamma_z(t_k)\right). \tag{3.87}$$

Avec :

$$\begin{cases} R_{fx}(t_{k+1}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{2N} R_{ji} \phi_i^{(3)}(0) r_j^k(\Delta T), \\ R_{fy}(t_{k+1}) = \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} R_{ji} \phi_i^{(3)}(0) r_j^k(\Delta T). \end{cases} \tag{3.88}$$

On considère alors que le glissement se déclenche au début du $(k+1)^{eme}$ pas de temps. On ne cherchera pas à identifier précisèment l'instant de début du glissement au sein de l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}]$. Cela introduira un décalage dans une direction indéterminée qui pourra être compensé ou amplifié lors du déclenchement du prochain glissement. Néanmoins, si les pas de temps sont suffisamment petits, le biais introduit est négligeable.

Changement de jeu de solution : A la fin d'une itération, l'état de contact peut soit rester adhérent, soit évoluer vers une structure glissante. Il convient donc d'établir une règle logique permettant la détection à chaque itération de l'état du contact ainsi que la méthode de transition d'un jeu de solution à l'autre.

A la fin de l'itération :

– Si l'inéquation (3.87) n'est pas vérifiée, la condition de contact n'évolue pas et les conditions initiales du pas de temps suivant sont :

$$\begin{cases} \dot{r}_i^{k+1}(0) = \dot{r}_i^k(\Delta T), \\ r_i^{k+1}(0) = r_i^k(\Delta T). \end{cases} \tag{3.89}$$

– Si l'inéquation (3.87) est vérifiée, la condition de contact évolue. La structure commence à glisser et vérifiera les équations présentées dans la partie 3.3.4.3. Il est nécessaire de transposer les conditions initiales du pas de temps suivant dans les nouvelles bases de solution.

Il faut donc relier les valeurs des $r_i^k(\Delta T)$ et $r_i^k(\dot{\Delta T})$ avec celles des $s_i^k(\Delta T)$ et $s_i^k(\dot{\Delta T})$ (qui seront définies plus précisèment dans la partie suivante). Pour cela, on utilise la définition de chacune des grandeurs, ainsi que la relation (3.83).

$$\begin{cases} q_{ci}(t_{k+1}) = \sum_{j=1}^{2N} \tilde{R}_{ji} r_j^k(\Delta T), \\ q_{si}(t_{k+1}) = \sum_{j=1}^{2N} \overline{R}_{ji} s_j^{k+1}(0). \end{cases} \tag{3.90}$$

Afin de relier ces deux définitions, on étend la définition des matrices et vecteurs de changement de bases de modes propres présentées dans les équations (3.44), (3.45), (3.46) et (3.47). Pour cela, on utilise la numérotation des modes utilisées dans les parties précédentes :

$$\underline{q_s}(t) = \underline{\underline{T}}.\underline{q_c}(t) + \underline{L}(t) \tag{3.91}$$

Avec :

$$T(i,j) = \frac{\int_{z=0}^{L} \underline{\phi_i}(z).\underline{\psi_j}(z)dz}{\left\|\underline{\phi_i}\right\|^2} \tag{3.92}$$

$$L(i) = \frac{\int_{z=0}^{L} \underline{\phi_i}(z).\underline{U}(0,t)dz}{\left\|\underline{\phi_i}\right\|^2} \tag{3.93}$$

Où $\underline{q_s}(t)$ représente le vecteur des coordonnées généralisées dans la base de mode propre de poutre glissante sans basculement et $\underline{q_c}(t)$ représente le vecteur des coordonnées généralisées dans la base de mode propre de poutre encastrée.

On trouve ainsi les conditions initiales du $(k+1)^{eme}$ pas de temps pour le jeu de solution sur base modale immergée de poutre glissante sans basculement. Ces conditions initiales assurent une continuité en déplacement et en vitesse.

$$\begin{cases} \underline{s}^{k+1}(0) = \left(\underline{\underline{\overline{R}}}^T\right)^{-1}.\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{\tilde{R}}}^T.\underline{r}^k(\Delta T) + \left(\underline{\underline{\overline{R}}}^T\right)^{-1}.\underline{L}(t_{k+1}), \\ \dot{s}_i^{k+1}(0) = \left(\underline{\underline{\overline{R}}}^T\right)^{-1}.\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{\tilde{R}}}^T.\dot{\underline{r}}^k(\Delta T) + \left(\underline{\underline{\overline{R}}}^T\right)^{-1}.\dot{\underline{L}}(t_{k+1}). \end{cases} \tag{3.94}$$

Etant donné qu'on ne détecte pas l'instant exact du début du glissement au sein du pas de temps, il est difficile d'estimer la vitesse du point de contact à la fin du pas de temps. On supposera donc que la vitesse de ce point est négligeable au début du pas de temps suivant. On pose donc :

$$\dot{\underline{L}}(t_{k+1}) = \underline{0}$$

Cette hypothèse entraîne un nouveau décallage par rapport à la solution exacte. Néanmoins, nous pouvons raisonnablement penser que ce biais est négligeable pour deux raisons :

– La vitesse de début du glissement dépend de l'intensité du séisme qui est supposé ne pas privilégier de sens sur un axe fixé (Par exemple, sur la direction de séisme Nord-Sud, sur la totalité du signal, l'accélération dans le sens Nord-Sud est quasiment parfaitement compensée par l'accélération dans le sens Sud-Nord). Ainsi, même si la réponse vibratoire interne de la structure ou si le séisme a des amplitudes différentes en

fonction des axes Nord-Sud et Est-Ouest, la direction de début de glissement a la même probabilité d'être suivant un axe $\underline{e_1}$ que son axe opposé $-\underline{e_1}$. Cet aspect stochastique de l'orientation du début de glissement laisse à penser que le biais peut se compenser pendant la durée du signal sismique.
- Le choix d'un pas de temps suffisamment petit permet de rendre le biais introduit quasiment négligeable. Il conviendra d'étudier la variation de la réponse lors d'une modification de la durée du pas de temps.

Les résultats de la résolution des équations différentielles non-linéaires sous chargement sismique quelconque dans la base de modes propres immergés de poutre glissante sans basculement sont présentées dans le paragraphe §3.3.4.3.

3.3.4.3 Poutre initiallement glissante sans basculement :

Au début du chargement sismique, la poutre est au repos et est adhérente au niveau de son point de contact au sol. Lorsque la condition de non glissement présentée dans l'équation (3.87) n'est plus vérifiée, la poutre commence à glisser. A cet instant, la poutre est dans une configuration déformée et il est nécessaire de connaitre cette déformation pour ne pas sous-estimer l'énergie stockée de manière élastique dans la structure.

On peut se retrouver dans la même situation lorsque la poutre a déjà glissé, s'est arrêtée puis reprend son glissement. Dans ce cas, il est nécessaire de garder en mémoire le déplacement de corps rigide de la structure qui correspond aux mouvements de translation du point de contact $\underline{U}(0,t)$.

Tant que le glissement continue, on détermine l'évolution temporelle du système en utilisant l'équation (3.79). A chaque itération, il faut vérifier que les conditions de glissement sont toujours vérifiées et que le système ne s'est pas arrêté. Cette étape n'est pas évidente à effectuer étant donné que nous n'avons une bonne connaissance des chargements extérieurs et des efforts de frottement qu'à une période ΔT. Or lorsque le glissement s'arrête, l'effort de frottement ne répond plus à la même loi de comportement et évolue trés sensiblement.

Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode de contournement permettant de détecter un arrêt du glissement de la structure dans l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ à partir des données des différentes grandeurs aux instants t_k et t_{k+1}. La condition d'arrêt de glissement de la structure est donnée par :

$$\underline{\dot{U}}(0,t) = \underline{0} \tag{3.95}$$

Nous la traduisons en condition sur le signal échantilloné à une période ΔT par un changement de signe des deux composantes de la vitesse $\dot{U}_x(0,t)$ et $\dot{U}_y(0,t)$ entre les instants t_k et t_{k+1} :

$$\begin{cases} \dot{U}_x(0,t_k).\dot{U}_x(0,t_{k+1}) \leq 0, \\ \dot{U}_y(0,t_k).\dot{U}_y(0,t_{k+1}) \leq 0. \end{cases} \tag{3.96}$$

Dans ce cas, on supposera que la structure est passée par un état où la vitesse du point de contact était nulle. On peut penser à un certain nombre de cas où la condition discrète (3.96) est vérifiée sans que l'on puisse trouver un instant où la condition continue (3.95) est vérifiée. Cela introduit un nouvel écart entre notre solution approchée quasi-analytique et la solution réelle. Néanmoins, le choix d'un pas de temps suffisamment petit permet de limiter les risques d'occurence de détection d'une fausse condition d'arrêt. De plus, même si l'arrêt était détecté à la fin d'un pas de temps alors qu'il ne devrait pas, il y a de grandes chances que le glissement reprenne au pas de temps suivant.

Détermination analytique de la vitesse du point de contact de la poutre en fin de pas de temps : La vitesse dans le plan horizontal $(\underline{e_x}, \underline{e_y})$ du point de contact est donnée par les équations :

$$\dot{U}_x(0,t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_{xi}(0)\dot{q}_{xi}(t) \tag{3.97}$$

$$\dot{U}_y(0,t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_{yi}(0)\dot{q}_{yi}(t) \tag{3.98}$$

On détermine la valeur de ces composantes de la vitesse à $t_{k+1} = (k+1)\,\Delta T$ en utilisant l'expression du déplacement dans les deux bases modales (sèches et immergées) et en projetant sur un mode $\phi_i(z)$. On trouve ainsi une relation entre la valeur des coordonnées généralisées $q_{xi}(t_{k+1})$ et $q_{yi}(t_{k+1})\Delta T$ et celles des $\overline{q}_i(t_{k+1})$.

$$\underline{U}(z,t) = \sum_{j=1}^{2N} \overline{\phi_j}(z)\overline{q_j}(t) = \sum_{i=1}^{2N} \phi_i(z) q_i(t)$$

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\int_{z=0}^{L} \phi_i(z)\overline{\phi_j}(z)dz}{\int_{z=0}^{L} \phi_i^2(z)dz}\overline{q_j}(t) = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\sum_{k=1}^{2N} \overline{R}_{jk} \int_{z=0}^{L} \phi_i(z)\phi_k(z)dz}{\int_{z=0}^{L} \phi_i^2(z)dz}\overline{q_j}(t)$$

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{2N} \overline{R}_{ji}\overline{q_j}(t) \tag{3.99}$$

Or dans la phase adhérente :

$$\forall j \in [1, 2N],\ \overline{q}_j(t_{k+1}) = s_j^k(\Delta T) \tag{3.100}$$

On obtient ainsi :

$$q_i(t_{k+1}) = \sum_{j=1}^{2N} \overline{R}_{ji} s_j^k(\Delta T) \tag{3.101}$$

Les coordonées du vecteur vitesse du point de contact à la fin du pas de temps s'expriment donc :

$$\dot{U}_x(0,t_{k+1}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{2N} \overline{R}_{ji}\phi_i(0)\dot{r_j^k}(\Delta T) \tag{3.102}$$

$$\dot{U}_y(0,t_{k+1}) = \sum_{i=N+1}^{2N}\sum_{j=1}^{2N} \overline{R}_{ji}\phi_i(0)\dot{s_j^k}(\Delta T) \tag{3.103}$$

Les valeurs analytiques des $\dot{r_j^k}(\Delta T)$ sont déjà connues. On peut donc détecter à chaque itération si le signe des deux coordonnées du vecteur vitesse du point de contact a changé et donc si on détecte un arrêt du glissement pendant le k^{eme} pas de temps. D'une manière similaire à la détection du début du glissement, on ne trouve pas l'instant exact de fin du glissement. On se restreint à détecter un arrêt du glissement au cours du pas de temps, le changement de jeu d'équations analytiques et de conditions initiales se fait au $(k+1^{eme})$ pas de temps. Cela introduit un biais (qui, à nouveau, a une direction quasi-stochastique de distribution quasi-uniforme et dont on peut réduire l'impact en diminuant la période d'échntillonage ΔT.).

Changement de jeu de solution : A la fin d'une itération, l'état de contact peut soit rester glissant, soit devenir adhérent et représenter une poutre console. Il convient donc d'établir une règle logique permettant la détection à chaque itération de l'état du contact ainsi que la méthode de transition d'un jeu de solution à l'autre.

A la fin de l'itération :

- Si l'équation (3.96) n'est pas vérifiée, la condition de contact n'évolue pas et les conditions initiales du pas de temps suivant sont :

$$\begin{cases} \dot{s_i}^{k+1}(0) = \dot{s_i}^k(\Delta T), \\ s_i^{k+1}(0) = s_i^k(\Delta T). \end{cases} \tag{3.104}$$

- Si l'équation (3.96) est vérifiée, la condition de contact évolue. La structure arrête son glissement et vérifiera les équations présentées dans la partie 3.3.4.2. Il est nécessaire de transposer les conditions initiales du pas de temps suivant dans les nouvelles bases de solution.

Il faut donc relier les valeurs des $s_i^k(\Delta T)$ et $s_i^k(\dot{\Delta T})$ avec celles des $r_i^k(\Delta T)$ et $\dot{r_i^k}(\Delta T)$. Pour cela, on utilise la définition de chacune des grandeurs, ainsi que les définitions des matrices de changement de base.

$$\begin{cases} q_{ci}(t_{k+1}) = \sum_{j=1}^{2N} \tilde{R}_{ji} r_j^k(\Delta T), \\ q_{si}(t_{k+1}) = \sum_{j=1}^{2N} \overline{R}_{ji} s_j^{k+1}(0). \end{cases} \tag{3.105}$$

Afin de relier ces deux définitions, on étend la définition des matrices et vecteurs de changement de bases de modes propres présentés dans les équations (3.44), (3.45), (3.46) et (3.47). Pour cela, on utilise la numérotation des modes utilisées dans les parties précédentes :

$$\underline{q_s}(t) = \underline{\underline{T}}.\underline{q_c}(t) + \underline{L}(t) \tag{3.106}$$

Avec :

$$T(i,j) = \frac{\int_{z=0}^{L} \underline{\psi_i}(z).\underline{\phi_j}(z)dz}{\left\|\underline{\psi_i}\right\|^2} \tag{3.107}$$

$$L(i) = \frac{\int_{z=0}^{L} \underline{\psi_i}(z).\underline{U}(0,t)dz}{\left\|\underline{\psi_i}\right\|^2} \tag{3.108}$$

Où $\underline{q_s}(t)$ représente le vecteur des coordonnées généralisées dans la base de mode propre de poutre glissante sans basculement et $\underline{q_c}(t)$ représente le vecteur des coordonnées généralisées dans la base de mode propre de poutre encastrée.

On trouve ainsi les conditions initiales du $(k+1)^{eme}$ pas de temps pour le jeu de solution sur base modale immergée de poutre glissante sans basculement. Ces conditions initiales assurent une continuité en déplacement et en vitesse.

$$\begin{cases} \underline{s}^{k+1}(0) = \left(\overline{\underline{\underline{R}}}^T\right)^{-1}.\underline{\underline{T}}.\tilde{\underline{\underline{R}}}^T.\underline{r}^k(\Delta T) + \left(\overline{\underline{\underline{R}}}^T\right)^{-1}.\underline{L}(t_{k+1}), \\ \underline{\dot{s}_i}^{k+1}(0) = \left(\overline{\underline{\underline{R}}}^T\right)^{-1}.\underline{\underline{T}}.\tilde{\underline{\underline{R}}}^T.\dot{\underline{r}}^k(\Delta T) + \left(\overline{\underline{\underline{R}}}^T\right)^{-1}.\dot{\underline{L}}(t_{k+1}). \end{cases} \tag{3.109}$$

Etant donné qu'on ne détecte pas l'instant exact d'arrêt du glissement au sein du pas de temps, les hypothèses de calcul nous donnent une vitesse du point de contact non nulle. Néanmoins, la projection des équations sur la base modale encastrée permet de fixer le point de contact au sol même si sa vitesse de déplacement n'est pas nulle dans la base glissante. Afin d'éviter toute erreur, on impose aussi :

$$\dot{\underline{L}}(t_{k+1}) = \underline{0}$$

Cette détection a posteriori de l'arrêt du glissement entraîne un nouveau décallage par rapport à la solution exacte. Néanmoins, nous pouvons raisonnablement penser que ce biais est négligeable pour deux raisons :

- L'intensite glissement résiduel correspondant au déplacement au-delà du moment physique d'arrêt du glissement dépend de l'intensité du séisme et de la direction du glissement au pas de temps précédent qui sont supposés ne pas privilégier de sens sur un axe fixé (Par exemple, sur la direction de séisme Nord-Sud, sur la totalité du signal, l'accélération dans le sens Nord-Sud est quasiement parfaitement compensée par l'accélération dans le sens Sud-Nord). Ainsi, même si la réponse vibratoire interne de la structure ou si le séisme a des amplitudes différentes en fonction des axes Nord-Sud et Est-Ouest ou si les coefficients de glissement ne sont pas la même en fonction des directions du plan, la direction du glissement résiduel a la même probabilité d'être suivant un axe $\underline{e_1}$ que son axe opposé $-\underline{e_1}$. Cet aspect stochastique de l'orientation du glissement résiduel laisse à penser que le biais peut se compenser pendant la durée totale du signal sismique.
- Le choix d'un pas de temps suffisamment petit permet de rendre le biais introuit quasiment négligeable. Il conviendra d'étudier la variation de la réponse lors d'une modification de la durée du pas de temps.

Les résultats de la résolution des équations différentielles non-linéaires sous chargement sismique quelconque dans la base de modes propres immergés de poutre encastrée sont présentées dans le paragraphe §3.3.4.2.

3.3.4.4 Analyse des solutions analytiques :

Les parties §3.3.4.3 et §3.3.4.2 présentent les solutions analytiques à chaque pas de temps pour des conditions d'état du contact différentes. Elles explicitent aussi de manière analytiques le passage d'une base de solutions à l'autre et les conditions de changement d'état. On obtient ainsi un ensemble de solutions exprimées sur les coordonées généralisées des deux bases de solution et échantillonées à une période ΔT.

En fonction de la problématique traitée, il est possible d'utiliser ces coordonées généralisées pour évaluer :
- Le déplacement du point de contact de la poutre.
- Le déplacement du sommet de la poutre. Ces deux données sont particulièrement utiles si l'on souhaite utiliser ces résultats pour le dimensionnement de ponts dans des zones sismiques.
- Les contraintes au sein de la poutre. Ce paramètre peut être particulièrement important pendant la phase adhérente. Il faut cependant faire attention au changement de profil de contrainte lié au changement de condition d'adhérence.
- La rotation en extrémité de poutre.

Le temps de calcul quasi-instantané de ce modèle analytique échantillonné permet de faire des études paramétriques en phase de dimensionnement et permettrait même de faire des calculs stochastiques non-linéaires sur un nombre non négligeable de variables aléatoires.

3.4 Généralisation à un système complèxe

Dans le cas d'une structure réelle (et non d'une poutre) imergée avec un contact au niveau du sol et soumise à un chargement sismique quelconque, il est possible d'extrapoler les résultats présentés dans la partie (3.3). En effet, les hypothèses liées au comportement de la poutre ne portent que sur la mise en équation du système en coordonnées absolues (c'est-à-dire non projetées sur les modes propres du système).

L'ensemble des calculs effectués une fois que les équations sont projetées sur les modes propres de la structure glissante et encastrée (immergée ou non) sont transposables à n'importe quelle structure. Pour cela, il faut être en mesure d'évaluer pour les deux conditions de contact sur la structure non imergée :
- Les fréquences propres du système,
- Les déformées modales,
- Les masses généralisées modales,
- Les amortissements modaux de la structure immergée.

Ces éléments peuvent être obtenus soit par modélisation fine de la structure complexe et calcul numérique permettant d'évaluer ces éléments, soit en réalisant une série de mesures sur la structure sèche. Ce dernier point est très important car nous autorisons dans notre modèle la modification de la géomètrie des lames d'eau du système et donc l'intensité des masses de couplage hydrodynamique. La base modale immergée peut donc évoluer en fonction de cette variation de géométrie. Il est donc essentiel d'avoir une base fixe sur laquelle nous pouvons baser notre étude.

Des essais réalisés sur la structure immergée permettent de mieux évaluer les coefficients de frottement ainsi que les masses de couplage $\underline{\underline{m^H}}(z)$ et $\underline{\underline{m^1}}$ dans des conditions géométriques parfaitement contrôlées. Cela peut être utilisé pour recaler les modèles d'évaluation des masses de couplage fluide-structure dans les conditions réelles.

Dans les cas où ces campagnes d'essais sont réalisées sur des maquettes, il est tout-à-fait essentiel d'étudier très attentivement les règles de changement d'échelle. On signale qu'il est impossible de modéliser avec pertinence le comportement complet de la structure sur une maquette. Il est en effet impossible de conserver les mêmes fréquences propres, les masses de couplage fluide-structure et les coefficients de frottement. Seuls deux de ces valeurs peuvent être modélisées avec pertinence de manière indépendante en choisissant finement les conditions de réalisation de l'expérience. Ces changements d'échelle et la mise en place de dispositifs expérimentaux adaptés pourront faire l'objet d'études spécifiques.

3.5 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre la méthode de calcul quasi-analytique de résolution des équations de dynamique non-linéaire de structure glissante immergée sous chargement sismique. Dans un premier temps, nous avons fait une étude bibliographique des publications sur le sujet et présenté les hypothèses de base de la théorie. Puis, nous avons développé la méthode de résolution sur l'exemple d'une poutre glissante immergée sous chargement sismique. Enfin, nous étendons le domaine de validité de cette méthode à l'ensemble des structures dont le comportement vibratoire peut être représenté par ses modes propres encastré-libre et libre-libre.

La méthode de résolution des équations couplées utilise les théories de calcul des masses ajoutées issues du couplage fluide-structure présentées dans le chapitre 2. Celles-ci sont plus détaillées que les modèles classiquement utilisés dans les résolutions de problèmes de dynamique couplés. On prend ainsi en compte l'influence de l'effet de coin (éléments non diagonaux de la matrice de masses de couplage fluide-structure) sur le déplacement de la structure.

La méthode de résolution proposée repose sur l'analyse que le problème non-linéaire couplé peut être traité comme un problème linéaire par morceaux. Chaque morceau étant un intervalle de temps. Sur chaque intervalle, on peut utiliser des méthodes de résolution sur base modale immergée instantanée et résoudre analytiquement le problème. On vérifie

en fin de pas de temps l'état du contact. Si celui-ci ne change pas, on garde les mêmes solutions analytiques pour le pas de temps suivant. Sinon, on projette les coordonnées généralisées de la première base modale vers la deuxième base modale et on stocke le déplacement de corps rigide de la structure.

Cette méthode de calcul est quasi-analytique car elle nécessite tout de même une discrétisation en intervalles de temps. Ceux-ci doivent être suffisamment petits pour permettre au résultat d'être le plus proche possible de la solution réelle. Il est donc nécessaire d'effectuer des essais sur des cas tests avant de lancer des simulations nombreuses sur des signaux sismiques quelconques.

Afin de valider cette théorie, une série de simulations ont été réalisées puis comparées aux résultats de simulations numériques. Une fois cette validation effectuée, on utilisera pleinement les capacités de la théorie afin d'évaluer les déplacements sur des configurations de structure simple et sur une poutre glissante immergée sous chargement sismique quelconque où la géométrie des lames d'eau est actualisée au fur et à mesure du déplacement. Ces applications de la méthode quasi-analytique et ces résultats sont présentés dans le chapitre IV.

Bibliographie

[1] A. Pecker, Dynamique des structures et des ouvrages, Ecole des Ponts - ParisTech, 2013.

[2] Claude E. Shannon, Communication in the presence of noise, Proceedings of the institute of Radio Engineers, vol. 37, n°1, january 1949, p10-21.

[3] M. Godet, Modeling friction and wear phenomena. Proceeding pf the workshop on the use of surface deformation models to predict tribology behaviour, Approches to modelling of friction and wear, Ed. Springer-Verlag, 1986.

[4] J. Antunes, F. axisa, B. Beaufils, D. Guilbaud, Coulomb friction modelling in numerical simulations of vibration and wear work rate of multispan tube bundles, Flow-induced vibration and noise, Winter annual meeting of ASME, Vol. 5, 1988

[5] M.O. Othman, A.H. Elkholy, Measurement of friction coefficient under reciprocating sliding conditions, European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol. 13, No 2, 1994.

[6] A.D. Lewis, R.J. Rogers, Experimental and numerical study of forces during oblique impact, Journal of Sound and Vibration, Vol. 125, 1988.

[7] S. Zaghdoudi, Analyse des phénomènes d'usure par choc et frottement, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 1992.

[8] B. Westermo, F. Udwadia, Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, 135-146, 1983.

[9] J.C. Pons, Réponse dynamique d'une structure rigide sur fondation glissante, 1er Colloque Nationale de Génie Parasismique, Saint-Rémy-les-Chevreuses, 29, 39 et 31 janvier 1986.

[10] N. Mostaghel, M. Hejazi, J. Tanbakuchi, Response of sliding structures to harmonic support motion, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, 355-366, 1983.

[11] N. Mostaghel, J. Tanbakuchi, Response of sliding structures to earthquake support motion, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, 729-748, 1983.

[12] J. Betbeder-Matibet, J.C. Pons, P. Labbe, H. Noe, Seismic response of sliding structures and equipment, Recent Advances in Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 625-659, Ouest Editions, Presses académiques, 1992.

[13] G.W. Housner, The behaviour of inverted pendulum structures during earthquakes, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 2, 403-417, 1963.

[14] C. Yim, A.K. Chopra, J. Penzien, Rocking response of rigid blocks to earthquakes, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 8, 565-587, 1980.

[15] Y. Ishiyama, Review and discussion on overturning of bodies by earthquake motions, BRI Research paper No. 85, Ministry of Construction, 1-115, 1980.

[16] Y. Ishiyama, Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, 635-650, 1982.

[17] I. Stefanou, I. Psycharis, I-O. Georgopoulos, Dynamic response of reinforced masonry columns in classical monuments, Construction and Building Materials, 2011.

[18] I. Stefanou, I. Vardoulakis, A. Mavraganis, Dynamic motion of a conical frustum over a rough horizontal plane, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 46, 114-124, 2011.

[19] N. Makris, D. Konstantinidis, The rocking spectrum and the limitations of practical design methodologies, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 32, 265-289, 2003.

[20] F. Pena, F. Prieto, P.B. Lourenco, On the dynamics of rocking motion of single rigid-block structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2007.

[21] F. Prieto, P.B. Lourenco, On the rocking behaviour of rigid objects, Meccanica, 121-133, 2005.

[22] F. Prieto, P.B. Lourenco, C.S. Oliveira, Impulsive dirac-delta forces in the rocking motion, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 33, 839-857, 2004.

[23] I.N. Psycharis, Dynamic behaviour of rocking two-block, PhD Thesis, University of Cambrdige, 1990.

[24] R. Moudrik, Etude du comportement sismique d'un ratelier de stockage d'assemblages combustibles usés en piscine, Thèse de doctorat, CEA, 1996.

[25] H. Ashar, G. Degrassi, Design and analysis of free-standing spent-fuel racks in nuclear power (An overview), 10th S.M.I.R.T., Los Angeles, 1989.

[26] F. Champomier, R. Delemontey, P. Sollogoub, D. Toubas, Seismic design of a spent fuel storage rack, 10th S.M.I.R.T., Los Angeles, 1989.

[27] J. Stabel, M. Ren, H. Swelim, Calculation of seismic loads on fuel storage racks under consideration of fluid-structure interaction, 12th S.M.I.R.T., 1993.

[28] E.J. Routh, An elementary treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, MacMillan, 1868.

[29] E.J. Routh, Advanced part of a treatise on the dynamics of as system of rigid bodies, MacMillan, 1905.

[30] A.G. Webster, The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies, 2nd ed., Leipzig, 1925.

[31] P. Appell, Traité de mécanique rationnelle, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[32] W.D. MacMillan, Dynamics of rigid bodies, Dover Publications, New York, 1936.

[33] P. Appell, Sur l'intégration des équations de mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arrête circulaire sur un plan horizontal : cas particulier du cerceau, Rend. Circ. Mat. Palermo 14, 1900.

[34] D. Korteweg, Extrait d'une lettre à M. Appell, Rend. Circ. Mat. Palermo 14, 1900.

[35] E.G. Gallop, On the rise of a spinning top, Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol. 19, 356-373, 1904.

Chapitre 4

Résultats : Comportement couplé de structures immergées glissantes

4.1 Introduction

Nous avons présenté dans le chapitre 2 les théories de calcul de masses de couplage fluide-structure et dans le chapitre 3 les méthodes de résolution quasi-analytiques des équations de dynamique non-linéaire avec couplage fluide-structure. Dans ce chapitre nous présenterons l'application de la méthode du chapitre 3 à des cas simples, puis les résultats de la méthode de résolution des problèmes de dynamique non-linéaire couplés sur des exemples d'applications.

Les cas simples étudiés dans la première partie correspondent aux études déjà présentes dans la littérature. On traitera ainsi le cas des masses glissantes immergées, modélisant le comportement de corps rigide de la structure, puis d'un système masses-ressort, modélisant la réponse de la structure sur son premier mode propre dans chaque direction du plan.

Dans la partie résultat, on considèrera dans un premier temps des configurations modélisables avec des logiciels éléments finis. Cela nous permettra de valider les modèles quasi-analytiques en les comparant aux solutions numériques. On traitera d'abord les configurations sans couplage fluide-structure, puis des configurations avec couplage fluide-structure diagonal sans actualisation de géométrie, enfin des modèles avec matrices de couplage fluide-structure pleine et prise en compte des évolutions de géométrie des lames d'eau. On utilisera les géométries traitées dans le chapitre 2 sur lesquelles les modèles analytiques développés dans ce chapitre donnent une bonne adéquation avec les résultats numériques.

Dans un deuxième temps, nous comparerons les résultats des différents modèles utilisés afin d'étudier l'impact de la précision de la modélisation sur le déplacement d'ensemble de la structure. On étudiera ainsi des comparaisons entre des modèles plus ou moins raffinés de structure :
- Masse ponctuelle,
- Système masses-ressort,
- Poutre glissante.

De même, nous nous intéresserons à l'impact de la modélisation fluide-structure entre :
- Modèle sans couplage fluide-structure,
- Modèle avec matrices de masses ajoutées diagonales sans actualisation de géométrie des lames d'eau,
- Modèle avec matrices de masses ajoutées complètes avec actualisation de géométrie des lames d'eau.

4.2 Application à des cas simples :

La méthode présentée dans le chapitre 3 est applicable à n'importe quelle structure dont les modes propres secs et la géométrie des lames d'eau (appliquée au chapitre 2 traitant du couplage fluide-structure) sont connus. Elle peut néanmoins devenir relativement fastidieuse à implémenter principalement parce qu'il n'existe pas de logiciel à l'heure actuelle permettant d'obtenir des résultats indiscutables sur des problèmes non-linéaires de dynamiques avec couplage fluide-structure prennant en compte les variations de géométrie des lames d'eau et sous chargements sismiques quelconques dans des temps raisonnables. Seuls quelques logiciels utilisant des méthodes de CFD avancés permettent de simuler avec efficacité les évolutions des géométries des lames d'eau mais la convergence de tels programmes couplés avec un logiciel de dynamique non-linéaire n'est pas toujours vérifiée.

L'utilisation d'une géométrie et de modélisations structurelles simples est donc nécessaire pour pouvoir comparer les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse avec des résultats validés au sein de la communauté scientifique. Ainsi, nous appliquerons les méthodes de résolution développées dans les chapitres précédants sur des modéles simplifiés : masse ponctuelle immergée glissante et système masses-ressort immergé glissant.

4.2.1 Masse ponctuelle immergée glissante :

En phase de pré-dimensionnement des structures glissantes soumises à un chargement sismique quelconque, on considère souvent la réponse d'une masse ponctuelle glissante. Cette hypothèse revient à négliger la réponse de la structure sur ses modes propres immergés. Nous comparerons par la suite différents modèles de pré-dimensionnement utilisant les solutions pseudo-analytiques afin de voir l'influence des modes propres immergés de la structure.

L'hypothèse de masse ponctuelle glissante a été traitée dans la littérature dans les références [1] et [2].

4.2.1.1 Description du modèle :

On modélise le système par une masse ponctuelle M englobant l'intégralité de la masse de la structure. On considère un frottement de Coulomb avec un coefficient statique, μ_S, et un coefficient dynamique μ_D. La masse est soumise à un couplage fluide-structure. Ce couplage est modélisé à l'aide de masses ajoutées $\underline{\underline{M^H}}(t)$ et $\underline{\underline{M^1}}(t)$. Ces masses ajoutées correspondent aux masses de couplage s'appliquant sur l'ensemble de la structure réelle.

Il conviendra d'apporter une attention toute particulière à la définition de ce qui est considéré comme faisant partie de la structure. En effet, cette définition impactera la masse de la structure mais aussi les masses de couplage. Il est souvent plus simple de considérer un volume géométrique simple (cube, cylindre, sphère, disque, ...) plus grand que la structure réelle afin d'obtenir facilement les masses de couplage fluide-structure.

On remarquera aussi que les matrices de couplages sont des matrices de masses (et non de masses linéiques comme dans les parties précédentes). On utilise donc la notation M au lieu de m.

Le modèle est représenté sur la figure 4.1.

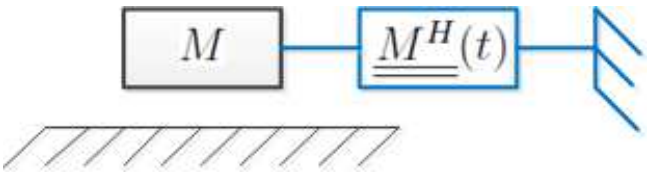


FIGURE 4.1 – Schéma du modèle masse ponctuelle

4.2.1.2 Mise en équation classique :

Avec les hypothèses du modèle, on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \left(M + M^H_{xx}(t)\right)\ddot{U}_x(t) + M^H_{xy}(t)\ddot{U}_y(t) + \dot{M}^H_{xx}(t)\dot{U}_x(t) + \dot{M}^H_{xy}(t)\dot{U}_y(t) = R_x(t) + \left(M^1_{xx} - M\right)\gamma_x(t), \\ \left(M + M^H_{yy}(t)\right)\ddot{U}_y(t) + M^H_{xy}(t)\ddot{U}_x(t) + \dot{M}^H_{yy}(t)\dot{U}_y(t) + \dot{M}^H_{xy}(t)\dot{U}_x(t) = R_y(t) + \left(M^1_{yy} - M\right)\gamma_y(t), \\ R_z(t) = \left(M - M^1_{zz}\right)\left(\gamma_z(t) + g\right). \end{cases} \tag{4.1}$$

Dans l'étude d'une masse glissante, la condition de non-glissement s'exprime aisément :

$$\sqrt{\left[\left(M - M^1_{xx}\right)\gamma_x(t)\right]^2 + \left[\left(M - M^1_{yy}\right)\gamma_y(t)\right]^2} < \mu_S\left(M - M^1_{zz}\right)\left(\gamma_z(t) + g\right) \tag{4.2}$$

Lorsque la structure est déformable, une partie de l'effort déclenchant le glissement est incluse dans la déformée de la structure. La masse ponctuelle n'a pas cette capacité de stockage de l'énergie. Le début du glissement est donc totalement déterminé par les chargements sismiques extérieurs. La réponse du système n'a aucune influence.

4.2.1.3 Base modale initiale :

Afin d'utiliser la méthode présentée dans le chapitre 3, il faut considérer deux jeux de modes propres :
– Mode propre de masse glissante :

Lorsque la masse glisse, il faut considérer les deux modes propres de corps rigide :

$$\underline{\phi}_1 = \underline{e_x}, \quad \underline{\phi}_2 = \underline{e_y}. \tag{4.3}$$

– Mode propre de masse adhérente :

Lorsque la masse est adhérente, il n'y a pas de déplacement possible. Les modes propres ne sont pas définis. Par contre les solutions de déplacement sont connues à chaque pas de temps. Pour la k^{eme} itération (tant que la condition de non-glissement est vérifiée) :

$$\underline{U}(t_{k+1}) = \underline{U}(t_k), \quad \underline{\dot{U}}(t_{k+1}) = \underline{0}. \tag{4.4}$$

4.2.1.4 Equations sur la base modale immergée :

Nous focalisons notre analyse sur la phase de glissement de la masse ponctuelle (La phase adhérente étant déjà résolue).

On utilise ensuite la méthode de détermination des modes propres immergés. On se ramène à un système simplifié sur une nouvelle base modale immergée $\left(\underline{\tilde{\phi}_1}, \underline{\tilde{\phi}_2}\right)$. Sous les hypothèses d'amortissement modal développées dans les parties précédentes, on trouve les équations d'équilibre suivantes :

$$\tilde{m_1}(t)\ddot{\tilde{q}_1}(t) + c_1(t)\dot{\tilde{q}_1}(t) = \tilde{R_1}(t) + \tilde{F_1}(t) - F_1^{\tilde{IFS}}(t), \tag{4.5}$$

$$\tilde{m_2}(t)\ddot{\tilde{q}_2}(t) + c_2(t)\dot{\tilde{q}_2}(t) = \tilde{R_2}(t) + \tilde{F_2}(t) - F_2^{\tilde{IFS}}(t), \tag{4.6}$$

Chaque effort modal se calcule en appliquant les formules sur la base modale immergée. On peut remarquer que lorsqu'il n'y a pas de termes non diagonaux dans la matrice de couplage fluide-structure, les modes propres restent inchangés. Seules les masses modales changent. On se retrouve dans cette configuration pour n'importe quelle structure immergée ayant au moins un plan de symétrie. Cette configuration se retrouve classiquement lorsqu'on ne fait pas d'actualisation de la géométrie des lames d'eau.

Lorsque cette actualisation est considérée, on se retrouve forcèment dans une configuration où la matrice de couplage fluide-structure n'est pas diagonale. Les masses modales $\tilde{m_1}$ et $\tilde{m_2}$ varient en fonction du temps. Cependant, nous ne considérons pas leur évolution temporelle dans la résolution de l'équation différentielle. Nous supposons que, sur un pas de temps donné, les masses modales immergées, les amortissements modaux et les chargements extérieurs modaux sont constants.

4.2.1.5 Résolution sur un pas de temps :

On se place au k^{eme} pas de temps. On suppose l'ensemble des chargements extérieurs, des masses modales et des amortissements modaux constants et égaux à leurs valeurs respectives à l'instant $t_k = k\Delta t$. On utilisera les notations suivantes :
– m_i^k : les masses modales immergées à l'instant t_k,
– c_i^k : les amortissements modaux à l'instant t_k,

– $F_i^k = \tilde{R}_1(t_k) + \tilde{F}_1(t_k) - F_1^{\tilde{IFS}}(t_k)$: la somme des chargements modaux à l'instant t_k,
– $q_i^k(t)$: les coordonnées généralisées sur la base modale immergée définie sur l'intervalle de temps $[0, \Delta t[$.

Pour le mode i, on se ramène à l'équation différentielle définie sur l'intervalle de temps $[0, \Delta t[$:

$$m_i^k \ddot{q_i^k}(t) + c_i^k \dot{q_i^k}(t) = F_i^k \tag{4.7}$$

On détermine facilement le résultat de cette équation avec les conditions initiales $q_i^k(0)$ et $\dot{q_i^k}(0)$:

$$q_i^k(t) = Ae^{-\frac{c_i^k}{m_i^k}t} + \frac{F_i^k}{c_i^k}t + B \tag{4.8}$$

Avec :

$$A = \frac{m_i^k F_i^k}{\left(c_i^k\right)^2} - \frac{m_i^k \dot{q_i^k}(0)}{c_i^k}, \tag{4.9}$$

$$B = q_i^k(0) - \frac{m_i^k F_i^k}{\left(c_i^k\right)^2} + \frac{m_i^k \dot{q_i^k}(0)}{c_i^k}, \tag{4.10}$$

On peut ainsi déduire la position et la vitesse de la masse à la fin du pas de temps :

$$\underline{U}(t_{k+1}) = q_1^k(\Delta t)\underline{\tilde{\phi}_1} + q_2^k(\Delta t)\underline{\tilde{\phi}_2}, \tag{4.11}$$

$$\underline{\dot{U}}(t_{k+1}) = \dot{q_1^k}(\Delta t)\underline{\tilde{\phi}_1} + \dot{q_2^k}(\Delta t)\underline{\tilde{\phi}_2}, \tag{4.12}$$

On peut ainsi stocker la valeur du glissement à la fin du pas de temps. Il faut aussi tester si la condition d'arrêt du glissement est vérifiée. Etant donné que nous faisons un certain nombre d'approximations des fonctions de chargement sur un pas de temps, on ne peut pas détecter un instant où la vitesse de la masse est parfaitement nulle (ce qui signifierait un arrêt du glissement). Ainsi, nous supposerons qu'il y a eu arrêt du glissement si la vitesse change de signe dans les deux directions du plan $(\underline{e_x}, \underline{e_y})$. Cela se vérifie avec la condition d'arrêt :

$$\left(\dot{U}_x(t_k).\dot{U}_x(t_{k+1}) < 0\right) \ \& \ \left(\dot{U}_y(t_k).\dot{U}_y(t_{k+1}) < 0\right) \tag{4.13}$$

En utilisant cette méthode de résolution, on trouve des solutions quasi-analytiques du problème d'une masse glissante immergée soumise à un séisme quelconque avec actualisation de la géométrie des lames d'eau. Les résultats de cette méthode seront présentés dans la partie §4.6.1.

4.2.2 Système masses-ressort immergé glissant :

L'application de la théorie à une masse ponctuelle est une première approche simplifiée mais présente le problème principal de ne pas prendre en compte la réponse interne de la structure dans le comportement dynamique d'ensemble (notamment dans son influence sur le glissement). Elle donne néanmoins une approximation relativement bonne si la structure est trés rigide. Si la première fréquence de flexion immergée de la structure se situe autour des fréquences caractéristiques des séismes (en-dessous de 20 Hz), un modèle plus détaillé doit être utilisé. Ce modéle doit inclure la réponse des premiers modes propres de la structure. En gardant à l'esprit le souhait de simplifier le modèle complet tout en prenant en compte la réponse vibratoire de la structure, nous nous intéresserons à l'application de la théorie à un système masses-ressort immergé glissant.

Remarque : *On utilise ici la dénomination masses-ressort étant donné que la projection de la structure sur un axe donné se modélise par deux masses reliées par un ressort.*

4.2.2.1 Description du modèle :

Le modèle masses-ressort est composé d'une masse oscillante M_b, correspondant à la masse effective du premier mode de flexion, d'une masse glissante M_a, regroupant le reste de la masse de la structure, et un ressort avec des raideurs différentes suivant la direction : k_x pour la direction X et k_y suivant l'axe Y. Les raideurs sont choisies pour avoir les mêmes fréquences propres de flexion que la structure réelle. Ainsi :

$$k_x = 2\pi M_b f_x^2, \quad k_y = 2\pi M_b f_y^2$$

Le couplage fluide-structure est réparti entre les masses M_a et M_b en fonction de la déformée de la structure et de l'hypothèse retenue pour les conditions aux limites. Nous supposerons qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux masses via le couplage fluide-structure. Cette hypothèse est vérifiée pour une théorie d'écoulement par tranche de type Fritz, mais n'est pas vérifiée dans le cas général.

La déformée de la structure n'étant pas la même lorsque le système glisse ou adhére, la répartition de masse entre M_a et M_b peut évoluer en fonction de l'état du système. La figure 4.3 représente la répartition de masse équivalente pour une poutre encastrée-libre et libre-libre. Cette variation de la répartition des masses est aussi valable pour la répartition du couplage fluide-structure. L'influence de cette variation de répartition de masse et de couplage sera étudié dans cette partie. Dans un souci de simplification des notations, nous garderons les mêmes notations pour les masses et le couplage dans les phases de glissement et d'adhérence. Il importera au lecteur de faire les changements de masse lors du changement de condition de contact.

Le système est représenté dans la Figure 4.2.

Nous considérerons un amortissement c qui se traduit en un amortissement modal ξ. Cet amortissement est souvent donné par les réglementations en vigueur. Il se décompose entre un amortissement lié à la structure (types d'assemblages, matériaux et types de

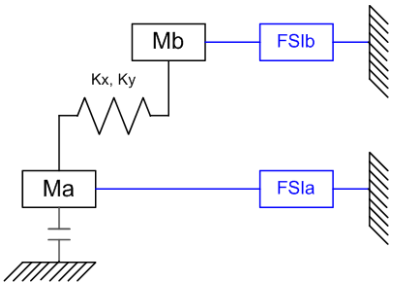


FIGURE 4.2 – Schéma du modéle Masses-Ressort

sollicitation), et un amortissement lié à la dérivée temporelle des masses de couplage fluide-structure.

Les hypothèses portant sur le glissement et sur le séisme vertical sont similaires à celles présentées dans le modèle masse glissante (cf. 4.2.1.1).



FIGURE 4.3 – Schéma du modèle Masses-Ressort

4.2.2.2 Mise en équation du problème

Les équations du mouvement s'obtiennent directement. Il est intéressant de les exprimer de deux manières différentes, soit en terme de déplacements absolus (cf. eqn. 4.14) dans la phase ahdérente de la structure en utilisant le déplacement relatif de la masse B par rapport à la masse A $\underline{X_r}$, soit en terme de déplacement du centre de gravité et de déplacements relatifs dans la phase de glissement (cf. eqn. 4.15) en utilisant $\underline{X_g}$ et $\underline{X_r}$.

$$\begin{cases} \ddot{X}_r(t) + 2\xi\omega_x\dot{X}_r(t) + \omega_x^2 X_r(t) = -\dfrac{M_b - M_{1xb}}{M_b + M_{Hxb}}\gamma_x(t) \\ \ddot{Y}_r(t) + 2\xi\omega_y\dot{Y}_r(t) + \omega_y^2 Y_r(t) = -\dfrac{M_b - M_{1yb}}{M_b + M_{Hyb}}\gamma_y(t) \\ R_x(t) = (M_a - M_{1xa})\,\gamma_x(t) - k_x X_r(t) - c\dot{X}_r(t), \\ R_y(t) = (M_a - M_{1ya})\,\gamma_y(t) - k_y Y_r(t) - c\dot{Y}_r(t), \\ R_z(t) = (M_a + M_b - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) \end{cases} \tag{4.14}$$

$$\begin{cases} (M+M_{Hx})\,\ddot{X}_g(t) = -(M-M_{1x})\,\gamma_x(t) + R_x(t) \\ (M+M_{Hy})\,\ddot{Y}_g(t) = -(M-M_{1y})\,\gamma_y(t) + R_y(t) \\ \ddot{X}_r(t) + 2\xi\omega_{rx}\dot{X}_r(t) + \omega_{rx}^2 X_r(t) = -\left(\dfrac{M_a - M_{1xa}}{M_a+M_{Hxa}} - \dfrac{M_b - M_{1xb}}{M_b+M_{Hxb}}\right)\gamma_x(t) + \dfrac{R_x(t)}{M_a+M_{Hxa}} \\ \ddot{Y}_r(t) + 2\xi\omega_{ry}\dot{Y}_r(t) + \omega_{ry}^2 Y_r(t) = -\left(\dfrac{M_a - M_{1ya}}{M_a+M_{Hya}} - \dfrac{M_b - M_{1yb}}{M_b+M_{Hyb}}\right)\gamma_y(t) + \dfrac{R_y(t)}{M_a+M_{Hya}} \\ R_z(t) = (M_a+M_b-M_{1z})\,(\gamma_z(t)+g) \end{cases} \tag{4.15}$$

Avec :

- $M = M_a + M_b$, $M_{H.} = M_{H.a} + M_{H.b}$ et $M_{1.} = M_{1.a} + M_{1.b}$ les valeurs équivalentes pour un solide indéformable (cf. masse glissante),
- $\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{M_b+M_{Hxb}}}$ et $\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{M_b+M_{Hyb}}}$ les premières fréquences propres de la structure immergées à base encastrée,
- $\omega_{rx} = \sqrt{\frac{k_x}{M_a+M_{Hxa}} + \frac{k_x}{M_b+M_{Hxb}}}$ et $\omega_{ry} = \sqrt{\frac{k_y}{M_a+M_{Hya}} + \frac{k_y}{M_b+M_{Hyb}}}$ les premières fréquences propres de la structure immergée (incluant les masses de couplage fluide-structure),
- $X_g = \frac{(M_a+M_{Hxa})X_a + (M_b+M_{Hxb})X_b}{M+M_{Hx}}$ et $Y_g = \frac{\left(M_a+M_{Hya}\right)Y_a + \left(M_b+M_{Hyb}\right)Y_b}{M+M_{Hy}}$ les dépacements du centre de gravité de la structure immergée (incluant les masses de couplage fluide-structure),
- $X_r = X_a - X_b$ et $Y_r = Y_a - Y_b$ les déplacements relatifs des masses M_a et M_b.

Ces équations correspondent au choix de modes propres dans le cas adhérent :

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

Dans le cas où un glissement a été initié :

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \frac{M_a+M_{H.a}}{M+M_{H.}} \\ \frac{M_b+M_{H.b}}{M+M_{H.}} \end{pmatrix},\ \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

Pour une condition du glissement donnée, il existe 2 modes propres pour chacune des directions du plan $\underline{e_x}$ et $\underline{e_y}$. Les vecteurs proposés sont exprimés dans la base de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} U_a \\ U_b \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

4.2.2.3 Résolution sur un pas de temps : Condition initiale adhérente :

Nous cherchons maintenant à résoudre les équations du système. Pour cela, nous nous plaçons au k^{eme} pas de temps. Cela correspond à l'intervalle de temps $t \in [t_k, t_{k+1}[$. On considére qu'à l'instant t_k la condition du contact est adhérente. La masse M_a va rester immobile pendant la durée du pas de temps, on a donc :

$$X_a(t) = X_a(t_k),\ Y_a(t) = Y_a(t_k). \tag{4.19}$$

On considère que l'ensemble des fonctions dépendantes du temps mis à part les déplacements relatifs et les efforts de réactions horizontaux sont constants et égaux à leurs valeurs à $t = t_k$. Nous cherchons donc à résoudre l'évolution temporelle des 4 fonctions $X_r(t), Y_r(t), R_x(t), R_y(t)$. Cela correspond à la résolution des équations d'un oscillateur harmonique amorti sous chargement constant. On pose pour cela $\tilde{t} = t - t_k$. On cherche à déterminer les fonctions considérées sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$:

$$\begin{cases} X_r(t) = -\dfrac{M_b - M_{1xb}}{k_x}\gamma_x(t_k)\left[1 - cos(\omega_{Dx}\tilde{t})\right] + \left[\dfrac{\dot{X}_r(t_k) + \xi\omega_x X_r(t_k)}{\omega_{Dx}} sin(\omega_{Dx}\tilde{t}) + X_r(t_k)cos(\omega_{Dx}\tilde{t})\right] \\ Y_r(t) = -\dfrac{M_b - M_{1yb}}{k_y}\gamma_y(t_k)\left[1 - cos(\omega_{Dy}\tilde{t})\right] + \left[\dfrac{\dot{Y}_r(t_k) + \xi\omega_y Y_r(t_k)}{\omega_{Dy}} sin(\omega_{Dy}\tilde{t}) + Y_r(t_k)cos(\omega_{Dy}\tilde{t})\right], \\ R_x(t) = (M_a - M_{1xa})\,\gamma_x(t_k) - k_x X_r(t) - c\dot{X}_r(t), \\ R_y(t) = (M_a - M_{1ya})\,\gamma_y(t_k) - k_y Y_r(t) - c\dot{Y}_r(t). \end{cases}$$

Avec $\omega_{D.} = \omega_. \sqrt{1 - \xi^2}$ la fréquence réduite associée à ω.

Les valeurs des efforts de réaction horizontaux se déduisent des expressions de $X_r(t)$ et $Y_r(t)$. On obtient ainsi les valeurs de ces fonctions à l'instant $t = t_{k+1}$. On teste alors si la condition d'adhérence est toujours vérifiée ou non. Celle-ci s'exprime par :

$$R_x^2(t_{k+1}) + R_y^2(t_{k+1}) < \mu_S^2 \left(M_a + M_b - M_{1z}\right)^2 \left(\gamma_z(t_{k+1}) + g\right)^2 \tag{4.21}$$

Si la condition d'adhérence est vérifiée :

On passe au pas de temps suivant en gardant le même jeu de solution analytique.

Si la condition d'adhérence n'est pas vérifiée :

On passe au pas de temps suivant en utilisant les solutions analytiques présentées dans le paragraphe §4.2.2.4. Les conditions initiales sont obtenues en considérant :

$$\begin{cases} X_r(t_{k+1}), \\ Y_r(t_{k+1}), \\ X_g(t_{k+1}) = X_a(t_{k+1}) + \dfrac{M_b + M_{Hxb}}{M + M_{Hx}} X_r(t_{k+1}), \\ Y_g(t_{k+1}) = Y_a(t_{k+1}) + \dfrac{M_b + M_{Hyb}}{M + M_{Hy}} Y_r(t_{k+1}). \end{cases} \tag{4.22}$$

4.2.2.4 Résolution sur un pas de temps : Condition initiale de glissement :

On se place au k^{eme} pas de temps. Cela correspond à l'intervalle de temps $t \in [t_k, t_{k+1}[$. On considére qu'à l'instant t_k la structure est en train de glisser. Pour simplifier les

notations, on pose :

$$\begin{cases} F_{gx}^k = -\dfrac{M - M_{1x}}{M + M_{Hx}}\gamma(t_k) + R_x(t_k), \\ F_{gy}^k = -\dfrac{M - M_{1y}}{M + M_{Hy}}\gamma(t_k) + R_y(t_k), \\ F_{rx}^k = -\left(\dfrac{M_a - M_{1xa}}{M_a + M_{Hxa}} - \dfrac{M_b - M_{1xb}}{M_b + M_{Hxb}}\right)\gamma_x(t_k) + \dfrac{R_x(t_k)}{M_a + M_{Hxa}}, \\ F_{ry}^k = -\left(\dfrac{M_a - M_{1ya}}{M_a + M_{Hya}} - \dfrac{M_b - M_{1yb}}{M_b + M_{Hyb}}\right)\gamma_y(t_k) + \dfrac{R_y(t_k)}{M_a + M_{Hya}}. \end{cases} \tag{4.23}$$

On considère que l'ensemble des fonctions dépendantes du temps mis à part les déplacements du centre de gravité et les déplacements relatifs sont constants et égaux à leurs valeurs à $t = t_k$. Nous cherchons donc à résoudre l'évolution temporelle des 4 fonctions $X_g(t), Y_g(t), X_r(t), Y_r(t)$. Cela correspond à la résolution des équations de deux oscillateurs harmoniques amortis sous chargement constant. On pose pour cela $\tilde{t} = t - t_k$. On cherche à déterminer les fonctions considérées sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$:

$$\begin{cases} X_g(t) = X_g(t_k) + \dot{X}_g(t_k)\tilde{t} + F_{gx}^k\dfrac{\tilde{t}^2}{2}, \\ Y_g(t) = Y_g(t_k) + \dot{Y}_g(t_k)\tilde{t} + F_{gy}^k\dfrac{\tilde{t}^2}{2}, \\ X_r(t) = F_{rx}^k\left[1 - cos(\omega_{Dx}\tilde{t})\right] + \left[\dfrac{\dot{X}_r(t_k) + \xi\omega_x X_r(t_k)}{\omega_{Dx}}sin(\omega_{Dx}\tilde{t}) + X_r(t_k)cos(\omega_{Dx}\tilde{t})\right], \\ Y_r(t) = F_{ry}^k\left[1 - cos(\omega_{Dy}\tilde{t})\right] + \left[\dfrac{\dot{Y}_r(t_k) + \xi\omega_y Y_r(t_k)}{\omega_{Dy}}sin(\omega_{Dy}\tilde{t}) + Y_r(t_k)cos(\omega_{Dy}\tilde{t})\right]. \end{cases} \tag{4.24}$$

Avec $\omega_{D.} = \omega_{.}\sqrt{1 - \xi^2}$ la fréquence réduite associée à $\omega_{.}$. Les valeurs des vitesses $\dot{X}_g(t), \dot{Y}_g(t), \dot{X}_r(t)$ et $\dot{Y}_r(t)$ se déduisent des expressions de $X_g(t), Y_g(t), X_r(t)$ et $Y_r(t)$. On obtient ainsi les valeurs de ces fonctions à l'instant $t = t_{k+1}$. On teste alors si la condition d'arrêt du glissement est vérifiée ou non. Celle-ci s'exprime par :

$$\left(\dot{X}_a(t_k)\dot{X}_a(t_{k+1}) \leq 0\right) \ \& \ \left(\dot{Y}_a(t_k)\dot{Y}_a(t_{k+1}) \leq 0\right) \tag{4.25}$$

Où :

$$\begin{cases} X_a(t) = X_g(t) - \dfrac{M_b + M_{Hxb}}{M + M_{Hx}}X_r(t), \\ Y_a(t) = Y_g(t) - \dfrac{M_b + M_{Hyb}}{M + M_{Hy}}Y_r(t). \end{cases} \tag{4.26}$$

Si la condition d'arrêt du glissement est vérifiée :

On passe au pas de temps suivant en utilisant les solutions analytiques présentées dans le paragraphe §4.2.2.3. Les conditions initiales sont obtenues en considérant :

$$\begin{cases} X_a(t_{k+1}) = X_g(t_{k+1}) - \dfrac{M_b + M_{Hxb}}{M + M_{Hx}} X_r(t_{k+1}), \\ Y_a(t_{k+1}) = Y_g(t_{k+1}) - \dfrac{M_b + M_{Hyb}}{M + M_{Hy}} Y_r(t_{k+1}), \\ X_r(t_{k+1}), \\ Y_r(t_{k+1}). \end{cases} \quad (4.27)$$

Si la condition d'arrêt du glissement n'est pas vérifiée :

On passe au pas de temps suivant en gardant le même jeu de solution analytique. Les efforts de frottement pour le pas de temps suivant sont obtenus par :

$$\begin{cases} R_x(t_{k+1}) = -\mu_D \dfrac{\dot{X}_a(t_{k+1})}{\sqrt{\dot{X}_a^2(t_{k+1}) + \dot{Y}_a^2(t_{k+1})}} \left(M_a + M_b - M_{1z}\right) \left(\gamma_z(t_{k+1}) + g\right), \\ R_y(t_{k+1}) = -\mu_D \dfrac{\dot{Y}_a(t_{k+1})}{\sqrt{\dot{X}_a^2(t_{k+1}) + \dot{Y}_a^2(t_{k+1})}} \left(M_a + M_b - M_{1z}\right) \left(\gamma_z(t_{k+1}) + g\right). \end{cases} \quad (4.28)$$

En utilisant cette méthode de résolution, on trouve des solutions quasi-analytiques du problème d'un système masses-ressort glissant immergé soumis à un séisme quelconque avec actualisation de la géométrie des lames d'eau. Les résultats de cette méthode seront présentés dans la partie §4.6.2.

4.3 Propos importants en introduction des résultats :

Afin d'avoir une interprétation éclairée des résultats, il est important de remarquer que les équations que nous résolvons correspondent à l'étude d'un système chaotique. Une modification de certains paramètres peut entraîner des modifications très fortes de la réponse. Nous citerons à titre d'exemples :
- Le coefficient de frottement,
- L'amplitude des signaux sismiques directionnels,

L'amplitude des signaux sismiques directionnels peut être facilement modifiée si on évalue mal la poussée d'Archimède généralisée. C'est souvent le cas quand on considère un volume géométrique pour le calcul du couplage fluide-structure qui ne représente pas uniquement la structure mais aussi son contenu.

Le coefficient de frottement ne peut pas être modifié par inadvertance. Cependant, il est important de remarquer que la variation de celui-ci peut changer fondamentalement le comportement de la structure. Cela devient important dans une logique de dimensionnement stochastique de la structure où le coefficient de glissement peut être désigné comme une variable aléatoire.

La figure 4.4 présente trois configurations de poutre glissante où tous les autres paramètres sont identiques :

- La courbe bleue représente la configuration de référence,
- La courbe rouge représente une configuration où les sollicitations sismiques et la gravité ont été modifiées de manière à correspondre à une surestimation de la masse associée à la poussée d'Archimède généralisée d'un facteur 2,
- La courbe verte représente une configuration où le coefficient de glissement est modifié : passant de 0.2 à 0.3.

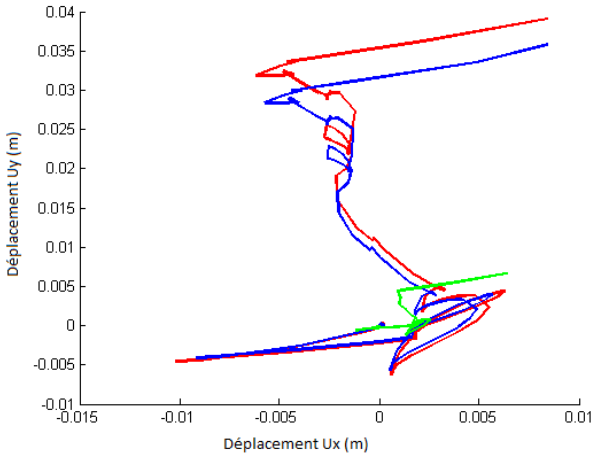


FIGURE 4.4 – Etude de l'impact des paramètres sur le comportement de glissement d'ensemble d'une poutre glissante sans couplage fluide-structure (En rouge : configuration de référence, en bleu : chargements sismiques modifiés, en vert : coefficient de frottement modifié)

Les trois courbes obtenues ne sont pas proportionnelles entre elles. Une étude détaillée permet de voir que même si la trajectoire est semblable, la distance entre courbes à un instant donné varie fortement au cours du signal de manière quasiment aléatoire. Il est donc difficile de décrire finement ce comportement mis à part le fait qu'une augmentation sensible du coefficient de glissement a une forte influence sur l'amplitude des glissements (ce que l'on savait déjà) et qu'une surestimation de la masse associée à la Poussée d'Archimède généralisée a tendance à augmenter l'amplitude des glissements (ce qui peut se retrouver dans les équations de la dynamique). Par contre, il est très difficile de dire si à un instant donné, on sera plus loin du point de départ dans un modèle ou l'autre. Cette information dépend très fortement du signal sismique et de l'historique de glissement. Il est donc impossible d'anticiper un résultat sans le simuler.

Ces commentaires seront valables sur l'ensemble des résultats présentés. Il conviendra donc au lecteur d'interpréter les déplacements présentés à l'aide de ces avertissements.

4.4 Paramètres des simulations :

Afin de limiter le nombre de paramètres considérés et pouvoir comparer les différents résultats obtenus, nous allons restreindre le nombre de configurations traitées. Nous préci-

sons donc les caractéristiques communes à toutes les simulations et les paramètres amenés à varier en fonction des modèles. On précisera ainsi :
- Les hypothèses sur la structure,
- Les chargements sismiques,
- Les coefficients de frottement,
- Les hypothèses de couplage fluide-structure.

4.4.1 Hypothèses sur la structure :

On considére une structure individuelle immergée dans un espace confiné. Les masses de couplage sont déterminées à partir de la géométrie initiale et des déplacements de la structure suivant des conditions précisées dans le paragraphe §4.4.4. Les fréquences propres de la structure sèche sont choisies afin d'être au-dessus des fréquences fortes du séismes (c'est-à-dire supérieure à 10 Hz) pour ne pas avoir de phénomène de résonance naturelle de la structure qui fausserait les résultats. On supposera aussi des fréquences propres différentes suivant la direction $\underline{e_x}$ et $\underline{e_y}$. Cependant, dans certaines conditions de couplage fluide-structure, il est possible d'obtenir des fréquences propres immergées dans le domaine fréquentiel fort du séisme et d'avoir des résonances locales. Ces phénomènes seront difficiles à détecter correctement.

Nous allons maintenant préciser :
- La géométrie d'ensemble du système qui servira à la fois à déterminer les dimensions des lames d'eau et celles de la structure,
- Les caractéristiques mécaniques des différentes modélisations retenues : poutre, masses-ressort et masse ponctuelle.

4.4.1.1 Géométrie d'ensemble :

Le système simplifié considéré est représenté dans la figure 4.5. Il s'agit d'un parallèlépipède rectangle immergé dans une piscine. Les axes principaux de la structure sont alignés avec ceux de la piscine. On considérera dans certains configurations une structure immergée excentrée afin de renforcer le couplage fluide-structure ou de faire apparaître l'influence de l'effet de coin.

Les caractéristiques géométriques sont résumées dans le tableau (Table 4.1). Pour les variables H_x et H_y, on considérera 3 jeux de valeurs possibles : $(H_x, H_y) = \{(0,0); (0.1,0); (0.1,0.1)\}$

L_p	2.4 m
l_p	4.4 m
L	2 m
l	4 m
H_x	varie entre 0 m et 0.1 m
H_y	varie entre 0 m et 0.1 m

TABLE 4.1 – Caractéristiques géométriques des lames d'eau entourant la structure

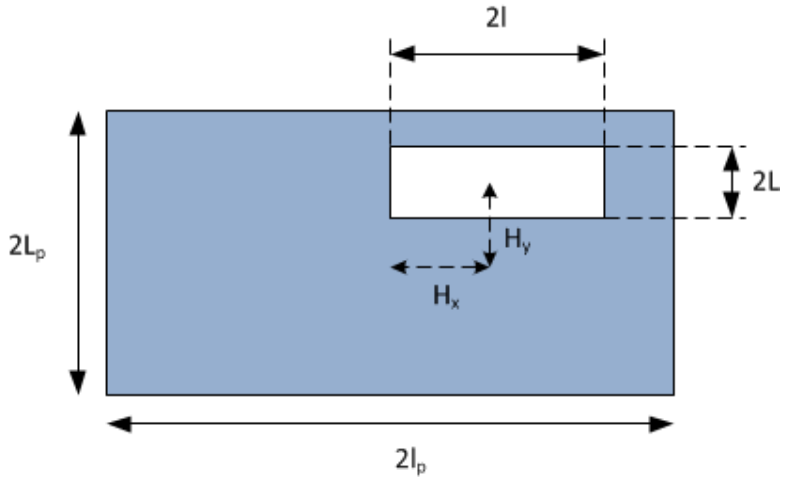


FIGURE 4.5 – Configuration générique de la géométrie des lames d'eau entourant le râtelier

Il est aussi possible de modéliser des couplages entre structures indépendantes pour étudier les comportements individuels des structures. Ce dernier point fait partie des approfondissements possibles sur les bases des théories développées dans les chapitres précédents. Nous présenterons un premier développement dans ce sens dans le chapitre V.

4.4.1.2 Caractéristiques mécaniques de la structure :

Nous utiliserons trois niveaux de modélisation de la structure : poutre, masses-ressort et masse ponctuelle. Afin de pouvoir comparer les résultats de ces trois modèles, nous choisirons des propriétés mécaniques permettant de voir les modèles simplifiés (masses-ressort et masse ponctuelle) comme des modéles plus grossiers de la poutre glissante.

Modèle poutre glissante :

Dans la modélisation la plus fine de la structure, on suppose qu'elle est représentée par une poutre dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau (Table 4.2).

ρ	7900 Kg/m^3
E	$159 \times 10^9 Pa$
f_x	45 Hz
f_y	35 Hz
I_{xx}	$\rho S \left(\frac{H}{1.875}\right)^4 \frac{(2\pi f_x)^2}{E}$
I_{yy}	$\rho S \left(\frac{H}{1.875}\right)^4 \frac{(2\pi f_y)^2}{E}$
H	2 m
S	8 m^2

TABLE 4.2 – Caractéristiques de la poutre modélisant la structure

Modèle masses-ressort :

Dans la modélisation masses-ressort représentée dans la figure 4.6, on considère la répartition de masses correspondant aux déformées des premiers modes propres de poutre (cf. figure 4.7). Les raideurs de ressorts sont choisies pour avoir les mêmes fréquences propres que les premières fréquences propres de la poutre. Ainsi, on trouve pour un contact adhérent :

$$m = \rho SH = 126400Kg,\ m_A = 0.3{\times}m,\ m_B = 0.7{\times}m,\ k_x = m_B\left(2\pi f_x\right)^2,\ k_y = m_B\left(2\pi f_y\right)^2, \tag{4.29}$$

Pour un contact glissant, on prend les valeurs suivantes :

$$m = \rho SH = 126400Kg,\ m_A = 0.5{\times}m,\ m_B = 0.5{\times}m,\ k_x = m_B\left(2\pi f_x\right)^2,\ k_y = m_B\left(2\pi f_y\right)^2, \tag{4.30}$$

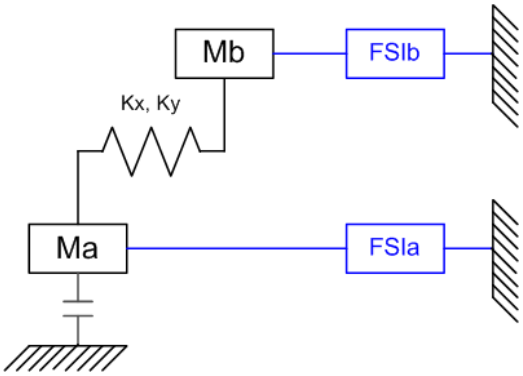


FIGURE 4.6 – Modèle masses-ressort



FIGURE 4.7 – Repartition de masses équivalentes en fonction des conditions de contact

Remarque importante !

Ce changement de la répartition de la masse n'est pas faisable sur logiciel éléments-finis. Nous devons donc fixer définitivement la répartition massique au début de la simulation. Nous avons décidé de nous intéresser principalement à une bonne évaluation du début du glissement et nous choisissons donc une répartition massique correspondant à un contact adhérent soit : $m_A = 0.3 \times m$ et $m_B = 0.7 \times m$. On surestime donc l'importance de la masse oscillante dans le comportement de la structure pendant le glissement.

Modèle masse glissante :

Dans le cas d'une masse glissante, la seule caractéristique est la valeur de la masse :

$$m = \rho SH = 126400Kg, \tag{4.31}$$

4.4.2 Chargements sismiques :

Les séismes considérés sont choisis parmi les séismes EUR pour un sol qualifié de 'moyen'. On choisit une accélération maximale du signal lié au plancher sur lequel repose l'équipement considéré à 0,3 g. Cela correspond aux conditions normales de dimensionnement des équipements sensibles dans le bâtiment combustible des centrales nucléaires françaises. Les signaux sismiques durent 20 s et correspondent aux pseudo-accélérations du plancher situé au mi-hauteur de la piscine de stockage de combustible pour un amortissement du bâtiment de 4%.

4.4.3 Coefficients de frottement :

Nous nous intéressons principalement aux déplacements de la structure sous séisme. Nous allons donc considérer le coefficient de frottement réglementaire minimal, c'est-à-dire :
- $\mu_S = 0.2$: coefficient de frottement statique,
- $\mu_D = 0.2$: coefficient de frottement dynamique.

4.4.4 Hypothèses de couplage fluide-structure :

Afin de pouvoir faire une comparaison avec les simulations éléments-finis, nous limiterons parfois les niveaux de détails du modèle de masses ajoutées. Nous pourrons donc avoir 3 niveaux de détails :
- Pas de couplage fluide-structure,
- Matrices de masses de couplage restreinte aux matrices diagonales sans actualisation de géométrie,
- Matrices de masses de couplage pouvant avoir des termes non diagonaux avec actualisation de géométrie.

Les valeurs des masses de couplage fluide-structure sont obtenues en considérant la géométrie décrite dans le paragraphe (4.4.1.1) ainsi que les déplacements de la structure à l'instant considéré dans le cas d'une modélisation avec actualisation de la géométrie.

4.5 Validation du modèle analytique en l'absence de couplage fluide-structure :

Dans cette partie, nous considérons des modèles sans couplage fluide-structure avec des niveaux de finesse de modélisation variable. On souhaite ainsi valider les modèles analytiques développés en comparant les résultats analytiques avec ceux obtenus par simulation numérique sous le logiciel $ANSYS$.

4.5.1 Résultats du modèle de masse glissante sans couplage fluide-structure :

Dans cette partie on considère la modélisation la plus simplifiée d'une structure, c'est-à-dire, un modèle de masse ponctuelle. La réponse vibratoire de la structure est négligée. Les caractéristiques utilisées sont précisées dans le paragraphe 4.4.

Les résultats du déplacement d'une masse glissante sans couplage fluide-structure sont représentés dans la figure 4.8. La courbe rouge représente les déplacements calculées à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

On observe une bonne correspondance des deux courbes. L'erreur relative maximale (correspondant à l'erreur relative calculée sur les positions les plus éloignées de la position initialé) entre les deux courbes est d'environ 5% à chaque instant de la simulation.

De plus, le temps de calcul numérique est de l'ordre de 10 minutes pour un calcul de 2 secondes sous matlab pour les solutions quasi-analytiques. Cela nous permet de valider le modèle analytique sur le glissement d'une masse ponctuelle glissante sans couplage fluide-structure qui répond à toutes nos exigences d'exactitude des résultats et de temps de calcul.

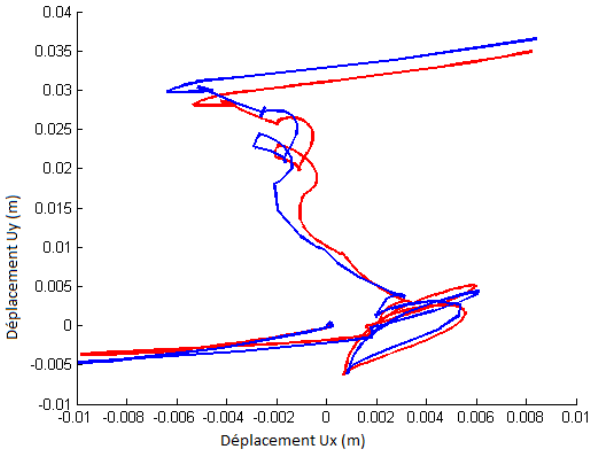


FIGURE 4.8 – Comparaison des glissements de la masse glissante sans couplage fluide-structure (En rouge : Solution analytique, en bleu : Solution numérique)

On considère le modèle analytique de masse glissante comme validé. De plus, celui-ci répond à l'exigence de rapidité de temps de calcul imposée dans cette thèse.

4.5.2 Résultats du modèle masses-ressort sans couplage fluide-structure :

Dans cette partie on considère une modélisation intermédiaire d'une structure réelle, c'est-à-dire, un modèle approché de masses-ressort avec répartition de masses constante

correspondant à celle d'une poutre console répondant sur son premier mode (soit $m_A = 0.3 \times M$ et $m_B = 0.7 \times M$). Les caractéristiques utilisées sont précisées dans le paragraphe 4.4.
Les résultats du déplacement de la base du système masses-ressort sans couplage fluide-structure sont représentés dans la figure 4.9. La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

On observe une dérive de la solution analytique par rapport à celle obtenue par simulation numérique. Cela est dû au délai de détection de l'arrêt des glissements qui crée à chaque fois une translation complémentaire. A cela s'ajoute le fait que la structure continue à répondre selon son mouvement d'oscillation propre. Ainsi lorsque le modèle analytique arrête le système parce qu'il a détecté une condition d'arrêt, la masse oscillante a continué à emmagasiner de l'énergie (potentielle ou cinétique) qu'elle restitue à l'itération suivante déclenchant un glissement là où une détection plus fine de l'instant d'arrêt du glissement aurait pu arrêter le glissement du système pour quelques itérations. On obtient donc une réponse analytique qui s'éloigne de manière chaotique de la solution numérique tout en suivant une tendance identique. Cependant, les deux courbes obtenues suivent la même tendance et on obtient une erreur relative sur le déplacement maximal de 5 %.

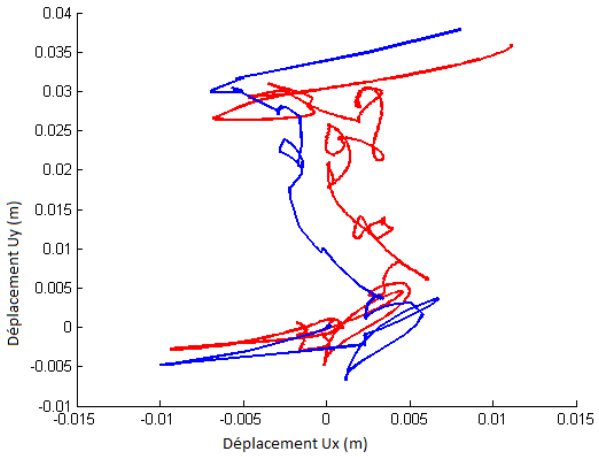


FIGURE 4.9 – Comparaison des glissements obtenus au niveau de la masse glissante d'un système masses-ressort frottant (En rouge : Solution analytique, en bleu : Solution numérique)

On a fait remarquer dans le paragraphe (4.4.1.2) qu'il était impossible de changer la répartition de masses dans un modèle éléments-finis pendant le calcul. Nous avons donc implémenté ce changement de la répartition de la masse dans le modèle analytique afin de voir l'impact que cela a sur le déplacement de la structure.

La figure 4.10 représente la comparaison des déplacements de la masse en contact avec le sol entre un modèle analytique sans changement de répartition de masses pendant le glissement et un modèle analytique avec cette propriété. La courbe rouge représente le déplacement dans le modèle sans changement de répartition de masses. La courbe bleue

représente le déplacement dans le modèle avec changement de répartition de masses lors du glissement.

On remarque que localement, le glissement est de moins grande intensité lorsqu'on actualise la répartition de masses. Cela est du au fait que l'influence relative de la masse oscillante est plus faible et il y a donc moins de stockage d'énergie dans le ressort pouvant être restitué dans le système. On remarque de plus que cela a un effet stabilisant sur le phénomène de glissements parasites liés à la mauvaise détection de l'instant d'arrêt du glissement. Cependant, on remarque que pour ce signal cela n'a pas de réelle influence sur le déplacement maximal.

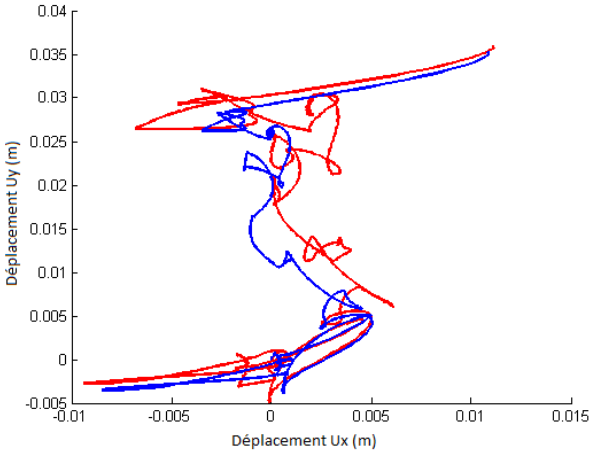


FIGURE 4.10 – Comparaison des glissements obtenus au niveau de la masse glissante d'un système masses-ressort frottant - Etude de l'influence du changement de répartition de masse lors du glissement (En rouge : modèle sans changement de répartition de masse, en bleu : modèle avec changement de répartition de masse)

Ces deux résultats permettent de valider le modèle analytique masses-ressort à condition d'analyser finement les glissements parasites et de privilégier des modèles où la masses oscillante ne dépasse pas 60% de la masse totale. Sinon, il est nécessaire d'utiliser la fonction d'actualisation de la répartition de masses.

Remarque : *L'adéquation des résultats analytiques aux résultats numériques est bien meilleure dans l'étude de structure réelle. qui pour des raisons de renforcement mécanique ou de stabilité au basculement ont une répartition de masse non uniforme et principalement concentrée au niveau de sa base. Cela stabilise fortement la réponse du système comme on peut le voir dans l'Annexe 1. Ce commentaire sera valable pour tous les résultats du modèle masses-ressort glissant immergé ou non.*

4.5.3 Résultats du modèle poutre sans couplage fluide-structure :

Dans cette partie on considère une modélisation fine d'une structure réelle, c'est-à-dire, un modèle de poutre glissante. On considére les 11 premiers modes propres dans chaque direction. Les caractéristiques utilisées sont précisées dans le paragraphe 4.4.

Les résultats du déplacement de la base de la poutre glissante sans couplage fluide-structure sont représentés dans la figure 4.11. La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

On observe une dérive de la solution analytique par rapport à celle obtenue par simulation numérique. Cela est du au délai de détection de l'arrêt des glissements qui crée à chaque fois une translation complémentaire. A cela s'ajoute le fait que la structure continue à répondre selon son mouvement d'oscillation propre. On obtient donc une réponse analytique qui s'éloigne progressivement de la solution numérique. Les phénomènes de glissements parasites sont là aussi présent et amplifient le caractère chaotique local de la réponse. Cependant, la différence obtenue suit la même tendance et on obtient un erreur relative sur le déplacement maximal de 5%.

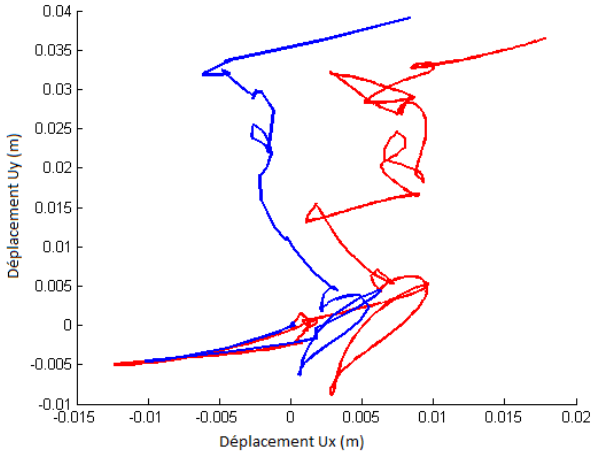


FIGURE 4.11 – Comparaison des glissements obtenus au pied de la poutre glissante (En rouge : Solution analytique, en bleu : Solution numérique)

Le modèle analytique répond partiellement au problème en donnant une bonne estimation du glissement maximal mais une trajectoire pouvant être localement distante des solutions éléments-finis.

Remarque : *L'adéquation des résultats analytiques aux résultats numériques est bien meilleure dans l'étude de structure réelle. qui pour des raisons de renforcement mécanique ou de stabilité au basculement ont une répartition de masse non uniforme et principalement concentrée au niveau de sa base. Cela stabilise fortement la réponse du système comme on peut le voir dans l'annexe 2. Ce commentaire sera valable pour tous les résultats du modèle de poutre glissante immergée ou non.*

4.6 Validation du modèle analytique en présence de couplage fluide-structure modélisé par des matrices de masses ajoutées diagonales sans actualisation de géométrie :

Dans cette partie, nous considérons des modèles en présence de couplage fluide-structure. Celui-ci est représenté par une modélisation adaptée aux exigences du logiciel éléments-finis, à savoir, une matrice de masses ajoutée uniquement diagonale et sans actualisation de géométrie. On considère pour chaque modèle structurel trois positions de structure immergée :
- Une position *centrée* où $(H_x, H_y) = (0, 0)$,
- Une position *côté* où $(H_x, H_y) = (0.1, 0)$,
- Une position *coin* où $(H_x, H_y) = (0.1, 0.1)$.

Sur chacune de ces configurations et pour chaque niveau de modélisation de la structure nous comparerons les résultats analytiques aux résultats numériques.

4.6.1 Résultats du modèle de masse glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée diagonale sans actualisation de géométrie :

Dans cette partie on considère la modélisation la plus simplifiée d'une structure, c'est-à-dire, un modèle de masse ponctuelle. La réponse vibratoire de la structure est négligée. Les caractéristiques utilisées sont précisées dans le paragraphe 4.4. Le couplage fluide-structure est représenté par une matrice de masses ajoutées diagonales calculées sur la configuration géométrique initiale à l'aide des résultats du chapitre 2. On considère trois géométries initiales : centrée, côté et coin.

4.6.1.1 Configuration centrée $(H_x, H_y) = (0, 0)$:

On étudie une configuration où la masse glissante se trouve au centre de la réserve d'eau. On cherche à valider les modéles analytiques développés dans le chapitre 3 en les comparant aux résultats obtenus sur le logiciel éléments-finis ANSYS.

Les résultats du déplacement de la masse glissante avec couplage fluide-structure sur une position centrée sans actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure 4.12. La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

4.6.1.2 Configuration côté $(H_x, H_y) = (0.1, 0)$:

On étudie une configuration où la masse glissante se trouve plus proche du bord droit de la réserve d'eau à une position $(0.1, 0)$. On cherche à valider les modéles analytiques développés dans le chapitre 3 en les comparant aux résultats obtenus sur le logiciel éléments-finis ANSYS.

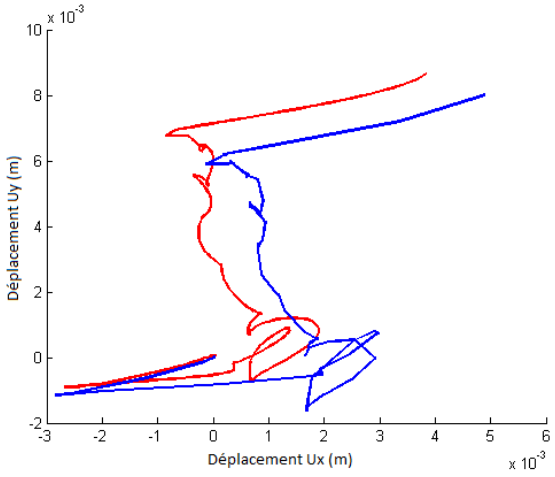


FIGURE 4.12 – Comparaison des glissements obtenus pour un modèle masse glissante avec couplage fluide-structure à partir d'une position centrée (0, 0) sans actualisation de géométrie (En rouge : solution analytique, en bleu : solution numérique)

Les résultats du déplacement de la masse glissante avec couplage fluide-structure sur une position côté (0.1, 0) où la structure est plus proche du bord droit de la reserve d'eau sans actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure 4.13. La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

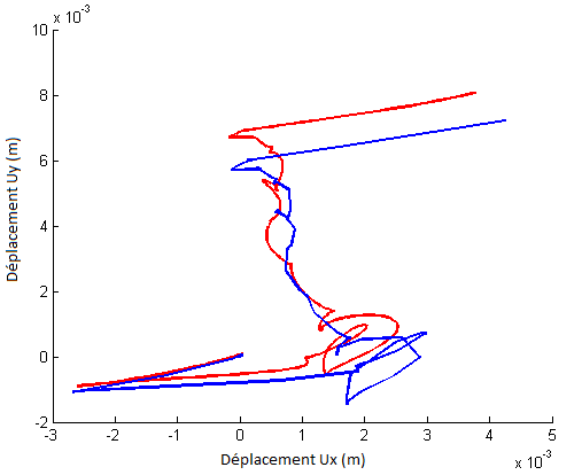


FIGURE 4.13 – Comparaison des glissements obtenus pour un modèle masse glissante avec couplage fluide-structure à partir d'une position excentrée (0.1, 0) sans actualisation de géométrie (En rouge : solution analytique, en bleu : solution numérique)

4.6.1.3 Configuration excentrée $(H_x, H_y) = (0.1, 0.1)$:

On étudie une configuration coin où la masse glissante se trouve proche du coin en haut à droite de la réserve d'eau à une position $(0.1, 0.1)$. On cherche à valider les modéles analytiques développés dans le chapitre 3 en les comparant aux résultats obtenus sur le logiciel éléments-finis ANSYS.

Les résultats du déplacement de la masse glissante avec couplage fluide-structure sur une position coin (0.1, 0.1) où la structure est plus proche du coin en haut à droite de la réserve d'eau sans actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure 4.14. La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

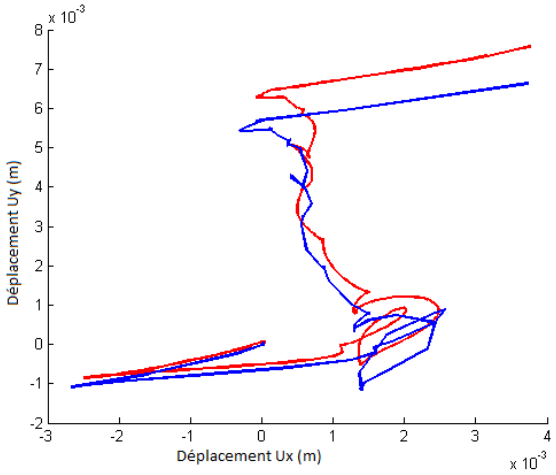


FIGURE 4.14 – Comparaison des glissements obtenus pour un modèle masse glissante avec couplage fluide-structure à partir d'une position excentrée (0.1, 0.1) sans actualisation de géométrie (En rouge : solution analytique, en bleu : solution numérique)

4.6.1.4 Commentaires des résultats :

Les déplacements des masses glissantes immergées sous séisme ont été présentés dans les paragraphes précédents. Les couplages fluide-structure sont représentés par une matrice de masses ajoutées uniquement diagonale et sans actualisation de géométrie. On considère pour chaque modèle structurel trois positions de structure immergée : centrée, côté et coin dont les résultats sont représentés respectivement dans les figures 4.12, 4.13 et 4.14.

Sur l'ensemble des configurations, on observe une bonne adéquation des résultats avec une légère dérive des résultats analytiques par rapport aux résultats numériques. Cela est dû au fait qu'on ne détecte pas exactement l'instant d'arrêt du glissement. On surévalue donc le glissement de la structure par rapport aux simulations numériques localement. Cependant, l'erreur relative sur le déplacement maximal ne dépasse pas 5%.

De plus, sur chacune des simulations, le temps de calcul numérique est de l'ordre de 10 minutes pour un calcul de 2 secondes avec les solutions quasi-analytiques. Cela nous permet de valider le modèle analytique sur le glissement d'une masse ponctuelle glissante avec couplage fluide-structure sans actualisation de géométrie qui répond à toutes nos exigences d'exactitude des résultats et de temps de calcul.

4.6.2 Résultats du modèle masses-ressort glissant avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée diagonale sans actualisation de géométrie :

Dans cette partie on considère la modélisation intermédiaire d'une structure, c'est-à-dire, un modèle masses-ressort glissant. La réponse vibratoire de la structure est modélisée par sa réponse sur le premier mode propre. Les caractéristiques utilisées sont précisées dans le paragraphe 4.4. Etant donné que le logiciel éléments-finis ne permet pas d'actualiser la répartition de masses en fonction de l'évolution de l'état du contact. On considére donc une répartition de masses correspondant à un état adhérent de la structure (c'est-à-dire $m_A = 0.3 \times m$ et $m_B = 0.7 \times m$). Le couplage fluide-structure est représenté par une matrice de masses ajoutées diagonales calculées sur la configuration géométrique initiale à l'aide des résultats du chapitre 2. On considère trois géométries initiales : centrée, côté et coin.

4.6.2.1 Configuration centrée $(H_x, H_y) = (0, 0)$:

On étudie une configuration où le système masses-ressort se trouve au centre de la réserve d'eau. On cherche à valider les modéles analytiques développés dans le chapitre 3 en les comparant aux résultats obtenus sur le logiciel éléments-finis ANSYS.

Les résultats du déplacement de la masse frottante du système masses-ressort avec couplage fluide-structure sur une position centrée sans actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure (4.15). La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

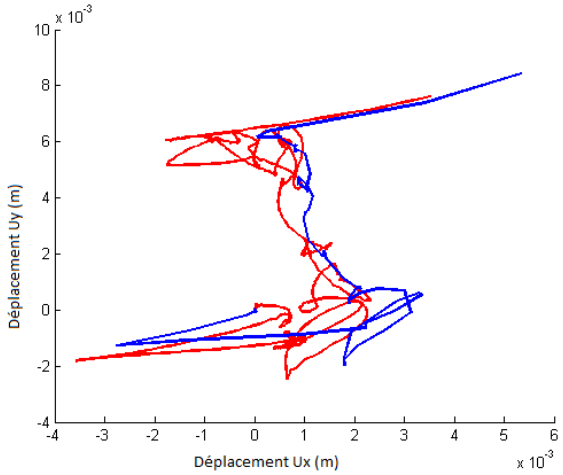


FIGURE 4.15 – Comparaison des glissements obtenus au niveau de la masse glissante d'un système masses-ressort frottant avec couplage fluide-structure à partir d'une position centrée (0, 0) sans actualisation de géométrie (En rouge : solution analytique, en bleu : solution numérique)

4.6.2.2 Configuration côté $(H_x, H_y) = (0.1, 0)$:

On étudie une configuration côté où le système masses-ressort se trouve plus proche du bord droit de la réserve d'eau à une position $(0.1, 0)$. On cherche à valider les modéles analytiques développés dans le chapitre 3 en les comparant aux résultats obtenus sur le logiciel éléments-finis ANSYS.

Les résultats du déplacement de la masse frottante du système masses-ressort avec couplage fluide-structure sur une position côté $(0.1, 0)$ sans actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure (4.16). La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

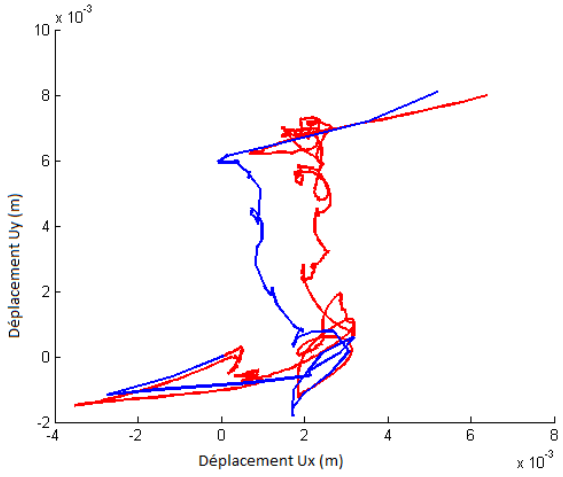


FIGURE 4.16 – Comparaison des glissements obtenus au niveau de la masse glissante d'un système masses-ressort frottant avec couplage fluide-structure à partir d'une position excentrée (0.1, 0) sans actualisation de géométrie (En rouge : solution analytique, en bleu : solution numérique)

4.6.2.3 Configuration coin $(H_x, H_y) = (0.1, 0.1)$:

On étudie une configuration coin où la structure se trouve plus proche du coin en haut à droite de la réserve d'eau à une position $(0.1, 0.1)$. On cherche à valider les modéles analytiques développés dans le chapitre 3 en les comparant aux résultats obtenus sur le logiciel éléments-finis ANSYS.

Les résultats du déplacement de la masse frottante du système masses-ressort avec couplage fluide-structure sur une position coin $(0.1, 0.1)$ sans actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure (4.17). La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

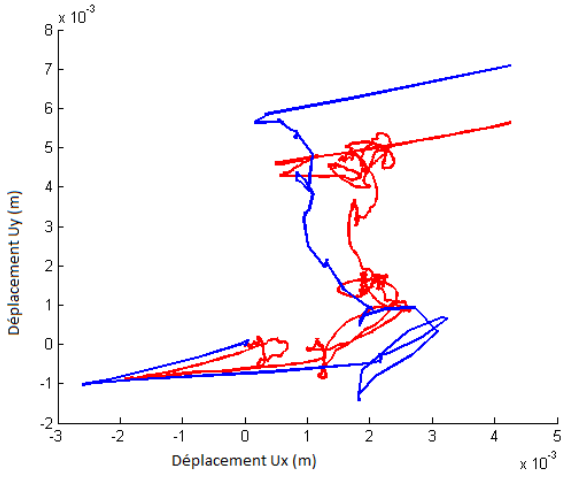


FIGURE 4.17 – Comparaison des glissements obtenus au niveau de la masse glissante d'un système masses-ressort frottant avec couplage fluide-structure à partir d'une position excentrée (0.1, 0.1) sans actualisation de géométrie (En rouge : solution analytique, en bleu : solution numérique)

4.6.2.4 Commentaires des résultats :

Nous avons présenté les déplacements de la masse glissante d'un système masses-ressort immergé sous séisme dans les paragraphes précédents. Les couplages fluide-structure sont représentés par une matrice de masses ajoutée uniquement diagonale et sans actualisation de géométrie. On considère pour chaque modèle structurel trois positions de structure immergée : centrée, côté et coin dont les résultats sont représentés respectivement dans les figures 4.15, 4.16 et 4.17.

Sur l'ensemble des configurations, on observe une dérive pouvant être localement importante de la solution analytique par rapport à celui obtenu par solution numérique. Cela est du au délai de détection de l'arrêt des glissements qui crée à chaque fois une translation complémentaire auquel s'ajoute la forte importance relative de la masse oscillante sur le comportement du système. Ainsi le système de détection de l'arrêt du glissement du modèle analytique ne permettant pas de détecter l'instant exact d'arrêt, la masse oscillante a stocké de l'énergie qu'elle restitue au pas de temps suivant déclenchant à nouveau un glissement. On observe ainsi des nuages d'oscillations rapides correspondant aux phases d'arrêt de glissement avant qu'une nouvelle phase forte de séisme ne ramène le système vers la courbe de tendance.

De plus, sur chacune des simulations, le temps de calcul numérique est de lordre de 12 minutes pour un calcul de 2 secondes avec les solutions quasi-analytiques. Cela nous permet de valider le modèle analytique sur le glissement dun système masses-ressort glissant avec couplage fluide-structure sans actualisation de géométrie qui répond à nos exigences de temps de calcul et d'estimation du glissement maximal.

Dans les cas où il est nécessaire d'avoir une bonne évaluation de la trajectoire du glissement à chaque instant, il est nécessaire d'avoir une répartition de masses qui diminue

l'influence de la masse oscillante. Il faudra donc limiter m_B à 55% de la masse totale du système pour avoir une meilleure adéquation des deux courbes.

4.6.3 Résultats du modèle poutre glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée diagonale sans actualisation de géométrie :

Dans cette partie on considère la modélisation la plus détaillée de la structure, c'est-à-dire, un modèle poutre glissante. La réponse vibratoire de la structure est modélisée par sa réponse sur ses 11 premiers modes dans chaque direction. Les caractéristiques utilisées sont précisées dans le paragraphe 4.4. Le couplage fluide-structure est représenté par une matrice de masses ajoutées diagonales calculées sur la configuration géométrique initiale à l'aide des résultats du chapitre 2. On considère trois géométries initiales : centrée, côté et coin.

4.6.3.1 Configuration centrée $(H_x, H_y) = (0, 0)$:

On étudie une configuration où la poutre glissante se trouve au centre de la réserve d'eau. On cherche à valider les modéles analytiques développés dans le chapitre 3 en les comparant aux résultats obtenus sur le logiciel éléments-finis ANSYS.

Les résultats du déplacement de la base de la poutre glissante avec couplage fluide-structure sur une position centrée sans actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure 4.18. La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

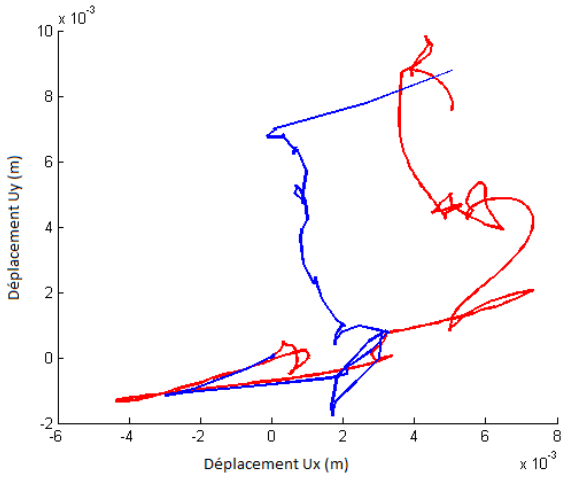


FIGURE 4.18 – Comparaison des glissements obtenus au pied de la poutre glissante avec couplage fluide-structure à partir d'une position centrée $(0, 0)$ sans actualisation de géométrie (En rouge : solution analytique, en bleu : solution numérique)

4.6.3.2 Configuration côté $(H_x, H_y) = (0.1, 0)$:

On étudie une configuration où la poutre glissante se trouve plus proche du bord droit de la réserve d'eau à une position $(0.1, 0)$. On cherche à valider les modéles analytiques développés dans le chapitre 3 en les comparant aux résultats obtenus sur le logiciel éléments-finis ANSYS.

Les résultats du déplacement de la base de la poutre glissante avec couplage fluide-structure sur une position côté (0.1, 0) sans actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure 4.19. La courbe rouge représente les déplacements calculées à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

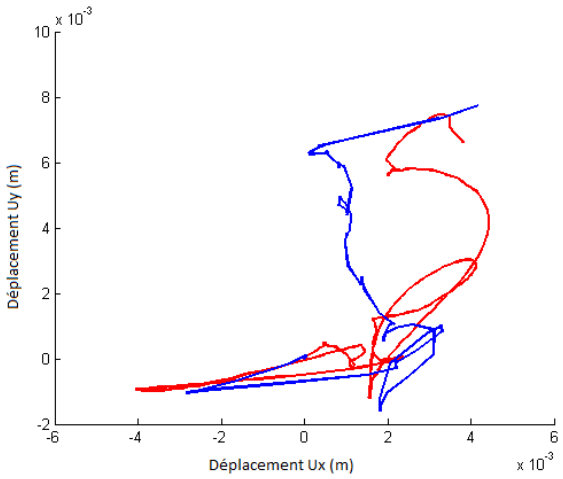


FIGURE 4.19 – Comparaison des glissements obtenus au pied de la poutre glissante avec couplage fluide-structure à partir d'une position excentrée (0.1, 0) sans actualisation de géométrie (En rouge : solution analytique, en bleu : solution numérique)

4.6.3.3 Configuration coin $(H_x, H_y) = (0.1, 0.1)$:

On étudie une configuration où la poutre glissante se trouve plus proche du coin en haut à droite de la réserve d'eau à une position $(0.1, 0.1)$. On cherche à valider les modéles analytiques développés dans le chapitre 3 en les comparant aux résultats obtenus sur le logiciel éléments-finis ANSYS.

Les résultats du déplacement de la base de la poutre glissante avec couplage fluide-structure sur une position coin $(0.1, 0.1)$ sans actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure 4.20. La courbe rouge représente les déplacements calculées à partir du modèle quasi-analytique et la courbe bleue représente les déplacements obtenus par simulation numérique.

4.6.3.4 Commentaires des résultats :

Nous avons présenté les déplacements de la base d'une poutre glissante immergé sous séisme dans les paragraphes précédents. Les couplages fluide-structure sont représentés

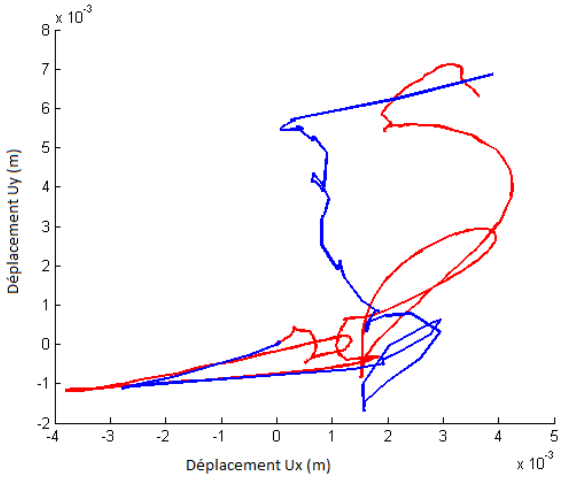


FIGURE 4.20 – Comparaison des glissements obtenus au pied de la poutre glissante avec couplage fluide-structure à partir d'une position excentrée $(0.1, 0.1)$ sans actualisation de géométrie (En rouge : solution analytique, en bleu : solution numérique)

par une matrice de masses ajoutée uniquement diagonale et sans actualisation de géométrie. On considère pour chaque modèle structurel trois positions de structure immergée : centrée, côté et coin dont les résultats sont représentés respectivement dans les figures 4.18, 4.19 et 4.20.

Sur l'ensemble des configurations, on observe une dérive de la solution analytique par rapport à celui obtenu par solution numérique. Cela est du au délai de détection de l'arrêt des glissements qui crée à chaque fois une translation complémentaire. A cela s'ajoute le fait que la structure continue à répondre selon son mouvement d'oscillation propre. On obtient donc une réponse analytique qui s'éloigne progressivement de la solution numérique. Cependant, la différence obtenue suit la même tendance et on obtient une erreur relative sur le déplacement maximal de 5 %.

De plus, sur chacune des simulations, le temps de calcul numérique est de lordre de 12 minutes pour un calcul de 2 secondes avec les solutions quasi-analytiques. Cela nous permet de valider le modèle analytique sur le glissement de la poutre glissante avec couplage fluide-structure sans actualisation de géométrie qui répond à nos exigences de temps de calcul et d'estimation du glissement maximal.

Dans les cas où il est nécessaire d'avoir une bonne évaluation de la trajectoire du glissement à chaque instant, il est nécessaire d'avoir une répartition de masses qui diminue l'influence des oscillations de la structure. Pour cela, il faudra se rapprocher de la répartition de masse des structures réelles en ajoutant par exemple une masse ponctuelle en pied de poutre. Cela donne une meilleure adéquation des deux courbes comme présenté dans l'annexe 2.

4.7 Résultats du modèle analytique en présence de couplage fluide-structure modélisé par des matrices de masses ajoutées pleines avec actualisation de géométrie :

Dans cette partie, nous considérons des modèles en présence de couplage fluide-structure. Celui-ci est représenté par la modélisation la plus fine développée dans le chapitre 2 : une matrice de masses ajoutée pleine avec actualisation de la géométrie des lames d'eau. On considère uniquement la modélisation la plus fine de la structure, c'est-à-dire, un modèle de poutre glissante. La réponse vibratoire de la structure est représentée par ses 11 premiers modes dans chaque direction. Les caractéristiques utilisées sont précisées dans le paragraphe 4.4.

La structure pourra prendre 3 configurations initiales d'implentation dans la piscine :
- Une position *centrée* où $(H_x, H_y) = (0, 0)$,
- Une position *côté* où $(H_x, H_y) = (0.1, 0)$,
- Une position *coin* où $(H_x, H_y) = (0.1, 0.1)$.

La position coin $(H_x, H_y) = (0.1, 0.1)$ représente la position où l'actualisation de la géométrie aura le plus d'influence sur le comportement de la structure. En effet, dans cette configuration, les évolutions de géométrie des lames d'eau lors du déplacement de la structure auront une grande importance.

4.7.1 Résultats du modèle de poutre glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée pleine avec actualisation de géométrie à partir d'une position initiale centrée $(0, 0)$:

On considère une poutre glissante immergée soumise à un séisme à partir d'une position initiale centrée où la structure est initiallement en position $(H_x, H_y) = (0, 0)$.

Les poutres modélisées intégrent des masses ponctuelles en pied pour représenter une répartition de masse proche de la réalité.

Les résultats du déplacement de la base de la poutre glissante avec couplage fluide-structure sur une position centrée avec actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure 4.21. La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique sans actualisation de géométrie et la courbe bleue représente les déplacements obtenus à partir du modèle quasi-analytique avec actualisation de géométrie.

4.7.2 Résultats du modèle de poutre glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée pleine avec actualisation de géométrie à partir d'une position initiale côté $(0.1, 0)$:

On considère une poutre glissante immergée soumise à un séisme à partir d'une position initiale côté où la structure est plus proche du bord droit du réservoir avec $(H_x, H_y) =$

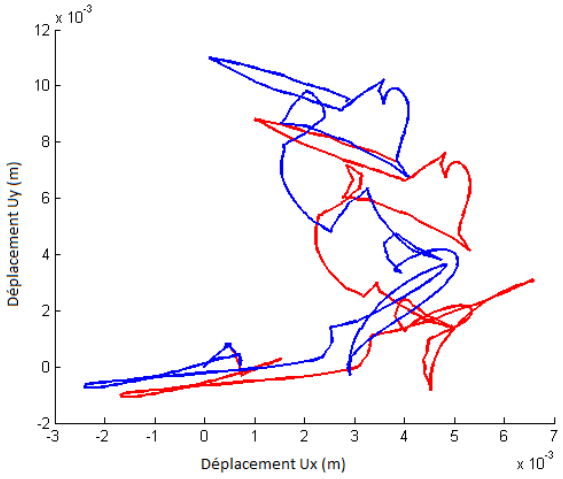


FIGURE 4.21 – Comparaison des glissements obtenus au pied d'une poutre glissante avec couplage fluide-structure représenté par des matrices pleines à partir d'une position centrée (0, 0) (En rouge : solution analytique avec actualisation de la géométrie des lames d'eau, en bleu : solution analytique sans actualisation de la géométrie des lames d'eau)

$(0.1, 0)$.

Les poutres modélisées intégrent des masses ponctuelles en pied pour représenter une répartition de masse proche de la réalité.

Les résultats du déplacement de la base de la poutre glissante avec couplage fluide-structure sur une position côté avec actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure 4.22. La courbe rouge représente les déplacements calculés à partir du modèle quasi-analytique sans actualisation de géométrie et la courbe bleue représente les déplacements obtenus à partir du modèle quasi-analytique avec actualisation de géométrie.

4.7.3 Résultats du modèle de poutre glissante avec couplage fluide-structure par matrice de masse ajoutée pleine avec actualisation de géométrie à partir d'une position initiale coin $(0.1, 0.1)$:

On considère une poutre glissante immergée soumise à un séisme à partir d'une position initiale coin où la structure est plus proche du coin en haut à droite avec $(H_x, H_y) = (0.1, 0.1)$.

Les poutres modélisées intégrent des masses ponctuelles en pied pour représenter une répartition de masse proche de la réalité.

Les résultats du déplacement de la base de la poutre glissante avec couplage fluide-structure sur une position coin avec actualisation des géométries des lames d'eau sont représentés dans la figure 4.23. La courbe rouge représente les déplacements calculés à

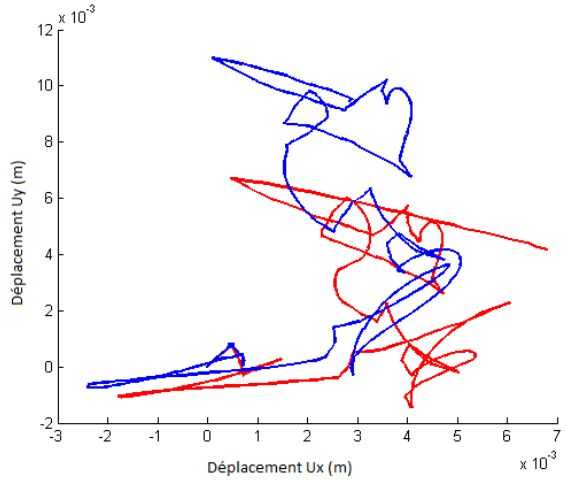


FIGURE 4.22 – Comparaison des glissements obtenus au pied d'une poutre glissante avec couplage fluide-structure représenté par des matrices pleines à partir d'une position côté (0.1, 0) (En rouge : solution analytique avec actualisation de la géométrie des lames d'eau, en bleu : solution analytique sans actualisation de la géométrie des lames d'eau)

partir du modèle quasi-analytique sans actualisation de géométrie et la courbe bleue représente les déplacements obtenus à partir du modèle quasi-analytique avec actualisation de géométrie.

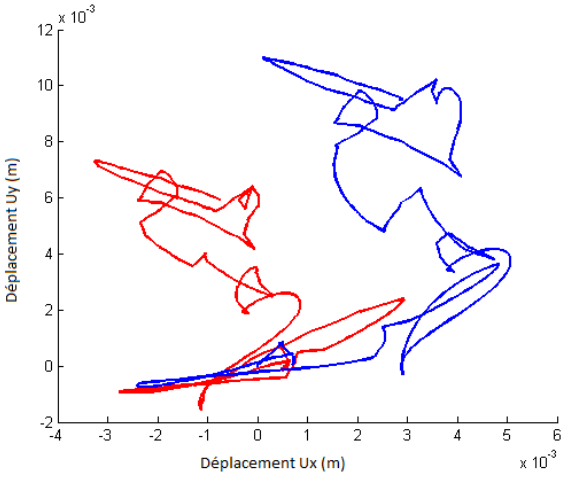


FIGURE 4.23 – Comparaison des glissements obtenus au pied d'une poutre glissante avec couplage fluide-structure représenté par des matrices pleines à partir d'une position coin (0.1, 0.1) (En rouge : solution analytique avec actualisation de la géométrie des lames d'eau, en bleu : solution analytique sans actualisation de la géométrie des lames d'eau)

4.7.3.1 Commentaires des résultats :

Tout d'abord, on remarque que pour toutes les configurations l'allure de la courbe des déplacements sans actualisation de géométrie est différente de celle présentée dans la partie §4.6.3. Cela est dû au fait qu'on considére une matrice de masses ajoutées pleine

et non uniquement diagonale. Cela régularise le déplacement de la structure même si l'amplitude totale du déplacement est plus élevée.

L'actualisation de la géométrie des lames d'eau régularise aussi le comportement du glissement. Elle diminue aussi fortement l'amplitude totale du glissement en amplifiant les efforts fluide-structure ramenant la structure vers le centre du réservoir d'eau. Ces forces de rappel sont d'autant plus grandes que la structure se rapproche des bords de la piscine.

On remarque que dans la configuartion coin, le modèle sans actualisation de géométrie des lames d'eau donne un déplacement maximal supérieur à 0.1m. Cela aurait pour conséquence qu'on détecte un impact entre la structure et le réservoir et imposerait de faire des modifications fortes de la conception de la structure. Le modèle avec actualisation de géométrie donne des déplacements inférieurs à 0.1m et il n'y a donc pas d'impact entre la structure et le réservoir.

4.8 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre l'application des méthodes de calcul développées dans le chapitre 3 sur des configurations de structures simplifiées : masse glissante immergée et système masses-ressort frottant immergé. Nous avons ensuite présenté les résultats des méthodes de résolution détaillées dans le chapitre 3. Dans un premier temps, les hypothèses sur les caractéristiques géométriques, mécaniques et sur les couplages fluide-structure ont été exposées. Puis, nous avons validé les méthodes de résolution analytique en l'absence de couplage fluide-structure en les comparant aux solutions numériques. Ensuite, nous avons procédé de la même manière pour valider les méthodes de résolution analytique dans le cas de structures immergées avec couplage fluide-structure représenté par des matrices de masses ajoutées diagonales sans actualisation de la géométrie des lames d'eau. Enfin, nous avons utilisé les modéles analytiques de détermination des masses ajoutées de couplage fluide-structure du chapitre 2 ainsi que les solutions analytiques du modéle de poutre glissante avec actualisation des géométries des lames d'eau du chapitre 3 afin de déterminer les glissements du structure glissante immergée sous chargement sismique avec actualisation de la géométrie des lames d'eau.

Les résultats obtenus valident les objectifs de cette thèse :
- Modélisation la plus fine possible du comportement réelle de la structure,
- Temps de calcul quasiment instantané : Le modéle couplé se résout en quelques secondes,
- Adéquation avec les résultats numériques sur des cas simplifiés.

Bibliographie

[1] B. Westermo, F. Udwadia, Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, 135-146, 1983.

[2] J.C. Pons, Réponse dynamique d'une structure rigide sur fondation glissante, 1er Colloque Nationale de Génie Parasismique, Saint-Rémy-les-Chevreuses, 29, 39 et 31 janvier 1986.

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Contenus de la thèse :

Cette thèse présente une méthode innovante de résolution des problèmes de structures immergées glissantes lors d'un chargement sismique quelconque. Il vise à estimer le déplacement de la structure lors du glissement en modélisant de la manière la plus fine possible les interactions fluide-structure. Notre modéle cherche à répondre à des exigences très strictes de temps de calcul. Actuellement, les calculs éléments-finis de ces problèmes nécessitent de grandes puissances de calcul et un temps considérable (de l'ordre de 12 minutes pour un problème couplé non-linéaire). Le modéle développé dans cette thèse est résolu en quelques secondes à l'aide de jeux de solutions analytiques correspondant aux différents états du contact et à l'évolution du couplage fluide-structure au cours du déplacement de la structure.

Ce document présente donc dans un premier temps le contexte général dans lequel s'inscrit cette thèse. La population mondiale continuera à croître jusqu'en 2050 dans les évolutions les plus pessimistes et jusqu'en 2100 pour les estimations réalistes. Cette augmentation de la population mondiale s'effectue en parallèle d'une hausse des besoins énergétiques mondiaux liée à la fois à l'augmentation de la population mais aussi au développement des pays émergents créant une augmentation de la consommation par habitant. Ce double-effet entraîne une augmentation très sensible des besoins énergétiques mondiaux qui devront être comblés par la création de nouvelles centrales de production d'énergie et notamment des centrales nucléaires, lesquelles devront être dimensionnées avec des exigences de sûreté croissantes.

Nous avons ensuite présenté les méthodes de dimensionnement souhaitées pour ces centrales nucléaires : à savoir des méthodes stochastiques. Celles-ci ont du mal à être utilisées sur des structures ayant un comportement fortement non-linéaire et donc nécessitant des temps de calcul élevés. Nous définissons ainsi l'objet principal d'étude de cette thèse : les structures immergées glissantes sous chargement sismique, parmi lesquelles nous pouvons citer les râteliers de stockage de combustibles usés qui sont les structures pouvant contenir la plus grande quantité de matières radioactives de toute la centrale nucléaire. Nous détaillons ensuite le plan de cette thèse ainsi que d'autres exemples d'applications, parmi lesquels, les réservoirs de rétention d'eau usé, les ponts, les structures en maçonnerie, ...

Dans une deuxième partie, on détaille la modélisation retenue pour le couplage fluide-structure. Après une présentation des bases théoriques de la théorie des masses ajoutées, on présente la solution analytique de référence à savoir le couplage entre deux cylindres infinis concentriques. Puis, nous donnons des précisions sur la poussée d'Archimède généralisée. On étudie ensuite le couplage entre deux parallélépipèdes rectangles pour lesquels nous avons développé un méthode analytique avec une cinématique enrichie dans une configuration de rectangles concentriques. Puis, nous comparons les résultats obtenus dans la littérature et ceux issus des simulations numériques aux valeurs analytiques issues de nos théories. Enfin, nous développons la théorie de couplage entre des structures rectangulaires organisées en quadrillage. L'ensemble des modèles analytiques développés pour le couplage fluide-structure prennent en compte les effets de coin (qui correspondent aux efforts créés par le fluide dans des directions perpendiculaires à la direction de déplacement de la structure) et permettent un calcul instantané des matrices de masses ajoutées qui peut ensuite être couplé à un modèle de dynamique des structures.

Ce modéle de dynamique des structures est développé dans le chapitre 3. Celui-ci prend en compte les effets de coin fluide, l'évolution temporelle des masses ajoutées de couplage fluide-structure liée au déplacement de la structure, l'amortissement créé par les dérivées temporelles des masses ajoutées, les structures complexes à condition qu'elles soient décrites par un nombre fini de modes propres dont on connait les déformées et les modéles de contact pouvant être complexes. Il est présenté en considérant un modèle de poutre glissante dont on peut déduire les modes propres secs dans des conditions libre-libre et encastré-libre. On déduit ensuite les modes propres immergés sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres secs. Puis, on projette les équations de la dynamique sur le mode propre immergé correspondant à la condition de contact étudiée (encastré-libre pour une adhérence de la structure, libre-libre pour un glissement). On résout enfin cette équation en considérant un pas de temps suffisamment petit pour rendre le terme de droite constant. On détecte s'il y a une évolution de la condition du contact à la fin du pas de temps. Si elle n'a pas lieu, on garde le même jeu d'équations analytiques, sinon, on change de jeux de solutions analytiques à l'aide d'une matrice de changement de base et on stocke les déplacements de corps rigide. On peut ainsi reconstruire l'ensemble du déplacement de la structure. Les jeux de solution et les matrices de changement de bases changent à chaque itération avec l'évolution des masses ajoutées de couplage fluide-structure. Les solutions étant quasi-analytiques, le temps de calcul sur un signal sismique de 20 secondes est inférieur à 2 secondes.

On présente ensuite dans le chapitre 4 les solutions du modèle couplé de dynamique non-linéaire avec couplage fluide-structure sous chargement sismique. On utilise trois niveaux de détail pour décrire la structure étudiée : masses ponctuelle, système masses-ressort, poutre. Dans un premier temps, nous validons les modèles quasi-analytiques sur les trois configurations de structure en l'absence de couplage fluide-structure. On observe une bonne adéquation des solutions anlaytiques avec les résultats numériques. Puis, nous introduisons le couplage fluide-structure sous la forme de matrices diagonales en l'absence d'actualisation de géométrie. Le modèle masse glissante donne un déplacement très proche des solutions numériques. Les modèles masses-ressort et poutre s'éloignent localement de la solution numérique en raison de la grande importante de la masse en oscillation par rapport au point de contact et les erreurs faites dans la détection de l'arrêt du glissement

déclenchent des glissements locaux parasites. Ce problème est nettement moins présent dans les structures réelles pour lesquelles la masse au point de contact est prépondérante sur la masse oscillante pour des raisons de stabilité. Enfin, on obtient les courbes de déplacement pour un modèle couplé complet : poutre glissante avec couplage fluide-structure modélisé par des matrices pleines avec actualisation de la géométrie. Cela se révèle tout à fait nécessaire dans les cas où la structure est proche du bord de la réserve d'eau. Dans ce cas, il existe un risque très fort d'impact de la structure sur le bord du réservoir avec des conséquences souvent grave en terme de maintien d'étanchéité du réservoir ou de réutilisation de la structure.

Ce dernier chapitre résume les contenus de cette thèse et propose des pistes de développement pour l'avenir.

5.2 Voies d'amélioration et recherches complémentaires :

Les méthodes présentées dans ce document proposent une synthèse des méthodes classiques existant dans la littérature avec des évolutions notamment dans la prise en compte des masses ajoutées de couplage fluide-structure et les méthodes de résolution quasi-analytique des structures immergées avec actualisation de géométrie de lames d'eau. On peut d'ors et déjà dresser certaines pistes d'amélioration de ces méthodes et proposer des sujets de développement possibles pour de nouvelles méthodes de résolution analytiques.

5.2.1 Amélioration des modèles actuels :

Parmi les améliorations possibles du modèle, on peut citer deux pistes de recherche :
- Meilleure détection du début et de la fin du glissement,
- Prise en compte de l'échappement vertical dans l'estimation du couplage fluide-structure.

5.2.1.1 Meilleure détection du début et de la fin du glissement :

L'une des raisons expliquant la surestimation des glissements locaux dans les modèles analytiques est la détection retardée de l'arrêt et du début des glissements. Cela entraîne une mauvaise détermination de l'état de la structure à ces instants (et notamment de l'énergie stockée dans les masses oscillantes) et provoque des glissements parasites. Pour éviter cela, il serait important de découper les pas de temps lorsqu'on détecte un glissement afin de réduire l'intervalle d'incertitude. Cela nécessitera de développer des méthodes à pas de temps variables et à rajouter des méthodes de convergence rapide vers une bonne approximation de l'instant exact de changement d'état du contact. Cela peut aller à l'encontre de la vitesse de calcul de notre méthode. Il conviendra de garder cet objectif en tête lors du développement de cette amélioration.

5.2.1.2 Prise en compte de l'échappement vertical d'eau dans les modèles de calcul des masses de couplage fluide-structure :

Les calculs analytiques des masses ajoutées de couplage fluide-structure sont effectuées en considérant des écoulements dans le plan $(\underline{e_x}, \underline{e_y})$. Cela ne correspond pas tout à fait à la réalité et il est nécessaire dans certains cas, notamment ceux où les structures n'ont

pas une hauteur très grande par rapport à l'épaisseur des lames d'eau, de prendre en compte cet échappement vertical. Les premières études réalisées dans ce sens montrent qu'il est nécessaire de prendre en compte la totalité du volume présent au-dessus de la structure afin de bien intégrer la contrainte de pression égale à 1 bar à la surface libre de l'eau. La complexité du problème vient du fait que cette surface libre a un mouvement propre lors du chargement sismique qui influence de manière non négligeable la valeur de la pression de l'eau lors du déplacement d'une structure immergée. Il est donc difficile d'estimer simplement la valeur des masses de couplage et cela reste un sujet ouvert de recherche.

5.2.2 Solutions analytiques en dynamique non linéaire couplée de N structures indépendantes :

Le modéle de calcul des masses ajoutées de couplage fluide-structure permet d'obtenir des matrices reliant les accélérations de N structures individuelles organisées en quadrillage aux efforts appliqués par le fluide sur chacune de ces structures. On obtient ainsi des matrices de masses ajoutées :

$$\underline{\underline{M}}^H_{xx}(z),\ \underline{\underline{M}}^H_{xy}(z),\ \underline{\underline{M}}^H_{yx}(z)\ \&\ \underline{\underline{M}}^H_{yy}(z) \tag{5.1}$$

La composante (i,j) de la matrice $\underline{\underline{M}}^H_{xx}(z)$ donne la répartition d'efforts linéiques appliqués sur la stucture j dans la direction $\underline{e_x}$ lors de l'accélération suivant $\underline{e_x}$ de la structure i.

Afin d'utiliser pleinement ces données, il serait intéressant de développer un modèle de résolution quasi-analytique s'inspirant fortement de la méthode détaillée dans cette thèse pour déterminer les déplacements de l'ensemble des N structures immergées glissantes sous chargement sismique. Le système d'équation à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \left[\underline{\underline{M}}(z) + \underline{\underline{M}}^H_{xx}(z,t)\right]\underline{\ddot{U}_x}(z,t) + \underline{\underline{M}}^H_{xy}(z,t)\underline{\ddot{U}_y}(z,t) + \underline{\underline{C}}(z,t)\underline{\dot{U}_x}(z,t) \\ \qquad +\underline{\underline{K_{xx}}}(z)\underline{U_x}(z,t) = \underline{R_x}(t) - \underline{\underline{M}}\underline{\gamma_x}(t) + \underline{\underline{M}}^1_{xx}\underline{\gamma_x}(t) \\ \left[\underline{\underline{M}}(z) + \underline{\underline{M}}^H_{yy}(z,t)\right]\underline{\ddot{U}_y}(z,t) + \underline{\underline{M}}^H_{yx}(z,t)\underline{\ddot{U}_x}(z,t) + \underline{\underline{C}}(z,t)\underline{\dot{U}_y}(z,t) \\ \qquad +\underline{\underline{K_{yy}}}(z)\underline{U_y}(z,t) = \underline{R_y}(t) - \underline{\underline{M}}\underline{\gamma_y}(t) + \underline{\underline{M}}^1_{yy}\underline{\gamma_y}(t) \end{cases} \tag{5.2}$$

Avec :

- $\underline{U_x}(z,t) =^T (U_{x1}(z,t), U_{x2}(z,t), \ldots, U_{xN}(z,t))$: le vecteur des fonctions de déplacements des N structures individuelles suivant X,
- $\underline{R_x}(t) =^T (R_{x1}(t), R_{x2}(t), \ldots, R_{xN}(t))$: le vecteur des efforts de frottement appliqués sur les N structures individuelles suivant X,
- $\underline{\underline{M}}(z)$: est la matrice des fonctions de masses linéiques des N structures. Elle est diagonale si les structures sont indépendantes,
- $\underline{\underline{C}}(z,t)$: est la matrice des fonctions d'amortissements linéiques des N structures. Elle est diagonale si les structures sont indépendantes,

– $\underline{\underline{K_{xx}}}(z)$: est la matrice des fonctions de raideur linéique liant les déplacements suivant X aux efforts internes suivant X des N structures. Elle est diagonale si les structures sont indépendantes.

On déduit la signification des matrices ayant d'autres indices par des changements de la direction d'application des efforts.

La méthode de résolution consisterait à déterminer les modes propres immergés couplés à partir des modes propres de chaque structure individuelle sèche. Ces modes propres couplés dépendent de l'état du contact de chacune des structures individuelles. C'est là que réside toute la compléxité du problème. Il faut à la fin de chaque itération déterminer les changements d'état du contact de chacune des structures puis lorsqu'un changement est détecté, recalculer les modes propres couplés. Une autre solution consisterait à déterminer la totalité des modes propres couplés en faisant l'ensemble des combinaisons possibles cependant cela réprésente 2^N possibilités. Une dernière méthode consisterait à établir les équations analytiques générales quel que soit l'état des contacts en considérant plus de termes que nécessaire dans certains cas. Puis, à chaque changement d'état d'une structure, de ne faire évoluer que les termes concernés dans les matrices. Cela suppose plus de travail en amont mais l'exposé des résultats et la rapidité de calcul s'en trouveront améliorés.

5.2.3 Prise en compte du basculement dans les calculs de masses ajoutées (notions d'inertie ajoutée) :

Si l'on souhaite étudier une structure individuelle instable dans des conditions similaires à celles de notre étude, c'est-à-dire avec un couplage fluide-structure et un glissement possible sous chargement sismique. Il est nécessaire de développer une méthode de détermination analytique des matrices de masses ajoutées généralisées. Pour une structure individuelle rigide, ces matrices s'écrivent :

$$\underline{\underline{M_{IFS}}} = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} & h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} & h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} & h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} \\ h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

On fait apparaître deux nouvelles fonctions :
– h_{ij} : correspond au moment d'ordre 1 de la masse (dimension $Kg.m$). Il relie ainsi une accélération de translation en moment de rotation et une accélération angulaire à un effort de translation.
– I_{ij} : correspond aux interties ajoutées (dimension $Kg.m^2$). L'accélération angulaire $\ddot{\omega}_i$ autour de l'axe $\underline{e_i}$ crée un moment autour de l'axe $\underline{e_j}$ égal à $I_{ij}\ddot{\omega}_i$.

Ces fonctions sont déterminantes pour pouvoir évaluer le comportement d'une structure pouvant basculer et notamment détecter les pertes de stabilité (basculement trop important entraînant une chute de la structure, décollement de la base de la structure lors d'une phase de redescente, ...). Il est aussi important de comprendre les phénomènes

apparaissant pendant les phases de pincements d'une lames d'eau jusqu'à sa disparition et à l'inverse lors des phases de création d'une lame d'eau jusque là inexistante.

Sans aller jusqu'à ce niveau de détail, l'ajout des inerties de couplage peut servir pour des bâtiments de grande longueur ou ayant de grandes disparités dans les éléments supportant la reserve d'eau pour lesquels, il est nécessaire de considérer une excitation multi-support pouvant se traduire par l'apparition d'une accélération angulaire d'entraînement pour laquelle il est nécessaire d'avoir l'influence du couplage fluide-structure et d'une poussée d'Archimède généralisée faisant intervenir les rotations.

Annexe A

Article PVP 2010 - 25630

DRAFT - PVP2010-25630
Analytical solutions for the study of immersed unanchored structures under seismic loading

Romain MEGE* † , Nicolas JOBERT*

* *Corresponding author : romain.mege@areva.com, co-author : nicolas.jobert@areva.com*
AREVA NP - Tour AREVA - 1 place Jean Millier
92084 PARIS La Défense CEDEX FRANCE
† *Deputy director of the 'Durabilité des matériaux et des structures pour l'énergie' Chair*
Ecole des Ponts Paritech - 6 et 8 avenue Blaise Pascal - Cité Descartes
Champs sur Marne - 77455 MARNE LA VALLEE CEDEX 2 FRANCE

March 15, 2010

Abstract

In the nuclear energy industry, most of the major components are anchored to the civil works using numerous types of supports devices. These anchorages are big issues of the nuclear plant design: the implantation of the components has to be fixed definitely, stress concentration in the surroundings of the anchorage, and for immersed structure, possible loss of the impermeability. Thereby, under certain safety regulations, some structures lay directly on the ground. This is the case for in air or underwater structure, such as fuel storage racks. This solution gives more flexibility in the use of the components and a decrease of the stress. However, one has to evaluate precisely the behavior of this sliding structure, and in particular, the cumulated sliding displacement during a seismic event in order to prevent any impact with other components. During a seismic event, the unanchored structure can slide, rotate and tilt. The aim of this paper is to present analytical solutions to estimate the sliding amplitudes of different simplified systems which represent a given dynamic behavior. These simplified models are: a sliding mass, a sliding spring-masses system and a complex sliding structure defined by its eigenmodes. Each simplified system corresponds to a different set of assumptions made on the flexibility of the structure.
Two analytical solutions are presented in this article: single sliding mass and a sliding spring-masses system. In every model, the fluid-structure interaction between the immersed body and the pool is modeled as a hydrodynamic mass. The sliding is represented by Coulomb friction. The seismic loading can be any 3D seismic accelerogram. The analytical solutions are obtained considering the different phases of the movement and the continuity between each phase. The results are then compared to the values computed with the commercial Finite Element package $ANSYS^{TM}$. The analytical curves show a good fit of the computational results.

1 Introduction

One of the main issues in the study of the seismic response of unanchored structures is the displacement estimation. The subject has received an increasing attention due to the fact that the response of several types of nonstructural components and equipment can be studied in the context of sliding structures. Several articles have been written on the studies of rigid body behavior under seismic loadings. The study of a simple sliding mass under a 2D periodic excitation and a random signal is detailed in [1].The slide, rock and slide-rock rigid-body modes have been studied under a 2D excitation by [2], [3] and [4]. A 2D analysis of the rest mode, slide mode and free-flight mode has been conducted in [7].

Most of the studies on the subject consider different types of behavior: resting, sliding, rocking, sliding-rocking, with different types of contacts. But they are all using a 2D excitation (a single horizontal and a vertical excitations). When these unanchored structures are studied with a 2D seismic loading, the structure

has to go through a resting state when it is changing its direction of sliding. This behavior is not realistic when one considers a 'circle' excitation (sine along X, cosine along Y). The 3D study shows a circle 'always sliding' movement, while the 2D study shows alternatively sliding and resting stages.

The present study focuses on establishing the equations for the 3D seismic behavior of two different models: a single sliding mass model, and a sliding spring-masses model representing the first flexural mode of the structure. These models consider a Coulomb sliding behavior and include a simplified fluid-structure coupling (inertial terms only). Once the movement equations are established, we describe a pseudo-analytical method to efficiently compute the solutions.

2 Single sliding mass

In this paragraph, we deal with the seismic behavior of a single sliding mass. We will establish the generalized movement equations for a 3D excitation with fluid-structure coupling.

2.1 Model description & assumptions

The system is described by its mass, M. A dry-friction sliding is considered with a sliding coefficient, μ. The seismic excitation is modeled by an acceleration field which includes the gravity $(-\gamma_x(t), -\gamma_y(t), -\gamma_z(t) - g)$. The fluid-structure coupling has two different influences on the structure. The first one is modeled using hydrodynamic masses which link the acceleration of the pool to the acceleration of the mass, using :

$$\begin{pmatrix} F_{Fluid-M} \\ F_{Fluid-P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_H & M_H + M_1 \\ M_H + M_1 & -(M_H + M_1 + M_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_M \\ \gamma_P \end{pmatrix} \tag{1}$$

Where $F_{Fluid-M}$ and $F_{Fluid-P}$ are respectively the forces applied by the fluid on the mass, and on the pool. γ_M and γ_P are respectively the acceleration of the mass and of the pool. M_H is the hydrodynamic mass, M_1 is the mass of water displaced by the modeled mass during its motion, M_2 is the mass of water displaced by the motion of the pool.

The second influence of the fluid on the structure is the buoyancy. Buoyancy occurs when an acceleration field is applied to the water. In our case, the acceleration is the result of the seism and the gravity, which means that there is a buoyancy effect in every direction. A detailed analysis of this phenomenon shows that the buoyancy effects are directly related to the hydrodynamic masses. It can be modeled as a modification of the acceleration field applied to the structure and an increase of the mass of the structure. The global effect on the governing equations can be summarized as :

$$\begin{pmatrix} (M + M_{Hx})\,\ddot{X} \\ (M + M_{Hy})\,\ddot{Y} \\ (M + M_{Hz})\,\ddot{Z} \end{pmatrix} = \underline{R} + \begin{pmatrix} (M_{1x} - M)\,\gamma_x(t) \\ (M_{1y} - M)\,\gamma_y(t) \\ (M_{1z} - M)\,(\gamma_z(t) + g) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Where $M_{H.}$ is the hydrodynamic mass for a given direction of the displacement. The masses obtained in two directions can be very different if the geometry of the pool is not symmetrical. $M_{1.}$ are the masses of water displaced by the movement of the modeled structure in a given direction. $\left(\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}\right)$ is the relative acceleration of the structure. And $\underline{R}$ is the reaction force of the ground (normal and tangential reactions).

For every model, we will consider a vertical acceleration that prevents the mass from taking off, meaning that $|\gamma_z(t)| < g$. In this case, the contact force can be expressed by this set of equation:

$$\begin{cases} \|\underline{V}\| = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} = 0 & \Rightarrow \quad \sqrt{R_x^2 + R_y^2} < \mu R_z \\ \|\underline{V}\| = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} > 0 & \Rightarrow \quad R_x \underline{e_x} + R_y \underline{e_y} = -\frac{\underline{V}}{\|\underline{V}\|} \mu R_z \end{cases} \tag{3}$$

In order to solve (2), one needs to express the ground reaction force $\underline{R}$. According to (3), the sliding force depends on the state of your contact : sliding or sticking. We decided to give analytical solutions for the movement for each of these two cases. Then we define the validity domain of these analytical solutions. When the structure no longer verifies one domain of validity, the state of the contact switches, and so does the set of solutions and the validity domain.

For example, let us consider a structure which is sliding. As long as the 'sliding' validity domain is verified, we use the 'sliding' set of analytical solutions. When the structure is no longer in the 'sliding' validity domain, we change the state of the contact to 'sticking' and we use the 'sticking' set of analytical solutions and validity domain.

2.2 'Sticking' state

Before the beginning of the earthquake, the mass is lying on the ground under 'sticking' state. This state will continue at the beginning of the earthquake until a certain level of acceleration is reached. This 'sticking' state can be reached again during the seismic loading. During these phases, the movement equations give this simple set of solutions :

$$\left\{\begin{array}{l} X = X_0 \\ Y = Y_0 \\ Z = Z_0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} R_x = (M - M_{1x})\,\gamma_x(t) \\ R_y = (M - M_{1y})\,\gamma_y(t) \\ R_z = (M - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) \end{array}\right. \tag{4}$$

Where (X_0, Y_0, Z_0) is the initial position of the mass.

This set of solutions remains valid as long as the non-sliding condition is verified :

$$\sqrt{\left[(M - M_{1x})\,\gamma_x(t)\right]^2 + \left[(M - M_{1y})\,\gamma_y(t)\right]^2} < \mu\,(M - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) \tag{5}$$

When this condition is no longer verified, then the mass starts to slide. The initial conditions for the sliding state are :

$$\left\{\begin{array}{l} X = X_0 \\ Y = Y_0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{X} = 0 \\ \dot{Y} = 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

2.3 'Sliding' state

When the mass is sliding, the reaction force is completely determined by the direction of the sliding. In this case, the set of equations leading the sliding analysis is :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (M + M_{Hx})\,\ddot{X} & = & -\frac{\dot{X}}{\|\underline{V}\|}\mu\,(M - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) + (M_{1x} - M)\,\gamma_x(t) \\ (M + M_{Hy})\,\ddot{Y} & = & -\frac{\dot{Y}}{\|\underline{V}\|}\mu\,(M - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) + (M_{1y} - M)\,\gamma_y(t) \end{array}\right. \tag{7}$$

These equations can not be solved directly, so we used an iterative solving, which is similar to Finite Element calculation except that we consider analytical solutions for each time step. The pseudo-analytical solving requires low calculation capacity and is less time consuming than the FE solving.

2.4 Iterative solving

The iterative solving relies on different simplification of the model. The iteration is made on the time using a constant time step. For each time step, we consider that the seismic acceleration remains constant, which is a good assumption for small time steps.

Let us consider the i^{th} iteration. The actual system is defined by its location $\left(X^i, Y^i, Z^i\right)$, its velocity $\left(\dot{X}^i, \dot{Y}^i, \dot{Z}^i\right)$, and its actual state: *sliding* or *sticking*. The chosen time step is Δt. The seismic acceleration is $\left(\gamma_x^i, \gamma_y^i, \gamma_z^i\right)$. The final system at the i^{th} iteration is determined by (8) if the mass is initially *sticking* and (9) if the mass is initially *sliding*.

Table 1: Sine/Cosine loading - Modeling parameters

Parameters	Values	Parameters	Values
M	1 kg	μ	0.2
M_h	0	Δt	5 ms
M_1	0	f_s	0.5 Hz
M_2	0	T_s	19.5 s

2.4.1 Mass initially sticking

$$\begin{cases} X^{i+1} = X^i \\ Y^{i+1} = Y^i \end{cases} \quad (8)$$

$$If \quad \sqrt{\left[\left(M - M_{1x}\right)\gamma_x^i\right]^2 + \left[\left(M - M_{1y}\right)\gamma_y^i\right]^2} < \mu\left(M - M_{1z}\right)\left(\gamma_z^i + g\right)$$

a) *true then* $(i)^{th}$ *initial state is sticking,*
b) *false then* $(i)^{th}$ *initial state changes to sliding.*

The sliding condition is verified 'a priori', meaning that when a sliding is detected at the beginning of the i^{th} iteration, then the calculation is made under 'sliding' initial conditions.

2.4.2 Mass initially sliding

$$\begin{cases} X^{i+1} = X^i + \dot{X}^i\Delta t - \frac{1}{2}\left[\frac{M-M_{1x}}{M+M_{Hx}}\gamma_x^i + \frac{\dot{X}^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M-M_{1z}}{M+M_{Hx}}\left(g+\gamma_z^i\right)\right](\Delta t)^2 \\ Y^{i+1} = Y^i + \dot{Y}^i\Delta t - \frac{1}{2}\left[\frac{M-M_{1y}}{M+M_{Hy}}\gamma_y^i + \frac{\dot{Y}^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M-M_{1z}}{M+M_{Hy}}\left(g+\gamma_z^i\right)\right](\Delta t)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}^{i+1} = \dot{X}^i - \left[\frac{M-M_{1x}}{M+M_{Hx}}\gamma_x^i + \frac{\dot{X}^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M-M_{1z}}{M+M_{Hx}}\left(g+\gamma_z^i\right)\right]\Delta t \\ \dot{Y}^{i+1} = \dot{Y}^i - \left[\frac{M-M_{1y}}{M+M_{Hy}}\gamma_y^i + \frac{\dot{Y}^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M-M_{1z}}{M+M_{Hy}}\left(g+\gamma_z^i\right)\right]\Delta t \end{cases} \quad (9)$$

$$If \quad \left(\frac{\dot{X}^{i+1}}{\left|\dot{X}^{i+1}\right|} \neq \frac{\dot{X}^i}{\left|\dot{X}^i\right|}\right) \;\&\; \left(\frac{\dot{Y}^{i+1}}{\left|\dot{Y}^{i+1}\right|} \neq \frac{\dot{Y}^i}{\left|\dot{Y}^i\right|}\right)$$

a) *true then* $(i+1)^{th}$ *initial state is sticking,*
b) *false then* $(i+1)^{th}$ *initial state is sliding.*

The 'end of sliding' condition is verified 'a posteriori', meaning that when the 'end of sliding' condition is verified at the end of the i^{th} iteration, the 'sticking' condition is only applied at the $(i+1)^{th}$ iteration.

2.5 Results

2.5.1 Sine/Cosine loading

As mentioned in the introduction, it is important to consider the full 3D problem instead of the classical two dimensional analyses. The loading considered here is a cosine excitation along the X axis, and a sine excitation along the Y axis. Each sine and cosine have an amplitude of 1g. We neglect the vertical seismic excitation, meaning that the only vertical loading is the gravity. We consider an in-air structure, so the fluid coupling masses are considered as null. The remaining parameters are summarized in Table 1, where f_s is the frequency of the sine and cosine seismic signal, and T_s is the duration of the seism.

These parameters have been implemented in four models. The first one is a 3D excitation model using the pseudo-analytical solutions. The second model, $FE\ 3D$, is similar to the first one except that it has been solved using $ANSYS^{TM}$. In the third model, $FE\ 2D$, the seismic acceleration in the Y direction is not considered. In the last model, $modified\ FE\ 2D$, the seismic acceleration in the Y direction is not considered and the X excitation is multiplied by $\sqrt{2}$ in order to compensate the Y acceleration. This model can be used to give enveloppe displacement values.

Table 2: Seismic analysis - Modeling parameters

Parameters	Values	Parameters	Values
M	1 kg	μ	0.2
M_{Hx}	0.38 Kg	M_{Hy}	0.69 Kg
M_{1x}	0.16 Kg	M_{1y}	0.23 Kg
M_{1z}	0.38 Kg	Δt	5 ms
T_s	19.5 s		

The results are presented in Figure 1. The displacements on the (x, y) plane of the 3D pseudo-analytical and the 3D ANSYS models are represented on the left figure. The pseudo-analytical curve fits almost perfectly the FE curve. The pseudo-analytical model is validated for this seismic loading. The figure on the right shows the displacement along the X axis for the four models. The pseudo-analytical and the $FE\ 3D$ curves show a good fit, however the $FE\ 2D$ model always underestimates the displacement, and the $modified\ FE\ 2D$ model overestimates the sliding, giving an overestimation of the local maximum values and an underestimation of the local minimum values. This behavior tends to be amplified as the sliding coefficient increases. This point shows the importance of considering the whole 3D excitation in order to estimate correctly the displacement of the structure. This is especially true when considering a random seismic excitation.

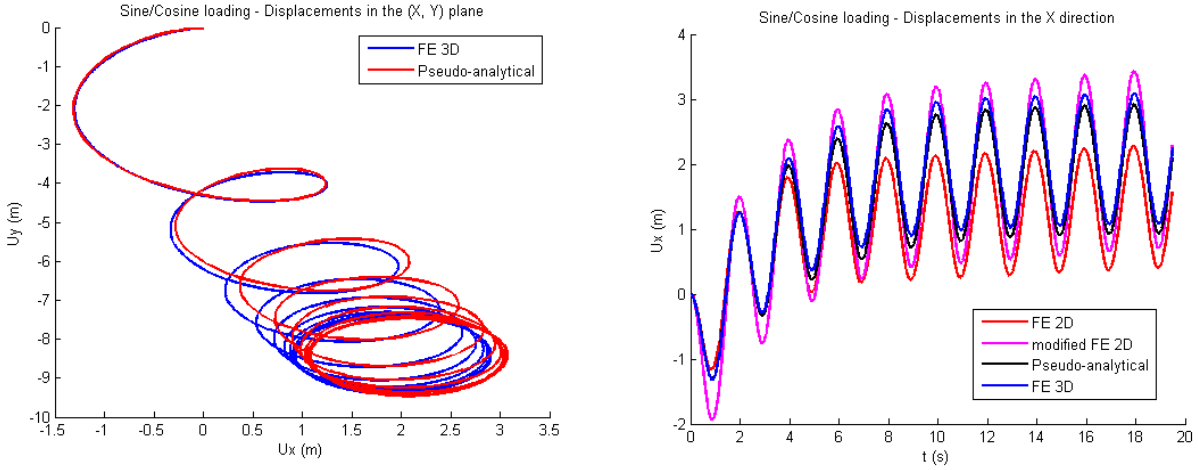


Figure 1: Single sliding Mass System - Sine/Cosine Loading - Displacement curves

2.5.2 Random seismic excitation

The four models described in par. 2.5.1 are used for this simulation, except that the fluid-structure interaction is taken into account. The new set of parameters is given in Table 2. The horizontal seismic loading is different in each direction (X or Y) with a Zero-Period Acceleration of $0.51g$. The vertical acceleration has a $0.2g$ ZPA.

The results are presented in Figure 2. The displacements on the (x, y) plane of the 3D pseudo-analytical and the 3D ANSYS models are represented on the left-hand figure. The pseudo-analytical curve fits almost perfectly the FE curve. Consequently, the pseudo-analytical model is validated for this seismic loading. The figure on the right shows the displacement along the X axis for the four models. The pseudo-analytical and the $FE\ 3D$ curves show a good fit, however the $FE\ 2D$ model always underestimates the displacement. The $modified\ FE\ 2D$ model shows a whole different behavior: the amplified acceleration tends to favor the direction of the first sliding. In this case, it is the $-X$ direction, where a regular acceleration gives priority to the $+X$ direction. This underlights the importance of considering the whole 3D excitation in order to estimate correctly the displacement of the structure.

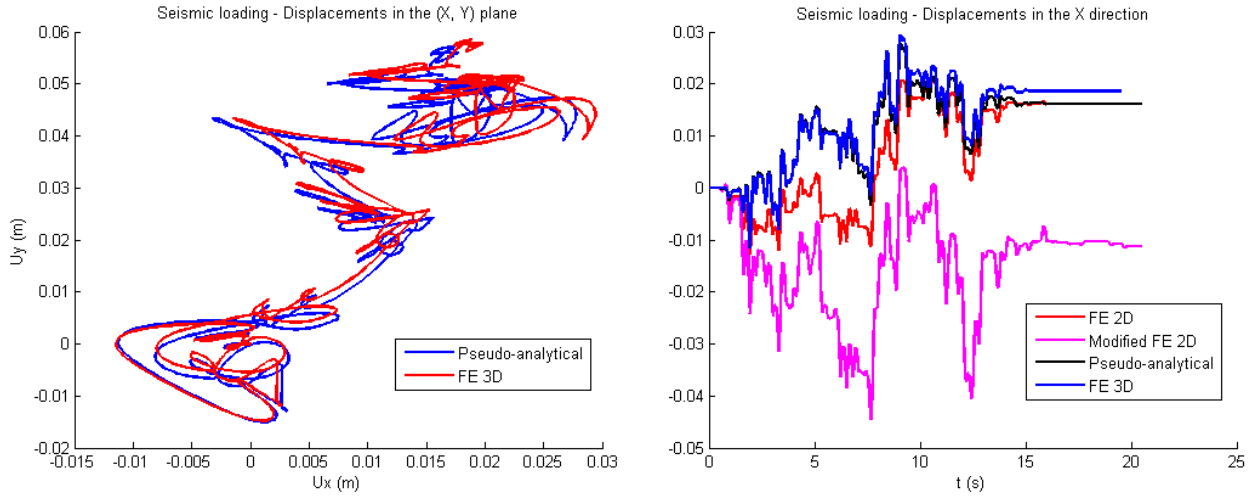


Figure 2: Single sliding Mass System - Seismic Loading - Displacement curves

3 Masses & spring system

The single sliding mass approximation gives a rough estimation of the global sliding behavior of the structure. This approximation is only accurate if the first flexural eigenfrequency of the system is not in the usual seismic frequencies (below 20 Hz). When it is in the seismic domain, the model needs to take into account the eigenmodes of the system. The simplest model taking into account the first flexural frequencies in the two horizontal directions is a classical two masses and one spring model.

3.1 Model description and assumptions

The model consists in one oscillating mass, M_b, which is the effective mass of the first flexural mode, a sliding mass, M_a, which regroups the remaining mass of the system, and one spring with different stiffnesses along each direction, k_x for the X-axis, and k_y for the Y-axis. The stiffnesses are chosen to fit the flexural frequency along each direction. The system is represented in figure 3. The mass distribution between M_a and M_b can change during the earthquake when the state of the contact changes. Figure 4 shows the mass distribution for a beam for the *sliding* and *sticking* contact state.

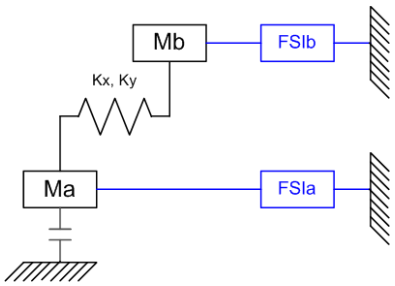


Figure 3: Representation of the spring & masses system

The fluid-structure coupling distribution is assumed to follow the mass distribution. This assumption fits perfectly a 2D layer fluid coupling corresponding to a Fritz potential fluid theory [9], but gives an inaccurate distribution for a complex fluid behavior.

We will always consider a vertical acceleration that prevents the system from taking off, meaning that $|\gamma_z(t)| < g$. The spring is supposed to be infinitely rigid along the vertical axis. In this case, the vertical forces transit directly from one mass to the other.

3.2 Governing equations

The governing equations of the masses-spring system can be easily established. It is convenient to express these equations either in terms of absolute displacements of the masses (cf. eqn. 10), using $\underline{X_a}$ and $\underline{X_b}$, or in terms of centroïd and relative displacements (cf. eqn. 11), using $\underline{X_g}$ and $\underline{X_r}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} (M_a + M_{Hxa})\,\ddot{X}_a(t) & = & -(M_a - M_{1xa})\,\gamma_x(t) - k_x\,(X_a(t) - X_b(t)) + R_x(t) \\ (M_a + M_{Hya})\,\ddot{Y}_a(t) & = & -(M_a - M_{1ya})\,\gamma_y(t) - k_y\,(Y_a(t) - Y_b(t)) + R_y(t) \\ (M_b + M_{Hxb})\,\ddot{X}_b(t) & = & -(M_b - M_{1xb})\,\gamma_x(t) + k_x\,(X_a(t) - X_b(t)) \\ (M_b + M_{Hyb})\,\ddot{Y}_b(t) & = & -(M_b - M_{1yb})\,\gamma_y(t) + k_y\,(Y_a(t) - Y_b(t)) \\ R_z(t) & = & (M_a + M_b - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) \end{array}\right. \tag{10}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} (M + M_{Hx})\,\ddot{X}_g(t) & = & -(M - M_{1x})\,\gamma_x(t) + R_x(t) \\ (M + M_{Hy})\,\ddot{Y}_g(t) & = & -(M - M_{1y})\,\gamma_y(t) + R_y(t) \\ \ddot{X}_r(t) + \omega_{rx}^2 X_r(t) & = & -\left(\frac{M_a - M_{1xa}}{M_a + M_{Hxa}} - \frac{M_b - M_{1xb}}{M_b + M_{Hxb}}\right)\gamma_x(t) + \frac{R_x(t)}{M_a + M_{Hxa}} \\ \ddot{Y}_r(t) + \omega_{ry}^2 Y_r(t) & = & -\left(\frac{M_a - M_{1ya}}{M_a + M_{Hya}} - \frac{M_b - M_{1yb}}{M_b + M_{Hyb}}\right)\gamma_y(t) + \frac{R_y(t)}{M_a + M_{Hya}} \\ R_z(t) & = & (M_a + M_b - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) \end{array}\right. \tag{11}$$

Where:

- $M = M_a + M_b$, $M_{H.} = M_{H.a} + M_{H.b}$ and $M_{1.} = M_{1.a} + M_{1.b}$ are the rigid body quantities,
- $\omega_{rx} = \sqrt{\frac{k_x}{M_a + M_{Hxa}} + \frac{k_x}{M_b + M_{Hxb}}}$ and $\omega_{ry} = \sqrt{\frac{k_y}{M_a + M_{Hya}} + \frac{k_y}{M_b + M_{Hyb}}}$ are the first free-free eigenpulsations of the 'wet' structure,
- $X_g = \frac{(M_a + M_{Hxa})X_a + (M_b + M_{Hxb})X_b}{M + M_{Hx}}$ and $Y_g = \frac{(M_a + M_{Hya})Y_a + (M_b + M_{Hyb})Y_b}{M + M_{Hy}}$ are the 'wet' centroïd positions,
- $X_r = X_a - X_b$ and $Y_r = Y_a - Y_b$ are the relative displacements.

3.3 'Sticking' state

For this model, the 'sticking' state corresponds to an harmonic oscillator under a random excitation. Equation 10 is the most convenient and can be expressed as:

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_a(t) & = & X_a^0 \\ Y_a(t) & = & Y_a^0 \\ \ddot{X}_b(t) & = & -\frac{M_b - M_{1xb}}{M_b + M_{Hxb}}\gamma_x(t) - \frac{k_x}{M_b + M_{Hxb}}\left(X_b(t) - X_a^0\right) \\ \ddot{Y}_b(t) & = & -\frac{M_b - M_{1yb}}{M_b + M_{Hyb}}\gamma_y(t) - \frac{k_y}{M_b + M_{Hyb}}\left(Y_b(t) - Y_a^0\right) \end{array}\right. \tag{12}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} R_x(t) & = & (M_a - M_{1xa})\,\gamma_x(t) + k_x\left(X_a^0 - X_b(t)\right) \\ R_y(t) & = & (M_a - M_{1ya})\,\gamma_y(t) + k_y\left(Y_a^0 - Y_b(t)\right) \\ R_z(t) & = & (M_a + M_b - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) \end{array}\right.$$

Where $\left(X_a^0, Y_a^0, Z_a^0\right)$ is the initial position of the sliding mass.



Figure 4: Equivalent mass distribution for a beam with different contact conditions

These equations remain valid as long as the non-sliding condition is verified:

$$\sqrt{R_x^2 + R_y^2} < \mu R_z \tag{13}$$

When Eqn. (13) is no longer verified for $t = t_0$, then the system starts to slide. The initial conditions for the sliding state are:

$$\begin{cases} X_g^0 = \frac{(M_a+M_{Hxa})X_a^0+(M_b+M_{Hxb})X_b(t_0)}{M+M_{Hx}} \\ Y_g^0 = \frac{(M_a+M_{Hya})Y_a^0+(M_b+M_{Hyb})Y_b(t_0)}{M+M_{Hy}} \\ X_r^0 = X_a^0 - X_b(t_0) \\ Y_r^0 = Y_a^0 - Y_b(t_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{X}_g^0 = \frac{M_b+M_{Hxb}}{M+M_{Hx}}\dot{X}_b(t_0) \\ \dot{Y}_g^0 = \frac{M_b+M_{Hyb}}{M+M_{Hy}}\dot{Y}_b(t_0) \\ \dot{X}_r^0 = -\dot{X}_b(t_0) \\ \dot{Y}_r^0 = -\dot{Y}_b(t_0) \end{cases} \tag{14}$$

3.4 'Sliding' state

When the system is sliding, the reaction is completely determined by the direction of the sliding. In this case, the set of equations leading the sliding analysis is:

$$\begin{cases} (M+M_{Hx})\,\ddot{X}_g(t) &= -(M-M_{1x})\,\gamma_x(t) - \mu\frac{\dot{X}(t)}{\|\underline{V}\|}(M-M_{1z})\,(\gamma_z(t)+g) \\ (M+M_{Hy})\,\ddot{Y}_g(t) &= -(M-M_{1y})\,\gamma_y(t) - \mu\frac{\dot{Y}(t)}{\|\underline{V}\|}(M-M_{1z})\,(\gamma_z(t)+g) \\ \ddot{X}_r(t)+\omega_{rx}^2 X_r(t) &= -\left(\frac{M_a-M_{1xa}}{M_a+M_{Hxa}} - \frac{M_b-M_{1xb}}{M_b+M_{Hxb}}\right)\gamma_x(t) - \frac{M-M_{1z}}{M_a+M_{Hxa}}\mu\frac{\dot{X}(t)}{\|\underline{V}\|}(\gamma_z(t)+g) \\ \ddot{Y}_r(t)+\omega_{ry}^2 Y_r(t) &= -\left(\frac{M_a-M_{1ya}}{M_a+M_{Hya}} - \frac{M_b-M_{1yb}}{M_b+M_{Hyb}}\right)\gamma_y(t) - \frac{M-M_{1z}}{M_a+M_{Hya}}\mu\frac{\dot{Y}(t)}{\|\underline{V}\|}(\gamma_z(t)+g) \end{cases} \tag{15}$$

We used an iterative solving to solve these non-linear equations. This method applied to the '*masses* & *spring*' system is described below.

3.5 Iterative solving

The iteration solving relies on the same assumption and notations as in par. 2.4. We consider the i^{th} iteration. The final system at the i^{th} iteration is determined by (16) if the mass is initially *sticking* and (17) if the mass is initially *sliding*.

3.5.1 Mass initially sticking

$$\begin{cases} X_a^{i+1} = X_a^i \\ Y_a^{i+1} = Y_a^i \\ X_b^{i+1} = X_a^i + \left(X_b^i - X_a^i\right)\cos(\omega_x^B\Delta t) + \frac{\dot{X}_b^i}{\omega_x^B}\sin(\omega_x^B\Delta t) - \frac{\gamma_x^i}{(\omega_x^B)^2}\frac{M_b-M_{1xb}}{M_+M_{Hxb}}\left(1-\cos(\omega_x^B\Delta t)\right) \\ Y_b^{i+1} = Y_a^i + \left(Y_b^i - Y_a^i\right)\cos(\omega_y^B\Delta t) + \frac{\dot{Y}_b^i}{\omega_y^B}\sin(\omega_y^B\Delta t) - \frac{\gamma_y^i}{\left(\omega_y^B\right)^2}\frac{M_b-M_{1yb}}{M_+M_{Hyb}}\left(1-\cos(\omega_y^B\Delta t)\right) \end{cases} \tag{16}$$

$$If \quad \sqrt{\left[k_x\left(X_a^i - X_b^i\right) + (M_a - M_{1xa})\,\gamma_x^i\right]^2 + \left[k_y\left(Y_a^i - Y_b^i\right) + (M_a - M_{1ya})\,\gamma_y^i\right]^2} < \mu\,(M-M_{1z})\left(\gamma_z^i + g\right)$$

a) *true then* $(i)^{th}$ *initial state is sticking,*
b) *false then* $(i)^{th}$ *initial state changes to sliding.*

Where $\omega_x^B = \frac{k_x}{M_b+M_{Hxb}}$ and $\omega_y^B = \frac{k_y}{M_b+M_{Hyb}}$ are the 'wet' harmonic pulsations of the oscillating mass.

The sliding condition is verified 'a priori', meaning that when a sliding is detected at the beginning of the i^{th} iteration, then the calculation is made under 'sliding' initial conditions.

3.5.2 Mass initially sliding

$$\begin{cases} X_g^{i+1} = X_g^i + \dot{X}_g^i \Delta t - \frac{1}{2}\left[\frac{M-M_{1x}}{M+M_{Hx}}\gamma_x^i + \frac{\dot{X}_a^i}{\|\underline{V}_a^i\|}\mu\frac{M-M_{1z}}{M+M_{Hx}}\left(g+\gamma_z^i\right)\right](\Delta t)^2 \\ Y_g^{i+1} = Y_g^i + \dot{Y}_g^i \Delta t - \frac{1}{2}\left[\frac{M-M_{1y}}{M+M_{Hy}}\gamma_y^i + \frac{\dot{Y}_a^i}{\|\underline{V}_a^i\|}\mu\frac{M-M_{1z}}{M+M_{Hy}}\left(g+\gamma_z^i\right)\right](\Delta t)^2 \\ X_r^{i+1} = X_r^i\cos(\omega_{rx}\Delta t) + \frac{\dot{X}_r^i}{\omega_{rx}}\sin(\omega_{rx}\Delta t) - \frac{1}{\omega_{rx}^2}\left[\alpha_{rx}\gamma_x^i + \frac{\dot{X}_a^i}{\|\underline{V}_a^i\|}\beta_{rx}\left(g+\gamma_z^i\right)\right](1-\cos(\omega_{rx}\Delta t)) \\ Y_r^{i+1} = Y_r^i\cos(\omega_{ry}\Delta t) + \frac{\dot{Y}_r^i}{\omega_{ry}}\sin(\omega_{ry}\Delta t) - \frac{1}{\omega_{ry}^2}\left[\alpha_{ry}\gamma_y^i + \frac{\dot{Y}_a^i}{\|\underline{V}_a^i\|}\beta_{ry}\left(g+\gamma_z^i\right)\right](1-\cos(\omega_{ry}\Delta t)) \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_g^{i+1} = \dot{X}_g^i - \left[\frac{M-M_{1x}}{M+M_{Hx}}\gamma_x^i + \frac{\dot{X}_a^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M-M_{1z}}{M+M_{Hx}}\left(g+\gamma_z^i\right)\right]\Delta t \\ \dot{Y}_g^{i+1} = \dot{Y}_g^i - \left[\frac{M-M_{1y}}{M+M_{Hy}}\gamma_y^i + \frac{\dot{Y}_a^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M-M_{1z}}{M+M_{Hy}}\left(g+\gamma_z^i\right)\right]\Delta t \\ \dot{X}_r^{i+1} = -\omega_{rx}X_r^i\sin(\omega_{rx}\Delta t) + \dot{X}_r^i\cos(\omega_{rx}\Delta t) - \frac{1}{\omega_{rx}}\left[\alpha_{rx}\gamma_x^i + \frac{\dot{X}_a^i}{\|\underline{V}_a^i\|}\beta_{rx}\left(g+\gamma_z^i\right)\right]\sin(\omega_{rx}\Delta t) \\ \dot{Y}_r^{i+1} = -\omega_{ry}Y_r^i\sin(\omega_{ry}\Delta t) + \dot{Y}_r^i\cos(\omega_{ry}\Delta t) - \frac{1}{\omega_{ry}}\left[\alpha_{ry}\gamma_y^i + \frac{\dot{Y}_a^i}{\|\underline{V}_a^i\|}\beta_{ry}\left(g+\gamma_z^i\right)\right]\sin(\omega_{ry}\Delta t) \end{cases}$$

$$If \quad \left(\frac{\dot{X}^{i+1}}{|\dot{X}^{i+1}|} \neq \frac{\dot{X}^i}{|\dot{X}^i|}\right) \& \left(\frac{\dot{Y}^{i+1}}{|\dot{Y}^{i+1}|} \neq \frac{\dot{Y}^i}{|\dot{Y}^i|}\right)$$

$a)$ *true then* $(i+1)^{th}$ *initial state is sticking,*
$b)$ *false then* $(i+1)^{th}$ *initial state is sliding.*

Where $\alpha_{rx} = \frac{M_a - M_{1xa}}{M_a + M_{Hxa}} - \frac{M_b - M_{1xb}}{M_b + M_{Hxb}}$, $\alpha_{ry} = \frac{M_a - M_{1ya}}{M_a + M_{Hya}} - \frac{M_b - M_{1yb}}{M_b + M_{Hyb}}$. And $\beta_{rx} = \frac{M - M_{1z}}{M_a + M_{Hxa}}$, $\beta_{ry} = \frac{M - M_{1z}}{M_a + M_{Hya}}$.

The 'end of sliding' condition is verified 'a posteriori', meaning that when the 'end of sliding' condition is verified at the end of the i^{th} iteration, the 'sticking' condition is only applied at the $(i+1)^{th}$ iteration.

The equations governing the movement of the centroïd are similar to the ones of the single sliding mass, except that the direction of the reaction force is collinear to the velocity of M_a which can be different from the velocity of the centroïd. The solutions governing the values of X_r and Y_r are derived from the 'Duhamel' equations with non-null initial conditions (position and velocity).

3.6 Results

3.6.1 Random seismic excitation

Four masses & springs systems are compared in this study. Every model includes fluid-structure interactions, sliding and bending (represented by the displacement of the oscillating mass). The first model is a 3D pseudo-analytical model. The mass distribution remains the same during the sliding, which makes it easier to compare with a FE model. The second model is a $FE\ 3D$ model. In the third model, $FE\ 2D$, the seismic acceleration in the Y direction is not considered. In the last model, $modified\ FE\ 2D$, the seismic acceleration in the Y direction is not considered and the X excitation is multiplied by $\sqrt{2}$ in order to compensate the Y acceleration. This model can be used to give overestimated displacement values.

The set of parameters used in this analysis is given in Table 3. The horizontal seismic loading is different in each direction (X or Y) with a Zero-Period Acceleration of $0.51g$. The vertical acceleration has a $0.2g$ ZPA. The accelerograms are different from 2.5.2.

The results are presented in figure 5. The displacements of the sliding mass M_a on the (x, y) plane of the 3D pseudo-analytical and the 3D ANSYS models are represented on the left figure. The pseudo-analytical curve fits almost perfectly the FE curve. The pseudo-analytical model is validated for this seismic loading. The figure on the right shows the displacement along the X axis for the four models. The pseudo-analytical and the $FE\ 3D$ curves show a good fit, however the $FE\ 2D$ model always underestimates the absolute value of the displacement. The $modified\ FE\ 2D$ model tends to amplify the displacement in the direction of the first

h

Table 3: Seismic analysis - Modeling parameters

Parameters	Values	Parameters	Values	Parameters	Values
M_a	0.68 Kg	M_b	0.32 Kg	μ	0.2
M_{Hxa}	0.16 Kg	M_{Hxb}	0.38 Kg	k_x	5.72 $10^4 N.m^{-1}$
M_{1xa}	0.08 Kg	M_{1xb}	0.20 Kg	k_y	3.26 $10^4 N.m^{-1}$
M_{Hya}	0.29 Kg	M_{Hyb}	0.68 Kg	M_{1z}	0.13 Kg
M_{1ya}	0.08 Kg	M_{1yb}	0.20 Kg		

sliding, giving a maximized absolute value of the displacement. This underlights the importance of considering the whole 3D excitation in order to estimate correctly the displacement of the structure, especially as the model gets more and more complex.

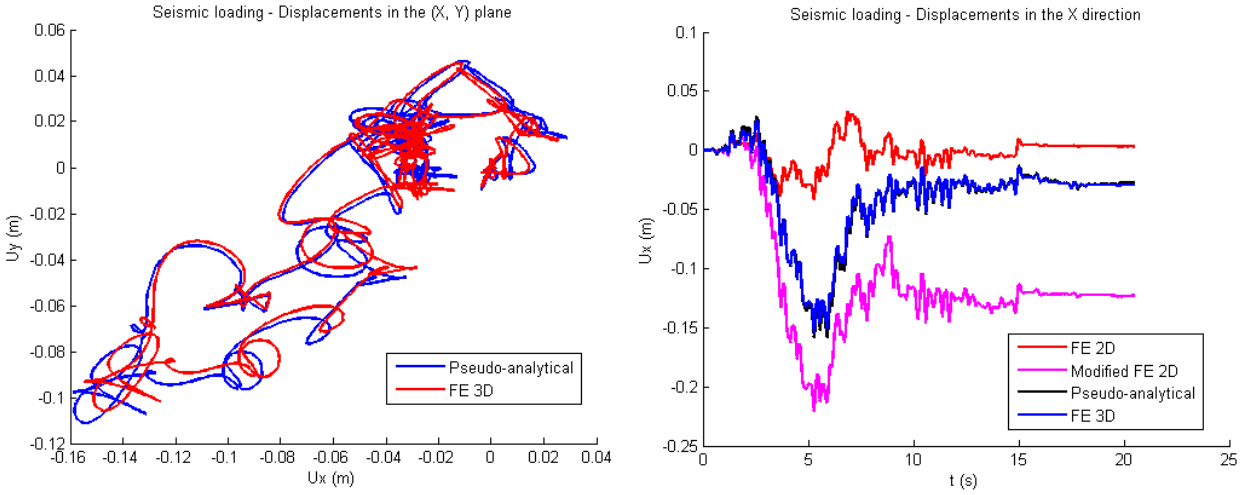


Figure 5: Masses & Spring System - Seismic loading - Displacement curves

4 Conclusion

In this study, two pseudo-analytical models have been proposed: a 3D single sliding mass system, and a 3D spring & masses sliding system. The equations of motion are obtained using an iterative solving, where, for each time step, the seismic acceleration and the amplitude of the reaction force are considered as constant values. For each model, the contact is modeled using a Coulomb friction and the fluid-structure interaction is considered using an added mass theory.

A set of different seismic accelerations have been applied to these models. The resulting displacements show a very good fit with the FE simulations. The solving of the pseudo-analytical model lasts a couple of minutes, while the FE model takes at least half an hour. A comparison between the whole 3D simulations and some classical 2D models has been made. The 2D models show a wrong estimation of the behavior of the system, giving inaccurate displacement values and directions. This study illustrates the importance of considering the whole 3D model for this kind of non-linear dynamic analyses.

Finally, simplified analytical models are suitable for dimensioning or predimensioning study. They give a good insight on the governing parameters and an estimation on the results distribution. The two analytical models presented in this study have been validated for this purpose.

5 Acknowledgements

A part of the study has been accomplished with the help of the "Durabilité des matériaux et des structures pour l'énergie" Chair directed by the MINES ParisTech and the Ecole des Ponts ParisTech, and financed by the FEED, EDF, GDF SUEZ and GRTgaz.

Special thanks to Pr. R. E. DONNER (AREVA) who has participated actively in the verification of this article.

References

[1] J. C. Pons, Réponse dynamique d'une structure rigide sur fondation glissante, 1er Colloque national de génie parasismique, 1986.

[2] H. W. Shenton III, N. P. Jones, Base excitation of rigid bodies. I: Formulation, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 117(10):2286-2306, 1991.

[3] H. W. Shenton III, N. P. Jones, Base excitation of rigid bodies. II: Periodic slide-rock response, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 117(10):2307-2327, 1991.

[4] H. W. Shenton III, Criteria for initiation of slide, rock and slide-rock rigid-body modes, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 122(7):690-693, 1996.

[5] Y. Ishiyama, Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations, Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10:635-650, 1982.

[6] C. S. Y. Solomon, H. Lin, Nonlinear impact and chaotic response of slender rocking objects, Jounral of Engineering Mechanics (ASCE), 117(9):2079-2100, 1991.

[7] P. Sideris, A. Filiatrault, Dynamic analysis of rigid bodies on inclined plane surfaces: application to prediction of merchandise response in steel storage racks under earthquake excitation, COMPDYN 2009.

[8] B. Westermo, F. Udwadia, Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation, Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 11, 135-146, 1983

[9] R. J. Fritz, The effect of liquids on the dynamic motions of immersed solids, Journal of Engineering for Industry, 167-173, 1972

Annexe B

Article Icone 19 - 43307

Proceedings of 19th International Conference on Nuclear Engineering
Proceedings of ICONE 19
Mat 16-19, 2011, Makuhari, Chiba, Japan

ICONE 19-43307

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR THE STUDY OF IMMERSED UNANCHORED STRUCTURES UNDER SEISMIC LOADING

Romain MEGE
Junior academic director
Civil Engineering and Construction Department

Junior academic director
Dismantling and Waste Management
'Nuclear Energy' MASTER

Ecole des Ponts Paritech
6 et 8 avenue Blaise Pascal - Cité Descartes
77455 MARNE LA VALLEE CEDEX 2
FRANCE
Email: romain.mege@enpc.fr

ABSTRACT

In the nuclear energy industry, most of the major components are anchored to the civil works using numerous types of supports devices. These anchorages are big issues of the nuclear plant design: the implantation of the components has to be fixed definitely, stress concentration in the surroundings of the anchorage, and for immersed structure, possible loss of the impermeability. Thereby, under certain safety regulations, some structures lay directly on the ground. This is the case for in air or underwater structure, such as fuel storage racks. This solution gives more flexibility in the use of the components and a decrease of the stress. However, one has to evaluate precisely the behavior of this sliding structure, and in particular, the cumulated sliding displacement during a seismic event in order to prevent any impact with other components.
During a seismic event, the unanchored structure can slide, rotate and tilt. The aim of this paper is to present analytical solutions to estimate the sliding amplitudes of different simplified systems which represent a given dynamic behavior. These simplified models are: a sliding mass and a complex sliding structure defined by its eigenmodes. Each simplified system corresponds to a different set of assumptions made on the flexibility of the structure.
Two analytical solutions are presented in this article: single sliding mass and a vertical sliding beam. In each model, the fluid-structure interaction between the immersed body and the pool is modeled as hydrodynamic masses. The sliding is represented by Coulomb friction. The seismic loading can be any 3D seismic accelerogram. The analytical solutions are obtained considering the different phases of the movement and the continuity between each phase. The results are then compared to the values computed with the commercial Finite Element package $ANSYS^{TM}$. The analytical curves show a good fit of the computational results.

1 Introduction

One of the main issues in the study of the seismic response of unanchored structures is the displacement estimation. The subject has received an increasing attention due to the fact that the response of several types of nonstructural components and equipment can be studied in the context of sliding structures. Several

Copyright © 2011 by JSME

articles have been written on the studies of rigid body behavior under seismic loadings. The study of a simple sliding mass under a 2D periodic excitation and a random signal is detailed by Sideris & Filiatrault.The slide, rock and slide-rock rigid-body modes have been studied under a 2D excitation by Pons and Shenton & Jones. A 2D analysis of the rest mode, slide mode and free-flight mode has been conducted by Solomon.

Most of the studies on the subject consider different types of behavior: resting, sliding, rocking, sliding-rocking, with different types of contacts. But they are all using a 2D excitation (a single horizontal and a vertical excitations). When these unanchored structures are studied with a 2D seismic loading, the structure has to go through a resting state when it is changing its direction of sliding. This behavior is not realistic when one considers a 'circle' excitation (sine along X, cosine along Y). The 3D study shows a circle 'always sliding' movement, while the 2D study shows alternatively sliding and resting stages.

The present study focuses on establishing the equations for the 3D seismic behavior of two different models: a single sliding mass model and a vertical sliding beam model representing the N^{th} first flexural modes of the structure. These models consider a Coulomb sliding behavior and include a simplified fluid-structure coupling (inertial terms only). Once the movement equations are established, we describe a pseudo-analytical method to efficiently compute the solutions.

2 Single sliding mass

In this paragraph, we deal with the seismic behavior of a single sliding mass. We will establish the generalized movement equations for a 3D excitation with fluid-structure coupling.

2.1 Model description & assumptions

The system is described by its mass, M. A dry-friction sliding is considered with two sliding coefficient, μ_S the static coefficient and μ_D the dynamic coefficient. The seismic excitation is modeled by an acceleration field which includes the gravity $(-\gamma_x(t), -\gamma_y(t), -\gamma_z(t)-g)$. The fluid-structure coupling has two different influences on the structure. The first one is modeled using hydrodynamic masses which link the acceleration of the pool to the acceleration of the mass, using :

$$\begin{pmatrix} F_{Fluid-M} \\ F_{Fluid-P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_H & M_H+M_1 \\ M_H+M_1 & -(M_H+M_1+M_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_M \\ \gamma_P \end{pmatrix} \quad (1)$$

Where $F_{Fluid-M}$ and $F_{Fluid-P}$ are respectively the forces applied by the fluid on the mass, and on the pool. γ_M and γ_P are respectively the acceleration of the mass and of the pool. M_H is the hydrodynamic mass, M_1 is the mass of water displaced by the modeled mass during its motion, M_2 is the mass of water displaced by the motion of the pool.

The second influence of the fluid on the structure is the buoyancy. Buoyancy occurs when an acceleration field is applied to the water. In our case, the acceleration is the result of the seism and the gravity, which means that there is a buoyancy effect in every direction. A detailed analysis of this phenomenon shows that the buoyancy effects are directly related to the hydrodynamic masses. It can be modeled as a modification of the acceleration field applied to the structure and an increase of the mass of the structure. The global effect on the governing equations can be summarized as :

$$\begin{pmatrix} (M+M_{Hx})\ddot{X} \\ (M+M_{Hy})\ddot{Y} \\ (M+M_{Hz})\ddot{Z} \end{pmatrix} = \underline{R} + \begin{pmatrix} (M_{1x}-M)\,\gamma_x(t) \\ (M_{1y}-M)\,\gamma_y(t) \\ (M_{1z}-M)\,(\gamma_z(t)+g) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Where $M_{H_.}$ is the hydrodynamic mass for a given direction of the displacement. The masses obtained in two directions can be very different if the geometry of the pool is not symmetrical. $M_{1_.}$ are the masses of water displaced by the movement of the modeled structure in a given direction. $\left(\ddot{X},\ddot{Y},\ddot{Z}\right)$ is the relative acceleration of the structure. And $\underline{R}$ is the reaction force of the ground (normal and tangential reactions).

For every model, we will consider a vertical acceleration that prevents the mass from taking off, meaning that $|\gamma_z(t)| < g$. In this case, the contact force can be expressed by this set of equation:

$$\begin{cases} \|\underline{V}\| = \sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{R_x^2+R_y^2} < \mu R_z \\ \|\underline{V}\| = \sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2} > 0 \Rightarrow R_x\underline{e_x} + R_y\underline{e_y} = -\frac{\underline{V}}{\|\underline{V}\|}\mu R_z \end{cases} \quad (3)$$

In order to solve (2), one needs to express the ground reaction force $\underline{R}$. According to (3), the sliding force depends on the state of your contact : sliding or sticking. We decided to give analytical solutions for the movement for each of these two cases. Then we define the validity domain of these analytical solutions. When the structure no longer verifies one domain of validity, the state of the contact switches, and so does the set of solutions and the validity domain.

For example, let us consider a structure which is sliding. As long as the sliding validity domain is verified, we use the sliding set of analytical solutions. When the structure is no longer in the sliding validity domain, we change the state of the contact to sticking and we use the sticking set of analytical solutions and validity domain.

Copyright © 2011 by JSME

2.2 Sticking state

Before the beginning of the earthquake, the mass is lying on the ground under sticking state. This state will continue at the beginning of the earthquake until a certain level of acceleration is reached. This sticking state can be reached again during the seismic loading. During these phases, the movement equations give this simple set of solutions :

$$\begin{cases} X = X_0 \\ Y = Y_0 \\ Z = Z_0 \end{cases} \begin{cases} R_x = (M - M_{1x})\,\gamma_x(t) \\ R_y = (M - M_{1y})\,\gamma_y(t) \\ R_z = (M - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) \end{cases} \quad (4)$$

Where (X_0, Y_0, Z_0) is the initial position of the mass.

This set of solutions remains valid as long as the non-sliding condition is verified :

$$\sqrt{[(M - M_{1x})\,\gamma_x(t)]^2 + [(M - M_{1y})\,\gamma_y(t)]^2} < \mu\,(M - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) \quad (5)$$

When this condition is no longer verified, then the mass starts to slide. The initial conditions for the sliding state are :

$$\begin{cases} X = X_0 \\ Y = Y_0 \end{cases} \begin{cases} \dot{X} = 0 \\ \dot{Y} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

2.3 Sliding state

When the mass is sliding, the reaction force is completely determined by the direction of the sliding. In this case, the set of equations leading the sliding analysis is :

$$\begin{cases} (M + M_{Hx})\,\ddot{X} = -\frac{\dot{X}}{\|\underline{V}\|}\mu\,(M - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) + (M_{1x} - M)\,\gamma_x(t) \\ (M + M_{Hy})\,\ddot{Y} = -\frac{\dot{Y}}{\|\underline{V}\|}\mu\,(M - M_{1z})\,(\gamma_z(t) + g) + (M_{1y} - M)\,\gamma_y(t) \end{cases} \quad (7)$$

These equations can not be solved directly, so we used an iterative solving, which is similar to Finite Element calculation except that we consider analytical solutions for each time step. The pseudo-analytical solving requires low calculation capacity and is less time consuming than the FE solving.

2.4 Iterative solving

The iterative solving relies on different simplification of the model. The iteration is made on the time using a constant time step. For each time step, we consider that the seismic acceleration remains constant, which is a good assumption for small time steps.

Let us consider the i^{th} iteration. The actual system is defined by its location $\left(X^i, Y^i, Z^i\right)$, its velocity $\left(\dot{X}^i, \dot{Y}^i, \dot{Z}^i\right)$, and its actual state: *sliding* or *sticking*. The chosen time step is Δt. The seismic acceleration is $\left(\gamma_x^i, \gamma_y^i, \gamma_z^i\right)$. The final system at the i^{th} iteration is determined by (8) if the mass is initially *sticking* and (9) if the mass is initially *sliding*.

2.4.1 Mass initially sticking

$$\begin{cases} X^{i+1} = X^i \\ Y^{i+1} = Y^i \end{cases} \quad (8)$$

$$If\ \sqrt{\left[(M - M_{1x})\,\gamma_x^i\right]^2 + \left[(M - M_{1y})\,\gamma_y^i\right]^2} < \mu\,(M - M_{1z})\left(\gamma_z^i + g\right)$$

a) true then $(i)^{th}$ *initial state is sticking,*
b) $false$ *then* $(i)^{th}$ *initial state changes to sliding.*

The sliding condition is verified 'a priori', meaning that when a sliding is detected at the beginning of the i^{th} iteration, then the calculation is made under sliding initial conditions.

2.4.2 Mass initially sliding

$$\begin{cases} X^{i+1} = X^i + \dot{X}^i\Delta t - \frac{1}{2}\left[\frac{M - M_{1x}}{M + M_{Hx}}\gamma_x^i + \frac{\dot{X}^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M - M_{1z}}{M + M_{Hx}}\left(g + \gamma_z^i\right)\right](\Delta t)^2 \\ Y^{i+1} = Y^i + \dot{Y}^i\Delta t - \frac{1}{2}\left[\frac{M - M_{1y}}{M + M_{Hy}}\gamma_y^i + \frac{\dot{Y}^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M - M_{1z}}{M + M_{Hy}}\left(g + \gamma_z^i\right)\right](\Delta t)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}^{i+1} = \dot{X}^i - \left[\frac{M - M_{1x}}{M + M_{Hx}}\gamma_x^i + \frac{\dot{X}^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M - M_{1z}}{M + M_{Hx}}\left(g + \gamma_z^i\right)\right]\Delta t \\ \dot{Y}^{i+1} = \dot{Y}^i - \left[\frac{M - M_{1y}}{M + M_{Hy}}\gamma_y^i + \frac{\dot{Y}^i}{\|\underline{V}\|}\mu\frac{M - M_{1z}}{M + M_{Hy}}\left(g + \gamma_z^i\right)\right]\Delta t \end{cases} \quad (9)$$

$$If\ \left(\frac{\dot{X}^{i+1}}{\left|\dot{X}^{i+1}\right|} \neq \frac{\dot{X}^i}{\left|\dot{X}^i\right|}\right)\ \&\ \left(\frac{\dot{Y}^{i+1}}{\left|\dot{Y}^{i+1}\right|} \neq \frac{\dot{Y}^i}{\left|\dot{Y}^i\right|}\right)$$

a) true then $(i+1)^{th}$ *initial state is sticking,*
b) $false$ *then* $(i+1)^{th}$ *initial state is sliding.*

The 'end of sliding' condition is verified 'a posteriori', meaning that when the 'end of sliding' condition is verified at the end of the i^{th} iteration, the sticking condition is only applied at the $(i+1)^{th}$ iteration.

2.5 Results

2.5.1 Sine/Cosine loading

Copyright © 2011 by JSME

TABLE 1. Sine/Cosine loading - Modeling parameters

Parameters	Values	Parameters	Values
M	1 kg	μ	0.2
M_h	0	Δt	5 ms
M_1	0	f_s	0.5 Hz
M_2	0	T_s	19.5 s

As mentioned in the introduction, it is important to consider the full 3D problem instead of the classical two dimensional analyses. The loading considered here is a cosine excitation along the X axis, and a sine excitation along the Y axis. Each sine and cosine have an amplitude of 1g. We neglect the vertical seismic excitation, meaning that the only vertical loading is the gravity. We consider an in-air structure, so the fluid coupling masses are considered as null. The remaining parameters are summarized in Table 1, where f_s is the frequency of the sine and cosine seismic signal, and T_s is the duration of the seism.

These parameters have been implemented in four models. The first one is a 3D excitation model using the pseudo-analytical solutions. The second model, $FE\ 3D$, is similar to the first one except that it has been solved using $ANSYS^{TM}$. In the third model, $FE\ 2D$, the seismic acceleration in the Y direction is not considered. In the last model, $modified\ FE\ 2D$, the seismic acceleration in the Y direction is not considered and the X excitation is multiplied by $\sqrt{2}$ in order to compensate the Y acceleration. This model can be used to give enveloppe displacement values.

The results are presented in Figure 1. The displacements on the (x,y) plane of the 3D pseudo-analytical and the 3D ANSYS models are represented on the left figure. The pseudo-analytical curve fits almost perfectly the FE curve. The pseudo-analytical model is validated for this seismic loading. The figure on the right shows the displacement along the X axis for the four models. The pseudo-analytical and the $FE\ 3D$ curves show a good fit, however the $FE\ 2D$ model always underestimates the displacement, and the $modified\ FE\ 2D$ model overestimates the sliding, giving an overestimation of the local maximum values and an underestimation of the local minimum values. This behavior tends to be amplified as the sliding coefficient increases. This point shows the importance of considering the whole 3D excitation in order to estimate correctly the displacement of the structure. This is especially true when considering a random seismic excitation.

2.5.2 Random seismic excitation

The four models described in par. 2.5.1 are used for this simulation, except that the fluid-structure interaction is taken into account. The new set of parameters is given in Table 2. The horizontal seismic loading is different in each direction (X or Y) with a Zero-Period Acceleration of $0.51g$. The vertical acceleration has a $0.2g$ ZPA.

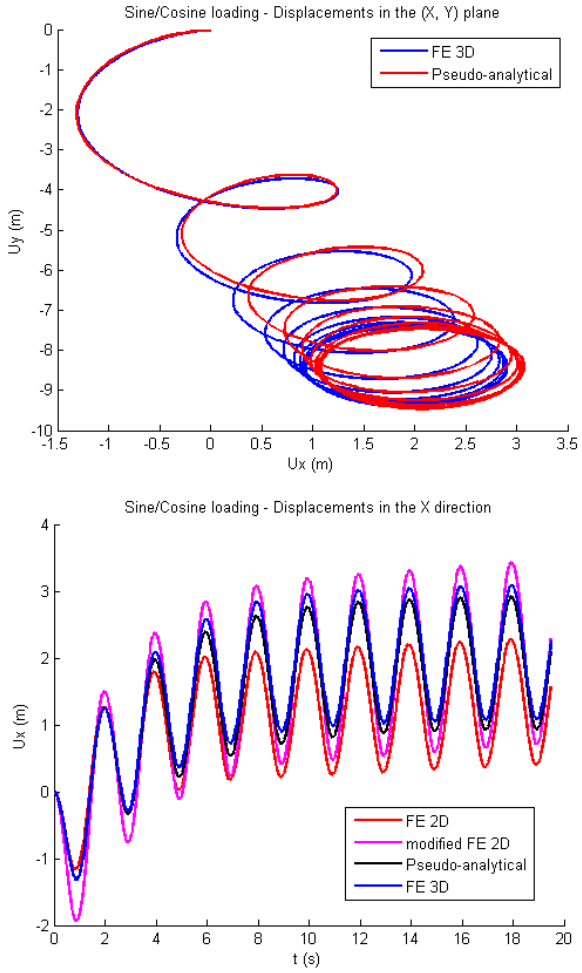


FIGURE 1. Single sliding Mass System - Sine/Cosine Loading - Displacement curves

The results are presented in Figure 2. The displacements on the (x,y) plane of the 3D pseudo-analytical and the 3D ANSYS models are represented on the left-hand figure. The pseudo-analytical curve fits almost perfectly the FE curve. Consequently, the pseudo-analytical model is validated for this seismic loading. The figure on the right shows the displacement along the X axis for the four models. The pseudo-analytical and the $FE\ 3D$ curves show a good fit, however the $FE\ 2D$ model always underestimates the displacement. The $modified\ FE\ 2D$ model shows a whole different behavior: the amplified acceleration tends to favor the direction of the first sliding. In this case, it is the $-X$

Copyright © 2011 by JSME

direction, where a regular acceleration gives priority to the $+X$ direction. This underlights the importance of considering the whole 3D excitation in order to estimate correctly the displacement of the structure.

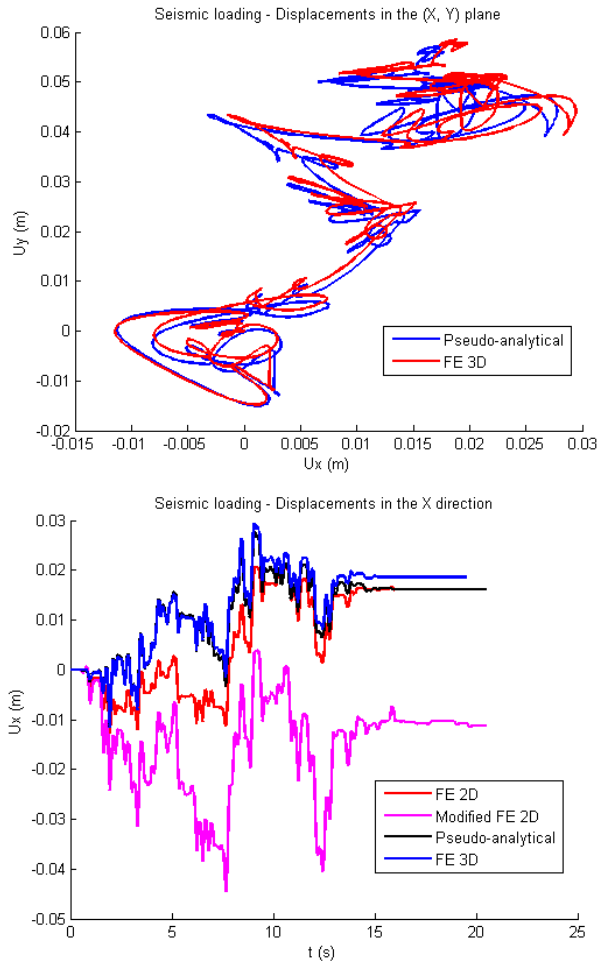


FIGURE 2. Single sliding Mass System - Seismic Loading - Displacement curves

3 Verical sliding beam system

The mass model gives a good exemples of the estimated sliding of a structure considered as infinitly rigid. Mege et al. shows with a mass-spring system the influence of internal behavior of the structure on the gobal sliding. It is the first step in order to develop a general model considering the N^{th} first flexural modes of the structure. This new model is required when several eigenfrequencies of the structure are in the usual seismic frequencies

TABLE 2. Seismic analysis - Modeling parameters

Parameters	Values	Parameters	Values
M	1 kg	μ	0.2
M_{Hx}	0.38 Kg	M_{Hy}	0.69 Kg
M_{1x}	0.16 Kg	M_{1y}	0.23 Kg
M_{1z}	0.38 Kg	Δt	5 ms
T_s	19.5 s		

(below 20 Hz). In this case, a model considering the modes that are in this frequency range gives a better estimation of the overall sliding.

To illustrate the theory that we have developped, we will consider a vertical sliding beam. However, this theory can be fully applied to any given structure where the eigenfrequencies, the eigenmode's shapes and the FSI pressure distribution are known or assumed.

3.1 Model description and assumptions

The model consists in one vertical beam, where one of its extremities is laying on the ground. The beam is defined by its density ρ, its cross-section S, its young's Modulus E and its flexural inertia I_{XX} and I_{YY}. The different parameters can be whether determined from the geometry of the structure or by fitting the global properties of the structure (global mass, first flexural frequencies, ...). The system is represented in figure 3.



FIGURE 3. Vertical sliding beam configuration

In order to simplify the model, we consider that the FSI pressure follows the same distribution as the density of the beam, which is a uniform distribution. This gives the advantage that the wet-eigenmodes shapes are the same as the dry-eigenmodes. When the FSI pressure distribution is more complex, one needs to compute new wet-eigenmodes by adding the hydrodynamic added mass matrix to the structural mass matrix. Nevertheless,

Copyright © 2011 by JSME

the uniform pressure distribution fits perfectly a 2D layer fluid coupling corresponding to a Fritz potential fluid theory.

We will always consider a vertical acceleration that prevents the system from taking off, meaning that $|\gamma_z(t)| < g$. The beam is supposed to be infinitely rigid along the vertical axis. In this case, the vertical forces transit directly from the entire beam to the contact point. We will also assume that the contact point of the beam can not rotate.

3.2 Governing equations

The governing equations of the vertical sliding beam system can be easily established.

$$\begin{cases} (m_l + m_{Hx})\ \ddot{u}_x(z,t) + EI_{xx}\frac{d^4u_x}{dz^4}(z,t) \\ \qquad\qquad = R_x(t)\delta_0(z) + (m_{1x} - m_l)\,\gamma_x(t) \\ (m_l + m_{Hy})\ \ddot{u}_y(z,t) + EI_{yy}\frac{d^4u_y}{dz^4}(z,t) \\ \qquad\qquad = R_y(t)\delta_0(z) + (m_{1y} - m_l)\,\gamma_y(t) \\ R_z(t) \qquad\quad = \int_{z=0}^{H}(m_l - m_{1z})\,dz\,(\gamma_z(t) + g) \end{cases} \tag{10}$$

The contact is defined by :

$$\begin{cases} \|\underline{\dot{U}}_0\| = \sqrt{\dot{u}_x^2(0,t) + \dot{u}_y^2(0,t)} = 0 \\ \qquad \Rightarrow \sqrt{R_x^2(t) + R_y^2(t)} < \mu_S R_z(t) \\ \|\underline{\dot{U}}_0\| = \sqrt{\dot{u}_x^2(0,t) + \dot{u}_y^2(0,t)} > 0 \\ \qquad \Rightarrow R_x(t)\underline{e}_x + R_y(t)\underline{e}_y = -\frac{\dot{U}_0}{\|\underline{\dot{U}}_0\|}\mu_D R_z(t) \end{cases} \tag{11}$$

Where:

m_l, $m_{H.}$ and $m_{1.}$ are the lineic densities of the structural mass, the hydrodynamic coupling mass and the buoyancy mass,
μ_S and μ_D are respectively the static and dynamic friction coefficients,
E is the Young's Modulus of the beam,
I_{xx} and I_{yy} are respectively the inertia of the beam along the X-axis, and the Y-axis,
$(u_x(z,t), u_y(z,t))$ are the functions that define the position of each particle of the beam,
$\delta_0(z)$ is the Dirac function,
$\underline{\dot{U}}_0$ is the velocity of the contact point.

This set of equations can be simplified by using a projection on the eigenmodes of the structure. In order to model the different states of the contact, we will use either the free-free eigenmodes $\phi_i(z)$, or the clamped-free eigenmodes $\psi_i(z)$. For a vertical sliding beam, we will consider that there is no rotation at the contact location.

3.2.1 Free-free beam :

For a free-free beam (with a no rotation condition at one end), the boundary conditions are given by :

$$\begin{cases} \phi_i'(0) = 0 \\ \phi_i^{(3)}(0) = 0 \end{cases}, \begin{cases} \phi_i''(H) = 0 \\ \phi_i^{(3)}(H) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

The eigenfrequencies $(a_i)_{[1,N-1]}$ and the eigenmodes are then deduced :

$$\phi_1(z) = 1,\ \phi_{i+1}(z) = \cos(a_i z) + \frac{\cos(a_i H)}{\cosh(a_i H)}\cosh(a_i z) \tag{13}$$

Where :

$$a_1 H \approx 2.365,\ \ a_i H \approx (i-1)\,\pi + \frac{3\pi}{4} \tag{14}$$

Considering N eigenmodes along each direction, the actual position of each points of the beam can be expressed in this basis :

$$\begin{cases} u_x(z,t) = \sum_{i=1}^{N}\phi_i(z)q_{xi}(t), \\ u_y(z,t) = \sum_{i=1}^{N}\phi_i(z)q_{yi}(t). \end{cases} \tag{15}$$

3.2.2 Clamped-free beam :

For a clamped-free beam, the boundary conditions are given by :

$$\begin{cases} \psi_i(0) = 0 \\ \psi_i'(0) = 0 \end{cases}, \begin{cases} \psi_i''(H) = 0 \\ \psi_i^{(3)}(H) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

The eigenfrequencies $(b_i)_{[1,N]}$ and the eigenmodes are then deduced :

$$\begin{aligned} \psi_i(z) &= \sin(b_i z) - \sinh(b_i z) \\ &+ \tfrac{\sinh(b_i z) + \sin(b_i z)}{\cosh(b_i z) + \cos(b_i z)}\,(\cosh(b_i z) - \cos(b_i z)) \end{aligned} \tag{17}$$

Copyright © 2011 by JSME

Where :

$$b_1 H \approx 1.875,\ b_2 H \approx 4.694,\ b_i H \approx (2i-1)\,\frac{\pi}{2} \tag{18}$$

Considering N eigenmodes along each direction, the actual position of each points of the beam can be expressed in this basis. However, since the base of the beam is clamped, the absolute displacement of the beam can not be projected in this basis, but the relative displacement can :

$$\begin{cases} u_x(z,t) - U_{0x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(z) q_{xci}(t), \\ u_y(z,t) - U_{0y}(t) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(z) q_{xci}(t). \end{cases} \tag{19}$$

3.2.3 Change of coordinate system :

The projection of the generalized coordinates from one eigenmode basis to the other is made using the relation (19). The orthogonal properties of the eigenmodes are used to obtain :

$$\begin{aligned} q_i(t)\|\phi_i\|^2 &= \int_{z=0}^{H} \phi_i(z) u_x(z,t) dz \\ &= \int_{z=0}^{H} \left(\phi_i(z) U_{0x}(t) + \phi_i(z) \sum_{j=1}^{N} \psi_j(z) q_{xcj}(t) \right) dz, \end{aligned} \tag{20}$$

We define the projection matrix $\underline{\underline{T}}$ and the rigid displacement projection vector $\underline{L}$ as :

$$T(i,j) = \frac{\int_{z=0}^{H} \phi_i(z)\psi_j(z)dz}{\|\phi_i\|^2},\ L(i) = \frac{\int_{z=0}^{H} \phi_i(z)dz}{\|\phi_i\|^2} \tag{21}$$

The projection is made using :

$$\underline{q}_x(t) = \underline{\underline{T}}.\underline{q}_{xc}(t) + \underline{L}.U_{0x}(t) \tag{22}$$

The exact same relation is verified for the generalized coordinates on the Y-axis.

3.3 Projections of the governing equations :

Depending on the state of the contact, the governing equations are either projected on the clamped-free modes basis when the beam is *resting* (cf. eqn. 23), or on the free-free modes basis when the beam is *sliding* (cf. eqn. 24).

$$\begin{cases} \ddot{q}_{xi}(t) + \omega_{xi}^2 q_{xi}(t) \\ \quad = \frac{1}{(m_l+m_{Hx})\|\phi_i\|^2} \left\{ \phi_i(0) R_x(t) + \int_{z=0}^{H} (m_{1x} - m_l)\,\phi_i(z) dz \times \gamma_x(t) \right., \\ \ddot{q}_{yi}(t) + \omega_{yi}^2 q_{yi}(t) \\ \quad = \frac{1}{(m_l+m_{Hx})\|\phi_i\|^2} \left\{ \phi_i(0) R_y(t) + \int_{z=0}^{H} (m_{1y} - m_l)\,\phi_i(z) dz \times \gamma_y(t) \right., \\ R_z(t) = \int_{z=0}^{H} (m_l - m_{1z})\, dz \times (\gamma_z(t) + g) \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_{xci}(t) + \omega_{cxi}^2 q_{xi}(t) \\ \quad = \frac{1}{(m_l+m_{Hx})\|\psi_i\|^2} \left\{ \int_{z=0}^{H} (m_{1x} - m_l)\,\psi_i(z) dz \times \gamma_x(t) \right., \\ \ddot{q}_{yci}(t) + \omega_{cyi}^2 q_{yi}(t) \\ \quad = \frac{1}{(m_l+m_{Hx})\|\psi_i\|^2} \left\{ \int_{z=0}^{H} (m_{1y} - m_l)\,\psi_i(z) dz \times \gamma_y(t) \right., \\ R_z(t) = \int_{z=0}^{H} (m_l - m_{1z})\, dz \times (\gamma_z(t) + g) \end{cases} \tag{24}$$

Where :

$\omega_{x1} = \omega_{y1} = 0$ and $\omega_{x(i+1)} = \left(\frac{a_i}{H}\right)\sqrt{\frac{EI_{xx}}{m_l+m_{Hx}}}$, $\omega_{y(i+1)} = \left(\frac{a_i}{H}\right)\sqrt{\frac{EI_{yy}}{m_l+m_{Hy}}}$ are the 'wet' pulsations of the sliding beam,
$\omega_{cxi} = \left(\frac{b_i}{H}\right)\sqrt{\frac{EI_{xx}}{m_l+m_{Hx}}}$, $\omega_{cyi} = \left(\frac{b_i}{H}\right)\sqrt{\frac{EI_{yy}}{m_l+m_{Hy}}}$ are the 'wet' pulsations of the clamped beam,
q_{xi} and q_{yi} are generalized coordinates for the free-free eigenmodes,
q_{xci} and q_{yci} are generalized coordinates for the clamped-free eigenmodes.

3.4 Iterative solving

These equations are highly non linear and can not be solved analytically without any further assumptions. We make the same assumptions as in par. 2.4. We consider the i^{th} iteration. The system at the end of the i^{th} iteration is determined by *eqn*.25 if the beam is initially *sticking* and *eqn*.3.4.2 if the beam is initially *sliding*.

3.4.1 Beam initially sticking :

When the contact state is *sticking* at the begininning of the i^{th} iteration, the set of equations defined in (23) is used. With the assumptions described previously, the anaytical solutions are

Copyright © 2011 by JSME

obtained using the Duhammel equations :

$$\forall k \in [1,N], \begin{cases} q_{xck}^{i+1} = q_{xck}^{i}\cos(\omega_{xck}dt) \\ \quad + \frac{\dot{q}_{xck}^{i}}{\omega_{xck}}\sin(\omega_{xck}dt) + \frac{A_k^i}{\omega_{xck}^2}\left(1-\cos(\omega_{xck}dt)\right), \\ q_{yck}^{i+1} = q_{yck}^{i}\cos(\omega_{yck}dt) \\ \quad + \frac{\dot{q}_{yck}^{i}}{\omega_{yck}}\sin(\omega_{yck}dt) + \frac{B_k^i}{\omega_{yck}^2}\left(1-\cos(\omega_{yck}dt)\right), \\ \dot{q}_{xck}^{i+1} = -\frac{q_{xck}^{i}}{\omega_{xck}}\sin(\omega_{xck}dt) \\ \quad + \dot{q}_{xck}^{i}\cos(\omega_{xck}dt) + \frac{A_k^i}{\omega_{xck}}\sin(\omega_{xck}dt), \\ \dot{q}_{yck}^{i+1} = -\frac{q_{yck}^{i}}{\omega_{yck}}\sin(\omega_{yck}dt) \\ \quad + \dot{q}_{yck}^{i}\cos(\omega_{yck}dt) + \frac{B_k^i}{\omega_{yck}}\sin(\omega_{yck}dt), \end{cases} \tag{25}$$

Where :

$$\forall k \in [1,N], \begin{cases} A_k^i = -\frac{m_l - m_{1x}}{m_l + m_{Hx}} \frac{\int_{z=0}^{H}\psi_k(z)dz}{\|\psi_k\|^2}\gamma_x^i, \\ B_k^i = -\frac{m_l - m_{1y}}{m_l + m_{Hy}} \frac{\int_{z=0}^{H}\psi_k(z)dz}{\|\psi_k\|^2}\gamma_y^i, \end{cases} \tag{26}$$

In order to verify that the contact state remains *sticking*, we need to compute the reaction forces. These forces do not appear on the projection on the clamped-free modes basis. So we need to find another basis that will not erase the influence of the reaction forces. The easiest solution is to calculate the motion at the centroïd of the beam where the reaction forces during the sticking state are easily computed with :

$$\begin{cases} \int_{z=0}^{H}(m_l+m_{Hx})\,dz \times \ddot{X}_G(t) - \int_{z=0}^{H}(m_{1x}-m_l)\,dz \times \gamma_x(t) = R_x \\ \int_{z=0}^{H}(m_l+m_{Hy})\,dz \times \ddot{Y}_G(t) - \int_{z=0}^{H}(m_{1y}-m_l)\,dz \times \gamma_y(t) = R_y \end{cases} \tag{27}$$

Where, in the case of an uniform beam :

$$\ddot{X}_g = \sum_{k=1}^{N}\psi_k(H/2)\ddot{q}_{xck},\ \ddot{Y}_g = \sum_{k=1}^{N}\psi_k(H/2)\ddot{q}_{yck}, \tag{28}$$

The sliding conditions can then be expressed. The iterative algorithm uses the following protocol :

$$\begin{aligned} &If\ \left[\int_{z=0}^{H}(m_l+m_{Hx})\,dz \times \ddot{X}_G(t) - \int_{z=0}^{H}(m_{1x}-m_l)\,dz \times \gamma_x(t)\right]^2 \\ &+\ \left[\int_{z=0}^{H}(m_l+m_{Hy})\,dz \times \ddot{Y}_G(t) - \int_{z=0}^{H}(m_{1y}-m_l)\,dz \times \gamma_y(t)\right]^2 \\ &<\ \left[\mu_S(m_l-m_{1z})H\left(\gamma_z^i+g\right)\right]^2 \end{aligned}$$

a) true then $(i)^{th}$ initial state is sticking,
b) false then $(i)^{th}$ initial state changes to sliding.

The sliding condition is verified 'a priori', meaning that when a sliding is detected at the beginning of the i^{th} iteration, then the calculation is made under *sliding* initial conditions, which are :

$$\begin{cases} \underline{q}_x^i = \underline{\underline{T}}.\underline{q}_{xc}^i + \underline{L}.U_{0x}^i, \\ \underline{q}_y^i = \underline{\underline{T}}.\underline{q}_{yc}^i + \underline{L}.U_{0y}^i \end{cases} \tag{29}$$

3.4.2 Mass initially sliding

When the contact state is *sliding* at the begininning of the i^{th} iteration, the set of equations defined in (24) is used. With the same assumptions, the analytical solutions are obtained using the Duhammel equations :

$$k=1 \qquad \begin{cases} q_{x1}^{i+1} = q_{x1}^i + \dot{q}_{x1}^i dt + A_k^i\frac{dt^2}{2}, \\ q_{y1}^{i+1} = q_{y1}^i + \dot{q}_{y1}^i dt + B_k^i\frac{dt^2}{2} \end{cases}$$

$$\forall k \in [2,N], \begin{cases} q_{xk}^{i+1} = q_{xk}^i\cos(\omega_{xk}dt) + \frac{\dot{q}_{xk}^i}{\omega_{xk}}\sin(\omega_{xk}dt) \\ \quad + \frac{A_k^i}{\omega_{xk}^2}\left(1-\cos(\omega_{xk}dt)\right), \\ q_{yk}^{i+1} = q_{yk}^i\cos(\omega_{yk}dt) + \frac{\dot{q}_{yk}^i}{\omega_{yk}}\sin(\omega_{yk}dt) \\ \quad + \frac{B_k^i}{\omega_{yk}^2}\left(1-\cos(\omega_{yk}dt)\right), \\ \dot{q}_{xk}^{i+1} = -\frac{q_{xk}^i}{\omega_{xk}}\sin(\omega_{xk}dt) + \dot{q}_{xk}^i\cos(\omega_{xk}dt) \\ \quad + \frac{A_k^i}{\omega_{xk}}\sin(\omega_{xk}dt), \\ \dot{q}_{yk}^{i+1} = -\frac{q_{yk}^i}{\omega_{yk}}\sin(\omega_{yk}dt) + \dot{q}_{yk}^i\cos(\omega_{yk}dt) \\ \quad + \frac{B_k^i}{\omega_{yk}}\sin(\omega_{yk}dt), \end{cases} \tag{29}$$

Copyright © 2011 by JSME

Where :

$$\forall k \in [1,N], \begin{cases} A_k^i = -\frac{m_l - m_{1x}}{m_l + m_{Hx}} \frac{\phi_k(0)}{\|\phi_k\|^2} \mu_D \frac{\dot{U}_{0x}^i}{\|\dot{U}_{0x}^i\|} \left(\gamma_z^i + g\right) \\ \quad - \frac{m_l - m_{1x}}{m_l + m_{Hx}} \frac{\int_{z=0}^{H} \phi_k(z) dz}{\|\phi_k\|^2} \gamma_x^i, \\ B_k^i = -\frac{m_l - m_{1y}}{m_l + m_{Hy}} \frac{\phi_k(0)}{\|\phi_k\|^2} \mu_D \frac{\dot{U}_{0y}^i}{\|\dot{U}_{0y}^i\|} \left(\gamma_z^i + g\right) \\ \quad - \frac{m_l - m_{1y}}{m_l + m_{Hy}} \frac{\int_{z=0}^{H} \phi_k(z) dz}{\|\phi_k\|^2} \gamma_y^i, \end{cases} \tag{29}$$

$$If \left(\frac{\dot{U}_{x0}^{i+1}}{|\dot{U}_{x0}^{i+1}|} \neq \frac{\dot{U}_{x0}^{i}}{|\dot{U}_{x0}^{i}|} \right) \& \left(\frac{\dot{U}_{y0}^{i+1}}{|\dot{U}_{y0}^{i+1}|} \neq \frac{\dot{U}_{y0}^{i}}{|\dot{U}_{y0}^{i}|} \right)$$

a) true then $(i+1)^{th}$ *initial state is sticking,*
b) false then $(i+1)^{th}$ *initial state is sliding.*

The 'end of sliding' condition is verified 'a posteriori', meaning that when the 'end of sliding' condition is verified at the end of the i^{th} iteration, the *sticking* condition is only applied at the $(i+1)^{th}$ iteration. In this case, the initial conditions are determined using the change of coordinate system equations.

3.5 Results

3.5.1 Random seismic excitation

Two vertical sliding beam systems are compared in this study. The fluid-structure interaction is being neglected in this example, but the sliding and internal vibrations are being taken into account. The first model is a 3D pseudo-analytical model. The mass distribution remains the same during the sliding. The second model is a $FE\ 3D$ model.

The set of parameters used in this analysis is given in Table 3. The horizontal seismic loading is different in each direction (X or Y) with a Zero-Period Acceleration of $0.4g$. The vertical acceleration has a $0.5g$ ZPA. The accelerograms are different from 2.5.2.

The results are presented in figure 5. The displacements of the sliding end of the beam on the (x,y) plane of the 3D pseudo-analytical and the 3D ANSYS models are represented. The pseudo-analytical curve fits quite nicely the FE curve. The pseudo-analytical model is validated for this seismic loading.

3.5.2 Comparison between models

Using the results of Mege et al. and the results presented in this paper, we can compare the results obtained with the different models. We will use the same condition has the one presented for the vertical sliding beam under random seismic loading. We compare three equivalent models with an increasing precision on the knowledge of the structure : a sliding mass, a sliding spring-mass system and a vertical sliding beam. The results are presented in fig. 5. One can see that the internal vibrations can have a strong impact on the global displacement.

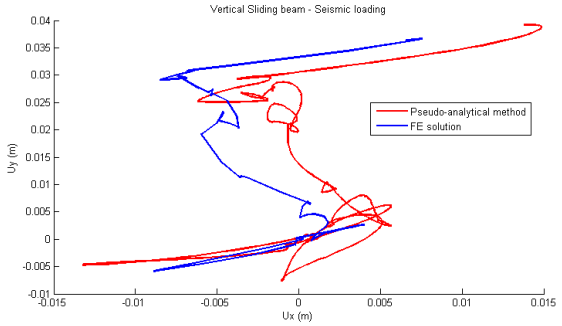


FIGURE 4. Vertical Sliding Beam - Seismic loading - Displacement curves

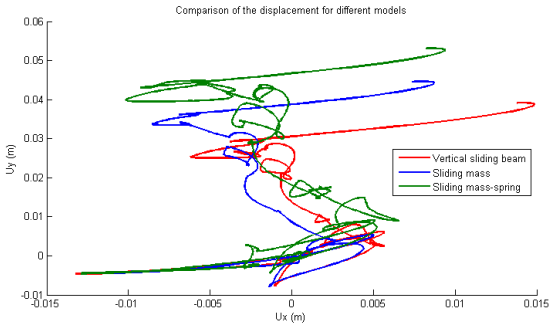


FIGURE 5. Seismic loading - Comparison of models

4 Conclusion

In this study, two pseudo-analytical models have been proposed: a 3D single sliding mass system, and a 3D vertical sliding beam system. The equations of motion are obtained using an iterative solving, where, for each time step, the seismic acceleration and the amplitude of the reaction force are considered as constant values. For each model, the contact is modeled using a

Copyright © 2011 by JSME

TABLE 3. Seismic analysis - Modeling parameters

Parameters	Values	Parameters	Values
m	100000 Kg	E	159e3 MPa
μ_S	0.2	f_x	50 Hz
ρ	7900 Kg.m^{-3}	μ_S	0.2
f_y	35 Hz		

Coulomb friction and the fluid-structure interaction is considered using an added mass theory.

A set of different seismic accelerations have been applied to these models. The resulting displacements show a very good fit with the FE simulations. The solving of the pseudo-analytical models lasts less than a minute, while the FE model takes at least an hour. A comparison between the whole 3D simulations and some classical 2D models has been made for the sliding mass. The 2D models show a wrong estimation of the behavior of the system, giving inaccurate displacement values and directions. This study illustrates the importance of considering the whole 3D model for this kind of non-linear dynamic analyses.

Finally, a comparison of models with different details on the internal vibration properties have been madde showing the strong influence of this parameter on the global sliding displacement.

Simplified analytical models are suitable for dimensioning or predimensioning study. They give a good insight on the governing parameters and an estimation on the results distribution. The two analytical models presented in this study have been validated for this purpose.

5 Acknowledgements

A part of the study has been accomplished with the help of the "Durabilité des matériaux et des structures pour l'énergie" Chair directed by the MINES ParisTech and the Ecole des Ponts ParisTech, and financed by the FEED, EDF, GDF SUEZ and GRTgaz.

References

[1] J. C. Pons, Réponse dynamique d'une structure rigide sur fondation glissante, 1er Colloque national de génie parasismique, 1986.

[2] H. W. Shenton III, N. P. Jones, Base excitation of rigid bodies. I: Formulation, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 117(10):2286-2306, 1991.

[3] H. W. Shenton III, N. P. Jones, Base excitation of rigid bodies. II: Periodic slide-rock response, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 117(10):2307-2327, 1991.

[4] H. W. Shenton III, Criteria for initiation of slide, rock and slide-rock rigid-body modes, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 122(7):690-693, 1996.

[5] Y. Ishiyama, Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations, Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10:635-650, 1982.

[6] C. S. Y. Solomon, H. Lin, Nonlinear impact and chaotic response of slender rocking objects, Jounral of Engineering Mechanics (ASCE), 117(9):2079-2100, 1991.

[7] P. Sideris, A. Filiatrault, Dynamic analysis of rigid bodies on inclined plane surfaces: application to prediction of merchandise response in steel storage racks under earthquake excitation, COMPDYN 2009.

[8] B. Westermo, F. Udwadia, Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation, Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 11, 135-146, 1983

[9] R. J. Fritz, The effect of liquids on the dynamic motions of immersed solids, Journal of Engineering for Industry, 167-173, 1972

[10] R. Mege, N. Jobert, Analytical solutions for the study of immersed unanchored structures under seismic loading, Pressure Vessel and Piping Conference, 2010

Copyright © 2011 by JSME