



Apport de la modélisation multiphasique à l'analyse du comportement macroscopique de matériaux renforcés par fibres

van Tuan Nguyen

► To cite this version:

van Tuan Nguyen. Apport de la modélisation multiphasique à l'analyse du comportement macroscopique de matériaux renforcés par fibres. Autre. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1034 . pastel-00977358

HAL Id: pastel-00977358

<https://pastel.hal.science/pastel-00977358>

Submitted on 11 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST
ÉCOLE DOCTORALE MODES

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

Docteur

de l'Université Paris-Est

Spécialité : STRUCTURES ET MATÉRIAUX

Présentée et soutenue par

Van Tuan NGUYEN

**Apport de la modélisation multiphasique à l'analyse du
comportement macroscopique des matériaux renforcés
par fibres**

soutenue à Champs sur Marne le 26 novembre 2013

devant le jury composé de :

Djimédo KONDO, univ. Paris 6, Président/Rapporteur

Issam DOGHRI, univ. Catholique de Louvain, Rapporteur

Ghazi HASSEN, univ. Paris-Est, Examineur

Emmanuel BOURGEOIS, IFSTTAR, Invité

Patrick de BUHAN, univ. Paris-Est, Directeur de thèse

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer mes remerciements à mon directeur de thèse Patrick de BUHAN pour m'avoir accueilli au sein de son équipe. Je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques.

J'exprime de sincères remerciements à Ghazi HASSEN pour son encadrement, ses conseils avisés et sa disponibilité du début à la fin de ce long travail de recherche. Sa confiance et son soutien ont été des éléments moteurs pour moi. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Je souhaite remercier les rapporteurs de cette thèse M. Dijimédo KONDO, Professeur à l'Université Paris 6, et M. Issam DOGHRI, Professeur à l'Université Catholique de Louvain, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Leurs remarques et suggestions lors de la lecture de mon rapport m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier.

Merci également à M. Emmanuel BOURGEOIS pour avoir fait partie de mon jury de thèse ainsi que pour ses commentaires et ses corrections de ce mémoire.

Je remercie enfin tous mes collègues dans l'équipe Multi-échelle du laboratoire Navier, ma famille et mes amis qui m'ont beaucoup aidé pendant ma thèse et avec qui j'ai passé de très bons moments.

Résumé

Une modélisation récente, qualifiée de multiphasique, permettant de décrire le comportement des ouvrages en sols renforcés par inclusions a été développée et intégrée dans un code de calcul par éléments finis. Le champ d'application de cette approche a été étendu pour rendre compte du comportement macroscopique de matériaux à fibres tels que le plâtre, le béton de fibres, les ouvrages en sol renforcés par des fibres et les tissus osseux qui présentent une microstructure constituée d'une matrice et d'une distribution de fibres plus ou moins longues orientées dans toutes les directions de l'espace.

Cette approche est d'abord mise en œuvre pour déterminer le comportement élastique du composite à fibre, les résultats obtenus sont comparés à ceux fournis par les schémas d'estimation dilué et de Mori Tanaka, basés sur la solution d'Eshelby, la suite de ce travail est consacrée au développement du modèle dans le cadre d'un comportement anélastique des constituants. Des solutions analytiques ont été développées permettant de retrouver le comportement macroscopique des matériaux à fibres sous certaines sollicitations simples dans le cadre d'un comportement élasto-plastique ou élastique-fragile des différents constituants. Le modèle est par la suite mis en œuvre numériquement dans le cadre de la méthode des éléments finis permettant d'accéder à la réponse de structures en matériaux à fibres.

Mots-clés : *Modèle multiphasique, comportement macroscopique, matériaux à fibres.*

Abstract

A multiphase model has been recently developed and integrated into a finite element based code for the analysis and design of soil structures reinforced with linear inclusions. This approach is extended to account for the macroscopic behavior of fiber reinforced materials such as plaster, concrete fiber, soil reinforced by short fibers and bone tissues, which are constituted of a matrix and a distribution of continuously oriented fibers.

The proposed model is performed to evaluate the elastic macroscopic stiffness of the composite material, the obtained results are compared to those deriving from the dilute and Mori-Tanaka estimations. The model is then extended to take into account a nonelastic behavior of the constituents. Starting from the derivation of some analytical solutions to boundary value problems involving fiber reinforced materials in the context of elasto-plastic and brittle behavior of the matrix and fibers, a f.e.m.-based code is developed and applied to simulating the behavior of some typical structures.

Keywords : *Multiphase model, macroscopic behavior, fiber reinforced materials.*

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Introduction	1
1.2	Généralités sur les matériaux à fibres	2
1.3	Une brève revue des méthodes de calcul	4
1.3.1	Méthodes d'homogénéisation	4
1.3.2	Formules simplifiées	6
1.4	Modélisation multiphasique des matériaux renforcés par fibres	7
2	Modèle multiphasique des matériaux à fibres	11
2.1	Introduction	13
2.2	Construction du modèle multiphasique de matériau à fibres	13
2.2.1	Méthode des puissances virtuelles	13
2.2.2	Description cinématique du milieu multiphasique	14
2.2.3	Expressions des puissances virtuelles	15
2.2.4	Mise en œuvre du principe des puissances virtuelles	19
2.3	Elasticité du milieu multiphasique	22
2.3.1	Déformations du milieu multiphasique	22
2.3.2	Thermodynamique du milieu multiphasique	23
2.3.3	Comportement élastique	25
2.3.4	Comportement élastique linéaire sous l'hypothèse d' <i>adhérence parfaite</i>	27
2.3.5	Lien avec l'échelle microscopique. Détermination des caractéristiques mécaniques élastiques des différentes phases	29
2.4	Evaluation du comportement global du matériau renforcé par fibres	31
2.4.1	Cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres	31
2.4.2	Cas d'une distribution bidimensionnelle de fibres	33
2.5	Conclusions	34
3	Approche par homogénéisation	37
3.1	Introduction	39
3.2	Notations de base	39
3.2.1	Moyenne d'un champ	40
3.2.2	Conditions aux limites homogènes	40
3.2.3	Lemme de Hill	41
3.2.4	Localisation	41
3.2.5	Approximations de Voigt et Reuss	43

3.3	Problème de l'inclusion d'Eshelby	43
3.3.1	Schéma dilué	44
3.3.2	Schéma de Mori-Tanaka	45
3.4	Application aux matériaux à fibres	46
3.4.1	Cas d'un renforcement unidirectionnel	46
3.4.2	Cas d'une distribution continue de fibres dans un plan Oxy	48
3.4.3	Cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres	50
3.5	Conclusions	51
4	Comportement anélastique des matériaux à fibres	53
4.1	Introduction	55
4.2	Extension du modèle multiphasique	55
4.2.1	Comportement élastique endommageable des fibres	55
4.2.2	Cas d'une déformation uniaxiale homogène imposée	57
4.2.3	Cas d'une sollicitation de traction en déformation plane	61
4.2.4	Cas particulier des fibres ne résistant qu'à la traction	66
4.2.5	Poutre renforcée soumise à un chargement de flexion en déformation plane	70
4.2.6	Compression simple d'une éprouvette renforcée par une distribution isotrope de fibres élastiques fragiles	75
4.3	Comportement élasto-plastique d'un matériau à fibres	80
4.3.1	Comportement élasto-plastique	80
4.3.2	Un exemple d'application	82
4.4	Conclusion	88
5	Mise en œuvre numérique du modèle	91
5.1	Introduction	93
5.2	Discrétisation de la distribution de fibres	93
5.3	Mise en œuvre numérique du modèle en élasticité	94
5.3.1	Energie potentielle d'un milieu multiphasique	94
5.3.2	Principe du minimum de énergie potentielle	96
5.3.3	Formulation variationnelle	99
5.3.4	Application de la méthode des éléments finis au système multiphasique	99
5.4	Prise en compte d'un comportement élastique fragile des fibres	105
5.4.1	Simulation numérique du problème de traction en déformation plane	108
5.4.2	Calcul d'une poutre renforcée soumise à un chargement de flexion en déformation plane	110
5.5	Mise en œuvre numérique du modèle en élasto-plasticité	113

5.5.1	Position d'un problème d'évolution d'élasto-plastique d'un milieu multiphasique	113
5.5.2	Discrétisation temporelle de l'évolution et algorithme itératif	115
5.5.3	Formulation par la méthode des élément finis	117
5.5.4	Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en plasticité . .	121
5.5.5	Poinçonnement d'un demi-espace renforcé	123
5.6	Application du code de calcul multiphasique	125
5.7	Conclusions	126
6	Calcul à la rupture et critère de résistance macroscopique	129
6.1	Introduction	131
6.2	Calcul à la rupture pour les systèmes en milieux multiphasiques	131
6.2.1	Domaine K des chargements potentiellement supportables pour un système multiphasique	131
6.2.2	Approche statique par l'intérieur de K	132
6.2.3	Approche cinématique par l'extérieur de K	132
6.2.4	Un exemple de mise en œuvre	135
6.3	Critère de résistance macroscopique	140
6.3.1	Définition du domaine de résistance macroscopique	140
6.3.2	Représentation géométrique du domaine G^{hom} dans l'espace des contraintes	142
6.3.3	Un exemple de mise en œuvre	147
6.4	Conclusion	149
7	Conclusions et perspectives	151
A	Notation de Voigt pour les tenseurs symétriques	155
B	Conditions aux limites homogènes et Lemme de Hill	157
C	Composantes de tenseur d'Eshelby dans un milieu isotrope	159
D	La condition de compatibilité	161
	Bibliographie	163

Table des figures

1.1	<i>Exemples des matériaux à fibres</i>	2
1.2	<i>Etapes de modélisation par éléments finis</i>	5
2.1	<i>Description du matériau renforcé aux échelles microscopique et macroscopique</i>	15
2.2	<i>Angle solide d'une surface infinitésimale</i>	16
2.3	<i>Facette dS de normale $\underline{n}$</i>	29
2.4	<i>Distribution continue de fibres dans le plan (Oxy)</i>	31
3.1	<i>Description multi-échelles</i>	39
3.2	<i>Conditions aux limites homogènes</i>	40
3.3	<i>Problème de l'inclusion d'Eshelby</i>	44
3.4	<i>Coordonnées polaires</i>	48
3.5	<i>Coordonnées sphériques</i>	50
4.1	<i>Courbe contrainte-déformation des phases renforcements</i>	56
4.2	<i>Déformation homogène uniaxiale imposée</i>	57
4.3	<i>Déformation macroscopique uniaxiale : zones endommagées</i>	58
4.4	<i>Déformation macroscopique uniaxiale : courbe contrainte-déformation</i>	59
4.5	<i>Déformation macroscopique uniaxiale : évolution du paramètre d'endommagement β</i>	60
4.6	<i>Déformation macroscopique uniaxiale : courbes contrainte-déformation en fonction de α_T^r</i>	60
4.7	<i>Sollicitation de traction en déformation plane</i>	61
4.8	<i>Essai de traction en déformation plane : zones endommagées</i>	63
4.9	<i>Essai de traction en déformation plane : courbe contrainte-déformation</i>	64
4.10	<i>Essai de traction en déformation plane : évolution des paramètres d'endommagement β et γ</i>	65
4.11	<i>Essai de traction en déformation plane : courbes contrainte-déformation en fonction de α_T^r</i>	65
4.12	<i>Essai de traction en déformation plane : zone "inactive" des fibres</i>	66
4.13	<i>Essai de traction en déformation plane : zone "inactive" et zones endommagées des fibres</i>	67
4.14	<i>Essai de traction en déformation plane : évolution des paramètres d'endommagement β et ϑ</i>	69
4.15	<i>Essai de traction en déformation plane : courbe contrainte-déformation</i>	69
4.16	<i>Flexion d'une poutre renforcée en déformation plane</i>	70

4.17	<i>Flexion d'une poutre : distribution des contraintes dans l'épaisseur de la poutre</i>	73
4.18	<i>Flexion d'une poutre : courbe moment fléchissant - courbure</i>	74
4.19	<i>Flexion d'une poutre : courbes moment-courbure en fonction de α_T^r</i>	75
4.20	<i>Compression simple d'une éprouvette renforcée par une répartition isotrope de fibres</i>	76
4.21	<i>Essai de compression simple : zone endommagée</i>	77
4.22	<i>Essai de compression simple : zones endommagées</i>	79
4.23	<i>Courbe contrainte-déformation : essai de compression simple</i>	80
4.24	<i>Critère de plasticité et règle d'écoulement plastique dans le cas associé de la phase matrice</i>	81
4.25	<i>Déformation homogène ϵ_{xx} imposée</i>	83
4.26	<i>Comportement élasto-plastique de la phase renforcement</i>	83
4.27	<i>Déformation macroscopique uniaxiale : zones plastifiées</i>	85
4.28	<i>Déformation macroscopique uniaxiale : courbe contrainte-déformation - plastification des phases renforcements en premier</i>	86
4.29	<i>Déformation macroscopique uniaxiale : courbe contrainte-déformation - plastification simultanée des phases</i>	87
4.30	<i>Déformation macroscopique uniaxiale : courbe contrainte-déformation- plastification de la phase matrice en premier</i>	88
5.1	<i>Distribution discrète des fibres</i>	93
5.2	<i>Passage de l'élément de référence à l'élément réel</i>	101
5.3	<i>Algorithme pour le milieu multiphasique prenant en compte des fibres élastiques fragiles</i>	107
5.4	<i>Courbe contrainte-déformation : sollicitation de traction en déformation plane</i>	108
5.5	<i>Courbe contrainte-déformation : sollicitation de traction en déformation plane</i>	109
5.6	<i>Maillage de la structure</i>	110
5.7	<i>Résultat numérique : relation moment-courbure</i>	111
5.8	<i>Exemple de distribution de la fonction de pondération ψ ([40])</i>	112
5.9	<i>Illustration de la zone d'interaction</i>	112
5.10	<i>Courbe moment-courbure utilisant le calcul non local</i>	113
5.11	<i>Algorithme de plasticité pour le milieu multiphasique</i>	121
5.12	<i>Courbe contrainte - déformation : déformation macroscopique uniaxiale</i>	122
5.13	<i>Courbe contrainte - déformation : essai de traction en déformation plane</i>	123
5.14	<i>Poinçonnement d'un demi-espace renforcé</i>	123
5.15	<i>Poinçonnement d'un demi espace : zoom sur le maillage au voisinage de la semelle</i>	124
5.16	<i>Poinçonnement d'un demi espace - Courbe de chargement</i>	124

5.17	<i>Poinçonnement d'un demi espace - Courbe de chargement cas les fibres sont élastiques fragiles</i>	125
5.18	<i>Flexion d'une poutre renforcée (matrice élastique fragile et fibres élastoplastiques) - courbe moment-courbure</i>	126
6.1	<i>Construction d'une approche statique par l'intérieur du domaine K</i>	132
6.2	<i>Interprétation géométrique de (6.11) dans l'espace des paramètres de chargement</i>	134
6.3	<i>Essai de compression en déformation plane</i>	136
6.4	<i>Distribution des contraintes dans les phases renforcement</i>	136
6.5	<i>Interprétation géométrique du domaine G^{hom} et de sa fonction d'appui dans l'espace des contraintes</i>	141
6.6	<i>Vecteur unitaire radial</i>	142
6.7	<i>Distribution bidimensionnelle de fibres : représentation géométrique du domaine G^{hom} dans le plan des contraintes principales</i>	144
6.8	<i>Distribution tridimensionnelle : représentation géométrique du domaine G^{hom}</i>	147

Liste des tableaux

1.1	<i>Caractéristiques et propriétés spécifiques de quelques familles de fibres</i>	3
3.1	<i>Schéma dilué et schéma de Mori-Tanaka - Modules élastiques à l'ordre 1 en f^r .</i>	47

Introduction générale

Sommaire

1.1	Introduction	1
1.2	Généralités sur les matériaux à fibres	2
1.3	Une brève revue des méthodes de calcul	4
1.3.1	Méthodes d'homogénéisation	4
1.3.2	Formules simplifiées	6
1.4	Modélisation multiphasique des matériaux renforcés par fibres	7

1.1 Introduction

Tandis que l'emploi des techniques de renforcement de structures s'est largement généralisé et diversifié, les méthodes de calcul et de simulation du comportement de telles structures, par nature composites, exigent encore de nombreux développements, tant sur le plan théorique (recours aux techniques d'homogénéisation), que numérique (méthode des éléments finis). Ainsi, dans le domaine du génie civil, une modélisation qualifiée de multiphasique a été récemment proposée pour les ouvrages en sols renforcés par inclusions linéaires continues souples (terre armée, géotextiles, etc.) ou raides (inclusions "rigides", pieux, etc.). Le développement de ce modèle s'est effectué en plusieurs étapes successives, avec notamment la thèse de B. Sudret (1999) [50], suivie de celles de M. Bennis (2002) [2], G. Hassen (2006) [28] et enfin de Q. Thai Son (2009) [49]. Ces différents travaux ont abouti à l'élaboration d'un code par éléments finis fondé sur cette modélisation, qui a permis de répondre aux exigences d'industriels ou de bureaux d'études confrontés au dimensionnement de ce type d'ouvrage (ANDRA, EdF-SEPTEN, GDS, Projet National ASIRi).

Dans un contexte différent, et à une bien plus petite échelle, d'autres matériaux composites industriels (béton ou plâtres de fibres, sols renforcés par fibres courtes, etc.), et certains biomatériaux (tissus osseux), présentent par bien des aspects, des caractéristiques microstructurales tout à fait semblables à celles des sols renforcés. Ils sont en effet constitués d'une matrice renforcée par des fibres plus ou moins longues. L'idée directrice

du travail proposé dans le cadre de cette thèse est d'explorer les possibilités d'étendre le champ d'application du modèle multiphasique, et de situer la méthode de calcul élaborée sur la base de ce modèle par rapport à d'autres techniques d'homogénéisation, tels que les schémas d'estimation déjà utilisés pour ce type de matériaux (thèse de J. Sanahuja (2008) [47] et A. Fritsch (2009) [25]).

Ce chapitre introductif débute par une présentation rapide des matériaux renforcés par fibres, suivie de celle de leurs avantages par rapport aux matériaux traditionnels. La deuxième partie est ensuite consacrée à la présentation des méthodes de calcul couramment utilisées par les ingénieurs ou faisant l'objet de recherches actuelles. On distingue deux grandes familles, à savoir les méthodes analytiques basées sur des techniques d'homogénéisation et les approches numériques de type calcul par éléments finis. La description de ces différentes méthodes de calcul et la difficulté à les mettre en œuvre sont également présentées. Enfin, cette étude bibliographique s'achève par l'exposé de l'objectif de ce mémoire dont on décrit le plan général.

1.2 Généralités sur les matériaux à fibres

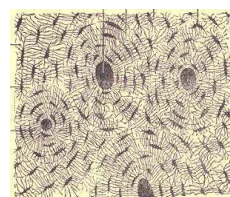
Les matériaux renforcés par fibres sont aujourd'hui principalement utilisés industriellement dans de nombreux domaines (aéronautique, génie civil, automobile, off-shore pétrolier ...) (figure 1.1). Ils sont généralement fabriqués à partir de fibres disjointes orientées aléatoirement ou non au sein d'une matrice homogène qui en assure la liaison.



a) Béton de fibres



b) Plâtre de fibres



c) Tissus osseux

FIGURE 1.1 – Exemples des matériaux à fibres

Les matrices peuvent être décomposées en des catégories suivantes :

- ◇ Les matrices thermodurcissables, constituées généralement de résines polyesters de condensation ou époxydes.
- ◇ Les matrices thermoplastiques appelées couramment "plastiques".

- ◇ Les matrices thermostables qui sont des résines capables de garder leurs propriétés mécaniques à des températures élevées.
- ◇ Les matrices métalliques.
- ◇ Les matrices minérales tel que la pâte de ciment ou la céramique.

On peut distinguer en général trois grandes familles de fibres :

- ◇ Les fibres métalliques : acier, inox, fonte, etc.
- ◇ Les fibres organiques : polyamide, polypropylène, acrylique, aramide, carbone, etc.
- ◇ Les fibres minérales : verre, wollastonite, basalte, mica, etc.

	Masse volumique (en g/cm^3)	Diamètre moyen (en μm)	Résistance à la traction (en N/mm^2)	Module d'élasticité (en GPa)	Allongement à la rupture (en %)
Fibres métalliques	7,85	50-1000	1000-2500	150-200	3-4
Fibres de verre	2,6	9-15	2000-3000	80	2-3,5
Fibres polypropylène	0,9	>4	500-750	5-10	10-20

TABLEAU 1.1 – *Caractéristiques et propriétés spécifiques de quelques familles de fibres*

Chaque fibre présente des caractéristiques et des propriétés qui lui sont propres (tableau 1.1). Grâce à leurs propriétés mécaniques bien supérieures à celle de la matrice, les fibres ont généralement pour rôle d'améliorer les performances mécaniques globales des matériaux composites. Selon les fibres utilisées et les structures auxquelles elles sont incorporées, ce rôle se traduit par des améliorations relatives à :

- ◇ la résistance mécanique ;
- ◇ la ductilité et la résistance post fissuration ;
- ◇ la déformabilité avant rupture ;
- ◇ la résistance à l'usure ;
- ◇ la tenue au feu.

Les propriétés des matériaux composites résultent des propriétés des matériaux constitutifs, de la distribution et de l'orientation des inclusions, du taux volumique des renforcements, de la nature des interfaces inclusions/matrice, du procédé de fabrication... Bien que leur coût soit plus élevé que celui des matériaux traditionnels, ils peuvent apporter à leurs utilisateurs des avantages importants :

- ◇ L'excellent rapport masse/rigidité/résistance par rapport aux matériaux homogènes.

- ◇ La conception de matériaux au "juste" besoin, c'est-à-dire présentant des propriétés élevées uniquement dans les axes de sollicitation pour obtenir des gains de masse supplémentaires.
- ◇ Le dimensionnement de structures ayant des propriétés particulières (par exemple : matériaux à très faibles coefficients de dilatation thermique) ou à mémoire de forme (tels que éléments ondulés pour la construction des planchers).
- ◇ L'utilisation de matériaux multifonctionnels ayant des fonctions structurales, mais aussi d'autres telles que de bonnes propriétés acoustiques, bonne résistance au feu.
- ◇ La sensibilité nettement moindre à la fatigue, en comparaison à des matériaux métalliques.

1.3 Une brève revue des méthodes de calcul

1.3.1 Méthodes d'homogénéisation

La détermination des propriétés mécaniques des matériaux renforcés par fibres à partir des caractéristiques mécaniques de l'échelle microscopique (matrice et fibre) est historiquement la première voie retenue. La méthode d'homogénéisation consiste à substituer un milieu fortement hétérogène par un milieu fictif homogène, que l'on souhaite "équivalent" dans une gamme de chargements la plus large possible. Ce milieu homogène se comporte alors "en moyenne" comme le milieu hétérogène à condition de mesurer les propriétés mécaniques sur une échelle grande devant la taille des hétérogénéités. Plusieurs approches analytiques basées sur des techniques d'homogénéisation notamment sur le modèle d'Eshelby, ont été développées dans la littérature (Hashin et Strikmann (1963) [19]; Hill(1965) [31]; Halpin et Tsai (1969) [20]; Mori-Tanaka (1973) [17]; Hashin (1983) [27]; Torquato (1991) [53]; Tsai (1992) [54]...).

Dans le cas d'un composite périodique, les propriétés effectives du matériau composite peuvent être déterminées en utilisant la méthode d'homogénéisation périodique. La base théorique de cette méthode peut être trouvée dans Bensoussan et al. (1978) [1], Sanchez-Palencia (1980) [48] et Kalamkarov (1992) [35]. La méthode d'homogénéisation périodique est mathématiquement rigoureuse. D'autres méthodes d'homogénéisation basées sur la solution d'Eshelby sont utilisées pour l'estimation des propriétés des composites à fibres aléatoirement distribuées, les fibres étant, dans ces méthodes, modélisées par des inclusions ellipsoïdales.

Bornes

En élasticité linéaire, l'application des deux principes du minimum de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire permet l'obtention de bornes des modules d'élasticité. La mise en œuvre de ces deux principes variationnels utilisant un champ de déformation homogène et un champ de contrainte homogène conduit par exemple aux bornes dites de Voigt et de Reuss respectivement ([46]).

Utilisation des méthodes d'homogénéisation numériques

La méthode des éléments finis constitue l'une des méthodes numériques utilisées pour l'évaluation du comportement macroscopique des composites à fibres. Les différentes étapes d'une telle approche sont schématisées sur la figure 1.2 :

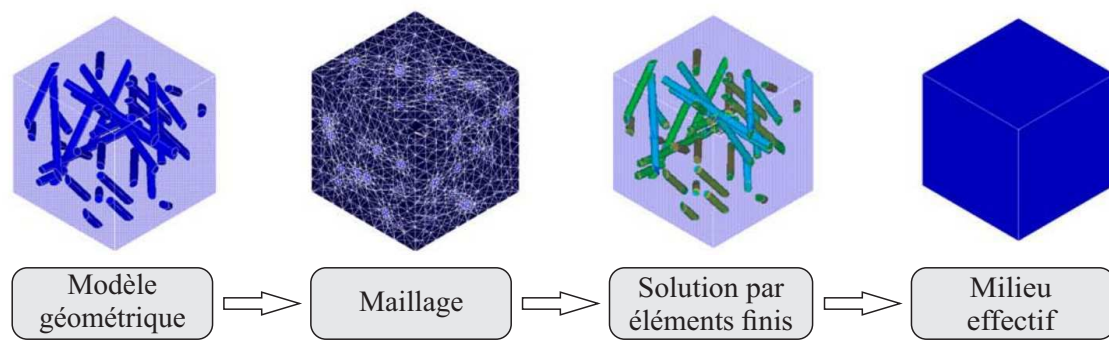


FIGURE 1.2 – *Etapes de modélisation par éléments finis*

Le volume élémentaire représentatif (*v.e.r.*) du matériau hétérogène est tout d'abord identifié et modélisé à l'aide d'un code de calcul par éléments finis, le choix du *v.e.r.* devant respecter les positions et les orientations des fibres. La deuxième étape du processus numérique consiste à mailler le *v.e.r.* Les fibres de renforcement doivent être discrétisées en éléments finis tridimensionnels. Les conditions aux limites et le chargement sont ensuite introduits. Ces conditions sont en général associées à une déformation macroscopique ou une contrainte macroscopique homogène (voir chapitre 3 pour plus d'explications), ou bien en accord avec des conditions de périodicité dans le cas d'un matériau composite périodique. Par un calcul de moyenne des champs microscopiques, les tenseurs de déformation et de contrainte macroscopiques sont évalués, ce qui permet de calculer, pour chaque simulation, une ou plusieurs propriétés élastiques effectives du volume modélisé.

Kari et al. [44] ont ainsi étudié le module effectif d'un composite à fibres courtes

aléatoirement dispersées en utilisant la méthode des éléments finis. Lusti [13] a réalisé une étude similaire, mais pour des fibres longs en calculant les résultats des éléments finis pour les fibres alignées, et en moyennant ensuite le tenseur d'élasticité obtenu sur toutes les orientations possibles.

Récemment, Liu et al (2005) [55] ont développé la méthode des *éléments de frontière accélérée* (BEM) pour les matériaux renforcés par des inclusions "rigides". Cette méthode peut être appliquée pour les modèles à grande échelle. L'interaction des fibres, le mécanisme de transfert de chargement et les propriétés effectives du matériau composite peuvent être étudiés en utilisant le code BEM en faisant varier différents paramètres tels que la fraction volumique, le rapport d'aspect des fibres, la distribution et l'orientation des fibres.

La mise en œuvre d'une technique de résolution par élément finis exige de traiter les inclusions de renforcement tout comme des éléments tridimensionnels, les principales difficultés dans ce genre d'études tiennent :

- ◇ à la taille des inclusions vis-à-vis de la taille de *v.e.r.*, nécessitant un maillage localement très fin en discrétisant séparément les inclusions et la matrice ;
- ◇ au nombre important d'inclusions utilisées conduisant à des systèmes linéaires à résoudre de taille rédhibitoire ;
- ◇ à la modélisation de l'interface matrice/inclusions ;
- ◇ au contraste des propriétés mécaniques des matériaux constituant la matrice et l'inclusion ;
- ◇ au caractère anélastique du comportement de la matrice et des inclusions qui doit forcément être pris en compte pour des calculs réalistes.

1.3.2 Formules simplifiées

L'utilisation des méthodes d'homogénéisation a donné naissance à des formules simplifiées, permettant d'identifier les modules du matériau composite à partir de ceux des différents constituants et de leurs fractions volumiques. Ces expressions qui se présentent en général comme des moyennes arithmétiques ou géométriques des propriétés de la matrice et des fibres peuvent être identifiées à la borne supérieure ou inférieure prédite par la mise en œuvre de l'un des deux principes énergétiques décrits en 1.3.1.

Pour les matériaux à fibres unidirectionnels, Halpin et Tsai ([20]) proposent les expressions suivantes pour le module longitudinal E_L et le coefficient de *Poisson* ν_{LT} en fonction de la fraction volumique des fibres η_f et des modules d'*Young* et coefficients de

Poisson (E_m, ν_m) de la matrice et (E_f, ν_f) de la fibre :

$$E_L = E_f \eta_f + E_m (1 - \eta_f) \quad (1.1)$$

$$\nu_{LT} = \nu_f \eta_f + \nu_m (1 - \eta_f) \quad (1.2)$$

Tandis qu'ils proposent des expressions plus élaborées pour le module transversal E_T , le coefficient de *Poisson* ν_{TT} et le module de cisaillement G_L :

$$M = \frac{1 + \xi_M \alpha \eta_f}{1 - \alpha \eta_f} \text{ avec } \alpha = \frac{M_f - M_m}{M_f + \xi_M M_m} \quad (1.3)$$

où M désigne E_T , ν_{TT} ou G_L tandis que M_m (resp. M_f) est le module ou le coefficient correspondant de la matrice (resp. fibre). ξ_{E_T} , $\xi_{\nu_{TT}}$ et ξ_{G_L} sont des paramètres adimensionnels qui rendent compte de la forme des fibres et de leurs distributions spatiales dont l'identification est expérimentale.

1.4 Vers une modélisation multiphasique des matériaux renforcés par fibres

Le modèle multiphasique a été initialement développé pour le calcul et le dimensionnement des ouvrages en sol renforcé par inclusions. Ce modèle permet de généraliser le point de vue de l'homogénéisation et ses avantages considérables en termes de gain en temps de calcul, à la prise en compte de l'interaction entre la matrice et les inclusions ainsi que des effets de flexion, de cisaillement des renforcements dans le cas des inclusions raides. Le point de départ de cette modélisation consiste à remplacer le réseau d'inclusions réparties de façon discrète au sein de la matrice par une distribution continue interagissant avec le sol.

Le développement de ce modèle s'est effectué en plusieurs étapes successives :

- ◇ La thèse de Sudret (1999) [50] a fondé les bases théoriques générales de la modélisation multiphasique. La mise en œuvre du modèle dans le cadre de la méthode des éléments finis en élasto-plasticité a été développée, ce qui a permis de déboucher sur un outil de calcul permettant de résoudre les problèmes plans (déformations planes ou conditions axisymétriques), sous l'hypothèse d'*adhérence parfaite* et dans le cas où ne sont pris en compte que les efforts de traction-compression dans les renforcement (inclusions "souples").
- ◇ La thèse de Bennis (2002) [2] a permis d'étendre le domaine d'application du modèle multiphasique à la prise en considération d'une loi d'interaction élasto-plastique entre

la matrice et les renforts supposés "souples".

- ◇ La thèse de Hassen (2006) [28] a consisté à étendre le modèle au cas des structures renforcées par des inclusions "raides" ou "rigides" (des radiers des fondations sur pieux par exemple), pour lesquelles les composantes de flexion et de cisaillement jouent un rôle prépondérant dans le comportement de la structure, et doivent de ce fait être pris en compte. L'implémentation numérique du modèle, sous l'hypothèse d'*adhérence parfaite*, a donné lieu à la mise au point d'un outil de calcul pour les problèmes plans prenant en compte le comportement élasto-plastique des matériaux.
- ◇ Enfin, la thèse de Thai Son (2009) [49] dont l'objectif est l'extension du modèle multiphasique à la prise en compte de l'interaction entre les renforcements et le sol environnant. On distingue deux types d'interaction : une interaction volumique qui constitue l'action volumique mutuelle entre la matrice et la phase renforcement et une interaction surfacique qui régit les mécanisme de transfert de charge à la phase renforcement.

Le présent travail vise à formuler une modélisation multiphasique adaptée à la description du comportement macroscopique de matériaux dont la microstructure est formée de fibres orientées de façon continue au sein d'une matrice, ainsi que le développement d'un outil de calcul dédié à la simulation du comportement anélastique de telles structures.

Plus précisément, le présent mémoire est organisé comme suit :

Le chapitre 2 présente la construction du modèle multiphasique pour la modélisation des matériaux à fibres par la méthode des puissances virtuelles. Une démarche analogue à celle présentée par Sudret ([50]) conduit à la définition des efforts intérieurs par phase ainsi qu'aux variables de déformation associées. Les lois de comportement sont construites en utilisant le cadre classique de la thermodynamique.

Le chapitre 3 présente des approches d'homogénéisation classiques qui sont par la suite mises en œuvres pour identifier le comportement macroscopique des composites à fibres. La comparaison des différents résultats montre que les modules effectifs estimés par le schéma dilué et celui de Mori-Tanaka coïncident avec ceux obtenus par le modèle multiphasique dans le cas limite d'une très faible valeur de la fraction volumique de renforcement et d'un fort contraste des propriétés mécaniques de la matrice et des fibres.

On introduit au chapitre 4 des lois de comportement anélastiques pour les fibres

et la matrice. Le cas d'un composite à matrice élasto-plastique renforcée par des fibres élastiques fragiles, tels que les sols renforcés par des fibres ainsi que le cas d'un composite à matrice élastique fragile renforcée par des fibres élasto-plastiques (cas du béton de fibres) sont étudiés. Différentes solutions analytiques sont développées et utilisées au chapitre 5 comme solutions de référence pour la validation des outils numériques.

On s'intéresse au chapitre 5 à la mise en œuvre numérique du modèle multiphasique dans le cadre de la méthode des éléments finis. Un code de calcul a été ainsi développé et validé, permettant de prendre en compte un comportement élastique fragile ou élasto-plastique des fibres et de la matrice.

Le dernier chapitre est enfin consacré à l'estimation du critère de résistance des composites à matrice et fibres ductiles. Les approches statique et cinématique du calcul à la rupture sont mises en œuvre pour approcher respectivement par l'intérieur et l'extérieur le critère de résistance macroscopique du composite.

* *

*

Modèle multiphasique des matériaux à fibres en élasticité linéaire

Sommaire

2.1	Introduction	13
2.2	Construction du modèle multiphasique de matériau à fibres	13
2.2.1	Méthode des puissances virtuelles	13
2.2.2	Description cinématique du milieu multiphasique	14
2.2.3	Expressions des puissances virtuelles	15
2.2.4	Mise en œuvre du principe des puissances virtuelles	19
2.3	Elasticité du milieu multiphasique	22
2.3.1	Déformations du milieu multiphasique	22
2.3.2	Thermodynamique du milieu multiphasique	23
2.3.3	Comportement élastique	25
2.3.4	Comportement élastique linéaire sous l'hypothèse d' <i>adhérence parfaite</i>	27
2.3.5	Lien avec l'échelle microscopique. Détermination des caractéristiques mécaniques élastiques des différentes phases	29
2.4	Evaluation du comportement global du matériau renforcé par fibres	31
2.4.1	Cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres	31
2.4.2	Cas d'une distribution bidimensionnelle de fibres	33
2.5	Conclusions	34

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter la construction du modèle multiphasique destiné à appréhender le comportement des matériaux à fibres dans le cadre d'un comportement élastique linéaire de tous les constituants. D'une manière tout à fait analogue aux travaux de Sudret et de Buhan([18]) et Sudret ([50]), la méthode des puissances virtuelles a été adoptée pour la construction du modèle. Elle aboutit à la représentation des efforts intérieurs par phase, ainsi qu'aux équations d'équilibre et conditions aux limites.

Le comportement élastique est ensuite formulé, aboutissant à une relation linéaire entre contrainte et déformation macroscopiques. Par ailleurs, l'hypothèse d'*adhérence parfaite* entre phases a été adoptée aboutissant à de simples relations de localisation des contraintes et déformations.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'évaluation du comportement macroscopique et plus précisément les tenseurs des modules élastiques $\mathbb{C}$ et de souplesse $\mathbb{S}$ de matériaux constitués d'une matrice et d'une distribution continue de fibres. Deux configurations ont été étudiées : celle d'une distribution isotrope tridimensionnelle et celle d'une distribution isotrope plane dont les comportements macroscopiques sont isotrope et isotrope transverse respectivement.

2.2 Construction du modèle multiphasique de matériau renforcé par fibres

2.2.1 Méthode des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles est un principe fondamental en mécanique, qui exprime sous forme dualisée l'équilibre d'un système. L'application de ce principe qui fait appel à l'intuition au niveau de la cinématique du système étudié, va nous permettre de construire le modèle mécanique pour le matériau renforcé par fibres. La méthode des puissances virtuelles comprend plusieurs étapes successives que l'on va présenter brièvement(voir [46]).

- ◇ On procède tout d'abord à la définition géométrique du système mécanique $\mathcal{S}$ et de ses sous-systèmes $\mathcal{S}'$.

- ◇ On choisit l'espace vectoriel $\mathcal{U}$ des mouvements virtuels (m.v) notés $\widehat{\mathcal{U}}$. Cet espace vectoriel que l'on va considérer pour la modélisation mécanique du système doit contenir les mouvements virtuels rigidifiant (m.v.r) le système et ses mouvements réels.
- ◇ Sur cet espace vectoriel, on postule les expressions des formes linéaires continues de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $\mathcal{P}'_{(int)}(\widehat{\mathcal{U}})$ et extérieurs $\mathcal{P}'_{(ext)}(\widehat{\mathcal{U}})$, ainsi que celle des quantités d'accélération $\mathcal{A}'(\widehat{\mathcal{U}})$ pour un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$.

On écrit le principe des puissances virtuelles :

- La puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant est nulle :

$$\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \quad \forall \widehat{\mathcal{U}} \text{ m.v.r}, \quad \mathcal{P}'_{(int)}(\widehat{\mathcal{U}}) = 0 \quad (2.1)$$

- La puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle des efforts intérieurs et extérieurs pour tout mouvement virtuel :

$$\text{en référentiel galiléen } \mathcal{R}, \quad \forall \widehat{\mathcal{U}} \text{ m.v.}, \quad \mathcal{A}'(\widehat{\mathcal{U}}) = \mathcal{P}'_{(int)}(\widehat{\mathcal{U}}) + \mathcal{P}'_{(ext)}(\widehat{\mathcal{U}}) \quad (2.2)$$

En utilisant les deux énoncés de ce principe on peut exprimer la forme des efforts intérieurs et trouver les équations du mouvement ainsi que les conditions aux limites. On va maintenant appliquer cette méthode à la modélisation du matériau renforcé par fibres.

2.2.2 Description cinématique du milieu multiphasique

On considère un volume Ω d'un matériau composite constitué d'un milieu continu au sein duquel on vient disposer des fibres de renforcement linéaires orientées de façon continue dans toutes les directions de l'espace. Chaque direction de renforcement est repérée par le vecteur unitaire $\underline{e}_r$ et l'abscisse curviligne le long de cette direction est représenté par s^r . La description d'un tel milieu composite, à l'échelle *microscopique*, est donnée sur la figure 2.1 a.

La modélisation multiphasique d'un tel milieu consiste à homogénéiser séparément la matrice et les familles de fibres de façon à avoir un milieu multiphasique où en tout point géométrique une phase matrice et une infinité continue de phases renforcement sont en interactions mutuelles. Ces phases renforcement décrivent les familles d'inclusions de renforcement regroupant chacune l'ensemble des fibres ayant les mêmes propriétés et la même orientation.

L'expression *milieu multiphasique* correspond au modèle de milieu équivalent devant reproduire le comportement mécanique du matériau réel. Un sous-système $\mathcal{S}'$ est

dit *multiphasique* s'il est constitué de toutes les particules de toutes les phases contenues dans un volume Ω' et un sous-système $\mathcal{S}'^j$ est dit *monophasique* s'il est constitué des seules particules de la phase j (matrice ou une phase renforcement quelconque).

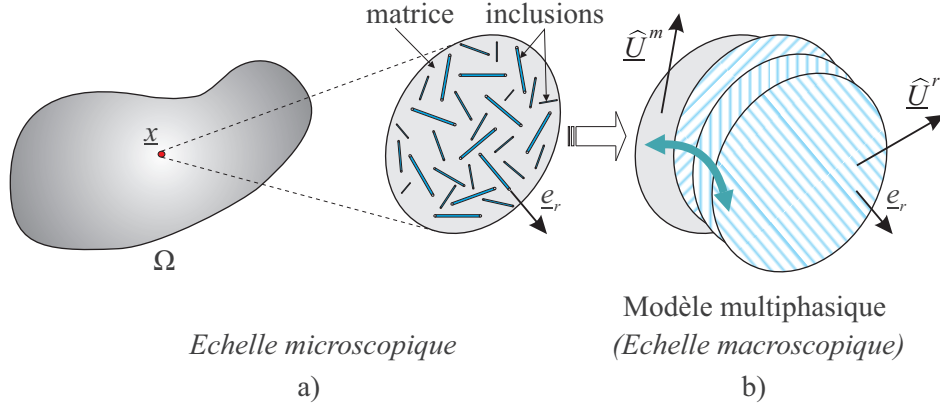


FIGURE 2.1 – Description du matériau renforcé aux échelles microscopique et macroscopique

A l'échelle macroscopique, on définit un mouvement virtuel du milieu multiphasique par la donnée des champs de vitesse relatifs à la phase matrice $\hat{U}^m$ et à l'ensemble des phases renforcement $\{\hat{U}^r\}$ (figure 2.1 b). Ces champs sont supposés indépendants, continus et continûment différentiables sur Ω . L'ensemble de ces mouvements virtuels noté $\hat{U}$ forme un espace vectoriel $\mathcal{U}$ qui contient notamment les mouvements réels du système :

$$\hat{U}(\underline{x}) = \left\{ \hat{U}^m(\underline{x}); \{\hat{U}^r(\underline{x})\} \right\} \quad (2.3)$$

2.2.3 Expressions des puissances virtuelles

Le modèle se construit par la méthode des puissances virtuelles en choisissant les différentes quantités intervenant dans l'expression du principe des puissances virtuelles. Ces choix sont guidés par les caractéristiques mécaniques dont on souhaite rendre compte. Comme on l'a vu dans le chapitre introductif, la distribution des directions des fibres de renforcement est continue et isotrope dans l'espace. On fait l'hypothèse que la valeur d'une quantité mécanique Q^r au point $\underline{x}$, relative à toutes les phases renforcement s'obtient par intégration sur une demi-sphère unité ω de son homologue q^r , au même point $\underline{x}$, correspondant à la phase renforcement :

$$Q^r(\underline{x}) = \int_{\omega} q^r(\underline{x}) d\omega \quad (2.4)$$

où $d\omega$ désigne l'angle solide élémentaire (figure 2.2) qui entoure la direction de la fibre,

déterminé par :

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad (2.5)$$

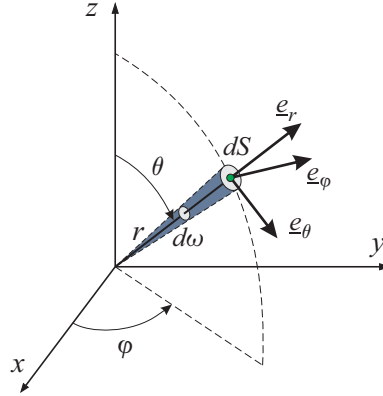


FIGURE 2.2 – Angle solide d'une surface infinitésimale

2.2.3.1 Puissance virtuelle des quantités d'accélération

On exprime la puissance virtuelle des quantités d'accélération sur tout sous-système par l'intégrale suivante :

$$\mathcal{A}'(\widehat{\mathbb{U}}) = \int_{\Omega'} \left\{ \rho^m(\underline{x}) \underline{\gamma}^m(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \int_{\omega} \rho^r(\underline{x}) \underline{\gamma}^r(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \, d\omega \right\} d\Omega' \quad (2.6)$$

où $\underline{\gamma}^j(\underline{x})$ désigne l'accélération de la particule de la phase j au point $\underline{x}$

2.2.3.2 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

La puissance virtuelle des efforts intérieurs est déterminée par intégration d'une densité volumique sur tout sous-système occupant un volume Ω' . Cette quantité contient les termes associés à chacune des phases et les termes d'interaction entre les phases renforcement et la phase matrice. On suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les phases renforcement.

◇ **Phase matrice** : Etant donné que les matériaux considérés présentent une fraction volumique de renforcement très faible, on peut considérer que la matrice du matériau renforcé est un *milieu continu* de Cauchy et on postule classiquement que la densité de

puissance virtuelle des efforts intérieurs dépend linéairement du champ de vitesse et de ses dérivées premières en $\underline{x}$:

$$p'_{(int)}{}^m(\widehat{\mathbf{U}}(\underline{x})) = - \left(\underline{\underline{A}}^m(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{\mathbf{U}}}^m(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \widehat{\underline{\mathbf{U}}}^m(\underline{x}) \right) \quad (2.7)$$

- ◇ **Phase renforcement** : Les fibres de renforcement étant linéaires, élancées et de faible section, les efforts de traction-compression sont prépondérants et on peut négliger les effets de flexion et de cisaillement.

Les efforts de traction-compression ne travaillant que dans la déformation axiale, on postule pour la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs de la phase renforcement représentant la famille de fibre de direction $\underline{e}_r$, une forme linéaire du champ de vitesse et de sa dérivée le long de la direction de renforcement $\underline{e}_r$:

$$\begin{aligned} p'_{(int)}{}^r(\widehat{\mathbf{U}}(\underline{x})) &= - \left(\underline{\underline{A}}^r(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{\mathbf{U}}}^r(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x}) \cdot \frac{d\widehat{\underline{\mathbf{U}}}^r(\underline{x})}{ds^r} \right) \\ &= - \left(\underline{\underline{A}}^r(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{\mathbf{U}}}^r(\underline{x}) + (\underline{e}^r \otimes \underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x})) : \underline{\underline{\text{grad}}} \widehat{\underline{\mathbf{U}}}^r(\underline{x}) \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

- ◇ **Interaction** : Supposant enfin que l'interaction entre chaque phase de renforcement et la matrice soit ponctuelle, on postule l'expression :

$$p'_{(int)}{}^I(\widehat{\mathbf{U}}(\underline{x})) = - \left(\underline{\underline{I}}^m(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{\mathbf{U}}}^m(\underline{x}) + \int_{\omega} \underline{\underline{I}}^r(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{\mathbf{U}}}^r(\underline{x}) d\omega \right) \quad (2.9)$$

L'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs d'un sous-système $\mathcal{S}'$ dépend de son caractère mono- ou multiphasique. Pour un sous-système $\mathcal{S}'^j$ qui occupe un volume géométrique Ω' , on intègre simplement la densité de puissance virtuelle correspondante :

$$\mathcal{P}'_{(int)}{}^j(\widehat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega'} p'_{(int)}{}^j(\widehat{\mathbf{U}}) d\Omega' \quad (2.10)$$

En ce qui concerne un sous-système $\mathcal{S}'$ multiphasique occupant le volume Ω' , la puissance des efforts intérieurs est obtenue en faisant la somme des contributions de chaque phase

et les termes d'interaction entre phases :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}'_{(int)}(\widehat{\mathbb{U}}) = & - \int_{\Omega'} \left\{ \underline{A}^m(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \right\} d\Omega' \\
& - \int_{\Omega'} \left\{ \int_{\omega} \left(\underline{A}^r(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) + (\underline{e}^r \otimes \underline{\sigma}^r(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x})) \right) d\omega \right\} d\Omega' \\
& - \int_{\Omega'} \left\{ \underline{I}^m(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \int_{\omega} \underline{I}^r(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) d\omega \right\} d\Omega' \quad (2.11)
\end{aligned}$$

2.2.3.3 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs s'exerçant sur un sous-système *monophasique* $\mathcal{S}'^j$ peuvent être de trois types :

- ◇ Des forces de volume correspondant à des actions à distance exercées par l'extérieur du système multiphasique complet $\mathcal{S}$, caractérisées par une densité volumique $\rho^j(\underline{x})\underline{F}^j(\underline{x})$.
- ◇ Des efforts de contact définis sur le pourtour $\partial\Omega'$ par une densité surfacique $\underline{T}_{\Omega'}^j(\underline{x})$, exercés sur $\mathcal{S}'^j$ par les particules de la même phase, mais extérieurs au sous-système considéré.
- ◇ Des efforts d'interaction avec les autres phases définis par une densité volumique $\underline{I}^m$ (resp. $\underline{I}^r$) dans le cas où le sous-système *monophasique* constitué de particules la phase matrice (resp. une phase renforcement).

L'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs à tout sous-système *monophasique* $\mathcal{S}'^j$, s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}'^j_{(ext)}(\widehat{\mathbb{U}}) = & \int_{\Omega'} \rho^j(\underline{x})\underline{F}^j(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^j(\underline{x}) d\Omega' + \int_{\partial\Omega'} \underline{T}_{\Omega'}^j(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^j(\underline{x}) dS' \\
& + \int_{\Omega'} \underline{I}^j \cdot \widehat{\underline{U}}^j(\underline{x}) d\Omega' \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Pour le cas d'un sous-système *multiphasique*, les efforts d'interaction jouent le rôle d'efforts intérieurs, dont l'expression de la puissance virtuelle est donnée par l'équation (2.9). La

puissance virtuelle des efforts extérieurs à tout sous-système *multiphasique* se réduit donc à :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_{(ext)}(\widehat{\mathbb{U}}) &= \int_{\Omega'} \left\{ \rho^m(\underline{x}) \underline{F}^m(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \int_{\omega} \rho^r(\underline{x}) \underline{F}^r(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) d\omega \right\} d\Omega' \\ &+ \int_{\partial\Omega'} \left\{ \underline{T}_{\Omega'}^m(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \int_{\omega} \underline{T}_{\Omega'}^r(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) d\omega \right\} dS' \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2.4 Mise en œuvre du principe des puissances virtuelles

On applique le premier énoncé du principe des puissances virtuelles qui exprime la nullité de la puissance des efforts intérieurs dans tout *mouvement virtuel rigidifiant* un système ou sous-système quelconque. Pour un mouvement de translation d'un sous-système *monophasique* $\mathcal{S}^j$:

$$\widehat{\mathbb{U}}(\underline{x}) = \left\{ \underline{0}, \dots, \widehat{\underline{U}}^j(\underline{x}) = \underline{\widehat{U}}_0, \underline{0}, \dots \right\} \quad (2.14)$$

on obtient compte-tenu de (2.7) et (2.8) :

$$\forall \Omega' \in \Omega, \quad \forall \underline{\widehat{U}}_0 \quad \int_{\Omega'} \underline{A}^m(\underline{x}) \cdot \underline{\widehat{U}}_0 d\Omega' = \int_{\Omega'} \underline{A}^r(\underline{x}) \cdot \underline{\widehat{U}}_0 d\Omega' = 0 \quad (2.15)$$

on en déduit :

$$\underline{A}^m(\underline{x}) = \underline{A}^r(\underline{x}) = \underline{0} \quad (2.16)$$

On s'intéresse maintenant à un mouvement virtuel de rotation, défini par :

$$\widehat{\mathbb{U}}(\underline{x}) = \left\{ \underline{0}, \dots, \widehat{\underline{U}}^j(\underline{x}) = \underline{\widehat{\Omega}}_0 \wedge \underline{x}, \underline{0}, \dots \right\} \quad (2.17)$$

Dans ce cas $\underline{\underline{\text{grad}}} \widehat{\underline{U}} = \underline{\underline{\widehat{\Omega}}}_0$ est un tenseur antisymétrique du second ordre et on obtient compte-tenu de (2.7) et (2.8) :

$$\forall \Omega' \in \Omega, \quad \forall \underline{\underline{\widehat{\Omega}}}_0 \quad \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\widehat{\Omega}}}_0 d\Omega' = \int_{\Omega'} (\underline{e}^r \otimes \underline{\sigma}^r(\underline{x})) : \underline{\underline{\widehat{\Omega}}}_0 d\Omega' = 0 \quad (2.18)$$

Il en résulte la symétrie du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x})$ ainsi que celle de $(\underline{e}^r \otimes \underline{\sigma}^r(\underline{x}))$, la seconde condition signifiant que :

$$\underline{\sigma}^r = \sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \quad (2.19)$$

On considère finalement pour un sous-système multiphasique $\mathcal{S}'$ quelconque un mouvement virtuel de translation : $\widehat{\mathbb{U}}(\underline{x}) = \{\widehat{\underline{U}}_0, \dots, \widehat{\underline{U}}_0\}$. Il résulte de (2.11) :

$$\forall \Omega' \in \Omega, \quad \forall \widehat{\underline{U}}_0 \quad \int_{\Omega'} \left\{ \underline{I}^m(\underline{x}) + \int_{\omega} \underline{I}^r(\underline{x}) d\omega \right\} \cdot \widehat{\underline{U}}_0 d\Omega' = 0 \quad (2.20)$$

d'où $\underline{I}^m(\underline{x}) + \int_{\omega} \underline{I}^r(\underline{x}) d\omega = 0$, de sorte que l'on peut réécrire (2.9) sous la forme :

$$p'_{(int)}(\widehat{\mathbb{U}}(\underline{x})) = - \int_{\omega} \underline{I}^r(\underline{x}) \cdot \left(\widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) - \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \right) d\omega \quad (2.21)$$

Cette expression fait donc intervenir les vitesses relatives des phases renforcement par rapport à la phase matrice. L'expression (2.11) devient finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_{(int)}(\widehat{\mathbb{U}}) = & - \int_{\Omega'} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \int_{\omega} \left(\underline{\sigma}^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r : \underline{\underline{\text{grad}}} \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \right) d\omega \right\} d\Omega' \\ & - \int_{\Omega'} \left\{ \int_{\omega} \underline{I}^r(\underline{x}) \cdot \left(\widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) - \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \right) d\omega \right\} d\Omega' \end{aligned} \quad (2.22)$$

On applique maintenant le second énoncé du principe des puissances virtuelles à des mouvements virtuels quelconques. On reporte (2.6), (2.13) et (2.22) dans (2.2) et on regroupe les termes associés à chaque champ de vitesse virtuelle $\widehat{\underline{U}}^j(\underline{x})$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \left\{ -\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \left[\rho^m(\underline{x})(\underline{F}^m(\underline{x}) - \underline{\gamma}^m(\underline{x})) + \int_{\omega} \underline{I}^r(\underline{x}) d\omega \right] \cdot \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \right\} d\Omega' \\ + \int_{\omega} \left\{ \int_{\Omega'} \left[(-\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{\text{grad}}} \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) + [\rho^r(\underline{x})(\underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{\gamma}^r(\underline{x}) - \underline{I}^r(\underline{x}))] \cdot \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \right] d\Omega' \right\} d\omega \\ + \int_{\partial\Omega'} \underline{T}_{\Omega'}^m(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) dS' + \int_{\omega} \left\{ \int_{\partial\Omega'} \underline{T}_{\Omega'}^r(\underline{x}) \cdot \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) dS' \right\} d\omega = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

En appliquant le théorème de la divergence à la puissance des efforts intérieurs de chaque

phase, on obtient alors : $\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \forall \widehat{\mathbf{U}} \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega'} \left\{ \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) + \rho^m(\underline{x})(\underline{F}^m(\underline{x}) - \underline{\gamma}^m(\underline{x})) + \int_{\omega} \underline{I}^r(\underline{x}) d\omega \right\} \cdot \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) d\Omega' \\
& + \int_{\omega} \left\{ \int_{\Omega'} [\operatorname{div} (\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r(\underline{x})(\underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{\gamma}^r(\underline{x})) - \underline{I}^r(\underline{x})] \cdot \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) d\Omega' \right\} d\omega \\
& + \int_{\partial\Omega'} [\underline{T}_{\Omega'}^m(\underline{x}) - \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x})] \cdot \widehat{\underline{U}}^m(\underline{x}) dS' \\
& + \int_{\omega} \left\{ \int_{\partial\Omega'} [\underline{T}_{\Omega'}^r(\underline{x}) - \sigma^r(\underline{x})(\underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r] \widehat{\underline{U}}^r(\underline{x}) dS' \right\} d\omega = 0 \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Les champs de vitesse de chaque phase constituant un mouvement virtuel $\widehat{\mathbf{U}}$ étant indépendants, on peut donc annuler séparément les termes associés à chaque phase. Pour chaque phase, on considère tout d'abord des champs de vitesse nuls sur la frontière $\partial\Omega'$, la nullité en tout point de l'intégrande associé à l'intégrale volumique donne les équations d'équilibre par phase et la nullité de l'intégrale de surface pour des champs quelconques conduit aux conditions aux limites qui s'écrivent pour la phase matrice et les phases renforcement séparément :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) + \rho^m(\underline{x})(\underline{F}^m(\underline{x}) - \underline{\gamma}^m(\underline{x})) + \int_{\omega} \underline{I}^r(\underline{x}) d\omega = \underline{0} \quad (2.25)$$

$$\forall \Omega' \subset \Omega, \forall \underline{x} \in \Omega' :$$

$$\operatorname{div} (\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r(\underline{x})(\underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{\gamma}^r(\underline{x})) - \underline{I}^r(\underline{x}) = \underline{0} \quad (2.26)$$

et les conditions aux limites par phase :

$$\underline{T}_{\Omega'}^m(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad (2.27)$$

$$\underline{T}_{\Omega'}^r(\underline{x}) = \sigma^r(\underline{x})(\underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r \quad (2.28)$$

Les efforts intérieurs sont décrits par le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^m$ dans la phase matrice, un champ de contraintes uniaxiales $\sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$ pour chacune des phases de renforcement. On définit successivement pour tout point $\underline{x}$, les quantités suivantes :

$$\rho \underline{F} = \rho^m \underline{F}^m + \int_{\omega} \rho^r \underline{F}^r d\omega \quad , \quad \underline{T} = \underline{T}^m + \int_{\omega} \underline{T}^r d\omega \quad , \quad \rho \underline{\gamma} = \rho^m \underline{\gamma}^m + \int_{\omega} \rho^r \underline{\gamma}^r d\omega \quad (2.29)$$

et

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \int_{\omega} \sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\omega \quad (2.30)$$

Par sommation des équations (2.25), (2.26), (2.27) et (2.28), on obtient un système d'équations globales :

$$\forall \Omega' \subset \Omega, \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) + \rho(\underline{x})(\underline{F}(\underline{x}) - \gamma(\underline{x})) = \underline{0} & \forall \underline{x} \in \Omega' \\ \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \partial\Omega' \end{cases} \quad (2.31)$$

On reconnaît dans (2.31) l'équation d'équilibre et les conditions aux limites obtenues pour un milieu continu de *Cauchy* classique. Dans ce contexte, le tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}$ représente le tenseur des contraintes *totales*, tandis que $\underline{\underline{\sigma}}^m$ et σ^r désignent les contraintes *partielles* respectivement dans la matrice et dans chaque phase de renforcement. Les efforts d'interaction, qui sont des efforts intérieurs au système multiphasique, n'apparaissent pas dans ces équations.

2.3 Elasticité du milieu multiphasique

2.3.1 Déformations du milieu multiphasique

On introduit un champ de déplacement pour chacune des phases : $\underline{\xi}^m$ pour la phase matrice et ξ_i^r en ce qui concerne la phase renforcement i . Sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP), les variables de déformations sont celles qui apparaissent en dualité des variables décrivant les efforts intérieurs dans l'expression du travail de déformation du système $\mathcal{W}'_{def}(\underline{\xi}^m, \{\underline{\xi}^r\})$. En substituant dans l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (2.22) les déplacements $\underline{\xi}^j(\underline{x})$ aux vitesses virtuelles $\widehat{\underline{U}}^j$, on obtient au signe près l'expression du travail de déformation du système multiphasique :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'_{def}(\underline{\xi}^m, \{\underline{\xi}^r\}) &= \int_{\Omega'} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\xi}^m + \left(\int_{\omega} \sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r : \underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\xi}^r \right) d\omega \right\} d\Omega' \\ &+ \int_{\Omega'} \left\{ \int_{\omega} \underline{I}^r(\underline{x}) \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) d\omega \right\} d\Omega' \end{aligned} \quad (2.32)$$

On définit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^m = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \xi^m + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} \xi^m \right) \quad (2.33)$$

$$\varepsilon^r = (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{\text{grad}}} \xi^r = \frac{\partial(\underline{\xi}^r \cdot \underline{e}_r)}{\partial s^r} \quad (2.34)$$

et compte tenu de la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}^m$, l'expression du travail de déformation peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{W}'_{\text{déf}}(\underline{\xi}^m, \{\underline{\xi}^r\}) = \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m d\Omega' + \int_{\Omega'} \left\{ \int_{\omega} \sigma^r \varepsilon^r d\omega \right\} d\Omega' + \int_{\Omega'} \left\{ \int_{\omega} \underline{I}^r \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) d\omega \right\} d\Omega' \quad (2.35)$$

où la dépendance des champs de contrainte et de déformation du vecteur position $\underline{x}$ a été omise volontairement pour alléger l'écriture. On constate que les variables de déformation du modèle sont le tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}^m$ pour la phase matrice, la déformation axiale ε_i^r pour chaque phase renforcement i et le déplacement relatif $(\underline{\xi}_i^r - \underline{\xi}^m)$ pour l'interaction de chaque phase renforcement i avec la matrice.

2.3.2 Thermodynamique du milieu multiphasique

On se place en régime isotherme et dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus afin d'obtenir le comportement élastique du milieu multiphasique.

Par définition, l'énergie totale W^t d'un système matériel est la somme de son énergie cinétique K et de son énergie interne E :

$$W^t = K + E \quad (2.36)$$

Le premier principe de la thermodynamique est encore appelé loi de conservation de l'énergie. Il stipule que la variation de l'énergie totale d'un système matériel est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs développés sur le système dans son mouvement réel $\mathcal{P}'_{(ext)}(\mathbb{U})$ et de la quantité de chaleur reçue par le système Q par unité de temps :

$$\dot{W}^t = \dot{E} + \dot{K} = \mathcal{P}'_{(ext)}(\mathbb{U}) + \dot{Q} \quad (2.37)$$

où la notation $(\dot{})$ désigne la dérivation par rapport au temps.

L'énergie cinétique totale d'un sous-système multiphasique Ω' s'obtient comme la

somme des énergies cinétiques de chaque phase :

$$K = \int_{\Omega'} \frac{1}{2} \rho^m(\underline{x}) (\underline{U}^m(\underline{x}))^2 d\Omega' + \int_{\omega} \left\{ \int_{\Omega'} \frac{1}{2} \rho^r(\underline{x}) (\underline{U}^r(\underline{x}))^2 d\Omega' \right\} d\omega \quad (2.38)$$

et sa dérivée temporelle vaut donc :

$$\dot{K} = \int_{\Omega'} \rho^m(\underline{x}) \underline{U}^m(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^m(\underline{x}) d\Omega' + \int_{\omega} \left\{ \int_{\Omega'} \rho^r(\underline{x}) \underline{U}^r(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^r(\underline{x}) d\Omega' \right\} d\omega \quad (2.39)$$

qui est égale à la puissance des quantités d'accélération dans le mouvement réel $\mathcal{A}'(\mathbb{U})$.

On introduit maintenant la puissance de déformation $\mathcal{P}'_{\text{déf}}$ qui est liée à la puissance des efforts intérieurs dans le mouvement réel par :

$$\mathcal{P}'_{\text{déf}}(\mathbb{U}) = -\mathcal{P}'_{(\text{int})}(\mathbb{U}) \quad (2.40)$$

En appliquant le principe des puissances virtuelles (2.2) pour un mouvement réel on obtient :

$$\mathcal{P}'_{\text{déf}} = \mathcal{P}'_{(\text{ext})}(\mathbb{U}) - \mathcal{A}'(\mathbb{U}) = \mathcal{P}'_{(\text{ext})}(\mathbb{U}) - \dot{K} \quad (2.41)$$

et en combinant les équations (2.37) et (2.41), on peut identifier le taux de variation d'énergie interne du système est égale à la somme de la puissance de déformation et le taux de chaleur reçue du système :

$$\dot{E} = \mathcal{P}'_{(\text{ext})}(\mathbb{U}) - \dot{K} + \dot{Q} = \mathcal{P}'_{\text{déf}} + \dot{Q} \quad (2.42)$$

Le second principe définit une grandeur intensive positive appelée température absolue et notée T , et postule l'existence d'une fonction thermodynamique extensive S appelée entropie et telle que l'on ait toujours l'inégalité :

$$\dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T} \quad (2.43)$$

L'égalité n'est obtenue que dans le cas particulier des transformations réversibles. On introduit les densités volumiques totales d'énergie interne e , d'entropie s , obtenues par sommation de leur valeur sur chaque phase, la fonction d'état appelé l'énergie libre est

définie par :

$$\Psi = e - Ts \quad (2.44)$$

On en déduit le taux de variation d'énergie interne pour un sous-système multiphasique occupant un volume Ω' :

$$\dot{E} = \int_{\Omega'} (\dot{\Psi} + T\dot{s}) d\Omega' = \int_{\Omega'} \dot{\Psi} d\Omega' + T\dot{S} \quad (2.45)$$

Compte tenu de l'équation (2.42) on obtient :

$$\mathcal{P}'_{\text{déf}} - \int_{\Omega'} \dot{\Psi} d\Omega' = T\dot{S} - \dot{Q} \quad (2.46)$$

En appliquant l'inégalité (2.43), il vient :

$$\mathcal{P}'_{\text{déf}} - \int_{\Omega'} \dot{\Psi} d\Omega' \geq 0 \quad (2.47)$$

Cette expression avec les deux principes de la thermodynamique forment l'inégalité de *Clausius – Duhem* et traduisent la non-négativité de la dissipation intrinsèque. Compte tenu de l'hypothèse des petites perturbations, on en déduit la puissance de déformation pour le milieu multiphasique en substituant les vitesses aux déplacements dans (2.35), soit :

$$\mathcal{P}'_{\text{déf}} = \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}}^m : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^m d\Omega' + \int_{\Omega'} \left\{ \int_{\omega} \sigma^r \dot{\varepsilon}^r d\omega \right\} d\Omega' + \int_{\Omega'} \left\{ \int_{\omega} \underline{I}^r \cdot (\dot{\underline{\xi}}^r - \dot{\underline{\xi}}^m) d\omega \right\} d\Omega' \quad (2.48)$$

2.3.3 Comportement élastique

En supposant que la densité d'énergie libre est argumentée par les seules variables de déformations $(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon^r)$ et qu'elle se décompose additivement sur les différentes phases du système, il vient :

$$\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon^r, \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) = \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \int_{\omega} \psi^r(\varepsilon^r) d\omega + \int_{\omega} \psi^{I,r}(\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) d\omega \quad (2.49)$$

Compte tenu de (2.48), l'inégalité (2.47) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon^r, \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m), \quad & \left(\underline{\underline{\sigma}}^m - \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^m} \right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^m + \int_{\omega} \left(\sigma^r - \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r} \right) \cdot \dot{\varepsilon}^r d\omega \\ & + \int_{\omega} \left(\underline{I}^r - \frac{\partial \psi^{I,r}}{\partial (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m)} \right) \cdot (\dot{\underline{\xi}}^r - \dot{\underline{\xi}}^m) d\omega \geq 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Le comportement élastique du milieu multiphasique se traduit par la réversibilité de ses évolutions, c'est à dire la nullité du taux de dissipation intrinsèque volumique. On considère successivement des évolutions pour lesquelles les "taux de déformation" $(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^m, \dot{\varepsilon}^r, \dot{\underline{\underline{\xi}}}^r - \dot{\underline{\underline{\xi}}}^m)$ sont tous nuls sauf un. On obtient :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}^m \quad (2.51)$$

$$\sigma^r = \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r} \quad (2.52)$$

$$\underline{I}^r = \frac{\partial \psi^{I,r}}{\partial (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m)} \quad (2.53)$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, on adopte une expression quadratique pour chaque densité d'énergie libre :

$$\psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m, \quad \psi^r(\varepsilon^r) = \frac{1}{2} \alpha^r (\varepsilon^r)^2, \quad \psi^{I,r}(\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m) \cdot \underline{\underline{C}}^{I,r} \cdot (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m). \quad (2.54)$$

où $\mathbb{C}^m$ désigne le tenseur des modules élastiques de la phase matrice, α^r est la raideur scalaire pour chaque phase renforcement et $\underline{\underline{C}}^{I,r}$ le tenseur d'interaction. On en déduit les lois de comportement de chaque phase et de l'interaction qui s'écrivent, en supposant que l'état initial est naturel :

◇ phase matrice :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m \quad (2.55)$$

◇ phase renforcement représentant la famille de fibres de direction $\underline{e}_r$:

$$\sigma^r = \alpha^r \varepsilon^r \quad (2.56)$$

◇ interaction matrice/renforcement :

$$\underline{I}^r = \underline{\underline{C}}^{I,r} \cdot (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m) \quad (2.57)$$

On trouve que le comportement élastique linéaire du milieu multiphasique est complètement déterminé par la donnée des comportements élastiques des phases le constituant et de leur interaction.

2.3.4 Comportement élastique linéaire sous l'hypothèse d'adhérence parfaite

L'hypothèse d'adhérence parfaite entre phases se traduit par l'égalité des champs de déplacements de toutes les phases matrice et renforcement, soit :

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \forall i, \quad \underline{\xi}^m(\underline{x}) = \underline{\xi}_i^r(\underline{x}) = \underline{\xi}(\underline{x}) \quad (2.58)$$

On introduit maintenant le tenseur de déformation macroscopique défini par :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi} + \underline{\underline{t}} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}) \quad (2.59)$$

Compte tenu de l'hypothèse d'adhérence parfaite (2.58), on identifie les variables de déformation associées à chaque phase :

◇ phase matrice :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^m = \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2.60)$$

◇ phase renforcement représentant la famille de fibre de direction $\underline{e}_r$:

$$\underline{\epsilon}^r = \frac{\partial(\underline{\xi} \cdot \underline{e}_r)}{\partial s^r} = \underline{\underline{\epsilon}} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \quad (2.61)$$

Les équations (2.55) et (2.56) exprimant la loi de comportement pour chaque phase se réécrivent compte tenu de (2.60) et (2.61) par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\epsilon}}^m = \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2.62)$$

$$\underline{\sigma}^r = \alpha^r \underline{\epsilon}^r = (\alpha^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2.63)$$

En reportant ces relations dans (2.30), il apparaît ainsi que la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ est reliée à la déformation macroscopique par une relation linéaire :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2.64)$$

où le tenseur des modules élastiques du milieu multiphasique $\mathbb{C}$ se décompose additivement en la contribution de la phase matrice et celle de chaque phase de renforcement :

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^m + \int_{\omega} \alpha^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\omega \quad (2.65)$$

Relations de localisation

En supposant que l'état de contraintes macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$ soit connu, on peut calculer directement les contraintes *partielles* par application d'opérateurs de localisations :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \mathbb{L}^m : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.66)$$

$$\sigma^r = \underline{\underline{L}}^r : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.67)$$

Pour déterminer ces opérateurs, on introduit le tenseur des souplesses vérifiant :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbb{S} : \underline{\underline{\Sigma}} \text{ , } \mathbb{S} = (\mathbb{C})^{-1} \quad (2.68)$$

A partir de (2.62), (2.63) et (2.68), on arrive aux expressions suivantes des tenseurs de localisation des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \mathbb{C}^m : (\mathbb{S} : \underline{\underline{\Sigma}}) \implies \mathbb{L}^m = \mathbb{C}^m : \mathbb{S} \quad (2.69)$$

$$\sigma^r = (\alpha^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : (\mathbb{S} : \underline{\underline{\Sigma}}) \implies \underline{\underline{L}}^r = (\alpha^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \mathbb{S} \quad (2.70)$$

En ce qui concerne les déformations, les relations de localisation sont exprimées par (2.60) et (2.61).

Densité énergie libre

Du point de vue énergétique, l'hypothèse d'*adhérence parfaite* implique la nullité des déplacements relatifs entre les phases, l'expression de la densité d'énergie libre devient :

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}^m : \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\epsilon}}^m + \int_{\omega} \frac{1}{2} \alpha^r (\epsilon^r)^2 d\omega \quad (2.71)$$

Compte-tenu de (2.60), (2.61), (2.65) et (2.68), elle s'exprime en fonction du tenseur des modules élastiques ou du tenseur de souplesse du milieu multiphasique par :

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{S} : \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2.72)$$

qui est la forme classique de la densité d'énergie libre d'un milieu continu élastique.

2.3.5 Lien avec l'échelle microscopique. Détermination des caractéristiques mécaniques élastiques des différentes phases

Afin d'identifier les caractéristiques élastiques des phases renforcement et faire le lien entre la contrainte *partielle* σ^r et la contrainte microscopique dans la fibre σ^f , on calcule la résultante $d\underline{R}$ des efforts extérieurs appliqués par une phase renforcement r sur une facette dS de normale $\underline{n}$ (figure 2.3) :

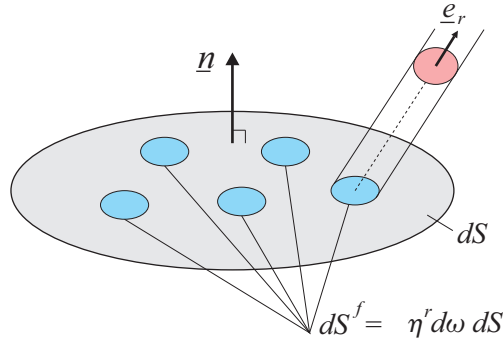


FIGURE 2.3 – Facette dS de normale $\underline{n}$

$$d\underline{R} = (\sigma^r d\omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \underline{n} dS \quad (2.73)$$

La phase renforcement r étant représentative des fibres dont l'orientation $\underline{e}_r$ se trouve dans l'angle solide élémentaire $d\omega$, la section élémentaire cumulée des fibres d'orientation $\underline{e}_r$, traversant la facette dS est alors donnée par :

$$dS^f = \eta^r d\omega dS \quad (2.74)$$

où $\eta^r d\omega$ désigne la fraction volumique des fibres dont l'orientation se trouve dans l'angle solide élémentaire $d\omega$.

La projection dS_0^f de dS^f sur le plan perpendiculaire à la direction $\underline{e}_r$ est donnée par :

$$dS_0^f = dS^f(\underline{n}, \underline{e}_r) = \eta^r d\omega dS(\underline{n}, \underline{e}_r) \quad (2.75)$$

A l'échelle microscopique, la résultante $d\underline{R}$ correspond à la somme des efforts élémentaires exercés sur la surface élémentaire dS par les fibres d'orientation $\underline{e}_r$ se trouvant dans l'angle solide $d\omega$ et représentées par la phase renforcement r , soit :

$$d\underline{R} = (\sigma^f \underline{e}_r) dS_0^f = \sigma^f \eta^r d\omega dS(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \underline{n} \quad (2.76)$$

où σ^f désigne la contrainte axiale dans la fibre de renforcement.

La comparaison des deux expressions (2.73) et (2.76) permet alors d'identifier la relation entre la contrainte macroscopique partielle σ^r et la contrainte microscopique σ^f faisant intervenir la fraction volumique η^r :

$$\sigma^r = \sigma^f \eta^r \quad (2.77)$$

Dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des fibres, la contrainte uniaxiale σ^f peut être reliée à la déformation axiale ε^f de la fibre par :

$$\sigma^f = E^f \varepsilon^f \quad (2.78)$$

où E^f est le module d'Young du matériau constitutif de la fibre.

La déformation axiale de la fibre orientée selon la direction $\underline{e}_r$ est donnée par :

$$\varepsilon^f = \varepsilon^r = \underline{\underline{\varepsilon}} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \quad (2.79)$$

soit, en combinant (2.77), (2.78) et (2.79) :

$$\sigma^r = \eta^r E^f \varepsilon^r = \eta^r E^f (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.80)$$

On retrouve alors la loi de comportement élastique de la phase renforcement r (2.63) où la raideur α^r est identifiée à :

$$\alpha^r = \eta^r E^f \quad (2.81)$$

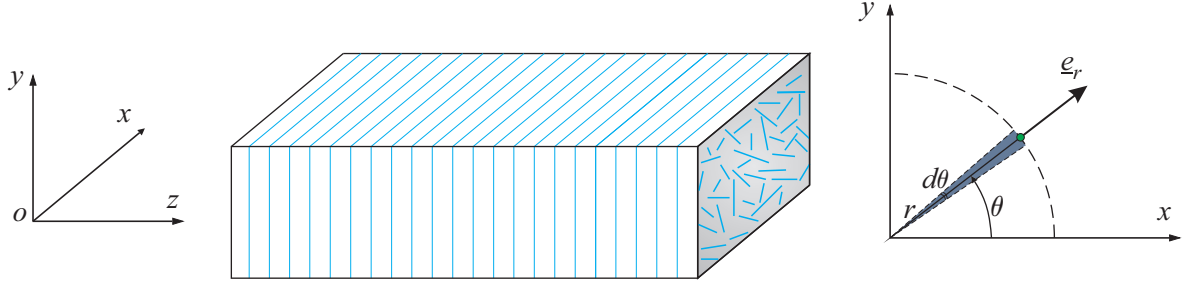
Dans le cas d'une distribution continue et isotrope des fibres, la fraction volumique totale de renforcement f^r est donnée par :

$$f^r = \int_{\omega} \eta^r d\omega = 2\pi \eta^r \quad (\eta^r = c^{te}) \quad (2.82)$$

Il est aussi intéressant de considérer le cas d'une distribution plane et continue des fibres (figure 2.4). Cette situation peut être rencontrée par exemple, pour les plaques composites dont les renforts se trouvent dans le même plan que la plaque.

En repérant chaque point matériel du matériau renforcé par ses coordonnées polaires (r, θ) . Les résultats établis précédemment dans le cas d'une distribution tridimensionnelle restent valables mais il convient de remplacer le terme d'angle solide $d\omega$ par le terme d'angle $d\theta$. Dans ce cas, la fraction volumique totale f^r des fibres de renforcement est liée à η^r par la relation suivante :

$$f^r = \int_0^\pi \eta^r d\theta = \pi \eta^r \quad (\eta^r = c^{te}) \quad (2.83)$$


 FIGURE 2.4 – Distribution continue de fibres dans le plan (Oxy)

2.4 Evaluation du comportement global du matériau renforcé par fibres

2.4.1 Cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres

Le tenseur des modules élastiques global du milieu multiphasique (2.65) s'exprime par :

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^m + \mathbb{C}^r \quad (2.84)$$

où $\mathbb{C}^r$ désigne la contribution des phases renforcement au tenseur d'élasticité :

$$\mathbb{C}^r = \int_{\omega} \alpha^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\omega = \alpha^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.85)$$

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire isotrope de la phase matrice, $\mathbb{C}^m$ est entièrement défini par la donnée des deux coefficients de Lamé λ^m et μ^m :

$$\mathbb{C}^m = \lambda^m \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + 2\mu^m \mathbb{I} \quad (2.86)$$

où $\underline{\underline{I}}$ et $\mathbb{I}$ désignent les tenseurs unitaires d'ordre 2 et 4 respectivement.

Afin de préciser le comportement global, on adopte la notation matricielle de *Voigt* qui exploite les symétries, pour réduire le nombre des composantes considérées. On transforme les tenseurs des contraintes et des déformations en vecteurs colonnes :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \longleftrightarrow \{\Sigma\} = {}^t\{\Sigma_{xx}, \Sigma_{yy}, \Sigma_{zz}, \Sigma_{xy}, \Sigma_{yz}, \Sigma_{xz}\} \quad (2.87)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} \longleftrightarrow \{\epsilon\} = {}^t\{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, 2\epsilon_{xy}, 2\epsilon_{yz}, 2\epsilon_{xz}\} \quad (2.88)$$

Dans cette représentation, le tenseur élastique du quatrième ordre $\mathbb{C}$ est représenté par une matrice $[\mathbb{C}]$ symétrique 6 x 6. La relation linéaire (2.64) s'exprime dans le cadre de notation de *Voigt* par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\epsilon}} \longleftrightarrow \{\Sigma\} = [\mathbb{C}] \cdot \{\epsilon\} \quad (2.89)$$

En tenant en compte de (2.85) et (2.86), on obtient la matrice d'élasticité macroscopique déduite de l'expression tensorielle (2.84) du milieu multiphasique $\mathbb{C}$, qui s'écrit sous la forme :

$$[\mathbb{C}] = \begin{bmatrix} \lambda^{eq} + 2\mu^{eq} & \lambda^{eq} & \lambda^{eq} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{eq} & \lambda^{eq} + 2\mu^{eq} & \lambda^{eq} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{eq} & \lambda^{eq} & \lambda^{eq} + 2\mu^{eq} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{eq} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{eq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{eq} \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Cette matrice peut s'identifier à celle traduisant un comportement élastique isotrope d'un matériau de coefficients de *Lamé* :

$$\lambda^{eq} = \lambda^m + \frac{2\pi}{15}\alpha^r \quad \text{et} \quad \mu^{eq} = \mu^m + \frac{2\pi}{15}\alpha^r \quad (2.91)$$

Le module d'*Young* et le coefficient de *Poisson* du matériau équivalent peuvent être alors calculés :

$$E^{eq} = \frac{\mu^{eq}(3\lambda^{eq} + 2\mu^{eq})}{\lambda^{eq}\mu^{eq}} \quad \text{et} \quad \nu_{eq} = \frac{\lambda^{eq}}{2(\lambda^{eq} + \mu^{eq})} \quad (2.92)$$

On introduit le module d'*Young* E^m et le coefficient de *Poisson* ν_m de la phase matrice :

$$\lambda^m = \frac{\nu_m E^m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \quad , \quad \mu^m = \frac{E^m}{2(1 + \nu_m)} \quad (2.93)$$

et le paramètre E^r défini par :

$$E^r = 2\pi\alpha^r = f^r E^f \quad (2.94)$$

En combinant ces 4 dernières relations, on aboutit au module d'*Young* et au coefficient de *Poisson* du matériau équivalent :

$$E^{eq} = E^m + \frac{1}{3} \frac{3E^m(3 - 4\nu_m + 8\nu_m^2) + 2E^r(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)}{15\frac{E^m}{E^r} + 4(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)} \quad (2.95)$$

$$\nu_{eq} = \nu_m + \frac{1 - 5\nu_m + 2\nu_m^2 + 8\nu_m^3}{15\frac{E^m}{E^r} + 4(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)} \quad (2.96)$$

2.4.2 Cas d'une distribution bidimensionnelle de fibres

Dans le cas d'une distribution continue dans le plan, la contribution des phases renforcement au comportement macroscopique du matériau s'écrit :

$$\mathbb{C}^r = \int_0^\pi \alpha^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\theta = \alpha^r \int_0^\pi \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\theta \quad (2.97)$$

d'où l'expression suivante du tenseur d'élasticité du milieu multiphasique, exprimé sous forme matricielle :

$$[\mathbb{C}] = \begin{bmatrix} \lambda^m + 2\mu^m + \frac{3\pi}{8}\alpha^r & \lambda^m + \frac{\pi}{8}\alpha^r & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m + \frac{\pi}{8}\alpha^r & \lambda^m + 2\mu^m + \frac{3\pi}{8}\alpha^r & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^m + \frac{\pi}{8}\alpha^r \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Pour caractériser l'orthotropie du milieu multiphasique, il est commode de calculer le tenseur des complaisances élastiques :

$$[\mathbb{S}] = [\mathbb{C}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_{TT}}{E_T} & \frac{-\nu_{LT}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TT}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_{LT}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_T} & \frac{-\nu_{LT}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{LT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{TT}}{E_T} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Il apparaît ainsi que le comportement de ce milieu multiphasique est isotrope transverse

autour de l'axe $\underline{e}_z$. On identifie les cinq coefficients caractérisant ce comportement qui dépendent des paramètres E^m, ν_m, E^r :

-les modules d'*Young* longitudinal et transversal :

$$E_L = E^m + \frac{2E^m\nu_m^2}{2\frac{E^m}{E^r} + E^r(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)} \quad (2.100)$$

$$E_T = E^m + \frac{E^m(3 - 2\nu_m + 3\nu_m^2) + E^r(1 - \nu_m^2)}{8\frac{E^m}{E^r} + 3E^r(1 - \nu_m^2)} \quad (2.101)$$

-le module de cisaillement longitudinal/transversal qui est celui de la phase matrice seule :

$$G_{LT} = G^m = \frac{E^m}{2(1 + \nu_m)} \quad (2.102)$$

-les coefficients de *Poisson*

$$\nu_{TT} = \frac{8E^m\nu_m + E^r(1 - \nu_m^2)}{8E^m + 3E^r(1 - \nu_m^2)} \quad (2.103)$$

$$\nu_{LT} = \frac{2E^m\nu_m}{2E^m + E^r(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)} \quad (2.104)$$

2.5 Conclusions

Partant d'une description géométrique et cinématique, qui consiste à remplacer un milieu renforcé avec des fibres par la superposition d'une matrice et d'une infinité de phases renforcement animés de cinématiques différentes, une extension du modèle multiphasique permettant de prendre en compte une telle morphologie a été développée par la méthode des puissances virtuelles, aboutissant à une description macroscopique des contraintes et déformations pour de tels matériaux composites. Ceci a été complété par une loi de comportement élastique macroscopique qui découle du comportement élastique des différents constituants. Les relations de localisation permettant d'accéder aux contraintes et déformations *partielles*, c'est-à-dire par phase, à partir de la donnée de la contrainte ou de la déformation totale, ont été établies sous l'hypothèse de l'*adhérence parfaite* entre les différentes phases.

Cette approche a été par la suite mise en œuvre pour estimer le comportement macroscopique de matériaux à fibres equi-orientées, dans le plan ou dans l'espace,

permettant d'évaluer le tenseur d'élasticité macroscopique et de l'exprimer en fonction des *modules apparents* ou *modules de l'ingénieur*.

* *

*

Approche par homogénéisation : application aux matériaux à fibres et comparaison avec le modèle multiphasique

Sommaire

3.1	Introduction	39
3.2	Notations de base	39
3.2.1	Moyenne d'un champ	40
3.2.2	Conditions aux limites homogènes	40
3.2.3	Lemme de Hill	41
3.2.4	Localisation	41
3.2.5	Approximations de Voigt et Reuss	43
3.3	Problème de l'inclusion d'Eshelby	43
3.3.1	Schéma dilué	44
3.3.2	Schéma de Mori-Tanaka	45
3.4	Application aux matériaux à fibres	46
3.4.1	Cas d'un renforcement unidirectionnel	46
3.4.2	Cas d'une distribution continue de fibres dans un plan Oxy	48
3.4.3	Cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres	50
3.5	Conclusions	51

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des schémas d'estimations et à leur mise en œuvre pour l'évaluation du comportement macroscopique de matériaux renforcés par fibres, dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des constituants.

Les notions de séparation d'échelles, règles de moyenne et les conditions aux limites homogènes sont rappelées à la section 3.2. Cette section se termine par une première estimation des propriétés élastiques d'un composite, basée sur la mise en œuvre des principes du minimum des énergies potentielle et complémentaire, permettant d'accéder aux bornes de Voigt et Reuss.

Le problème de l'inclusion d'Eshelby est ensuite rappelé, les schémas d'estimations dilué et de Mori-Tanaka sont présentés puis mis en œuvre pour estimer le comportement effectif des composites à fibres.

Ce chapitre se termine par la comparaison entre les estimations du modèle multi-phasique données au chapitre précédent et celles des schémas dilué et de Mori-Tanaka.

3.2 Notations de base

Cette section propose une brève introduction des concepts et des notations de base de l'homogénéisation des milieux aléatoires ([4]). On considère une structure constituée d'un matériau hétérogène à microstructure aléatoire. A l'échelle macroscopique, elle peut être caractérisée par une longueur L qui est la taille de la structure. A l'échelle microscopique le matériau constitutif est caractérisé par la taille des hétérogénéités d (figure 3.1).

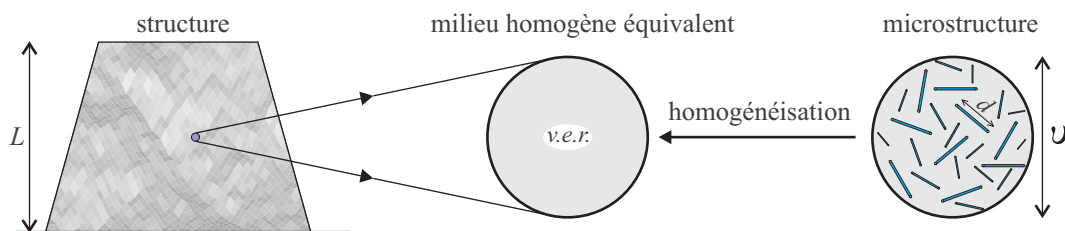


FIGURE 3.1 – *Description multi-échelles*

On définit le *v.e.r.* dont la taille v doit satisfaire à la double condition, dite de séparation d'échelles : $d \ll v \ll L$. Il s'agit d'une double condition nécessaire pour que la notion

de *v.e.r* soit valide [4]. La première condition $v \ll L$ permet de considérer la structure comme un milieu continu tandis que la deuxième condition $d \ll v$ permet de caractériser le comportement du *v.e.r* par une loi homogène.

3.2.1 Moyenne d'un champ

La moyenne du champ $q(\underline{x})$ sur le domaine géométrique Ω (*v.e.r*) est définie par :

$$\langle q \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q(\underline{x}) d\Omega \quad (3.1)$$

3.2.2 Conditions aux limites homogènes

Afin d'établir le lien entre les deux comportements microscopique et macroscopique, on considère la problématique de la définition du chargement macroscopique appliqué au *v.e.r*. Le premier problème consiste à imposer sur le bord $\partial\Omega$ du *v.e.r* une condition dite "homogène en contrainte" (figure 3.2 a) : la force surfacique imposée au point $\underline{x}$ sur le bord $\partial\Omega$ est définie par $\underline{T}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x})$, où $\underline{n}(\underline{x})$ est le vecteur normal au point considéré. $\underline{\underline{\Sigma}}$ s'interprète comme la contrainte macroscopique. On désigne alors par $\underline{\underline{\sigma}}$ un champ de contrainte *statiquement admissible* avec $\underline{\underline{\Sigma}}$. Par définition, il est assujéti aux conditions limites ci-dessus et vérifie la condition d'équilibre $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$. On peut montrer que la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ imposée est égale à la moyenne du champ des contraintes dans le domaine : $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ (voir la démonstration dans l'annexe B).

L'alternative consiste à se donner une condition aux limites de type homogène en déformation (figure 3.2 b) : $\underline{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} \cdot \underline{x}$, où $\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}$ s'interprète comme la déformation macroscopique et $\underline{\underline{\xi}}(\underline{x})$ désigne le déplacement local au point $\underline{x}$. On note $\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{x}) = \nabla^s \underline{\underline{\xi}}(\underline{x})$ un champ de déformation *cinématiquement admissible* avec $\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}$ sur le bord c'est-à-dire vérifiant la relation de moyenne : $\underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{x}) \rangle$.

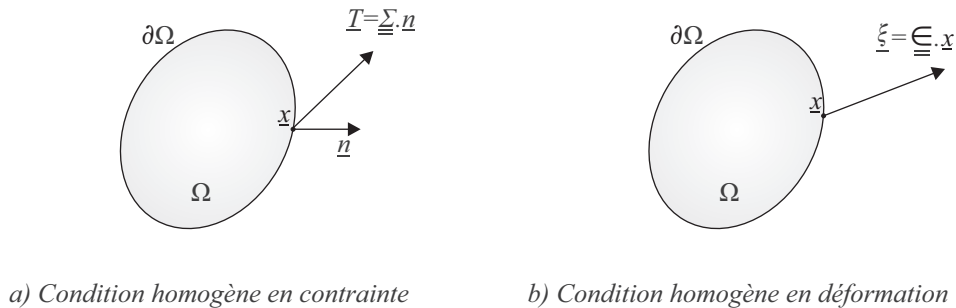


FIGURE 3.2 – Conditions aux limites homogènes

3.2.3 Lemme de Hill

Les conditions aux limites homogènes (en contrainte ou déformation) permettent d'établir le lemme de Hill ([32], [38]). Ce dernier se présente sous la forme d'une règle de cohérence "énergétique" (annexe B), concernant la quantité "travail de déformation" :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle \quad (3.2)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^*$ est un champ de contrainte *statiquement admissible*, c'est-à-dire satisfaisant l'équation d'équilibre $\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^* = 0$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}'$ est un champ des déformations microscopiques *cinématiquement admissible*, qui satisfait la condition de compatibilité géométrique. L'énoncé (3.2) est valable si l'un ou l'autre des champs $\underline{\underline{\sigma}}^*$ ou $\underline{\underline{\varepsilon}}'$ vérifie une condition aux limites de type uniforme.

Dans le cas d'une contrainte homogène imposée sur le bord du *v.e.r*, ce lemme permet de démontrer que la déformation macroscopique est égale à la moyenne du champ des déformations microscopiques $\underline{\underline{\varepsilon}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$. De même, pour le cas de déformation homogène imposée aux limites, la contrainte macroscopique doit être définie comme la moyenne du champ des contraintes microscopiques $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$.

Afin de déterminer la rigidité effective d'un milieu, on impose sur un *v.e.r* soit une contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ et on calcule la déformation macroscopique en prenant la moyenne du champ des déformations microscopiques dans le *v.e.r*, soit une déformation macroscopique $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et on calcule la contrainte macroscopique en prenant la moyenne du champ des contraintes microscopiques dans le *v.e.r*. Notons $\mathbb{C}^{hom}$ le tenseur de rigidité effective du matériau étudié, on écrit la loi de comportement effectif sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.3)$$

3.2.4 Localisation

Dans le contexte de l'élasticité linéaire, le champ des contraintes microscopiques dépend linéairement de la valeur du tenseur de contrainte macroscopique. Cette linéarité s'exprime, en tout point $\underline{x}$ du *v.e.r* la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.4)$$

où $\mathbb{B}(\underline{x})$ est un tenseur du quatrième ordre, appelé tenseur de localisation ou de concentration dont la moyenne sur le *v.e.r* est égale au tenseur unité d'ordre quatre $\mathbb{I}$.

Notant $\mathbb{S}(\underline{x})$ le tenseur de souplesse au point $\underline{x}$, la loi de comportement microscopique s'exprime par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \quad (3.5)$$

soit en tenant compte de (3.4) :

$$\varepsilon(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.6)$$

La déformation macroscopique est alors reliée à la contrainte macroscopique par la relation linéaire suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \rangle = \langle \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle = \mathbb{S}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.7)$$

où $\mathbb{S}^{hom}$ désigne le tenseur de souplesse effectif donné par :

$$\mathbb{S}^{hom} = \langle \mathbb{S}(\underline{x}) : \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle \quad (3.8)$$

De la même façon, on introduit le tenseur de localisation en déformation $\mathbb{A}(\underline{x})$ qui relie la déformation macroscopique et le champ des déformations microscopiques correspondant :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.9)$$

dont la moyenne est aussi égale à $\mathbb{I}$. La loi de comportement microscopique (3.5) peut aussi être exprimée par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \quad (3.10)$$

faisant intervenir le tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}$.

En remplaçant la déformation microscopique $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ par son expression en fonction de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (3.9) dans (3.10), on obtient :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.11)$$

dont la moyenne sur le *v.e.r* s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.12)$$

où $\mathbb{C}^{hom}$ désigne le tenseur de rigidité effectif donné par :

$$\mathbb{C}^{hom} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle \quad (3.13)$$

Sous réserve de la condition de séparation d'échelles, le théorème de Hill-Mandel ([30], [37]) montre que le tenseur de souplesse effective obtenu dans le cadre de conditions aux limites homogènes en contrainte est égal à l'inverse du tenseur de rigidité effective obtenu dans le cadre de conditions aux limites homogènes en déformation, au troisième ordre près en (d/v) :

$$\mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^{hom} = \mathbb{I} + O\left(\frac{d}{v}\right)^3 \quad (3.14)$$

3.2.5 Approximations de Voigt et Reuss

Dans le cadre de conditions aux limites homogènes, pour une contrainte macroscopique imposée, les principes de minima de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournissent des bornes supérieure et inférieure au sens de l'énergie potentielle [10] :

$$2\underline{\underline{\Sigma}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') \rangle - \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') \rangle \leq \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{S}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \langle \underline{\underline{\sigma}}^* : \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle \quad (3.15)$$

où $\underline{\underline{\Sigma}}$ est la contrainte macroscopique imposée. Les inégalités ci-dessus ont lieu pour tout champ $\underline{\underline{\sigma}}^*$ *statiquement admissible* avec $\underline{\underline{\Sigma}}$ et pour tout champ de déplacement $\underline{\underline{\xi}}'$ *cinématiquement admissible*.

Pour une déformation macroscopique imposée $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le cadre de conditions aux limites homogènes, les principes de minima de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournissent de même des bornes supérieure et inférieure au sens de de l'énergie complémentaire :

$$2\underline{\underline{\varepsilon}} : \langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle - \langle \underline{\underline{\sigma}}^* : \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle \leq \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{\varepsilon}} \leq \langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') \rangle \quad (3.16)$$

Les inégalités ci-dessus ont lieu pour tous les champs $\underline{\underline{\xi}}'$ *cinématiquement admissibles* avec $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et pour tous les champs $\underline{\underline{\sigma}}^*$ satisfaisant la condition d'équilibre. L'application directe de (3.15) ou de (3.16) combinée avec un choix de champ $\underline{\underline{\sigma}}^*$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}')$ donne les bornes de Voigt et de Reuss de la rigidité effective des milieux hétérogènes.

3.3 Problème de l'inclusion d'Eshelby

D'une façon générale, le problème de l'inhomogénéité d'Eshelby étudie une inclusion ellipsoïdale I , élastique linéaire homogène (raideur $\mathbb{C}^I$), plongée dans un milieu solide également élastique linéaire homogène (raideur $\mathbb{C}^m$), supposé infini (figure 3.3).

On se donne asymptotiquement des conditions aux limites homogènes en déformation

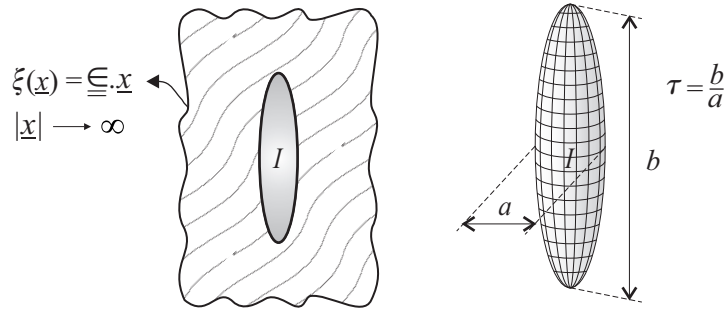


FIGURE 3.3 – Problème de l'inclusion d'Eshelby

($\xi(\underline{x}) \rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{x}$ pour $|\underline{x}| \rightarrow \infty$). Eshelby ([11],[12]) a montré que la déformation $\underline{\underline{\epsilon}}^I$ dans l'inclusion est alors homogène. Elle dépend évidemment linéairement de la déformation imposée à l'infini :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^I = \mathbb{A}^I : \underline{\underline{\epsilon}} = (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^I - \mathbb{C}^m))^{-1} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.17)$$

où $\mathbb{P} = \mathbb{S}^E : \mathbb{S}^m$ désigne le tenseur de Hill et $\mathbb{S}^E$ est le tenseur d'Eshelby (annexe C) qui dépend du rapport d'aspect τ de l'inclusion (figure 3.3) et de la rigidité du milieu environnant (voir [33], [41], [42]).

3.3.1 Schéma dilué

On considère un matériau constitué d'inhomogénéités élastiques linéaires homogènes, de fraction volumique f , occupant des domaines de même forme et de même orientation (phase r , caractérisée par $\mathbb{C}^r$), immergées dans une matrice élastique linéaire homogène (phase m , caractérisée par $\mathbb{C}^m$). En supposant que la concentration en inclusions de matériau est suffisamment faible afin de négliger les interactions entre les inclusions, on admet que chaque inclusion est plongée dans un milieu infini indépendamment des autres soumise à l'infini à une déformation macroscopique homogène $\underline{\underline{\epsilon}}$. Par conséquent, à partir de (3.17), le tenseur de localisation dans la phase r s'écrit :

$$\mathbb{A}^r = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m)]^{-1} \quad (3.18)$$

Ensuite, à partir de (3.13) et de la relation $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$, on obtient la rigidité équivalente du matériau homogénéisé :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{dl} &= \mathbb{C}^m + f(\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m) : [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m)]^{-1} \\ &= \mathbb{C}^m + f[\mathbb{P} + (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m)^{-1}]^{-1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

On étend ce résultat au cas d'un milieu hétérogène ayant N phases où toutes les inclusions de chaque phase sont de même forme et de même orientation et en notant f_i ($i = 1, ..N$)

la fraction volumique de la phase i , le tenseur élastique macroscopique est estimée par ([34]) :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{dl} &= \mathbb{C}^m + \sum_{i=1}^N f_i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}^i : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m)]^{-1} \\ &= \mathbb{C}^m + \sum_{i=1}^N f_i [\mathbb{P}^i + (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m)^{-1}]^{-1} = \mathbb{C}^m + \langle \mathbb{T} \rangle\end{aligned}\quad (3.20)$$

où :

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \sum_{i=2}^r f_i \mathbb{T}^i \quad \text{avec} \quad \mathbb{T}^i = [\mathbb{P}^i + (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m)^{-1}]^{-1} \quad (3.21)$$

Le terme $\mathbb{T}^i$ représente la contribution de la phase i au comportement global du matériau composite.

3.3.2 Schéma de Mori-Tanaka

Ce schéma vise à améliorer l'estimation diluée en tenant compte l'interaction entre les inclusions. Cette estimation est basée sur la solution du problème d'Eshelby, dans lequel la condition de déplacement à l'infini ($\underline{\xi}(\underline{x}) \rightarrow \underline{\underline{\underline{\xi}}}.\underline{x}$ pour $|\underline{x}| \rightarrow \infty$) est remplacée par une condition du même type mais faisant intervenir une déformation auxiliaire $\underline{\underline{\underline{\xi}}}^*$ qui s'interprète comme la déformation moyenne dans la matrice : $\underline{\xi}(\underline{x}) \rightarrow \underline{\underline{\underline{\xi}}}^*.\underline{x}$ pour $|\underline{x}| \rightarrow \infty$. La relation entre la déformation moyenne $\underline{\underline{\underline{\xi}}}^*$ et la déformation macroscopique $\underline{\underline{\underline{\xi}}}$ est obtenue en exploitant la règle de moyenne sur les déformations locales : $\langle \underline{\underline{\underline{\xi}}} \rangle = \underline{\underline{\underline{\xi}}}$. Pour un matériau composite à deux phases, on obtient ([3] ; [51]) :

$$\underline{\underline{\underline{\xi}}}^* = [(1-f)\mathbb{I} + f[\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m)^{-1}]]^{-1} : \underline{\underline{\underline{\xi}}} \quad (3.22)$$

On en déduit l'estimation de Mori-Tanaka du tenseur élastique macroscopique ([34]) :

$$\mathbb{C}^{MT} = \mathbb{C}^m + f[(1-f)\mathbb{P} + (\mathbb{C}^r - \mathbb{C}^m)^{-1}]^{-1} \quad (3.23)$$

Dans le cas d'un milieu hétérogène ayant N phases où toutes les inclusions de chaque phase sont de même forme, le tenseur élastique macroscopique est estimé par :

$$\mathbb{C}^{MT} = \mathbb{C}^m + [(1 - \sum_{i=1}^N f_i) \langle \mathbb{T} \rangle^{-1} + (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^m)^{-1}]^{-1} \quad (3.24)$$

où $\langle \mathbb{T} \rangle$ est donné par (3.21).

3.4 Application aux matériaux à fibres et comparaison avec les résultats du modèle multiphasique

3.4.1 Cas d'un renforcement unidirectionnel

Afin de comparer les estimations du comportement macroscopique obtenues par la mise en œuvre du modèle multiphasique et des schémas d'estimation, on considère dans un premier temps le cas d'un composite unidirectionnel, c'est-à-dire constitué d'une matrice renforcée par une seule famille de fibres parallèles orientées suivant $\underline{e}_x$. On supposera que la fraction volumique totale de renforcement f^r est très faible tandis que les caractéristiques mécaniques du matériau de renforcement sont très grandes devant celles de la matrice ($E^f \gg E^m$).

Modèle multiphasique

La modélisation multiphasique d'un tel milieu, conduit, avec l'hypothèse de l'*adhérence parfaite* entre phases, au tenseur d'élasticité macroscopique ([6]; [26]; [27]) :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^m + E^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (3.25)$$

qui caractérise le comportement d'un matériau isotrope transverse autour de la direction de renforcement $\underline{e}_x$. Il peut être caractérisé par les modules et coefficients longitudinaux et transversaux :

- Modules d'*Young* longitudinal et transversal :

$$E_L = E^m + E^r \quad , \quad E_T = \frac{E^m + E^r}{1 + \frac{E^r}{E^m}(1 - \nu_m^2)} \quad (3.26)$$

- Coefficients de *Poisson* longitudinal et transversal :

$$\nu_L = \nu_m \quad , \quad \nu_T = \nu_m \frac{E^m + (1 + \nu_m)E^r}{E^m + (1 - \nu_m^2)E^r} \quad (3.27)$$

Estimation diluée - Estimation de Mori-Tanaka

En supposant que la forme des fibres soit ellipsoïdale avec un rapport d'aspect τ très grand, on estime le tenseur élastique macroscopique du schéma dilué et du schéma de Mori-Tanaka en effectuant le passage à la limite :

$$f^r \longrightarrow 0 \quad , \quad f^r E^f = E^r \quad , \quad \tau \longrightarrow \infty \quad (3.28)$$

D'une façon pratique, le calcul de l'estimation diluée et celle de Mori-Tanaka se fait en remplaçant E^f par E^r/f^r dans (3.20) et (3.24), puis en développant les résultats en série à l'ordre 1 autour de $f^r = 0$. Dans ces conditions le schéma dilué et celui de Mori-Tanaka donnent les mêmes résultats, on utilise l'exposant * afin de représenter le module élastique équivalent (tableau 3.1).

Module	Développement limité
E_L^*	$E^m + E^r + \frac{(2\nu_m^2 - 4\nu_m\nu_f - \nu_m + 2\nu_f^2)E^m}{1 + \nu_m} f^r$
E_T^*	$\frac{E^m + E^r}{1 + \frac{E^r}{E^m}(1 - \nu_m^2)} + \frac{c_1}{c_2} f^r$
ν_L^*	$\nu_m + 2(\nu_m^2 - \nu_m - \nu_m\nu_f + \nu_f)f^r$
ν_T^*	$\nu_m \frac{E^m + (1 + \nu_m)E^r}{E^m + (1 - \nu_m^2)E^r} + \frac{c_3}{c_4} f^r$
G_{LT}^*	$\frac{E^m}{2(1 + \nu_m)} + \frac{2(\nu_m^2 - 1)}{E^m(4\nu_m - 3)} f^r$

TABLEAU 3.1 – Schéma dilué et schéma de Mori-Tanaka - Modules élastiques à l'ordre 1 en f^r

Les coefficients c_1, c_2, c_3, c_4 sont données par :

$$\begin{aligned}
c_1 &= (E^m)^3 (8\nu_m^3\nu_f^2 + 2\nu_m^3 - 6\nu_m^2\nu_f^2 - 16\nu_m^2\nu_f - 2\nu_m^2 + 12\nu_m\nu_f + 5\nu_m - 5) \\
&\quad + E^r(E^m)^2 (16\nu_m^4\nu_f + 8\nu_m^4 - 12\nu_m^3\nu_f - 10\nu_m^3 + 2\nu_m^2 - 16\nu_m^2\nu_f + 12\nu_m\nu_f + 10\nu_m - 10) \\
&\quad + (E^r)^2 E^m (8\nu_m^5 - 2\nu_m^4 - 13\nu_m^3 + 7\nu_m^2 - 5\nu_m + 5) \\
c_2 &= \{E^m(4\nu_m^2 + \nu_m - 3) - E^r(4\nu_m^4 + \nu_m^3 - 7\nu_m^2 - \nu_m + 3)\} \{E^m + E^r(1 - \nu_m^2)\} \\
c_3 &= (E^m)^2 (8\nu_m^3\nu_f^2 + 2\nu_m^3 - 6\nu_m^2\nu_f^2 - 16\nu_m^2\nu_f - 6\nu_m^2 + 12\nu_m\nu_f + 5\nu_m - 1) \\
&\quad + E^r E^m (16\nu_m^4\nu_f + 12\nu_m^4 - 12\nu_m^3\nu_f - 10\nu_m^3 - 16\nu_m^2\nu_f - 10\nu_m^2 + 12\nu_m\nu_f + 10\nu_m - 2) \\
&\quad + (E^r)^2 (8\nu_m^5 - 2\nu_m^4 - 13\nu_m^3 - \nu_m^2 + 5\nu_m - 1) \\
c_4 &= \{E^m + E^r(1 - \nu_m^2)\}^2 (4\nu_m - 3)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

En confrontant les valeurs du tableau (tableau 3.1) à celles obtenues à la section précédente, il apparaît que les modules élastiques du milieu biphasique adhérent sont exacte-

ment les termes d'ordre 0 du développement limité des formules des schémas dilué et de Mori-Tanaka.

3.4.2 Cas d'une distribution continue de fibres dans un plan Oxy

On considère le cas d'une distribution plane et continue des fibres, cette situation peut être rencontrée pour les plaques composites dont les renforts se trouvent dans le même plan que la plaque (voir section 2.4).

Modèle multiphasique

On rappelle que la matrice d'élasticité $[\mathbb{C}]$ du milieu multiphasique formée dans ce cas par ((2.98)) :

$$[\mathbb{C}] = \begin{bmatrix} \lambda^m + 2\mu^m + \frac{3\pi}{8}\alpha^r & \lambda^m + \frac{\pi}{8}\alpha^r & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m + \frac{\pi}{8}\alpha^r & \lambda^m + 2\mu^m + \frac{3\pi}{8}\alpha^r & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^m + \frac{\pi}{8}\alpha^r \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Estimation diluée - Estimation de Mori-Tanaka

Pour déterminer l'estimation du tenseur élastique macroscopique par la mise en œuvre des schémas dilué (3.20) et de Mori-Tanaka (3.24), il apparaît plus naturel d'utiliser, compte tenu de la distribution des fibres, les coordonnées polaires pour le repérage dans le plan Oxy . Chaque point matériel du matériau renforcé étant repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) figure 3.4.

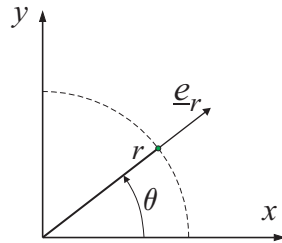


FIGURE 3.4 – Coordonnées polaires

Le terme $\langle \mathbb{T} \rangle$ dans la formule (3.21) s'écrit sous la forme d'une intégrale sur le demi-cercle unité :

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \sum_i f_i \mathbb{T}_i = \frac{f^r}{\pi} \int_0^\pi \mathbb{T}(\theta) d\theta \quad (3.31)$$

Les calculs sont effectués avec le logiciel de calcul formel Maple, ils permettent de trouver la même matrice de rigidité macroscopique dont l'expression est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \lambda^m + 2\mu^m + \frac{3\pi}{8}\alpha^r + d_1 & \lambda^m + \frac{\pi}{8}\alpha^r + d_2 & \lambda^m + d_3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m + \frac{\pi}{8}\alpha^r + d_2 & \lambda^m + 2\mu^m + \frac{3\pi}{8}\alpha^r + d_1 & \lambda^m + d_3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m + d_3 & \lambda^m + d_3 & \lambda^m + 2\mu^m + d_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^m + d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^m + d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^m + \frac{\pi}{8}\alpha^r + d_6 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

où les coefficients $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ sont déterminés par :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{(18\mu^m + 6\lambda^m)\mu^m \nu_f^2 + [12(\mu^m)^2 + 28\lambda^m \mu^m + 8(\lambda^m)^2]\nu_f + (7\lambda^m + 18\mu^m)\mu^m}{4(\lambda^m + 3\mu^m)} f^r \\ d_2 &= \frac{(6\mu^m + 2\lambda^m)\mu^m \nu_f^2 + [36(\mu^m)^2 + 36\lambda^m \mu^m + 8(\lambda^m)^2]\nu_f - (3\lambda^m + 10\mu^m)\mu^m}{4(\lambda^m + 3\mu^m)} f^r \\ d_3 &= \frac{(\lambda^m + 2\mu^m)(6\mu^m \nu_f + \mu^m + \lambda^m + 2\lambda^m \nu_f)}{2(\lambda^m + 3\mu^m)} f^r \\ d_4 &= \frac{(\lambda^m + 2\mu^m)(\lambda^m + 5\mu^m)}{\lambda^m + 3\mu^m} f^r \\ d_5 &= \frac{\mu^m(2\lambda^m + 5\mu^m)}{\lambda^m + 3\mu^m} f^r \\ d_6 &= \frac{\mu^m[(6\mu^m + 2\lambda^m)\nu_f^2 - (4\lambda^m + 12\mu^m)\nu_f + 14\mu^m + 5\lambda^m]}{4(\lambda^m + 3\mu^m)} f^r \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.4.3 Cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres

Dans ce cas, le matériau composite considéré est constituée d'une matrice et d'une distribution de fibres de renforcement orientées dans toutes les directions de l'espace (voir la section 2.4).

Modèle multiphasique

En ce qui concerne l'estimation multiphasique du comportement macroscopique, la matrice de raideur est donnée par (2.90) dont on rappelle l'expression :

$$\begin{bmatrix} \lambda^{eq}+2\mu^{eq} & \lambda^{eq} & \lambda^{eq} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{eq} & \lambda^{eq}+2\mu^{eq} & \lambda^{eq} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{eq} & \lambda^{eq} & \lambda^{eq}+2\mu^{eq} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{eq} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{eq} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{eq} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Cette matrice peut s'identifier à celle d'un comportement élastique isotrope de coefficients de Lamé : $\lambda^{eq} = \lambda^m + \frac{2\pi}{15}\alpha^r$ et $\mu^{eq} = \mu^m + \frac{2\pi}{15}\alpha^r$

Estimation diluée - Estimation de Mori-Tanaka

Etant donnée la distribution isotrope des fibres on opte pour une décomposition des termes mis en jeu dans les estimation diluée (3.20) et Mori-Tanaka (3.24) dans la base sphérique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\phi)$ (figure 3.5).

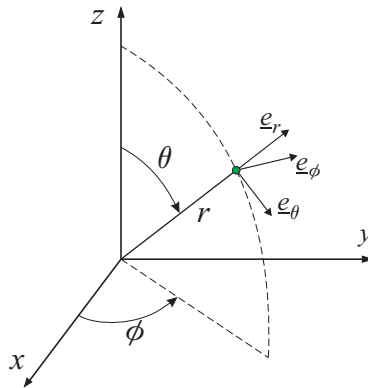


FIGURE 3.5 – Coordonnées sphériques

Le terme $\langle \mathbb{T} \rangle$ dans la formule (3.21) s'écrit sous la forme d'un intégrale sur une demi-sphère unité :

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \sum_i f_i \mathbb{T}_i = \frac{f^r}{2\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \mathbb{T}(\phi, \theta) \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.35)$$

Les deux estimations diluée et celle de Mori-Tanaka sont identiques, la matrice du comportement macroscopique obtenue après simplification est la suivante, où on a négligé les termes de second ordre en f^r :

$$\begin{bmatrix} \lambda^{eq} + 2\mu^{eq} + g_1 & \lambda^{eq} + g_2 & \lambda^{eq} + g_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{eq} + g_2 & \lambda^{eq} + 2\mu^{eq} + g_1 & \lambda^{eq} + g_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{eq} + g_2 & \lambda^{eq} + g_2 & \lambda^{eq} + 2\mu^{eq} + g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{eq} + g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{eq} + g_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{eq} + g_3 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

où g_1, g_2, g_3 sont des fonctions du premier ordre de f^r :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{(12\lambda^m + 36\mu^m)\mu^m \nu_f^2 + [48(\mu^m)^2 + 76\lambda^m \mu^m + 20(\lambda^m)^2]\nu_f + 110(\mu^m)^2 + 57\lambda^m \mu^m + 5(\lambda^m)^2}{15(\lambda^m + 3\mu^m)} f^r \\ g_2 &= \frac{(4\lambda^m + 12\mu^m)\mu^m \nu_f^2 + [96(\mu^m)^2 + 92\lambda^m \mu^m + 20(\lambda^m)^2]\nu_f + 5(\lambda^m)^2 + 9\lambda^m \mu^m - 10(\mu^m)^2}{\lambda^m + 3\mu^m} f^r \\ g_3 &= \frac{4}{15} \frac{\mu^m [(\lambda^m + 3\mu^m)\nu_f^2 - (2\lambda^m + 6\mu^m)\nu_f + 6\lambda^m + 15\mu^m]}{\lambda^m + 3\mu^m} f^r \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.5 Conclusions

Ce chapitre a présenté quelques éléments de base de micromécanique pour les milieux élastiques hétérogènes en vue d'applications pour les matériaux à fibres.

On a rappelé tout d'abord les notions de base : le *v.e.r*, les notions de contraintes et déformations macroscopiques et microscopiques en lien avec les conditions sur le bord du *v.e.r*, les règles de moyenne, le lemme de Hill. On a donné l'expression générale du tenseur de rigidité homogénéisé à l'aide de la notion de tenseur de localisation de contrainte et de déformation. Après avoir évoqué la notion de bornes, on a présenté le problème d'Eshelby pour le cas de l'inclusion de forme ellipsoïdale, qui est à l'origine

d'une classe très importante de schémas d'homogénéisation classiques.

Les estimations diluée et de Mori-Tanaka des caractéristiques effectives du matériau à fibres sont présentées. On s'est intéressé ici à 3 distributions spatiales des fibres de renforcement : distribution des fibres selon une seule direction, distribution continue dans un plan et distribution continue dans l'espace. On a noté que l'estimation diluée et celle de Mori-Tanaka donnent le même résultat dans le cas limite d'une très faible valeur de la fraction volumique de renforcement et d'un fort contraste des propriétés mécaniques de la matrice et des fibres. On a montré également que l'estimation fournie par le modèle multiphasique coïncide au premier ordre avec celles fournies par les schémas d'estimations dilué et de Mori-Tanaka.

Ces résultats rejoignent ceux retrouvés par de Buhan et Hassen (2008) ([8]) qui se sont intéressés à la comparaison des estimations du modèle biphasique sous l'hypothèse d'*adhérence parfaite* et celles obtenues par la mise en œuvre d'une approche d'homogénéisation périodique.

Il est à préciser que les matériaux composites étudiées ici présentent des fractions volumiques de fibres telles que l'emploi du schéma dilué avec plusieurs directions de renforcement soit pertinent. L'estimation donnée par ce schéma consiste à effectuer une homogénéisation par un modèle différentiel ([39]; [43]). La mise en œuvre d'un telle démarche en homogénéisation périodique, bien qu'elle ne puisse être défendue sur le plan théorique, étant donné qu'il n'y a pas de séparation d'échelles entre les différentes familles de fibres, conduirait au même résultat.

* *

*

Comportement anélastique des matériaux à fibres

Sommaire

4.1	Introduction	55
4.2	Extension du modèle multiphasique	55
4.2.1	Comportement élastique endommageable des fibres	55
4.2.2	Cas d'une déformation uniaxiale homogène imposée	57
4.2.3	Cas d'une sollicitation de traction en déformation plane	61
4.2.4	Cas particulier des fibres ne résistant qu'à la traction	66
4.2.5	Poutre renforcée soumise à un chargement de flexion en déformation plane	70
4.2.6	Compression simple d'une éprouvette renforcée par une distribution isotrope de fibres élastiques fragiles	75
4.3	Comportement élasto-plastique d'un matériau à fibres	80
4.3.1	Comportement élasto-plastique	80
4.3.2	Un exemple d'application	82
4.4	Conclusion	88

4.1 Introduction

En vue de se familiariser avec le modèle multiphasique pour les matériaux à fibres, on va étudier dans ce chapitre des exemples illustratifs de résolution de problèmes multiphasiques en tenant compte d'un comportement anélastique de la matrice ou des fibres. Dans la première partie de ce chapitre (section 4.2), on considère un matériau composite dont la microstructure est constituée d'une matrice élastique linéaire isotrope, renforcée par une distribution continue plane de fibres élastiques fragiles ([22], [23]). La réponse macroscopique d'une éprouvette constituée d'un tel matériau composite est analysée dans le cas où elle est soumise à un chargement macroscopique correspondant à une déformation uniaxiale homogène, une déformation de cisaillement homogène, un essai de traction-compression en déformation plane et enfin un essai de flexion en déformation plane.

La section 4.2.6 est consacrée au développement de la solution analytique du problème de traction-compression simple d'une éprouvette en matériau composite à fibres continuellement distribuées (distribution isotrope tridimensionnelle des fibres).

Dans la suite de ce chapitre (section 4.3), on présente une extension du modèle multiphasique à la prise en compte d'un comportement élasto-plastique des différentes phases : matrice et renforcements. La phase matrice est supposée élastique parfaitement plastique obéissant au critère de von Mises tandis que les phases renforcement obéissent à un critère de plasticité parfaite unidimensionnel. L'exemple d'une éprouvette composite soumise à une déformation uniaxiale homogène est traité analytiquement.

4.2 Extension du modèle multiphasique à la prise en compte du comportement élastique endommageable des fibres

4.2.1 Comportement élastique endommageable des fibres

On considère un matériau composite dont la microstructure est constituée d'une matrice élastique linéaire isotrope renforcée par une distribution continue de fibres élastiques endommageables.

La phase matrice représentant la matrice est supposée élastique, homogène et iso-

trope, de constantes de Lamé λ^m et μ^m :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda^m (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu^m \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.1)$$

L'état d'une phase renforcement est caractérisé par deux variables, la déformation ε^r et l'endommagement quantifié par une variable scalaire d et comprise entre 0 et 1 ([36]). La relation contrainte-déformation dans chaque phase renforcement s'écrit :

$$\sigma^r = \alpha^r(d) \varepsilon^r \quad \text{où } \alpha^r(d) = (1-d)\alpha_s^r ; d \text{ croissant} \quad (4.2)$$

où α_s^r est la rigidité à l'état sain ($d = 0$). Il est aussi possible de décrire le comportement adoucissant des phases renforcement, en renseignant le module tangent α_T^r et la contrainte au pic σ_0^r (figure 4.1). Dans le cas où la valeur α_T^r vaut 0 le comportement élastique du

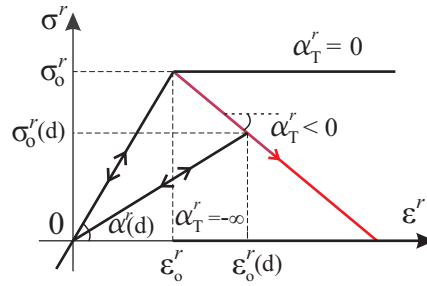


FIGURE 4.1 – Courbe contrainte-déformation des phases renforcements

matériau sain est suivi d'un plateau horizontal, tandis que lorsque α_T^r tend vers $-\infty$, le comportement devient élastique fragile. La loi de comportement s'écrit :

$$\sigma^r = \begin{cases} \alpha^r(d) \varepsilon^r(\theta) & \text{si } |\varepsilon^r| \leq \varepsilon_0^r(d) = \frac{\sigma_0^r(d)}{\alpha_s^r(d)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

avec

$$\sigma_0^r(d) - \sigma_0^r = \alpha_T^r [\varepsilon_0^r(d) - \varepsilon_0^r] \quad (4.4)$$

où ε_0^r désigne la déformation correspondant à la limite d'élasticité initiale σ_0^r tandis que $\varepsilon_0^r(d)$ est la déformation correspondante à la limite d'élasticité $\sigma_0^r(d)$ de la phase renforcement pour la valeur du paramètre d'endommagement d . Compte tenu de (4.2) ce paramètre peut s'écrit :

$$d = \frac{\alpha_s^r - \alpha_T^r}{\alpha_s^r} \left(1 - \frac{\varepsilon_0^r}{\varepsilon_0^r(d)} \right) \quad (4.5)$$

Par la suite, pour des applications du modèle multiphasique on va s'intéresser tout d'abord au cas où le comportement des fibres est fragile (module tangent $\alpha_T^r = -\infty$, $\alpha^r = \alpha_s^r$). Dans ce cas, chaque phase renforcement obéit au critère de rupture :

$$f^r(\sigma^r) = |\sigma^r| - \sigma_0^r = \alpha^r |\varepsilon^r| - \sigma_0^r \quad (4.6)$$

On note que la contrainte au pic σ_0^r est liée à celle du matériau constitutif des fibres σ_0^f par :

$$\sigma_0^r = \eta^r \sigma_0^f = \begin{cases} \frac{f^r \sigma_0^f}{\pi} & \text{cas d'une distribution bidimensionnelle de fibres} \\ \frac{f^r \sigma_0^f}{2\pi} & \text{cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres} \end{cases} \quad (4.7)$$

4.2.2 Cas d'une déformation uniaxiale homogène imposée

Considérons maintenant une éprouvette en matériau renforcé par une distribution bidimensionnelle de fibres qui est soumise à une déformation homogène de la forme (figure 4.2) :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (4.8)$$

Tant que le critère de rupture n'est pas atteint dans aucune phase renforcement, la contrainte macroscopique suivant l'axe Ox est déterminée par la loi de comportement macroscopique (2.64). Elle s'écrit compte tenu de (2.98) :

$$\Sigma_{xx} = \Sigma = (\lambda + 2\mu + \frac{3\pi}{8}\alpha^r) \epsilon \quad (4.9)$$

Le terme $\frac{3\pi}{8}\alpha^r$ représente la contribution des phases renforcement à la rigidité du matériau composite suivant l'axe Ox .

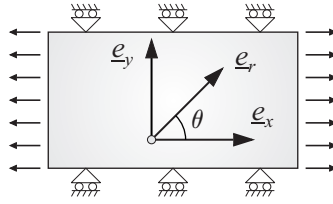


FIGURE 4.2 – Déformation homogène uniaxiale imposée

La déformation axiale de la phase renforcement représentant les fibres d'orientation θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) est donnée par :

$$\epsilon^r(\theta) = \underline{\underline{\epsilon}} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = \epsilon (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = \epsilon \cos^2 \theta \quad (4.10)$$

Cette fonction est maximale pour $\theta = 0$, ce qui veut dire que les fibres orientées suivant l'axe de la déformation imposée sont les fibres les plus sollicitées. La limite d'élasticité de la structure est alors atteinte lorsque le critère de la phase renforcement représentant ces

fibres est saturé, soit :

$$\max f^r(\sigma^r, \theta) = f^r(\sigma^r, 0) = \alpha^r \varepsilon^r(0) - \sigma_0^r \quad (4.11)$$

La limite d'élasticité est alors atteinte pour $\varepsilon^{el} = \sigma_0^r / \alpha^r = \varepsilon_0^r$. Au-delà de cette valeur, deux secteurs angulaires contenant les fibres endommagées, symétriques par rapport à l'axe Ox correspondant intervalles $[0, \beta]$ et $[\pi - \beta, \pi]$, apparaissent (figure 4.3).

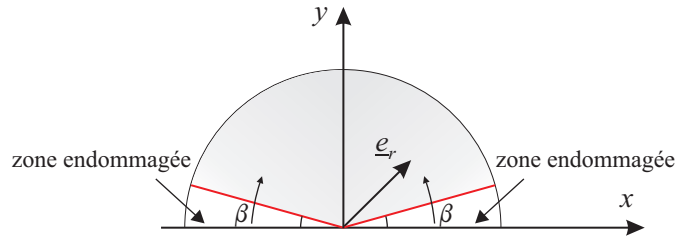


FIGURE 4.3 – Déformation macroscopique uniaxiale : zones endommagées

Le tenseur $\mathbb{C}$ décrivant le comportement macroscopique est alors estimé en tenant compte de ces intervalles d'endommagement.

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^m + \mathbb{C}^r(\beta) = \mathbb{C}^m + \alpha^r \int_{\beta}^{\pi-\beta} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\theta \quad (4.12)$$

Dans ce cas, la contribution des phases renforcement à la rigidité du matériau composite suivant l'axe Ox est la composante C_{xxxx}^r qui peut être donnée en fonction du paramètre d'endommagement β par :

$$C_{xxxx}^r = \alpha^r \int_{\beta}^{\pi-\beta} \cos^4 \theta d\theta = \alpha^r \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\cos^3 \beta \sin \beta}{2} - \frac{3 \cos \beta \sin \beta}{4} - \frac{3\beta}{4} \right) \quad (4.13)$$

Les phases renforcement représentant les fibres de direction β étant à leur limite d'élasticité, l'amplitude du secteur endommagé peut alors être calculée par :

$$f^r(\sigma^r, \beta) = \alpha^r (\varepsilon \cos^2 \beta) - \sigma_0^r = 0 \quad (4.14)$$

d'où

$$\beta = \arccos \left(\sqrt{\frac{\sigma_0^r}{\alpha^r \varepsilon}} \right) \quad (4.15)$$

On obtient finalement la relation effort déformation suivante :

$$\Sigma = [\lambda^m + 2\mu^m + g(\beta)] \varepsilon \quad (4.16)$$

avec :

$$g(\beta) = \alpha^r \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\cos^3 \beta \sin \beta}{2} - \frac{3 \cos \beta \sin \beta}{4} - \frac{3\beta}{4} \right) \quad (4.17)$$

avec $g(0) = \frac{3\pi}{8}\alpha^r$ et $g(\frac{\pi}{2}) = 0$. L'évolution de la contrainte macroscopique Σ suivant la direction de la sollicitation x , en fonction de ϵ est présenté sur la figure 4.4.

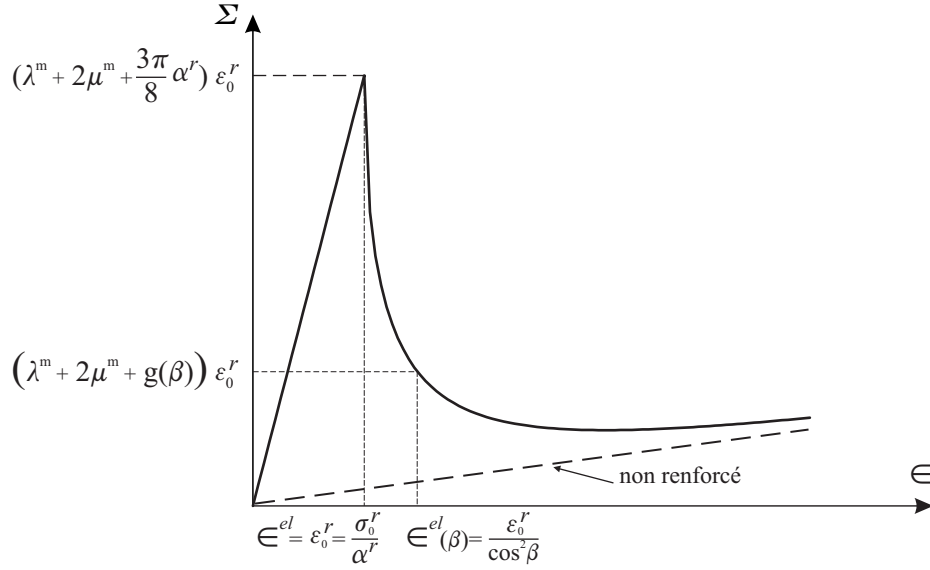


FIGURE 4.4 – Déformation macroscopique uniaxiale : courbe contrainte-déformation

Cette courbe présente une première phase élastique linéaire, cette phase se termine lorsque le critère de rupture des phases renforcement représentant les fibres de direction suivant l'axe Ox est atteint. Au-delà de cette limite d'élasticité, une zone endommagée se propage et la courbe tend asymptotiquement vers le comportement de la matrice seule. La figure 4.5 présente l'évolution du paramètre d'endommagement β en fonction de la déformation imposée ϵ .

Ce problème est repris pour différentes valeurs de α_T^r . Les résultats sont représentés sur la figure 4.6. Mis à part les deux courbes extrêmes correspondantes aux fibres fragiles ($\alpha_T^r = -\infty$) et ductiles ($\alpha_T^r = 0$), le processus d'endommagement de la structure sous chargement de déformation macroscopique homogène uniaxiale est à deux niveaux : endommagement *local* des phases renforcement caractérisé par la variable scalaire d introduite en (4.2) et endommagement *global* exprimé par l'évolution de l'angle β caractérisant la zone des fibres où le critère est saturé. Ces courbes tendent asymptotiquement vers la courbe correspondant au comportement de la matrice.

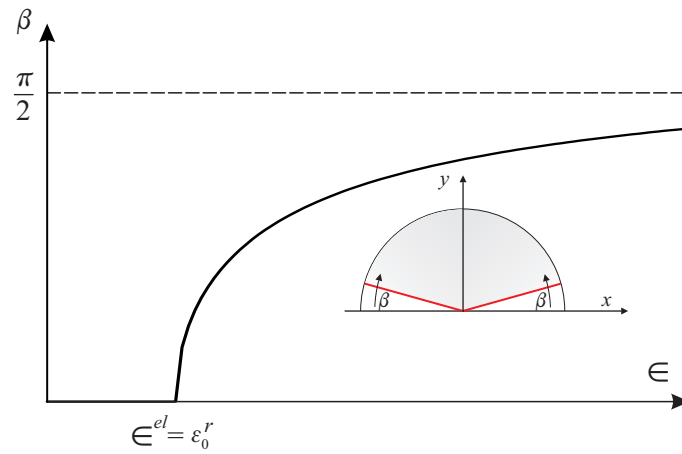


FIGURE 4.5 – Déformation macroscopique uniaxiale : évolution du paramètre d'endommagement β

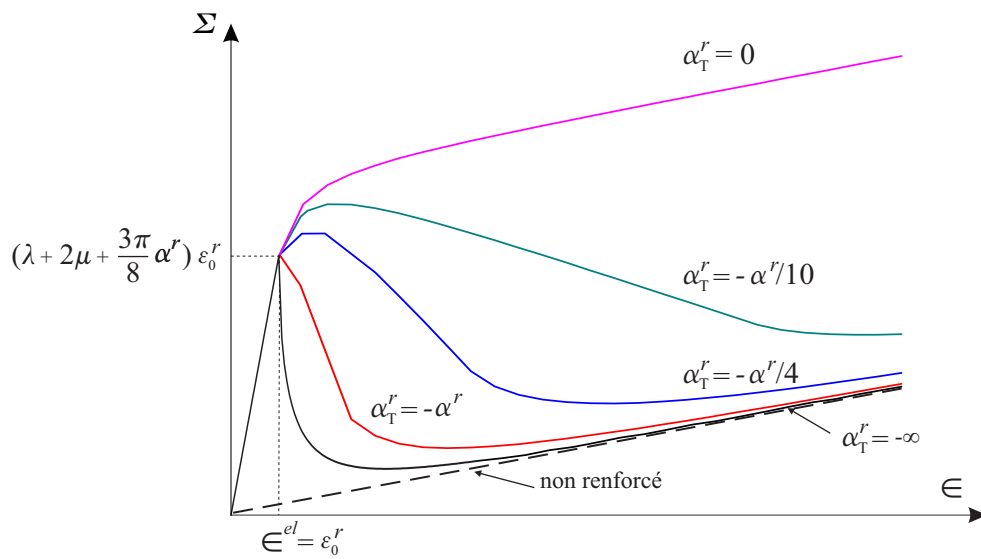


FIGURE 4.6 – Déformation macroscopique uniaxiale : courbes contrainte-déformation en fonction de α_T^r

4.2.3 Cas d'une sollicitation de traction en déformation plane

L'essai considéré est celui d'une éprouvette soumise à une sollicitation de traction suivant la direction x , sous les conditions de déformations planes dans le plan Oxy (figure 4.7).

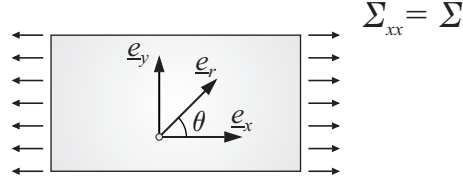


FIGURE 4.7 – Sollicitation de traction en déformation plane

Le tenseur de déformation macroscopique est de la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \epsilon_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (4.18)$$

où $\epsilon = \epsilon_{xx}$ est la déformation prescrite tandis que l'état de contrainte macroscopique est de la forme suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (4.19)$$

qui vérifie bien les conditions de bords libres sur les bords de l'éprouvette de normale $(\pm \underline{e}_y)$.

La première phase d'évolution est élastique, au cours de laquelle la loi de comportement élastique (2.64) permet d'écrire, compte tenu de (2.98) les relations suivantes :

$$\Sigma_{xx} = \Sigma = (\lambda^m + 2\mu^m + C_{xxxx}^r) \epsilon + (\lambda^m + C_{yyyy}^r) \epsilon_{yy} \quad (4.20)$$

$$\Sigma_{yy} = (\lambda^m + C_{xxyy}^r) \epsilon + (\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r) \epsilon_{yy} = 0 \quad (4.21)$$

$$\Sigma_{zz} = \lambda^m (\epsilon + \epsilon_{yy}) = 0 \quad (4.22)$$

De (4.21) on déduit la déformation macroscopique suivant l'axe Oy :

$$\epsilon_{yy} = - \frac{\lambda^m + C_{xxyy}^r}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r} \epsilon \quad (4.23)$$

La relation contrainte-déformation suivant l'axe de sollicitation est alors donnée, compte tenu de (4.23) et (4.20) par :

$$\Sigma = E^{dp} \epsilon \quad (4.24)$$

où E^{dp} est le module de traction-compression en déformation plane calculé par :

$$E^{dp} = (\lambda^m + 2\mu^m + C_{xxxx}^r) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r)^2}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r} \quad (4.25)$$

La déformation axiale de la phase renforcement représentant les fibres d'orientation θ est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\varepsilon^r(\theta) &= \underline{\underline{\varepsilon}} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = \varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta \\ &= \varepsilon \left(\cos^2 \theta - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r)}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r} \sin^2 \theta \right)\end{aligned}\quad (4.26)$$

Cette fonction est maximale pour $\theta = 0$, ce qui veut dire que les fibres horizontales sont les fibres les plus sollicitées. La limite d'élasticité de la structure est alors atteinte lorsque le critère de la phase renforcement représentant les fibres de direction $\theta = 0$ est saturé, soit :

$$\max_{\theta} f^r(\sigma^r, \theta) = f^r(\sigma^r, 0) = \alpha^r \varepsilon^r(0) - \sigma_0^r \quad (4.27)$$

La limite d'élasticité est alors atteinte pour $\varepsilon^e = \sigma_0^r / \alpha^r$. Au-delà de cette valeur, deux secteurs angulaires contenant les fibres endommagées, symétriques par rapport à l'axe Ox et compris entre les directions dans les intervalles $[0, \beta]$ et $[\pi, \pi - \beta]$, apparaissent (figure 4.3). Le tenseur $\mathbb{C}$ décrivant le comportement macroscopique est estimé en tenant compte de ces intervalles d'endommagement, les composantes $C_{xxxx}^r, C_{yyyy}^r, C_{xxyy}^r$ sont déterminées en fonction du paramètre d'endommagement β par :

$$\begin{aligned}C_{xxxx}^r(\beta) &= \alpha^r \int_{\beta}^{\pi-\beta} \cos^4 \theta d\theta = \alpha^r \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\cos^3 \beta \sin \beta}{2} - \frac{3 \cos \beta \sin \beta}{4} - \frac{3\beta}{4} \right) \\ C_{yyyy}^r(\beta) &= \alpha^r \int_{\beta}^{\pi-\beta} \sin^4 \theta d\theta = \alpha^r \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\sin^3 \beta \cos \beta}{2} + \frac{3 \cos \beta \sin \beta}{4} - \frac{3\beta}{4} \right) \\ C_{xxyy}^r(\beta) &= \alpha^r \int_{\beta}^{\pi-\beta} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \alpha^r \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\cos^3 \beta \sin \beta}{2} - \frac{\cos \beta \sin \beta}{4} - \frac{\beta}{4} \right)\end{aligned}\quad (4.28)$$

Les phases renforcement représentant les fibres de direction β étant à leur limite d'élasticité, β est alors la solution de l'équation :

$$\begin{aligned}f^r(\sigma^r, \beta) &= \alpha^r \varepsilon^r(\theta) - \sigma_0^r = 0 \\ \iff \alpha^r &\in \left(\cos^2 \beta - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta)} \sin^2 \beta \right) - \sigma_0^r = 0\end{aligned}\quad (4.29)$$

on obtient finalement la relation contrainte déformation suivante :

$$\Sigma = \left(\lambda^m + 2\mu^m + C_{xxxx}^r(\beta) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta))^2}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta)} \right) \in \quad (4.30)$$

Une deuxième phase d'endommagement se produit lorsque la déformation axiale de la phase renforcement représentant les fibres suivant la direction verticale atteint la limite en compression de ces dernières. On note ϵ^* et β^* les deux valeurs de ϵ et β à cette limite. Ils vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} f^r(\sigma^r, \beta^*) = \alpha^r \epsilon^* \left(\cos^2 \beta^* - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta^*))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta^*)} \sin^2 \beta^* \right) - \sigma_0^r = 0 \\ f^r(\sigma^r, \pi/2) = -\alpha^r \epsilon^* \left(-\frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta^*))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta^*)} \right) - \sigma_0^r = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

La contrainte macroscopique Σ^* à cette limite est calculée dans (4.30) en remplaçant β par β^* .

Au-delà de cette valeur, un secteur angulaire de fibres endommagées en compression, symétrique par rapport à l'axe Oy , apparaît et se propage jusqu'à l'endommagement de toutes les fibres de renforcement (figure 4.8).

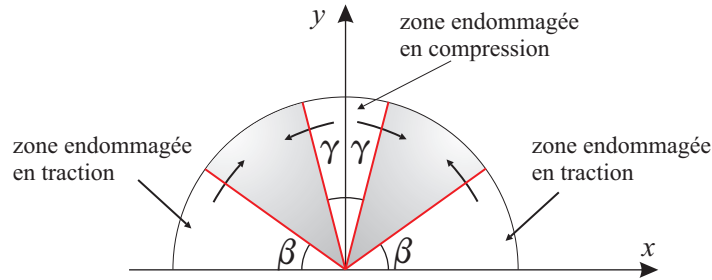


FIGURE 4.8 – Essai de traction en déformation plane : zones endommagées

Les composantes C_{xxxx}^r , C_{yyyy}^r , C_{xxyy}^r sont données en fonction des paramètres d'endommagement β et γ :

$$\begin{aligned} C_{xxxx}^r(\beta, \gamma) &= 2\alpha^r \int_{\beta}^{\pi/2-\gamma} \cos^4 \theta d\theta \\ C_{yyyy}^r(\beta, \gamma) &= 2\alpha^r \int_{\beta}^{\pi/2-\gamma} \sin^4 \theta d\theta \\ C_{xxyy}^r(\beta, \gamma) &= 2\alpha^r \int_{\beta}^{\pi/2-\gamma} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \end{aligned} \quad (4.32)$$

Les phases renforcement représentant les fibres de direction β et γ étant à leur limite d'élasticité respectivement en traction et en compression, les deux paramètres angulaires

sont la solution du système de deux équations suivantes :

$$\begin{cases} f^r(\sigma^r, \beta) = \alpha^r \in \left(\cos^2 \beta - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta, \gamma))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta, \gamma)} \sin^2 \beta \right) - \sigma_0^r = 0 \\ f^r(\sigma^r, \pi/2 - \gamma) = -\alpha^r \in \left(\sin^2 \gamma - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta, \gamma))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta, \gamma)} \cos^2 \gamma \right) - \sigma_0^r = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

On obtient finalement la relation contrainte déformation suivante :

$$\Sigma = \left(\lambda^m + 2\mu^m + C_{xxxx}^r(\beta, \gamma) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta, \gamma))^2}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta, \gamma)} \right) \in \quad (4.34)$$

Adoptant les mêmes caractéristiques mécaniques que dans l'exemple précédent(4.2.2), les résultats de cette simulation sont représentés sur la figure 4.9 donnant l'évolution de Σ en fonction de déformation imposée $\in$, où le système (4.33) a été résolu numériquement. Cette courbe montre trois phases successives. La première phase correspond à une évolution élastique qui prend fin lorsque la contrainte dans la phase renforcement, représentant la famille de fibres horizontales, atteint la valeur limite σ_0^r . La deuxième phase est une phase d'endommagement progressif, qui correspond à l'évolution du secteur de demi-angle β de manière analogue à la celle décrite en section 4.2.2. La troisième phase apparaît lorsque les fibres verticales cassent en compression (secteur de demi-angle γ) par "effet *Poisson*". Une deuxième zone endommagée apparaît alors et se propage jusqu'à l'endommagement de toutes les fibres de renforcement.

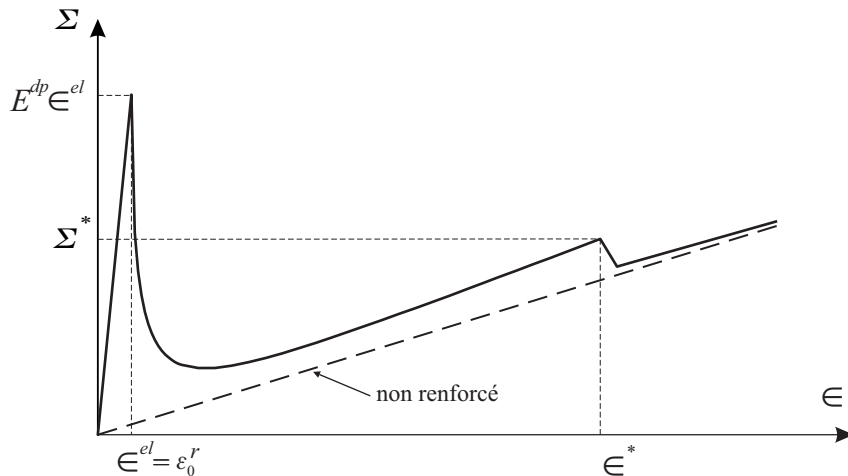


FIGURE 4.9 – Essai de traction en déformation plane : courbe contrainte-déformation

Les évolutions des paramètres d'endommagement β et γ sont présentées sur la figure 4.10.

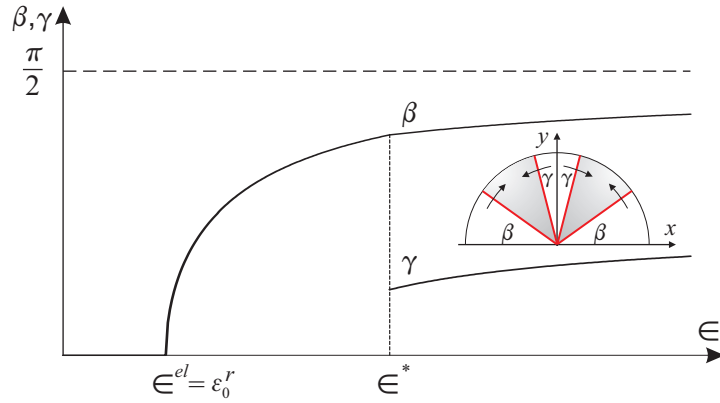


FIGURE 4.10 – Essai de traction en déformation plane : évolution des paramètres d'endommagement β et γ

Dans le cas où les fibres de renforcement sont élastiques-endommageables, la réponse de l'éprouvette est représentée sur la figure 4.11 pour différentes valeurs de α_T^r

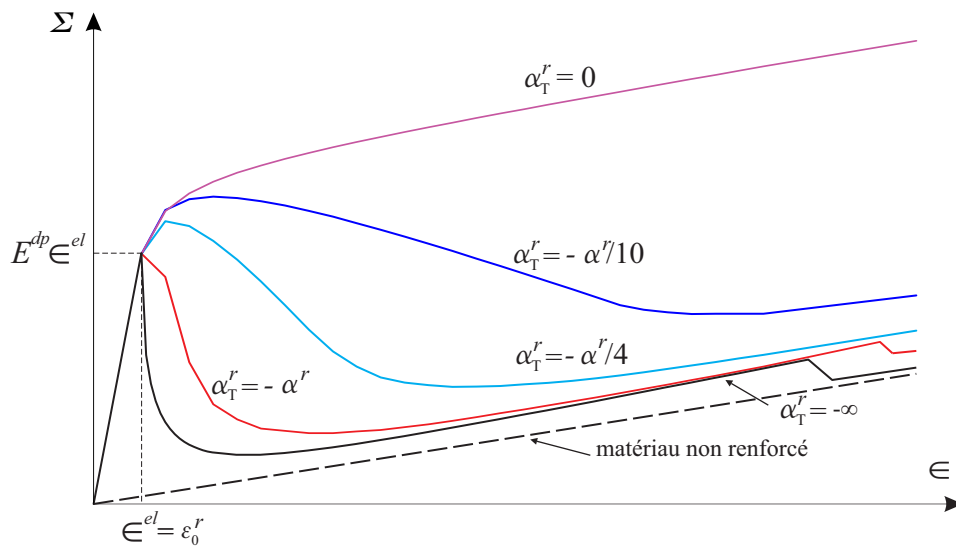


FIGURE 4.11 – Essai de traction en déformation plane : courbes contrainte-déformation en fonction de α_T^r

4.2.4 Cas particulier des fibres ne résistant qu'à la traction

On s'intéresse dans cette section au cas où les fibres ne peuvent pas reprendre des efforts de compression, ce qui est par exemple le cas des fibres végétales mises en jeu dans certaines techniques de renforcement des sols, ou bien encore des fibres de carbone et de verre utilisées dans les composites industriels. L'éclatement de ces fibres est tel que leur charge de ruine de flambement est négligeable devant leur résistance à la traction. On supposera dans la suite de cette section que la résistance en compression des fibres mise en jeu dans le renforcement de la structure étudiée est nulle. L'objectif des calculs qui suivent est de montrer la capacité du modèle proposé à rendre compte du comportement macroscopique d'une structure renforcée par ce type de fibres et de développer une solution de référence qui servira à qualifier l'outil numérique développé dont la présentation fait l'objet du chapitre 5.

Nous reprenons ici les conditions de l'essai de traction simple en déformation plane suivant (Oxy) traité à la section 4.2.3, en tenant compte d'une raideur et d'une résistance des fibres nulles vis-à-vis de la compression. Afin de déterminer la réponse de la structure, il convient d'identifier de déterminer les phases renforcement "inactives", c'est-à-dire celles représentant des fibres comprimées et par suite n'intervenant pas dans la raideur structurelle.

L'application du chargement de traction dans la direction x (figure 4.7) induit la compression de fibres par "effet *Poisson*". On note ϑ , le demi-angle du secteur angulaire, symétrique par rapport à la direction Oy incluant les directions comprimées (figure 4.12).

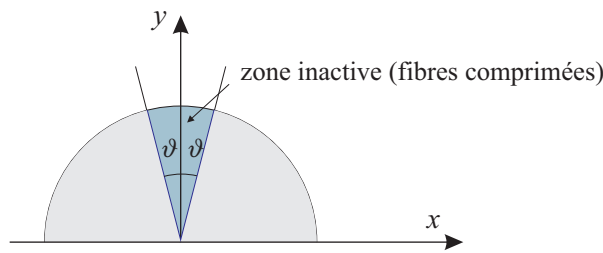


FIGURE 4.12 – Essai de traction en déformation plane : zone "inactive" des fibres

La déformation axiale de la phase renforcement représentant la fibres faisant l'angle ϑ par rapport à la direction y est alors nulle, soit :

$$\varepsilon^r(\vartheta) = \cos^2(\pi/2 - \vartheta) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\vartheta))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\vartheta)} \sin^2(\pi/2 - \vartheta) = 0 \quad (4.35)$$

où $C_{xxyy}^r(\vartheta)$ et $C_{yyyy}^r(\vartheta)$ désignent les contributions des phases renforcement actives, c'est-à-dire en traction, aux termes C_{xxyy} et C_{yyyy} du tenseur de comportement macroscopique $\mathbb{C}$. Ils sont donnés par :

$$C_{xxyy}^r(\vartheta) = 2\alpha^r \int_0^{\pi/2-\vartheta} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \quad (4.36)$$

$$C_{yyyy}^r(\vartheta) = 2\alpha^r \int_0^{\pi/2-\vartheta} \sin^4 \theta d\theta \quad (4.37)$$

La détermination de l'angle ϑ se fait à partir de la résolution de l'équation (4.35) en tenant compte de (4.36) et (4.37). Cette résolution est effectuée numériquement.

La relation contrainte-déformation suivant la direction Ox s'écrit finalement :

$$\Sigma = \left(\lambda^m + 2\mu^m + C_{xxxx}^r(\vartheta) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\vartheta))^2}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\vartheta)} \right) \in \quad (4.38)$$

La limite d'élasticité est atteinte pour la valeur $\epsilon^{el} = \sigma_0^r / \alpha^r$ qui correspond à la rupture de la phase renforcement représentant les fibres horizontales. La valeur de la déformation correspondant à la limite d'élasticité est la même que celle retrouvée à la section 4.2.3 dans le cas des fibres capables de reprendre des efforts de compression. En revanche, la valeur de la contrainte macroscopique Σ^{el} est différente étant donné que la raideur structurelle est moindre dans le cas des fibres souples.

La poursuite du chargement au delà de la limite d'élasticité entraîne l'endommagement progressif de la structure, caractérisé par un secteur d'angle au sommet β , symétrique par rapport à l'axe Oy caractérisant les directions des fibres rompues (figure 4.13).

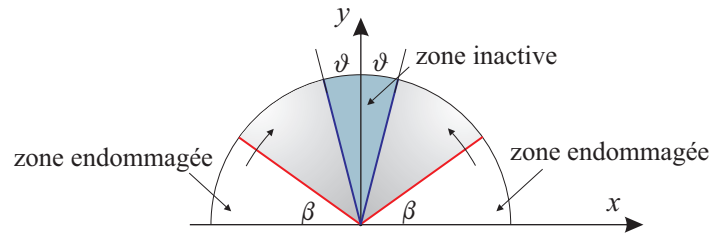


FIGURE 4.13 – Essai de traction en déformation plane : zone "inactive" et zones endommagées des fibres

L'endommagement des phases renforcement représentant les fibres localisées dans les

secteurs $[0, \beta]$ et $[\pi - \beta, \pi]$ entraîne la modification du coefficient de *Poisson* macroscopique ν_{LT} et entraîne par suite la variation de l'angle ϑ , c'est-à-dire du secteur des fibres inactives.

Les deux angles β et ϑ sont solutions du système de deux équations suivantes, exprimant la déformation axiale et le critère d'endommagement des phases renforcement représentant les fibres d'orientation β et ϑ respectivement :

$$\begin{aligned} \varepsilon^r(\vartheta, \beta) &= \in \left(\cos^2(\pi/2 - \vartheta) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\vartheta, \beta))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\vartheta, \beta)} \sin^2(\pi/2 - \vartheta) \right) = 0 \\ f^r(\sigma^r, \vartheta, \beta) &= \alpha^r \in \left(\cos^2 \beta - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\vartheta, \beta))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\vartheta, \beta)} \sin^2 \beta \right) - \sigma_0^r = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Les coefficients $C_{xxxx}^r(\vartheta, \beta)$, $C_{yyyy}^r(\vartheta, \beta)$ et $C_{xxyy}^r(\vartheta, \beta)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} C_{xxxx}^r(\vartheta, \beta) &= 2\alpha^r \int_{\beta}^{\pi/2-\vartheta} \cos^4 \theta \, d\theta \\ C_{yyyy}^r(\vartheta, \beta) &= 2\alpha^r \int_{\beta}^{\pi/2-\vartheta} \sin^4 \theta \, d\theta \\ C_{xxyy}^r(\vartheta, \beta) &= 2\alpha^r \int_{\beta}^{\pi/2-\vartheta} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \end{aligned} \quad (4.40)$$

La résolution de ce système d'équations s'effectue numériquement. Il affirme que l'angle β augmente avec le chargement, tandis que l'angle ϑ , diminue légèrement (figure 4.14).

La relation contrainte-déformation macroscopique est donnée par :

$$\Sigma = \left(\lambda^m + 2\mu^m + C_{xxxx}^r(\vartheta, \beta) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\vartheta, \beta))^2}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\vartheta, \beta)} \right) \in \quad (4.41)$$

Les courbes de la figure 4.15 représentent l'évolution de la contrainte Σ en fonction de la déformation imposée $\in$ dans les deux cas, de fibres "souples" ou non.

La raideur macroscopique est légèrement inférieure pour le cas des fibres "souples", la limite d'élasticité est atteinte pour la même valeur de la déformation macroscopique dans les deux cas. En revanche le processus d'endommagement dans le cas des fibres "souples" est plus rapide et le comportement macroscopique tend vers le comportement

de la matrice seule plus rapidement.

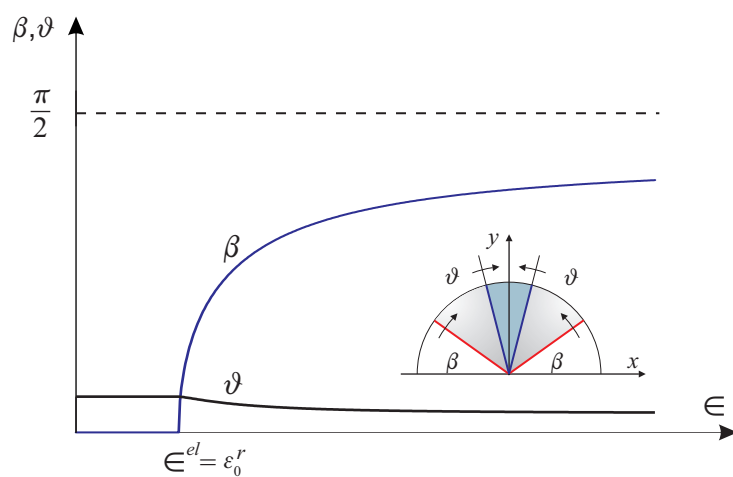


FIGURE 4.14 – Essai de traction en déformation plane : évolution des paramètres d'endommagement β et ϑ

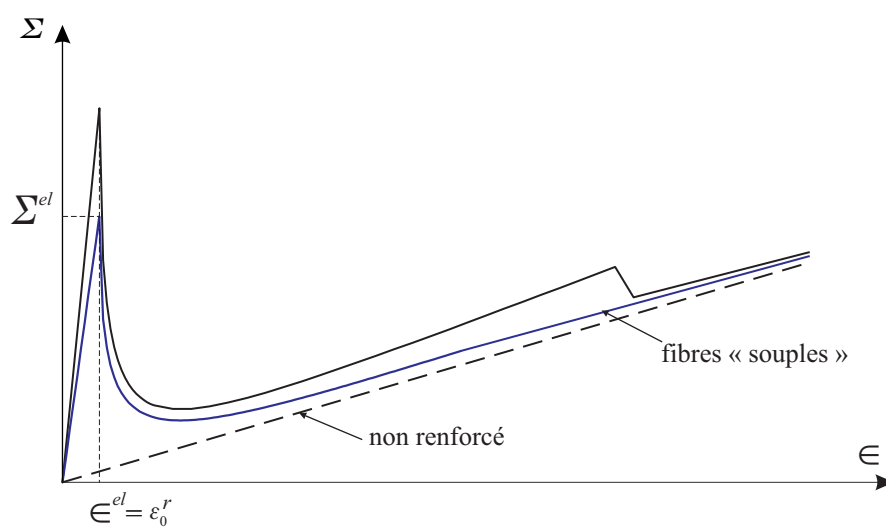


FIGURE 4.15 – Essai de traction en déformation plane : courbe contrainte-déformation

4.2.5 Poutre renforcée soumise à un chargement de flexion en déformation plane

4.2.5.1 Position du problème

On considère une poutre de longueur 2ℓ , de section rectangulaire de hauteur h et de largeur b (figure 4.16), soumise au chargement suivant :

◇ Les faces supérieure ($y = h/2$) et inférieure ($y = -h/2$) sont libres d'efforts :

$$\underline{T}^d = \underline{0} \quad (4.42)$$

◇ L'extrémité de la poutre $S(x = \ell)$ (resp. $S(x = -\ell)$) est en contact avec un plateau infiniment rigide, parfaitement lisse animé d'un mouvement de rotation infinitésimale d'angle $\omega(t)$ (resp. $-\omega(t)$) autour de l'axe Az (resp. $A'z$) :

$$\begin{aligned} S(x = \ell) : \quad \xi_x^d &= \omega(t)y \quad ; \quad T_y^d = T_z^d = 0 \\ S(x = -\ell) : \quad \xi_x^d &= \omega(t)y \quad ; \quad T_y^d = T_z^d = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

◇ Les deux faces de la poutre $S(z = 0)$ et $S(z = b)$ sont en contact lisse avec deux plateaux infiniment rigides lisses maintenus fixes :

$$\begin{aligned} S(z = 0) : \quad \xi_z^d &= 0 \quad ; \quad T_x^d = T_y^d = 0 \\ S(z = b) : \quad \xi_z^d &= 0 \quad ; \quad T_x^d = T_y^d = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

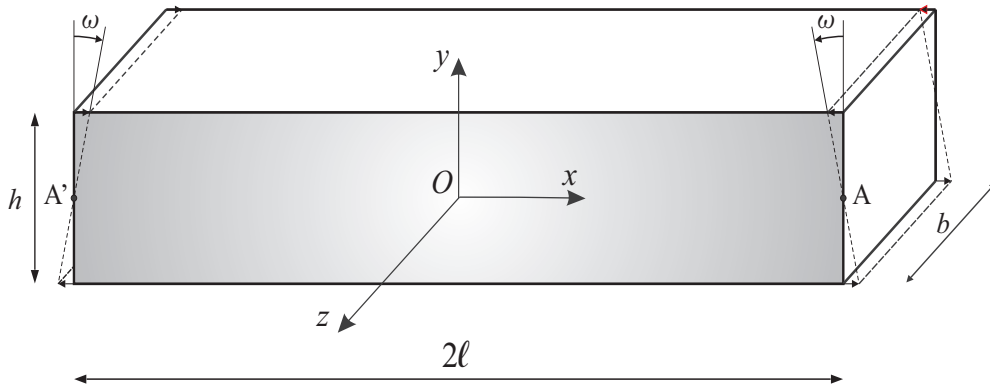


FIGURE 4.16 – Flexion d'une poutre renforcée en déformation plane

4.2.5.2 Solution en phase élastique

Compte tenu des conditions aux limites, on recherche la solution du problème en contrainte totale $\underline{\underline{\Sigma}}$ sous la forme d'un champ biaxial ne dépendant que de y :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{xx}(y)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_{zz}(y)\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (4.45)$$

qui est bien *statiquement admissible* avec les données en efforts du problème.

La loi de comportement macroscopique s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.46)$$

soit en utilisant la notation de Voigt, il vient alors :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} \\ 0 \\ \Sigma_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^m + 2\mu^m + C_{xxxx}^r & \lambda^m + C_{xxyy}^r & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m + C_{xxyy}^r & \lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^m + C_{xxyy}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

On déduit la déformation selon la direction z :

$$\epsilon_{zz} = (\lambda^m + C_{xxyy}^r) \epsilon_{xx} + (\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r) \epsilon_{yy} \quad (4.48)$$

La poutre étant en déformation plane ($\epsilon_{zz} = 0$), les déformations selon les directions x et y sont alors reliées par :

$$\epsilon_{yy} = -\varphi \epsilon_{xx} \quad (4.49)$$

avec

$$\varphi = \frac{\lambda^m + C_{xxyy}^r}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r} \quad (4.50)$$

La déformation ϵ_{xx} se calcule en fonction de y :

$$\epsilon_{xx} = -y \frac{\omega(t)}{\ell} \quad (4.51)$$

Donc le tenseur des déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -y \frac{\omega(t)}{\ell} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \varphi \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (4.52)$$

Ce champ peut être intégré (voir D) et on obtient le champ de déplacement :

$$\underline{\xi} = -\frac{\omega(t)}{\ell}xy\underline{e}_x + \frac{\omega(t)}{2\ell}(x^2 + \varphi y^2)\underline{e}_y \quad (4.53)$$

qui est *cinématiquement admissible* avec les données en déplacements du problème.

Les champs des contrainte et de déformation, solutions de ce problème, montrent que tout point de la poutre est localement soumis à un chargement de traction-compression en déformation plane dont le paramètre de chargement est $\epsilon_{xx} = -y\frac{\omega(t)}{\ell}$, indépendant de la position du point considéré selon les axes x et z et fonction de la position par rapport à l'axe neutre de la poutre.

Le moment fléchissant autour de l'axe Oz , calculé au centre de la section $S(x = \ell)$ est donné par :

$$M_A = \int_S [(y\underline{e}_y + z\underline{e}_z) \wedge \Sigma_{xx}\underline{e}_x] dy dz = - \int_S \Sigma_{xx} y dy dz \quad (4.54)$$

$$= \left((\lambda^m + 2\mu^m + C_{xxxx}^r) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r)^2}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r} \right) \frac{\omega(t)}{\ell} \int_S y^2 dy dz \quad (4.55)$$

$$= E^{dp} I \chi \quad (4.56)$$

où I est le moment d'inertie quadratique de la section autour de l'axe Az :

$$I = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy dz = \frac{bh^3}{12} \quad (4.57)$$

χ est la courbure défini par :

$$\chi = \frac{\omega(t)}{\ell} \quad (4.58)$$

4.2.5.3 Comportement "post-pic"

La solution établie en 4.2.5.2 est valable tant que la limite d'élasticité de la structure qui correspond à la valeur du chargement pour lequel le critère est atteint pour une phase renforcement. La contrainte axiale dans la phase renforcement représentant les fibres d'orientation β par rapport à l'axe Ox est calculée par :

$$\sigma^r(y, \beta) = \alpha^r (\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{e}_r(\beta) \otimes \underline{e}_r(\beta)) = \alpha^r (\epsilon_{xx} \cos^2 \beta + \epsilon_{yy} \sin^2 \beta) \quad (4.59)$$

$$= -\alpha^r \frac{\omega(t)}{\ell} y (\cos^2 \beta - \varphi \sin^2 \beta) \quad (4.60)$$

dont la valeur absolue est maximale pour $\beta = 0$ aux $y = \pm h/2$. Ce qui signifie que les fibres horizontales localisées aux faces supérieure et inférieure de la poutre sont les plus sollicitées. La limite d'élasticité de la structure est alors atteinte lorsque le critère de ces phases est saturé, soit :

$$\begin{aligned} \max(f(\sigma^r)) &= \max(|\sigma^r| - \sigma_0^r) \\ &= \alpha^r \frac{\omega(t)h}{2\ell} - \sigma_0^r \end{aligned} \quad (4.61)$$

La limite d'élasticité est alors atteinte pour :

$$\omega^{el} = \frac{2\sigma_0^r \ell}{\alpha^r h} \quad (4.62)$$

Etant donné que la solution est invariante le long des axes Ox et Oz de la poutre et qu'elle correspond localement à un état de traction-compression en déformation plane, le couple contrainte-déformation solution, en tout point de la poutre se trouve sur la courbe contrainte-déformation de l'essai de traction en déformation plane (figure 4.9) obtenue à la section 4.2.3 (figure 4.17).

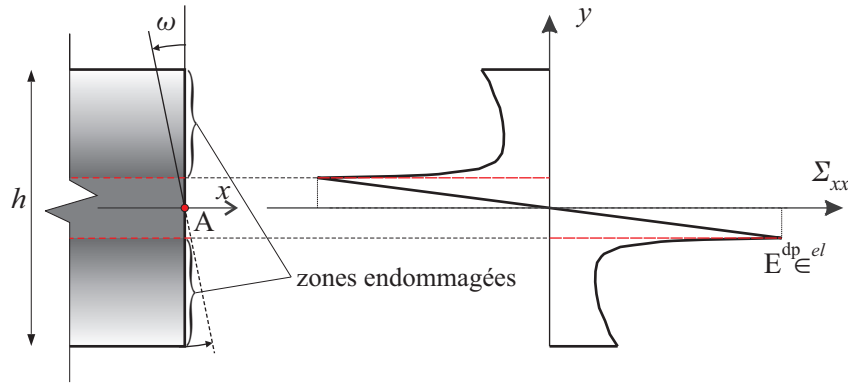


FIGURE 4.17 – Flexion d'une poutre : distribution des contraintes dans l'épaisseur de la poutre

Il apparaît ainsi que, au delà de la valeur ω^{el} qui correspond à la rupture sur les bords supérieur et inférieur de la poutre des phases renforcement correspondantes aux fibres horizontales en compression et traction respectivement, un mécanisme d'endommagement à deux vitesses se produit, correspondant d'une part à une propagation des zones endommagées depuis les bords horizontaux de la poutre vers son axe, d'autre part localement à une évolution des directions des fibres endommagées.

Le moment fléchissant M_A est alors calculé par la relation (4.54) dans la quelle $\Sigma_{xx}(y)$ est donné d'après (4.34) et (4.51) :

$$\Sigma_{xx}(y) = \left(\lambda^m + 2\mu^m + C_{xxxx}^r(\beta, \gamma) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta, \gamma))^2}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta, \gamma)} \right) \frac{\omega}{\ell} y \quad (4.63)$$

où $\beta(y)$ et $\gamma(y)$ sont solutions du système suivant (4.33) :

$$\begin{cases} f^r(\sigma^r, \beta(y)) = \alpha^r \in \left(\cos^2 \beta(y) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta(y), \gamma(y)))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta(y), \gamma(y))} \sin^2 \beta(y) \right) - \sigma_0^r = 0 \\ f^r(\sigma^r, \pi/2 - \gamma(y)) = -\alpha^r \in \left(\sin^2 \gamma(y) - \frac{(\lambda^m + C_{xxyy}^r(\beta(y), \gamma(y)))}{\lambda^m + 2\mu^m + C_{yyyy}^r(\beta(y), \gamma(y))} \cos^2 \gamma(y) \right) - \sigma_0^r = 0 \end{cases} \quad (4.64)$$

Le moment fléchissant M_A est calculé numériquement à l'aide du logiciel Maple :

$$M_A = \int_S [(y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) \wedge \Sigma_{xx}\mathbf{e}_x] dy dz = - \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{xx}(y)y dy dz \quad (4.65)$$

Les résultats de ces calculs sont représentés sur la figure 4.18 sous la forme d'une courbe représentant l'évolution du moment de flexion en fonction de la courbure.

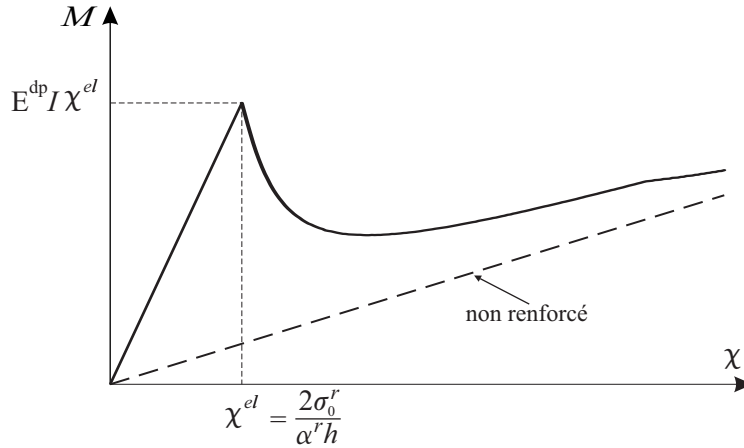


FIGURE 4.18 – Flexion d'une poutre : courbe moment fléchissant - courbure

Cette courbe met en évidence un comportement élastique, jusqu'à ce que la contrainte de rupture est atteinte sur les bords supérieure et inférieure de la poutre. Au-delà de cette limite d'élasticité, le comportement de la poutre tend vers celui du comportement

élastique de la poutre non renforcée.

Dans le cas où les fibres de renforcement sont élastiques-endommageables, la réponse de la structure est représentée sur la figure 4.19 pour différentes valeurs de α_T^r

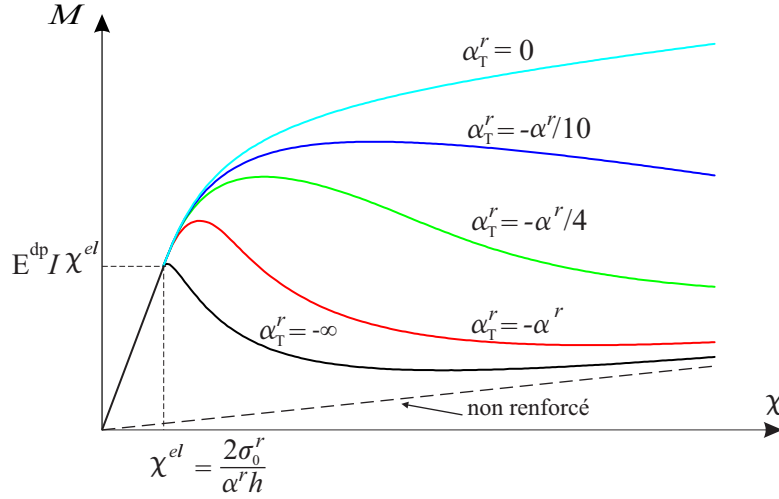


FIGURE 4.19 – Flexion d’une poutre : courbes moment-courbure en fonction de α_T^r

4.2.6 Compression simple d’une éprouvette renforcée par une distribution isotrope de fibres élastiques fragiles

On considère une éprouvette homogène de hauteur H et de section S , constituée d’une matrice homogène élastique linéaire isotrope renforcée par une distribution isotrope de fibres élastiques fragiles, soumise à un essai de compression simple suivant l’axe Oz . Cette éprouvette repose sans frottement sur le plan horizontal ($y = 0$) et sa face supérieure S_H est en contact sans frottement avec un plateau rigide animé déplacement vertical $-\delta(t)$ ($\delta(t) \geq 0$), la surface latérale est libre d’effort et on néglige les forces de volume (figure 4.20).

Phase de comportement élastique

Dans la phase de comportement élastique de tous les constituants, le comportement macroscopique du matériau composite peut être identifié à celui du matériau élastique linéaire isotrope de module d’Young et coefficient de *Poisson* équivalents (E^{eq} et ν_{eq}) évalués en (2.95).

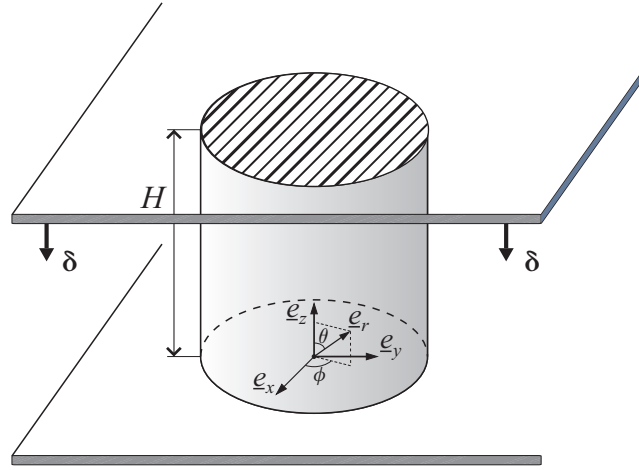


FIGURE 4.20 – Compression simple d'une éprouvette renforcée par une répartition isotrope de fibres

La solution du problème est alors donnée par :

- un champ de contrainte macroscopique uniaxial constant :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (4.66)$$

et un champ de déformation macroscopique homogène donné par :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\delta}{H} (-\nu_{eq} [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y] + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (4.67)$$

La contrainte Σ est liée au déplacement du plateau δ par :

$$\frac{\Sigma}{E^{eq}} = \frac{\delta}{H} \quad (4.68)$$

La déformation axiale de la phase renforcement représentant les fibres orientées suivant la direction de $\underline{e}_r(\theta, \phi)$ est donnée compte tenu de (4.67) par :

$$\varepsilon^r(\theta, \phi) = \underline{\underline{\epsilon}} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = \frac{-\delta}{H} ((\nu_{eq} + 1) \cos^2 \theta - \nu_{eq}) \quad (4.69)$$

Elle est donc indépendante de l'angle ϕ en raison de la symétrie du problème par rapport à l'axe Oz .

Limite d'élasticité et phase de comportement post-pic

On doit tout d'abord déterminer la limite d'élasticité du système et identifier la phase renforcement pour laquelle le critère est saturé en premier. Pour cela, on évalue le critère des phases renforcement :

$$\begin{aligned} f^r(\sigma^r) &= \alpha^r |\varepsilon^r| - \sigma_0^r \\ &= \alpha^r \frac{\Sigma}{E^{eq}} ((\nu_{eq} + 1) \cos^2 \theta - \nu_{eq}) - \sigma_0^r \end{aligned} \quad (4.70)$$

Cette fonction atteint sa valeur maximale pour $\theta = 0$, ce qui veut dire que les fibres orientées suivant la direction verticale sont les fibres les plus sollicitées. La limite d'élasticité est donc :

$$\Sigma^{el} = E^{eq} \frac{\sigma_0^r}{\alpha^r} \quad (4.71)$$

et elle est atteinte pour une déformation axiale :

$$\frac{\delta^{el}}{H} = \frac{\sigma_0^r}{\alpha^r} \quad (4.72)$$

Le chargement étant poursuivi de façon monotone ($\dot{\delta} > 0$), au-delà de la valeur limite d'élasticité, une zone de fibres endommagées apparaît. Cette zone est un cône de révolution de l'axe Oz et de demi-angle β au sommet (figure 4.21).

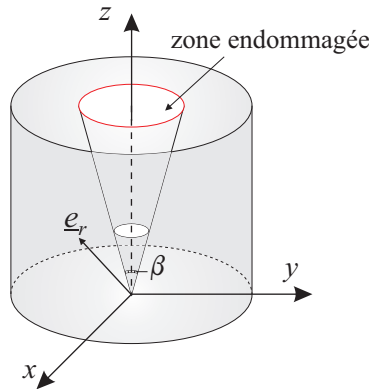


FIGURE 4.21 – Essai de compression simple : zone endommagée

Le tenseur $\mathbb{C}$ décrivant le comportement macroscopique est estimé en fonction du paramètre d'endommagement β par la relation :

$$\mathbb{C}(\beta) = \mathbb{C}^m + \alpha^r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\beta}^{\pi/2} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.73)$$

Le comportement macroscopique du système devient isotrope transverse autour de l'axe Oz . On obtient les relations entre les déformations suivantes :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{S_{xxyy}(\beta)}{S_{xxzz}(\beta)} \epsilon_{zz} = \nu(\beta) \frac{\delta}{H} \quad (4.74)$$

où $\nu = \frac{S_{xxyy}}{S_{xxzz}}$, S_{xxyy} et S_{xxzz} sont les composantes du tenseur des complaisances $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$.

Le tenseur des déformations macroscopiques est déterminé par :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\beta) = \frac{-\delta}{H} (-\nu(\beta) [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y] + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (4.75)$$

La déformation axiale de la phase renforcement représentant les fibres orientées suivant la direction de $\underline{e}_r(\theta, \phi)$, est alors donnée par :

$$\varepsilon^r(\theta, \beta) = \underline{\underline{\epsilon}}(\beta) : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = -\frac{\delta}{H} ((\nu(\beta) + 1) \cos^2 \theta - \nu(\beta)) \quad (4.76)$$

Les phases renforcement représentant les fibres orientées suivant une direction située sur le bord du cône des fibres endommagées ($\theta = \beta$) étant à leur limite d'élasticité, β satisfait l'équation suivante :

$$f^r(\sigma^r, \beta) = \alpha^r |\varepsilon^r(\theta, \beta)| - \sigma_0^r = 0 \quad (4.77)$$

qui s'écrit compte tenu de (4.76) :

$$\alpha^r \frac{\delta}{H} ((\nu(\beta) + 1) \cos^2 \beta - \nu(\beta)) - \sigma_0^r = 0 \quad (4.78)$$

La résolution de cette dernière équation permet de trouver la valeur de β . La relation contrainte-déformation suivant l'axe Oz s'écrit, dans cette phase :

$$\Sigma = \left(\frac{1}{S_{zzzz}(\beta)} \right) \frac{\delta}{H} \quad (4.79)$$

Les fibres orientées dans le plan Oxy ($\theta = \pi/2$) sont alors soumises à la traction la plus forte. La seconde phase d'endommagement a donc lieu lorsque les déformations axiales de ces fibres atteignent la limite en traction. On note δ^* et β^* les valeurs de δ et β à cette limite, elles vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} f^r(\sigma^r, \beta^*) = \alpha^r \frac{\delta^*}{H} ((\nu(\beta^*) + 1) \cos^2 \beta^* - \nu(\beta^*)) - \sigma_0^r = 0 \\ f^r(\sigma^r, \pi/2) = -\alpha^r \frac{\delta^*}{H} (-\nu(\beta^*)) - \sigma_0^r = 0 \end{cases} \quad (4.80)$$

Au-delà de ces valeurs, un deuxième cône de fibres endommagées, symétrique par rapport à l'axe de sollicitation Oz , caractérisé par l'angle γ , apparaît, se propageant jusqu'à l'endommagement total de toutes les fibres de renforcement (figure 4.22). Le tenseur $\mathbb{C}$

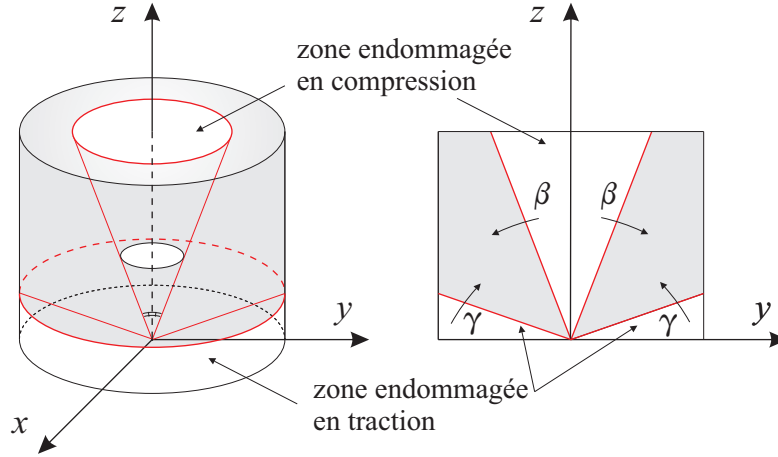


FIGURE 4.22 – Essai de compression simple : zones endommagées

décrivant le comportement élastique macroscopique dans cette second phase est évalué en fonction des paramètres d'endommagement β et γ par :

$$\mathbb{C}(\beta, \gamma) = \mathbb{C}^m + \alpha^r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\beta}^{\gamma} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.81)$$

Les phases renforcement représentant les fibres de direction $(\theta = \beta)$ et $(\theta = \gamma)$ étant à leur limite d'élasticité en compression et en traction, les deux paramètres β et γ vérifient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} f^r(\sigma^r, \theta = \beta) = \alpha^r \frac{\delta}{H} ((\nu(\beta, \gamma) + 1) \cos^2 \beta - \nu(\beta, \gamma)) - \sigma_0^r = 0 \\ f^r(\sigma^r, \theta = \gamma) = -\alpha^r \frac{\delta}{H} ((\nu(\beta, \gamma) + 1) \cos^2 \gamma - \nu(\beta, \gamma)) - \sigma_0^r = 0 \end{cases} \quad (4.82)$$

dont la résolution est effectuée numériquement. La relation contrainte-déformation selon la direction Oz est alors donnée par :

$$\Sigma = \left(\frac{1}{S_{zzzz}(\beta, \gamma)} \right) \frac{\delta}{H} \quad (4.83)$$

Le chargement est par la suite poursuivi jusqu'à la rupture de toutes les phases renforcement, le comportement macroscopique se réduisant à celui de la matrice seule.

Les résultats sont présentés sur la figure 4.23 donnant l'évolution de Σ en fonction de $\frac{\delta}{H}$.

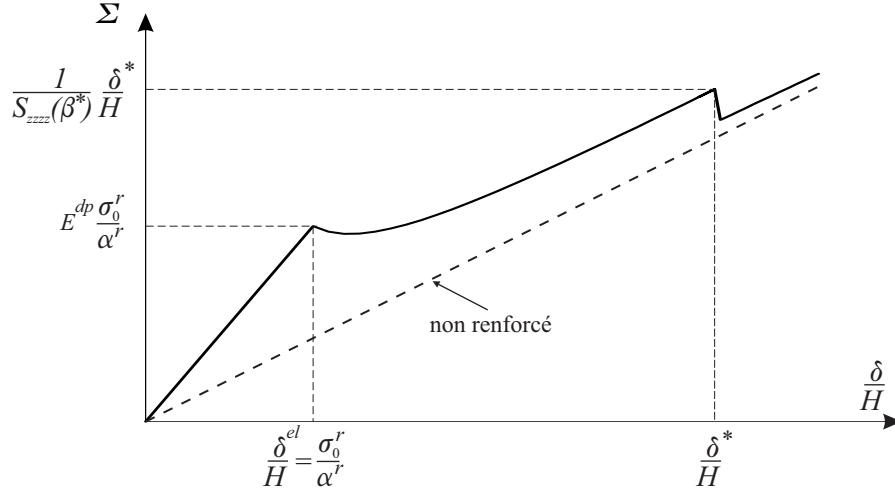


FIGURE 4.23 – Courbe contrainte-déformation : essai de compression simple

Cette courbe montre trois phases successives. La première phase correspond à une évolution élastique qui prend fin lorsque la contrainte axiale dans la phase renforcement, représentant la famille de fibres orientées suivant la direction de sollicitation Oz atteint la valeur limite σ_0^r . La deuxième phase est une phase d'endommagement, qui correspond à l'évolution du cône d'angle β . Enfin, la troisième phase apparaît lorsque les phases renforcement représentant les fibres du plan Oxy "cassent" en traction (cône de l'angle γ) par effet de *Poisson*. Une deuxième zone endommagée apparaît alors et se propage jusqu'à l'endommagement de toutes les fibres de renforcement.

4.3 Comportement élasto-plastique d'un matériau à fibres

4.3.1 Comportement élasto-plastique

Phase matrice

On suppose que la phase matrice est élastique parfaitement plastique. On définit le domaine d'élasticité G^m comme l'ensemble des états de contraintes à l'intérieur duquel

toute évolution est réversible (élastique). Ce domaine est caractérisé par la fonction de charge f^m qui vérifie :

$$\begin{cases} f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) < 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ est à l'intérieur de } G^m \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ est sur la frontière de } G^m \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) > 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ est à l'extérieur de } G^m \end{cases} \quad (4.84)$$

Le critère de plasticité de la phase matrice s'écrit alors :

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0 \quad (4.85)$$

Les déformations se décomposent en la somme d'une partie *élastique* (réversible) et d'une partie *plastique* (irréversible) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^m = \underline{\underline{\varepsilon}}_e^m + \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m \quad (4.86)$$

et la loi de comportement élasto-plastique peut être écrite sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \mathbb{C}^m : (\underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m) \quad (4.87)$$

Le taux de déformation plastique est donné par la *règle d'écoulement* qui s'écrit :

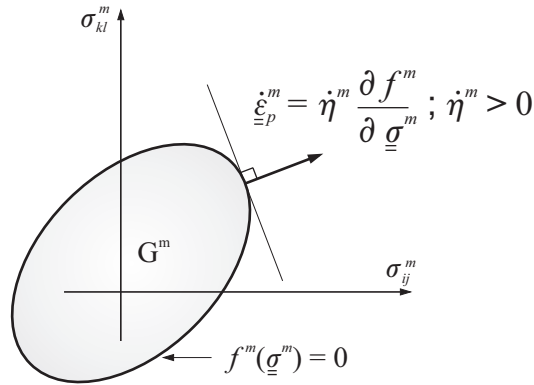


FIGURE 4.24 – Critère de plasticité et règle d'écoulement plastique dans le cas associé de la phase matrice

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\eta}^m \frac{\partial g^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \quad \text{avec} \quad \dot{\eta}^m \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = \dot{f}^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.88)$$

où $\dot{\eta}^m$ est le multiplicateur plastique et g^m est le potentiel plastique qui se confond avec f^m dans le cas d'une règle d'écoulement plastique associée ([29]), traduisant la normalité du taux des déformations plastiques par rapport à la frontière du domaine d'élasticité. (figure 4.24)

Phase renforcement

Le comportement élasto-plastique de chaque phase renforcement est exprimé par une relation de la forme :

$$\sigma^r = \alpha^r (\varepsilon^r - \varepsilon_p^r) \quad (4.89)$$

où ε_p^r est la déformation plastique de la phase renforcement, dont l'évolution satisfait la règle d'écoulement plastique :

$$\dot{\varepsilon}_p^r = \dot{\eta}^r \frac{\partial f^r}{\partial \sigma^r} \quad \text{avec} \quad \dot{\eta}^r \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f^r(\sigma^r) = \dot{f}^r(\sigma^r) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.90)$$

où $\dot{\eta}^r$ est le multiplicateur plastique et f^r désigne la fonction de charge de la phase renforcement. Cette fonction de charge est formulée au moyen d'une condition de la forme :

$$f^r(\sigma^r) \leq 0 \quad (4.91)$$

ou encore $|\sigma^r| \leq \sigma_o^r$, si les fibres ont mêmes limites d'élasticité en traction et en compression.

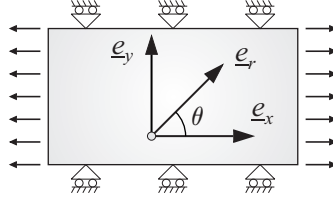
La résolution d'un problème d'évolution élasto-plastique mettant en jeu un tel matériau à fibre, modélisé comme un système multiphasique, consiste à exhiber un champ d'efforts intérieurs $\{\underline{\underline{\sigma}}^m, \{\sigma^r\}\}$ *statiquement admissible* et *plastiquement admissible* (il satisfait aux critères de plasticité des phases matrice et renforcement : $f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0$ et $f^r(\sigma^r) \leq 0$) d'une part, et un champ de déplacement $\{\xi\}$ *cinématiquement admissible* d'autre part, ces champs étant associés en tout point par les lois de comportement élasto-plastique de la phase matrice (4.87) et de la phase renforcement (4.89).

4.3.2 Un exemple d'application

On présente dans cette section une première application du modèle multiphasique mettant en jeu des phases matrice et renforcements élasto-plastiques. On reprend pour ce faire, l'exemple de l'éprouvette en matériau renforcé par une distribution plane et continue de fibres, soumise à une déformation uniaxiale homogène, traité à la section 4.2.2, la matrice et les phases renforcement étant élastiques parfaitement plastiques.

Position du problème

L'éprouvette considérée est soumise à une déformation macroscopique homogène : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ (figure 4.25).

FIGURE 4.25 – Déformation homogène ϵ_{xx} imposée

La phase matrice est supposée élastique de coefficients de *Lamé* (λ^m, μ^m) parfaitement plastique standard, obéissant au critère de von Mises qui s'écrit :

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}}^m : \underline{\underline{s}}^m} - k^m \leq 0 \quad (4.92)$$

où k^m est la cohésion de la matrice et $\underline{\underline{s}}^m$ la partie déviatorique de la contrainte :

$$\underline{\underline{s}}^m = \underline{\underline{\sigma}}^m - \frac{1}{3}(\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^m))\underline{\underline{I}} \quad (4.93)$$

Chaque phase renforcement est élastique parfaitement plastique (figure 4.26). Elle obéit au critère de plasticité parfaite, unidimensionnel :

$$f^r(\sigma^r) = |\sigma^r| - \sigma_0^r \leq 0 \quad (4.94)$$

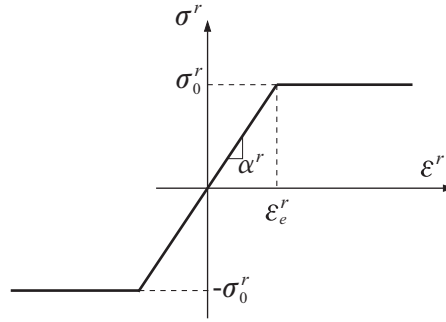


FIGURE 4.26 – Comportement élasto-plastique de la phase renforcement

On note que la limite d'élasticité de la phase renforcement en traction-compression pure σ_0^r est liée à celle du matériau constitutif des fibres σ_0^f par :

$$\sigma_0^r = \eta^r \sigma_0^f = \begin{cases} \frac{f^r \sigma_0^f}{\pi} & \text{cas d'une distribution bidimensionnelle de fibres} \\ \frac{f^r \sigma_0^f}{2\pi} & \text{cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres} \end{cases} \quad (4.95)$$

La solution en phase élastique de ce problème est identique à celle développée à la section 4.2.2 :

$$\Sigma_{xx} = \left(\lambda^m + 2\mu^m + \frac{3\pi\alpha^r}{8} \right) \epsilon_{xx} \quad (4.96)$$

Par ailleurs, l'hypothèse d'*adhérence parfaite* combinée avec les lois de comportement microscopique des phases matrice et renforcement permettent d'accéder aux contraintes microscopiques :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = (\lambda^m + 2\mu^m) \epsilon_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \lambda^m \epsilon_{xx} (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (4.97)$$

pour la phase matrice et :

$$\sigma^r = \alpha^r \epsilon_{xx} \cos^2 \theta \quad (4.98)$$

pour la phase renforcement représentant les fibres d'orientation θ .

Les différentes phases restent élastiques tant que les critères de plasticité respectifs sont satisfaits, soit :

$$f^m(\sigma^m) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}}^m : \underline{\underline{s}}^m} - k^m = \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu^m \epsilon_{xx} - k^m \leq 0 \quad (4.99)$$

et

$$f^r(\sigma^r) = \alpha^r \epsilon_{xx} \cos^2 \theta - \sigma_0^r \leq 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (4.100)$$

soit, en exprimant ces conditions sur la déformation homogène imposée ϵ_{xx} :

$$\epsilon_{xx} \leq \epsilon_{el}^m = \frac{\sqrt{3}k^m}{2\mu^m} \quad (4.101)$$

$$\epsilon_{xx} \leq \epsilon_{el}^r = \frac{\sigma_0^r}{\alpha^r} = \epsilon_0^r \quad (4.102)$$

où ϵ_{el}^m (resp. ϵ_{el}^r) désigne la limite d'élasticité de la structure dans le cas où la phase matrice (resp. phase renforcement) plastifie en premier.

On a dès lors trois cas de figures possibles suivant la valeur du paramètre adimensionnel ρ défini par :

$$\rho = \frac{\epsilon_{el}^r}{\epsilon_{el}^m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{k^m}{\mu^m \epsilon_0^r} \quad (4.103)$$

- $\rho < 1$: La limite d'élasticité des phases renforcement est inférieure à celle de la phase matrice. La phase renforcement représentant les fibres orientées suivant la direction de sollicitation atteint la limite d'élasticité tandis que la phase matrice reste élastique.
- $\rho = 1$: Ce cas correspond au cas où les phases matrice et renforcement ($\theta = 0$) plastifient simultanément, les deux limites d'élasticité des deux phases étant égales. .
- $\rho > 1$: Dans ce cas, la limite d'élasticité de la phase matrice est atteinte alors que les phases renforcement restent élastiques.

Dans ce qui suit, on développe la solution élasto-plastique du problème pour les trois cas suivant la valeur du paramètre adimensionnel ρ .

Cas 1 : $\rho < 1$ (plastification des phases renforcements en premier)

La limite d'élasticité est atteinte pour $\epsilon_{xx} = \epsilon_{el}^r$. Au-delà de cette valeur, une zone de fibres plastifiées va se propager, les phases renforcement représentant les fibres se trouvant dans l'intervalle $[0, \beta]$ et $[\pi - \beta, \pi]$ vont se plastifier (figure 4.27) tandis que la phase matrice reste élastique.

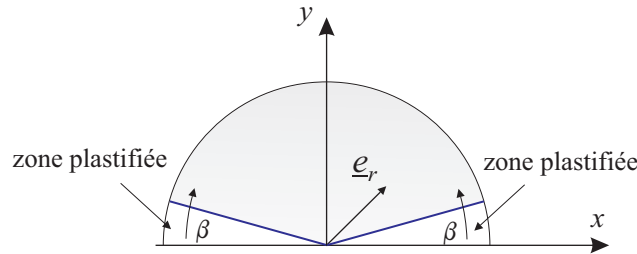


FIGURE 4.27 – Déformation macroscopique uniaxiale : zones plastifiées

Les phases renforcement représentant les fibres de direction β étant à leur limite d'élasticité, l'angle β peut alors être déterminé par :

$$\beta = \arccos \sqrt{\frac{\epsilon_0^r}{\epsilon_{xx}}} \quad (4.104)$$

tandis que la contrainte macroscopique Σ_{xx} est donnée par :

$$\Sigma_{xx} = (\lambda^m + 2\mu^m) \epsilon_{xx} + \alpha^r \epsilon_{xx} \int_{\beta}^{\pi-\beta} \cos^4 \theta d\theta + 2\sigma_0^r \int_0^{\beta} \cos^2 \theta d\theta \quad (4.105)$$

La plastification de la matrice a lieu lorsque la déformation imposée ϵ_{xx} atteint la valeur limite $\underline{\epsilon}_{el}^m$. A ce moment, la contrainte suivant la direction x de la phase matrice vaut :

$$\sigma_{el}^m = (\lambda^m + 2\mu^m) \epsilon_{el}^m \quad (4.106)$$

La contrainte macroscopique Σ_{xx}^* à cette limite est obtenue en (4.105) en remplaçant ϵ_{xx} par ϵ_{el}^m .

Au delà de cette valeur, la contrainte σ_{xx}^m s'exprime par (voir [7]) :

$$\sigma_{xx}^m = \sigma_{el}^m + \frac{3\lambda^m + 2\mu^m}{3} (\epsilon_{xx} - \epsilon_{el}^m) \quad (4.107)$$

La composante suivant l'axe de sollicitation du tenseur de contrainte macroscopique est alors donnée par :

$$\Sigma_{xx} = \sigma_{el}^m + \frac{3\lambda^m + 2\mu^m}{3} (\epsilon_{xx} - \epsilon_{el}^m) + \alpha^r \int_{\beta}^{\pi-\beta} \epsilon_{xx} \cos^4 \theta d\theta + 2\sigma_0^r \int_0^{\beta} \cos^2 \theta d\theta \quad (4.108)$$

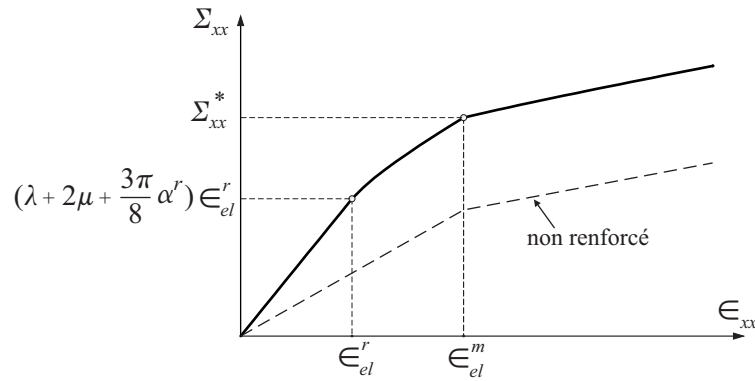


FIGURE 4.28 – Déformation macroscopique uniaxiale : courbe contrainte-déformation - plastification des phases renforcements en premier

La figure 4.28 représente la courbe contrainte-déformation macroscopique suivant la direction de sollicitation x . Elle fait clairement apparaître une phase élastique jusqu'à la plastification de la phase renforcement représentant la fibre suivant la direction Ox , suivie d'une première phase élasto-plastique correspondant à la propagation des zones plastiques. Une seconde phase élasto-plastique se manifeste avec la propagation de la plastification des phases renforcement et la plastification de la phase matrice.

Cas 2 : $\rho = 1$ (plastification simultanée des phases)

Dans ce cas la phase matrice et la phase renforcement représentant la fibre suivant la direction x plastifient simultanément et on a donc l'expression de la contrainte macroscopique Σ_{xx} :

$$\Sigma_{xx} = \sigma_{el}^m + \frac{3\lambda^m + 2\mu^m}{3}(\epsilon_{xx} - \epsilon_{el}^m) + \alpha^r \int_{\beta}^{\pi-\beta} \epsilon_{xx} \cos^4 \theta d\theta + 2\sigma_0^r \int_0^{\beta} \cos^2 \theta d\theta \quad (4.109)$$

La courbe contrainte-déformation correspondante est représentée sur la figure 4.29.

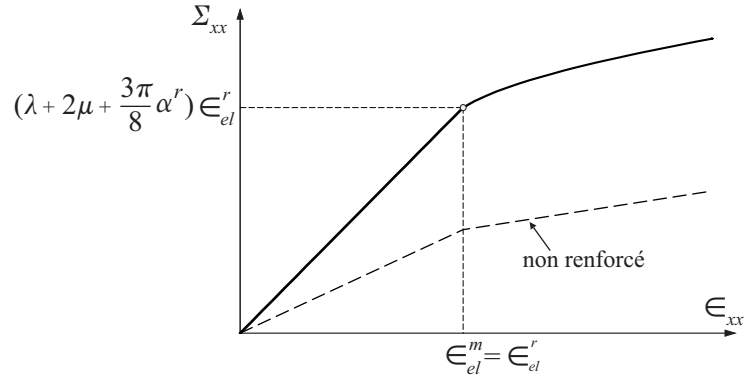


FIGURE 4.29 – Déformation macroscopique uniaxiale : courbe contrainte-déformation - plastification simultanée des phases

Cas 3 : $\rho > 1$ (plastification de la phase matrice en premier)

Le cas où $\rho > 1$ correspond à la situation où la contrainte limite de la phase matrice est atteinte, alors que les phases renforcements restent élastiques.

L'expression de Σ_{xx} quand la déformation imposée vient de dépasser la valeur limite ϵ_{el}^m est donnée par :

$$\Sigma_{xx} = \sigma_{el}^m + \frac{3\lambda^m + 2\mu^m}{3}(\epsilon_{xx} - \epsilon_{el}^m) + \frac{3\pi\alpha^r}{8} \epsilon_{xx} \quad (4.110)$$

Le développement de la solution quand les phases renforcements commencent à plastifier, c'est-à-dire $\epsilon_{xx} > \epsilon_{el}^r$, est analogue à celui de la seconde phase élasto-plastique du cas précédent ($\rho < 1$).

$$\Sigma_{xx} = \sigma_{el}^m + \frac{3\lambda^m + 2\mu^m}{3}(\epsilon_{xx} - \epsilon_{el}^m) + \alpha^r \int_{\beta}^{\pi-\beta} \epsilon_{xx} \cos^4 \theta d\theta + 2\sigma_0^r \int_0^{\beta} \cos^2 \theta d\theta \quad (4.111)$$

La courbe contrainte-déformation est représentée pour ce cas sur la figure 4.30

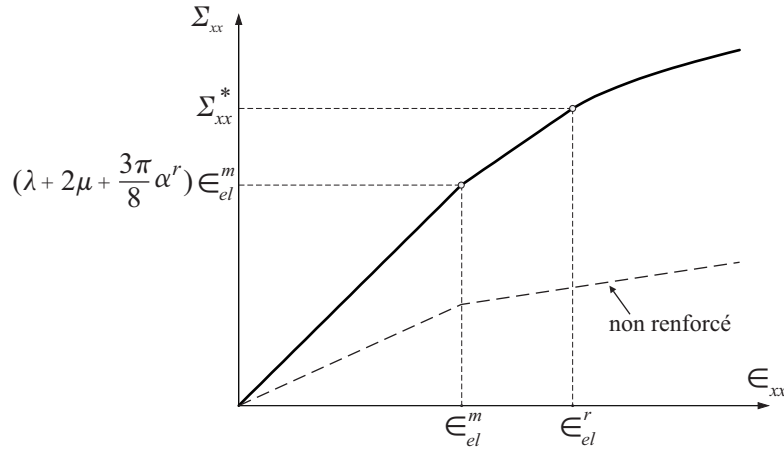


FIGURE 4.30 – *Déformation macroscopique uniaxiale : courbe contrainte-déformation- plastification de la phase matrice en premier*

4.4 Conclusion

Une extension du modèle multiphasique à la prise en compte d'un comportement anélastique des constituants a été réalisée. Ceci se fait par l'identification du comportement de chacune des phases à celui du composant macroscopique qu'elle représente : le comportement des phases renforcement est identifié à celui des fibres, le comportement de la phase matrice est identifié à celui de la matrice du matériau composite. Tout d'abord on s'est intéressé à des matériaux composites, tels que le plâtre renforcé par fibres ou certains tissus osseux, dont les fibres sont élastiques endommageables tandis que la matrice montre un comportement élastique linéaire.

Les solutions analytiques de quelques problèmes types ont été élaborées, montrant la capacité du modèle multiphasique à rendre compte du comportement anélastique des composites à fibres equi-orientées et sa facilité de sa mise en œuvre. Ces solutions seront utilisées comme solutions de références pour la validation de l'outil numérique que l'on présentera au chapitre suivant.

Le cas particulier des fibres "souples" qui ne sont capables de reprendre que des efforts de traction a été aussi étudié et une solution semi-analytique du problème de traction en déformation plane d'un composite à fibres "souples" a été développée et comparée au cas où la raideur et la résistance des fibres en compression est prise en compte, permettant ainsi de quantifier le rôle joué par ces paramètres sur la raideur et la résistance macroscopique du composite.

Dans le but de décrire le comportement d'autres matériaux composites à fibres, dont les constituants sont ductiles, la section 4.3 a été consacrée à l'extension du modèle à la prise en compte d'un comportement élasto-plastique des différents constituants. La solution analytique du problème de traction œdométrique d'une éprouvette constituée d'un matériau composite à fibres dont les constituants sont élasto-plastiques parfaits a été développée. Elle montre l'existence d'un paramètre adimensionnel ρ qui fait intervenir les raideurs et résistances des phases et dont la valeur joue un rôle sur la séquence de plastification des différents constituants. Cette solution analytique servira, par ailleurs, à la qualification du code de calcul par éléments finis dont la présentation fait l'objet du chapitre suivant.

* *

*

Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique

Sommaire

5.1	Introduction	93
5.2	Discrétisation de la distribution de fibres	93
5.3	Mise en œuvre numérique du modèle en élasticité	94
5.3.1	Energie potentielle d'un milieu multiphasique	94
5.3.2	Principe du minimum de énergie potentielle	96
5.3.3	Formulation variationnelle	99
5.3.4	Application de la méthode des éléments finis au système multiphasique	99
5.4	Prise en compte d'un comportement élastique fragile des fibres	105
5.4.1	Simulation numérique du problème de traction en déformation plane	108
5.4.2	Calcul d'une poutre renforcée soumise à un chargement de flexion en déformation plane	110
5.5	Mise en œuvre numérique du modèle en élasto-plasticité	113
5.5.1	Position d'un problème d'évolution d'élasto-plastique d'un milieu multiphasique	113
5.5.2	Discrétisation temporelle de l'évolution et algorithme itératif	115
5.5.3	Formulation par la méthode des élément finis	117
5.5.4	Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en plasticité	121
5.5.5	Poinçonnement d'un demi-espace renforcé	123
5.6	Application du code de calcul multiphasique	125
5.7	Conclusions	126

5.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la mise en œuvre numérique du modèle multiphasique dans le cadre de la méthode des éléments finis. Se plaçant dans un premier temps dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des différents constituants et sous l'hypothèse d'*adhérence parfaite* entre les phases matrice et renforcements, le principe du minimum de l'énergie potentielle des systèmes multiphasiques est démontré aboutissant à une formulation variationnelle des problèmes aux limites.

En s'appuyant sur la présentation de la méthode des éléments finis exposée dans [15] pour les milieux continus tridimensionnels, les éléments finis multiphasiques sont succinctement présentés à la section 5.3.4

Les sections 5.4 et 5.6 sont consacrées à la mise en œuvre numérique du modèle dans le cadre d'un comportement anélastique des constituants. Le chapitre se termine par la validation de l'outil de calcul développé et son application à la détermination de la réponse de structures constituées de composites à fibres.

5.2 Discrétisation de la distribution de fibres

Afin de développer un outil de calcul robuste permettant d'aborder le calcul des structures en matériaux renforcés par fibres, la distribution continue de fibres est tout d'abord remplacée par une distribution discrète de N fibres équi-orientées (figure 5.1).

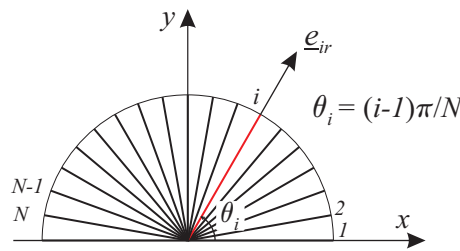


FIGURE 5.1 – Distribution discrète des fibres

La fraction volumique de la famille de fibre i , repérée par l'angle $\theta_i = \pi(i-1)/N$ ($i = 1..N$) est alors reliée à la fraction volumique totale des fibres renforcement f^r par la relation suivante :

$$f^i = \frac{f^r}{N} \quad (5.1)$$

Dans ce cas, la raideur en traction-compression de la phase renforcement représentant la famille de fibres i s'exprime par :

$$\mathfrak{a}^r = f^i E^f = \frac{f^r}{N} E^f \quad (5.2)$$

5.3 Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élasticité linéaire

5.3.1 Énergie potentielle d'un milieu multiphasique

L'énergie potentielle d'un milieu multiphasique est fonction des champs de déplacement $\underline{\xi}^m$ de la phase matrice et $\underline{\xi}_1^r \dots \underline{\xi}_N^r$ des phases renforcement. Dans le cas général, elle s'écrit par :

$$E(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}_1^r \dots \underline{\xi}_N^r) = W(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}_1^r \dots \underline{\xi}_N^r) - \Phi(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}_1^r \dots \underline{\xi}_N^r) \quad (5.3)$$

où W désigne l'énergie de déformation élastique du milieu multiphasique et Φ est le potentiel des efforts extérieurs donnés qui lui sont appliqués, soit :

$$W(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}_1^r \dots \underline{\xi}_N^r) = \int_{\Omega} \Psi(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}_1^r \dots \underline{\xi}_N^r) d\Omega \quad (5.4)$$

et

$$\Phi(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}_1^r \dots \underline{\xi}_N^r) = \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\xi}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{F}_i^r \cdot \underline{\xi}_i^r) d\Omega + \sum_{j=1}^3 \left[\int_{\partial\Omega_{T_j}} \left\{ T_{dj}^m \xi_j^m + \sum_{i=1}^N (T_{di}^r)_j (\xi_i^r)_j \right\} dS \right] \quad (5.5)$$

où $\partial\Omega_{T_j}$ est la partie du bord $\partial\Omega$ de la structure sur laquelle sont données les composantes selon $\underline{e}_j$ des densités surfaciques d'efforts pour la phase matrice ($T_j^m = T_{dj}^m$) et la phase renforcement i ($(T_i^r)_j = (T_{di}^r)_j$).

Dans l'équation (5.4), Ψ désigne la *densité volumique d'énergie libre (énergie élastique) du système multiphasique*, qui s'écrit comme la somme des énergies libres des phases et de leur interaction, soit avec les notations introduites au chapitre 2 :

$$\Psi = \Psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \sum_{i=1}^N \Psi_i^r(\underline{\underline{\varepsilon}}_i^r) + \sum_{i=1}^N \Psi_i^I(\Delta \underline{\underline{\xi}}_i) \quad (5.6)$$

- Ψ^m est la *densité volumique d'énergie libre de la phase matrice* donnée, sous l'hypothèse d'isotropie, par :

$$\Psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \frac{\lambda^m}{2} (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^m)^2 + \mu^m \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^m)^2 \quad (5.7)$$

- Ψ_i^r est la densité volumique d'énergie libre de la phase renforcement i donnée par :

$$\Psi_i^r(\underline{\underline{\varepsilon}}_i^r) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}_i^r : \mathbb{C}_i^r : \underline{\underline{\varepsilon}}_i^r = \frac{1}{2} \mathbf{a}^r \varepsilon_{ii}^2 \quad (5.8)$$

où $\mathbb{C}_i^r = \mathbf{a}^r \underline{\underline{e}}_i^r \otimes \underline{\underline{e}}_i^r \otimes \underline{\underline{e}}_i^r \otimes \underline{\underline{e}}_i^r$ désigne le tenseur d'élasticité de la phase renforcement i .

- Ψ_i^I est la densité volumique d'énergie libre d'interaction entre la phase renforcement i et la phase matrice donnée par :

$$\Psi_i^I(\Delta \underline{\underline{\xi}}) = \frac{1}{2} (\Delta \underline{\underline{\xi}}_i \cdot \underline{\underline{C}}^I \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}}_i) \quad (5.9)$$

et on suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les phases renforcement.

Compte tenu des expressions des énergies libres des phases matrice et renforcement et de leur interaction, l'énergie de déformation élastique s'exprime en fonction des variables de déformation $(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon_1^r \dots \varepsilon_N^r, \Delta \underline{\underline{\xi}}_i)$ par :

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon_1^r \dots \varepsilon_N^r) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [(\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\varepsilon}}_i^r : \mathbb{C}_i^r : \underline{\underline{\varepsilon}}_i^r + \sum_{i=1}^N \Delta \underline{\underline{\xi}}_i \cdot \underline{\underline{C}}^I \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}}_i] d\Omega \quad (5.10)$$

Remplaçant dans (5.3), l'énergie de déformation et le potentiel des efforts extérieurs par leurs expressions (5.5) et (5.10), il vient :

$$\begin{aligned} E(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}_1^r \dots \underline{\underline{\xi}}_N^r) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[(\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\varepsilon}}_i^r : \mathbb{C}_i^r : \underline{\underline{\varepsilon}}_i^r + \sum_{i=1}^N \Delta \underline{\underline{\xi}}_i \cdot \underline{\underline{C}}^I \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}}_i \right] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} (\rho^m \underline{\underline{F}}^m \cdot \underline{\underline{\xi}}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{\underline{F}}_i^r \cdot \underline{\underline{\xi}}_i^r) d\Omega - \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{i=1}^N \{ (T_{di}^r)_j (\xi_i^r)_j \} dS \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

En adoptant l'hypothèse d'adhérence parfaite entre phases ($\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^m = \underline{\underline{\xi}}_i^r$, $\varepsilon_{ii} = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{e}}_i^r \otimes \underline{\underline{e}}_i^r$, $i = 1 \dots N$) on obtient :

$$\begin{aligned} E(\underline{\underline{\xi}}) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\varepsilon}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^r \varepsilon_{ii} \right] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} (\rho^m \underline{\underline{F}}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{\underline{F}}_i^r) \cdot \underline{\underline{\xi}} d\Omega - \sum_{j=1}^3 \int_{\partial \Omega_{T_j}} (T_d)_j \xi_j dS \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec

$$(T_d)_j = (T_d^m)_j + \sum_{i=1}^N (T_{di}^r)_j \quad (5.13)$$

5.3.2 Principe du minimum de l'énergie potentielle pour un milieu multiphasique élastique

La fonctionnelle *énergie potentielle* définie par (5.12) vérifie le *principe de minimum* de la façon suivante :

Soit $\underline{\xi}$ la *solution en déplacement* du problème d'élasticité, alors :

$$\forall \underline{\xi}' \in \mathcal{C.A.} \quad E(\underline{\xi}) \leq E(\underline{\xi}') \quad (5.14)$$

où $\mathcal{C.A.}$ désigne l'ensemble des champs de déplacement *cinématiquement admissibles* pour le problème :

$$\mathcal{C.A.} = \left\{ \underline{\xi}' ; \xi_j' = \xi_{dj} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{T_j} \right\} \quad (5.15)$$

Soit $\delta\underline{\xi}$ l'écart du champ $\underline{\xi}'$ au champ de déplacement $\underline{\xi}$ *solution* du problème :

$$\delta\underline{\xi} = \underline{\xi}' - \underline{\xi} \quad (5.16)$$

L'écart de l'énergie potentielle du champ de déplacement $\underline{\xi}'$ à celle de la solution est donné par :

$$\delta E = E(\underline{\xi}') - E(\underline{\xi}) = E(\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}) - E(\underline{\xi}) \quad (5.17)$$

Compte tenu de (5.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta E = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} [(\underline{\varepsilon} + \delta\underline{\varepsilon}) : \mathbb{C}^m : (\underline{\varepsilon} + \delta\underline{\varepsilon})] \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\mathbf{a}^r(\varepsilon_{ii} + \delta\varepsilon_{ii})^2] \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\underline{\varepsilon} : \mathbb{C}^m : \underline{\varepsilon} + \mathbf{a}^r \varepsilon_{ii}^2] \, d\Omega - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{F}_i^r) \cdot (\underline{\xi} + \delta\underline{\xi}) \, d\Omega \\ & - \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_{T_j}} (T_d)_j (\xi_j + \delta\xi_j) \, dS + \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{F}_i^r) \cdot \underline{\xi} \, d\Omega + \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_{T_j}} (T_d)_j \xi_j \, dS \end{aligned} \quad (5.18)$$

et donc, après simplification :

$$\begin{aligned} \delta E = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} [2\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [2\mathbf{a}^r \varepsilon_{ii} \delta\varepsilon_{ii} + \mathbf{a}^r \delta\varepsilon_{ii}^2] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{F}_i^r) \cdot \delta\underline{\xi} d\Omega - \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_{T_j}} (T_d)_j (\delta\xi)_j dS \end{aligned} \quad (5.19)$$

où $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\delta\varepsilon_{ii}$ désignent les champs de déformation de la phase matrice et des phases renforcement associés au champ de déplacement $\delta\underline{\xi}$

Introduisant les champs de contraintes $(\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma_1^r, \dots, \sigma_N^r)$ *solutions* du problème, c'est-à-dire associés aux champs de déformations $(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon_1^r, \dots, \varepsilon_N^r)$ par les lois de comportement élastique des phases :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m ; \quad \sigma_i^r = \mathbf{a}^r \varepsilon_i^r, \quad i = 1..N \quad (5.20)$$

l'expression (5.19) devient :

$$\begin{aligned} \delta E = & \int_{\Omega} [\underline{\underline{\sigma}}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \sigma_i^r \delta\varepsilon_{ii}] d\Omega - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{F}_i^r) \cdot \delta\underline{\xi} d\Omega - \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_{T_j}} (T_d)_j (\delta\xi)_j dS \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\delta\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^r \delta\varepsilon_{ii}^2 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (5.21)$$

Appliquant le *théorème des travaux virtuels* aux champs cinématiques $\delta\underline{\xi}$ et aux champs de contraintes $(\underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{\underline{\sigma}}_1^r, \dots, \underline{\underline{\sigma}}_N^r)$ *solutions* du problème et donc *statiquement admissibles*, il vient :

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^r \delta\varepsilon_{ii}) d\Omega = \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{F}_i^r) \cdot \delta\underline{\xi} d\Omega + \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega} T_j \delta\xi_j dS \quad (5.22)$$

Comme $\delta\underline{\xi}$ est la différence entre deux champs de déplacement *cinématiquement admissibles*, il vient :

$$\delta\xi_j = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{T_j} \quad (5.23)$$

d'où

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^r \delta\varepsilon_{ii}) d\Omega = \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{F}_i^r) \cdot \delta\underline{\xi} d\Omega + \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_j} T_j \delta\xi_j dS \quad (5.24)$$

L'écart de l'énergie potentielle d'un champ $\underline{\xi}'$ à celle de la solution élastique s'écrit finalement, compte tenu de (5.24) :

$$E(\underline{\xi}') - E(\underline{\xi}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \delta \underline{\varepsilon} : \mathbb{C}^m : \delta \underline{\varepsilon} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathbf{a}^r \delta \varepsilon_{ii}^2 \right) d\Omega \quad (5.25)$$

qui, du fait du caractère défini-positif des formes quadratiques associées à $\mathbb{C}^m$, et $\mathbf{a}^r$ est *positif ou nul* :

$$\forall \underline{\xi}' \in \mathcal{C.A.} \quad E(\underline{\xi}) - E(\underline{\xi}') \leq 0 \quad (5.26)$$

Le champ de déplacement solution du problème, minimise l'énergie potentielle sur l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles.

La solution est par ailleurs *unique*. En effet, supposant l'existence de deux solutions $(\underline{\xi}, \underline{\sigma}^m, \sigma_1^r \dots \sigma_N^r)$ et $(\underline{\xi}', \underline{\sigma}^{m'}, \sigma_1^{r'} \dots \sigma_N^{r'})$, ce principe du minimum de l'énergie potentielle s'écrit pour ces deux solutions :

$$E(\underline{\xi}) \leq E(\underline{\xi}') \quad \text{et} \quad E(\underline{\xi}') \leq E(\underline{\xi}) \quad (5.27)$$

Etant donné que les formes quadratiques associées à $\mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}_i^r$ ($i = 1 \dots N$) sont définies, il vient :

$$\begin{cases} E(\underline{\xi}) < E(\underline{\xi}') & \text{si} \quad \underline{\varepsilon} \neq \underline{\varepsilon}' \\ E(\underline{\xi}') < E(\underline{\xi}) & \text{si} \quad \underline{\varepsilon} \neq \underline{\varepsilon}' \end{cases} \quad (5.28)$$

Il en ressort que les champs de déformations des deux phases sont identiques :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}' \quad (5.29)$$

L'unicité de la solution est ainsi vérifiée pour les déformations, elle est aussi vérifiée pour les champs de contraintes. En revanche, elle n'est assurée pour les champs de déplacement qu'à *un mouvement rigidifiant* près :

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}' + \underline{\Omega} \wedge \underline{x} + \underline{u} \quad (5.30)$$

L'existence de la solution est par ailleurs assurée. La démonstration ne sera pas détaillée ici mais, à titre indicatif, elle repose sur le *théorème de Lax Milgram*. (voir [16]).

5.3.3 Formulation variationnelle

La recherche de la solution d'un problème d'élasticité revient, de par le principe du minimum établi ci-dessus, à la recherche du *minimum de l'énergie potentielle* :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{\xi}) \in \mathcal{C.A.} \quad \text{tel que :} \\ \forall (\underline{\xi}') \in \mathcal{C.A.} : E(\underline{\xi}) < E(\underline{\xi}') \end{cases} \quad (5.31)$$

qui est équivalente à la recherche de la solution du *problème variationnel* suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{\xi}) \in \mathcal{C.A.} \quad \text{tel que :} \\ \forall (\underline{\xi}') \in \mathcal{C.A.} : \mathfrak{L}((\underline{\xi}), (\underline{\xi}')) = \Phi(\underline{\xi}') \end{cases} \quad (5.32)$$

où $\mathfrak{L}(.,.)$ est la *forme bilinéaire associée à la forme quadratique* définie par la fonctionnelle énergie potentielle, qui s'écrit :

$$\mathfrak{L}(\underline{\xi}, \underline{\xi}') = \int_{\Omega} [(\underline{\varepsilon} : \mathbb{C}^m : \underline{\varepsilon}') + \sum_{i=1}^N (\mathbf{a}^r \varepsilon_{ii} \varepsilon'_{ii})] d\Omega \quad (5.33)$$

et $\Phi(.,.)$ est une *forme linéaire* exprimant le travail des efforts extérieurs donnés :

$$\Phi(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \sum_{i=1}^N \rho^r \underline{F}_i^r) \cdot \underline{\xi}' d\Omega + \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_{T_j}} (T_d)_j \xi'_j dS \quad (5.34)$$

5.3.4 Application de la méthode des éléments finis au système multiphasique

La recherche de la solution d'un problème d'élasticité par éléments finis consiste à trouver le champ de déplacement qui minimise la fonctionnelle énergie potentielle sur un *espace d'approximation inclus dans l'ensemble des champs cinématiquement admissibles*, ou d'une manière équivalente à résoudre le problème variationnel (5.32) sur cet espace d'approximation.

L'espace d'approximation est déterminé par la discrétisation géométrique de la structure en éléments finis (maillage), la donnée du degré d'approximation polynomiale n des champs sur chaque élément fini et l'ordre de la continuité de l'approximation.

5.3.4.1 Maillage

Le domaine est discrétisé en un nombre finis d'éléments (N_e) de formes géométriques simples interconnectés en des points appelés noeuds et des segments de droites appelés

arêtes. Les éléments assurent la couverture du domaine avec un recouvrement maximal de manière à ce que :

$$\Omega \simeq \bigcup_{n=1}^{N_e} \mathcal{V}_e^n \quad (5.35)$$

où $\mathcal{V}_e^n$ désigne l'élément fini numéro n .

Pour les problèmes multiphasiques, le *même maillage est adopté pour les phases matrice et renforcement* afin de pouvoir aussi bien assurer la condition d'*adhérence parfaite*, qu'inclure une loi d'interaction entre phases. La structure multiphasique à étudier est alors remplacée par une structure discrétisée équivalente.

On se limitera dans ce qui suit au cas d'un milieu multiphasique *sollicité en déformations planes dans le plan* (Oxy) et en condition d'*adhérence parfaite*. Les seuls degrés de liberté d'un tel système sont donc les deux déplacements (ξ_x, ξ_y) dans le plan. Chaque nœud du maillage étant ainsi muni de *deux degrés de liberté*, l'ensemble de ces degrés de liberté relatifs à l'élément fini n peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\{\xi\}_e^n = \left\{ \begin{pmatrix} \cdot \\ \xi_x^{k,n} \\ \xi_y^{k,n} \\ \cdot \end{pmatrix} \right\} \quad k = 1, \dots, n_e \quad (5.36)$$

où n_e désigne le nombre de nœuds sur chaque élément.

5.3.4.2 Approximation des champs de déplacement

Le champ de déplacement est continu sur chaque élément et aux nœuds. Les polynômes d'interpolation n'assurant que cette continuité C^0 sont appelés *polynômes de Lagrange*. L'expression littérale du champ de déplacement élémentaires sur l'élément fini n peut être retrouvée à partir du vecteur des déplacements élémentaires et de la matrice des fonctions de forme par la relation :

$$\{\xi\}(x, y) = [N]_e(x, y) \cdot \{\xi\}_e^n \quad (5.37)$$

avec

$$\{\xi\}(x, y) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_x(x, y) \\ \xi_y(x, y) \end{pmatrix} \right\} \quad (5.38)$$

et

$$[N]_e(x, y) = \left[\dots \begin{pmatrix} N_k(x, y) & 0 \\ 0 & N_k(x, y) \end{pmatrix} \dots \right] \quad (5.39)$$

où $N_k(x, y)$ est le polynôme de degré p tel que :

$$N_k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{au nœud } k \\ 0 & \text{aux autres nœuds} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_e \quad (5.40)$$

Les polynômes d'interpolation peuvent facilement se calculer sur chaque élément en fonction des coordonnées de ses nœuds, mais par souci d'optimisation des programmes de calcul, ils sont calculés sur l'*élément de référence* associé aux éléments finis employés, puis transformés pour obtenir les polynômes d'interpolation de l'élément donné.

Par exemple, pour des *éléments triangulaires à six nœuds* (T6), l'élément de référence est un triangle isocèle rectangle ayant deux côtés unitaires (figure 5.2) ([15]).

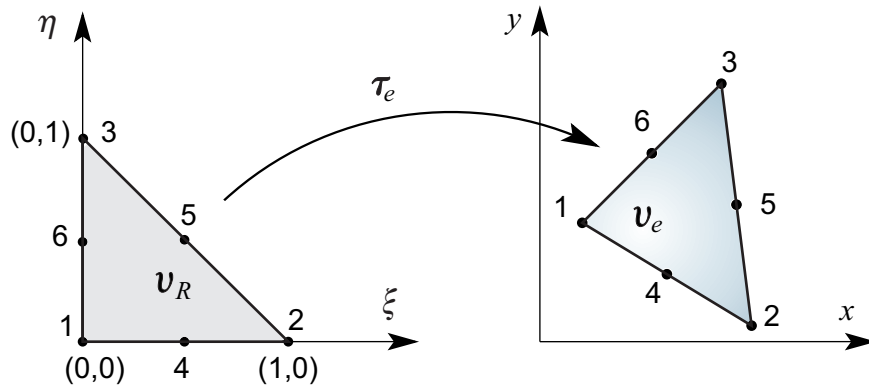


FIGURE 5.2 – Passage de l'élément de référence à l'élément réel

Désignant par τ_e la transformation géométrique permettant de passer de l'élément de référence $\mathcal{V}_R$ à l'élément réel $\mathcal{V}_e$:

$$\tau_e : (\xi, \eta) \longrightarrow (x, y) \quad (5.41)$$

On introduit la matrice jacobienne de la transformation τ_e :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

et le jacobien de la transformation :

$$J = \det[J] > 0 \quad (5.43)$$

Les dérivées des fonctions de forme peuvent aussi être calculées à partir des dérivées des fonctions de forme définies sur l'élément de référence par :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_k}{\partial x} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \quad (5.44)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

L'intégrale des fonctions de formes sur un élément quelconque peut ainsi être calculée sur l'élément de référence par :

$$\int_{\mathcal{V}_e} N_e(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{V}_R} N_e(\xi, \eta) J d\xi d\eta \quad (5.46)$$

où $\mathcal{V}_e$ désigne un élément réel quelconque.

5.3.4.3 Principe du minimum discrétisé

Les composantes du plan (Oxy) ainsi que la composante zz des contraintes et des déformations macroscopiques peuvent s'écrire, en tout point du milieu multiphasique, sous forme vectorielle suivante :

$${}^t\{\Sigma\} = \{\Sigma_{xx}, \Sigma_{yy}, \Sigma_{zz}, \Sigma_{xy}\} \quad (5.47)$$

$${}^t\{\in\} = \{\in_{xx}, \in_{yy}, \in_{zz}, 2\in_{xy}\} \quad (5.48)$$

de sorte que la loi de comportement élastique s'écrit :

$$\{\Sigma\} = \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot \{\in\} \quad (5.49)$$

avec :

$$[C^m] = \begin{bmatrix} \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & \lambda^m & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^m \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

La forme de la matrice d'élasticité C_i^r de la phase renforcement i :

$$[C_i^r] = \mathbf{a}^r \{ \mathbf{e}_{ir} \} \cdot {}^t \{ \mathbf{e}_{ir} \} \quad (5.51)$$

où $\{ \mathbf{e}_{ir} \}$ désigne le vecteur des composantes du tenseur $\underline{e}_{ir} \otimes \underline{e}_{ir}$ dans une base orthonormée, vérifiant l'identité :

$$\varepsilon_i^r = \underline{\underline{\varepsilon}} : (\underline{e}_{ir} \otimes \underline{e}_{ir}) \equiv {}^t \{ \mathbf{e}_{ir} \} \cdot \{ \varepsilon \} \quad (5.52)$$

Dans le plan (Oxy) , la direction de renforcement $\underline{e}_{ir}$ est repérée par un seul angle θ_i :

$$\underline{e}_{ir} = \cos \theta_i \underline{e}_x + \sin \theta_i \underline{e}_y \quad (5.53)$$

on déduit alors :

$${}^t \{ \mathbf{e}_{ri} \} = \{ \cos^2 \theta_i, \sin^2 \theta_i, 0, \sin \theta_i \cos \theta_i \} \quad (5.54)$$

d'où en tenant compte de (5.51) et (5.54) :

$$[C_i^r] = \mathbf{a}^r \begin{bmatrix} \cos^4 \theta_i & \cos^2 \theta_i \sin^2 \theta_i & 0 & \cos^3 \theta_i \sin \theta_i \\ \cos^2 \theta_i \sin^2 \theta_i & \sin^4 \theta_i & 0 & \cos \theta_i \sin^3 \theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos^3 \theta_i \sin \theta_i & \cos \theta_i \sin^3 \theta_i & 0 & \cos^2 \theta_i \sin^2 \theta_i \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

L'énergie de déformation du milieu multiphasique donnée par (5.10), peut s'écrire, compte tenu de (5.47), (5.48) et (5.49), sous la forme :

$$W(\{ \varepsilon \}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t \{ \varepsilon \} \cdot \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot \{ \varepsilon \} \, d\Omega \quad (5.56)$$

qui est égale, compte tenu de (5.35), à la somme des énergies de déformation sur tous les éléments du maillage, soit :

$$W(\{ \varepsilon \}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_e} \int_{\mathcal{V}_e^n} {}^t \{ \varepsilon \} \cdot \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot \{ \varepsilon \} (x, y) \, dx dy \quad (5.57)$$

Utilisant la transformation τ_e et la formule de transport (5.46), il vient :

$$W(\{ \varepsilon \}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_e} \int_{\mathcal{V}_R} {}^t \{ \varepsilon \} \cdot \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot \{ \varepsilon \} (\xi, \eta) \, J \, d\xi d\eta \quad (5.58)$$

Les déformations s'écrivent comme suit en fonction du champ de déplacement par élément :

$$\{\epsilon\}(x, y) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} (x, y) = [\partial] \cdot \{\xi\}(x, y) \quad (5.59)$$

soit compte-tenu de (5.37) :

$$\{\epsilon\}(x, y) = [\partial] \cdot [N]_e(x, y) \cdot \{\xi\}_e^n = [B]_e \cdot \{\xi\}_e^n \quad (5.60)$$

où $[B]_e$ est une matrice formée de n_e matrices $[B]_k$ de taille (4×2) :

$$[B]_e = [\dots, [B]_k, \dots] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (5.61)$$

avec d'après (5.38) :

$$[B]_k = \begin{bmatrix} N_{k,x} & 0 \\ 0 & N_{k,y} \\ 0 & 0 \\ N_{k,y} & N_{k,x} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

où les expressions de $N_{k,x} = \frac{\partial N_k}{\partial x}$ et $N_{k,y} = \frac{\partial N_k}{\partial y}$ sont données par (5.44). On obtient

finalement l'expression discrétisée de l'énergie de déformation :

$$\begin{aligned} W(\{\epsilon\}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_e} \int_{\mathcal{V}_R} {}^t\{\xi\}_e^n \cdot {}^t[B]_e \cdot \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot [B]_e \cdot \{\xi\}_e^n J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_e} {}^t\{\xi\}_e^n \cdot \left[\underbrace{\int_{\mathcal{V}_R} {}^t[B]_e \cdot [C^m] \cdot [B]_e J d\xi d\eta}_{[K]_e^m} + \sum_i^N \underbrace{\int_{\mathcal{V}_R} {}^t[B]_e \cdot [C_i^r] \cdot [B]_e J d\xi d\eta}_{[K]_{ei}^r} \right] \cdot \{\xi\}_e^n \\ &= \frac{1}{2} {}^t\{\xi\} \cdot [K] \cdot \{\xi\} \end{aligned} \quad (5.63)$$

où $[K]$ désigne la *matrice de rigidité globale* de la structure multiphasique obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires $[K]_e^m$ et $[K]_{ei}^r$ ($i = 1..N$) tandis que $\{\xi\}$ est le vecteur (matrice colonne) formé de tous les déplacements des nœuds de la structure.

En ce qui concerne les efforts extérieurs, on associe aux densités volumiques et surfaciques d'efforts extérieurs appliquées sur la phase matrice et les phases renforcement les vecteurs $\{\rho F\}$, $\{T\}$. La contribution élémentaire à l'énergie potentielle prend alors la forme :

$$\phi(\{\xi\}_e^n) = {}^t\xi\}_e^n \cdot \left[\underbrace{\int_{\mathcal{V}_e^n} {}^t[N]_e \cdot \{\rho F\} d\Omega}_{\{f^V\}_e^n} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}_e^n \cap \partial\Omega_T} {}^t[N]_e \cdot \{T\} dS}_{\{f^{S_T}\}_e^n} \right] \quad (5.64)$$

Le potentiel des efforts extérieurs s'écrit comme la somme des potentiels calculés sur chaque maille élémentaire :

$$\Phi(\{\xi\}) = \sum_{n=1}^{N_e} ({}^t\{f^V\}_e^n + \{f^{S_T}\}_e^n) \cdot \{\xi\}_e^n = \sum_{n=1}^{N_e} {}^t\{F\}_e^n \cdot \{\xi\}_e^n = {}^t\{F\} \cdot \{\xi\} \quad (5.65)$$

où $\{F\}$ désigne le vecteur sollicitation globale obtenu par assemblage des vecteurs sollicitations élémentaires ($\{f^V\}_e^n$ et $\{f^{S_T}\}_e^n$).

Finalement, on obtient l'expression discrétisée de l'énergie potentielle :

$$E(\{\xi\}) = W(\{\xi\}) - \Phi(\{\xi\}) = \frac{1}{2} {}^t\xi\} \cdot [K] \cdot \{\xi\} - {}^t\{F\} \cdot \{\xi\} \quad (5.66)$$

Le problème à résoudre consiste à minimiser, sur un sous-ensemble des vecteurs $\{\xi\}$ des déplacements nodaux $\mathcal{CA}$, la fonction scalaire $E(\{\xi\})$. La recherche du minimum conduit au système linéaire classique :

$$[K] \cdot \{\xi\} = \{F\} \quad (5.67)$$

5.4 Prise en compte d'un comportement élastique fragile des fibres

Partant de la formulation variationnelle établie dans la section précédente, une mise en œuvre numérique du modèle multiphasique dans le cadre de la méthode des éléments finis a été développée aboutissant à un code de calcul bidimensionnel. Ce dernier permet de simuler la réponse de structures multiphasiques sous chargements statiques en déformation plane. Ce code est fondé sur l'utilisation d'éléments finis triangulaires de type *T6* (six nœuds par élément fini) correspondant à une approximation quadratique pour les déplacements.

Dans le cadre d'un comportement élastique linéaire de tous les constituants, le code élaboré est validé par comparaison avec des solutions élastiques classiques telle que la compression œdométrique, la compression simple en déformation plane.

En revanche, dans le cas de fibres élastiques-fragiles (contrainte limite en traction-compression σ_0^f), une procédure numérique a été développée et implémentée. Le critère de rupture de la phase renforcement représentant la famille de fibre i est donné par :

$$f(\sigma^r) = |\sigma_r| - \sigma_0^r \quad (5.68)$$

où $\sigma_0^r = f^i E^f = \frac{f^r}{N} \sigma_0^f$.

Notant $\{Q\}$ le vecteur des paramètres de chargement, $\{Q\}$ est appliqué par de petits incréments successifs $\{\delta Q\} = \{Q(t + \delta t)\} - \{Q(t)\}$. La solution du problème suite à l'application d'un incrément de chargement $\{Q\}$ repose sur la procédure itérative à 3 étapes suivante :

◇ La première étape consiste à calculer la solution du problème d'élasticité à δQ imposé :

$$\{\Delta \underline{\underline{\Sigma}}, \Delta \underline{\underline{\epsilon}}\} = \text{Elas.}_{\mathbb{C}}(\delta Q) \quad (5.69)$$

◇ La deuxième étape consiste à déterminer les contraintes *partielles* et à identifier la phase renforcement j siège de la contrainte maximale σ_j^r ainsi que l'orientation θ_j des fibres représentées par cette phase.

$$|\sigma_j^r + \delta \sigma_j^r| = \text{Max}_{(i=1..N)} |\{\mathbf{a}^r(\underline{\underline{\epsilon}} + \Delta \underline{\underline{\epsilon}}) : (\underline{\underline{e}}_{ir} \otimes \underline{\underline{e}}_{ir})\}| \quad (5.70)$$

◇ On finit par vérifier le critère de résistance de cette phase et corriger le tenseur d'élasticité macroscopique $[\mathbb{C}]$ si besoin : si la contrainte maximale $(\sigma_j^r + \delta \sigma_j^r)$ calculée à l'étape 2 viole le critère de rupture de la phase j , cette phase est éliminée c'est-à-dire ne contribue plus au comportement macroscopique. On recalcule alors le tenseur d'élasticité macroscopique qui servira au calcul élastique de l'itération suivante. Dans le cas où le critère de rupture est satisfait partout, la solution élastique déterminée à l'étape 1 est la solution du problème à δQ imposé.

$$\text{si } |\sigma_j^r + \delta \sigma_j^r| \geq \sigma_0^r : \quad \mathbb{C} = \mathbb{C} - \mathbb{C}_j^r = \mathbb{C} - \mathbf{a}^r \underline{\underline{e}}_{jr} \otimes \underline{\underline{e}}_{jr} \otimes \underline{\underline{e}}_{jr} \otimes \underline{\underline{e}}_{jr} \quad (5.71)$$

Cette procédure est itérée jusqu'à convergence qui consiste à trouver un champ de déplacements $\mathcal{C.A}$ et une distribution d'efforts intérieurs $\mathcal{S.A}$ qui vérifient le critère pour toutes les phases renforcement.

La procédure itérative détaillée ci-dessus est mise en œuvre dans le code de calcul multiphasique développé. Les trois étapes de chaque itération s'écrivent de la façon suivante sur le problème discrétisé (figure 5.3).

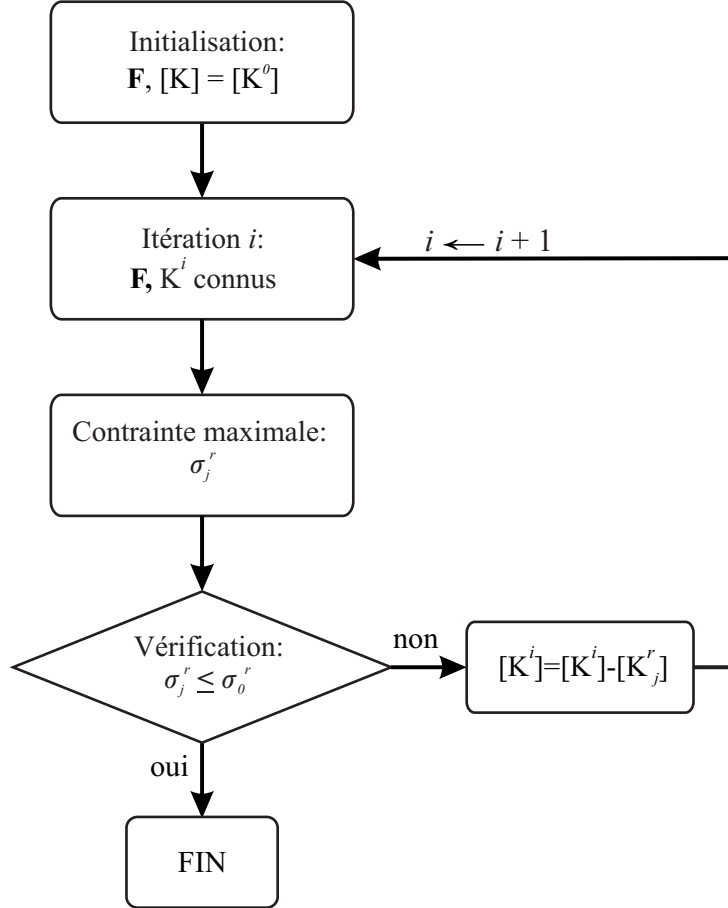


FIGURE 5.3 – *Algorithme pour le milieu multiphasique prenant en compte des fibres élastiques fragiles*

- ◇ *Etape 1* : Notant $\{\delta F\}$ l'incrément du vecteur effort du problème discrétisé (E.F) correspondant à l'incrément de chargement $\{\delta Q\}$, la première étape correspond à la résolution du problème d'élasticité à $\{\delta F\}$ imposé :

$$\{\Delta \xi\} = [\mathbf{K}]^{-1} \{\Delta F\} \quad (5.72)$$

- ◇ *Etape 2* : Détermination des contraintes microscopiques et identification de la phase renforcement j siège de la contrainte maximale σ_j^r ainsi que de l'orientation θ_j :

$$|\sigma_j^r + \delta \sigma_j^r| = \underset{(i=1..N)}{\text{Max}} |{}^t\{\mathbf{e}_{ir}\}[\mathbf{C}_i^r][\mathbf{B}]_e\{\xi + \delta \xi\}\{\mathbf{e}_{ir}\}| \quad (5.73)$$

◇ *Etape 3* : Si le critère de rupture de la phase j est satisfait $f^{jr}(\sigma_j^r + \delta\sigma_j^r) < 0$ alors l'évolution est élastique et la solution de l'étape 1 est à retenir. Par contre, dans le cas où le critère de la phase j est violé, il faut actualiser la raideur de la structure en tenant compte de la rupture de cette phase et réitérer la procédure :

$$\text{si } |\sigma_j^r + \delta\sigma_j^r| > \sigma_0^r : [K] = [K] - [K]_{ej}^r \quad (5.74)$$

5.4.1 Simulation numérique du problème de traction en déformation plane

L'outil développé est maintenant mis en œuvre pour simuler la réponse d'une éprouvette en matrice élastique renforcée dans le plan (Oxy) par des fibres élastiques fragiles et soumise à une déformation uniaxiale imposée ϵ suivant la direction x . Les caractéristiques suivantes ont été adoptées :

$$\frac{E^f}{E^m} = 100; \quad \nu_m = 0.3; \quad f^r = 3.14\%; \quad \frac{\sigma_0^f}{E^m} = 5; \quad N = 100 \quad (5.75)$$

La figure 5.4 représente l'évolution de la contrainte macroscopique dans la direction de la sollicitation en fonction de la déformation imposée ϵ . La courbe en trait plein représente la solution analytique développée à la section 4.2.3, tandis que les points désignent la solution numérique.

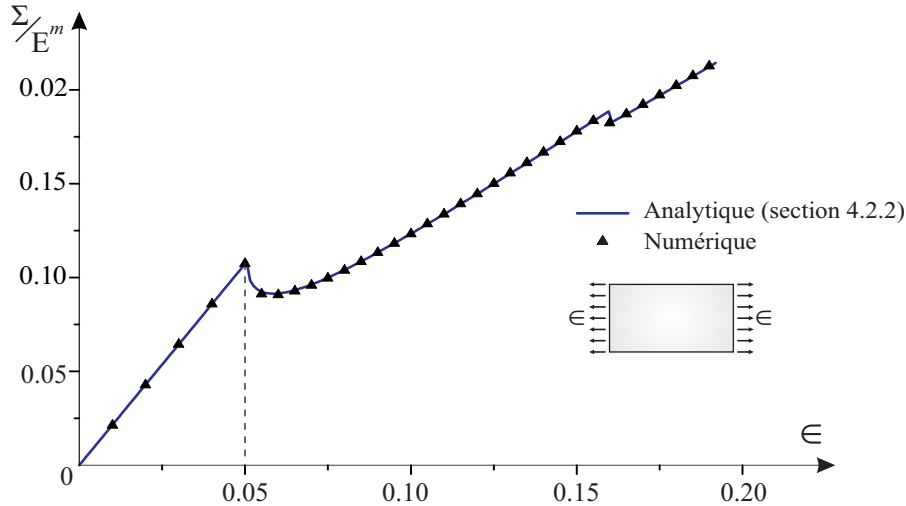


FIGURE 5.4 – Courbe contrainte-déformation : sollicitation de traction en déformation plane

La concordance des résultats numériques et analytique constitue une première validation de l'outil numérique développé.

Prise en compte des fibres "souples"

Afin de prendre en compte la présence à l'échelle microscopique de fibres "souples" et donc de phase renforcement ne pouvant reprendre que des efforts de traction, à l'échelle macroscopique, la procédure itérative développée ci-dessus est adaptée en rajoutant à la fin de l'étape 3 une condition partant sur la nature des efforts repris, les conditions (5.70) et (5.71) sont alors remplacées par :

$$\begin{cases} \sigma_j^r + \delta\sigma_j^r = \text{Max}_{(i=1..N)} \{ \mathbf{a}^r(\underline{\underline{\epsilon}} + \Delta\underline{\underline{\epsilon}}) : (\underline{e}_{ir} \otimes \underline{e}_{ir}) \} \\ \sigma_k^r + \delta\sigma_k^r = \text{Max}_{(i=1..N)} \{ \mathbf{a}^r(\underline{\underline{\epsilon}} + \Delta\underline{\underline{\epsilon}}) : (\underline{e}_{ir} \otimes \underline{e}_{ir}) \} \end{cases} \quad (5.76)$$

$$\begin{cases} \text{si } \sigma_j^r + \delta\sigma_j^r \geq \sigma_0^r : & \mathbb{C} = \mathbb{C} - \mathbb{C}_j^r = \mathbb{C} - \mathbf{a}^r \underline{e}_{jr} \otimes \underline{e}_{jr} \otimes \underline{e}_{jr} \otimes \underline{e}_{jr} \\ \text{si } \sigma_j^r + \delta\sigma_j^r < \sigma_0^r : & \mathbb{C} = \mathbb{C} - \mathbb{C}_k^r = \mathbb{C} - \mathbf{a}^r \underline{e}_{kr} \otimes \underline{e}_{kr} \otimes \underline{e}_{kr} \otimes \underline{e}_{kr} \end{cases} \quad (5.77)$$

Il est à préciser que ces deux équations ne sont pas de même nature, la première traduit la rupture irréversible de la phase j , tandis que la deuxième est réversible : en effet une phase renforcement désactivée peut être réactivée si, au cours de l'évolution, elle est amenée à supporter des efforts de traction.

La mise en œuvre numérique de cette procédure et son application au cas traité semi-analytiquement (section 4.2.4) a permis de trouver les résultats de la figure 5.5 qui montre un parfait accord entre la solution numérique par éléments finis et la solution semi-analytique. Les valeurs numériques utilisées pour cette simulation sont celles de (5.75).

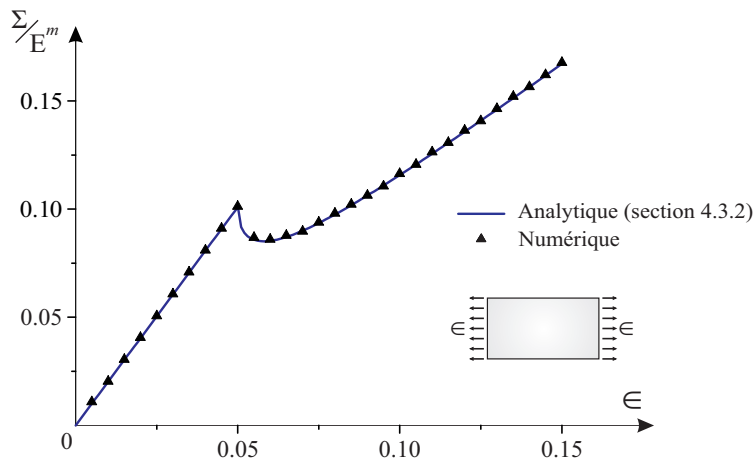


FIGURE 5.5 – Courbe contrainte-déformation : sollicitation de traction en déformation plane

5.4.2 Calcul d'une poutre renforcée soumise à un chargement de flexion en déformation plane

Nous reprenons ici l'exemple de la poutre en matériau renforcé par une distribution de fibres équi-orientées dans le plan (Oxy), soumise à un chargement de flexion (section 4.2.5). Les caractéristiques de la matrice et des phases renforcement sont celles de (5.75).

Etant donné que le problème est invariant le long de l'axe de la poutre, on a considéré une tranche d'épaisseur 0.01 m qu'on maille finement avec un maillage régulier d'éléments quadratiques $T6$. La taille des éléments est de 0.01 x 0.01 m et l'épaisseur h de la poutre est de 1 m. On obtient alors, un maillage assez fin de 200 éléments (figure 5.6).

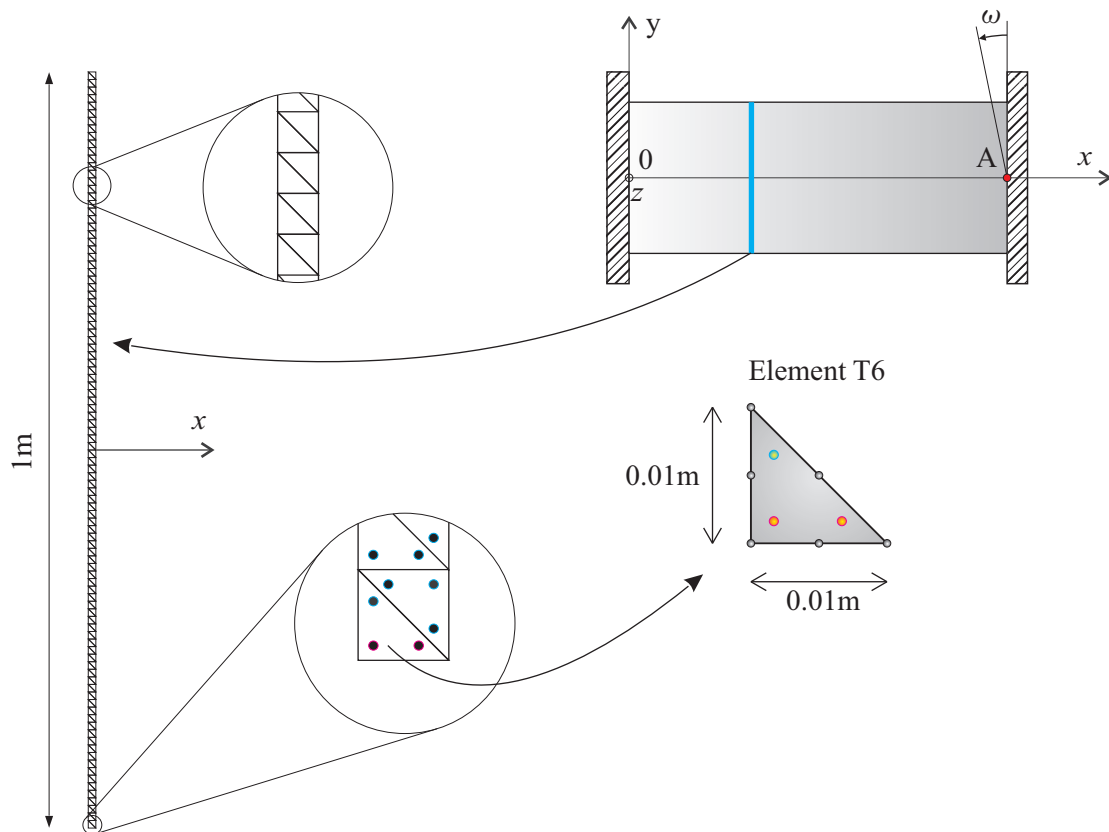


FIGURE 5.6 – *Maillage de la structure*

Les résultats numériques sont représentés sur la figure 5.7 : la courbe continue représente la solution analytique, tandis que les points représentent la solution numérique. Les résultats numériques s'écartent de la solution du problème dès que l'on sort du domaine élastique. Ceci est dû au problème numérique suivant : les contraintes étant classiquement

calculées aux points de Gauss, le critère de rupture des fibres est estimé en ces points. Les premières phases renforcement désactivées par la procédure itérative décrite en 5.4, pour rendre compte de la rupture des fibres qu'elles représentent, sont celles représentant les fibres orientées suivant l'axe de la poutre se trouvant aux extrémités inférieure et supérieure de la poutre. Etant donné que la distribution des points d'intégration de Gauss sur la structure n'est pas symétrique par rapport à l'axe $0y$, cette procédure de désactivation va introduire une dissymétrie du problème qui fait que la solution numérique s'écarte de plus en plus de la solution analytique.

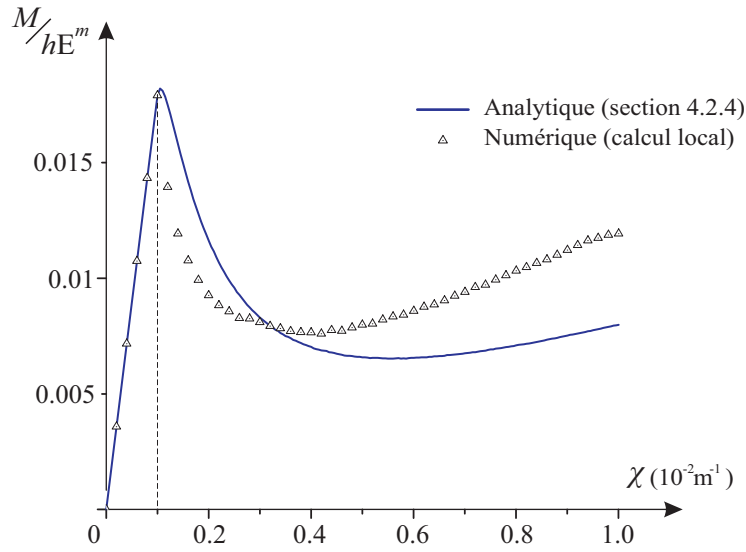


FIGURE 5.7 – Résultat numérique : relation moment-courbure

Afin de remédier à ce problème numérique, nous avons choisi d'utiliser une *approche non locale* ([24] ; [40]). Cette approche consiste à remplacer la valeur locale de la contrainte des fibres $\sigma^r(\underline{x})$ par sa valeur non locale $\bar{\sigma}^r(\underline{x})$ définie par une moyenne pondérée sur un volume au voisinage du point considéré. Une distribution de type Gauss ψ est utilisée afin de calculer cette valeur non locale qui dépend seulement de la distance r entre le point source $\underline{x}$ et le point de réception $\underline{y}$:

$$\bar{\sigma}^r(\underline{x}) = \frac{1}{\int_{\Omega} \psi(\underline{y}, \underline{x}) d\Omega} \int_{\Omega} \psi(\underline{y}, \underline{x}) \sigma^r(\underline{y}) d\Omega \quad (5.78)$$

avec la fonction de pondération définie par :

$$\psi(\underline{y}, \underline{x}) = \left(\frac{1}{\ell_c \sqrt{2\pi}} \right)^{N_{dim}} \exp \left(-\frac{\|\underline{x} - \underline{y}\|^2}{2\ell_c^2} \right) \quad (5.79)$$

où $N_{dim} = 2$ est la dimension spatiale et le paramètre ℓ_c la longueur caractéristique choisie en fonction de la taille du maillage. La figure 5.8 montre un exemple de distribution de la

fonction de pondération ψ avec la distance par rapport au point considéré. On constate que cette fonction s'atténue assez rapidement au-delà d'une distance à quelques fois la longueur caractéristique ℓ_c .

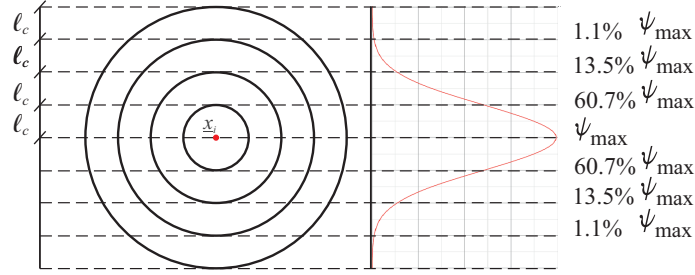


FIGURE 5.8 – Exemple de distribution de la fonction de pondération ψ ([40])

La contrainte partielle non locale peut être calculée par une méthode d'intégration numérique, utilisant la méthode de Gauss dans le cadre de la méthode des éléments finis. La valeur $\bar{\sigma}^r(\underline{x}_i)$ en un point géométrique $\underline{x}_i$ est alors calculée par :

$$\bar{\sigma}^r(\underline{x}_i) = \frac{\sum_{n_e=1}^{N_e} \sum_{n_g=1}^{N_g} \omega_g \psi(\underline{y}_g, \underline{x}_i) \sigma^r(\underline{y}_g) \det(J_g)}{\sum_{n_e=1}^{N_e} \sum_{n_g=1}^{N_g} \omega_g \psi(\underline{y}_g, \underline{x}_i) \det(J_g)} \quad (5.80)$$

Où N_e est le nombre total d'éléments, N_g le nombre des points de Gauss dans un élément, $\underline{y}_g$ est le vecteur position du point d'intégration et ω_g le coefficient de pondération associé. La longueur caractéristique ℓ_c détermine la dimension de la zone d'interaction qui influence la grandeur non-locale au point considéré $\underline{x}_i$ (figure 5.9).

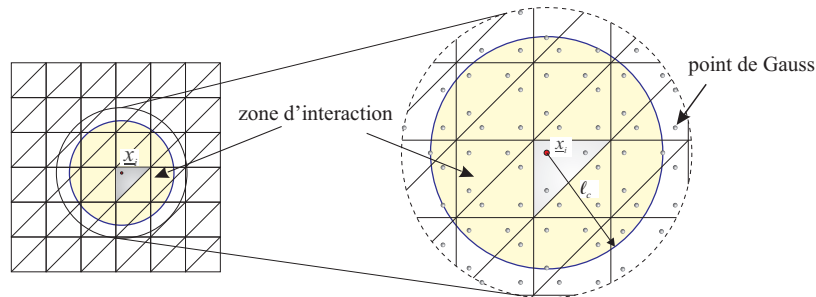


FIGURE 5.9 – Illustration de la zone d'interaction

L'intégration de cette méthode dans le code développé et son application à la simulation du problème de la flexion ont permis d'accéder aux résultats de la figure 5.10.

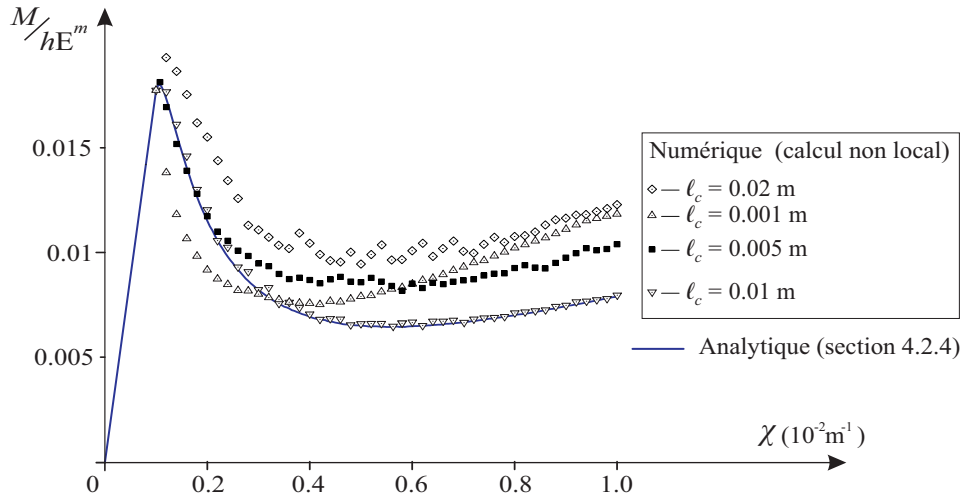


FIGURE 5.10 – Courbe moment-courbure utilisant le calcul non local

Sur cette figure, on présente les résultats de ce problème pour différentes valeurs de la longueur caractéristique ℓ_c . La réponse donnée par la formulation non locale est en bonne concordance avec la solution analytique dans le cas $\ell_c = 0.01\text{m}$, c'est-à-dire ℓ_c à l'ordre de la dimension d'un élément fini. Le problème numérique associé à la localisation peut être réglé en utilisant l'*approche non locale* décrite précédemment.

5.5 Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élasto-plasticité

5.5.1 Position d'un problème d'évolution d'élasto-plastique d'un milieu multiphasique

On considère un volume Ω occupé par un milieu multiphasique constitué de la superposition d'une phase matrice et de N phases renforcement *parfaitement adhérentes* avec la phase matrice, et obéissant toutes à un comportement élastique parfaitement plastique. On rappelle les équations régissant l'évolution, à tout instant $t \in [0, T]$ de l'évolution, d'un tel système sous l'hypothèse des *déformations planes* dans (Oxy) :

- Equation d'équilibre :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\Sigma}}(t) + \rho \underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{0}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}^m(t) + \sum_{i=1}^N \sigma_i^r(t) \underline{\underline{e}}_i^r \otimes \underline{\underline{e}}_i^r \quad (5.81)$$

- Comportement élasto-plastique :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m &= \mathbb{C}^m : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_p^m) \\ \sigma_i^r &= \mathbf{a}_i^r (\epsilon_{ii} - \epsilon_{ip}^r) \quad , \quad i = 1..N \end{cases} \quad (5.82)$$

- Critères de plasticité :

$$\begin{cases} f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m(t)) \leq 0 \iff \underline{\underline{\sigma}}^m(t) \in G^m(t) \\ f_i^r(\sigma_i^r(t)) \leq 0 \iff (\sigma_i^r(t)) \in G_i^r(t) \quad , \quad i = 1..N \end{cases} \quad (5.83)$$

où $G^m(t)$ et $G_i^r(t)$ désignent le domaine d'élasticité de la phase matrice et la phase renforcement i à l'instant t

- Règles d'écoulement (cas *associé*) :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p^m = \dot{\eta}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m}(\underline{\underline{\sigma}}^m) \quad \text{avec} \quad \dot{\eta}^m \begin{cases} > 0 & \text{si } f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = \dot{f}^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.84)$$

$$\dot{\epsilon}_{ip}^r = \dot{\eta}_i^r \frac{\partial f_i^r}{\partial \sigma_i^r}(\sigma_i^r) \quad \text{avec} \quad \dot{\eta}_i^r \begin{cases} > 0 & \text{si } f_i^r(\sigma_i^r) = \dot{f}_i^r(\sigma_i^r) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.85)$$

- Conditions aux limites en contraintes :

$$\Sigma_{jk} n_k = T_j^d(t) \quad \text{sur } \partial\Omega_{T_j} \quad (5.86)$$

(n_k : normale unitaire extérieure à $\partial\Omega_{T_j}$)

On définit l'ensemble des champs d'efforts intérieurs au système multiphasique *statiquement admissible* ($\mathcal{SA}$), pour le même problème au temps t , comme l'ensemble des champs $\{\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma_1^r.. \sigma_N^r\}(t)$ vérifiant l'équation d'équilibre (5.81) et les conditions aux limites en contraintes (5.86).

En outre, un tel ensemble des champs d'efforts intérieurs $\{\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma_1^r.. \sigma_N^r\}(t)$ est dit *plastiquement admissible* ($\mathcal{PA}$) pour le problème, si les critères de plasticité (5.83) des

phases matrice et renforcement sont satisfaits en tout point de Ω .

La résolution d'un problème d'évolution élasto-plastique pour une structure en matériau renforcé par fibres, modélisée comme un système multiphasique, consiste à exhiber, à tout instant t de l'évolution, un champ d'effort intérieurs $\{\underline{\sigma}^m, \sigma_1^r \dots \sigma_N^r\}(t)$ $\mathcal{SA}$ et $\mathcal{PA}$ d'une part et un champ de déplacement $\{\xi\}(t)$ $\mathcal{CA}$ d'autre part, ces champs étant associés en tout point par les lois de comportement élasto-plastique de la phase matrice et des phases renforcement.

5.5.2 Discrétisation temporelle de l'évolution et algorithme itératif

On soumet une telle structure multiphasique à un chargement $\{Q\}$ paramétré par le temps t ($0 \leq t \leq T$). Ce chargement, qui peut être une combinaison d'un déplacement imposé et d'un effort volumique ou d'un effort surfacique, est ensuite subdivisé en petits incréments :

$$\{\delta Q\} = \{Q\}(t + \delta t) - \{Q\}(t) \quad (5.87)$$

Supposant connue la solution du problème d'évolution à l'instant t , correspondant à l'état de chargement $\{Q\}(t)$, en termes de champs de déplacement $\{\xi\}(t)$, de champs d'efforts intérieurs $\{\underline{\sigma}^m, \sigma_1^r \dots \sigma_N^r\}(t)$ et de champs de déformation plastique $\{\underline{\varepsilon}_p^m, \varepsilon_{1p}^r \dots \varepsilon_{Np}^r\}(t)$, la recherche de la solution du problème consiste à calculer la solution à l'instant $t + \delta t$ associée à l'incrément de chargement $\{\delta Q\}$. Cette solution peut être obtenue en ajoutant à la solution à l'instant t , la solution d'un problème élastique relatif à l'application de l'incrément de chargement $\{\delta Q\}$, les incréments de déformation plastiques $\{\delta \underline{\varepsilon}_p^m, \delta \varepsilon_{1p}^r \dots \delta \varepsilon_{Np}^r\}$ étant prescrits en tant que déformations anélastiques. Cela peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\delta \underline{\sigma}^m, \delta \sigma_1^r \dots \delta \sigma_N^r\} \\ \{\delta \underline{\varepsilon}_p^m, \delta \varepsilon_{1p}^r \dots \delta \varepsilon_{Np}^r\} \end{array} \right\} = \text{Elas.} \left[\{\delta Q\}; \{\delta \underline{\varepsilon}_p^m, \delta \varepsilon_{1p}^r \dots \delta \varepsilon_{Np}^r\} \right] \quad (5.88)$$

Ces incréments de déformations plastiques doivent par ailleurs satisfaire les règles d'écoulement plastique, écrites sous forme incrémentale comme suit :

$$\Delta \underline{\varepsilon}_p^m = \delta \eta^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\sigma}^m}(\underline{\sigma}^m + \delta \underline{\sigma}^m) \quad \text{avec} \quad \delta \eta^m \begin{cases} > 0 & \text{si } f^m(\underline{\sigma}^m + \delta \underline{\sigma}^m) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.89)$$

$$\delta \varepsilon_{ip}^r = \delta \eta_i^r \frac{\partial f_i^r}{\partial \sigma_i^r}(\sigma_i^r + \delta \sigma_i^r) \quad \text{avec} \quad \delta \eta_i^r \begin{cases} > 0 & \text{si } f_i^r(\sigma_i^r + \delta \sigma_i^r) = 0, i = 1 \dots N \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.90)$$

La combinaison de ces relations avec les équations de comportement exprimées sous forme incrémentale donne finalement :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m + \delta \underline{\underline{\sigma}}^m = \text{proj}_{G^m} \{ \underline{\underline{\sigma}}^m + \mathbb{C}^m : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m \} \quad (5.91)$$

$$\sigma_i^r + \delta \sigma_i^r = \text{proj}_{G_i^r} \{ \sigma_i^r + \mathbf{a}_i^r \delta \sigma_i^r \} \quad , i = 1..N \quad (5.92)$$

où $\text{proj}_{G^m} \{ \}$ (resp. $\text{proj}_{G_i^r} \{ \}$) désigne la projection sur le domaine d'élasticité convexe G^m (resp. G_i^r) de la phase matrice (resp. phase renforcement i) défini par le critère de plasticité correspondant. Ces projections sont déterminées au sens des produits scalaires associés aux énergies élastiques de contrainte :

$$\forall \left(\underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{\underline{\sigma}}^{m'} \right) \quad < \underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{\underline{\sigma}}^{m'} >_m = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^m : (\mathbb{C}^m)^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}^{m'} \quad \text{pour la phase matrice} \quad (5.93)$$

$$\forall \left(\sigma_i^r, \sigma_i^{r'} \right) \quad < \sigma_i^r, \sigma_i^{r'} >_r = \frac{1}{2 \mathbf{a}_i^r} \sigma_i^r : \sigma_i^{r'} \quad \text{pour la phase renforcement} \quad (5.94)$$

Ce système d'équations est classiquement résolu par une procédure itérative (return mapping algorithm) (Owen (1980) [14]; Crisfield (1991) [5]; Simo et Hughes (1998) [21]). Les champs d'incrément des variables de déformations anélastiques étant inconnus, ils sont déterminés par une suite itérative de calculs élastiques, grâce à la procédure suivante : supposons les incréments de déformations plastiques évalués à l'itération k , les valeurs de ces mêmes incréments à l'itération $k+1$ sont calculées en trois étapes :

1. Calcul de la solution élastique correspondant à la résolution du système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \delta \underline{\underline{\sigma}}^m, \delta \sigma_1^r \dots \sigma_N^r \} \\ \{ \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m, \delta \varepsilon_1^r \dots \delta \varepsilon_p^r \} \end{array} \right\} = \text{Elas.} \left[\{ \delta Q \}; \{ \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m, \delta \varepsilon_{1p}^r \dots \delta \varepsilon_{Np}^r \} \right] \quad (5.95)$$

2. Détermination des états de contrainte plastiquement admissibles par projection des états de contrainte statiquement admissibles sur les domaines d'élasticité correspondants :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m(k) = \text{proj}_{G^m} \{ \underline{\underline{\sigma}}^m + \mathbb{C}^m : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m(k) \} \quad (5.96)$$

$$\sigma_{\text{ip.a.}}^r(k) = \text{proj}_{G_i^r} \{ \sigma_i^r + \mathbf{a}_i^r \delta \sigma_i^r(k) \} \quad , i = 1..N \quad (5.97)$$

3. Calcul des incréments de déformations plastiques relatifs à l'itération $k+1$ comme suit :

$$\begin{aligned} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m(k+1) &= \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m(k) + (\mathbb{C}^m)^{-1} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^m(k) - \underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m(k) \right) \\ &= \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m(k) + (\mathbb{C}^m)^{-1} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^m(k) + \delta \underline{\underline{\sigma}}^m(k) - \underline{\underline{\sigma}}_{\text{p.a.}}^m(k) \right) \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{ip}^r(k+1) &= \delta\varepsilon_{ip}^r(k) + \frac{1}{\mathbf{a}^r} (\sigma_i^r(k) - \sigma_{ipa}^r(k)) \quad , i = 1..N \\
&= \delta\varepsilon_p^r(k) + \frac{1}{\mathbf{a}^r} (\sigma_i^r(k) + \delta\sigma_i^r(k) - \sigma_{ipa}^r(k))
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Démarrant cette procédure avec une première estimation des incréments de déformation plastique : $\delta\underline{\varepsilon}_p^m(k=0) = \underline{0}$; $\delta\varepsilon_{ip}^r(k) = 0$, elle est itérée jusqu'à convergence, qui correspond à la mise en évidence de champs de contrainte $\mathcal{PA}$ et $\mathcal{SA}$ avec une précision donnée :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ \underline{\sigma}_{pa}^m, \sigma_{1pa}^r \dots \sigma_{Npa}^r \right\} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ \underline{\sigma}^m + \delta\underline{\sigma}^m(k); \sigma_1^r + \delta\sigma_1^r(k) \dots \sigma_N^r + \delta\sigma_N^r(k) \right\} \tag{5.100}$$

Il est à noter que les étapes 2 et 3 correspondent à un traitement *local* de la plasticité, qui est suivi indépendamment pour chacune des phases, l'étape 1 correspondant à un calcul élastique *global*.

5.5.3 Formulation par la méthode des élément finis

5.5.3.1 Principe du minimum de l'énergie potentielle

Reprenant les notations du chapitre 2, on désigne par $\underline{\xi}$ un champ de déplacement cinématique admissible quelconque, et on introduit la fonctionnelle *énergie potentielle* de ce champ, définie par :

$$\begin{aligned}
E(\underline{\xi}) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\underline{\varepsilon} : \mathbb{C}^m : \underline{\varepsilon}] d\Omega - \int_{\Omega} [\underline{\varepsilon} : \mathbb{C}^m : \underline{\varepsilon}_{an}^m] d\Omega \\
&+ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\mathbf{a}^r \varepsilon_{ii}^2] d\Omega - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} [\mathbf{a}^r \varepsilon_{ii} \varepsilon_{ian}] d\Omega \\
&- \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m + \sum_{i=1}^N \rho_i^r \underline{F}_i^r) \cdot \underline{\xi} d\Omega - \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_{T_j}} (T_d)_j \xi_j dS
\end{aligned} \tag{5.101}$$

généralisant ainsi la définition donnée au chapitre 2 dans le cas d'un *état initial naturel*, à la situation où un champ de *déformations anélastiques* $\{\underline{\varepsilon}_{an}^m; (\varepsilon_{1an}^r \dots \varepsilon_{Nan}^r)\}$ doit être pris en compte.

La fonctionnelle *énergie potentielle* ainsi définie vérifie le principe du minimum suivant. Soit $(\underline{\xi})$ la *solution en déplacement* du problème d'élasticité à *déformations anélastiques* imposées, alors :

$$\forall (\underline{\xi}') \in \mathcal{C.A.} \quad E(\underline{\xi}) \leq E(\underline{\xi}') \tag{5.102}$$

La démonstration de ce résultat est analogue à celle détaillée en section 5.3.2, elle est reprise ici brièvement. Soit $\delta\underline{\underline{\xi}}$ l'écart du champ $\underline{\underline{\xi}}'$ au champ de déplacement $\underline{\underline{\xi}}$ *solution* du problème :

$$\delta\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}' - \underline{\underline{\xi}} \quad (5.103)$$

L'écart de l'énergie potentielle du champ de déplacement ($\underline{\underline{\xi}}'$) à celle de la solution est donné par :

$$\delta E = E(\underline{\underline{\xi}}') - E(\underline{\underline{\xi}}) = E(\underline{\underline{\xi}} + \delta\underline{\underline{\xi}}) - E(\underline{\underline{\xi}}) \quad (5.104)$$

soit, en tenant compte de (5.101) et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned} \delta E = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} [2\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} [2\mathbf{a}^r \varepsilon_{ii} \delta\varepsilon_{ii} + \mathbf{a}^r \delta\varepsilon_{ii}^2] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} [\delta\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}_{an}^m] d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{a}^r \varepsilon_{ii} \varepsilon_{ian}] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{\underline{F}}^m + \sum_{i=1}^N \rho_i^r \underline{\underline{F}}_i^r) \cdot \delta\underline{\underline{\xi}} d\Omega - \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_{T_j}} (T_d)_j (\delta\xi)_j dS \end{aligned} \quad (5.105)$$

où $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\delta\varepsilon_{ii}$, $i = 1..N$ désignent les champs de déformations de la phase matrice et des phases renforcement associés aux champs de déplacement $\delta\underline{\underline{\xi}}$.

Introduisant les champs de contraintes ($\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma_1^r.. \sigma_N^r$) *solutions* du problème, c'est-à-dire associés aux champs de déformations ($\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon_1^r.. \varepsilon_N^r$) par les lois de comportement élasto-plastique des phases :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \mathbb{C}^m : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{an}^m), \quad \sigma_i^r = \mathbf{a}^r (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ian}^r), \quad i = 1..N \quad (5.106)$$

l'expression (5.105) devient :

$$\begin{aligned} \delta E = & \int_{\Omega} [\underline{\underline{\sigma}}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \sigma_i^r \delta\varepsilon_{ii}] d\Omega - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{\underline{F}}^m + \sum_{i=1}^N \rho_i^r \underline{\underline{F}}_i^r) \cdot \delta\underline{\underline{\xi}} d\Omega - \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_{T_j}} (T_d)_j (\delta\xi)_j dS \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\delta\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}^m : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \mathbf{a}^r \delta\varepsilon_{ii}^2] d\Omega \end{aligned} \quad (5.107)$$

qui n'est autre que l'expression (5.21) du même écart de l'énergie potentielle dans le cas où aucune déformation anélastique n'est imposée au milieu multiphasique, et dont nous avons montré dans la section 5.3.2 que le signe était toujours positif ou nul, d'où le résultat.

5.5.3.2 Formulation variationnelle

La recherche de la solution $\{\delta\underline{\xi}\}(i)$ du problème incremental (5.95) revient de par le principe du minimum établi ci-dessus, à la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\delta\underline{\xi}) \in \mathcal{C}.\mathcal{A} \text{ tel que :} \\ \forall (\delta\underline{\xi}') \in \mathcal{C}.\mathcal{A} : E(\delta\underline{\xi}) < E(\delta\underline{\xi}') \end{cases} \quad (5.108)$$

qui est équivalent au *problème variationnel* suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\delta\underline{\xi}) \in \mathcal{C}.\mathcal{A} \text{ tel que :} \\ \forall (\delta\underline{\xi}') \in \mathcal{C}.\mathcal{A} : a((\delta\underline{\xi}), (\delta\underline{\xi}')) = L(\delta\underline{\xi}') \end{cases} \quad (5.109)$$

où $a(.,.)$ est la *forme bilinéaire associée à la forme quadratique* définie par la fonctionnelle énergie potentielle, qui s'écrit :

$$a(\delta\underline{\xi}, \delta\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \left[(\delta\underline{\varepsilon} : \mathbb{C}^m : \delta\underline{\varepsilon}') + \sum_{i=1}^N (\mathbf{a}^r \delta\varepsilon_{ii} \delta\varepsilon_{ii}') \right] d\Omega \quad (5.110)$$

et $L(.,.)$ est une *forme linéaire* donnée par :

$$L(\delta\underline{\xi}') = \Phi(\delta\underline{\xi}') + \Phi_{\text{an}}(\delta\underline{\xi}') \quad (5.111)$$

$\Phi(.,.)$ étant la forme linéaire exprimant le travail des efforts extérieurs :

$$\Phi(\delta\underline{\xi}') = \int_{\Omega} (\rho^m \Delta \underline{F}^m + \sum_{i=1}^N \rho_i^r \delta \underline{F}_i^r) \cdot \delta\underline{\xi}' d\Omega + \int_{\partial\Omega_{T_j}} \delta(T_d)_j \delta\xi_j' dS \quad (5.112)$$

et $\Phi_{\text{an}}(.,.)$ désigne la forme linéaire exprimant le potentiel des déformations anélastiques imposées :

$$\Phi_{\text{an}}(\delta\underline{\xi}') = \int_{\Omega} [\delta\underline{\varepsilon}^m : \mathbb{C}^m : \underline{\varepsilon}_{\text{an}}] d\Omega + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} [\mathbf{a}^r \delta\varepsilon_{ii} \varepsilon_{ian}^r] d\Omega \quad (5.113)$$

5.5.3.3 Principe du minimum discrétisé

Considérant une discrétisation spatiale de la structure multiphasique en N_e éléments, l'expression discrétisée de l'énergie de déformation est, d'après (5.63), donnée par :

$$W(\{\delta\xi\}) = \frac{1}{2} {}^t\{\delta\xi\} \cdot [K] \cdot \{\delta\xi\} \quad (5.114)$$

où $[K]$ est la *matrice de rigidité globale* de la structure multiphasique et $\{\delta\xi\}$ est le vecteur formé de tous les incréments des déplacements des nœuds de la structure.

Le potentiel des efforts extérieurs s'écrit de manière analogue sous forme matricielle :

$$\Phi(\{\delta\xi\}) = {}^t\{\delta F\} \cdot \{\delta\xi\} \quad (5.115)$$

tandis que le potentiel des déformations anélastiques donné par (5.113), peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{an}}(\{\delta \in\}) &= \int_{\Omega} {}^t\{\delta \in_{\text{an}}\} \cdot \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot \{\delta \in\} \, d\Omega \\ &= \sum_{n=1}^{N_e} \int_{\mathcal{V}_e^n} {}^t\{\Delta \in_{\text{an}}\}_e^n \cdot \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot \{\Delta \in\}_e^n(x, y) \, dx dy \\ &= \sum_{n=1}^{N_e} \int_{\mathcal{V}_R} {}^t\{\Delta \in_{\text{an}}\}_e^n \cdot \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot \{\Delta \in\}_e^n(\xi, \eta) J \, d\xi d\eta \\ &= \sum_{n=1}^{N_e} \int_{\mathcal{V}_R} {}^t\{\Delta \in_{\text{an}}\}_e^n \cdot \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot [B]_e \cdot \{\Delta\xi\}_e^n J \, d\xi d\eta \\ &= \sum_{n=1}^{N_e} \underbrace{\left[{}^t\{\Delta \in_{\text{an}}\}_e^n \cdot \int_{\mathcal{V}_R} \left([C^m] + \sum_{i=1}^N [C_i^r] \right) \cdot [B]_e^n J \, d\xi d\eta \right]}_{{}^t\{\delta F_{\text{an}}\}_e} \cdot \{\delta\xi\}_e^n \\ &= {}^t\{\delta F_{\text{an}}\} \cdot \{\delta\xi\} \end{aligned} \quad (5.116)$$

On obtient ainsi l'*expression discrétisée* de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E(\{\delta\xi\}) &= W(\{\delta\xi\}) - \Phi(\{\delta\xi\}) \\ &= \frac{1}{2} {}^t\{\delta\xi\} \cdot [K] \cdot \{\delta\xi\} - {}^t\{\delta F\} \cdot \{\delta\xi\} - {}^t\{\delta F_{\text{an}}\} \cdot \{\delta\xi\} \end{aligned} \quad (5.117)$$

dont la recherche du minimum conduit au système linéaire suivant :

$$[K] \cdot \{\delta\xi\} = (\{\delta F\} + \{\Delta F_{\text{an}}\}) \quad (5.118)$$

5.5.4 Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique en élasto-plasticité

Le code de calcul des structures multiphasiques par éléments finis décrit en 5.4 a été étendu à la prise en compte de comportement élasto-plastique des différentes phases, utilisant un algorithme de plasticité implicite (figure 5.11).

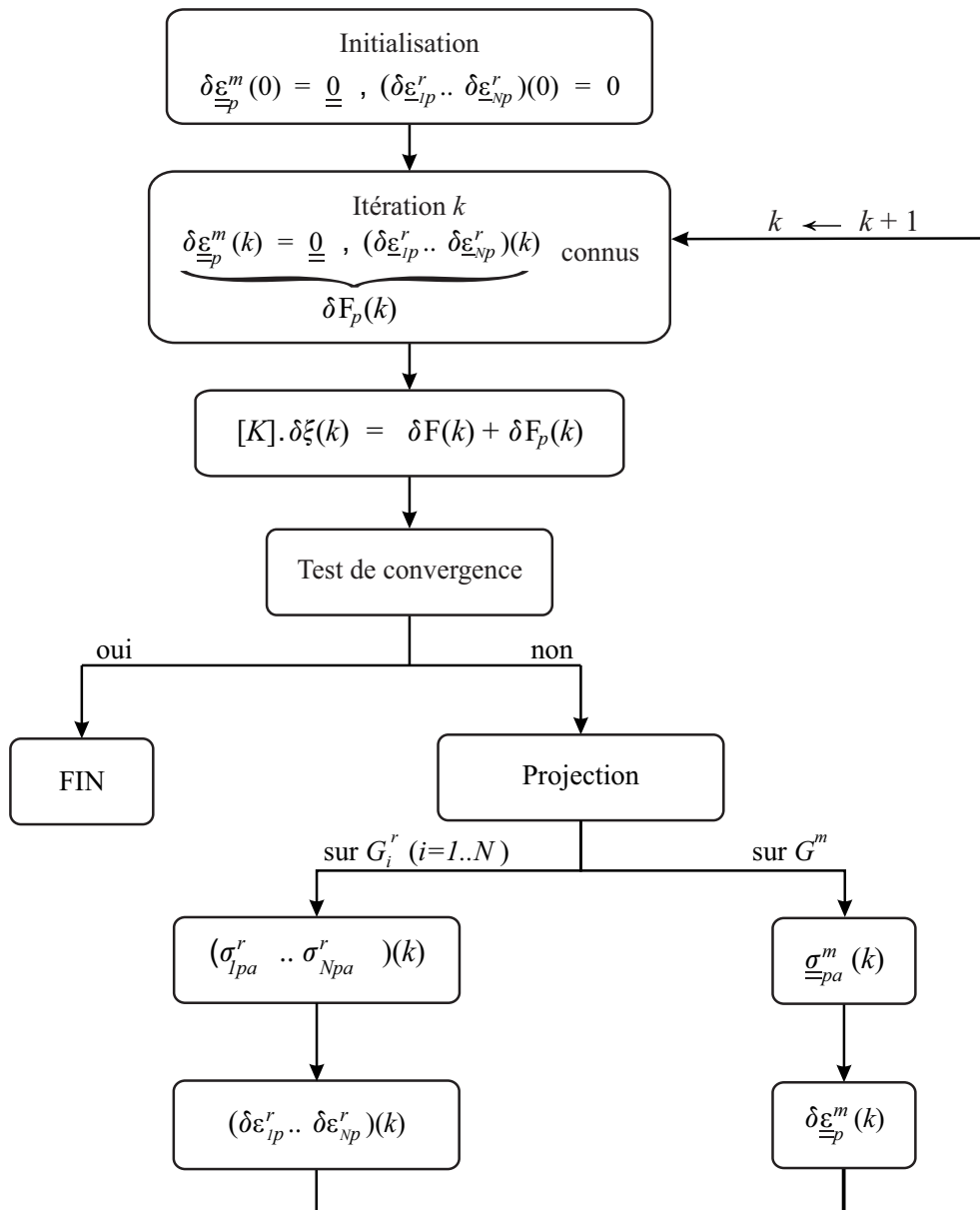


FIGURE 5.11 – Algorithme de plasticité pour le milieu multiphasique

Ce code permet de simuler le comportement des structures multiphasiques en déformations planes sous chargements statiques. Il utilise des éléments finis de type Lagrange, triangulaire à six nœuds $T6$, permettant une approximation des champs cinématiques, de déplacements, quadratique par morceaux, avec une continuité C^0 .

Une première validation de l'outil numérique ainsi développé a été faite par comparaison à des solutions analytiques de problèmes multiphasiques élasto-plastiques dans le cas d'une sollicitation en déformation homogène, puis par comparaison à la solution analytique de ce problème développée au chapitre 4. Les caractéristiques suivantes ont été adoptées :

$$\frac{E^f}{E^m} = 100; \quad \nu_m = 0.3; \quad \frac{k^m}{E^m} = 10^{-2}; \quad f^r = 3.14\%; \quad \frac{\sigma_0^f}{E^m} = 1; \quad N = 100 \quad (5.119)$$

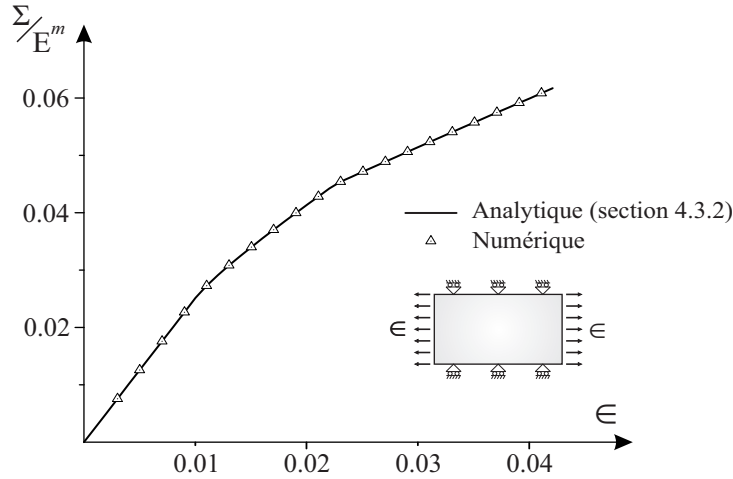


FIGURE 5.12 – Courbe contrainte - déformation : déformation macroscopique uniaxiale

La figure 5.13 montre une parfaite concordance entre les résultats numériques et la solution analytique.

La deuxième application de ce code a consisté à simuler le comportement élasto-plastique d'une éprouvette soumise à une sollicitation de traction en déformation plane. Le résultat de cette modélisation est présenté par la courbe contrainte-déformation de la figure 5.13, il sera comparé avec l'approche calcul à la rupture dans la chapitre 6.

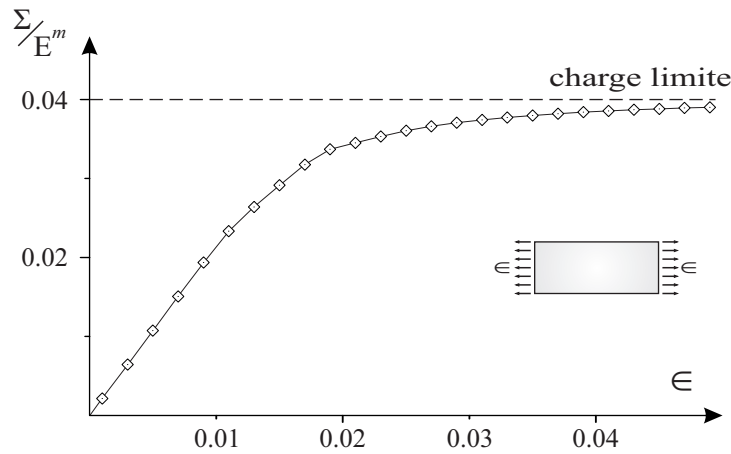


FIGURE 5.13 – Courbe contrainte - déformation : essai de traction en déformation plane

5.5.5 Poinçonnement d'un demi-espace renforcé

On considère le problème du poinçonnement par un poinçon rigide d'un demi-espace renforcé en déformation plane (figure 5.14) :

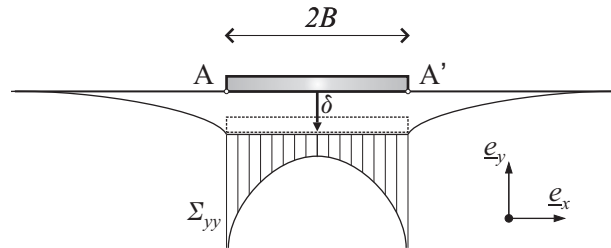


FIGURE 5.14 – Poinçonnement d'un demi-espace renforcé

Dans le cadre d'un comportement élastique isotrope, la distribution de la contrainte macroscopique verticale Σ_{yy} sous le poinçon est ([52]) :

$$\Sigma_{yy} = \frac{Q}{\pi \sqrt{B^2 - x^2}} \quad (5.120)$$

où B est la demi-largeur du poinçon et Q est la réaction du massif sous le poinçon pour un déplacement vertical δ donné. Cette fonction est singulière aux coins du poinçon (point A et A'), de sorte que valeurs calculées aux points de Gauss des éléments localisés au voisinage de ces points peuvent être entachées d'erreurs systématiques. Par conséquent, les valeurs calculées sous le poinçon pour ces éléments et la réaction résultante peuvent comporter des erreurs importantes.

Il est nécessaire d'utiliser une autre méthode pour évaluer la réaction sous le poinçon. En se basant sur le principe des travaux virtuels on démontre que la réaction totale s'identifie à la somme des réactions nodales sous le poinçon.([50]).

Par symétrie, on ne considère que la moitié de la géométrie. Le maillage utilisé comporte 1377 noeuds et 650 éléments triangulaire T6 (figure 5.15).

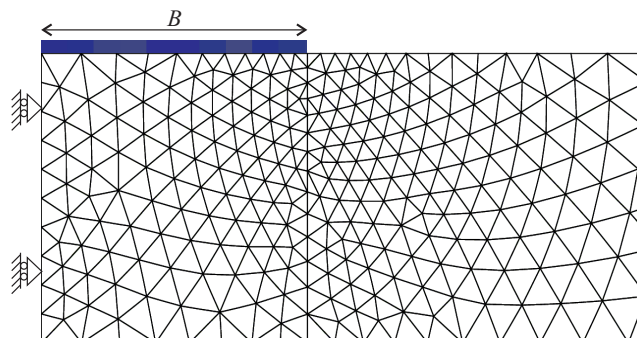


FIGURE 5.15 – *Poinçonnement d'un demi espace : zoom sur le maillage au voisinage de la semelle*

Les résultats de la simulation sont représentés sur la figure 5.16 sous la forme de courbe de chargement donnant la réaction sous le poinçon Q en fonction du tassement normalisé δ/B .

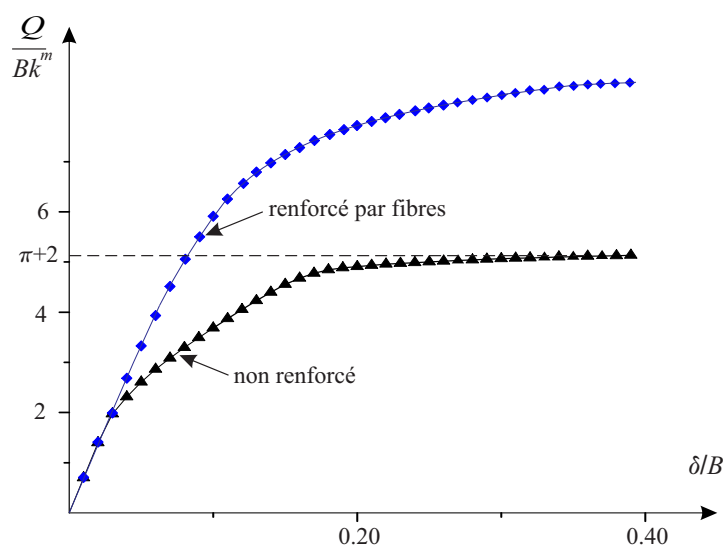


FIGURE 5.16 – *Poinçonnement d'un demi espace - Courbe de chargement*

Prise en compte du cas où les fibres sont élastiques fragiles

On s'intéresse enfin au cas où le massif est constitué d'une matrice élasto-plastique renforcée par des fibres élastiques fragiles (par exemple sol renforcé par des fibres de verre). La figure 5.17 représente les résultats pour ce cas où il apparaît que la structure est capable de supporter un chargement de plus de 1.6 fois la charge de ruine de la structure non renforcée. Arrivé à cette valeur la structure devient instable suite à l'endommagement des fibres. Cette phase se termine par une évolution peu différente de celle de la structure non renforcée.

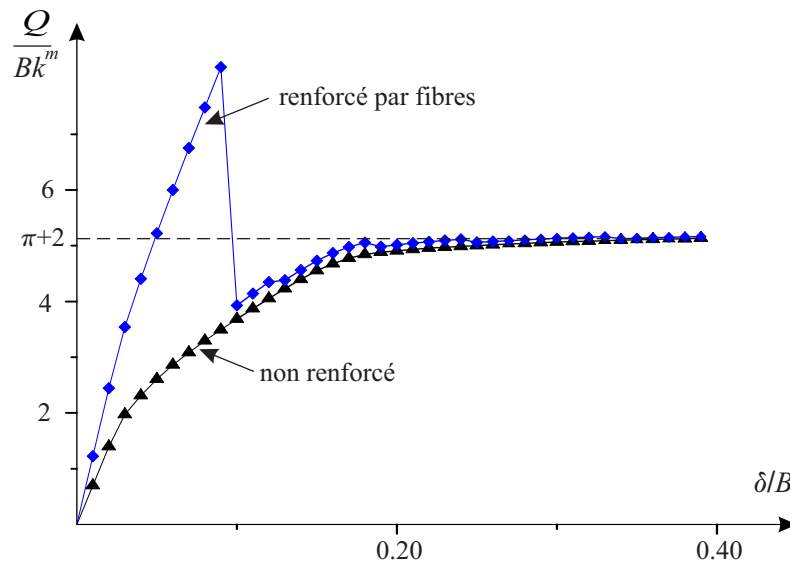


FIGURE 5.17 – Poinçonnement d'un demi espace - Courbe de chargement cas les fibres sont élastiques fragiles

5.6 Application du code de calcul multiphasique au problème de la flexion d'une poutre renforcée : matrice élastique fragile et fibres élasto-plastiques

On s'intéresse ici le cas d'un matériau composite constitué d'une matrice élastique fragile et de fibres élasto-plastiques (par exemple un béton renforcé par des fibres métalliques). La matrice obéit le critère de rupture de *Drucker-Prager* qui s'exprime par :

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\sigma}}^m} + \rho I_1^m - k^m = 0 \quad (5.121)$$

où $I_1^m = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^m$ est le premier invariant du tenseur de contraintes et ρ est un paramètre qui peut être déterminé à partir de résultats d'essais. Si le paramètre ρ est nul, ce critère se réduit à celui de von Mises. On reprend l'exemple de la poutre en matériau renforcé par une distribution de fibres equi-orientées dans le plan (Oxy), soumise à un chargement de flexion (section 4.2.5). Les caractéristiques de la matrice et des phases renforcement sont celles de (5.119). Le paramètre ρ qui intervient dans le critère de rupture de la phase matrice (5.121) est égal à 1.

La réponse de la structure est représentée sur la figure 5.18 pour différentes valeurs de ℓ_c et en comparaison avec celle de la matrice seule.

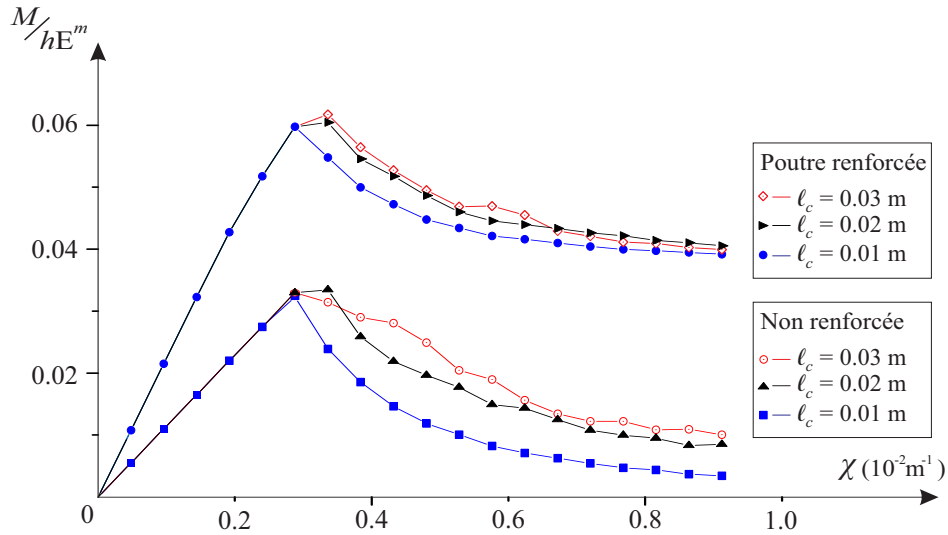


FIGURE 5.18 – Flexion d'une poutre renforcée (matrice élastique fragile et fibres élastoplastiques) - courbe moment-courbure

Ces résultats montrent l'apport du renforcement en terme de raideur et de résistance de la poutre en flexion. Le maillage adopté ici est le même que celui dans la figure 5.6, le choix de $\ell_c = 0.01 \text{ m}$, c'est-à-dire la même taille que les éléments, est alors plus pertinent comme il a été observée en 5.4.2 (figure 5.10).

5.7 Conclusions

Une formulation variationnelle pour les systèmes multiphasiques a été établie sous l'hypothèse d'adhérence parfaite entre les différents constituants. Cette formulation est

par la suite discrétisée et mise en œuvre numériquement dans le cadre de la méthode des éléments finis, aboutissant ainsi à un code de calcul multiphasiques bidimensionnel.

La nécessité de la mise en œuvre d'une approche non locale pour l'application du critère d'endommagement des phases renforcement a été mise en évidence. La mise en œuvre numérique d'une telle approche basée sur l'utilisation d'une fonction de pondération gaussienne et d'un algorithme de calcul itératif, a permis le développement d'un module 'endommagement' dans le code de calcul multiphasique.

Par ailleurs, afin de rendre compte d'un comportement élasto-plastique des constituants, un algorithme implicite appliqué aux structures multiphasiques, basé sur un découpage du trajet de chargement en plusieurs pas, à l'intérieur desquels un calcul itératif par projection sur les critères respectifs des différentes phases est effectué, a été présenté. Sa mise en œuvre numérique dans le cadre de la méthode des éléments finis est ensuite développée et incorporée dans le code multiphasique précédent.

La dernière section de ce chapitre a été consacrée à l'emploi du code de calcul développé pour simuler le comportement d'une poutre sollicitée en flexion en déformation plane. Cette poutre est constituée d'un matériau à fibres dont la matrice est élastique fragile tandis que les fibres sont élasto-plastiques, tel le cas d'un béton de fibres. La réponse macroscopique de la structure montre une première phase élastique suivie d'une phase de comportement non-linéaire où une plastification des phases renforcement et un endommagement de la phase matrice ont lieu.

* *

*

Calcul à la rupture et critère de résistance macroscopique pour les matériaux à fibres

Sommaire

6.1	Introduction	131
6.2	Calcul à la rupture pour les systèmes en milieux multiphasiques	131
6.2.1	Domaine K des chargements potentiellement supportables pour un système multiphasique	131
6.2.2	Approche statique par l'intérieur de K	132
6.2.3	Approche cinématique par l'extérieur de K	132
6.2.4	Un exemple de mise en œuvre	135
6.3	Critère de résistance macroscopique	140
6.3.1	Définition du domaine de résistance macroscopique	140
6.3.2	Représentation géométrique du domaine G^{hom} dans l'espace des contraintes	142
6.3.3	Un exemple de mise en œuvre	147
6.4	Conclusion	149

6.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de l'approche du calcul à la rupture appliquée milieux multiphasiques. Cette méthode d'estimation de la charge de ruine des structures en milieu multiphasique sera utilisée comme une alternative au calcul élasto-plastique, où une application du chargement en petits incréments successifs, associée à un calcul itératif doivent être réalisés. Les résultats d'une telle démarche serviront aussi à qualifier les résultats numériques et à déterminer par voie théorique le critère de résistance à l'échelle macroscopique pour les matériaux à fibres, à partir de la connaissance des caractéristiques de résistance des constituants (matrice, fibres) en supposant que l'interface entre chaque phase renforcement et la matrice est à *adhérence parfaite* et la proportion volumique des fibres est très faible.

6.2 Calcul à la rupture pour les systèmes en milieux multiphasiques

6.2.1 Domaine K des chargements potentiellement supportables pour un système multiphasique

On se propose d'expliciter la définition des chargements potentiellement supportables d'une structure, dans le cadre du formalisme de la mécanique des milieux multiphasiques, en se basant sur un raisonnement de *compatibilité équilibre-résistance* comme dans le cas d'un milieu continu classique ([7]; [45]).

On considère donc un système en milieu multiphasique, noté Ω , soumis à un chargement $\underline{Q}$ et on définit le domaine K des chargements potentiellement supportables pour le système en milieu multiphasique, comme l'ensemble des chargement $\underline{Q}$ tels qu'il existe un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^m$ dans la phase matrice et une distribution de champs de contraintes uniaxiales $\{\sigma^r\}$ dans les phases renforcement, *statiquement admissibles* avec $\underline{Q}$ et vérifiant en tout point le critère de résistance de la phase matrice et celui de chaque phase renforcement :

$$\underline{Q} \in K \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists \{\underline{\underline{\sigma}}^m, \{\sigma^r\}\} \quad \text{statiquement admissible avec } \underline{Q} \\ \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}); \quad \sigma_i^r(\underline{x}) \in G^r(x), \quad \forall \sigma_i^r(\underline{x}) \in \{\sigma^r\}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (6.1)$$

où G^m , G^r désignent respectivement les domaines de résistance de la phase matrice et de chacune des phases renforcement. Ces domaines sont entièrement déterminés par la

donnée d'un critère de résistance pour chacune des phases.

6.2.2 Approche statique par l'intérieur de K

Cette approche revient tout simplement à appliquer la définition (6.1) du domaine K des chargements potentiellement supportables. Tout chargement $\underline{Q}$ est potentiellement supportable s'il peut être équilibré par un champ d'efforts intérieurs vérifiant les critères de résistance des différentes phases. Etant donné dans l'espace des paramètres de chargement $\underline{Q}$ un ensemble de points représentatifs de tels chargements appartenant à K , la propriété de convexité de ce dernier (dédue de la convexité des critères G^m et G^r) permet d'affirmer que l'enveloppe convexe de ces points est incluse dans K (figure 6.1).

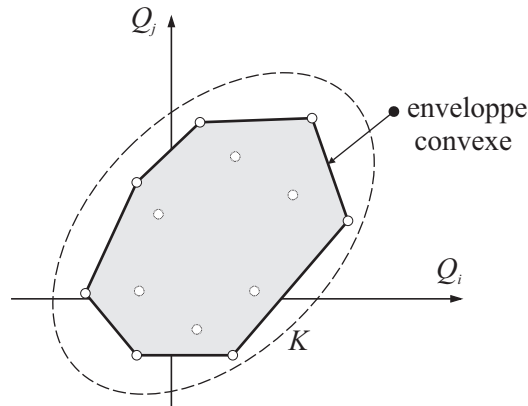


FIGURE 6.1 – Construction d'une approche statique par l'intérieur du domaine K

6.2.3 Approche cinématique par l'extérieur de K

Comme dans le cas d'un milieu continu classique, l'approche cinématique repose sur la dualisation des équations d'équilibre du milieu multiphasique par le biais du *principe des puissances virtuelles*. Désignant par $\{\hat{\underline{U}}\}$ un champ de vitesse *virtuel cinématiquement admissible* dans le mode de chargement, la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* s'écrit dans le cas d'un mode de chargement $\underline{Q}$:

$$P_e(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} \underline{F} \cdot \hat{\underline{U}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \hat{\underline{U}} dS = \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} \quad (6.2)$$

où $\hat{\underline{q}}$ représente le vecteur des paramètres cinématiques apparaissant en dualité avec les

paramètres de chargement $\underline{Q}$.

La *puissance virtuelle de déformation* s'écrit dans ce même champ de vitesse virtuel :

$$P_d(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}}^m : \hat{\underline{d}} + \int_{\omega} \sigma^r \hat{d}^r d\omega \right) d\Omega \quad (6.3)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\hat{\underline{U}}) + {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}(\hat{\underline{U}}) \right) \\ \hat{d}^r = \frac{\partial \hat{U}_s}{\partial s} \end{cases} \quad (6.4)$$

Le *principe des puissances virtuelles* s'écrit alors :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^m; \{\sigma^r\}) \in \mathcal{S.A} \text{ avec } \underline{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \hat{\underline{U}} \in \mathcal{C.A.} \text{ avec } \hat{\underline{q}} \\ \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} = \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}}^m : \hat{\underline{d}} + \int_{\omega} \sigma^r \hat{d}^r d\omega \right) d\Omega \end{cases} \quad (6.5)$$

Il en résulte que la définition (6.1) du domaine K des chargements potentiellement supportables peut être réécrite sous la forme :

$$\underline{Q} \in K \iff \begin{cases} \exists \{\underline{\underline{\sigma}}^m, \{\sigma^r\}\} \text{ tel que } \forall \underline{U} \in \mathcal{C.A} \text{ avec } \hat{\underline{q}} : \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} = P_d(\hat{\underline{U}}) \\ \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}); \sigma^r(\underline{x}) \in G^r(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{cases} \quad (6.6)$$

On introduit alors la *puissance résistance maximale* d'un milieu multiphasique dans le champ de vitesse virtuel $\{\hat{\underline{U}}\}$, définie par :

$$P_{rm}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} \pi^m(\hat{\underline{d}}) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\int_{\omega} \pi^r(\hat{d}^r) d\omega \right) d\Omega + \int_{\mathcal{D}} \pi^m(\underline{n}; [\hat{\underline{U}}]) dS + \int_{\mathcal{D}} \pi^r(\underline{n}; [\hat{\underline{U}}]) dS \quad (6.7)$$

Dans cette dernière expression, $\pi^m(\cdot)$ et $\pi^r(\cdot)$ désignent les *fonctions d'appui* des domaines de résistance de la phase matrice G^m et de la phase renforcement G^r , définies par :

$$\begin{cases} \pi^m(\hat{\underline{d}}) = \sup \{ \underline{\underline{\sigma}}^m : \hat{\underline{d}}; \quad \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \} \\ \pi^r(\hat{d}^r) = \sup \{ \sigma^r \hat{d}^r; \quad \sigma^r \in G^r \} \end{cases} \quad (6.8)$$

$\mathcal{D}$ représente l'ensemble des *surfaces de discontinuité du champ* $\{\hat{\underline{U}}\}$, de normale unitaire $\underline{n}$. Les fonctions d'appui correspondantes étant :

$$\begin{cases} \pi^m(\underline{n}, [\hat{\underline{U}}]) = \sup \{ (\underline{\underline{\sigma}}^m \cdot \underline{n}) \cdot [\hat{\underline{U}}]; \quad \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \} \\ \pi^r(\underline{n}, [\hat{\underline{U}}]) = \sup \{ \sigma^r n_r [\hat{\underline{U}}_r]; \quad \sigma^r \in G^r \} \end{cases} \quad (6.9)$$

où $[X]$ représente le saut de la variable X à la traversée de $\mathcal{D}$ en suivant la direction de la normale $\underline{n}$.

Cette puissance résistante maximale apparaît alors comme un *majorant* de la puissance de déformation pour des efforts intérieurs vérifiant les critères de résistance.

La dualisation des équations d'équilibre du milieu multiphasique, exprimée à travers ce principe des puissances virtuelles, et des critères de résistance des deux phases, permet de caractériser l'ensemble K des chargements potentiellement supportables comme suit :

$$\underline{Q} \in K \implies \forall \hat{\underline{U}} \quad \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}}(\hat{\underline{U}}) \leq P_{rm}(\hat{\underline{U}}) \quad (6.10)$$

ou de manière équivalente :

$$\exists \hat{\underline{U}} \text{ tel que } \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}}(\hat{\underline{U}}) > P_{rm}(\hat{\underline{U}}) \implies \underline{Q} \notin K \quad (6.11)$$

Cette dernière inégalité donne lieu à l'interprétation géométrique indiquée sur la figure 6.2.

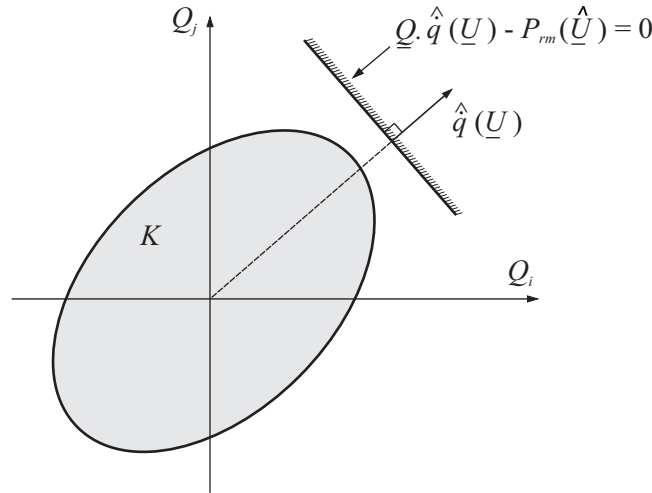


FIGURE 6.2 – Interprétation géométrique de (6.11) dans l'espace des paramètres de chargement

Le domaine K est inclus dans le demi-espace contenant l'origine et délimité par le plan d'équation

$$\underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}}(\hat{\underline{U}}) = P_{rm}(\hat{\underline{U}}) \quad (6.12)$$

Une telle démarche est appelée *approche cinématique par l'extérieur*. Elle permet d'obtenir des *majorants* des chargements extrêmes situés sur la frontière de K

6.2.4 Un exemple de mise en œuvre

On considère un matériau à fibres, modélisé comme un milieu multiphasique constitué d'une matrice obéissant au critère de résistance de von Mises de résistance en cission k^m et d'une infinité de phases renforcement vérifiant le critère uniaxial (4.6) de résistance en traction-compression σ_0^r . On note que la résistance σ_0^r est liée à celle du matériau constitutif des fibres σ_0^f par :

$$\sigma_0^r = \eta^r \sigma_0^f = \begin{cases} \frac{f^r \sigma_0^f}{\pi} & \text{cas d'une distribution bidimensionnelle de fibres} \\ \frac{f^r \sigma_0^f}{2\pi} & \text{cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres} \end{cases} \quad (6.13)$$

6.2.4.1 Approche statique par l'intérieur

Considérons maintenant une éprouvette parallélépipédique, de hauteur H et de section carrée de côté $2L$ (figure 6.3), constituée d'un matériau à fibres renforcée par une distribution continue plane de fibres. Cette éprouvette est soumise à un essai de compression en *déformation plane* dans le plan (Oxy) . Ce chargement est défini par les conditions aux limites suivantes :

◇ les faces latérales sont libres d'efforts :

$$S_{lt}(x = \pm L) : \quad \underline{\underline{\Sigma}}(\pm L) \cdot \underline{e}_x = \underline{0} \quad (6.14)$$

◇ La surface inférieure est en contact sans frottement avec un support indéformable :

$$S(y = 0) : \quad T_x = T_z = 0; \quad U_y = 0 \quad (6.15)$$

◇ La surface supérieure est en contact sans frottement avec un plateau indéformable ayant un mouvement de translation de vecteur $\underline{t} = -U\underline{e}_y$:

$$S(y = H) : \quad T_x = T_z = 0; \quad U_y = -U \quad (6.16)$$

◇ On néglige les forces de volume

Le paramètre de chargement étant la *force de compression*, exercée par le plateau supérieur sur l'éprouvette :

$$Q = - \int_{S(y=H)} \sigma_{yy} dx dz \quad (6.17)$$

on se propose de déterminer sa valeur extrême Q^+ , définie par :

$$Q^+ = \left\{ \sup Q / \exists \underline{\underline{\sigma}}^m, \{\sigma^r\} \mathcal{S.A} \text{ avec } Q, \text{ telque } f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0, f^r(\sigma^r) \leq 0 \right\} \quad (6.18)$$

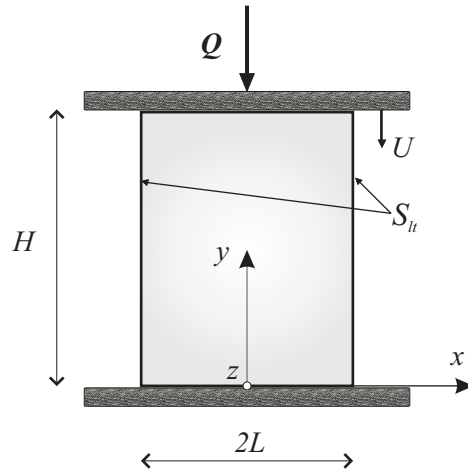


FIGURE 6.3 – *Essai de compression en déformation plane*

On considère l'ensemble des champs de contrainte homogènes par phases (figure 6.4) défini par :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}}^m &= -2k\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - k\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - \sigma_0^r \underline{1} \\ &= -\sigma_0^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - (2k + \sigma_0^r) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - (k + \sigma_0^r) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\end{aligned}\quad (6.19)$$

$$\sigma^r = \begin{cases} \sigma_0^r & \text{si } \theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \pi] \\ -\sigma_0^r & \text{si } \theta \in [\pi/4, 3\pi/4] \end{cases}\quad (6.20)$$

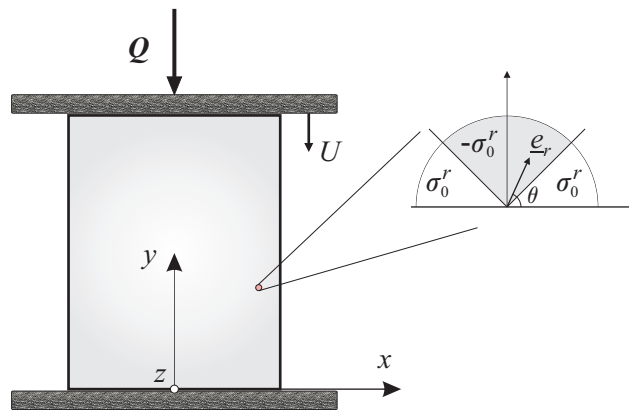


FIGURE 6.4 – *Distribution des contraintes dans les phases renforcement*

Compte tenu du choix du champ de contrainte dans la phase matrice, la partie déviatorique

$\underline{\underline{s}}^m$ est égale à :

$$\underline{\underline{s}}^m = -k^m \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + k^m \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (6.21)$$

et par suite :

$$f^m(\underline{\underline{s}}^m) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}}^m : \underline{\underline{s}}^m} - k^m = 0 \quad (6.22)$$

Le critère de résistance des phases renforcement est saturé pour toutes les phases :

$$f^r(\sigma^r) = |\sigma^r| - \sigma_0^r = 0 \quad (6.23)$$

Les composantes du champ de contrainte total $\underline{\underline{\Sigma}}$ équilibré par les champs de contrainte partiels proposés, sont alors données en tenant compte de (6.19) et (6.20) par :

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^m + \left(\int_0^\pi \sigma_r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\theta \right) : (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) \\ &= -\sigma_0^r + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma_0^r \cos^2 \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sigma_0^r \cos^2 \theta d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi \sigma_0^r \cos^2 \theta d\theta \\ &= -\sigma_0^r + \frac{f^r \sigma_0^f}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi \cos^2 \theta d\theta \right) \\ &= -\sigma_0^r + \sigma_0^r = 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^m + \left(\int_0^\pi \sigma_r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\theta \right) : (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \\ &= -2k^m - \sigma_0^r + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma_0^r \sin^2 \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sigma_0^r \sin^2 \theta d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi \sigma_0^r \sin^2 \theta d\theta \\ &= -2k^m - \sigma_0^r + \frac{f^r \sigma_0^f}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 \theta d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi \sin^2 \theta d\theta \right) \\ &= -2k^m - \sigma_0^r - \sigma_0^r = -2k^m - 2\sigma_0^r \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\Sigma_{xy} = \sigma_{xy}^m + \left(\int_0^\pi \sigma_r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\theta \right) : (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y) = 0 \quad (6.26)$$

$$\Sigma_{xz} = \Sigma_{yz} = 0 \quad (6.27)$$

Le champ de contrainte total est donc *statiquement admissible* avec la valeur $Q^* = (2k^m + 2\sigma_0^r)S$ ($S = 4L^2$ désigne la section de l'éprouvette), ce qui conduit alors à un *minorant* du chargement extrême :

$$Q^+ \geq (2k^m + 2\sigma_0^r)S \quad (6.28)$$

6.2.4.2 Approche cinématique par l'extérieur

On considère le champ de vitesse virtuel défini comme suit :

$$\hat{\underline{U}} = \frac{U}{H}(x \underline{e}_x - y \underline{e}_y) \quad (6.29)$$

Compte tenu de l'hypothèse d'*adhérence parfaite* entre phases, le champ de tenseur taux de déformation s'exprime par :

$$\underline{\underline{\hat{d}}}^m = \underline{\underline{\hat{d}}} = \frac{U}{H}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (6.30)$$

dans la phase matrice et

$$\hat{d}^r = \underline{e}_r \cdot \underline{\underline{\hat{d}}} \cdot \underline{e}_r = \frac{U}{H}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (6.31)$$

dans la phase renforcement représentant les fibres d'orientation θ par rapport à l'axe des x .

La *puissance résistance maximale* est décomposée additivement en la contribution de la phase matrice et de la distribution continue des phases renforcement :

$$P_{rm}(\hat{\underline{U}}) = P_{rm}^m(\hat{\underline{U}}) + \int_0^\pi P_{rm}^r(\hat{\underline{U}}) d\theta \quad (6.32)$$

La puissance résistance maximale de la phase matrice est déterminée par :

$$P_{rm}^m(\hat{\underline{U}}) = \int_\Omega \pi^m(\underline{\underline{\hat{d}}}) d\Omega \quad (6.33)$$

où $\pi^m(\cdot)$ est la fonction d'appui du domaine de von Mises, donnée par ([7]) :

$$\pi^m(\underline{\underline{\hat{d}}}^m) = \begin{cases} k^m \sqrt{2\underline{\underline{\hat{d}}} : \underline{\underline{\hat{d}}}} & \text{si } \text{tr} \underline{\underline{\hat{d}}} = 0 \\ +\infty & \text{si } \text{tr} \underline{\underline{\hat{d}}} \neq 0 \end{cases} \quad (6.34)$$

La combinaison de (6.9), (6.33) et (6.34) permet d'accéder à la valeur de P_{rm}^m

$$P_{rm}^m = 2k^m U S \quad (6.35)$$

En ce qui concerne la phase renforcement d'orientation θ par rapport à l'axe des x :

$$P_{rm}^r(\hat{\underline{U}}) = \int_\Omega \pi^r(\hat{d}^r) d\Omega \quad (6.36)$$

où $\pi^r(\cdot)$ désigne la fonction d'appui d'une phase renforcement, donnée par :

$$\pi^r(\hat{d}^r) = \sup \left\{ \sigma^r \hat{d}^r, |\sigma^r| \leq \sigma_0^r \right\} = \sigma_0^r |\hat{d}^r| \quad (6.37)$$

La *puissance résistance maximale* d'une phase renforcement s'écrit alors :

$$P_{rm}^r(\hat{d}^r) = \int_{\Omega} \sigma_0^r |\hat{d}^r| d\Omega = \sigma_0^r \frac{U}{H} |\cos^2 \theta - \sin^2 \theta| SH \quad (6.38)$$

La *puissance résistance maximale* du milieu multiphasique est alors donnée par :

$$\begin{aligned} P_{rm}(\hat{U}) &= 2k^m SU + SU \int_0^\pi \sigma_0^r |\cos^2 \theta - \sin^2 \theta| d\theta \\ &= 2k^m SU + SU \sigma_0^r \int_0^\pi |\cos^2 \theta - \sin^2 \theta| d\theta = 2(k^m + \sigma_0^r)SU \end{aligned} \quad (6.39)$$

La puissance des efforts extérieurs dans le champ de vitesse virtuel (6.29) s'écrivant :

$$P_{ext}(\hat{U}) = Q.U \quad (6.40)$$

l'application de *l'approche cinématique* conduit alors à l'inégalité suivante :

$$Q \leq Q^+ \Rightarrow Q.U \leq 2(k^m + \sigma_0^r)SU \quad \forall U \quad (6.41)$$

permettant ainsi de trouver un *majorant* du chargement de ruine Q^+ :

$$Q^+ \leq 2(k^m + \sigma_0^r)S \quad (6.42)$$

La combinaison des résultats de *l'approche statique* (6.28) et *cinématique* (6.42) conduit à la valeur exacte du chargement extrême Q^+ :

$$Q^+ = 2(k^m + \sigma_0^r)S \quad (6.43)$$

Application numérique : Les caractéristiques suivantes ont été adoptées

$$\frac{k^m}{E^m} = 10^{-2}; \quad f^r = 3.14\%; \quad \frac{\sigma_0^f}{E^m} = 1; \quad \frac{\sigma_0^r}{E^m} = \frac{f^r}{\pi} \frac{\sigma_0^f}{E^m} = 1 \quad (6.44)$$

La valeur du chargement extrême normalisé est donc : $\frac{Q^+}{SE^m} = 0.04$. La charge limite normalisée obtenue par la méthode des éléments finis dans 5.5.4 est $\frac{Q^\ell}{SE^m} = 0.0393$, l'erreur commise étant inférieure à 2%. Cette bonne concordance constitue une validation de l'outil numérique développé au chapitre 5 pour les problèmes multiphasiques en élasto-plasticité.

6.3 Critère de résistance macroscopique pour les matériaux à fibres

6.3.1 Définition du domaine de résistance macroscopique

On considère un système en milieu multiphasique Ω constitué d'une phase matrice et d'une infinité de phases renforcement dont les critères de résistance, au point $\underline{x}$, sont définis comme suit :

◇ *Phase matrice* :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m(\underline{x}) \iff f^m(\underline{x}; \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x})) \leq 0 \quad (6.45)$$

où $G^m(\underline{x})$ représente le domaine de résistance de la phase matrice en ce point, constitué de l'ensemble des états de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^m$ admissibles. Ce domaine contient l'origine (*i.e* $\underline{\underline{\sigma}}^m = 0 \in G^m(\underline{x})$) et possède la propriété de convexité :

$$\underline{\underline{\sigma}}_1^m(\underline{x}), \underline{\underline{\sigma}}_2^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}) \implies (1 - \zeta)\underline{\underline{\sigma}}_1^m(\underline{x}) + \zeta\underline{\underline{\sigma}}_2^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}) \quad \forall \zeta \in [0, 1] \quad (6.46)$$

◇ *Phases renforcement* :

$$\sigma^r \in G^r \iff |\sigma^r| \leq \sigma_0^r \quad (6.47)$$

$G^r(\underline{x})$ représente le domaine de résistance d'une phase renforcement en ce point, constitué de l'ensemble des états de densité d'effort normal σ^r admissibles. Le domaine $G^r(\underline{x})$ est simplement l'intervalle fermé $[-\sigma_0^r, \sigma_0^r]$,

Le domaine de résistance macroscopique est défini comme suit ([9]) :

$$\Sigma \in G^{hom} \iff \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}^m, \{\sigma^r\} / \Sigma = \underline{\underline{\sigma}}^m + \int_{\omega} \sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \text{ et } |\sigma^r| \leq \sigma_0^r \end{cases} \quad (6.48)$$

Le domaine G^m de la matrice est donc inclus dans le domaine G^{hom} et on peut démontrer que les propriétés, supposées valables en tout point de $G^m(\underline{x})$ et $G^r(\underline{x})$ sont transposables au domaine G^{hom} , qui contient l'origine de l'espace des contraintes et vérifie la propriété de convexité.

Une alternative à la définition du domaine de résistance macroscopique énoncée ci-dessus consiste à énoncer la définition suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \Pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) \quad \forall \underline{\underline{D}} \quad (6.49)$$

où Π^{hom} désigne la fonction d'appui du domaine macroscopique, qui s'écrit, compte tenu de la condition d'*adhérence parfaite* entre phases, par :

$$\Pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \sup \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{D}} + \left(\int_{\omega} \sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\omega \right) : \underline{\underline{D}} ; \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m ; \sigma^r \in G^r \right\} \quad (6.50)$$

Cette définition *cinématique* de G^{hom} peut être interprétée géométriquement dans l'espace des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$. L'équation (6.50) montre que $\Pi^{hom}(\underline{\underline{D}})$ est proportionnel à la distance à l'origine de l'hyperplan tangent à G^{hom} au point où la normale extérieure est parallèle à $\underline{\underline{D}}$ (figure 6.5).

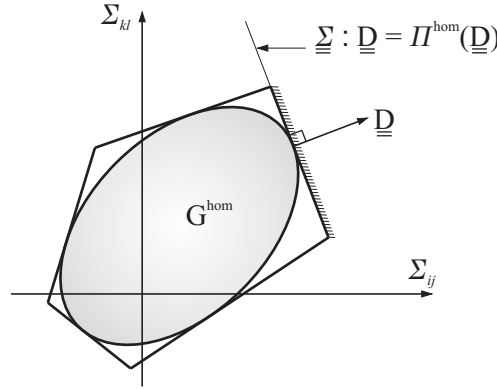


FIGURE 6.5 – Interprétation géométrique du domaine G^{hom} et de sa fonction d'appui dans l'espace des contraintes

La fonction d'appui (6.50) du domaine G^{hom} peut donc s'exprimer comme la somme des fonctions d'appui des différentes phases (6.8) :

$$\begin{aligned} \Pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) &= \sup \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{D}} + \left(\int_{\omega} \sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r d\omega \right) : \underline{\underline{D}} ; \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m ; \sigma^r \in G^r \right\} \\ &= \sup \{ \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{D}} ; \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \} + \int_{\omega} \sup \{ \sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r : \underline{\underline{D}} ; \sigma^r \in G^r \} d\omega \\ &= \Pi^m(\underline{\underline{D}}) + \int_{\omega} \pi^r(\underline{\underline{D}}) d\omega = \Pi^m(\underline{\underline{D}}) + \Pi^r(\underline{\underline{D}}) \end{aligned} \quad (6.51)$$

où $\pi^r(\underline{\underline{D}})$ désigne la fonction d'appui d'une phase renforcement :

$$\pi^r(\underline{\underline{D}}) = \sup \{ \sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r : \underline{\underline{D}} ; \sigma^r \in G^r \} = \sigma_0^r |D_{rr}| \quad (6.52)$$

avec $D_{rr} = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r : \underline{\underline{D}}$ tandis que $\Pi^r(\underline{\underline{D}}) = \int_{\omega} \pi^r(\underline{\underline{D}}) d\omega$ désigne la fonction d'appui de la distribution de phases renforcement.

6.3.2 Représentation géométrique du domaine G^{hom} dans l'espace des contraintes

6.3.2.1 Cas d'une distribution bidimensionnelle de fibres

On s'intéresse ici au cas où les fibres de renforcement sont orientées de façon isotrope dans le plan (Oxy) . L'ensemble des orientations des fibres ω dans les équations (6.48) et (6.51) est alors égal à l'intervalle $[0, \pi[$. Notant par D_1 et D_2 les valeurs principales du tenseur taux de déformation $\underline{\underline{D}}$ et par $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ les directions principales correspondantes, le vecteur unitaire radial peut être défini par $\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$ (figure 6.6) et on obtient donc :

$$D_{rr} = (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{D}} = D_1 \cos^2 \theta + D_2 \sin^2 \theta \quad (6.53)$$

La fonction d'appui des phases renforcement est donnée par :

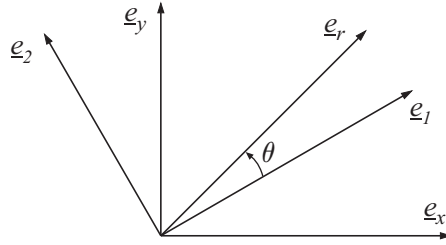


FIGURE 6.6 – Vecteur unitaire radial

$$\Pi^r(\underline{\underline{D}}) = \int_{\omega} \pi^r(\underline{\underline{D}}) d\omega = \sigma_0^r \int_0^\pi |D_1 \cos^2 \theta + D_2 \sin^2 \theta| d\theta \quad (6.54)$$

On considère 4 cas suivants :

◇ 1^{er} cas $D_1 \geq 0$ et $D_2 \geq 0$ $((D_1, D_2) \neq (0, 0))$

Le taux de déformation radial D_{rr} étant dans ce cas positif, l'expression de la fonction d'appui $\Pi^r(\underline{\underline{D}})$ devient alors

$$\begin{aligned} \Pi^r(\underline{\underline{D}}) &= \sigma_0^r \int_0^\pi (D_1 \cos^2 \theta + D_2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \sigma_0^r \frac{\pi}{2} (D_1 + D_2) \end{aligned} \quad (6.55)$$

◇ 2^{ème} cas $D_1 \leq 0$ et $D_2 \leq 0$ $((D_1, D_2) \neq (0, 0))$

$$\begin{aligned} \Pi^r(\underline{\underline{D}}) &= -\sigma_0^r \int_0^\pi (D_1 \cos^2 \theta + D_2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= -\sigma_0^r \frac{\pi}{2} (D_1 + D_2) \end{aligned} \quad (6.56)$$

◇ 3^{ème} cas $D_1 \geq 0$ et $D_2 < 0$

On distingue dans ce cas deux zones suivant la valeur de D_{rr} :

$$D_{rr} \geq 0 \Leftrightarrow \tan^2 \theta \leq -\frac{D_1}{D_2} \quad (6.57)$$

comme $\theta \in [0, \pi[$, on obtient :

$$D_{rr} \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [0, \theta^*] \cup [\pi - \theta^*, \pi[\\ \text{avec } \theta^* = \text{Arctg}(\sqrt{\frac{-D_1}{D_2}}) \end{array} \right. \quad (6.58)$$

L'expression (6.54) de $\Pi^r(\underline{D})$ devient alors :

$$\begin{aligned} \Pi^r(\underline{D}) &= \sigma_0^r \left[\int_0^{\theta^*} D_{rr} d\theta + \int_{\theta^*}^{\pi - \theta^*} -D_{rr} d\theta + \int_{\pi - \theta^*}^{\pi} D_{rr} d\theta \right] \\ &= 2\sigma_0^r \left[\int_0^{\theta^*} D_{rr} d\theta - \int_{\theta^*}^{\pi/2} D_{rr} d\theta \right] \\ &= \frac{\sigma_0^r}{2} [2 \sin(2\theta^*)(D_1 - D_2) + (4\theta^* - \pi)(D_1 + D_2)] \end{aligned} \quad (6.59)$$

◇ 4^{ème} cas $D_1 < 0$ et $D_2 > 0$

D'une manière analogue au cas précédent, on obtient :

$$D_{rr} \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [\theta^*, \pi - \theta^*] \\ \text{avec } \theta^* = \text{Arctg}(\sqrt{\frac{-D_1}{D_2}}) \end{array} \right. \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \Pi^r(\underline{D}) &= 2\sigma_0^r \left[-\int_0^{\theta^*} D_{rr} d\theta + \int_{\theta^*}^{\pi/2} D_{rr} d\theta \right] \\ &= -\frac{\sigma_0^r}{2} [2 \sin(2\theta^*)(D_1 - D_2) + (4\theta^* - \pi)(D_1 + D_2)] \end{aligned} \quad (6.61)$$

La représentation du domaine de résistance de l'ensemble des phases renforcement G^r est le convexe délimité par l'ensemble des droites d'équation :

$$\Sigma_1 D_1 + \Sigma_2 D_2 = \Pi^r(\underline{D}) \quad (6.62)$$

L'équation paramétrique de G^r peut être obtenue en écrivant :

$$\Sigma_1 = \frac{\partial \Pi^r}{\partial D_1}, \quad \Sigma_2 = \frac{\partial \Pi^r}{\partial D_2} \quad (6.63)$$

◇ Pour $D_1 \geq 0$ et $D_2 \geq 0$:

$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \sigma_0^r \frac{\pi}{2}$ ce qui veut dire que le point $(\Sigma_1, \Sigma_2) = (\sigma_0^r \frac{\pi}{2}, \sigma_0^r \frac{\pi}{2})$ du domaine G^r est

un point anguleux dont le cône des normales extérieures est l'ensemble des D_1, D_2 positifs (figure 6.7).

◇ Pour $D_1 \leq 0$ et $D_2 \leq 0$:

$(\Sigma_1, \Sigma_2) = (-\sigma_0^r \frac{\pi}{2}, -\sigma_0^r \frac{\pi}{2})$ est aussi un point anguleux. Le cône des normales extérieures à G^r en ce point est l'ensemble des D_1, D_2 négatifs (figure 6.7).

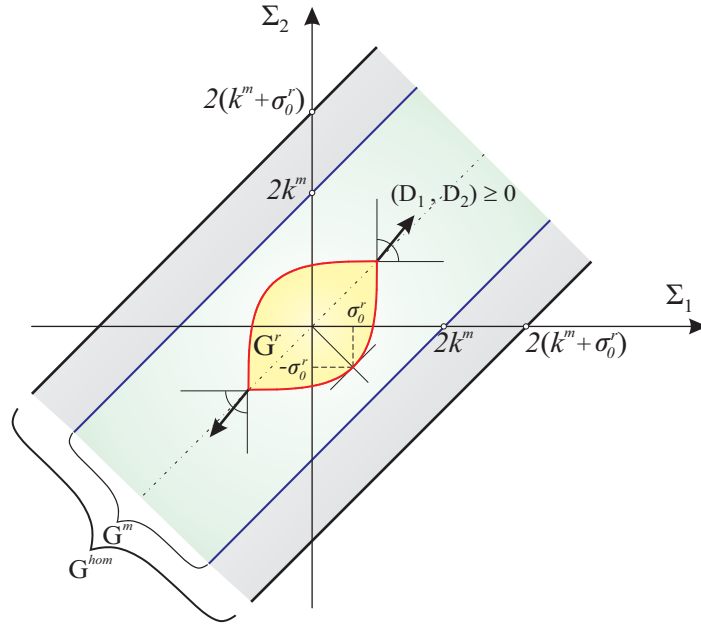


FIGURE 6.7 – Distribution bidimensionnelle de fibres : représentation géométrique du domaine G^{hom} dans le plan des contraintes principales

◇ Pour $D_1 > 0$ et $D_2 < 0$:

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \frac{\partial \Pi^r}{\partial D_1} = \left[2 \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{-D_1}{D_2}}\right) - \frac{2D_1 D_2}{D_1^2 + D_2^2} - \frac{\pi}{2} \right] \\ \Sigma_2 = \frac{\partial \Pi^r}{\partial D_2} = \left[2 \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{-D_1}{D_2}}\right) + \frac{2D_1 D_2}{D_1^2 + D_2^2} - \frac{\pi}{2} \right] \end{cases} \quad (6.64)$$

soit, en introduisant le paramètre $t = -\frac{D_1}{D_2} > 0$, on obtient l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \sigma_0^r \left[2 \operatorname{Arctg}(t) + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{\pi}{2} \right] \\ \Sigma_2 = \sigma_0^r \left[2 \operatorname{Arctg}(t) - \frac{2t}{1+t^2} - \frac{\pi}{2} \right] \end{cases} \quad (6.65)$$

◇ Pour $D_1 < 0$ et $D_2 > 0$:

Identiquement au cas précédent, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 = -\sigma_0^r \left[2\text{Arctg}(t) + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{\pi}{2} \right] \\ \Sigma_2 = -\sigma_0^r \left[2\text{Arctg}(t) - \frac{2t}{1+t^2} - \frac{\pi}{2} \right] \end{array} \right. \quad (6.66)$$

La représentation géométrique du domaine G^r dans l'espace des contraintes $\Sigma_1 - \Sigma_2$ est donnée sur la figure 6.7.

Le domaine de résistance G^m de la phase matrice est délimité par les deux droites d'équations (figure 6.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 - \Sigma_2 = 2k^m \\ \Sigma_1 - \Sigma_2 = -2k^m \end{array} \right. \quad (6.67)$$

Le domaine de résistance macroscopique est la somme de Minkowski des domaines de résistance G^r des phases renforcement et G^m de la phase matrice :

$$G^{hom} = G^m \oplus G^r \quad (6.68)$$

Le domaine G^{hom} est alors délimité par les deux droites d'équation (figure 6.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 - \Sigma_2 = 2(k^m + \sigma_0^r) \\ \Sigma_1 - \Sigma_2 = -2(k^m + \sigma_0^r) \end{array} \right. \quad (6.69)$$

Ce qui montre que le matériau renforcé est équivalent, en déformation plane, à un matériau de von Mises de résistance en cisson simple $k^{eq} = k^m + \sigma_0^r$.

6.3.2.2 Cas d'une distribution tridimensionnelle de fibres

On se propose ici de déterminer le critère de résistance *en déformation plane* dans Oxy , dans le cas d'une distribution continue et isotrope des fibres.

Le taux de déformation radial est donné par :

$$D_{rr} = \underline{\underline{D}} : \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad (6.70)$$

soit, en exprimant le tenseur taux déformation $\underline{\underline{D}}$ et le vecteur $\underline{e}_r$ dans la base principale $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_z)$ de $\underline{\underline{D}}$, il vient :

$$D_{rr} = \underline{\underline{D}} : \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r = D_1 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + D_2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \quad (6.71)$$

La fonction d'appui $\Pi^r(\underline{\underline{D}})$ des phases renforcement est donnée dans ce cas par :

$$\Pi^r(\underline{\underline{D}}) = \sigma_0^r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} |D_{rr}| \sin^2 \theta d\theta d\phi \quad (6.72)$$

$$= \sigma_0^r \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \cdot 2 \int_{\phi=0}^{\pi} |D_1 \cos^2 \phi + D_2 \sin^2 \phi| d\phi = \frac{4\sigma_0^r}{3} \int_{\phi=0}^{\pi} |D_1 \cos^2 \phi + D_2 \sin^2 \phi| d\phi \quad (6.73)$$

On distingue 4 cas selon les valeurs de D_1 et D_2 . On trouve après calculs :

◇ $D_1 \geq 0$ et $D_2 \geq 0$ ($(D_1, D_2) \neq (0, 0)$)

$$\Pi^r(\underline{\underline{D}}) = \sigma_0^r \frac{2\pi}{3} (D_1 + D_2) \quad (6.74)$$

◇ $D_1 < 0$ et $D_2 < 0$

$$\Pi^r(\underline{\underline{D}}) = -\sigma_0^r \frac{2\pi}{3} (D_1 + D_2) \quad (6.75)$$

◇ $D_1 \geq 0$ et $D_2 < 0$

$$\Pi^r(\underline{\underline{D}}) = \frac{2\sigma_0^r}{3} [2 \sin(2\phi^*) (D_1 - D_2) + (4\phi^* - \pi)(D_1 + D_2)] \quad (6.76)$$

◇ $D_1 < 0$ et $D_2 > 0$

$$\Pi^r(\underline{\underline{D}}) = -\frac{2\sigma_0^r}{3} [2 \sin(2\phi^*) (D_1 - D_2) + (4\phi^* - \pi)(D_1 + D_2)] \quad (6.77)$$

avec $\phi^* = \text{Arctg}(\sqrt{\frac{-D_1}{D_2}})$

Ces dernières expressions montrent que, à résistances en traction des phases renforcement σ_0^r égales, la fonction d'appui de l'ensemble des phases renforcement $\Pi^r(\underline{\underline{D}})$ est égale à celle obtenue par une distribution bidimensionnelle de fibres multiplié par $2/3$.

Le domaine de résistance G^r est alors l'image de son homologue obtenue en 6.3.2.1 et représenté par la figure 6.8 par une homothétie de centre l'origine ($\Sigma_1 = 0, \Sigma_2 = 0$) et de rapport $4/3$.

La représentation géométrique du domaine de résistance des phases renforcement G^r , de la phase matrice G^m et de leur somme de Minkowski G^{hom} est donnée sur la figure 6.8. Elle montre que le critère de résistance en déformation plane du milieu renforcé est un critère de von Mises de résistance en cisson $k^{eq} = k^m + \frac{4\sigma_0^r}{3}$

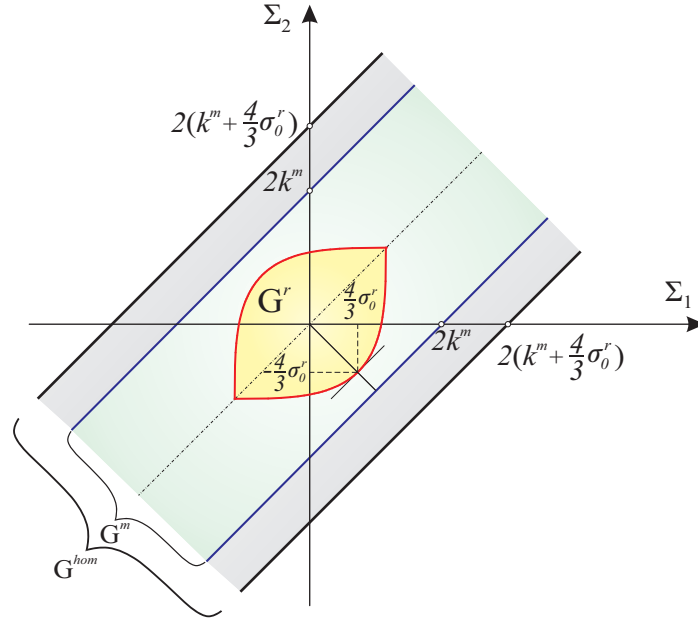


FIGURE 6.8 – *Distribution tridimensionnelle : représentation géométrique du domaine G^{hom}*

6.3.3 Un exemple de mise en œuvre

On reprend dans cette section l'exemple de l'éprouvette constituée d'un matériau de von Mises de résistance en cisssion k^m , renforcé par une distribution bidimensionnelle de fibres de résistance en traction σ_0^f . Cette éprouvette est soumise au chargement décrit à la section 6.2.4 (i.e essai de compression en déformation plane dans le plan de renforcement du matériau) (voir figure 6.3).

On rappelle que, d'après les calculs de la section 6.3.2.1, le domaine de résistance macroscopique est le domaine de von Mises de résistance en cisssion équivalente $k^{eq} = k^m + \sigma_0^r$.

Approche statique par l'intérieur :

On considère le champ de contrainte homogène suivant :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -2k^{eq}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - k^{eq}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (6.78)$$

qui est *statiquement admissible* avec $Q = k^{eq}S$ et vérifié le critère de résistance macroscopique puisque :

$$f^{eq}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\Sigma}}} - k^{eq} = 0 \quad (6.79)$$

ce qui conduit à un *minorant* du chargement extrême :

$$Q^+ \geq 2k^{eq}S \quad (6.80)$$

Approche cinématique par l'intérieur :

On considère ici le même champ de vitesse virtuel défini en (6.29) :

$$\hat{\underline{U}} = \frac{U}{H}(x \underline{e}_x - y \underline{e}_y) \quad (6.81)$$

Le champ taux de déformation associé à ce champ de vitesse *cinématiquement admissible* s'exprime par :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{U}{H}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (6.82)$$

La *puissance résistante maximale* déterminée par :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \Pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) d\Omega \quad (6.83)$$

où Π^{hom} est la fonction d'appui du domaine G^{hom} , donnée d'après les résultats de 6.3.2.1 et 6.3.2.2 par :

$$\Pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \begin{cases} k^{eq} \sqrt{2\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}} & \text{si } \text{tr} \underline{\underline{D}} = 0 \\ +\infty & \text{si } \text{tr} \underline{\underline{D}} \neq 0 \end{cases} \quad (6.84)$$

d'où l'expression de la puissance résistante maximale suivante :

$$P_{rm}(\underline{U}) = 2k^{eq}US \quad (6.85)$$

L'application de l'*approche cinématique* conduit alors à l'inégalité suivante :

$$Q \leq Q^+ \implies P_{ext}(\underline{U}) = QU \leq P_{rm}(\underline{U}) = 2k^{eq}US \quad (6.86)$$

ce qui permet de trouver un *majorant* du chargement de ruine Q^+ :

$$Q^+ \leq 2k^{eq}S \quad (6.87)$$

La combinaison des résultats de l'*approche statique* (6.80) et de l'*approche cinématique* (6.87) conduit à la valeur extrême de Q^+

$$Q^+ = 2k^{eq}S \quad (6.88)$$

Dans le cas d'un matériau renforcé par une distribution bidimensionnelle de fibres equi-orientées dans le plan (Oxy), $k^{eq} = k^m + \sigma_0^r$, on trouve alors la valeur du chargement extrême en 6.2.4.1 : $Q^+ = 2(k^m + \sigma_0^r)S$.

6.4 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre, la définition ainsi que la construction du critère de résistance macroscopique du matériau à fibres. Le domaine de résistance macroscopique G^{hom} a également été présenté dans l'espace des contraintes principales (Σ_1, Σ_2) dans le cas de sollicitation en déformation plane. Les capacités de résistance du matériau à fibre sont alors caractérisées, à l'échelle macroscopique, par la donnée du domaine G^{hom} qui peut-être mise en œuvre, tel qu'il a été fait dans la dernière section de ce chapitre, par les approches statiques et cinématiques du calcul à la rupture dont le but est de déterminer, ou au moins encadrer, le chargement de ruine de structures en systèmes multiphasiques ductiles.

* *

*

Conclusions et perspectives

Conclusions

Une modélisation multiphasique permettant de décrire le comportement des ouvrages en sols renforcés par inclusions a été récemment développée [50] puis étendue pour rendre compte de la raideur à la flexion et au cisaillement des inclusions [28] et à la prise en compte de l'interaction entre le sol et les renforts [49]. La présente contribution se présente comme une suite de ces travaux, permettant de développer un modèle mécanique capable d'accéder au comportement macroscopique des matériaux composites à fibres, dont la microstructure est constituée d'une matrice et d'une distribution de fibres plus ou moins longues orientées dans toutes les directions de l'espace.

Le deuxième chapitre est consacré à la construction du modèle. Une approche analogue à celle présenté dans [50], par les puissances virtuelles, est adoptée, permettant d'aboutir aux équations d'équilibre par phase et au tenseur de raideur macroscopique dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des différents constituants et sous l'hypothèse d'une *adhérence parfaite* entre les différentes phases. Deux morphologies ont été étudiées, celle d'une matrice isotrope renforcée par une distribution isotrope de fibres aboutissant à un comportement macroscopique isotrope, puis le cas où toutes les fibres sont coplanaires et equi-orientées. Bien qu'elle ne soit pas tout à fait en accord avec la distribution des fibres dans les composites étudiés, le cas d'une distribution plane de fibres est très utile pour développer des solutions analytiques simples dans le cas de sollicitations en déformations planes dans le plan des renforts.

On s'est intéressé par la suite à l'estimation du comportement macroscopique du composite à fibres par la mise en œuvre des approches d'homogénéisation classiques basées sur la solution d'Eshelby. Après une brève présentation du cadre de la méthode et la position du problème aux limites, le schéma dilué ainsi que celui de Mori-Tanaka sont mis en œuvre pour l'estimation du comportement macroscopique dans le cas d'un renforcement unidirectionnel puis pour une distribution continue plane des fibres et enfin pour une distribution tridimensionnelle isotrope des fibres. La confrontation des résultats obtenus par l'estimation diluée, l'estimation de Mori-Tanaka et celle du

modèle multiphasique, développée au chapitre 3, montre que les différentes méthodes aboutissent au même comportement élastique macroscopique au premier ordre de la fraction volumique de renforcement près.

Le quatrième chapitre est consacré au développement du modèle multiphasique dans le cadre d'un comportement anélastique des différents constituants. La mise en œuvre du modèle multiphasique dans ce cadre s'avère très aisée du fait de la simplicité de la loi de localisation permettant d'aboutir aux efforts intérieurs par phase à partir de la connaissance de l'état de contrainte macroscopique. La première partie de ce chapitre concerne le cas où les fibres, et par suite les phases renforcements, ont un comportement élastique fragile. Le comportement macroscopique d'une éprouvette renforcée soumise à des essais œdométrique et de traction en déformation plane, ainsi que celui d'une poutre soumise à un essai de flexion en déformation plane sont par la suite étudiés, montrant une première phase élastique suivie d'une phase d'endommagement (comportement post-pic). Le cas où la matrice ainsi que les fibres de renforcement ont un comportement élastique parfaitement plastique a été aussi abordé et mis en œuvre pour développer la solution analytique, basée sur le modèle multiphasique, du problème de déformation uniaxiale homogène imposée à une éprouvette renforcée. Un paramètre adimensionnel permettant de quantifier la résistance relative de la matrice par rapport à celle des fibres joue ici un rôle essentiel dans l'évolution élasto-plastique du comportement macroscopique de l'éprouvette.

La mise en œuvre numérique d'un code de calcul multiphasique est présentée au chapitre 5. Ce code, permettant de tenir en compte du comportement élastique endommageable des fibres, est par la suite utilisé pour simuler les essais de traction simple et de flexion en déformation plane, pour lesquels des solutions analytiques ont été développées au chapitre 4. La comparaison des résultats analytiques et numériques montre que le code de calcul permet de retrouver la solution homogène de l'essai de traction, mais ses résultats s'écartent de la solution analytique pour l'essai de flexion. Afin de régler ce problème numérique, une approche non locale du traitement de l'endommagement a été adoptée et validée. La seconde partie de ce même chapitre s'intéresse au développement du code de calcul multiphasique dans le cadre d'un comportement élasto-plastique des différents constituants. Le code de calcul ainsi développé, permettant de prendre en considération des comportements élastiques fragiles et élasto-plastiques, est par la suite appliqué à la simulation d'une poutre en béton de fibres, soumise à un essai de flexion, permettant de quantifier le gain en raideur et résistance de la poutre par rapport au cas non renforcé.

La détermination du critère de résistance macroscopique du matériau composite, dans le cadre d'un comportement élasto-plastique de la matrice et des fibres de renforcement, est par la suite abordée par la mise en œuvre des approches statique et cinématique du Calcul à la rupture. Il en résulte que, pour une matrice purement cohérente de von Mises, renforcée par une distribution de fibres parfaitement plastiques, le critère de résistance macroscopique en déformation plane, obtenu par la somme de Minkowski de celui des phases matrice et renforcements, correspond à un matériau purement cohérent.

Perspectives

Le prolongement de ce travail peut être envisagé dans deux directions principales, celle du développement numérique ainsi que celle de la validation expérimentale.

Le développement numérique du modèle en ce qui concerne le traitement local de l'endommagement, une étude paramétrique approfondie permettra d'identifier la longueur caractéristique à introduire lors du traitement non local de l'endommagement des fibres ou de la matrice. L'extension de l'outil numérique développé au traitement des problèmes tridimensionnel est aussi à envisager. Un tel outil de calcul tridimensionnel rendra possible le calcul de structures dans des configurations réelles.

La deuxième perspective de ce travail concerne la validation du modèle proposé par comparaison à des résultats expérimentaux. Le montage d'une campagne expérimentale sur différents matériaux à fibres est à envisager.

Notation de Voigt pour les tenseurs symétriques

On considère un tenseur $\underline{\underline{q}}$ symétrique d'ordre 2 et un tenseur $\mathbb{Q}$ d'ordre 4 possédant la propriété de symétrie mineure. Dans la base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{q}} = q_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j & : \quad q_{ij} = q_{ji} \\ \mathbb{Q} = Q_{ijkl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l & : \quad Q_{ijkl} = Q_{jikl} = Q_{ijlk} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

En notation de Voigt, le tenseur $\underline{\underline{q}}$ est représenté dans cette même base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ par le vecteur à 6 composantes suivant :

$$[q] = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{22} \\ q_{33} \\ \sqrt{2} q_{23} \\ \sqrt{2} q_{13} \\ \sqrt{2} q_{12} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} \quad (\text{A.2})$$

tandis que le tenseur $\mathbb{Q}$ est représenté par la matrice 6x6 suivante :

$$[\mathbb{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{1111} & Q_{1122} & Q_{1133} & \sqrt{2} Q_{1123} & \sqrt{2} Q_{1113} & \sqrt{2} Q_{1112} \\ Q_{2211} & Q_{2222} & Q_{2233} & \sqrt{2} Q_{2223} & \sqrt{2} Q_{2213} & \sqrt{2} Q_{2212} \\ Q_{3311} & Q_{3322} & Q_{3333} & \sqrt{2} Q_{3323} & \sqrt{2} Q_{3313} & \sqrt{2} Q_{3312} \\ \sqrt{2} Q_{2311} & \sqrt{2} Q_{2322} & \sqrt{2} Q_{2333} & 2 Q_{2323} & 2 Q_{2313} & 2 Q_{2312} \\ \sqrt{2} Q_{1311} & \sqrt{2} Q_{1322} & \sqrt{2} Q_{1333} & 2 Q_{1323} & 2 Q_{1313} & 2 Q_{1312} \\ \sqrt{2} Q_{1211} & \sqrt{2} Q_{1222} & \sqrt{2} Q_{1233} & 2 Q_{1223} & 2 Q_{1213} & 2 Q_{1212} \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} \quad (\text{A.3})$$

Notation indicielle :

$$Q_{IJ} = Q_{ijkl}$$

avec les relations suivantes :

ij,kl	11,11	22,22	33,33	23,23	13,13	12,12
I,J	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6

Conditions aux limites homogènes et Lemme de Hill

On va montrer que, dans le cas de contrainte homogène imposée sur le bord d'un domaine $\Omega : \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x})$, la contrainte macroscopique $\underline{\Sigma}$ est égale à la moyenne du champ des contraintes dans Ω . Par quelques développements mathématiques, on a :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\sigma_{ik} x_j)_{,k} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ik} x_j n_k dS \\ &= \Sigma_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} x_j n_k dS = \Sigma_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} x_{j,k} d\Omega = \Sigma_{ik} \delta_{kj} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} d\Omega = \Sigma_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

De la même façon, pour le cas de déformation homogène imposée sur le bord de $\Omega : \xi(\underline{x}) = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{x}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \xi_{i,j} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \xi_i n_j dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \epsilon_{ik} x_k n_j dS \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \epsilon_{ik} x_{k,j} d\Omega = \epsilon_{ik} \delta_{kj} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} d\Omega = \epsilon_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

On démontre maintenant le Lemme de *Hill* : pour des conditions aux limites homogènes en déformation ou en contrainte, on a la relation suivante : $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle$, où $\underline{\underline{\sigma}}$ est un champ des contraintes qui satisfait l'équation d'équilibre $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}'$ est un champ indépendant de $\underline{\underline{\sigma}}$ qui satisfait la condition de compatibilité : $\underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) = \nabla^s \xi'(\underline{x})$ où ξ' est *cinématiquement admissible* avec des conditions homogènes en déformation. En fait, on a :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \xi'_{i,j} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \xi'_i)_{,j} d\Omega \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \xi'_i n_j dS \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Pour le cas de contrainte homogène imposée : $\underline{T}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x})$, on obtient :

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} \rangle = \Sigma_{ij} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \xi'_{i,j} d\Omega = \Sigma_{ij} \langle \varepsilon \rangle_{ij} \quad (\text{B.4})$$

Pour le cas de déformation homogène imposée sur le bord de Ω : $\xi(\underline{x}) = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{x}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_{ij} \epsilon'_{ij} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \epsilon'_{ik} x_k n_j dS = \epsilon'_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} x_k n_j dS = \epsilon'_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} x_k)_{,j} d\Omega \\
 &= \epsilon_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} x_{k,j} d\Omega = \epsilon_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta_{kj} d\Omega = \epsilon_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ik} d\Omega = \epsilon_{ij} \langle \sigma \rangle_{ij}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Composantes de tenseur d'Eshelby dans un milieu isotrope

L'inclusion de forme ellipsoïdale de révolution autour de l'axe $\underline{x}_3$, noyée dans un milieu isotrope infini dont le tenseur d'élasticité $\mathbb{C}$ est déterminé par :

$$\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K} \quad (\text{C.1})$$

où $\mathbb{J} = \frac{1}{3}\underline{\underline{1}}\otimes\underline{\underline{1}}$ désigne la partie sphérique du tenseur unitaire d'ordre quatre $\mathbb{I}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$. Les relations entre le module de compression k et de cisaillement μ avec le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$\begin{cases} 3k = \frac{E}{1-2\nu} \\ 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Les composantes du tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}^E$ sont présentées ci-dessous :

$$\begin{aligned} S_{1111} &= \frac{3}{8(1-\nu)} \frac{\tau^2}{\tau^2-1} + \frac{1}{4(1-\tau)} \left(1-2\nu - \frac{9}{4(\tau^2-1)}\right) g(\tau) \\ S_{3333} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[1-2\nu + \frac{3\tau^2-1}{\tau^2-1} - \left(1-2\nu + \frac{3\tau^2}{\tau^2-1}\right) g(\tau)\right] \\ S_{1122} &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left[\frac{\tau^2}{2(\tau^2-1)} - \left(1-2\nu + \frac{3}{4(\tau^2-1)}\right) g(\tau)\right] \\ S_{1133} &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\tau^2}{\tau^2-1} - \frac{1}{4(1-\tau)} \left(1-2\nu - \frac{3\tau^2}{\tau^2-1}\right) g(\tau) \\ S_{3311} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[1-2\nu + \frac{1}{\tau^2-1} - \left(1-2\nu + \frac{3}{2(\tau^2-1)}\right) g(\tau)\right] \\ S_{1212} &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left[\frac{\tau^2}{2(\tau^2-1)} + \left(1-2\nu - \frac{3}{4(\tau^2-1)}\right) g(\tau)\right] \\ S_{2323} &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left[1-2\nu - \frac{\tau^2+1}{\tau^2-1} - \frac{1}{2} \left(1-2\nu - \frac{3(\tau^2+1)}{\tau^2-1}\right) g(\tau)\right] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où τ est le rapport d'aspect de l'inclusion et :

$$g(\tau) = \frac{\tau\sqrt{\tau^2 - 1} - \operatorname{arccosh}(\tau)}{\tau(\tau^2 - 1)^{3/2}} \quad (\text{C.4})$$

On peut obtenir les autres composantes non nulles par permutation entre l'indice 1 et 2 et par la permutation grâce à la propriété de symétrie mineure $S_{ijkl}^E = S_{jikl}^E = S_{ijlk}^E$.

La condition de compatibilité

On rappelle l'expression du tenseur de déformation (4.52) :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -y \frac{\omega(t)}{\ell} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \varphi \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (\text{D.1})$$

On note $\underline{\underline{w}}$ la partie antisymétrique du gradient des déplacements qui vérifie les relations suivantes :

$$w_{ik,j} = \epsilon_{ki,j} - \epsilon_{jk,i} \quad (\text{D.2})$$

$$\xi_{ik} = \epsilon_{ik} + w_{ik} \quad (\text{D.3})$$

En appliquant (D.2) on intègre les composantes de $\underline{\underline{w}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{xy,x} = \epsilon_{xx,y} - \epsilon_{xy,x} = -\frac{\omega(t)}{\ell} \\ w_{xy,y} = \epsilon_{xy,y} - \epsilon_{yy,x} = 0 \\ w_{xy,z} = 0 \end{array} \right. \implies w_{xy} = -\frac{\omega(t)}{\ell} x + q_1 \quad (\text{D.4})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{xz,x} = \epsilon_{xx,z} - \epsilon_{zx,x} = 0 \\ w_{xz,y} = 0 \\ w_{xz,z} = 0 \end{array} \right. \implies w_{xz} = q_2 \quad (\text{D.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{yz,x} = 0 \\ w_{yz,y} = 0 \\ w_{yz,z} = 0 \end{array} \right. \implies w_{yz} = q_3 \quad (\text{D.6})$$

En utilisant (D.3) on intègre les composantes de $\underline{\xi}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{x,x} = \epsilon_{xx} = -\frac{\omega(t)}{\ell}y \\ \xi_{x,y} = \epsilon_{xy} + w_{xy} = -\frac{\omega(t)}{\ell}x - q_1 \\ \xi_{x,z} = \epsilon_{xz} + w_{xz} = q_2 \end{array} \right. \implies \xi_x = -\frac{\omega(t)}{\ell}xy + q_1y + q_2z + q_4 \quad (\text{D.7})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{y,x} = \epsilon_{y,x} + w_{yx} = \frac{\omega(t)}{\ell}x + q_1 \\ \xi_{y,y} = \epsilon_{yy} = \varphi \frac{\omega(t)}{\ell}y \\ \xi_{y,z} = \epsilon_{yz} + w_{yz} = q_3 \end{array} \right. \implies \xi_y = -\frac{\omega(t)}{2\ell}(x^2 + \varphi y^2) + q_1x + q_2 \quad (\text{D.8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{z,x} = \epsilon_{zx} + w_{zx} = -q_2 \\ \xi_{z,y} = \epsilon_{zy} + w_{zy} = -q_3 \\ \xi_{z,z} = \epsilon_{zz} = 0 \end{array} \right. \implies \xi_z = -q_2x - q_3y + q_4 \quad (\text{D.9})$$

où q_1, q_2, q_3, q_4 sont les constantes et en choisissant d'annuler le mouvement rigidifiant ($q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$), on obtient finalement le champ de déplacement :

$$\underline{\xi} = -\frac{\omega(t)}{\ell}xy\underline{e}_x + \frac{\omega(t)}{2\ell}(x^2 + \varphi y^2)\underline{e}_y \quad (\text{D.10})$$

Bibliographie

- [1] G. Papanicolaou A. Bensoussan, J. L. Lions. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North Holland, Amsterdam, 1978. [4](#)
- [2] M. Bennis. *Un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions, avec prise en compte de l'interaction matrice-inclusions*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2002. [1](#), [7](#)
- [3] Y. Benveniste. A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6 :147–157, 1997. [45](#)
- [4] M. Bornert, C. Stolz, and A. Zaoui. Morphologically representative pattern-based bounding in elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1996. [39](#), [40](#)
- [5] M.A. Crisfield. *Non linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. John Wiley & Sons, 1991. [116](#)
- [6] P. de Buhan. De l'approche par homogénéisation au développement d'un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions linéaire. *Proc. Microstructure et Propriétés des Matériaux*, pages 29 – 38, 2005. [46](#)
- [7] P. de Buhan. *Plasticité et calcul à la rupture*. Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), 2007. [86](#), [131](#), [138](#)
- [8] P. de Buhan and G. Hassen. Multiphase approach as a generalized homogenization procedure for modelling the macroscopic behaviour of soils reinforced by linear inclusions. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27(4) :662 – 679, 2008. [52](#)
- [9] P. de Buhan et A. Taliercio. Critère de résistance macroscopique pour les matériaux composites à fibres. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2*, 307 :227–232, 1988. [140](#)
- [10] L. Dormieux, D. Kondo, and F. Ulm. *Microporomechanics*. Willey, 2006. [43](#)
- [11] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond.*, pages A 241 :376–396, 1957. [44](#)
- [12] J.D. Eshelby. Elastic inclusions and inhomogeneities. *Progress in solid mechanics*, 2(Amsterdam) :87–140, 1961. [44](#)
- [13] H.R. Lusti et A. A. Gusev. Finite element predictions for the thermoelastic properties of nanotube reinforced polymers. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 12(3) :S107–S119, 2004. [6](#)
- [14] D.R.J. Owen et E. Hinton. *Finite elements in plasticity*. Pineridge Press Limited. Swansea, U.K., 1980. [116](#)

- [15] G. Dhatt et G. Touzot. *Une Présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Editeur, 1984. 93, 101
- [16] A. Ern et J.L Guermont. *Éléments Finis : Théorie, Applications, Mise en œuvre*. Springer, 2001. 98
- [17] T. Mori et K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21, Issue 5 :571–574, 1973. 4
- [18] B. Sudret et P. de Buhan. Modélisation multiphasique de matériaux renforcés par inclusions linéaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 327(1) :7 – 12, 1999. 13
- [19] Z. Hashin et S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2) :127–140, 1963. 4
- [20] J.C. Halpin et S.W. Tsai. Effects of environmental factors on composite materials. *AFML-TR (juin)*, pages 67–243, 1969. 4, 6
- [21] J.C. Simo et T.J.R. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer, 1998. 116
- [22] G. Hassen et V. T. Nguyen. Macroscopic behavior of fibre-reinforced materials using a multiple approach. *Advances in Geomaterials and Structures, Tunisie*, 2010. 55
- [23] G. Hassen et V. T. Nguyen. Analysis of the macroscopic behaviour of materials reinforced by fibres using a multiphase model. *Comptes Rendus Mécanique*, 340(3) :130–138, 2012. 55
- [24] G. Pijaudier-Cabot et Z. P. Bazant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113 :1512–1533, 1987. 111
- [25] A. Fritsch. *Prédiction de l'endommagement de la rupture des tissus osseux à partir de leur composition et leur microstructure*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2009. 2
- [26] E. Greuell. *Etude du soutènement des tunnels par boulons passifs dans les sols et les roches tendres par une méthode d'homogénéisation*. PhD thesis, Ecole polytechnique, Palaiseau, 1993. 46
- [27] Z. Hashin. Analysis of composite materials. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :481–505, 1983. 4, 46
- [28] G. Hassen. *Modélisation multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions rigides*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2006. 1, 8, 151
- [29] R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950. 81
- [30] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5) :357 – 372, 1963. 43

- [31] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4), 1965. 4
- [32] R. Hill. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, pages 15 :79–95, 1967. 41
- [33] H. Horii and S. Nemat-Nasser. Overall moduli of solids with microcracks : load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, pages 31 :155–171, 1983. 44
- [34] V. Q. Huynh. *Estimation des propriétés poromécaniques effectives des argilites : apport des méthodes d'homogénéisation*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy, Nancy, 2006. 45
- [35] A.L. Kalamkarov. *Composite and Reinforced Elements of Constructions*. Wiley, Chichester, 1992. 4
- [36] E. Lorentz. *Lois de comportement a gradients de variables internes construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique*. PhD thesis, Université Paris 6, Paris, 1999. 56
- [37] J. Mandel. Génération de la théorie de la plasticité de w. t. koiter. *International Journal of Solids and Structures*, 1 :273–295, 1965. 43
- [38] J. Mandel. Plasticité classique et viscoplasticité. *CISM Lecture Notes*, 1972. 41
- [39] R. McLaughlin. A study of the differential scheme for composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 15(4) :237 – 244, 1977. 52
- [40] A. Mohamad-Hussein. *Modélisation du comportement mécanique des géomatériaux semi-fragiles soumis à des sollicitations mécaniques et à la dégradation chimique*. PhD thesis, Université Lille 1, Lille, 2007. x, 111, 112
- [41] T. Mura. *Micromechanics of defects in solids, 2nd edition*. Martinus Nijhoff, 1987. 44
- [42] S. Nemat-Nasser and M. Horii. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*. North Holland, 1993. 44
- [43] A.N. Norris. A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mechanics of Materials* 4, pages 1–16, 1985. 52
- [44] U. Gabbert S. Kari, H. Berger. Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites. *Computational Materials Science*, 39(1) :198–204, 2007. 5
- [45] J. Salençon. Calcul à la rupture et analyse limite. *Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris*, 1983. 131
- [46] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus : Tome 2, Thermoélasticité*. Editions Ecole Polytechnique, 2008. 5, 13

- [47] J. Sanahuja. *Impact de la morphologie structurale sur les performances mécaniques des matériaux de construction : application au plâtre et à la pâte de ciment*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2008. 2
- [48] E. Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, 1980. 4
- [49] Q. Thai Son. *Développements théoriques et numériques d'un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2006. 1, 8, 151
- [50] B. Sudret. *Modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions*. PhD thesis, ENPC, Paris, 1999. 1, 7, 8, 13, 124, 151
- [51] K. Tanaka T. Mori. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 :571–574, 1973. 45
- [52] S. Timoshenko. *Théorie de l'élasticité*. Librairie Polytechnique C. Béranger, 1936. 123
- [53] S. Torquato. Random heterogeneous media : Microstructure and improved bounds on effective properties. *Applied Mechanics Reviews*, 44(2) :37–75, 1991. 4
- [54] S.W. Tsai. *Theory of Composites Design*. Think Composites, Dayton, OH, 1992. 4
- [55] Y. Otani T. Takahashi X. L. Chen H. Munakata Y. J. Liu, N. Nishimura. A fast boundary element method for the analysis of fiber- reinforced composites based on a rigid-inclusion model. *American Society of Mechanical Engineers*, 72(1) :115–128, 2005. 6