ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
JOUY-EN-JOSAS

THESE

POUR L'OBTENTION DU TITRE
DE DOCTEUR ES SCIENCES DE GESTION

Nouveau doctorat (arrêté du 30 mars 1992)

SUJET

COUVERTURE DYNAMIQUE OPTIMALE DU RISQUE DE CHANGE DE LONG TERME POUR UNE ENTREPRISE

Candidat

RAFAL WOJAKOWSKI

JURY

Président

PATRICE PONCET
Professeur à l'Université de Paris I Panthéon Sorbonne et à l'ESSEC, *rapporteur*

Directeur de thèse

BERNARD DUMAS
Professeur, Groupe HEC

Suffragants

ELYES JOUINI
Professeur à l'Université de Paris I Panthéon Sorbonne et à l'ENSAE, *rapporteur*

HENRI PAGES
Senior Economist, Bank for International Settlements (BIS)

ALEKSANDER WERON
Professeur à Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods in Science and Technology
et à l'Ecole Polytechnique à Wroclaw, Pologne

Septembre 1997

Le Groupe HEC n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans cette thèse: ces opinions doivent être considérés comme propres à l'auteur.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma grande reconnaissance à Bernard Dumas, mon directeur de thèse, qui m'a fait découvrir la riche problématique de la finance internationale. Il m'a guidé de façon remarquable et avec patience dans mon travail et a su partager sa passion pour le travail de chercheur.

Je tiens à remercier tout particulièrement Elyès Jouini et Patrice Poncet qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse, ce dont je leur suis très reconnaissant. Je tiens aussi à remercier Henri Pagès et Aleksander Weron qui ont eu le courage de venir de loin pour participer à la soutenance et qui m'ont également fait part de leur remarques.

Mes remerciements vont aussi à Marc Chesney qui m'a fait bénéficier de commentaires détaillés, suggestions et encouragements à plusieurs reprises.

Je tiens aussi à remercier François Degeorge pour ses remarques, conseils et de l'intérêt qu'il a témoigné à l'égard de mon travail.

Je voudrais aussi remercier les participants aux séminaires de recherche du Département Finance à HEC: Blaise Allaz, Alexandros Benos, Pierre Colin-Dufresne, Antoine Hyafil, Jacques Olivier, Michael Rockinger et Bruno Solnik pour leur commentaires pertinents.

Je remercie également pour leur commentaires: Paul Doukhan du laboratoire des probabilités de l'Université d'Orsay, Jean-Luc Prigent de l'Université de Cergy, Rajna Gibson de l'Ecole des HEC de Lausanne et Henri Loubergé de l'Université de Genève.

Avertissement

Cette thèse se compose de trois essais sur le thème de la couverture du risque de change pour une entreprise. La forme de l'essai a été retenue pour permettre une lecture indépendante de chaque partie de la thèse.

Le premier chapitre de la thèse intitulé "Couverture du risque de change en marché complet" a été présenté sous forme d'article de recherche à la 14ème Conférence Internationale de Finance – AFFI – Grenoble 1997.

Résumé

Cette thèse se compose de trois articles:

1. *Couverture du risque de change en marché complet*
   Cet article concerne la couverture optimale du risque de change pour une entreprise. Le concept du risque de change de long terme est défini par opposition à la conception classique du risque de change. La couverture optimale intertemporelle du risque de change de long terme est ensuite dérivée par la méthode de contrôle optimal stochastique, dans le cadre d'un modèle où le taux de change suit un processus gaussien avec retour vers le niveau de parité. Il est démontré qu'une telle couverture est une couverture en valeur, qui stabilise le flux des dividendes payés aux actionnaires et dépend du niveau du taux de change par rapport au taux de parité. Le modèle développé dans cet article est riche en recommandations pratiques pour la politique de gestion des risques dans une entreprise. Il apparaît notamment que l'entreprise devrait se couvrir plus si le niveau du taux de change est au-dessus du niveau de parité afin de geler les profits et adopter un comportement inverse dans le cas contraire.

2. *Couverture du risque de change en marché incomplet*
   Cet article concerne le problème de couverture du risque de change de long terme en présence des actifs non-échangeables dans le contexte des marchés incomplets. L'incomplétude est générée dans le modèle par un risque multiplicatif et non-couvrable de taille du flux provenant du pays étranger. La couverture optimale est obtenue par la méthode de *fictitious completion*. Il est démontré que l'incomplétude *réduit* considérablement la taille de couverture, par rapport à celle observée en marché complet.

3. *Couverture du risque de change et décision d'investissement*
   Cet article aborde les aspects concernant l'arrivée de l'information et la prise de décision de couverture optimale du risque de change et celle d'investissement pour une entreprise en présence des actifs non-échangeables et coûts de financement externes.

Table des matières

1 Couverture du risque de change en marché complet **2**

1.1 Introduction 3
1.2 Le modèle 8
1.2.1 Optimalité de la couverture 10
1.3 Solution exacte du modèle 12
1.3.1 Substitution des variables 12
1.3.2 Linéarisation de l'équation différentielle 14
1.3.3 Interprétation financière 15
1.3.4 Solution 16
1.3.5 Couverture du risque de change et dividendes 18
1.4 La gestion du risque de change 19
1.5 Conclusion 21

2 Couverture du risque de change en marché incomplet **22**

2.1 Introduction 23
2.2 Le modèle 23
2.2.1 Marché complet 23
2.2.2 Marché incomplet 24
2.2.3 Choix de couverture optimale 26
2.3 Conditions d'optimalité 27
2.3.1 Paiement des dividendes optimal 28
2.3.2 Couverture optimale du taux de change 28
2.3.3 Couverture optimale de la taille du flux et la prime de risque 29
2.3.4 Equation de Hamilton–Bellman–Jacobi 30
2.4 Solution du modèle pour le marché incomplet 33
2.4.1 Contrainte budgétaire 33
2.4.2 Méthode de solution par itérations 34
2.4.3 Etape 0 : solution pour le marché complet 35
2.4.4 Etape 1 : solution pour le marché incomplet 37
2.4.5 Etape 2 et suivantes 44

2.5 Un exemple: fonction d'utilité CRRA 44
2.6 Conclusion 44
2.A Démonstration de la Proposition 1 48
2.B Démonstration de la Proposition 2 49
2.C Démonstration de la Proposition 3 53
2.D Démonstration de la Proposition 4 54
2.E Démonstration de la Proposition 5 55
2.E.1 Flux intertemporel 55
2.F Procédure récursive: mise en œuvre 61
2.F.1 Paramètres numériques 62
2.F.2 Etape 2 et suivantes 71
2.F.3 Les couvertures du risque de change et du risque de taille 73
2.G Calcul de l'espérance du flux perpétuel 74
2.G.1 Calcul de la première espérance conditionnelle 76
2.G.2 Calcul de la seconde espérance conditionnelle 77
2.G.3 Calcul de la troisième espérance conditionnelle 77
2.G.4 Calcul de l'intégrale 77
2.G.5 Comportement des fonctions aux limites 78
2.G.6 Calcul final 78
2.G.7 Remplacements 79
2.G.8 Les coefficients 80

3 Couverture du risque de change et décision d'investissement 83
3.1 Introduction 84
3.1.1 Le problème d'arrivée de l'information 86
3.2 Le premier modèle 88
3.3 Un exemple simple 89
3.3.1 Stratégies de couverture 91
3.4 Choix de ratio de couverture 103
3.5 Conclusions pour le premier modèle 107
3.6 Le deuxième modèle: cas avec nécessité de disposer des liquidités 107
3.6.1 Le problème des liquidités disponibles 109
3.7 Solution du deuxième modèle 113
3.7.1 Détermination de ratio de couverture optimal 113
3.7.2 Maximisation de la valeur de la firme 115
3.8 Conclusion 118
3.A Calcul des espérances 119

Table des figures

1.1 Politique de couverture du risque de change $f^*(x_t)$ et politique de paiement des dividendes $c^*(x_0, w_0)$ optimales: comparaison avec la couverture classique $\hat{f}(x_t) = -2\kappa x_t$ et avec la taille du flux provenant de l'étranger κx_t^2. Paramètres: $\alpha = 0.85$, $\sigma = 15\%$, $\rho = r = 10\%$, $\kappa = 1$, $w = 1$ et $x_p = 1$. 20

2.1 Réduction de la couverture du risque de change $f^{*(n)}$ due à l'incomplétude et la convergence de la méthode itérative en $n = 10$ étapes (valeurs absolues). 45

2.2 Réduction de la couverture du risque de change $f^{*(n)}$ due à l'incomplétude et la convergence de la méthode itérative en $n = 10$ étapes (valeurs relatives). 46

3.1 Evolution du taux de change sur l'intervalle $[0, T)$. 90

3.2 Evolution de la richesse accumulée w_t et la valeur de l'entreprise V_T dans différents états de la nature. 90

3.3 Stratégie 2: couverture totale des flux. Evolution de la richesse accumulée w_t et la valeur de l'entreprise V_T dans différents états de la nature. 93

3.4 Stratégie 3: couverture des flux précoce. Evolution de la richesse accumulée w_t et la valeur de l'entreprise V_T dans différents états de la nature. 93

3.5 Stratégie 4: couverture des flux tardive. Evolution de la richesse accumulée w_t et la valeur de l'entreprise V_T dans différents états de la nature. 94

3.6 L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie de couverture tardive des flux en présence de petits coûts des transactions. 97

3.7 L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie spéculative à la hausse ($h = -5$): *ne pas couvrir les flux en sous-période 1, couvrir les flux en sous-période 2 si le taux de change augmente, spéculer à la hausse en sous-période 2 si le taux de change baisse.* 99
3.8 L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie à la baisse ($h = 7$): *ne pas couvrir les flux en sous-période 1, couvrir les flux en sous-période 2 si le taux de change augmente, spéculer à la baisse en sous-période 2 si le taux de change baisse en sous-période 1.* 100
3.9 L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie à la hausse "agressive" ($h = -6$): *ne pas couvrir les flux en période 1, couvrir les flux en sous-période 2 si le taux de change augmente, spéculer à la hausse en sous-période 2 si le taux de change baisse en sous-période 1.* 101
3.10 L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie spéculative commençant en $t = 0$: *spéculer à la baisse en sous-période 1* ($h_1 = 4$), *couvrir les flux en sous-période 2 si le taux de change baisse* ($h_{2d} = 1$), *spéculer à la hausse en sous-période 2* ($h_{2u} = -2$) *si le taux de change augmente en sous-période 1.* 102
3.11 Stratégie spéculative. 106
3.12 La valeur de la firme à l'échéance, V_T, en fonction des liquiditiés accumulés w_T. 113
3.13 La valeur de la firme à l'échéance, vue de l'instant intermédiaire $t = 1$, en fonction du ratio de couverture h_1. 117

Liste des tableaux

2.1 Réduction de la couverture du risque de change $f^{*(n)}$ due à l'incomplétude et la convergence de la méthode itérative en $n = 10$ étapes (valeurs absolues et relatives). 46

3.1 Les relations de préférence entre les différentes stratégies de couverture. 95
3.2 Les coûts des stratégies spéculatives. 102

Couverture dynamique optimale du risque de change de long terme pour une entreprise

Chapitre 1

Couverture du risque de change en marché complet

1.1 Introduction

L'investisseur et l'entreprise: comparaison Une entreprise multinationale ayant des filiales à l'étranger, ou bien une entreprise importatrice ayant un réseau de distribution bien implanté dans son pays d'origine, ne sont pas équivalentes au portefeuille des actifs financiers.

Un portefeuille d'actifs financiers est constitué de titres échangeables. Ces actifs, qu'il s'agisse des actifs domestiques ou étrangers, peuvent facilement être revendus moyennant des coûts de transaction relativement négligeables. Leur couverture contre le risque de change peut aisément être mise en oeuvre grâce à des instruments existants sur les marchés financiers des produits dérivés: les contrats à terme, les options de change négociables ou bien, proposées depuis quelque temps par des banques, les options de change de seconde génération élaborées "sur mesure" et ajustées aux besoins spécifiques.

Une entreprise multinationale ne peut pas être considérée comme équivalente au portefeuille des actifs financiers car dans la plupart des cas ses actifs sont non échangeables.[1] La vente ou l'achat d'une usine à l'étranger, cession d'un réseau de conditionnement ou distribution domestique, sont assortis d'importants coûts de transaction de l'achat/vente de ces actifs. De plus, une telle vente ou l'achat ne peuvent s'effectuer instantanément, le temps de recherche de contrepartie étant nécessaire. La décision de fermeture ou de réouverture d'une usine à l'étranger est, elle aussi, associée à des coûts importants. On peut distinguer par exemple: les coûts de licenciement du personnel, d'arrêt et conservation des machines et, dans le cas de redémarrage, les coûts liés à la recherche et embauche du nouveau personnel, à la remise en état de marche des machines, à la recherche des fournisseurs, à la reconstitution du réseau de transport et de distribution, etc.

En conséquence, une entreprise implantée à l'étranger reste pour longtemps propriétaire de ses flux en devises, lesquels elle ne peut facilement céder ou acquérir. Une telle situation introduit de surcroît une optique tout à fait différente, celle de taille de période pendant laquelle les flux seront effectivement perçus.

Les objectifs à long terme d'une entreprise qui perçoit des flux financiers en devises sont en conséquence différents de ceux d'un investisseur en Bourse. Pour un investisseur c'est la *rentabilité* de son portefeuille qui est importante. Une entreprise, dont la direction agit dans l'intérêt de ses actionnaires, veillera plutôt à maximiser le *niveau des prix* des actions en bourse. Il devient donc pertinent pour la direction financière d'une entreprise multinationale d'élaborer non pas une couverture classique, mais une couverture

[1] Ces actifs portent dans la littérature anglo-saxonne le nom de *non traded assets*.

à long terme du risque de change. Les résultats financiers de l'entreprise ainsi que des prévisions des flux à recevoir à l'avenir déterminent son prix en Bourse. Une entreprise dont les profits nets dépendent fortement des flux perçus en devise étrangère est donc davantage sensible au niveau du taux de change qui prévaut sur le marché.[2]

Risque de change de long terme En théorie le niveau du taux de change devrait être égal à une certaine valeur, appelée valeur de parité du taux de change. Dans un cadre statique, cette valeur de parité est donnée par la *loi du prix unique.* Celle-ci stipule que la valeur du taux de change x devrait être égale, en termes réels, au rapport des prix des biens de consommation exprimés en monnaie domestique (p) et étrangère (p^*):

$$x = \frac{p}{p^*}$$

On peut aussi rencontrer la relation de *parité des pouvoirs d'achat relative*, laquelle correspond à l'arbitrage entre les prix des biens disponibles en deux pays différents à deux dates consécutives:

$$\frac{\tilde{x}_{t+1} - x_t}{x_t} = \tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_t^*$$

où $\tilde{\pi}_t$ et $\tilde{\pi}_t^*$ - désignent les taux d'inflation anticipés domestique et étranger, tandis que $\tilde{x}_{t+1}$ et x_t – les taux de change futur et actuel, observé sur le marché.

En réalité, le taux de change se maintient parfois très longtemps en dehors du niveau de parité des pouvoirs d'achat. Prenons l'exemple de la surévaluation du dollar américain au début des années 80. Il est évident qu'une telle situation peut constituer pour l'entreprise un avantage ou un handicap concurrentiel durable.

A long terme, les taux de change rejoignent la valeur imposée par la relation de parité des pouvoirs d'achat. Cependant, la vitesse d'une telle convergence peut être longue. Il a été empiriquement démontré que les taux de change demeurent en dehors des niveaux d'équilibre pendant les périodes dont la durée moyenne a été estimée à 7-10 ans.[3]

Le niveau de parité des taux de change n'est pas une variable macro-économique directement observable. A un moment donné on peut seulement estimer si une telle ou autre devise est surévaluée ou bien sous-évaluée par rapport à une autre.

[2]Sur la politique financière de l'entreprise en matière de couverture dans le cadre international consulter Adler et Dumas [5] ainsi que Dumas [24].

[3]Voir Dumas [25].

Une entreprise cherchant à se couvrir contre le risque du taux de change aura cependant à sa disposition des signaux supplémentaires. Par exemple, la marge réalisée à un instant donné sur les ventes à l'étranger peut constituer une information supplémentaire sur la taille de l'écart par rapport à la parité. De tels signaux, observés uniquement par l'entreprise elle-même, peuvent être très précieux pour le directeur financier et l'aider à gérer sa couverture du risque de change dans une perspective de long terme.

On peut diviser l'attitude d'une firme confrontée au risque de change en deux catégories:

1. *Neutralité au risque* Sous l'hypothèse que les conditions du théorème de Modigliani-Miller sont vérifiées, la firme devrait se comporter comme neutre au risque. En particulier, une firme exportatrice ne devrait pas se préoccuper du risque de change.

2. *Aversion au risque* On comprend mieux les activités des entreprises si on assume un certain niveau d'aversion au risque. En particulier l'aversion au risque permet de justifier l'existence et mieux expliquer le nombre et la diversité des contrats d'assurance contre le risque de change. En effet, chaque année de nombreux contrats à terme ou les options de change[4] sont proposés sur les marchés et souscrits par les entreprises.

Plusieurs auteurs soulignent l'importance de l'hypothèse d'aversion au risque. Celle-ci permet de mieux expliquer les décisions des entreprises dans le contexte international.

Von Ungern-Sternberg et Weizäcker [53] examinent plusieurs modèles statiques d'organisation industrielle. Les auteurs déterminent l'étendue de la couverture nécessaire pour totalement isoler l'entreprise du risque de change. Le montant de la couverture, mise en oeuvre avec des contrats à terme, n'est pas toujours égal à la valeur espérée des flux à venir, provenant des ventes à l'étranger, mais peut être plus grand ou plus petit (parfois même nul), selon la situation sur le marché dans le pays destinataire. Le rôle et les caractéristiques de l'environnement concurrentiel multinational apparaissent comme déterminants.

[4]Pour une description des nouveaux types des contrats d'options de change, notamment des options de change des seconde génération, leur utilisation par les entreprises et les banques ainsi que les techniques d'évaluation, consulter l'ouvrage de Chesney, Marois et Wojakowski [12].

Cependant, les stratégies optimales de couverture ne sont pas dérivées dans le cadre de cette étude et les modèles analysés n'incorporent aucun paramètre lié à une mesure d'aversion au risque de l'entreprise. L'hypothèse d'aversion au risque semble servir uniquement pour justifier le fait même d'aborder le problème de couverture du risque de change. Les auteurs affirment pourtant que les stratégies optimales de couverture du risque de change dépenderaient notamment de types des instruments de couverture disponibles, de l'échelonnement des flux (cash-flows) dans le temps, du degré d'aversion au risque de l'entreprise ou de l'horizon temporel de la firme.

Martijn [40] présente un modèle à une période où une firme exportatrice averse au risque est confrontée à l'incertitude du futur taux de change. L'objectif de la firme est de maximiser l'espérance d'utilité du profit futur afin d'en déduire les quantités à produire pour le marché étranger et domestique. Cependant, la courbe de demande sur le marché étranger est donnée et indépendante, par hypothèse, du taux de change. Par ce biais la fonction de profit devient linéaire en taux de change. Par conséquent, l'analyse du modèle s'en trouve simplifiée.

L'impact d'une augmentation du risque de change sur le niveau de production et d'exportation est examiné par la suite au moyen de statique comparative. En absence des instruments de couverture l'exportateur monopolistique averse au risque limite son exposition au risque de change en modifiant à la baisse son volume d'exportations. La propriété de séparation est établie sous l'hypothèse d'existence de couverture parfaite du risque de change par des contrats à terme: le volume des exportations est déterminé comme si la firme était confrontée au taux de change certain égal au taux de change à terme. Cependant, en n'examinant que les conditions de premier ordre de l'optimisation, cet article ne dérive pas le montant de la couverture requis pour obtenir une telle séparation.

Stulz [47] examine le comportement du manager averse au risque qui couvre par les contrats à terme le risque de change de sa firme. Cependant, le flux dénommé en devise étrangère est unique, certain et perçu seulement à la fin de la période considérée. Le taux de change est supposé suivre dans ce modèle un mouvement brownien géométrique. Une telle approximation ne saurait être plus justifiée dans un modèle prenant en compte des effets de long terme car il a été empiriquement observé que les taux de change ont plutôt tendance à osciller autour d'une tendance de parité de long terme et ceci avec une périodicité assez importante (7-10 ans).

Le manager averse au risque perçoit une rémunération qui est proportionnelle au changement instantané de la valeur de l'entreprise. Par cette hypothèse, il ne peut donc pas être préoccupé par le niveau du prix de l'entreprise, côté en Bourse. De plus, après avoir rempli sa tâche d'élaboration

de couverture optimale, le manager est supposé ne plus se préoccuper du sort de l'entreprise. Le modèle de Stulz [47] correspond donc à la situation où c'est le risque de court terme qui est couvert car il est presque certain que l'entreprise existera toujours après le départ du manager et percevra des flux en devises. Le risque de long terme est négligé dans la conception et mise en oeuvre de la couverture.

Ho [30] suit un raisonnement similaire à celui de Stulz [47]. La décision de couverture par des contrats futures sur marchandises ainsi que la décision de production dans une exploitation agricole sont examinés dans un cadre dynamique à la Merton [41].

Adler et Détemple [4] démontrent, entre autres, l'équivalence entre l'approche de Ho [30] et celle de Stulz [47]. Les caractéristiques d'une couverture optimale d'un actif non-échangeable (*nontraded asset*) par un investisseur ayant la fonction d'utilité logarithmique sont examinées. Par opposition aux résultats classiques obtenus avec les actifs échangeables[5] la fonction valeur du programme d'optimisation ne s'avère plus additivement séparable en richesse et variables d'état car la corrélation entre le prix du contrat future et celui de la marchandise sous-jacente n'est pas parfaite. Par conséquent, le comportement de l'investisseur logarithmique n'est pas myope et il est démontré que sa stratégie optimale de couverture devrait comprendre des termes dynamiques à la Merton/Breeden [42] [10]. Cependant, aucune solution explicite d'une telle couverture n'est présentée et toute l'analyse est réduite à l'examen des seuls conditions de premier ordre du programme d'optimisation.[6]

La présente recherche est motivée par une quasi inexistence des travaux qui aborderaient le problème de couverture dans le cas où le revenu est proportionnel au *niveau* de la variable risquée et non pas à son accroissement instantané.

Cet article est organisé de la façon suivante. Tout d'abord nous présentons le modèle de choix de couverture optimale intertemporelle du risque de change. Dans la troisième section la solution exacte est obtenue par la méthode de transformation de l'espace des variables d'état. Les implications des résultats pour la gestion des risques dans une entreprise sont énoncés dans la quatrième section. Enfin, la cinquième et dernière section apporte une conclusion et suggestions pour les recherches futures.

[5] Voir par exemple Merton [41].

[6] Sur les différentes motivations pour la couverture des risques en entreprise ainsi que les aspects légaux lire aussi Axel [6], De Marzo et Duffie [21], Dumas [23, 24, 26], Smith et Stulz [45], Svensson et Werner [49] ainsi que Tufano [50].

1.2 Le modèle

Considérons le cas d'une entreprise exportatrice. Les actifs de cette entreprise sont constitués des *immobilisations* et des *actifs liquides* (caisse).

Les actifs immobilisés (usine et ses filiales, réseau de distribution, dans le pays domestique et à l'étranger) sont la source du flux financier obtenu par l'entreprise en échange du flux réel des marchandises ou des services vendus à l'étranger. Par définition, les actifs immobilisés sont des actifs *non-échangeables* (non-traded assets).

Les gains de l'entreprise proviennent de son activité commerciale à l'étranger et sont perçus en devises. Un flux $g(x_t)$, fonction du niveau x_t du taux de change, libellé en monnaie étrangère par unité de temps alimente l'entreprise pendant toute la période dt. On exigera de cette fonction qu'elle soit croissante en son argument: $g'(x_t) > 0$. Plus le niveau du taux de change x_t est élevé, plus la monnaie domestique est sous-évaluée par rapport à la monnaie étrangère. Ceci améliore la situation de l'entreprise sur le marché étranger d'un point de vue concurrentiel. Les produits peuvent être proposés à un prix moins élevé par rapport aux concurrents, ce qui augmente les ventes et donc le profit exprimé en monnaie étrangère.

Pour la clarté de l'exposé on se restreint ici au cas linéaire $g(x_t) = \kappa x_t$ où $\kappa > 0$ s'interprète comme la taille du flux. Il est à souligner que la méthode est valable pour toute fonction $g(x)$ continue. La solution exacte du modèle peut être obtenue si $g(x)$ est un polynôme en x. Dans le cas contraire il est toujours possible de trouver un polynôme qui approche la fonction $g(x)$ avec le degré de précision souhaité.

L'activité spécifique de l'entreprise à l'étranger fait qu'elle est *propriétaire de son flux*. Ceci veut dire qu'on suppose que l'entreprise ne peut pas revendre son flux. Autrement dit, les marchés sont *imparfaits*, dans la mesure où il n'existe pas de contrepartie désireuse d'acquérir ou reprendre le flux de l'entreprise. Dans le cas contraire, l'entreprise pourrait alors s'en servir et céder son flux contre un arrangement financier avec la contrepartie. Une telle opportunité pourrait également être exploitée afin de couvrir la totalité ou une partie du risque de change.

Après la conversion en monnaie domestique du flux financier provenant de l'étranger, les gains alimentent la caisse de l'entreprise. Ainsi sont constitués les actifs liquides dont une partie est consacrée à la rémunération des actionnaires par le paiement d'un dividende.

Les actifs liquides de l'entreprise, désignés par w_t et exprimés en monnaie domestique, sont supposés exister sous forme d'un compte en banque rémunéré au taux sans risque domestique égal à r. Ces actifs constituent le poste "caisse" dans le bilan.

Le problème inter-temporel de couverture du risque de change de long terme pour une entreprise multinationale peut alors être formulé comme un problème de contrôle optimal stochastique à horizon infini $t \in [0, +\infty)$. Le dirigeant est confronté au problème d'optimisation suivant:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, f_t\}} \quad & E_0 \int_0^\infty e^{-\rho s} u(c_s) ds \\ \text{s.c.} \quad & dw_t = (g(x_t)\, x_t + rw - c_t)\, dt + f_t \sigma\, dz_t \\ & dx_t = \alpha(x_p - x_t)\, dt + \sigma\, dz_t \\ & x(0) = x_0 \\ & w(0) = w_0 \\ & g(x_t) = \kappa\, x_t \end{aligned} \tag{1.1}$$

Le dirigeant de l'entreprise maximise l'espérance de l'utilité du flux des dividendes futurs, conditionnelle à l'information disponible à l'instant $t = 0$. On considère ici que le dirigeant est averse au risque, ce qui motive le choix d'une politique de couverture du risque de change. Le dirigeant agit dans l'intérêt de ses actionnaires et on fait abstraction du problème d'agence.

Les variables d'état sont en nombre de deux. La première variable d'état est la valeur des actifs liquides de l'entreprise w_t, exprimée en monnaie domestique. La deuxième variable d'état est la valeur du taux de change x_t, qui exprime en monnaie domestique la valeur d'une unité de la monnaie étrangère.

Le taux de change x_t suit dans le temps un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ainsi le processus d'évolution du taux de change se caractérise par une tendance de retour vers le niveau de parité $x_p > 0$. La vitesse de convergence vers ce niveau est supposée constante et égale à $\alpha > 0$, tandis que la marge de fluctuation moyenne ou volatilité est exprimée par $\sigma > 0$.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck assure une modélisation relativement simple. Ce cas convient si avec les paramètres α et σ du processus du taux de change la probabilité d'obtenir à long terme les taux de change négatifs est proche de zéro.[7]

Autres modélisations du comportement du taux de change seraient aussi envisageables. Par exemple, si la volatilité est une fonction déterministe du taux de change lui-même, et telle que $\sigma(x) = \sigma\sqrt{x}$, on obtient un *processus racine carrée*. Le choix du processus racine carrée assure que le processus décrivant le taux de change ne pourra jamais atteindre des valeurs négatives. Le processus racine carrée a été par exemple utilisé par Cox, Ingersoll et Ross [15] pour modéliser l'évolution du taux d'intérêt.

[7] Voir à ce sujet Vasicek [52].

Pour modéliser l'évolution du taux de change il serait également envisageable d'employer le modèle des zones cibles (*target zones*), introduit par Krugman [37] afin d'étudier des phénomènes macro-économiques. Ce type de modèle impose explicitement des bornes à l'évolution du taux de change. Cependant, son défaut majeur est de modéliser le logarithme du taux de change, et non pas la valeur du taux de change.

La décision du dirigeant consiste à choisir à un instant donné t un flux des dividendes par unité de temps c_t, payé aux actionnaires, ainsi qu'une couverture par des contrats à terme instantanés. f_t désigne le nombre de contrats à terme souscrits à l'instant t. Si $f_t < 0$ on parlera de la *vente à terme de la devise.* Si $f_t > 0$ il s'agira de l'*achat à terme de la devise.* Dans les conditions d'exploitation normales $f_t < 0$ et chaque contrat engage l'entreprise à *vendre* une unité de monnaie étrangère au début de la période suivante. Les contrats à terme instantanés expirent au bout de la période de longueur dt et sont évalués par arbitrage sur le marché financier de façon à ce que le gain moyen sur ce type de contrat soit nul.

Il semble important de souligner que le gain sur le contrat à terme $f_t \sigma dz_t$ est proportionnel à la partie non-prévisible σdz_t de la *variation* dx_t du taux de change.[8] Le comportement du gain net converti en monnaie domestique $g(x_t)\, x_t$ est, quant à lui, tout à fait différent. En effet, celui-ci est proportionnel au *niveau* x_t du taux de change.

Le paramètre ρ mesure l'impatience du dirigeant de l'entreprise. Etant donné qu'on s'intéresse ici à la couverture optimale et non pas à la répartition du dividende dans le temps, on posera $r = \rho$. Dans le cas $r \neq \rho$ le montant distribué sera une fonction explicite du temps.[9]

La fonction d'utilité instantanée du dirigeant $u(c_t)$ exprime son aversion au risque. La fonction d'utilité est supposée concave: $u'_c \geq 0$, $u''_{cc} < 0$.

1.2.1 Optimalité de la couverture

La forme du programme d'optimisation (1.1) auquel fait face l'entrepreneur pour déterminer sa couverture optimale du risque de change à long terme implique la maximisation à tout instant $t \in [0, \infty)$ de la fonction valeur suivante:

$$J_t(x_t, w_t) \equiv \max_{\{c_t, f_t\}} E_t \int_t^\infty e^{-\rho s}\, u(c_s) ds \tag{1.2}$$

La couverture du risque de change de long terme impose un horizon de décision infini. Par conséquent on recherche une *solution stationnaire* de

[8] Dans les conditions normales $f_t < 0$ (vente à terme) et le signe du gain sur le marché à terme est *opposé* à celui de la variation du taux de change.

[9] Voir aussi la proposition 2 du chapitre 2, page 35.

l'équation de Hamilton-Bellman-Jacobi. La stationnarité implique la séparabilité de l'argument temporel dans la fonction valeur qui prend alors la forme:

$$J_t(x,w) = e^{-\rho t} I(x,w) \tag{1.3}$$

Ainsi la variable temps peut être séparée. Les relations dérivées entre les quantités telles que le taux de change, la valeur des liquidités disponibles, les flux entrant et sortant, ont lieu localement et instantanément. Elles sont valables à tout moment $t \geq 0$ donné ce qui permet de démontrer comment une couverture "locale", mise en oeuvre à l'aide des contrats à terme instantanés, peut être utilisée pour couvrir un risque de change de long terme.

L'équation différentielle de Hamilton-Bellman-Jacobi peut alors s'écrire:

$$-\rho I + \max_{\{c,f\}} [\mathcal{H}] = 0 \tag{1.4}$$

Par $\mathcal{H}$ on a noté le Hamiltonien stationnaire:

$$\mathcal{H} = u(c) + \alpha(x_p - x)\, I_x + \left(\kappa x^2 + \rho w - c\right) I_w + \frac{\sigma^2}{2}\left(f^2 I_{ww} + 2 f I_{wx} + I_{xx}\right) \tag{1.5}$$

L'optimisation de Hamiltonien stationnaire $\mathcal{H}$ par rapport aux variables de contrôle c et f permet de déterminer la couverture optimale du risque de change ainsi que la politique optimale de paiement des dividendes.

La politique de couverture du risque de change optimale s'obtient à partir de la condition de premier ordre $\mathcal{H}'_f = 0$. On obtient:

$$f^* = -\frac{I_{xw}}{I_{ww}} \tag{1.6}$$

La condition de premier ordre $\mathcal{H}'_c = 0$ permet de déterminer la politique de paiement des dividendes:

$$c^* = [u'_c]^{-1}(I_w) \tag{1.7}$$

Celle-ci dépend explicitement des propriétés de la fonction d'utilité $u(c)$. Par exemple, pour une fonction d'utilité à aversion au risque constante $u(c) = \frac{c^\gamma - 1}{\gamma}$ où $1 - \gamma$ s'interprète comme aversion au risque, on obtiendrait $c^* = I_w{}^{\frac{1}{\gamma - 1}}$.

Le remplacement de la politique optimale de paiement des dividendes (1.7) ainsi que de la stratégie optimale de couverture du risque de change (1.6) dans le Hamiltonien stationnaire (1.5) permet d'expliciter l'équation de Hamilton-Bellman-Jacobi (1.4). On obtient:

$$-\rho\, I + \mathcal{U}(I_w) + \alpha(x_p - x)\, I_x + \left(\kappa x^2 + \rho w\right) I_w + \frac{\sigma^2}{2}\left(I_{xx} - \frac{I_{wx}^2}{I_{ww}}\right) = 0 \tag{1.8}$$

où:

$$\mathcal{U}(I_w) = u\left([u_c']^{-1}(I_w)\right) - [u_c']^{-1}(I_w)\ I_w$$

Ce terme dépend uniquement des caractéristiques de la fonction d'utilité. Pour une fonction à aversion au risque constante il est égal à: $\frac{1-\gamma}{\gamma}\ {I_w}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - \frac{1}{\gamma}$. On voit apparaître un terme constant $-\frac{1}{\gamma}$. Afin de l'éliminer on peut poser $I(x,w) \equiv \hat{I}(x,w) - \frac{1}{\rho\gamma}$. La substitution permet d'éliminer le terme constant. On obtient alors $\mathcal{U}\left(\hat{I}_w\right) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\ \hat{I}_w^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

L'équation de Hamilton-Bellman-Jacobi (1.8) est une équation non-linéaire. Une inspection plus précise indique qu'il s'agit d'une *équation différentielle aux dérivées partielles de second ordre non-linéaire de degré deux.* Cette caractéristique en fait un problème difficile à résoudre de manière à obtenir une solution analytique.[10]

En particulier on remarque la présence des termes non linéaires $\mathcal{U}(I_w)$ et $\frac{I_{wx}^2}{I_{ww}}$. Le premier terme reflète la concavité de la fonction d'utilité et donc l'aversion au risque de l'entreprise. Le second terme non-linéaire détermine le comportement inter-temporel de l'entreprise et donc la façon dont celle-ci se couvre contre le risque de change.

C'est l'équation (1.8) qu'il convient maintenant de résoudre pour obtenir la couverture optimale. La solution fera objet de la section suivante. On mettra en oeuvre la méthode de transformation proposée par Cox et Huang [17, 16]. On obtient alors une *équation aux dérivées partielles de second ordre linéaire de type parabolique.*

1.3 Solution exacte du modèle

Dans cette section on transformera l'équation différentielle (1.8) de manière à la rendre linéaire. Ceci peut être accompli grâce à la transformation qui change les rôles des variables indépendantes et dépendantes.

Cette transformation fait partie de la famille des *transformations de hodographe.* Elle est bien connue, notamment en mécanique des fluides [59]. Son utilisation à des problèmes de contrôle optimal en finance a été proposée par Cox et Huang [17].

1.3.1 Substitution des variables

Au lieu de rechercher comme solution la fonction valeur $I(x,w)$ on s'intéresse plutôt à la dérivée de cette fonction par rapport à la valeur w des liquidités

[10] Voir Smith [45] et Kacki [33].

de l'entreprise. La connaissance de $I_w(x,w)$ permet de calculer aisément la couverture optimale (1.6) ainsi que le paiement des dividendes optimal (1.7). On pose:

$$y \equiv I_w(x,w)$$

L'inversion formelle de I_w permet d'écrire:

$$w = I_w^{-1}(y,x)$$

Ainsi la fonction inconnue dévient désormais I_w^{-1} qu'on notera Ψ . On a donc la condition suivante de transformation:

$$w = \Psi(y,x) = \Psi\left(I_w(x,w),x\right) \tag{1.9}$$

La substitution s'obtient en résolvant le système, composé de cinq équations, obtenu en dérivant successivement l'équation (1.9) par rapport à x et w:

$$1 = \frac{d\Psi}{dw} = \Psi_y\, I_{ww}$$

$$0 = \frac{d\Psi}{dx} = \Psi_y\, I_{wx} + \Psi_x$$

$$0 = \frac{d^2\Psi}{dw^2} = \Psi_{yy}\, I_{ww}^2 + \Psi_y\, I_{www}$$

$$0 = \frac{d^2\Psi}{dw\,dx} = \left(\Psi_{yy}\, I_{wx} + \Psi_{yx}\right)\, I_{ww} + \Psi_y\, I_{wwx}$$

$$0 = \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \Psi_{yy}\, I_{wx}^2 + 2\Psi_{yx}\, I_{wx} + \Psi_{xx} + \Psi_y\, I_{wxx}$$

Après simplifications on obtient l'expression recherchée de la transformation:

$$\begin{aligned}
I_{ww} &\rightarrow \frac{1}{\Psi_y} \\
I_{wx} &\rightarrow -\frac{\Psi_x}{\Psi_y} \\
I_{www} &\rightarrow -\frac{\Psi_{yy}}{{\Psi_y}^3} \\
I_{wwx} &\rightarrow \frac{\Psi_x\,\Psi_{yy} - \Psi_y\,\Psi_{yx}}{{\Psi_y}^3} \\
I_{wxx} &\rightarrow \frac{2\Psi_x\,\Psi_y\,\Psi_{yx} - \Psi_y^2\,\Psi_{xx} - \Psi_x^2\Psi_{yy}}{\Psi_y^3}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Il convient d'ajouter à la transformation ci-dessus les deux conditions supplémentaires:

$$\begin{aligned} w &\rightarrow \Psi \\ I_w &\rightarrow y \end{aligned}$$

Cette substitution formelle permet de transformer le problème initial, consistant à trouver la fonction inconnue $I(x,w)$, en un problème équivalent, consistant à trouver la dérivée de la fonction inverse $\Psi\left(I_w(x,w),x\right)$ à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Remarquons ici que le paiement des dividendes optimal c^* ainsi que la couverture optimale f^* ne requièrent guère la connaissance de la fonction valeur $I(x,w)$. La connaissance de la dérivée $I_w(x,w)$, laquelle s'interprète comme *utilité marginale de la richesse*,[11] est suffisante. Cette quantité permet donc d'obtenir c^* directement. Les dérivées de cette quantité par rapport à la richesse w et par rapport au taux de change x déterminent la couverture optimale f^*. Dans le cas général, une fois $\Psi(I_w,x)$ obtenue il s'agit donc de pouvoir inverser cette transformation afin de retrouver I_w.

1.3.2 Linéarisation de l'équation différentielle

L'équation (1.8) ne possède pas toutes les dérivées données dans (1.10). La mise en oeuvre de la technique de remplacement consiste donc tout d'abord à dériver l'équation de Hamilton-Bellman-Jacobi par rapport à w. On obtient:

$$\begin{aligned} -[u_c']^{-1}\left(I_w\right) I_{ww} \;+\; & \alpha(x_p - x)\, I_{wx} + \left(\kappa x^2 + \rho w\right) I_{ww} \\ + \;& \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{I_{wx}^2}{I_{ww}^2} I_{www} - 2\frac{I_{wx}}{I_{ww}} I_{wwx} + I_{wxx}\right) = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

On effectue les remplacements indiqués en (1.10), valables pour toute fonction d'utilité. Ces remplacements exigent notamment que $\Psi_y \neq 0$. Remarquons que cette exigence est vérifiée, tant que la fonction d'utilité intertemporelle est concave. En effet, prenons la transformation inverse. Dans ce cas Ψ_y correspond à $\frac{1}{I_{ww}}$. Or, $I_{ww} \neq 0$ tant que I est concave. Après quelques simplifications, l'équation (1.11) devient:

$$\alpha(x_p - x)\,\Psi_x + \frac{\sigma^2}{2}\,\Psi_{xx} = \rho\,\Psi + \kappa x^2 - [u_c']^{-1}(y) \quad (1.12)$$

On obtient ainsi l'équation différentielle linéarisée. Cette relation doit être vérifiée pour tout $t \geq 0$.

[11] La richesse est assimilée ici à la valeur des liquidités w.

1.3.3 Interprétation financière

Rappelons tout d'abord que la fonction Ψ est égale par hypothèse à la valeur des liquidités disponibles w. Le terme de gauche de (1.12) décrit donc la variation de la richesse w par rapport au changement du taux de change x. Il s'interprète en effet comme l'espérance de l'accroissement instantané de la valeur des liquidités de l'entreprise par unité de temps.

L'accroissement espéré de la valeur des liquidités de l'entreprise est égal au terme de droite de cette équation. On y retrouve dans l'ordre:

1. l'accroissement de la richesse dû à l'appréciation du capital au taux d'intérêt sans risque $\rho\Psi$;
2. l'apport du flux entrant κx^2, provenant de l'activité à l'étranger;
3. le flux sortant égal au paiement optimal des dividendes: $-[u_c']^{-1}(y) = -c^*(y)$.

En abusant des notations, on peut écrire que l'espérance du changement instantané de la richesse doit vérifier l'équation suivante:

$$\frac{E[dw]}{dt} = \rho w + \kappa x^2 - c^*$$

Ce qui reste du flux entrant et n'a pas été payé comme dividendes va donc alimenter la caisse w de l'entreprise. Cet apport sera négatif, si à un moment donné il faut payer une somme des dividendes plus grande que la recette réalisée par l'entreprise.

On peut aussi remarquer, qu'à gauche du signe d'égalité dans l'équation (1.12) il n'y a pas des dérivées de la richesse $\Psi(y, x)$ par rapport à la variable indépendante y. Ceci indique que l'évolution de l'utilité marginale du paiement des dividendes y est constante dans le temps ($dy = 0$). Le paiement des dividendes est donc, lui aussi, constant dans le temps:

$$dc^* = 0 \tag{1.13}$$

L'absence des termes des dérivées de la richesse par rapport à l'utilité marginale du paiement des dividendes y est due ici à l'égalité du taux d'impatience intertemporelle au taux d'intérêt. En effet, si $\rho \neq r$ un terme proportionnel à Ψ_y apparaît dans l'équation (1.12).

Enfin, on vérifie bien la concordance des unités de mesure: les flux entrant et sortant, ainsi que l'apport de capitalisation ρw, sont tous exprimés en monnaie domestique par unité de temps.

1.3.4 Solution

Calculons maintenant la valeur des liquidités de l'entreprise $w = \Psi$ à l'instant $t \geq 0$. On remarque tout d'abord, qu'il est possible de séparer les variables dans l'équation différentielle (1.12) et simplifier davantage le problème. En effet, cette équation possède une forme très régulière en x et y. Ceci nous permet de deviner la forme de la solution. Posons:

$$\Psi(y, x) = \phi(y) - \psi(x) \tag{1.14}$$

La séparation est donc additive. En écrivant $\rho\phi = \rho\Psi + \rho\psi$, on peut interpréter cette équation de la manière suivante. Le terme $\rho\phi$ est égal à la valeur du flux des dividendes payé aux actionnaires. Il doit être égal à la valeur provenant de l'appréciation des liquidités de la firme ($\rho\Psi = \rho w$) plus la valeur provenant du gain réalisé à l'étranger ($\rho\psi$).

La séparation des variables permet d'écrire l'équation (1.12) comme:

$$\rho\,\psi(x) - \alpha(x_p - x)\,\psi_x(x) - \frac{\sigma^2}{2}\,\psi_{xx}(x) - \kappa x^2 = \rho\,\phi(y) - c^*(y)$$

Le terme de gauche ne dépend pas de y, de même que le terme de droite ne dépend pas de x. Ces deux termes doivent donc être égaux à une même constante arbitraire. Etant donné que cette constante s'élimine de façon naturelle à la fin des calculs, on exclura sa présence du raisonnement qui suit.

Valeur du flux des dividendes De façon immédiate on obtient la fonction ϕ:

$$\phi(y) = \frac{c^*(y)}{\rho} \tag{1.15}$$

La fonction $\phi(y)$ peut donc être interprétée comme la valeur apportée par le paiement des dividendes à l'instant t. Celui-ci va dépendre de l'aversion au risque du manager de la firme car $c^*(y) = [u_c']^{-1}(y)$, de l'utilité marginale de la valeur des actifs liquides de la firme y ainsi que du taux d'escompte inter-temporel ρ.

Valeur du flux provenant de l'activité à l'étranger La valeur du flux entrant, provenant de l'activité au pays étranger, s'accumule aux actifs liquides de l'entreprise et n'est pas immédiatement payé aux actionnaires. La valeur de ce flux doit vérifier à chaque instant $t \geq 0$ l'équation différentielle suivante:

$$\alpha(x_p - x_t)\,\psi_x(x_t) + \frac{\sigma^2}{2}\,\psi_{xx}(x_t) = \rho\,\psi(x_t) - \kappa x_t^2 \tag{1.16}$$

Le taux de change x_t suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck qui est un processus gaussien dont on connaît l'espérance et variance conditionnelles pour $s \geq t$:

$$\begin{aligned} E_t[x_s] &= x_t\, e^{-\alpha(s-t)} + x_p \left(1 - e^{-\alpha(s-t)}\right) \\ \mathrm{var}_t[x_s] &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(s-t)}\right) \end{aligned}$$

En utilisant la formule $E_t[x_s^2] = \mathrm{var}_t[x_s] + E_t[x_s]^2$, la solution de l'équation différentielle (1.12) peut alors s'écrire à l'aide du théorème de représentation de Feynman-Kac. En d'autres termes, elle est égale à la valeur actualisé en t de l'espérance mathématique de la somme des flux futurs à recevoir à venir aux instants $s \geq t$:

$$\begin{aligned} \psi(x_t) &= E_t \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)}\, \kappa x_s^2\, ds \\ &= \kappa \left[\frac{1}{2\alpha+\rho}\,(x_t - x_p)^2 + \frac{2\,x_p}{\alpha+\rho}\,(x_t - x_p) + \frac{1}{\rho}\left(x_p^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha+\rho}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.17}$$

La solution obtenue avec le théorème de représentation de Feynman-Kac, correspond à la solution particulière de l'équation (1.16). L'équation homogène correspondant à (1.16), ne contenant pas de terme κx^2, peut être transformée en une équation différentielle de Kummer. Celle-ci s'obtient en changeant la variable indépendante x en $\hat{x}$ à l'aide de la transformation $\hat{x} = \frac{\alpha(x_p - x)^2}{\sigma^2}$.[12] La solution générale de l'équation (1.16) serait donc composée des fonctions confluantes hypergéométriques.[13] Celles-ci sont éliminées en prenant des conditions aux bornes "naturelles" à l'infini, grâce au théorème de Feynman-Kac.[14]

On aperçoit aussi que pour des profils de flux qui peuvent être approchés par un polynôme la méthode de solution analytique présentée ci-dessus reste toujours valable. Prenons par exemple un flux quadratique $g(x) = \kappa_1 x + \kappa_2 x^2$. Dans ce cas le calcul de l'espérance dans (1.17) nécessite la connaissance du troisième moment conditionnel $E_t[x_s^3]$. Ce dernier peut être obtenu par exemple à l'aide de la fonction caractéristique de la loi normale.

[12] Voir à ce sujet Delgado et Dumas [19].

[13] Pour l'équation de Kummer et les propriétés des fonctions confluantes hypergéométriques consulter Abramovitz et Stegun [3] ainsi que Bronstein et Siemiendiaïev [11].

[14] Le problème d'existence des *extraneous solutions* se pose aussi dans le cas du modèle classique de choix inter-temporel de portefeuille. Voir Merton [41].

Valeur de la firme La richesse de la firme, d'après (1.14), est égale au flux des dividendes *plus* la valeur du flux perpétuel à venir, en supposant que les futurs paiements des dividendes suivront eux aussi une politique optimale:

$$\begin{aligned} w = \Psi(y,x) &= \phi(y) - \psi(x) \\ &= \frac{[u_c']^{-1}(y)}{\rho} - \psi(x) \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $\psi(x)$ est donné par (1.17). La fonction $\Psi(y,x)$ est la solution de l'équation différentielle linéarisée (1.12). Elle exprime l'évolution de la valeur des liquidités w de la firme.

Utilité marginale du paiement des dividendes En inversant l'équation (1.18) on obtient la solution de l'équation différentielle de Hamilton-Bellman-Jacobi dérivée (1.11). Cette procédure est la *transformation inverse* de la transformation (1.10). On obtient:

$$y = I_w(x,w) = [u_c'](\rho w + \rho\psi(x)) \tag{1.19}$$

Afin d'obtenir la solution de l'équation de Hamilton-Bellman-Jacobi initiale (1.8) il serait nécessaire d'intégrer cette équation par rapport à w: $I = \int I_w dw + C$. Cependant, pour obtenir les expressions donnant la couverture et les dividendes on n'a pas besoin de connaître l'utilité intertemporelle I.

1.3.5 Couverture du risque de change et dividendes

Dividendes D'après (1.13), (1.7) et (1.18) la politique des dividendes optimale consiste à payer un dividende constant dont le montant est déterminé par des conditions initiales:

$$\begin{aligned} c^* &= const. \\ &= \rho w_0 + \kappa\left[\frac{1}{2\alpha+\rho}(x_0-x_p)^2 + \frac{2\,x_p}{\alpha+\rho}(x_0-x_p) + \frac{1}{\rho}\left(x_p^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha+\rho}\right)\right] \end{aligned}$$

Ce paiement se décompose en une partie sans risque due à la valorisation du capital et en une partie liée à la recette espérée de la firme réalisée à l'étranger.

Couverture En transformant l'expression donnant la couverture optimale (1.6) à l'aide de (1.10) on aperçoit que celle-ci est égale à la dérivée partielle de la valeur des liquidités Ψ par rapport au taux de change x_t. On obtient:

$$f^* = \Psi_x$$

$$= -2\kappa \left[\frac{1}{2\alpha+\rho} (x_t - x_p) + \frac{1}{\alpha+\rho} x_p \right] \tag{1.20}$$

La politique de couverture optimale ainsi que celle des dividendes ont été présentés sur la figure 1.1.

1.4 La gestion du risque de change

Dans l'expression de la couverture optimale (1.20) on a mis en exergue l'éloignement du taux de change x_t du niveau de parité x_p. On remarque qu'à l'instant $t = 0$ la couverture optimale couvre le flux des dividendes, exposé aux variations du taux de change, par le biais de la composante provenant du flux des recettes de l'étranger.

La couverture optimale f^* ne couvre pas le flux κx^2 lui-même, car elle n'est pas égale à l'exposition locale de ce flux. Dans les modèles de type statique, qui préconisent une telle couverture,[15] l'exposition locale du flux est égale à la dérivée du flux par rapport au taux de change. Celle-ci est dans le présent cas égale à $-2\kappa x$. La couverture optimale dérivée ici n'est donc pas une couverture locale. Elle ne couvre pas l'exposition du flux des recettes, mais l'exposition de la valeur des liquidités car $f^* = \Psi_x$.

On peut distinguer dans l'expression de la couverture (1.20) deux composantes:

1. une composante *perpétuelle*, liée au fait que le flux est toujours positif et évolue autour du niveau de parité x_p; cette composante est toujours constante, ne dépend pas de la valeur du taux de change; par conséquent son signe ne change pas et est négatif (vente à terme):

$$-\frac{2\kappa x_p}{\alpha+\rho}$$

2. une composante dont le signe dépend du *niveau du taux de change*; son signe est négatif si on se situe au dessus du niveau de parité $x > x_p$, ce qui peut être interprété comme une vente à terme supplémentaire si le taux de change est favorable, afin de geler les profits; son signe est positif si on se situe en dessous du niveau de parité $x < x_p$, ce qui peut être interprété comme signal de vendre moins à terme et attendre que le niveau du taux de change devienne plus favorable (remonte vers le

[15] Voir par exemple Von Ungern-Sternberg et Von Weizsacker [53].

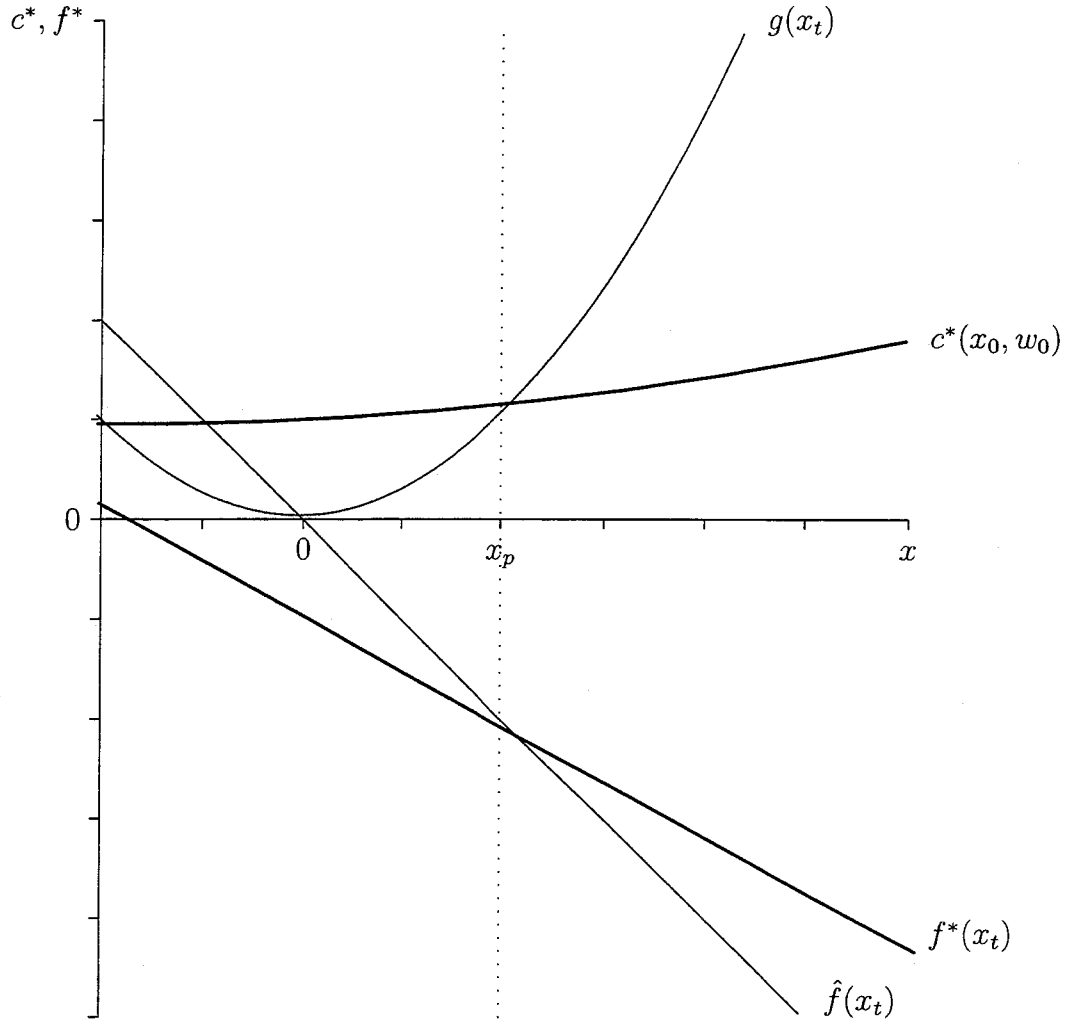


FIG. 1.1: Politique de couverture du risque de change $f^*(x_t)$ et politique de paiement des dividendes $c^*(x_0, w_0)$ optimales: comparaison avec la couverture classique $\hat{f}(x_t) = -2\kappa x_t$ et avec la taille du flux provenant de l'étranger κx_t^2. Paramètres: $\alpha = 0.85$, $\sigma = 15\%$, $\rho = r = 10\%$, $\kappa = 1$, $w = 1$ et $x_p = 1$.

niveau de parité); cette composante liée au niveau du taux de change est égale à:

$$-\frac{2\,\kappa}{2\alpha+\rho}\,(x_t - x_p)$$

Enfin notons qu'au voisinage du niveau de parité x_p, pour des taux de change x_t positifs, la couverture optimale est toujours négative. Il s'agit donc bien d'une vente des devises à terme.

1.5 Conclusion

Une politique optimale de couverture dynamique du risque de change, en présence des actifs non-échangeables et lorsque le flux financier en devises est proportionnel au niveau du taux de change, a été dérivée dans cet article. Il a été démontré que si le taux de change suit un processus avec tendance de retour vers le niveau de parité, la couverture optimale sera dépendante de l'éloignement du taux de change de ce niveau. Une situation favorable sur le marché des changes (taux de change au-dessus du niveau de parité), induit alors une couverture supplémentaire sur le marché à terme, afin de "geler les profits". Une situation défavorable sur le marché des changes est liée à une couverture moindre.

La méthode de couverture du risque de change proposée dans cet article renverse la logique habituelle où la préoccupation principale est la réduction de la variabilité du flux en devises provenant de l'étranger. En effet, l'attention du manager de l'entreprise est ici plutôt tourné vers l'intérieur et non pas vers l'extérieur de l'entreprise. Sa politique stabilise la valeur des liquidités afin de pouvoir assurer un flux des dividendes régulier payé aux actionnaires.

Groupe HEC
BIBLIOTHÈQUE
78350 JOUY-EN-JOSAS

Chapitre 2

Couverture du risque de change en marché incomplet

2.1 Introduction

On reprend ici le modèle introduit dans le chapitre précédent afin d'examiner l'impact de l'incomplétude des marchés financiers sur la taille de la couverture optimale du risque de change en présence des actifs non échangeables.

Dans le présent modèle on se place dans le cas où le risque supplémentaire et non-couvrable est introduit de façon *multiplicative* dans la contrainte budgétaire de l'entreprise. Ce risque, exogène, place ainsi le problème de choix de couverture optimale dans le contexte des marchés incomplets.

Un problème voisin a été étudié par Svensson et Werner [49] qui dans le cadre du modèle classique de choix de portefeuille ("modèle de Merton" [42]) étudie l'impact d'un revenu exogène et non-échangeable (salaire) qui rentre cependant de façon *additive* dans la contrainte budgétaire de l'individu.

Pour une discussion plus complète des différences entre le modèle traditionnel de choix de portefeuille[1] et le modèle de choix de couverture en présence des actifs non-échangeables il est recommandé au lecteur de consulter d'abord le premier chapitre de la thèse.

Dans la section 2 nous allons poser le problème de choix de couverture optimale en marché incomplet et étudier les propriétés de la contrainte budgétaire de l'entreprise. Ensuite, dans la section 3, les conditions d'optimalité ainsi que l'équation HBJ seront dérivées. La section 4 contient une solution du problème de choix de couverture en marché incomplet. Enfin, dans la section 5 nous présentons nos conclusions et remarques.

2.2 Le modèle

2.2.1 Marché complet

Sources de risque et prix des contrats à terme Il y a deux sources de risque indépendants dans le modèle: le risque de taux de change (variable x) et le risque de taille de flux (variable κ). Si le *marché est complet*, il existe des contrats à terme sur x et sur κ permettant à l'entreprise de se couvrir. Le prix de vente à terme de la devise étrangère est supposé égal à l'espérance du futur taux de change au comptant:

$$F_t^{t+\Delta t} = E_t[\tilde{x}_{t+\Delta t}]$$

[1] Ce modèle possède de multiples extensions et modifications. Voir par exemple Bensaid, Lesne, Pagès et Scheinkman [9], He et Pagès [29], Koo [36], Lioui, Nguyen Duc Trong et Poncet [39], Merton [41, 42] ou Svensson et Werner [49].

De même, dans un marché complet, il existe des contrats à terme pour couvrir le risque de la taille du flux, ayant la même propriété:

$$K_t^{t+\Delta t} = E_t[\tilde{\kappa}_{t+\Delta t}]$$

L'entreprise peut alors choisir sa couverture: le nombre des contrats à terme sur devise f_t et le nombre des contrats à terme sur la taille du flux g_t. On adopte ici la convention des signes suivante: si $f_t < 0$ il s'agit d'une vente à terme de la devise. De même si $g_t < 0$ il s'agit d'une vente à terme de la taille du flux. En période $t+\Delta t$ les gains sur ces contrats, exprimés en valeur (monnaie domestique), sont alors les suivants:

$$f_t \left[x_{t+\Delta t} - F_t^{t+\Delta t} \right]$$

sur les contrats de change et:

$$g_t \left[\kappa_{t+\Delta t} - K_t^{t+\Delta t} \right]$$

sur les contrats de taille.

2.2.2 Marché incomplet

Dans un marché incomplet il n'existe pas de contrats à terme sur la taille du flux. Par définition l'entreprise ne peut pas se couvrir contre le risque de taille et on a donc: $g_t = 0$. L'entreprise choisit alors uniquement la couverture du risque de change f_t.

Afin de résoudre ce problème d'optimisation en marché incomplet on utilisera ici la méthodologie de *ficticious completion* introduite par Karatzas *et al.* [34]. Celle-ci consiste à compléter fictivement le marché incomplet par des contrats à terme sur la taille du flux, de façon à transformer le problème de choix de couverture en un problème solvable en marché complet.

Dans un second temps le calcul d'une prime de risque π associée aux contrats à terme sur la taille du flux sera entrepris. Cette prime de risque abaisse le prix à terme de façon que l'entreprise ait un intérêt nul à prendre une couverture. Par conséquent on obtient la relation $g_t = 0$ caractérisant le choix de couverture en marché incomplet. On peut alors examiner l'impact de cette prime de risque, et donc de l'incomplétude, sur la couverture du risque de change f_t.

Si une prime de risque $\pi_t > 0$ est associée aux contrats à terme sur le risque de la taille du flux, leur prix à terme est égal à:

$$K_t^{t+\Delta t} = E_t[\tilde{\kappa}_{t+\Delta t}] - \pi_t \Delta t$$

Dans un marché complet $\pi_t = 0$ et l'entreprise choisit de vendre à terme une proportion g_t de la taille du flux espérée. Selon la convention des signes adoptée on a alors $g_t < 0$. Si maintenant on augmente la prime de risque π_t, le prix de vente à terme $K_t^{t+\Delta t}$ va diminuer, rendant ainsi de moins en moins intéressant pour l'entreprise de vendre la taille du flux à terme. Si le marché fixe une prime de risque $\pi_t > 0$ très grande, on peut s'attendre à ce qu'il devienne même très intéressant d'acheter à terme la taille du flux: $g_t > 0$. Intuitivement, entre ces deux cas extrêmes d'achat et de vente à terme, il doit exister une prime de risque $\pi_t^* > 0$, telle que l'entreprise ne prenne pas de position sur ces contrats: $g_t = 0$. En d'autres termes, l'entreprise ne se couvre pas contre le risque de taille et, dans ce marché fictivement complété on a alors la même situation que dans le "vrai" marché incomplet.

Contrainte budgétaire de l'entreprise en marché incomplet Afin de dériver la contrainte budgétaire de l'entreprise, on considère la richesse accumulée à l'instant $s = t + \Delta t$. Celle-ci est égale à la somme algébrique de cinq termes:

$$w_s = (1 + r\Delta t)w_t + \kappa_s x_s^2 \Delta t + f_t \left[x_s - F_t^s\right] + g_t \left[\kappa_s - K_t^s\right] - c_t \Delta t$$

On reconnaît dans l'ordre:

1. La richesse accumulée, pendant Δt années, sur le compte en banque de l'entreprise payant un taux sans risque annuel r;

2. Le flux $\kappa_s x_s \Delta t$ perçu en devises, proportionnel au niveau du taux de change, et converti en monnaie domestique au taux x_s où le paramètre d'échelle κ_s s'interprète comme la taille du flux;[2]

3. Les gains ou les pertes sur les deux contrats à terme contractés en période précédente;

4. Les dividendes c_t (flux sortant et donc négatif), payés aux actionnaires.

On suppose par ailleurs que le taux de change suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck:

$$dx_t = \alpha(x_p - x_t)\, dt + \sigma_x\, dz_t^{(x)}$$

[2]Après la conversion en monnaie domestique le flux perçu à l'étranger est *quadratique* en niveau du taux de change. Afin de simplifier l'exposé on se restreint dans ce qui suit au flux exogène quadratique. La méthode proposée reste cependant valable pour tout flux *non-linéaire* pouvant être approximé par un polynôme de degré plus élevé. Le coût d'une telle extension comprendrait l'inclusion dans nos calculs des moments des degrés supérieurs du processus Ornstein-Uhlenbeck, ce qui diminuerait sensiblement la clarté de l'exposé.

reflétant la tendance de retour du taux de change vers le niveau de parité x_p. La taille du flux est incertaine et son évolution peut être décrite par le processus:

$$d\kappa_t = \mu_\kappa dt + \sigma_\kappa \, dz_t^{(\kappa)}$$

L'étape suivante consiste à passer à la limite $\Delta t \to 0$. On obtient:

$$dw_t = \left(rw_t + \kappa_t x_t^2 + g_t\pi_t - c_t\right) dt + f_t\sigma_x \, dz_t^{(x)} + g_t\sigma_\kappa \, dz_t^{(\kappa)} \tag{2.1}$$

2.2.3 Choix de couverture optimale

Le problème inter-temporel de choix de couverture du risque de change de long terme pour une entreprise multinationale peut être formulé comme un problème de contrôle optimal stochastique à horizon infini $t \in [0, +\infty)$. Le dirigeant est confronté au problème d'optimisation suivant:

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t, f_t, g_t\}} \quad & E_0\left[\int_0^\infty e^{-\rho s}\, u(c_s) ds\right] \\
\text{s.c.} \quad & dw_t = \left(rw_t + \kappa_t x_t^2 + g_t\pi_t - c_t\right) dt + f_t\sigma_x \, dz_t^{(x)} + g_t\sigma_\kappa \, dz_t^{(\kappa)} \\
& dx_t = \alpha(x_p - x_t)\, dt + \sigma_x \, dz_t^{(x)} \\
& d\kappa_t = \mu_\kappa dt + \sigma_\kappa \, dz_t^{(\kappa)} \\
& E[dz_t^{(x)} \, dz_t^{(\kappa)}] = 0 \\
& g_t = 0 \\
& w(0) = w_0 \\
& x(0) = x_0 \\
& \kappa(0) = \kappa_0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Le dirigeant de l'entreprise maximise l'espérance de l'utilité du flux des dividendes futurs, actualisée au taux d'impatience inter-temporelle ρ et conditionnelle à l'information disponible à l'instant $t = 0$. On considère ici que le dirigeant est averse au risque, ce qui motive son choix d'une politique de couverture du risque de change. Le dirigeant agit dans l'intérêt de ses actionnaires et on fait abstraction du problème d'agence.

Les variables d'état à chaque l'instant $t \in [0, +\infty)$ sont en nombre de trois. La première variable d'état est la valeur des actifs liquides de l'entreprise w_t, exprimée en monnaie domestique. La deuxième variable d'état est la valeur du taux de change x_t, qui exprime en monnaie domestique la valeur d'une unité de la monnaie étrangère. La troisième variable d'état est la taille incertaine κ_t du flux provenant de l'étranger.

On suppose que les conditions de l'état du système sont connues à chaque instant $t \in [0, +\infty)$, au fur et à mesure d'affluence des informations pertinentes. En $t = 0$ la valeur du taux de change est égale à $x(0) = x_0$. La valeur des actifs liquides de l'entreprise est égale à $w(0) = w_0$ tandis que la taille du flux est donnée par $\kappa(0) = \kappa_0$.

Les variables de contrôle sont en nombre de deux. La décision du dirigeant consiste à choisir à un instant donné t un flux des dividendes c_t par unité de temps, payé aux actionnaires, ainsi qu'un montant f_t des contrats à terme instantanés. Les contrats à terme instantanés expirent au bout de la période de longueur dt. Ils sont utilisés par l'entreprise pour couvrir le flux des gains perçu à l'étranger. Le gain sur le contrat à terme est inversement proportionnel à la partie non prévisible de la *variation* du taux de change, alors que le gain net converti en monnaie domestique $\kappa_t x_t^2$ est proportionnel au *niveau* du taux de change.

Le modèle introduit deux sources du risque exogènes: le risque de change reflété par la variable x_t et le risque de taille du flux associé à κ_t. La formulation du problème de couverture (2.2) est basée sur l'hypothèse que le risque sur la taille du flux est indépendant du risque de taux de change. Dans le cas général on aurait $E[dz_t^{(x)}\, dz_t^{(\kappa)}] = \rho_{x\kappa}\, dt$ avec un coefficient de corrélation égal à $\rho_{x\kappa}$.

Le marché est incomplet car le risque de taille du flux n'est pas couvrable. Par hypothèse, il n'existe pas de contrats permettant une telle couverture. On impose donc dans (2.2) la condition $g_t = 0$. Le but de la présente recherche est par conséquent d'évaluer l'impact de cette incomplétude sur la demande f_t des contrats à terme sur le taux de change.

2.3 Conditions d'optimalité

Fonction valeur On définit la fonction valeur J à l'instant $t \geq 0$ comme:

$$J_t(w_t, x_t, \kappa_t) \equiv \max_{\{c_t, f_t, g_t\}} E_t \left[\int_t^\infty e^{-\rho s}\, u\left(c_s\right) ds \right]$$

Hamiltonien du système Afin d'obtenir la solution du programme d'optimisation il convient d'écrire tout d'abord le Hamiltonien du système (2.2):

$$H = e^{-\rho t}\, u(c) + \left(\kappa x^2 + rw + g\pi - c\right) J_w + \alpha(x_p - x)\, J_x + \mu_\kappa J_\kappa \qquad (2.3)$$

$$+\frac{\sigma_x^2}{2}\left(f^2 J_{ww} + 2f J_{wx} + J_{xx}\right) + \frac{\sigma_\kappa^2}{2}\left(g^2 J_{ww} + 2g J_{w\kappa} + J_{\kappa\kappa}\right)$$

La fonction valeur J est ici une fonction du temps t, du niveau du taux de change x, de la richesse w et de la taille du flux κ. Le Hamiltonien englobe toute information pertinente pour décrire l'état et l'évolution potentielle du système à un moment donné.

Dans le marché incomplet, $g = 0$ par hypothèse. Cependant J est toujours fonction des 3 variables d'état: w, x et κ. Si on impose $g = 0$ dans (2.3), il reste encore des termes $\kappa x^2 J_w$, $\mu_\kappa J_\kappa$ et $\frac{\sigma_\kappa^2}{2} J_{\kappa\kappa}$ qui reflètent le fait que le problème dépend de la taille du flux κ.

2.3.1 Paiement des dividendes optimal

La condition de premier ordre d'optimisation de la politique des dividendes peut s'écrire: $H'_c = 0$. Ainsi on maximise les parties de l'Hamiltonien (2.3) contenant le terme c:

$$\max_{\{c\}} \left[e^{-\rho t}\, u(c) - c\, J_w \right]$$

La condition de premier ordre implique la politique de paiement des dividendes optimale suivante:

$$c^* = [u'_c]^{-1} \left(e^{\rho t}\, J_w \right) \tag{2.4}$$

où $[u'_c]^{-1}$ dénote la fonction inverse de la dérivée de la fonction d'utilité instantanée par rapport à c.

Remarque Il est à noter que le risque sur la taille du flux lié à l'incertitude sur κ n'a aucun effet *direct* sur c^*. Cette influence est *indirecte* et s'exerce à travers la dépendance de la fonction valeur J de la variable κ.

2.3.2 Couverture optimale du taux de change

La condition de premier ordre d'optimisation de la politique de couverture s'écrit: $H'_f = 0$. Ceci revient à maximiser la partie de l'Hamiltonien (2.3) contenant des termes f:

$$\max_{\{f\}} \left[f^2\, J_{ww} + 2f\, J_{wx} \right]$$

Le calcul de la dérivée de premier ordre aboutit à la politique de couverture optimale suivante:

$$f^* = -\frac{J_{wx}}{J_{ww}} \tag{2.5}$$

Interprétation On obtient, en apparence, une expression identique à celle de la couverture optimale obtenue en absence du risque sur la taille du flux.[3] Elle correspond à la couverture *directe* du risque de change. Le risque sur la taille du flux lié à l'incertitude sur κ, et donc l'incomplétude, n'a de l'effet sur ce terme que de façon *indirecte*. Cet impact s'opère par le biais de la dépendance de la fonction valeur J de cette variable, à travers ses dérivées de second ordre J_{wx} et J_{ww} apparaissant dans l'expression (2.5) donnant la couverture optimale.

2.3.3 Couverture optimale de la taille du flux et la prime de risque

Dans un marché incomplet l'entreprise ne peut pas se couvrir contre le risque de taille et $g = 0$ par hypothèse. Dans un marché fictivement complété cette couverture est trop chère et $g = 0$ également. Il convient alors déterminer la prime de risque π qui neutralise la position de l'entreprise. Cette prime sera déterminée par itérations successives, en supposant qu'elle est fonction de deux variables d'état x et κ lesquelles génèrent de l'incertitude dans le modèle:

$$\pi_t = \pi(x_t, \kappa_t)$$

Par hypothèse, cette prime de risque n'est donc pas fonction de la richesse w. C'est le marché financier qui fixe cette prime de risque, afférente à la couverture de la taille du flux, en tenant compte de l'incertitude générée par l'évolution aléatoire de x et de κ. L'entreprise est ici un *price taker* – elle subit cet accroissement de coût de couverture imposé par le marché financier.

Conditions d'optimalité La condition de premier ordre d'optimisation de la politique de couverture s'écrit: $H'_g = 0$. Ceci revient à maximiser la partie de l'Hamiltonien (2.3) contenant des termes g:

$$\max_{\{g\}} \left[\frac{\sigma_\kappa^2}{2} J_{ww}\, g^2 + \left(\pi\, J_w + \sigma_\kappa^2\, J_{w\kappa} \right) g \right]$$

[3] Si $\sigma_\kappa = 0$, en changeant de l'espace des variables d'état $\{w, x\} \rightarrow \{y, x\}$ où $y \equiv I_w = e^{\rho t} J_w$ à l'aide de la transformée $w \equiv \Psi(y, x)$ on obtient:

$$f^*(x_t, w_t) = -\frac{J_{wx}}{J_{ww}} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -2\kappa \left[\frac{1}{2\alpha + \rho}(x - x_p) + \frac{1}{\alpha + \rho} x_p \right]$$

$$c^*(x_t, w_t) = [u'_c]^{-1}(y) = \rho w_t + \kappa \left[\frac{1}{2\alpha + \rho}(x - x_p)^2 + \frac{2\, x_p}{\alpha + \rho}(x - x_p) + \frac{1}{\rho} \left(x_p^2 + \frac{\sigma_x^2}{2\alpha + \rho} \right) \right]$$

La dernière égalité est valable pour toute fonction d'utilité.

Le calcul de la dérivée de premier ordre aboutit à la politique de couverture optimale suivante:

$$g^* = -\frac{\pi}{\sigma_\kappa^2}\frac{J_w}{J_{ww}} - \frac{J_{w\kappa}}{J_{ww}} \tag{2.6}$$

Evaluation de la prime de risque On fait l'hypothèse que la prime de risque π est calculée par "arbitrage". La valeur d'équilibre de cette prime est établie de façon que l'entreprise soit indifférente entre se couvrir et ne pas se couvrir contre le risque de taille. En imposant $g^* = 0$ dans (2.6) on obtient l'équation permettant de déterminer la prime de risque:

$$\pi = -\frac{\sigma_\kappa^2 J_{w\kappa}}{J_w} \tag{2.7}$$

2.3.4 Equation de Hamilton–Bellman–Jacobi

Optimisation En remplaçant (2.4), (2.5) et (2.6) dans (2.3) on obtient le Hamiltonien optimisé $H^* = \max_{\{c,f,g\}}[H]$:

$$H^* = e^{-\rho t}u(c^*) + \left(\kappa x^2 + rw - c^*\right) J_w + \alpha(x_p - x)\, J_x + \mu_\kappa J_\kappa \tag{2.8}$$
$$+\frac{\sigma_x^2}{2}\left(J_{xx} - \frac{J_{wx}^2}{J_{ww}}\right) + \frac{\sigma_\kappa^2}{2}\left(J_{\kappa\kappa} - \frac{J_{w\kappa}^2}{J_{ww}}\right) - \frac{1}{2\sigma_\kappa^2}\frac{J_w^2}{J_{ww}}\pi^2 - \frac{J_{w\kappa}J_w}{J_{ww}}\pi$$

où:

$$c^* = [u_c']^{-1}\left(e^{\rho t}\, J_w\right)$$

L'équation de Hamilton–Bellman–Jacobi (HBJ) décrit l'évolution optimale du système dans le temps:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H^* = 0 \tag{2.9}$$

Stationnarité La stationnarité implique la séparabilité de l'argument temporel dans la fonction valeur qui prend alors la forme:

$$J_t(w, x, \kappa) = e^{-\rho t} I(w, x, \kappa) \tag{2.10}$$

La variable temps est ainsi éliminée et l'équation de Hamilton–Bellman–Jacobi (2.9) prend la forme:

$$-\rho I + \mathcal{H}^* = 0 \tag{2.11}$$

Par $\mathcal{H}^*$ on a noté le Hamiltonien stationnaire optimisé qui s'obtient à partir de l'Hamiltonien optimisé H^* donné par (2.8) en éliminant le temps t.[4]

[4]Formellement, ce passage consiste à remplacer partout J par I et à passer à la limite $t \to 0$ dans (2.8).

Transformation de l'espace des variables d'état Afin d'étudier l'influence indirecte du risque de la taille du flux κ il convient de résoudre l'équation (2.11). On pose:

$$y \equiv I_w(w, x, \kappa) \tag{2.12}$$

d'où, en inversant formellement:

$$\begin{aligned} w &= I_w^{-1}(y, x, \kappa) \\ &\equiv \Psi(y, x, \kappa) \end{aligned} \tag{2.13}$$

La transformation de l'espace des variables d'état $\{w, x, \kappa\} \rightarrow \{y, x, \kappa\}$ est obtenue en résolvant le système de neuf équations, obtenu en dérivant la relation (2.13) par rapport à y, x et κ. On obtient:

$$\begin{aligned}
I_{ww} &\rightarrow \frac{1}{\Psi_y} \\
I_{wx} &\rightarrow -\frac{\Psi_x}{\Psi_y} \\
I_{w\kappa} &\rightarrow -\frac{\Psi_\kappa}{\Psi_y} \\
I_{www} &\rightarrow -\frac{\Psi_{yy}}{{\Psi_y}^3} \\
I_{wwx} &\rightarrow \frac{\Psi_x \Psi_{yy} - \Psi_y \Psi_{yx}}{{\Psi_y}^3} \\
I_{ww\kappa} &\rightarrow \frac{\Psi_\kappa \Psi_{yy} - \Psi_y \Psi_{y\kappa}}{{\Psi_y}^3} \\
I_{wxx} &\rightarrow \frac{2\Psi_x \Psi_y \Psi_{yx} - \Psi_y^2 \Psi_{xx} - \Psi_x^2 \Psi_{yy}}{\Psi_y^3} \\
I_{w\kappa\kappa} &\rightarrow \frac{2\Psi_\kappa \Psi_y \Psi_{y\kappa} - \Psi_y^2 \Psi_{\kappa\kappa} - \Psi_\kappa^2 \Psi_{yy}}{\Psi_y^3} \\
I_{wx\kappa} &\rightarrow \frac{\Psi_x \Psi_y \Psi_{y\kappa} + \Psi_\kappa \Psi_y \Psi_{yx} - \Psi_y^2 \Psi_{x\kappa} - \Psi_\kappa \Psi_x \Psi_{yy}}{\Psi_y^3}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

ainsi que les deux conditions supplémentaires:

$$\begin{aligned} w &\rightarrow \Psi \\ I_w &\rightarrow y \end{aligned}$$

On remarque bien une *symétrie* entre x et κ dans (2.14) qui se manifeste deux fois dans les expressions donnant les dérivées doubles I_{wx} et $I_{w\kappa}$ ainsi

que les dérivées triples I_{wxx} et $I_{w\kappa\kappa}$. La dérivée triple[5] $I_{wx\kappa}$ joue le rôle de l'axe de cette symétrie.

Linéarisation de l'équation HBJ La mise en oeuvre de la technique de remplacement consiste à dériver l'équation de Hamilton–Bellman–Jacobi par rapport à w afin de ne laisser que des dérivées données par (2.14). Pour $\rho = r$, le cas particulier qui sera étudié en détail dans les sections qui suivent, on obtient:[6]

$$-[u_c']^{-1}(I_w)\, I_{ww} + \alpha(x_p - x)\, I_{wx} + \mu_\kappa I_{w\kappa} + \left(\kappa x^2 + rw\right) I_{ww}$$

$$+\frac{\sigma_x^2}{2}\left(\frac{I_{wx}^2}{I_{ww}^2} I_{www} - 2\frac{I_{wx}}{I_{ww}} I_{wwx} + I_{wxx}\right) + \frac{\sigma_\kappa^2}{2}\left(\frac{I_{w\kappa}^2}{I_{ww}^2} I_{www} - 2\frac{I_{w\kappa}}{I_{ww}} I_{ww\kappa} + I_{w\kappa\kappa}\right)$$

$$+\left(\frac{I_w I_{w\kappa} I_{www}}{I_{ww}^2} - \frac{I_w I_{ww\kappa}}{I_{ww}} - I_{w\kappa}\right)\pi + \frac{1}{\sigma_\kappa^2}\left(\frac{I_w^2 I_{www}}{2 I_{ww}^2} - I_w\right)\pi^2 = 0 \qquad (2.15)$$

La transformation (2.14) permet ensuite d'écrire (2.15) comme:

$$\alpha(x_p - x)\,\Psi_x + \mu_\kappa\,\Psi_\kappa + \frac{\sigma_x^2}{2}\,\Psi_{xx} + \frac{\sigma_\kappa^2}{2}\,\Psi_{\kappa\kappa} - r\,\Psi - \kappa x^2 + [u_c']^{-1}(y)$$

$$+\frac{1}{\sigma_\kappa^2}\left(y\Psi_y + \frac{1}{2}y^2\Psi_{yy}\right)\pi^2 - \left(\Psi_\kappa + y\Psi_{y\kappa}\right)\pi = 0 \qquad (2.16)$$

On remarque que cette dernière équation est maintenant linéarisée.

Remarque 1 *Couvertures optimales et prime de risque*
De la même manière que l'équation HBJ on transforme à l'aide de (2.14) les expressions (2.5), (2.6) et (2.7) donnant le couvertures optimales et la prime de risque. On obtient:

$$f^* = \Psi_x \qquad (2.17)$$

$$g^* = -\frac{\pi}{\sigma_\kappa^2} y\Psi_y + \Psi_\kappa \qquad (2.18)$$

$$\pi = \sigma_\kappa^2 \frac{\Psi_\kappa}{y\Psi_y} \qquad (2.19)$$

[5]Ainsi que, d'une façon moins remarquable, les dérivées double I_{ww}, simple I_w et la variable w elle-même.

[6]Une équation analogue peut être obtenue dans le cas où $\rho \neq r$.

Remarque 2 *Solution du problème*
Le problème posé dans cette section implique la résolution simultanée des équations linéaires (2.16) et (2.19) avec comme solutions les fonctions Ψ et π. Une telle démarche se heurte cependant au problème de non-linéarité. L'introduction de (2.19) dans (2.16) transforme les deux derniers termes de (2.16) en:

$$\sigma_\kappa^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\Psi_\kappa^2 \Psi_{yy}}{\Psi_y^2} - \frac{\Psi_\kappa \Psi_{y\kappa}}{\Psi_y} \right]$$

Dans la section suivante nous allons donc opter pour une démarche itérative afin de dériver la fonction Ψ qui nous intéresse ici le plus, car c'est elle qui permet d'expliciter la couverture du risque de change $f^* = \Psi_x$.

2.4 Solution du modèle pour le marché incomplet

2.4.1 Contrainte budgétaire

Remarquons d'abord que le processus de richesse (2.1) peut être exprimé sous une forme intégrale.

Proposition 1 *Pour tout $t \geq 0$ la richesse accumulée de l'entreprise à l'instant t est égale à:*

$$w_t = E_t^Q \int_t^\infty e^{-r(s-t)} c_s ds - E_t^Q \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \kappa_s x_s^2 ds \tag{2.20}$$

où:

$$L_t = \exp\left\{ - \int_0^t \frac{\pi(x_s, \kappa_s)}{\sigma_\kappa} dz_s^{(\kappa)} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\pi(x_s, \kappa_s)^2}{\sigma_\kappa^2} ds \right\} \tag{2.21}$$

définit la mesure de probabilité Q neutre au risque de taille, équivalente à la mesure de probabilité réelle P.

Démonstration: Voir Annexe 2.A. ∎

Interprétation Situons nous dans le marché complet où $\pi = 0$ implique que Q et P sont identiques. Dans le futur ($s > t$) les encaisses w_t accumulées à l'instant t seront payées aux actionnaires sous forme de dividendes. Ces dernières comprendront aussi les apports futurs résultant de l'activité économique (flux κx^2).

En d'autres termes, l'espérance du flux actualisé des dividendes futurs doit être égale à la richesse de l'entreprise *plus* l'espérance du flux actualisé des revenus futurs affectés par les variations du taux de change.

Si $\pi \neq 0$, les opérateurs des espérances conditionnelles $E_t^Q[.]$ dans (2.20) se calculent sous la probabilité Q équivalente à P, définie par la dérivée de Radon-Nikodym L_t. Pour tout $s > t$ et tout événement $A(s)$ on a $E_t^Q[1_{A(s)}] = E_t^P[L_s 1_{A(s)}]$. Q est la probabilité ajustée par la prime de risque π imposée par le marché si celui-ci est incomplet. La densité L_t définit ce changement de probabilité par la relation $dQ = L_t dP$. En effet, on vérifie que si le marché est complet et l'entreprise peut se couvrir contre le risque de taille, la prime de risque disparaît $\pi = 0$. Ceci implique $L_t = 1$ et Q est alors la même mesure de probabilité que la probabilité réelle P.

Le fait que l'entreprise puisse se couvrir contre les risques de change et de taille n'a pas d'impact économique sur w_t. En effet, les couvertures f et g ne sont pas présentes dans (2.20). En d'autres termes la couverture n'augmente pas la valeur de l'entreprise. Seulement la richesse de départ (accumulée en t) et le flux actualisé des cash-flows futurs résultant de l'activité de l'entreprise sont pertinents pour ceux qui ont droit aux dividendes.

2.4.2 Méthode de solution par itérations

Afin d'obtenir la solution du problème en marchés incomplets, il convient de déterminer, pour chaque $t \geq 0$ et sous les conditions d'optimalité, les encaisses w_t de l'entreprise et la prime de risque π_t fixée par le marché. La richesse w_t doit satisfaire la contrainte (2.20). Si en plus l'entreprise suit une politique optimale de couverture alors w_t est équivalente à la fonction Ψ. On procède au calcul de la fonction Ψ et de la prime de risque π par itérations successives. A chaque étape on résout le problème en marchés complets et on applique ensuite le principe de *fictitious completion* afin d'obtenir la solution pour le marché incomplet:

- **Etape 0 – marché complet:** On pose $\pi = \pi^{(0)} = 0$. On utilise cette valeur ainsi que des conditions d'optimalité pour le marché complet afin d'obtenir $\Psi^{(0)}$. La fonction $\Psi^{(0)}$ est la vraie solution du problème pour le marché complet. Elle permet de déterminer les politiques de couverture $f^{*(0)}$ et $g^{*(0)}$ ainsi que le paiement des dividendes $c^{*(0)}$ optimaux.

- **Etape 1 – marché incomplet:** En principe, il faut déterminer simultanément π et Ψ étant donné les conditions d'optimalité et la contrainte $g = 0$. Ici on procède par étapes. On suppose que la première approximation de π est $\pi^{(0)} = 0$. On considère que $\Psi^{(0)}$ est alors la première approximation de la vraie fonction Ψ pour le marché incomplet. Avec $\Psi^{(0)}$ et l'équation (2.19) on détermine la prime de risque

$\pi^{(1)}$ nécessaire pour éliminer la couverture du risque de taille κ:

$$\pi^{(1)} = \sigma_\kappa^2 \frac{\Psi_\kappa^{(0)}}{y\Psi_y^{(0)}} \tag{2.22}$$

Avec $\pi^{(1)}$ on reconsidère le problème du marché fictivement complété. Comme pour Etape 0, on utilise cette valeur de prime de risque ainsi que des conditions d'optimalité pour le marché complet afin d'obtenir $\Psi^{(1)}$. La fonction $\Psi^{(1)}$ est la vraie solution du problème pour le marché fictivement complété avec des contrats à terme sur la taille du flux incorporant la prime de risque $\pi^{(1)}$ due à l'incomplétude. On utilise ensuite $\Psi^{(1)}$ afin de déterminer les politiques de couverture $f^{*(1)}$ et $g^{*(1)}$ ainsi que le paiement des dividendes $c^{*(1)}$ optimaux. On compare les politiques de couverture:

1. Couverture du risque de change: $f^{*(0)}$ pour le marché complet avec $f^{*(1)}$ pour le marché fictivement complété.
2. Couverture du risque de taille: $g^{*(0)}$ pour le marché complet avec $g^{*(1)}$ pour le marché fictivement complété.

- **Etape 2 – marché incomplet:** On répète la procédure décrite à l'Etape 1, en considérant que $\Psi^{(1)}$ est alors la première approximation de la vraie fonction Ψ pour le marché incomplet. On recalcule notamment la nouvelle prime de risque $\pi^{(2)}$. La procédure permet d'obtenir $\Psi^{(2)}$, $f^{*(2)}$, $g^{*(2)}$ et $c^{*(2)}$.

- **Etape 3 et suivantes:** On répète la procédure itérativement pour obtenir une suite des solutions:

$$\{\pi^{(n)}, \Psi^{(n)}, f^{*(n)}, g^{*(n)}, c^{*(n)}\}_{n=0}^{\infty}$$

2.4.3 Etape 0 : solution pour le marché complet

Dans le marché complet $\pi = \pi^{(0)} = 0$. On résout alors le problème de choix optimal des couvertures et de politique de versement des dividendes. On obtient:

Proposition 2 *Si les marchés sont complets, le paiement des dividendes optimal $c_t^{*(0)}$ est une fonction déterministe du temps. On note:*

$$c_t^{*(0)} = \mathcal{C}(t) \tag{2.23}$$

En particulier, si $\rho = r$, le paiement des dividendes est constant dans le temps ce qu'on note: $C(t) = C$. Si l'entreprise suit une politique de couverture optimale, sa richesse à l'instant t est donnée par:[7]

$$\begin{aligned}\Psi^{(0)}(x_t, \kappa_t) &= \frac{C}{r} - \left[\frac{\mu_\kappa}{(2\alpha+r)^2} + \frac{\kappa_t}{2\alpha+r}\right](x_t - x_p)^2 \\ &\quad -2\,x_p\left[\frac{\mu_\kappa}{(\alpha+r)^2} + \frac{\kappa_t}{\alpha+r}\right](x_t - x_p) \\ &\quad -\frac{\mu_\kappa}{r^2}\left[x_p^2 + \frac{2(\alpha+r)\sigma_x^2}{(2\alpha+r)^2}\right] - \frac{\kappa_t}{r}\left[x_p^2 + \frac{\sigma_x^2}{2\alpha+r}\right] \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Les couvertures optimales sont alors données par:

$$g^{*(0)} = -\left\{\frac{1}{2\alpha+r}(x_t - x_p)^2 + \frac{2\,x_p}{\alpha+r}(x_t - x_p) + \frac{1}{r}\left(x_p^2 + \frac{\sigma_x^2}{2\alpha+r}\right)\right\} \qquad (2.25)$$

$$f^{*(0)} = -2\left\{\left[\frac{\mu_\kappa}{(2\alpha+r)^2} + \frac{\kappa_t}{2\alpha+r}\right](x_t - x_p) + x_p\left[\frac{\mu_\kappa}{(\alpha+r)^2} + \frac{\kappa_t}{\alpha+r}\right]\right\} \qquad (2.26)$$

Démonstration: Voir Annexe 2.B. ∎

Remarques Quelques remarques s'imposent en ce qui concerne les couvertures optimales. Comme prévu, les deux prennent des valeurs négatives – il s'agit donc de la vente à terme. D'autre part:

- La couverture de la taille du flux $g^{*(0)}$:
  - ne dépend pas du niveau κ_t de la taille du flux, ni des paramètres de processus suivi par celle-ci;
  - est affectée par le niveau x_t du taux de change – c'est une fonction quadratique de l'éloignement par rapport au taux de change de parité $h \equiv (x_t - x_p)$;
  - est asymétrique autour du niveau de parité du taux de change x_p et l'entreprise se couvre moins contre le risque de taille κ_t si le taux de change est en dessous du niveau de parité $x_t < x_p$;
  - s'accroît avec la volatilité σ_x du taux de change;
  - ne dépend pas de la volatilité σ_κ.

[7] Voir aussi annexe 2.B. Si $\rho = r$ alors: $\int_t^\infty e^{-r(s-t)}C(s)ds = \frac{C}{r}$. Ce terme ne dépend pas explicitement de t.

- La couverture du taux de change $f^{*(0)}$:
  - dépend du niveau x_t du taux de change - c'est une fonction linéaire de l'éloignement $h = (x_t - x_p)$;
  - est affectée par le niveau κ_t de la taille du flux - c'est une fonction linéaire en κ_t et en dérive μ_κ;
  - est asymétrique autour du niveau de parité du taux de change x_p et l'entreprise se couvre moins contre le risque de change x_t si le taux de change est en dessous du niveau de parité $x_t < x_p$;
  - ne dépend pas de la volatilité σ_x du taux de change;[8]
  - ne dépend pas de la volatilité σ_κ.

Par ailleurs, en prenant $\mu_\kappa = 0$, on obtient la même couverture du risque de change que celle dérivée dans Wojakowski [56] où $\kappa_t = \kappa \in \Re^+$ est une constante. Enfin notons aussi que:

Proposition 3 *Si $\rho = r$ on obtient les mêmes valeurs des couvertures $f^{*(0)}$ et $g^{*(0)}$ en résolvant directement l'équation de HBJ linéarisée (2.16) à l'aide du théorème de Feynman-Kac.*

Démonstration: Voir Annexe 2.C. ∎

2.4.4 Etape 1 : solution pour le marché incomplet

Tout d'abord déterminons la prime de risque $\pi^{(1)}$ donnée par équation (2.22) qui élimine la couverture du risque de taille. On obtient:

Proposition 4 *Dans le marché fictivement complété la prime de risque requise pour éliminer la couverture du risque de taille ne dépend pas du niveau du risque κ_t. La prime de risque est une fonction séparable multiplicativement en t et en x_t et quadratique par rapport au niveau du taux de change x_t:*

$$\begin{aligned} \pi_t^{(1)} &= \pi^{(1)}(x_t, t) \\ &= \sigma_\kappa^2 \mathcal{F}(t)\, g^{*(0)}(x_t) \end{aligned} \tag{2.27}$$

où:

$$\mathcal{F}(t) = \left[\int_t^\infty e^{-(2r-\rho)(s-t)} \frac{u_c'(C_t)}{u_{cc}''(C_s)}\, ds \right]^{-1} \tag{2.28}$$

[8] On obtient un tel résultat car l'évolution de la richesse w et celle du taux de change x sont parfaitement corrélées dans le modèle.

et $C_t = C(t)$ est donnée par équation (2.23). Par ailleurs, la prime de risque est toujours non-négative:

$$\pi_t^{(1)} \geq 0 \tag{2.29}$$

Démonstration: Pour l'équation (2.27) voir Annexe 2.D. La preuve de la relation (2.29) est évidente vu la concavité de la fonction d'utilité $u(.)$ et la négativité de $g^{*(0)}$. ∎

Remarque 1 Pour $s \geq t$ on peut introduire l'aversion pour le risque *intertemporelle*:

$$\mathcal{A}_t^s \equiv -\frac{u''_{cc}(c_s)}{u'_c(c_t)}$$

La fonction $\mathcal{F}(t)$ est alors une *moyenne harmonique continue* des aversions intertemporelles $\mathcal{A}_t^s$ actualisées en t:

$$\mathcal{F}(t) = -\frac{1}{\int_t^\infty e^{-(2r-\rho)(s-t)} \frac{1}{\mathcal{A}_t^s}\, ds}$$

Cette fonction peut donc s'interpréter comme une aversion intertemporelle moyenne pour le risque, évaluée à l'instant t pour la période future.

Remarque 2 Si $\rho = r$ alors $C_t = C$ est constante dans le temps, ce qui implique l'invariabilité temporelle pour $\mathcal{F}(t)$. On obtient:

$$\pi^{(1)}(x_t) = -r\,\sigma_\kappa^2\,\mathcal{A}\,g^{*(0)}(x_t) \tag{2.30}$$

où:

$$\mathcal{A} = -\frac{u''_{cc}(C)}{u'_c(C)} \tag{2.31}$$

est l'aversion absolue pour le risque, constante dans le temps.

On aperçoit donc que la prime de risque est directement proportionnelle à la taille de la couverture que l'entreprise aurait pris en marché complet. C'est une correspondance directe et linéaire: plus $g^{*(0)}$ est grand, plus la prime $\pi^{(1)}$ augmente. La proportionnalité inclut trois effets:

1. Le taux d'actualisation r: plus celui-ci est grand, plus la prime de risque est élevée. En d'autres termes, moins l'argent en francs nominaux de demain vaut aujourd'hui, plus l'entreprise doit payer aujourd'hui pour couvrir les risques qu'elle court demain.

2. La volatilité du risque de taille σ_κ, qui mesure la quantité du risque.

3. L'aversion absolue pour le risque $\mathcal{A} \in \Re^+$. Plus l'aversion au risque est grande, plus la prime de risque est importante. Etant donné que par hypothèse c'est le marché qui détermine la prime de risque, il pondérera les aversions au risque de toutes les entreprises. Dans ce qui suit on considérera donc que l'aversion au risque donnée par (2.31) est une aversion moyenne.

Remarque 3 Si $\rho \neq r$ l'aversion au risque peut évoluer à travers le temps. Cependant, même si $u(.)$ est une fonction CARA il est alors plus ambigu d'introduire une aversion variable $\mathcal{A}_t$ car il faudrait considérer une aversion au risque intertemporelle $\mathcal{A}_t^s = -u''(\mathcal{C}_s)/u'(\mathcal{C}_t)$ pour tout $s > t$, pondérée par des facteurs exponentiels dans (2.28).

Remarque 4 Dans ce qui suit on supposera $\rho = r$ pour simplifier les calculs. La prime de risque $\pi_t^{(1)}$ n'est alors plus une fonction explicite du temps et uniquement une fonction quadratique du taux de change x_t. On utilisera ainsi les symboles A, B et C pour désigner les coefficients de cette fonction:

$$\pi_t^{(1)} = \pi^{(1)}(x_t) = Ax_t^2 + Bx_t + C \tag{2.32}$$

où

$$A = \sigma_\kappa^2 \mathcal{A} \frac{r}{2\alpha + r}$$

$$B = \sigma_\kappa^2 \mathcal{A} \frac{2\alpha r}{(2\alpha + r)(\alpha + r)} x_p$$

$$C = \sigma_\kappa^2 \mathcal{A} \left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha + r} + \frac{2\alpha^2}{(2\alpha + r)(\alpha + r)} x_p^2 \right)$$

Remarque 5 Avec les notations ci-dessus les processus d'Itô décrivant la dynamique du taux de change x et de la taille κ obéissent, sous la probabilité taille-neutre Q, aux équations différentielles stochastiques suivantes:

$$\begin{aligned} dx_t &= \alpha(x_p - x_t)dt + \sigma_x dz_t^{(x)} \\ d\kappa_t &= \left(\mu_\kappa - \pi^{(1)}(x_t)\right) dt + \sigma_\kappa d\tilde{z}_t^{(\kappa)} \end{aligned} \tag{2.33}$$

où $\tilde{z}_t^{(\kappa)}$ est un mouvement brownien sous Q.

Calcul de la fonction $\Psi^{(1)}$

Nous pouvons maintenant résoudre le problème pour le marché incomplet. Nous allons supposer que la mesure Q est définie par $\pi^{(0)}$ et la densité L_t. En plus, toujours dans l'optique du calcul des couvertures, nous allons poser $\rho = r$.[9] Trouvons d'abord la fonction $\Psi^{(1)}$. D'après (2.20) on a:

$$\Psi^{(1)} = E_t^Q \int_t^\infty e^{-r(s-t)} c_s ds - E_t^Q \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \kappa_s x_s^2 ds \tag{2.34}$$

Le premier terme intégral dans cette équation est calculé sous la probabilité Q, laquelle dépend de l'évolution du taux de change par le biais de la prime de risque $\pi(x)$. Dans le cas général il est impossible de calculer ce terme de manière explicite, sauf pour quelques fonctions d'utilité particulières, comme la fonction d'utilité logarithme ou la fonction d'utilité exponentielle . Ces fonctions n'ont cependant pas de bonnes propriétés intertemporelles. Nous allons donc, dans les sections qui suivent, étudier un exemple basé sur la fonction $u(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}$ et une procédure numérique itérative.[10] Il est aussi à noter ici que l'évolution du paiement des dividendes dans le marché incomplet n'est plus constante dans le temps dans le cas général, même si $\rho = r$.

Le second terme intégral dans (2.34) peut cependant être calculé de manière explicite, moyennant l'utilisation des moments du processus Ornstein-Uhlenbeck. En rentrant l'opérateur d'espérance sous l'intégrale on obtient:

$$-\int_t^\infty e^{-r(s-t)} E_t^Q[\kappa_s x_s^2] ds \tag{2.35}$$

Il s'agit maintenant de trouver $E_t^Q[\kappa_s x_s^2]$. Les processus x et κ ne sont plus indépendants sous Q étant donné que dans le drift de κ il apparaît la prime de risque π laquelle est fonction de x. Le lemme d'Itô appliqué à la fonction κx^2 donne:

$$d(\kappa x^2) = \left[\sigma_x^2 \kappa + 2\alpha(x_p - x)\kappa x + [\mu_\kappa - \pi(x)]x^2\right] dt + \sigma_\kappa x^2 d\tilde{z}^{(\kappa)} + 2\sigma_x \kappa x dz^{(x)}$$

où on n'a pas explicité le terme $2x\sigma_x\sigma_\kappa\, dz^{(x)} d\tilde{z}^{(\kappa)}$ puisque les browniens $z^{(x)}$ et $\tilde{z}^{(\kappa)}$ sont indépendants sous Q. En appliquant la définition (2.32) de $\pi(x)$ comme fonction quadratique de x on obtient:

$$d(\kappa x^2) \;=\; \left[\sigma_x^2 \kappa + 2\alpha x_p\, \kappa x - 2\alpha\kappa x^2 + (\mu_\kappa - C)x^2 - Bx^3 - Ax^4\right] dt$$

[9] Une extension intéressante consisterait à étudier le cas $\rho \neq r$. Dans la présente recherche on met cependant l'accent sur les problèmes de couverture optimale et non pas sur le problème de répartition du dividende dans le temps.

[10] Voir Annexes 2.E et 2.F.

$$+ \quad \sigma_\kappa x^2 d\tilde{z}^{(\kappa)} + 2\sigma_x \kappa x \, dz^{(x)}$$

En multipliant les deux membres par $e^{2\alpha t}$, en réarrangeant les termes, en intégrant ensuite sur l'intervalle $[t, s]$ et en prenant l'espérance sous Q on obtient:

$$\begin{aligned} e^{2\alpha(s-t)} E_t^Q[\kappa_s x_s^2] &= \kappa_t x_t^2 \\ &+ \sigma_x^2 \int_t^s e^{2\alpha(u-t)} E_t^Q[\kappa_u] \, du \\ &+ 2\alpha x_p \int_t^s e^{2\alpha(u-t)} E_t^Q[\kappa_u x_u] \, du \\ &+ (\mu_\kappa - C) \int_t^s e^{2\alpha(u-t)} E_t^Q[x_u^2] \, du \\ &- B \int_t^s e^{2\alpha(u-t)} E_t^Q[x_u^3] \, du \\ &- A \int_t^s e^{2\alpha(u-t)} E_t^Q[x_u^4] \, du \end{aligned} \tag{2.36}$$

Il s'agit donc maintenant de déterminer les espérances conditionnelles $E_t^Q[.]$ présentes dans les intégrales. Les trois moments centraux conditionnels d'ordre $n \geq 2$ de x_s ($E_t^Q[x_s^n]$) peuvent être exprimés à l'aide de l'espérance conditionnelle $m \equiv E_t^Q[x]$ et la variance conditionnelle $v \equiv Var_t^Q[x_s]$ car x est un processus gaussien:

$$\begin{aligned} E_t^Q[x_s^2] &= m^2 + v \\ E_t^Q[x_s^3] &= m^3 + 3mv \\ E_t^Q[x_s^4] &= m^4 + 6m^2 v + 3v^2 \end{aligned}$$

Le seul calcul plus compliqué consiste à déterminer l'espérance conditionnelle "croisée" $E_t^Q[\kappa_s x_s]$. Comme précédemment on utilisera le lemme d'Itô qui appliqué à la fonction κx donne:

$$d(\kappa x) = \left[\alpha x_p \kappa - \alpha \kappa x + (\mu_\kappa - C)x - Bx^2 - Ax^3\right] dt + \sigma_x \kappa \, dz^{(x)} + \sigma_\kappa x \, d\tilde{z}^{(\kappa)}$$

On multiplie cette équation par $e^{\alpha t}$, on réarrange les termes, on intègre sur l'intervalle $[t, s]$ et on prend l'espérance sous Q pour obtenir:

$$e^{\alpha(s-t)} E_t^Q[\kappa_s x_s] = \kappa_t x_t$$

$$
\begin{aligned}
&+ \alpha x_p \int_t^s e^{\alpha(u-t)} E_t^Q[\kappa_u]\, du \\
&+ (\mu_\kappa - C) \int_t^s e^{\alpha(u-t)} E_t^Q[x_u]\, du \\
&- B \int_t^s e^{\alpha(u-t)} E_t^Q[x_u^2]\, du \\
&- A \int_t^s e^{\alpha(u-t)} E_t^Q[x_u^3]\, du
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

Enfin, il nous faut calculer $E_t^Q[\kappa_s]$, le terme qui est présent aussi bien dans le calcul de $E_t^Q[\kappa_s x_s]$ que dans celui de $E_t^Q[\kappa_s x_s^2]$. Etant donné que:

$$d\kappa = \left[(\mu_\kappa - C) - Bx - Ax^2\right] dt + \sigma_\kappa d\tilde{z}^{(\kappa)}$$

en suivant la démarche usuelle (intégration, espérance sous Q), on obtient:

$$
\begin{aligned}
E_t^Q[\kappa_s] &= \kappa_t + (\mu_\kappa - C)(s-t) \\
&- B \int_t^s E_t^Q[x_u]\, du \\
&- A \int_t^s E_t^Q[x_u^2]\, du
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

En comparant les expressions (2.36), (2.37) et (2.38) on aperçoit que le problème a une *structure récursive.* En remontant successivement à partir de la dernière expression (2.38) vers la première (2.36) puis en intégrant celle-ci sur l'intervalle $[t, \infty]$ selon la règle donnée par (2.35) on obtient la fonction $\Psi^{(1)}$. Cette démarche est présentée de manière détaillée dans l'annexe 2.E. La connaissance de la forme de cette fonction nous permet ensuite de calculer les couvertures optimales pour le marché incomplet. Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante:

Proposition 5 *Dans le marché incomplet, si l'entreprise suit une politique de couverture optimale du risque de change, sa richesse à l'instant t est donnée par:*

$$
\begin{aligned}
\Psi^{(1)} &= E_t^Q \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \mathcal{C}(s) ds \\
&- \left[\frac{\mu_\kappa}{(2\alpha + r)^2} + \frac{\kappa_t}{2\alpha + r}\right] (x_t - x_p)^2 \\
&- 2\, x_p \left[\frac{\mu_\kappa}{(\alpha + r)^2} + \frac{\kappa_t}{\alpha + r}\right] (x_t - x_p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\mu_\kappa}{r^2}\left[x_p^2 + \frac{2(\alpha+r)\sigma_x^2}{(2\alpha+r)^2}\right] - \frac{\kappa_t}{r}\left[x_p^2 + \frac{\sigma_x^2}{2\alpha+r}\right] \\
&+ \mathcal{A}\sigma_\kappa^2\left[\frac{8\alpha^2+14\alpha r+9r^2}{(4\alpha+r)r^2(2\alpha+r)^3}\sigma_x^4\right. \\
&\quad \left.+\frac{4(\alpha^3+3\alpha^2 r+5\alpha r^2+2r^3)}{r^2(\alpha+r)^2(2\alpha+r)^2}\sigma_x^2 x_p^2 + \frac{1}{r^2}x_p^4\right] \\
&+ 4\mathcal{A}\sigma_\kappa^2 x_p \frac{1}{(\alpha+r)^2}\left[\frac{3\alpha+4r}{(3\alpha+r)(2\alpha+r)}\sigma_x^2 + x_p^2\right](x_t - x_p) \\
&+ 2\mathcal{A}\sigma_\kappa^2 \frac{1}{(2\alpha+r)^2}\left[\frac{4(\alpha+r)}{(4\alpha+r)(2\alpha+r)}\sigma_x^2\right. \\
&\quad \left.+\frac{\alpha^2+6\alpha r+3r^2}{(\alpha+r)^2}x_p^2\right](x_t - x_p)^2 \\
&+ 4\mathcal{A}\sigma_\kappa^2 \frac{r}{(3\alpha+r)(2\alpha+r)(\alpha+r)} x_p (x_t - x_p)^3 \\
&+ \mathcal{A}\sigma_\kappa^2 \frac{r}{(4\alpha+r)(2\alpha+r)^2}(x_t - x_p)^4 \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

Démonstration: Voir Annexe 2.E. ∎

Remarques

1. La fonction valeur du marché incomplet $\Psi^{(1)}$ hérite de la fonction valeur du marché complet les 4 premiers termes.[11] Cependant, le premier terme comprenant l'intégration du paiement optimal des dividendes ne peut plus être calculé de manière explicite dans le marché incomplet. Le paiement optimal des dividendes dépend désormais de l'état du système (valeur du taux de change $x_t : t \geq 0$).

2. Cinq termes supplémentaires apparaissent dans (2.39). Ils ont été exprimés comme des termes polynômiaux en éloignement par rapport au taux de change de parité $h \equiv (x_t - x_p)$. Ces termes sont tous directement proportionnels à la volatilité du risque de taille σ_κ. On vérifie que si le risque de taille n'est plus présent ($\sigma_\kappa \to 0$), on retrouve alors la solution du marché complet ($\Psi^{(1)} \to \Psi^{(0)}$).

3. La même remarque s'impose dans le cas où l'aversion au risque "intertemporelle" est nulle, c'est à dire si $\mathcal{A} = 0$.

[11] Comparer les équations (2.24) et (2.39).

4. Les termes supplémentaires ne dépendent pas de μ_κ. L'incomplétude "agit" donc à travers la volatilité du risque de taille seulement. L'entreprise peut s'ajuster à la tendance du risque de taille, représentée par le paramètre μ_κ. Ceci est faisable grâce à la couverture du risque de change, indépendamment de la présence ou non de l'incomplétude. $f^{*(0)}$ incorpore déjà cet ajustement à travers sa dépendance de μ_κ.

2.4.5 Etape 2 et suivantes

Un exemple numérique illustre la convergence de la méthode itérative pour l'étape 2 et suivantes. Il sera étudié dans la section suivante.

2.5 Un exemple: fonction d'utilité CRRA

Dans cette section seront présentés les principaux résultats de la procédure itérative, développée dans l'annexe 2.F pour la fonction d'utilité puissance $u(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}$. Cette fonction se caractérise par une aversion au risque relative constante et égale à $1 - \gamma$.

Sur les figures 2.1 et 2.2 ainsi que dans le tableau 2.1 ont été présentés les valeurs successives de la couverture du risque de taille et celle du risque de change. On aperçoit qu'au cours d'environ 10 étapes la couverture du risque de taille tend vers zéro, tandis que celle du risque de change tend à se stabiliser.

Dans le marché incomplet la couverture du risque de change est réduite d'environ 38.2% par rapport à celle en marché complet.

2.6 Conclusion

En conclusion on peut énoncer que:

- L'incomplétude diminue la couverture du risque de change. En valeur absolue l'entreprise *vend moins de devises à terme* dans un marché incomplet.

Le modèle, outre de fournir la justification pour une couverture non-entière observée en réalité,[12] peut donner une explication des comportements spéculatifs des entreprises. Dans des cas extrêmes, par exemple pour un risque non-couvrable élevé: $\sigma_\kappa \gg 0$ le signe de la couverture du risque couvrable

[12]Voir par exemple *Wharton/CIBC Wood Gundy 1995 Survey of Derivatives Usage by U.S. Non-financial Firms* [2].

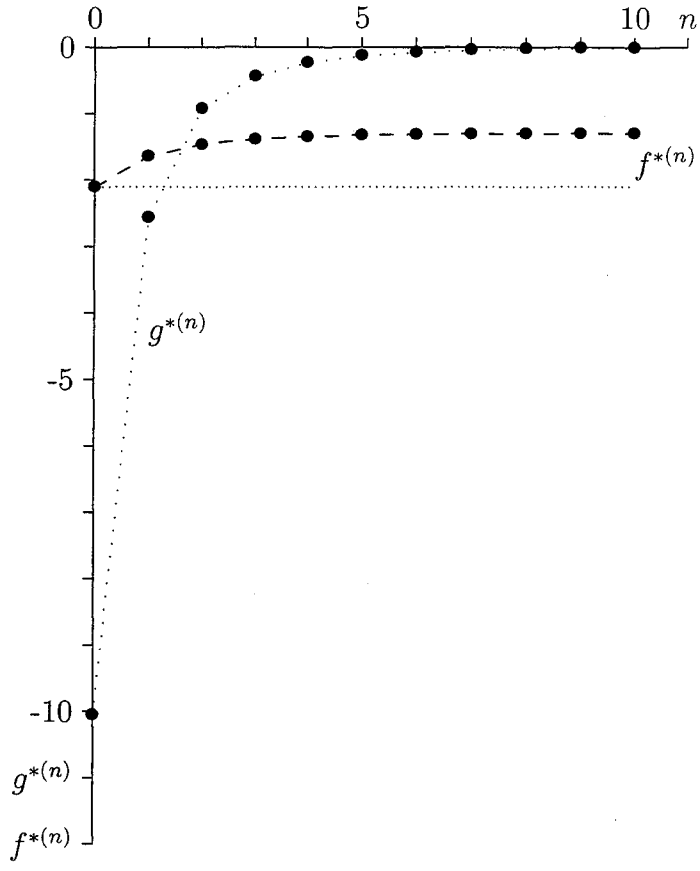


FIG. 2.1: Réduction de la couverture du risque de change $f^{*(n)}$ due à l'incomplétude et la convergence de la méthode itérative en $n = 10$ étapes (valeurs absolues).

Etape n	Couverture change $f^{*(n)}$	Réduction en %	Couverture taille $g^{*(n)}$	Réduction en %
0	-2.10526		-10.0556	
1	-1.64513	21.86%	-2.57118	74.43%
2	-1.46876	30.23%	-0.92966	90.76%
3	-1.39122	33.92%	-0.44167	95.61%
4	-1.35153	35.80%	-0.23391	97.67%
5	-1.32953	36.85%	-0.13084	98.70%
6	-1.31690	37.45%	-0.07550	99.25%
7	-1.30952	37.79%	-0.04445	99.56%
8	-1.30518	38.00%	-0.02658	99.74%
9	-1.30260	38.13%	-0.01615	99.84%
10	-1.30107	38.20%	-0.01001	99.90%

TAB. 2.1: Réduction de la couverture du risque de change $f^{*(n)}$ due à l'incomplétude et la convergence de la méthode itérative en $n = 10$ étapes (valeurs absolues et relatives).

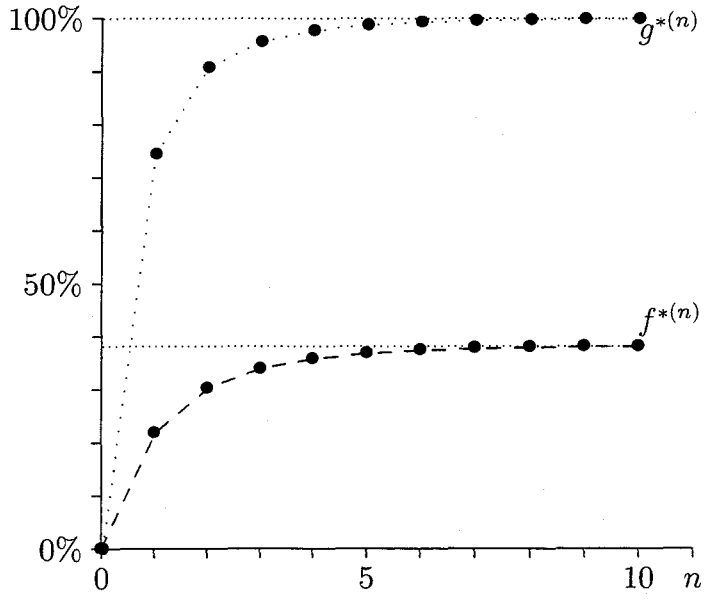


FIG. 2.2: Réduction de la couverture du risque de change $f^{*(n)}$ due à l'incomplétude et la convergence de la méthode itérative en $n = 10$ étapes (valeurs relatives).

peut devenir *positif*. Si f^* commence à être positif, l'entreprise achète des devises à terme au lieu de les vendre.

Bien que le modèle développé dans cet article apporte des conclusions intéressantes, il semble que plusieurs sujets mériteraient une étude plus approfondie. Par exemple on pourrait relâcher l'hypothèse sur l'égalité du taux d'escompte inter-temporel au taux sans risque. D'autre part on pourrait voir en quoi la solution simultanée pour Ψ et π (par exemple par une résolution numérique du système des équations différentielles partielles non-linéaires) diffère du résultat obtenu ici par une méthode itérative. D'autres processus gouvernant l'évolution du risque de change et celui de taille[13] pourraient également être étudiés dans le cadre d'un modèle numérique, similaire au notre.

[13]Par exemple, un taux de change gouverné par un processus racine carrée avec tendance de retour vers le niveau de parité: $dx = \alpha(x - x_p)dt + \sigma\sqrt{x}dz$ ou bien un processus géométrique avec tendance de retour vers le niveau de parité: $dx = \alpha(x - x_p)\,x\,dt + \sigma\,x\,dz$. Voir également Pindyck et Dixit [22, page 161] pour un exemple numérique d'utilisation de ce type des processus et les liens avec les fonctions confluantes hypergéométriques.

Annexes

2.A Démonstration de la Proposition 1

Soit la contrainte budgétaire donnée par (2.1):

$$dw_t = \left(rw_t + \kappa_t x_t^2 + g_t\pi_t - c_t\right)dt + f_t\sigma_x\, dz_t^{(x)} + g_t\sigma_\kappa\, dz_t^{(\kappa)}$$

On multiplie la contrainte budgétaire (2.1) par e^{-rt}. Sachant que $d(e^{-rt}w_t) = e^{-rt}dw_t - e^{-rt}rw_t dt$ on obtient:

$$d(e^{-rt}w_t) = e^{-rt}\left[\kappa_t x_t^2 - c_t\right]dt + e^{-rt}f_t\sigma_x dz_t^{(x)} + e^{-rt}g_t\left[\pi_t dt + \sigma_\kappa dz_t^{(\kappa)}\right] \quad (2.40)$$

Soit $\{h_t, 0 \le t \le T\}$ un processus adapté et borné[14] défini par:

$$h_t = -\frac{\pi_t}{\sigma_\kappa}$$

On définit alors la martingale exponentielle L_t comme:

$$L_t = \exp\left\{\int_0^t h_s dz_s^{(\kappa)} - \frac{1}{2}\int_0^t h_s^2 ds\right\} = \exp\left\{-\int_0^t \frac{\pi_s}{\sigma_\kappa}dz_s^{(\kappa)} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\pi_s^2}{\sigma_\kappa^2}ds\right\}$$

D'après le théorème de Girsanov multi-dimensionnel,[15] L_t définit la probabilité Q équivalente à P par $dQ = L_T dP$. En particulier, sous Q le processus $\tilde{z}_t^{(\kappa)}$ est un mouvement brownien tel que:

$$d\tilde{z}_t^{(\kappa)} = dz_t^{(\kappa)} - h_t dt = dz_t^{(\kappa)} + \frac{\pi_t}{\sigma_\kappa}dt$$

[14]Le processus π_t est adapté car les prix des contrats à terme instantanés sont déterminés en $t - dt$; c'est également un processus borné car sinon il existeraient des opportunités d'arbitrage sur des prix à terme infinis.

[15]Voir Karatzas et Shreve [35, page 191]. En employant la notation de Karatzas, on considère le brownien bi-dimensionnel: $Z = \{Z_t = (z_t^{(x)}, z_t^{(\kappa)})\}$ et le vecteur des processus adaptés mesurables: $X = \{X_t = (0, -\frac{\pi(x_t)}{\sigma_\kappa})\}$.

On réécrit la contrainte (2.40) sous Q:

$$d(e^{-rt}w_t) = e^{-rt}\left[\kappa_t x_t^2 - c_t\right]dt + e^{-rt}f_t\sigma_x dz_t^{(x)} + e^{-rt}g_t\sigma_\kappa d\tilde{z}_t^{(\kappa)}$$

En multipliant cette équation par e^{rt} et en intégrant sur l'intervalle $\{t, T\}$ on obtient:

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)}w_T - w_t &= \int_t^T e^{-r(s-t)}\left[\kappa_s x_s^2 - c_s\right]ds + \int_t^T e^{-r(s-t)}f_s\sigma_x dz_s^{(x)} \\ &+ \int_t^T e^{-r(s-t)}g_s\sigma_\kappa d\tilde{z}_s^{(\kappa)} \end{aligned}$$

En prenant l'espérance sous Q les deux derniers termes disparaissent:

$$E_t^Q e^{-r(T-t)}w_T - w_t = E_t^Q \int_t^T e^{-r(s-t)}\left[\kappa_s x_s^2 - c_s\right]ds \tag{2.41}$$

Introduisons la condition terminale suivante:

$$\lim_{T\to\infty} e^{-rT}E_t^Q[w_T] = 0 \tag{2.42}$$

Intuitivement on impose ici une sorte de condition de transversalité où la richesse terminale w_T ne peut pas s'accumuler plus rapidement que e^{rT}, étant donné que P et Q sont équivalentes. Elle doit être distribuée en totalité sous forme des dividendes si on considère un horizon suffisamment éloigné, ce qui du point de vue économique est tout à fait réaliste.[16] Le passage à la limite $T \to \infty$ dans (2.42) implique que (2.41) se transforme en:

$$w_t = E_t^Q \int_t^\infty e^{-r(s-t)}c_s ds - E_t^Q \int_t^\infty e^{-r(s-t)}\kappa_s x_s^2 ds$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition 1.

2.B Démonstration de la Proposition 2

Démonstration de l'équation (2.23) : On pose $\pi = 0$. Etant donné l'horizon temporel infini du problème la condition terminale disparaît. On a alors:

$$\begin{aligned} \max \quad & E_0 \int_0^\infty e^{-\rho s}u(c_s)ds \\ \text{s.c.} \quad & E_0 \int_0^\infty e^{-rs}c_s ds = w_0 + E_0 \int_0^\infty e^{-rs}\kappa_s x_s^2 ds \end{aligned}$$

[16] Pour une étude détaillée des conditions de passage à la limite $T \to \infty$, notamment des questions liés à la convergence, consulter l'article de Huang et Pagès [31].

où la contrainte sous forme intégrale résulte de l'équation (2.20) avec $t = 0$. Soit $\lambda > 0$ une constante positive. Le Lagrangien $\mathcal{L}$ du problème à l'instant initial $t = 0$ s'écrit:

$$\mathcal{L} = E_0 \int_0^\infty e^{-\rho s} u(c_s) ds + \lambda \left\{ w_0 + E_0 \int_0^\infty e^{-rs} \left[\kappa_s x_s^2 - c_s \right] ds \right\}$$

Pour tout $t \geq 0$ et tout $\omega \in \Omega$, la condition de premier ordre:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t(\omega)} = 0 \quad \forall t \geq 0 \ \ \forall \omega \in \Omega$$

donne, en supposant $\mathcal{L}$ concave et différentiable et tel que ses dérivées partielles s'obtiennent par dérivation sous l'opérateur d'intégration:[17]

$$\begin{aligned} c_t^{*(0)}(\omega) &= [u_c']^{-1} \left(\lambda e^{-(r-\rho)t} \right) \\ &\equiv \mathcal{C}(t) \end{aligned}$$

où $[u_c']^{-1}(.)$ est la fonction inverse de la dérivée de la fonction d'utilité. En particulier, pour $\rho = r$ il en résulte, qu'à l'optimum:

$$\begin{aligned} c_t^{*(0)}(\omega) &= [u_c']^{-1}(\lambda) \\ &\equiv \mathcal{C} \end{aligned} \tag{2.43}$$

A la forme de (2.43) on conclue que si l'entreprise suit une politique optimale, alors le paiement des dividendes $c_t^{*(0)}$ est déterministe et constant dans le temps si $\rho = r$. L'utilité marginale de la consommation se maintient alors à un niveau constant dans le temps.

Si $\rho > r$ alors $c_t^{*(0)}$ augmente dans le temps étant donné que $u(.)$ est concave. L'utilité marginale de la consommation diminue dans le temps. Si $\rho < r$ alors $c_t^{*(0)}$ décroît dans le temps et l'utilité marginale de la consommation augmente dans le temps. ∎

Démonstration de l'équation (2.24) : Si $\pi = 0$, en utilisant (2.20) et (2.23) on obtient:

$$\Psi^{(0)}(x_t, \kappa_t) = \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \mathcal{C}(s) ds - \int_t^\infty e^{-r(s-t)} E_t[\kappa_s x_s^2] ds \tag{2.44}$$

Puisque $\rho = r$, alors d'après (2.43) on a: $\mathcal{C}(t) = const. = \mathcal{C}$ et la première intégrale devient:

$$\begin{aligned} \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \mathcal{C}(s) ds &= \mathcal{C} \int_t^\infty e^{-r(s-t)} ds \\ &= \frac{\mathcal{C}}{r} \end{aligned}$$

[17] Voir par exemple *Méthodes mathématiques de la finance* de Demange G. et Rochet J.C. [20] et *Marchés Financiers en Temps Continu* de Dana R. et Jeanblanc-Picqué M. [18].

Nous allons maintenant expliciter la deuxième intégrale de l'équation (2.44). Etant donné que sous P l'évolution du taux de change x_t est indépendante[18] de l'évolution de la taille κ_t, on obtient:

$$E_t[\kappa_s x_s^2] = E_t[\kappa_s] E_t[x_s^2] \tag{2.45}$$

La première espérance dans (2.45) est égale à:

$$E_t[\kappa_s] = \kappa_t + \mu_\kappa (s-t)$$

La seconde espérance dans (2.45) s'obtient en utilisant la formule $\text{var}[x] = E[x^2] - E[x]^2$ ainsi que les deux premiers moments conditionnels du processus Ornstein-Uhlenbeck:

$$E_t[x_s] \equiv E[x_s|x_t] = x_t\, e^{-\alpha(s-t)} + x_p \left(1 - e^{-\alpha(s-t)}\right)$$

$$\text{var}_t[x_s] \equiv \text{var}\,[x_s|x_t] = \frac{\sigma_x^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(s-t)}\right)$$

En notant $\beta_s = \exp\{-\alpha(s-t)\}$ on obtient:

$$\begin{aligned} E_t[x_s^2] \equiv E[x_s^2|x_t] &= \text{var}_t[x_s] + E_t[x_s]^2 \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\alpha}\left(1 - \beta_s^2\right) + \left[x_t\,\beta_s + x_p\,(1-\beta_s)\right]^2 \\ &= \left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha} + x_p^2\right) + 2x_p\,(x_t - x_p)\,\beta_s + \left[(x_t - x_p)^2 - \frac{\sigma_x^2}{2\alpha}\right]\beta_s^2 \end{aligned}$$

Le dernier terme intégral dans (2.44) peut alors s'écrire comme la somme de deux intégrales I_1 et I_2:

$$\int_t^\infty e^{-r(s-t)} E_t[\kappa_s x_s^2]\, ds = I_1 + I_2$$

où:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_t^\infty e^{-r(s-t)}\kappa_t \left\{ \left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha} + x_p^2\right) + 2x_p\,(x_t - x_p)\,\beta_s \right. \\ &\qquad \left. + \left[(x_t - x_p)^2 - \frac{\sigma_x^2}{2\alpha}\right]\beta_s^2 \right\} ds \\ &= \kappa_t \left[\frac{1}{2\alpha + r}\,(x_t - x_p)^2 + \frac{2\,x_p}{\alpha + r}\,(x_t - x_p) + \frac{1}{r}\left(x_p^2 + \frac{\sigma_x^2}{2\alpha + r}\right)\right] \end{aligned}$$

[18] Par hypothèses faites dans le programme de maximisation initial (2.2).

et:

$$\begin{aligned} I_2 &= \mu_\kappa \int_t^\infty (s-t)e^{-r(s-t)} \left\{ \left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha} + x_p^2 \right) + 2x_p \left(x_t - x_p \right) \beta_s \right. \\ &\quad \left. + \left[(x_t - x_p)^2 - \frac{\sigma_x^2}{2\alpha} \right] \beta_s^2 \right\} ds \end{aligned}$$

Pour calculer I_2 on décompose $\frac{I_2}{\mu_\kappa}$ en:

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{\mu_\kappa} &= \left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha} + x_p^2 \right) \int_t^\infty (s-t)e^{-r(s-t)} ds \\ &\quad + 2x_p \left(x_t - x_p \right) \int_t^\infty (s-t)e^{-(\alpha+r)(s-t)} ds \\ &\quad + \left[(x_t - x_p)^2 - \frac{\sigma_x^2}{2\alpha} \right] \int_t^\infty (s-t)e^{-(2\alpha+r)(s-t)} ds \end{aligned}$$

Vu que pour tout $\lambda \neq 0$:

$$\int_t^\infty (s-t)e^{-\lambda(s-t)} ds = \frac{1}{\lambda^2}$$

étant donné que $r > 0$, $\alpha + r > 0$ et $2\alpha + r > 0$, on obtient:

$$\frac{I_2}{\mu_\kappa} = \left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha} + x_p^2 \right) \frac{1}{r^2} + 2x_p \left(x_t - x_p \right) \frac{1}{(\alpha+r)^2} + \left[(x_t - x_p)^2 - \frac{\sigma_x^2}{2\alpha} \right] \frac{1}{(2\alpha+r)^2}$$

d'où:

$$I_2 = \mu_\kappa \left\{ \frac{1}{(2\alpha+r)^2} \left(x_t - x_p \right)^2 + \frac{2\,x_p}{(\alpha+r)^2} \left(x_t - x_p \right) + \frac{1}{r^2} \left[x_p^2 + \frac{2(\alpha+r)\sigma_x^2}{(2\alpha+r)^2} \right] \right\}$$

Finalement on obtient:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \left[\frac{\mu_\kappa}{(2\alpha+r)^2} + \frac{\kappa_t}{2\alpha+r} \right] (x_t - x_p)^2 \\ &\quad + 2\,x_p \left[\frac{\mu_\kappa}{(\alpha+r)^2} + \frac{\kappa_t}{\alpha+r} \right] (x_t - x_p) \\ &\quad + \frac{\mu_\kappa}{r^2} \left[x_p^2 + \frac{2(\alpha+r)\sigma_x^2}{(2\alpha+r)^2} \right] + \frac{\kappa_t}{r} \left[x_p^2 + \frac{\sigma_x^2}{2\alpha+r} \right] \end{aligned}$$

et:

$$\Psi^{(0)}(x_t, \kappa_t) = \int_t^\infty e^{-r(s-t)} C(s) ds - (I_1 + I_2)$$

Pour $\rho = r$ le terme $C(s)$ est constant et égal à C. On obtient alors:

$$\Psi^{(0)}(x_t, \kappa_t) = \frac{C}{r} - (I_1 + I_2)$$

Dans le cas du marché complet la fonction $\Psi^{(0)}$ peut donc être calculée de manière analytique. ∎

Démonstration de l'équation (2.25) : La couverture du risque de taille s'obtient à l'aide de (2.18) en prenant $\pi = 0$ et $\Psi = \Psi^{(0)}$. ∎

Démonstration de l'équation (2.26) : La couverture du risque de change s'obtient à l'aide de (2.17) en prenant $\Psi = \Psi^{(0)}$ donnée par l'équation (2.24). ∎

2.C Démonstration de la Proposition 3

Il faut résoudre (2.16) avec $\pi = 0$. On obtient:

$$\alpha(x_p - x)\,\Psi_x + \mu_\kappa\,\Psi_\kappa + \frac{\sigma_x^2}{2}\,\Psi_{xx} + \frac{\sigma_\kappa^2}{2}\,\Psi_{\kappa\kappa} - r\,\Psi - \kappa x^2 + [u_c']^{-1}(y) = 0$$

Méthode de solution: séparation des variables. On cherche la solution sous la forme:

$$\Psi(y, x, \kappa) = \phi(y) - \xi(x, \kappa)$$

On obtient:

$$\alpha(x_p - x)\,\xi_x + \mu_\kappa\,\xi_\kappa + \frac{\sigma_x^2}{2}\,\xi_{xx} + \frac{\sigma_\kappa^2}{2}\,\xi_{\kappa\kappa} - r\,\xi + \kappa x^2 = [u_c']^{-1}(y) - r\psi(y) = C_1$$

où C_1 est la constante de séparation. Il s'agit maintenant de résoudre deux équations:

$$[u_c']^{-1}(y) - r\psi(y) = C_1$$

dont la solution s'obtient immédiatement:

$$\psi(y) = \frac{[u_c']^{-1}(y)}{r} - \frac{C_1}{r}$$

ainsi que:

$$\alpha(x_p - x)\,\xi_x + \mu_\kappa\,\xi_\kappa + \frac{\sigma_x^2}{2}\,\xi_{xx} + \frac{\sigma_\kappa^2}{2}\,\xi_{\kappa\kappa} - r\,\xi + \kappa x^2 = C_1$$

On applique le théorème de Feynman-Kac à l'expression:

$$\alpha(x_p - x)\,\xi_x + \mu_\kappa\,\xi_\kappa + \frac{\sigma_x^2}{2}\,\xi_{xx} + \frac{\sigma_\kappa^2}{2}\,\xi_{\kappa\kappa} = r\,\xi - \left(\kappa x^2 - C_1\right)$$

Ce théorème donne immédiatement la solution recherchée:

$$\begin{aligned}\xi(x,\kappa) &= E_t \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \left(\kappa x^2 - C_1\right) ds \\ &= E_t \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \kappa_s x_s^2 ds + E_t \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \left(-C_1\right) ds\end{aligned}$$

Le second terme est égal à:

$$E_t \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \left(-C_1\right) ds = -\frac{C_1}{r}$$

et va se simplifier dans Ψ. Le premier terme, vu que x_s et κ_s sont *indépendants*, est égal à:

$$E_t \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \kappa_s x_s^2 ds = \int_t^\infty e^{-r(s-t)} E_t[\kappa_s] E_t[x_s^2] ds$$

Vu la correspondance $y \rightleftharpoons \lambda \Longrightarrow [u_c']^{-1}(y) = C$ il suffit maintenant de calculer l'intégrale dans l'expression:

$$\Psi(y,x,\kappa) = \frac{C}{r} - \int_t^\infty e^{-r(s-t)} E_t[\kappa_s] E_t[x_s^2] ds$$

La suite des calculs est la même que celle dans la démonstration de la Proposition 2.

2.D Démonstration de la Proposition 4

Démonstration de l'équation (2.27) : D'après (2.22):

$$\pi^{(1)} = \sigma_\kappa^2 \frac{\Psi_\kappa^{(0)}}{y\Psi_y^{(0)}} \tag{2.46}$$

où $y = I_w^{(0)}$ par définition (2.12). Si $\rho = r$ on peut directement utiliser la propriété que $\Psi(y,x,\kappa)$ est séparable additivement en y et (x,κ). Cette propriété résulte de la forme de solution de l'équation HBJ: $\Psi(y,x,\kappa) = \phi(y) - \psi(x,\kappa)$. Dans le cas général $\rho \neq r$ on établit l'équivalence entre y et le multiplicateur de Lagrange λ.[19] D'après (2.43), (2.4) et (1.3) on a:

$$y_t = \lambda e^{-(r-\rho)t}$$

[19] A ce sujet consulter aussi Chow [13].

et:

$$\mathcal{C}_t = [u_c']^{-1}(y_t) \tag{2.47}$$

La dernière équation permet de récrire (2.24) sous la forme:

$$\begin{aligned}\Psi^{(0)}(y,x,\kappa) &= \int_t^\infty e^{-r(s-t)}[u_c']^{-1}(y_s)ds + const.(y_t) \\ &= \int_t^\infty e^{-r(s-t)}[u_c']^{-1}\left(y_t e^{-(r-\rho)(s-t)}\right)ds + const.(y_t)\end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\Psi_y^{(0)} = \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial y_t} = \int_t^\infty e^{-(2r-\rho)(s-t)}\frac{\partial}{\partial y_s}[u_c']^{-1}(y_s)ds$$

D'après le théorème de la dérivée de la fonction inverse on a:

$$\frac{\partial}{\partial y_s}[u_c']^{-1}(y_s) = \frac{1}{u_{cc}''\left([u_c']^{-1}(y_s)\right)} = \frac{1}{u_{cc}''(\mathcal{C}_s)}$$

Le terme $\Psi_y^{(0)}$ au dénominateur de (2.46) devient alors:

$$\Psi_y^{(0)} = \int_t^\infty e^{-(2r-\rho)(s-t)}\frac{1}{u_{cc}''(\mathcal{C}_s)}ds \tag{2.48}$$

En inversant (2.47) on obtient:

$$y_t = u_c'(\mathcal{C}_t) \tag{2.49}$$

A l'aide de (2.48) et (2.49) on peut alors définir:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t) &\equiv \frac{1}{y\Psi_y^{(0)}} \\ &= \left[\int_t^\infty e^{-(2r-\rho)(s-t)}\,\frac{u_c'(\mathcal{C}_t)}{u_{cc}''(\mathcal{C}_s)}\,ds\right]^{-1}\end{aligned}$$

Sachant que $\Psi_\kappa^{(0)} = g^{*(0)}(x_t)$, on obtient (2.27), ce qui termine la démonstration.

■

2.E Démonstration de la Proposition 5

2.E.1 Flux intertemporel

Notations, définitions et propriétés Introduisons d'abord quelques notations et propriétés. Pour $s \geq t$ on définit la fonction $f_{t,s}^a = f(a,t,s)$:

$\Re \times \Re^+ \times \Re^+ \longrightarrow \Re$ ainsi que la fonction $g_{t,s} = g(t,s) : \Re^+ \times \Re^+ \longrightarrow \Re$ comme:

$$f^a_{t,s} \equiv e^{a(t-s)} \tag{2.50}$$
$$g_{t,s} \equiv t - s \tag{2.51}$$

Avec cette notation on peut énumérer quelques propriétés de ces fonctions qui seront fortement utiles par la suite:

$$f^a_{t,t} = 1 \tag{2.52}$$
$$f^0_{t,s} = 1 \tag{2.53}$$
$$f^a_{t,s}\, f^b_{t,s} = f^{a+b}_{t,s} \tag{2.54}$$
$$\left(f^a_{t,s}\right)^n = f^{na}_{t,s} \tag{2.55}$$
$$\int_t^s f^a_{t,u}\, du = \frac{1}{a}\left(f^a_{t,s} - 1\right) \tag{2.56}$$
$$\int_t^s g_{t,u}\, f^a_{t,u}\, du = \frac{1}{a^2}\left(1 - f^a_{t,s} + a\, g_{t,s}\, f^a_{t,s}\right) \tag{2.57}$$

$$f^a_{t,\infty} \equiv \lim_{s\to+\infty} f^a_{t,s} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a < 0 \\ 1 & \text{si} \quad a = 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a > 0 \end{cases} \tag{2.58}$$
$$g_{t,\infty}\, f^a_{t,\infty} \equiv \lim_{s\to+\infty} g_{t,s}\, f^a_{t,s} = 0 \tag{2.59}$$

Les moments conditionnels $E^Q_t[x^n_s]$ Le changement de probabilité $P \longrightarrow Q$ n'affecte pas l'évolution de x. Tous les moments $E^Q_t[x^n_s] \;:\; n \geq 1$ du processus Ornstein-Uhlenbeck caractérisé par les paramètres α et x_p ont donc la même valeur sous ces deux mesures. De plus, ils peuvent être exprimés comme des polynômes de la fonction $f^{-\alpha}_{t,s}$:

$$E^Q_t[x^n_s] = E_t[x^n_s] = \sum_{i=0}^{n} c_{n,i} f^{-i\alpha}_{t,s} \tag{2.60}$$

où les coefficients $c_{n,i} \;:\; n = 1 \ldots 4$ sont donnés par:

- $n = 1$

$$c_{1,0} = x_p$$
$$c_{1,1} = h \tag{2.61}$$

- $n = 2$

$$\begin{aligned} c_{2,0} &= \frac{\frac{1}{2}\sigma_x^2}{\alpha} + x_p^2 \\ c_{2,1} &= 2hx_p \\ c_{2,2} &= h^2 - \frac{\frac{1}{2}\sigma_x^2}{\alpha} \end{aligned} \tag{2.62}$$

- $n = 3$

$$\begin{aligned} c_{3,0} &= \frac{\frac{3}{2}\sigma_x^2 x_p}{\alpha} + x_p^3 \\ c_{3,1} &= \frac{\frac{3}{2}h\sigma_x^2}{\alpha} + 3hx_p^2 \\ c_{3,2} &= -\frac{\frac{3}{2}\sigma_x^2 x_p}{\alpha} + 3h^2 x_p \\ c_{3,3} &= -\frac{\frac{3}{2}h\sigma_x^2}{\alpha} + h^3 \end{aligned} \tag{2.63}$$

- $n = 4$

$$\begin{aligned} c_{4,0} &= \frac{3\sigma_x^2 x_p^2}{\alpha} + \frac{3}{4}\frac{\sigma_x^4}{\alpha^2} + x_p^4 \\ c_{4,1} &= \frac{6h\sigma_x^2 x_p}{\alpha} + 4hx_p^3 \\ c_{4,2} &= \frac{3h^2\sigma_x^2}{\alpha} - \frac{3\sigma_x^2 x_p^2}{\alpha} - \frac{3}{2}\frac{\sigma_x^4}{\alpha^2} + 6h^2 x_p^2 \\ c_{4,3} &= -\frac{6h\sigma_x^2 x_p}{\alpha} + 4h^3 x_p \\ c_{4,4} &= -\frac{3h^2\sigma_x^2}{\alpha} + h^4 + \frac{3}{4}\frac{\sigma_x^4}{\alpha^2} \end{aligned} \tag{2.64}$$

Afin de préserver leur compacticité, dans les formules ci-dessus nous avons introduit la notation de la distance d'éloignement du niveau de parité:

$$h \equiv h(x_t) = x_t - x_p \tag{2.65}$$

Les moments conditionnels "croisés" $E_t^Q[\kappa_s x_s^n]$ Nous pouvons maintenant aborder le calcul des espérances conditionnelles $E_t^Q[\kappa_s x_s^n]$: $n = 0 \ldots 2$, $s \geq t$. Ces moments prennent la forme suivante:

$$E_t^Q[\kappa_s x_s^n] = \sum_{m=0}^{n+2} \left(\gamma_{n,m} + \gamma_{n,m}^{(g)} g_{t,s}\right) f_{t,s}^{-m\alpha} \tag{2.66}$$

où $\gamma_{n,m}$ et $\gamma_{n,m}^{(g)}$ sont des coefficients qui ne dépendent *pas* de la variable s. Le calcul des espérances conditionnelles "croisés" sous la probabilité Q est possible grâce à l'utilisation répétitive du lemme d'Itô. Celui-ci permet d'exprimer les espérances $E_t^Q[\kappa_s x_s^n]$ à l'aide des moments $E_t^Q[x_s^n]$ qui ont la même valeur sous Q et sous P et ont déjà été calculés. On obtient successivement:

$E_t^Q[\kappa_s]$ Calculons d'abord l'équation (2.38). On obtient:

$$E_t^Q[\kappa_s] = \gamma_{0,0} + \gamma_{0,0}^{(g)} g_{t,s} + \gamma_{0,1} f_{t,s}^{-\alpha} + \gamma_{0,2} f_{t,s}^{-2\alpha} \tag{2.67}$$

où:

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,0} &= \kappa_t - B\frac{c_{1,1}}{\alpha} - A\left(\frac{c_{2,1}}{\alpha} + \frac{c_{2,2}}{2\alpha}\right) \\
\gamma_{0,0}^{(g)} &= \mu_\kappa - C - Bc_{1,0} - Ac_{2,0} \\
\gamma_{0,1} &= B\frac{c_{1,1}}{\alpha} + A\frac{c_{2,1}}{\alpha} \\
\gamma_{0,2} &= A\frac{c_{2,2}}{2\alpha}
\end{aligned}$$

L'espérance conditionnelle de κ_s en $t < s$ est donc un polynôme de dégré deux de la fonction exponentielle $f_{t,s}^{-\alpha}$, avec les coefficients qui sont linéaires en s.

$E_t^Q[\kappa_s x_s]$ Pour l'espérance conditionnelle de $\kappa_s x_s$ en $t < s$ on obtient:

$$E_t^Q[\kappa_s x_s] = \gamma_{1,0} + \gamma_{1,0}^{(g)} g_{t,s} + \left(\gamma_{1,1} + \gamma_{1,1}^{(g)} g_{t,s}\right) f_{t,s}^{-\alpha} + \gamma_{1,2} f_{t,s}^{-2\alpha} + \gamma_{1,3} f_{t,s}^{-3\alpha} \tag{2.68}$$

où:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,0} &= \kappa_t x_p + \frac{1}{\alpha}\left[(\mu_\kappa - C)(1 + c_{1,0}) - x_p\right] \\
&\quad + \frac{B}{\alpha}\left[(c_{1,0} - c_{1,1})x_p - c_{2,0}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{A}{\alpha}\left[(c_{2,0}-c_{2,1}-\frac{1}{2}c_{2,2})x_p-c_{3,0}\right]\\
\gamma^{(g)}_{1,0} &= [(\mu_\kappa - C) - Bc_{1,0} - Ac_{2,0}]\; x_p\\
\gamma_{1,1} &= h\kappa_t + \frac{1}{\alpha}\left[(\mu_\kappa - C)(x_p - c_{1,0})\right]\\
&\quad +\frac{B}{\alpha}\left[(-c_{1,0}+c_{1,1})x_p + c_{2,0} - c_{2,2}\right]\\
&\quad +\frac{A}{\alpha}\left[(-c_{2,0}+c_{2,1}+c_{2,2})x_p + c_{3,0} - c_{3,2} - \frac{1}{2}c_{3,3}\right]\\
\gamma^{(g)}_{1,1} &= (\mu_\kappa - C)\, c_{1,1} + B\,(x_p c_{1,1} - c_{2,1}) + A\,(x_p c_{2,1} - c_{3,1})\\
\gamma_{1,2} &= \frac{B}{\alpha}\, c_{2,2} + \frac{A}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}x_p c_{2,2} + c_{3,2}\right)\\
\gamma_{1,3} &= \frac{A}{\alpha}\frac{1}{2}c_{3,3}
\end{aligned}
$$

L'espérance conditionnelle de $\kappa_s x_s$ en $t < s$ est donc aussi un polynôme de la fonction exponentielle $f^{-\alpha}_{t,s}$, avec les coefficients qui sont linéaires en s. Le degré de ce polynôme est trois.

$\boldsymbol{E^Q_t[\kappa_s x^2_s]}$ En répétant la même procédure, pour l'espérance conditionnelle de $\kappa_s x^2_s$ en $t < s$ on obtient:

$$
\begin{aligned}
E^Q_t[\kappa_s x^2_s] &= \gamma_{2,0} + \gamma^{(g)}_{2,0}\, g_{t,s} + \left(\gamma_{2,1} + \gamma^{(g)}_{2,1}\, g_{t,s}\right) f^{-\alpha}_{t,s} + \left(\gamma_{2,2} + \gamma^{(g)}_{2,2}\, g_{t,s}\right) f^{-2\alpha}_{t,s}\\
&\quad +\gamma_{2,3} f^{-3\alpha}_{t,s} + \gamma_{2,4} f^{-4\alpha}_{t,s} \qquad (2.69)
\end{aligned}
$$

où les coefficients $\gamma_{n,m}$ et $\gamma^{(g)}_{n,m}$ sont donnés par:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{2,0} &= (\mu_\kappa - C) - \frac{\sigma^2_x}{4\alpha^2} + \kappa_t x^2_p\\
&\quad +\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{\kappa_t \sigma^2_x}{2} + (\mu_\kappa - C)\left[-\frac{3x^2_p}{2} + x_p c_{1,0} + \frac{c_{2,0}}{2}\right]\right\}\\
&\quad +B\left\{\frac{\sigma^2_x}{2\alpha^2}\left(\frac{c_{1,0}}{2} - c_{1,1}\right) + \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{3c_{1,0}}{2} - c_{1,1}\right)x^2_p - x_p c_{2,0} - \frac{c_{3,0}}{2}\right]\right\}\\
&\quad +A\left\{\frac{\sigma^2_x}{2\alpha^2}\left(\frac{c_{2,0}-c_{2,2}}{2} - c_{2,1}\right)\right.\\
&\qquad \left. +\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{3c_{2,0}-c_{2,2}}{2} - c_{2,1}\right)x^2_p - x_p c_{3,0} - \frac{c_{4,0}}{2}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{2,0}^{(g)} &= (\mu_\kappa - C)\left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha} + x_p^2\right) - B\left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha}c_{1,0} - x_p^2 c_{1,0}\right) + A\left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha}c_{2,0} - x_p^2 c_{2,0}\right) \\
\gamma_{2,1} &= 2h\kappa_t x_p + \frac{1}{\alpha}\left[(\mu_\kappa - C)\left(2x_p^2 + (1-2c_{1,1})x_p + c_{2,1}\right) - 2c_{1,0}x_p\right] \\
&\quad + B\left\{\frac{\sigma_x^2}{\alpha^2}c_{1,1} + \frac{1}{\alpha}\left[-2c_{1,0}x_p^2 + 2\left(c_{2,0} + c_{2,1} - c_{2,2}\right)x_p - c_{3,1}\right]\right\} \\
&\quad + A\left\{\frac{\sigma_x^2}{\alpha^2}c_{2,1} + \frac{1}{\alpha}\left[2(-c_{2,0} + c_{2,2})x_p^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left[2(c_{3,0} + c_{3,1} - c_{3,2}) - c_{3,3}\right]x_p - c_{4,1}\right]\right\} \\
\gamma_{2,1}^{(g)} &= 2x_p\left[(\mu_\kappa - C)\,c_{1,1} + B\left(x_p c_{1,1} - c_{2,1}\right) + A\left(x_p c_{2,1} - c_{3,1}\right)\right] \\
\gamma_{2,2} &= h^2\kappa_t + (\mu_\kappa - C)\frac{\sigma_x^2}{4\alpha^2} \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}\left[-\frac{\sigma_x^2}{2}\kappa_t + (\mu_\kappa - C)\left(-\frac{x_p^2}{2} + (c_{1,0} + 2c_{1,1})x_p - \frac{1}{2}c_{2,0} - c_{2,1}\right)\right] \\
&\quad + B\left\{\frac{-\sigma_x^2}{2\alpha^2}\left(\frac{c_{1,0}}{2} + c_{1,1}\right) + \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{c_{1,0}}{2} + c_{1,1}\right)x_p^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \left(c_{2,0} + 2c_{2,1} - 2c_{2,2}\right)x_p + \frac{c_{3,0}}{2} + c_{3,1} - c_{3,3}\right]\right\} \\
&\quad + A\left\{\frac{-\sigma_x^2}{2\alpha^2}\left(\frac{c_{2,0}}{2} + c_{2,1} - \frac{c_{2,2}}{2}\right) + \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{c_{2,0}}{2} + c_{2,1} - \frac{3c_{2,2}}{2}\right)x_p^2 -\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \left[c_{3,0} + 2(c_{3,1} - c_{3,2} - c_{3,3})\right]x_p + \frac{c_{4,0}}{2} + c_{4,1} - c_{4,3} - \frac{c_{4,4}}{2}\right]\right\} \\
\gamma_{2,2}^{(g)} &= (\mu_\kappa - C)c_{2,2} + B\left(2x_p c_{2,2} - c_{3,2}\right) \\
&\quad + A\left(\frac{\sigma_x^2}{2\alpha}c_{2,2} - x_p^2 c_{2,2} + 2x_p c_{3,2} - c_{4,2}\right) \\
\gamma_{2,3} &= \frac{B}{\alpha}c_{3,3} + \frac{A}{\alpha}\left(-x_p c_{3,3} + c_{4,3}\right) \\
\gamma_{2,4} &= \frac{A}{\alpha}\frac{1}{2}c_{4,4}
\end{aligned}
$$

Calcul de $E_t^Q \int_t^\infty e^{-r(s-t)}\,\kappa_s x_s^2\,ds$ Nous pouvons maintenant intégrer l'équation (2.69). Pour l'intervalle $[0,T)$ on obtient:

$$
E_t^Q \int_t^T e^{-r(s-t)}\,\kappa_s x_s^2\,ds = \left(\frac{1}{4\alpha + r} - \frac{f_{t,T}^{-(4\alpha+r)}}{4\alpha + r}\right)\gamma_{2,4}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(\frac{1}{3\alpha+r} - \frac{f_{t,T}^{-(3\alpha+r)}}{3\alpha+r}\right)\gamma_{2,3} \\
&+ \left(\frac{1}{2\alpha+r} - \frac{f_{t,T}^{-(2\alpha+r)}}{2\alpha+r}\right)\gamma_{2,2} \\
&+ \left(\frac{1}{\alpha+r} - \frac{f_{t,T}^{-(\alpha+r)}}{\alpha+r}\right)\gamma_{2,1} \\
&+ \left(\frac{1}{r} - \frac{f_{t,T}^{-1r}}{r}\right)\gamma_{2,0} \\
&+ \left(\frac{1}{(2\alpha+r)^2} - \frac{f_{t,T}^{-(2\alpha+r)}}{(2\alpha+r)^2} - \frac{f_{t,T}^{-(2\alpha+r)}g_{t,T}}{2\alpha+r}\right)\gamma_{2,2}^{(g)} \\
&+ \left(\frac{1}{(\alpha+r)^2} - \frac{f_{t,T}^{-(\alpha+r)}}{(\alpha+r)^2} - \frac{f_{t,T}^{-(\alpha+r)}g_{t,T}}{\alpha+r}\right)\gamma_{2,1}^{(g)} \\
&+ \left(\frac{1}{r^2} - \frac{f_{t,T}^{-r}}{r^2} - \frac{f_{t,T}^{-r}g_{t,T}}{r}\right)\gamma_{2,0}^{(g)}
\end{aligned}
$$

ou en simplifiant l'écriture à l'aide des signes somme:

$$
\begin{aligned}
E_t^Q \int_t^T e^{-r(s-t)}\,\kappa_s x_s^2\,ds &= \sum_{m=0}^{4} \frac{\gamma_{2,m}}{m\alpha+r}\left(1 - f_{t,T}^{-(m\alpha+r)}\right) \\
&+ \sum_{m=0}^{2} \frac{\gamma_{2,m}^{(g)}}{m\alpha+r}\left[\frac{1 - f_{t,T}^{-(m\alpha+r)}}{m\alpha+r} - f_{t,T}^{-(m\alpha+r)}\,g_{t,T}\right]
\end{aligned}
$$

On fait ensuite tendre T vers $+\infty$. Ceci est possible car toutes les limites existent. On obtient:

$$
E_t^Q \int_t^\infty e^{-r(s-t)}\,\kappa_s x_s^2\,ds = -\left[\sum_{m=0}^{4} \frac{\gamma_{2,m}}{m\alpha+r} + \sum_{m=0}^{2} \frac{\gamma_{2,m}^{(g)}}{m\alpha+r}\right]
$$

En utilisant les définitions des coefficients $\gamma_{n,m}$, $\gamma_{n,m}^{(g)}$ et $c_{n,i}$, après quelques calculs on obtient la formule recherchée.

2.F Procédure récursive: mise en œuvre

Dans cet annexe on présente la mise en oeuvre de la procédure récursive permettant d'établir la convergence de la méthode de façon numérique. Il est démontré qu'au cours des 10 étapes la couverture de risque de taille converge vers zéro, alors que la couverture du risque de change se stabilise à une valeur stable. La taille de la

couverture du risque de change dans le marché incomplet se révèle ainsi diminuée par rapport à celle du marché complet.

Le langage du programme utilisé pour faire des calculs numériques est celui du logiciel *Mathematica*. Pour plus de détails concernant les différentes fonctions utilisées[20] le lecteur intéressé est invité à consulter les ouvrages de Stephen Wolfram [57] et de Hal R. Varian [51].

2.F.1 Paramètres numériques

Paramètres globaux

```
alpha=0.85;                (* force de rappel           *)
Sx=0.1;                    (* volatilité taux de change *)
Sk=0.35;                   (* volatilité taille flux    *)
Xp=1;                      (* niveau de parité          *)
mu=0;                      (* drift taille flux         *)
r=0.1;                     (* taux d'intérêt            *)
gama=-1;                   (* aversion au risque        *)
```

Précision de calcul de la première intégrale et de l'espérance:

```
Ns=10;                     (* nombre cheminements aléatoires pour
                              calcul de l'espérance    [100]      *)
n=10;                      (* discrétisation de la première
                              intégrale                [ 10]      *)
```

Précision de calcul de la seconde intégrale:

```
epsilon=0.01;             (* précision requise pour déterminer
                             l'horizon d'arrêt T       [ 0.01]    *)
Nd=10;                    (* discrétisation de la deuxième
                             intégrale                 [   10]    *)
```

Paramètres initiaux

```
x0=Xp;                     (* taux de change initial  [ Xp]    *)
k0=1;                      (* taille flux             [  K]    *)
w0=10;                     (* richesse initiale       [ 10]    *)
```

[20]Les lignes de commande ont été entourées d'un cadre noir.

Définitions initiales et calcul d'autres paramètres

Pour un κ_0 et $h = x_0 - x_p$ donnés on définit d'abord la fonction `IKX2[etape,h0,k0]` pour `etape = 0` (correspondant au marché complet) comme:

$$IKX2(0, h_0, \kappa_0) = \int_0^\infty e^{-rt} E_0^P[\kappa_t, x_t^2] dt$$

C'est un polynôme de degré 2 en h_0. Le compteur `etape` fournit l'information sur l'état d'avancement de la procédure récursive. Ainsi `etape=0` correspond au marché complet et une prime de risque nulle ($\pi^{(0)} = 0$). Le paramètre `etape=1` correspond à la première approximation du marché incomplet et ainsi de suite.

```
IKX2[0,h0_,kap0_]=Module[{b1,b2,c0,c1,c2},
 b1= alpha+r;
 b2= 2 alpha+r;
 c0= mu/r^2 (Xp+2 b1 Sx^2/b2^2)+kap0/r(Xp+Sx^2/b2);
 c1= 2 Xp(mu/b1^2+kap0/b1);
 c2= (mu/b2^2+kap0/b2);
 c0+c1*h0+c2*h0^2              ];
```

Paramètre noté `AV` utilisé par la suite est égal à l'aversion au risque $\mathcal{A} = \frac{-u''(c)}{u'(c)}$. Il est calculé à partir des données initiales (w_0, x_0 et κ_0). Le paramètre `AV`, pour la fonction d'utilité:

$$u(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}$$

est égal à:

$$\mathcal{A} = -\frac{\gamma - 1}{c_0}$$

Ce paramètre n'est utilisé dans la procédure récursive qu'une fois, pour calculer les paramètres de la première étape (première approximation de la solution pour le marché incomplet) à partir des données de l'étape "zéro". Etant donné qu'à l'étape "zéro" (marché complet) le paiement des dividendes est constant et indépendant des valeurs des variables d'état ($c_0 = const.$), le paramètre `AV` est lui aussi constant ($\mathcal{A} = const.$) et sa valeur est égale à:

```
AV=-(gama-1)/(r*w0+r*IKX2[0,x0-Xp,k0])
```

```
0.99723
```

Monte Carlo

Génération d'une suite des nombres aléatoires[21] de longueur `n` distribués selon la loi normale centrée et réduite $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Par `sigma2` on désigne σ^2.

```
nSuiteAlea[sigma2_,n_]:=Module[{pif2},
   pif2=2*N[Pi];
   Sqrt[- sigma2 2 Log[Table[Random[],{n}]]]*
    Cos[pif2 Table[Random[],{n}]] ];
```

Création table des séries aléatoires

La table `guess` possède `Ns` lignes et `n` colonnes.

```
TAlea[m_,n_]:=Table[nSuiteAlea[1,n],{m}]
```

```
guess=TAlea[Ns,n];
```

La variance du processus Ornstein-Uhlenbeck

Sur intervalle de longueur dt la variance du processus Ornstein-Uhlenbeck est égale à:

$$\sigma^2(dt) = \frac{\sigma_x^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha dt}\right)$$

```
Var[dt_]:=Sx^2/(2*alpha)(1-Exp[-2*alpha*dt]);
```

Génération d'une série des taux de change

On génère une série des taux de change de longueur `n+1` sur intervalle $[0, s]$. Le taux de change de départ est x_0. Pour cette série on utilise le numéro de ligne de la matrice `guess` égal à `ligne`. Il faut que `ligne` soit compris dans l'intervalle [1,`Ns`].

```
ListeTaux[x0_,s_,ligne_]:=Module[{dt,sigma,decr},
 dt=s/n;
 sigma=Sqrt[Var[dt]];
 decr=Exp[-alpha*dt];
 Suivant[prec_,alea_]:=Xp-(Xp-prec)*decr+alea;
 FoldList[Suivant,x0,sigma*guess[[ligne]]]  ]
```

Prime de risque

La prime de risque, notée `P[etape,h]` est nulle pour l'étape "zéro": `etape=0` $\Rightarrow \pi^{(0)} = 0$:

```
param[0]={0,0,0};
```

[21] Pour la comparaison des différentes méthodes de génération des nombres aléatoires voir Wojakowski [54].

Pour l'étape "un" cette prime est une fonction quadratique de l'éloignement du niveau de parité du taux de change. On définit d'abord les paramètres de la parabole:

```
param[1]=Module[{a,b,c},
 a=Sk^2 AV r/(2 alpha+r);
 b=Sk^2 AV 2 alpha r/((2 alpha+r)(alpha+r)) Xp;
 c=Sk^2 AV(Sx^2/(2 alpha+r)+
          2 alpha^2 Xp^2/((2 alpha+r)(alpha+r)));
 {a,b,c}   ]
```

```
{0.0067867, 0.0121446, 0.103908}
```

La prime de risque est donc égale à:

```
P[etape_,h_]:=Module[{a,b,c,par},
 par=param[etape];
 a=par.{1,0,0};
 b=par.{0,1,0};
 c=par.{0,0,1};
 a*h^2+b*h+c ];
```

où $h = x_t - x_p$. Ainsi pour les étapes "zéro" et "un" on obtient les primes de risque:

```
P[0,h]
P[1,h]
```

```
0
```

```
                                    2
0.103908 + 0.0121446 h + 0.0067867 h
```

Calcul de la première intégrale:

$$\int_0^s \pi(x_u)^2 du$$

avec discrétisation `n`, pour la série des taux de change égale à `ligne`, sachant que π (prime de risque) doit être un processus prévisible.

```
PremInteg[etape_,x0_,s_,ligne_]:=Module[{dt},
 dt=s/n;
 ((P[etape,Drop[ListeTaux[x0,s,ligne]-Xp,-1]]^2).
 Table[1,{n}]) * dt]
```

Calcul de l'espérance par méthode de Monte Carlo

Sachant le taux de change initial x_0 et l'horizon s, on calcule ici `Esper`$(etape, x_0, s)$ qui est égale à:

$$E_0^R\left[e^{c_1\int_0^s \pi(x_u)^2 du}\right]$$

où: $c_1 = \frac{\beta(\beta-1)}{2\sigma_\kappa^2}$ et: $\beta = \frac{\gamma}{\gamma-1}$ avec `Ns` = nombre des simulations. Procédure donne comme résultat l'espérance et l'écart-type. Le paramètre c_1 est négatif et égal à:

```
C1=gama/(gama-1)*(gama/(gama-1)-1)/(2 Sk^2)
```

```
-1.02041
```

```
Esper[etape_,x0_,s_]:=
Module[{t,ligne,ones,esp,ectyp},
 t=Table[Exp[C1*PremInteg[etape,x0,s,ligne]],{ligne,Ns}];
 ones=Table[1,{Ns}];
 esp=(t.ones)/Ns;
 ectyp=Sqrt[(((t-esp)^2).ones)/(Ns(Ns-1))];
 {esp,ectyp}     ]
```

EXEMPLE: Avec les paramètres spécifiés dans le préambule on obtient pour $x_0 = 1$ et $s = 100$ [en années si r taux continu en % par année], pour la première étape (0) $\rightarrow$ (1) d'approximation:

```
Esper[1,1,100]
```

```
{0.332083, 0.000607715}
```

On devrait obtenir: $E \simeq 0.331646$ et $\sigma \simeq 0.000554008$, ce qui donne une (excellente) précision de la méthode Monte Carlo, exprimée en %, de:

$$\frac{\sigma}{E} \simeq \pm 0.17\%$$

Calcul de la seconde intégrale

Sachant le taux de change initial x_0 et l'horizon $[0, \infty]$, on calcule ici la seconde intégrale qui est égale à:

$$\int_0^\infty e^{-rs} E_0^R\left[e^{c_1\int_0^s \pi(x_u)^2 du}\right] ds$$

Puisque l'espérance $E_0\left[e^{c_1\int_0^s \pi(x_u)^2 du}\right]$ ainsi que la fonction e^{-rs} sont décroissantes en s, on spécifie d'emblée l'horizon d'arrêt T pour la précision ϵ (`epsilon` – défini dans le préambule) à l'aide de la fonction exponentielle:

$$\left\{T\ :\ e^{-rT}=\epsilon\right\}\ \Rightarrow\ T=-\frac{\ln\epsilon}{r}$$

Ensuite on divise l'intervalle $[0,T]$ en N_d (`Nd` – défini dans le préambule) divisions ce qui correspond à un accroissement ds égal à:

$$ds=\frac{T}{N_d}$$

On calcule donc une liste des N_d valeurs de

$$e^{-rs}E_0\left[e^{c_1\int_0^s \pi(x_u)^2 du}\right]ds$$

qu'on somme par produit scalaire avec un vecteur unité.

```
IntConsoEsp[etape_,x0_]:=Module[{ds,T,i,vecones,ininte},
 T=-Log[epsilon]/r;
 ds=T/Nd;
 ininte=Table[Exp[-r*(i*ds)]*
              Esper[etape,x0,i*ds][[1]],{i,1,Nd}]*ds;
 vecones=Table[1,{i,1,Nd}];
 ininte.vecones    ]
```

EXEMPLE: Avec un taux de change initial égal à $x_0 = 1$, on obtient, pour étape "un":

```
IntConsoEsp[1,x0]
```

```
6.85871
```

Troisième intégrale: définition pour marché incomplet

On définit ici la fonction: `IKX2[etape,h0,kap0]` : `etape`≥ 1 qui correspond à:

$$IKX2(etape,h_0,\kappa_0)=\int_0^\infty e^{-rt}E_0^Q[\kappa_t x_t^2]dt$$

pour le marché incomplet, où κ_t suit un processus ajusté par la prime de risque:

$$\pi(x)=Ax^2+Bx+C$$

La fonction `IKX2[etape,h0,kap0]` est un polynôme de degré 4 en `h0` et ses 5 coefficients ont été calculés dans l'annexe 2.G.

```
IKX2[etape_,h_,kap0_]:=
Module[{ar1,ar2,ar3,ar4,ch0,ch1,ch2,ch3,ch4,AA,BB,CC,par},
 par=param[etape];
 AA=par.{1,0,0};
 BB=par.{0,1,0};
 CC=par.{0,0,1};
 ar1 = -   alpha - r ;
 ar2 = - 2 alpha - r ;
 ar3 = - 3 alpha - r ;
 ar4 = - 4 alpha - r ;
 ch0 = -(CC*Sx^2)/(2*alpha*ar2^2) - (kap0*Sx^2)/(2*alpha*ar2)+
   (mu*Sx^2)/(2*alpha*ar2^2) + (CC*Sx^2)/(2*alpha*r^2) -
   (mu*Sx^2)/(2*alpha*r^2) - (kap0*Sx^2)/(2*alpha*r) -
   (5*AA*Sx^4)/(4*alpha^2*ar2^2) - (AA*Sx^4)/(4*alpha^3*ar2)+
   (3*AA*Sx^4)/(8*alpha^3*ar4) + (AA*Sx^4)/(4*alpha^2*r^2) +
   (AA*Sx^4)/(8*alpha^3*r) + (2*BB*Sx^2*Xp)/(alpha^2*ar1) -
   (BB*Sx^2*Xp)/(2*alpha*ar2^2) - (BB*Sx^2*Xp)/(alpha^2*ar2)+
   (BB*Sx^2*Xp)/(2*alpha*r^2) + (BB*Sx^2*Xp)/(alpha^2*r) +
   (CC*Xp^2)/r^2 - (mu*Xp^2)/r^2 - (kap0*Xp^2)/r +
   (4*AA*Sx^2*Xp^2)/(alpha^2*ar1)-(AA*Sx^2*Xp^2)/(2*alpha*ar2^2)-
   (9*AA*Sx^2*Xp^2)/(4*alpha^2*ar2)+(AA*Sx^2*Xp^2)/(alpha*r^2)+
   (7*AA*Sx^2*Xp^2)/(4*alpha^2*r) + (BB*Xp^3)/r^2 +
   (AA*Xp^4)/r^2 ;
 ch1=-(BB*Sx^2)/(2*alpha^2*ar1) + (5*BB*Sx^2)/(2*alpha^2*ar2)-
   (3*BB*Sx^2)/(2*alpha^2*ar3) + (BB*Sx^2)/(2*alpha^2*r) +
   (2*CC*Xp)/ar1^2 + (2*kap0*Xp)/ar1 - (2*mu*Xp)/ar1^2 +
   (3*AA*Sx^2*Xp)/(alpha*ar1^2) + (AA*Sx^2*Xp)/(2*alpha^2*ar1)+
   (5*AA*Sx^2*Xp)/(alpha^2*ar2)-(9*AA*Sx^2*Xp)/(2*alpha^2*ar3)+
   (AA*Sx^2*Xp)/(alpha^2*r) + (2*BB*Xp^2)/ar1^2 +
   (BB*Xp^2)/(alpha*ar1) + (BB*Xp^2)/(alpha*r) +
   (2*AA*Xp^3)/ar1^2 + (2*AA*Xp^3)/(alpha*ar1) +
   (2*AA*Xp^3)/(alpha*r);
 ch2=CC/ar2^2+kap0/ar2-mu/ar2^2+(5*AA*Sx^2)/(2*alpha*ar2^2) +
   (7*AA*Sx^2)/(4*alpha^2*ar2) - (3*AA*Sx^2)/(2*alpha^2*ar4)+
   (AA*Sx^2)/(4*alpha^2*r) - (2*BB*Xp)/(alpha*ar1) +
   (BB*Xp)/ar2^2 + (2*BB*Xp)/(alpha*ar2) -
   (4*AA*Xp^2)/(alpha*ar1) + (AA*Xp^2)/ar2^2 +
   (9*AA*Xp^2)/(2*alpha*ar2) + (AA*Xp^2)/(2*alpha*r);
 ch3=(ar1*ar2*BB - ar1*ar3*BB + 3*AA*ar1*ar2*Xp -
   2*AA*ar1*ar3*Xp - AA*ar2*ar3*Xp)/
   (alpha*ar1*ar2*ar3);
 ch4=(AA*(ar2 - ar4))/(2*alpha*ar2*ar4);
 -(ch0 + ch1 h + ch2 h^2 + ch3 h^3 + ch4 h^4)  ]
```

Vérifications: Pour étape "un" on doit obtenir un polynôme de degré 4 suivant:

$$-2.30722 + 1.56048h + 0.44961h^2 - 0.01078 * h^3 - 0.00108h^4$$

```
IKX2[1,h,k0] //TeXForm
```

$$-2.30722 + 1.56048\,h + 0.449613\,h^2 - 0.0107832\,h^3 - 0.00107725\,h^4$$

Calcul de lambda

La contrainte budgétaire pour le marché incomplet s'écrit:

$$w_0 = \lambda_0^{\frac{1}{\gamma-1}} \int_0^\infty e^{-rs} E_0^R \left[e^{c_1 \int_0^s \pi(x_u)^2 du} \right] ds - \int_0^\infty e^{-rt} E_0^Q [\kappa_t x_t^2] dt$$

Etant données les valeurs de départ (w_0, x_0 et κ_0), la constante λ_0 peut être calculée comme:

```
lambda00[etape_]:=
((w0+IKX2[etape,x0-Xp,k0])/IntConsoEsp[etape,x0])^(gama-1);
```

Ainsi pour les étapes "zéro" et "un" on devrait obtenir: $\lambda_0^{(0)} \simeq 0.15105$ et $\lambda_0^{(0)} \simeq 0.79468$.

```
L000=lambda00[0]
L001=lambda00[1]
```

```
0.151056
```

```
0.79491
```

NB: Etant donné que l'on change de l'espace des variables d'état, au lieu d'utiliser w_0 comme valeur initiale on prend λ_0 du marché complet. Cette valeur sera attribuée par la suite pour y_0, étant donnée la correspondance $y = \lambda_0$. Voir la suite.

```
lambda0[etape_]=L000
```

```
0.151056
```

Calcul fonction valeur transformée en fonction de x

Etant donnée la correspondance: $\lambda_0 = y = I_w$ où y est la nouvelle variable d'état qui remplace w après la transformation de Cox-Huang $\{w, x, \kappa\} \rightarrow \{y, x, \kappa\}$, on peut exprimer la fonction valeur transformée $\Psi(y, x, \kappa) = w$ comme:

$$\Psi(x,\kappa) = \Psi(y,x,\kappa)|_{y=\lambda_0} \tag{2.70}$$

$$= y^{\frac{1}{\gamma-1}} \int_0^\infty e^{-rs} E_0^R \left[e^{c_1 \int_0^s \pi(x_u)^2 du} \right] ds - \int_0^\infty e^{-rt} E_0^Q[\kappa_t x_t^2] dt \Big|_{y=\lambda_0} \tag{2.71}$$

où à chaque étape on recalcule λ_0 à partir des données initiales.

```
Psi[etape_,x_,k_] := (* Psi[etape,x,k] = *) Module[{lamg},
 lamg=lambda0[etape]^(1/(gama-1));
 lamg*IntConsoEsp[etape,x]-IKX2[etape,x-Xp,k]    ]
```

Couverture risque de change

Couverture marché complet

La couverture du risque de change pour le marché complet (etape= 0) est égale à:

$$f^{*(0)} = \Psi_x^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-rt} E_0^P[\kappa_t x_t^2] dt$$

```
f[0,x_,k_]:=(-D[IKX2[0,h,k],h])/.{h->x-Xp}
```

Couverture marché incomplet

La couverture du risque de change pour le marché incomplet m =(etape≥ 1) est égale à:

$$f^{*(m)} = \Psi_x^{(m)}$$

```
f[etape_,x_,k_]:=Module[{hh},
 hh=0.01;
 (Psi[etape,x+hh,k]-Psi[etape,x-hh,k])/(2*hh)   ]
```

VÉRIFICATION: $f(0, x_0, \kappa_0) \simeq -2.10526$ (marché complet) et $f(1, x_0, \kappa_0) \simeq -1.59767$ (marché incomplet, première étape).

CONCLUSION PRÉLIMINAIRE: Incompletude réduit la taille de couverture.

```
Table[f[i,x0,k0],{i,0,1}]
```

```
{-2.10526, -1.64513}
```

Couverture du risque de taille

Couverture marché complet

La couverture du risque de taille pour le marché complet (`etape`= 0) est égale à:

$$g^{*(0)} = \Psi_\kappa^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial \kappa} \int_0^\infty e^{-rt} E_0^P[\kappa_t x_t^2] dt$$

```
g[0,x_,k_]=(-D[IKX2[0,h,k],k])/.{h->x-Xp}
```

```
                                                    2
-10.0556 - 2.10526 (-1 + x) - 0.555556 (-1 + x)
```

Couverture marché incomplet

La couverture du risque de taille pour le marché incomplet (m =`etape`≥ 1) est égale à:

$$g^{*(m)} = \Psi_\kappa^{(m)} - \frac{\pi^{(m)}}{\sigma_\kappa^2} y \Psi_y^{(m)} \tag{2.72}$$

$$= \Psi_\kappa^{(m)} - \frac{\pi^{(m)}}{\sigma_\kappa^2} \frac{1}{\gamma - 1} \lambda_0^{\frac{1}{\gamma-1}} \int_0^\infty e^{-rs} E_0^R \left[e^{c_1 \int_0^s \pi^{(m)}(x_u)^2 du} \right] ds \tag{2.73}$$

```
g[etape_,x_,k_]:=Module[{hh,derik,con,primint},
 hh=0.01;
 con=lambda0[etape]^(1/(gama-1))/(Sk^2*(gama-1));
 derik=(Psi[etape,x,k+hh]-Psi[etape,x,k-hh])/(2*hh);
 primint=con*P[etape,x-Xp]*IntConsoEsp[etape,x];
 derik-primint  ]
```

CONCLUSION: A la première étape la couverture du risque de taille se trouve réduite.

```
Table[g[i,x0,k0],{i,0,1}]
```

```
{-10.0556, -2.57118}
```

2.F.2 Etape 2 et suivantes

Prime de risque

Tout d'abord définissons la prime de risque (pour la deuxième approximation et les suivantes) à partir de l'approximation précédente de la solution pour le marché

incomplet (fonction `Psi` obtenue à l'étape précédente). La $(m+1)$-ème approximation de la prime de risque s'obtient à partir de la m-ème approximation de la fonction valeur $\Psi^{(m)}$ comme:

$$\pi^{(m+1)} = \sigma_\kappa^2 \frac{\Psi_\kappa^{(m)}}{y\Psi_y^{(m)}}$$

Il est important de remarquer que:

1. La fonction valeur $\Psi^{(1)}$ possède la forme:

   $$\Psi^{(1)}(y, x, \kappa) = f(y)F_1(x) - F_2(x, \kappa)$$

   où par définition $y = \lambda_0$ est une constante déterminé par des conditions initiales (w_0).

2. La fonction valeur est *linéaire* en κ car F_2 l'est; la dérivée partielle Ψ_κ ne dépend donc pas de κ ni de y.

On a donc:

$$\pi^{(2)} = -\sigma_\kappa^2 \frac{[F_2]_\kappa(x)}{yf'(y)F_1(x)}$$

Sachant que $f(y) = y^{\frac{1}{\gamma-1}}$ et $y = \lambda_0$ on obtient que la prime de risque de l'étape 2 est une fonction du taux de change x et ne dépend pas de κ:

$$\pi^{(2)}(x) = -\sigma_\kappa^2 \frac{[F_2]_\kappa(x)}{\frac{1}{\gamma-1}\lambda_0^{\frac{1}{\gamma-1}} F_1(x)}$$

Définissons:

```
P2[x_]:=-Sk^2*D[IKX2[1,x-Xp,k],k]/
(1/(gama-1)*lambda0[1]^(1/(gama-1))*IntConsoEsp[1,x])
```

En pratique, le taux de change se maintient au voisinage du niveau de parité, dans l'intervalle $[x_p - 0.2, x_p + 0.2]$. Au voisinage de x_p nous allons donc à chaque étape approximer la nouvelle prime de risque par un polynôme de degré 2:

$$\pi(x) = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 + o(x^3)$$

Ainsi nous obtenons à chaque fois les nouveaux paramètres de la prime de risque, A_1, A_2 et A_3:

```
param[etape_]:=param[etape]=Module[
 {a,b,c,P2,SERIE10,P2fit2,i,valeurs,coordon},
 P2[x_]:=-Sk^2*D[IKX2[etape-1,x-Xp,k],k]/
          (1/(gama-1)*lambda0[etape-1]^(1/(gama-1))*
          IntConsoEsp[etape-1,x]);
 SERIE10=Table[{0.2*i,P2[0.2*i]},{i,0,10}];
 P2fit2[x_]=Fit[SERIE10,{1,x,x^2},x];
 valeurs=SERIE10.{0,1};
 coordon=SERIE10.{1,0};
 a=Coefficient[P2fit2[x],x,2];
 b=Coefficient[P2fit2[x],x,1];
 c=Coefficient[P2fit2[x],x,0];
 {a,2*a*Xp+b,a*Xp^2+c+b*Xp}   ]
```

```
PARAMETERS=Table[param[i],{i,0,10}]
```

```
{{0, 0, 0},
  {0.0067867, 0.0121446, 0.103908},
  {0.0081906, 0.0299932, 0.139601},
  {0.00975144, 0.0348668, 0.153814},
  {0.0105873, 0.0372279, 0.160868},
  {0.0110552, 0.0385235, 0.164685},
  {0.0113254, 0.0392641, 0.16684},
  {0.0114838, 0.0396955, 0.168086},
  {0.0115773, 0.0399493, 0.168816},
  {0.0116328, 0.0400994, 0.169246},
  {0.0116658, 0.0401885, 0.169501}}
```

2.F.3 Les couvertures du risque de change et du risque de taille

Nous pouvons maintenant illustrer la convergence de la couverture du risque de taille:

$$\lim_{m\to\infty} g^{*(m)} \to 0$$

et la convergence de la couverture du risque de change:

$$\lim_{m\to\infty} f^{*(m)} \to f^*$$

Couverture du risque de taille

```
TAILLE=Table[g[i,x0,k0],{i,0,10}]
```

```
{-10.0556, -2.57118, -0.929669, -0.441672, -0.233918,
  -0.130848, -0.075503, -0.0444519, -0.0265866,
  -0.0161557, -0.0100127}
```

Couverture du risque de change

```
CHANGE=Table[f[i,x0,k0],{i,0,10}]
```

```
{-2.10526, -1.64513, -1.46876, -1.39122, -1.35153,
  -1.32953, -1.3169, -1.30952, -1.30518, -1.3026,
  -1.30107}
```

2.G Calcul de l'espérance du flux perpétuel

Dans cette Annexe on présente les calculs qui permettent d'obtenir l'intégrale:

$$\int_t^\infty e^{-r(u-t)} E_t^Q[\kappa_u x_u^2] du$$

pour la prime de risque quadratique en x:

$$\pi = Ax^2 + Bx + C$$

On parvient à exprimer cette intégrale comme un polynôme de degré 4 en $h \equiv x_t - x_p$, où h est l'éloignement du taux de change x_t par rapport au niveau de parité x_p. Cette intégrale ne dépend pas explicitement du temps initial t.

Déclaration des constantes:

```
Unprotect[Sign];
```

```
Sign[alpha]:=1
```

```
Sign[r]:=1
```

```
Protect[Sign];
```

Propriétés simples de la fonction f:

$$f[a,t,s] = e^{a(s-t)},\ s > t$$

```
f[a_,t_,t_]:=1
```

```
f[0,t_,s_]:=1
```

Intégrations

Définition de la fonction `Integrale` :

$$\int_b^c [A(a) + B(a)]\, da$$

où $A(.)$ et $B(.)$ sont des fonctions quelconques.

```
Integrale[A_+B_,{a_,b_,c_}]:=
Integrale[A,{a,b,c}]+Integrale[B,{a,b,c}]
```

Intégrale de la fonction f: $\int_t^s f(a,t,u)du\ :\ s > t$

```
Integrale[f[a_,t_,u_],{u_,t_,s_}]:=
f[a,t,s]/a-f[a,t,t]/a
```

```
Integrale[c_ A_ ,{u_,t_,s_}]:=
c Integrale[A,{u,t,s}] /; FreeQ[c,u]
```

```
Integrale[c_,{u_,t_,s_}]:=
c g[t,s] /; FreeQ[c,u]
```

où l'on défint: $g(t,s) = s - t$ (afin de garder s et t ensemble).

Comportement de f

Comportement de $f(a,t,s)$ par rapport à la multiplication et puissance:

```
Unprotect[Times,Power];
```

```
f[a_,t_,s_](A_+B_):=f[a,t,s] A + f[a,t,s] B
```

```
f[a_,t_,s_]*f[b_,t_,s_]:=f[a+b,t,s]
```

```
Power[f[a_,t_,s_],n_]:=
f[n*a,t,s]
```

```
Protect[Times,Power];
```

Les moments du processus Ornstein-Uhlenbeck vus comme des polynômes de la fonction f

```
Mou[n_,t_,s_]=
Sum[Subscripted[c[n,i]](f[-alpha,t,s])^i,{i,0,n}];
```

Les moments successifs:

$E_t[x_s^n]$: $s > t, n = 1, \ldots, 4$

```
Mou[1,t,s] //TeXForm
```

$$c_{1,0} + f_{t,s}^{-1\alpha} c_{1,1}$$

```
Mou[2,t,s] //TeXForm
```

$$c_{2,0} + f_{t,s}^{-1\alpha} c_{2,1} + f_{t,s}^{-2\alpha} c_{2,2}$$

```
Mou[3,t,s] //TeXForm
```

$$c_{3,0} + f_{t,s}^{-1\alpha} c_{3,1} + f_{t,s}^{-2\alpha} c_{3,2} + f_{t,s}^{-3\alpha} c_{3,3}$$

```
Mou[4,t,s] //TeXForm
```

$$c_{4,0} + f_{t,s}^{-1\alpha} c_{4,1} + f_{t,s}^{-2\alpha} c_{4,2} + f_{t,s}^{-3\alpha} c_{4,3} + f_{t,s}^{-4\alpha} c_{4,4}$$

2.G.1 Calcul de la première espérance conditionnelle

Dans cette section on calcule l'espérance conditionnelle de la taille du flux:

$$E_t[\kappa_s], s > t$$

On défint MC comme `MC = mu - CC`:

```
EK[t_,s_]=
K+MC g[t,s]-
BB Integrale[Mou[1,t,u],{u,t,s}]-
AA Integrale[Mou[2,t,u],{u,t,s}];
```

2.G.2 Calcul de la seconde espérance conditionnelle

Dans cette section on calcule l'espérance conditionnelle du produit de la taille du flux et du taux de change:

$$E_t[\kappa_s x_s], s > t$$

On définit l'intégration du produit des fonctions g et f:

```
Integrale[ f[a_,t_,u_]* g[t_,u_],{u_,t_,s_}]:=
1/a^2+1/a g[t,s] f[a,t,s]-1/a^2 f[a,t,s]
```

Soit `AXp` $\equiv \alpha x_p$. On obtient:

```
EKX[t_,s_]=f[-alpha,t,s]*(K*X+
AXp Integrale[f[alpha,t,u]*EK[t,u],{u,t,s}]+
MC  Integrale[f[alpha,t,u]*Mou[1,t,u],{u,t,s}]-
BB  Integrale[f[alpha,t,u]*Mou[2,t,u],{u,t,s}]-
AA  Integrale[f[alpha,t,u]*Mou[3,t,u],{u,t,s}]);
```

2.G.3 Calcul de la troisième espérance conditionnelle

Soit `SX2` $\equiv \sigma_x^2$. Dans cette section on calcule l'espérance conditionnelle du produit de la taille du flux et du *carré* du taux de change:

$$E_t^Q[\kappa_s x_s^2], s > t$$

```
EKX2[t_,s_]=f[-2 alpha,t,s]*(K*X^2+
Sx2   Integrale[f[2 alpha,t,u]*EK[t,u],{u,t,s}]+
2 AXp Integrale[f[2 alpha,t,u]*EKX[t,u],{u,t,s}]+
MC    Integrale[f[2 alpha,t,u]*Mou[2,t,u],{u,t,s}]-
BB    Integrale[f[2 alpha,t,u]*Mou[3,t,u],{u,t,s}]-
AA    Integrale[f[2 alpha,t,u]*Mou[4,t,u],{u,t,s}]);
```

2.G.4 Calcul de l'intégrale

Dans cette section on intègre le résultat précédent par rapport à $s \in [t, T]$. On calcule donc l'intégrale de l'espérance conditionnelle du produit de la taille du flux et du carré du taux de change:

$$\int_t^T e^{-r(u-t)} E_t^Q[\kappa_u x_u^2] du$$

```
Psi[t_,T_]=Integrale[f[-r,t,u]*EKX2[t,u],{u,t,T}];
```

2.G.5 Comportement des fonctions aux limites

On définit le comportement des fonctions f et $f \times g$ à l'infini:

```
f[a_,Infinity,Infinity]:=Indeterminate
```

```
f[a_,t_,Infinity]:=0              /; TrueQ[Sign[a]== -1]
```

```
f[a_,t_,Infinity]:=Infinity       /; TrueQ[Sign[a]==  1]
```

```
f[a_,t_,Infinity]:=1              /; TrueQ[Sign[a]==  0]
```

```
Unprotect[Times];
```

```
f[a_,t_,Infinity]*g[t_,Infinity]:=0 /; TrueQ[Sign[a]== -1]
```

```
Protect[Times];
```

2.G.6 Calcul final

Dans cette section on calcule l'intégrale de l'espérance conditionnelle du produit de la taille du flux et du carré du taux de change pour $T \to \infty$:

$$\lim_{T=\infty} \int_t^T e^{-r(u-t)} E_t^Q[\kappa_u x_u^2] du$$

```
IPsi= - Psi[t,Infinity];
```

On vérifie que `IPsi` ne depend plus du moment initial t:

```
FreeQ[IPsi,t]
```

```
True
```

2.G.7 Remplacements

Constantes `MC`, `AXp` et `Sx2`:

```
rep1={AXp->alpha Xp,Sx2->Sx^2,MC->mu-CC};
```

Afin de faire des substitutions des coefficients $c_{i,j}$, on calcule la fonction caractéristique F de la loi normale $N(m,v)$ où $m = E[x]$ et $v = var[x]$:

```
F[t_,m_,v_]=E^(I*t*m-1/2 v t^2);
```

Les moments d'ordre n : $M[n,m,v] = E[x^n]$:

```
M[n_,m_,v_]:=Limit[D[F[t,m,v],{t,n}],t->0]/I^n
```

Moments successifs, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$:

```
For[i=1;imax=5,i<imax,i++,
        x=M[i,m,v];
        Print["n=",i,"       ",x];
        Print["  "]]
```

```
n=1       m

           2
n=2       m  + v

              2
n=3       m (m  + 3 v)

           4      2         2
n=4       m  + 6 m  v + 3 v
```

Pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck on détermine les premiers moments conditionnels, l'espérance et la variance en temps t pour $s > t$:

$$\{m, v\} = \{esp, var\}$$

Notons:

$$h = h[x] = x - x_p$$

l'éloignement du niveau de parité x_p. Le moment d'ordre n est le polynôme d'ordre n en fonction $f[\alpha, t, s] = e^{-\alpha(s-t)}$.

```
esp=Xp+h*f;
```

```
var=Sx2/(2 alpha)(1-f^2);
```

Construction de la liste des remplacements pour les coefficients $c_{i,j}$:

```
repc={};
```

```
For[i=1;imax=5,i<imax,i++,
    x=Collect[M[i,esp,var],{f}];
    For[j=0;jmax=i+1,j<jmax,j++,
        z=Subscripted[c[i,j]]->Coefficient[x,f,j];
        AppendTo[repc,z]
       ]
  ];
```

Remplacement de x par $h + x_p$:

```
repX={X->h+Xp};
```

Définition: `RIPsi`≡`IPsi` après remplacements:

```
RIPsi=(((IPsi/.repX)/.repc)/.rep1);
```

C'est un polynôme de degre 4 en h:

```
ee=Exponent[RIPsi,h]
```

```
4
```

2.G.8 Les coefficients

Calculons les coefficients de ce polynôme:

```
rrr={-   alpha - r -> ar1,
      - 2*alpha - r -> ar2,
      - 3*alpha - r -> ar3,
      - 4*alpha - r -> ar4};
```

```
Clear[Ch4,Ch3,Ch2,Ch1,Ch0]
```

Degré 4

```
Ch4=Simplify[Coefficient[RIPsi, h, 4]/.rrr] //InputForm
```

```
(AA*(ar2 - ar4))/(2*alpha*ar2*ar4)
```

Degré 3

```
Ch3=Simplify[Coefficient[RIPsi, h, 3]/.rrr] //InputForm
```

```
(ar1*ar2*BB - ar1*ar3*BB + 3*AA*ar1*ar2*Xp -
    2*AA*ar1*ar3*Xp - AA*ar2*ar3*Xp)/
  (alpha*ar1*ar2*ar3)
```

Degré 2

```
Ch2=Simplify[Coefficient[RIPsi, h, 2]/.rrr]  //InputForm
```

```
CC/ar2^2 + K/ar2 - mu/ar2^2 +
  (5*AA*Sx^2)/(2*alpha*ar2^2) +
  (7*AA*Sx^2)/(4*alpha^2*ar2) -
  (3*AA*Sx^2)/(2*alpha^2*ar4) +
  (AA*Sx^2)/(4*alpha^2*r) - (2*BB*Xp)/(alpha*ar1) +
  (BB*Xp)/ar2^2 + (2*BB*Xp)/(alpha*ar2) -
  (4*AA*Xp^2)/(alpha*ar1) + (AA*Xp^2)/ar2^2 +
  (9*AA*Xp^2)/(2*alpha*ar2) + (AA*Xp^2)/(2*alpha*r)
```

Degré 1

```
Ch1=Simplify[Coefficient[RIPsi, h, 1]/.rrr]  //InputForm
```

```
-(BB*Sx^2)/(2*alpha^2*ar1) +
  (5*BB*Sx^2)/(2*alpha^2*ar2) -
  (3*BB*Sx^2)/(2*alpha^2*ar3) +
  (BB*Sx^2)/(2*alpha^2*r) + (2*CC*Xp)/ar1^2 +
  (2*K*Xp)/ar1 - (2*mu*Xp)/ar1^2 +
  (3*AA*Sx^2*Xp)/(alpha*ar1^2) +
  (AA*Sx^2*Xp)/(2*alpha^2*ar1) +
  (5*AA*Sx^2*Xp)/(alpha^2*ar2) -
  (9*AA*Sx^2*Xp)/(2*alpha^2*ar3) +
  (AA*Sx^2*Xp)/(alpha^2*r) + (2*BB*Xp^2)/ar1^2 +
  (BB*Xp^2)/(alpha*ar1) + (BB*Xp^2)/(alpha*r) +
  (2*AA*Xp^3)/ar1^2 + (2*AA*Xp^3)/(alpha*ar1) +
  (2*AA*Xp^3)/(alpha*r)
```

Degré 0 (terme libre de h)

```
Ch0=Simplify[Coefficient[RIPsi, h, 0]/.rrr]    //InputForm
```

```
-(CC*Sx^2)/(2*alpha*ar2^2) -
  (K*Sx^2)/(2*alpha*ar2) +
  (mu*Sx^2)/(2*alpha*ar2^2) +
  (CC*Sx^2)/(2*alpha*r^2) -
  (mu*Sx^2)/(2*alpha*r^2) - (K*Sx^2)/(2*alpha*r) -
  (5*AA*Sx^4)/(4*alpha^2*ar2^2) -
  (AA*Sx^4)/(4*alpha^3*ar2) +
  (3*AA*Sx^4)/(8*alpha^3*ar4) +
  (AA*Sx^4)/(4*alpha^2*r^2) +
  (AA*Sx^4)/(8*alpha^3*r) +
  (2*BB*Sx^2*Xp)/(alpha^2*ar1) -
  (BB*Sx^2*Xp)/(2*alpha*ar2^2) -
  (BB*Sx^2*Xp)/(alpha^2*ar2) +
  (BB*Sx^2*Xp)/(2*alpha*r^2) +
  (BB*Sx^2*Xp)/(alpha^2*r) + (CC*Xp^2)/r^2 -
  (mu*Xp^2)/r^2 - (K*Xp^2)/r +
  (4*AA*Sx^2*Xp^2)/(alpha^2*ar1) -
  (AA*Sx^2*Xp^2)/(2*alpha*ar2^2) -
  (9*AA*Sx^2*Xp^2)/(4*alpha^2*ar2) +
  (AA*Sx^2*Xp^2)/(alpha*r^2) +
  (7*AA*Sx^2*Xp^2)/(4*alpha^2*r) + (BB*Xp^3)/r^2 +
  (AA*Xp^4)/r^2
```

Chapitre 3

Couverture du risque de change et décision d'investissement

3.1 Introduction

L'aversion au risque du manager est souvent utilisée pour justifier les décisions de couverture du risque de change dans une entreprise.[1] Ceci est cependant en contradiction avec le théorème de Modigliani-Miller [43] qui rend l'entreprise neutre au risque.

Pour être justifiée, la couverture du risque de change doit apporter de la *valeur ajoutée* à l'entreprise. Dans deux articles récents Froot, Scharfstein et Stein [27] et Froot et Stein [28] mettent en exergue l'importance des coûts plus élevés du financement externe des projets d'investissement risqués combinés avec les rendements d'échelle décroissants du projet d'investissement. Ces deux articles concernent le problème de gestion des risques dans une entreprise ou institution financière. Les auteurs mettent en exergue l'importance de la stabilisation du niveau des liquidités (*slack*) ce qui permet de financer des projets d'investissement de manière plus avantageuse en présence des coûts de financement externe.

En pratique, les risques ne sont pas toujours entièrement couverts. Ce point a été examiné par Stulz [48] qui compare la pratique du management aux implications qui découlent de la théorie financière de l'entreprise. Certains managers utilisent la trésorerie comme une source de valeur ajoutée. Ils s'exposent au risque car les marchés efficients "ne laissent pas d'argent sur la table". Les managers justifient le fait qu'ils assument ces risques par le principe de diversification. Ce principe affirme que les actionnaires peuvent eux-mêmes se couvrir et éliminer tout risque diversifiable. Ceci est en accord avec le paradigme de Modigliani-Miller [43]. Diminuer, par exemple, l'exposition au risque de change ne peut pas modifier la valeur de la firme. Pour gagner il faut donc, selon les managers, faire des paris en jouant sur les anticipations. Cependant, de telles positions spéculatives conduisent parfois à des pertes importantes.[2]

Les observations de Stulz [48] sont confirmés dans un sondage récent réalisé par Wharton School et CIBC Wood Gundy (1995) [2]. Il s'avère que les firmes sont réticentes à couvrir longtemps à l'avance les cash-flows, comme le démontrent les réponses à la question suivante:

> *"How often does your firm transact in the currency derivatives markets to hedge:*
>
> - *anticipated transactions one year or less?*

[1] Voir par exemple les deux premiers chapitres de la présente thèse.

[2] Voir Stulz [48] qui étudie les cas de pertes de change de Daimler Benz, pertes dues à la spéculation sur l'évolution des taux d'intérêts de Banc One et les pertes de Metallgesellshaft sur le marché de pétrole.

Frequently: 53%; never: 7%.

- *Anticipated transactions beyond one year?*
  Frequently: 11%; never: 41%."

Les managers attendent donc que l'échéance des cash-flows approche, pour prendre plus tard la décision d'une couverture éventuelle.

Plusieurs auteurs discutent le comportement des managers confrontés au problème des transactions anticipés. Cependant, aucune explication ne semble expliquer l'attitude statistiquement établie dans le sondage de la Wharton School [2] et mise en exergue ci-dessus.

Le comportement des managers des entreprises est étroitement lié au problème des coûts d'agence introduit par Jensen et Meckling [32]. La façon dont est conçu leur contrat de rémunération semble être déterminant dans leur choix de politique de couverture des risques. Selon Stulz [48] les managers rémunérés avec des options sur la valeur future de l'entreprise ne vont pas couvrir les risques. La volatilité accrue de la valeur sous-jacente de la firme augmente la valeur de leurs options. Les projets risqués sont donc entrepris mais sans être couverts.

Outre la réduction des coûts de financement des projets évoquée par Froot *et al.* [27, 28], trois autres motivations viennent justifier la gestion des risques. Selon Stulz [48], en réduisant la variabilité des cash-flows la couverture réduit le risque de faillite et augmente la valeur de l'entreprise. En second lieu, la valeur espérée du paiement des impôts peut également être réduite grâce à la couverture. Tel est le cas si le système des taxes est progressif, c'est à dire si la proportion du revenu soumis à l'impôt augmente avec la taille du revenu. Troisièmement, la couverture des risques réduit les coûts de la main d'oeuvre. Ceci est étroitement lié à la réduction du risque de faillite: dans une entreprise qui a de bonnes perspectives devant elle les employés sont plus sûrs de préserver la stabilité de l'emploi. Ils devraient donc être moins exigeants en matière du montant des salaires.

Par ailleurs, le choix de la structure financière (ou, en d'autres termes, le choix du ratio dette/capitaux propres) apparaît chez Stulz [48] comme décisif dans l'avantage procuré par la couverture. Pour les firmes à haut levier financier cet avantage est plus important. Le coût de financement externe est plus important pour ces firmes. Il peut donc être plus difficile, voire impossible, d'entreprendre certains bons projets d'investissement à cause du coût réel imposé par le levier. La réduction de la variabilité des flux financiers mise en oeuvre avec une couverture appropriée augmente la capacité d'endettement et permet donc d'entreprendre les bons projets plus souvent. En conséquence, la couverture augmente la valeur de la firme.

Les différences entre une couverture des transactions à court terme et une réduction globale de la variabilité des flux ont été examinés par Copeland *et al.* [14]. Il apparaît qu'une couverture des transactions "naïve" peut même, dans certains cas, augmenter la variabilité globale des cash-flows.

Les objectifs d'une couverture des transactions anticipées à court terme sont différents d'une politique de couverture qui vise à augmenter la valeur de la firme. Cette dernière dépend de la valeur actualisée de tous les flux futurs. Le manager devrait donc mettre en oeuvre une politique de couverture à long terme,[3] qui protège la valeur de la firme contre les facteurs qui affectent ces flux futurs.

3.1.1 Le problème d'arrivée de l'information

Est-il préférable de couvrir tôt les cash-flows provenant de l'étranger? Ou bien, même si on connaît avec certitude leur montant en devise étrangère, vaut-il mieux attendre et ne les couvrir que si le taux de change est au dessus du niveau de parité? Cette couverture apporte-t-elle de la valeur ajoutée? Si oui, quel est le moment optimal de la couverture?

En matière de décision d'investissement des questions similaires ont été étudiées par Dixit et Pindyck [22]. Il est parfois plus judicieux d'attendre l'arrivée de nouvelle information pour prendre la décision: investir ou non. Ceci est une vue plus riche que le simple critère de la positivité de la valeur actuelle nette (NPV > 0) qui implique d'investir tout de suite.

L'horizon de l'existence de la firme est relativement long et son activité est "homogène": la firme dispose d'un capital, investi en immobilisations qui produisent au fil des années un flux réel des marchandises ou des services. A long terme, la couverture du risque de change semble seulement décaler la variabilité des cash-flows dans le temps et ne change pas leur niveau moyen. Elle semble donc ne pas apporter de valeur ajoutée en moyenne. Quels peuvent être les imperfections, sur l'échelle du temps d'existence de l'entreprise, qui l'incitent à se couvrir?

Les immobilisations se déprécient au cours du temps et alors le besoin en nouveaux investissements apparaît. Ces dépenses permettent de continuer l'activité. Les investissements peuvent s'effectuer continuellement en fonction des besoins, mais le plus souvent on observe des périodes d'investissement et de réorganisation intensifs. Après la période de dépenses accrues, par exemple achat de nouveau matériel, l'activité redémarre et le management s'efforce de rentabiliser l'investissement.

[3] Voir à ce sujet les deux premiers chapitres de la présente thèse.

Les opportunités d'investissement apparaissent aussi comme fruit de longue présence sur le marché, connaissance du domaine, aboutissement des programmes de R&D ou accumulation du capital humain. On parle alors d'options d'investissement, spécifiques à l'entreprise. L'entreprise est alors devant un problème de choix: investir et faire fructifier cette opportunité qui lui seule appartient ou bien économiser sur des dépenses nécessaires à sa mise en oeuvre. Or, ce sont ces options d'investissement qui déterminent les cash-flows futurs et donc la valeur de l'entreprise.

Au moment où l'entreprise a un avantage asymétrique — une option d'investissement — comment alors coordonner les politiques d'investissement et de financement? Une analyse approfondie de ce problème est faite par Froot *et al.* [27]. Il apparaît que la couverture peut alors apporter de la valeur en présence des coûts de financement externes. L'entreprise préférera alors autofinancer ses investissements par les liquidités accumulés. Il apparaît aussi, que si les profits de l'investissement ne sont pas corrélés, positivement ou négativement, avec la source de l'incertitude qui affecte les cash-flows, l'entreprise devrait *complètement couvrir* ses cash-flows.

Le modèle de Froot *et al.* [27] est à deux périodes et ne permet pas de trancher sur l'intermédiaire. La couverture complète des cash-flows stipulée par ce modèle permet, certes, d'isoler l'entreprise de la source d'incertitude. Ainsi la valeur des liquidités est stabilisée, ce qui permet d'éviter une partie d'influence négative des coûts accrus de financement externe.

Cependant, une telle couverture permet-elle au mieux d'accumuler les liquidités pour la période d'investissement ultérieure? Imaginons que l'entreprise a un très bon projet d'investissement. Mais la conjoncture est défavorable et l'accumulation des liquidités est faible. Vaut-il mieux couvrir les cash-flows tout de suite, aux conditions sur les marchés à terme affectés par une mauvaise conjoncture? Ou bien, vaut-il mieux attendre le moment plus favorable, un renversement de la tendance, et stabiliser les profits plus tard à un niveau supérieur moyennant une couverture à terme des cash-flows? Ces questions semblent d'autant plus pertinentes pour une entreprise sensible au taux de change. Celui-ci évolue en effet autour d'un niveau de parité donnant des périodes d'avantages et désavantages concurrentiels sur le marché étranger.

Froot *et al.* [27] ont démontré que la couverture apporte de la valeur ajoutée à l'entreprise. Mais peut-elle en apporter encore plus si on choisit "judicieusement" sa mise en oeuvre dans le temps?

Les sections qui suivent abordent les aspects inter-temporels de la couverture du risque de change dans un modèle qui suppose la présence des opportunités d'investissement non aléatoires.

3.2 Le premier modèle

Situons nous dans un cadre où le temps est discret. Les encaisses de l'entreprise w_t s'accumulent jusqu'à l'échéance $T > 0$ durant deux sous-périodes: sous-période 1: $t \in [0, \tau)$ et sous période 2: $t \in [\tau, T)$, où $\tau \in (0, T)$ est l'instant intermédiaire.

Au cours de chaque sous-période le taux de change x_t peut soit augmenter avec probabilité p_u, pour atteindre la valeur ux_t en fin de sous-période, soit baisser avec probabilité p_d, pour atteindre la valeur dx_t en fin de sous-période. Nous allons supposer que $p_u + p_d = 1$ et que $u > 1 > d > 0$.[4]

A la fin de chaque sous-période l'entreprise reçoit un flux déterministe αK libellé en monnaie étrangère. Ce flux est proportionnel à la valeur des immobilisations $K > 0$ et toujours positif: $\alpha > 0$. L'entreprise convertit ses gains au taux de change x_t en vigueur au moment d'arrivée du flux. Exprimé en monnaie domestique ce cash-flow est donc égal à $\alpha K x_t$. L'entreprise peut couvrir ses flux sur le marché à terme avec des contrats forward. Le taux à terme (forward) F_t^s : $s > t$ est égal, par hypothèse, à l'espérance du futur taux de change au comptant:

$$F_t^s = E_t[x_s]$$

Pendant la période $[0, T)$ l'entreprise accumule les liquidités w_t et décide d'investir ou non à l'échéance T. Les caractéristiques du projet d'investissement sont supposés connues dès l'instant initial $t = 0$: montant fixe $I > 0$ venant augmenter le capital productif K. Si l'entreprise décide d'investir, mais a besoin de recourir au financement externe ($w_T < I$), les coûts s'élèvent à $c(I - w_T)$. On a donc:

$$C(w_T, I) = c\,(I - w_T)^+$$

où $c > 0$ est le coût unitaire constant. La décision d'investissement à l'échéance dépend donc des capacités d'autofinancement, correspondant à la richesse accumulée w_T. Si l'entreprise n'investit pas, sa valeur, notée V_T^0, est alors égale à la valeur des liquidités accumulés *plus* une valeur de continuation. Celle-ci est par hypothèse un multiple du cash-flow "ordinaire" αK et donc proportionnelle à la valeur du capital K présent à l'échéance. On peut donc écrire:

$$V_T^0 = w_T + \beta \alpha K$$

La constante $0 < \beta < +\infty$ inclut notamment, dans ce premier modèle, l'information sur la durée de vie totale de l'entreprise après la prise de décision

[4]En temps continu l'évolution du taux de change serait décrite par un mouvement brownien géométrique: $dx/x = \mu dt + \sigma dz$.

d'investissement. Cette même constante β incorpore aussi les renseignements sur le taux de change moyen qui prévaudra après la prise de décision ainsi que ceux sur le taux d'actualisation.[5]

Si l'entreprise investit, elle dépense le montant I mais devient plus productive car son capital passe de K à $K+I$. La valeur de continuation est alors égale à $\beta\alpha(K+I)$. Dans ce cas il se peut cependant que la firme subisse des coûts externes de financement. Sa valeur actuelle nette, notée V_T^I, est alors égale à:

$$V_T^I = w_T - I - c\,(I - w_T)^+ + \beta\alpha(K+I)$$

La décision d'investissement s'effectue en comparant V_T^0 à V_T^I. L'entrepreneur choisit le niveau optimal $I^* \in \{0, I\}$ en prenant la plus grande des deux valeurs de l'entreprise:

$$I^* = \arg\max_I \left\{V_T^0, V_T^I\right\}$$

Le niveau optimal d'investissement I^* est une fonction de la richesse terminale accumulée w_T. Ce niveau dépend également des coûts de financement externe. L'existence de ces coûts conduit à un sous-investissement, comme le démontrent Froot *et al.* [27].

Dans la section suivante nous allons étudier, sur un exemple simple, le cas où les coûts externes sont suffisamment grands[6] pour empêcher l'entreprise d'investir si le niveau des liquidités accumulés w_t n'atteint pas le seuil I nécessaire. Nous allons alors examiner les différentes stratégies de couverture que la firme peut mettre en œuvre en $t = 0$ et $t = \tau$, avant la date de prise de décision d'investissement T. Nous pourrons alors étudier l'impact de ces décisions de couverture sur la valeur actuelle nette (VAN) de l'entreprise.[7]

3.3 Un exemple simple

Dans l'exemple numérique qui suit on supposera que l'entreprise n'a pas de liquidités accumulés en $t = 0$: $w_0 = 0$. La valeur initiale du taux de change est $x_0 = 9$. Avec probabilité $p = p_u = p_d = \frac{1}{2}$ le taux de change peut soit augmenter soit baisser d'un tiers de sa valeur: $u = \frac{4}{3}$ et $d = \frac{2}{3}$. L'évolution du taux de change a été représentée sur la figure 3.1. Prenons $\alpha = 1$ et $K = 10$. L'évolution de la richesse accumulée w_t est alors représentée sur la figure 3.2 où on a supposé qu'il n'existe pas de contrats à terme pour couvrir le risque du taux de change.

[5]Dans le second modèle étudié dans ce chapitre, développé dans la section 3.6, la durée de vie totale de l'entreprise a été supposée infinie. Dans ce cas particulier la constante β s'interprète comme un taux de change moyen espéré, pondéré par le facteur d'actualisation

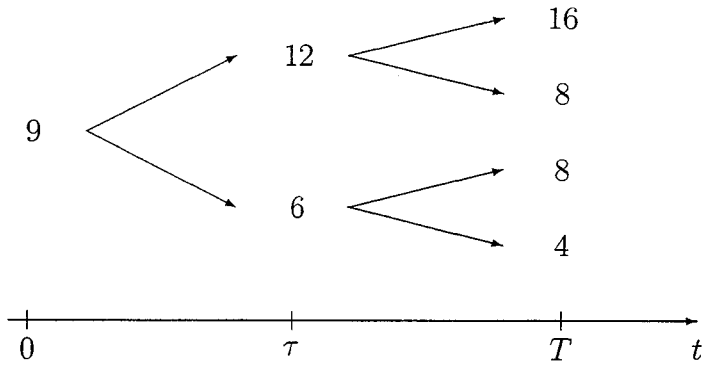


FIG. 3.1: Evolution du taux de change sur l'intervalle $[0, T)$.

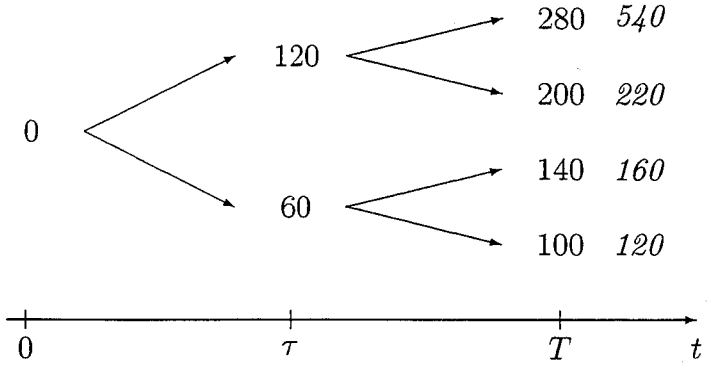


FIG. 3.2: Evolution de la richesse accumulée w_t et la valeur de l'entreprise V_T dans différents états de la nature.

A la date terminale T l'entreprise décide d'investir $I = 240$ dans un projet. Les coûts de financement externe sont suffisamment élevés ($c > 6$) pour qu'un recours aux fonds externes soit trop cher. L'investissement n'a lieu que si suffisamment de liquidités ont été accumulés: $w_T \geq 240$.

Supposons maintenant que $\beta = 2$. Une valeur relativement faible de ce coefficient β correspond par exemple à la situation où la durée de vie du marché ciblé par l'entreprise est relativement courte après l'investissement. A côté, la valeur relativement élevée du coefficient α dans notre exemple signifie qu'on a à faire à un produit de haute technologie, à très haute valeur ajoutée. Un tel choix des paramètres a été utilisé afin de mettre en exergue l'enjeu que peut constituer pour cette entreprise l'opportunité d'un investissement très coûteux, mais rapidement rentable.

Si $w_T = 280$, l'entreprise investit dans le projet car elle possède suffisamment de liquidités accumulés. Sa VAN est alors égale à:

$$\begin{aligned} V_T^I &= w_T - I + \beta\alpha(K + I) \\ &= 280 - 240 + 2 \times 1 \times (10 + 240) \\ &= 540 \end{aligned}$$

Si l'entreprise n'investissait pas, on aurait:

$$\begin{aligned} V_T^0 &= w_T + \beta\alpha K \\ &= 280 + 2 \times 1 \times 10 \\ &= 300 \end{aligned}$$

Comme $540 > 300$, il est donc clair qu'elle préfère investir. On peut effectuer les mêmes calculs de VAN pour tous les autres états de la nature en T. L'entreprise ne pourra alors pas investir car dans tous ces états $w_T < I$. La figure 3.2 illustre aussi toutes les valeurs possibles de l'entreprise actualisées en T. Comme chacun des quatre états de la nature a la probabilité égale à $\frac{1}{4}$, la valeur de la firme en $t = 0$ est égale à:

$$V_0 = \frac{1}{4}(540 + 220 + 160 + 120) = 260$$

3.3.1 Stratégies de couverture

Supposons maintenant qu'il existe des contrats à terme qui permettent à l'entreprise de se couvrir contre le risque de change. Au début de chaque

---

d'une perpétuité.

[6]Dans le cas extrême on peut imaginer que l'entreprise ne peut pas bénéficier du financement externe: $c = \infty$.

[7]Il est important de souligner que le présent modèle essaie de se placer dans le cadre du principe de maximisation de la valeur et non pas celui de maximisation d'utilité.

période le taux à terme est égal à l'espérance du taux au comptant. On a donc:

$$F_0^\tau = 9$$

et:

$$F_\tau^T = \begin{cases} 12 & \text{si} \quad x_\tau = 12 \\ \\ 6 & \text{si} \quad x_\tau = 6 \end{cases}$$

Stratégie optimale choisie au moment initial

L'entrepreneur choisit, en $t = 0$, pendant quelles périodes il couvre ses flux ou les laisse complètement exposés au risque de change. Il est facile d'examiner toutes les stratégies et choisir la meilleure: celle qui maximise la valeur de l'entreprise en $t = 0$.

Stratégie 1: *Ne couvrir aucun flux.*
Cette stratégie a déjà été examinée sur la figure 3.2. Elle résulte en une valeur de l'entreprise égale à:

$$V_0^{(-,-)} = 260$$

Stratégie 2: *Couvrir tous les flux.*[8]
Cette stratégie a été illustrée sur la figure 3.3. Si le flux est couvert en sous-période 1, le manager se garantit un taux de change $x_\tau = 9$, et donc un flux en monnaie domestique de 90. Si le taux de change augmente et s'il se couvre en sous-période 2, il se garantit un flux de 120 à l'échéance. Si le taux de change baisse, la couverture garantit un flux de 60. La valeur de la richesse finale est donc au maximum égale à 90+120=210. L'investissement ne peut pas avoir lieu car $210 < 240$ et la firme vaut en $t = 0$:

$$V_0^{(+,+)} = 90 + \frac{1}{2}(120 + 60) + 20 = 200$$

Dans ce cas la couverture complète baisse la valeur de l'entreprise. Ceci est quelque peu contraire à l'observation de Froot *et al.* qui argumentent que toute baisse de volatilité du flux terminal, si la valeur de l'investissement n'est pas corrélée avec la source de risque, devrait augmenter et non pas baisser la valeur de l'entreprise.

[8]Cette stratégie est dans notre exemple équivalente à celle qui consisterait à couvrir dès $t = 0$ tous les flux des périodes τ et T mais avec deux types de contrats forward, un long et un court. Cependant, en variant le seuil d'investissement I on démontre que cette dernière stratégie est *dominée* par la stratégie numéro 2.

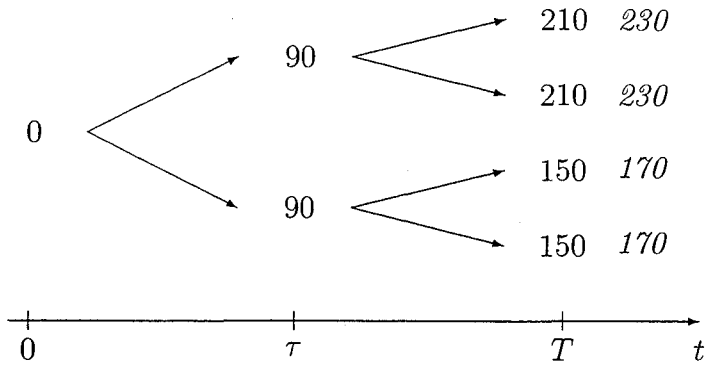


FIG. 3.3: Stratégie 2: couverture totale des flux. Evolution de la richesse accumulée w_t et la valeur de l'entreprise V_T dans différents états de la nature.

Stratégie 3: *Couvrir le flux en sous-période 1, ne pas couvrir le flux en sous-période 2.*
Dans ce cas l'investissement peut avoir lieu si $x_T = 16$. D'après la figure 3.4, l'entreprise a alors accumulé le montant de 250, un peu plus que ce qui est nécessaire. Sa valeur est alors égale à:

$$V_0^{(+,-)} = \frac{1}{4}(510 + 190 + 190 + 150) = 260$$

Cette stratégie donne la même valeur de l'entreprise que l'absence de couverture. En présence des moindres coûts de couverture, cette stratégie serait donc écartée.

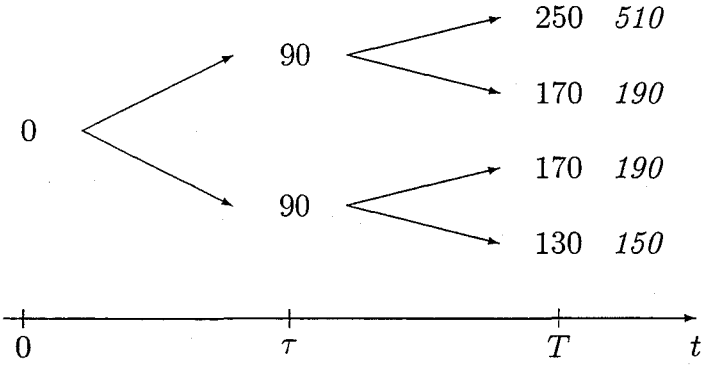


FIG. 3.4: Stratégie 3: couverture des flux précoce. Evolution de la richesse accumulée w_t et la valeur de l'entreprise V_T dans différents états de la nature.

Stratégie 4: *Ne pas couvrir le flux en sous-période 1, couvrir le flux en sous-période 2.*
Si le flux est couvert en sous-période 2, on a deux possibilités, représentés sur la figure 3.5. Soit le taux de change a augmenté et la richesse est égale à $w_\tau = 120$. Si on couvre le risque de change en τ, on a avec certitude en T: $w_T = 120 + 120 = 240$. On peut alors investir et la VAN est égale à 500. Par contre, si le taux de change a baissé, la richesse accumulée en τ est égale à 60. La couverture donne un flux certain à l'échéance égal à 60, et donc une richesse terminale de 120. On ne peut pas investir et la VAN est égale à 140. En $t = 0$ la valeur de la firme est donc égale à:

$$V_0^{(-,+)} = \frac{1}{2}(500 + 140) = 320$$

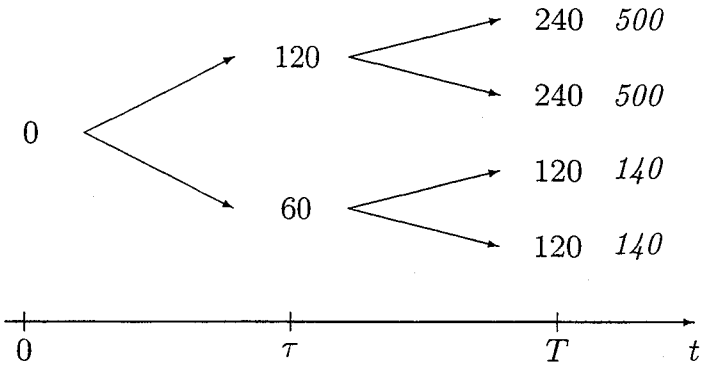


FIG. 3.5: Stratégie 4: couverture des flux tardive. Evolution de la richesse accumulée w_t et la valeur de l'entreprise V_T dans différents états de la nature.

Conclusions Le fait de ne pas couvrir tous les flux à l'avance mais attendre l'arrivée de nouvelle information s'avère donc la stratégie gagnante. La répartition judicieuse de la couverture dans le temps a permis d'augmenter la valeur de l'entreprise et ceci dès l'instant initial. La stratégie qui maximise la valeur de l'entreprise n'est pas celle qui consiste à couvrir tous les flux. Ceci est contraire aux conclusions auxquelles Froot *et al.* [27] ont abouti dans leur modèle où la couverture n'intervient que dans un cadre uni-périodique.

Les conclusions qui découlent du seul exemple numérique ci-dessus peuvent être résumés par la relation de préférence $\succeq$ entre les différentes stratégies et ont été présentées dans le tableau 3.1. Les deux relations de préférence forte $\succ$ sont cohérentes avec le comportement constaté par le sondage de

Wharton School [2]. La première relation de préférence (à gauche) suffirait à justifier l'attitude réticente des managers vis à vis d'une couverture complète. La seconde relation (au centre) peut devenir forte en présence des petits coûts de couverture: $\succeq\!\!\rightarrow\!\!\succ$. Elle avantage alors l'absence totale de couverture. Cependant, la troisième relation (à droite) met au jour la possibilité d'une attitude spéculative[9] qui aboutit à la maximisation de la valeur. Elle n'apparaît que si la firme peut apprendre au moment intermédiaire $t = \tau$ qu'elle pourra investir à l'échéance T. L'attitude des managers consiste alors à ne pas immédiatement couvrir tous les flux, mais retarder la décision de couverture et attendre l'approche de l'échéance pour le moment opportun.

Stratégie 2		*Stratégie 3*		*Stratégie 1*		*Stratégie 4*
$(+,+)$		$(+,-)$		$(-,-)$		$(-,+)$
couvrir les flux proches et éloignés à l'avance	$\prec$	couvrir seulement les flux proches	$\precsim$	ne couvrir aucun flux	$\prec$	ne pas couvrir les flux proches et attendre l'arrivée de nouvelle information pour couvrir plus tard les flux éloignés
prise des précautions "totale"	$\prec$	prise des précautions "myope"	$\precsim$	ignorance	$\prec$	comportement de type spéculatif

TAB. 3.1: Les relations de préférence entre les différentes stratégies de couverture.

Il apparaît aussi un problème annexe d'asymétrie d'information. A la

[9]Bien évidemment, aucun sondage n'a encore fait ouvertement avouer les managers des entreprises une attitude spéculative!

lecture du rapport de *The Economist* [1] on peut constater que l'information sur l'utilisation des produits dérivés est difficilement observable et vérifiable par les actionnaires. Les opérations hors bilan contractés sur les marchés des produits dérivés ne sont souvent pas publiés dans les rapports annuels des entreprises. En effet, comment un investisseur peut juger de la valeur de l'entreprise, si même les données sur l'utilisation passée des produits dérivés ne lui sont pas bien transmises? Même s'il les connaissait, il apparaît à travers l'exemple numérique que c'est la politique d'utilisation *future* des produits de couverture par l'entreprise qui importe pour lui.

Stratégie optimale choisie au moment initial et intermédiaire

Que va-t-il se passer si on décale le choix de couverture pour la sous-période 2 vers $t = \tau$? Rappelons que ce choix est binaire et que c'est une couverture des transactions. Le manager choisit de couvrir ou non le cash-flow et le ratio de couverture, appelons le h, est soit égal à 0, soit à 1.

La réponse pour la sous-période 1 est la suivante: le manager va laisser non-couvert son flux en sous-période 1. En effet, s'il le couvre, son entreprise vaut soit $V_0^{(+,-)} = 260$, soit $V_0^{(+,+)} = 200$. Aucune de ces deux deux stratégies ne maximise la valeur de l'entreprise. S'il ne couvre pas ses flux, il aura soit $V_0^{(-,-)} = 260$, soit $V_0^{(-,+)} = 320$, donc au moins autant que s'il se couvrait en sous-période 1.

Il est intéressant de remarquer qu'en sous-période 1 le manager va en fait s'exposer au risque de change, pour pouvoir plus tard investir plus souvent. Le manager attend l'arrivée de l'information sur l'état de la nature.

Quelles seront alors ses décisions pour la sous-période 2? Ces décisions seront conditionnés par l'information reçue en $t = \tau$. Si en $t = \tau$ le taux de change a augmenté, le manager est alors sûr de pouvoir investir à l'échéance T. Il lui suffit alors de couvrir son flux pour "geler" son profit et avoir avec certitude le montant des liquidités requis $w_T = I = 240$.

Si par contre en $t = \tau$ le taux de change a baissé, quoi qu'il arrive le manager ne pourra plus investir. Une éventuelle couverture restera sans influence sur la valeur de l'entreprise. En effet, il a jusque là accumulé $w_\tau = 60$. S'il ne se couvre pas, il aura en T soit $w_T = 140$, soit $w_T = 100$ et ne pourra pas investir. S'il se couvre, il aura $w_T = 120$ avec certitude et ne pourra non plus investir. La valeur de l'entreprise, vue de $t = 0$, n'est pas affectée par la décision de couverture. On peut conclure qu'en présence des moindres coûts de couverture, l'entrepreneur neutre au risque préférera ne pas se couvrir dans ce cas.

Stratégies spéculatives avec libre choix de ratio de couverture

Quel serait le ratio de couverture h optimal pour les deux sous-périodes, si le manager était libre de choisir son exposition au risque de change? Comment se comporterait-il dans le temps? Comment ce choix serait-il dépendant des deux variables d'état, le taux de change x_t et la richesse accumulée w_t?

Dans l'exemple numérique en temps discret, la stratégie $V_0^{(-,+)}$ qui maximisait la valeur de l'entreprise en $t = 0$ consistait de ne pas couvrir le flux en sous-période 1 mais de le couvrir en sous-période 2.[10] En présence des coûts des transactions et si le taux de change baissait en fin de sous-période 1, le manager ne couvrirait pas le flux en sous-période 2. L'évolution de la richesse w_t pour cette dernière stratégie a été représentée sur la figure 3.6. On peut remarquer que ces deux stratégies conduisent à la même valeur de

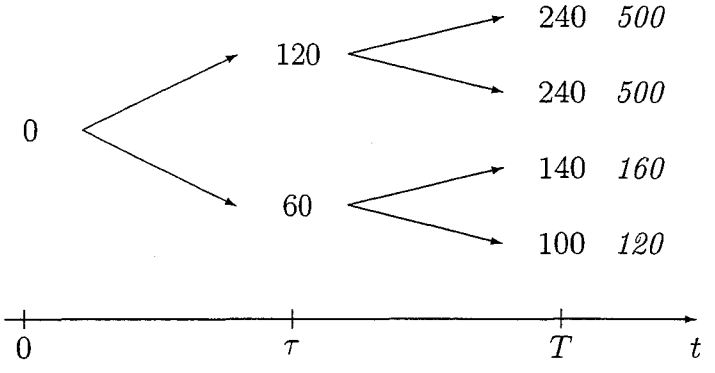


FIG. 3.6: L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie de couverture tardive des flux en présence de petits coûts des transactions.

l'entreprise,[11] en $t = 0$, égale à 320:

$$\frac{1}{4}(500 + 500 + 160 + 120) = 320 = \frac{1}{4}(500 + 500 + 140 + 140)$$

On peut aussi remarquer, que si le taux de change baisse, indépendamment de la stratégie de couverture choisie pour la deuxième période, la somme des valeurs atteintes ensuite par la richesse terminale en T est toujours égale à 280, plus que le montant 240 nécessaire pour investir:

$$160 + 120 = 280 = 140 + 140$$

[10] Voir figure 3.5.

[11] A la valeur des coûts des transactions près, celle-ci étant supposée infiniment petite: $C_\epsilon \to 0 : C_\epsilon > 0$.

Or, pouvoir investir change à la hausse la valeur de l'entreprise. Si on pouvait modifier la répartition de la richesse finale de façon à avoir dans un état de la nature $w_T = 240$ et dans l'autre état de la nature $w_T = 40$, la somme de ces deux valeurs serait toujours égale à 280. La différence est maintenant que dans un de ces deux états de la nature on peut investir.

Cette modification est possible grâce à l'existence des instruments de couverture, si on relâche la contrainte sur le ratio de couverture h d'être égal soit à 0 (pas de couverture) soit à 1 (couverture complète). En effet, si le taux de change baisse, l'entrepreneur a l'intérêt de ne pas se couvrir mais de s'exposer davantage au risque. Ceci correspond à une *position spéculative* en sous-période 2. Il peut le faire de deux façons, en choisissant le ratio $h \leq -5$ ou $h \geq 7$.[12] Dans les deux cas l'effet est le même et avantageux: la valeur de l'entreprise augmente de 320 à 380!

Examinons la situation où il n'y a pas eu de couverture en sous-période 1 et le taux de change à baissé ($x_\tau = 6$). Dans ce cas, en $t = \tau$, grâce au premier flux le manager a accumulé la richesse égale à 60. En $t = T$ il va recevoir encore un flux, en monnaie étrangère, égal à 10. S'il n'y a pas de couverture ($h = 0$) ce flux lui apportera soit 80 soit 40 en monnaie domestique. S'il se couvre complètement ($h = 1$), c'est à dire s'il vend à terme le flux égal à 10 au taux à terme égal à 6, il aura 60 avec certitude. Cependant, aucune de ces deux stratégies ne lui permet d'investir car la richesse terminale w_T, égale à 140, 100 ou 120, restera toujours inférieure au montant requis $I = 240$. Le manager peut alors décider de spéculer, soit à la hausse, soit à la baisse du taux de change.

Cas 1 *Stratégie spéculative à la hausse:* $h = -5$
Ce cas correspond à un achat à terme de la monnaie étrangère d'un montant égal à $h \times 10 = 5 \times 10 = 50$ au taux à terme égal à 6.

Si le taux de change augmente et en T il est égal à 8, l'entreprise réalise un gain spéculatif: elle a acheté 50 unités de la monnaie étrangère au taux à terme égal à 6 qu'elle revend au comptant au taux égal à 8. Ce gain, exprimé en monnaie domestique, est donc égal à $50 \times (8 - 6) = 100$. L'entreprise convertit également son flux égal à 10 en monnaie étrangère au taux spot égal à 8, ce qui lui rapporte $10 \times 8 = 80$ en monnaie domestique. La richesse terminale accumulée est donc égale à la somme de trois composantes: richesse accumulée en période précédente (60), le gain spéculatif (100) et le gain

[12] Si $h < 0$ il s'agit d'un *achat* à terme de la devise étrangère. Dans le cas contraire $h > 0$ signifie la *vente* de la devise étrangère à terme. Si $h = 1$, l'entreprise vend à terme la totalité de son flux libellé en devise.

provenant de l'activité commerciale à l'étranger (80):

$$w_T = 60 + 100 + 80 = 240$$

La richesse terminale permet à l'entreprise d'investir dans le projet. La valeur de l'entreprise en $t = T$ est alors égale à 500.

Si par contre le taux de change baisse et en $t = T$ il est égal à 4, l'entreprise subit une perte due à la spéculation: elle a acheté 50 unités de la monnaie étrangère au taux à terme égal à 6 qu'elle revend au comptant au taux égal à 4. Cette perte, exprimée en monnaie domestique, est donc égale à $50 \times (4 - 6) = -100$. L'entreprise convertit également son flux égal à 10 en monnaie étrangère au taux spot égal à 4, ce qui lui rapporte $10 \times 4 = 40$ en monnaie domestique. La richesse terminale accumulée est, comme dans le cas précédent, égale à la somme de trois composantes: richesse accumulée en période précédente (60), la perte spéculative (-100) et le gain provenant de l'activité commerciale à l'étranger (40):

$$w_T = 60 - 100 + 40 = 0$$

La richesse terminale est donc nulle et ne permet pas à l'entreprise d'investir dans le projet. La valeur de l'entreprise en $t = T$ est alors égale à la seule valeur de continuation sans investissement (20).

L'évolution de la valeur de la richesse accumulée pour la stratégie décrite ci-dessus et les différentes valeurs de l'entreprise en $t = T$ ont été représentés sur la figure 3.7. Un calcul simple permet de retrouver la valeur de l'entreprise

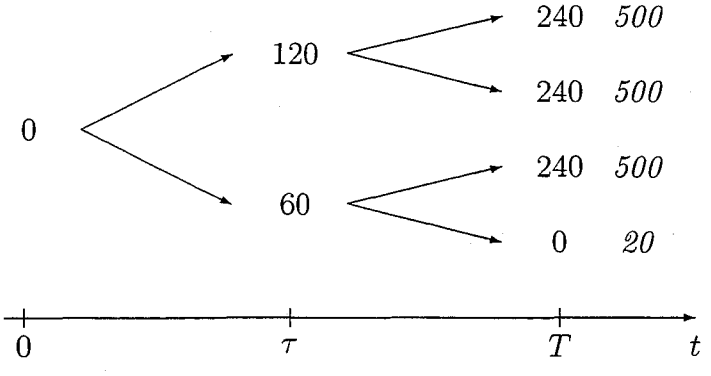


FIG. 3.7: L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie spéculative à la hausse ($h = -5$): *ne pas couvrir les flux en sous-période 1, couvrir les flux en sous-période 2 si le taux de change augmente, spéculer à la hausse en sous-période 2 si le taux de change baisse.*

en $t = 0$. On obtient:

$$V_0 = \frac{1}{4}(500 + 500 + 500 + 20) = 380$$

Cas 2 *Stratégie spéculative à la baisse: $h = 7$*
Il s'agit d'une stratégie spéculative à la baisse du taux de change en deuxième sous-période. La position consistant à vendre à terme au taux $F_\tau^T = 6$ le montant $h \times 10 = 7 \times 10 = 70$ de la devise étrangère donne les résultats représentés sur la figure 3.8. La valeur de l'entreprise en $t = 0$ est la même

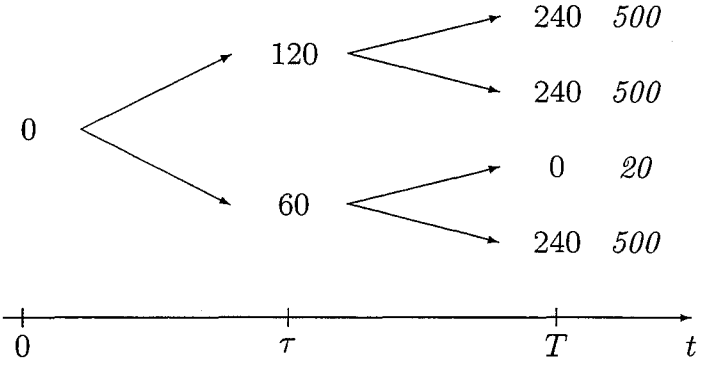


FIG. 3.8: L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie à la baisse ($h = 7$): *ne pas couvrir les flux en sous-période 1, couvrir les flux en sous-période 2 si le taux de change augmente, spéculer à la baisse en sous-période 2 si le taux de change baisse en sous-période 1.*

qu'avec la stratégie précédente ($h = -5$, figure 3.7) et égale à:

$$V_0 = \frac{1}{4}(500 + 500 + 20 + 500) = 380$$

Remarque 1 *Non-unicité des stratégies spéculatives*
Il est intéressant de remarquer qu'on obtiendrait la même valeur de l'entreprise $V_0 = 380$ pour les stratégies spéculatives encore plus "agressives", pour lesquelles $h < -5$ ou $h > 7$. Par exemple, dans le cas de la stratégie spéculative à la hausse en sous-période 2, en prenant un ratio de couverture non pas égal à $h = -5$ mais $h = -6$ (voir figure 3.9) on obtiendrait la même valeur de l'entreprise en $t = 0$:

$$V_0 = \frac{1}{4}(500 + 500 + 520 + 0) = 380$$

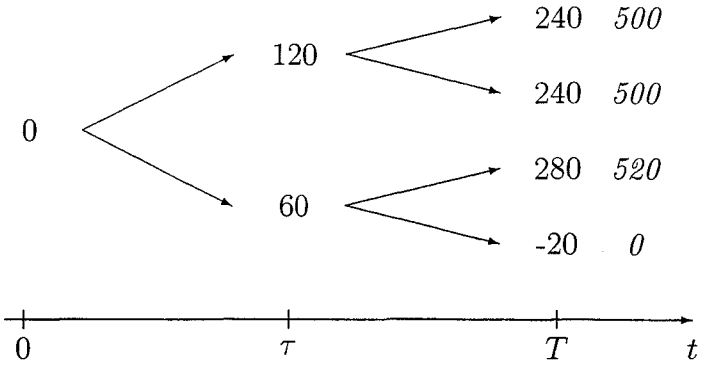


FIG. 3.9: L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie à la hausse "agressive" ($h = -6$): *ne pas couvrir les flux en période 1, couvrir les flux en sous-période 2 si le taux de change augmente, spéculer à la hausse en sous-période 2 si le taux de change baisse en sous-période 1.*

Les stratégies spéculatives, en absence des coûts de couverture ou de menace de faillite, ne sont donc pas déterminées de façon unique. De même, la spéculation peut commencer dès $t = 0$. On peut atteindre la même valeur de l'entreprise $V_0 = 380$ avec les stratégies spéculatives où le ratio de couverture en sous-période 1 est égal à $h_1 = 4$ et les ratios de couverture en sous-période 2 sont ensuite égaux soit à $h_{2u} = -2$ et $h_{2d} = 1$ (voir figure 3.10).

Remarque 2 *Risque de faillite*
Les stratégies spéculatives augmentent le risque de faillite. A la lecture de la figure 3.9 on remarque que les liquidités accumulés peuvent devenir négatives dans un des états de la nature ($w_T = -20$) et la valeur de l'entreprise nulle. Il est évident que dans le cas d'une stratégie encore plus "agressive" il peut arriver que $V_T < 0$. L'entreprise est alors en état de faillite. Si le manager est neutre au risque une telle menace est sans effet car la valeur de l'entreprise en $t = 0$ ne change pas: $V_0 = 380$. De même, le ratio de couverture trop excessif, par exemple $h = -10$, n'a aucun effet sur la valeur espérée de l'entreprise, si on considère la décision du manager en $t = \tau$. On peut alors supposer que la présence des coûts de faillite supplémentaires pourrait dissuader le manager et limiter l'usage des stratégies excessivement spéculatives.

Remarque 3 *Coûts de couverture*
Comparons les quatre stratégies spéculatives pour lesquelles $V_0 = 380$, illustrées sur les figures 3.7, 3.8, 3.9 et 3.10. Comment, en présence des coûts de

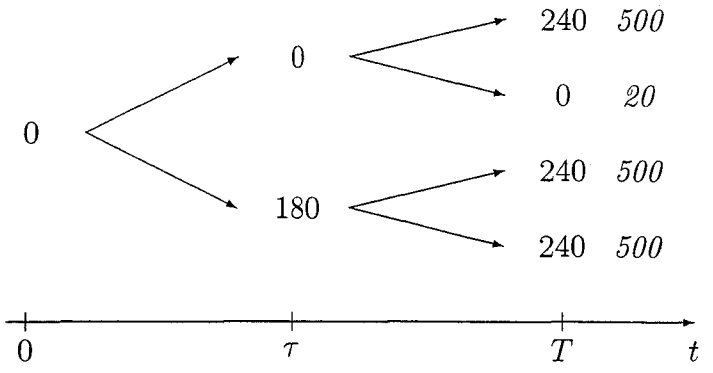


FIG. 3.10: L'évolution de la richesse w_t et la valeur de l'entreprise en $t = T$ pour la stratégie spéculative commençant en $t = 0$: *spéculer à la baisse en sous-période 1* ($h_1 = 4$), *couvrir les flux en sous-période 2 si le taux de change baisse* ($h_{2d} = 1$), *spéculer à la hausse en sous-période 2* ($h_{2u} = -2$) *si le taux de change augmente en sous-période 1.*

transactions le manager rationnel choisirait une de ces stratégies? Supposons que ces coûts sont proportionnels à la valeur absolue de la position prise sur le marché à terme. En d'autres termes les coûts de couverture sont proportionnels à la valeur absolue du ratio de couverture:

$$C_h(h) = \gamma|h|$$

où $\gamma > 0$. Le coût total d'une stratégie en $t = 0$ est alors proportionnel à la valeur espérée des ratios de couverture:

$$C_h(h_1, h_{2d}, h_{2u}) = \gamma\left(|h_1| + \frac{|h_{2u}| + |h_{2d}|}{2}\right)$$

Ces coûts sont illustrés dans le tableau 3.2. Le manager rationnel choisir-

Stratégie	h_1	h_{2u}	h_{2d}	C_h
à la hausse	0	1	−5	6 γ
à la baisse	0	1	7	8 γ
agressive à la hausse	0	1	−6	7 γ
précoce à la hausse	4	−2	1	7 γ

TAB. 3.2: Les coûts des stratégies spéculatives.

ait alors la stratégie la moins coûteuse. Remarquons aussi, que les coûts

de couverture limitent l'usage des stratégies excessivement spéculatives. Il apparaît notamment que la stratégie la moins coûteuse est une des celles où la couverture est mise en place plus tard.

3.4 Choix de ratio de couverture

Dans cette section un programme de choix optimal des ratios de couverture sera considéré. Ceci semble pertinent, notamment afin d'expliquer le problème des stratégies spéculatives apparu dans la section précédente.

Les décisions de couverture ont lieu à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant intermédiaire $t = \tau$. La résolution du problème de choix optimal de couverture se fait à rebours, en considérant d'abord la situation en fin de période d'accumulation des liquidités ($t = T$). Nous allons au long de cette section supposer $c \to \infty$.

Période 3 *Décision d'investissement*
En $t = T$, au moment de la prise de décision d'investissement, la valeur de l'entreprise est égale à la somme des trois termes: la valeur des liquidités accumulés, la valeur de continuation sans investissement et la valeur supplémentaire, nette des coûts, procurée par le projet d'investissement:

$$V_T = w_T + \xi K + I(\xi - 1)\, 1_{w_T \geq I}$$

où nous introduisons la notation: $\xi \equiv \alpha\beta$. La valeur de l'entreprise V_T est donc une fonction strictement et linéairement croissante des liquidités accumulés w_T, présentant un saut de taille $I(\xi - 1)$ en $w_T = I$.

Période 2 *Choix de ratio de couverture h_τ*
Le choix de ratio de couverture h_τ, une période avant le moment de la prise de décision d'investissement, s'effectue en connaissance des liquidités w_τ accumulés jusqu'alors. En $t = \tau$ la richesse terminale w_T est inconnue. C'est donc une variable aléatoire:

$$\tilde{w}_T = w_\tau + \alpha K \tilde{x}_T$$

Si le manager couvre son risque de change avec des contrats à terme et choisit un ratio de couverture h_τ, la distribution de la richesse terminale est modifiée de la façon suivante:

$$\tilde{w}_T = w_\tau + \alpha K \left[h_\tau \bar{x}_T + (1 - h_\tau)\tilde{x}_T\right]$$

où $\bar{x}_T$ est égal au taux de change à terme: $\bar{x}_T = F_\tau^T = E[\tilde{x}_T|x_\tau]$. Le manager choisit le ratio de couverture h_τ^* de façon à maximiser la valeur espérée de la firme:

$$h_\tau^* = \arg\max_{h_\tau} E[\tilde{V}_T|x_\tau, w_\tau]$$

La valeur espérée de la firme dépend du ratio de couverture h_τ, car celui-ci modifie la distribution de la richesse finale w_T et donc la décision d'investissement:

$$E_\tau[\tilde{V}_T] = w_\tau + \alpha K \bar{x}_T + \xi K + I(\xi - 1)E_\tau[1_{\tilde{w}_T \geq I}]$$

La somme des deux premiers termes s'interprète comme la valeur espérée des liquidités en $t = T$.[13] Le choix de couverture est donc sans effet sur cette valeur. Par contre la couverture peut modifier la décision d'investissement en augmentant la probabilité P d'acquérir la valeur supplémentaire égale à $I(\xi - 1) > 0$. En effet:

$$E_\tau[1_{\tilde{w}_T \geq I}] = P(\tilde{w}_T \geq I)$$

Le choix de ratio de couverture n'a donc intérêt que si le manager peut maximiser cette probabilité. La maximisation de la valeur de l'entreprise consiste à la maximiser la probabilité de réaliser le projet d'investissement:

$$h_\tau^* = \arg\max_{h_\tau} P(\tilde{w}_T(h_\tau) \geq I) \tag{3.1}$$

Le manager choisit donc le ratio h_τ de façon à maximiser:

$$\max_{h_\tau} P\left(\tilde{y}_h \geq \frac{I - w_\tau}{\alpha K}\right)$$

où la variable aléatoire $\tilde{y}_h \equiv y(h_\tau, \tilde{x}_T)$ est définie comme:

$$\tilde{y}_h \equiv h_\tau \, \bar{x} + (1 - h_\tau) \, \tilde{x}_T$$

Le programme de maximisation (3.1) a une solution finie $|h_\tau| < \infty$ si la distribution du taux de change à l'échéance est bornée: $A \leq \tilde{x}_T \leq B$. Tel est le cas, par exemple, si le taux de change évolue dans une *zone cible.*[14] Dans ce cas $P(\tilde{x}_T \leq B) = 1$ de même que $P(\tilde{x}_T \geq A) = 1$. Il en résulte que la variable aléatoire $\tilde{y}_h$ possède elle aussi une distribution bornée. Soient les fonctions f_A et f_B telles que:[15]

$$f_A(h) \equiv h\bar{x} + (1 - h) \, A$$

[13] Le troisième terme, rappelons le, s'interprète comme la valeur de continuation apportée par l'activité de la firme sans recours à l'investissement supplémentaire.

[14] La distribution du taux de change de l'exemple binômial discuté dans la section précédente possède une limite inférieure: $A = 0$.

[15] Ces deux fonctions ont été illustrées sur la figure 3.11.

$$f_B(h) \equiv h\bar{x} + (1-h)\,B$$

On obtient:

$$\begin{aligned} f_A(h) < \tilde{y}_h < f_B(h) &\iff h < 1 \\ f_A(h) > \tilde{y}_h > f_B(h) &\iff h > 1 \\ y_1 = \bar{x} = f_A(1) = f_B(1) &\iff h = 1 \end{aligned}$$

On peut distinguer deux types des solutions du programme (3.1) qui dépendent de la valeur de la richesse accumulée w_τ. Si celle-ci est suffisamment grande pour qu'un programme de couverture soit capable d'assurer, avec probabilité égale à 1, le montant des liquidités requis pour investir à l'échéance, on obtient des *stratégies de couverture.* Dans le cas contraire, on obtient les *stratégies spéculatives.*

Cas 1 *Stratégies de couverture*
Ces stratégies peuvent être mises en oeuvre à condition que les liquidités manquantes $I - w_\tau$ soient atteignables avec certitude. La relation suivante est alors vérifiée en $t = \tau$:

$$\frac{I - w_\tau}{\alpha K} \leq \bar{x}$$

Le gain espéré $\alpha K\bar{x}$ sur le prochain flux provenant de l'activité commerciale à l'étranger est alors supérieur à la valeur des liquidités manquantes pour investir. Il suffit alors de mettre en œuvre un programme de couverture pour "geler" ce profit, indépendamment de l'évolution du taux de change. Le ratio de couverture à appliquer doit se situer dans l'intervalle:

$$h_\tau \in [h^-, h^+]$$

où:

$$h^- = \frac{\frac{I-w_\tau}{\alpha K} - A}{\bar{x} - A}$$

et:

$$h^+ = \frac{\frac{I-w_\tau}{\alpha K} - B}{\bar{x} - B}$$

Comme $h^- \leq 1 \leq h^+$, une couverture complète $h_\tau = 1$ assure alors les liquidités nécessaires. La richesse terminale w_T est alors, avec probabilité égale à 1, supérieure à I. L'investissement à lieu avec certitude.

Cas 2 *Stratégies spéculatives*
Dans ce cas les liquidités manquantes $I - w_\tau$ ne peuvent pas être atteintes à l'échéance avec certitude et:

$$\frac{I - w_\tau}{\alpha K} > \bar{x}$$

Le gain espéré $\alpha K \bar{x}$ sur le prochain flux provenant de l'activité commerciale à l'étranger est inférieur à la valeur des liquidités manquantes pour investir. Le choix de ratio de couverture s'effectue dans l'intervalle:

$$h_\tau \in (-\infty, h_s^-] \cup [h_s^+, +\infty) \tag{3.2}$$

où $h_s^- < 1 < h_s^+$ et:

$$h_s^- = \frac{\frac{I-w_\tau}{\alpha K} - B}{\bar{x} - B}$$

$$h_s^+ = \frac{\frac{I-w_\tau}{\alpha K} - A}{\bar{x} - A}$$

L'inégalité (3.2) démontre qu'il peut ne pas être optimal de se couvrir. Un ratio de couverture $h_\tau = 1$ diminuerait la valeur de l'entreprise. La figure 3.11 illustre le choix du ratio h_τ dans le cas spéculatif. Dans le cas de distribu-

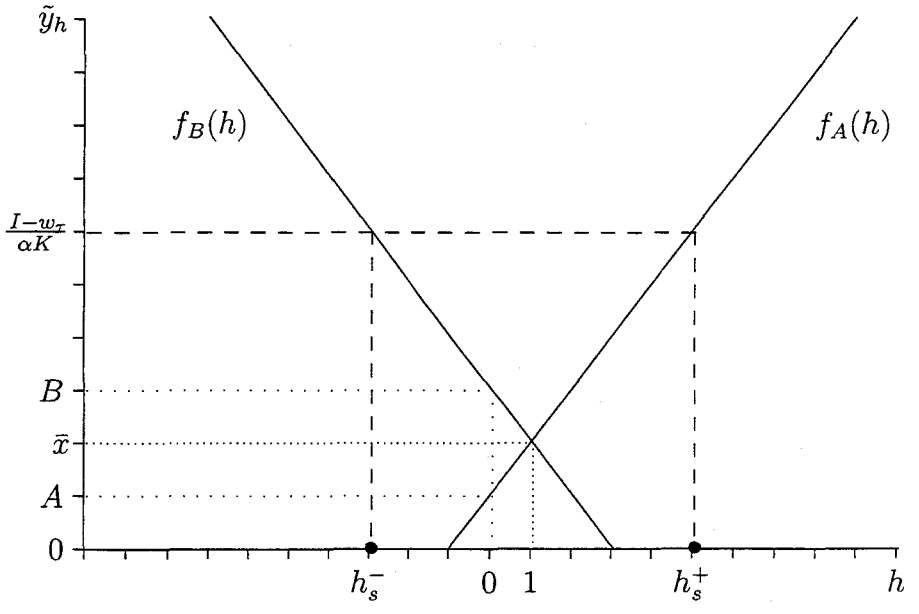


FIG. 3.11: Stratégie spéculative.

tion binômiale toute valeur h_τ vérifiant l'inégalité (3.2) maximise l'expression (3.1) et résulte en:

$$P\left(\tilde{y}_h \geq \frac{I - w_\tau}{\alpha K}\right) = \frac{1}{2} \tag{3.3}$$

Ceci explique la non-unicité des stratégies spéculatives observée dans l'exemple de la section précédente. Cependant, dans le cas général, on peut s'attendre à ce que la fonction de probabilité dans (3.3) soit croissante en $|h_\tau|$. Dans ce cas, où la probabilité d'avoir suffisamment des liquidités est croissante avec le volume de la position prise sur le marché, le choix optimal de ratio de couverture est: $h_\tau^* = \pm\infty$. Ceci peut facilement conduire à la spéculation. L'échelle de cette spéculation peut diminuer si les coûts de position sur le marché à terme sont croissants avec la valeur absolue du ratio de couverture $|h_\tau|$ ou bien en présence des coûts de faillite.

3.5 Conclusions pour le premier modèle

Le modèle étudié a permis de démontrer qu'une répartition de la couverture dans le temps en fonction de l'arrivée de l'information pertinente permet d'augmenter la valeur de l'entreprise. La stratégie qui maximise la valeur de l'entreprise n'est pas celle qui consiste à couvrir de manière complète tous les flux à venir. Cette constatation est contraire aux conclusions auxquelles Froot *et al.* [27] ont abouti dans leur modèle où la couverture n'intervient que dans un cadre uni-périodique.

La valeur de l'entreprise augmente encore davantage si on permet au décideur d'utiliser les instruments de couverture à des fins de spéculation. Ceci semble justifier les motivations qui peuvent amener les entreprises à spéculer sur les marchés des produits dérivés, ce qui par ailleurs a été confirmé par des observations empiriques. De plus, il apparaît à travers la présente étude qu'en absence des facteurs rendant les marchés imparfaits, tels les coûts de couverture ou les coûts de faillite, les stratégies dont le caractère est spéculatif ne sont pas déterminés de façon unique.

3.6 Le deuxième modèle: cas avec nécessité de disposer des liquidités

On étudie un modèle à 2 périodes: $t = 0, 1, 2$ où le taux de change x_t est supposé suivre une marche aléatoire:

$$\tilde{x}_{t+1} = x_t + \mu + \tilde{\epsilon}_{t+1}$$

La variable aléatoire $\tilde{\epsilon}_{t+1}$ est distribuée selon la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.[16] Pour simplifier on supposera que la dérive de ce processus est nulle: $\mu = 0$. Les

[16]Pour modéliser une diffusion du taux de change ayant une borne inférieure en zéro la démarche alternative consisterait à postuler: $\ln \tilde{\epsilon}_{t+1} \propto \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

contrats à terme permettent d'effectuer des opérations de couverture et le prix à terme est donné par la relation:

$$F_t^s = E[x_s|x_t] = x_t : s > t$$

Les gains de l'entreprise dépendent de la valeur des immobilisations K. L'entreprise perçoit, en $t = 1$ et en $t = 2$, des flux nets en devise étrangère proportionnels à K. Convertis en monnaie domestique ces cash-flows s'expriment comme:

$$G_t = \alpha K x_t \quad t = 1, 2$$

où α est la constante de proportionnalité. En $t = 0$ l'entreprise possède un montant des liquidités égal à w_0. Elle peut les placer à un taux sans risque égal à r. A l'échéance ($T = 2$), à ces liquidités s'ajoutent les montants des deux cash-flows. Les liquidités disponibles sont donc égales à:

$$w_T = w_0(1+r)^2 + \alpha K x_1(1+r) + \alpha K x_2$$

Examinons maintenant comment évolue la valeur de l'entreprise à l'échéance suivant la décision et le mode de financement de l'investissement. Tout d'abord on fera abstraction du problème des liquidités disponibles, nécessaires pour constituer un fonds de roulement. Cette question sera abordée par la suite.

Si le montant I est requis pour investir dans le projet, on a plusieurs situations possibles:

Cas 1 *Liquidités accumulés insuffisantes pour investir*
A l'échéance ($T = 2$), si l'entreprise n'investit pas, sa valeur est égale à la valeur des liquidités accumulées plus une valeur de continuation, résultant des cash-flows futurs attendus actualisés:

$$V_T^0 = w_T + E\left[\sum_{t=1}^{\infty} \frac{G_{T+t}}{(1+r)^t} | x_T\right]$$

On a bien: $E[G_{T+t}|x_T] = \alpha K(x_T + t\mu)$. Après simplifications on obtient la valeur de continuation sans investissement:

$$V_T^0 = w_T + \frac{\alpha K x_T}{r}$$

Cas 2 *Financement par liquidités accumulés*
Si la firme a accumulé les liquidités suffisantes ($w_T \geq I$), elle est dans la mesure de financer son investissement sans recourir au financement externe.

Investir le montant I s'interprète comme augmentation du stock de capital de K à $K+I$, augmentation des capacités de production et des flux espérés à venir. Dans ce cas la valeur de l'entreprise est:

$$V_T^I = w_T - I + E\left[\sum_{t=1}^{\infty} \frac{G_{T+t}}{(1+r)^t} | x_T\right]$$

où: $G_\tau = \alpha(K+I)x_\tau$. On obtient donc:

$$V_T^I = w_T - I + \frac{\alpha(K+I)x_T}{r}$$

Cas 3 *Financement par liquidités accumulés et par emprunt externe*
L'entreprise peut aussi investir, même si le montant des liquidités accumulées est pour cela insuffisant ($w_T < I$). Dans ce cas l'entreprise recourt au *financement externe* dont le coût on supposera proportionnel au montant emprunté, étant égal à la différence entre le montant I requis pour investir et les liquidités accumulés:

$$C(w_T, I) = c\,(I - w_T)$$

où $c > 0$ est une constante. La valeur de l'entreprise à l'échéance est dans ce cas:

$$V_T^{I_e} = w_T - I - C(w_T, I) + E\left[\sum_{t=1}^{\infty} \frac{G_{T+t}}{(1+r)^t} | x_T\right]$$

On obtient, après simplifications:

$$V_T^{I_e} = w_T - I - c\,(I - w_T) + \frac{\alpha(K+I)x_T}{r}$$

3.6.1 Le problème des liquidités disponibles

Dans cette section l'accent sera mis sur les contraintes de liquidité. Ces contraintes empêchent la firme de prendre des positions spéculatives trop importantes sur le marché à terme. Elles seront prises en compte lors de l'élaboration de la politique de couverture par le manager.

Les relations supposées dans ce qui suit peuvent paraître trop simplistes. Cependant le but est ici d'étudier le problème de couverture du risque de change. Une étude plus approfondie comprendrait l'inclusion du problème de faillite. Une telle possibilité d'extension paraît envisageable. Elle compléterait un courant de littérature important lequel, cependant, n'a pas encore à ce jour établi de lien précis entre utilisation de produits de gestion de risques, coûts de faillite et l'impact sur le choix de ratio dette/capitaux propres.

Supposons que si le montant des liquidités disponibles est trop faible, en dessous d'une valeur critique $L^* > 0$, l'entreprise est obligée d'emprunter des liquidités pour se constituer un fonds de roulement. Dans les trois cas possibles, énumérés dans la section précédente, les liquidités disponibles à l'instant $t = T$ sont respectivement:

$$L^0 = w_T$$

$$L^I = w_T - I$$

$$L^{I_e} = 0$$

et l'entreprise emprunte donc les montants nécessaires, ce qui engendre des coûts supplémentaires suivants:[17]

1. Dans le cas où il n'y a pas eu d'investissement, mais les liquidités accumulés sont insuffisantes il peut apparaître un coût supplémentaire C^0:

$$C^0 = \begin{cases} (c+1)(L^* - w_T) & \text{si} \quad w_T < L^* \\ 0 & \text{si} \quad w_T \geq L^* \end{cases}$$

   Celui-ci peut résulter par exemple d'une perte sur le marché à terme. Cet emprunt supplémentaire et coûteux auquel l'entreprise serait alors amenée à recourir la rend plus attentive quant à la gestion des positions sur le marché à terme.

2. Dans le cas d'investissement par seules les liquidités accumulées à l'échéance, si celles-ci sont entièrement investies, il peut y avoir la nécessité de se procurer des liquidités manquantes:

$$C^I = \begin{cases} (c+1)\left[L^* - (w_T - I)\right] & \text{si} \quad w_T - I < L^* \\ 0 & \text{si} \quad w_T - I \geq L^* \end{cases}$$

3. Dans le cas où il y a eu l'investissement avec recours au financement externe, le montant emprunté est égal à L^* et les coûts s'élèvent à:

$$c^{I_e} = (c+1)L^*$$

   Dans ce dernier cas l'entreprise emprunte donc juste ce qu'il faut pour combler le déficit.

[17]Pour une analyse plus précise il faudrait étudier comment les flux ultérieurs: $G_\tau : \tau > T$ comblent progressivement le déficit des liquidités disponibles.

La valeur de l'entreprise à l'échéance

La valeur de l'entreprise à l'échéance est ici réajustée afin de tenir compte des coûts éventuels engendrés par le manque des liquidités. Selon le cas on obtient respectivement:

$$V_T = \begin{cases} V_T^0 - C^0 & \text{si} \quad w_T < w_T^* \\ V_T^{I_e} - C^{I_e} & \text{si} \quad w_T^* \leq w_T < I \\ V_T^I - C^I & \text{si} \quad I \leq w_T \end{cases}$$

où w_T^* est la *valeur critique des liquidités accumulées* à l'échéance. Si $w_T < w_T^*$, l'entreprise n'investit pas et continue son activité avec le stock de capital égal à K. Dans le cas contraire le projet d'investissement est entrepris. La condition d'équilibre permettant de déterminer w_T^* est que l'entrepreneur soit indifférent entre ne pas investir et investir en ayant recours au financement externe:

$$w_T^* \ : \ V_T^0 - C^0 = V_T^{I_e} - C^{I_e}$$

Sous condition que: $w_T^* > L^*$ on obtient:

$$w_T^* = \frac{1}{c}\left[(1+c)(I+L^*) - \frac{\alpha I x_T}{r}\right]$$

Spécification du modèle Afin de simplifier la démarche, sans cependant faire perdre trop de réalisme au modèle, on fait les simplifications suivantes:

1. On fait dépendre la valeur de l'entreprise à l'échéance uniquement de la valeur des liquidités accumulés w_T, et non de la valeur terminale du taux de change x_T. On suppose cette dernière être égale[18] à une valeur "moyenne" ou espérée:

   $$x_T \longrightarrow \bar{x}$$

   Par ce biais la valeur du projet devient indépendante, et donc non-corrélée, par rapport à l'incertitude sous-jacente induite par l'évolution aléatoire du taux de change.

2. On suppose que la contrainte de liquidité devient "gênante" seulement à partir du moment où il y a un véritable manque des liquidités:

   $$L^* = 0$$

[18] Cette hypothèse reste valable uniquement dans les expressions donnant la valeur de l'entreprise et les différents coûts.

La valeur de l'entreprise L'incorporation des hypothèses de spécification du modèle résulte en la valeur de l'entreprise qui peut s'écrire:

$$V_T(w_T) = \begin{cases} w_T + \frac{\alpha K \bar{x}}{r} + (c+1)w_T & \text{si} \quad w_T < 0 \\ w_T + \frac{\alpha K \bar{x}}{r} & \text{si} \quad 0 \leq w_T < w_T^* \\ w_T - I - c(I - w_T) + \frac{\alpha(K+I)\bar{x}}{r} & \text{si} \quad w_T^* \leq w_T < I \\ w_T - I + \frac{\alpha(K+I)\bar{x}}{r} & \text{si} \quad I \leq w_T \end{cases}$$

où la valeur critique des liquidités accumulés s'écrit maintenant comme:

$$w_T^* = \frac{I}{c}\left[(1+c) - \frac{\alpha \bar{x}}{r}\right]$$

La valeur de l'entreprise se prête mieux aux interprétations exprimée sous forme suivante:

$$\begin{aligned} V_T(w_T) &= \frac{\alpha K \bar{x}}{r} + w_T + w_T(c+1)\mathbf{1}_{w_T<0} \\ &\quad + \left[\left(\frac{\alpha I \bar{x}}{r} - I\right) - c(I - w_T)\mathbf{1}_{w_T<I}\right]\mathbf{1}_{w_T \geq w_T^*} \end{aligned}$$

Interprétation La relation entre V_T et w_T peut se décomposer en trois parties distinctes:

1. La *valeur de continuation sans investissement*:

$$\frac{\alpha K \bar{x}}{r} + w_T$$

2. La *valeur nette procurée par l'investissement* si celui-ci a lieu, corrigée le cas échéant par les *coûts de financement externes*:

$$\left[\left(\frac{\alpha I \bar{x}}{r} - I\right) - c(I - w_T)\mathbf{1}_{w_T<I}\right]\mathbf{1}_{w_T \geq w_T^*}$$

3. Les *coûts d'emprunt des liquidités*, servant à constituer un fonds de roulement, si les liquidités accumulés deviennent négatives:

$$w_T(c+1)\mathbf{1}_{w_T<0}$$

Dans ce cas l'investissement n'a pas lieu et l'entreprise est en difficulté.

Sur la figure 3.12 on peut aussi remarquer que la valeur de l'entreprise est linéairement croissante et continue en w_T. Cependant la "vitesse" d'augmentation de la valeur de l'entreprise n'est pas constante. Elle dépend notamment de la façon dont les différentes composantes de coût et celles de valeur supplémentaire procurée par l'investissement viennent s'ajouter à la valeur de continuation sans investissement.

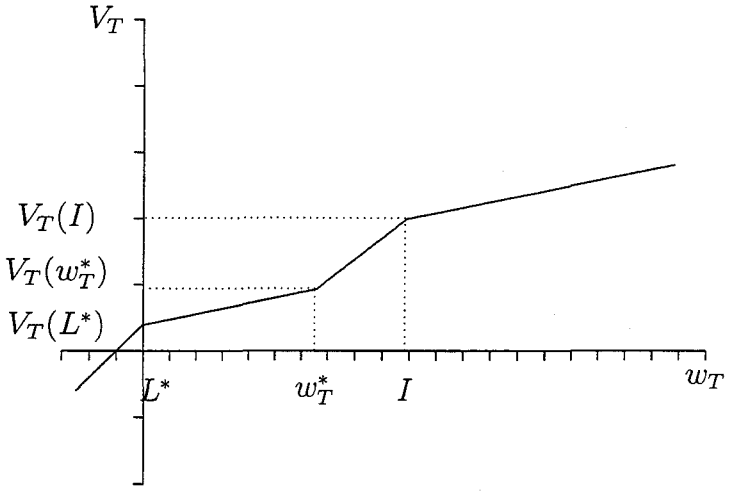


FIG. 3.12: La valeur de la firme à l'échéance, V_T, en fonction des liquiditiés accumulés w_T.

3.7 Solution du deuxième modèle

Dans cette section la solution du modèle esquissé dans la section précédente sera présentée.

3.7.1 Détermination de ratio de couverture optimal

A l'instant intermédiaire ($t = 1$) le décideur connaît les caractéristiques du projet d'investissement, l'état des liquidités accumulés w_1, ainsi que la valeur du taux de change x_1. Le choix de ratio de couverture h_1, une période avant le moment de la prise de décision d'investissement, s'effectue donc en connaissance de ces valeurs. Vu de l'instant $t = 1$ la richesse terminale w_T est inconnue. C'est donc une variable aléatoire liée linéairement au taux de change:

$$\tilde{w}_T = w_1(1 + r) + \alpha K \tilde{x}_T$$

Si le manager couvre son risque de change avec des contrats à terme et choisit un ratio de couverture h_1, la distribution de la richesse terminale est modifiée de la façon suivante:

$$\tilde{w}_{T,h_1} = w_1(1+r) + \alpha K \left[h_1 \bar{x}_T + (1-h_1)\tilde{x}_T\right]$$

où $\bar{x}_T$ est égal au taux de change à terme: $F_1^T = E[\tilde{x}_T|x_1] = x_1$. On voit donc que sans couverture ($h_1 = 0$), la richesse terminale espérée est égale à:

$$E[\tilde{w}_T|x_1, w_1] = w_1(1+r) + \alpha K x_1$$

et la variance:

$$Var[\tilde{w}_T|x_1, w_1] = (\alpha K \sigma)^2$$

Dans le cas avec couverture ($h_1 \neq 0$), on obtient:

$$\mu_W \equiv E[\tilde{w}_{T,h_1}|x_1, w_1] = w_1(1+r) + \alpha K x_1$$

et:

$$\sigma_W^2(h_1) \equiv Var[\tilde{w}_{T,h_1}|x_1, w_1] = (\alpha K \sigma)^2 (1-h_1)^2$$

La couverture par contrats à terme ne change donc pas la valeur espérée de la richesse terminale. Cependant, elle peut modifier sa variance à la hausse si $(1-h_1)^2 > 1$. Dans le cas contraire $(1-h_1)^2 < 1$ et la variance diminue. On obtient donc que la "couverture":

1. *Réduit le risque*, si le ratio de couverture intermédiaire se maintient dans l'intervalle:

   $$0 < h_1 < 2$$

   Il s'agit dans ce cas de la *couverture du risque de change* qui réduit le risque de change en diminuant l'exposition des liquidités à ce risque. Le risque est *entièrement couvert* si $h_1 = 1$.

2. *Augmente le risque*, si le ratio de couverture est trop grand en valeur absolue:

   $$h_1 < 0 \text{ ou } 2 < h_1$$

   Il s'agit dans ce cas d'une *spéculation sur l'évolution du taux de change*, laquelle augmente l'exposition des liquidités accumulés à ce risque.

3.7.2 Maximisation de la valeur de la firme

Nous allons maintenant examiner si la réduction de l'exposition des liquidités accumulés au risque de change est bénéfique pour la valeur de la firme. Le manager choisit le *ratio de couverture optimal* h_1^* de façon à maximiser la valeur espérée de la firme:

$$h_1^* = \arg\max_{h_1} E[V_T(\tilde{w}_{T,h_1})|x_1, w_1]$$

La valeur espérée de la firme dépend du ratio de couverture h_1. Celui-ci, sans modifier la valeur espérée de la richesse finale w_T, change cependant la valeur espérée de la firme et modifie donc la décision d'investissement escomptée.

En effet, la valeur de la firme est ici une fonction monotone croissante de la richesse finale accumulée. Comme la couverture ne modifie pas la valeur espérée de cette richesse, on pourrait penser qu'elle reste sans effet sur la valeur de la firme. La modification de la valeur de la firme intervient ici à travers un mix particulier de convexité et de concavité locales de cette fonction et ce n'est pas la modification de l'espérance mais de la variance qui apparaît comme pertinente.

La valeur espérée de la firme, comme fonction de ratio de couverture h_1, peut s'écrire comme:

$$\begin{aligned}
\bar{V}_T(h_1) &\equiv E[V_T(\tilde{w}_{T,h_1})|x_1, w_1] \\
&= \frac{\alpha K \bar{x}}{r} + w_1(1+r) + \alpha K x_1 + \left(\frac{\alpha I \bar{x}}{r} - I\right) E_1[\mathbf{1}_{w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1}}] \\
&\quad -cIE_1[\mathbf{1}_{w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1} < I}] + c\,E_1[\tilde{w}_{T,h_1}\,\mathbf{1}_{w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1} < I}] \\
&\quad +(c+1)E_1[\tilde{w}_{T,h_1}\,\mathbf{1}_{\tilde{w}_{T,h_1} < 0}] \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

où par $E_1[.]$ on a noté l'opérateur d'espérance conditionnelle $E[.|x_1, w_1]$.

Interprétation La somme des trois premiers termes s'interprète comme la valeur espérée de la firme: valeur de continuation plus la valeur des liquidités espérés en $t = T$, si la firme a réalisé une performance "normale". La firme n'investit pas mais elle a suffisamment de liquidités accumulés pour ne pas avoir besoin de se les procurer l'extérieur pour se constituer un fonds de roulement. Le choix de ratio de couverture est sans effet sur cette valeur.

Le quatrième terme s'interprète comme la valeur espérée de l'opportunité d'investissement. Celle-ci est modifiée par le choix de ratio de couverture. La couverture peut augmenter la probabilité P d'acquérir la valeur supplémentaire égale à $\frac{\alpha I \bar{x}}{r} - I > 0$. En effet, ce terme est multiplié par la probabilité

d'investissement, lequel a lieu dans le cas où les liquidités accumulés $\tilde{w}_{T,h_1}$ sont supérieures à leur valeur critique w_T^*:

$$E_1[\mathbf{1}_{w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1}}] = P\left(w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1}\right)$$

De façon analogue on peut interpréter les termes restants. Ces termes changent à la baisse la valeur de la firme car il s'agit des dépenses. Le choix de couverture modifie la valeur espérée des coûts de financement externe (cinquième et sixième termes) ainsi que la valeur espérée des coûts des liquidités (septième terme). Après avoir calculé les espérances[19] dans (3.4), on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{V}_T(h_1) &= \frac{\alpha K \bar{x}}{r} + w_1(1+r) + \alpha K x_1 + \left(\frac{\alpha I \bar{x}}{r} - I\right)[1 - \mathcal{N}(d_1)] \\ &\quad -cI\left[\mathcal{N}(d_2) - \mathcal{N}(d_1)\right] + c\mu_W\left[\mathcal{N}(d_2) - \mathcal{N}(d_1)\right] \\ &\quad +(c+1)\left[\mu_W \mathcal{N}(d_3) - \sigma_W(h_1) n(d_3)\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

où:

$$\begin{aligned} d_1(h_1) &\equiv \frac{w_T^* - \mu_W}{\sigma_W(h_1)} \\ d_2(h_1) &\equiv \frac{I - \mu_W}{\sigma_W(h_1)} \\ d_3(h_1) &\equiv -\frac{\mu_W}{\sigma_W(h_1)} \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} n(t) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \\ \mathcal{N}(x) &\equiv \int_{-\infty}^{x} n(t)dt \end{aligned}$$

La valeur de la firme $\bar{V}_T(h_1)$ a été représentée sur la figure 3.13 en fonction du ratio de couverture h_1. Il est intéressant de remarquer l'apparition de deux ratios de couverture optimaux $h_1^- \approx -17.5297$ et $h_1^+ \approx 19.5297$. Ces ratios correspondent à la spéculation à la baisse et à la hausse sur le cours de la devise. Sur la figure 3.13 on peut aussi remarquer un minimum local correspondant à la couverture parfaite des flux futurs: $h_1 = 1$. Il est donc clair qu'un manager rationnel dont le but est de maximiser la valeur de la firme sera hautement tenté par des positions spéculatives, la valeur des liquidités accumulés w_0 étant relativement élevée mais encore inférieure au montant I requis pour investir. L'étendue de ces positions est dans le présent modèle atténuée par le danger de faillite induit par les ratios h_1 élevés à caractère spéculatif.

[19] Consulter l'annexe 3.A.

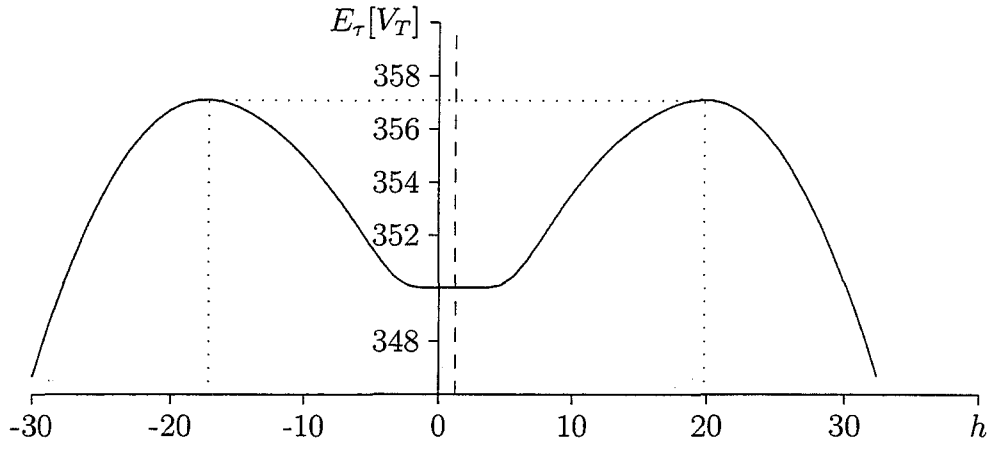


FIG. 3.13: La valeur de la firme à l'échéance, vue de l'instant intermédiaire $t = 1$, en fonction du ratio de couverture h_1.

Dans cet exemple: $w_\tau = 150$, $I = 200$, $r = 5\%$, $\alpha = 0.1$, $K = 50$, $\bar{x} = 1$, $\sigma = 0.7$ and $c = 3$. Les deux maxima correspondent aux ratios de couverture spéculatifs $h^- = -17.5297$ et $h^+ = 19.5297$ pour lesquels $E_\tau[h^+] = E_\tau[h^-] = 357.083$. Le minimum local (visible sur le graphique comme plateau) correspond à $h = 1$ and $E_\tau[1] = 350$. On aperçoit une symétrie en miroir par rapport à la ligne $h = 1$.

3.8 Conclusion

Les coûts de financement externes peuvent expliquer le décalage des décisions de couverture dans le temps, dans un contexte multipériodique où le décideur neutre au risque maximise la valeur de la firme. Utilisée à bon escient, la couverture peut donc apporter de la valeur ajoutée et ne doit pas forcement être induite par une aversion au risque.

Le premier modèle étudié dans ce chapitre semble expliquer les observations constatés dans le sondage effectué par Wharton School [2] selon lequel les managers préfèrent attendre l'arrivée de nouvelles informations pour couvrir plus tard et à plus court terme les flux risqués dont ils sont déjà au courant. Il apparaît que la stratégie qui maximise la valeur de l'entreprise n'est pas celle qui consiste à couvrir tous les flux à venir, ce qui contredit notamment les recommandations de Froot *et al.* [27] résultant d'un modèle unipériodique. Par ailleurs, l'hypothèse des coûts externes seule ne semble pas expliquer suffisamment le comportement spéculatif observé sur les marchés à terme. En effet, l'étendue des positions spéculatives n'est pas bornée dans le premier modèle.

La possibilité d'une crise des liquidités disponibles est introduite et étudiée dans le second modèle. Dans certaines conditions particulières comme les liquidités déjà accumulés suffisamment grandes et échéance d'investissement proche, la maximisation de la valeur de la firme est atteinte à travers des positions spéculatives. Cependant, l'étendue des positions spéculatives se trouve limitée par la menace d'une crise des liquidités.

Annexes

3.A Calcul des espérances

On introduit les notations suivantes:

1. La densité de probabilité de la loi normale centrée et réduite:

$$n(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

2. La probabilité $P(X < x)$ où X est une variable aléatoire distribuée selon la loi normale centrée et réduite:

$$\mathcal{N}(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} n(t)dt$$

En supposant que $h_1 \neq 1$ les quatre espérances dans expression 3.4 donnant la valeur espérée de la firme à l'échéance sont respectivement égales à:

Terme 1

$$\begin{aligned} E_1[\mathbf{1}_{w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1}}] &= P(\tilde{w}_{T,h_1} \geq w_T^*) \\ &= P\left(\frac{\tilde{w}_{T,h_1} - \mu_W}{\sigma_W(h_1)} \geq \frac{w_T^* - \mu_W}{\sigma_w(h_1)}\right) \\ &= \int_{d_1(h_1)}^{+\infty} n(t)dt \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{d_1(h_1)} n(t)dt \\ &= 1 - \mathcal{N}(d_1(h_1)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

où:

$$d_1(h_1) \equiv \frac{w_T^* - \mu_W}{\sigma_W(h_1)}$$

Terme 2

$$\begin{aligned} E_1[\mathbf{1}_{w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1} < I}] &= P(w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1} < I) \\ &= P\left(\frac{w_T^c - \mu_W}{\sigma_w(h_1)} \leq \frac{\tilde{w}_{T,h_1} - \mu_W}{\sigma_W(h_1)} < \frac{I - \mu_W}{\sigma_w(h_1)}\right) \\ &= \int_{d_1(h_1)}^{d_2(h_1)} n(t)dt \\ &= \mathcal{N}(d_2(h_1)) - \mathcal{N}(d_1(h_1)) \end{aligned} \tag{3.7}$$

où:

$$d_2(h_1) \equiv \frac{I - \mu_W}{\sigma_W(h_1)}$$

Terme 3

$$E_1[\tilde{w}_{T,h_1}\, \mathbf{1}_{w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1} < I}] = \int_{w_T^*}^{I} w \frac{1}{\sigma_W(h_1)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-\mu_W)^2}{2\sigma_W^2(h_1)}}\, dw$$

On fait le changement des variables suivant:

$$\begin{aligned} w &\rightarrow \sigma_W(h_1)\, t + \mu_W \\ dw &\rightarrow \sigma_W(h_1)\, dt \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} E_1[\tilde{w}_{T,h_1}\, \mathbf{1}_{w_T^* \leq \tilde{w}_{T,h_1} < I}] &= \int_{d_1(h_1)}^{d_2(h_1)} (\sigma_W(h_1)\, t + \mu_W) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\ &= \frac{\sigma_W(h_1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_1(h_1)}^{d_2(h_1)} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \mu_W \int_{d_1(h_1)}^{d_2(h_1)} n(t)\, dt \\ &= \frac{\sigma_W(h_1)}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(d_1(h_1))^2}{2}} - e^{-\frac{(d_2(h_1))^2}{2}}\right) \\ &\quad + \mu_W \left[\mathcal{N}(d_2(h_1)) - \mathcal{N}(d_1(h_1))\right] \\ &= \sigma_W(h_1) \left[n(d_1(h_1)) - n(d_2(h_1))\right] \\ &\quad + \mu_W \left[\mathcal{N}(d_2(h_1)) - \mathcal{N}(d_1(h_1))\right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Terme 4

$$E_1[\tilde{w}_{T,h_1}\, \mathbf{1}_{\tilde{w}_{T,h_1} < 0}] = \int_{-\infty}^{0} w \frac{1}{\sigma_W(h_1)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-\mu_W)^2}{2\sigma_W^2(h_1)}}\, dw$$

On fait le changement des variables comme pour calculer le terme précédent:

$$\begin{array}{rcl} w & \rightarrow & \sigma_W(h_1)\, t + \mu_W \\ dw & \rightarrow & \sigma_W(h_1)\, dt \end{array}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} E_1[\tilde{w}_{T,h_1}\, \mathbf{1}_{\tilde{w}_{T,h_1}<0}] &= \int_{-\infty}^{d_3(h_1)} (\sigma_W(h_1)\, t + \mu_W)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\ &= \frac{\sigma_W(h_1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_3(h_1)} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \mu_W \int_{-\infty}^{d_3(h_1)} n(t)\, dt \\ &= -\frac{\sigma_W(h_1)}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(d_3(h_1))^2}{2}} + \mu_W\, \mathcal{N}(d_3(h_1)) \\ &= -\sigma_W(h_1)\, n(d_3(h_1)) + \mu_W\, \mathcal{N}(d_3(h_1)) \end{aligned} \tag{3.9}$$

où:

$$d_3(h_1) \equiv -\frac{\mu_W}{\sigma_W(h_1)}$$

Bibliographie

[1] *A survey of corporate risk management.* The Economist, February, 10 1996.

[2] *Wharton/CIBC Wood Gundy 1995 survey of derivatives usage by U.S. non-financial firms*, survey study, The Weiss Center for International Financial Research & The Wharton School, University of Pennsylvania, april 1996.

[3] M. ABRAMOVITZ ET I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.

[4] M. ADLER ET J. DETEMPLE, *On the optimal hedge of a nontraded cash position*, Journal of Finance, 43 (1988), pp. 143–153.

[5] M. ADLER ET B. DUMAS, *International portfolio choice and corporation finance: a synthesis*, Journal of Finance, 38 (1983), pp. 925–984.

[6] F. AXEL, *The export and hedging decision under revenue and exchange rate risk*, working paper, Universität Konstanz, 1993.

[7] A. BALAKRISHNAN, *Analyse Fonctionnelle Apliquée*, PWN, Varsovie, 1992. En polonais.

[8] R. BELLMAN, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.

[9] B. BENSAID, J.-P. LESNE, H. PAGÈS, ET J. SCHEINKMAN, *Derivative asset pricing with transaction costs*, Mathematical Finance, v2(2) (1992), pp. 63–86.

[10] D. BREEDEN, *An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities*, Journal of Financial Economics, 7 (1979), pp. 265–296.

[11] I. BRONSTEIN ET K. SIEMIENDIAÏEV, *Matematyka — poradnik encyklopedyczny (en polonais)*, PWN, Warszawa, 1990.

[12] M. CHESNEY, B. MAROIS, ET R. WOJAKOWSKI, *Les options de change - évaluation et utilisation*, Economica, Paris, 1995.

[13] G. CHOW, *Optimal control without solving the Bellman equation*, Journal of Economic Dynamics and Control, 17 (1993), pp. 621–630.

[14] T. COPELAND, Y. JOSHI, ET M. QUEEN, *How to evaluate corporate FX risk management programs*, working paper, McKinsey & Company, 1995.

[15] J. COX, J. INGERSOLL, JR., ET S. ROSS, *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53 (1985), pp. 385–408.

[16] J. C. COX ET C. FU HUANG, *A variational problem arising in financial economics with an application to a portfolio turnpike theorem*, working paper 1751–86, Massachusets Institute of Technology, May 1986.

[17] ——, *Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process*, Journal of Economic Theory, 49 (1989), pp. 33–83.

[18] R.-A. DANA ET M. JEANBLANC-PICQUÉ, *Marchés Financiers en Temps Continu – Valorisation et Équilibre*, Economica, Paris, 1994.

[19] F. DELGADO ET B. DUMAS, *Target zones, broad and narrow*, in Exchange rate targets and currency bands, P. Krugman et M. Miller, eds., Cambridge University Press, 1992.

[20] G. DEMANGE ET J. ROCHET, *Méthodes mathématiques de la finance*, Economica, Paris, 1992.

[21] P. DEMARZO ET D. DUFFIE, *Corporate incentives for hedging and hedge accounting*, The Review of Financial Studies, 8 (1995).

[22] A. K. DIXIT ET R. S. PINDYCK, *Investment under uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.

[23] B. DUMAS, *Short and long term hedging for the corporation*, Cahier de Recherche 447, Groupe HEC, 1992.

[24] ——, *Hedging is not enough: Why firms need stable exchange rates*, document de cours non publié, Groupe HEC, 1994.

[25] ——, *The behaviour of spot foreign exchange rates.* document de recherche non publié, Groupe HEC, 1995.

[26] ——, *Gestion financière internationale.* notes de cours, FSM2 Majeure Finance, Groupe HEC, 1995.

[27] K. FROOT, D. SCHARFSTEIN, ET J. STEIN, *Risk management: Coordinating investment and financing policies*, Journal of Finance, 48 (1993), pp. 1629–1658.

[28] K. FROOT ET J. STEIN, *Risk management, capital budgeting and capital structure policy for financial institutions: An integrated approach*, working paper 5403, National Bureau of Economic Research, January 1996.

[29] H. HE ET H. F. PAGÈS, *Cosumption and portfolio decisions with labor income and borrowing constraints*, finance working paper 200, University of California at Berkeley, August 1990.

[30] T. HO, *Intertemporal commodity futures hedging and the production decision*, Journal of Finance, 39 (1984), pp. 351–377.

[31] C. HUANG ET H. PAGÈS, *Optimal cosumption and portfolio policies with an infinite horizon: existence and convergence*, Notes d'Etudes et de Recherche 90/1, Banque de France, Paris, May 1990.

[32] M. JENSEN ET W. MECKLING, *Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs and ownership structure*, Journal of Financial Economics, 3 (1976), pp. 305–360.

[33] E. KACKI, *Equations différentielles partielles dans les problèmes des sciences physiques et techniques*, WNT, Varsovie, 1992. En polonais.

[34] I. KARATZAS, J. LEHOCZKY, S. SHREVE, ET G. XU., *Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market*, working paper, 1989.

[35] I. KARATZAS ET S. E. SHREVE, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[36] H. KOO, *Consumption and portfolio choice with uninsurable income risk*, working paper, Department of Economics, Princeton University, 1991.

[37] P. KRUGMAN, *Target zones and exchange rate dynamics*, Quarterly Journal of Economics, 106 (1991), pp. 669–682.

[38] A. LIOUI ET P. PONCET, *Optimal hedging in a dynamic futures market with a nonnegativity constraint on wealth*, Journal of Economic Dynamics and Control, 20 (1996), pp. 1101–1111.

[39] A. LIOUI, P. N. D. TRONG, ET P. PONCET, *Optimal dynamic hedging in incomplete futures markets*, Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 21 (1996), pp. 103–122.

[40] J. MARTIJN, *The impact of exchange risk on a price-discriminating exporter*, working paper, University of Amsterdam, 1993.

[41] R. C. MERTON, *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*, Journal of Economic Theory, 3 (1971), pp. 373–413.

[42] ——, *An intertemporal capital asset pricing model*, Econometrica, 41 (1973), pp. 867–888.

[43] F. MODIGLIANI ET M. MILLER, *The cost of capital, corporation finance and the theory of investment*, American Economic Review, 48 (1958), pp. 261–297.

[44] B. OKSENDAL, *Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, 1992.

[45] C. SMITH ET R. STULZ, *The determinants of firms' hedging policies*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 20 (1985).

[46] G. SMITH, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford University Press, 1978.

[47] R. STULZ, *Optimal hedging policies*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 19 (1984), pp. 127–140.

[48] ——, *Rethinking risk management*, working paper, Ohio State University, November 1995.

[49] L. SVENSSON ET I. WERNER, *Nontraded assets in incomplete markets: Pricing and portfolio choice*, European Economic Review, 37 (1993), pp. 1149–1168.

[50] P. TUFANO, *Who manages risk? an empirical examination of risk management practices in the gold mining industry*, working paper, Harvard Business School, December 1995.

[51] H. R. VARIAN, ed., *Economic and Financial Modeling with Mathematica*, TELOS, Springer-Verlag, New York, 1993.

[52] O. VASICEK, *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics, 5 (1977), pp. 177–188.

[53] T. VON UNGERN-STERNBERG ET C. VON WEIZSÄCKER, *Strategic foreign exchange management*, Journal of Industrial Economics, 38 (1990), pp. 381–396.

[54] R. WOJAKOWSKI, *Evaluation des options asiatiques*, mémoire de DEA, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris, 1992.

[55] ——, *La filiale à l'étranger.* HEC, 1994. note de recherche non publiée.

[56] ——, *Couverture dynamique optimale du risque de change de long terme pour une entreprise*, working paper, Département Finance et Economie et Doctorat HEC, 1996.

[57] S. WOLFRAM, *Mathematica: a System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1991.

[58] J. ZABCZYK, *Esquisse de la théorie mathématique du contrôle optimal*, Biblioteka Matematyczna, PWN, Varsovie, 1991. En polonais.

[59] D. ZWILLINGER, *Handbook of differential equations*, Academic Pres, 1989.