

Etude des effets collectifs dans les collisions d'ions lourds ultrarelativistes

Phuong Mai Dinh

▶ **To cite this version:**

Phuong Mai Dinh. Etude des effets collectifs dans les collisions d'ions lourds ultrarelativistes. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Ecole Polytechnique X, 2002. Français. NNT : . tel-00001582

HAL Id: tel-00001582
https://pastel.hal.science/tel-00001582

Submitted on 22 Aug 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École polytechnique

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'École polytechnique

par

Phuong Mai DINH

Sujet :

Étude des effets collectifs dans les collisions d'ions lourds ultrarelativistes

Soutenue le 26 juin 2002 à l'École polytechnique
devant la Commission d'examen :

Monsieur	Andrzej Bialas	Rapporteur
Monsieur	Pierre Fayet	
Monsieur	Jean Gosset	Rapporteur
Monsieur	Jean-Yves Ollitrault	Directeur de thèse
Madame	Dominique Schiff	
Monsieur	Eric Suraud	Président du Jury

Etude des effets collectifs dans les collisions d'ions lourds ultrarelativistes

Phuong Mai DINH

Résumé

Les collisions d'ions lourds ultrarelativistes, dont le but est de former et d'étudier le plasma de quarks et de gluons, recouvrent un vaste domaine de la physique nucléaire et des hautes énergies. Nombreuses sont les observables proposées comme signatures de la formation du plasma de quarks et de gluons. Dans mon travail de thèse, je me suis penchée sur deux d'entre elles : la suppression du J/ψ et les effets collectifs ou de «flot», ces derniers occupant la majeure partie de ma thèse.

Nous avons articulé ce document entre quatre parties. La première est une introduction générale aux collisions d'ions lourds ultrarelativistes, et notamment à la physique du flot. Les deux parties suivantes sont exclusivement consacrées aux méthodes d'analyse du flot : la partie B est une critique des méthodes standard utilisées depuis 1985. Nous mettrons en évidence les limites de validité de ces méthodes et nous montrerons, sur l'exemple des données de la collaboration NA49, qu'elles ne sont pas fiables aux énergies du CERN. Dans la partie C, la plus importante de cette thèse, nous proposons une nouvelle méthode d'analyse de flot. Cette méthode généralise les méthodes standard, et permet des mesures de flot plus fines, là où les méthodes standard échouent. Nous présenterons ensuite l'application de cette méthode aux données des collaborations expérimentales STAR de RHIC (par A. Tang) et NA49 du CERN (par moi-même). Enfin, la dernière partie sera dédiée à la suppresssion du J/ψ.

Study of collective effects in ultrarelativistic heavy ion collisions

Phuong Mai DINH

Abstract

The aim of ultrarelativistic heavy ion collisions is to create and to study the quark gluon plasma. They cover a vast field of both nuclear and high energy physics. Several observables are proposed as signatures of the quark gluon plasma. In this thesis, I study two of them : the J/ψ suppression and collective or «flow» effects. The latter is the main topic of my thesis.

This document is divided into four parts. The first one is a general introduction to ultrarelativistic heavy ion collisions, and especially to the physics of flow. The following two parts are entirely devoted to methods of flow analysis : part B is a criticism of standard methods used since 1985. We will bring to the fore the limits of validity of these methods and, using the example of the NA49 collaboration data, we will demonstrate that they are not reliable at CERN energies. In the main part of this thesis, part C, we will propose a new method of flow analysis. It generalizes standard methods and allow more sensitive measurements where standard methods fail. Then we will present applications of our method to the STAR experimental collaboration at RHIC (by A. Tang) and to the NA49 collaboration at CERN (by myself). Finally the last part is dedicated the J/ψ suppression.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement à mon directeur de thèse, Jean-Yves Ollitrault, qui a encadré cette thèse, fruit de trois ans de travail passés au Service de Physique Théorique du CEA de Saclay. Je lui dois tout : sa disponibilité, sa pédagogie, son enthousiasme et ses qualités autant scientifiques qu'humaines ont fait de cette thèse une réussite. Je lui serai éternellement redevable de m'avoir initiée au travail de recherche dans des conditions aussi exceptionnelles.

Je remercie également Nicolas Borghini avec qui j'ai notamment écrit mes premiers programmes en C et calculé dans la chaleur de l'été des développements limités à plus de vingt termes... Sa collaboration et sa bonne humeur m'ont été très précieuses.

Les conditions matérielles constituent également un facteur non négligeable dans le travail de thèse : le SPhT propose des moyens importants, que ce soit du point de vue scientifique ou informatique, afin que le thésard ne manque de rien ! Je remercie Jean-Paul Blaizot, non seulement pour m'avoir accueillie dans le laboratoire, mais également pour avoir su me consacrer un peu de temps à mon travail de recherche malgré ses nombreuses réunions ou missions. Je remercie également tout le service informatique sans qui je n'aurai pas pu écrire cette thèse, et Jean-Marie Normand et Sylvie Zaffanella pour leur gentillesse et leur efficacité. Enfin les pauses du midi et les pauses thé–café se faisaient toujours dans la bonne humeur grâce aux thésards et aux chercheurs «juniors» du SPhT.

La dernière année de ma thèse a été bien remplie par ma collaboration avec l'expérience NA49 du CERN, notamment avec les personnes de l'université de Francfort : je remercie Peter Seyboth et Reinhart Stock pour m'avoir permis d'intégrer une équipe d'expérimentateurs, Marek Gazdzicki et Herbert Ströbele pour m'avoir accueillie à Francfort et permis de travailler sur les données de NA49, Art Poskanzer pour sa gentillesse et enfin Alexander Wetzler qui a mené de front son analyse de flot et mes déboires informatiques au CERN.

Je voudrais également remercier chacun des membres de mon jury : Pierre Fayet, Dominique Schiff, Eric Suraud et surtout Jean Gosset et Andrzej Bialas qui ont accepté d'être mes rapporteurs malgré l'épaisseur de mon manuscrit.

Je terminerai en remerciant ma famille qui m'a suivie tout au long de mes études et Philippe Sève qui a été un soutien permanent et une aide précieuse, autant pour ma recherche que pour mon enseignement de monitorat.

Table des matières

Résumé **I**

A Les collisions d'ions lourds ultrarelativistes : introduction **1**

I Le plasma de quarks et de gluons **3**
I.1 Les quarks : des briques élémentaires confinées 3
I.2 Transition de phase 4
I.3 Conclusion 8

II Les observables des collisions d'ions lourds **9**
II.1 Les collisions d'ions lourds 9
II.2 Observables globales 10
II.3 Observables «hard» 11
II.4 Observables électromagnétiques : spectre de masse des dileptons 12
II.5 Observables «soft» 13
II.6 Conclusion 16

III La physique du flot **17**
III.1 Distribution azimutale par rapport au plan de réaction 18
III.2 Propriétés mathématiques du flot 20
III.3 Interprétation géométrique de v_1 et de v_2 21
III.4 La physique du flot dirigé 21
III.5 La physique du flot elliptique 26
III.6 Conclusion 30

B Critique de la méthode standard d'analyse de flot **37**

IV Méthodes d'analyse standard **39**
IV.1 Principes : les corrélations à deux particules 40
IV.2 La méthode des sous-événements 42
IV.3 Limitation des méthodes standard : effets «nonflow» 45
IV.4 Soustraction des effets «nonflow» 48
IV.5 Conclusion 50

V Corrélations quantiques **51**
V.1 Principes 52
V.2 Paramétrisation 53
V.3 Ordre de grandeur des corrélations azimutales dues aux effets HBT 53
V.4 Calcul de la corrélation à deux particules 54
V.5 «Flot» apparent créé par les corrélations HBT dans l'expérience NA49 56

V.6 Correction des données de NA49 de 1998 59
V.7 Conclusion 61

VI Corrélations liées à la conservation de l'impulsion 65
VI.1 Ordre de grandeur de la corrélation azimutale à deux particules 66
VI.2 Corrélation à deux particules due à la conservation de l'impulsion 67
VI.3 Correction des données de NA49 69
VI.4 Influence sur la méthode des sous-événements 72
VI.5 Conclusion 74

VII Désintégration de résonances 75
VII.1 Ordre de grandeur de la corrélation à deux particules 76
VII.2 Désintégration à deux corps 76
VII.3 Application aux désintégrations des Δ et des ρ 77
VII.4 Correction du flot dirigé des protons de NA49 78
VII.5 Conclusion 79

VIII La prise en compte des effets «nonflow» dans les analyses standard 81

IX Articles de la Partie B 83

C Nouvelle méthode d'analyse : les cumulants des corrélations multiples 107

X Principe de la méthode 109
X.1 Décomposition dans le repère du plan de réaction 110
X.2 Décomposition dans le repère du laboratoire : notion de cumulant 117
X.3 Cas d'un détecteur parfait : soustraction des effets «nonflow» 118
X.4 Cas d'un détecteur imparfait : soustraction des corrélations non physiques . . 123
X.5 Flot intégré 127
X.6 Flot différentiel 130
X.7 Conclusion 134

XI Flot intégré 137
XI.1 Fonction génératrice des corrélations azimutales multiples 138
XI.2 Fonction génératrice des cumulants 142
XI.3 Relation entre les cumulants et le flot intégré 146
XI.4 Erreurs statistiques et systématiques 149
XI.5 Effets «nonflow» 153
XI.6 Corrections d'acceptance 154
XI.7 Utilité de poids non unités 156
XI.8 Simulations Monte-Carlo 157
XI.9 Application aux données de STAR 160
XI.10 Application aux données de NA49 162
XI.11 Conclusion 167

XII Flot différentiel 169
XII.1 Fonctions génératrices des corrélations 170
XII.2 Fonction génératrice des cumulants différentiels 170
XII.3 Relation entre les cumulants et le flot 173

XII.4 Corrections d'acceptance 175
XII.5 Utilisation de poids non unités 178
XII.6 Simulations Monte-Carlo 179
XII.7 Application aux données de STAR 181
XII.8 Application aux données de NA49 181
XII.9 Conclusion 185

XIII Conclusion et perspectives **187**

XIV Articles de la Partie C **189**

D La suppression du J/ψ **225**

XV Suppression du méson J/ψ dans les collisions nucléaires **227**
XV.1 Production du J/ψ dans les collisions nucléaires 228
XV.2 Modèles de suppression anormale 233
XV.3 Application aux données de NA50 238
XV.4 Dispersion en impulsion transverse 245
XV.5 Prédictions de notre modèle 248
XV.6 Conclusion 252

XVI Articles de la Partie D **253**

Partie A

Les collisions d'ions lourds ultrarelativistes : introduction

Cette partie sera une introduction à la physique des collisions d'ions lourds ultrarelativistes. Il y a plus de vingt ans, il a été prédit qu'un état déconfiné, le plasma de quarks et de gluons, devait exister dans un régime de haute densité et/ou de haute température. La question de la transition de phase entre ce plasma et la matière hadronique ordinaire s'est alors posée. Les collisions d'ions lourds sont pour nous le moyen expérimental pour créer cet état déconfiné en laboratoire et pour étudier cette transition de phase.

Dans un premier chapitre, nous exposerons succinctement les motivations théoriques pour l'étude du plasma de quarks et de gluons. Puis nous ferons une revue rapide des moyens expérimentaux et des observables qui sont à notre disposition. Enfin nous nous attarderons sur la physique de l'une d'entre elles, le flot, qui occupe la plus grande partie de ma thèse.

CHAPITRE I

Le plasma de quarks et de gluons

Sommaire

I.1 Les quarks : des briques élémentaires confinées 3
I.2 Transition de phase 4
I.2.1 Grandeurs thermodynamiques 4
I.2.2 Température limite de la matière hadronique 4
I.2.3 Degrés de liberté 4
I.2.4 Potentiel interquark 5
I.2.5 Restauration de la symétrie chirale et déconfinement 6
I.2.6 Diagramme de phase et ordre de la transition 7
I.3 Conclusion 8

I.1 Les quarks : des briques élémentaires confinées

La recherche et l'étude des constituants ultimes de la matière, les «atomoi» chers à la philosophie grecque ancienne, connurent des étapes successives : la notion d'atome prend forme au XIX$^{\text{ème}}$ siècle avec les progrès de la chimie et le nombre d'atomes grandit rapidement avec le tableau de Mendeleev ; au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle grâce à Rutherford, l'atome est décrit par le modèle planétaire d'électrons chargés négativement gravitant autour d'un noyau chargé positivement. Puis, à partir des années 1950, grâce à l'essor des accélérateurs de particules et l'étude des rayonnements cosmiques, le nombre de particules «élémentaires» frise la centaine. Enfin les quarks, d'abord prédits par Gell-Mann et Zweig en 1964 puis «observés» en 1969 dans les collisions profondément inélastiques (plus exactement, une sous-structure du proton fut mise en évidence) constituent de nos jours les briques élémentaires de la matière nucléaire.

Cependant les quarks n'ont jamais été observés de façon isolée. Ceci leur confère un statut bien différent par rapport aux précédentes «briques élémentaires» comme le proton ou le neutron : l'interaction, dite forte, véhiculée par les gluons, lie les quarks entre eux dans la matière nucléaire ordinaire. Schématiquement, lorsque l'on essaie d'isoler deux quarks en augmentant la distance qui les sépare, le nombre de gluons augmente et la bien nommée interaction forte devient encore plus forte. Si l'on continue à augmenter la distance de séparation, cette «corde» de gluons finit par casser en deux, donnant naissance à deux paires de quarks. C'est un peu analogue au fait que des monopoles magnétiques n'ont jamais pu être isolés : quand on divise un aimant en deux, on obtient deux nouveaux aimants et non pas isolément un pôle nord et un pôle sud. C'est dans ce sens que les quarks sont dits confinés : à notre échelle d'énergie, ils ne peuvent pas être vus comme des particules libres.

La théorie actuellement adoptée pour décrire l'interaction forte est la chromodynamique quantique. Cette théorie de jauge possède une propriété remarquable : alors qu'à basse énergie

(ou de façon équivalente à grande distance), la constante de couplage de l'interaction forte est grande (d'où le confinement), cette dernière devient faible à haute énergie (ou à très petite distance) : c'est ce qu'on appelle la liberté asymptotique.

La motivation des collisions d'ions lourds ultrarelativistes devient maintenant claire : en augmentant l'énergie des nucléons et en les comprimant dans un espace réduit, nous espérons atteindre un régime où cette liberté asymptotique est applicable et où les quarks et les gluons peuvent être considérés comme libres, formant alors un plasma.

Comment comprendre le passage de ces constituants qui interagissent peu entre eux à haute énergie, à notre monde formé de hadrons dans lesquels les quarks interagissent très fortement ? Comment décrire la transition entre ces deux phases ?

I.2 Transition de phase

Nous allons exposer les arguments théoriques pour l'existence de la transition de phase entre le plasma de quarks et de gluons et la matière hadronique ordinaire. Nous ferons ensuite quelques remarques sur les aspects théoriques de cette transition.

I.2.1 Grandeurs thermodynamiques

La description du système peut se faire à travers deux paramètres thermodynamiques indépendants, la température T et le potentiel chimique baryonique μ_B. En effet, la connaissance de ces derniers permet de calculer toutes les grandeurs thermodynamiques du système comme la densité d'énergie, la pression, la densité d'entropie,... Ainsi dans la suite, nous décrirons la transition de phase en termes de température et de potentiel chimique.

I.2.2 Température limite de la matière hadronique

Le rayon r_h d'un hadron est de l'ordre de 1 fm. Le volume «minimal» qu'il occupe vaut alors $V_h = 4\pi\, r_h^3/3 \simeq 4$ fm^3. Ce dernier définit une densité nucléaire limite $\rho_c = V_h^{-1} \simeq 1.5\rho_0$, où $\rho_0 = 0.17$ fm^{-3} désigne la densité nucléaire standard. Pour une densité plus élevée que ρ_c, nous pouvons nous demander de ce qu'il advient des hadrons.

Pomeranchuk a mis en évidence la divergence de la fonction de partition grand canonique [1] pour une température $T \geq T_c$ où la température critique est donnée par $T_c = 1/r_h \simeq 200$ MeV. Indépendamment, Hagedorn a calculé pour un gaz de résonances hadroniques la densité de hadrons, $\rho(m) \sim \exp(m/T_c)$, où m est la masse de la résonance et T_c une température critique au-delà de laquelle rien ne peut exister [2].

I.2.3 Degrés de liberté

Le développement de la chromodynamique quantique a changé cette vision des choses et la transition de phase entre la matière hadronique ordinaire et le plasma de quarks et de gluons peut se comprendre comme un changement de degrés de liberté.

Plaçons-nous par exemple à $\mu_B = 0$ par simplicité. Le nombre baryonique est alors nul : le système ne comporte que des paires baryon-antibaryon dans la phase à basse température. A $T = 0$, nous avons un gaz parfait de pions, de spin 0, soit trois degrés de liberté. En revanche à haute température, nous avons à considérer un gaz de paires quarks-antiquarks (de spin 1/2) et de gluons (de spin 0 et sans masse). Si nous ne considérons que les quarks les plus légers, up and down, nous avons (2 saveurs)$\times$(3 couleurs)$\times$(2 états de spin)$\times$(matière+antimatière)=24, et pour les gluons, (2 états de spin)$\times$(8 «couleurs»)=16, soit en tout 40 degrés de liberté. Il y a donc nécessairement une transition entre les trois et les quarante degrés de liberté.

Nous pouvons modéliser cette transition de phase en étudiant la densité d'énergie et la pression dans chacune des phases :

$$\epsilon_\pi = 3\,\frac{\pi^2}{30}T^4 \qquad p_\pi = \epsilon/3, \tag{I.1}$$

$$\epsilon_{\mathrm{QGP}} = 37\,\frac{\pi^2}{30}T^4 + B \qquad p_{\mathrm{QGP}} = \epsilon/3 - B, \tag{I.2}$$

où B est la constante du sac qui compense la pression due à l'énergie cinétique des quarks. Sa valeur est prise égale à $B^{1/4} \sim 200$ MeV [3]. La comparaison de (I.1) et (I.2) montre un saut d'énergie et de pression entre le gaz parfait de pions et le plasma de quarks et de gluons.

Il n'est cependant pas évident qu'une transition de phase existe bel et bien. Les calculs de chromodynamique quantique sur réseau à $\mu_B = 0$ ont permis de mettre en évidence ce changement brusque autour d'une température critique, par exemple sur la densité d'énergie [4], *cf.* Fig.I.1. Nous verrons dans la section I.2.6 que la transition n'est pas forcément du premier ordre et qu'il est vraisemblable qu'il n'y ait pas de discontinuité des grandeurs thermodynamiques.

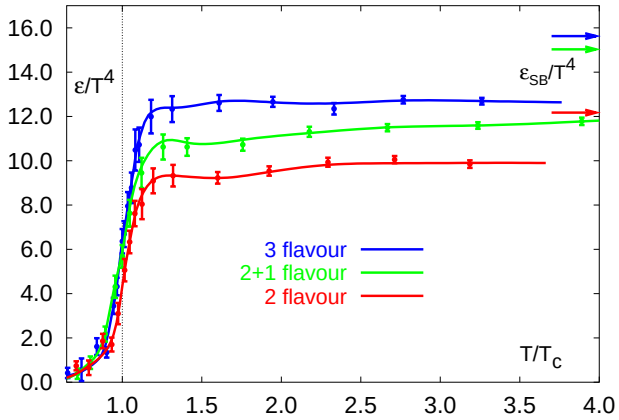


FIG. I.1 – Rapport de la densité d'énergie sur la température à la puissance 4, calculé sur réseau, avec différents nombres de saveurs de quarks [4]. ϵ_{SB} désigne la densité d'énergie de Stefan-Bolzmann.

I.2.4 Potentiel interquark

Une paramétrisation du potentiel entre quarks est celle de Lüscher [5] :

$$V(r,T) = -\frac{\alpha_s}{r} + \sigma(T)\,r. \tag{I.3}$$

Le premier terme est un potentiel de Coulomb de couleur alors que le second rend compte du confinement et fait intervenir la tension de corde $\sigma(T)$. Cette dernière dépend de la température T. Des calculs de chromodynamique quantique sur réseau montrent une décroissance rapide de $\sigma(T)$ autour d'une température critique T_c [6]. Les valeurs typiques de ces deux paramètres sont $\sigma(T=0) \simeq 0.17$ GeV^2 et $\alpha_s \simeq 0.507$ [7].

Au-delà de T_c, ces mêmes calculs mettent en évidence un écrantage de couleur. Autrement dit, le potentiel, qui se réduit à sa partie coulombienne, prend la forme d'un potentiel de Yukawa

$$V(r,T) = -\frac{\alpha_s}{r}e^{-m_D(T)\,r}, \tag{I.4}$$

où $m_D(T) = g(T)T\sqrt{N_c/3 + N_f/6}$ est la masse de Debye thermique [8]. N_c est le nombre de couleurs, N_f le nombre de saveurs et $g(T)$ la constante de couplage de la chromodynamique quantique. Il semblerait enfin que le potentiel (I.4) ait une dépendance en r^{-d} avec $d < 1$ près de T_c [6], correspondant à une interaction de plus longue portée et annonçant la transition vers le confinement.

I.2.5 Restauration de la symétrie chirale et déconfinement

Les calculs sur réseau à potentiel chimique baryonique nul ont également permis d'étudier la transition chirale. Le lagrangien de la chromodynamique quantique possède la symétrie chirale si les quarks ont une masse nulle, ce qui est approximativement vrai étant donné que $m_u \sim m_d \sim m_s \ll \Lambda_{\mathrm{QCD}}$. Néanmoins cette symétrie est spontanément brisée à basse température car ces masses ne sont pas strictement nulles. En revanche, elle est restaurée à haute température. Le paramètre d'ordre correspondant à cette transition de phase est le condensat chiral

$$\langle \bar{p}si\,\psi \rangle \begin{cases} > 0 & \text{pour } T < T_\chi \\ = 0 & \text{pour } T > T_\chi \end{cases} \tag{I.5}$$

où T_χ est la température de transition de phase chirale.

Cette transition est *a priori* différente de celle qui nous intéresse, à savoir la transition de déconfinement T_c. Celle-ci est calculée en chromodynamique quantique sur réseau via la boucle de Polyakov définie par

$$\langle |L| \rangle \equiv \lim_{r\to\infty} \exp\left(-\frac{V(r,T)}{T}\right) \begin{cases} = 0 & \text{pour } T < T_c \\ > 0 & \text{pour } T > T_c \end{cases} \tag{I.6}$$

$V(r,T)$ désigne ici le potentiel de confinement qui s'annule dans la phase déconfinée par définition, et qui est infini à grandes distances dans la matière hadronique ordinaire. La Fig.I.2 présente la variation de la boucle de Polyakov et du condensat chiral, ainsi que les susceptibilités correspondantes. Il est remarquable de noter que les deux transitions se produisent à la même température.

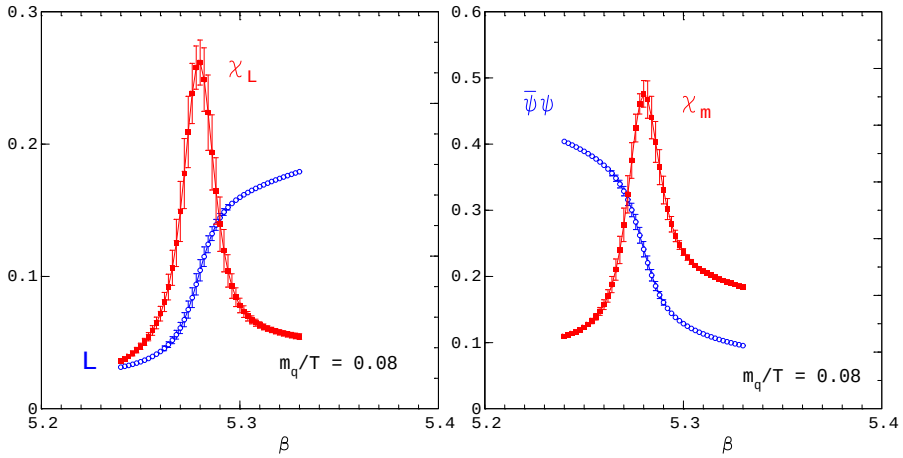


FIG. I.2 – Boucle de Polyakov (à gauche) et condensat chiral (à droite) en fonction de $\beta = 6/g^2$, où g est la constante de couplage de l'interaction forte [9].*beta* est un paramètre équivalent à la température : à haute température, g est faible et β est grand (et *vice versa* à basse température).

La température critique, pour une théorie SU(3) purement de jauge (quarks infiniment massifs), est donnée avec une précision de quelques pour-cent [10] : $T_c = 270$ MeV. Le calcul est bien plus complexe avec des quarks dynamiques (dans le sens où ils ont des masses finies) et le résultat dépend du nombre de saveurs considérées :

$$\text{2 saveurs} \quad T_c = \begin{cases} 171 \pm 4 \text{ MeV } [11] \\ 173 \pm 8 \text{ MeV } [12] \end{cases} \tag{I.7}$$

$$\text{3 saveurs} \quad T_c = 154 \pm 8 \text{ MeV } [12] \tag{I.8}$$

Dans tous les cas, ces températures se rapprochent plus de celles mesurées dans les collisions d'ions lourds ultrarelativistes.

I.2.6 Diagramme de phase et ordre de la transition

La température et le potentiel baryonique chimique étant deux grandeurs thermodynamiques indépendantes, le diagramme de phase entre les hadrons et le plasma de quarks et de gluons est représenté dans le plan (T, μ_B), *cf.* Fig.I.3.

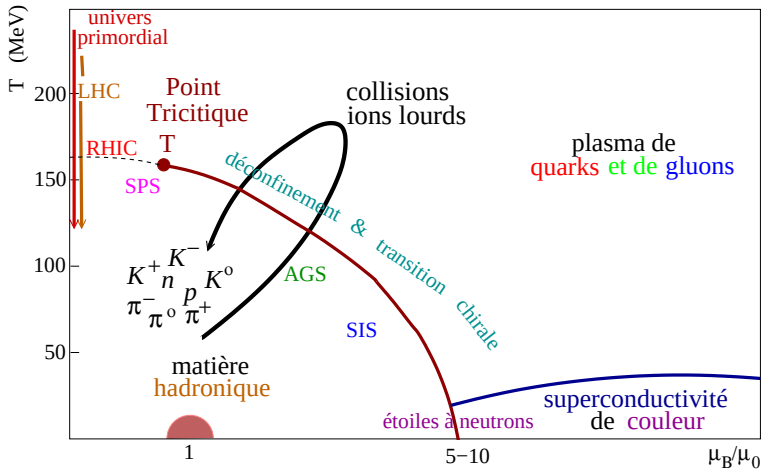


FIG. I.3 – Schéma du diagramme de transition entre les hadrons et le plasma de quarks et de gluons (QGP) : température en fonction du potentiel chimique baryonique, d'après [15].

La Fig.I.3 représente l'état actuel de nos connaissances sur cette transition de phase. A haute densité et à basse température, des théories prédisent un état supraconducteur de couleur qui serait présent dans certaines étoiles à neutrons [13]. Dernièrement des objets très compacts auraient été observés et ils seraient des candidats pour des étoiles à quarks [14]. Si la densité devient suffisamment élevée, typiquement lorsque la distance entre les neutrons est du même ordre de grandeur que l'échelle de la chromodynamique quantique, les neutrons, pressés les uns contre les autres, fusionnent et perdent leur identité hadronique formant un plasma de quarks et de gluons qui se comporterait comme une phase supraconductrice de couleur (analogue en certains points à la supraconductivité BCS).

A l'opposé du diagramme, à haute température et à faible potentiel chimique baryonique- nous sommes à la transition de phase qui s'est opérée dans l'univers primordial : quelques microsecondes après le Big Bang, la température est tombée aux environs de 200 MeV et la transition du plasma de quarks et de gluons aux hadrons se produit : les quarks et les gluons «colorés» se combinent en des hadrons «blancs», *i.e.*, sans couleur. Ils sont alors à jamais confinés dans la matière hadronique.

Les collisions d'ions lourds explorent la partie du diagramme à température et à potentiel chimique finis. Il n'est même pas sûr qu'au SPS nous ayons atteint la phase de déconfinement,

tout ceci est encore matière à controverse. Nous reviendrons plus longuement sur les collisions d'ions lourds au chapitre II.

Enfin les calculs sur réseau nous apportent quelques éléments concernant l'ordre de la transition de phase. A $\mu_B = 0$, ce dernier dépend notamment du nombre de saveurs de quarks considéré et notamment de la masse du quark s. La Fig.I.4 résume l'état de l'art à ce sujet [9]. Suivant la masse donnée au quark s, la transition est du premier ordre, du second ordre ou est un «cross-over», *i.e.*, la transition se fait de façon continue.

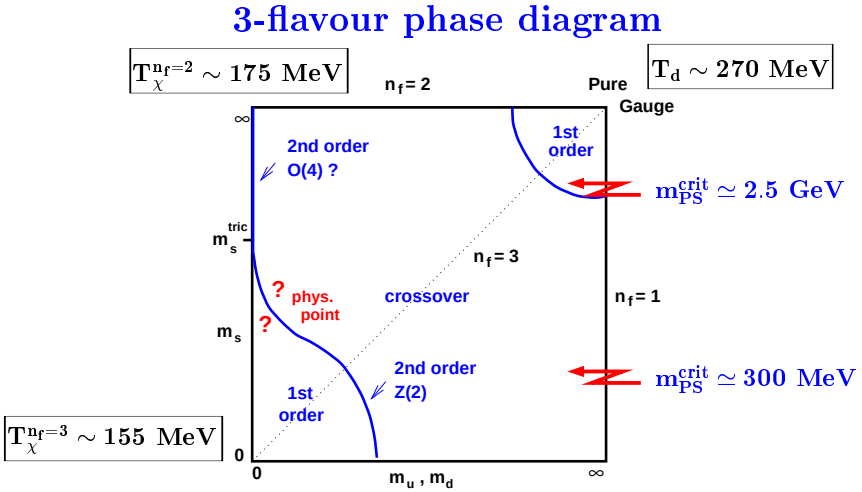


FIG. I.4 – Ordre de la transition pour une théorie à trois saveurs avec une dégénérescence des quarks u et d et le quark s [9]. $m_s^{\rm tric}$ désigne la valeur du quark s au point tricritique ; $m_{\rm PS}^{\rm crit}$ est la masse du méson pseudo-scalaire au point critique de transition chirale.

D'autres calculs sur réseau ont été effectués pour $T \neq 0$ et $\mu_B \neq 0$ [16] avec $(2+1)$ quarks dynamiques. Les auteurs ont mis en évidence l'existence d'un point critique («end-point») à $T_E = 160 \pm 3.5$ MeV et $\mu_E = 725 \pm 35$ MeV. Pour des potentiels chimiques plus élevés, la transition serait du premier ordre ; alors que pour des valeurs plus faibles, la transition serait un «cross-over». L'extrapolation de leurs calculs à $\mu_B = 0$ (proche des valeurs à RHIC et au LHC) donne une température de 172 ± 3 MeV. Ainsi aux énergies du SPS (où $\mu_B \sim 200$ MeV) et de RHIC ($\mu_B \sim 100$ MeV), nous serions en-dessous du potentiel chimique du point critique et la transition se ferait de façon continue.

I.3 Conclusion

La théorie prévoit un changement brusque de degrés de liberté entre la phase hadronique confinée et le plasma de quarks et de gluons où la matière serait déconfinée. Le diagramme de phase entre la matière hadronique ordinaire et le plasma de quarks et de gluons est cependant loin d'être établi en tout point. Seuls les calculs sur réseau nous apportent des informations tangibles. Il est cependant difficile de «mettre» des fermions sur réseau et les calculs sont pour l'instant limités à de faibles potentiels chimiques. Quant à la supraconductivité de couleur dans les étoiles à neutrons, peu d'observables sont à notre disposition et la vérification de ces modèles reste assez limitée.

En revanche, l'étude des collisions d'ions lourds ultrarelativistes permet d'explorer la partie centrale du diagramme de phase, à des énergies toujours plus élevées, en passant du SIS au LHC. Nous allons passer en revue les observables des collisions d'ions lourds dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II

Les observables des collisions d'ions lourds

Sommaire

II.1 Les collisions d'ions lourds 9
II.2 Observables globales 10
II.2.1 Géométrie d'une collision non centrale 10
II.2.2 Centralité d'une collision 11
II.2.3 Direction du paramètre d'impact 11
II.3 Observables «hard» 11
II.3.1 Photons thermiques 11
II.3.2 Suppression du J/ψ 12
II.3.3 Jet quenching 12
II.4 Observables électromagnétiques : spectre de masse des dileptons 12
II.5 Observables «soft» 13
II.5.1 Equilibre thermique et augmentation de l'étrangeté 13
II.5.2 Spectres en p_T 14
II.5.3 Densité d'énergie initiale 15
II.5.4 Interférométrie HBT 16
II.6 Conclusion 16

II.1 Les collisions d'ions lourds

Partant du potentiel chimique nucléaire (≤ 1 GeV), les collisions d'ions lourds permettent d'augmenter la densité d'énergie de la matière en comprimant de plus en plus de particules dans un volume réduit et/ou en augmentant leur énergie cinétique. L'utilisation d'ions lourds permet d'avoir un volume plus grand comparé aux collisions proton–proton ou proton–noyau : les interactions entre les nucléons sont plus nombreuses et la probabilité de produire un plasma de quarks et de gluons est plus élevée.

Sous l'hypothèse où la matière créée lors de la collision atteint l'équilibre thermique et l'équilibre chimique, la région explorée par les collisions d'ions lourds (*cf.* Fig.I.3) est à $T \neq 0$ et $\mu_B \neq 0$. Ce dernier diminue après la collision car, partant d'un nombre fixé de nucléons, des milliers de particules (essentiellement des mésons) sont créées : il y a un effet de dilution. De même, quand on augmente l'énergie de la collision, le potentiel chimique initial diminue car les noyaux deviennent de plus en plus transparents et la région de rapidité centrale contient de moins en moins de hadrons mais surtout un gaz de mésons.

Les premières expériences de collisions d'ions lourds ultrarelativistes remontent à 1986 et de nombreux progrès ont été fait depuis, autant sur la taille des noyaux utilisés que sur l'énergie

mise en jeu dans la collision. L'AGS (Alternating Gradient Synchrotron) à Brookhaven,NY a vu des collisions de projectiles de O et de Si sur cible fixe à 14.5 AGeV, puis de Au à 12 AGeV. En 1992, au SIS (Schwere Ionen Synchrotron) de GSI, à Darmstadt, de nombreuses mesures ont été effectuées sur des collisions Au–Au de 0.1 à 0.8 AGeV et Ni–Ni de 1 à 2 AGeV, toujours sur cible fixe. En 1986, le CERN a débuté une série d'expériences au SPS (Super Proton Synchrotron) avec des projectiles de O à 200 AGeV, puis de S à la même énergie en 1987 et de Pb à 158 AGeV fin 1994 et à 40 et 80 AGeV en 2000 (cible fixe). Enfin depuis juin 2000, un collisionneur quasiment entièrement consacré aux collisions d'ions lourds, RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider), à Brookhaven, a effectué des collisions Au–Au à 130 et à 200 AGeV dans le référentiel du centre de masse. Le LHC (Large Hadron Collider) au CERN devrait également voir des expériences de collisions d'ions lourds.

La difficulté dans les collisions d'ions lourds est d'identifier des signatures non ambiguës du plasma de quarks et de gluons. En effet, le réflexe d'extrapoler les résultats des collisions nucléon–nucléon aux collisions d'ions lourds est légitime mais lorsqu'un noyau comportant ~ 200 nucléons rencontre un autre noyau aussi volumineux, la physique se révèle plus complexe qu'une simple superposition de collisions nucléon–nucléon : les mesures dans les collisions d'ions lourds mettent en évidence des effets collectifs et l'influence de la matière nucléaire sur les observables. Nous avons classées ces dernières en quatre catégories : la première concerne les mesures globales sur la géométrie de la collision ; la deuxième englobe les processus dit durs («hard») qui relèvent de la chromodynamique quantique perturbative ; les observables plus molles («soft») se séparent en des signaux électromagnétiques (dileptons de faible masse) et en des observables hadroniques, comme les spectres en impulsion transverse, l'augmentation de l'étrangeté (reliée à la question de l'équilibre thermique) et les corrélations HBT. Nous passons brièvement en revue ces différentes observables dans les sections suivantes.

II.2 Observables globales

II.2.1 Géométrie d'une collision non centrale

La spécificité d'une collision d'ions lourds par rapport aux collisions nucléon–nucléon et nucléon–noyau est qu'elle est caractérisée par une géométrie. Cette dernière est décrite par un vecteur **b** appelé le paramètre d'impact. La Fig.II.1 schématise une collision non centrale.

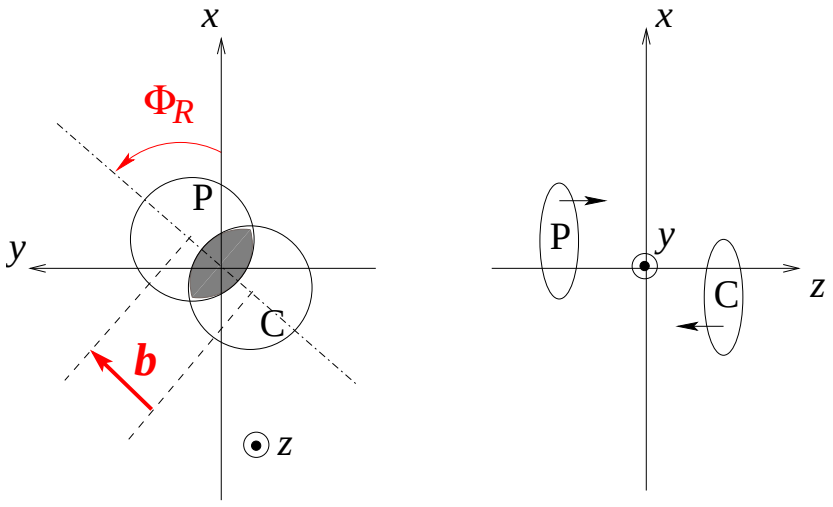


FIG. II.1 – Géométrie d'une collision entre le noyau projectile (P) et le noyau cible (C) à paramètre d'impact **b** non nul, vue dans le référentiel du centre de masse.

Les deux noyaux, le projectile et la cible, apparaissent aplatis à cause de la contraction de Lorentz. L'axe z représente l'axe de la collision ; les axes x et y définissent le plan transverse à l'axe z. Le paramètre d'impact $\mathbf{b}$ est le vecteur qui relie les centres des deux noyaux dans le plan transverse. Il est caractérisé par une direction et un sens, résumés dans son angle azimutal Φ_R, et une norme qui est fonction de la zone de recouvrement des deux noyaux.

Les processus physiques ne sont pas les mêmes suivant que nous étudions soit une collision centrale, où la densité d'énergie est très grande, soit une collision périphérique où au contraire, le nombre de collisions nucléon–nucléon est faible. Il convient donc de comparer des collisions de même paramètre d'impact. Pour cela, nous devons pouvoir en mesurer les caractéristiques, à savoir sa norme et sa direction.

II.2.2 Centralité d'une collision

La valeur de la norme de $\mathbf{b}$ est ce qu'on appelle communément la centralité de la collision. Les collisions centrales ont un paramètre d'impact nul alors que les collisions à grand $\mathbf{b}$ correspondent aux collisions périphériques.

La mesure de la centralité peut se faire par plusieurs moyens :

i) la multiplicité, *i.e.*, le nombre de particules détectées[1] est d'autant plus grande que la collision est centrale ;

ii) un calorimètre placé sur l'axe de la collision à l'avant du noyau projectile («zero degree calorimeter») permet de mesurer l'énergie des fragments de la collision (partie non hachurée dans la Fig.II.1), *i.e.*, l'énergie des nucléons spectateurs qui ne participent pas à la collision. Plus cette énergie E_{ZDC} est grande et moins la collision est centrale ;

iii) enfin la mesure de l'énergie dans le plan transverse, $E_T = \sum_i E_i \sin\theta_i$, où la somme porte sur les particules i d'énergie E_i et d'angle par rapport à l'axe de la collision θ_i, caractérise également la centralité de la collision : les collisions de paramètre d'impact nul sont les plus violentes et produisent une énergie transverse totale élevée.

II.2.3 Direction du paramètre d'impact

S'il est relativement aisé de mesurer la centralité d'une collision, il est en revanche impossible d'accéder expérimentalement à sa direction Φ_R. Le flot est une observable spécifiquement reliée à Φ_R. Plus exactement, elle étudie la distribution des particules par rapport à Φ_R dans le plan transverse. Elle met en évidence la présence d'effets collectifs dans la zone de collision. J'ai consacré la majeure partie de ma thèse à l'analyse de cette observable. Je développerai plus longuement cette dernière dans le chapitre suivant.

II.3 Observables «hard»

Elles sont caractérisées par le fait que l'échelle de longueur dominant cette physique est bien inférieure à $\Lambda_{\mathrm{QCD}}^{-1} \sim 1$ fm. Les processus durs qui entrent en jeu sont des interactions entre partons et ces observables sont des sondes directes des premiers instants de la collision.

II.3.1 Photons thermiques

Les photons directement produits par l'annihilation des paires $q\bar{q}$ semblaient être les observables parfaites pour sonder les premiers instants de la collision, au même titre qu'ils constituent de bonnes observables pour les plasmas (électromagnétiques) traditionnels. La

[1] Nous distinguons la multiplicité du nombre total de particules produites car ces dernières ne sont en général pas toutes détectées.

collaboration WA98 du CERN a eu pour but de mesurer les photons thermiques émis lors des collisions centrales Pb–Pb [17] et il semblerait qu'ils aient observé des photons directs.

Cependant des milliers de particules étant produites lors d'une collision, le bruit de fond venant de la désintégration des pions neutres était trop élevé pour permettre une mesure suffisamment fine de ces photons thermiques et d'extraire un signal si ténu du bruit de fond.

II.3.2 Suppression du J/ψ

La suppression du J/ψ a au contraire fait couler beaucoup d'encre : il a été prédit [18] que si un J/ψ est créé dans un matière déconfinée, l'écrantage du potentiel de couleur serait tel que le J/ψ se dissoudrait. Les résultats de la collaboration NA50 du CERN, sur des collisions Pb–Pb, ont mis en évidence une suppression «anormale» [19]. Nous n'en dirons pas plus et nous renvoyons le lecteur au Chapitre XV qui est entièrement consacré au J/ψ.

II.3.3 Jet quenching

Enfin le «jet quenching» est un phénomène qui concerne les signaux à grande impulsion transverse (p_T) [20,21] : un jet traversant un plasma de quarks et de gluons perdrait beaucoup d'énergie radiativement. Le régime du «jet quenching» est la chromodynamique quantique perturbative et relève en quelque sorte de la même physique que la suppression du J/ψ. Le «jet quenching» serait visible sur la distribution en p_T et notamment sur la suppression des particules de haut p_T.

Au SPS, les données des collisions Pb–Pb [22] seraient reproduites aussi bien par des calculs hydrodynamiques que par la chromodynamique quantique perturbative. En fait, aux énergies du CERN, la queue de la distribution en p_T ne distingue pas de façon claire le régime perturbatif du régime non perturbatif.

Il semblerait que l'effet Cronin et le «shadowing»[2] ne suffisent pas à expliquer les spectres en p_T des pions neutres pour les collisions centrales de RHIC [23]. En revanche, la prise en compte d'un «jet quenching» ajusterait ces données et mettrait en évidence une échelle de séparation [24,25] entre les domaines non perturbatif et perturbatif aux alentours de $p_T = 2$ GeV/c (*cf.* Fig.II.2). Le «jet quenching» se manifesterait également sur le flot elliptique à grand p_T (*cf.* Section III.5.3).

II.4 Observables électromagnétiques : spectre de masse des dileptons

Les mésons vecteurs (ρ, ω, ϕ) sont sensibles à la matière nucléaire environnante. Leur détection se fait à travers leur désintégration en dileptons. Dans les collisions nucléon–noyau, le spectre en masse invariante des dileptons est bien reproduit par les calculs de désintégrations hadroniques. Cependant, une augmentation d'un facteur $2.6 \pm 0.5(\text{stat}) \pm 0.6(\text{syst})$ des dileptons de faible masse ($0.25 < m < 0.7$ GeV/c^2) a été observée dans les collisions d'ions lourds par rapport aux collisions nucléon–noyau [27,28]. La Fig.II.3 présente le spectre en masse des dileptons mesuré par NA45/CERES.

La restauration de la symétrie chirale provoquerait une diminution de la masse du ρ ainsi qu'une augmentation de son temps de vie, expliquant l'excès observé. Cependant, des diffusions hadroniques multiples suffiraient à reproduire l'excès de dileptons. Ainsi aucune conclusion définitive ne peut être faite pour le moment en ce qui concerne l'observation de la transition chirale.

[2] La définition du «shadowing» n'est pas bien claire : ce dernier comprend toutes les interactions avec les nucléons spectateurs.

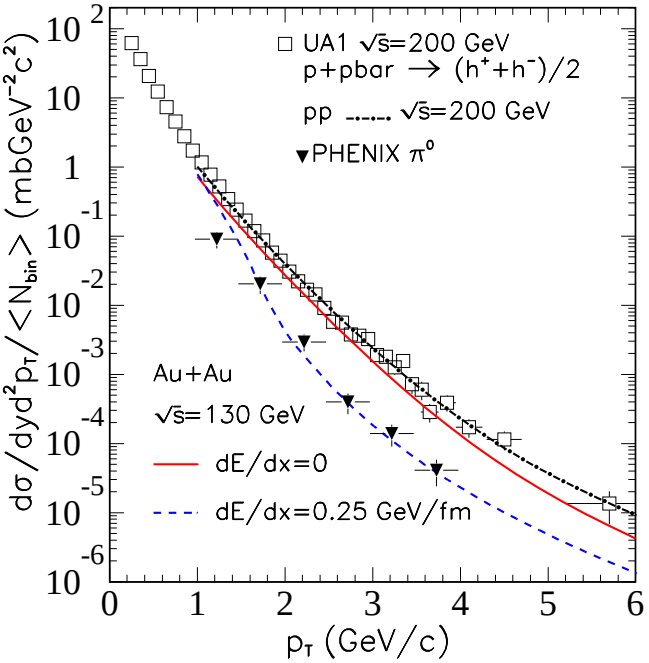


FIG. II.2 – Spectre en p_T pour les collisions pp [26] et Au–Au [23], ajusté par des calculs de chromodynamique quantique perturbative, avec ou sans «jet quenching» [25].

II.5 Observables «soft»

Elles concernent la physique au niveau de l'hadronisation. Cependant, la matière chaude initialement formée peut les influencer de façon indirecte.

II.5.1 Equilibre thermique et augmentation de l'étrangeté

Dans le diagramme de phase, le problème est de savoir quelle température et quel potentiel chimique il faut reporter. En fait, nous devons distinguer deux sortes d'équilibres : celui qui fixe les abondances des particules, *i.e.*, les potentiels chimiques, et celui qui fixe la température de «freeze-out», moment où les particules se découplent et n'interagissent plus entre elles.

Les modèles thermiques [29–31] permettent d'expliquer pratiquement tous les rapports d'abondance[3], que ce soit à l'AGS, au SPS ou à RHIC (*cf.* Fig.II.4 pour les données du CERN) et fournissent la température T_χ et le potentiel chimique μ_χ à l'équilibre chimique. Ces modèles indiquent donc qu'un équilibre chimique serait atteint très tôt. La question est de savoir s'il se produit dans une phase qui est restée purement hadronique ou si la matière chaude formée est passée par une phase déconfinée.

L'augmentation de l'étrangeté dans les collisions d'ions lourds, comparée à la production de particules étranges dans les collisions nucléon–nucléon et nucléon–noyau, est reliée à ces interrogations. Elle a été observée expérimentalement aussi bien à l'AGS qu'au SPS [32]. Le facteur d'augmentation est de l'ordre de 2 pour les kaons et il est d'autant plus élevé que le contenu en quarks s est grand. L'idée est la suivante : partant de matière hadronique ordinaire, ne contenant que des quarks u et d, le passage par un plasma de quarks et de gluons à une température supérieure à la masse du quark s, $m_s = 150$ MeV, permettrait de produire des paires $s\bar{s}$ (l'étrangeté doit être conservée) par fusion de gluons [33]. La faible

[3] Dans [30], il est montré que l'étude des rapports d'abondance permet de s'affranchir de la dynamique des particules et de calculer simplement ce rapport dans l'ensemble grand-canonique avec une distribution de Bolzmann.

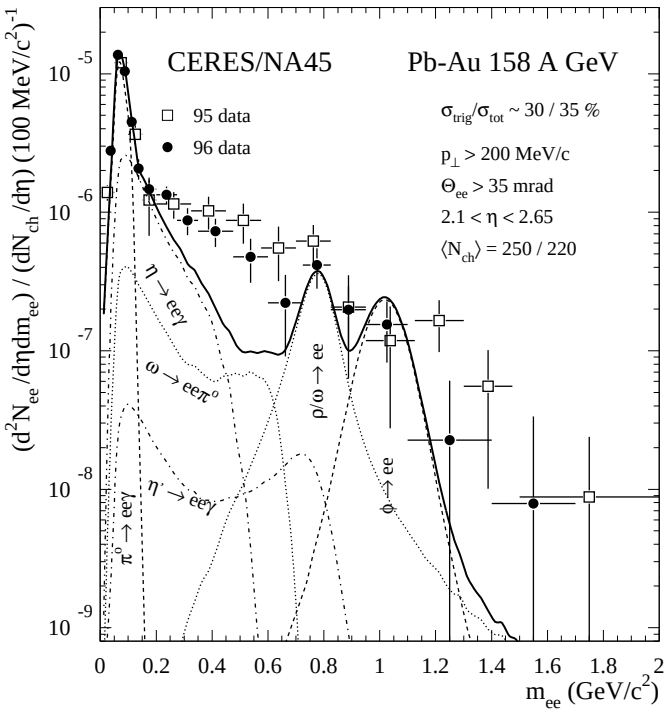


FIG. II.3 – Spectre de masse des paires e^+e^- [28]. Les courbes correspondent à la contribution attendue par les désintégrations hadroniques.

section efficace de production de particules étranges dans la matière hadronique pure ainsi que le temps beaucoup trop long pour atteindre l'equilibre chimique dans un gaz de hadrons (par rapport à la durée de la collision ~ 10 fm) semble exclure l'explication de l'augmentation de l'étrangeté dans une matière hadronique pure [34, 35].

En revanche, si l'équilibre chimique se produit dans un plasma de quarks et de gluons, les potentiels chimiques des quarks seraient tous égaux, $\mu_u = \mu_d = \mu_s$, permettant ainsi le production d'un plus grand nombre de particules étranges. De plus, le temps typique du processus $gg \to s\bar{s}$ est de l'ordre de 1–3 fm [36]. Enfin à potentiel chimique fini, la production de quarks étranges serait également favorisée [35, 37] : la mer de Fermi étant occupée exclusivement de quarks légers à $\mu_B \neq 0$, si l'énergie de Fermi de ces quarks devient supérieure à la masse du quark s, il est énergétiquement plus favorable de produire une paire $s\bar{s}$ que $u\bar{u}$ ou $d\bar{d}$. Ainsi il semblerait que les quarks étranges seraient présents aux tous premiers instants de la collision.

II.5.2 Spectres en p_T

Les modèles «thermiques» précédents n'étudient en fait que l'équilibre chimique qui se trouve être distincte de l'équilibre thermique. Ce dernier se produit lorsque les particules en expansion n'interagissent plus entre elles : le système est alors gelé et c'est le «freeze-out».

La température T_f correspondante est donnée par l'ajustement des distributions en p_T : la paramétrisation utilisée est

$$\frac{1}{m_T}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}m_T} \propto e^{-m_T/T_f},$$

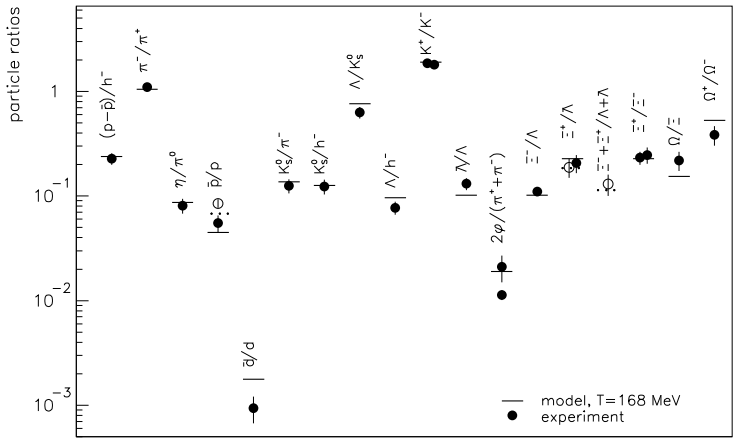


FIG. II.4 – Comparaison entre les modèles thermiques et les données sur les rapports d'abondance. Voir [31] pour les références expérimentales.

où $m_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$ est la masse transverse. T_f est communément appelée «inverse slope parameter» à cause de cet ajustement.

D'après ces modèles thermiques, l'équilibre chimique se produit avant le «freeze-out» : $T_\chi > T_f$. Par exemple, au SPS, $T_\chi = 165.0 \pm 5.0$ MeV [38] et $T_f = 120 \pm 12$ MeV [39].

Nous pouvons nous poser une question plus fondamentale : avant de parler de grandeurs thermodynamiques, y a-t-il effectivement une thermalisation du système ? La réponse n'est pas claire, surtout pour les collisions les plus périphériques. Nous verrons que l'étude du flot elliptique permet d'apporter des indices sur l'équilibre thermique du système (*cf.* Section III.5.2).

II.5.3 Densité d'énergie initiale

En augmentant l'énergie de la collision, nous augmentons la densité d'énergie dans la matière chaude initialement créée. En se plaçant à $\mu_B = 0$, en prenant $T_c \sim 170$ MeV et en utilisant l'expression de l'énergie du plasma de quarks et de gluons donnée par (I.2), nous obtenons une densité d'énergie $\epsilon_{\mathrm{QGP}} \sim 1.5$ GeV/fm^3. En général, on considère que le plasma de quarks et de gluons a une chance de se former si la densité initiale est entre 1 et 3 GeV/fm^3. Elle est évaluée expérimentalement par la formule de Bjorken

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\tau_0 S_T} \left(\frac{\mathrm{d}E_T}{\mathrm{d}y} \right)_{y=y_{\mathrm{CM}}} . \tag{II.1}$$

La rapidité d'une particule est définie par

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) , \tag{II.2}$$

où E et p_z désignent respectivement son énergie et son impulsion longitudinale. On préfère souvent à la rapidité y la pseudo-rapidité η définie par

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\mathbf{p}| + p_z}{|\mathbf{p}| - p_z} \right) = - \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] , \tag{II.3}$$

où θ est l'angle d'émission de la particule. En effet, le calcul de η ne nécessite que la mesure d'une seule variable alors que y demande de connaître à la fois E et p_z. Dans (II.1), S_T est la surface transverse de recouvrement des deux noyaux, $\tau_0 \sim 1$ fm/c est le temps de formation du milieu, et $(\mathrm{d}E_T/\mathrm{d}y)_{y=y_{\mathrm{CM}}}$ est l'énergie transverse des particules produites à la rapidité du centre de masse y_{CM} (ou rapidité centrale). A l'AGS, nous avons $\epsilon_0 = 1.5$ GeV/fm^3 ; au SPS, $\epsilon_0 = 3$ GeV/fm^3 ; enfin à RHIC, $\epsilon_0 = 4.5$ GeV/fm^3. Nous pouvons penser que les valeurs à l'AGS et au SPS sont tout juste limites pour permettre la formation d'un état déconfiné. En revanche, à RHIC et *a fortiori* au LHC, nous sommes plus confiants.

II.5.4 Interférométrie HBT

L'accès à une vision de la «taille» à quatre dimensions de la matière au «freeze-out» peut se faire par une technique d'interférométrie se basant sur l'effet HBT. Le principe sera expliqué plus longuement au Chapitre V.

Si la transition vers un plasma de quarks et de gluons se produisait, la vitesse du son devriendrait très faible. Les mesures d'interférométrie pourraient mettre en évidence un retard dans l'hadronisation [40]. Cependant, un saut en entropie suffisamment conséquent serait nécessaire pour que cela produise un effet visible [41]. A l'AGS et au SPS, aucun retard notable n'a été observé [42] soit parce que le saut en entropie était trop faible, soit parce que la cinématique n'y était pas favorable.

II.6 Conclusion

Les collisions d'ions lourds offrent aussi bien aux théoriciens qu'aux expérimentateurs le moyen d'explorer en laboratoire la matière la plus chaude et la plus dense que nous pouvons produire sur terre. Les interrogations théoriques et les résultats expérimentaux sur la transition de phase entre le plasma de quarks et de gluons et la matière hadronique ordinaire sont source d'une physique riche et vivante.

Le CERN a cloturé en février 2000 une majeure partie de ses collaborations en proclamant que des preuves tangibles de la formation du plasma de quarks et de gluons au CERN ont été observées, notamment la suppression du J/ψ. Cependant, il convient de rester prudent et de comparer attentivement la cohérence des observables entre elles.

Le RHIC, complexe expérimental spécialement dédié aux collisions d'ions lourds, a fourni après ses premiers runs en juillet 2000 une abondance de résultats en un temps très court de façon impressionnante.

Le chapitre suivant expose plus en détails la physique d'une observable qui rend compte des effets collectifs dans les collisions d'ions lourds, le flot.

Chapitre III
La physique du flot

Sommaire

III.1 Distribution azimutale par rapport au plan de réaction 18
III.2 Propriétés mathématiques du flot 20
III.2.1 Comportement à bas p_T 20
III.2.2 Parité des v_n 20
III.2.3 Diminution des harmoniques supérieures 20
III.3 Interprétation géométrique de v_1 et de v_2 21
III.3.1 Flot dirigé 21
III.3.2 Flot elliptique 21
III.4 La physique du flot dirigé 21
III.4.1 Dépendance en centralité 22
III.4.2 Variation avec l'énergie de la collision 22
III.4.3 Dépendance en rapidité 24
III.4.4 Flot des protons et des pions ; convention de signe 26
III.5 La physique du flot elliptique 26
III.5.1 Variation avec l'énergie de la collision 26
III.5.2 Dépendance en centralité 27
III.5.3 Dépendance en impulsion transverse 29
III.6 Conclusion 30

Le flot est une observable qui est directement liée à la géométrie de la collision et qui traduit l'existence d'effets collectifs dans le système. Dans la première section, nous la définirons plus en détail puis dans une deuxième section, nous en donnerons quelques propriétés mathématiques simples et pourtant, pas toujours vérifiées dans les données expérimentales publiées, comme nous le verrons dans le Chapitre IV. Enfin nous passerons plus spéficiquement en revue la physique du flot dirigé et celle du flot elliptique.

III.1 Distribution azimutale par rapport au plan de réaction

La collision de deux ions lourds sera appelée un événement. A la Section II.2.1, nous avons vu qu'à énergie donnée, elle est caractérisée par le paramètre d'impact **b** et notamment l'angle azimutal Φ_R. Nous rappelons cette géométrie à la Fig.III.1. Nous définissons le plan de réaction

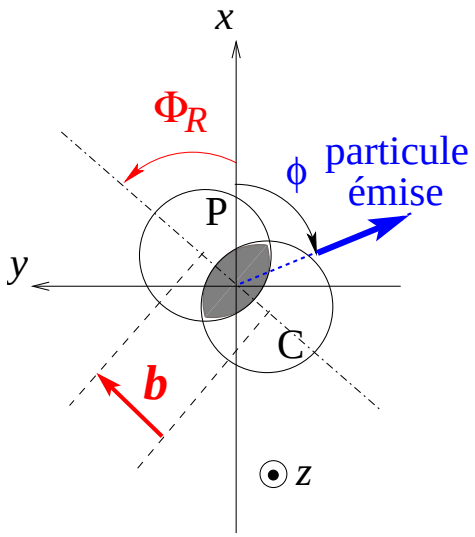


FIG. III.1 – Géométrie d'une collision non centrale à paramètre d'impact **b**, vue dans le référentiel du centre de masse.

par l'axe de la collision et le paramètre d'impact. Par abus de langage, on nommera aussi Φ_R le plan de réaction. Ce dernier n'est pas accessible expérimentalement et cela constitue la difficulté principale de l'analyse du flot.

Considérons maintenant un certain type de particules détectées. Cela peut être des pions, particules les plus nombreuses dans une collision d'ions lourds ultrarelativistes, des protons, des kaons, etc. Prenons une particule émise d'énergie E, d'impulsion transverse p_T, de rapidité y et d'angle azimutal dans le plan transverse ϕ (cf. Fig.III.1). En prenant beaucoup de particules et en moyennant sur beaucoup d'événements de même plan de réaction Φ_R, nous pouvons en principe construire la distribution différentielle par rapport au plan de réaction :

$$\frac{\mathrm{d}^3N}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{d}^3N}{p_T\,\mathrm{d}p_T\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}(\phi-\Phi_R)} = f(\mathbf{p}), \tag{III.1}$$

Le point essentiel est que nous étudions des collisions non centrales : la zone de collision est donc asymétrique et la distribution peut être anisotrope. Elle ne le serait pas si nous avions une simple superposition de collisions nucléon–nucléon dans la zone de collision. Ainsi, cette anisotropie traduit des phénomènes *collectifs* dus aux interactions dans l'état final. Pour la caractériser, nous développons la distribution azimutale en série de Fourier [43] :

$$f(\phi-\Phi_R) \equiv \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}(\phi-\Phi_R)} = \frac{1}{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} 2v_n\cos n(\phi-\Phi_R)\right). \tag{III.2}$$

Etant donné que nous avons une symétrie par rapport au plan de réaction, *i.e.*, une invariance de la source sous la transformation $\phi-\Phi_R \longmapsto -(\phi-\Phi_R)$, nous avons $\langle \sin n(\phi-\Phi_R)\rangle = 0$ et il n'y a donc pas de termes en $\sin n(\phi-\Phi_R)$ dans (III.2). Nous pouvons récrire ce développement sous la forme complexe

$$f(\phi-\Phi_R) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n\, e^{in(\phi-\Phi_R)}. \tag{III.3}$$

Par définition, les coefficients v_n sont donnés par :

$$v_n = v_{-n} = \langle \cos n(\phi - \Phi_R) \rangle = \left\langle e^{\pm in(\phi - \Phi_R)} \right\rangle . \qquad \text{(III.4)}$$

Notons que nous avons $v_0 = 1$. Les v_n représentent la corrélation des particules d'angle azimutal ϕ au plan de réaction Φ_R. Le premier terme dans Eq.(III.2) correspond à une source isotrope. Les termes suivants représentent donc l'écart à cette isotropie. Les v_n constituent ce que nous appelons le flot. Ainsi, par flot[1], nous entendons à la fois corrélation au plan de réaction et anisotropie, ces deux notions étant identiques par définition des v_n. Les deux premiers coefficients de Fourier sont appelés flot "dirigé" et flot "elliptique" et feront l'objet des Sections III.4 et III.5.

Nous distinguons deux sortes de flot : le flot intégré et le flot différentiel. Les particules utilisées dans l'analyse sont des particules *détectées* : le résultat dépendra donc de l'acceptance du détecteur, *i.e.*, de l'espace des phases en (p_T, y) couvert par le détecteur, que nous noterons dans la suite $\mathcal{D}$. Par flot différentiel, nous désignons la corrélation au plan de réaction d'une particule dans une fenêtre fixée en (p_T, y) ; il sera noté $v_n'(p_T, y)$ ou simplement v_n'. Le flot intégré est le flot différentiel intégré sur $\mathcal{D}$, noté $v_n(\mathcal{D})$ ou v_n s'il n'y a aucune ambiguïté. En utilisant la fonction de distribution à une particule, les flots différentiel et intégré s'écrivent

$$v_n'(p_T, y) = \frac{\int e^{in(\phi - \Phi_R)} f(\mathbf{p})\, \mathrm{d}\phi}{\int f(\mathbf{p})\, \mathrm{d}\phi} , \qquad (III.5a)$$

$$v_n(\mathcal{D}) = \frac{\int e^{in(\phi - \Phi_R)} f(\mathbf{p})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}}{\int f(\mathbf{p})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}} . \qquad (III.5b)$$

Enfin nous devons préciser un dernier point sur la signification des valeurs moyennes ci-dessus. En effet, $\langle \ldots \rangle$ correspond à une moyenne sur beaucoup de particules et beaucoup d'événements qui n'ont *a priori* pas la même orientation du plan de réaction. Soulignons dès maintenant le point essentiel de l'analyse de flot : la direction du paramètre d'impact Φ_R *n'est pas mesurable*. Les valeurs moyennes peuvent alors *théoriquement* se faire en deux temps : on moyenne d'abord sur les événements de même plan de réaction, puis on intègre sur Φ_R, supposé distribué de façon isotrope. Autrement dit, la valeur moyenne d'une observable $\mathcal{O}(\phi)$ est donnée par

$$\langle \mathcal{O}(\phi) \rangle = \int_0^{2\pi} \left\langle \mathcal{O}(\phi) \middle| \Phi_R \right\rangle \frac{\mathrm{d}\Phi_R}{2\pi}, \qquad \text{(III.6)}$$

où nous avons utilisé la notation standard d'une moyenne à Φ_R donné, $\langle \ldots | \Phi_R \rangle$. En toute rigueur, dans les définitions (III.4,III.5), il faut remplacer les exponentielles complexes par la moyenne $\left\langle e^{in(\phi - \Phi_R)} \middle| \Phi_R \right\rangle$ et ajouter une intégrale sur Φ_R, alourdissant considérablement l'écriture. Cette subtilité refera néanmoins surface à la Section X.4.1 où nous traiterons des problèmes d'acceptance de détecteur.

Nous allons maintenant présenter quelques propriétés des deux premiers coefficients de Fourier v_1 et v_2.

[1] Plus exactement, nous appelons abusivement «flot» le flot transverse, à distinguer du flot radial.

III.2 Propriétés mathématiques du flot

III.2.1 Comportement à bas p_T

Par de simples considérations mathématiques, nous pouvons montrer que le flot à bas p_T doit se comporter comme une loi de puissance. Plus précisément, v_n doit s'annuler comme $(p_T)^n$ en $p_T = 0$. Nous allons supposer que $\Phi_R = 0$ car cela n'apporte rien à la discussion s'il est non nul. Considérons $f(\mathbf{p})$ la fonction de distribution par rapport au plan de réaction d'une particule d'impulsion $\mathbf{p}$ et plus particulièrement sa dépendance $f(p_x, p_y)$ dans le plan transverse où (x, y) est un repère cartésien. Il est raisonnable de supposer que f est suffisamment régulière en $\mathbf{p}_T = \mathbf{0}$ pour pouvoir la développer en séries entières autour de zéro. En utilisant la correspondance entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires, le flot s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \cos n\phi \rangle &= \frac{\int \mathrm{d}\phi \, \cos n\phi \, f(p_x, p_y)}{\int \mathrm{d}\phi \, f(p_x, p_y)} \\ &= \frac{\int \mathrm{d}\phi \, \cos n\phi \, f(p_T \cos\phi, p_T \sin\phi)}{\int \mathrm{d}\phi \, f(p_x, p_y)} \end{aligned} \tag{III.7}$$

Le développement en séries entières de $f(p_T \cos\phi, p_T \sin\phi)$ donne des puissances $p_T^k \cos^k \phi$, $p_T^k \sin^k \phi$ et $p_T^{l+m} \cos^l \phi \sin^m \phi$. Or

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \cos n\phi \, \cos^k \phi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \cos n\phi \, \sin^k \phi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \cos n\phi \, \cos^l \phi \, \sin^m \phi = 0,$$

si $k < n$ et $l + m < n$. Finalement, le premier terme non nul dans (III.7) est le terme à l'ordre n, soit

$$v_n \propto (p_T)^n. \tag{III.8}$$

A bas p_T, le flot dirigé doit donc être linéaire et le flot elliptique quadratique. Remarquons que ces comportements à bas p_T n'étaient pas observés sur les données publiées en 1998 par la collaboration NA49 du CERN [44].

III.2.2 Parité des v_n

Pour des collisions entre deux noyaux identiques, nous avons une symétrie par rapport à la rapidité du centre de masse (appelée également rapidité centrale) y_{CM}. Si y est la rapidité dans le référentiel du laboratoire, nous notons y^* la rapidité dans la référentiel du centre de masse.

Grâce à cette symétrie, toutes les harmoniques impaires (resp. paires) sont des fonctions impaires (resp. paires) de y^*. En particulier, v_1 doit s'annuler à la rapidité centrale. Pourtant, les données de NA49 ne remplissaient pas cette condition de symétrie.

III.2.3 Diminution des harmoniques supérieures

Si une fonction présente un pic prononcé pour une certaine impulsion, les coefficients de la série de Fourier correspondante sont du même ordre jusqu'à une certaine harmonique. Le cas limite est la distribution delta qui a tous ses coefficients de Fourier égaux à 1.

En revanche, si la distribution des particules est suffisamment régulière, ce qui semble somme toute assez raisonnable, les v_n doivent décroître rapidement avec n. Plus exactement, nous nous attendons à avoir à partir de $n = 3$ des harmoniques de plus en plus faibles.

Signalons les mesures de flot par la collaboration NA45/CERES au SPS jusqu'à la quatrième harmonique [28]. Ces données ont été présentées à la conférence Quark Matter 1999 mais n'ont jamais publiées, et pour cause : toutes ces harmoniques étaient du même ordre de grandeur. Encore une fois, les données du CERN semblent souffrir d'anomalies par rapport à ces simples considérations mathématiques sur le flot, comme nous le verrons au Chapitre IV.

III.3 Interprétation géométrique de v_1 et de v_2

III.3.1 Flot dirigé

Le premier coefficient de Fourier v_1 est appelé flot «dirigé». La Fig.III.2 illustre cette terminologie : nous considérons une collision non centrale dont la direction du paramètre d'impact est l'axe Y. Les schémas de gauche représentent la collision dans le plan de réaction, au moment où les deux noyaux se rencontrent, alors que les schémas de droite nous la montrent dans le plan transverse. Enfin, les schémas du haut correspondent au cas où $v_1 > 0$ et ceux du bas au cas où $v_1 < 0$.

Considérons les particules provenant du projectile. Elles sont émises dans la région $y > 0$ (« forward hemisphere»). Si elles vont préférentiellement vers le haut (et vers l'avant) suivant la direction Y, la moyenne $v_1^{\rm obs} = \langle \cos(\phi - \Phi_R) \rangle$ est positive. La distribution des particules est *dirigée*, dans le sens où les particules ont en moyenne un angle azimutal proche de Φ_R. En revanche, si les particules vont plutôt vers le bas, on a $v_1^{\rm obs} < 0$ (cf. Fig.III.2 en bas à droite).

Notons que le signe absolu de v_1 n'est pas accessible expérimentalement : on ne peut distinguer les deux cas décrits à la Fig.III.2. La discussion ci-dessus a été donc faite du point de la théorie. Nous reviendrons sur ce problème de signe à la Section III.4.4.

III.3.2 Flot elliptique

Le deuxième coefficient de Fourier v_2 est communément appelé flot «elliptique». Nous nous intéressons ici uniquement à la direction des particules dans le plan transverse, sans se soucier de la région de rapidité avant ou arrière, contrairement au flot dirigé. Si $v_2^{\rm obs} = \langle \cos 2(\phi - \Phi_R) \rangle > 0$, cela signifie que les particules vont préférentiellement suivant la direction du plan de réaction. Vue dans le plan transverse (cf. Fig.III.3 en haut à droite), la distribution est elliptique avec pour grand axe l'axe Y. On parle alors de «in-plane flow» (flot elliptique dans le plan de réaction). En revanche, quand $v_2^{\rm obs} < 0$ (cf. Fig.III.3 en bas), les particules partent suivant un axe normal au plan de réaction : le flot est dit «out-of-plane».

Nous allons maintenant décrire succinctement la physique du flot dirigé et du flot elliptique.

III.4 La physique du flot dirigé

L'étude du flot dirigé se fait en pratique à travers plusieurs observables : alors que le flot dirigé est défini par $v_1 = \langle \cos \phi \rangle$ (nous avons posé ici $\Phi_R = 0$), nous pouvons également étudier $\langle p_x \rangle = \langle p_T \cos \phi \rangle$, voire la quantité $\langle p_x / A \rangle$ où A est la masse du fragment considéré (proton, deutéron, etc.). Enfin une dernière observable est souvent utilisée : F, appelée le paramètre de flot, est définie par

$$F = y_{\rm proj} \frac{{\rm d} \langle p_T \cos \phi \rangle}{{\rm d}y} \Big|_{y=y_{\rm CM}} \qquad \text{(III.9)}$$

où la valeur moyenne porte sur beaucoup d'événements et de particules d'un certain type et sur leur p_T. $y_{\rm proj}$ désigne la rapidité du projectile dans le laboratoire.

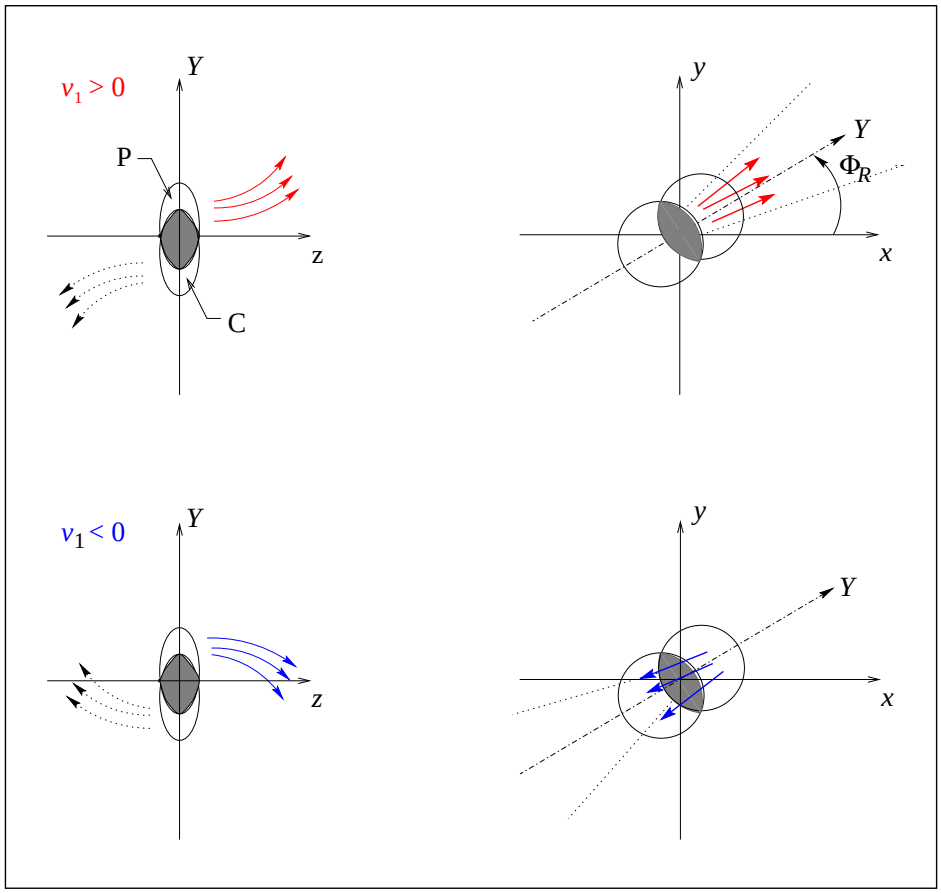


FIG. III.2 – Interprétation géométrique du flot dirigé v_1. Les axes x et y représentent le plan transverse, alors que les axes Y et z définissent le plan de réaction. En haut, cas où $v_1 > 0$; en bas, cas où $v_1 < 0$.

III.4.1 Dépendance en centralité

La présence de flot traduit le fait que des effets collectifs se sont développés dans la zone de collision. Par symétrie, le flot s'annule lorsque la collision est centrale. Mais il est également nul pour les collisions très périphériques car peu de collisions entre participants se produisent et les effets collectifs sont alors faibles. Le flot atteint un maximum pour les collisions semi-centrales. Pour une collision Pb–Pb, cela correspond à un paramètre d'impact de 6–8 fm.

III.4.2 Variation avec l'énergie de la collision

Nous noterons $E_{\rm lab}$ l'énergie du projectile dans le référentiel du laboratoire (la cible étant au repos). Le flot dirigé est produit par les interactions nucléon–nucléon dans la zone de collision. Nous pouvons comprendre avec des arguments théoriques simples la variation de v_1 avec $E_{\rm lab}$. Pour de faibles valeurs de $E_{\rm lab}$ (inférieures à quelques dizaines de AMeV), c'est la composante attractive de cette interaction qui domine. De plus les noyaux sont très peu contractés et les nucléons de l'un sont sensibles au champ moyen des nucléons de l'autre. Le flot dirigé est alors négatif [45], *cf.* Fig.III.4*a*. En revanche, à haute énergie, l'interaction devient répulsive. Un gradient de pression se crée dans la zone de collision et il est plus fort dans la direction du paramètre d'impact : les trajectoires des particules émises sont déviées de l'axe de la collision. Plus schématiquement, les nucléons du projectile «rebondissent» sur la cible et ont alors une trajectoire vers le haut, *cf.* Fig.III.4*b*. Nous avons donc $v_1 > 0$. La

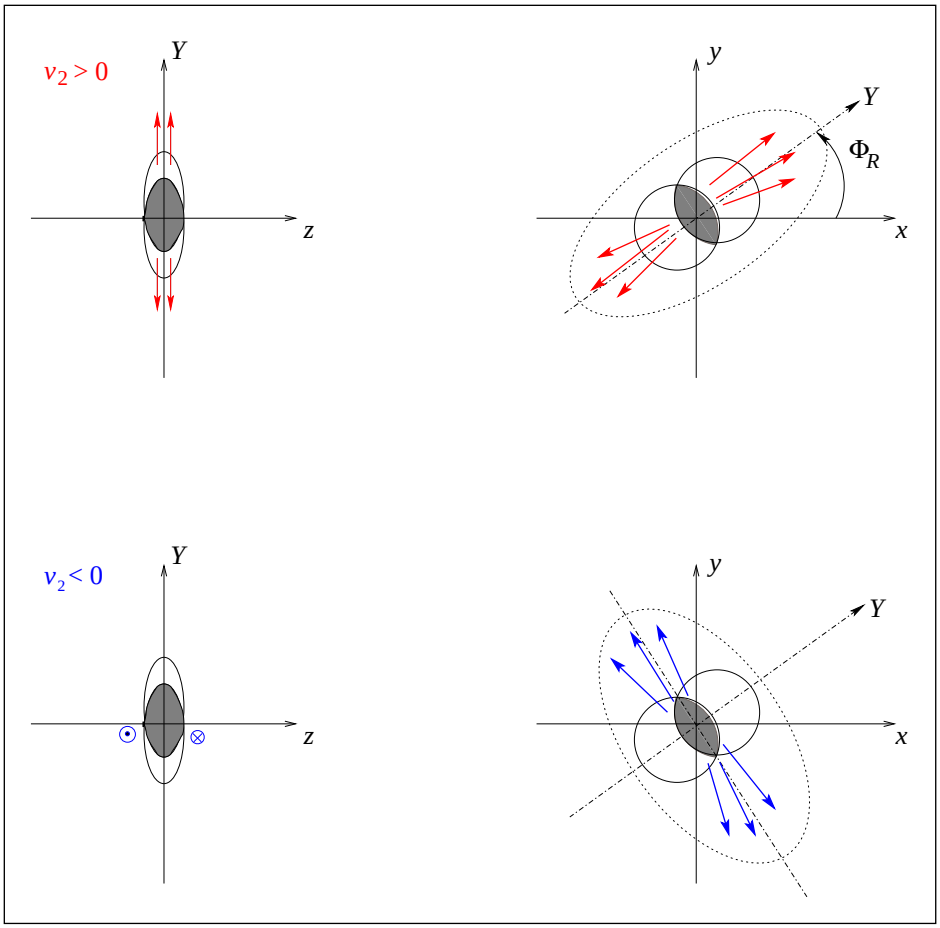


FIG. III.3 – Même légende que dans Fig.III.2 pour le flot elliptique v_2.

transition entre un flot dirigé négatif et un flot dirigé positif se fait à E_{BAL}, l'«énergie de balance». Elle correspond grossièrement à l'énergie de Fermi des nucléons ($\sim$ 35 MeV). En fait, sa valeur dépend de la taille des noyaux. En effet, à basse énergie, l'interaction attractive provient des nucléons qui sont en surface, v_1 doit donc se comporter comme $A^{2/3}$, où A est le numéro atomique du noyau. En revanche, la partie répulsive du l'interaction nucléon–nucléon est un effet de volume et varie donc comme A. Bref, v_1 devient plus vite positif pour les gros noyaux par rapport à des noyaux plus petits. Autrement dit, E_{BAL} diminue avec A. Les dernières mesures d'INDRA au GANIL le confirment [46].

A plus haute énergie encore, $E_{\mathrm{lab}} > 100$ AMeV, v_1 continue d'augmenter, atteint un maximum vers 300–400 AMeV puis rediminue. En effet, les particules de $v_1 > 0$ sont déviées par la pression dans la zone de collision et elles s'en éloignent d'autant plus vite que l'énergie de la collision est élevée : les effets collectifs donnant naissance au flot dirigé, qui se forme à un temps très court après la collision, n'ont pas le temps de se mettre en place et v_1 est faible. Les mesures au SIS (de 0.09 à 2 AGeV) [47], à l'AGS (de 2 à 11.5 AGeV) [48–50] et au SPS (à 40 et 158 AGeV) [51] confirment cette tendance. Nous nous attendons à un v_1 très faible à RHIC.

La Fig.III.5 présente les différents résultats expérimentaux du paramètre de flot F défini par (III.9). F rend compte de la force du flot dirigé des participants.

Cependant, entre les énergies de l'AGS et du SPS, il est prédit qu'un «amollissement» de l'équation d'état de la zone de collision, dû à une transition de phase vers un plasma de quarks et de gluons, produirait un minimum appelé «softest point of the equation of state» [52]. Ces

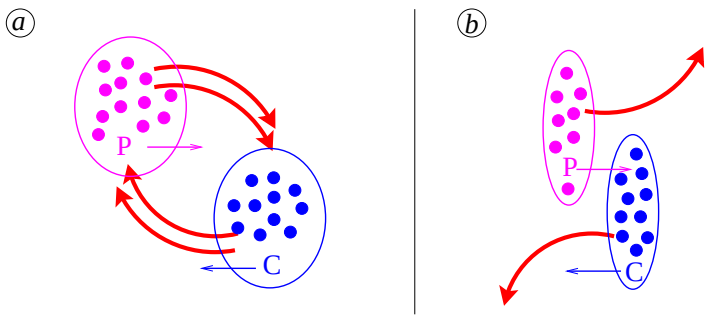


FIG. III.4 – Représentation très schématique d'une collision entre un projectile (P) et une cible (C) vue dans le plan de réaction. Gauche : cas où $E_{\rm lab} < E_{\rm BAL}$, $v_1 < 0$. Droite : cas où $E_{\rm lab} > E_{\rm BAL}$, $v_1 > 0$.

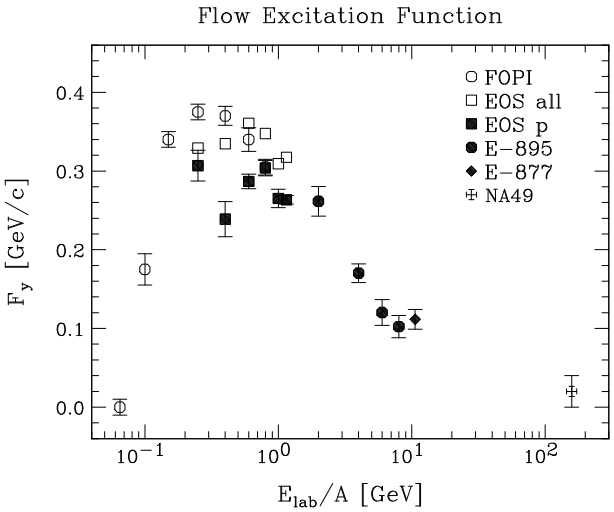


FIG. III.5 – Mesures expérimentales du paramètre de flot $F_y = F/y_{\rm CM}$ en fonction en fonction de l'énergie de la collision $E_{\rm beam}$ [50].

calculs hydrodynamiques prenant en compte une transition de phase du premier ordre d'un fluide de hadrons (ou trois fluides correspondant au projectile, à la cible et aux particules créées lors de la collision) vers un plasma de quarks et de gluons présentent un minimum autour de 8 AGeV et de nouveau un maximum à 40 AGeV (*cf.* Fig.III.6). Les mesures de l'AGS [50] montrent une diminution de v_1 mais pas de minimum. Les nouvelles mesures de NA49 à 40 AGeV pourraient peut-être permettre de conclure quant à l'existence de ce minimum. L'analyse de ces données a occupé la dernière année de ma thèse et certains résultats sont présentés au Chapitre XI.

III.4.3 Dépendance en rapidité

Pour des collisions symétriques, nous avons déjà fait remarquer que v_1 est une fonction impaire de y^*. Il est donc linéaire près de la rapidité centrale, voire même sur pratiquement tout l'intervalle en rapidité («side-splash effect»). Néanmoins, pour $y \sim y_{\rm proj}$ et $y \sim y_{\rm cib}$, v_1 sature, voire diminue[2], à cause du «rebond» sur les fragments («bounce-off») [53, 54] : nous obtenons donc une courbe en forme de S.

[2] Les dernières analyses de flot par NA49, à 40 et 158 AGeV, semblent au contraire manifester un «anti-flot» pour les protons, *i.e.*, une pente négative à la rapidité centrale.

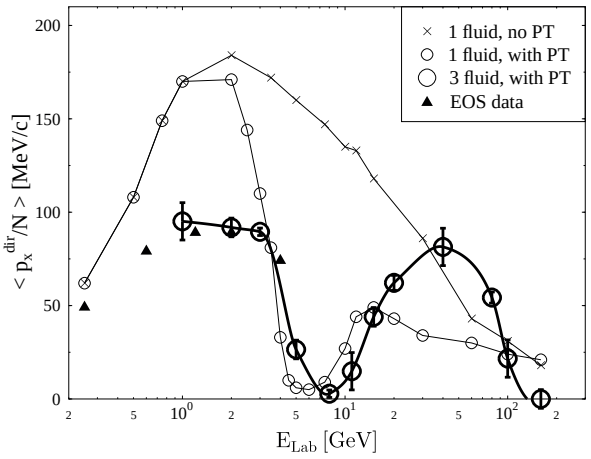


FIG. III.6 – Fonction d'excitation du flot dirigé en fonction de l'énergie de la collision dans un modèle hydrodynamique à un fluide, avec ou sans transition de phase (PT), et à trois fluides [52].

Nous avons défini le paramètre de flot F par Eq.(III.9). Nous verrons qu'expérimentalement le signe du flot n'est pas déterminé [*cf.* Eq.(IV.5)]. La convention commune est de poser $v_1 > 0$ pour les protons dans la région de rapidité avant. Or suivant que l'on soit au-dessus ou en-dessous de l'énergie de balance, ces protons sont soit déviés vers le haut ou vers le bas ! Le changement de signe de F n'est pas directement accessible[3]. Par convention, F doit donc être positif pour les protons. Mais à l'énergie de balance, F doit être très faible, voire nul. Cette énergie est déterminée expérimentalement en étudiant la variation de F en fonction de $E_{\rm lab}$ et en en prenant le minimum.

Divers phénomènes peuvent créer un «anti-flot», *i.e.*, une pente négative de v_1 à la rapidité centrale. Par exemple, à basse énergie, la compétition entre l'interaction de champ moyen attractive et l'interaction nucléon–nucléon répulsive, déjà discutée plus haut, peut changer le signe de F. A plus haute énergie, autour du «softest point» de l'équation d'état, v_1 pourrait être minimum, voire nul. Des calculs hydrodynamiques avec transition de phase montrent un changement de signe de F à ces énergies [52] et un anti-flot [55] (*cf.* Fig.III.7). Il semblerait qu'au SPS, le flot dirigé des protons présente un anti-flot (*cf.* Chapitre XII).

Enfin pour $E_{\rm lab}$ très grand (aux énergies de RHIC), une pente négative de v_1 à la rapidité centrale a été prédite mais sous des hypothèses très générales, à savoir le fait que la position des nucléons dans l'espace est fortement corrélée avec leur impulsion dans l'espace des phases [56]. La Fig. III.8 en est une illustration. Considérons un nucléon du projectile en regard de la cible. Plus il aura de matière à traverser, plus il sera ralenti et plus sa rapidité sera proche de $y_{\rm CM}$. En revanche, s'il se trouve au bord de la zone de collision, il sera peu ralenti et il aura un grand y. Maintenant, à haute énergie, le flot elliptique est positif (*cf.* Section III.5) et les particules sont donc émises suivant la direction du plan de réaction (suivant l'axe x sur la Fig.III.8). Les particules proches de la rapidité centrale ont donc un $\langle p_x \rangle < 0$ alors qu'à grand y, $\langle p_x \rangle > 0$. Ce changement de signe dépend de la centralité de la collision mais surtout de la force du flot elliptique. Il semblerait que jusqu'aux énergies du CERN, des effets comme l'interaction entre les particules produites et les nucléons spectateurs (appelée «shadowing») domine sur la corrélation entre les coordonnées spatiales et l'impulsion, produisant une pente positive [50]. R. J. M. Snellings *et al.* ont vérifié leur modèle sur des simulations RQMD pour une collision Au–Au à 200 AGeV pour une collision semi-centrale et ont effectivement trouvé

[3] Des mesures sur la polarité des photons émis ont cependant permis de déterminer explicitement le signe de v_1 [45].

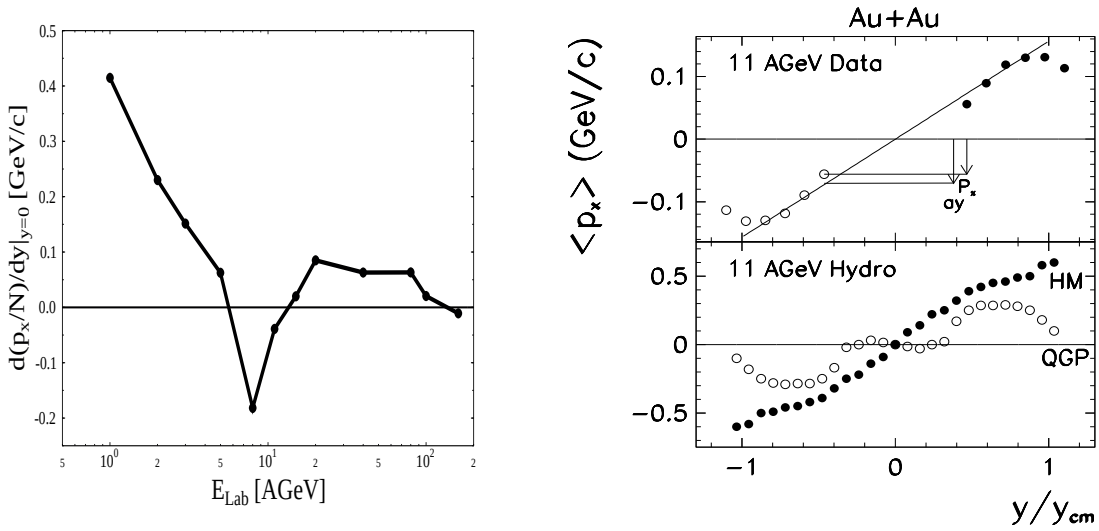


FIG. III.7 – A gauche, paramètre de flot en fonction de l'énergie de la collision, dans un modèle hydrodynamique à trois fluides et une transition de phase du premier ordre vers un plasma de quarks et de gluons [52] ; à droite, flot dirigé en fonction de la rapidité pour une matière purement hadronique (HM) et avec une transition de phase vers un plasma de quarks et de gluons (QGP) [55].

un paramètre de flot négatif.

III.4.4 Flot des protons et des pions ; convention de signe

Nous avons déjà signalé plusieurs fois le fait que le signe absolu de v_1 ne peut être donné par l'expérience. En fait, la plupart des collaborations adoptent la convention de $v_1 > 0$ pour les protons dans la région de rapidité avant. Ainsi l'étude du flot dirigé autour de l'énergie de balance ne se fait pas par l'observation d'un changement de signe, puisque v_1 est pris positif par convention, mais par la mise en évidence d'un minimum autour de $E_{\rm BAL}$ [46]. C'est bien la physique, *i.e.*, les modèles théoriques qui fixent ce signe.

Le flot dirigé des pions peut aussi être étudié car les pions sont les particules les plus abondamment produites dans une collision ultrarelativiste. Cependant leur flot dirigé est plus faible car il résulte de collisions sur les nucléons spectateurs ou sur les protons produits. Mais le fait important est qu'ils ont un v_1 de signe *opposé* à celui des protons puisqu'ils diffusent sur ces protons [57, 58]. Cela a été vérifié expérimentalement à Saturne [59], l'AGS [48, 49] et au SPS [60].

III.5 La physique du flot elliptique

III.5.1 Variation avec l'énergie de la collision

Les mesures de v_2 en fonction de $E_{\rm lab}$, provenant de différentes collaborations, sont présentées à la Fig.III.9. A des énergies inférieures à 100 AMeV, le flot elliptique est «in-plane» : les noyaux après la collision forment un système en rotation autour de la direction du paramètre d'impact (*cf.* Fig.III.4*a*). Les particules sous la force centrifuge sont donc émises dans le plan de rotation qui est le plan de réaction. Le flot elliptique produit est alors «in-plane» et $v_2 > 0$.

Une première transition vers un v_2 négatif a été observée à une énergie notée $E_{\rm TRAN}$. Nous avons vu qu'à plus haute énergie, la partie répulsive de l'interaction nucléon-nucléon

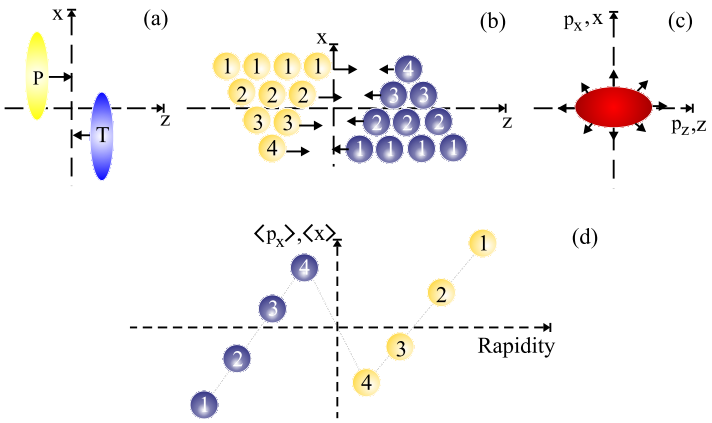


FIG. III.8 – Représentation schématique de la collision entre les participants du projectile (jaunes) et de la cible (bleus), vue dans le plan de réaction [(a) et (b)] [56]. En (c), corrélation positive entre la position et l'impulsion des particules. En (d), distribution de $\langle x \rangle$ et $\langle p_x \rangle$ en fonction de la rapidité.

domine. Seulement la présence des fragments autour de la zone de collision gêne l'expansion de cette dernière et les particules sont émises dans les régions libres de nucléons spectateurs, *i.e.*, perpendiculairement au plan de réaction : le flot elliptique est «out-of-plane» et $v_2 < 0$. Cet effet de «squeeze-out» [66] est représenté à la Fig.III.10. La collaboration FOPI a mis en évidence ce changement de signe en mesurant v_2 dans des collisions Au–Au pour des énergies allant de 90 à 400 AMeV [61] : $E_{\mathrm{TRAN}} \sim 100$ AMeV. Comme pour v_1, cette transition se fait à des énergies plus basses lorsque la taille du noyau augmente : l'anisotropie de la zone de collision est plus grande pour de gros noyaux (*cf.* section suivante).

Enfin, pour des énergies encore plus élevées, une deuxième transition se produit et le flot elliptique redevient «in-plane» [67]. Cela peut se comprendre en termes de compétition entre deux temps caractéristiques, le temps de passage des noyaux, d'ordre $2R/\gamma$, où γ est le facteur de Lorentz, et le temps τ que prennent les effets collectifs pour se développer. Au SPS ou à RHIC, les noyaux subissent une contraction de Lorentz très grande et les zones de fragmentation ont quitté la région de la collision bien avant que les effets collectifs n'aient eu le temps de se mettre en place. Maintenant, si la zone de collision est partiellement thermalisée, c'est le gradient de pression qui va imposer la distribution des particules. Comme ce gradient est plus fort le long de la direction du paramètre d'impact (*cf.* Fig.III.1), les particules seront émises préférentiellement «in-plane». Ceci est illustré à la Fig.III.11. La transition semblerait se faire vers 4 AGeV [64].

III.5.2 Dépendance en centralité

Le flot elliptique a le même comportement que le flot dirigé, à savoir qu'il s'annule pour les collisions très centrales et très périphériques, en passant par un maximum pour les collisions semi-péripheriques. Nous pouvons toutefois en dire un peu plus. A des énergies ultrarelativistes, nous avons vu que la source du flot est le gradient de pression dans la zone de collision, pourvu que le système soit thermalisé. Nous introduisons l'excentricité de la zone de collision définie par

$$\epsilon \equiv \frac{\langle y^2 \rangle - \langle x^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle}, \tag{III.10}$$

où x est la direction du paramètre d'impact et y un axe qui lui est perpendiculaire dans le plan transverse. L'anisotropie dans l'espace est la cause de l'anisotropie dans l'espace des

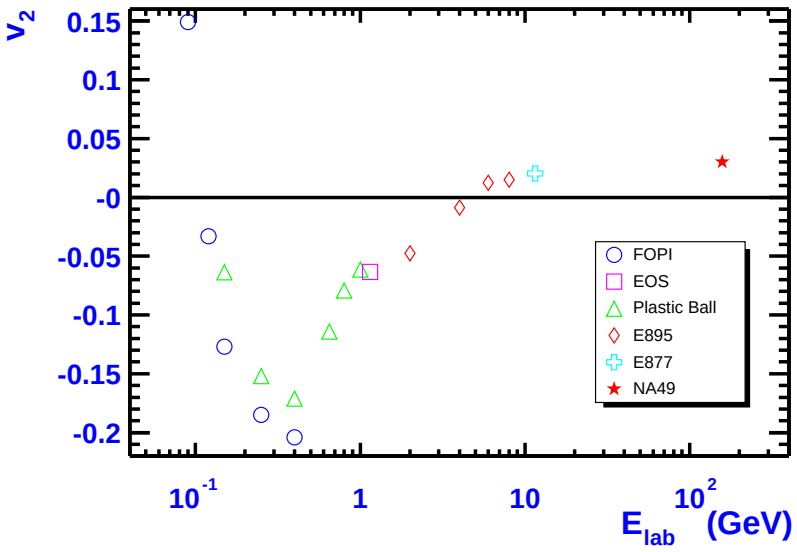


FIG. III.9 – Quelques résultats de mesures du flot elliptique en fonction de l'énergie de la collision [44, 61–65].

impulsions. Pour des sphères dures, $\epsilon = b/(2R_A)$. Un calcul plus réaliste utiliserait une paramétrisation de la densité nucléaire à la Woods-Saxon

$$\rho_A(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R_A)/a}}, \tag{III.11}$$

où $R_A = 1.1A^{1/3}$, $a = 0.53$ fm et ρ_0 une constante de normalisation. Sauf pour les collisions très périphériques où l'effet de peau du noyau devient important, ϵ décroît linéairement avec le nombre de participants N_p, cette décroissance étant plus rapide pour de gros noyaux.

Il est donc naturel de comparer ϵ à l'excentricité dans l'espace des impulsions ϵ_p

$$\epsilon_p \equiv \frac{\langle p_y^2 \rangle - \langle p_x^2 \rangle}{\langle p_x^2 \rangle + \langle p_y^2 \rangle} = \frac{\langle p_T^2\, v_2 \rangle}{p_T^2}, \tag{III.12}$$

parfois confondue dans la littérature avec v_2. Dans la limite hydrodynamique, *i.e.*, pour un système complètement thermalisé et pour un libre parcours moyen très petit devant R_A, la source du flot elliptique vient uniquement de la déformation du système [67, 68], soit

$$v_2 \;\propto\; \epsilon \;\propto\; (N_p^{\max} - N_p). \tag{III.13}$$

En revanche, pour un système peu dense, v_2 varie plutôt comme le nombre de collisions [69]

$$v_2 \;\propto\; \epsilon \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y} \;\propto\; (N_p^{\max} - N_p) N_p, \tag{III.14}$$

où $\mathrm{d}N/\mathrm{d}y$ est la densité de particules par unité de rapidité, approximativement proportionnelle au nombre de participants. Une déviation de v_2 par rapport à la décroissance linéaire reflète donc une thermalisation incomplète de la zone de collision[4]. v_2 représente donc un bon test de l'équilibre thermique du système. La Fig.III.12 présente le résultat de calculs hydrodynamiques

[4] Des corrélations non dues au flot peuvent également fortement affecter la variation de v_2 en fonction de la centralité, *cf.* Section XI.9.2

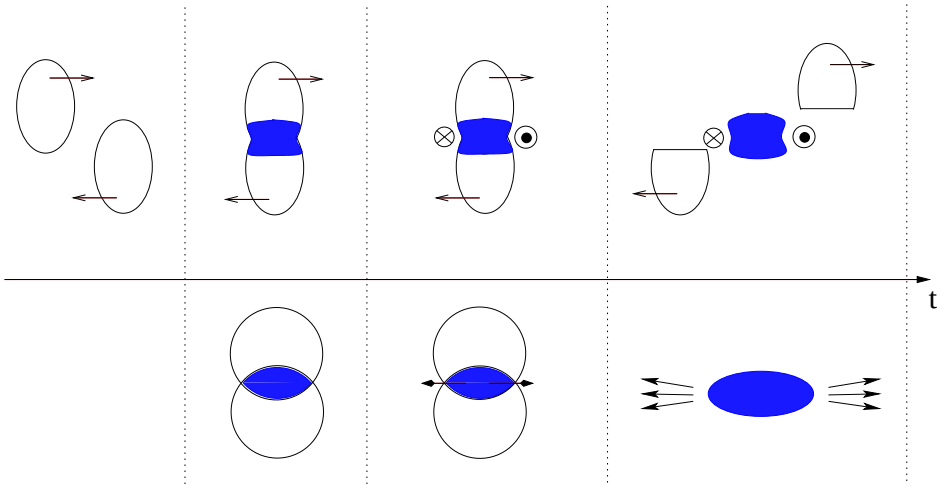


FIG. III.10 – Représentation schématique de la dynamique d'une collision d'ions lourds à basse énergie. En haut, vue dans le plan de réaction ; en bas, vue dans le plan transverse. Les noyaux sont peu contractés et l'émission des particules se fait «out-of-plane».

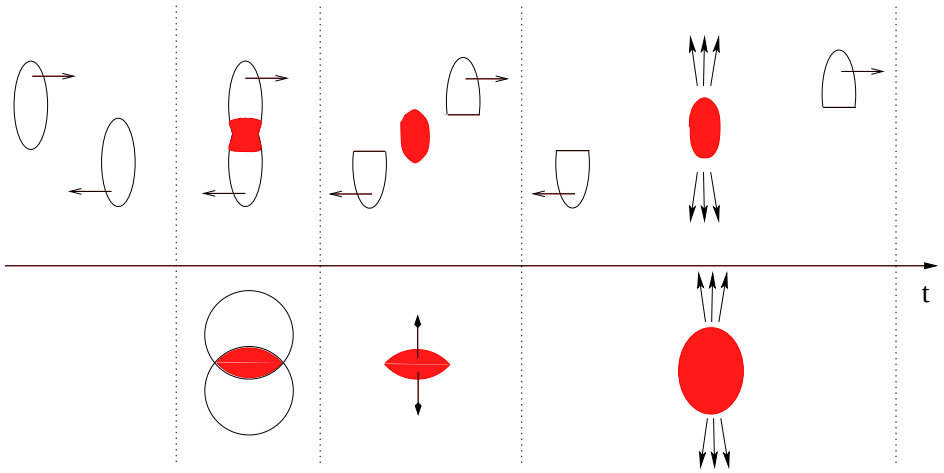


FIG. III.11 – Même légende qu'à la Fig.III.10 mais à haute énergie : les noyaux sont très contractés et l'émission des particules se fait «in-plane».

et de transport comparés aux données de STAR [70]. Celles-ci semblent favoriser les modèles hydrodynamiques, c'est-à-dire qu'elles pourraient indiquer une thermalisation du système. Nous verrons néanmoins au Chapitre XI qu'une autre analyse, motivée par nos travaux, semble aboutir à la conclusion opposée.

Une autre manière de voir cet équilibre thermique est d'étudier le rapport v_2/ϵ en fonction de la centralité car les effets purement géométriques s'annulent entre le numérateur et le dénominateur. Ce rapport contient donc toute la dynamique de la thermalisation du système. Alors que la limite thermodynamique ne donne aucune dépendance en centralité, v_2/ϵ doit s'annuler pour les collisions très périphériques où peu de collisions se produisent. Si une transition de phase du premier ordre a lieu à partir d'une certaine centralité, v_2 varie moins vite lorsqu'on augmente encore la centralité : le rapport v_2/ϵ devrait présenter un plateau sur l'intervalle en centralité où une phase mixte est produite [69, 71, 72].

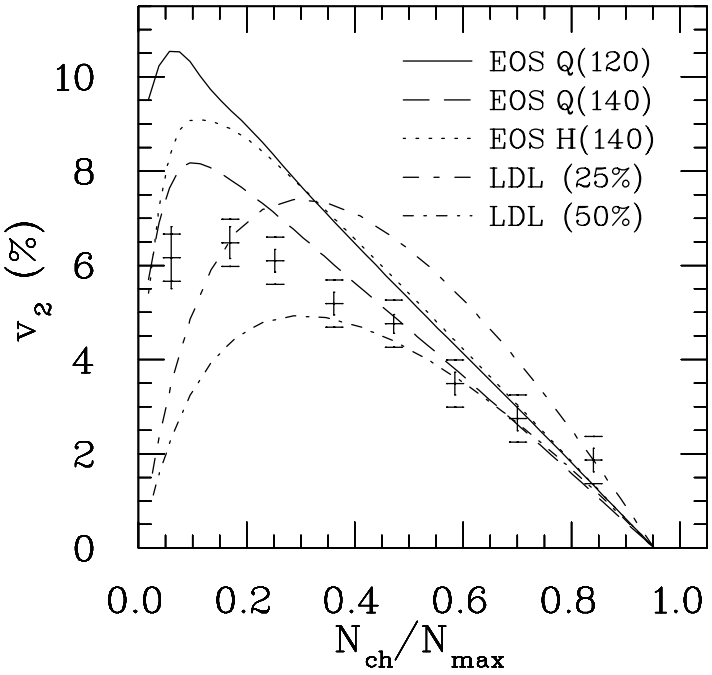


FIG. III.12 – Flot elliptique en fonction du nombre de particules chargées ramené au nombre total de particules, pour une collision Au–Au à $\sqrt{s} = 130$ AGeV. Les calculs hydrodynamiques ont utilisé une équation d'état (EOS) purement hadronique (H) ou avec une transition de phase du premier ordre (Q), avec différentes températures de «freeze-out». Sont aussi présentés les résultats obtenus dans la limite de faible densité (LDL) avec 25% ou 50% de la multiplicité venant des résonances [70].

III.5.3 Dépendance en impulsion transverse

Le flot différentiel $v_2(p_T)$ permet également de tester l'équation d'état du système. Des modèles hydrodynamiques [68] montrent une dépendance très rapidement linéaire (le comportement quadratique à bas p_T est visible pour le flot des protons mais pratiquement inexistant pour les pions). Il semble que les données de STAR sont bien reproduites à bas p_T mais que les calculs hydrodynamiques surestiment le flot elliptique à grand p_T [73].

Néanmoins, les modèles de transport reproduisent également les données de STAR et ont l'avantage de saturer à haut p_T [74], ce qui a été observé dans les dernières données de STAR [73]. Cette saturation peut s'interpréter par le fait que les collisions élastiques n'étant pas assez nombreuses à grand p_T, le flot elliptique y a plus de mal à se développer.

Enfin la saturation à haut p_T voire la diminution de v_2 est peut-être le signe de processus durs comme le «jet quenching» [24].

III.6 Conclusion

Nous avons vu que le flot contient beaucoup de physique. Il est notamment très sensible à l'équation d'état de la matière qui se forme dans la zone de collision. Cependant l'analyse du flot présente plusieurs difficultés : c'est un effet faible, de l'ordre du pourcent ; il dépend également de l'acceptance des détecteurs puisqu'il mesure l'anisotropie azimutale des particules, qui plus est, par rapport à une direction inconnue. Il est donc nécessaire d'avoir une méthode d'analyse aussi fine que possible pour pouvoir confirmer ou infirmer un modèle théorique.

Le point de départ de ma thèse a été l'étude des anomalies que nous avons signalées

dans les mesures de NA45 et surtout de NA49, notamment les comportements curieux de v_1 et v_2 à la rapidité centrale et aussi bien pour des impulsions proches de zéro que pour les grandes impulsions. Les méthodes d'analyse utilisées jusqu'alors, dites méthodes «standard», ne semblaient pas suffisamment précises pour reconstruire uniquement le flot et nous avions des indications claires que des effets autres que ceux dus au flot étaient présents dans ces résultats.

C'est pourquoi nous présenterons dans la partie suivante les méthodes standard et nous en ferons une critique détaillée afin de mettre en évidence leurs limitations. Enfin nous essaierons d'apporter des éclaircissements sur les anomalies des données du CERN.

Bibliographie

[1] I. Ya. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk SSSR **78** (1951) 889.

[2] R. Hagedorn, Nuovo Cim. Suppl. **3** (1965) 147.

[3] K. Johnson, C. B. Thorn, A. Chodos, R. L. Jaffe et V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **D9** (1974) 3471 ; K. Johnson, A. Chodos, R. L. Jaffe et C. B. Thorn, Phys. Rev. **D10** (1974) 2599.

[4] F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert, Phys. Lett. B **478** (2000) 447 [arXiv :hep-lat/0002003].

[5] M. Luscher, K. Symanzik and P. Weisz, Nucl. Phys. B **173** (1980) 365.

[6] O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann and M. Lutgemeier, Phys. Rev. D **62** (2000) 034021 [arXiv :hep-lat/9908010].

[7] C. Quigg et J. L. Rosner, Phys. Repts. **56** (1979) 167 ; E. Eichten *et al.*, Phys. Rev. **D21** (1980) 203.

[8] A. K. Rebhan, Nucl. Phys. B **430** (1994) 319 [arXiv :hep-ph/9408262].

[9] F. Karsch, arXiv :hep-lat/0106019.

[10] R. G. Edwards, U. M. Heller et T. R. Klassen, Nucl. Phys. B **517** (1998) 377 [arXiv :hep-lat/9711003] ; B. Bleinlich *et al.*, Eur. Phys. J. **C6** (1999) 133 ; M. Okamoto *et al.* [CP-PACS Collaboration], Phys. Rev. D **60** (1999) 094510 [arXiv :hep-lat/9905005].

[11] A. Ali Khan *et al.* [CP-PACS Collaboration], action," Phys. Rev. D **63** (2001) 034502 [arXiv :hep-lat/0008011].

[12] F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert, Nucl. Phys. B **605** (2001) 579 [arXiv :hep-lat/0012023].

[13] B. C. Barrois, Nucl. Phys. B **129** (1977) 390 ; S. Frautschi, Proceedings of workshop on hadronic matter at extreme density, Erice 1978 ; B. C. Barrois, UMI 79-04847 ; D. Bailin et A. Love, Phys. Rept. **107** (1984) 325 ; M. G. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, Phys. Lett. B **422** (1998) 247 [arXiv :hep-ph/9711395] ; R. Rapp, T. Schafer, E. V. Shuryak and M. Velkovsky, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 53 [arXiv :hep-ph/9711396] ; M. G. Alford, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **51** (2001) 131 [arXiv :hep-ph/0102047].

[14] Informations disponibles sur le serveur
http ://www1.msfc.nasa.gov/NEWSROOM/news/releases/2002/02-082.html

[15] P. Braun-Munzinger et J. Stachel, arXiv :nucl-th/0112051.

[16] Z. Fodor and S. D. Katz, arXiv :hep-lat/0111064.

[17] M. M. Aggarwal *et al.* [WA98 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **85**, 3595 (2000) [arXiv :nucl-ex/0006008].

[18] T. Matsui et H. Satz, Phys. Lett. B **178** (1986) 416.

[19] M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. B **410** (1997) 337 ; M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. B **410** (1997) 337 ; M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. **B450** (1999) 456. CERN-EP-99-013 ; M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. B **477** (2000) 28.

[20] M. Gyulassy, M. Plumer, M. Thoma and X. N. Wang, Nucl. Phys. A **538** (1992) 37C.

[21] M. Gyulassy and X. n. Wang, Nucl. Phys. B **420** (1994) 583 [arXiv :nucl-th/9306003].

[22] M. M. Aggarwal *et al.* [WA98 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 4087 [Erratum-ibid. **84** (1998) 578] [arXiv :nucl-ex/9806004].

[23] K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration], Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 022301 [arXiv :nucl-ex/0109003].

[24] X. N. Wang, Phys. Rev. C **63** (2001) 054902 [arXiv :nucl-th/0009019] ; M. Gyulassy, I. Vitev et X. N. Wang, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2537 [arXiv :nucl-th/0012092] ; M. Gyulassy, I. Vitev, X. N. Wang et P. Huovinen, Phys. Lett. B **526** (2002) 301 [arXiv :nucl-th/0109063].

[25] X. N. Wang, arXiv :hep-ph/0111404.

[26] C. Albajar *et al.* [UA1 Collaboration], Nucl. Phys. B **335** (1990) 261.

[27] T. Ullrich *et al.* [CERES Collaboration], Nucl. Phys. A **610** (1996) 317C ; G. Agakishiev *et al.* [CERES Collaboration], Nucl. Phys. A **638** (1998) 467 ; G. Agakishiev *et al.* [CERES Collaboration], Nucl. Phys. A **661** (1999) 673.

[28] B. Lenkeit *et al.* [CERES-Collaboration], Nucl. Phys. A **661** (1999) 23 [arXiv :nucl-ex/9910015].

[29] P. Braun-Munzinger, I. Heppe and J. Stachel, Phys. Lett. B **465** (1999) 15 [arXiv :nucl-th/9903010].

[30] S. A. Sofianos, G. Ellerkmann and W. Sandhas, arXiv :nucl-th/9909063.

[31] P. Braun-Munzinger, D. Magestro, K. Redlich and J. Stachel, Phys. Lett. B **518** (2001) 41 [arXiv :hep-ph/0105229].

[32] F. Antinori *et al.* [WA97 Collaboration], Eur. Phys. J. C **11** (1999) 79 ; F. Antinori *et al.* [WA97 Collaboration], Nucl. Phys. A **663** (2000) 717 ; P. Senger, Acta Phys. Polon. B **31** (2000) 2313 [Nucl. Phys. A **685** (2000) 312] [arXiv :nucl-ex/0010012] ; F. Wang, J. Phys. G **27** (2001) 283 [arXiv :nucl-ex/0010002] ; V. Friese [NA49 Collaboration], arXiv :hep-ph/0111423.

[33] J. Rafelski and B. Muller, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1066 [Erratum-ibid. **56** (1982) 2334]. J. Rafelski, Phys. Rept. **88** (1982) 331 ; P. Koch, B. Muller and J. Rafelski, Phys. Rept. **142** (1986) 167.

[34] K. S. Lee, M. J. Rhoades-Brown and U. W. Heinz, Phys. Rev. C **37** (1988) 1452.

[35] J. Kapusta and A. Mekjian, Phys. Rev. D **33** (1986) 1304.

[36] H. C. Eggers and J. Rafelski, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 1067.

[37] C. M. Ko, M. Asakawa and P. Levai, Phys. Rev. C **46** (1992) 1072.

[38] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, J. P. Wessels and N. Xu, Phys. Lett. B **365**, 1 (1996) [arXiv :nucl-th/9508020].

[39] H. Appelshäuser *et al.* [NA49 Collaboration], Nucl. Phys. A **638** (1998) 91.

[40] S. Pratt, Phys. Rev. D **33** (1986) 1314.

[41] L. Van Hove, Z. Phys. C **21** (1983) 93 ; M. Gyulassy, K. Kajantie, H. Kurki-Suonio and L. D. McLerran, Nucl. Phys. B **237** (1984) 477.

[42] M. A. Lisa *et al.* [E895 Collaboration], Phys. Lett. B **496** (2000) 1 [arXiv :nucl-ex/0007022].

[43] S. Voloshin et Y. Zhang, Z. Phys. C **70**, 665 (1996) [hep-ph/9407282].

[44] H. Appelshäuser *et al.* [NA49 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **80**, 4136 (1998) [nucl-ex/9711001]. Nous avons utilisé les données révisées, accessibles sur la page internet de NA49, `http ://NA49info.cern.ch/na49/Archives/Images/Publications/Phys.Rev.Lett.80 :4136-4140,1998/` .

[45] M. B. Tsang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 559.

[46] D. Cussol *et al.* [INDRA Collaboration], nucl-ex/ 0111007.

[47] P. Crochet *et al.* [FOPI Collaboration], Phys. Lett. B **486**, 6 (2000) [nucl-ex/0006004] ; A. Andronic *et al.*, Phys. Rev. C **64**, 041604 (2001) [nucl-ex/0108014].

[48] J. Barrette *et al.* [E877 Collaboration], Phys. Rev. C **56** (1997) 3254 [arXiv :nucl-ex/9707002].

[49] J. Barrette *et al.* [E877 Collaboration], Phys. Rev. **C55** (1997) 1420 [nucl-ex/961006] ; ibid. **59**, 884 (1999) [nucl-ex/9805006] ; Phys. Lett. B **485**, 319 (2000) [nucl-ex/0004002]. Phys. Rev. C **63**, 014902 (2001) [nucl-ex/0007007].

[50] H. Liu *et al.* [E895 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **84**, 5488 (2000) [nucl-ex/0005005] ; P. Chung *et al.* [E895 Collaboration], ibid. **85**, 940 (2000) [nucl-ex/0101003] ; ibid. **86**, 2533 (2001) [nucl-ex/0101002].

[51] A. M. Poskanzer, arXiv :nucl-ex/0110013.

[52] J. Brachmann, S. Soff, A. Dumitru, H. Stocker, J. A. Maruhn, W. Greiner et D. H. Rischke, Phys. Rev. C **61** (2000) 024909 [arXiv :nucl-th/9908010].

[53] H. A. Gustafsson *et al.*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1590.

[54] P. Danielewicz et G. Odyniec, Phys. Lett. B **157** (1985) 146.

[55] L. P. Csernai et D. Röhrich, Phys. Lett. B **458** (1999) 454 [arXiv :nucl-th/9908034].

[56] R. J. Snellings, H. Sorge, S. A. Voloshin, F. Q. Wang et N. Xu, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 2803 [arXiv :nucl-ex/9908001].

[57] S. A. Bass, R. Mattiello, H. Stocker, W. Greiner et C. Hartnack, Phys. Lett. B **302** (1993) 381 ; S. A. Bass, C. Hartnack, H. Stocker et W. Greiner, Phys. Rev. C **51** (1995) 3343 [arXiv :nucl-th/9501002] ;

[58] S. Soff, S. A. Bass, M. Bleicher, H. Stoecker et W. Greiner, arXiv :nucl-th/9903061.

[59] J. Gosset *et al.*, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1251 ; J. Poitou *et al.*, Nucl. Phys. A **536** (1992) 767.

[60] M. M. Aggarwal *et al.* [WA98 Collaboration], arXiv :nucl-ex/9807004 ; M. M. Aggarwal *et al.* (WA98 Collaboration) Phys. Lett. **B469** (1999) 30 ; T. Peitzmann for the WA98 Collaboration, Nucl. Phys. **A661** (1999) 191c ; H. Schlagheck for the WA98 Collaboration, Nucl. Phys. **A661** (1999) 337c ; S. Nishimura for the WA98 Collaboration, Nucl. Phys. **A661** (1999) 464c ; H. Schlagheck, "Collective Flow Phenomena in 33 TeV Pb+Pb Reactions", PhD Thesis, Universität Münster, 1998.

[61] A. Andronic *et al.* [FOPI Collaboration], Nucl. Phys. A **679**, 765 (2001) [arXiv :nucl-ex/0008007].

[62] H. H. Gutbrod, K. H. Kampert, B. Kolb, A. M. Poskanzer, H. G. Ritter, R. Schicker et H. R. Schmidt, Phys. Rev. C **42** (1990) 640.

[63] EOS Collaboration, non publié.

[64] C. Pinkenburg *et al.* [E895 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1295 [arXiv :nucl-ex/9903010] ;

[65] J. Barrette *et al.* [E877 Collaboration], Nucl. Phys. A **638** (1998) 69.

[66] H. H. Gutbrod, B. W. Kolb, H. R. Schmidt, A. M. Poskanzer, H. G. Ritter et K. H. Kampert, Phys. Lett. B **216** (1989) 267.

[67] J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. D **46** (1992) 229.

[68] P. F. Kolb, J. Sollfrank et U. W. Heinz, Phys. Rev. C **62** (2000) 054909 [arXiv :hep-ph/0006129] ; P. Huovinen, P. F. Kolb, U. W. Heinz, P. V. Ruuskanen et S. A. Voloshin, Phys. Lett. B **503** (2001) 58 [arXiv :hep-ph/0101136].

[69] H. Heiselberg et A. M. Levy, Phys. Rev. C **59** (1999) 2716 [arXiv :nucl-th/9812034].

[70] P. F. Kolb, P. Huovinen, U. W. Heinz et H. Heiselberg, Phys. Lett. B **500** (2001) 232 [arXiv :hep-ph/0012137].

[71] L. Van Hove, Phys. Lett. B **118** (1982) 138.

[72] H. Sorge, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 2048 [arXiv :nucl-th/9812057].

[73] C. Adler *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 182301 [arXiv :nucl-ex/0107003] ; K. H. Ackermann *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 402 [arXiv :nucl-ex/0009011].

[74] M. Bleicher and H. Stocker, Phys. Lett. B **526** (2002) 309 [arXiv :hep-ph/0006147] ; E. E. Zabrodin, C. Fuchs, L. V. Bravina and A. Faessler, Phys. Lett. B **508** (2001) 184 [arXiv :nucl-th/0104054] ; Z. w. Lin and C. M. Ko, Phys. Rev. C **65** (2002) 034904 [arXiv :nucl-th/0108039] ; M. Gyulassy and D. Molnar, Found. Phys. **31** (2001) 875.

Partie B

Critique de la méthode standard d'analyse de flot

L'étude du flot nécessite des mesures précises et surtout fiables. Or les méthodes standard, notamment la méthode des sous-événements, qui ont été (et sont toujours, hélas !) largement utilisées, reposent sur l'idée forte que les corrélations azimutales à deux particules sont dominées uniquement par la physique du flot. Aucune justification théorique pour une affirmation aussi forte n'a été donnée jusqu'alors. Bien au contraire, en étudiant les choses de plus près, il s'avère que les corrélations non dues au flot (ou «nonflow») ne sont pas du tout négligeables. Les méthodes standard ne semblent donc pas valides aux énergies du SPS et de RHIC.

Nous avons divisé cette partie en cinq chapitres. Le premier présente les méthodes d'analyse standard, et plus précisément, la reconstruction du flot à partir des corrélations azimutales à deux particules. Dans les trois chapitres qui suivent, nous calculerons explicitement, avec plus ou moins de détails, l'anisotropie azimutale produite par trois effets «nonflow» : il s'agit des corrélations quantiques dues aux effets HBT, de la conservation de l'impulsion transverse totale et de la désintégration de résonances. Nous montrerons notamment sur les données de la collaboration NA49 publiées en 1998 que la prise en compte de ces effets modifie significativement le flot obtenu par la méthode standard, justifiant *a posteriori* les limitations de l'analyse standard, mises en avant dans le premier chapitre. Enfin le dernier chapitre résumera nos résultats.

Chapitre IV

Méthodes d'analyse standard

Sommaire

IV.1 Principes : les corrélations à deux particules 40
IV.1.1 Flot et moment d'ordre 2 40
IV.1.2 Indétermination du signe du flot 41
IV.1.3 Méthode des événements mixtes 41
IV.2 La méthode des sous-événements 42
IV.2.1 Le vecteur flot 42
IV.2.2 Corrélations au vecteur flot 42
IV.2.3 Résolution du plan de l'événement 43
IV.2.4 Utilisation de poids quelconques 44
IV.3 Limitation des méthodes standard : effets «nonflow» 45
IV.3.1 Ordre de grandeur des corrélations «nonflow» 45
IV.3.2 Limitation des méthodes standard 46
IV.3.3 Anomalies dans les données du CERN 48
IV.4 Soustraction des effets «nonflow» 48
IV.5 Conclusion 50

Après avoir introduit la notion de flot, nous pouvons maintenant exposer les principes des deux méthodes standard actuellement sur le marché, à savoir la méthode des événements mixtes et la méthode des sous-événements. Nous insisterons sur cette dernière car elle est utilisée en majorité par les collaborations expérimentales. Nous mettrons en évidence leurs limitations face aux effets «nonflow». Enfin nous présenterons la procédure pour soustraire ces effets de l'analyse de flot standard.

IV.1 Principes : les corrélations à deux particules

Dans cette première section, nous montrerons le principe de la reconstruction du flot à partir des corrélations azimutales à deux particules. Nous présenterons dans cette même section la méthode des événements mixtes car elle s'appuie directement sur les corrélations à deux particules.

IV.1.1 Flot et moment d'ordre 2

La difficulté dans l'analyse de flot vient de sa définition même : c'est une distribution par rapport au plan de réaction, *i.e.*, par rapport à l'angle Φ_R inconnu car non mesurable. L'astuce est d'utiliser les corrélations à deux particules, que nous appelerons également moment d'ordre 2 :

$$\mu_n(p_{T1}, y_1, p_{T2}, y_2) = \langle \cos n(\phi_1 - \phi_2) \rangle = \frac{\iint \cos n(\phi_1 - \phi_2) f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \, \mathrm{d}\phi_1 \, \mathrm{d}\phi_2}{\iint f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \, \mathrm{d}\phi_1 \, \mathrm{d}\phi_2}, \tag{IV.1}$$

où p_{Ti}, y_i et ϕ_i sont l'impulsion transverse, la rapidité et l'angle azimutal mesuré *par rapport au laboratoire* de la particule i, et $f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ la fonction de distribution à deux particules. Nous remplacerons parfois le cosinus par une exponentielle complexe, grâce à la symétrie par rapport au plan de réaction. Par la suite, nous utiliserons indifféremment les termes «corrélation», «corrélation azimutale» et «moment».

Introduisons l'angle du plan de réaction dans (IV.1) :

$$\begin{aligned} \mu_n(p_{T1}, y_1, p_{T2}, y_2) &= \langle \cos n(\phi_1 - \Phi_R + \Phi_R - \phi_2) \rangle \\ &= \langle \cos n(\phi_1 - \Phi_R) \cos n(\phi_2 - \Phi_R) \rangle + \langle \sin n(\phi_1 - \Phi_R) \sin n(\phi_2 - \Phi_R) \rangle . \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Les méthodes standard reposent sur l'hypothèse très forte que les corrélations azimutales dominantes sont celles dues au flot et que toutes les autres sources de corrélation sont négligeables. Ainsi les particules ne sont corrélées qu'au plan de réaction et la particule d'angle $(\phi_1 - \Phi_R)$ est indépendante de la particule d'angle $(\phi_2 - \Phi_R)$. On peut donc factoriser les moyennes dans (IV.2). Le terme en sinus s'élimine par symétrie par rapport au plan de réaction. Il reste donc

$$\begin{aligned} \mu_n(p_{T1}, y_1, p_{T2}, y_2) &= \langle \cos n(\phi_1 - \Phi_R) \rangle \langle \cos n(\phi_2 - \Phi_R) \rangle \\ &= v'_n(p_{T1}, y_1) \; v'_n(p_{T2}, y_2). \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Pour obtenir le flot différentiel d'une seule particule, il faut d'abord intégrer la corrélation à deux particules sur $(p_{T1}, y_1, p_{T2}, y_2) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ pour obtenir le flot intégré

$$v_n = \pm \sqrt{\mu_n(\mathcal{D}, \mathcal{D})}. \tag{IV.4}$$

Ensuite en intégrant (IV.3) uniquement sur la particule 2, nous obtenons le flot différentiel de la particule 1. Enfin, en utilisant (IV.4), nous obtenons l'expression suivante pour le flot différentiel

$$v'_n(p_T, y) = \pm \frac{\mu_n(p_T, y, \mathcal{D})}{\sqrt{\mu_n(\mathcal{D}, \mathcal{D})}}. \tag{IV.5}$$

Notons que les domaines d'intégration au numérateur et au dénominateur peuvent être différents. Le flot peut donc être reconstruit à partir de la quantité mesurable qu'est le moment d'ordre 2.

IV.1.2 Indétermination du signe du flot

Revenons un instant sur l'expression du flot, Eq.(IV.4). Une remarque importante est à faire : à partir des corrélations à deux particules, nous n'avons accès qu'au carré de v_n. Autrement dit, son signe reste indéterminé[1] dans (IV.4) et (IV.5). La physique nous permet parfois de conclure sur ce signe. Par exemple, nous avons vu à la Section III.5 que le flot elliptique doit être positif aux énergies ultrarelativistes. Pour le flot dirigé, les choses sont moins claires : conventionnellement, nous adoptons un v_1 positif pour les protons dans la région de rapidité avant (*cf.* Section III.4). Ce qui importe en fait, c'est le signe relatif du flot dirigé entre plusieurs types de particules : les Λ ont tendance à suivre la direction des protons alors que les π et les K^+ vont globalement dans la direction opposée [1, 2].

IV.1.3 Méthode des événements mixtes

Cette méthode applique directement la reconstruction présentée Section IV.1.1 par l'étude d'événements mixtes. Considérons deux particules d'angles azimutaux ϕ_1 et ϕ_2 respectivement, et la variable $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. Nous construisons la distribution $P_{\rm corr}(\Delta\phi)$ [resp. $P_{\rm uncorr}(\Delta\phi)$], où l'indice «corr» (resp. «uncorr») signifie que les deux particules appartiennent (ou non) au même événement. Le calcul de $P_{\rm uncorr}(\Delta\phi)$ se fait en tirant au hasard des particules provenant d'événements tous différents, d'où le terme d'événements «mixtes». Nous nous intéressons maintenant au rapport suivant[2] [3]

$$C(\Delta\phi) \equiv \frac{P_{\rm corr}(\Delta\phi)}{P_{\rm uncorr}(\Delta\phi)}. \tag{IV.6}$$

Si nous négligeons les corrélations «nonflow» à deux particules (comme pour la méthode standard), $C(\Delta\phi)$ peut être décomposé en série de Fourier dont les coefficients sont justement reliés aux v_n :

$$C(\Delta\phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n^2 \, e^{in\Delta\phi}. \tag{IV.7}$$

Pour obtenir le flot différentiel, il suffit d'étudier la différence $\Delta\phi = \psi - \phi_2$ où ψ est l'angle azimutal d'une particule dans une fenêtre de l'espace des phases fixée et de n'intégrer que sur l'angle ϕ_2. Le développement en série de Fourier de $C(\psi - \phi_2)$ donne alors

$$C(\psi - \phi_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v'_n \, v_n \, e^{in\Delta\phi}. \tag{IV.8}$$

Nous remarquons encore une fois que le flot intégré est indispensable à la reconstruction du flot différentiel [3].

Passons maintenant à la méthode des sous-événements, utilisée bien plus souvent que la méthode des événements mixtes, que ce soit à basse ou à haute énergie.

[1] Cependant l'utilisation de corrélations à trois particules, mélangeant deux harmoniques différentes, permet de reconstruire le signe de l'une des harmoniques, *cf.* Eq.(X.65).

[2] Le fait de diviser par $P_{\rm uncorr}(\Delta\phi)$ corrige les biais dus à l'acceptance du détecteur puisqu'il ne contient que les «corrélations» azimutales apparentes provenant d'un détecteur qui ne serait pas parfait. Cette technique, simple à mettre en oeuvre, présente donc un avantage certain quand le détecteur ne couvre qu'une partie de l'espace des phases, comme c'est le cas pour l'expérience PHENIX. Il n'y alors pas de correction d'acceptance à faire sur les valeurs de flot obtenues.

[3] Nous pouvons en principe corréler deux particules dans la même fenêtre de l'espace des phases mais en pratique, la statistique est trop faible pour le permettre.

IV.2 La méthode des sous-événements

Cette deuxième méthode [4] ne corrèle pas directement les particules deux à deux mais utilise un outil intermédiaire, le vecteur flot. Ce dernier peut être vu comme la somme de la contribution azimutale de beaucoup de particules et il sert essentiellement à estimer la direction du paramètre d'impact, soit l'angle Φ_R.

IV.2.1 Le vecteur flot

Pour un événement et une harmonique m donnés, nous définissons le vecteur flot comme suit :

$$Q_m = \sum_{j=1}^{M} \omega_j e^{im\phi_j} = |Q_m| e^{im\Phi_m}, \tag{IV.9}$$

où M est le nombre de particules utilisées dans l'analyse, ϕ_j l'angle azimutal de la particule j, mesuré dans le laboratoire et ω_j un poids qui dépend *a priori* de sa rapidité et/ou de son impulsion transverse. Nous reviendrons sur l'utilisation de poids quelconques à la Section IV.2.4 et dans un souci de simplicité, nous poserons les poids égaux à 1 dans la suite. Nous pouvons interpréter Q_m comme une marche aléatoire de M pas : s'il n'y a pas de flot, $\langle Q_m \rangle = 0$ et les fluctuations sont en $\sqrt{M}$; en revanche, s'il y a du flot, la marche aléatoire se fait suivant une direction privilégiée qui est celle du plan de réaction. A ce moment-là, nous avons

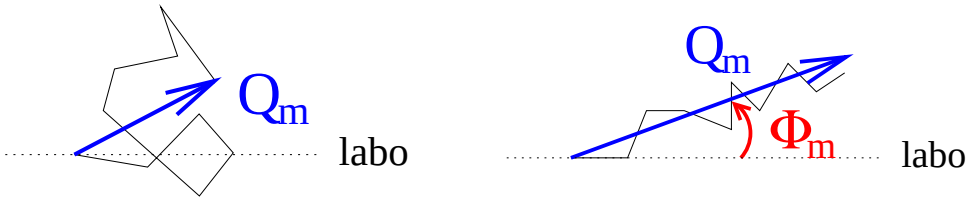


FIG. IV.1 – Interprétation du vecteur flot : à gauche, pas de flot et marche aléatoire ; à droite, flot et marche aléatoire dirigée.

$$\langle Q_m \rangle = M v_m e^{im\Phi_m} = \chi \sqrt{M} e^{im\Phi_m}, \tag{IV.10}$$

où nous avons introduit le paramètre $\chi = v_m \sqrt{M}$ qui nous sera très utile par la suite.

La finalité du vecteur Q_m est d'obtenir une estimation du plan de réaction Φ_R : cette dernière correspond à l'angle Φ_m que l'on appelle *plan de l'événement* pour le distinguer du vrai plan de réaction. Remarquons que dans (IV.9), Φ_m n'est défini qu'à $2\pi/m$ près.

IV.2.2 Corrélations au vecteur flot

Le vecteur Q_m est ensuite corrélé avec une particule (que nous qualifierons de «différentielle») d'angle azimutal ψ

$$v_n^{\text{obs}} = \langle \cos n(\psi - \Phi_m) \rangle = \left\langle \frac{e^{in\psi}\, Q_m}{|Q_m|} \right\rangle. \tag{IV.11}$$

La valeur moyenne se fait sur beaucoup d'événements de même Φ_m et beaucoup de particules différentielles. Le flot ainsi calculé ne correspond pas au flot réel puisqu'il fait intervenir Φ_m et non Φ_R. C'est pourquoi nous labellons ce flot par «obs» pour «observé».

Comme Φ_m est défini à $2\pi/m$ près, seules les harmoniques n multiples de m peuvent être reconstruites à partir du plan de l'événement Φ_m[4]. Ainsi nous pouvons reconstruire toutes les harmoniques si $m = 1$, et uniquement les harmoniques paires pour $m = 2$. L'accès à ces harmoniques supérieures est une spécificité de la méthode des sous-événements : la méthode des événements mixtes ne permet la reconstruction du flot différentiel v'_n qu'à partir de la même harmonique v_n, *cf.* Eq.(IV.8).

Nous pouvons d'ores et déjà noter que nous pouvons avoir deux estimations du flot elliptique : en effet, v_2 peut être reconstruit en choisissant $n = 2$ et $m = 1$ dans (IV.11), *i.e.*, il est estimé à partir de Φ_1 (nous le noterons alors $v_{2/1}$) ; ou bien nous pouvons travailler avec $n = m = 2$ et v_2 est reconstruit à partir de Φ_2 (et ce flot elliptique est noté $v_{2/2}$). Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Il faut enfin être attentif au fait que la particule différentielle a été *a priori* utilisée dans le calcul de Q_m. Si l'on ne prend garde, des autocorrélations triviales se produiront. Il convient donc de retrancher la contribution de la particule différentielle au vecteur Q_m avant de la corréler avec ce dernier.

IV.2.3 Résolution du plan de l'événement

Le flot reconstruit précédemment, Eq.(IV.11), est un flot *observé*. Cependant, en faisant le même raisonnement qu'en (IV.3), *i.e.*, en ne tenant compte que des corrélations au plan de réaction, la vraie valeur de v_n est donnée par

$$v_n = \frac{v_n^{\text{obs}}}{\langle \cos n(\Phi_m - \Phi_R)\rangle} = \frac{v_n^{\text{obs}}}{\langle \cos n\Delta\Phi\rangle}, \tag{IV.12}$$

où le facteur $\langle \cos n\Delta\Phi\rangle$ est appelé *résolution* du plan de l'événement[5]. Il représente l'erreur entre le plan de réaction et son estimation, le plan de l'événement. Eq.(IV.12) est analogue à (IV.5) puisque nous divisons une quantité mesurée (v_n^{obs} ou μ_n) par une référence au plan de réaction (la résolution du plan de l'événement ou le flot intégré v_n). La dernière étape de la méthode standard est de calculer cette résolution pour corriger le flot observé et obtenir le vrai flot v_n.

Par le théorème central limite, nous pouvons considérer que le vecteur Q_m a une distribution gaussienne autour de la valeur moyenne $\langle Q_m\rangle = M v_m\, e^{im\Phi_R}$ et une dispersion σ

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}^2 Q_m} &= \frac{\mathrm{d}P}{|Q_m|\,\mathrm{d}|Q_m|\,\mathrm{d}\Delta\Phi} \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{|Q_m - \langle Q_m\rangle|^2}{\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{|Q_m|^2 + |\langle Q_m\rangle|^2 - 2\,|Q_m\,\langle Q_m\rangle|\cos n\Delta\Phi}{\sigma^2}\right),\end{aligned} \tag{IV.13}$$

Le calcul de la résolution $\langle \cos n\Delta\Phi)\rangle$ se fait en intégrant sur $|Q_m|$ et $\Delta\Phi$ [5] :

$$\langle \cos n\Delta\Phi\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\chi e^{-\chi^2/2}\left[I_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\chi^2}{2}\right) + I_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\chi^2}{2}\right)\right]. \tag{IV.14}$$

I_p est la première fonction de Bessel modifiée d'ordre p ; $\chi \equiv \langle Q_m \cos\Delta\Phi\rangle/\sigma$ est le paramètre de résolution et correspond au χ introduit dans (IV.10). Il traduit en fait la compétition entre

[4] Nous présenterons néanmoins un moyen de reconstruire le flot dirigé à partir du flot elliptique, *cf.* Section X.6.2, ce qui n'est pas possible avec les méthodes standard.

[5] Le flot reconstruit est parfois noté $v_{n/m}$ pour signifier que l'harmonique n est reconstruite grâce au vecteur Q_m [6].

le flot et les fluctuations statistiques. Nous retrouvons son expression en fonction du flot dans le cas d'une marche aléatoire dirigée de M pas, puisque nous avons $\sigma \simeq \sqrt{M}$ et $\langle Q_m \rangle \simeq M v_m$, soit $\chi \simeq \sqrt{M} v_m$.

Le calcul de la résolution passe donc par la détermination de ce paramètre χ. Deux techniques sont possibles mais elles se basent toutes les deux sur l'utilisation de sous-événements : un événement est divisé aléatoirement en deux sous-ensembles a et b de multiplicité égale à $M/2$ et l'on construit un vecteur flot pour chacun d'eux, Q_m^a et Q_m^b, donnant deux plans d'événement Φ_m^a et Φ_m^b. Ces deux vecteurs sont également gaussiens. La méthode la plus utilisée pour extraire χ est la suivante [6] : en raisonnant encore une fois comme pour (IV.3), nous pouvons écrire

$$\langle \cos n\Delta\Phi^a \rangle = \langle \cos n(\Phi_m^a - \Phi_R) \rangle = \sqrt{\langle \cos n(\Phi_m^a - \Phi_m^b) \rangle}. \tag{IV.15}$$

La résolution de ce sous-événement est injectée dans (IV.14) afin de déterminer le paramètre de résolution correspondant χ_a. Enfin ce dernier est relié au χ de l'événement entier par

$$\chi = \chi_a \sqrt{2}, \tag{IV.16}$$

car $\langle Q_m^a \rangle = \langle Q_m \rangle / 2$ et $\sigma_a^2 = \sigma^2/2$. La résolution pour l'événement entier, $\langle \cos n\Delta\Phi \rangle$, s'obtient finalement en utilisant de nouveau Eq.(IV.14).

La deuxième méthode repose sur la distribution de l'angle $|\Phi_m^a - \Phi_m^b|$ et la fraction d'événements tels que cet angle soit plus grand que $\pi/2$ est reliée au paramètre χ_a par [7]

$$\frac{N\left(|\Phi_m^a - \Phi_m^b| > \pi/2\right)}{N_{\rm tot}} = \frac{1}{2} e^{-\chi_a^2} = \frac{1}{2} e^{-\chi^2/2}. \tag{IV.17}$$

Nous déduisons χ de Eq.(IV.17) puis $\langle \cos n\Delta\Phi \rangle$ de Eq.(IV.14).

IV.2.4 Utilisation de poids quelconques

Il est courant d'introduire une pondération des particules dans l'analyse de flot dont le but premier est d'obtenir des valeurs de flot plus élevées. Dans la méthode des sous-événements, elle se fait au niveau du calcul du vecteur (IV.9). Ainsi la valeur moyenne de Q_m, reliée à v_m, s'écrit

$$\langle Q_m \rangle = M\, V_m\, e^{im\Phi_m}, \tag{IV.18}$$

équation comparable à (IV.10). Nous avons introduit ici une nouvelle notation, V_n, définie par

$$V_n \equiv \left\langle \omega\, e^{in(\phi - \Phi_R)} \right\rangle, \tag{IV.19}$$

i.e., V_m représente un flot pondéré. Or le flot est une grandeur sans dimension. Il convient donc de donner une définition pour le flot lui-même. Nous avons adopté la suivante

$$v_n \equiv \frac{V_n}{\sqrt{\langle \omega^2 \rangle}}. \tag{IV.20}$$

Nous expliquerons dans un instant pourquoi la normalisation a été choisie égale à $\sqrt{\langle \omega^2 \rangle}$ et non simplement égale à $\langle \omega \rangle$.

L'utilisation de poids appropriés permet d'obtenir un signal de flot plus important dans (IV.18). Le poids idéal serait le flot lui-même, $v_n'(p_T, y)$. Cela peut se comprendre par le fait que nous donnons ainsi plus de poids (c'est le cas de le dire !) aux particules qui produisent le plus de flot. Mais nous ne connaissons pas le flot différentiel sinon nous ne ferions pas l'analyse !

Il y a donc *a priori* une itération à faire dans l'analyse de flot : une première reconstruction doit se faire avec des poids raisonnables ; ensuite le flot différentiel obtenu est utilisé à nouveau comme poids dans une deuxième analyse plus fine.

Différents poids pour le flot dirigé ont été utilisés dans l'analyse de flot. Comme $v_1(y)$ est impaire par rapport à la rapidité centrale $y_{\rm CM}$, il est naturel de choisir une fonction qui le sera également. Nous pouvons prendre $\omega = y - y_{\rm CM}$ ou plus simplement $\omega = \text{signe}(y - y_{\rm CM})$ avec ou sans saut à la rapidité centrale. Quant à la dépendance en p_T, elle est souvent prise égale à 1. Nous pourrions utiliser un poids linéaire en p_T car nous nous attendons à un comportement de ce type à bas p_T (*cf.* Section III.2.1). Cependant, il semblerait que v_1 ait une dépendance en p_T non monotone. Il est donc plus raisonnable d'utiliser simplement $\omega = y - y_{\rm CM}$ dans une première analyse. Il est alors clair que nous ne pouvons pas normaliser le flot pondéré par $\langle\omega\rangle$ dans (IV.20) puisque ce dernier pourrait être nul !

Pour le flot elliptique, les poids sont en général indépendants de la rapidité puisque $v_2(y^*)$ est une fonction paire. La dépendance en p_T peut être soit quadratique soit linéaire. En effet, d'après la Section III.2.1, à bas p_T, nous devons avoir $v_2 \propto p_T^2$. Pourtant il semblerait que $v_2(p_T)$ soit plutôt linéaire à haute énergie. Un choix raisonnable serait de prendre $\omega = \sqrt{p_T^2 + p_0^2} - p_0$, où $p_0 \simeq 100$ MeV car ce poids est quadratique à bas p_T et linéaire à haut p_T.

Nous verrons dans les Sections XI.7 et XII.5 que les poids sont également utiles pour des raisons autres que l'augmentation de la valeur du flot obtenue car ils permettent aussi d'éliminer des effets indésirables.

Dans la section suivante, nous commenterons les premiers résultats de flot au SPS, obtenus par la collaboration NA49 en 1998. Signalons que la méthode employée a été celle des sous-événements et que des poids unités ont été utilisés.

IV.3 Limitation des méthodes standard : effets «nonflow»

En résumé, les méthodes standard se basent sur la factorisation du moment d'ordre 2, Eq.(IV.3) : les corrélations à deux particules non dues au flot y sont purement et simplement négligées. Nous allons pourtant voir que leur ordre de grandeur est comparable au flot et que l'existence de ces effets limite fortement les méthodes standard.

IV.3.1 Ordre de grandeur des corrélations «nonflow»

Pour estimer l'ordre de grandeur des corrélations à deux particules non dues au flot, nous nous plaçons dans le repère où la direction du plan de réaction est l'axe des x. Autrement dit, nous pouvons poser $\Phi_R = 0$. Dans ce repère, l'information sur le flot, *i.e.*, la corrélation au plan de réaction, est entièrement contenue dans la fonction de distribution à une particule $f(\mathbf{p})$ que nous avons introduite en (III.1). En effet, rappelons la définition du flot intégré sur un certain domaine de l'espace des phases, Eq.(III.5*b*),

$$v_n \equiv \left\langle e^{in\phi} \right\rangle = \frac{\int e^{in\phi}\, f(\mathbf{p})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}}{\int f(\mathbf{p})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}} \ . \tag{IV.21}$$

En revanche, les corrélations à deux particules du type $\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle$ font intervenir la fonction de distribution à deux particules. Celle-ci se décompose de manière générale sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\ \mathrm{d}^3\mathbf{p}_2} = f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) + f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2). \tag{IV.22}$$

où $f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ désigne la partie dite «connexe» de la fonction de distribution à deux particules. Comme les fonctions de distribution doivent être normalisées à 1, nous remarquons que

$$\int f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_2 = 0. \tag{IV.23}$$

En utilisant (IV.21) et (IV.22), nous pouvons donc écrire la corrélation à deux particules sous la forme

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle = v_n(1)\, v_n(2) + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_c, \tag{IV.24}$$

où nous avons posé

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_c = \frac{\iint e^{in(\phi_1-\phi_2)} f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_2}{\iint f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_2}. \tag{IV.25}$$

$v_n(i)$ désigne le flot de la particule i. En comparant (IV.21) et (IV.24), nous voyons apparaître un terme supplémentaire, $\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_c$, que nous qualifierons par la suite de «nonflow» et qui résulte de la partie connexe de la fonction de distribution à deux particules. Nous reviendrons plus en détail sur cette décomposition dans la Section X.1. Contentons-nous pour l'instant d'estimer l'ordre de grandeur de la corrélation «nonflow» : s'il y a N particules produites dans la réaction, nous avons

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_c = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{IV.26}$$

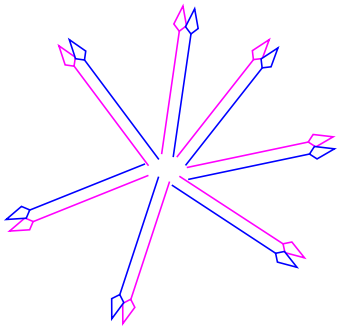


FIG. IV.2 – Système où les particules sont émises aléatoirement en paires colinéaires.

Illustrons cette assertion sur l'exemple très simple d'un système où N particules sont produites uniquement par paires colinéaires (donc pas de flot), schématisé Fig.IV.2. La partie connexe, égale au moment d'ordre 2, est calculable explicitement : nous avons N choix pour la particule 1 et un seul choix pour la particule 2, donc N choix pour des paires corrélées, et nous devons diviser par le nombre total de choix possibles, $N(N-1)$:

$$\begin{aligned} \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_c &= \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle \\ &= \frac{N}{N(N-1)} = \frac{1}{N-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned} \tag{IV.27}$$

IV.3.2 Limitation des méthodes standard

a Corrélations à deux particules

La méthode standard revient à négliger le terme «nonflow» devant v_n^2 dans (IV.24) et réduit donc la corrélation d'ordre 2 au terme de flot. Autrement dit, la notation v_n dans les Sections IV.1 et IV.2 était abusive : nous désignerons dans la suite le flot reconstruit par les méthodes standard par v_n^{std} et par définition, il est donné par

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle \equiv \left(v_n^{\mathrm{std}}\right)^2. \tag{IV.28}$$

Comparons maintenant le flot et les effets «nonflow» pour la collaboration NA49 au SPS. Les valeurs des flots intégrés publiées en 1998 sont $v_1^{\rm std} = -3.0\%$ et $v_2^{\rm std} = 3.0\%$ [8]. Le flot est reconstruit en utilisant la méthode des sous-événements. Quant au nombre de particules produites, il est de l'ordre de 2500. Evaluons maintenant l'ordre de grandeur des termes intervenant dans (IV.24) :

$$\underbrace{\left(v_n^{\rm std}\right)^2}_{9\times 10^{-4}} \quad = \quad v_n^2 \quad + \quad \underbrace{\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle_c}_{4\times 10^{-4}} \tag{IV.29}$$

Il s'avère que le terme «nonflow» est exactement du même ordre de grandeur que le terme de flot standard. Ainsi aux énergies du SPS, la méthode standard ne semble pas valide à cause de ces effets «nonflow». Ces derniers sont négligeables si

$$v_n \gg \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{IV.30}$$

En fait, si les corrélations «nonflow» sont à courte portée, elles ne se comportent pas comme $1/N$ mais plutôt comme $1/M$, où M est la multiplicité détectée. Dans ce cas, nous obtenons une limitation encore plus drastique, à savoir

$$\chi \gg 1, \tag{IV.31}$$

où χ a été introduit dans (IV.10). Encore une fois, le paramètre χ se révèle utile car il teste la validité d'application des méthodes standard : s'il est très grand devant 1, les corrélations «nonflow» sont bien négligeables et l'utilisation des méthodes standard est justifiée. Seulement, en pratique, $\chi \leq 1$. Les analyses standard ne sont donc pas suffisantes pour isoler le terme de flot.

b Quid de la méthode des sous-événements ?

Dans la discussion sur les effets «nonflow», nous nous sommes limités à l'etude des corrélations à deux particules. Or la méthode standard corrèle une particule non pas avec une autre particule mais avec le vecteur flot. Le signal obtenu est alors beaucoup plus fort qu'une simple corrélation à deux particules. Nous pourrions penser naïvement que les corrélations «nonflow» sont, dans ce cas, bien plus faibles que la contribution du flot. Il n'en est cependant rien.

Pour voir cela explicitement, étudions la corrélation $\left\langle e^{in\psi}\, Q_n\right\rangle$ entre une particule différentielle d'angle azimutale ψ et le vecteur Q_n, et utilisons la décomposition en deux termes du moment d'ordre 2, Eq.(IV.24) :

$$\begin{aligned}\left\langle e^{in\psi}\, Q_n\right\rangle &= \sum_{j=1}^{M}\left\langle e^{in(\psi-\phi_j)}\right\rangle \\ &= M\left[v_n^2 + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle_c\right].\end{aligned} \tag{IV.32}$$

Ainsi, corréler une particule au vecteur revient à sommer des corrélations à deux particules. La contamination des effets «nonflow» dans (IV.32) est exactement la même que celle dans la corrélation à deux particules (IV.24). Ainsi, bien que l'utilisation du vecteur donne l'illusion d'obtenir un signal de flot plus fort par rapport aux corrélations «nonflow», ces dernières ne sont pas diluées (*cf.* Section VI.4).

Finalement, la méthode des événements mixtes et la méthode des sous-événements sont toutes les deux basées sur les corrélations à deux particules, même si cela apparaît moins

clairement pour la deuxième méthode. Ce qui est certain, c'est que les effets «nonflow» interviennent dans les deux analyses de la même manière et que la limitation (IV.30) ou (IV.31) s'applique donc aux deux méthodes.

IV.3.3 Anomalies dans les données du CERN

De premiers indices sur ces effets «nonflow» sont d'ailleurs présents dans le flot différentiel publié par NA49 [8], que ce soit pour la dépendance en impulsion transverse ou en rapidité, *cf.* Fig.IV.3. Prenons d'abord le flot dirigé elliptique des pions en fonction de p_T. Nous remarquons qu'il y a un «excès» de flot à bas p_T. Plus précisément, nous nous attendons à un comportement linéaire pour v_1 et quadratique pour v_2 [*cf.* Eq.(III.8)] pour $p_T < \langle p_T \rangle$. Pour les pions, nous avons $\langle p_T \rangle \simeq 400$ MeV/c : c'est loin d'être le cas sur les données de NA49. C'est sûrement le signe d'une pollution de corrélations à courte portée.

De plus, NA49 a adopté la convention de signe d'un v_1 positif pour les protons dans la région de rapidité avant ; nous devons donc avoir en principe $v_1 < 0$ pour les pions. Or à haut p_T, ce dernier devient positif et ce changement de signe à $p_T \sim 650$ Mev/c est assez surprenant. Encore une fois, il semblerait que des effets «nonflow» (comme la conservation de l'impulsion transverse totale) entrent également en jeu à grand p_T.

Quant au flot différentiel en fonction de y, il ne s'en sort pas mieux (Fig.IV.3). L'analyse de flot n'a été faite que dans la région de rapidité avant, et les points pour $y < y_{\rm CM}$ sont obtenus par réflexion par rapport à la rapidité centrale. v_1 sature au-delà de $y = 4.1$ (la rapidité centrale à 160 AGeV est à 2.92), ce qui a pour conséquence une chute brutale du flot en dessous de $y = 4$. De même, v_2, bien que plus régulier, présente un pic autour de $y = 3.6$. L'interpolation sur les points de v_1, imposant que ce dernier s'annule à la rapidité centrale, donnerait un comportement très irrégulier. Nous pourrions tout simplement conclure que v_1 ne s'annule pas en $y_{\rm CM}$! Le flot ne permet pas d'expliquer cette dépendance en y.

Enfin nous avons déjà signalé que des mesures de flot jusqu'à v_4, faites par la collaboration NA45/CERES [9], n'étaient pas acceptables car toutes les harmoniques seraient du même ordre de grandeur (*cf.* Fig.IV.4). Ces résultats surprenants pourraient bien refléter des corrélations «nonflow» qui n'ont pas été prises en compte dans l'analyse standard.

IV.4 Soustraction des effets «nonflow»

Les données du CERN souffrent donc d'anomalies certaines. Dans les prochains chapitres, nous concentrerons nos efforts pour expliquer ces anomalies par des effets «nonflow», en particulier sur le flot différentiel de NA49. La procédure que nous adopterons est la suivante. Partant des données de flot publiées par NA49, nous reconstruisons dans un premier temps la corrélation à deux particules. Plus exactement, si nous notons par $\mathcal{D}$ le domaine de l'espace des phases utilisé par NA49, le flot intégré et le flot différentiel standard sont reliés au moment d'ordre 2 par les Eqs.(IV.4) et (IV.5) :

$$\mu_n(\mathcal{D},\mathcal{D}) \equiv \left[v_n^{\rm NA49}(\mathcal{D})\right]^2 , \tag{IV.33}$$

$$\mu_n(p_T,y,\mathcal{D}) \equiv v_n^{\rm NA49}(p_T,y)\, v_n^{\rm NA49}(\mathcal{D}) . \tag{IV.34}$$

Nous évaluons ensuite la corrélation azimutale due à un effet «nonflow»,

$$c_n^{\rm nfl}(\mathcal{D},\mathcal{D}) \equiv \left\langle e^{i(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_c , \tag{IV.35}$$

$$c_n^{\rm nfl}(p_T,y,\mathcal{D}) \equiv \left\langle e^{i(\psi-\phi_2)} \right\rangle_c (p_T,y,\mathcal{D}) . \tag{IV.36}$$

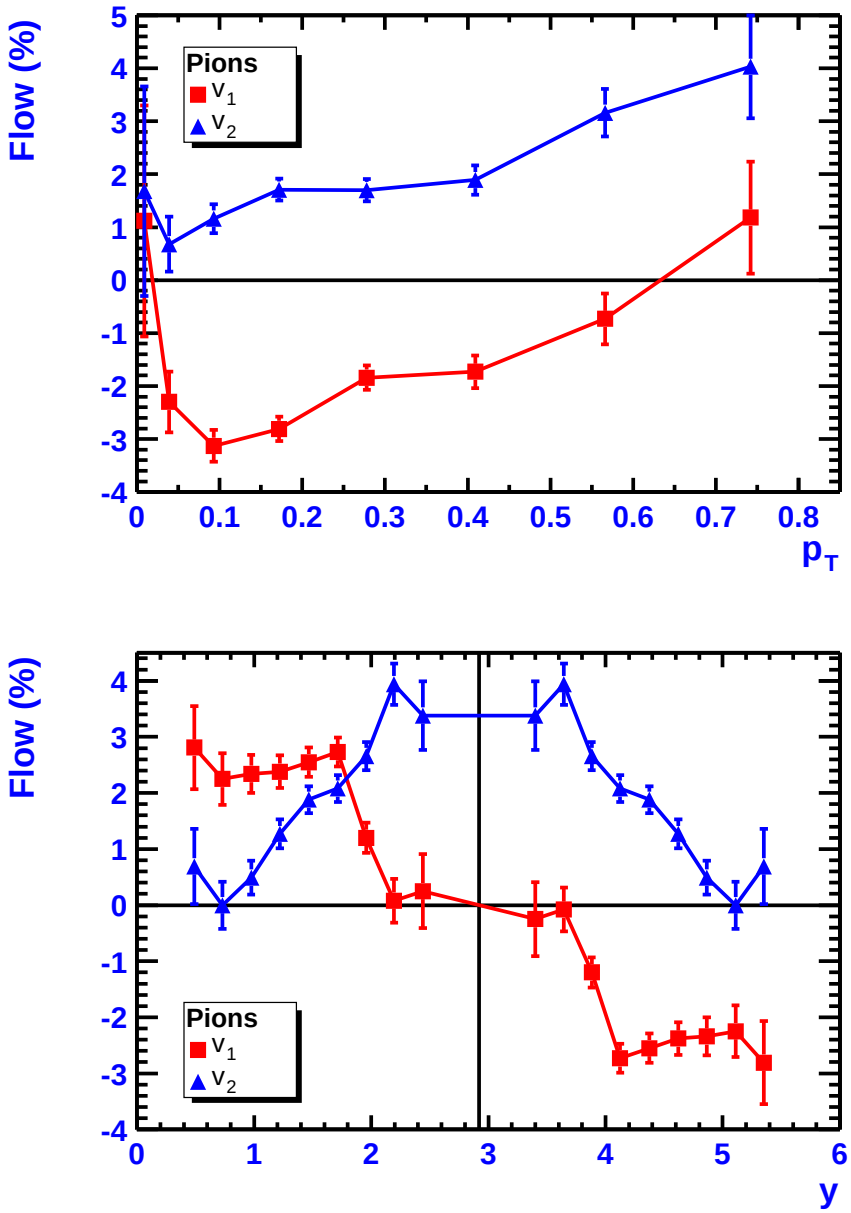


FIG. IV.3 – Flot dirigé et elliptique des pions chargés en fonction de p_T (figure du haut) et en fonction de y (figure du bas), publié par la collaboration NA49 en 1998 [8].

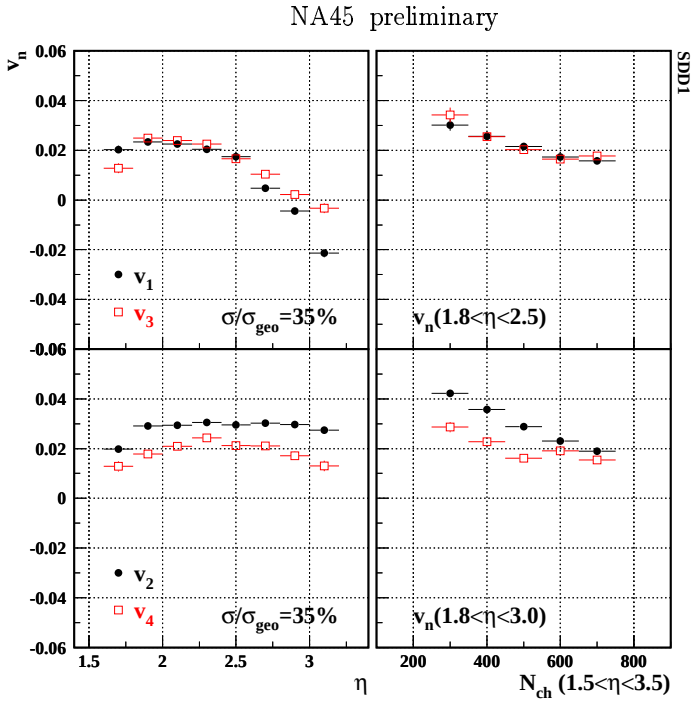


FIG. IV.4 – Flot différentiel en fonction de la pseudo-rapidité, mesuré par CERES, jusqu'à l'harmonique 4 [9].

Dans la première équation, nous moyennons sur les particules d'angles ϕ_1 et ϕ_2 dans tout le domaine $\mathcal{D}$, alors que dans la deuxième, la particule d'angle ψ est fixée dans la région de l'espace des phases (p_T, y).

Enfin, pour corriger les données de NA49, nous soustrayons la corrélation «nonflow» du moment d'ordre 2 de NA49

$$v_n = \pm\sqrt{\mu_n(\mathcal{D},\mathcal{D}) - c_n^{\text{nfl}}(\mathcal{D},\mathcal{D})}, \tag{IV.37}$$

$$v_n'(p_T,y) = \frac{\mu_n(p_T,y,\mathcal{D}) - c_n^{\text{nfl}}(p_T,y,\mathcal{D})}{v_n}. \tag{IV.38}$$

Notons que la prise en compte des effets «nonflow» intervient non seulement au numérateur mais également au dénominateur de $v_n'(p_T,y)$. Ici v_n et $v_n'(p_T,y)$ désignent donc les vraies valeurs du flot, exemptes des corrélations «nonflow».

IV.5 Conclusion

Aux énergies du SPS, les effets «nonflow» ne semblent pas négligeables, que ce soit sur le flot intégré ou sur le flot différentiel. Les méthodes standard ne semblent pas *a priori* valides et leur application ne permet pas une reconstruction du flot exempte des corrélations «nonflow».

Les chapitres suivants sont une première tentative pour résoudre ce problème : nous avons calculé la corrélation azimutale à deux particules produites par trois sources «nonflow» – des corrélations d'origine quantique, la conservation de l'impulsion transverse totale et la désintégration de résonances – et nous avons corrigé dans chacun des cas les données de NA49 publiées en 1998. Ces dernières sont significativement modifiées, ce qui justifie *a posteriori* le fait que les effets «nonflow» ne sont pas négligeables du tout.

Chapitre V

Corrélations quantiques

Sommaire

V.1	**Principes**	**52**
V.2	**Paramétrisation**	**53**
V.3	**Ordre de grandeur des corrélations azimutales dues aux effets HBT**	**53**
V.4	**Calcul de la corrélation à deux particules**	**54**
V.5	**«Flot» apparent créé par les corrélations HBT dans l'expérience NA49**	**56**
V.6	**Correction des données de NA49 de 1998**	**59**
V.7	**Conclusion**	**61**

Dans ce chapitre, nous calculerons une première corrélation «nonflow», à savoir les corrélations quantiques dues aux effets HBT. Après avoir introduit leur principe, nous calculerons la corrélation azimutale à deux particules correspondante et nous corrigerons les données publiées en 1998 de la collaboration de NA49. Nous montrerons notamment que la prise en compte de cet effet «nonflow» réussit à expliquer l'excès de «flot» à bas p_T observé sur le flot des pions de NA49 ainsi que la mesure par CERES d'harmoniques supérieures anormalement grandes.

V.1 Principes

L'origine de ces corrélations est bien lointaine : HBT est un acronyme pour Hanbury-Brown et Twiss, noms de deux astrophysiciens. Depuis, cette méthode d'interférométrie a été appliquée à la physique nucléaire pour déterminer la taille de sources étendues de particules [10]. Les corrélations HBT se basent sur la symétrie (ou l'antisymétrie) de la fonction d'onde des particules détectées et sont des interférences quantiques. Par la suite nous considérerons que ces particules sont deux pions identiques.

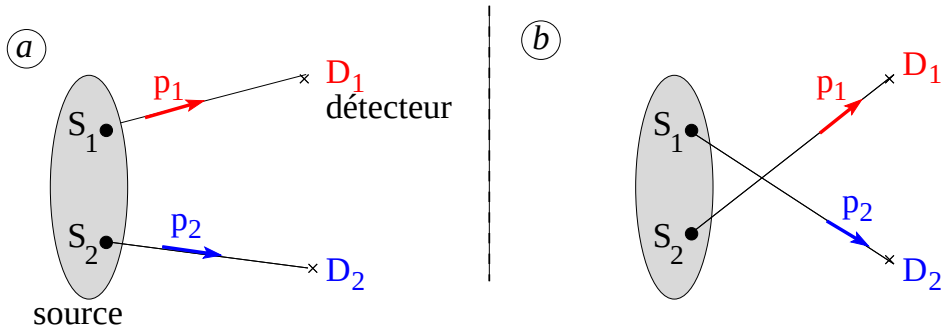


FIG. V.1 – Emission de deux pions issus d'une source étendue (points S_1 et S_2) et détection aux points D_1 et D_2.

Pour comprendre le principe, considérons le cas simple d'une source étendue qui émet deux pions, provenant des points S_1 et S_2, sous forme d'ondes planes de vecteurs d'onde respectifs $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ (*cf.* Fig.V.1*a*). Ces deux pions sont détectés aux points D_1 et D_2. La fonction d'onde pour cette configuration a est

$$|\psi_a\rangle = e^{i\mathbf{p_1}\cdot\mathbf{S_1D_1}}\ e^{i\mathbf{p_2}\cdot\mathbf{S_2D_2}} \tag{V.1}$$

(on a adopté un système d'unités tel que $c = \hbar = 1$). Les deux pions étant identiques, cette situation est indistinguable de celle représentée Fig.V.1*b* : le pion d'impulsion $\mathbf{p}_1$ est maintenant détecté en D_2 et *vice versa* pour l'autre pion. La fonction d'onde vaut alors

$$|\psi_b\rangle = e^{i\mathbf{p_1}\cdot\mathbf{S_1D_2}}\ e^{i\mathbf{p_2}\cdot\mathbf{S_2D_1}}. \tag{V.2}$$

Ces deux configurations se superposent et sont à l'origine des interférences quantiques que nous appelons effets HBT.

Revenons maintenant à la fonction de distribution à deux particules $f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, Eq.(IV.22). Nous l'avons décomposée en un terme factorisé et un terme connexe. Nous pouvons réécrire ce dernier sous la forme

$$\mathcal{C}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2)}. \tag{V.3}$$

C'est en effet cette quantité qui est utilisée dans les effets HBT et s'interprète en termes de probabilité de la façon suivante : si $\mathcal{P}[\mathbf{p}_1 \to D_1]$ représente la probabilité pour que le pion d'impulsion $\mathbf{p}_1$ soit détecté en D_1, nous avons

$$1 + \mathcal{C}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\mathcal{P}\left[(\mathbf{p}_1 \to D_1 \text{ et } \mathbf{p}_2 \to D_2) \text{ ou } (\mathbf{p}_1 \to D_2 \text{ et } \mathbf{p}_2 \to D_1)\right]}{\mathcal{P}\left[\mathbf{p}_1 \to D_1\right]\ \mathcal{P}\left[\mathbf{p}_2 \to D_2\right]} \tag{V.4}$$

Etant donné que nous avons deux pions donc deux bosons identiques, la fonction d'onde totale doit être symétrique sous l'échange des deux pions :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_a\rangle + |\psi_b\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ e^{i\Phi}\left(1 + e^{i(\mathbf{p_1}-\mathbf{p_2})\cdot\mathbf{S_1S_2}}\right), \tag{V.5}$$

où Φ est la phase relative entre $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$. Finalement la probabilité de détecter les deux pions en même temps est donnée par

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 + \cos\left[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\cdot\mathbf{S_1}\mathbf{S_2}\right], \tag{V.6}$$

qui présente un terme d'interférence. Elle dépend de l'impulsion relative des deux pions et de la distance entre les points d'où proviennent ces deux particules : l'effet HBT est d'ordre 1 quand $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|R \leq 1$ où R est la distance typique d'interaction dans la source. C'est ce qu'on appelle un rayon HBT. Pour une collision Pb–Pb à 160 AGeV semi-périphérique[1], son ordre de grandeur est $R \sim 4$ fm. Nous obtenons alors une corrélation importante pour une impulsion relative de l'ordre de $1/R \sim 50$ MeV/c, à comparer à l'impulsion transverse moyenne des pions, qui est plutôt de l'ordre de 400 MeV/c. Ainsi les interférences HBT sont prédominantes pour des particules de faible impulsion relative. En étudiant ces corrélations, nous pouvons avoir accès à la taille de la source.

V.2 Paramétrisation

Posons $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ et $\mathbf{K} = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/2$, et plaçons-nous dans le référentiel mobile tel que $K_z = 0$ («longitudinal comoving system» noté LCMS). Ainsi le vecteur $\mathbf{K}$ est purement transverse. On définit alors à partir du plan trois directions (*cf.* Fig.V.2) : longitudinale suivant l'axe de la collision, «out» suivant le vecteur $\mathbf{K}$ et «side» suivant la dernière direction. Le vecteur $\mathbf{q}$ peut être caractérisé par ses projections q_L, q_o et q_s sur ces trois directions.

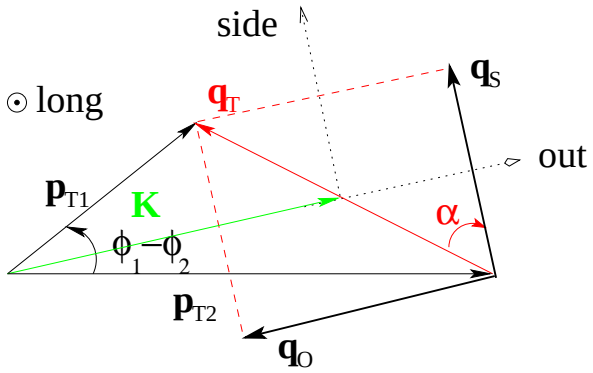


FIG. V.2 – Géométrie dans le plan transverse : définition des directions *side*, *out* et *long*.

La paramétrisation standard des corrélations quantiques est

$$\mathcal{C}^{HBT}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \lambda \exp\left(-q_s^2 R_s^2 - q_o^2 R_o^2 - q_L^2 R_L^2\right), \tag{V.7}$$

où λ est un paramètre entre 0 et 1, et R_s, R_o, R_L sont les rayons HBT. Ces quantités sont déterminées expérimentalement. A priori elles dépendent de $\mathbf{K}$ mais nous négligerons cette dépendance par la suite.

V.3 Ordre de grandeur des corrélations azimutales dues aux effets HBT

Notre but est de calculer la corrélation «nonflow» à deux particules (IV.25) que sont ces corrélations quantiques. Nous allons utiliser la paramétrisation (V.7) introduite dans la section

[1] Les rayons HBT varient relativement peu avec la centralité de la collision.

précédente. Mais avant de nous lancer dans les calculs, essayons d'avoir un ordre de grandeur de cette corrélation.

Nous avons vu que les interférences HBT ne concernent que les particules de faible impulsion relative. Autrement dit, nous avons $q \ll K$ et donc $p_{T1} \sim p_{T2} \sim K$, ainsi que $q \sim K(\phi_1 - \phi_2)$ où $\phi_1 - \phi_2$ est l'angle relatif entre les impulsions transverses des deux particules. Maintenant, si ces deux particules ont une impulsion transverse typique $K \sim 400$ MeV/c, nous avons des corrélations HBT importantes pour

$$\phi_1 - \phi_2 \leq \frac{1}{RK} \sim 0.1. \tag{V.8}$$

Cela signifie que la fonction de corrélation est piquée autour de $\delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = 0$, ce qui entraine que ses premiers coefficients de Fourier sont du même ordre de grandeur jusqu'à l'harmonique $n \sim RK \sim 10$. Ceci expliquerait pourquoi CERES avait obtenu des résultats surprenants en mesurant un v_3 et un v_4 du même ordre de grandeur que v_1 et v_2 [28] (*cf.* Section IV.3.3), alors que nous nous attendons à ce que v_n décroisse vite pour $n \geq 3$.

Nous pouvons maintenant calculer de façon très naïve l'ordre de grandeur des corrélations azimutales à deux particules pour les effets HBT. Fixons une particule dans l'espace des phases du détecteur $\mathcal{D}$, d'impulsion $\mathbf{p}_1$. Les particules qui jouent un rôle pour les corrélations HBT sont celles qui sont dans une sphère de rayon $1/R$ centré sur la particule fixée dans l'espace des impulsions. L'ordre de grandeur de la corrélation HBT est alors la fraction de particules dans $\mathcal{D}$ se trouvant dans la sphère précédente, soit

$$c_n^{\mathrm{HBT}} \sim \frac{1}{R^3 \langle p_T \rangle^2 \langle m_T \rangle \Delta y}\ , \tag{V.9}$$

où $m_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$ est la masse transverse et Δy l'intervalle en rapidité couverte par le détecteur. Pour la configuration de l'expérience NA49, nous avons $\langle p_T \rangle \sim \langle m_T \rangle \sim 400$ MeV/c et $\Delta y = 2$. Le flot apparent résultant est, d'après Eq.(IV.3)

$$v_n^{\mathrm{HBT}} \sim (c_n^{\mathrm{HBT}})^{-1/2} \sim 3\%. \tag{V.10}$$

Nous avons donc *a priori* un effet «nonflow» du même ordre de grandeur que le flot mesuré. D'ailleurs nous retrouvons une corrélation à deux particules de l'ordre de $1/N$ où N est le nombre total de particules comme annoncé en (IV.26). En effet, pour un gaz de pions sans masse à une haute température T, l'impulsion p est d'ordre T, alors que la densité de particules N/R^3 est d'ordre T^3. Ainsi, nous avons

$$c_n^{\mathrm{HBT}} \sim \frac{1}{R^3 p^3} \sim \frac{1}{N}, \tag{V.11}$$

La partie suivante sera plus technique car nous allons détailler le calcul de la corrélation HBT afin de l'appliquer au cas de NA49.

V.4 Calcul de la corrélation à deux particules

Nous allons utiliser la paramétrisation (V.7) pour évaluer la corrélation azimutale à deux particules (IV.25) avec $f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f(\mathbf{p}_1)\, f(\mathbf{p}_2)\, \mathcal{C}^{\mathrm{HBT}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$. Nous fixons la particule 1 en (p_{T1}, y_1) et nous intégrons sur l'impulsion de la particule 2 :

$$c_n^{\mathrm{HBT}}(p_{T1}, y_1, \mathcal{D}) = \frac{\int \cos n(\phi_1 - \phi_2)\ f(\mathbf{p}_2)\ \mathcal{C}^{\mathrm{HBT}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\ \mathrm{d}\phi_2\ p_{T2}\mathrm{d}p_{T2}\ \mathrm{d}y_2}{\int f(\mathbf{p}_2)\ \mathrm{d}\phi_2\ p_{T2}\mathrm{d}p_{T2}\ \mathrm{d}y_2} \tag{V.12}$$

Etant donné que la corrélation HBT est dominée pour $\mathbf{p}_1 \simeq \mathbf{p}_2$, nous pouvons remplacer la fonction de distribution à une particule $f(\mathbf{p}_2)$, lentement variable, par $f(\mathbf{p}_1)$ puis intégrer sur $\mathbf{p}_2$, ce qui est équivalent à intégrer sur le vecteur $\mathbf{q} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$. La distribution à une particule est normalisée à 1 : $\int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = 1$. Finalement, nous obtenons

$$c_n^{\rm HBT}(p_{T1}, y_1, \mathcal{D}) \simeq f(\mathbf{p}_1) \int_{\mathcal{D}} \cos n(\phi_1 - \phi_2)\ \mathcal{C}^{\rm HBT}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\ {\rm d}\phi_2\ p_{T2}{\rm d}p_{T2}\ {\rm d}y_2. \qquad (V.13)$$

Nous devons maintenant préciser les bornes d'intégration. Nous avons une relation entre l'angle relatif $\phi_1 - \phi_2$ et les variables d'intégration q_o et q_s. Deux cas se présentent :

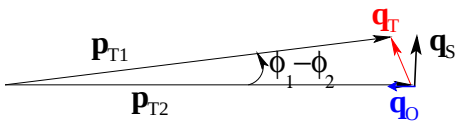


FIG. V.3 – Géométrie dans le plan transverse, pour le cas où $p_{T1} \gg 1/R$.

– si $p_{T1} \gg 1/R$, nous utiliserons les approximations

$$q_s \simeq p_{T1}(\phi_1 - \phi_2), \qquad (V.14a)$$
$$q_o \simeq p_{T1} - p_{T2}. \qquad (V.14b)$$

Comme q_s est indépendante de p_{T2}, elle varie entre $\pm\infty$. De plus, d'après (V.7), la corrélation $\mathcal{C}^{\rm HBT}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ devient négligeable lorsque $q_o \gg 1/R_o$ et $q_s \gg 1/R_s$. Nous pouvons donc également étendre leurs bornes d'intégration à $\pm\infty$, pourvu que la particule 1 ne se trouve pas trop près du bord du domaine $\mathcal{D}$, *i.e.*, à un intervalle $\sim 1/R_{o,s} \sim 50$ GeV/c en p_T et $\sim 1/R_L m_T \sim 0.3$ en y du bord.

– si $p_{T1} \sim 1/R$, en supposant que $R_s \simeq R_o = R$, ce qui est le cas expérimentalement [11], nous avons

$$q_s^2 + q_o^2 = p_{T1}^2 + p_{T2}^2 - 2p_{T1}p_{T2}\cos(\phi_2 - \phi_1). \qquad (V.15)$$

Quant à la dernière variable d'intégration, elle s'écrit

$$q_L = m_{T1}(y_1 - y_2). \qquad (V.16)$$

Nous intégrons q_L entre $\pm\infty$ mais en toute rigueur, nous avons $m_{T1}(y_1 - y^{\rm a}) < q_L < m_{T1}(y_1 - y^{\rm b})$ si $y^{\rm a} < y_2 < y^{\rm b}$. Enfin nous supposerons que les rayons HBT ne dépendent pas de m_T [11].

Dans le cas où $p_{T1} \gg 1/R$, nous injectons (V.7,V.14) dans (V.13) et nous obtenons

$$\begin{aligned} c_n^{\rm HBT}(p_{T1}, y_1, \mathcal{D}) &\simeq f(\mathbf{p}_1) \int \cos\left(n\frac{q_s}{p_{T1}}\right) \lambda e^{-q_s^2R_s^2 - q_o^2R_o^2 - q_L^2R_L^2} \frac{{\rm d}q_s}{p_{T1}}\ p_{T2}{\rm d}q_o\ \frac{{\rm d}q_L}{m_{T1}} \\ &\simeq \frac{\lambda\pi^{3/2}}{R_oR_LR_s}\ \frac{f(\mathbf{p}_1)}{m_{T1}}\ \exp\left(-\frac{n^2}{4p_{T1}^2R_s^2}\right). \qquad (V.17) \end{aligned}$$

Si nous tenons compte des bornes finies pour q_L, il faut multiplier le résultat (V.17) par la fonction $g(m_{T1}, y_1)$ définie par

$$g(m_T, y) = \frac{1}{2}\ {\rm Erf}[R_s m_T(y - y^{\rm a}), R_s m_T(y - y^{\rm b})], \qquad (V.18)$$

où ${\rm Erf}[x_1, x_2] = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2} dx.$

Enfin dans le cas où $p_{T1} \sim 1/R$, nous utilisons (V.15) au lieu de (V.14), ce qui revient à remplacer dans Eq.(V.17) l'exponentielle par la fonction $h_n(R_s p_T)$ suivante

$$\exp\left(-\frac{n^2}{4\delta^2}\right) \longrightarrow h_n(\delta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta\, e^{-\delta^2/2}\left[I_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\delta^2}{2}\right) + I_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\delta^2}{2}\right)\right] \qquad (V.19)$$

où $\delta = R_s p_T$ et I_p est la première fonction de Bessel modifiée d'ordre p.

Avant de calculer le flot «apparent» que produiraient les effets HBT, revenons sur Eq.(V.17) et sur l'ordre de grandeur (V.9) de la corrélation HBT à deux particules. Premièrement, à cause de l'exponentielle, la corrélation est supprimée à bas p_{T1}. Deuxièmement, si $n \leq R_s \langle p_T \rangle \simeq 10$, elle dépend peu de n. Ses coefficients de Fourier sont donc à peu près constants jusqu'à l'harmonique 10, rejoignant ce qui avait été dit plus haut. Troisièmement, si nous passons outre la dépendance en n, la racine carrée de (V.17) redonne l'ordre de grandeur de (V.10). Enfin comme la corrélation HBT est proportionnelle au nombre de particules autour de $\mathbf{p}_1$ dans l'espace des phases, il est normal de trouver dans (V.17) une dépendance linéaire en $f(\mathbf{p}_1)$, fonction de distribution de la particule 1 dans le référentiel LCMS.

Dans la section suivante, nous allons utiliser le résultat (V.17) pour calculer le flot apparent dû aux effets HBT, dans le contexte de l'expérience NA49.

V.5 «Flot» apparent créé par les corrélations HBT dans l'expérience NA49

La collaboration NA49 a analysé par la méthode des sous-événements le flot des pions chargés et le flot des protons. Les particules différentielles ont été corrélées à un vecteur flot, ce dernier ayant été calculé à partir des pions chargés. Nous avons donc des corrélations pion-pion et pion-proton. Seules les premières sont affectées par les effets HBT puisque ces derniers ne corrèlent que des particules identiques. Nous allons calculer ici le «flot» apparent que produiraient les effets HBT, pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de cette corrélation «nonflow». Nous utilisons pour cela les valeurs des paramètres HBT mesurés par cette même collaboration [11], ce qui nous assure que nous sommes dans les conditions expérimentales, notamment vis-à-vis de l'acceptance du détecteur.

Nous venons de voir que les corrélations d'origine quantique produisent une anisotropie azimutale. Cette dernière peut être mal interprétée et prise comme étant du flot. C'est ce que nous appelons le «flot» apparent. Il convient de soustraire des corrélations à deux particules afin d'en isoler la partie qui est réellement du flot.

Nous allons raisonner comme à la Section IV.1 pour reconstruire les flots intégré et différentiel «apparents» dus aux effets HBT, Eqs.(IV.4) et (IV.5)

$$v_n^{\mathrm{HBT}}(\mathcal{D}) = \pm\sqrt{c_n^{\mathrm{HBT}}(\mathcal{D},\mathcal{D})}\ , \qquad v_n^{\mathrm{HBT}}(p_T,y) = \frac{c_n^{\mathrm{HBT}}(p_T,y,\mathcal{D})}{v_n^{\mathrm{HBT}}(\mathcal{D})}. \tag{V.20}$$

En procédant ainsi, nous négligeons toute contribution autre que celles dues aux effets HBT, au même titre que les analyses standard négligent toutes les corrélations «nonflow» en faveur du flot. Autrement dit, nous négligeons le flot dans ce qui suit. Pour calculer les intégrales sur $\mathcal{D}$, il nous faut préciser les valeurs des différents paramètres HBT et du domaine d'intégration. Les rayons HBT valent $R_o = R_s = 4$ fm et $R_L = 5$ fm [11] pour des collisions Pb–Pb à 158 AGeV semi-périphériques et le paramètre $\lambda \simeq 0.4$ pour des pions [12].

Pour le calcul du flot intégré apparent [dénominateur de (V.20)], nous avons besoin d'une paramétrisation de la fonction de distribution à une particule $f(\mathbf{p_1})$. Nous supposerons que les dépendances en p_T et en y se factorisent [13] :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2\pi m_T}\,\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}m_T}\,\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y} \\ &= \frac{1}{N_{\mathcal{D}}}\,e^{-m_T/T}\,\exp\left[-\frac{(y-y_{\mathrm{CM}})^2}{2\sigma^2}\right]. \end{aligned} \tag{V.21}$$

Nous avons utilisé l'écriture standard pour la distribution en m_T, T étant un paramètre obtenu expérimentalement («inverse slope parameter»). Pour des pions, $T = 190$ MeV et $m = 139$ MeV [13]. Nous avons également considéré la distribution en rapidité comme une gaussienne de valeur moyenne la rapidité centrale $y_{\rm CM}$ et de dispersion σ. Dans les calculs qui suivent, nous avons utilisé la valeur de $\sigma = 1.4$ [13].

Enfin nous devons définir le domaine d'intégration $\mathcal{D} = [y^{\rm a}, y^{\rm b}] \times [p_T^{\rm a}, p_T^{\rm b}]$ pour calculer le facteur de normalisation $N_{\mathcal{D}}$ qui représente le nombre de particules détectées dans le domaine $\mathcal{D}$. Les fenêtres en p_T et en y utilisées par NA49 sont assez subtiles : en effet, le domaine d'intégration est non seulement différent suivant la parité de l'harmonique reconstruite, mais également entre le flot intégré et le flot différentiel. Autrement dit, pour le flot intégré, on corrèle deux pions qui appartiennent tous les deux au même domaine $\mathcal{D}$; alors que pour le flot différentiel, on corrèle une particule 2 appartenant à $\mathcal{D}$ avec une particule 1 dans un domaine $\mathcal{D}' = [y^{\rm a'}, y^{\rm b'}] \times [p_T^{\rm a'}, p_T^{\rm b'}]$ avec en général $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$. La raison pour cela est la suivante : on utilise le plus de particules possible pour la résolution du plan de réaction (ou pour le flot intégré). Ensuite les particules différentielles sont prises dans un espace des phases plus restreint, correspondant à un domaine où le détecteur est plus performant pour l'identification des particules. Enfin les résultats sont présentés sous forme de flot simplement différentiel, *i.e.*, $v_n(p_T)$ ou $v_n(y)$. Le flot doublement différentiel est donc intégré par rapport à l'une de ses deux variables dans le domaine $\mathcal{D}'$. La Table V.1 résume les différents domaines utilisés par NA49.

Flot dirigé		
$v_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$	$v_1(p_T)$	$v_1(y)$
$0.05 < p_T < 0.6$ $4 < y < 6$	$4 < y < 5$	$0.05 < p_T < 0.35$

Flot elliptique		
$v_2(\mathcal{D},\mathcal{D})$	$v_2(p_T)$	$v_2(y)$
$0.05 < p_T < 2.0$ $3.5 < y < 5$	$4 < y < 5$	$0.05 < p_T < 0.35$

TAB. V.1 – Domaines d'intégration $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de la collaboration NA49, intervenant dans le calcul du flot dirigé et elliptique, p_T étant exprimée en GeV/c et y la rapidité dans le référentiel du laboratoire .

Pour un domaine d'intégration donné, nous avons

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{D}} &= \int_{m_T^{\rm a}}^{m_T^{\rm b}} e^{-m_T/T}\, 2\pi m_T\, {\rm d}m_T \int_{y^{\rm a}}^{y^{\rm b}} \exp\left[-\frac{(y-y_{\rm CM})^2}{2\sigma^2}\right] {\rm d}y \\ &= 2\pi T \left(\frac{T+m_T^{\rm a}}{e^{m_T^{\rm a}/T}} - \frac{T+m_T^{\rm b}}{e^{m_T^{\rm b}/T}}\right) \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, {\rm Erf}[t^{\rm a}, t^{\rm b}], \end{aligned} \tag{V.22}$$

où $m_T^{\rm a,b} = \sqrt{m^2 + p_T^{\rm a,b}}$ et $t = \frac{y - <y>}{\sigma\sqrt{2}}$. Enfin, d'après [8], les pions représentent 85% des particules détectées dans $\mathcal{D}$, la moitié étant des π^+ et l'autre, des π^-. Comme nous devons corréler des particules identiques, disons des π^+, la fonction de distribution à une particule doit être multipliée par 0.85 et les corrélations à deux particules par 0.5.

Le «flot» intégré dû aux effets HBT est donné par

$$\begin{aligned}\left[v_n^{\rm HBT}(\mathcal{D})\right]^2 &\equiv c_n^{\rm HBT}(\mathcal{D},\mathcal{D}) \\ &= \frac{\int_{\mathcal{D}} 0.5\, c_n^{\rm HBT}(p_T,y,\mathcal{D})\; 0.85 f(\mathbf{p})\,{\rm d}^3\mathbf{p}}{\int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{p})\,{\rm d}^3\mathbf{p}} \\ &= 0.5\,(0.85)^2 \frac{\lambda\pi^{3/2}}{R_o R_L R_s} \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{1}{m_T}\, f(\mathbf{p})^2\, g(m_T,y)\, h_n(R_s p_T)\,{\rm d}^3\mathbf{p} \\ &= \frac{(0.85)^2\lambda\pi^{3/2}}{2\,N_{\mathcal{D}}^2\, R_o R_L R_s} \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{e^{-2m_T/T}}{m_T}\; e^{-(y-<y>)^2/\sigma^2}\; g(m_T,y)\, h_n(R_s p_T)\, 2\pi m_T {\rm d}m_T {\rm d}y \\ &= \frac{(0.85)^2\lambda\pi^{5/2}}{2N_{\mathcal{D}}^2\, R_o R_L R_s}\, T\left(e^{-m_T^{\rm a}/T} - e^{-m_T^{\rm b}/T}\right)\, \frac{\sigma}{2}\sqrt{\pi}\,{\rm Erf}\left[t^{\rm a}\sqrt{2}, t^{\rm b}\sqrt{2}\right].\end{aligned} \tag{V.23}$$

En utilisant les domaines $\mathcal{D}$ de la Table V.1, nous obtenons les valeurs des flots intégrés résumés dans la Table V.2, calculées jusqu'à l'harmonique 6. Les valeurs de NA49 [14] sont également incluses. Comme annoncé plus haut, non seulement la corrélation HBT produit un flot apparent du même ordre de grandeur que le flot lui-même, mais aussi des harmoniques supérieures du même ordre de grandeur que v_1 et v_2.

	$\lvert v_n^{\rm HBT}\rvert$	$v_n^{\rm NA49}$
$n=1$	1.59%	$-3.0\pm0.1\%$
$n=3$	1.39%	
$n=5$	1.17%	
$n=2$	1.27%	$3.0\pm0.1\%$
$n=4$	0.97%	
$n=6$	0.81%	

TAB. V.2 – Valeurs du «flot» intégré dû aux effets HBT, comparées à celles de NA49 obtenues par la méthode standard.

Le flot simplement différentiel est obtenu en intégrant (V.20) sur p_T ou sur y. Commençons par le flot en fonction de l'impulsion transverse :

$$\begin{aligned} v_n^{\rm HBT}(p_T) &\equiv \frac{1}{v_n^{\rm HBT}(\mathcal{D})}\, \frac{\int_{y^{\rm a'}}^{y^{\rm b'}} 0.5\, c_n^{\rm HBT}(p_T,y,\mathcal{D})\; 0.85 \frac{{\rm d}N}{{\rm d}y}{\rm d}y}{\int_{y^{\rm a'}}^{y^{\rm b'}} \frac{{\rm d}N}{{\rm d}y}\,{\rm d}y} \\ &= \frac{0.85\,\lambda\pi^{3/2}}{2N_{\mathcal{D}}\, R_o R_L R_s\, v_n^{\rm HBT}(\mathcal{D})}\, \frac{\int_{y^{\rm a'}}^{y^{\rm b'}} {\rm d}y\, e^{-(y-<y>)^2/\sigma^2}\, g(m_T,y)}{\int_{y^{\rm a'}}^{y^{\rm b'}} {\rm d}y\, e^{-(y-<y>)^2/2\sigma^2}}\, h_n(R_s p_T)\, \frac{e^{-m_T/T}}{m_T} \end{aligned} \tag{V.24}$$

Les Figures V.4 représentent les six premières harmoniques $v_n^{\rm HBT}(p_T)$. Les domaines d'intégration sont ceux de la Table V.1. Nous remarquons que le flot apparent présente un pic bien prononcé à bas p_T, essentiellement dû au facteur $1/m_T$ dans la corrélation (V.17). Ceci était prévisible puisque les effets HBT corrèlent des particules de faible impulsion relative. Nous remarquons également que $v_n^{\rm HBT}(p_T)$ s'annule rapidement, au-delà de $\langle p_T\rangle$, à cause de la proportionnalité à la fonction de distribution $f(\mathbf{p})$. Enfin la dépendance en n, surtout visible à

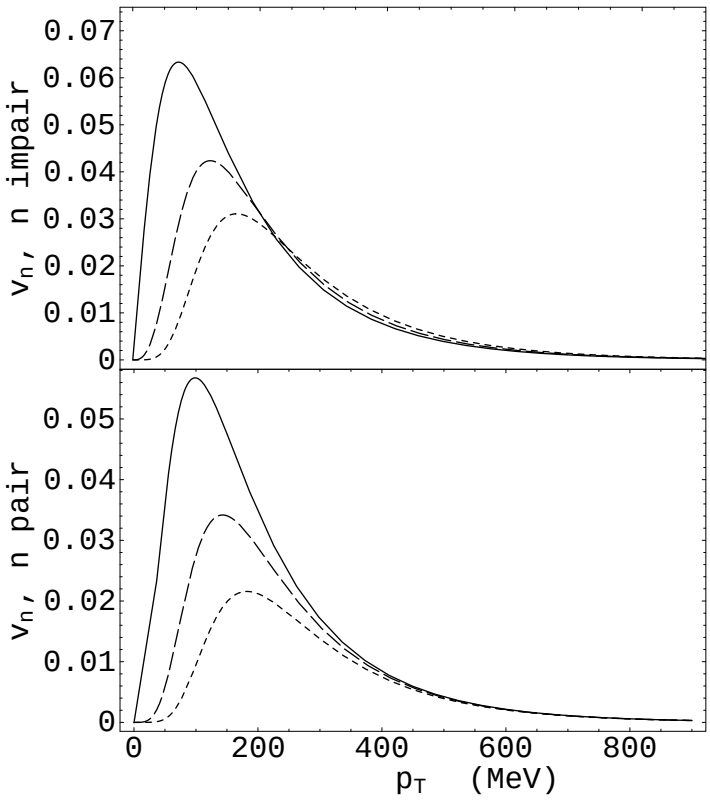


FIG. V.4 – Dépendance en p_T du flot apparent produit par les corrélations quantiques v_n^{HBT}. Haut : harmoniques impaires ($n = 1$, trait plein ; $n = 3$, tirets ; $n = 5$, pointillés). Bas : hamoniques paires ($n = 2$, trait plein ; $n = 4$, tirets ; $n = 6$, pointillés).

bas p_T, n'est pas franche, comme nous pouvions nous en douter au vue des valeurs intégrées ci-dessus : à partir de $\langle p_T \rangle / 2 \sim 200$ MeV, les courbes sont confondues.

Pour le flot différentiel en fonction de la rapidité, le calcul est analogue à (V.24) en intégrant sur y au lieu de p_T :

$$v_n^{\mathrm{HBT}}(y) \equiv \frac{1}{v_n^{\mathrm{HBT}}(\mathcal{D})} \frac{\int_{m_T^{\mathrm{a}\prime}}^{m_T^{\mathrm{b}\prime}} 0.5\, c_n^{\mathrm{HBT}}(p_T, y, \mathcal{D})\, 0.85 \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}m_T}\, \mathrm{d}m_T}{\int_{m_T^{\mathrm{a}\prime}}^{m_T^{\mathrm{b}\prime}} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}m_T}\, \mathrm{d}m_T}$$

$$= \frac{0.85\, \lambda \pi^{3/2}}{2 N_{\mathcal{D}}\, R_o R_L R_s\, v_n^{\mathrm{HBT}}(\mathcal{D})} \frac{\int_{m_T^{\mathrm{a}\prime}}^{m_T^{\mathrm{b}\prime}} \mathrm{d}m_T\, e^{-2m_T/T}\, g(m_T, y)\, h_n(R_s p_T)}{\int_{m_T^{\mathrm{a}\prime}}^{m_T^{\mathrm{b}\prime}} \mathrm{d}m_T\, m_T\, e^{-m_T/T}} e^{-(y-\langle y \rangle)^2/2\sigma^2} \tag{V.25}$$

Sur les Figures V.5, nous présentons le résultat du calcul pour les deux premières harmoniques. Notons que $v_n^{\mathrm{HBT}}(y)$ est non nul exactement sur les intervalles en y qui ont été utilisés dans l'analyse de NA49.

V.6 Correction des données de NA49 de 1998

Les résultats précédents vont maintenant nous servir à corriger le flot des pions publié par NA49 en 1998 [8]. La procédure de soustraction des effets «nonflow» a été présentée à la

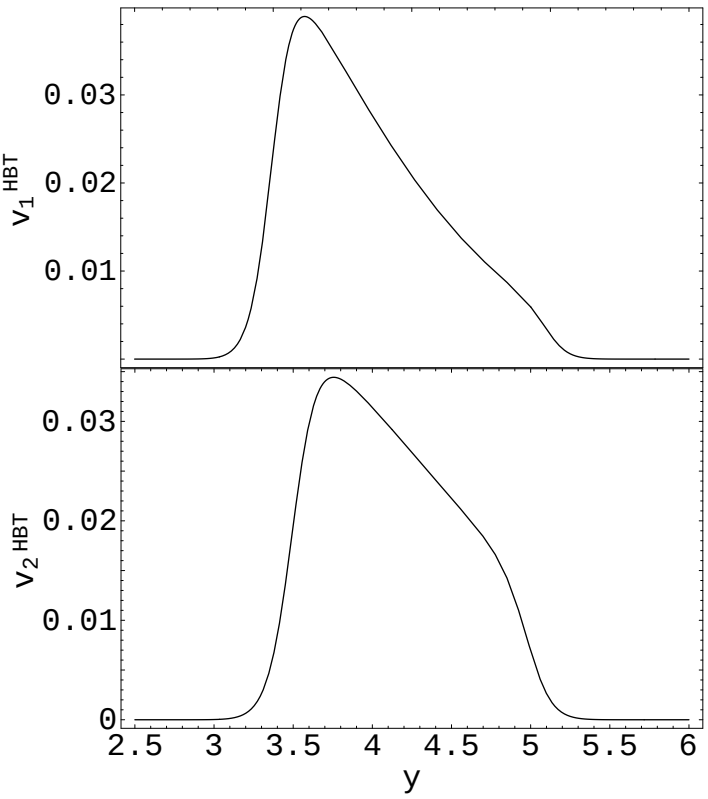


FIG. V.5 – Dépendance en y du flot apparent produit par les corrélations quantiques v_n^{HBT}. Haut : $n = 1$, bas : $n = 2$.

Section IV.4 : le flot intégré est donné par (IV.33) et (IV.37), où nous exprimons la corrélation nonflow en termes de $v_n^{\rm HBT}$ calculé à la section précédente suivant Eq.(V.20),

$$v_n^2 = \left[v_n^{\rm NA49}(\mathcal{D})\right]^2 - \left[v_n^{\rm HBT}(\mathcal{D})\right]^2 . \tag{V.26}$$

Après soustraction, nous trouvons les valeurs $v_1 = -2.5\%$ et $v_2 = 2.6\%$, à comparer à $v_1^{\rm NA49}(\mathcal{D}) = -3.0 \pm 0.1\%$ et $v_2^{\rm NA49}(\mathcal{D}) = 3.0 \pm 0.1\%$, qui sont donc corrigées de plus de 10%.

De même, le flot différentiel est donné par Eqs.(IV.34) et (IV.38) où la corrélation «nonflow» est exprimée au moyen de (V.20)

$$v_n'(p_T, y) = \frac{v_n^{\rm NA49}(\mathcal{D})\, v_n^{\rm NA49}(p_T, y) - v_n^{\rm HBT}(\mathcal{D})\, v_n^{\rm HBT}(p_T, y)}{\left(\left[v_n^{\rm NA49}(\mathcal{D})\right]^2 - \left[v_n^{\rm HBT}(\mathcal{D})\right]^2\right)^{1/2}}. \tag{V.27}$$

Les figures suivantes présentent nos résultats [15]. Nous avons déjà remarqué les anomalies sur le flot différentiel à la Section IV.3. Commençons d'abord par $v_n(p_T)$, Figs.V.6. Après soustraction, les valeurs du flot sont significativement modifiées et $v_n(p_T)$ a un comportement beaucoup plus régulier : les «bosses» à bas p_T qui avaient été observées provenaient en majorité de la corrélation HBT, ce qui est normal puisque nous avons vu que $v_n^{\rm HBT}(p_T)$ présente un pic à bas p_T.

Pour ce qui concerne la dépendance en rapidité, Figs.V.6, $v_n^{\rm NA49}(y)$ présente des sauts exactement aux limites de la fenêtre en y utilisée pour la résolution du plan de l'événement (4–6 et 3.5–5 pour v_1 et v_2 respectivement), ce qui, encore une fois, n'était pas explicable en termes de flot. Or c'est justement sur ces intervalles en rapidité qu'agissent les corrélations HBT (*cf.* Figs.V.5). Les données corrigées ne présentent plus ces variations brusques au bord de l'intervalle en rapidité utilisé.

V.7 Conclusion

Nous avons calculé en détail une corrélation «nonflow», la corrélation quantique due aux effets HBT, en utilisant comme contexte les coupures expérimentales en p_T et en y de la collaboration NA49. Nous avons ensuite corrigé leurs données de flot en faisant une soustraction explicite non pas au niveau du flot lui-même mais au niveau de la corrélation à deux particules. Nous avons montré que la corrélation HBT produit un effet qui était interprété comme du flot, notamment à bas p_T. Le flot différentiel, après correction, est significativement modifié. Elle pollue également les harmoniques supérieures ($n \geq 3$) car elle dépend faiblement de n. Cette corrélation «nonflow» à courte portée résout à elle seule nombre des anomalies que nous avions listées à la Section IV.3.3. Finalement, sur cet exemple, il est clair que négliger les corrélations «nonflow» dans les méthodes d'analyse standard n'est pas justifié.

Dans le chapitre suivant, nous explorerons une autre corrélation «nonflow», la conservation de l'impulsion transverse totale.

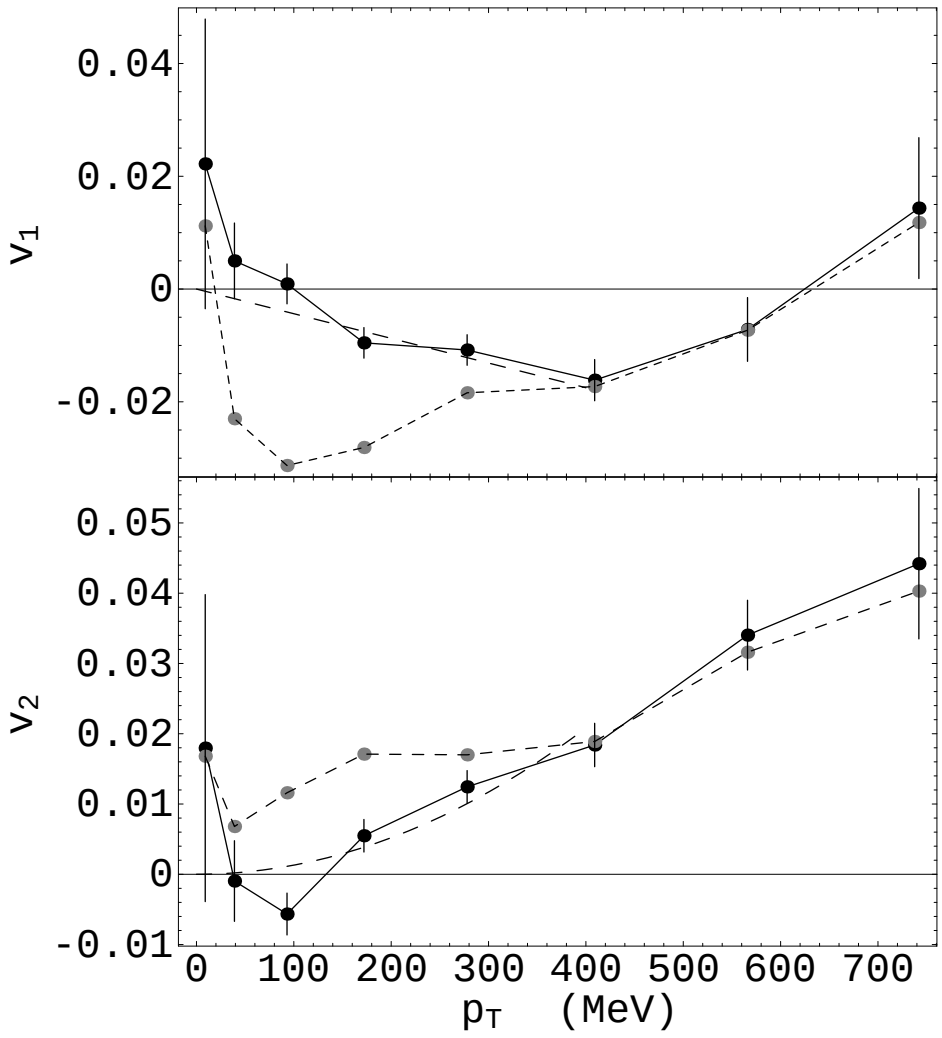


FIG. V.6 – Flot des pions pour une collision Pb–Pb à 158 AGeV, en fonction de p_T. Haut, flot dirigé ; bas, flot elliptique. En pointillés gris, données publiées par NA49 en 1998 [8]. En trait plein, données corrigées de la corrélation HBT. Pour plus de clarté, les barres expérimentales ne sont représentées que sur les données corrigées. Les courbes en tirets sur le graphe du haut et le graphe du bas sont des fonctions linéaire et quadratique respectivement.

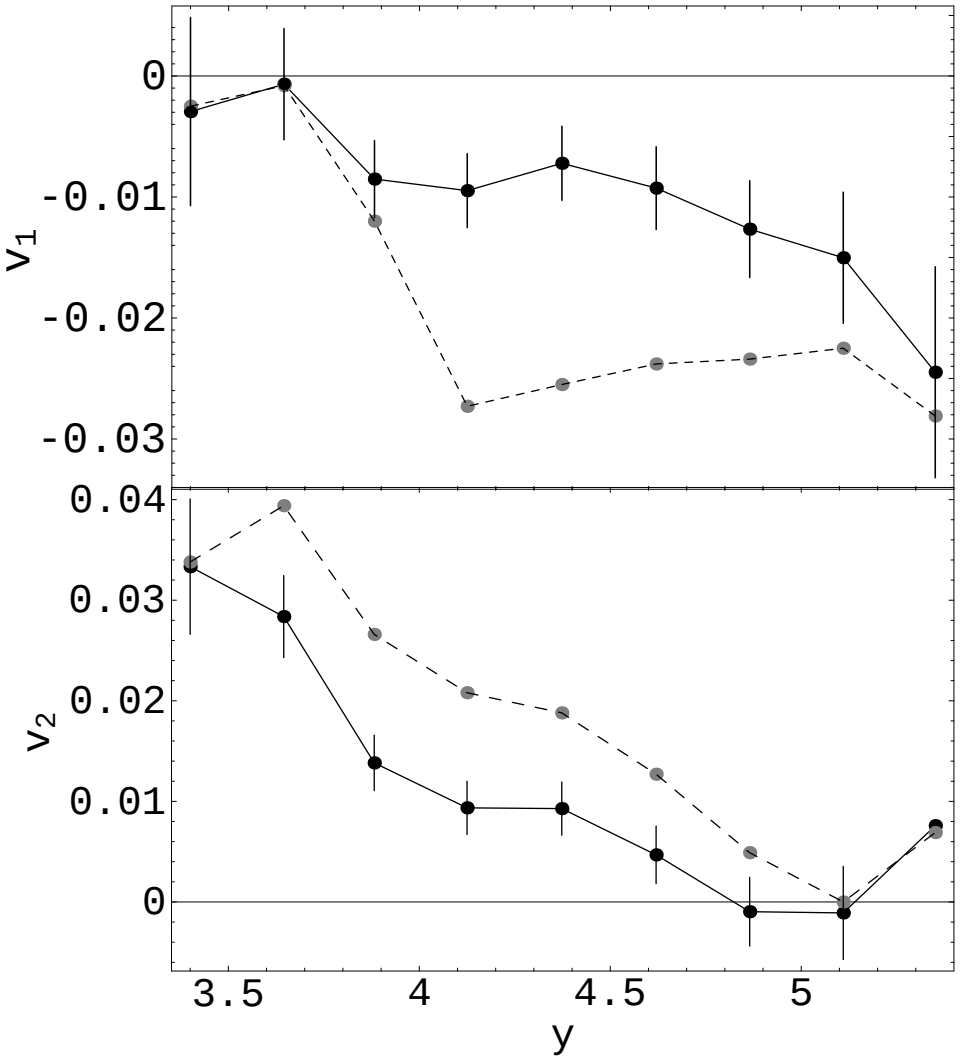


FIG. V.7 – Flot des pions pour une collision Pb–Pb à 158 AGeV, en fonction de y. Même légende que pour la Figure V.6.

Chapitre VI

Corrélations liées à la conservation de l'impulsion

Sommaire

VI.1 Ordre de grandeur de la corrélation azimutale à deux particules 66
VI.2 Corrélation à deux particules due à la conservation de l'impulsion 67
VI.3 Correction des données de NA49 69
VI.3.1 Calcul de $\langle p_T^2 \rangle$ 69
VI.3.2 Calcul de $\langle \Sigma\ p_T^2 \rangle$ 70
VI.3.3 Correction du flot dirigé des protons et des pions de NA49 70
VI.4 Influence sur la méthode des sous-événements 72
VI.5 Conclusion 74

Dans ce chapitre, nous étudierons la corrélation azimutale à deux particules induite par la conservation de l'impulsion transverse totale. Conserver l'impulsion totale dans une collision va de soi. Les deux noyaux qui entrent en collision ayant des impulsions parallèles à l'axe de la collision, l'impulsion transverse totale doit en principe être nulle. Nous verrons que la mise en oeuvre de cette conservation est délicate car elle concerne toutes les particules produites et ces dernières sont rarement toutes détectées. Enfin, de la même façon que nous avions corrigé les données de NA49 des corrélations quantiques, nous appliquerons nos résultats pour soustraire la corrélation azimutale liée à la conservation de l'impulsion sur ces mêmes données.

En reprenant les notations que nous avions introduites pour la corrélation HBT, pour deux particules d'impulsions $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ respectivement, leur corrélation due à la conservation de l'impulsion transverse totale sera désignée par

$$c_n^{\Sigma p_T}(p_{T_1}, y_1, p_{T_2}, y_2) = \frac{\iint \mathrm{d}\phi_1\,\mathrm{d}\phi_2\,\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2}\,\mathcal{C}^{\Sigma p_T}(\mathbf{p}_{T_1},\mathbf{p}_{T_2})\cos n(\phi_1-\phi_2)}{\iint \mathrm{d}\phi_1\,\mathrm{d}\phi_2\,\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2}}, \tag{VI.1}$$

où la fonction de corrélation $\mathcal{C}^{\Sigma p_T}$ est définie par

$$\frac{dN}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2} = \frac{dN}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1}\frac{dN}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2}\left[1+\mathcal{C}^{\Sigma p_T}(\mathbf{p}_{T_1},\mathbf{p}_{T_2})\right]. \tag{VI.2}$$

Nous allons dans un premier temps l'évaluer par un calcul approché, puis nous établirons une expression plus rigoureuse à partir de la distribution à N particules résultant de la conservation de l'impulsion transverse totale. Enfin nous appliquerons notre résultat pour la correction des données de NA49. Dans tous les cas, nous considérerons que seule la conservation de l'impulsion corrèle les particules produites lors de la collision.

VI.1 Ordre de grandeur de la corrélation azimutale à deux particules

La conservation de l'impulsion transverse totale corrèle les directions et les sens d'émission dans le plan transverse. Cette corrélation «back-to-back» agit donc uniquement sur le flot dirigé[1]. En effet, deux particules qui sont émises suivant une même direction mais dans les sens opposés produisent le même flot elliptique mais des flots dirigés de signes opposés.

Soit N le nombre total de particules émises. La conservation de l'impulsion transverse totale s'écrit

$$\mathbf{p}_{T_1} + \ldots + \mathbf{p}_{T_N} = \mathbf{0}. \tag{VI.3}$$

Nous cherchons à calculer la corrélation entre les particules i et j, $\langle\cos(\phi_i-\phi_j)\rangle$. Nous pouvons considérer une quantité plus facile à déterminer, à partir de la condition (VI.3), à savoir $\langle p_{T_i}\,p_{T_j}\,\cos(\phi_i-\phi_j)\rangle = \langle\mathbf{p}_{T_i}\cdot\mathbf{p}_{T_j}\rangle$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle(\mathbf{p}_{T_1}+\ldots+\mathbf{p}_{T_N})^2\right\rangle = \sum_{k=1}^{N}\left\langle p_{T_k}^2\right\rangle + \sum_{k\neq l}\left\langle\mathbf{p}_{T_k}\cdot\mathbf{p}_{T_l}\right\rangle \\ &= N\left\langle p_T^2\right\rangle + N(N-1)\left\langle\mathbf{p}_{T_i}\cdot\mathbf{p}_{T_j}\right\rangle. \end{aligned} \tag{VI.4}$$

Soit la corrélation azimutale à deux particules vaut approximativement

$$\langle\cos(\phi_i-\phi_j)\rangle \simeq \frac{\left\langle p_{T_i}\,p_{T_j}\,\cos(\phi_i-\phi_j)\right\rangle}{\left\langle p_{T_i}\right\rangle\left\langle p_{T_j}\right\rangle} \simeq -\frac{1}{N-1}\frac{\left\langle p_T^2\right\rangle}{\left\langle p_T\right\rangle^2}. \tag{VI.5}$$

Cette correction a été effectuée dans certaines analyses de flot [17, 46, 50] mais d'autres ne la prennent pas en compte [8, 47, 49].

Faisons tout de suite quelques remarques. Contrairement à la corrélation HBT, Eq.(VI.5) est une corrélation à deux particules *négative*. Regardons l'influence de la correction de cet

[1] Nous verrons cependant que dans le cadre de la méthode standard, elle intervient également dans le flot elliptique via la résolution du plan de l'événement, *cf.* SectionVI.4.

effet sur le flot. Supposons que le plan de l'événement soit évalué à partir des pions, ce qui est le cas à NA49. Le v_1 des pions est négatif dans la région de rapidité du projectile. De façon analogue à la corrélation HBT s'inspirant de (IV.34), le moment d'ordre 2 s'écrit ici

$$\mu_1(p_T, y, \mathcal{D}) = v_1(\mathcal{D})\ v_1'(p_T, y) + c_1^{\Sigma\,\mathrm{p_T}}(p_T, y, \mathcal{D}). \tag{VI.6}$$

Considérons maintenant la corrélation entre un pion «différentiel» et le plan de l'événement. La soustraction dans le moment d'ordre 2 de l'effet négatif de la conservation de l'impulsion, donnant ainsi une correction *positive*, tend à augmenter en valeur absolue le flot différentiel du pion : il doit être après correction plus négatif qu'avant. Le flot dirigé des pions mesuré par NA49 est donc sous-estimé.

En revanche, l'effet sur les protons sera de signe contraire. En effet, nous avons $v_1(\mathcal{D}) < 0$ puisqu'il s'agit des pions du plan de l'événement. Nécessairement, pour avoir $v_1'(p_T, y) > 0$, le moment $\mu_1(p_T, y, \mathcal{D})$ doit être négatif. La «soustraction» de l'effet de la conservation de l'impulsion donne un moment qui doit toujours être négatif mais qui, en valeur absolue, sera plus faible. Après correction, le flot dirigé des protons diminue, ce qui veut dire que le flot estimé par NA49 est surestimé cette fois-ci.

Enfin notons que nous avons explicitement une corrélation «nonflow» en $1/N$, comme nous l'avions annoncé en (IV.26).

VI.2 Corrélation à deux particules due à la conservation de l'impulsion

Nous allons montrer que la conservation de l'impulsion modifie les fonctions de distribution des particules. Après avoir calculé le changement induit sur la distribution à k particules pour k quelconque, nous appliquerons notre résultat à $k = 2$ et nous calculerons la corrélation à deux particules résultante.

Considérons une collision produisant N particules et notons $f(\mathbf{p})$ la fonction de distribution à une particule. Nous avons naturellement les valeurs moyennes suivantes

$$\langle \mathbf{p}_T \rangle = \int \mathrm{d}^3\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \mathbf{p}_T = \mathbf{0} \tag{VI.7a}$$

$$\langle p_x^2 \rangle = \langle p_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle p_T^2 \rangle \tag{VI.7b}$$

$$\langle p_x\, p_y \rangle = 0 \tag{VI.7c}$$

Les axes x et y sont des axes fixes dans le plan transverse.

Nous supposons maintenant que les N particules sont corrélées uniquement par la conservation de l'impulsion transverse totale. La distribution des N particules s'écrit alors comme le produit des distributions de chacune de ces particules contraint par une distribution de Dirac

$$\frac{dN}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1 \ldots \mathrm{d}^3\mathbf{p}_N} = \frac{f(\mathbf{p}_1) \ldots f(\mathbf{p}_N)\, \delta^2(\mathbf{p}_{T_1} + \ldots + \mathbf{p}_{T_N})}{\displaystyle\int \prod_{i=1}^{N} f(\mathbf{p}_i) \mathrm{d}^3\mathbf{p}_i\, \delta^2(\mathbf{p_T}_1 + \cdots + \mathbf{p_T}_N)} \tag{VI.8}$$

Le dénominateur que nous noterons C se calcule en utilisant la transformée de Fourier de la

distribution de Dirac :

$$\begin{aligned} C &= \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^3\mathbf{p}_i \, f(\mathbf{p}_i) \int \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\sum_j \mathbf{p}_{T_j}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left(\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}_j f(\mathbf{p}_j)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_j} \right)^N \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \exp\left[N \ln \hat{f}(\mathbf{k}) \right], \end{aligned} \tag{VI.9}$$

où $\hat{f}(\mathbf{k}) \equiv \int \mathrm{d}^3\mathbf{p} f(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_T}$. Nous calculons cette dernière intégrale par la méthode du col dans la limite $M \to \infty$. Pour cela nous développons $\ln \hat{f}(\mathbf{k})$ autour de $\mathbf{k} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \ln \hat{f}(\mathbf{k}) &= \ln \hat{f}(\mathbf{0}) + i\mathbf{k}\cdot\langle \mathbf{p}_T \rangle + \frac{1}{2}\left[-\left\langle (\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_T)^2 \right\rangle + (\mathbf{k}\cdot\langle \mathbf{p}_T \rangle)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{4} k^2 \left\langle \mathbf{p_T}^2 \right\rangle . \end{aligned} \tag{VI.10}$$

En injectant cette expression dans (VI.9), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} C &= \int \frac{2\pi k \mathrm{d}k}{(2\pi)^2} \exp\left(-\frac{N k^2}{4} \left\langle \mathbf{p}_T^2 \right\rangle \right) = \int \frac{\mathrm{d}(k^2)}{4\pi} \exp\left(-\frac{N k^2}{4} \left\langle \mathbf{p}_T^2 \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\pi N \left\langle p_T^2 \right\rangle}. \end{aligned} \tag{VI.11}$$

Nous aurions pu trouver ce résultat plus rapidement en faisant appel au théorème central limite. En effet, la distribution de la somme de M impulsions transverses indépendantes, $\mathbf{P}_T = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{p}_{T_i}$, est gaussienne :

$$\begin{aligned} F_M(\mathbf{P}_T) &\equiv \int \delta^2 \left(-\mathbf{P}_T + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{p}_{T_i} \right) \prod_{i=1}^{M} \left(f(\mathbf{p}_i) \mathrm{d}^3\mathbf{p}_i \right) \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\mathbf{P}_T^2}{\sigma^2} \right). \end{aligned} \tag{VI.12}$$

La déviation σ vaut

$$\sigma^2 = \left\langle \mathbf{P}_T^2 \right\rangle - \langle \mathbf{P}_T \rangle^2 = M \langle p_T^2 \rangle. \tag{VI.13}$$

Nous retrouvons donc la constante de normalisation par $C = F_N(\mathbf{0})$.

Nous pouvons maintenant calculer la fonction de corrélation à k particules en intégrant Eq.(VI.8) sur les $N-k$ particules restantes et en utilisant les distributions gaussiennes (VI.12)

$$\begin{aligned} \frac{dN}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1 \ldots \mathrm{d}^3\mathbf{p}_k} &\equiv \left(\prod_{i=1}^{k} f(\mathbf{p}_i) \right) \frac{\displaystyle\int \prod_{i=k+1}^{N} \mathrm{d}^3\mathbf{p}_i \, f(\mathbf{p}_i)\, \delta^2(\mathbf{p_T}_1 + \cdots + \mathbf{p_T}_N)}{\displaystyle\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^3\mathbf{p}_{T_i} \, f(\mathbf{p}_i)\, \delta^2(\mathbf{p_T}_1 + \cdots + \mathbf{p_T}_N)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} f(\mathbf{p}_i) \right) \frac{F_{N-k}\left(-\sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_{T_i} \right)}{F_N(0)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} f(\mathbf{p}_i) \right) \frac{N}{N-k} \exp\left[-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i \right)^2}{(N-k)\left\langle p_T^2 \right\rangle} \right] \end{aligned} \tag{VI.14}$$

Ainsi la conservation de l'impulsion transverse totale modifie *toutes* les fonctions de distribution. Pour $k = 1$, nous obtenons la distribution à une particule corrigée au premier ordre en $1/N$

$$\frac{dN}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}} = f(\mathbf{p}) \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{p_T^2}{N \left\langle p_T^2 \right\rangle}\right). \tag{VI.15}$$

Notons que cette distribution est toujours normalisée à 1, comme il se doit. La distribution à deux particules s'obtient de la même manière pour $k = 2$

$$\frac{dN}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2} = f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) \left(1 + \frac{2}{N} - \frac{(\mathbf{p_T}_1 + \mathbf{p_T}_2)^2}{N \langle p_T^2 \rangle}\right). \tag{VI.16}$$

La fonction de corrélation à deux particules (VI.2) s'écrit donc

$$\mathcal{C}^{\Sigma p_T}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -\frac{2\,\mathbf{p}_{T_1} \cdot \mathbf{p}_{T_2}}{N \left\langle p_T^2 \right\rangle} = -\frac{2\,p_{T_1} p_{T_2} \cos(\phi_1 - \phi_2)}{\left\langle \sum_{i=1}^{N} p_T^2 \right\rangle} \tag{VI.17}$$

Des résultats similaires avaient déjà été obtenus dans [18]. Nous avons remplacé dans la dernière égalité le dénominateur $N \left\langle p_T^2 \right\rangle$ par sa véritable valeur. Notons qu'au numérateur interviennent les impulsions transverses des deux particules corrélées, ce qui est une bonne chose puisque ce sont les particules de grand p_T qui sont les plus sensibles à la conservation de l'impulsion. Nous pouvons maintenant calculer la corrélation à deux particules en injectant (VI.17) dans (VI.2). Or comme $\int \mathrm{d}\phi \cos n\phi \cos\phi = 0$ pour $n > 1$, le seul cas non nul est pour $n = 1$, soit

$$c_1^{\Sigma p_T}(p_{T_1}, y_1, p_{T_2}, y_2) = -\frac{p_{T_1} p_{T_2}}{\left\langle \Sigma\, p_T^2 \right\rangle}. \tag{VI.18}$$

La conservation de l'impulsion ne contribue qu'au flot dirigé, comme annoncé plus haut. Nous pouvons comparer cette formule exacte à la corrélation approchée (VI.5) et remarquer que si nous intégrons sur les particules 1 et 2, nous obtenons ici des dépendances en $\langle p_T \rangle$ et $\left\langle p_T^2 \right\rangle$ inverses. Notons également que la corrélation est indépendante de la rapidité. Enfin, nous retrouvons le fait que $c_1^{\Sigma p_T} \sim 1/N$.

VI.3 Correction des données de NA49

Pour soustraire la contribution de la conservation de l'impulsion des données de NA49, nous devons procéder de la même manière que pour les effets HBT, *cf.* Eqs. (V.26) et (V.27). Ici nous devons distinguer le flot des protons et le flot des pions car la conservation de l'impulsion apporte une correction négative dans le premier cas et positive dans le deuxième. Mais avant de calculer précisément ces corrections, nous allons évaluer $\left\langle p_T^2 \right\rangle$ pour les particules qui nous intéressent, dans le cadre de l'expérience NA49.

VI.3.1 Calcul de $\langle p_T^2 \rangle$

En utilisant la distribution exponentielle donnée en (V.21), nous obtenons

$$\left\langle p_T^2 \right\rangle = 2T^2\, \frac{x^2 + 3x + 3}{1 + x}, \tag{VI.19}$$

où m est la masse et T la température de la particule en question. Nous avons posé $x = m/T$. Nous avons résumé leurs valeurs dans la Table VI.1. Notons que les valeurs de T proviennent

	m (MeV)	T (MeV)	$\sqrt{\langle p_T^2 \rangle}$ (MeV/c)
π^+	140	185	477
π^-	140	175	453
$K^\pm$	494	215	652
K_s^0	494	220	663
p	939	300	983

TAB. VI.1 – Masse, température et $\sqrt{\langle p_T^2 \rangle}$ pour les différentes particules détectées par NA49.

de l'ajustement du spectre en p_T dans la région de rapidité centrale. Loin de $y_{\rm CM}$, l'impulsion transverse est plus faible. La valeur moyenne de p_T^2 est donc surestimée. Le plus délicat reste à faire : nous devons évaluer $\langle \Sigma\ p_T^2 \rangle$ où la somme porte sur *toutes* les particules produites, sachant que toutes ne sont pas détectées.

VI.3.2 Calcul de $\langle \Sigma\ p_T^2 \rangle$

Nous ne considérons que les pions, les kaons et les nucléons provenant du projectile ou de la cible. Le nombre total de particules négatives émises lors d'une collision centrale à NA49 est $\langle h^- \rangle = 680$ [19]. Par ailleurs, le rapport $\langle K^- \rangle / \langle \pi \rangle$ vaut ~ 0.09, où $\langle \pi \rangle = 0.5[\langle \pi^+ \rangle + \langle \pi^- \rangle]$ [20]. En négligeant les antiprotons, les 680 hadrons négatifs se répartissent approximativement en 624 π^- et 56 K^-. Par la symétrie d'isospin, nous avons autant de π^+ et de π^0. Grâce aux rapports $\langle K^+ \rangle / \langle \pi \rangle \sim 0.16$ et $\langle K_s^0 \rangle / \langle \pi \rangle \sim 0.10$, à tout K^- est associé 1.78 K^+ et 1.11 K_s^0 (et autant de K_L^0). Enfin, si nous supposons qu'il n'y a pas de fragments dans la collision, nous devons tenir compte des 416 nucléons provenant de la cible et du projectile. Au total, nous avons environ 2500 particules produites réparties comme suit

$$N_\pi = 1872, \quad N_K = 280, \quad N_N = 416.$$

En utilisant les résultats de la Table VI.1, nous obtenons

$$\langle \Sigma\ p_T^2 \rangle \sim 930\ {\rm GeV}^2. \tag{VI.20}$$

Pour une collision non centrale, nous supposons que $\Sigma\ p_T^2$ est proportionnel à la multiplicité. En d'autres termes, nous négligeons la variation de T et des rapports d'abondance des espèces avec la centralité. Nous diviserons la valeur trouvée en (VI.20) par 2 pour une collision semi-centrale, sachant qu'à NA49, nous avons 40% à 55% de la multiplicité totale pour une collision semi-centrale [8].

VI.3.3 Correction du flot dirigé des protons et des pions de NA49

Pour reconstruire le flot différentiel, nous reprenons la soustraction des effets HBT dans les données publiées de NA49, *cf.* Section V.6. Maintenant nous devons également tenir compte de la conservation de l'impulsion transverse totale dans le moment d'ordre 2

$$\begin{aligned} \mu_1(p_{T_i}, y_i, p_{T_j}, y_j) &= v_1^{\rm NA49}(p_{T_i}, y_i) v_1^{\rm NA49}(p_{T_j}, y_j) \\ &= v_1'(p_{T_i}, y_i)\ v_1'(p_{T_j}, y_j) + \delta_{ij}\, c_1^{\rm HBT}(p_{T_i}, y_i, p_{T_j}, y_j) + c_1^{\Sigma p_T}(p_{T_i}, y_i, p_{T_j}, y_j). \end{aligned} \tag{VI.21}$$

Le symbole de Kronecker δ_{ij} permet d'avoir une seule formule applicable pour les pions et les protons. En effet, les corrélations quantiques n'influent que sur les corrélations entre particules identiques (ici des pions) et pas la corrélation entre un proton et un pion du plan de

l'événement. En utilisant (VI.18), nous pouvons écrire le terme de flot comme suit

$$v_1'(p_{T_i}, y_i)\ v_1'(p_{T_j}, y_j) = v_1^{\mathrm{NA49}}(p_{T_i}, y_i)\ v_1^{\mathrm{NA49}}(p_{T_j}, y_j) - \delta_{ij}\, c_1^{\mathrm{HBT}}(p_{T_i}, y_i, p_{T_j}, y_j) + \frac{p_{T_i}\, p_{T_j}}{\langle \Sigma\, p_T^2 \rangle} \tag{VI.22}$$

Nous voyons explicitement que la correction de la conservation de l'impulsion est une *addition* au moment d'ordre 2 car la corrélation (VI.18) est négative.

Pour le flot différentiel des protons, il y a une subtilité qui n'apparaissait pas avec les corrélations HBT : les protons différentiels sont toujours corrélés avec des pions utilisés dans l'estimation du plan de l'événement[2]. Si dans (VI.22), le proton est labellé par l'indice i et le pion par j, nous obtenons le flot différentiel du proton en intégrant sur la particule j. Ainsi, la reconstruction de $v_1'(p_{Tj}, y_j)$ requiert la connaissance du flot intégré des pions $v_1(\mathcal{D})$. Tout ceci pour dire que la reconstruction du flot différentiel d'un certain type de particules ne nécessite pas forcément le flot intégré des mêmes particules. Pour être plus explicite, nous indicerons dans le flot intégré le domaine d'intégration par un π pour signifier que nous intégrons sur un pion. Le flot intégré des pions s'écrit donc

$$v_1(\mathcal{D}_\pi) = -\left(\left[v_1^{\mathrm{NA49}}(\mathcal{D}_\pi)\right]^2 - \left[v_1^{\mathrm{HBT}}(\mathcal{D}_\pi)\right]^2 + \frac{\langle p_T \rangle_\pi^2}{\langle \Sigma\, p_T^2 \rangle} \right)^{1/2}, \tag{VI.23}$$

où nous avons adopté la convention d'un flot dirigé des pions négatif dans la région de rapidité avant. Finalement, en utilisant (VI.22) et (VI.23), le flot différentiel corrigé s'écrit

$$v_1'(p_T, y) = \left| \frac{v_1^{\mathrm{NA49}}(\mathcal{D}_\pi)}{v_1(\mathcal{D}_\pi)} \right| v_1^{\mathrm{NA49}}(p_T, y) - \delta_{ij} \left| \frac{v_1^{\mathrm{HBT}}(\mathcal{D}_\pi)}{v_1(\mathcal{D}_\pi)} \right| v_1^{\mathrm{HBT}}(p_T, y) - \frac{\langle p_T \rangle_\pi}{|v_1(\mathcal{D}_\pi)|\, \langle \Sigma\, p_T^2 \rangle} p_T. \tag{VI.24}$$

Nous avons pris soin de faire apparaître clairement le signe de chaque terme : la correction de la conservation de l'impulsion est donc toujours négative, que ce soit pour le flot différentiel des protons ou des pions, à la différence que le premier est positif alors que le deuxième est négatif. Nous retrouvons ici la discussion de la Section VI.1, et cela à cause du signe opposé entre le v_1 des protons et le v_1 des pions.

Nous devons tenir compte des coupures effectuées dans l'analyse de NA49 pour le flot dirigé des pions $p_T = 50 - 600$ MeV/c (*cf.* Tab.V.1). Nous trouvons $\langle p_T \rangle_\pi = 302$ MeV/c. Avec la valeur de $\langle \Sigma\, p_T^2 \rangle$ trouvée en (VI.20) (que nous avons divisée par deux, les données de NA49 concernant des collisions semi-centrales), le dernier terme du membre de droite de (VI.23) donne une contribution au flot intégré de 1.4%, ce qui, encore une fois, n'est pas négligeable devant le flot obtenu par NA49, à savoir $v_1^{\mathrm{NA49}} = -3.0 \pm 0.1\%$. En utilisant la valeur de $v_1^{\mathrm{HBT}} = 1.59\%$ de la Tab.V.2, nous obtenons un flot dirigé corrigé de -2.9%. Donc les effets HBT compensent presque la conservation de l'impulsion sur le flot intégré (mais non sur le flot différentiel !).

La Fig.VI.1 présente le flot dirigé des protons, publié par NA49 [8] et corrigé des effets HBT et de la conservation de l'impulsion transverse totale. Nous constatons qu'après correction, le flot des protons est négatif sur pratiquement tout l'intervalle en p_T, ce qui est assez ennuyeux puisqu'il est par convention positif dans la région de rapidité avant. D'ailleurs, nous pouvons intégrer (VI.24) sur l'impulsion transverse du proton ($0 < p_T < 2$ GeV/c) pour trouver un

[2] Pour les harmoniques impaires, les protons sont tous retirés dans la mesure du possible des particules utilisées dans le calcul du vecteur flot. Celles-ci sont donc essentiellement des pions. Ceci est motivé par le fait que le flot dirigé des protons a un signe opposé à celui des pions. En revanche, ce changement de signe n'existant pas pour les harmoniques paires, toutes les particules sont utilisées dans la reconstruction de v_2 [8].

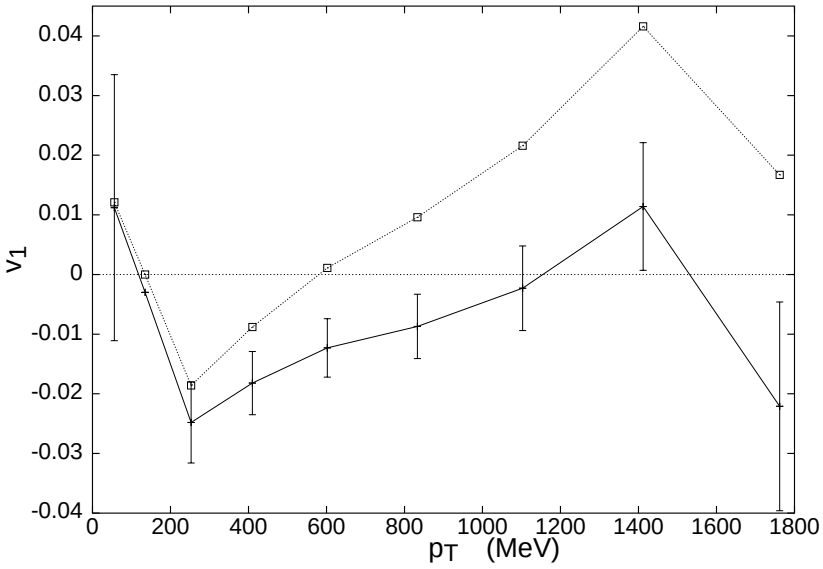


FIG. VI.1 – Flot dirigé v_1 des protons à NA49, en fonction de p_T : pointillés, données expérimentales ; trait plein, données corrigés de la conservation de l'impulsion transverse totale (et des effets HBT via le flot intégré des pions).

flot dirigé intégré de -0.57%. Physiquement cela se traduirait par le fait que les protons et les pions iraient tous dans la même direction, ce qui n'est pas acceptable du point de vue de la théorie. Nous avons donc l'indice qu'il existe encore d'autres effets «nonflow» à considérer, notamment la désintégration des résonances (*cf.* Chapitre VII).

Enfin nous avons présenté le résultat de nos calculs sur le flot dirigé des pions à la Fig.VI.2. Rappelons que même après soustraction des effets HBT, le changement de signe à grand p_T subsistait, ce qui était normal puisque les corrélations HBT n'ont une influence qu'à bas p_T. En revanche, la conservation de l'impulsion agit justement sur les particules de grand p_T. Et il est heureux de noter que la soustraction de la conservation de l'impulsion permet d'obtenir un flot différentiel des pions négatif pour *tout* p_T.

VI.4 Influence sur la méthode des sous-événements

Pour corriger les résultats publiés par NA49, nous avons adopté la même technique que la correction des effets HBT, à savoir que nous avons reconstruit la corrélation à deux particules à partir des données de NA49, puis nous avons soustrait de cette dernière les effets HBT et/ou la conservation de l'impulsion.

La prise en compte de la conservation de l'impulsion a été en fait récemment implémentée directement dans la méthode des sous-événements [21]. Nous avons vu que cette dernière est équivalente à l'utilisation des corrélations à deux particules mais elle se base en fait sur la construction du vecteur flot. Nous devons calculer la fonction de distribution non pas entre deux particules mais entre une particule différentielle et le vecteur flot $\mathbf{Q}$ défini par (IV.9). La procédure est donc plus lourde que la correction au niveau des corrélations à deux particules mais elle reste néanmoins similaire à celle présentée à la Section VI.2 et est détaillée dans l'appendice A de [21]. Le fait important est que si le flot dirigé et le flot elliptique différentiels sont reconstruits à partir du flot dirigé intégré, la conservation de l'impulsion transverse totale influence non seulement v_1' mais également v_2', via la résolution du plan de l'événement [22–25]. Remarquons que ce n'est pas le cas de NA49 qui reconstruit son flot elliptique différentiel à

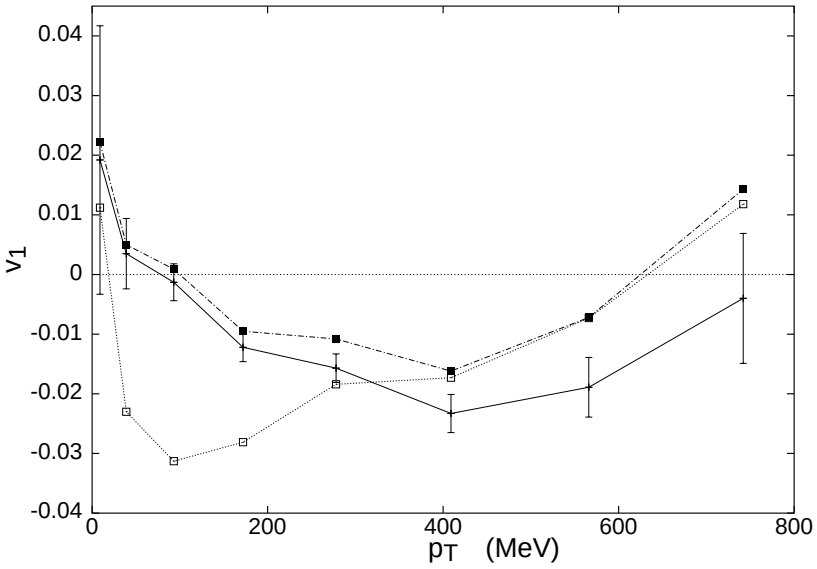


FIG. VI.2 – Flot dirigé v_1 des pions à NA49, en fonction de p_T : pointillés, données expérimentales ; tirets, soustraction des effets HBT ; trait plein, soustraction supplémentaire de la conservation de l'impulsion transverse totale.

partir de la même harmonique.

La correction de la conservation de l'impulsion dans la méthode des sous-événements se résume en une grandeur f sans dimension donnée par

$$f \equiv \langle \omega p_T \rangle_Q \sqrt{\frac{M}{\langle \omega^2 \rangle_Q \; N \; \langle p_T^2 \rangle}}, \tag{VI.25}$$

où $\langle \ldots \rangle_Q$ signifie une moyenne sur les M particules utilisées dans le calcul de $\mathbf{Q}$. Si le poids ω est choisi proportionnel à p_T (ce qui est raisonnable pour le calcul du flot dirigé), Eq.(VI.25) se réduit à $f \simeq \sqrt{M/N}$: elle s'interprète donc comme la racine carrée de la fraction de particules détectées. Cette quantité f intervient non seulement dans la corrélation entre une particule et le vecteur flot, mais aussi dans la corrélation entre deux sous-événements et dans la résolution du plan de l'événement (nous renvoyons à [21] pour plus de détails). Ainsi, dans le cas où le flot elliptique est reconstruit à partir du flot dirigé, bien que la conservation de l'impulsion n'agisse pas sur $\langle \cos 2(\phi_1 - \phi_2) \rangle$, elle a son mot à dire à travers la résolution du plan de l'événement qui corrige la corrélation à deux particules observée, *cf.* Eq.(IV.12).

Ajoutons encore un mot à propos de l'ordre de grandeur de cet effet «nonflow» : il faut ajouter le terme dû à la conservation de l'impulsion dans (IV.12) [21]

$$\begin{aligned} \langle \cos(\psi - \Phi) \rangle &= v_1 \langle \cos \Delta\Phi \rangle + \langle \cos(\psi - \Phi) \rangle_{\Sigma \; p_T} \\ &\sim v_1 \chi - \frac{p_T}{\sqrt{N \langle p_T^2 \rangle}} f, \end{aligned} \tag{VI.26}$$

où nous avons approximé la résolution du plan de l'événement à $\chi = v_1 \sqrt{M}$ en utilisant (IV.14), et où nous avons utilisé Eq.(16) de [21]. L'ordre de grandeur de (VI.26) est

$$\langle \cos(\psi - \Phi) \rangle \sim \sqrt{M} \left(v_1^2 + \frac{1}{N} \right). \tag{VI.27}$$

Tout ceci pour dire que l'utilisation du vecteur flot ne dilue pas les effets «nonflow» à deux particules : dans (VI.27), nous avons exactement le même ordre de grandeur entre le terme

de flot et le terme «nonflow» que nous avions annoncé en (IV.24) et (IV.26), avec un facteur multiplicatif global égal à $\sqrt{M}$, qui se comprend par le fait que le vecteur flot a pour norme $\sqrt{M}$, puisqu'il peut s'interpréter comme une marche aléatoire de M pas.

VI.5 Conclusion

Nous avons vu que la conservation de l'impulsion produit un effet «nonflow» à deux particules qui influence uniquement le flot dirigé (mais également le flot elliptique si celui-ci est reconstruit à partir du flot dirigé intégré). L'effet est surtout important à grand p_T.

Sa prise en compte dans les données de NA49 modifie significativement le comportement du flot dirigé des pions et des protons à haut p_T. Plus précisément, il semblerait que le v_1 ait tendance à devenir positif à grand p_T mais le changement de signe ne se produit plus vers 650 MeV mais bien au-delà[3]. Quant au v_1 des protons, il change radicalement de signe et devient négatif alors qu'il est posé par convention positif dans la région de rapidité avant : il semblerait que la conservation de l'impulsion ne serait pas le seul effet «nonflow» à entrer en jeu dans le flot des protons.

Nous avons enfin vu que la correction de la conservation de l'impulsion transverse totale est en principe réalisable dans l'analyse de flot mais il se base essentiellement sur l'évaluation de $\left\langle \sum_j^N p_{T_j}^2 \right\rangle$, étape plus ou moins délicate suivant que le détecteur est plus ou moins parfait.

Le chapitre suivant sera consacré à la dernière corrélation «nonflow» que nous avons étudiée : l'influence de la désintégration de résonances sur l'analyse de flot.

[3] Nous présenterons les dernières analyses sur le v_1 des protons à 158 AGeV à la Section XII.8.2 et le changement de signe se confirme, au-delà de 1.1 GeV/c.

Chapitre VII

Désintégration de résonances

Sommaire

VII.1 Ordre de grandeur de la corrélation à deux particules 76
VII.2 Désintégration à deux corps 76
VII.2.1 Référentiel de repos de la résonance 76
VII.2.2 Transformation de Lorentz 77
VII.3 Application aux désintégrations des Δ et des ρ 77
VII.4 Correction du flot dirigé des protons de NA49 78
VII.5 Conclusion 79

La dernière corrélation «nonflow» que nous calculerons explicitement est celle produite par la désintégration d'une résonance en deux particules. Les seules désintégrations que nous considérerons sont les suivantes : $\rho \to \pi\pi$ et $\Delta \to p\pi$. En effet beaucoup de pions viennent de la désintégration des ρ et de nombreux nucléons sont excités en Δ lors de la collision. Contrairement aux corrélations de Bose-Einstein qui ne corrélaient que deux pions identiques, nous avons ici des corrélations pion–pion et proton–pion. Dans l'analyse de NA49 où les pions sont utilisés dans l'estimation du plan de l'événement, la désintégration des ρ (resp. des Δ) pollue le flot des pions (resp. des protons) ; si le plan de l'événement était calculé à partir des protons, seules les Δ seraient à prendre en compte pour le flot des pions. Nous mènerons le calcul dans le cas où nous avons une source isotrope de résonances.

VII.1 Ordre de grandeur de la corrélation à deux particules

La désintégration de ces résonances produit une anisotropie qui peut se voir dans les deux cas limites où la résonance est au repos et où elle a, au contraire, une impulsion transverse infinie. Dans le premier cas, les produits de résonances partent suivant une même direction mais en sens opposés : leur angle relatif vaut alors π et la corrélation à deux particules vaut -1 pour la première harmonique et $+1$ pour la seconde harmonique. Dans le cas où le p_T de la résonance est infinie, les produits de désintégration partent au contraire dans le même sens et leur angle relatif est nul : v_1 et v_2 valent dans ce cas tous les deux $+1$. La désintégration d'une résonance produit donc une corrélation azimutale à deux particules dont la valeur dépend du p_T de la résonance.

L'ordre de grandeur de cet effet «nonflow» est encore une fois en $1/N$: le calcul est le même que celui que nous avions mené pour mettre en évidence l'ordre de grandeur des effets «nonflow» dans les corrélations à deux particules, Eq.(IV.27) : si nous avons $N/2$ résonances de même p_T qui se désintégrent en deux particules, la corrélation azimutale entre les deux produits a pour ordre de grandeur $N/N(N-1) \sim 1/N$.

Dans la suite, nous présenterons d'abord le calcul général de la corrélation azimutale entre les deux produits de désintégration d'une résonance donnée puis nous l'appliquerons aux deux cas que nous considérons afin de corriger les données de NA49.

VII.2 Désintégration à deux corps

Soit R une résonance, de masse M et d'impulsion transverse P_T, qui se désintègre en deux produits P et Q. Leurs masses seront notées m_p et m_q, leurs impulsions dans le référentiel où la résonance est au repos $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, et l'angle azimutal de leurs impulsionsdans le référentiel du laboratoire ϕ_P et ϕ_Q respectivement. Nous cherchons à calculer le moment d'ordre 2 créé par cette désintégration $\left\langle \cos n(\phi_P - \phi_Q) \middle| P_T, y \right\rangle$ étant donné cette résonance. Nous ferons d'abord l'étude dans le référentiel où R est au repos, puis nous ferons une transformation de Lorentz pour nous placer dans le référentiel où son impulsion transverse vaut P_T.

VII.2.1 Référentiel de repos de la résonance

Nous choisissons le repère suivant : z correspond à l'axe de la collision et (x, y) deux axes perpendiculaires dans le plan transverse. La résonance étant au repos, son énergie se réduit à sa masse M. Nous avons évidemment $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$. Enfin la conservation de l'énergie donne facilement l'énergie des produits de désintégration

$$E_p = \frac{M^2 + m_p^2 - m_q^2}{2M} \qquad (VII.1a)$$

$$E_q = \frac{M^2 + m_q^2 - m_p^2}{2M}. \qquad (VII.1b)$$

La norme des impulsions est donnée par $p = q = \sqrt{E_p^2 - m_p^2}$. Il reste une indétermination sur la direction de désintégration. Nous repérons l'impulsion $\mathbf{p}$ par les deux angles sphériques θ et ϕ de telle sorte que

$$p_x = p \sin\theta \cos\phi \qquad (VII.2a)$$

$$p_y = p \sin\theta \sin\phi \qquad (VII.2b)$$

$$p_z = p \cos\theta \qquad (VII.2c)$$

Nous supposerons que la désintégration se fait de manière isotrope, *i.e.*, que $\cos\theta$ et ϕ ont des distributions plates (sur une sphère de rayon p, l'élément de surface en sphériques est $p^2\,\mathrm{d}\cos\theta\,\mathrm{d}\phi$).

VII.2.2 Transformation de Lorentz

Nous allons maintenant «booster» la résonance R suivant une direction quelconque dans le plan transverse. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que cette direction est l'axe x. Nous noterons P_T ($\equiv P_x$) l'impulsion transverse de R. Son énergie vaut $E = \sqrt{P_T^2 + M^2} = M_T$ où nous avons introduit la masse transverse de la résonance. Nous avons alors $\gamma = M_T/M$ et $\gamma\beta = P_T/M$. Sous le boost, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ se transforment comme suit

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma p_x + \gamma\beta E_P & (VII.3a)\\ p'_y &= p_y & (VII.3b)\\ p'_z &= p_z. & (VII.3c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'_x &= -\gamma p_x + \gamma\beta E_Q & (VII.3d)\\ q'_y &= -p_y & (VII.3e)\\ q'_z &= -p_z. & (VII.3f) \end{aligned}$$

Finalement les angles ϕ_P et ϕ_Q sont donnés par

$$\begin{aligned} \phi_P &= \mathrm{signe}(p'_x)\arccos\left(\frac{p'_x}{p'_T}\right) & (VII.4a)\\ \phi_Q &= \mathrm{signe}(q'_x)\arccos\left(\frac{q'_x}{q'_T}\right) & (VII.4b) \end{aligned}$$

où $p'_T = \sqrt{{p'_x}^2 + {p'_y}^2}$ et $q'_T = \sqrt{{q'_x}^2 + {q'_y}^2}$. En intégrant sur les angles ϕ et θ introduits dans (VII.2), nous obtenons $\left\langle \cos n(\phi_P - \phi_Q) \middle| P_T, y \right\rangle$ en fonction de l'impulsion transverse de la résonance, P_T.

VII.3 Application aux désintégrations des Δ et des ρ

Les Fig.VII.1 présentent $\left\langle \cos n(\phi_P - \phi_Q) \middle| P_T \right\rangle$ pour $n = 1$ et $n = 2$ résultant de la désintégration des Δ et des ρ respectivement. Nous avons présenté les corrélations en fonction de P_T (figures de gauche). Nous les avons également intégrées par rapport à P_T en utilisant la fonction de distribution à une particule (V.21) et représentées en fonction de la température T intervenant dans la distribution en P_T (figures de droite). Nous n'avons pas pris en compte la distribution en rapidité.

Si l'impulsion transverse de la résonance est nulle dans le référentiel du laboratoire, nous avons $p_x = -q_x$ et donc $\phi_P = -\phi_Q$. Les corrélations valent alors

$$\begin{aligned} \left\langle \cos(\phi_P - \phi_Q) \middle| P_T = 0 \right\rangle &= -1 & (VII.5a)\\ \left\langle \cos 2(\phi_P - \phi_Q) \middle| P_T = 0 \right\rangle &= 1 & (VII.5b) \end{aligned}$$

En revanche, si $P_T \gg 1$ dans le référentiel boosté, les impulsions de P et Q sont pratiquement colinéaires et les corrélations tendent vers 1

$$\left\langle \cos(\phi_P - \phi_Q) \middle| P_T = \infty \right\rangle \simeq \left\langle \cos 2(\phi_P - \phi_Q) \middle| P_T = \infty \right\rangle \simeq 1. \qquad (VII.6)$$

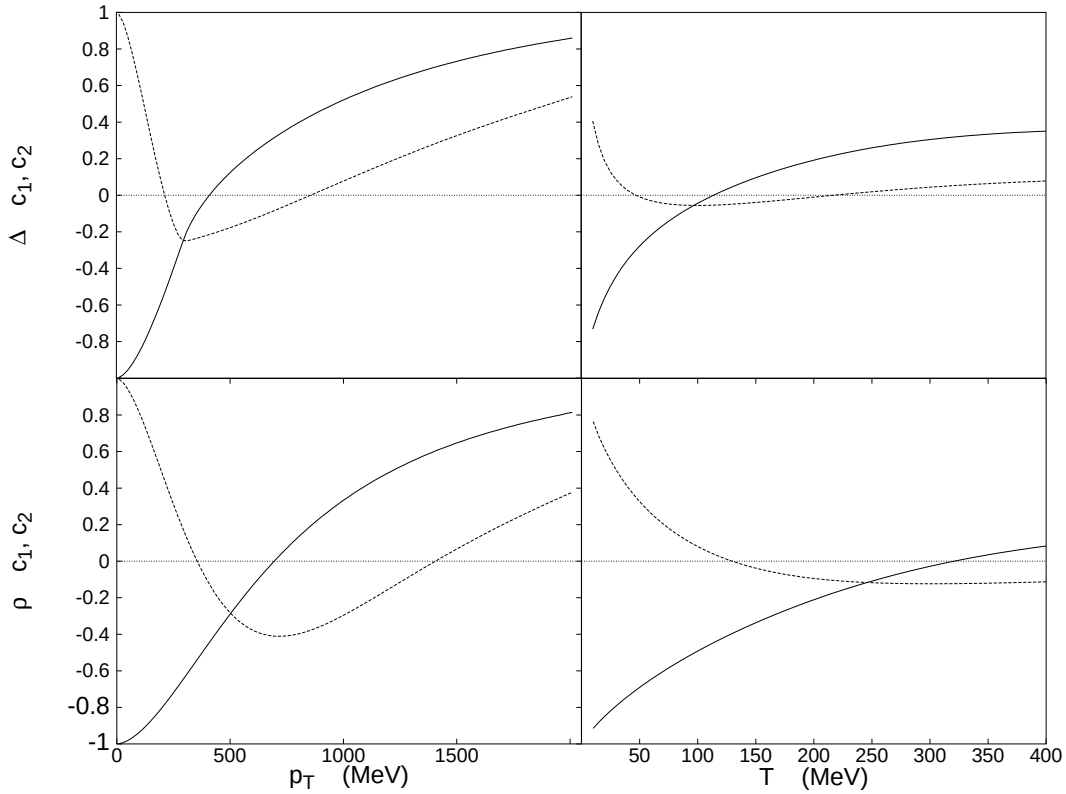


FIG. VII.1 – Valeurs moyennes de $\cos(\phi_p - \phi_\pi)$ (trait plein) et $\cos 2(\phi_p - \phi_\pi)$ (pointillés) en fonction de l'impulsion transverse (à gauche) et en fonction de la température (à droite) de la résonance. Désintégrations $\Delta \to p\pi$ en haut et $\rho \to \pi_1\pi_2$ en bas.

En admettant que la température des Δ est voisine de celle des protons, soit $T_\Delta \sim 300$ MeV, d'après la Fig.VII.1, la désintégration des Δ a un effet important sur le flot dirigé (de l'ordre de 0.3) mais son influence sur le flot elliptique est plutôt faible. Quant aux ρ, pour une température $T_\rho \sim 270$ MeV, la contribution de leur désintégration au flot est légèrement négative.

VII.4 Correction du flot dirigé des protons de NA49

Nous allons pour la dernière fois revenir sur les données de NA49 publiées en 1998 [8] et les corriger des effets de désintégration de résonances en soustrayant leur contribution du moment d'ordre 2 mesuré par NA49. Le plan de l'événement étant estimé à partir des pions, les désintégrations des ρ influeront sur le numérateur et le dénominateur de (IV.5). Nous notons toutefois que d'après la Fig.VII.1 à droite, l'effet est faible et nous le négligerons par la suite. Il nous reste donc la désintégration des Δ que nous devons soustraire du flot différentiel des protons. Cette fois-ci, la correction n'apparaît qu'au numérateur de (IV.5) car le dénominateur est obtenu en intégrant le moment d'ordre 2 sur deux pions, et non sur un pion et un proton.

Nous devons donc calculer la corrélation azimutale entre un pion et un proton, quels que soient ce pion et ce proton. Jusqu'à maintenant, nous avions calculé $\left\langle \cos n(\phi_p - \phi_\pi) \middle| P_T \right\rangle$, *i.e.*, nous nous étions donné un Δ d'impulsion P_T. En fait, nous devons multiplier cette dernière corrélation par la probabilité pour que ces deux particules proviennent effectivement d'un même Δ, afin d'obtenir la corrélation entre un pion et un proton quelconques. Cette probabilité dépend évidemment du modèle microscopique adopté. Nous allons en donner une

estimation grossière de façon à pouvoir corriger les données de NA49.

En nous basant sur les simulations du modèle UrQMD [26], nous supposerons que 50% des protons détectés proviennent des Δ. Nous devons aussi tenir compte du fait que NA49 ne détecte que les pions chargés. Or parmi les trois Δ qui se désintègrent en un proton et un pion, seuls deux produisent un pion chargé. Nous devons donc multiplier la corrélation par un facteur 2/3 supplémentaire. Enfin nous avons simulé la production de Δ ayant une distribution en masse de Breit-Wigner autour de $M = 1232$ MeV avec une largeur de $\Gamma = 111$ MeV, une distribution exponentielle en m_T [*cf.* Eq.(V.21)] avec la même température que les protons ($T = 300$ MeV) et enfin une distribution plate en y.

Sur la Fig.VII.1 en haut à droite, la corrélation azimutale pour $n = 1$ est positive et de l'ordre de 0.3, alors que l'effet pour $n = 2$ est pratiquement nul. Par conséquent nous ne corrigerons que le flot dirigé des protons. Souvenons-nous qu'après avoir soustrait la corrélation azimutale (négative) due à la conservation de l'impulsion transverse totale, nous avions obtenu un v_1 négatif pour les protons (*cf.* Fig.VI.1), ce qui était gênant car les pions ont également un flot dirigé négatif. Or la corrélation azimutale résultant de la désintégration des Δ étant positive, nous pouvons espérer renverser le signe de v_1, ce qui est effectivement le cas. La Fig.VII.2 présente les résultats de la simulation des Δ et de la corrélation azimutale entre les protons et les pions sur le flot dirigé des protons. La désintégration des Δ restaure bien un

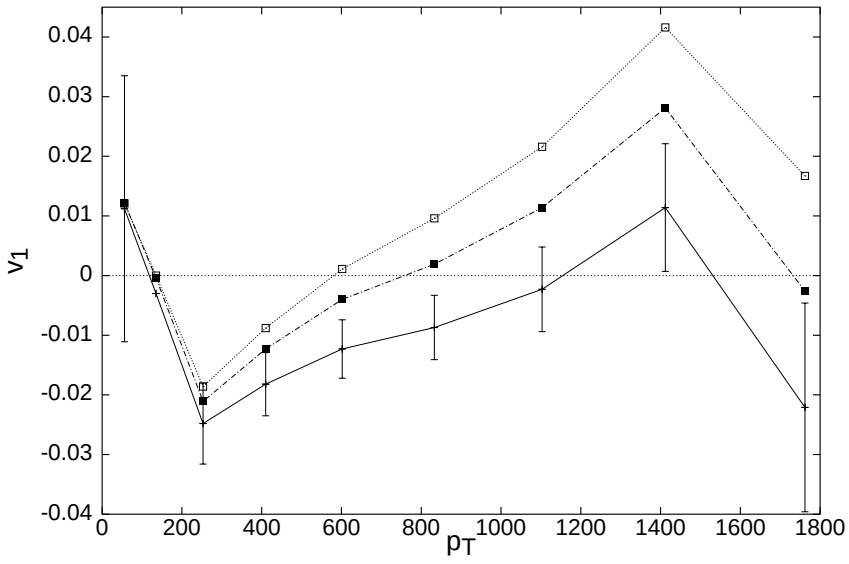


FIG. VII.2 – Flot dirigé des protons intégré sur $3 < y < 6$. Carrés blancs : données publiées par NA49 ; trait plein : données corrigées de la conservation de l'impulsion transverse totale ; carrés noirs, correction supplémentaire venant de la désintégration des Δ. Les barres d'erreur sont expérimentales [8].

signe positif pour le v_1 des protons.

VII.5 Conclusion

La dernière corrélation «nonflow» que nous avons calculée explicitement montre encore une fois que l'effet sur les données de NA49 n'est pas négligeable. La désintégration des ρ, contaminant le flot des pions, a une influence faible. En revanche, la désintégration des Δ a un effet sur le flot des protons surtout significatif à grand p_T, au point d'en changer de nouveau le signe, après la soustraction de la conservation de l'impulsion transverse totale.

Le calcul que nous avons mené dépend évidemment des modèles microscopiques adoptés et n'est pas aussi général que le calcul de la corrélation induite par la conservation de l'impulsion par exemple. Ici, nous avons montré qu'en utilisant un certain modèle, la soustraction des effets de désintégration de résonances peut modifier quantitativement le flot publié par NA49.

Dans le chapitre suivant, nous résumerons l'état de l'art en ce qui concerne la prise en compte des effets «nonflow» dans les corrélations azimutales à deux particules.

Chapitre VIII

La prise en compte des effets «nonflow» dans les analyses standard

Dans cette partie, nous avons présenté les méthodes standard, qui se basent sur la reconstruction du flot à partir du moment d'ordre 2, et nous avons mis en évidence leurs limitations dues à l'interférence de corrélations «nonflow» à deux particules :

$$\begin{aligned} \left(v_n^{\mathrm{std}}\right)^2 &\equiv v_n^2 + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_{\mathrm{nfl}}, \\ &= v_n^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \end{aligned} \tag{VIII.1}$$

où N est le nombre total de particules produites lors de la collision. La Table VIII.1 résume les caractéristiques des effets «nonflow» que nous avons étudiés. Nous avons explicitement vérifié que *toutes* ces corrélations «nonflow» varient avec N comme $1/N$.

Corrélation «nonflow»	Harmoniques concernées	Signe	Corrélation Pion–Pion	Corrélation Pion–Proton	Région en p_T, y
quantiques (HBT)	v_n $n \leq 10$	$+$	oui	non	bas p_T $\forall\ y$
$\Sigma\, p_T$	v_1	$-$	oui	oui	haut p_T $\forall\ y$
Désintégration des Δ	v_1 v_2 (mais $\simeq 0$)	$+$ $-$	non	oui	haut p_T
Desintégration des ρ	toutes (mais $\simeq 0$)	$-$	oui	non	haut p_T

Tab. VIII.1 – Différentes caractéristiques des corrélations dues aux effets HBT, à la conservation de l'impulsion transverse totale et à la désintégration des ρ et des Δ.

Pour corriger la corrélation à deux particules de tous les effets «nonflow», nous sommes partis des données publiées par NA49 en 1998 et nous avons d'abord reconstruit la corrélation à deux particules correspondante. Nous avons ensuite soustrait la contribution des corrélations «nonflow» ci-dessus. C'était la seule chose faisable à notre niveau concernant ces données. Pour bien faire, nous devrions disposer non seulement d'une liste exhaustive de ces dernières, mais également de modèles microscopiques pour pouvoir les calculer. Il est évident que le résultat que nous obtiendrions dépend du ou des modèles choisis. Citons d'ailleurs le calcul récent de

la contribution («nonflow») des mini-jets au flot elliptique [27]. Les auteurs ont calculé dans un modèle de saturation la corrélation à deux particules due à la production de minijets pour la seconde harmonique, qui d'ailleurs se comporte comme l'inverse du nombre de participants.

Pour éviter ces effets «nonflow», il faudrait en fait reprendre l'analyse à la base et travailler dès le départ sur la corrélation à deux particules, et non sur les données de flot publiés. Par exemple, nous avons vu que les effets HBT sont importants quand les particules corrélées ont des impulsions proches. Ainsi en corrélant des particules appartenant à des régions de rapidité bien distinctes, nous pouvons réduire l'effet de ces corrélations. Cependant, le fait de couper l'espace des phases a pour conséquence de diminuer le nombre de particules corrélées et donc d'augmenter les erreurs statistiques. Rappelons également que l'analyse de NA49 a été faite avec des poids unité. Or l'utilisation de poids adaptés à l'harmonique étudiée (*cf.* Section IV.2.4) permettrait d'améliorer fortement l'analyse et pourrait même éliminer certains effets «nonflow», comme celui dû à la conservation de l'impulsion. En effet, nous savons qu'il s'annule dans la région de rapidité centrale. Un poids symétrique par rapport à la rapidité centrale permettrait de soustraire automatiquement cet effet «nonflow».

Enfin, une manière d'obtenir les corrélations «nonflow» sans «faire» de calculs est d'étudier les corrélations à deux particules pour les collisions très centrales. En effet, le flot s'y annule par définition. Nous pouvons donc espérer évaluer les effets «nonflow» et les soustraire au moment d'ordre 2 lorsque l'on étudie de nouveau une collision non centrale. Seulement la centralité d'une collision n'est pas bien maîtrisée et nous ne sommes donc pas totalement sûrs de pouvoir éliminer tout le flot.

Finalement, continuer de travailler au niveau des corrélations à deux particules n'est sûrement pas la solution. Comment être sûr d'avoir éliminé toutes les corrélations «nonflow» à deux particules ? Nous avons proposé un moyen plus systématique qui élimine *automatiquement* les effets «nonflow» à deux (voire à plus) de particules. Cette technique fera l'objet de la partie suivante et y sera longuement développée.

Chapitre IX
Articles de la Partie B

Bibliographie

[1] J. Barrette *et al.* [E877 Collaboration], Phys. Rev. **C55** (1997) 1420 [nucl-ex/961006]; ibid. **59**, 884 (1999) [nucl-ex/9805006]; Phys. Lett. B **485**, 319 (2000) [nucl-ex/0004002]. Phys. Rev. C **63**, 014902 (2001) [nucl-ex/0007007].

[2] H. Liu *et al.* [E895 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **84**, 5488 (2000) [nucl-ex/0005005]; P. Chung *et al.* [E895 Collaboration], ibid. **85**, 940 (2000) [nucl-ex/0101003]; ibid. **86**, 2533 (2001) [nucl-ex/0101002].

[3] S. Wang *et al.*, Phys. Rev. C **44**, 1091 (1991).

[4] S. Voloshin et Y. Zhang, Z. Phys. C **70**, 665 (1996) [hep-ph/9407282].

[5] J. Y. Ollitrault, Nucl. Phys. A **638** (1998) 195C [arXiv :nucl-ex/9802005].

[6] A. M. Poskanzer et S. A. Voloshin, Phys. Rev. C **58**, 1671 (1998) [nucl-ex/9805001].

[7] J. Y. Ollitrault, arXiv :nucl-ex/9711003.

[8] H. Appelshäuser *et al.* [NA49 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **80**, 4136 (1998) [nucl-ex/9711001]. Nous avons utilisé les données révisées, accessibles sur la page internet de NA49, `http ://NA49info.cern.ch/na49/Archives/Images/Publications/Phys.Rev.Lett.80 :4136-4140,1998/` .

[9] B. Lenkeit *et al.* [CERES-Collaboration], Nucl. Phys. A **661** (1999) 23 [arXiv :nucl-ex/9910015].

[10] G. Goldhaber, S. Goldhaber, W. Y. Lee et A. Pars, Phys. Rev. **120** (1960) 300.

[11] R. Ganz [NA49 Collaboration], Nucl. Phys. A **661**, (1999) 448 [arXiv :nucl-ex/9909003].

[12] H. Appelshauser *et al.* [NA49 Collaboration], Eur. Phys. J. C **2**, (1998) 661 [arXiv :hep-ex/9711024].

[13] P. G. Jones *et al.* [NA49 Collaboration], Nucl. Phys. A **610**, (1996) 188c. [arXiv :hep-ex/9711024].

[14] A. M. Poskanzer, communication privée.

[15] P. M. Dinh, N. Borghini et J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. B **477**, (2000) 51 [arXiv :nucl-th/9912013].

[16] D. Cussol *et al.* [INDRA Collaboration], Phys. Rev. C **65**, 044604 (2002) [arXiv :nucl-ex/0111007].

[17] L. Ahle *et al.* [E802 Collaboration], Phys. Rev. C **57**, 1416 (1998).

[18] P. Danielewicz *et al.*, Phys. Rev. C **38**, 120 (1988).

[19] P. Jacobs (NA49 Collaboration), "Hadronic Spectra from Collisions of Heavy Nuclei", dans *Physics and Astrophysics of Quark–Gluon Plasma*, B. C. Sinha, D. K. Srivastava et Y. P. Viyogi Eds, Narosa Publishing House, New Delhi, 1998, p.248.

[20] J. Bachler *et al.* [NA49 Collaboration], Nucl. Phys. A **661** (1999) 45.

[21] N. Borghini, P. M. Dinh, J. Y. Ollitrault, A. M. Poskanzer and S. A. Voloshin, Phys. Rev. C **66**, 014901 (2002) [arXiv :nucl-th/0202013].

[22] A. Andronic *et al.* [FOPI Collaboration], Nucl. Phys. A **679**, 765 (2001) [arXiv :nucl-ex/0008007].

[23] C. Pinkenburg *et al.* [E895 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1295 [arXiv :nucl-ex/9903010] ;

[24] P. Chung *et al.* [E895 Collaboration], arXiv :nucl-ex/0112002.

[25] L. Simic et J. Milosevic, J. Phys. G **27** (2001) 183 [arXiv :nucl-th/0106037].

[26] S. A. Bass *et al.*, Prog. Part. Nucl. Phys. **41** (1998) 225 ; S. A. Bass et A. Dumitru, Phys. Rev. **C61** (2000) 064909.

[27] Y. V. Kovchegov et K. L. Tuchin, arXiv :hep-ph/0203213.

Partie C

Nouvelle méthode d'analyse : les cumulants des corrélations multiples

Dans la partie B, nous avons présenté les méthodes standard se basant sur la mesure des corrélations à deux particules. Nous avons montré leurs limitations dues à diverses sources de corrélations (dites «nonflow»). Nous pouvons nous affranchir de ces dernières en considérant des corrélations azimutales impliquant plus de deux particules (ou corrélations multiples). Plus exactement, nous effectuerons un développement des corrélations multiples en cumulants. Ces derniers présentent deux avantages. Le premier est que la soustraction de certaines corrélations «nonflow» est faite automatiquement dans les cumulants. Par exemple, en utilisant le cumulant d'ordre 3 ou 4, les corrélations «nonflow» à deux particules sont naturellement éliminées : le flot n'est contaminé que par les corrélations «nonflow» à trois ou quatre particules, qui sont de plusieurs ordres de grandeur plus faibles. Le deuxième avantage est que les imperfections du détecteur, produisant des anisotropies azimutales, sont également automatiquement soustraites.

Cette partie s'articulera de la façon suivante : nous exposerons dans un premier chapitre le principe de notre nouvelle méthode et notamment la notion de développement en cumulants. Puis nous présenterons la technique des fonctions génératrices qui est un moyen élégant et pratique de calculer les cumulants à tous les ordres. Nous ferons le parallèle entre deux méthodes similaires que nous avons proposées, l'une se basant sur les corrélations du vecteur flot [1] et l'autre utilisant directement les corrélations multiples [2, 3]. Enfin j'ai moi-même appliqué notre méthode aux données de 1996 et de 2000 pour la collaboration NA49, et nous présenterons les résultats correspondants. Cette nouvelle méthode d'analyse a également été implémentée dans la collaboration STAR par A. Tang et, quand cela sera possible, ses résultats seront également présentés. Tout ceci est valable pour le flot intégré, auquel nous consacrerons le deuxième chapitre, et pour le flot différentiel, présenté dans le dernier chapitre de cette partie.

Chapitre X

Principe de la méthode

Sommaire

X.1 Décomposition dans le repère du plan de réaction 110
X.1.1 Décomposition des fonctions de distribution : ordres de grandeur . . 110
X.1.2 Corrélations azimutales multiples 112
X.1.3 Quelques exemples 114
X.2 Décomposition dans le repère du laboratoire : notion de cumulant 117
X.3 Cas d'un détecteur parfait : soustraction des effets «nonflow» . 118
X.3.1 Cumulant d'ordre 2 118
X.3.2 Cumulant d'ordre 4 118
X.3.3 Cumulant mixte d'ordre 3 121
X.3.4 Cumulants d'ordre supérieur ; progrès et limitations 121
X.3.5 Conclusion 123
X.4 Cas d'un détecteur imparfait : soustraction des corrélations non physiques 123
X.4.1 Effets de l'acceptance du détecteur 124
X.4.2 Cumulant d'ordre 2 125
X.4.3 Cumulants d'ordre supérieur 126
X.5 Flot intégré 127
X.5.1 Cumulants d'ordre pair 127
X.5.2 Cumulant mixte d'ordre 3 128
X.5.3 Erreurs statistiques et systématiques 129
X.6 Flot différentiel 130
X.6.1 Cas d'une seule harmonique 131
X.6.2 Cumulants mixtes d'ordre 3 132
X.6.3 Erreurs statistiques 133
X.6.4 Quel ordre utiliser pour le flot intégré ? 134
X.7 Conclusion 134

La limitation de la méthode standard venait de la présence dans la corrélation à deux particules de la corrélation «nonflow» qui ne pouvait pas être négligée par rapport à la corrélation due au flot. Notre idée est de séparer systématiquement les deux contributions en étudiant les corrélations impliquant plus de deux particules.

Le but de ce chapitre est d'introduire le principe de cette méthode, dont la mise en œuvre pratique sera exposée dans les deux chapitres suivants. Dans une première section, nous effectuerons un développement des fonctions de distribution en parties connexes dans le repère du plan de réaction. Ce développement nous permettra d'identifier les différentes contributions

(flot et «nonflow») aux corrélations multiples et leurs ordres de grandeur respectifs. Dans les sections suivantes, nous nous placerons dans le repère du laboratoire, qui est le repère d'étude en pratique, et nous définirons les cumulants des corrélations azimutales multiples. Nous montrerons qu'ils permettent d'éliminer ordre par ordre les corrélations «nonflow» (Section X.3) ainsi que les anisotropies azimutales liées aux imperfections du détecteur (Section X.4). Enfin nous montrerons comment nous pouvons en déduire le flot intégré et le flot différentiel. Nous verrons notamment que ces méthodes permettent de mesurer des valeurs de v_n plus faibles, jusqu'à l'ordre $1/N$ (où N est le nombre total de particules émises), alors que les méthodes standard ne permettent pas de descendre en-dessous de $1/\sqrt{N}$. Cette valeur d'ordre $1/N$ constitue en fait une limite absolue en dessous de laquelle nous n'arriverons jamais à reconstruire le flot[1].

X.1 Décomposition dans le repère du plan de réaction

Dans tout ce chapitre, nous considérerons des collisions ayant le même paramètre d'impact $\mathbf{b}$: les moyennes statistiques seront donc prises à $\mathbf{b}$ fixé. En outre, nous choisissons un repère où la direction du plan de réaction est l'axe des x, comme à la Section IV.3.1. L'intérêt de ce choix est que tous les événements ont exactement les mêmes caractéristiques macroscopiques (norme et direction du paramètre d'impact) et ne diffèrent les uns par rapport aux autres que par des fluctuations à l'échelle microscopique. Les moyennes sur les événements seront ainsi des moyennes d'ensemble auxquelles nous pourrons appliquer des théorèmes généraux de physique statistique.

Tous les angles qui apparaissent dans cette section sont des angles mesurés *par rapport au plan de réaction*. Autrement dit, nous posons $\Phi_R = 0$. La fonction $f(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k)$ désigne la distribution de probabilité de $\mathbf{p}_1$,...,$\mathbf{p}_k$, où $\mathbf{p}_i$ est l'impulsion de la particule i, dite «fonction de distribution à k particules». Le but de cette section est de présenter la décomposition des fonctions de distribution multiples en parties connexes de façon à mettre en évidence leurs ordres de grandeur. Cette décomposition est analogue au développement en cumulants dans la théorie des gaz réels [4] et dans la théorie des probabilités [5].

X.1.1 Décomposition des fonctions de distribution : ordres de grandeur

Nous avons vu à la Section IV.3.1 que, dans ce repère, le flot est contenu dans la fonction de distribution à une particule $f(\mathbf{p})$, *cf.* Eq.(IV.21). De plus, nous avons décomposé la fonction de distribution à deux particules sous la forme

$$f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) + f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2). \tag{X.1}$$

Le premier terme contient la corrélation de chacune des particules au plan de réaction. Quant au deuxième terme, il représente la distribution connexe à deux particules et correspond à des effets «nonflow». C'est grâce à cette décomposition que nous avons pu non seulement mettre en évidence les limitations de la méthode standard mais également soustraire les corrélations «nonflow» des corrélations à deux particules.

Nous allons maintenant généraliser la décomposition en parties connexes à un système de N particules.

Pour la fonction de distribution à une particule, nous posons

$$f(\mathbf{p}_1) \equiv f_c(\mathbf{p}_1). \tag{X.2}$$

Les fonctions de distribution étant normalisées à 1, $f(\mathbf{p}_1)$ ne dépend pas de N. En ce sens, nous dirons qu'elle est d'ordre $\mathcal{O}(1)$.

[1] Pour $N = 2500$, nous obtiendrions une valeur de flot très faible : $v_n = 0.04\%$!

a Fonction de distribution connexe à deux particules

La décomposition de $f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ a été rappelée en (X.1). Alors que le terme factorisé est d'ordre 1, la partie connexe est supprimée d'un facteur N. En effet, la probabilité pour que deux particules prises au hasard soient effectivement corrélées est d'ordre $1/N$. Nous avions présenté à la Section IV.3.1 l'exemple simple d'une source de particules émises uniquement par paires colinéaires, nous avions calculé explicitement cette probabilité qui valait $1/(N-1)$. Nous écrivons donc que

$$f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \equiv f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{X.3}$$

b Fonction de distribution connexe à trois particules

Considérons maintenant trois particules et décomposons de manière analogue la fonction de distribution correspondante :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) =& f_c(\mathbf{p}_1) f_c(\mathbf{p}_2) f_c(\mathbf{p}_3) \\ &+ f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) f_c(\mathbf{p}_3) + f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) f_c(\mathbf{p}_2) + f_c(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) f_c(\mathbf{p}_1) \\ &+ f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3). \end{aligned} \tag{X.4}$$

Le premier terme dans le membre de droite est le terme non corrélé. Les trois suivants correspondent au cas où seulement deux particules sont corrélées entre elles. Enfin le dernier terme est la fonction de distribution connexe à trois particules. Dans un système où les particules ne sont corrélées que deux à deux, cette dernière est nulle.

Pour établir l'ordre de grandeur des différents termes, considérons l'exemple d'une source isotrope de ω. Ces derniers se désintègrent suivant $\omega \to \pi\pi\pi$. Cette désintégration génère des corrélations à deux particules (par la conservation de l'impulsion et de l'énergie). Le terme $f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) f_c(\mathbf{p}_3)$ correspond en fait à la probabilité pour que deux pions π_1 et π_2 proviennent de la désintégration d'un même ω mais le troisième pion π_3 est issu de la désintégration d'un autre ω. L'ordre de grandeur d'un tel terme est $\mathcal{O}(1/N)$, d'après (X.3).

Cette désintégration génère également une vraie corrélation à trois particules (évidemment !). La probabilité pour que trois pions pris au hasard proviennent d'un même ω est $2/[(N-1)(N-2)]$. Ainsi, la fonction de distribution connexe à trois particules est de nouveau supprimée d'un facteur N par rapport aux termes connexes à deux particules :

$$f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \underbrace{\mathcal{O}(1)}_{\substack{\text{non} \\ \text{corrélée}}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)}_{\substack{\text{connexe} \\ \text{à 2 part.}}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)}_{\substack{\text{connexe} \\ \text{à 3 part.}}}.$$

En utilisant les décompositions (X.3) et (X.4), nous pouvons exprimer la partie connexe à trois particules en fonction des distributions à 1, 2 et 3 particules :

$$\begin{aligned} f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \equiv& f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \\ &- f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) - f(\mathbf{p}_2) f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) - f(\mathbf{p}_3) f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ &+ 2 f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) f(\mathbf{p}_3) \\ =& \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned} \tag{X.5}$$

Ainsi, alors que la fonction de distribution à trois particules est d'ordre 1 et contient à la fois des corrélations à deux et à trois particules, la fonction connexe à trois particules correspond uniquement aux vraies corrélations à trois particules et est d'un ordre $1/N^2$ plus faible.

c Fonctions connexes d'ordre supérieur

Plus généralement, la fonction de distribution *connexe* d'ordre k correspond uniquement aux corrélations à k particules et se comporte comme N^{1-k}, alors que la fonction de distribution à k particules est d'ordre 1 et contient toutes les distributions connexes impliquant k' particules où $k' \leq k$. L'expression de la distribution connexe d'ordre k peut être obtenue en inversant ordre par ordre les distributions d'ordre $k' \leq k$, comme nous l'avons fait pour la distribution connexe à trois particules (X.5).

X.1.2 Corrélations azimutales multiples

La décomposition des fonctions de distribution en parties connexes va nous servir à décomposer de même les corrélations azimutales en parties connexes dont nous connaîtrons l'ordre de grandeur. Nous définirons d'abord ce que nous entendons exactement par corrélations multiples puis nous donnerons les ordres de grandeur des corrélations connexes. Enfin nous introduirons une représentation diagrammatique de ces corrélations.

a Définitions

Considérons la fonction de distribution à $(k+l)$ particules. La corrélation azimutale correspondante est définie par

$$\left\langle e^{in(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{k+l})}\right\rangle = \frac{\iint e^{in(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{k+l})} f(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{k+l})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\ldots\mathrm{d}^3\mathbf{p}_{k+l}}{\iint f(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{k+l})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\ldots\mathrm{d}^3\mathbf{p}_{k+l}}. \tag{X.6}$$

Nous la désignerons parfois par le terme de moment d'ordre $k+l$. A partir de la fonction de distribution connexe à $k+l$ particules, la corrélation azimutale connexe d'ordre $k+l$ s'écrit

$$\left\langle e^{in(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{k+l})}\right\rangle_c = \frac{\iint e^{in(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{k+l})} f_c(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{k+l})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\ldots\mathrm{d}^3\mathbf{p}_{k+l}}{\iint f(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{k+l})\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\ldots\mathrm{d}^3\mathbf{p}_{k+l}}. \tag{X.7}$$

Dans cette section, nous poserons $n = 1$ afin d'alléger nos notations. Pour généraliser à un n quelconque, il suffit de multiplier tous les angles par n.

b Ordres de grandeur des corrélations connexes

Les corrélations connexes définies en (X.7) correspondent aux sources de corrélation autres que le flot et désignent donc les corrélations «nonflow». De manière générale, une corrélation connexe à k particules varie avec N comme N^{1-k}. Nous verrons explicitement quelques exemples à la Section X.1.3.

D'autre part, les systèmes étudiés sont proches de l'isotropie puisque le flot, déviation par rapport à cette isotropie, est en pratique petit (de l'ordre de quelques %). Ainsi nous distinguerons les corrélations «isotropes» , *i.e.*, qui ne font intervenir que des angles relatifs et qui subsistent pour un système rigoureusement isotrope, des corrélations «anisotropes», beaucoup plus faibles pour un nombre de particules donné. Plus précisément, considérons la

corrélation connexe à $(k+l)$ particules, $\left\langle e^{in(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{k+l})}\right\rangle_c$ où nous avons k facteurs $e^{+i\phi_j}$ et l facteurs $e^{-i\phi_j}$. Sous la transformation $\phi \to \phi+\alpha$, nous avons

$$e^{i(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{k+l})} \quad \longrightarrow \quad e^{i(k-l)\alpha}\, e^{i(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{k+l})}. \tag{X.8}$$

Si la source est isotrope, la moyenne sur α donne une corrélation connexe nulle lorsque $k \neq l$. En présence de flot (qui décrit justement l'anisotropie de la source), elle n'est plus nulle. Il est donc naturel de la considérer comme proportionnelle au flot lui-même. Plus précisément, à cause du facteur $e^{i(k-l)\alpha}$ qui apparaît dans (X.8), nous supposerons que la corrélation connexe à $(k+l)$ particules est linéaire en v_{k-l}. De plus, étant une corrélation connexe, elle a pour ordre de grandeur est $1/N^{k+l-1}$. Finalement nous avons l'ordre de grandeur suivant pour la corrélation connexe à $(k+l)$ particules

$$\left\langle e^{i(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{k+l})}\right\rangle_c = \mathcal{O}\left(\frac{v_{k-l}}{N^{k+l-1}}\right). \tag{X.9}$$

Ces termes font intervenir à la fois le flot et les corrélations «nonflow» et nous les qualifierons de «termes d'interférence». Nous les retrouverons par la suite et nous verrons à la Section X.3.4 qu'ils limitent la précision de notre méthode.

Nous considérerons également des corrélations mixtes faisant intervenir plusieurs harmoniques à la fois, telles que $\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle_c$ ou $\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2)}\right\rangle_c$. En raisonnant de la même manière que précédemment, l'ordre de grandeur de ces corrélations s'écrit

$$\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle_c = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{X.10}$$

$$\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2)}\right\rangle_c = \mathcal{O}\left(\frac{v_1}{N}\right). \tag{X.11}$$

c Représentation diagrammatique

Enfin nous introduisons une représentation diagrammatique des corrélations, illustrée à la Fig.X.1 sur l'exemple de la corrélation $\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$ et de la corrélation connexe correspondante. Les particules à gauche (resp. à droite) de la barre verticale apparaissent sous forme de facteur $e^{i\phi_j}$ (resp. $e^{-i\phi_j}$) dans la corrélation azimutale. Les parties encerclées représentent les corrélations connexes. Dans cette représentation diagrammatique, les corrélations isotropes



FIG. X.1 – Représentation diagrammatique de la corrélation $\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$ (à gauche) et de la corrélation connexe $\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3)}\right\rangle_c$ (à droite).

sont celles qui font intervenir autant de points à gauche et à droite de la barre verticale.

Comme la fonction de distribution à une particule se réduit à sa partie connexe, Eq.(X.2), lorsqu'une seule particule est encerclée, la corrélation correspondante est la corrélation de cette particule au plan de réaction, à savoir le flot lui-même :

$$\left\langle e^{\pm i\phi_1}\right\rangle = \left\langle e^{\pm i\phi_1}\right\rangle_c = v_1(1). \tag{X.12}$$

Diagrammatiquement, le flot apparaîtra par des cercles bleus, correspondant aux termes qui nous intéressent.

Dans le cas de corrélations mélangeant plusieurs harmoniques, nous n'avons pas de représentation diagrammatique très satisfaisante. Pour préserver la règle exposée ci-dessus permettant d'identifier les corrélations isotropes, nous représentons un facteur $e^{im\phi_j}$ par m points étiquetés par l'indice j et entourés par des pointillés afin de garder à l'esprit que ces m points ne sont qu'une seule et même particule et qu'ils sont donc inséparables. La Fig.X.2 présente l'exemple de la corrélation $\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$.

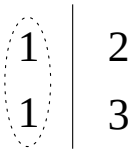


FIG. X.2 – Représentation diagrammatique de la corrélation $\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$ où la particule 1 apparaît deux fois, sous forme connectée.

Pour éviter de multiplier les exemples, nous nous intéresserons dans la section suivante à trois corrélations particulières, à savoir $\left\langle e^{i(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle$, $\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$ et $\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle$. Elles nous serviront dans l'analyse de flot puisqu'elles ne font intervenir que des angles relatifs entre les particules émises et qu'elles sont donc indépendantes du plan de réaction Φ_R.

X.1.3 Quelques exemples

a Corrélations à deux particules

En utilisant (X.1), nous avons la décomposition de la corrélation à deux particules (que nous avions déjà maintes fois écrite auparavant)

$$\begin{aligned}\left\langle e^{i(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle &= \left\langle e^{i\phi_1}\right\rangle_c \left\langle e^{-i\phi_2}\right\rangle_c + \left\langle e^{i(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle_c \\ &= v_1(1)\, v_1(2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),\end{aligned} \tag{X.13}$$

La Fig.X.3 représente sa décomposition diagrammatique.



FIG. X.3 – Décomposition diagrammatique de la corrélation $\left\langle e^{i(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle$ dans le repère du plan de réaction, en un terme de flot (en bleu) et en un terme connexe (en rouge).

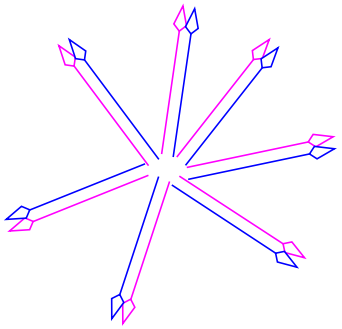


FIG. X.4 – Particules émises aléatoirement par paires colinéaires.

Reprenons l'exemple qui nous avait servi à calculer l'ordre de grandeur de la corrélation connexe à deux particules à la Section IV.3.1, illustré à la Fig.X.4 : nous avions considéré un système de N particules émises aléatoirement uniquement par paires colinéaires. Les avantages de cet exemple sont d'abord qu'il n'y a pas de flot et la corrélation se réduit donc à sa partie connexe. Ensuite l'exponentielle complexe donne toujours 1 et la corrélation se réduit ainsi à un calcul combinatoire. Nous avions trouvé [*cf.* Eq.(IV.27)]

$$\left\langle e^{i(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle = \frac{N}{N(N-1)} = \frac{1}{N-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{X.14}$$

b Corrélation mixte à trois particules

Considérons maintenant la corrélation $\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$. Sa décomposition diagrammatique est représentée à la Fig.X.5.

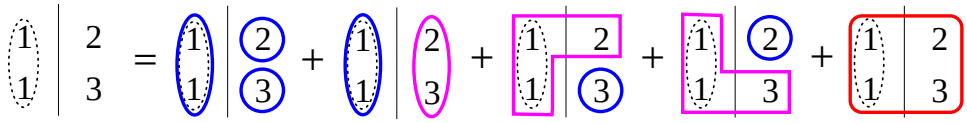


FIG. X.5 – Décomposition diagrammatique en termes connexes de la corrélation $\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$ dans le repère du plan de réaction. Les termes de flot pur sont représentés en bleu, les termes d'interférence en magenta et le terme connexe isotrope en rouge.

Mathématiquement, elle s'écrit

$$\begin{aligned}\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle = &\left\langle e^{2i\phi_1}\right\rangle_c \left\langle e^{-i\phi_2)}\right\rangle_c \left\langle e^{-i\phi_3}\right\rangle_c \\ &+ \left\langle e^{2i\phi_1}\right\rangle_c \left\langle e^{-i(\phi_2+\phi_3)}\right\rangle_c \\ &+ \left\langle e^{-i\phi_3}\right\rangle_c \left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2)}\right\rangle_c + \left\langle e^{-i\phi_2}\right\rangle_c \left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_3)}\right\rangle_c \\ &+ \left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle_c .\end{aligned} \tag{X.15}$$

Grâce à (X.9), son ordre de grandeur est

$$\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle = v_2(1)\, v_1(2)\, v_1(3) + \mathcal{O}\left(\frac{v_2^2}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{v_1^2}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{X.16}$$

Nous qualifierons ce type de corrélation par le terme «mixte» car, à la différence de la corrélation à deux (ou à quatre) particules, cette corrélation à trois particules mélange deux harmoniques, v_1 et v_2. Nous reviendrons sur les avantages d'une telle corrélation.

Nous remarquons que, outre le terme de flot en $v_2\, v_1^2$ (qui nous intéresse) et le terme connexe à trois particules d'ordre $\mathcal{O}(N^{-2})$, nous avons des termes d'interférence d'ordre $\mathcal{O}({v_2}^2/N)$ et $\mathcal{O}(v_1^2/N)$, qui mélangent le flot et les corrélations «nonflow».

Dans l'exemple du système émettant des paires colinéaires de particules, la corrélation à trois particules est évidemment nulle : il n'y a pas de corrélation connexe à trois particules et les termes de flot sont tous nuls.

c Corrélation à quatre particules

Passons maintenant à la corrélation à quatre particules et, au vu de la décomposition en termes connexes de la corrélation à trois particules, nous nous doutons que celle à quatre particules va comporter de nombreux termes. En effet, la Fig.X.6 en témoigne ! Mathémati-

quement, la corrélation à quatre particules s'écrit

$$\begin{aligned}\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle = {} & v_1(1)\,v_1(2)\,v_1(3)\,v_1(4)\\ & + \left[v_1(2)\,v_1(4)\left\langle e^{i(\phi_1-\phi_3)}\right\rangle_c + \{3\leftrightarrow 4\} + \{1\leftrightarrow 2\} + \left\{\begin{array}{c}1\leftrightarrow 2\\3\leftrightarrow 4\end{array}\right\}\right]\\ & + \left[v_1(3)\,v_1(4)\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2)}\right\rangle_c + \left\{\begin{array}{c}1\leftrightarrow 3\\2\leftrightarrow 4\end{array}\right\}\right]\\ & + \left\langle e^{i(\phi_1-\phi_3)}\right\rangle_c\left\langle e^{i(\phi_2-\phi_4)}\right\rangle_c + \left\langle e^{i(\phi_1-\phi_4)}\right\rangle_c\left\langle e^{i(\phi_2-\phi_3)}\right\rangle_c\\ & + \left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2)}\right\rangle_c\left\langle e^{-i(\phi_3+\phi_4)}\right\rangle_c\\ & + \left[v_1(4)\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3)}\right\rangle_c + \{3\leftrightarrow 4\} + \{1\leftrightarrow 3\} + \{2\leftrightarrow 4\}\right]\\ & + \left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle_c .\end{aligned} \tag{X.17}$$

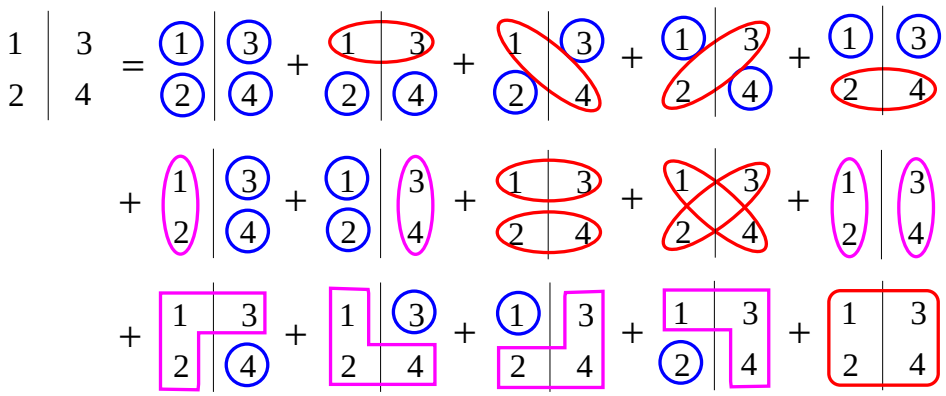


FIG. X.6 – Décomposition diagrammatique en termes connexes de la corrélation à quatre particules $\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle$ dans le repère du plan de réaction. Les termes de flot pur sont en bleu, les termes d'interférence en magenta et les termes connexes isotropes (à deux et quatre particules) en rouge.

Dans cette décomposition, le premier terme est entièrement dû au flot. Les huitième et neuvième termes sont des corrélations connexes isotropes à deux particules, d'ordre $1/N$. De même, le dernier terme correspond à la corrélation connexe isotrope à quatre particules et est d'ordre $1/N^3$. Ces corrélations sont uniquement dues aux effets «nonflow». Enfin les termes restants sont des interférences entre le flot et les corrélations «nonflow». En utilisant l'ordre de grandeur (X.9) des corrélations connexes, nous pouvons écrire l'ordre de grandeur de chacun des termes dans le moment d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle = {} & v_1(1)\,v_1(2)\,v_1(3)\,v_1(4) + \mathcal{O}\left(\frac{v_1^2}{N}\right)\\ & + \mathcal{O}\left(\frac{v_1^2\,v_2}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{v_2^2}{N^2}\right)\\ & + \mathcal{O}\left(\frac{v_1^2}{N^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right).\end{aligned} \tag{X.18}$$

En ne gardant que les termes dominants dans la limite où $v_1, v_2 \ll 1$ et $N \gg 1$, l'interférence avec v_2 est sous-dominante car ${v_1}^2 v_2/N \ll {v_1}^2/N$ et ${v_2}^2/N^2 \ll 1/N^2$. L'ordre de grandeur

de la corrélation à quatre particules est donc

$$\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle = v_1(1)\,v_1(2)\,v_1(3)\,v_1(4) + \mathcal{O}\left(\frac{{v_1}^2}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \qquad \text{(X.19)}$$

Dans le cas d'une source isotrope, seul demeure le dernier terme en $1/N^2$. Nous pouvons retrouver cet ordre de grandeur sur notre exemple de système produisant N particules par paires colinéaires (*cf.* Fig.X.4) : parmi les $N(N-1)(N-2)(N-3)$ quadruplets possibles, nous avons $2N(N-2)$ quadruplets corrélés. De plus, les termes de flot sont nuls. La corrélation à quatre particules vaut donc

$$\left\langle e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle = \frac{2N(N-2)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} = \frac{1}{(N-1)(N-3)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \qquad \text{(X.20)}$$

Dans le cas d'une collision Pb–Pb au SPS, tous les termes dans la corrélation (X.19) sont du même ordre de grandeur. Avec $v \sim 3\%$ et $N \sim 2500$, ils sont de l'ordre de 10^{-7}.

X.2 Décomposition dans le repère du laboratoire : notion de cumulant

Dans la section précédente, nous avons décomposé en parties connexes les fonctions de distribution des particules *émises*, *i.e.*, les distributions par rapport au repère du plan de réaction. Or ce repère n'est pas accessible expérimentalement puisque nous ne connaissons pas la direction Φ_R du plan de réaction. En pratique, nous devons travailler dans le repère du laboratoire, avec des particules *détectées*. L'angle ϕ désignera dorénavant l'azimut mesuré dans le repère du laboratoire et l'angle ϕ apparaissant dans la Section X.1 sera désormais noté $\phi - \Phi_R$.

Une moyenne sur les événements peut se calculer en deux temps : nous effectuons d'abord une moyenne à Φ_R fixé, que nous noterons $\langle \ldots | \Phi_R \rangle$. Par exemple, la corrélation à $(k+l)$ particules s'écrit[2]

$$\left\langle e^{in(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{k+l})}\middle|\Phi_R\right\rangle = \left\langle e^{in[(\phi_1-\Phi_R)+\ldots+(\phi_k-\Phi_R)-(\phi_{k+1}-\Phi_R)-\ldots-(\phi_{k+l}-\Phi_R)]}\right\rangle e^{in(k-l)\Phi_R}. \qquad \text{(X.21)}$$

La deuxième étape consiste à moyenner sur Φ_R dont la distribution de probabilité sera toujours supposée uniforme. Dans le cas d'un détecteur parfait, les seules corrélations non nulles seront alors les corrélations isotropes où $k = l$, ces dernières ne faisant intervenir que des angles relatifs et étant donc indépendantes de Φ_R. En pratique, les termes avec $k \neq l$ ne traduisent que les imperfections du détecteur.

Nous décomposerons les corrélations azimutales, mesurées dans le repère du laboratoire, de la même façon qu'à la Section X.1. Nous utiliserons toutefois la notation $\langle\langle \ldots \rangle\rangle$ pour les corrélations connexes dans ce repère. Ainsi nous écrirons [*cf.* Eq.(X.12) et (X.13)]

$$\left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle \equiv \left\langle\left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\right\rangle, \qquad \text{(X.22)}$$

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle \equiv \left\langle\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\right\rangle\left\langle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle\right\rangle, \qquad \text{(X.23)}$$

etc.

Il faut cependant bien noter la différence entre la corrélation connexe dans le repère du plan de réaction, $\langle \ldots \rangle_c$, et celle dans le repère du laboratoire, $\langle\langle \ldots \rangle\rangle$. Par exemple, la corrélation

[2] Nous écrivons de nouveau l'indice n dans l'expression des corrélations et dans les v_n.

à une particule $\left\langle e^{in(\phi-\Phi_R)}\right\rangle_c$ correspondait au flot v_n alors que $\left\langle\!\left\langle e^{in\phi}\right\rangle\!\right\rangle$ ne traduit que les imperfections du détecteur et ne correspond pas à une corrélation d'origine physique.

Dans la suite, nous montrerons que la décomposition en cumulants permet de s'affranchir d'une part des corrélations «nonflow»(Section X.3) et d'autre part des imperfections du détecteur (Section X.4).

Nous mènerons cette discussion sur les trois corrélations que nous avons étudiées dans la Section X.1.2, à savoir $\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle$, $\left\langle e^{in(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$ et $\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle$.

X.3 Cas d'un détecteur parfait : soustraction des effets «nonflow»

Dans cette section, nous considérons le détecteur comme parfait. Les seuls cumulants qui apparaîtront seront donc les cumulants isotropes.

X.3.1 Cumulant d'ordre 2

Commençons par la corrélation à deux particules, $\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle$. Pour un détecteur parfait, Eq.(X.23) devient

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle \equiv \left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle . \tag{X.24}$$

En utilisant la décomposition (X.13) du moment d'ordre 2, l'ordre de grandeur du cumulant d'ordre 2 est

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle = v_n(1)\, v_n(2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) , \tag{X.25}$$

Le premier terme est dû au flot alors que le second correspond aux autres corrélations physiques, celles que nous avons appelées «nonflow». Cette décomposition est représentée diagrammatiquement à la Fig.X.7. Pour l'instant, la notion et l'utilité du cumulant à l'ordre 2

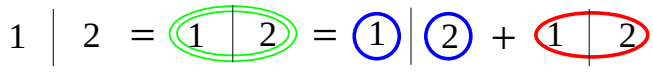


FIG. X.7 – Décomposition diagrammatique du moment d'ordre 2 qui se réduit au cumulant d'ordre 2, *cf.* Fig.X.3.

semblent superflues. Cependant, sur la corrélation à quatre particules, l'avantage des cumulants va apparaître naturellement.

X.3.2 Cumulant d'ordre 4

a Définition

Nous pouvons reprendre la décomposition de la corrélation à quatre particules représentée à la Fig.X.6, en remplaçant les corrélations connexes $\langle\ldots\rangle_c$ par $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$. Pour un détecteur parfait, tous les termes non isotropes sont nuls : la décomposition s'en trouve grandement

simplifiée (*cf.* Fig.X.8) !

$$\begin{aligned}\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle &= \left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_3)}\right\rangle\!\right\rangle \left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_2-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle + \left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle \left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\right\rangle \\ &\quad + \left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle \\ &= \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_3)}\right\rangle \left\langle e^{in(\phi_2-\phi_4)}\right\rangle + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_4)}\right\rangle \left\langle e^{in(\phi_2-\phi_3)}\right\rangle \\ &\quad + \left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle .\end{aligned} \tag{X.26}$$

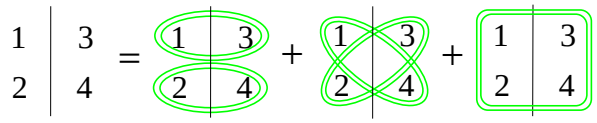


FIG. X.8 – Décomposition diagrammatique de la corrélation à quatre particules $\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle$ en cumulants, dans le repère du laboratoire.

Nous définissons le cumulant d'ordre 4 par

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle &\equiv \left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle \\ &\quad - \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_3)}\right\rangle \left\langle e^{in(\phi_2-\phi_4)}\right\rangle - \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_4)}\right\rangle \left\langle e^{in(\phi_2-\phi_3)}\right\rangle .\end{aligned} \tag{X.27}$$

b Soustraction des effets «nonflow» à deux particules : exemple

Revenons sur notre exemple de paires colinéaires émises aléatoirement (*cf.* Fig.X.4) et calculons le cumulant d'ordre 4. En injectant (X.14) et (X.20) dans la définition (X.27), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle &= \left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle - 2\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle^2 \\ &= \frac{4}{(N-1)^2(N-3)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right).\end{aligned} \tag{X.28}$$

Le cumulant d'ordre 4 est d'ordre N^{-3}, soit d'un facteur $1/N$ plus petit que la corrélation à quatre particules : le cumulant permet donc de se débarrasser de l'essentiel des corrélations «nonflow»[3].

En revanche, dans le cas opposé où il n'y a pas de corrélations «nonflow», seul le premier terme subsiste dans les décompositions des moments d'ordre 2 (X.13) et 4 (X.17), et en utilisant la définition (X.27), nous obtenons

$$\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle = -v_1(1)\,v_1(2)\,v_1(3)\,v_1(4). \tag{X.29}$$

Maintenant si nous superposons l'ordre de grandeur (X.28) et le terme de flot (X.29), nous voyons un progrès dans le cumulant d'ordre 4 par rapport au moment du même ordre, Eq.(X.19). En effet, alors que le terme de flot dans le moment d'ordre 4 $[v_n^4]$ est comparé à une contribution d'ordre N^{-2} venant de corrélations connexes à deux, trois et quatre particules, dans le cumulant d'ordre 4, le terme de flot $[-v_n^4]$ est comparé *uniquement* à la corrélation

[3] Le cumulant d'ordre 4 ne contenant que des corrélations à quatre particules et le système corrélant les particules uniquement deux à deux, le cumulant d'ordre 4 devrait en principe être nul ! En fait, nous verrons que dans un système fini, il est effectivement nul à des termes correctifs d'ordre $1/N^3$ près.

connexe à quatre particules qui est d'ordre N^{-3} ! Nous avons donc gagné un ordre de grandeur en $1/N$ dans le cumulant par rapport au moment. Et cette différence est un réel progrès : par exemple, au SPS, avec $v_n \sim 3\%$ et $N \sim 2500$, nous avons $v_n^4 \sim 8 \times 10^{-7}$, $N^{-2} \sim 2 \times 10^{-7}$ et $N^{-3} \sim 6 \times 10^{-11}$!

Nous allons maintenant revenir au cas général où les deux types de corrélation (flot et «nonflow») sont présentes dans le cumulant d'ordre 4 et montrer le rôle joué par les termes d'interférence entre le flot et les corrélations «nonflow».

c Termes d'interférence : rôle des harmoniques supérieures

En utilisant la décomposition des corrélations à deux et à quatre particules suivant les Figs.X.3 et X.6 dans la définition (X.27), nous obtenons la décomposition du cumulant d'ordre 4 à la Fig.X.9. Nous notons en particulier que toutes les corrélations «nonflow» du type $\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle_c$ s'éliminent dans la soustraction, alors que les termes de flot subsistent. Grâce à

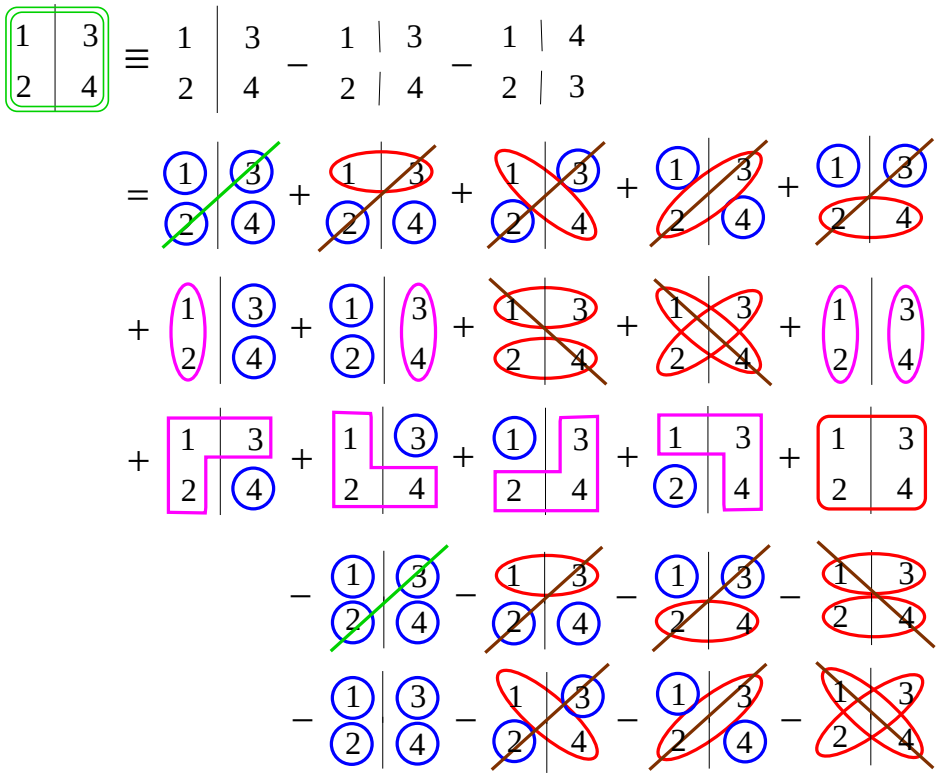


FIG. X.9 – Décomposition diagrammatique du cumulant d'ordre 4, soustraction explicite des corrélations connexes isotropes à deux particules.

la Fig.X.9 et en utilisant (X.9), l'ordre de grandeur du cumulant d'ordre 4 est

$$\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle = -v_n(1)\,v_n(2)\,v_n(3)\,v_n(4) + \mathcal{O}\left(\frac{{v_n}^2\,v_{2n}}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{{v_{2n}}^2}{N^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{{v_n}^2}{N^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \quad \text{(X.30)}$$

Pour une source isotrope, seule demeure la corrélation à quatre particules d'ordre $1/N^3$, comme discuté ci-dessus. Ici, nous avons en outre divers termes d'interférence. Ces derniers constituent des sources d'erreur pour le flot. Nous cherchons maintenant à savoir quel peut être le terme dominant dans (X.30).

Le terme en ${v_n}^2\, v_{2n}/N^2$ est nécessairement plus petit[4] que ${v_n}^4$ ou ${v_{2n}}^2/N^2$. De même, le terme en ${v_n}^2/N^2$ est inférieur à ${v_n}^4$ ou à N^{-4} (et *a fortiori* à N^{-3}). Finalement les termes dominants dans (X.30) sont

$$\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle = -v_n(1)\, v_n(2)\, v_n(3)\, v_n(4) \text{ ou } \mathcal{O}\left(\frac{{v_{2n}}^2}{N^2}\right) \text{ ou } \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \qquad \text{(X.31)}$$

En particulier, le terme en ${v_{2n}}^2/N^2$ peut dominer dans certaines situations. Nous renvoyons à la Section X.3.4 pour une discussion plus spécifique sur l'interférence avec cette harmonique supérieure.

X.3.3 Cumulant mixte d'ordre 3

Terminons sur la corrélation à trois particules $\left\langle e^{in(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$. L'unique cas pratique est $n = 1$. Dans le cas d'un détecteur parfait, nous ne devons avoir dans les cumulants que des angles relatifs. Autrement dit, les cumulants du type $\left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle$ sont nuls. Ainsi, comme pour le moment d'ordre 2, le moment d'ordre 3 se réduit au cumulant d'ordre 3,

$$\begin{aligned}\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle &\equiv \left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\right\rangle \\ &= v_2(1)\, v_1(2)\, v_1(3) \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{{v_2}^2}{N}\right) \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{{v_1}^2}{N}\right) \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).\end{aligned} \qquad \text{(X.32)}$$

La décomposition en termes de flot et en termes connexes est la même que (X.15) et nous avons rappelé son ordre de grandeur (X.16).

Dans (X.32), nous négligeons dans un premier temps les termes d'ordre v_1^2/N et ${v_2}^2/N$ (*cf.* Section X.3.4). Ainsi, le terme de flot pur est comparé à la corrélation connexe à trois particules. Pour NA49 où $v_1 \sim v_2 \sim 3\%$ et $N \sim 2500$, nous trouvons $v_{2n}\, v_n^2 \sim 10^{-5}$ et $N^{-2} \sim 10^{-8}$. Le terme connexe à trois particules est donc *a priori* bien négligeable.

X.3.4 Cumulants d'ordre supérieur ; progrès et limitations

Dans cette section, nous généraliserons la discussion précédente aux cumulants d'ordre quelconque. La construction de ces cumulants d'ordre supérieur fera l'objet des Chapitres XI et XII. Nous nous contenterons ici d'étudier leurs ordres de grandeur.

a Elimination des corrélations «nonflow»

Plus l'ordre du cumulant est élevé et plus la contribution «nonflow» devient négligeable par rapport à celle du flot. Le progrès se ressent dès l'ordre 4 : la contribution du flot domine la partie «nonflow» dès que

$$|v_n| \gg N^{-3/4}, \qquad \text{(X.33)}$$

à comparer aux méthodes standard utilisant le cumulant d'ordre 2 (X.25) :

$$|v_n| \gg N^{-1/2}. \qquad \text{(X.34)}$$

La condition (X.33) permet donc de mesurer des valeurs de flot plus faibles, et ceci grâce à la propriété que les corrélations connexes ont un ordre de grandeur qui décroît lorsqu'on augmente le nombre de particules corrélées. Nous dirons que la sensibilité de la méthode de reconstruction augmente avec l'ordre du cumulant.

[4] Dans $(a+b)^2$, le double produit $2ab$ est inférieur à a^2+b^2.

Plus généralement, le cumulant isotrope d'ordre $2k$ contient une contribution de flot pur en ${v_n}^{2k}$ d'une part, et la contribution de la corrélation connexe à $2k$ particules, d'ordre N^{1-2k}, d'autre part. Le terme de flot est dominant si

$$ {v_n}^{2k} \gg N^{1-2k}, \tag{X.35} $$

ce qui donne, sur le flot lui-même, la condition

$$ |v_n| \gg N^{-1+1/2k}. \tag{X.36} $$

Dans la limite où $k \to \infty$, nous devons avoir $|v_n| \gg 1/N$. Comme annoncé au début de ce chapitre, si $|v_n| \sim 1/N$, nous aurons beau augmenter l'ordre du cumulant utilisé, il n'y a aucun espoir de pouvoir mesurer le flot.

b Interférence avec les harmoniques supérieures

Dans le cumulant d'ordre 4, Eq.(X.31), est apparu un terme d'ordre ${v_{2n}}^2/N^2$, en comparaison au terme de flot pur, $-{v_n}^4$. Plus généralement, à l'ordre $2k$, le terme de flot est proportionnel à ${v_n}^{2k}$ et nous avons une interférence avec un terme d'ordre $(v_{kn}/N^{k-1})^2$. Cette dernière est négligeable si

$$ |v_{kn}| \ll N^{k-1}|v_n|^k. \tag{X.37} $$

Le flot étant mesurable si $|v_n| \gg 1/N$, la condition (X.37) est satisfaite sauf si $|v_{kn}| \gg |v_n|$. En pratique, si $n \geq 2$, ce cas de figure ne se présente pas car les harmoniques d'ordre supérieur décroissent vite avec n. Le seul cas gênant est pour $n = 1$ et $k = 2$. En effet, nous avons, au SPS, $v_1 \leq v_2$ et même, nous nous attendons à $v_2 \gg v_1$ à RHIC. On ne pourra pas reconstruire le flot dirigé *a priori* si le flot elliptique est grand. Dans toute la suite, nous supposerons que l'interférence avec les harmoniques supérieures est négligeable. Si ce n'est effectivement pas le cas pour le flot dirigé, nous travaillerons alors avec le cumulant mixte d'ordre 3.

c Spécificité des corrélations mixtes

Dans le cas où $v_1 \leq v_2$ voire $v_1 \ll v_2$, nous verrons qu'il est préférable d'utiliser le cumulant mixte d'ordre 3 qui permet une meilleure reconstruction de v_1 justement quand le flot elliptique est grand. La sensibilité à l'ordre 3 est plus grande que celle à l'ordre 2. En effet, divisons l'expression du cumulant d'ordre 3 (X.32) par v_2 de façon à comparer les v_1^2 venant du cumulant d'ordre 2 (X.13) et de (X.32). Ecrivons maintenant les conditions nécessaires pour que la reconstruction du flot soit possible à partir de ces ordres :

Ordre 2	Ordre 3
$v_1^2 \gg \dfrac{1}{N}$	$v_1^2 \gg \left(\dfrac{v_1^2}{N\,v_2} + \dfrac{v_2}{N} + \dfrac{1}{N^2\,v_2}\right)$

Nous avons d'abord $v_1^2/(N\,v_2) \ll v_2/N$. Ensuite, si le terme en v_2/N domine celui en $(N^2\,v_2)^{-1}$, nous avons un progrès par rapport à l'ordre 2 puisque $v_2 \ll 1$. Dans le cas contraire où $(N^2\,v_2)^{-1}$ domine, comme nous avons $v_2 \gg 1/N$ pour que la reconstruction du flot soit possible, nous obtenons la même limitation entre l'ordre 2 et l'ordre 3, à savoir $v_1 \gg 1/\sqrt{N}$, sauf qu'avec le cumulant d'ordre 3, les corrélations «nonflow» à deux particules ont été automatiquement soustraites.

Bref dans tous les cas, la sensibilité est meilleure dans l'ordre 3 que dans l'ordre 2 et nous avons tout intérêt à utiliser cet ordre mixte à la place des méthodes standard, dans le cas où le flot elliptique est plus fort que le flot dirigé.

X.3.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons introduit la notion de cumulant et nous avons montré les avantages de l'utilisation des cumulants d'ordre supérieur qui nous assure l'élimination ordre par ordre des corrélations «nonflow». La sensibilité de la reconstruction augmente avec l'ordre du cumulant. Cependant nous avons supposé que le détecteur était parfait, ce qui est rarement le cas en pratique. Dans la section suivante, nous considérerons donc un détecteur imparfait et nous verrons encore une fois l'avantage des cumulants par rapport aux moments.

X.4 Cas d'un détecteur imparfait : soustraction des corrélations non physiques

En pratique, le détecteur présente des défauts : non seulement il ne détecte pas toutes les particules produites mais il peut avoir une sensibilité de détection qui dépend de l'impulsion et/ou de l'angle azimutal ϕ de la particule, mesuré par rapport au laboratoire. Nous appellerons acceptance du détecteur le nombre de particules détectées (à un facteur de normalisation près) en fonction de ϕ. Nous négligerons sa dépendance en p_T et en y par souci de simplicité.

Un détecteur est dit parfait si son acceptance est isotrope. Ainsi tous les événements seront équivalents pour le détecteur : l'orientation du plan de réaction par rapport au laboratoire n'importe pas. En revanche, si le détecteur n'est pas parfait, deux événements de Φ_R différents peuvent être «vus» différemment pour peu que le plan de réaction de l'un soit orienté dans une zone azimutale recouverte par le détecteur, et que le plan de réaction de l'autre le soit dans une région mal détectée. Pour être encore plus explicite, nous avons schématisé à la Fig.X.10 le cas d'un détecteur avec des «trous» en angle azimutal et deux plans de réaction différents. Autrement dit, l'acceptance du détecteur produit une anisotropie qui peut être

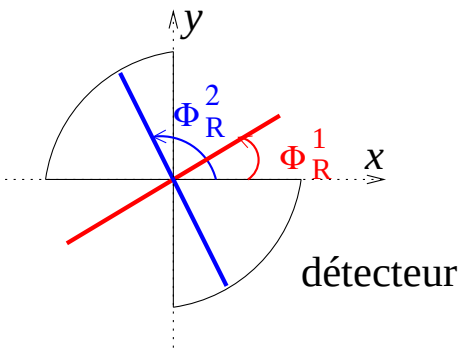


FIG. X.10 – Exemple d'un détecteur qui ne recouvre que deux quadrants en angle azimutal. Les particules d'un événement de plan de réaction Φ_R^1 ne seront pas détectées de la même manière que celles d'un événement de plan de réaction $\Phi_R^2 \neq \Phi_R^1$.

interprétée comme étant du flot mais son origine n'est pas physique : nous devons donc effectuer des *corrections d'acceptance*. La différence majeure avec la section précédente est que les cumulants non isotropes, nuls dans le cas d'un détecteur parfait, ne le sont plus si l'acceptance n'est pas isotrope.

La décomposition en cumulants va nous permettre de soustraire, ordre par ordre, les cumulants non isotropes et donc de s'affranchir des effets de détecteur.

X.4.1 Effets de l'acceptance du détecteur

Nous décrirons l'acceptance d'un détecteur par la fonction $A(\phi)$ qui est la probabilité qu'une particule d'angle azimutal ϕ soit détectée. Nous utiliserons la normalisation

$$\int_0^{2\pi} A(\phi)\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} = 1.$$

Cette fonction peut être développée en série de Fourier :

$$A(\phi) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p\, e^{ip\phi}, \qquad a_p = \int_0^{2\pi} e^{ip\phi}\; A(\phi)\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}. \tag{X.38}$$

La fonction d'acceptance étant réelle et normalisée à 1, nous avons les propriétés suivantes

$$a_0 = 1, \qquad a_{-p} = a_p^*. \tag{X.39}$$

Enfin si le détecteur est parfait, nous avons $a_n = 0$ pour tout $n \neq 0$.

Nous avons déjà soulevé l'ambiguïté qui réside dans l'écriture de la valeur moyenne (III.5) pour calculer le flot. Cependant, quand le détecteur est parfait, les valeurs moyennes à Φ_R donné ou intégrées sur Φ_R ne diffèrent pas (du moins quand elles sont indépendantes de Φ_R). Autrement dit, la valeur moyenne sur les particules émises (par rapport au plan de réaction) est égale à la valeur moyenne sur les particules détectées (par rapport au laboratoire). Ceci revient à dire que le poids utilisé dans les moyennes est uniquement la fonction de distribution par rapport au plan de réaction, $f(p_T, y, \phi - \Phi_R)$. En revanche, si le détecteur n'est pas parfait, étant donné que nous travaillons avec des particules détectées, la valeur moyenne doit se calculer avec la probabilité de *détecter une particule émise*, soit $A(\phi)f(p_T, y, \phi - \Phi_R)$. Ainsi, si nous voulons prendre en compte (ou non) l'acceptance du détecteur, il nous faut convoluer (ou non) les fonctions de distribution par rapport au plan de réaction avec la fonction d'acceptance. La valeur moyenne pour une observable $\mathcal{O}(\phi)$ s'écrit alors

$$\left\langle \mathcal{O}(\phi) \middle| \Phi_R \right\rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \mathcal{O}(\phi)\, A(\phi)\, f(\phi - \Phi_R)\, \mathrm{d}\phi}{\int_0^{2\pi} A(\phi)\, f(\phi - \Phi_R)\, \mathrm{d}\phi}. \tag{X.40}$$

Ensuite nous devons moyenner sur Φ_R, que nous supposerons distribué isotropiquement, pour obtenir $\langle \mathcal{O}(\phi) \rangle$.

Avant de nous intéresser aux corrélations multiples, calculons d'abord l'effet de l'acceptance du détecteur sur le flot lui-même. La quantité $\left\langle e^{-in(\phi-\Phi_R)} | \Phi_R \right\rangle = e^{in\Phi_R}\ \left\langle e^{-in\phi} | \Phi_R \right\rangle$ est ce qui nous intéresse puisque dans le cas d'un détecteur parfait, elle est exactement égale à v_n. Le facteur $e^{in\Phi_R}$ n'importe pas car dans la suite, nous considérerons des corrélations azimutales ne faisant intervenir que des angles relatifs. Nous utilisons pour ce calcul les développements

en séries de Fourier de $f(\phi - \Phi_R)$ et $A(\phi)$ donnés par (III.3) et (X.38) respectivement :

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{-in\phi}\middle|\Phi_R\right\rangle &= \frac{\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{-in\phi} A(\phi) f(\phi-\Phi_R)}{\int_0^{2\pi} d\phi\, A(\phi) f(\phi-\Phi_R)} \\
&= \frac{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\ \sum_{m,p} a_m\, v_p\, e^{-i(n-m-p)\phi}\, e^{-ip\Phi_R}}{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\ \sum_{m,p} a_m\, v_p\, e^{i(m+p)\phi}} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{n-p}\, v_p\, e^{-ip\Phi_R}}{\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{-p}\, v_p\, e^{-ip\Phi_R}} = \frac{\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{p+n}\, v_p\, e^{ip\Phi_R}}{\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{p}\, v_p\, e^{ip\Phi_R}} \\
&= a_n + \sum_{p\neq 0} (a_{p+n} - a_n a_p)\, v_p\, e^{ip\Phi_R}.
\end{aligned} \tag{X.41}$$

Pour la dernière égalité, nous avons fait un développement limité au premier ordre en v_p. Commentons ce résultat : si l'acceptance du détecteur n'est pas trop anisotrope, ses coefficients de Fourier sont faibles. Dans le cas des détecteurs de NA49, nous avons $a_n \sim 10^{-2} - 10^{-3}$. Le flot lui-même est de l'ordre du pourcent. Par conséquent, la somme sur p dans le membre de droite de (X.41) est sous-dominante devant a_n sauf pour $p = -n$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{-in\phi}\middle|\Phi_R\right\rangle &\simeq a_n + v_n\, e^{-in\Phi_R} \\
&= \left\langle e^{-in\phi}\right\rangle + v_n\, e^{-in\Phi_R}.
\end{aligned} \tag{X.42}$$

Nous avons introduit ici la corrélation à une particule

$$\left\langle e^{-in\phi}\right\rangle \equiv a_n, \tag{X.43}$$

qui n'est pas nulle pour un détecteur imparfait. Le calcul un peu lourd qui nous a menés au résultat (X.42) aurait pu être deviné plus rapidement : s'il n'y a pas de flot mais si le détecteur n'est pas isotrope, nous avons $\left\langle e^{-in\phi}\middle|\Phi_R\right\rangle = \left\langle e^{-in\phi}\right\rangle$; en revanche, si le détecteur est parfait, nous avons uniquement $\left\langle e^{-in\phi}\middle|\Phi_R\right\rangle = v_n\, e^{-in\Phi_R}$. Nous reviendrons cependant sur les termes pour $p \neq -n$ que nous avons négligés dans (X.41) aux Sections XI.6 et XII.4.

Etudions maintenant l'influence de l'acceptance sur les corrélations azimutales proprement dites, puisque ce sont ces dernières qui sont mesurées en pratique. Nous commencerons par la corrélation à deux particules.

X.4.2 Cumulant d'ordre 2

Calculons le cumulant d'ordre 2 défini par [*cf.* Eq.(X.23) et Fig.X.11]

$$\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle = \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle - \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle \left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle. \tag{X.44}$$

Nous allons vérifier que les effets de détecteur disparaissent dans le cumulant d'ordre 2.

Considérons d'abord un ensemble d'événements de même plan de réaction Φ_R et calculons



FIG. X.11 – Décomposition diagrammatique du moment d'ordre 2 dans le repère du laboratoire.

la corrélation à deux particules à Φ_R donné,

$$\begin{aligned}\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\middle|\Phi_R\right\rangle &= \left\langle e^{in(\phi_1-\Phi_R)}\middle|\Phi_R\right\rangle\left\langle e^{-in(\phi_2-\Phi_R)}\middle|\Phi_R\right\rangle + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\middle|\Phi_R\right\rangle_c \\ &= \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle + \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle v_n(2)\, e^{-in\Phi_R} + v_n(1)\, e^{in\Phi_R}\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle \\ &\quad + v_n(1)\, v_n(2) + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\middle|\Phi_R\right\rangle_c , \qquad \text{(X.45)}\end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité, nous avons injecté (X.42). L'intégration sur Φ_R de (X.45) est triviale et donne

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle = \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle + v_n(1)\, v_n(2) + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle_c . \qquad \text{(X.46)}$$

Nous retrouvons la décomposition (X.25) avec un terme supplémentaire lié aux imperfections du détecteur. Ce terme disparaît dans le cumulant d'ordre 2

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle &\equiv \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle - \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle \\ &= v_n(1)\, v_n(2) + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle_c ,\end{aligned} \qquad \text{(X.47)}$$

Ainsi, les effets de détecteur à une particule sont par définition soustraits du cumulant d'ordre 2. Ce dernier ne contient donc que les corrélations *physiques* à deux particules. Ainsi, pour s'affranchir des problèmes d'acceptance, c'est avec le cumulant et non avec le moment d'ordre 2 qu'il faut travailler. La notion de cumulant est maintenant utile dès les corrélations à deux particules.

X.4.3 Cumulants d'ordre supérieur

Pour le moment d'ordre 2, nous remarquons l'analogie entre la Fig.X.3 présentant sa décomposition en parties connexes dans le repère du plan de réaction, et la Fig.X.11, décomposition en cumulants dans le repère du laboratoire. Ce n'est pas un hasard : nous décomposons les corrélations en parties connexes de la même manière mais dans deux repères différents. Ainsi, pour obtenir l'expression des cumulants dans le cas d'un détecteur imparfait, il suffit de remplacer dans les moments d'ordre 2 (X.13), d'ordre 3 (X.15) et d'ordre 4 (X.17) les corrélations connexes $\langle\ldots\rangle_c$ par des cumulants $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$. Il faut ensuite injecter l'expression des cumulants d'ordre inférieur en fonction des moments pour obtenir une définition des cumulants qui ne dépende que de quantités mesurées, à savoir les moments.

Par exemple, au lieu de (X.32), nous devons définir le cumulant d'ordre 3, $\langle\!\langle e^{in(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\rangle\!\rangle$, par

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle e^{in(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\right\rangle &= \left\langle e^{in(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle - \left\langle e^{in(2\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_3}\right\rangle - \left\langle e^{in(2\phi_1-\phi_3)}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle \\ &\quad - \left\langle e^{-in(\phi_2+\phi_3)}\right\rangle\left\langle e^{2in\phi_1}\right\rangle + 2\left\langle e^{2in\phi}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_3}\right\rangle . \qquad \text{(X.48)}\end{aligned}$$

Nous retrouvons évidemment le fait que, dans le cas d'un détecteur parfait, le cumulant d'ordre 3 est égal au moment d'ordre 3 uniquement puisque tous les autres termes sont nuls. Nous

n'écrirons pas l'expression du cumulant d'ordre 4 tellement elle est longue ! Nous nous doutons que plus l'ordre du cumulant est élevé et plus son expression pour un détecteur imparfait est compliquée. Cependant leur interprétation physique (à juste titre !) reste la même : le cumulant d'ordre k ne contient que les corrélations *physiques* à k particules, et les corrélations d'ordre strictement inférieur, qu'elles aient une origine physique ou qu'elles soient dues à l'acceptance du détecteur, sont automatiquement soustraites. Ainsi, leurs décompositions en termes de flot et «nonflow», Eqs.(X.25), (X.31) et (X.32), ne sont pas modifiées.

En pratique, nous n'utilisons pas les définitions des cumulants en fonction des moments. Nous verrons aux Sections XI.2 et XII.2 la technique des fonctions génératrices qui permet de calculer les cumulants à tous les ordres.

X.5 Flot intégré

Nous avons jusqu'à présent maintenu une distinction explicite entre les particules que nous corrélons de façon à rester dans le cadre le plus général possible. Dans un cumulant d'un ordre donné, en intégrant l'ensemble des particules sur tout l'espace des phases, nous obtenons une estimation de la valeur moyenne du flot, que nous appelons flot intégré. L'utilisation de plusieurs ordres nous permet ainsi d'obtenir autant d'estimations indépendantes de cette quantité. Dans cette section, nous allons présenter la relation entre les cumulants et le flot intégré, et calculer les diverses sources d'erreur sur chacune des estimations.

Il peut paraître surprenant de présenter le flot intégré avant le flot différentiel car dans les méthodes standard, le premier est obtenu en intégrant le deuxième. En fait, la reconstruction du flot intégré constitue la première étape de notre analyse, au même titre que dans la méthode des sous-événements, le vecteur flot est d'abord calculé pour estimer le plan de l'événement. Le flot intégré apparaîtra donc comme la référence au plan de réaction pour le flot différentiel.

La décomposition diagrammatique sera la même que celle présentée à la section précédente à la différence que les particules seront représentées par des points et non plus étiquetées explicitement puisqu'elles jouent maintenant des rôles équivalents. Chaque point représente tout de même une particule différente de toutes les autres, et le nombre de particules utilisées dans l'analyse est la multiplicité M. En pratique, nous avons $M \leq N$, où N est la multiplicité totale.

X.5.1 Cumulants d'ordre pair

La décomposition de la corrélation à deux particules en cumulants est représentée diagrammatiquement sur la Fig.X.12. D'après (X.25), l'ordre de grandeur du cumulant d'ordre 2 est

$$\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle\!\right\rangle \equiv v_n\{2\}^2 = v_n^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{X.49}$$

Nous avons introduit la notation $v_n\{2\}$ qui correspond à l'estimation de la vraie valeur v_n à partir du cumulant d'ordre 2. Cette équation signifie qu'elle est contaminée par les corrélations «nonflow» à 2 particules.

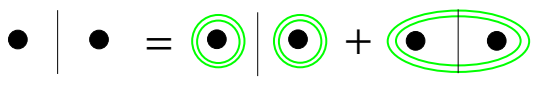


FIG. X.12 – Décomposition pour le flot intégré de la corrélation à deux particules en cumulants, dans le repère du laboratoire.

Quant au cumulant d'ordre 4, son ordre de grandeur est, d'après (X.31),

$$\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)} \right\rangle\!\right\rangle \equiv -v_n\{4\}^2 = -v_n^4 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \tag{X.50}$$

De même, $v_n\{4\}$ est l'estimation de v_n biaisée par les corrélations «nonflow» à *quatre* particules, mais non à *deux* particules. La Fig.X.13 rappelle la décomposition du moment d'ordre 4 en cumulants pour un détecteur parfait.

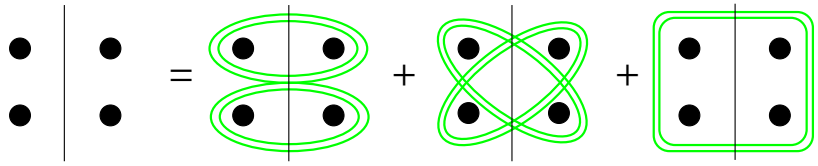


FIG. X.13 – Décomposition pour le flot intégré de la corrélation à quatre particules en cumulants, dans le repère du laboratoire et pour un détecteur parfait.

Nous pouvons en principe continuer à l'infini et calculer les cumulants d'ordre 6, 8, 10, ... Dans le chapitre suivant, nous présenterons nos résultats jusqu'à l'ordre 8.

X.5.2 Cumulant mixte d'ordre 3

En utilisant (X.32), nous obtenons pour le cumulant mixte d'ordre 3

$$\left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)} \right\rangle\!\right\rangle = v_2\, {v_1}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{X.51}$$

Nous pouvons avoir deux applications de cette corrélation mixte. Si nous connaissons (par ailleurs) le flot dirigé, elle permet de reconstruire le flot elliptique. Inversement, en connaissant le flot elliptique, nous pouvons reconstruire le flot dirigé. Autrement dit, une harmonique sert de référence à la reconstruction d'une autre.

Nous utiliserons la corrélation mixte essentiellement pour reconstruire le flot dirigé à partir du flot elliptique. Cela constitue le principe d'une toute nouvelle méthode que nous avons récemment proposée [3]. Elle est motivée par le fait qu'aux énergies ultrarelativistes, nous nous attendons à un flot dirigé de plus en plus faible (*cf.* Section III.4.2). Or par les méthodes standard, la seule façon de reconstruire le flot dirigé est de calculer la résolution du plan de l'événement à partir de la première harmonique. Cette dernière est suffisante pour l'analyse de v_1 par NA49 aux énergies du SPS mais ne l'est plus à RHIC où v_1 est tellement faible qu'aucune reconstruction de v_1 par les méthodes standard n'est vraisemblablement possible. D'ailleurs aucun résultat sur v_1 de RHIC n'a été publié à ce jour.

L'autre avantage de cette méthode est qu'elle élimine automatiquement les corrélations «nonflow» à deux particules, comme la conservation de l'impulsion ou la désintégration de résonances, puisqu'elle se base sur le cumulant d'ordre 3. Cependant, nous avons également proposé une façon de corriger la méthode standard de la conservation de l'impulsion [6]. Mais la désintégration des résonances n'est pas soustraite et nous avions montré au Chapitre VII que cette corrélation «nonflow» pouvait contribuer de façon non négligeable à la corrélation à deux particules.

Enfin signalons que cette idée de mélanger différentes harmoniques n'est pas nouvelle et a été largement utilisée dans la reconstruction du flot elliptique à partir du flot dirigé, autant à basse énergie autour de l'énergie de transition [7] et à la transition d'un flot «out-of-plane» vers un flot «in-plane» [8, 9].

a Flot elliptique à partir du flot dirigé.

Si nous reconstruisons v_2 à partir de v_1, nous écrirons la décomposition du cumulant d'ordre 3 sous la forme

$$\left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\right\rangle \equiv v_2\{3\}\, v_1^2 = v_2\, v_1^2 \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{X.52}$$

où $v_2\{3\}$ est une estimation de v_2 à partir du cumulant d'ordre 3. Remarquons que grâce à (X.52), nous pouvons en déduire le signe du flot elliptique. Dans les méthodes standard, et plus généralement avec l'utilisation de cumulants d'ordre pair, ce signe reste indéterminé car le cumulant d'ordre $2k$ a une contribution du flot en ${v_n}^{2k}$.

b Flot dirigé à partir du flot elliptique.

Si nous reconstruisons v_1 à partir de v_2, nous écrirons plutôt

$$\left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\right\rangle \equiv v_2\,(v_1\{3\})^2 = \;{v_2{v_1}^2} \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{X.53}$$

où $v_1\{3\}$ sera une estimation de v_1 à partir des corrélations à trois particules.

X.5.3 Erreurs statistiques et systématiques

Nous avons vu que chaque cumulant, à un ordre donné, nous donne une estimation pour le flot intégré. Nous obtenons donc autant de valeurs que de cumulants utilisés. Cependant, il est assez intuitif de penser que les erreurs statistiques augmentent avec l'ordre du cumulant. En effet, nous avons moins de statistique en corrélant quatre, six, huit,... particules par rapport à deux particules. Dans cette section, nous allons évaluer l'erreur statistique sur ces différentes estimations de v_n.

Les erreurs statistiques sur les cumulants (et par suite sur le flot) peuvent être calculées à tous les ordres (*cf.* Appendice D de [2] et Section D de [3]). Nous ne présenterons ici que l'ordre de grandeur par un simple dénombrement. En effet, pour le calcul d'un cumulant, nous faisons une moyenne sur le nombre M de particules utilisées dans l'analyse (soit la multiplicité) et sur le nombre d'événements $N_{\rm evts}$. Nous nous plaçons dans la limite de M grand. Pour un événement donné, à l'ordre 2, nous avons $M(M-1)/2$ paires différentes, soit sur tous les événements, $N_{\rm paires} \simeq N_{\rm evts}M^2/2$. L'erreur statistique sur le cumulant d'ordre 2 vaut alors $1/\sqrt{N_{\rm paires}}$. De la même façon, il y a $M(M-1)(M-2)(M-3)/8$ quadruplets indépendants pour l'ordre 4, et $M(M-1)(M-2)/2$ triplets indépendants[5] par événement, soit $N_{4-\rm uplets} \simeq N_{\rm evts}M^4/8$ et $N_{3-\rm uplets} \simeq N_{\rm evts}M^3/2$ au total. Plus généralement, à l'ordre k, nous avons $\sim N_{\rm evts}\,M^k$ k-uplets au total. La contribution du flot au cumulant d'ordre k étant en ${v_n}^k$, nous avons approximativement l'erreur statistique suivante

$$(\delta v_n\{k\}^k)_{\rm stat} = \frac{1}{\sqrt{N_{\rm evts}\,M^k}}, \tag{X.54}$$

soit une erreur statistique sur le flot lui-même de

$$(\delta v_n\{k\})_{\rm stat} = \frac{1}{\sqrt{N_{\rm evts}\,M}}\,\frac{1}{\left(\sqrt{M}\,v_n\right)^{k-1}}. \tag{X.55}$$

[5] Il y a un facteur de symétrie de 1/2 à l'ordre 4, et un facteur 3 à l'ordre 3.

Pour justifier l'utilisation des cumulants d'ordre supérieur au lieu des méthodes standard, nous avons supposé que $v_n \ll 1/\sqrt{M}$, ce qui est le cas en pratique. L'erreur statistique (X.55) augmente donc bien avec l'ordre du cumulant.

Maintenant si nous désignons par erreurs systématiques l'ordre de grandeur des effets «nonflow» à un ordre donné, ces erreurs au contraire diminuent. L'ordre de grandeur des corrélations «nonflow» dans le cumulant d'ordre k étant N^{1-k}, cela nous permet d'écrire l'erreur systématique sur $v_n\{k\}$

$$(\delta v_n\{k\})_{\text{syst}} = \frac{1}{(N\, v_n)^{k-1}}. \tag{X.56}$$

Nous devons donc faire un compromis entre les erreurs systématiques et les erreurs statistiques. En supposant que $M \sim N$ et égalisant (X.55) et (X.56), nous obtenons l'ordre optimal suivant

$$k_{\text{opt}} \simeq 2 + \frac{\ln N_{\text{evts}}}{\ln M}. \tag{X.57}$$

M étant de l'ordre de la centaine et le nombre d'événements dépassant rarement 10^7, les ordres optimaux sont en pratique les ordres 4 ou 6.

X.6 Flot différentiel

Après avoir déterminé le flot intégré, nous pouvons faire une étude plus fine et reconstruire le flot différentiel $v'_n(p_T, y)$. Pour cela, au lieu d'intégrer toutes les particules sur tout l'espace des phases, nous fixons une particule qualifiée de «différentielle» dans cette fenêtre (p_T, y) et nous intégrons sur les autres particules qui ont servi pour la reconstruction du flot intégré. Nous considérerons la particule différentielle comme étant un proton, bien qu'elle puisse être n'importe quoi d'autre. De la même façon, les particules de l'analyse du flot intégré seront appelées des pions car ces derniers constituent la majorité des particules produites. Le nombre total de pions plus le proton sera pris égal à la multiplicité M. Dans la représentation diagrammatique de nos cumulants, le proton sera désigné par une croix alors que les pions resteront des points.

Le proton a donc une impulsion p_T et une rapidité y fixées. Son angle azimutal sera noté ψ. Son flot $v'_n(p_T, y)$ est par définition

$$\begin{aligned} v'_n(p_T, y) &\equiv \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_R}{2\pi} \left\langle e^{in(\psi - \Phi_R)} \middle| \Phi_R \right\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_R}{2\pi} \frac{\int \mathrm{d}\psi\, f(p_T, y, \psi - \Phi_R)\, e^{in(\psi - \Phi_R)}}{\int d\psi\, f(p_T, y, \psi - \Phi_R)}. \end{aligned} \tag{X.58}$$

Nous avons le même problème que pour le flot intégré, à savoir que Φ_R est inconnu. Nous devons donc étudier les corrélations azimutales isotropes entre ce proton et les pions du flot intégré. Nous travaillerons sur des cumulants que nous qualifierons de «différentiels» et qui sont tout à fait analogues aux cumulants pour le flot intégré. Nous obtiendrons différentes estimations de v'_n suivant le nombre de pions auquel nous corrélons le proton. Ainsi, comme pour le flot intégré, nous étiquetterons ces valeurs par le nombre total de particules corrélées.

X.6.1 Cas d'une seule harmonique

Considérons d'abord la corrélation entre le proton et un pion, $\langle e^{i(\psi-\phi_1)}\rangle$. La valeur moyenne porte sur tous les pions et sur tous les événements qui contiennent ce proton. La Fig.X.12 présente la décomposition diagrammatique de cette corrélation et nous noterons $d_n\{2\}$ le cumulant correspondant qui s'écrit

$$\begin{aligned} d_n\{2\} &\equiv \left\langle\!\!\left\langle e^{in(\psi-\phi_1)}\right\rangle\!\!\right\rangle \\ &\equiv v_n v_n'\{2\} \\ &= v_n v_n' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned} \tag{X.59}$$

Nous avons introduit la notation $v_n'\{2\}$ qui est notre estimation de v_n' à partir des corrélations

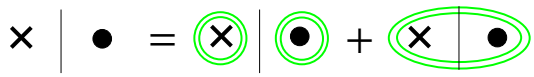


FIG. X.14 – Définition et décomposition du cumulant différentiel d'ordre 2 dans le cas d'un détecteur imparfait. La particule différentielle est représentée par une croix et la particule utilisée pour le flot intégré par un point.

à deux particules. Le deuxième terme dans le membre de droite de (X.59) correspond de nouveau aux corrélations «nonflow» à deux particules. L'erreur systématique sur v_n' est d'ordre $1/(|v_n|N)$. Nous nous placerons même dans la situation plus défavorable où nous considérons des corrélations «nonflow» en $1/M$ et non $1/N$. Nous obtenons alors l'erreur systématique

$$\left(\delta v_n'\{2\}\right)_{\text{syst}} = \frac{1}{\sqrt{M}\,\chi_n}\,, \tag{X.60}$$

où $\chi_n = |v_n|\sqrt{M}$. L'erreur est d'autant plus petite que le flot intégré v_n est grand.

Nous pouvons diminuer cette erreur systématique en corrélant le proton non pas avec un pion mais avec trois pions, *i.e.*, en considérant $\langle e^{in(\psi+\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\rangle$. En utilisant l'expression (X.31) du cumulant d'ordre 4 pour le flot intégré, le cumulant différentiel d'ordre 4, $d_n\{4\}$ s'écrit

$$\begin{aligned} d_n\{4\} &\equiv \left\langle\!\!\left\langle e^{in(\psi+\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\!\right\rangle \\ &\equiv -{v_n}^3 v_n'\{4\} \\ &= -{v_n}^3 v_n' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \end{aligned} \tag{X.61}$$

La Fig.X.15 nous présente la décomposition diagrammatique correspondante. La quantité $v_n'\{4\}$ constitue notre estimation de v_n' à partir des corrélations à quatre particules. L'erreur

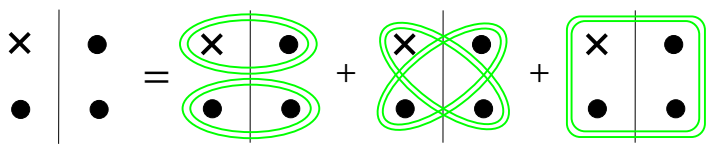


FIG. X.15 – Décomposition diagrammatique de la corrélation entre le proton (croix) et trois pions (points) en parties connexes, dans le cas d'un détecteur parfait.

systématique sur $v'_n\{4\}$ vaut

$$\left(\delta v'_n\{4\}\right)_{\text{syst}} = \left(\sqrt{M}\,\chi_n\right)^{-3} . \tag{X.62}$$

Plus généralement, si nous corrélons le proton avec $(2k-1)$ pions, nous obtenons $d_n\{2k\}$, cumulant d'ordre $2k$. Il se décompose comme suit

$$\begin{aligned} d_n\{2k\} &\equiv \beta_k \, {v_n}^{2k-1} \, v'_n\{2k\} \\ &= \beta_k \, {v_n}^{2k-1} \, v'_n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{2k-1}}\right), \end{aligned} \tag{X.63}$$

où β_k est un coefficient entier que nous déterminerons plus tard à tous les ordres. Notons qu'à tous les ordres, les cumulants différentiels sont linéaires en $v'_n\{2k\}$. L'erreur systématique sur le flot différentiel est

$$\left(\delta v'_n\{2k\}\right)_{\text{syst}} = \left(\sqrt{M}\,\chi_n\right)^{-2k+1} . \tag{X.64}$$

Comme le flot est mesurable seulement si $|v_n| \gg 1/M$, l'erreur systématique sur v'_n diminue lorsque k augmente.

X.6.2 Cumulants mixtes d'ordre 3

Nous venons de présenter une manière de reconstruire v'_n à partir de la même harmonique v_n. A la Section X.5.2, nous avons déjà présenté pour le flot intégré une méthode pour reconstruire une harmonique à partir d'une autre, en utilisant le cumulant $\left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\right\rangle$. La même procédure peut être appliquée pour le flot différentiel. Nous pouvons reconstruire, selon nos besoins, v'_2 si nous connaissons le v_1 intégré (déterminé par une analyse indépendante), ou bien v'_1 si nous connaissons v_2 intégré (et également v_1).

a Reconstruction du flot elliptique différentiel.

Nous considérons le cumulant $d_2\{3\} \equiv \left\langle\!\left\langle e^{i(2\psi-\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle$, représenté diagrammatiquement sur la Fig.X.16, et relié au flot par

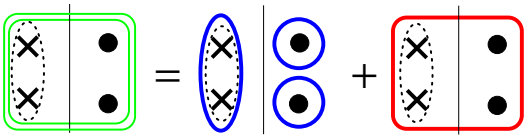


FIG. X.16 – Décomposition diagrammatique du cumulant $\left\langle\!\left\langle e^{i(2\psi-\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle$ résultant de la corrélation entre le proton (croix) et deux pions (points).

$$\begin{aligned} d_2\{3\} &\equiv \left\langle\!\left\langle e^{i(2\psi-\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle \\ &\equiv {v_1}^2 \, v'_2\{3\} \\ &= {v_1}^2 \, v'_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned} \tag{X.65}$$

L'erreur systématique sur $v'_{2/1}$ est donnée par

$$\left(\delta v'_2\{3\}\right)_{\text{syst}} = \left(\sqrt{M}\,\chi_1\right)^{-2}, \tag{X.66}$$

à comparer à l'erreur obtenue à partir du cumulant d'ordre 2 :

$$\left(\delta v_2'\{2\}\right)_{\text{syst}} = \left(\sqrt{M}\,\chi_2\right)^{-1}. \tag{X.67}$$

Ainsi, nous avons un progrès en utilisant l'ordre 3 par rapport à l'ordre 2, pourvu que $v_1 \geq v_2$, ce qui n'est pas le cas aux énergies ultrarelativistes.

Nous pouvons généraliser à des ordres supérieurs en corrélant le proton avec $(2k+3)$ pions et en considérant le cumulant $\left\langle\!\left\langle e^{i(m\psi+\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{2k+m})}\right\rangle\!\right\rangle$ mais en pratique, la statistique ne permet que la réalisation de l'ordre 3.

b Reconstruction du flot dirigé différentiel.

En considérant le cumulant $d_1\{3\} \equiv \left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\psi)}\right\rangle\!\right\rangle$ dont la décomposition est représentée diagrammatiquement à la Fig.X.17, nous pouvons reconstruire v_1' à partir de v_1 et v_2 :

$$\begin{aligned} d_1\{3\} &\equiv \left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\psi)}\right\rangle\!\right\rangle \\ &\equiv v_2\, v_1\, v_1'\{3\} \\ &= v_2\, v_1\, v_1' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned} \tag{X.68}$$

L'erreur systématique sur $v_{1/2}'\{3\}$ est donnée par

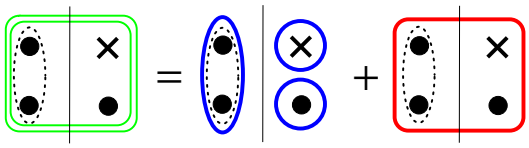


FIG. X.17 – Décomposition diagrammatique du cumulant $\left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\psi)}\right\rangle\!\right\rangle$ résultant de la corrélation entre le proton (croix) et deux pions (points).

$$\left(\delta v_{1/2}'\{3\}\right)_{\text{syst}} = \left(M\,\chi_1\,\chi_2\right)^{-2}, \tag{X.69}$$

Si nous comparons au flot obtenu à l'ordre 2,

$$\left(\delta v_1'\{2\}\right)_{\text{syst}} = \left(\sqrt{M}\,\chi_1\right)^{-1}, \tag{X.70}$$

nous notons un progrès dans l'ordre 3, surtout si le flot elliptique est plus important que le flot dirigé, puisqu'alors nous avons $\chi_2 > \chi_1$.

X.6.3 Erreurs statistiques

Par un dénombrement similaire à celui que nous avions fait pour le flot intégré, nous pouvons avoir un ordre de grandeur pour les erreurs statistiques : à l'ordre $2k$, si nous avons N' protons au total (sur tous les événements), le nombre de $2k$-uplets impliquant le proton vaut $\sim N'\,M^{2k-1}$. Le cumulant d'ordre $2k$ a une contribution du flot en ${v_n}^{2k-1}\,v_n'$. Donc l'erreur statistique sur $v_n'\{2k\}$ vaut approximativement

$$\left(\delta v_n'\{2k\}\right)_{\text{stat}} = \frac{1}{\sqrt{N'}\,{\chi_n}^{2k-1}}. \tag{X.71}$$

L'erreur statistique est d'autant plus faible que le paramètre χ_n est grand. En pratique, ce dernier reste inférieur à 1 et comme pour le flot intégré, l'erreur statistique sur le flot différentiel augmente avec k.

En revanche, l'erreur systématique (X.64) diminue avec k. Le compromis avec l'erreur statistique (X.71) donne l'ordre différentiel optimal

$$(2k)_{\rm opt} \simeq 1 + \frac{\ln N'}{\ln M}. \tag{X.72}$$

Cette équation est tout à fait analogue à celle obtenue pour le flot intégré, Eq.(X.57). Nous devrions prendre en compte l'erreur statistique sur v_n (et donc sur χ_n) mais étant donné que le flot différentiel est reconstruit par définition dans une petite région de l'espace des phases, *a priori* nous avons $N' \gg N_{\rm evts}$. Il est donc raisonnable de négliger l'erreur sur le flot intégré. En pratique, il est préférable d'utiliser l'ordre 4 car l'ordre 2, correspondant aux méthodes standard, n'élimine pas les corrélations «nonflow» à deux particules. Nous devons donc avoir $\ln N'/\ln M > 2$. Pour $M \sim 100$, nous avons alors besoin d'un nombre de particules différentielles supérieur à 10^4.

X.6.4 Quel ordre utiliser pour le flot intégré ?

En résumé, d'après Eqs.(X.63), (X.65) et (X.68), la contribution du flot dans les cumulants différentiels s'écrit toujours comme le produit de v'_n et d'une puissance de v_p, p n'étant pas forcément identique à n. Ainsi, pour obtenir le flot différentiel, nous devons diviser les cumulants différentiels par le flot intégré. Ce dernier apparaît donc comme une référence au plan de réaction dans le sens qu'il est analogue à la résolution du plan de l'événement dans la méthode standard : il faut diviser le flot différentiel observé par la résolution du plan de l'événement [*cf.* Eq.(IV.12)]. Cependant cette reconstruction préalable du flot intégré peut se faire à partir d'ordres différents. Nous disposons donc *a priori* de plusieurs valeurs possibles. Laquelle utiliser ?

Pour les cumulants d'ordre pair, il est assez naturel d'utiliser le même ordre pour le cumulant différentiel et le cumulant intégré. Autrement dit, dans (X.63), $v'_n\{2k\}$ est reconstruit en utilisant $v_n\{2k\}$. En procédant ainsi, la physique contenue dans le flot intégré et le flot différentiel est la même. Par exemple, à l'ordre 4, les corrélations «nonflow» à deux particules sont éliminées dans les deux cas.

Pour le cumulant d'ordre 3, la situation est moins évidente : si nous reconstruisons v'_2, nous avons besoin de v_1 qui est reconstruit à partir de cumulants d'ordre pair ; pour v'_1, nous avons besoin de v_1 et v_2, ce dernier étant également déterminé à partir de cumulants d'ordre pair. Nous n'utilisons donc pas le même ordre pour les cumulants du flot intégré et ceux du flot différentiel. Cependant, le cumulant d'ordre 3 ne contenant pas de corrélations «nonflow» à deux particules, il semble légitime d'utiliser l'ordre 4 pour le flot intégré et non l'ordre 2, même si l'erreur statistique sur l'ordre 4 est plus élevée. D'ailleurs, le principe de l'utilisation de la corrélation mixte à trois particules est de reconstruire une harmonique dans un contexte où l'autre harmonique est beaucoup plus grande.

X.7 Conclusion

Nous avons introduit les cumulants d'ordre supérieur des corrélations multiples pour le flot intégré et le flot différentiel. L'élimination ordre par ordre des corrélations «nonflow» induit une erreur systématique sur les cumulants de plus en plus faible. En revanche, l'erreur statistique augmente à mesure que l'on corrèle de plus en plus de particules entre elles. Il existe alors un ordre optimal, compromis entre les erreurs statistique et systématique.

En pratique, nous ne calculons pas les cumulants en inversant ordre par ordre la décomposition des corrélations multiples. Nous avons vu que le calcul des cumulants d'ordre 3 et 4 est loin d'être immédiat et l'on se doute bien que plus l'ordre du cumulant est élevé, plus ce calcul va se révéler fastidieux et laborieux, en particulier lorsque le détecteur n'est pas parfait (corrections d'acceptance). Nous utiliserons plutôt la technique des fonctions génératrices dont le développement en séries nous donne directement l'expression des cumulants en fonction des moments ou en fonction du flot, et ceci *à tous les ordres*. Les deux chapitres suivants présenteront la procédure pour le flot intégré d'abord, puis pour le flot différentiel. Les erreurs statistiques y seront également discutées en détail. Nous utiliserons deux types de fonctions génératrices, la première calculée avec le vecteur flot, et la seconde sans le vecteur flot. Nous soulignerons notamment l'avantage de la deuxième par rapport à la première. Enfin, nous présenterons les résultats que j'ai obtenus sur les données de NA49 au SPS, et ceux obtenus par A. Tang pour STAR à RHIC.

Chapitre XI

Flot intégré

Sommaire

XI.1 Fonction génératrice des corrélations azimutales multiples . . . 138
XI.1.1 Cas de l'analyse d'une seule harmonique . . . 138
XI.1.2 Moments de la distribution du vecteur flot . . . 139
XI.1.3 Cas des corrélations mixtes . . . 142
XI.2 Fonction génératrice des cumulants . . . 142
XI.2.1 Lien avec la fonction génératrice des moments . . . 142
XI.2.2 Expression des cumulants . . . 143
XI.2.3 Fluctuations de la multiplicité . . . 144
XI.2.4 Fonction génératrice des cumulants du vecteur flot . . . 145
XI.2.5 Fonction génératrice des cumulants mixtes . . . 145
XI.2.6 Conclusion . . . 146
XI.3 Relation entre les cumulants et le flot intégré . . . 146
XI.3.1 Cumulants des corrélations multiples . . . 146
XI.3.2 Cas des corrélations mixtes . . . 147
XI.3.3 Cumulants du vecteur flot . . . 147
XI.4 Erreurs statistiques et systématiques . . . 149
XI.4.1 Erreurs systématiques . . . 149
XI.4.2 Erreurs statistiques . . . 151
XI.4.3 Applicabilité de la méthode et caractère non gaussien du flot . . . 152
XI.5 Effets «nonflow» . . . 153
XI.6 Corrections d'acceptance . . . 154
XI.6.1 Cas d'une seule harmonique . . . 154
XI.6.2 Cumulant d'ordre 3 . . . 156
XI.7 Utilité de poids non unités . . . 156
XI.7.1 Modifications des cumulants . . . 156
XI.7.2 Erreurs statistiques . . . 157
XI.7.3 Une harmonique, une analyse ! . . . 157
XI.8 Simulations Monte-Carlo . . . 157
XI.8.1 Méthode des cumulants du vecteur flot . . . 157
XI.8.2 Méthode des cumulants des corrélations multiples . . . 158
XI.9 Application aux données de STAR . . . 160
XI.9.1 Soustraction des effets «nonflow» . . . 160
XI.9.2 Flot elliptique *vs.* centralité . . . 161
XI.10 Application aux données de NA49 . . . 162
XI.10.1 Données expérimentales . . . 162
XI.10.2 Statistiques . . . 163
XI.10.3 Utilisation de poids . . . 164

XI.10.4 Première mise en évidence d'effets collectifs au SPS 165
XI.10.5 Effets «nonflow» à deux particules 166
XI.11 Conclusion 167

Nous avons introduit dans le chapitre précédent les cumulants des corrélations azimutales multiples et nous avons présenté leurs avantages par rapport à la méthode standard, à savoir la soustraction automatique non seulement des effets d'acceptance du détecteur mais surtout des effets «nonflow» qui limitaient les analyses conventionnelles. Nous avons présenté comment les cumulants peuvent être calculés ordre par ordre. Cependant cette technique, même si elle est plus parlante car à un ordre donné, nous voyons la soustraction explicite des corrélations d'ordre inférieur, n'est pas celle que nous avons utilisée. Le but de ce chapitre est de présenter une procédure beaucoup plus élégante, les fonctions génératrices, qui permet de calculer les cumulants à tous les ordres, sans même connaître leurs expressions en fonction des moments d'ordre inférieur. L'utilisation de fonctions génératrices est donc un outil puissant. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la première étape dans notre analyse de flot, à savoir la reconstruction du flot intégré, ce dernier étant indispensable pour la reconstruction du flot différentiel. Nous présenterons les résultats obtenus pour STAR à RHIC par A. Tang et pour NA49 au SPS par moi-même.

XI.1 Fonction génératrice des corrélations azimutales multiples

Nous présenterons deux fonctions génératrices, l'une se basant sur les corrélations multiples du vecteur flot [1], et l'autre générant directement les corrélations multiples entre particules [2, 3]. Cette dernière possède des avantages certains par rapport à la première et nous insisterons donc surtout sur celle-ci.

Nous considérons un événement de multiplicité détectée M avec $M \leq N$, où N est le nombre total de particules produites. L'angle azimutal des particules utilisées, mesuré dans le repère du laboratoire, sera désigné par ϕ_j avec $j = 1, \ldots, M$.

XI.1.1 Cas de l'analyse d'une seule harmonique

Pour cet événement, nous définissons la fonction $G_n(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ par [2]

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \prod_{j=1}^{M} \left(1 + \omega_j \frac{z^* e^{in\phi_j} + z e^{-in\phi_j}}{M}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{M} \left(1 + 2\omega_j \frac{x\cos(n\phi_j) + y\sin(n\phi_j)}{M}\right), \end{aligned} \tag{XI.1}$$

où ω_j est un poids dépendant de l'impulsion transverse et/ou de la rapidité de la particule j. Nous notons que $G_n(z)$ est une fonction réelle. Nous poserons dans un premier temps $\omega_j = 1$ pour alléger les notations. En moyennant $G_n(z)$ sur tous les événements de même multiplicité, nous obtenons la fonction génératrice des corrélations multiples. En effet, en développant en

puissances de z et z^*, cette dernière s'écrit

$$\begin{aligned}\langle G_n(z)\rangle =& 1 + \frac{z}{M}\left\langle \sum_{j=1}^{M} e^{-in\phi_j} \right\rangle + \frac{z^*}{M}\left\langle \sum_{j=1}^{M} e^{in\phi_j} \right\rangle \\ &+ \frac{z^2}{M^2}\left\langle \sum_{j<k} e^{-in(\phi_j+\phi_k)} \right\rangle + \frac{z^{*2}}{M^2}\left\langle \sum_{j<k} e^{in(\phi_j+\phi_k)} \right\rangle + \frac{zz^*}{M^2}\left\langle \sum_{j\neq k} e^{in(\phi_j-\phi_k)} \right\rangle + \cdots \\ =& 1 + z\left\langle e^{-in\phi} \right\rangle + z^*\left\langle e^{in\phi} \right\rangle \\ &+ \frac{M-1}{M}\left[\frac{z^2}{2}\left\langle e^{-in(\phi_1+\phi_2)} \right\rangle + \frac{z^{*2}}{2}\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2)} \right\rangle + zz^*\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle\right] + \cdots\end{aligned} \tag{XI.2}$$

La variable z n'a aucune signification physique et ne sert qu'à développer en série la fonction $\langle G_n(z)\rangle$ et qu'à générer toutes les corrélations multiples, d'où le terme de fonction génératrice. En effet, à l'ordre $z^{*k}z^l$, mis à part un facteur de symétrie qui peut éventuellement apparaître, nous obtenons le moment d'ordre $(k+l)$, $\left\langle e^{in(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\phi_{k+l})}\right\rangle$. Par exemple, à l'ordre $|z|^2 = zz^*$, nous avons

$$zz^*\left(1-\frac{1}{M}\right)\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle. \tag{XI.3}$$

Pour être plus précis, le coefficient du terme zz^* ne donne pas exactement le moment d'ordre 2, mais à un facteur correctif en $1/M$ près. Cependant, dans la décomposition de la corrélation à deux particules (X.13) en cumulants, nous cherchions dans la corrélation à deux particules à identifier l'ordre de grandeur du terme «nonflow» et nous avons montré que l'erreur systématique sur le terme de flot, venant des corrélations «nonflow», est justement d'ordre $1/M$. Autrement dit, le coefficient du terme en $z^{*k}z^l$ n'est pas strictement égal au moment d'ordre $(k+l)$ mais apparaît avec des termes correctifs en M^{1-k-l}, cet ordre de grandeur étant exactement le même que celui des effets «nonflow» que nous voulons isoler en utilisant le cumulant d'ordre $(k+l)$. Les corrections en puissances de $1/M$ venant du facteur combinatoire ne sont donc pas gênantes.

Si le détecteur est parfait, seuls les termes isotropes en $|z|^{2k}$ survivent car $\langle G_n(z)\rangle$ ne doit pas dépendre de la phase de z. En effet, si nous changeons z en $ze^{in\alpha}$ dans (XI.1), α étant un angle quelconque, cela revient à faire une rotation globale de l'événement, *i.e.*, à translater tous les angles mesurés de $-\alpha$: $\phi_j \longrightarrow \phi_j - \alpha$. Or si l'acceptance du détecteur est isotrope, cet événement est équivalent à celui avant rotation et la moyenne sur les événements doit être inchangée. Finalement, dans le développement en série de $\langle G_n(z)\rangle$ ne contribuent que les moments d'ordre pair ne faisant intervenir que des angles relatifs entre les particules.

XI.1.2 Moments de la distribution du vecteur flot

Nous présentons maintenant une nouvelle fonction génératrice qui est, chronologiquement, la première que nous avons choisie [1] et qui peut être vue comme un cas limite de la précédente. Cette nouvelle méthode, bien que plus simple, présente des inconvénients qui la limitent fortement. Nous développerons ce point à la Section XI.3.3.

a Limite de grande multiplicité

Considérons la limite $M \longrightarrow \infty$ dans (XI.1) :

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \prod_{j=1}^{M} \left(1 + \frac{z^* e^{in\phi_j} + z e^{-in\phi_j}}{M}\right) \simeq \prod_{j=1}^{M} \exp\left(\frac{z^* e^{in\phi_j} + z e^{-in\phi_j}}{M}\right) \\ &\simeq \exp\left(\frac{z^*}{M}\sum_{j=1}^{M} e^{in\phi_j} + \frac{z}{M}\sum_{j=1}^{M} e^{-in\phi_j}\right). \end{aligned} \tag{XI.4}$$

Nous voyons apparaître une quantité que nous avions introduite dans la méthode des sous-événements à la Section IV.1, à savoir le vecteur Q_n (IV.9). Ici, nous prendrons la définition suivante pour Q_n :

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^{M} e^{in\phi_j}, \tag{XI.5}$$

qui diffère de (IV.9) par le facteur $1/\sqrt{M}$. Nous expliquerons plus loin l'utilité d'un tel facteur. Nous obtenons alors

$$G_n(z) \simeq \exp\left(\frac{z^* Q_n + z Q_n^*}{\sqrt{M}}\right). \tag{XI.6}$$

Dans [1], nous avions proposé de choisir comme fonction génératrice

$$\mathcal{G}_0(z) = e^{z^* Q_n + z Q_n^*}, \tag{XI.7}$$

similaire à $G_n(z)$ à un facteur $\sqrt{M}$ près. La relation entre les deux fonctions génératrices est donc

$$\begin{aligned} G_n(z) &\simeq \exp\left(\frac{z^*}{M} Q_n + \frac{z}{M} Q_n^*\right) \\ &\simeq \mathcal{G}_0\left(\frac{z}{\sqrt{M}}\right). \end{aligned} \tag{XI.8}$$

En fait, $\mathcal{G}_0(z)$ génère non pas les corrélations multiples mais les moments du vecteur flot : en moyennant sur les événements et en développant en puissances de z et z^*, nous obtenons la fonction génératrice des moments du vecteur Q_n

$$\langle \mathcal{G}_0(z) \rangle = \left\langle e^{z^* Q_n + z Q_n^*} \right\rangle = \sum_{k,l} \frac{z^{*k} z^l}{k!\, l!} \left\langle Q_n^k Q_n^{*l} \right\rangle. \tag{XI.9}$$

b Autocorrélations

Nous avons la correspondance (XI.8) entre $\mathcal{G}_0(z)$ et $G_n(z)$ dans la limite où $M \to \infty$ Cependant, pour des valeurs finies de M, des différences apparaissent. Pour le voir, écrivons les termes d'ordre 2 dans le développement en série de $\mathcal{G}_0(z)$ et $G_n(z)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_0(z) \rangle = \quad & \ldots + \frac{z z^*}{M^2} \left\langle \sum_{j,k} e^{in(\phi_j - \phi_k)} \right\rangle \\ & + \frac{z^2}{2M^2} \left\langle \sum_{j,k} e^{-in(\phi_j + \phi_k)} \right\rangle \\ & + \frac{z^{*2}}{2M^2} \left\langle \sum_{j,k} e^{in(\phi_j + \phi_k)} \right\rangle + \ldots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \langle G_n(z) \rangle = \quad & \ldots + \frac{z z^*}{M^2} \left\langle \sum_{j \neq k} e^{in(\phi_j - \phi_k)} \right\rangle \\ & + \frac{z^2}{2M^2} \left\langle \sum_{j \neq k} e^{-in(\phi_j + \phi_k)} \right\rangle \\ & + \frac{z^{*2}}{2M^2} \left\langle \sum_{j \neq k} e^{in(\phi_j + \phi_k)} \right\rangle + \ldots \end{aligned}$$

Dans $\langle \mathcal{G}_0(z) \rangle$, la somme porte sur des indices qui peuvent être égaux ($j = k$) et cela génère des termes qui ne correspondent pas à des corrélations (nous les appellerons «autocorrélations») et qui ne nous intéressent pas.

La différence essentielle entre les deux fonctions génératrices est que $\langle G_n(z) \rangle$ fait intervenir des sommes sur des particules *toutes différentes* : il n'y a donc jamais d'autocorrélations avec cette fonction génératrice. Nous reviendrons sur les problèmes que posent ces autocorrélations dans l'utilisation de la fonction $\langle \mathcal{G}_0(z) \rangle$.

c Moments du vecteur Q_n

Par la correspondance (XI.8) entre les deux fonctions génératrices, nous nous doutons bien que les limitations dont nous avons discuté au chapitre précédent sur les corrélations multiples seront les mêmes pour les moments du vecteur flot. Etudions simplement le cas du moment d'ordre 2, $\langle |Q_n|^2 \rangle$, pour nous en convaincre.

En effet, ce dernier s'écrit

$$\begin{aligned} \langle |Q_n|^2 \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{j,k=1}^{M} \left\langle e^{in(\phi_j - \phi_k)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{M} \left[M + M(M-1) \left\langle e^{in(\phi_j - \phi_k)} \right\rangle \right] \\ &= M \left[\frac{1}{M} + \frac{(M-1)}{M} \left(v_n^2 + \left\langle e^{in(\phi_j - \phi_k)} \right\rangle_c \right) \right]. \end{aligned} \tag{XI.10}$$

Le premier terme vient des «autocorrélations». En utilisant l'ordre de grandeur (X.13) de la corrélation à deux particules, nous pouvons obtenir celui de $\langle |Q_n|^2 \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle |Q_n|^2 \rangle &= M \left[v_n^2 + \frac{1}{M} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right] \\ &= \chi_n^2 + 1 + \mathcal{O}(1), \end{aligned} \tag{XI.11}$$

où $\chi_n = v_n \sqrt{M}$. Nous avions obtenu le même type de résultat lorsque nous avons mis en évidence la présence d'effets «nonflow» à deux particules dans la méthode des sous-événements, *cf.* Eq.(IV.32). A la Section IV.2.3, nous avons également présenté la procédure utilisée expérimentalement pour calculer la résolution du plan de l'événement, via la corrélation entre deux sous-événements. Nous pouvons voir cette dernière comme la corrélation entre le vecteur Q_{I} du premier sous-événement et le vecteur Q_{II} du second sous-événement. C'est en fait tout à fait analogue au moment d'ordre 2 (XI.10). En particulier, nous avons la même contamination des effets «nonflow» à deux particules. Dans (XI.11), le flot est mesurable dans le moment d'ordre 2 si $v_n \gg 1/\sqrt{M}$: nous obtenons la même limitation (X.34) qu'avec le cumulant d'ordre 2 des corrélations multiples.

Finalement, en comparant (XI.3) et (XI.10), la seule différence majeure est le facteur M dans le moment du vecteur flot. Plus généralement, le moment du vecteur flot d'ordre k est relié à corrélation azimutale d'ordre k par un facteur $M^{k/2}$. Les limitations venant des corrélations «nonflow» sont donc exactement les mêmes pour les deux types de moments.

d Variation avec la centralité

Terminons sur l'introduction du facteur $1/\sqrt{M}$ dans la définition (XI.5) du vecteur Q_n. Elle permet en fait d'utiliser des événements qui n'ont pas tous la même multiplicité, ou autrement dit, des collisions qui n'ont pas toutes la même centralité. D'ailleurs, en pratique, l'analyse de flot est faite sur un intervalle en centralité de façon à augmenter la statistique.

S'il n'y a pas de flot, la somme dans (XI.5) peut être interprétée comme une marche aléatoire de longueur $\sqrt{M}$ (*cf.* Section IV.2.1). Le moment d'ordre 2 $\langle |Q_n|^2 \rangle$ est donc indépendant de M, ce que nous retrouvons dans (XI.11) en enlevant le terme de flot. D'autre part, le flot dépend fortement de la centralité (*cf.* Section III.5.2). L'étude de la variation dans la dépendance de $\langle |Q_n|^2 \rangle$ en centralité, due au flot et non aux corrélations «nonflow», peut en principe permettre d'isoler la contribution du flot [10]. Cependant, la sélection en centralité n'est pas bien contrôlée.

En revanche, en utilisant les cumulants d'ordre supérieur, nous soustrayons la contribution des effets «nonflow» dont la présence fait que tous les moments du vecteur flot sont d'ordre 1. Nous pouvons alors faire une étude pour une centralité donnée et les incertitudes de la multiplicité, venant du fait que l'analyse est faite non pas pour une centralité bien précise mais sur un intervalle en centralité, sont compensées par le facteur $1/\sqrt{M}$ dans (XI.5).

XI.1.3 Cas des corrélations mixtes

Pour les corrélations utilisant deux harmoniques différentes, la fonction génératrice correspondante nécessite l'utilisation de deux variables complexes, z_1 et z_2. Elle s'inspire fortement de (XI.1) et s'écrit

$$G(z_1, z_2) = \prod_{j=1}^{M} \left[1 + \frac{\omega_{1j}}{M} \left(z_1^* e^{i\phi_j} + z_1 e^{-i\phi_j} \right) + \frac{\omega_{2j}}{M} \left(z_2^* e^{2i\phi_j} + z_2 e^{-2i\phi_j} \right) \right]. \qquad \text{(XI.12)}$$

ω_{1j} (resp. ω_{2j}) est un poids adapté à la reconstruction du flot dirigé (resp. elliptique). Comme $G_n(z)$, $G(z_1, z_2)$ est une fonction réelle. Nous posons $\omega_{1j} = \omega_{2j} = 1$ pour simplifier l'écriture des corrélations. Le développement en puissances de z_1, z_1^*, z_2 et z_2^* de $\langle G(z_1, z_2) \rangle$ permet de générer des corrélations à tous les ordres. Par exemple, à l'ordre $z_1^{*2} z_2$, nous obtenons

$$\langle G(z_1, z_2) \rangle = \ldots + \frac{z_1^{*2} z_2}{2M^3} \left\langle \sum_{j,k,l} e^{i(\phi_j + \phi_k - 2\phi_l)} \right\rangle + \ldots \qquad \text{(XI.13)}$$

où nous reconnaissons la corrélation mixte à trois particules. Notez que la somme porte sur des indices i, j et k tous différents, évitant ici le problème des autocorrélations. Comme pour les fonctions génératrices précédentes, le développement en série de $\langle G(z_1, z_2) \rangle$ génère les corrélations azimutales à des termes correctifs en $1/M$ près. Dans la limite de grand M, le facteur M^3 s'élimine avec le facteur combinatoire $M(M-1)(M-2)$ qui vient de cette somme.

XI.2 Fonction génératrice des cumulants

Nous montrons maintenant comment ce formalisme nous permet d'obtenir simplement les cumulants à tous les ordres.

XI.2.1 Lien avec la fonction génératrice des moments

Dans le chapitre X, Sections X.3 et X.4, nous avons présenté la décomposition en cumulants des corrélations multiples. Il est bien connu en théorie des champs, que si nous avons la fonction génératrice des diagrammes connexes, son exponentiation génère tous les diagrammes, connexes ou non. Réciproquement, en prenant le logarithme de la fonction génératrice des moments, analogues aux diagrammes, nous obtenons la fonction génératrice des parties connexes, *i.e.*, des cumulants, analogues aux diagrammes connexes de la théorie des champs. Ici le fait que la multiplicité soit finie nous conduira à adopter une définition légèrement différente.

a Définition

La fonction génératrice des cumulants notée $C_n(z)$, dont le développement en série donne par définition les cumulants,

$$\begin{aligned} C_n(z) &\equiv \sum_{k,l} \frac{z^{*k} z^l}{k!\, l!} \left\langle\!\!\left\langle e^{in(\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\phi_{k+l})} \right\rangle\!\!\right\rangle \\ &= \sum_{k,l} \frac{z^{*k} z^l}{k!\, l!} c_n\{k+l\}, \end{aligned} \tag{XI.14}$$

est donc définie à partir de la fonction génératrice des moments $\langle G_n(z)\rangle$. Nous noterons parfois $c_n\{k+l\}$ le cumulant d'ordre $(k+l)$, bien que nous ayons conscience que cette écriture ne soit pas suffisante. En particulier, elle est mal adaptée aux cumulants mixtes.

Par analogie avec la théorie des champs, nous pourrions poser $C_n(z) \equiv \ln \langle G_n(z)\rangle$. Cependant, nous adoptons plutôt la définition suivante :

$$C_n(z) \equiv M \left[\langle G_n(z)\rangle^{1/M} - 1 \right]. \tag{XI.15}$$

Lorsque $M \gg 1$, nous avons la limite suivante

$$C_n(z) \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} \ln \langle G_n(z)\rangle \,. \tag{XI.16}$$

Afin de justifier (XI.15), étudions un système sans aucune corrélation et vérifions que les cumulants d'ordre supérieur à 2 sont alors tous nuls.

b Justification

S'il n'y a aucune corrélation dans le système, la fonction génératrice des moments se factorise :

$$\langle G_n(z)\rangle = \left(1 + \frac{z^* \left\langle e^{in\phi}\right\rangle + z \left\langle e^{-in\phi}\right\rangle}{M} \right)^M . \tag{XI.17}$$

La fonction génératrice des cumulants (XI.15) se réduit donc à

$$\mathcal{C}_n(z) = z^* \left\langle e^{in\phi}\right\rangle + z \left\langle e^{-in\phi}\right\rangle . \tag{XI.18}$$

Ainsi tous les cumulants d'ordre $(k+l) \geq 2$ sont nuls et c'est heureux puisqu'ils correspondent aux corrélations physiques à plus de deux particules. Or nous supposons ici qu'il n'y en a justement aucune.

En revanche, si nous avions utilisé la définition usuelle (XI.16), nous aurions le cumulant d'ordre 2 suivant

$$\left\langle\!\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle\!\!\right\rangle = \frac{1}{M} \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle \left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle , \tag{XI.19}$$

qui n'est pas strictement nul pour un détecteur imparfait. La raison est que $\langle G_n(z)\rangle$ ne génère les corrélations multiples qu'à des puissances en $1/M$ près [*cf.* Eq.(XI.3)].

XI.2.2 Expression des cumulants

Les cumulants définis par (XI.1), (XI.14) et (XI.15) coïncident avec ceux définis dans le Chapitre X dans la limite où M est grand. Vérifions-le sur l'ordre 2 et l'ordre 4.

a Cumulant d'ordre 2

Partant de (XI.15), en injectant le développement de $\langle G_n(z)\rangle$ donné par (XI.2) dans (XI.15) et en identifiant le terme d'ordre $|z|^2$ de (XI.14), nous obtenons

$$\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle = \frac{M-1}{M}\left[\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle - \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle\right]. \tag{XI.20}$$

Dans la limite où $M \gg 1$, nous retrouvons la définition (X.47). De plus si les particules ne sont pas corrélées, le moment d'ordre 2 se factorise : $\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle = \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle$. Le cumulant d'ordre 2 est donc nul, comme il se doit.

b Cumulant d'ordre 4

Nous avions défini le cumulant d'ordre 4 par Eq.(X.27),

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle \equiv& \left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle \\ &- \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_3)}\right\rangle\left\langle e^{in(\phi_2-\phi_4)}\right\rangle - \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_4)}\right\rangle\left\langle e^{in(\phi_2-\phi_3)}\right\rangle,\end{aligned} \tag{XI.21}$$

dans le cas d'un détecteur parfait. L'expression que nous obtenons, dans les mêmes conditions, par le développement à l'ordre $|z|^4$ de (XI.15) en diffère quelque peu. En effet, supposons pour simplifier que M soit fixée. La fonction génératrice des moments s'écrit

$$\langle G_n(z)\rangle = 1 + \frac{M-1}{M}|z|^2\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle + \frac{(M-1)(M-2)(M-3)}{4M^3}|z|^4\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle + \ldots \tag{XI.22}$$

Nous injectons cette expression dans (XI.15) et nous obtenons en développant à l'ordre $|z|^4$ le cumulant d'ordre 4 suivant

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\!\right\rangle &= \frac{M-1}{M}\left[\frac{(M-2)(M-3)}{M^2}\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle\right. \\ &\qquad \left. -2\frac{(M-1)^2}{M^2}\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle^2\right] \\ &= \left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}\right\rangle - 2\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right).\end{aligned} \tag{XI.23}$$

Nous retrouvons la définition (XI.21) à des termes d'ordre $1/M$ près.

Plus généralement, les cumulants d'ordre $(k+l)$ obtenus par le développement de la fonction génératrice des cumulants (XI.15) coïncident donc avec les cumulants que nous avons introduits dans le Chapitre X à des termes correctifs d'ordre $1/M$.

XI.2.3 Fluctuations de la multiplicité

Nous allons maintenant justifier le facteur $1/M$ dans la fonction génératrice (XI.1) qui apparaît comme une pondération de chacune des particules. Nous avons supposé que la moyenne se faisait sur des événements tous de même multiplicité M. Or la sélection des événements se fait plutôt sur un intervalle en centralité (*e.g.* dans l'analyse de NA49, la sélection se fait sur E_{ZDC}). La multiplicité peut donc fluctuer autour d'une valeur moyenne $\langle M\rangle$ avec des fluctuations $\delta M \equiv \sqrt{\langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2}$. La moyenne $\langle G_n(z)\rangle$ porte donc non seulement sur les événements de même multiplicité mais également sur M. Dans la définition de $C_n(z)$,

Eq.(XI.15), nous devons donc remplacer M par $\langle M\rangle$. Le développement en série donne l'expression suivante du cumulant d'ordre 2

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle &= \left\langle\frac{M-1}{M}\right\rangle\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle - \left(1-\frac{1}{\langle M\rangle}\right)\left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle \\ &= \left\langle\frac{M-1}{M}\right\rangle\left(\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle - \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle\right) - \frac{\delta M^2}{\langle M\rangle^3}\left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle .\end{aligned} \tag{XI.24}$$

Dans la dernière égalité, nous avons supposé que $\delta M \ll \langle M\rangle$ et nous avons fait l'approximation

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{1}{M}\right\rangle &= \left\langle\frac{1}{\langle M\rangle + M - \langle M\rangle}\right\rangle \simeq \left\langle\frac{1}{\langle M\rangle}\left(1-\frac{M-\langle M\rangle}{\langle M\rangle}+\frac{(M-\langle M\rangle)^2}{\langle M\rangle^2}\right)\right\rangle \\ &\simeq \frac{1}{\langle M\rangle}+\frac{\delta M^2}{\langle M\rangle^3}.\end{aligned} \tag{XI.25}$$

Si $\delta M \ll \langle M\rangle$ et $M \gg 1$, la correction apportée par le dernier terme dans Eq.(XI.24) est négligeable et nous retrouvons la définition (X.47).

Maintenant sans le facteur $1/M$ dans la définition (XI.1), nous aurions obtenu le cumulant d'ordre 2 suivant

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\right\rangle &= \langle M(M-1)\rangle\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle - \langle M\rangle\left(\langle M\rangle-1\right)\left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle \\ &= \langle M(M-1)\rangle\left(\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)}\right\rangle - \left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle\right) + \delta M^2\left\langle e^{in\phi_1}\right\rangle\left\langle e^{-in\phi_2}\right\rangle .\end{aligned} \tag{XI.26}$$

Ainsi le deuxième terme dans le membre de droite de (XI.26) a un coefficient relatif par rapport au premier terme de l'ordre de $\delta M^2/\langle M\rangle^2$ alors que dans (XI.24), il apparaît avec le coefficient $\delta M^2/\langle M\rangle^3$ qui est plus faible. Le poids $1/M$ minimise donc l'effet des fluctuations de M.

Pour éviter ces termes correctifs lorsque M fluctue, il est préférable d'utiliser une multiplicité fixe pour chacun des événements. Pour ce faire, il suffit de choisir au hasard les M particules qui interviennent dans $\langle G_n(z)\rangle$ parmi celles détectées dans un événement donné.

XI.2.4 Fonction génératrice des cumulants du vecteur flot

Disons juste quelques mots sur la fonction génératrice des cumulants du vecteur flot (XI.5). D'après (XI.9), la fonction $\mathcal{G}_0(z)$ génère réellement les moments du vecteur flot, sans correction d'ordre $1/M$ comme pour la fonction $G_n(z)$. Nous pouvons donc définir la fonction génératrice des cumulants du vecteur flot comme [1]

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0(z) &\equiv \sum_{k,l}\frac{z^{*k}z^l}{k!\,l!}\left\langle Q^k Q^{*l}\right\rangle_c \\ &= \ln\langle\mathcal{G}_0(z)\rangle .\end{aligned} \tag{XI.27}$$

Ainsi, en développant le membre de droite de la deuxième égalité de (XI.27) et en identifiant les termes en $z^{*k}z^l$, nous obtenons directement $\left\langle\!\left\langle Q^k Q^{*l}\right\rangle\!\right\rangle$ en fonction des moments d'ordre inférieur.

XI.2.5 Fonction génératrice des cumulants mixtes

Comme pour $C_n(z)$, en utilisant la fonction génératrice (XI.12), nous définissons la fonction génératrice des cumulants mixtes par

$$\mathcal{C}(z_1, z_2) \equiv M \left(\langle G(z_1, z_2) \rangle^{1/M} - 1 \right). \tag{XI.28}$$

Le développement en puissances de z_1, z_1^*, z_2 et z_2^* permet de définir les cumulants à tous les ordres

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}(z_1, z_2) \\ &\equiv \sum_{j,k,l,m} \frac{{z_1^*}^j z_1^k {z_2^*}^l z_2^m}{j!\,k!\,l!\,m!} \left\langle\!\!\left\langle e^{i(\phi_1 + \cdots + \phi_j - \phi_{j+1} - \cdots - \phi_{j+k} + 2(\phi_{j+k+1} + \cdots + \phi_{j+k+l} - \phi_{j+k+l+1} - \cdots - \phi_{j+k+l+m}))} \right\rangle\!\!\right\rangle . \end{aligned} \tag{XI.29}$$

Cette expression, bien compliquée, nous permet juste de noter que toutes sortes de cumulants sont générés. En pratique, nous n'utiliserons que le terme en ${z_1}^{*2} z_2$, correspondant au cumulant d'ordre 3, $\left\langle\!\!\left\langle e^{i(\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3)} \right\rangle\!\!\right\rangle$.

XI.2.6 Conclusion

La technique des fonctions génératrices est puissante dans le sens où elle nous permet d'obtenir directement les cumulants d'ordre arbitraire, sans avoir à inverser ordre par ordre les cumulants, comme nous l'avions fait dans le chapitre précédent, aux Sections X.3 et X.4.

XI.3 Relation entre les cumulants et le flot intégré

Nous allons maintenant montrer comment les cumulants permettent d'estimer le flot intégré. Pour cela, nous calculerons la contribution du flot aux cumulants dans le cas d'un détecteur parfait pour les différents types de fonctions génératrices introduites aux Sections XI.1 et XI.2. Nous supposerons que les seules corrélations dans le système sont celles dues au flot.

XI.3.1 Cumulants des corrélations multiples

Nous prendrons des poids unités pour faire un lien direct avec les cumulants du Chapitre X. La Section XI.7 discutera des modifications apportées par des poids non unités.

Pour calculer la valeur moyenne de $\langle G_n(z) \rangle$, nous effectuons d'abord la moyenne pour Φ_R fixé. Si nous négligeons toutes les corrélations «nonflow», la moyenne à Φ_R fixé se factorise et nous avons

$$\left\langle G_n(z) \middle| \Phi_R \right\rangle = \left(1 + \frac{z \left\langle e^{-in\phi} | \Phi_R \right\rangle + z^* \left\langle e^{in\phi} | \Phi_R \right\rangle}{M} \right)^M . \tag{XI.30}$$

En injectant l'expression de $\left\langle e^{\pm in\phi} \right\rangle$, Eq.(X.41), sans le terme d'acceptance, la fonction génératrice des moments s'écrit à Φ_R donné

$$\left\langle G_n(z) \middle| \Phi_R \right\rangle = \left(1 + \frac{z\, v_n\, e^{-in\Phi_R} + z^* v_n\, e^{in\Phi_R}}{M} \right)^M . \tag{XI.31}$$

Nous devons maintenant moyenner sur Φ_R et nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle G_n(z)\rangle &= \int_0^{2\pi} \left\langle G_n(z)\middle|\Phi_R\right\rangle \frac{\mathrm{d}\Phi_R}{2\pi} = \sum_{k=0}^{[M/2]} \frac{M!}{(M-2k)!(k!)^2}\left(\frac{v_n}{M}\right)^{2k}|z|^{2k} \\ &\simeq I_0(2\,v_n\,|z|).\end{aligned} \tag{XI.32}$$

Pour la dernière égalité, nous avons supposé que $M \gg 1$ de sorte que $M!/(M-2k)! \simeq M^{2k}$. La contribution du flot aux cumulants s'obtient par

$$C_n(z) \simeq M\left(I_0(2v_n|z|)^{1/M} - 1\right) \simeq \ln I_0(2\,v_n\,|z|), \tag{XI.33}$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0. Le fait que la variable z apparaisse dans (XI.33) sous la forme $|z|$ nous montre que seuls les cumulants isotropes (donc d'ordre pair) contribuent. D'ailleurs, le développement en série de cette fonction ne comporte que des termes pairs.

Finalement, lorsque nous superposons le flot et les corrélations «nonflow», le cumulant d'ordre $2k$, $c_n\{2k\}$, se décompose comme d'habitude en un terme de flot proportionnel à ${v_n}^{2k}$ et à la corrélation «nonflow» à $2k$ particules dont l'ordre de grandeur est M^{1-2k}. Par exemple, en développant (XI.33) en puissances de $|z|^2$, les quatre premiers ordres s'écrivent

$$c_n\{2\} \equiv \quad (v_n\{2\})^2 = \quad {v_n}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \tag{XI.34}$$

$$c_n\{4\} \equiv -(v_n\{4\})^4 = -{v_n}^4 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right), \tag{XI.35}$$

$$c_n\{6\} \equiv \quad 4\,(v_n\{6\})^6 = \quad 4\,{v_n}^6 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^5}\right), \tag{XI.36}$$

$$c_n\{8\} \equiv -33\,(v_n\{8\})^8 = -33\,{v_n}^8 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^7}\right). \tag{XI.37}$$

Nous retrouvons la décomposition du cumulant d'ordre 2, Eq.(X.49), et d'ordre 4, Eq.(X.50), et nous avons également les cumulants d'ordre 6 et 8, pour ainsi dire sans effort !

XI.3.2 Cas des corrélations mixtes

Dans le cas de la fonction génératrice (XI.28), seul le cumulant d'ordre 3 servira en pratique. Nous avons déjà donné la relation (X.51) entre ce cumulant et le flot. Nous la rappelons ici pour mémoire, dans le cas où nous reconstruisons v_2 à partir de v_1, et *vice versa* :

$$\left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\right\rangle \equiv v_{2/1}\{3\}\,v_1^2 = v_2\,v_1^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{XI.38a}$$

$$\left\langle\!\left\langle e^{i(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\right\rangle \equiv v_2\,(v_{1/2}\{3\})^2 = v_2\,v_1^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{XI.38b}$$

XI.3.3 Cumulants du vecteur flot

Nous allons maintenant effectuer un calcul similaire à la section précédente pour la fonction génératrice (XI.7). Nous étudierons notamment divers effets parasites mentionnés à la Section XI.1.2 et liés aux autocorrélations.

a Contribution du flot intégré

Nous pouvons calculer la contribution du flot intégré à la fonction génératrice des cumulants du vecteur flot exactement de la même manière. Comme la seule corrélation considérée ici est la corrélation au plan de réaction, les moments du vecteur Q_n se factorisent et s'écrivent

$$\left\langle Q_n^k Q_n^{*l} \middle| \Phi_R \right\rangle = \left\langle Q_n \middle| \Phi_R \right\rangle^k \left\langle Q_n^* \middle| \Phi_R \right\rangle^l = \chi_n^{k+l}\, e^{in(k-l)\Phi_R}, \tag{XI.39}$$

où $\chi_n = v_n\sqrt{M}$. La fonction génératrice des moments s'écrit, à Φ_R fixé,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{G}_0(z) \middle| \Phi_R \right\rangle &= \sum_{k,l} \frac{z^{*k} z^l}{k!\; l!} \left\langle Q_n^k Q_n^{*l} \middle| \Phi_R \right\rangle = \sum_{k,l} \frac{z^{*k} z^l}{k!\; l!}\; \chi_n^{k+l} e^{in(k-l)\Phi_R} \\ &= e^{(z^* e^{in\Phi_R} + z e^{-in\Phi_R})\chi_n}. \end{aligned} \tag{XI.40}$$

La moyenne sur Φ_R donne

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_0(z) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(z^* e^{ink\Phi_R} + z e^{-ink\Phi_R})\chi_n}\; \mathrm{d}\Phi_R \\ &= I_0(2|z|\chi_n). \end{aligned} \tag{XI.41}$$

Cette formule est analogue à (XI.32) sauf qu'il faut remplacer v_n par $\chi_n = v_n\sqrt{M}$, en accord avec la règle de correspondance (XI.8). En prenant le logarithme de (XI.41) et en développant en puissances de $|z|$, nous obtenons les mêmes relations entre le flot et les corrélations «nonflow», Eqs. (XI.34), (XI.35), (XI.36) et (XI.37).

b Soustraction des autocorrélations

Nous avons vu l'apparition d'autocorrélations dans les moments [de façon explicite dans le moment d'ordre 2, Eq.(XI.11)]. Elles donnent des contributions non nulles à tous les cumulants et correspondent aux cas où tous les angles sont égaux : $\phi_1 = \ldots = \phi_M = \phi$. Nous avons M choix possibles pour cet angle. Dans le cumulant $\langle\!\langle |Q_n|^{2k} \rangle\!\rangle$, nous obtenons un terme d'ordre $\frac{1}{M^k}$ à cause du facteur $1/\sqrt{M}$ dans la définition (XI.5) du vecteur Q_n. Avec le facteur combinatoire M, nous avons finalement une contribution des autocorrélations d'ordre M^{1-k}.

Nous pouvons calculer exactement cette contribution en utilisant la fonction génératrice $\mathcal{G}_0(z)$. En effet, négligeons *toutes* les corrélations. Nous pouvons alors factoriser toutes les valeurs moyennes dans $\langle \mathcal{G}_0(z) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_0(z) \rangle &= \left\langle \exp\left(z\,\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^{M} e^{-in\phi_j} + z^*\,\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^{M} e^{in\phi_j} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \exp\left(\frac{z\, e^{-in\phi} + z^*\, e^{in\phi}}{\sqrt{M}} \right) \right\rangle^M \\ &= \left\langle e^{(2x\cos\phi + 2y\sin\phi)/\sqrt{M}} \right\rangle^M. \end{aligned} \tag{XI.42}$$

La valeur moyenne dans (XI.42) porte sur l'angle ϕ qui est supposé distribué de façon isotrope. L'intégration sur ϕ donne finalement

$$\langle \mathcal{G}_0(z) \rangle = \left[I_0\left(\frac{2|z|}{\sqrt{M}} \right) \right]^M. \tag{XI.43}$$

Enfin, en prenant le logarithme, nous obtenons la contribution des autocorrélations à la fonction génératrice des cumulants que nous pouvons soustraire purement et simplement. Il est à noter que cette formule analytique n'est valable que si le vecteur flot est défini avec des poids unités.

c Interférence avec les harmoniques supérieures

Dans la décomposition en parties connexes du cumulant d'ordre 4, Eq.(X.31), nous avons noté un terme d'interférence d'ordre ${v_{2n}}^2/N^2$, entrant en compétition avec le terme de flot pur, $-{v_n}^4$. Cela pouvait éventuellement devenir gênant quand v_2 devient trop grand par rapport à v_1.

En utilisant le cumulant d'ordre 4 du vecteur flot, nous obtenons précisément un terme de cet ordre. En effet, le cumulant s'écrit

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle |Q_n|^4 \right\rangle\!\right\rangle \equiv & \frac{1}{M^2} \sum_{j,k,l,m} \left\langle\!\left\langle e^{in(\phi_j+\phi_k-\phi_l-\phi_m)} \right\rangle\!\right\rangle \\ = & \frac{1}{M^2} \sum_{j,k,l,m} \left[\left\langle e^{in(\phi_j+\phi_k-\phi_l-\phi_m)} \right\rangle - \left\langle e^{in(\phi_j-\phi_l)} \right\rangle \left\langle e^{in(\phi_k-\phi_m)} \right\rangle \right. \\ & \left. - \left\langle e^{in(\phi_j-\phi_m)} \right\rangle \left\langle e^{in(\phi_k-\phi_l)} \right\rangle \right]\end{aligned} \tag{XI.44}$$

Les termes avec $j = k$ et/ou $l = m$ font apparaître l'harmonique v_{2n}. Nous renvoyons à l'Appendice A de [2] où le calcul de $\left\langle\!\left\langle |Q_n|^4 \right\rangle\!\right\rangle$ est fait avec soin. En négligeant les corrélations «nonflow», nous obtenons

$$\left\langle\!\left\langle |Q_n|^4 \right\rangle\!\right\rangle = M^2 \left[-\frac{1}{M^3} - {v_n}^4 + \frac{2{v_n}^2 v_{2n}}{M^2} + \frac{{v_{2n}}^2}{M^2} \right]. \tag{XI.45}$$

Le premier terme correspond aux autocorrélations vues à la section précédente et peut être soustrait facilement. En revanche, les termes en v_{2n} sont plus gênants. En effet, nous souhaitons reconstruire l'harmonique v_n : pour que le terme $-{v_n}^4$ soit dominant, il faut en particulier que le cumulant d'ordre 4 soit négatif. Or si v_{2n} est trop grand, il risque de faire basculer le signe du cumulant. Posons $n = 1$ puisque c'est le seul cas en pratique où l'harmonique supérieure peut devenir plus grande que l'harmonique étudiée. Pour être certain que le cumulant soit négatif, il faut que v_2 vérifie les inégalités suivantes :

$$-M\,{v_1}^2\,(\sqrt{2}+1) < v_2 < M\,{v_1}^2\,(\sqrt{2}-1). \tag{XI.46}$$

Elles sont plus précises que la condition (X.37). Nous avons vérifié ces bornes lors de simulations Monte-Carlo présentées à la Section XI.8.1. Cette interférence avec une harmonique supérieure constitue la limitation majeure de cette méthode utilisant le vecteur flot. Ce problème n'apparaît pas avec la fonction génératrice des corrélations multiples puisque les sommes sur les angles se font sur des indices *tous différents* (*cf.* Section XI.1.2).

XI.4 Erreurs statistiques et systématiques

Nous avons calculé à la Section X.5.3 des formules approchées pour les erreurs statistiques. Elles sont valables dans la limite où le paramètre $\chi_n = v_n\sqrt{M}$ est petit devant 1, ce qui est le cas en pratique. Nous présentons ici des formules exactes quel que soit χ_n. Nous rappelons d'abord l'ordre de grandeur des erreurs systématiques. Puis nous présenterons les erreurs statistiques. Enfin nous discuterons l'applicabilité de notre méthode et notamment, le caractère non gaussien de la distribution du flot intégré.

XI.4.1 Erreurs systématiques

De manière générale, le cumulant d'ordre $2k$ se décompose comme suit

$$c_n\{2k\} \equiv \alpha_k \left(v_n\{2k\}\right)^{2k} = \alpha_k \; {v_n}^{2k} \; + \; \frac{1}{N^{2k-1}}, \tag{XI.47}$$

où α_k est un facteur numérique entier qui ne dépend que de l'ordre du cumulant et qui est donné par le développement en série de (XI.15). Si nous désignons par erreur systématique sur le cumulant d'ordre $2k$ l'ordre de grandeur des corrélations «nonflow» à $2k$ particules, $\left(\delta c_n\{2k\}\right)_{\rm syst} \sim N^{-2k+1}$, nous obtenons, pour le flot $v_n\{2k\}$, l'erreur systématique

$$\left(\delta v_n\{2k\}\right)_{\rm syst} \; \sim \; \frac{1}{\left(N|v_n|\right)^{2k-1}}. \tag{XI.48}$$

En pratique, toutes les particules ne sont pas détectées et la multiplicité M utilisée dans l'analyse diffère en général du nombre total N de particules produites. Ceci dit, M doit être le plus grand possible pour minimiser les erreurs statistiques. M et N peuvent être du même ordre de grandeur. Quoi qu'il en soit, il paraît plus naturel de faire intervenir dans (XI.48) la multiplicité M au lieu du nombre total de particules N, surtout si les effets «nonflow» sont à courte portée car ils se comportent plutôt comme une puissance négative de M et non de N. Dans ce cas, l'erreur systématique sur le cumulant d'ordre $2k$ s'écrit

$$\left(\delta v_n\{2k\}\right)_{\rm syst} \; \sim \; \frac{1}{\left(\sqrt{M}\chi_n\right)^{2k-1}}, \tag{XI.49}$$

où $\chi_n = |v_n|\sqrt{M}$ est un paramètre que nous avions déjà introduit en (IV.10).

Pour que la reconstruction du flot soit possible, nous avons montré à la Section X.3.4 que nous devons avoir $v_n \gg 1/N$. Pour être sûr que le flot soit dominant par rapport à tous les effets «nonflow», notamment ceux à courte portée, nous considérerons la condition plus stricte

$$v_n \gg \frac{1}{M}. \tag{XI.50}$$

Nous la supposerons vérifiée dans toute la suite. Ainsi, d'après (XI.49), l'erreur systématique décroît toujours quand k augmente. C'est justement pour cela que nous préconisons l'utilisation de cumulants d'ordre supérieur car le terme «nonflow» devient de plus en plus négligeable devant le terme de flot et les valeurs du flot accessibles peuvent être par conséquent de plus en plus faibles.

Nous obtenons pour $v_{2/1}\{3\}$ l'erreur systématique suivante

$$\left(\delta v_{2/1}\{3\}\right)_{\rm syst} = \frac{1}{\left(\sqrt{M}\,\chi_1\right)^2}. \tag{XI.51}$$

Notons que la référence à v_1 apparaît dans (XI.51) via χ_1. Nous pouvons comparer cette erreur avec celle que nous obtiendrions en utilisant $c_2\{2\}$ et $c_2\{4\}$:

$$\left(\delta v_2\{2\}\right)_{\rm syst} = \frac{1}{\sqrt{M}\,\chi_2}\;, \qquad\qquad \left(\delta v_2\{4\}\right)_{\rm syst} = \frac{1}{\left(\sqrt{M}\,\chi_2\right)^3}\;. \tag{XI.52}$$

L'erreur systématique sur $v_{2/1}\{3\}$ est *a priori* comprise entre les deux mais cela dépend évidemment des paramètres χ_1 et χ_2.

L'erreur systématique sur $v_{1/2}\{3\}$ vaut

$$\left(\delta v_{1/2}\{3\}\right)_{\rm syst} = \frac{1}{M\,\chi_1\,\chi_2}. \tag{XI.53}$$

Les paramètres de résolution pour les deux harmoniques interviennent tous les deux.

XI.4.2 Erreurs statistiques

En revanche, les erreurs statistiques doivent augmenter avec l'ordre du cumulant, *cf.* Section X.5.3. Elles peuvent être calculées à tous les ordres (*cf.* Appendice D de [2] et Section D de [3]). Pour les trois premiers ordres pairs et l'ordre 3, nous avons

$$(\delta c_n\{2\})_{\rm stat} = \frac{1}{M\sqrt{N_{\rm evts}}}\sqrt{1+2{\chi_n}^2}\ , \qquad (XI.54a)$$

$$(\delta c_n\{4\})_{\rm stat} = \frac{1}{M^2\sqrt{N_{\rm evts}}}\,2\sqrt{1+4{\chi_n}^2+{\chi_n}^4+2{\chi_n}^6}\ , \qquad (XI.54b)$$

$$(\delta c_n\{6\})_{\rm stat} = \frac{1}{M^3\sqrt{N_{\rm evts}}}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3+18{\chi_n}^2+9{\chi_n}^4+28{\chi_n}^6+12{\chi_n}^8+24{\chi_n}^{10}}\ , \qquad (XI.54c)$$

$$(\delta c\{3\})_{\rm stat} = \frac{1}{M^{3/2}\sqrt{N_{\rm evts}}}\,\frac{1}{2}\sqrt{2+4{\chi_1}^2+2{\chi_2}^2+{\chi_1}^4+4{\chi_1}^2{\chi_2}^2}\ . \qquad (XI.54d)$$

Les différents ordres sont également corrélés entre eux. Par exemple, la corrélation entre l'ordre 2 et l'ordre 4 vaut

$$\langle v_n\{2\}\,v_n\{4\}\rangle - \langle v_n\{2\}\rangle\,\langle v_n\{4\}\rangle = \frac{1}{2MN_{\rm evts}}. \qquad (XI.55)$$

Remarquons que (XI.54d) donne l'erreur statistique sur le cumulant d'ordre 3 et que l'erreur correspondante sur le flot dépend de l'harmonique que nous choisissons de reconstruire. En effet, nous devons tenir compte à la fois de l'erreur statistique sur le cumulant lui-même, mais également de celle sur le flot qui nous sert de référence. Enfin nous devons ajouter ces deux erreurs en quadrature. Plus précisément, nous avons

$$\frac{\left(\delta v_{2/1}\{3\}\right)^2_{\rm stat}}{{v_2}^2} = \frac{(\delta c\{3\})^2_{\rm stat}}{{v_1}^4} + 4{v_2}^2\frac{(\delta v_1)^2_{\rm stat}}{{v_1}^2}\ , \qquad (XI.56a)$$

$$\frac{\left(\delta v_{1/2}\{3\}\right)^2_{\rm stat}}{{v_1}^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{(\delta c\{3\})^2_{\rm stat}}{{v_1}^2{v_2}^2} + {v_1}^2\frac{(\delta v_2)^2_{\rm stat}}{{v_2}^2}\right]\ , \qquad (XI.56b)$$

Nous remarquons dans Eqs.(XI.54) que, dans la limite où $\chi_n \gg 1$, l'erreur relative sur $v_n\{k\}$ est indépendante de χ_n et de l'ordre du cumulant :

$$\frac{(\delta v_n\{k\})_{\rm stat}}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{2MN_{\rm evts}}}. \qquad (XI.57)$$

Nous pouvons facilement comprendre cette limite. Nous avons $v_n \gg 1/\sqrt{M}$ et dans ce cas, le plan de réaction Φ_R peut être évalué avec beaucoup de précision. Nous pouvons alors obtenir le flot intégré $v_n\{2k\}$ en moyennant $\cos n(\phi - \Phi_R)$ sur le nombre total de particules sur tous les événements, à savoir $MN_{\rm evts}$:

$$v_n\{2k\} \simeq \frac{1}{MN_{\rm evts}}\sum_{j=1}^{MN_{\rm evts}}\cos n(\phi - \Phi_R). \qquad (XI.58)$$

En prenant le carré de (XI.58), en moyennant sur les angles et enfin en prenant la racine carrée du résultat, nous obtenons l'erreur statistique sur $v_n\{2k\}$ qui vaut $1/\sqrt{2MN_{\rm evts}}$.

A l'opposé, dans la limite $\chi_n \ll 1$, l'erreur statistique relative sur le flot vaut

$$\frac{(\delta v_n\{2k\})_{\rm stat}}{v_n} \simeq \frac{1}{2\sqrt{N_{\rm evts}}}\,\frac{1}{{\chi_n}^{2k}}\ , \qquad (XI.59a)$$

$$\frac{\left(\delta v_{1/2}\{3\}\right)_{\rm stat}}{v_1} = \frac{\left(\delta v_{2/1}\{3\}\right)_{\rm stat}}{v_2} \simeq \frac{1}{2\sqrt{N_{\rm evts}}}\,\frac{1}{{\chi_1}^2\chi_2}\ . \qquad (XI.59b)$$

Nous retrouvons la formule approchée (X.55).

Dans le cas où $\chi_n \gg 1$, le cumulant d'ordre 2 et donc les méthodes standard suffisent à reconstruire le flot puisque la condition (X.34) est vérifiée. En pratique, nous avons plutôt $\chi_n \leq 1$, justifiant ainsi l'utilisation des cumulants d'ordre supérieur pour minimiser les erreurs systématiques. Mais d'autre part, les erreurs statistiques augmentent avec l'ordre du cumulant.

XI.4.3 Applicabilité de la méthode et caractère non gaussien du flot

D'après (XI.47), la possible reconstruction ou non de $v_n\{2k\}$ à partir du cumulant d'ordre $2k$ dépend du signe de $c_n\{2k\}/\alpha_k$. Plus exactement, il doit être positif. Dans le cas contraire, la méthode n'est pas applicable *a priori*. Cependant, il faut compter sur les erreurs statistiques pour renverser le signe du cumulant. Ce dernier a une distribution gaussienne par le théorème central limite. En revanche, ce n'est pas le cas pour les $v_n\{2k\}$ car la relation entre le cumulant et le flot n'est pas linéaire.

Nous introduisons la variable $\xi_k = (v_n\{2k\})^{2k} = c_n\{2k\}/\alpha_k$ qui est gaussienne autour de la vraie valeur du flot ${v_n}^{2k}$ avec une déviation standard $\sigma_k = |\alpha_k|\,(\delta c_n\{2k\})_{\rm stat}$, *cf.* Eqs.(XI.54). La distribution de ξ_k s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\xi_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{(\xi_k - {v_n}^{2k})^2}{2\sigma_k^2}\right). \tag{XI.60}$$

La Fig.XI.1 représente les distributions des trois premiers ordres $v_n\{2\}$, $v_n\{4\}$ et $v_n\{6\}$ pour une valeur moyenne de ξ_k à une déviation standard au-dessus de zéro, soit $\sigma_k = {v_n}^{2k}$. En utilisant (XI.60), nous avons une probabilité de 16% d'obtenir $\xi_k < 0$, auquel cas $v_n\{2k\}$ n'est pas défini. En revanche, pour les 84% cas restants, la distribution devient de plus en plus piquée autour de la valeur théorique au fur et à mesure que l'ordre utilisé augmente.

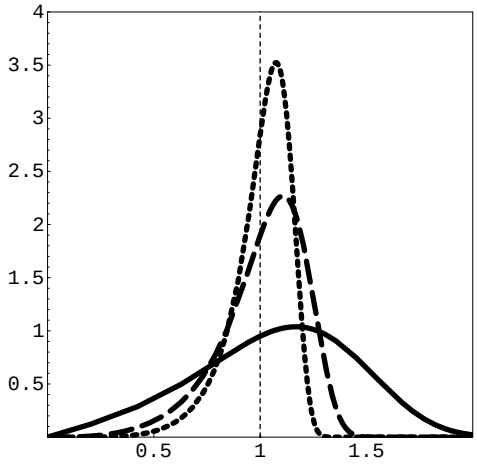


FIG. XI.1 – Distributions de $v_n\{2\}$ (trait plein), $v_n\{4\}$ (tirets) et $v_n\{6\}$ (pointillés), normalisées à la vraie valeur v_n.

Quant à l'applicabilité de la méthode, revenons sur les fluctuations en ξ_k : à une déviation standard, nous avons

$$\xi_k - \sigma_k \leq \xi_k \leq \xi_k + \sigma_k. \tag{XI.61}$$

Quatre cas se présentent, schématisés à la Fig.XI.2 :

i) $\xi_k - \sigma_k \geq 0$: le flot $v_n\{2k\}$ est alors défini partout et nous avons

$$(\xi_k - \sigma_k)^{1/2k} \;\leq\; v_n\{2k\} \;\leq\; (\xi_k + \sigma_k)^{1/2k}. \tag{XI.62}$$

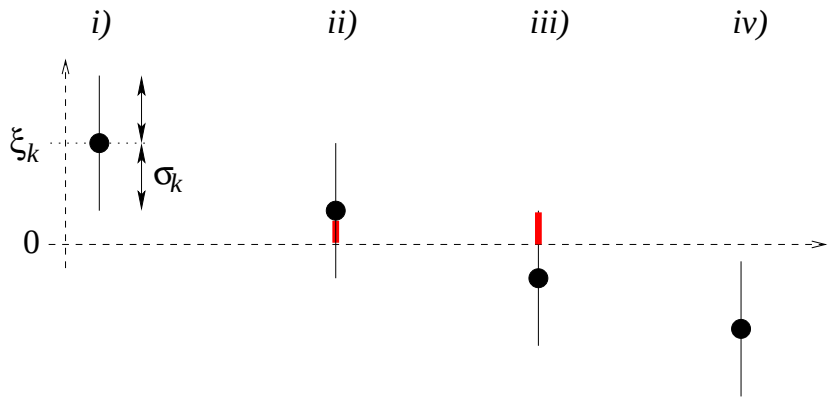


FIG. XI.2 – Applicabilité de la méthode suivant le signe de $\xi_k = (v_n\{2k\})^{2k}$ à un σ_k près, *cf.* discussion dans le corps du texte.

La barre d'erreur inférieure, $(\delta v_n)_- = v_n\{2k\} - (\xi_k - \sigma_k)^{1/2k}$, est *a priori* différente de la barre d'erreur supérieure, $(\delta v_n)_+ = (\xi_k + \sigma_k)^{1/2k} - v_n\{2k\}$. Pour un σ_k quelconque, nous pouvons avoir des barres d'erreur très asymétriques. En revanche, si $\sigma_k \ll 1$, nous retrouvons $(\delta v_n)_- \simeq (\delta v_n)_+ \simeq (\sigma_k)^{1/2k}$.

ii) $\xi_k - \sigma_k \leq 0 \leq \xi_k$: la barre d'erreur inférieure doit alors être prise égale au flot lui-même. Nous avons alors

$$0 \;\leq\; v_n\{2k\} \;\leq\; (\xi_k + \sigma_k)^{1/2k}. \tag{XI.63}$$

iii) $\xi_k \leq 0 \leq \xi_k + \sigma_k$: le flot est mis à zéro et nous ne prenons que la partie positive de la barre d'erreur supérieure sur ξ_k, soit

$$0 \;\leq\; v_n\{2k\} \;\leq\; (\sigma_k - |\xi_k|)^{1/2k}. \tag{XI.64}$$

iv) $\xi_k + \sigma_k \leq 0$: la méthode n'est pas applicable car à une déviation standard, le flot n'est pas défini. Cependant en considérant deux déviations standard, nous sommes quasi-certains d'avoir un cumulant qui a le bon signe (la probabilité pour que $\xi_k < 0$ se réduit alors à 2.3%).

Voila pourquoi dans les résultats d'analyse de flot, plus l'ordre du cumulant est élevé, plus les barres d'erreur sont asymétriques.

XI.5 Effets «nonflow»

Un avantage des cumulants d'ordre supérieur est qu'*a priori*, nous pouvons reconstruire le flot à partir d'un cumulant d'ordre quelconque et nous disposons donc d'autant de valeurs de flot reconstruites que de cumulants utilisés. En particulier, nous nous attendons à voir une différence nette entre $v_n\{2\}$ et $v_n\{4\}$. En effet, les corrélations «nonflow» à deux particules contribuent significativement au cumulant d'ordre 2 mais les corrélations «nonflow» à quatre, six,... particules ont un ordre de grandeur qui décroît très vite. En revanche, le flot, qui est un effet collectif par définition, doit s'exprimer de la même manière à tous les ordres. D'ailleurs, en combinant de façon astucieuse le cumulant d'ordre 2 et le cumulant d'ordre 4, nous pouvons extraire la corrélation «nonflow» à deux particules.

Le moyen pour étudier les corrélations «nonflow» à deux particules est de considérer la quantité suivante

$$C_n^{\mathrm{nfl}} \equiv N\,(v_n\{2\}^2 - v_n\{4\}^2). \tag{XI.65}$$

En effet, le terme $v_n\{2\}^2$ représente la contribution aux corrélations à deux particules du flot *et* des effets «nonflow» à deux particules, tandis que $v_n\{4\}^2$ représente également le flot dans les corrélations à deux particules mais n'est pollué que par les effets «nonflow» à quatre particules. La différence de ces deux quantités nous donne donc la contribution des effets «nonflow» au niveau des corrélations à deux particules. Par ailleurs, ces dernières se comportent comme $1/N$, *cf.* Eq.(IV.26). Si la différence entre l'ordre 2 et l'ordre 4 est uniquement due aux effets «nonflow» (et non à des fluctuations statistiques de la valeur du flot d'une centralité à une autre), cette différence doit être faible pour les collisions centrales (là où N est grand) mais doit s'accentuer pour les collisions périphériques. Autrement dit, C_n^{nfl} ne doit pas dépendre de la centralité et doit être une constante de l'ordre de 1.

Il n'est pas très clair de savoir s'il faut utiliser dans (XI.65) le nombre total de particules N ou plutôt la multiplicité M. La conservation de l'impulsion transverse totale produit une corrélation (VI.18) qui est de longue portée et qui se comporte comme $1/N$. En revanche, les corrélations à courte portée, comme les effets HBT, sont plutôt en $1/M$. Quoi qu'il en soit, M et N sont en pratique proportionnelles et cela ne change donc en rien le fait que C_n^{nfl} soit une constante ou non.

L'erreur statistique sur C_n^{nfl} est donnée grâce à

$$\begin{aligned}\left[\delta v_n\{2\}^2 - v_n\{4\}^2\right]^2 &= \left\langle v_n\{2\}^4\right\rangle - \left\langle v_n\{2\}^2\right\rangle^2 + \left\langle v_n\{2\}^4\right\rangle - \left\langle v_n\{2\}^2\right\rangle^2 \\ &\quad - 2\left(\left\langle v_n\{2\}^2 v_n\{4\}^2\right\rangle - \left\langle v_n\{2\}^2\right\rangle\left\langle v_n\{4\}^2\right\rangle\right) \\ &= \left[\delta(v_n\{2\}^2)\right]^2 + \left[\delta(v_n\{4\}^2)\right]^2 - \left[\delta(v_n\{2\}v_n\{4\})\right]^2\end{aligned} \tag{XI.66}$$

Nous utilisons maintenant le fait que $\delta(v^2) = 2\,v\,\delta v$ et que le paramètre $\chi = v_n\sqrt{M}$ calculé avec l'ordre 4 diffère peu de la valeur calculée avec l'ordre 2 (ou du moins que l'erreur statistique ci-dessus en dépend peu). En utilisant Eqs.(XI.54) et (XI.55), nous obtenons finalement

$$\delta C_n^{\mathrm{nfl}} = \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{evts}}}}\sqrt{\frac{N}{M}}\,\frac{\sqrt{1+4\chi^2+2\chi^4}}{\chi^2}. \tag{XI.67}$$

Nous présenterons à la Section XI.10.5 des résultats expérimentaux de l'analyse des données de NA49, pour l'harmonique $n = 2$. Nous obtenons effectivement $C_2^{\mathrm{nfl}} \simeq$ const.

XI.6 Corrections d'acceptance

Nous avons vu à la Section X.4 que le développement en cumulants permet d'isoler les corrélations physiques, en soustrayant les effets de détecteur. Cependant, si le détecteur n'a pas une couverture azimutale uniforme, les relations entre les cumulants et le flot ne sont pas celles déterminées à la Section XI.3. Il faut alors effectuer des corrections d'acceptance que nous calculons dans cette section.

XI.6.1 Cas d'une seule harmonique

Nous reprenons le calcul de la Section XI.3 pour un détecteur imparfait : nous calculons la valeur moyenne de la fonction génératrice lorsque les seules corrélations sont dues au flot. Pour une orientation donnée du plan de réaction Φ_R, l'expression de $\left\langle G_n(z)\middle|\Phi_R\right\rangle$ est toujours donnée par (XI.30). Cependant, nous devons maintenant y substituer l'expression de $\left\langle e^{in\phi}\middle|\Phi_R\right\rangle$ donnée par (X.41) avec tous les termes.

Récrivons l'expression de $\left\langle e^{-in\phi}\middle|\Phi_R\right\rangle$ donnée par (X.41)

$$\left\langle e^{-in\phi}\middle|\Phi_R\right\rangle = a_n + \sum_{p\neq 0}(a_{p+n} - a_n a_p)\, v_p\, e^{ip\Phi_R}. \tag{XI.68}$$

La contribution majeure de l'acceptance du détecteur est le premier terme a_n qui, nous le verrons plus loin, est automatiquement soustrait dans les cumulants. Cependant si l'acceptance est très anisotrope, les autres termes de la somme dans (XI.68) ne sont plus négligeables. En fait, connaissant l'acceptance d'un détecteur, nous pouvons calculer la correction qu'apportent ces termes et juger de leur importance ou non. En injectant (XI.68) dans $G_n(z)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\langle G_n(z)\middle|\Phi_R\right\rangle &= \left[1 + \frac{z}{M}\left(a_n + \sum_{p\neq 0}(a_{p+n} - a_n a_p)\, v_p\, e^{ip\Phi_R}\right) + \text{c.c.}\right]^M \\ &\simeq e^{z\,a_n + \text{c.c.}} \exp\left[z\sum_{p\neq 0}(a_{p+n} - a_n a_p)\, v_p\, e^{ip\Phi_R} + \text{c.c.}\right].\end{aligned} \tag{XI.69}$$

Nous avons négligé ici les sources de corrélation autres que le flot et nous nous sommes placés dans la limite où M est grand. Nous retrouvons évidemment (XI.31) si le détecteur est parfait (*i.e.* $a_0 = 1$ et $a_n = 0$, $\forall n \neq 0$).

Nous devons maintenant intégrer sur Φ_R puis prendre le logarithme puisque $C_n(z) \simeq \ln\langle G_n(z)\rangle$ quand M est grand. Le facteur $e^{z\,a_n + \text{c.c.}}$ ne dépend pas de Φ_R et ne participera pas aux cumulants d'ordre ≥ 2 car il donne une contribution linéaire en z et z^*. En développant (XI.69) au premier ordre en v_1 et v_2, *i.e.*, en ne gardant que les cas $p = \pm 1$ et $p = \pm 2$, nous obtenons les cumulants à l'ordre 2

$$c_1\{2\} \equiv (v_1\{2\})^2 = \alpha_1\, {v_1}^2 + \beta\, {v_2}^2\,, \tag{XI.70a}$$
$$c_2\{2\} \equiv (v_2\{2\})^2 = \beta\, {v_1}^2 + \alpha_2\, {v_2}^2\,, \tag{XI.70b}$$

où les coefficients α_n et β s'expriment en fonction des a_p :

$$\alpha_n = (1 - |a_n|^2)^2 + |a_{2n} - a_n^2|^2\,, \tag{XI.71a}$$
$$\beta = |a_1 - a_2 a_1^*|^2 + |a_3 - a_1 a_2|^2\,. \tag{XI.71b}$$

Nous obtenons le même type d'équations à l'ordre 4 :

$$-c_1\{4\} \equiv (v_1\{4\})^2 = \gamma_1\, {v_1}^4 + \delta\, {v_2}^4\,, \tag{XI.72a}$$
$$-c_2\{4\} \equiv (v_1\{4\})^2 = \delta\, {v_1}^4 + \gamma_2\, {v_2}^4. \tag{XI.72b}$$

avec

$$\gamma_n = (1 - |a_n|^2)^4 + 4\,(1 - |a_n|^2)^2\,|a_{2n} - a_n^2|^2 + |a_{2n} - a_n^2|^4\,, \tag{XI.73a}$$
$$\delta = |a_1 - a_2 a_1^*|^4 + 4\,|a_1 - a_2 a_1^*|^2\,|a_3 - a_1 a_2|^2 + |a_3 - a_1 a_2|^4\,. \tag{XI.73b}$$

Nous remarquons donc que dans $c_n\{2k\}$, les deux harmoniques v_1 et v_2 interfèrent. Il faut donc résoudre les systèmes de deux équations [(XI.70) pour l'ordre 2 et (XI.72) pour l'ordre 4] aux deux inconnues $v_1\{2k\}$ et $v_2\{2k\}$. Les corrections d'acceptance reviennent donc à faire une combinaison linéaire des cumulants apparents extraits de la fonction génératrice $C_n(z)$, pour donner les cumulants corrigés à partir desquels nous reconstruisons les valeurs du flot. Notons que pour effectuer les corrections d'acceptance, nous devons reconstruire simultanément le flot dirigé et le flot elliptique de façon à obtenir deux équations.

Cependant ces corrections se simplifient dans le cas d'une acceptance raisonnablement anisotrope : nous avons alors $|a_p| \leq 0.1$ pour $p \neq 0$. Par conséquent, $\alpha_n \simeq \gamma_n \simeq 1$, alors que $\beta, \delta \ll 1$ et les corrections relatives sur le flot (qui est lui-même de l'ordre du pourcent !) sont de l'ordre du pourcent. Finalement, les termes en β et γ étant négligeables, les deux harmoniques n'interfèrent plus et il n'est plus nécessaire de reconstruire en même temps v_1 et v_2. Les corrections d'acceptance se réduisent à un facteur numérique global entre le cumulant apparent extrait de la fonction génératrice et le vrai cumulant que nous cherchons à reconstruire.

XI.6.2 Cumulant d'ordre 3

Nous pouvons mener, sur la fonction génératrice des cumulants mixtes $G(z_1, z_2)$, le même type de calcul (XI.69) pour obtenir les corrections d'acceptance sur les cumulants [3]. Nous obtenons pour le cumulant mixte $c\{3\}$

$$c\{3\} = \Big\{ \left(1 - |a_2|^2\right) \left(1 - |a_1|^2\right)^2 + 2 \left(1 - |a_1|^2\right) |a_3 - a_1 a_2|^2 + 2\Re(a_1 - a_1^* a_2)^2 \left(a_2^* - a_1^{*2}\right) + 2\Re(a_4 - a_2^2) \left(a_2^* - a_1^{*2}\right)^2 \Big\} v_1^2 v_2, \quad \text{(XI.74)}$$

où $\Re$ désigne la partie réelle. Les corrections d'acceptance se réduisent ici exactement à un facteur numérique.

XI.7 Utilité de poids non unités

Jusqu'à maintenant, nous avions posé $\omega = 1$ dans les fonctions génératrices $G_n(z)$ et $\mathcal{G}_0(z)$ pour simplifier les écritures. En pratique, nous avons déjà remarqué que l'utilisation de poids adaptés à l'harmonique étudiée amenait des progrès nets dans l'analyse. Nous signalons ici les modifications à apporter dans la reconstruction avec des poids quelconques, uniquement sur les cumulants des corrélations multiples.

XI.7.1 Modifications des cumulants

L'introduction de poids modifie la quantité reconstruite à partir des cumulants : si nous négligeons toutes les corrélations «nonflow», la fonction génératrice à Φ_R donné s'écrit

$$\left\langle G_n(z) \middle| \Phi_R \right\rangle = \left(1 + \frac{z\, V_n\, e^{-in\Phi_R} + z^* V_n\, e^{in\Phi_R}}{M}\right)^M, \quad \text{(XI.75)}$$

où nous avons utilisé $V_n = \left\langle \omega e^{in(\phi - \Phi_R)} \right\rangle$ que nous avions déjà introduit en (IV.19). Cette équation est l'équivalente de (XI.31) avec un poids ω quelconque. Il suffit donc de remplacer v_n par V_n, en particulier dans (XI.33) et (XI.41), donnant la contribution du flot aux cumulants, et dans les corrections d'acceptance (XI.70) et (XI.72). Le flot v_n, quantité sans dimension, sera calculé par

$$v_n \equiv \frac{V_n}{\sqrt{\langle \omega^2 \rangle}}. \quad \text{(XI.76)}$$

L'utilisation de poids dans $G(z_1, z_2)$ définie par (XI.12) modifie également l'expression du cumulant d'ordre 3 : nous devons remplacer v_n par V_n dans (XI.38) et dans (XI.74).

Nous renvoyons le lecteur à la Section IV.2.4 qui présente les différents poids adaptés à v_1 et à v_2.

XI.7.2 Erreurs statistiques

Nous avons vu aux Sections XI.4.1 et XI.4.2 que le paramètre $\chi_n = v_n\sqrt{M}$ intervient à la fois dans les erreurs systématiques et dans les erreurs statistiques. L'utilisation de poids non unités permet d'augmenter la valeur du flot intégré reconstruite, et par suite, celle de χ_n. Il est donc crucial d'utiliser des poids adaptés à l'harmonique étudiée pour obtenir des barres statistiques faibles.

XI.7.3 Une harmonique, une analyse !

Nous pourrions être tentés de reconstruire en une seule analyse et le flot dirigé et le flot elliptique. Nous calculerions alors deux fonctions génératrices $G_1(z)$ et $G_2(z)$, pondérées respectivement par ω_1 et ω_2. Cependant les corrections d'acceptance seraient alors incorrectes. Pour que les choses soient plus claires, nous notons $\langle \omega_1 e^{in(\phi-\Phi_R)} \rangle = \langle \omega_1 v_n \rangle$ bien que nous sachions que cette écriture soit abusive. En tenant compte de l'acceptance du détecteur, les Eqs.(XI.70) à l'ordre 2 s'écrivent

$$c_1\{2\} = \alpha_1 \langle \omega_1 v_1 \rangle^2 + \beta \langle \omega_1 v_2 \rangle^2 \qquad (XI.77a)$$

$$c_2\{2\} = \beta \langle \omega_2 v_1 \rangle^2 + \alpha_2 \langle \omega_2 v_2 \rangle^2 \qquad (XI.77b)$$

Si $\omega_1 \neq \omega_2$, nous avons donc un système de deux équations à quatre et non deux inconnues ! Nous devons donc utiliser un seul et même poids ω pour les deux harmoniques. Le calcul de deux fonctions génératrices est alors superflu. En effet supposons que nous choisissions un poids adapté à v_1. Bien entendu nous devons avoir $\langle \omega_1 v_1 \rangle \gg \langle \omega_1 v_2 \rangle$. De plus, nous avons $\alpha_i \gg \beta$ et $\alpha_i \sim 1$ pour une acceptance raisonnable. Ainsi dans (XI.77a), le premier terme dans le membre de droite est doublement dominant et c'est justement celui-ci qui nous intéresse ! Nous pouvons même vérifier en calculant $c_1\{2\}$ et $c_2\{2\}$ et en résolvant le système (XI.77) que nous avons bien $\langle \omega_1 v_2 \rangle \ll \langle \omega_1 v_1 \rangle$.

En résumé, il faut faire une analyse pour reconstruire v_1 avec le poids correspondant, puis une autre analyse indépendante utilisant un autre poids adapté à v_2 (ou *vice versa*).

XI.8 Simulations Monte-Carlo

Avant d'appliquer nos différentes méthodes d'analyse sur des données expérimentales, nous les avons testées sur des simulations Monte-Carlo. Nous avons simulé N_{evts} événements, chacun d'eux ayant un plan de réaction Φ_R tiré au hasard. Puis M particules ont été générées suivant la distribution

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}(\phi - \Phi_R)} \propto 1 + 2v_1 \cos(\phi - \Phi_R) + 2v_2 \cos 2(\phi - \Phi_R). \qquad (XI.78)$$

Nous présentons d'abord nos résultats pour la méthode des cumulants du vecteur flot, en mettant notamment en évidence la limitation (XI.46) due à l'interférence avec les harmoniques supérieures. Ensuite, plusieurs simulations ont été effectuées sur la méthode des cumulants des corrélations multiples.

XI.8.1 Méthode des cumulants du vecteur flot

Nous avons simulé $N_{\text{evts}} = 200$k événements et nous avons choisi $M = 200$. Le but était de reconstruire le flot intégré v_1. Nous l'avons fixé à 0.03, valeur correspondant (à un signe près) au flot dirigé des pions mesuré par NA49. Nous avons injecté plusieurs valeurs de v_2 pour mettre en évidence les interférences entre les deux harmoniques et pour tester les limitations

de notre méthode. Enfin nous avons également simulé l'acceptance d'un détecteur imparfait en introduisant un angle α correspondant à la largeur d'un secteur azimutal non couvert par le détecteur.

Pour les valeurs de $N_{\rm evts}$ et de M choisies, l'ordre 4 est l'ordre optimal d'après (X.57). Le paramètre $\chi_1 = v_1\sqrt{M} \simeq 0.42 < 1$ nous indique que les méthodes standard ne sont pas assez performantes pour reconstruire v_1 proprement [*cf.* Eq.(X.34)]. Le paramètre χ_1 nous permet également de calculer l'erreur statistique sur v_1 en utilisant (XI.54*b*) : v_1 sera connu à $\pm 0.14 \times 10^{-2}$ près. Les résultats de la simulation sont présentés à la Table XI.1.

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 45°$	α =90°	α =135°	α =180°
$v_2 = 0$	3.04	3.10	3.11	2.91	2.11
$v_2 = 3$	2.83	2.85	2.98	2.78	2.57
$v_2 = 6$	2.65	2.82	2.78	3.55	4.24
$v_2 = -3$	3.30	3.22	3.23	2.99	2.57

TAB. XI.1 – Simulation Monte-Carlo de la reconstruction de v_1 pour différentes valeurs de v_2 et de α (non couverture azimutale). Les valeurs du flot sont données en %. L'erreur statistique sur v_1 est de 0.14%.

Nous avons d'abord testé les effets d'acceptance seules en prenant $v_2 = 0$. Nous obtenons des valeurs de v_1 reconstruites dans les barres d'erreur statistique sauf dans le cas où α =180°, ce qui correspond à un détecteur qui ne recouvrirait qu'une moitié en angle azimutal. Les corrections d'acceptance paraissent donc satisfaisantes.

En revanche, si nous augmentons v_2, la valeur du flot dirigé reconstruit est significativement modifiée, elle est même au-delà des barres d'erreur. L'encadrement de v_2 (XI.46) définissant les conditions de validité de la méthode donne numériquement, avec les valeurs de M et de v_1 choisies, $-0.43 < v_2 < 0.07$. Nous avons testé ces bornes numériquement. D'ailleurs, la valeur $v_2 = 0.06$ est proche de la limite supérieure. L'erreur relative varie entre 8% et 18% pour α entre 0° et 135°.

Enfin nous avons simulé des effets «nonflow» en générant des paires de particules colinéaires émises toujours suivant la distribution (XI.78). Pour les mêmes valeurs de M et $N_{\rm evts}$, et pour $v_2 = 0$, nous obtenons les résultats suivants

$$v_1\{2\} = 7.7\%\,, \qquad\qquad v_1\{4\} = 3.1\%. \tag{XI.79}$$

Comme il se doit, l'ordre 2 est fortement contaminé par les effets «nonflow» à deux particules. Il donne même une valeur deux fois trop grande, alors que $v_1\{4\}$ est compatible avec la valeur théorique dans les barres d'erreur.

XI.8.2 Méthode des cumulants des corrélations multiples

Différentes situations ont été simulées pour tester les différents points de notre méthode. Les résultats sont présentés à la Table XI.2.

i) *Fluctuations en M, acceptance parfaite* : la première simulation a été pour faite pour $N_{\rm evts} = 10^5$, $v_1 = 0$ et $v_2 = 6\,\%$. Elle avait pour but la reconstruction de v_2. Dans un premier temps, la multiplicité M a été fixée à 200 pour tous les événements. L'ordre optimal donné par (X.57) est l'ordre 4. Nos résultats reproduisent les 6 % théoriques dans les barres d'erreur. Dans un second temps, nous avons laissé M fluctuer entre 150 et 250. Les résultats, bien qu'au-delà de deux déviations standard, sont encore satisfaisants. Cependant, les barres d'erreur ont été calculées avec un M fixe. En prenant en compte les fluctuations, nous devrions obtenir des erreurs plus grandes.

ii) *Corrélations «nonflow», acceptance parfaite* : nous avons de nouveau fixé $M = 200$ et nous avons généré des particules par paires colinéaires, produisant artificiellement un effet «nonflow». Le résultat à l'ordre 2, correspondant également aux méthodes standard, donne une valeur qui est 1.5 fois la valeur théorique. En revanche, les résultats à l'ordre 4 et 6 sont beaucoup plus satisfaisants, bien qu'au-delà d'une déviation standard. Cependant, les barres d'erreur ont été calculées avec $M = 200$, alors que le nombre de particules indépendantes est plutôt 100. L'erreur sur l'ordre 4 vaut alors 0.11 % au lieu de 0.04 %, et 0.21 % au lieu de 0.05 % pour l'ordre 6, donnant une valeur du flot compatible avec la valeur théorique dans les barres d'erreur.

iii) *Acceptance imparfaite et fluctuations en M* : nous avons testé les corrections d'acceptance pour un détecteur inspiré de celui de PHENIX, que nous appellerons acceptance «papillon» (*cf.* Fig.XI.3). Les particules ne sont détectées que dans deux quadrants de 90° degrés avec une efficacité de 100 %. Nous avons donc réduit M à 100 particules. L'ordre optimal est toujours l'ordre 4. Les coefficients a_p pour cette acceptance se calculent aisément et donnent $a_2 = 2/\pi$ et $a_1 = a_3 = a_4 = 0$. En utilisant Eqs.(XI.70), nous obtenons

$$c_2\{2\} \simeq 0.518\, v_2\{2\}^2, \qquad (XI.80a)$$
$$c_2\{4\} \simeq -0.384\, v_2\{4\}^4, \qquad (XI.80b)$$

au lieu de (XI.34) et (XI.35) pour un détecteur parfait. Dans ce cas particulier, nous n'avons pas d'interférence entre v_1 et v_2 dans les cumulants apparents, ce qui n'est pas le cas en général. Les résultats sont très satisfaisants. D'ailleurs les barres d'erreur sont sous-estimées car calculées avec une acceptance parfaite. Sans les corrections d'acceptance, nous obtiendrions une valeur reconstruite inférieure à 5 %.

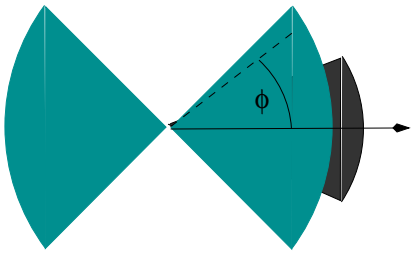


FIG. XI.3 – Représentation schématique du détecteur de PHENIX à RHIC. Les parties grises correspondent aux régions azimutales recouvertes par le détecteur alors que la petite portion noire représente un détecteur de temps de vol de 45°, utilisé pour l'identification des particules «différentielles».

Les résultats sont moins bons quand M peut fluctuer. Nous avions vu par (XI.24) que les erreurs induites sont de l'ordre de δM^2 pour une acceptance isotrope et sont vraisemblablement plus grandes pour un détecteur imparfait. La solution est de choisir au hasard parmi les particules détectées un nombre de particules fixe pour chaque événement.

iv) *Interférence des harmoniques supérieures* : contrairement à la méthode utilisant le vecteur flot, cette méthode ne devrait pas être limitée par l'interférence avec les harmoniques supérieures. Pour tester ce point, nous avons reconstruit $v_1 = 2\,\%$ avec différentes valeurs de v_2, 0 et 6 %. Nous avons eu besoin d'augmenter le nombre d'événements car 2 % est une valeur très faible pour le flot. Nous avons généré $N_{\mathrm{evts}} = 5 \times 10^5$ événements contenant chacun $M = 200$ particules. Les résultats pour une acceptance parfaite et pour l'acceptance «papillon» sont présentés à la Table XI.3. Les corrections d'acceptance pour

	$v_2\{2\}$	$v_2\{4\}$	$v_2\{6\}$
Acceptance parfaite, $M = 200$	6.01 ± 0.02	6.03 ± 0.04	6.08 ± 0.05
Acceptance parfaite, $150 < M < 250$	6.01 ± 0.02	6.11 ± 0.04	6.13 ± 0.05
Corrélations «nonflow», $M = 200$	9.21 ± 0.02	6.16 ± 0.04	6.19 ± 0.05
Acceptance «papillon», $M = 100$	5.99 ± 0.04	6.09 ± 0.12	$6.34\ ^{+0.19}_{-0.22}$
Acceptance «papillon», $75 < M < 125$	5.85 ± 0.04	5.40 ± 0.12	$5.74\ ^{+0.19}_{-0.22}$

TAB. XI.2 – Reconstruction du flot elliptique intégré. $N_{\text{evts}} = 10^5$ événements sont générés avec $v_1 = 0$ et $v_2 = 6\,\%$ dans chaque simulation. Les trois colonnes donnent respectivement la reconstruction à partir de l'ordre 2, 4 et 6.

v_1 dans le cas de l'acceptance de PHENIX donnent

$$c_1\{2\} \simeq 0.595\, v_1\{2\}^2, \qquad (XI.81a)$$
$$c_1\{4\} \simeq -2.758\, v_1\{4\}^4. \qquad (XI.81b)$$

Nous obtenons des reconstructions de v_1 toutes compatibles avec la valeur théorique dans les barres d'erreur. Avec l'ancienne méthode, une reconstruction de $v_1 = 2\,\%$ avec $M = 200$ serait impossible avec un flot elliptique aussi grand que $v_2 = 6\,\%$ car les limitations (XI.46) sur v_2 donnent dans ce cas $-19\,\% < v_2 < 3\,\%$. La nouvelle méthode présente donc un progrès net par rapport à l'ancienne vis-à-vis de ces interférences.

	$v_2 = 0$	$v_2 = 6\,\%$
Acceptance parfaite, $M = 200$	$2.01\ ^{+0.21}_{-0.32}$	$2.19\ ^{+0.21}_{-0.32}$
Acceptance «papillon», $M = 200$	$1.87\ ^{+0.21}_{-0.32}$	$1.88\ ^{+0.21}_{-0.32}$

TAB. XI.3 – Simulation Monte-Carlo de la reconstruction du flot intégré dirigé $v_1 = 2\,\%$, avec $N_{\text{evts}} = 5 \times 10^5$ et $M = 200$. Les résultats représentent $v_1\{4\}$ en %.

XI.9 Application aux données de STAR

A. Tang a implémenté dans la collaboration STAR à RHIC la méthode des cumulants du vecteur flot dans un premier temps, puis celle des cumulants des corrélations multiples dans un deuxième temps [13]. L'analyse a été faite sur les premières données de RHIC prises pendant l'été 2000. Pour le moment, seul le flot elliptique a été analysé et aucun résultat pour le flot dirigé n'est disponible. Les résultats sur v_2 sont très encourageants.

XI.9.1 Soustraction des effets «nonflow»

De nombreuses vérifications ont été faites pour montrer l'équivalence entre la méthode des sous-événements et la reconstruction par le cumulant d'ordre 2, avec des poids unités, des poids en p_T, etc. Des simulations ont également été effectuées pour mettre en évidence la soustraction des corrélations «nonflow» dans le cumulant d'ordre 4. La Fig.XI.4 présente la reconstruction de v_2 à partir de la méthode standard, du cumulant d'ordre 2 et du cumulant d'ordre 4, pour un système où, parmi les $M = 500$ particules générées selon une distribution par rapport au plan de réaction avec $v_2 = 10\%$, un certain nombre n_{emb} sont explicitement corrélées deux à deux («embedded pairs»). Sans surprise, les résultats du cumulant d'ordre 2

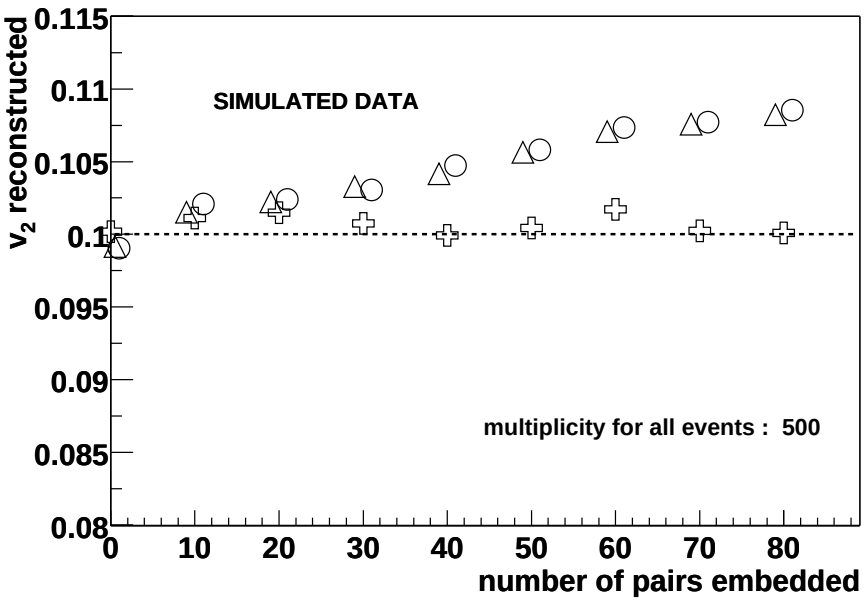


FIG. XI.4 – Simulation de corrélations «nonflow» à deux particules et reconstruction d'un flot elliptique de 10%. Cercles : méthode standard ; triangles : cumulant d'ordre 2 ; croix : cumulant d'ordre 4. Voir détails dans le corps du texte.

et de la méthode standard sont compatibles entre eux. Mais le point important est que, plus l'effet «nonflow» simulé est grand, et plus la déviation du v_2 reconstruit est loin de la valeur théorique, et ce, dès que $n_{\rm emb} = 0.02\,M$! En revanche, le cumulant d'ordre 4 reconstruit v_2 de façon très satisfaisante, avec une déviation de moins de 2% par rapport à la valeur théorique.

XI.9.2 Flot elliptique *vs.* centralité

La Fig.XI.5 présente la variation du flot elliptique intégré en fonction de $n_{ch}/n_{\rm max}$, rapport du nombre de particules chargées sur le maximum de particules chargées détectées. Les résultats de la méthode standard et du cumulant d'ordre 4 y sont comparées. Nous notons une très nette différence entre le v_2 standard et $v_2\{4\}$. Plus exactement, nous avons $v_2\{2\} > v_2\{4\}$ et cette différence s'accentue lorsque la collision devient périphérique. Nous pouvons l'expliquer en termes de corrélations «nonflow».

Tout d'abord, nous avons vu à la Section V.6 que les effets HBT surestimaient le flot. Il est donc rassurant de trouver $v_2\{4\} < v_2\{2\}$ puisque les corrélations «nonflow» à deux particules sont automatiquement soustraites du cumulant d'ordre 4.

Mais le point le plus intéressant est que la différence entre l'ordre 2 (ou la méthode standard) et l'ordre 4 augmente quand $n_{ch}/n_{\rm max}$ diminue ou, de façon équivalente, quand le nombre total de particules N diminue. Or dans la Partie B, tous les effets «nonflow» que nous avons calculés se comportent en $1/N$. Autrement dit, en allant des collisions centrales vers les collisions périphériques, N diminue et les effets «nonflow» *augmentent* : voilà pourquoi la différence entre la méthode standard et le cumulant d'ordre 4 s'accentue quand la centralité diminue.

Nous avons d'ailleurs présenté à la Section III.5.2 l'intérêt de la dépendance du flot en centralité. Elle permet notamment de rendre compte de la thermalisation du système. Les calculs hydrodynamiques prévoient une dépendance linéaire en fonction de la centralité. Nous notons que sur la Fig.XI.5, suivant les résultats que nous choisissons, les conclusions ne sont

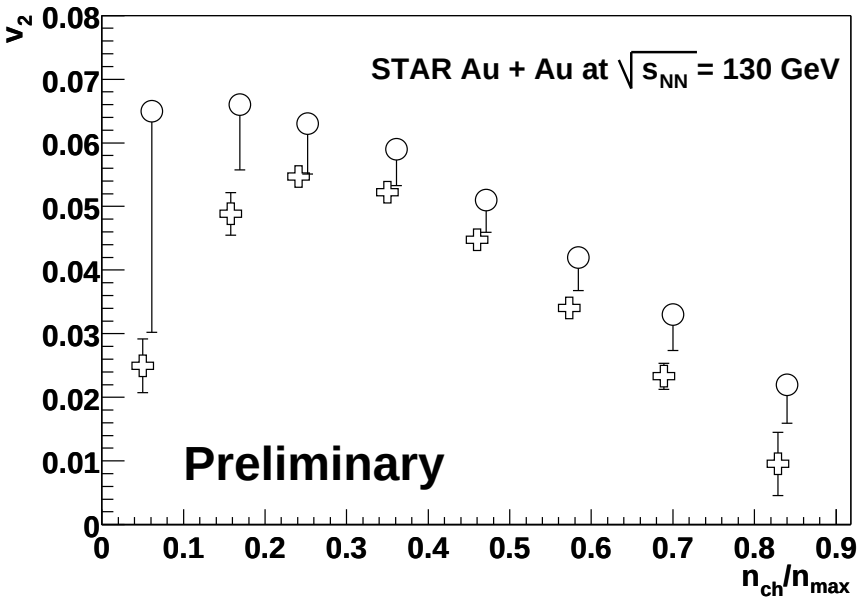


FIG. XI.5 – Flot elliptique intégré analysé par STAR, en fonction du nombre de particules chargées normalisé par le nombre maximum de particules chargées observé [13]. Cercles : méthode standard ; croix : cumulant d'ordre 4.

pas du tout les mêmes ! Il faut évidemment porter des conclusions sur la reconstruction à l'ordre 4 et cette dernière met donc en évidence une thermalisation incomplète du système dans les collisions périphériques.

Pour la prochaine analyse, l'accent sera vraisemblablement mis sur le flot dirigé : le cumulant mixte d'ordre 3 permet une reconstruction performante de v_1 grâce à la valeur élevée de v_2, alors que cette reconstruction est impossible avec les méthodes standard.

XI.10 Application aux données de NA49

En mai 2001, nous avons entamé une collaboration étroite avec NA49 et j'ai moi-même analysé leurs données de flot en appliquant nos nouvelles méthodes [2,3]. Dans le même temps, la méthode standard des sous-événements a évolué pour prendre en compte la conservation de l'impulsion [6] et cette analyse faite par A. M. Poskanzer et A. Wetzler a pu être confrontée directement à mes résultats. En particulier, le flot reconstruit à partir du cumulant à l'ordre 2 doit en principe être compatible avec celui de la méthode standard.

Dans un premier temps, nous replacerons notre analyse dans son contexte expérimental (énergie de la collision, centralité, multiplicité, ...). Puis nous présenterons nos résultats pour le flot intégré. Nous mettrons notamment en évidence la présence manifeste non seulement d'effets «nonflow» mais surtout, pour la première fois de manière aussi claire, la présence d'effets collectifs au SPS.

XI.10.1 Données expérimentales

L'expérience NA49 qui se tient au SPS du CERN depuis 1995 a mesuré des collisions Pb–Pb sur cible fixe. Une première prise de données a été effectuée en 1996 pour une énergie de 158 AGeV. L'analyse de flot correspondante a été publiée en 1998 [11]. Nous nous sommes déjà longuement étendus dessus. Les toutes dernières données à 158 AGeV datent de 2000 (dont

une grande statistique pour les collisions très centrales), auxquelles s'ajoutent des mesures à 40 AGeV. Notre collaboration avec NA49 fait l'objet d'une publication commune où la méthode standard et la méthode des cumulants seront comparées [14].

Etant donné que le flot dépend fortement du paramètre d'impact de la collision, nous avons effectué une analyse pour des intervalles («bins») en centralité bien précis. NA49 détermine la centralité d'une collision par la mesure de l'énergie déposée dans leur calorimètre à zéro degré, $E_{\rm ZDC}$ (*cf.* Section II.2.2). Six bins ont été ainsi définis. Il y a une correspondance approximative entre ces centralités et le paramètre d'impact ou la multiplicité. La Tab.XI.4 présente la correspondance avec le nombre de participants.

Intervalle en centralité	1	2	3	4	5	6
Nombre de participants	358	299	232	169	122	82

TAB. XI.4 – Correspondance entre les intervalles en centralité et le nombre de participants à 158 AGeV [14, 15].

XI.10.2 Statistiques

A la Section XI.2.3, nous avions soulevé les problèmes liés à la fluctuation de la multiplicité et nous avions conclu qu'il était préférable, pour les minimiser, de travailler avec une multiplicité fixe. Après avoir déterminé la multiplicité moyenne $\langle M\rangle_{\rm cent}$ dans chaque bin en centralité, nous avons choisi de fixer M à 80% de cette multiplicité moyenne, afin de garder le plus grand nombre d'événements. Nous avons effectué divers tests en variant la multiplicité utilisée et nous avons vérifié la compatibilité de nos résultats.

Les Tab. XI.5 et XI.6 résument la statistique obtenue par bin de centralité, pour le flot dirigé et le flot elliptique respectivement. N'oublions pas que les erreurs statistiques sur le flot données par Eq.(XI.54) sont régies non seulement par $\sqrt{N_{\rm evts}}$ mais surtout par le paramètre $\chi_n = v_n\sqrt{M}$: à l'ordre 4, réduire la multiplicité de moitié augmente les barres d'erreur d'un facteur 4 ! La multiplicité étant imposée par la physique, *i.e.*, par la centralité de la collision, le seul moyen pour diminuer les erreurs statistiques est donc d'augmenter $N_{\rm evts}$. Notons toutefois que pour compenser un facteur 2 sur M, il faudrait augmenter la statistique des événements d'un facteur 16 ! Pour les bins 1 et 2, toute la statistique n'a pas encore été analysée. La valeur du flot importe également dans les erreurs statistiques et le flot étant plus faible pour les collisions très centrales, les barres d'erreur vont être d'autant plus grandes. Finalement, ce sera pour les collisions semicentrales (bins 3 et 4) que les résultats seront les meilleurs.

158 AGeV	bin 1	bin 2	bin 3	bin 4	bin 5	bin 6
$N_{\rm evts}$	76922	110439	58758	55846	45567	70973
M	581	528	418	301	209	109
χ_1	0.349	0.353	0.340	0.386	0.434	0.382

TAB. XI.5 – Statistiques pour le flot dirigé intégré, dans chaque bin en centralité (du plus central au plus périphérique,) à 158 AGeV : $N_{\rm evts}$ (nombre d'événements), M (multiplicité utilisée) et $\chi_1 = \sqrt{M}v_1$ (calculé avec les valeurs de $v_1\{3\}$ obtenues à la Section XI.10 ou par défaut, $v_1\{2\}$ quand la reconstruction à l'ordre 3 n'est pas applicable).

L'acceptance de NA49 étant pratiquement isotrope, nous n'avons pas effectué de coupes dans l'espace des phases pour le flot intégré, et ce pour avoir une multiplicité la plus grande possible, les erreurs statistiques étant notre souci permanent.

158 AGeV	bin 1	bin 2	bin 3	bin 4	bin 5	bin 6
N_{evts}	640652	382369	53936	55846	45567	70973
M	591	528	419	301	209	109
χ_2	0.267	0.425	0.632	0.672	0.604	0.378
40 AGeV	bin 1	bin 2	bin 3	bin 4	bin 5	bin 6
N_{evts}	18469	27212	34868	30627	23884	32928
M	318	257	185	120	80	42
χ_2	0.064	0.440	0.468	0.387	0.402	0.229

TAB. XI.6 – Statistiques pour le flot elliptique intégré, dans chaque bin en centralité, à 158 AGeV et 40 AGeV : N_{evts} (nombre d'événements), M (multiplicité utilisée) et $\chi_2 = \sqrt{M} v_2$ (calculé avec les valeurs de $v_2\{4\}$ obtenues à la Section XI.10 ou par défaut, $v_2\{2\}$ quand la reconstruction à l'ordre 4 n'est pas applicable).

Outre le fait que le flot intégré nous sert de référence au plan de réaction dans la reconstruction du flot différentiel, sa variation avec la centralité nous renseigne notamment sur la thermalisation du système (*cf.* Section III.5). Nous avons ici une motivation supplémentaire : la comparaison des différents ordres va nous renseigner sur les effets «nonflow».

XI.10.3 Utilisation de poids

Une première analyse avait été effectuée avec des poids unités. Comme nous l'avons plusieurs fois expliqué, notre intérêt est d'avoir un flot intégré fort puisqu'il constitue notre référence au plan de réaction et que de lui dépendent notamment les erreurs statistiques. En nous inspirant des premiers résultats de la méthode standard, nous avons adopté des poids dépendant de p_T et de y que la Table XI.7 résume. Nous avons alors obtenu des valeurs de

	Poids
Pour v_1	$(y - y_{\text{CM}})$
Pour v_2	p_T

TAB. XI.7 – Poids utilisés pour la reconstruction du flot intégré. y_{CM} est la rapidité du centre de masse.

v_n plus élevées. La méthode standard a utilisé les mêmes poids dans la détermination de la résolution du plan de l'événement, étape analogue à la reconstruction de notre flot intégré.

L'utilisation d'un poids non unité a pour but d'augmenter la valeur du flot et ce qui est présenté n'est pas le flot brut lui-même mais le flot pondéré (XI.76). Nous pouvons d'ailleurs faire une estimation de la différence entre un v_2 reconstruit avec des poids unités et celui avec un poids en p_T. Nous noterons abusivement le flot pondéré par $\langle p_T\, v_2 \rangle \,/\, \langle p_T^2 \rangle^{1/2}$. Si $v_2 \propto p_T$ (puisque c'est le poids que nous choisissons), nous avons

$$\frac{\langle p_T\, v_2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle^{1/2}} \propto \frac{\langle p_T^2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle^{1/2}} = \sqrt{\langle p_T^2 \rangle}. \tag{XI.82}$$

Soit le rapport entre les deux flots intégrés nous donne

$$\frac{\langle p_T\, v_2 \rangle \,/\, \langle p_T^2 \rangle^{1/2}}{v_2} = \frac{\sqrt{\langle p_T^2 \rangle}}{\langle p_T \rangle} = \sqrt{\frac{2(x^2+3x+3)(1+x)}{x^3}} \frac{e^{-x}}{\mathrm{K_2(x)}}. \tag{XI.83}$$

Nous avons utilisé pour ce calcul une distribution exponentielle en m_T [*cf.* Eq.(V.21)], avec $x = m/T$ où m est la masse de la particule et T «the inverse slope parameter». K_2 désigne la deuxième fonction de Bessel modifiée d'ordre 2. Pour les pions, nous obtenons un facteur de 1.21.

XI.10.4 Première mise en évidence d'effets collectifs au SPS

La Fig.XI.6 présente les résultats de la reconstruction du flot intégré à 158 et à 40 GeV.

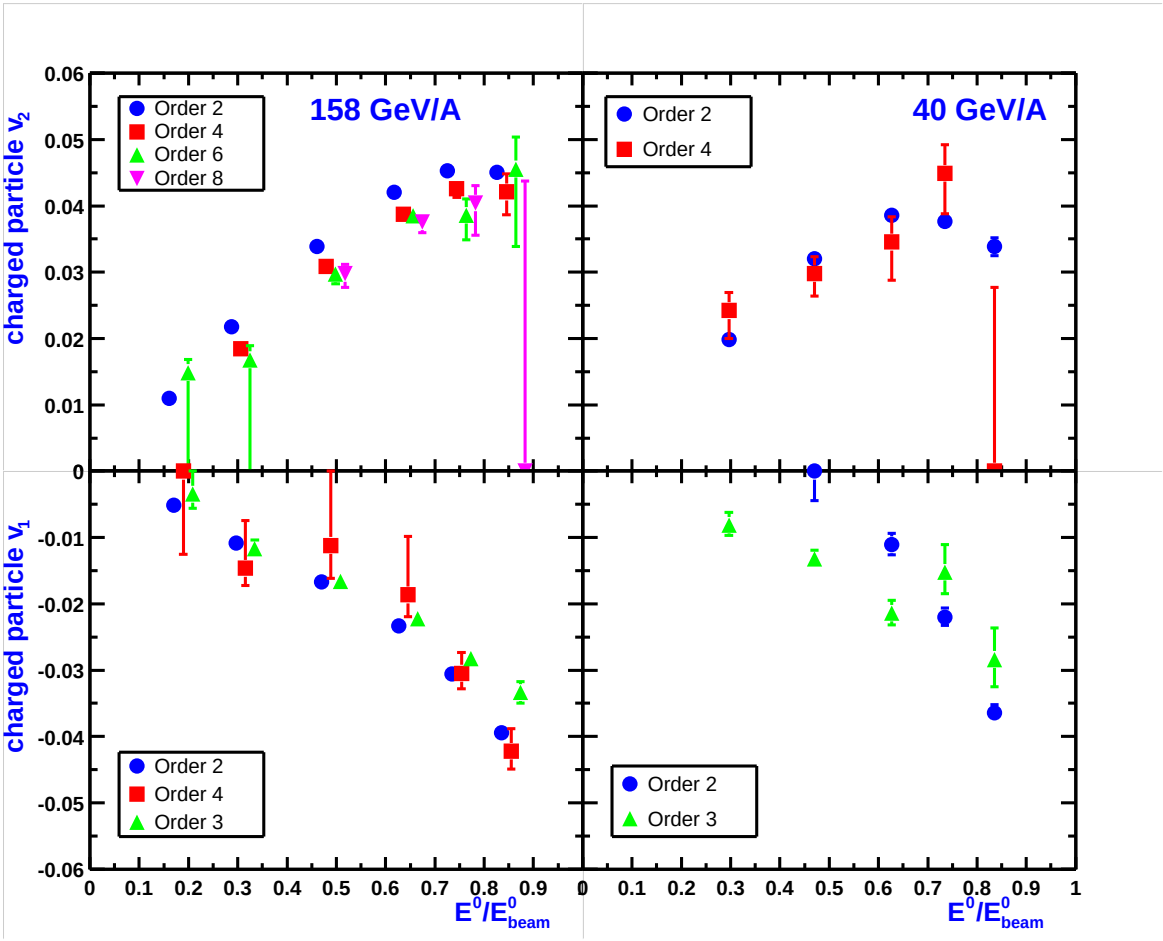


FIG. XI.6 – Flot intégré à 158 GeV (à gauche) et à 40 GeV (à droite), elliptique (en haut) et dirigé (en bas) en fonction de l'énergie du calorimètre à zéro degré, normalisée à sa valeur maximale, du bin le plus central au bin le plus périphérique (l'échelle à 40 GeV n'est pas encore connue au moment de l'impression et est donc identique à celle à 158 GeV).

a Flot dirigé

Les graphes en bas de la Fig.XI.6 présentent la variation du flot dirigé des particules chargées en fonction de la centralité. Notez que nous avons adopté la convention de NA49 qui est de poser un $v_1 > 0$ pour les protons et donc $v_1 < 0$ pour les pions. La reconstruction a été faite à partir des ordres 2, 3 et 4. Les barres d'erreur, très asymétriques, traduisent le fait que la distribution du flot n'est pas gaussien (*cf.* Section XI.4.3).

A 158 GeV, la différence entre l'ordre 2 et l'ordre 3 est faible mais s'accentue quand la collision devient de plus en plus périphérique. Quant à l'ordre 4, soit il est compatible avec

l'ordre 2, soit il est plus faible que ce dernier. Notons que la variation du flot avec l'ordre ne va pas dans le bon sens : nous nous attendons à avoir $v_1\{2\}$ inférieur (en valeur absolue) à $v_1\{3\}$ et $v_1\{4\}$ car la conservation de l'impulsion provoque une corrélation négative [cf Eq.(VI.23)] et sous-estime donc la valeur du flot.

En revanche, à 40 GeV, où l'effet de la conservation de l'impulsion doit être plus important qu'à 158 GeV, nous avons effectivement pour les collisions semi-périphériques $v_1\{3\} > v_1\{2\}$. La faible multiplicité ne nous permet pas d'avoir une reconstruction intéressante à l'ordre 4.

Ces résultats préliminaires présentent donc des anomalies qui restent encore à résoudre.

b Flot elliptique

Les graphes en haut de la Fig.XI.6 présentent le flot elliptique des particules chargées à 158 AGeV et à 40 AGeV. A 158 AGeV, nous avons pu reconstruire v_2 jusqu'à l'ordre 8, ce qui était inattendu. Même nous ne pouvions prévoir que la statistique serait suffisante pour obtenir un ordre 6 avec des barres d'erreur aussi faibles. D'après (X.57), l'ordre 4 est l'ordre optimal.

Nous remarquons ici une nette différence entre l'ordre 2 et les ordres supérieurs, au-delà de deux (voire trois) déviations standard. Cette différence est néanmoins beaucoup moins prononcée que dans le v_2 obtenu à STAR qui mettait en évidence la contribution indiscutable des effets «nonflow» dans les corrélations à deux particules. Cependant, les résultats de NA49 nous apprennent davantage : le fait que tous les ordres supérieurs se tiennent dans un mouchoir de poche signifie que non seulement les effets «nonflow» diminuent quand l'ordre du cumulant augmente, mais surtout que des effets collectifs, qui sont la source du flot, existent bel et bien. Ce flot doit s'exprimer à tous les ordres et c'est effectivement le cas. C'est à notre sens la première mise en évidence claire des effets collectifs au SPS.

Comme pour les résultats de STAR, *cf.* Fig.XI.5, nous avons $v_2\{2\} > v_2\{4\}$ et cela correspond à ce que nous attendions : les effets HBT surestiment le flot et la soustraction de ces derniers doit donc donner une valeur de flot plus faible. Nous reviendrons plus longuement sur la différence entre ces deux ordres dans la section XI.5.

A 40 AGeV, nous sommes restreints ici par une multiplicité M bien plus faible, ce qui a une conséquence visible sur les barres d'erreur. D'autre part, nous disposons de moins de statistique qu'à 158 AGeV. L'analyse étant en cours [14], nous ne pouvons présenter pour l'instant v_2 avec une meilleure statistique, ni le flot dirigé v_1.

XI.10.5 Effets «nonflow» à deux particules

Nous avons introduit la quantité (XI.65), C_n^{nfl}, qui étudie précisément les corrélations «nonflow» à deux particules en combinant le cumulant à l'ordre 2 et celui à l'ordre 4. Si elle était constante par rapport à la centralité, elle traduirait le fait que la différence entre l'ordre 2 et les ordres supérieurs sont dues essentiellement aux effets «nonflow» à deux particules et non à des fluctuations statistiques du flot (il n'y aurait dans ce cas aucune raison que C_n^{nfl} soit constante).

La Fig.XI.7 présente C_2^{nfl} calculée pour les particules chargées, en fonction de l'énergie du calorimètre à zéro degré, normalisée à l'énergie de la collision. Il est remarquable de noter que C_2^{nfl} fluctue peu, bien qu'elle soit plus faible pour les collisions les plus périphériques (grandes valeurs de E^0). Ceci confirme notre prédiction (*cf.* Chapitre VIII) : les corrélations «nonflow» à deux particules se comportent comme $1/N$.

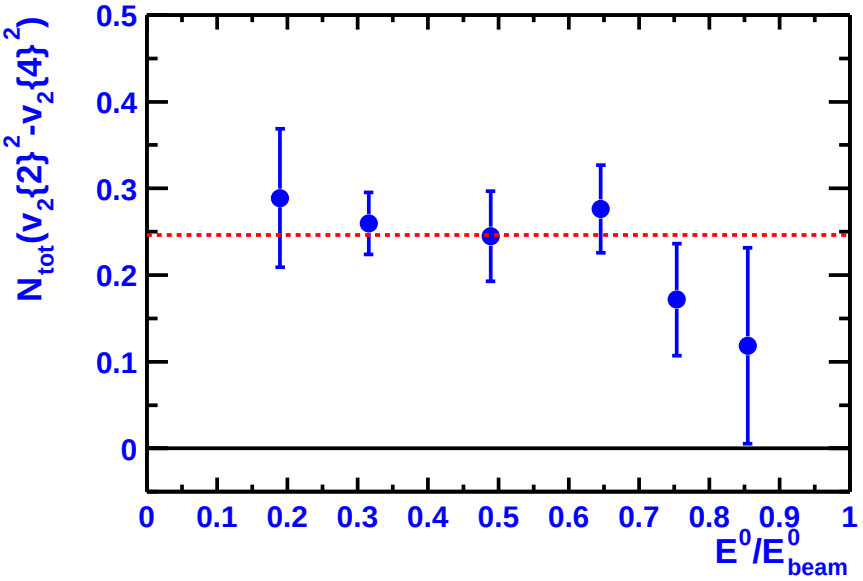


FIG. XI.7 – Mise en évidence des effets «nonflow» à 158 AGeV : variation avec la centralité de la quantité $C_2^{\rm nfl}$ [Eq.(XI.65)] pour des particules chargées.

XI.11 Conclusion

Nous avons exposé la méthode pratique pour mettre en place l'analyse du flot intégré par les cumulants d'ordre supérieur. Elle passe par l'utilisation de fonctions génératrices qui sont un moyen élégant de calculer les cumulants à un ordre arbitraire. Nous avons présenté deux fonctions génératrices, l'une se basant sur les moments de la distribution du vecteur flot, l'autre travaillant directement sur les corrélations multiples. Nous préconisons l'utilisation de cette dernière car elle présente des avantages certains par rapport à la première, notamment concernant l'interférence des harmoniques supérieures.

Un des intérêts des fonctions génératrices est que nous pouvons obtenir autant d'estimations du flot que nous désirons (dans la mesure où la statistique nous le permet) en choisissant l'ordre maximal des cumulants. Par exemple, si nous utilisons les cumulants jusqu'à l'ordre 8, nous obtenons quatre valeurs $v_n\{2\},\ldots,v_n\{8\}$ que nous pouvons comparer entre elles pour vérifier la cohérence de la méthode.

L'application de notre méthode dans les collaborations STAR à RHIC et NA49 au SPS nous donne des résultats plus qu'encourageants : il est possible de reconstruire v_2 jusqu'à l'ordre 8 au SPS et cela devrait être également le cas pour STAR car le v_2 à RHIC est plus élevé. Nous avons mis en évidence de façon claire la présence d'effets collectifs au SPS, se traduisant par des cumulants d'ordre supérieur à 2 tous compatibles entre eux, et les corrélations «nonflow» à deux particules à STAR et à NA49.

La deuxième étape de notre analyse est la reconstruction du flot différentiel, donnant accès à des informations plus fines sur la dépendance du flot en impulsion tranverse et en rapidité. Le chapitre précédent a présenté le principe de la reconstruction à partir de cumulants «différentiels». Dans le chapitre suivant, nous exposerons la méthode pratique pour calculer ces cumulants par la technique des fonctions génératrices, et nous présenterons les résultats de STAR et de NA49.

CHAPITRE XII

Flot différentiel

Sommaire

XII.1 Fonctions génératrices des corrélations 170
XII.1.1 Cas d'une seule harmonique 170
XII.1.2 Cas des corrélations mixtes 170
XII.2 Fonction génératrice des cumulants différentiels 170
XII.2.1 Définition 171
XII.2.2 Système sans corrélation 171
XII.2.3 Cumulants pertinents 171
XII.2.4 Autocorrélations 172
XII.3 Relation entre les cumulants et le flot 173
XII.3.1 Contribution du flot 173
XII.3.2 Erreurs statistiques 174
XII.4 Corrections d'acceptance 175
XII.4.1 Acceptance pour les particules «différentielles» 175
XII.4.2 Corrections d'acceptance pour $D_{mn/n}(z)$ 176
XII.4.3 Corrections d'acceptance pour $D(z_1, z_2)$ 178
XII.4.4 Cas d'une acceptance isotrope pour le flot intégré 178
XII.5 Utilisation de poids non unités 178
XII.6 Simulations Monte-Carlo 179
XII.6.1 Cas où $n = 2$: reconstruction de v_2' à partir de v_2 179
XII.6.2 Cas où $n = 1$: reconstruction de v_2' à partir de v_1 180
XII.7 Application aux données de STAR 181
XII.8 Application aux données de NA49 181
XII.8.1 Flot elliptique différentiel 182
XII.8.2 Flot dirigé différentiel 183
XII.9 Conclusion 185

Nous cherchons maintenant à mesurer le flot en fonction de l'impulsion transverse ou de la rapidité, ou plus généralement, dans une petite région de l'espace des phases. C'est ce que nous nommons «flot différentiel». Pour cela, nous corrélerons une particule appartenant à cette région (dite par convention «proton») à toutes les autres particules (dites «pions»), et nous effectuerons un développement en cumulants de ces corrélations. A partir de ces cumulants, nous obtiendrons diverses estimations du flot différentiel, comme nous avions obtenu différentes estimations du flot intégré dans le chapitre précédent.

XII.1 Fonctions génératrices des corrélations

Nous reprenons les notations de la Section X.6 : nous appelons «pions» les particules utilisées pour la reconstruction du flot intégré et «proton» la particule différentielle que nous corrélons à ces pions. Le flot différentiel de cette particule est noté $v'_p(p_T, y)$, où p_T désigne son impulsion transverse et y sa rapidité.

Pour construire les corrélations multiples entre le proton et les pions, nous faisons appel aux fonctions génératrices introduites dans le chapitre précédent à la Section XI.1. Quelle que soit la fonction génératrice utilisée, la technique reste la même. Nous l'expliciterons pour la fonction $G_n(z)$, Eq.(XI.1), et pour $G(z_1, z_2)$, Eq.(XI.12), le calcul étant analogue pour $\mathcal{G}_0(z)$, Eq.(XI.7). Nous poserons tous les poids égaux à 1 par souci de simplicité.

XII.1.1 Cas d'une seule harmonique

Pour obtenir les corrélations entre le proton et les pions, il suffit de considérer la fonction suivante :

$$\begin{aligned}\left\langle e^{ip\psi} G_n(z) \right\rangle &= \left\langle e^{ip\psi} \prod_{j=1}^{M} \left(1 + \frac{z^* e^{in\phi_j} + z e^{-in\phi_j}}{M}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle e^{ip\psi} \right\rangle + z \left\langle e^{i(p\psi - n\phi)} \right\rangle + z^* \left\langle e^{i(p\psi + n\phi)} \right\rangle + \cdots\end{aligned} \tag{XII.1}$$

Le développement en puissances de z et z^* génère les corrélations entre le proton et un nombre quelconque de pions : à l'ordre $z^k z^{*l}$, nous obtenons la corrélation entre un proton et $(k+l)$ pions.

Notons que le proton n'est pas nécessairement dans la même harmonique que les pions : nous pouvons avoir $p = n$ et nous en déduisons v'_n ; mais nous pouvons également avoir $p = mn$, où m est un entier naturel, auquel cas nous reconstruisons les harmoniques supérieures v'_{mn}. En pratique, le seul cas à considérer est pour $m = 2$ et $n = 1$, *i.e.*, nous reconstruisons v'_2 à partir de v_1.

XII.1.2 Cas des corrélations mixtes

Si la fonction génératrice des cumulants mixtes, $G(z_1, z_2)$, est utilisée à la place de $G_n(z)$ dans (XII.1), nous obtenons, pour $p = 1$, le développement

$$\begin{aligned}\left\langle e^{i\psi} G(z_1, z_2) \right\rangle &= \left\langle e^{i\psi} \prod_{j=1}^{M} \left(1 + \frac{z_1^* e^{i\phi_j} + z_1 e^{-i\phi_j}}{M} + \frac{z_2^* e^{2i\phi_j} + z_2 e^{-2i\phi_j}}{M}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle e^{i\psi} \right\rangle + z_1 \left\langle e^{i(\psi - \phi)} \right\rangle + z_2 \left\langle e^{i(\psi - 2\phi)} \right\rangle + \ldots,\end{aligned} \tag{XII.2}$$

qui nous servira à calculer les cumulants mixtes permettant la reconstruction de v'_1 à partir de v_2.

XII.2 Fonction génératrice des cumulants différentiels

Nous allons maintenant calculer les cumulants des corrélations entre un proton et un nombre arbitraire de pions, dits «cumulants différentiels».

XII.2.1 Définition

Pour obtenir la fonction génératrice des cumulants différentiels, nous faisons la remarque suivante : une corrélation d'ordre quelconque entre un proton et des pions peut s'écrire comme la somme de produits entre une corrélation connexe impliquant le proton et une corrélation, non nécessairement connexe, impliquant uniquement des pions. Par exemple, la Fig.XII.1 représente la décomposition de la corrélation entre un proton et trois pions, $\left\langle e^{in(\psi+\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle$. De façon analogue à la théorie des champs, en divisant $\left\langle e^{ip\psi}G_n(z)\right\rangle$, fonction génératrice des

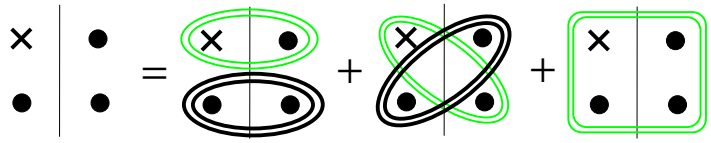


FIG. XII.1 – Décomposition diagrammatique de la corrélation entre le proton et trois pions en diagrammes connexes à «une patte externe» (avec une croix) en diagrammes «vide-vide» (sans croix, en gras).

moments différentiels (≡ diagrammes à «une patte externe»), par $\langle G_n(z)\rangle$, fonction génératrice des moments des pions uniquement (≡ diagrammes «vide-vide»), nous obtenons la fonction génératrice des cumulants différentiels (≡ diagrammes connexes à une patte externe) :

$$\begin{aligned} D_{p/n}(z) &\equiv \sum_{k,l} \frac{z^{*k}z^l}{k!\,l!} \left\langle\!\!\left\langle e^{ip\psi+in(\phi_1+\cdots+\phi_k-\phi_{k+1}-\cdots-\phi_{k+l})}\right\rangle\!\!\right\rangle \\ &= \frac{\left\langle e^{ip\psi}G_n(z)\right\rangle}{\langle G_n(z)\rangle}. \end{aligned} \tag{XII.3}$$

Notons que la valeur moyenne au dénominateur porte sur les événements, alors que celle au numérateur porte sur tous les protons. Autrement dit, dans la moyenne du numérateur, tous les protons sont pondérés de la même manière et un événement sera compté autant de fois que le nombre de protons qu'il contient.

En injectant le développement (XI.2) en puissances de z et z^* de $\langle G_n(z)\rangle$ dans (XII.3), les termes en $z^{*k}z^l$ nous donnent l'expression du cumulant $\left\langle\!\!\left\langle e^{ip\psi+in(\phi_1+\cdots+\phi_k-\phi_{k+1}-\cdots-\phi_{k+l})}\right\rangle\!\!\right\rangle$ en fonction des moments d'ordre inférieur.

XII.2.2 Système sans corrélation

Comme pour les cumulants du flot intégré, nous vérifions que s'il n'y a pas de corrélations dans le système, les cumulants différentiels sont nuls. En effet, le proton n'est alors pas corrélé aux pions et les valeurs moyennes dans (XII.3) se factorisent. La fonction génératrice des cumulants se réduit donc à $D_{p/n}(z) = \left\langle e^{ip\psi}\right\rangle$: tous les cumulants impliquant des pions sont nuls.

XII.2.3 Cumulants pertinents

Dans cette section, nous cherchons à identifier les cumulants physiquement pertinents et nous montrerons qu'ils correspondent aux cumulants isotropes.

En effet, en général, la fonction génératrice $D_{p/n}(z)$ est complexe. Cependant si le détecteur est parfait, cette fonction est réelle. En effet, la probabilité d'observer un événement donné ne change pas si l'on change le signe de tous les angles azimutaux. $D_{p/n}(z)$ est donc invariante

sous cette transformation que nous notons $\mathcal{T}$. Or changer ϕ_j en $-\phi_j$ est équivalent à changer z en z^* dans $G_n(z)$ [*cf.* Eq.(XI.1)]. Nous avons donc

$$\begin{aligned} D_{p/n}(z) = \mathcal{T}\left[D_{p/n}(z)\right] &= \frac{\left\langle e^{-ip\psi} G_n(z^*)\right\rangle}{\langle G_n(z^*)\rangle} \\ &= D^*_{p/n}(z^*), \end{aligned} \tag{XII.4}$$

où pour la dernière équation, nous avons utilisé le fait que $G_n(z)$ est une fonction réelle et que changer ψ en $-\psi$ revient à prendre le complexe conjugué de $D_{p/n}(z)$. Nous en déduisons que tous les cumulants qui apparaissent dans le développement en série (XII.3) sont réels. Dans le cas d'un détecteur quelconque, ces cumulants sont complexes mais seule leur partie réelle est physiquement pertinente.

Une simplification supplémentaire apparaît lorsque le détecteur est parfait : seuls subsistent les cumulants isotropes. En effet, les probabilités d'avoir un événement donné ou d'avoir l'événement où tous les angles sont translatés d'un angle quelconque $-\alpha$ sont égales. Cette dernière transformation revient à changer z en $ze^{in\alpha}$ dans $G_n(z)$. Le numérateur de la fonction génératrice des cumulants doit être invariant, soit

$$\left\langle e^{ip\psi} G_n(z)\right\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} \left\langle e^{ip\psi} e^{-ip\alpha} G_n(ze^{in\alpha}) \middle| \alpha \right\rangle . \tag{XII.5}$$

La dernière intégrale est non nulle si et seulement si p est un multiple de n. Nous écrirons alors $p = mn$. Notons que ce sont justement les cas qui nous intéressent pour le flot différentiel. Ainsi dans le développement en série (XII.3), les termes non nuls sont ceux pour $l = k + m$. Les cumulants pertinents sont les parties réelles des corrélations entre le proton et $(2k + m)$ pions, où k est un entier naturel arbitraire. Nous noterons ces cumulants $d_{mn/n}\{2k+m+1\}$:

$$d_{mn/n}\{2k+m+1\} \equiv \Re\left[\left\langle\!\!\left\langle e^{in(m\psi+\phi_1+\ldots+\phi_k-\phi_{k+1}-\ldots-\phi_{2k+m})}\right\rangle\!\!\right\rangle\right], \tag{XII.6}$$

où mn est l'harmonique que nous cherchons à reconstruire. Notons que l'ordre le plus bas correspondant au cumulant d'ordre 2 (et donc aux méthodes standard) est pour $k = 0$.

Dans le cas $m = 1$, nous obtenons à l'ordre z les corrélations à deux particules $\left\langle\!\!\left\langle e^{in(\psi-\phi_1)}\right\rangle\!\!\right\rangle$, et à l'ordre $z^*\, z^2$, les corrélations à quatre particules $\left\langle\!\!\left\langle e^{in(\psi+\phi_1-\phi_2-\phi_3)}\right\rangle\!\!\right\rangle$. Pour $m = 2$, le terme en z^2 donne le cumulant mixte $\left\langle\!\!\left\langle e^{in(2\psi-\phi_1-\phi_2)}\right\rangle\!\!\right\rangle$.

Pour la reconstruction de v_1' à partir de v_2, nous considérons la fonction génératrice $D(z_1, z_2)$ définie par

$$D(z_1, z_2) \equiv \frac{\left\langle e^{i\psi}\, G(z_1, z_2)\right\rangle}{\langle G(z_1, z_2)\rangle}. \tag{XII.7}$$

Le cumulant mixte d'ordre 3 qui nous intéresse est donné par le terme en ${z_1}^*\, z_2$:

$$d_{1/2}\{3\} \equiv \Re\left(\left\langle\!\!\left\langle e^{i(\psi+\phi_1-2\phi_2)}\right\rangle\!\!\right\rangle\right), \tag{XII.8}$$

où l'indice 1/2 est là pour nous rappeler que ce cumulant est consacré à la reconstruction de v_1' à partir de v_2.

XII.2.4 Autocorrélations

Le «proton» doit être différent des «pions» sous peine de produire des autocorrélations dans les fonctions génératrices $D_{p/n}(z)$ ou $D(z_1, z_2)$. Cependant pour avoir une meilleure

statistique sur le flot intégré, il est commun d'utiliser ce «proton» dans le calcul de $\langle G_n(z)\rangle$ ou de $\langle G(z_1,z_2)\rangle$. Pour éviter les autocorrélations, il suffit de diviser par la contribution du proton : nous devons diviser le numérateur de (XII.3) par $\left[1+\omega(z^*e^{in\psi}+ze^{-in\psi})/M\right]$; et le numérateur de (XII.7) par $\left[1+\omega_1(z_1^*e^{i\psi}+z_1e^{-i\psi})/M+\omega_2(z_2^*e^{i2\psi}+z_2e^{-i2\psi})/M\right]$.

XII.3 Relation entre les cumulants et le flot

Dans cette section, nous montrerons comment nous pouvons déduire le flot différentiel à partir des cumulants et nous déterminerons les erreurs systématiques et statistiques associées à ces différentes estimations. Le flot intégré v_n va naturellement apparaître et nous verrons que ce dernier influe non seulement sur les erreurs systématiques mais aussi sur les erreurs statistiques du flot différentiel.

XII.3.1 Contribution du flot

Nous nous intéressons d'abord aux cumulants différentiels $d_{mn/n}\{2k+m+1\}$. Nous allons donc calculer l'expression de la fonction génératrice $D_{mn/n}(z)$, Eq.(XII.3), pour un système où il n'y a que du flot et pour un détecteur parfait. Nous retrouverons les premiers ordres des cumulants différentiels présentés à la Section X.6.1.

Nous nous plaçons d'abord sur un ensemble d'événements de même Φ_R. L'équivalent de (X.41) pour un détecteur parfait s'écrit, pour le flot différentiel,

$$\left\langle e^{ip\phi}\middle|\Phi_R\right\rangle = v'_p e^{ip\Phi_R}. \tag{XII.9}$$

Pour l'instant, nous ne supposons pas que p est un multiple entier de n, cette condition va en fait sortir du calcul de la contribution du flot. En injectant (XII.9) dans le numérateur de (XII.3) et en moyennant sur Φ_R, nous obtenons

$$D_{p/n}(z) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{ip\Phi_R}\left\langle G_n(z)\middle|\Phi_R\right\rangle \mathrm{d}\Phi_R/2\pi}{\langle G_n(z)\rangle}\, v'_p. \tag{XII.10}$$

Grâce à l'expression (XI.31) de $\left\langle G_n(z)\middle|\Phi_R\right\rangle$, le numérateur s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{ip\Phi_R}\left\langle G_n(z)\middle|\Phi_R\right\rangle \frac{\mathrm{d}\Phi_R}{2\pi} &= \int_0^{2\pi} e^{ip\Phi_R}\left(1+\frac{z\,v_n\,e^{-in\Phi_R}+z^*v_n\,e^{in\Phi_R}}{M}\right)^M \frac{\mathrm{d}\Phi_R}{2\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{[(M+m)/2]} \frac{M!}{(M-m-2k)!\,k!\,(2k+m)!}\left(\frac{v_n}{M}\right)^{2k+m} z^{*k}z^{k+m} \\
&\simeq I_m(2\,v_n\,|z|)\left(\frac{z}{|z|}\right)^m .
\end{aligned} \tag{XII.11}$$

Pour établir la deuxième égalité, nous avons développé l'intégrand en série et nous avons remarqué que l'intégrale est non nulle si et seulement si $p=mn$ (encore une fois !) où m est un entier. Puis nous avons pris la limite où $M\gg 1$, de telle sorte que $M!/(M-2k-m)!\simeq M^{2k+m}$. Nous avons également étendu la somme sur k à l'infini. Finalement, la fonction génératrice des cumulants s'écrit

$$D_{mn/n}(z) = \frac{I_m(2|z|v_n)}{I_0(2|z|v_n)}\left(\frac{z}{|z|}\right)^m v'_{mn/n}.^{1} \tag{XII.12}$$

Notons que les cumulants différentiels sont linéaires en $v'_{mn/n}$. En développant (XII.12) en puissances de z et z^*, seuls les termes du type $|z|^{2k}z^m$ apparaissent : le flot ne contribue qu'aux cumulants d'ordre $(2k+m+1)$. En résumé, les premiers ordres que nous avions calculés en (X.59), (X.61) et (X.65) s'écrivent

$$v'_n\{2\} = \frac{d_n\{2\}}{v_n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{M}\,\chi_n}\right), \qquad (XII.13a)$$

$$v'_n\{4\} = -\frac{d_n\{4\}}{v_n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\sqrt{M}\,\chi_n)^3}\right), \qquad (XII.13b)$$

$$v'_{2n/n}\{3\} = \frac{d_{2n/n}\{3\}}{v_n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\sqrt{M}\,\chi_n)^2}\right), \qquad (XII.13c)$$

où de nouveau, le paramètre $\chi_n = v_n\sqrt{M}$ apparaît. Plus généralement, nous rappelons l'expression des erreurs systématiques sur le flot différentiel en utilisant le cumulant différentiel d'ordre $2k$ [*cf.* Eq.(X.64)]

$$\left(\delta v'_n\{2k\}\right)_{\rm syst} = \frac{1}{\left(\sqrt{M}\,\chi_n\right)^{2k-1}}. \qquad (XII.14)$$

Comme le flot est mesurable seulement si $|v_n| \gg 1/M$, l'erreur systématique sur v'_n diminue lorsque k augmente.

Pour la fonction génératrice $D(z_1, z_2)$, nous n'utilisons que le cumulant mixte $d_{1/2}\{3\}$ et nous rappelons sa relation avec le flot dirigé différentiel

$$v'_{1/2}\{3\} = \frac{d_{1/2}\{3\}}{v_1\,v_2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M\,\chi_1\,\chi_2}\right). \qquad (XII.15)$$

XII.3.2 Erreurs statistiques

Nous avons calculé les erreurs statistiques de façon approchée à la Section X.6.3. Elles étaient en fait valables dans la limite $\chi_n \ll 1$. Nous présentons dans cette section des formules exactes. Les détails des calculs sont développés dans l'Appendice D de [2] et dans la Section D de [3]. Aux premiers ordres, nous avons

$$\left(\delta v'_n\{2\}\right)_{\rm stat} = \frac{1}{\chi_n}\sqrt{\frac{1+{\chi_n}^2}{2N'}}, \qquad (XII.16a)$$

$$\left(\delta v'_n\{4\}\right)_{\rm stat} = \frac{1}{{\chi_n}^3}\sqrt{\frac{2+6\,{\chi_n}^2+{\chi_n}^4+{\chi_n}^6}{2N'}}, \qquad (XII.16b)$$

$$\left(\delta v'_{2/1}\{3\}\right)_{\rm stat} = \frac{1}{{\chi_1}^2}\sqrt{\frac{2+4\,{\chi_1}^2+{\chi_1}^4}{2N'}}, \qquad (XII.16c)$$

$$\left(\delta v'_{1/2}\{3\}\right)_{\rm stat} = \frac{1}{\chi_1\,\chi_2}\sqrt{\frac{(1+{\chi_1}^2)(1+{\chi_2}^2)}{2N'}}. \qquad (XII.16d)$$

N' désigne le nombre total de particules différentielles. S'il y a en moyenne $N_{\rm prot}$ protons par événement, nous avons $N' \simeq N_{\rm prot}N_{\rm evts}$. Autrement dit, nous donnons le même poids à chacun des protons dans tous les événements. Lorsque $\chi_n \ll 1$, à un facteur $\sqrt{2}$ près, nous retrouvons la formule approchée (X.71).

L'ordre 3 peut en fait donner des résultats bien meilleurs que l'ordre 4 pour le flot dirigé, avec des barres d'erreur à peine plus élevées que l'ordre 2. En effet, prenons $N' = MN_{\rm evts}$ et

comparons leurs erreurs statistiques respectives, Eqs.(XII.16), dans la limite $\chi_n \ll 1$:

$$\left(\frac{\delta v_1'\{2\}}{v_1}\right)_{\text{stat}} = \frac{1}{\sqrt{2N_{\text{evts}}}}\frac{1}{\chi_1}, \qquad (XII.17a)$$

$$\left(\frac{\delta v_{1/2}'\{3\}}{v_1}\right)_{\text{stat}} = \frac{1}{\sqrt{2N_{\text{evts}}}}\frac{1}{\chi_1\,\chi_2}, \qquad (XII.17b)$$

$$\left(\frac{\delta v_1'\{4\}}{v_1}\right)_{\text{stat}} = \frac{1}{\sqrt{2N_{\text{evts}}}}\frac{1}{{\chi_1}^3}. \qquad (XII.17c)$$

Evaluons ces erreurs relatives au SPS et à RHIC. Nous fixons pour cela la multiplicité à 300 et le nombre d'événements à 5×10^4. La Tab.XII.1 résume ces estimations. Pour le SPS,

	v_1	v_2	$\delta v_1\{2\}/v_1$	$\delta v_1\{4\}/v_1$	$\delta v_1\{3\}/v_1$
SPS [6]	0.02	0.03	2%	16%	4%
RHIC [12]	0.05	0.01	7%	250%	11%

TAB. XII.1 – Estimation, pour des collisions semi-centrales, des erreurs relatives sur le flot dirigé reconstruit à partir des ordres 2, 4 et 3. Le v_1 à RHIC n'est pas une valeur publiée mais attendue.

nous utilisons la valeur de v_1 corrigée des effets «nonflow» [6] plutôt que celle publiée en 1998 [11], cette dernière étant surestimée. Au SPS, alors que l'ordre 4 paraît peu réalisable (et il l'est effectivement !), nous notons que l'ordre 3 a des barres d'erreur seulement deux fois plus grandes que l'ordre 2. A RHIC, la situation devient impossible pour l'ordre 4 mais reste acceptable pour l'ordre 3. En fait, la grande valeur de χ_2 compense partiellement la perte de statistique due à χ_1 dans (XII.16*d*). Cette méthode de reconstruction est donc très prometteuse aux énergies ultrarelativistes, reconstruisant un flot dirigé directement corrigé des effets «nonflow» à deux particules, comme la conservation de l'impulsion, et avec des barres d'erreur à peine plus grandes que celles de la méthode standard.

XII.4 Corrections d'acceptance

Grâce à la décomposition en cumulants, nous avons vu à la Section X.4 que les effets des imperfections du détecteur sont automatiquement soustraits des cumulants, permettant ainsi d'isoler les corrélations d'origine physique. A la Section XI.6, nous avons montré qu'il restait une correction à faire en dernier lieu sur les cumulants pour le flot intégré, correction se résumant dans la plupart des cas à multiplier les cumulants par un facteur numérique global (le plus souvent très proche de 1). Pour les cumulants différentiels, le même type de correction d'acceptance va s'appliquer.

XII.4.1 Acceptance pour les particules «différentielles»

Tout d'abord, l'acceptance du détecteur peut être différente entre le flot intégré et le flot différentiel. En effet, pour le premier, il convient de prendre une couverture de l'espace des phases la plus large possible afin de détecter un maximum de particules. En revanche pour le flot différentiel, l'identification des particules doit être plus précise car nous reconstruisons le flot pour un certain type de particules (les protons dans nos notations habituelles). Ainsi, le plus souvent, seule la partie du détecteur où cette identification est efficace est utilisée. Nous sommes donc amenés à introduire une autre fonction d'acceptance pour le «proton», $B(\psi)$, qui est *a priori* différente de $A(\phi)$, fonction d'acceptance des «pions». Ses coefficients de Fourier

seront notés b_n au lieu de a_n. De même nous devons utiliser la fonction de distribution par rapport au plan de réaction du proton, soit $f(\psi - \Phi_R)$. Son développement en série de Fourier est analogue à celui de $f(\phi - \Phi_R)$, Eq.(III.3), où il convient de remplacer les v_n par v'_n.

Enfin pour une observable $\mathcal{O}$, la valeur moyenne se calcule différemment selon que l'on considère un proton ou des pions. En effet, si nous désirons calculer $\langle \mathcal{O}(\phi) \rangle$ en moyennant sur beaucoup de pions et sur beaucoup d'événements, nous moyennons d'abord sur les événements de même Φ_R, $\left\langle \mathcal{O}(\phi) \middle| \Phi_R \right\rangle$, puis nous intégrons sur Φ_R que l'on suppose distribué de façon isotrope. En revanche, pour $\langle \mathcal{O}(\psi) \rangle$, nous devons moyenner sur les événements de même Φ_R *qui contiennent le proton d'angle azimutal* ψ et ensuite intégrer sur Φ_R qui n'a plus de distribution isotrope puisque l'on fixe d'abord l'angle ψ. Cette valeur moyenne s'écrit donc

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(\psi) \rangle &= \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\Phi_R \left\langle \mathcal{O}(\psi) \middle| \Phi_R \right\rangle_\psi}{\displaystyle\int_0^{2\pi} d\Phi_R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \, B(\psi) \, f(\psi - \Phi_R)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\Phi_R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \, \mathcal{O}(\psi) \, B(\psi) \, f(\psi - \Phi_R)}{\displaystyle\int_0^{2\pi} d\Phi_R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \, B(\psi) \, f(\psi - \Phi_R)}. \end{aligned} \tag{XII.18}$$

La notation $\langle \ldots | \Phi_R \rangle_\psi$ signifie que nous moyennons sur les protons d'angle ψ à Φ_R donné. Cette moyenne est à distinguer de $\langle \ldots | \Phi_R \rangle$ donnée par (X.40). Le dénominateur de (XII.18) vaut 2π car la fonction $B(\psi)$ est normaliséee de telle sorte que $b_0 = 1$.

XII.4.2 Corrections d'acceptance pour $D_{mn/n}(z)$

Nous poserons $p = mn$ pour alléger les notations. Pour calculer les corrections d'acceptance sur le flot différentiel, nous devons évaluer la fonction génératrice $D_{p/n}(z)$ et plus particulièrement son numérateur $\left\langle e^{ip\psi} G_n(z) \right\rangle$. Nous négligerons toutes les corrélations «nonflow». A Φ_R fixé, les corrélations se factorisent puisque les pions et le proton sont émis de façon isotrope par rapport au plan de réaction :

$$\left\langle e^{ip\psi} G_n(z) \middle| \Phi_R \right\rangle_\psi = \left\langle e^{ip\psi} \middle| \Phi_R \right\rangle_\psi \left\langle G_n(z) \middle| \Phi_R \right\rangle. \tag{XII.19}$$

Le deuxième facteur dans le membre de droite a été calculé à la section précédente, *cf.* Eq.(XI.69). Quant au premier facteur, il est donné par :

$$\left\langle e^{ip\psi} \middle| \Phi_R \right\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{2\pi} e^{ip\psi} \, B(\psi) \, f(\psi - \Phi_R) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} b_{q-p} \, v'_q \, e^{iq\Phi_R}. \tag{XII.20}$$

Finalement, en utilisant Eqs.(XII.18), (XII.19) et (XII.20), la fonction génératrice des

cumulants différentiels (XII.3) s'écrit

$$D_{p/n} = \frac{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\Phi_R \left\langle e^{ip\psi} G_n(z) \middle| \Phi_R \right\rangle}{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\Phi_R \left\langle G_n(z) \middle| \Phi_R \right\rangle} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} b_{q-p}\, v'_q \, \frac{\int_0^{2\pi} e^{iq\Phi_R} \left\langle G_n(z) \middle| \Phi_R \right\rangle \mathrm{d}\Phi_R}{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\Phi_R \left\langle G_n(z) \middle| \Phi_R \right\rangle}. \qquad \text{(XII.21)}$$

a Cas où $p = n$

Si nous reconstruisons le flot différentiel à partir de la même harmonique que le flot intégré, soit pour $p = n$, en développant à l'ordre z et z^*, nous obtenons les cumulants différentiels à l'ordre 2

$$d_1\{2\} \equiv v_1\, v'_1\{2\} = \alpha'_1\, v_1\, v'_1 + \beta'\, v_2\, v'_2, \qquad (XII.22a)$$
$$d_2\{2\} \equiv v_2\, v'_2\{2\} = \beta'\, v_1\, v'_1 + \alpha'_2\, v_2\, v'_2, \qquad (XII.22b)$$

où les coefficients α'_n et β' sont donnés par

$$\alpha'_n = 1 - |a_n|^2 + \Re\left[(b_{2n})^*(a_{2n} - a_n^2)\right], \qquad (XII.23a)$$
$$\beta' = \Re\left[b_1(a_1^* - a_2^* a_1) + (b_3)^*(a_3 - a_1 a_2)\right]. \qquad (XII.23b)$$

$\Re$ désigne la partie réelle. A l'ordre 4, nous obtenons

$$d_1\{4\} \equiv -{v_1}^3\, v'_1\{2\} = -\gamma'_1\, {v_1}^3 v'_1 - \delta'\, {v_2}^3 v'_2, \qquad (XII.24a)$$
$$d_2\{4\} \equiv -{v_2}^3\, v'_2\{2\} = -\delta'\, {v_1}^3 v'_1 - \gamma'_2\, {v_2}^3 v'_2, \qquad (XII.24b)$$

où les coefficients γ'_n et δ' sont donnés par

$$\gamma'_n = (1 - |a_n|^2)\left((1 - |a_n|^2)^2 + 2\left|a_{2n} - a_n^2\right|^2\right) + \Re\left[(b_{2n})^*(a_{2n} - a_n^2)\right]\left(2(1 - |a_n|^2)^2 + \left|a_{2n} - a_n^2\right|^2\right), \qquad (XII.25a)$$

$$\delta' = \Re\left[b_1(a_1^* - a_2^* a_1)\right]\left(\left|a_1^* - a_2^* a_1\right|^2 + 2\left|a_3 - a_1 a_2\right|^2\right), + \Re\left[(b_3)^*(a_3 - a_1 a_2)\right]\left(2\left|a_1^* - a_2^* a_1\right|^2 + \left|a_3 - a_1 a_2\right|^2\right). \qquad (XII.25b)$$

b Cas où $p = 2$ et $n = 1$

La correction d'acceptance pour $v'_{2/1}$

$$\begin{aligned} d_{2/1}\{3\} \equiv {v_1}^2\, v'_{2/1}\{3\} \\ = &\Re\left[(1 - |a_1|^2)^2 + (b_4)^*(a_2 - a_1^2)^2\right] {v_1}^2\, v'_2 \\ &+ 2\Re\left[(b_1)^*(a_1^* - a_2^* a_1)(a_2 - a_1^2) + (b_3)^*(a_3 - a_2 a_1)(1 - |a_1|^2)\right] v_1 v_2\, v'_1. \end{aligned} \qquad \text{(XII.26)}$$

Notez que, pour extraire $v'_{2/1}$, nous avons besoin d'une autre équation en v'_1 et v'_2. Etant donné qu'à l'ordre 3, les corrélations «nonflow» à deux particules sont éliminées, il semble plus logique d'utiliser $d_n\{4\}$, sachant qu'alors, le flot différentiel v'_2 n'a pas le même ordre dans les deux équations (XII.24) et (XII.26). Nous verrons cependant des cas où cette discussion n'est pas nécessaire.

XII.4.3 Corrections d'acceptance pour $D(z_1, z_2)$

Dans le cas de la reconstruction de $v'_{1/2}$, nous pouvons raisonner de la même manière que pour $D_{mn/n}$. Les corrections d'acceptance pour le cumulant $d_{1/2}\{3\}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} d_{1/2}\{3\} &\equiv v_1 v_2 v'_{1/2}\{3\} \\ &= \Big\{(1-|a_1|^2)(1-|a_2|^2) + |a_3 - a_1 a_2|^2 \\ &\quad + \Re\left[(a_1 - a_1^* a_2)^2 {b_2}^* + (a_2^* - a_1^{*2})(a_4 - a_2^2){b_2}^*\right]\Big\} v'_1 v_1 v_2 \\ &\quad + \Re\left[(1-|a_1|^2)(a_3 - a_1 a_2){b_3}^* + \ (a_2^* - a_1^{*2})(a_1 - a_1^* a_2) b_1\right] {v'_2}{v_1}^2. \end{aligned} \tag{XII.27}$$

Nous avons une contamination du flot elliptique différentiel dans le dernier terme de (XII.27). Autrement dit, la reconstruction de $v'_{1/2}$ nécessiterait la connaissance prélable non seulement de v_2 mais également de v'_2. Cependant le coefficient numérique correspondant est en général négligeable devant celui du terme en $v'_1 v_1 v_2$.

XII.4.4 Cas d'une acceptance isotrope pour le flot intégré

Les corrections d'acceptance pour le flot différentiel se simplifient grandement si l'acceptance pour le flot intégré est parfaite ($a_n = 0\ \forall n \neq 0$ et $a_0 = 1$). Plus exactement, il n'y a aucune correction d'acceptance à faire sur le flot différentiel ! En effet, les coefficients de Fourier de la fonction d'acceptance différentielle $B(\psi)$ sont tous en facteur des a_n. Ainsi, même si la fonction $B(\psi)$ est très anisotrope, les corrections d'acceptance sont nulles.

De plus, dans le cumulant mixte (XII.27), le terme d'interférence avec v'_2 est nul.

En pratique, si l'acceptance $A(\phi)$ est raisonnablement anisotrope, les corrections d'acceptance pour le flot différentiel sont négligeables.

XII.5 Utilisation de poids non unités

Dans $D_{mn/n}(z)$, Eq.(XII.3), et $D(z_1, z_2)$, Eq.(XII.7), nous utilisons respectivement les fonctions génératrices $G_n(z)$ et $G(z_1, z_2)$ qui sont souvent calculées avec une pondération des pions. En revanche, le proton est corrélé avec un poids unité. La modification qu'entraîne l'utilisation de poids non unités est simplement le remplacement, dans toutes nos formules, du flot intégré v_n par le flot intégré pondéré $V_n = \langle \omega e^{in(\phi - \Phi_R)} \rangle$.

Ceci a un intérêt tout particulier sur le flot différentiel car la valeur de $v_n \equiv V_n / \sqrt{\langle \omega^2 \rangle}$ et par suite, celle du paramètre $\chi_n = v_n \sqrt{M}$ s'en trouvent augmentées. Or les erreurs systématiques (XII.14) mais également les erreurs statistiques (XII.16) et (XII.17) dépendent très fortement de χ_n : plus ce dernier est grand, et plus les erreurs sont faibles. Il est donc indispensable d'utiliser des poids non unités afin d'obtenir une grande valeur pour le flot intégré et des barres d'erreur sur le flot différentiel les plus faibles possibles.

Il y a un autre intérêt dans l'utilisation de poids adaptés à l'harmonique étudiée : elle permet d'éliminer l'interférence d'une autre harmonique dans les corrections d'acceptance (XII.22), (XII.24) et (XII.26), ou du moins, de la rendre négligeable.

Nous renvoyons le lecteur à la Section IV.2.4 pour les choix possibles de poids pour la reconstruction de v_1 ou de v_2.

XII.6 Simulations Monte-Carlo

Nous n'avons testé que la reconstruction du flot différentiel par la fonction génératrice $D_{mn/n}$. Comme pour le flot intégré, *cf.* Section XI.8, nous avons simulé $N_{\rm evts}$ événements, chacun d'eux ayant un plan de réaction Φ_R tiré au hasard. Les particules utilisées pour le flot intégré («pions») et pour le flot différentiel («protons») sont ensuite générées selon les distributions respectives

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}(\phi-\Phi_R)} \propto 1+2v_1\cos(\phi-\Phi_R)+2v_2\cos 2(\phi-\Phi_R)\,, \qquad (XII.28a)$$

$$\frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}(\psi-\Phi_R)} \propto 1+2v_1'\cos(\psi-\Phi_R)+2v_2'\cos 2(\psi-\Phi_R). \qquad (XII.28b)$$

Nous avons axé nos simulations sur la reconstruction de $v'_{2/n}$, d'abord pour $n=2$ puis pour $n=1$. Les résultats sont très satisfaisants.

XII.6.1 Cas où $n=2$: reconstruction de v_2' à partir de v_2

Nous avons généré $N_{\rm evts}=10^5$ événements contenant $M=200$ pions distribués selon (XII.28a) avec $v_1=0$ et $v_2=6\%$. D'autre part, $N'=5\times10^5$ protons (soit 5 par événement) ont été générés suivant la distribution (XII.28b) et corrélés avec les pions. Nous avons pris les mêmes valeurs pour le flot différentiel et pour le flot intégré. D'après (X.72), l'ordre optimal vaut $(2k+2)_{\rm opt}=3.5$: l'ordre $v_2\{4\}$ est donc à préférer à $v_2\{2\}$. Ici comme nous n'avons pas généré de corrélations «nonflow» entre les pions et les protons, l'ordre 2 doit donner d'aussi bons résultats que l'ordre 4. Les résultats sont présentés à la Table XII.2. Une première

pions	protons	$v_2'\{2\}$	$v_2'\{4\}$
Acceptance parfaite $M=200$	Acceptance parfaite	5.96 ± 0.15	6.10 ± 0.44
Acceptance «papillon» $M=100$	Acceptance «papillon»	6.07 ± 0.20	5.83 ± 0.99
Acceptance «papillon» $M=100$	Acceptance «à 45°»	6.02 ± 0.20	5.71 ± 0.99

TAB. XII.2 – Simulation Lonte-Carlo de la reconstruction du flot elliptique différentiel par rapport au flot elliptique intégré. Les deux dernières colonnes présentent les résultats à l'ordre 2 et 4 en %. Voir texte pour les détails.

simulation a été faite avec une acceptance parfaite pour les pions. Comme nous l'avions remarqué à la Section XII.4.4, si l'acceptance pour le flot intégré est isotrope, il n'y a aucune correction d'acceptance à appliquer sur le flot différentiel. Nous l'avons vérifié en variant l'acceptance des protons et cela n'a aucun effet sur la valeur reconstruite qui est en parfait accord avec la valeur théorique, mis à part le fait que les barres d'erreur sont évidemment plus grandes pour une acceptance de moins en moins isotrope puisque moins de particules sont détectées. Nous avons présenté dans la Tab.XII.2 uniquement le cas où l'acceptance pour les protons est parfaite.

Nous avons ensuite testé les corrections d'acceptance en prenant l'acceptance «papillon» pour les pions (*cf.* Fig.XII.2). Nous avons réduit leur multiplicité de moitié pour avoir des résultats à peu près cohérents avec les précédents. L'ordre optimal vaut alors $(2k+2)_{\rm opt}=3.5$: l'ordre 4 reste toujours l'ordre à privilégier. Nous avons considéré deux détecteurs pour les protons : d'abord le même que pour les pions, *i.e.*, le détecteur «papillon», puis un détecteur

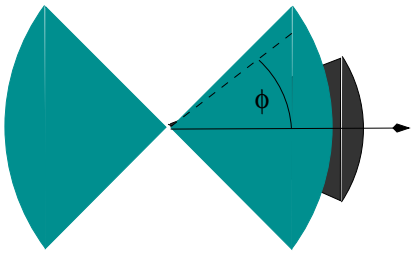


FIG. XII.2 – Représentation schématique du détecteur de PHENIX à RHIC. Les parties grises correspondent aux régions azimutales recouvertes par le détecteur alors que la petite portion noire représente un détecteur de temps de vol de 45°, utilisé pour l'identification des particules «différentielles».

ne recouvrant que 45° en azimut (*cf.* Fig.XI.3). Pour le premier, les coefficients de Fourier de l'acceptance $B(\psi)$ sont $b_2 = 2/\pi$ et $b_1 = b_3 = b_4 = 0$. Les corrections d'acceptance (XII.22) donnent alors

$$d_2\{2\} \simeq 0.595\, v_2\, v_2'\{2\}, \qquad (XII.29a)$$
$$d_2\{4\} \simeq -0.406\, {v_2}^3\, v_2'\{4\}. \qquad (XII.29b)$$

Quant au second détecteur, nous avons $b_{p\geq 1} = \mathrm{sinc}(p\pi/8)$. Les corrections d'acceptance s'écrivent dans ce cas

$$d_2\{2\} \simeq 0.337\, v_2\, v_2'\{2\}, \qquad (XII.30a)$$
$$d_2\{4\} \simeq -0.181\, {v_2}^3\, v_2'\{4\}. \qquad (XII.30b)$$

Remarquons que sans ces corrections d'acceptance, nous obtiendrions à l'ordre 4 une valeur cinq fois trop grande ! Nous obtenons encore une fois des résultats compatibles avec la valeur théorique dans les barres d'erreur.

XII.6.2 Cas où $n = 1$: reconstruction de v_2' à partir de v_1

Dans cette deuxième simulation, nous avons généré, en plus du flot elliptique, des flots dirigés intégré et différentiel tous égaux au flot elliptique, $v_1 = v_1' = v_2 = 6\%$. La Table XII.3 résume les différents résultats.

pions	protons	$v_{2/1}'\{3\}$	$v_2'\{2\}$	$v_2'\{4\}$
Acceptance parfaite, $M = 200$	Acceptance parfaite	6.47 ± 0.32	5.81 ± 0.15	6.03 ± 0.44
Acceptance «papillon», $M = 100$	Acceptance «papillon»	5.08 ± 0.54	5.80 ± 0.20	5.51 ± 0.99
Acceptance «papillon», $M = 100$	Acceptance «à 45°»	5.20 ± 0.54	6.81 ± 0.20	7.95 ± 0.99

TAB. XII.3 – Même légende qu'à la Table XII.2. Des flots dirigés intégré et différentiel ont été simulés ($v_1 = v_1' = 6\%$), en plus du flot elliptique. La troisième colonne donne le flot elliptique différentiel reconstruit à partir du flot intégré dirigé à l'ordre le plus bas.

Nous avons reconstruit $v_{2/1}'\{3\}$ ainsi que $v_2'\{2\}$ et $v_2'\{4\}$. Notons que l'ordre 3 ne contient pas de corrélations «nonflow» à deux particules. Nous avons testé nos corrections d'acceptance

sur les deux détecteurs possibles pour les protons. Cependant, dans le cas de l'acceptance «papillon», Eq.(XII.26) ne donne aucune correction d'acceptance. En revanche pour l'acceptance «à 45°», nous obtenons la correction suivante

$$d_{2/1}\{3\} \simeq 1.258\, {v_1}^2 v'_{2/1}\{3\}. \qquad \text{(XII.31)}$$

Avec une acceptance isotrope, tous les ordres supérieurs donnent de bons résultats. En revanche, quand les détecteurs ne sont pas parfaits, les écarts à la valeur théorique peuvent devenir très importants, *e.g.* la valeur de $v'_2\{2\}$ est à quatre déviations standard du v'_2 théorique.

XII.7 Application aux données de STAR

La première analyse de STAR utilisant les cumulants [13] ne présente que le flot elliptique différentiel des particules chargées en fonction de l'impulsion transverse, *cf.* Fig.XII.3. La méthode des sous-événements et la reconstruction à partir des cumulants d'ordre 2 et 4 ont été utilisées. Comme pour le flot intégré, les résultats de la méthode standard et du cumulant

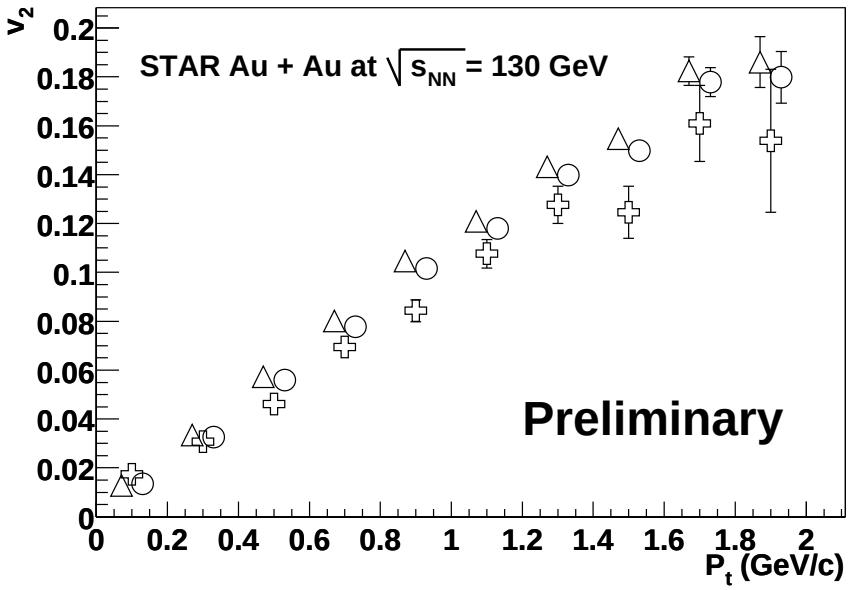


FIG. XII.3 – Flot elliptique des particules chargées, analysé par STAR, en fonction de l'impulsion transverse [13]. Cercles : méthode standard ; triangles, cumulant d'ordre 2 ; croix, cumulant d'ordre 4.

d'ordre 2 sont compatibles entre eux, alors que l'ordre 4 est systématiquement plus bas. Ce dernier sature même plus vite que l'ordre 2. Les données pour $p_T > 2$ GeV/c semblent confirmer cette saturation plus forte sur l'ordre 4 que sur l'ordre 2 [16]. Il est important d'avoir des mesures fines (et fiables !) sur le v_2 à haut p_T car de nombreux modèles théoriques se penchent sur ce signal à grand p_T (*cf.* Section III.5.3).

XII.8 Application aux données de NA49

Nous présentons maintenant nos résultats de l'analyse des données de NA49. Nous renvoyons aux Sections XI.10.1 et XI.10.2 pour le contexte expérimental et la statistique utilisée.

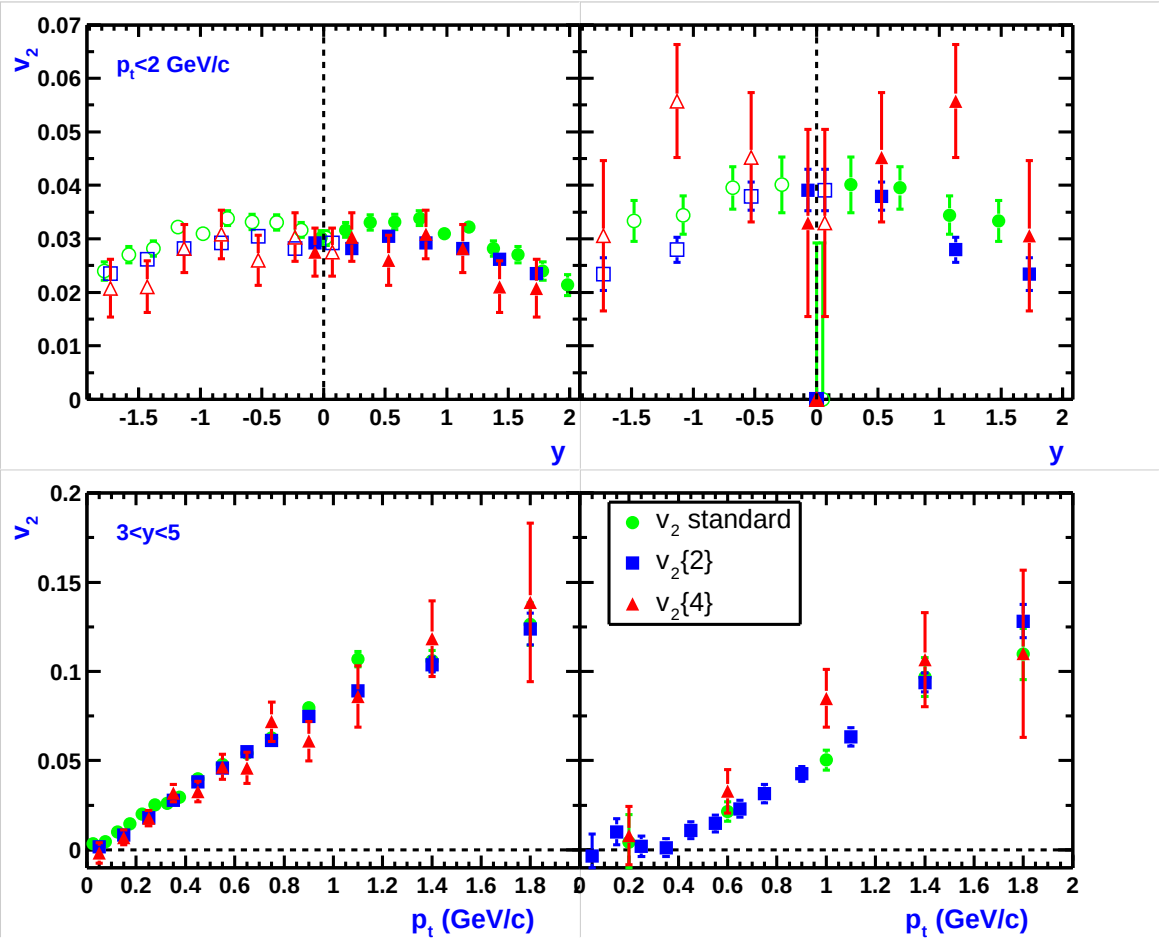


FIG. XII.4 – Flot elliptique des pions chargés (en bas) et des protons (en haut), en fonction de l'impulsion transverse (à gauche) et de la rapidité (à droite), à 158 AGeV pour des collisions semi-centrales. Cercles : méthode standard ; triangles : cumulant d'ordre 2 ; carrés : cumulant d'ordre 4. Sur la dépendance en y, les points pour $y \leq y_{CM}$ sont obtenus par réflexion par rapport à la rapidité du centre de masse $y_{\rm CM} = 2.92$.

Nous distinguerons ici le flot différentiel des pions et des protons et nous ne présenterons que les résultats pour les collisions semi-centrales (bins 3 et 4 en centralité dans la Tab.XI.4). Nous comparerons systématiquement les résultats de la méthode standard et ceux obtenus par la méthode des cumulants. Les résultats pour tous les bins en centralité font l'objet d'une publication commune [14].

XII.8.1 Flot elliptique différentiel

Nous avons reconstruit le flot elliptique différentiel à partir du flot elliptique intégré [*cf.* Eqs.(XII.13a) et (XII.13b)]. Le flot dirigé intégré n'est pas assez grand pour permettre la reconstruction de $v'_{2/1}\{3\}$, Eq.(XII.13c), avec des barres d'erreur suffisamment faibles pour apporter des informations supplémentaires par rapport à l'odre 2 et l'ordre 4. Les Figs.XII.4 présentent nos résultats en fonction de p_T et de y.

Les résultats de la méthode standard et du cumulant d'ordre 2 sont compatibles entre eux, même si notre $v_2\{2\}$ est légèrement plus faible sur la dépendance en rapidité.

De manière générale, nous ne notons pas de différence majeure entre l'ordre 2 et l'ordre 4. Bien que le flot elliptique intégré soit relativement grand ($\sim 4\%$ pour les collisions semi-

centrales), les barres d'erreur à l'ordre 4 sont suffisamment grandes pour que les résultats soient compatibles avec l'ordre 2. Cet accord pourrait signifier que, bien que les effets «nonflow» soient clairement mis en évidence sur le flot intégré (*cf.* Fig.XI.6), leur localisation en p_T et en y sur le flot différentiel n'est pas claire. Qui plus est, nous avions étudié, au Chapitre V, la corrélation due aux effets HBT qui produisait un excès à bas p_T. L'utilisation d'un poids en p_T pour le flot elliptique intégré (*cf.* Tab.XI.7) «tue» une majeure partie de ces corrélations. Ainsi, contrairement aux données de NA49 publiées en 1998, nous n'observons pas d'excès à bas p_T et cela explique également pourquoi l'ordre 2 est compatible avec l'ordre 4, du moins à bas p_T.

En fait, ici, nous aurions besoin de plus de statistique pour espérer différencier les deux ordres.

XII.8.2 Flot dirigé différentiel

Nous avons reconstruit le flot dirigé différentiel à l'ordre 2, en utilisant le flot dirigé intégré, Eq.(XII.13a), et à l'ordre 3, en utilisant le flot elliptique intégré, Eq.(XII.15). La valeur de v_1 étant trop faible, la reconstruction de $v_1'\{4\}$ n'a pas été possible. Nos résultats sont présentés sur les Figs.XII.5. Comme annoncé à la Tab.XII.1, les barres d'erreur sur le cumulant d'ordre 3 sont seulement deux fois plus grandes que sur le cumulant d'ordre 2.

Nous présentons également les résultats de la méthode standard, corrigée de l'effet de la conservation de l'impulsion [6]. L'avantage du cumulant d'ordre 3 par rapport à la méthode standard est que non seulement la corrélation liée à la conservation de l'impulsion est automatiquement soustraite à l'ordre 3, mais également toutes les autres corrélations «nonflow» à deux particules. D'autres effets, comme la désintégration de résonances, peuvent aussi jouer un rôle au niveau des corrélations à deux particules. L'ordre 3 et la méthode standard n'ont donc *a priori* aucune raison d'être compatibles.

Alors que sur le flot intégré, les effets «nonflow» ne produisent pas de différence notable entre l'ordre 2 et l'ordre 3, *cf.* Fig.XI.6, nous notons sur la Fig.XII.5 un grand désaccord entre l'ordre 3 et l'ordre 2, à la fois sur la dépendance en p_T et en y. Intéressons-nous d'abord à $v_1'(p_T)$.

a Dépendance en impulsion transverse

Nous avons vu au Chapitre VI que la conservation de l'impulsion totale produit une corrélation azimutale négative. Le flot des pions et des protons est alors surestimé (*cf.* discussion à la Section VI.1). La soustraction de cet effet donne donc une valeur de flot plus faible. Et c'est ce que nous observons sur le v_1' «standard», à la fois sur les protons et sur les pions. Nous avions noté le même changement de signe pour le flot dirigé des pions à grand p_T dans les données publiées en 1998 (*cf.* Fig.IV.3) et c'était cela qui avait motivé notre étude sur la correction, sur ces données, de la corrélation due à la conservation de l'impulsion. Ce changement de signe peut d'ailleurs se comprendre de la façon suivante : le $\langle p_T \rangle$ des pions est autour de 400 MeV/c et le v_1' correspondant est négatif. La majorité des pions ont donc un flot dirigé négatif. Or la conservation de l'impulsion tend à «pousser» les particules de grande impulsion transverse dans la direction opposée : il est donc normal d'obtenir un v_1 positif à haut p_T.

Les résultats du cumulant d'ordre 3 pour les pions sont compatibles avec ceux de la méthode standard modifiée. Le changement de signe semble se faire plus tôt avec l'ordre 3. D'ailleurs, vu les barres d'erreur à grand p_T, il se pourrait même que le $v_1'\{3\}$ des pions ne change pas de signe. Remarquons enfin que le v_1' «standard» a, à bas p_T, un comportement curieux que nous retrouvons dans l'ordre 2, bien que moins prononcé. Cet excès à bas p_T n'est pas sans rappeler les effets HBT dont la soustraction permettait d'expliquer l'excès observé dans le flot des pions publié en 1998 (*cf.* Fig.V.6). Cependant, ces corrélations quantiques

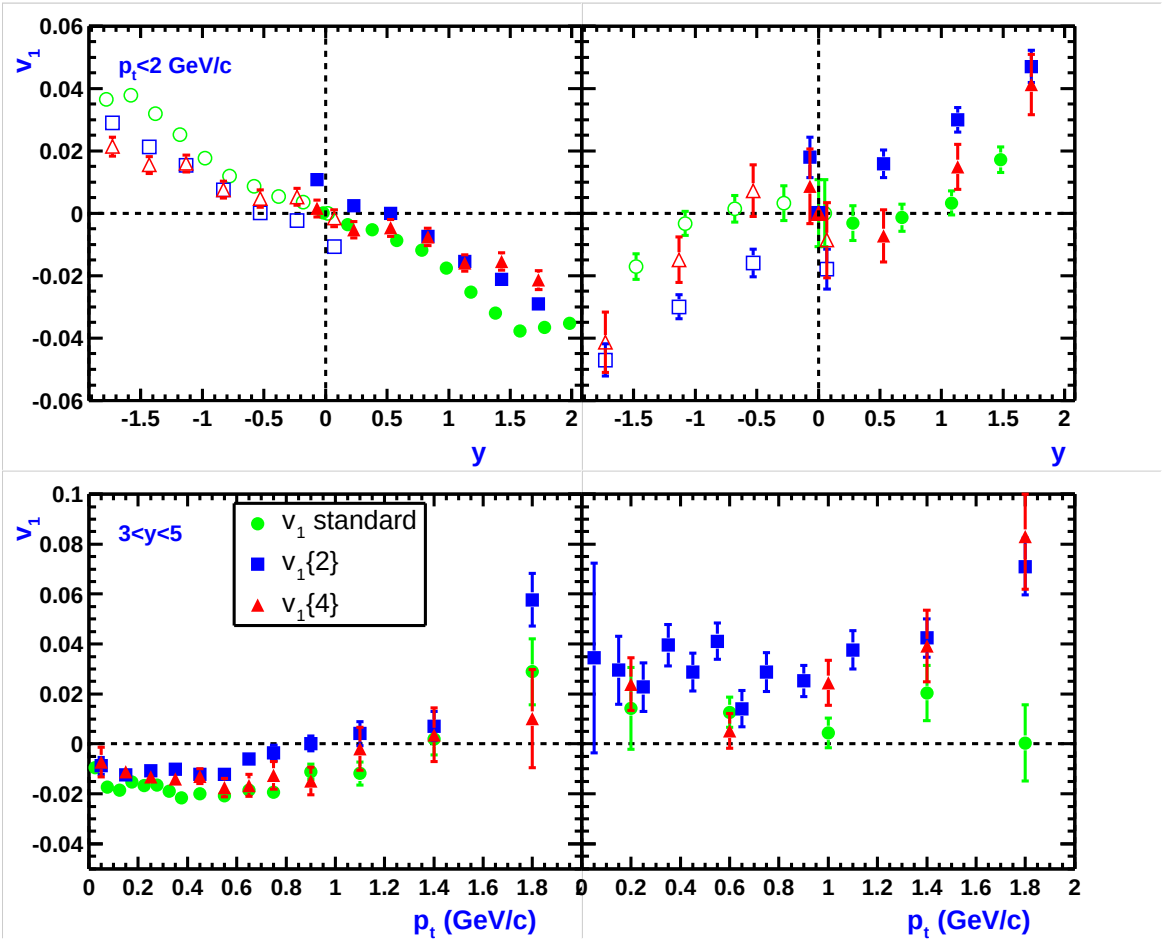


FIG. XII.5 – Flot dirigé des pions chargés (en bas) et des protons (en haut), en fonction de l'impulsion transverse (à gauche) et de la rapidité (à droite), à 158 AGeV pour des collisions semi-centrales. Cercles : méthode standard ; triangles : cumulant d'ordre 2 ; carrés : cumulant d'ordre 4. Sur la dépendance en y, les points pour $y \leq y_{CM}$ sont obtenus par réflexion par rapport à la rapidité du centre de masse $y_{\mathrm{CM}} = 2.92$.

n'affectent pas le flot des protons qui sont corrélés à des pions. Il est pourtant clair que des corrélations «nonflow» à courte portée sont ici présentes dans l'analyse standard. En revanche, l'ordre 3 semble s'annuler de façon plus régulière à bas p_T.

Par contre, le v_1' des protons à l'ordre 3 est non seulement supérieur au v_1' «standard», mais il est au-dessus de $v_1'\{2\}$! Nous avons vu à la Section VI.3 que la soustraction de la conservation de l'impulsion des données de 1998 provoquait un changement de signe sur le v_1' des protons, qui devenait négatif sur pratiquement tout l'intervalle en p_T. Or la prise en compte de la désintégration des résonances Δ à la Section VII.4 renverse de nouveau le signe du v_1' des protons (*cf.* Fig.VII.2). Comme le cumulant d'ordre 3 ne contient aucune corrélation «nonflow» à deux particules, l'effet de la désintégration des Δ est automatiquement soustrait et cela pourrait expliquer pourquoi le $v_1'\{3\}$ est si élevé. Nous rappelons que notre estimation de l'effet de la désintégration des ρ sur le flot des pions est faible : c'est vraisemblablement pourquoi le v_1' «standard» et le $v_1'\{3\}$ sont compatibles pour les pions.

Notons enfin le comportement atypique du $v_1'\{2\}$ des protons qui sature vers 3% à bas p_T alors qu'il devrait s'annuler linéairement ! Cependant, d'après [17], ces résultats sont compatibles avec le v_1 des protons obtenu par la méthode standard *avant* soustraction de l'effet de la conservation de l'impulsion.

b Dépendance en rapidité

Terminons sur $v_1'(y)$. Nous noterons $y^* = y - y_{\mathrm{CM}}$ la rapidité dans le référentiel du centre de masse. Nous remarquons que l'ordre 2 ne s'annule pas en $y^* = 0$ alors que v_1' doit être une fonction impaire de y^* ! Ceci est encore un effet de la conservation de l'impulsion. En revanche, le v_1 standard, corrigé de cet effet, passe par $y^* = 0$. Ce qui est beaucoup plus satisfaisant est que l'ordre 3 fait de même, et cela, naturellement, sans aucune correction supplémentaire !

A des rapidités plus grandes, nous remarquons vers $y = 4.5$ un brusque changement de concavité sur le v_1 «standard» qui rappelle un effet de «bounce-off». Seulement, ce «rebond» devrait se produire à la rapidité du projectile, à savoir vers $y = 6$. Sur l'ordre 3, nous obtenons une dépendance en rapidité plus régulière, ce qui, à notre sens, est plus satisfaisant.

XII.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté comment en pratique les cumulants pour le flot différentiel peuvent être calculés par le moyen d'une fonction génératrice. Le développement en série de cette dernière permet de calculer en principe les cumulants différentiels à un ordre quelconque. En pratique, nous n'utilisons que les ordres 2 et 4 pour le flot n'utilisant qu'une seule harmonique, et l'ordre 3 pour les corrélations mixtes.

Les premiers résultats à RHIC et au SPS mettent en évidence les corrélations «nonflow» à deux particules. Pour STAR, la saturation à haut p_T semble se mettre en place plus tôt pour $v_2'\{4\}$ que pour $v_2'\{2\}$. En revanche, aucune différence notable n'a été observée sur les nouvelles données de NA49.

En ce qui concerne le flot dirigé au SPS, nous avons insisté sur la comparaison entre la méthode des sous-événements corrigée de l'effet de la conservation de l'impulsion transverse totale, et la reconstruction par le cumulant d'ordre 3, qui est par définition exempt de toute corrélation à deux particules. Notamment la conservation de l'impulsion est automatiquement prise en compte dans ce dernier, avec des erreurs statistiques seulement deux fois plus grandes que celles de la méthode standard au SPS. L'implémentation de l'analyse de v_1' à partir de v_2 à STAR ne saurait tarder et nous attendons avec impatience les premiers résultats de flot dirigé à des énergies aussi élevées que celles de RHIC.

Chapitre XIII

Conclusion et perspectives

Dans la Partie B, nous avons montré que les méthodes standard n'étaient pas valides aux énergies du CERN. Plus généralement, elles ne sont pas applicables si $v_n \ll 1/\sqrt{N}$, où N est le nombre total de particules produites dans la collision. En effet, ces méthodes basent leur reconstruction du flot sur les corrélations à deux particules. Or nous avons montré que la contribution des effets non dus au flot sont du même ordre de grandeur que le flot dans les corrélations à deux particules. Autrement dit, ces méthodes ne peuvent distinguer le flot et les effets «nonflow».

Nous avons proposé une nouvelle méthode qui généralise les méthodes standard et qui utilise les corrélations impliquant plus de deux particules. Nous avons effectué un développement en cumulants qui permet de soustraire automatiquement les effets «nonflow» et les imperfections du détecteur. De nets progrès ont été faits dans le sens où les valeurs accessibles par l'utilisation des cumulants sont d'autant plus faibles que l'ordre utilisé est grand, jusqu'à une valeur limite d'ordre $1/N$.

En pratique, nous préconisons l'utilisation des fonctions génératrices qui est une technique élégante pour calculer les cumulants à tous les ordres. La puissance de cette technique réside dans le fait que nous pouvons obtenir autant d'estimations indépendantes du flot suivant le nombre de cumulants utilisés. La confrontation de ces différentes valeurs nous a permis de mettre en évidence

i) les effets «nonflow» en comparant l'ordre 2 et les ordres supérieurs ;

ii) la présence manifeste d'effets collectifs, et ce, pour la première fois au SPS, par le fait que les cumulants d'ordre supérieur sont tous compatibles entre eux.

Une de nos grandes satisfactions vient du fait qu'après de nombreuses réticences (qui sont encore perceptibles !) de la part des expérimentateurs à changer leurs habitudes, *i.e.*, à cesser d'utiliser les analyses standard, notre méthode des cumulants d'ordre supérieur est finalement reconnue et acceptée. Ma collaboration avec l'expérience NA49 du CERN et celle avec A. Tang de STAR à RHIC en sont les preuves. D'autres collaborations (NA45/CERES au SPS et PHENIX à RHIC) sont intéressées par notre méthode et sont déjà fortement impliquées.

Les perspectives théoriques sont également nombreuses : maintenant que nous disposons de mesures de flot fiables, nous pouvons travailler sur ces données, non seulement pour mieux comprendre la physique du flot mais également les corrélations «nonflow». Un de nos projets consiste à reproduire le même type de technique pour les jets et à calculer les fonctions génératrices intrajet et interjet.

Chapitre XIV
Articles de la Partie C

Bibliographie

[1] N. Borghini, P. M. Dinh et J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. C **63** (2001) 054906 [arXiv :nucl-th/0007063].

[2] N. Borghini, P. M. Dinh et J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. C **64** (2001) 054901 [arXiv :nucl-th/0105040].

[3] N. Borghini, P. M. Dinh et J. Y. Ollitrault, arXiv :nucl-th/0204017.

[4] T. H. Hill, *Statistical Mechanics*, (MacGraw-hill, NY, 1956), chapter 5.

[5] N. G. van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1981).

[6] N. Borghini, P. M. Dinh, J. Y. Ollitrault, A. M. Poskanzer et S. A. Voloshin, arXiv :nucl-th/0202013.

[7] A. Andronic *et al.* [FOPI Collaboration], Nucl. Phys. A **679**, 765 (2001) [arXiv :nucl-ex/0008007].

[8] C. Pinkenburg *et al.* [E895 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1295 [arXiv :nucl-ex/9903010] ;

[9] P. Chung *et al.* [E895 Collaboration], arXiv :nucl-ex/0112002.

[10] P. Saturnini [NA50 Collaboration], Nucl. Phys. A **661**, 345 (1999).

[11] H. Appelshäuser *et al.* [NA49 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **80**, 4136 (1998) [nucl-ex/9711001]. Nous avons utilisé les données révisées, accessibles sur la page internet de NA49, `http ://NA49info.cern.ch/na49/Archives/Images/Publications/Phys.Rev.Lett.80 :4136-4140,1998/` .

[12] C. Adler *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 182301 [arXiv :nucl-ex/0107003] ; K. H. Ackermann *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 402 [arXiv :nucl-ex/0009011].

[13] A. H. Tang, arXiv :hep-ex/0108029.

[14] En préparation.

[15] G. E. Cooper, PhD thesis, University of California at Berkeley, 2000 [LBNL-45467, http ://na49info.cern.ch/cgi-bin/wwwd-util/NA49/NOTE?222] ; G. E. Cooper, Ncul. Phys. **A661** (1999) 362c.

[16] En préparation.

[17] A. M. Poskanzer, communication privée.

Partie D

La suppression du J/ψ

Chapitre XV

Suppression du méson J/ψ dans les collisions nucléaires

Sommaire

XV.1 Production du J/ψ dans les collisions nucléaires 228
XV.1.1 Description du méson J/ψ 228
XV.1.2 Modèles de production du J/ψ dans les collisions nucléon–nucléon 229
XV.1.3 Modèles de production du J/ψ dans les collisions nucléon–noyau : suppression «normale» 229
XV.1.4 Modèles de production du J/ψ dans les collisions noyau–noyau ; suppression anormale 231
XV.2 Modèles de suppression anormale 233
XV.2.1 Description qualitative de la suppression anormale 233
XV.2.2 Calcul de la densité locale d'énergie 235
XV.2.3 Fluctuations de l'énergie transverse 236
XV.2.4 Autres modèles de suppression anormale 237
XV.3 Application aux données de NA50 238
XV.3.1 «Minimum bias analysis» 238
XV.3.2 Production de Drell-Yan 239
XV.3.3 Production de J/ψ 240
XV.3.4 Application aux données de NA50 240
XV.4 Dispersion en impulsion transverse 245
XV.4.1 Dispersion dans une collision noyau–noyau 245
XV.4.2 Effets de la suppression anormale et des fluctuations en E_T 246
XV.4.3 J/ψ de grande impulsion transverse 247
XV.5 Prédictions de notre modèle 248
XV.5.1 Production de J/ψ à RHIC 248
XV.5.2 Petits systèmes 250
XV.6 Conclusion 252

Dans ce chapitre, nous exposerons nos travaux concernant l'observable hadronique que constitue la production de J/ψ dans les collisions d'ions lourds. Elle a été proposée comme signature du plasma de quarks et de gluons : en effet, le J/ψ devrait être supprimé en présence d'une phase déconfinée. Il semblerait que les mesures expérimentales à ce jour donnent des indications sur la formation de ce plasma mais les conclusions sont encore sujettes à controverse.

Nous exposerons dans une première section les modèles théoriques de production du J/ψ dans les collisions nucléon–nucléon, nucléon–noyau et noyau–noyau, et notamment ce qu'on

appelle la suppression «normale» du J/ψ, ou absorption nucléaire. Cela nous permettra de définir la suppression «anormale» observée par la collaboration NA50 en 1996 pour des collisions Pb–Pb, et de souligner une suppression anormale plus prononcée dans les données de 2000 pour les collisions très centrales. Nous présenterons ensuite des modèles théoriques de suppression anormale, et plus précisément notre description basée sur la densité d'énergie locale. Nous avons notamment modifié ce modèle pour prendre en compte les fluctuations de l'énergie transverse. Cette modification suffit à expliquer de façon très satisfaisante les données de 2000 de NA50. Nous présenterons également des résultats non publiés concernant la dispersion en impulsion transverse. Enfin nous terminerons sur nos prédictions pour RHIC et pour des systèmes plus petits que Pb–Pb, ce dernier point n'étant pas publié non plus.

XV.1 Production du J/ψ dans les collisions nucléaires

XV.1.1 Description du méson J/ψ

a Un état lié charmonium

Le J/ψ est un état lié d'une paire quark-antiquark charmé $c\bar{c}$. Il est produit lors de processus durs à une échelle de temps très courte à cause de la masse élevée du quark c. Il a en revanche un temps de vie relativement long, $\sim 3 \times 10^3$ fm/c, ce qui est grand comparé au temps de la collision. Le J/ψ est bien décrit par un hamiltonien non relativiste à deux corps (la paire $c\bar{c}$) :

$$H = 2m_c + \frac{p_1^2}{2m_c} + \frac{p_2^2}{2m_c} + V(r), \qquad \text{(XV.1)}$$

où $m_c \simeq 1.37$ GeV est la masse du quark c, p_1 (resp. p_2) est l'impulsion du quark c (resp.de l'antiquark $\bar{c}$), r est la distance relative entre le quark et l'antiquark, et V le potentiel inter-quarks [*cf.* Chapitre I, (Eq.I.3)]. Les états de plus basses énergies sont le η_c ($^1S_0$), le J/ψ ($^3S_0$), les χ ($^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$) et le ψ' ($^3S_1$). 40 % des J/ψ observés proviennent de la désintégration des χ et du ψ'.

b Une signature du plasma de quarks et de gluons

Le J/ψ est détecté à travers sa désintégration en paires $\mu^+\mu^-$. Etant donné qu'il est créé très tôt et qu'il a un temps de vie relativement long, il ne se désintègre que loin de la zone où il a été produit. Il constitue ainsi une bonne «sonde» de la matière nucléaire qu'il traverse. En particulier, s'il passe dans une zone où un plasma de quarks et de gluons a été créé, le potentiel dans (XV.1) qui relie la paire $c\bar{c}$ est fortement écranté et le J/ψ est supprimé [1]. La recombinaison du quark c et de l'antiquark $\bar{c}$ en J/ψ est alors très peu probable.

En fait, toute particule traversant de la matière nucléaire hadronique est supprimée (avec plus ou moins de force) par l'absorption nucléaire et nous qualifierons cette suppression de «normale». La suppression «anormale» que nous avons décrite plus haut fait référence à cette suppression supplémentaire due éventuellement à la présence d'un plasma de quarks et de gluons. Avant de décrire cette dernière plus en détail, étudions d'abord la production de J/ψ lors de collisions nucléaires.

XV.1.2 Modèles de production du J/ψ dans les collisions nucléon–nucléon

Le calcul de la section efficace de production de J/ψ dans les collisions nucléon–nucléon fait appel à la QCD perturbative. La section efficace est écrite sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{NN\to c\bar{c}}}{\mathrm{d}^2p_T} = \int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ \delta(x_1x_2s - m_{c\bar{c}})\, G(x_1)G(x_2)\frac{\mathrm{d}\sigma_{gg\to c\bar{c}}}{\mathrm{d}^2p_T}, \qquad \text{(XV.2)}$$

où $G(x)$ est la probabilité, dans un nucléon, d'avoir un gluon g avec une fraction de l'impulsion x, et $\mathrm{d}\sigma_{gg\to c\bar{c}}$ est la section efficace du processus $gg \to c\bar{c}$.

La production d'une paire $c\bar{c}$ peut être considérée comme locale et instantanée, la masse du quark c étant élevée : la fonction d'onde correspondante a une extension typique $\Delta x \sim \Delta t \sim 1/2m_c \simeq 0.07$ fm/c. L'évolution de cette paire $c\bar{c}$ en un état lié charmonium, comme le J/ψ, est un processus non perturbatif et prend plus de temps. Ce temps de formation τ_0 est donné grossièrement par le temps que prend la paire $c\bar{c}$ à se séparer d'une distance de l'ordre de l'extension spatiale de l'état charmonium. Typiquement, on a $\tau_0 \leq 0.7$ fm/c. C'est ce temps caractéristique que l'on considérera pour décrire l'évolution du paquet d'onde de la paire $c\bar{c}$ en un J/ψ.

XV.1.3 Modèles de production du J/ψ dans les collisions nucléon–noyau : suppression «normale»

Nous considérons maintenant une collision nucléon–noyau, notée N–A. Elle est schématisée Fig.XV.1. Nous supposerons que la section efficace de production du J/ψ dans une collision N–A est identique à celle dans une collision N–N, Eq.(XV.2), pourvu que l'on remplace la fonction de structure du gluon dans un nucléon $G(x)$ par la fonction de structure dans un noyau $G_A(x)$. Cela revient à négliger les interactions dans l'état final, notamment l'absorption nucléaire, sur le taux de production de paires $c\bar{c}$. Autrement dit, nous considérons la production de la paire $c\bar{c}$ comme un processus dur.

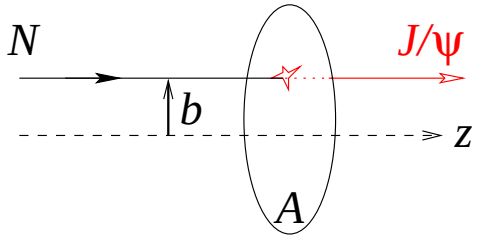


FIG. XV.1 – Une collision nucléon–noyau à paramètre d'impact **b**, avec production d'un J/ψ.

En revanche, le J/ψ ainsi formé subit des interactions dans l'état final : le taux de production du J/ψ dans cette collision peut se calculer simplement en tenant compte de l'absorption nucléaire que le J/ψ subit ou ne subit pas de la part du milieu qu'il traverse pour s'échapper du noyau. Nous avons utilisé la valeur de la section efficace d'absorption nucléaire donnée par NA50 [2], $\sigma_a = 6.4$ mb.

Grâce à la théorie de Glauber, calculons la probabilité pour qu'un J/ψ produit en $(\mathbf{b}, z)$ ne fasse de collision avec aucun nucléon du noyau A, *i.e.*, qu'il ne soit pas absorbé. Etudions d'abord la probabilité pour que le J/ψ fasse une collision avec le nucléon N'. En supposant que le J/ψ ait une trajectoire parallèle à l'axe de la collision, N' doit se trouver dans un cylindre de base σ_a et d'axe parallèle à l'axe de la collision. Si nous négligeons la probabilité d'avoir deux collisions avec N', le nombre moyen de collisions du J/ψ avec ce nucléon est

donné par

$$p_1(\mathbf{b}) = \frac{\sigma_a \int_z^{+\infty} \mathrm{d}z\, \rho_A(\mathbf{b}, z)}{A}. \tag{XV.3}$$

Ici, $\rho_A(\mathbf{b}, z)$ représente la densité de nucléons dans le noyau A, normalisée à A :

$$\int \mathrm{d}z\, \mathrm{d}^2\mathbf{b}\, \rho_A(\mathbf{b}, z) = A. \tag{XV.4}$$

Pour nos applications numériques, nous utilisons la paramétrisation de Woods-Saxon pour la densité de nucléons

$$\rho_A(\mathbf{r}) = \rho_A(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R_A)/a}}, \tag{XV.5}$$

avec $a = 0.53$ fm, $R_A = 1.1A^{1/3}$ fm et ρ_0 donnée par la condition de normalisation (XV.4). Pour ^{208}Pb, on a $\rho_0 = 0.17$ fm^{-3}.

Ainsi, si nous considérons tous les nucléons indépendants et libres, la probabilité $p_0(\mathbf{b})$ pour que le J/ψ ne soit pas absorbé vaut

$$p_0(\mathbf{b}) = \left[1 - \frac{\sigma_a \int_z^{+\infty} \mathrm{d}z'\, \rho_A(\mathbf{b}, z')}{A}\right]^A \simeq \exp\left[-\sigma_a \int_z^{+\infty} \mathrm{d}z'\, \rho_A(\mathbf{b}, z')\right], \tag{XV.6}$$

la dernière approximation étant vraie pour A grand. Remarquons que lorsque $A = 1$, *i.e.*, pour une collision N–N, la probabilité pour que le J/ψ ne soit pas absorbé par le nucléon cible doit être égale à 1. Il convient donc d'ajouter un facteur $(1 - 1/A)$ dans l'exponentielle de (XV.6) pour satisfaire cette condition. Cependant, nous ne l'écrirons pas dans la suite car nous nous plaçons dans le cas où A est grand (~ 200).

Finalement, la section efficace de production du J/ψ dans une collision N–A est donnée par :

$$\begin{aligned}
\sigma_{NA}^{\psi} &= \sigma_{NN}^{\psi} \int \mathrm{d}z\, \mathrm{d}^2\mathbf{b}\, \rho_A(\mathbf{b}, z)\, \exp\left[-\sigma_a \int_z^{+\infty} \mathrm{d}z'\, \rho_A(\mathbf{b}, z')\right] \\
&= \frac{\sigma_{NN}^{\psi}}{\sigma_a} \int \mathrm{d}^2\mathbf{b} \left\{1 - \exp\left[-\sigma_a \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\, \rho_A(\mathbf{b}, z)\right]\right\} \\
&= \frac{\sigma_{NN}^{\psi}}{\sigma_a} \int \mathrm{d}^2\mathbf{b} \left[1 - e^{-\sigma_a T_A(\mathbf{b})}\right],
\end{aligned} \tag{XV.7}$$

où nous avons introduit $T_A(\mathbf{b})$, la densité de nucléons dans le plan transverse à paramètre d'impact donné,

$$T_A(\mathbf{b}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\, \rho_A(\mathbf{b}, z). \tag{XV.8}$$

D'après (XV.4), nous avons la normalisation $\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\, T_A(\mathbf{b}) = A$.

La probabilité de survie du J/ψ, donnée par le rapport de la section efficace de production dans les collisions N–A sur A fois la section efficace dans les collisions N–N, s'écrit

$$\mathcal{N}_A = \frac{\sigma_{NA}^{\psi}}{A\, \sigma_{NN}^{\psi}} = \frac{1}{A\, \sigma_a} \int \mathrm{d}^2\mathbf{b} \left[1 - e^{-\sigma_a T_A(\mathbf{b})}\right]. \tag{XV.9}$$

Si σ_a n'est pas trop grand, nous pouvons considérer que $\sigma_a T_A \ll 1$ quel que soit $\mathbf{b}$. La probabilité de survie peut alors être approximée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_A &\simeq \frac{1}{A\ \sigma_a}\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\left[1-1+\sigma_a T_A(\mathbf{b})-\frac{\sigma_a^2}{2}T_A^2(\mathbf{b})\right]=1-\frac{\sigma_a}{2A}\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\ T_A^2(\mathbf{b})\\ &\simeq \exp\left(-\frac{\sigma_a}{2A}\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\ T_A^2(\mathbf{b})\right)\equiv\exp\left(-\frac{\sigma_a\ \bar{n}_A}{2}\right). \qquad \text{(XV.10)}\end{aligned}$$

$\bar{n}_A$ est la densité moyenne de nucléons dans le plan tranverse vu par le J/ψ produit. Ainsi, $\sigma_a\bar{n}_A/2$ apparaît comme le nombre moyen de collisions entre le J/ψ et les nucléons du noyau A. Comme $R_A \propto A^{1/3}$, nous avons $\bar{n}_A \sim A^{2/3}A^{2/3}A^{-1} \sim A^{1/3}$. Remarquons également que s'il n'y a pas d'absorption ($\sigma_a = 0$), nous avons évidemment $\mathcal{N}_A = 1$. Nous avons également $\mathcal{N}_A = 1$ lorsque $A = 1$ puisque nous avons trivialement $\sigma_{NA} = A\ \sigma_{NN}$. Passons maintenant au cas d'une collision noyau–noyau.

XV.1.4 Modèles de production du J/ψ dans les collisions noyau–noyau ; suppression anormale

Le cas de la collision A–B se généralise à partir du cas nucléon–noyau N–A en considérant que le nucléon incident appartient au noyau B. Il convient donc d'introduire ρ_B, la densité de nucléons dans B. La Fig.XV.2 représente une collision A–B à paramètre d'impact $\mathbf{b}$. Les

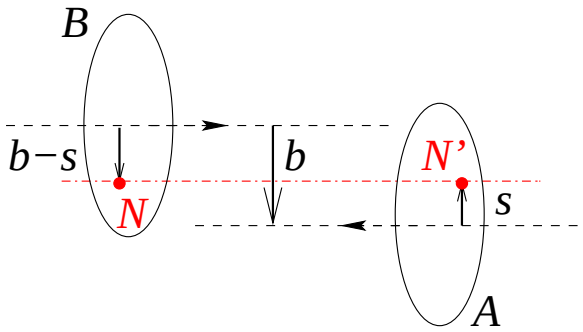


FIG. XV.2 – Une collision noyau–noyau à paramètre d'impact $\mathbf{b}$.

nucléons N et N' sont repérés par les vecteurs $\mathbf{b}-\mathbf{s}$ et $\mathbf{b}$ respectivement. La section efficace (XV.7) de production du J/ψ devient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma_{AB}}{\mathrm{d}^2\mathbf{b}} &= \sigma_{NN}^{\psi}\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\int \mathrm{d}z_2\,\rho_B(\mathbf{b}-\mathbf{s},z_2)\exp\left[-\sigma_a\int_{z_2}^{+\infty}\mathrm{d}z_2'\ \rho_B(\mathbf{b}-\mathbf{s},z_2')\right]\\ &\qquad\times\int \mathrm{d}z_1\ \rho_A(\mathbf{s},z_1)\ \exp\left[-\sigma_a\int_{z_1}^{-\infty}\mathrm{d}z_1'\ \rho_A(\mathbf{s},z_1')\right]\\ &= \frac{\sigma_{NN}^{\psi}}{\sigma_a^2}\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\left[1-e^{-\sigma_a T_A(\mathbf{b})}\right]\left[1-e^{-\sigma_a T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})}\right]. \qquad \text{(XV.11)}\end{aligned}$$

Quand $\sigma_a = 0$, Eq.(XV.11) devient :

$$\frac{1}{\sigma_{NN}^{\psi}}\frac{\mathrm{d}\sigma_{AB}}{\mathrm{d}^2\mathbf{b}}=\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\ T_A(\mathbf{s})\ T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})\equiv T_{AB}(\mathbf{b}), \qquad \text{(XV.12)}$$

avec la normalisation $\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\; T_{AB}(\mathbf{b}) = AB$. La fonction $T_{AB}(\mathbf{b})$ est en fait proportionnelle au nombre de collisions inélastiques nucléon–nucléon, *i.e.*, à la probabilité de produire une paire $c\bar{c}$.

Finalement la probabilité de survie du J/ψ dans une collision A–B à paramètre d'impact $\mathbf{b}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{b}) &\equiv \frac{1}{T_{AB}(\mathbf{b})}\frac{1}{\sigma^{\psi}_{NN}}\frac{\mathrm{d}\sigma_{AB}}{\mathrm{d}^2\mathbf{b}} \\ &= \frac{1}{T_{AB}(\mathbf{b})}\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\;\frac{1}{{\sigma_a}^2}\left[1-e^{-\sigma_a T_A(\mathbf{s})}\right]\left[1-e^{-\sigma_a T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})}\right]. \end{aligned} \qquad \text{(XV.13)}$$

Dans le cas où l'absorption nucléaire n'est pas trop grande, nous avons

$$\mathcal{N}(\mathbf{b}) \simeq \exp\left(-\frac{\sigma_a \bar{n}_{AB}}{2}\right), \qquad \text{(XV.14)}$$

où

$$\bar{n}_{AB} = \frac{1}{T_{AB}(\mathbf{b})}\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\; T_A(\mathbf{s})T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})\left[T_A(\mathbf{s})+T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})\right]. \qquad \text{(XV.15)}$$

Si nous intègrons (XV.11) sur $\mathbf{b}$, nous obtenons la factorisation suivante :

$$\frac{\sigma_{AB}}{\sigma^{\psi}_{NN}} = \frac{\sigma^{\psi}_{NA}}{\sigma^{\psi}_{NN}}\,\frac{\sigma^{\psi}_{NB}}{\sigma^{\psi}_{NN}}, \qquad \text{(XV.16)}$$

qui s'écrit encore

$$\mathcal{N}_{AB} \equiv \frac{\sigma_{AB}}{AB\;\sigma^{\psi}_{NN}} = \mathcal{N}_A\;\mathcal{N}_B. \qquad \text{(XV.17)}$$

En utilisant (XV.10), nous avons donc

$$\ln \mathcal{N}_{AB} = \ln \mathcal{N}_A + \ln \mathcal{N}_B \sim A^{1/3} + B^{1/3}. \qquad \text{(XV.18)}$$

La production du J/ψ a été mesurée dans les collisions N–A [3,4] et A–B [2,4–7]. La Fig.XV.3 présente les données expérimentales en fonction de $A^{1/3}+B^{1/3}$ et nous remarquons une très bonne dépendance linéaire. Cependant, bien que le modèle de Glauber de suppression nucléaire rende compte correctement des données sur des systèmes légers [9, 10], NA50 a observé en 1996 dans les collisions Pb–Pb une suppression «anormale» du J/ψ par rapport à la suppression nucléaire [7].

La Fig.XV.4 présente le rapport de la section efficace de production du J/ψ sur la production de paires Drell–Yan, en fonction de l'énergie transverse (E_T). Les résultats de différentes analyses y sont présentées [2, 7, 11]. Nous expliquerons dans la suite pourquoi le J/ψ est comparé aux paires Drell–Yan et ce que signifie le terme «minimum bias analysis», dont le but est de diminuer les erreurs statistiques. Sur les premières données de 1996, un décrochement des données par rapport à la courbe d'absorption nucléaire était déjà visible pour le système Pb–Pb. Divers scénarios basés sur des interactions hadroniques [12] ou sur la formation d'un plasma de quarks et de gluons [8, 13] expliquent ce décrochement. Plus récemment, NA50 a publié ses derniers points expérimentaux [2], avec des valeurs plus élevées en E_T : un deuxième décrochement à grand E_T a été observé, alors que les modèles théoriques de suppression précédents saturaient tous pour les grandes valeurs de E_T. NA50 y a vu la preuve de la formation d'un plasma de quarks et de gluons, avec suppression du méson χ puis du méson J/ψ (d'où deux décrochements). Cependant, nous verrons que ce deuxième décrochement s'explique aisément en prenant en compte les fluctuations de l'énergie transverse à géométrie fixée, et ainsi, sans considérer la suppression du χ.

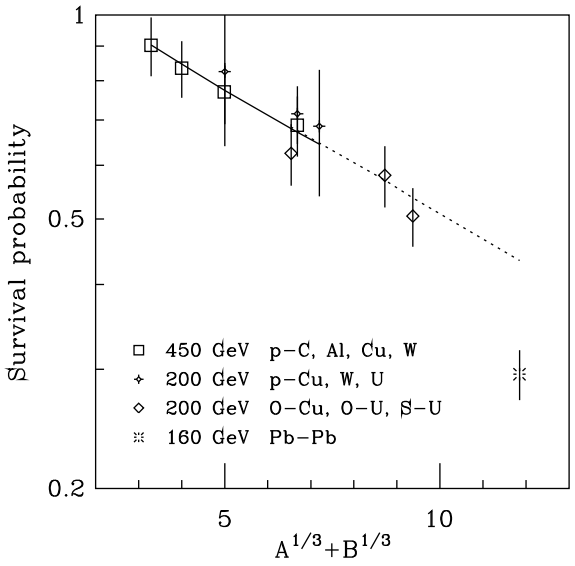


FIG. XV.3 – Probabilité de survie du J/ψ dans une collision A–B, en fonction de $A^{1/3} + B^{1/3}$ [8]. Trait plein : collision nucléon–noyau ; pointillés : collision noyau–noyau. Calcul de l'absorption nucléaire avec $\sigma_a = 6.2$ mb. Données expérimentales : à 450 AGeV [3], à 200 AGeV [4, 5] et à 158 AGeV [7].

XV.2 Modèles de suppression anormale

Cette section est consacrée aux modèles théoriques de la suppression anormale. Notre modèle se base sur une description très simple de la suppression du J/ψ par un plasma. Une partie de mon travail a été de prendre en compte les fluctuations en E_T dans ce modèle. Dans une première partie, nous discuterons de l'effet de ces fluctuations de manière (semi)-qualitative. Puis nous calculerons plus en détail la probabilité de survie du J/ψ. Enfin nous présenterons d'autres modèles de suppression anormale.

XV.2.1 Description qualitative de la suppression anormale

La suppression anormale du J/ψ peut se comprendre simplement de la façon suivante : si la densité d'énergie locale ϵ au point où est produit le J/ψ était supérieure à une densité critique ϵ_c, seuil au-delà duquel la matière est déconfinée, la paire $c\bar{c}$ se dissoudrait dans le plasma de quarks et de gluons à cause de l'écrantage de couleur [8]. L'unique paramètre du modèle est pour l'instant la densité critique ϵ_c. Le fait de relier la suppression anormale du J/ψ à la densité d'énergie locale est motivé par l'observation suivante : elle atteint, dans les collisions Pb–Pb, des valeurs qui sont localement bien supérieures aux valeurs atteintes dans les systèmes plus petits, comme S–U. Ce modèle reproduit bien le premier décrochage à bas E_T des données de NA50.

Cependant, il est purement géométrique et à partir du moment où la collision est centrale, la probabilité de survie de J/ψ est fixée et elle sature naturellement à grand E_T. Ce modèle seul ne permet donc pas d'expliquer le deuxième décrochage de la suppression du J/ψ à haut E_T. Nous l'avons étendu en tenant compte des fluctuations en E_T à géométrie fixée, précisément importantes pour les collisions centrales [14, 15].

Le rôle joué par les fluctuations en E_T dans la suppression anormale est le suivant : le deuxième décrochement apparaît pour les grandes valeurs de E_T, *i.e.*, pour les collisions les plus centrales ($\mathbf{b} \simeq \mathbf{0}$). Il se trouve que ces fluctuations deviennent importantes précisément

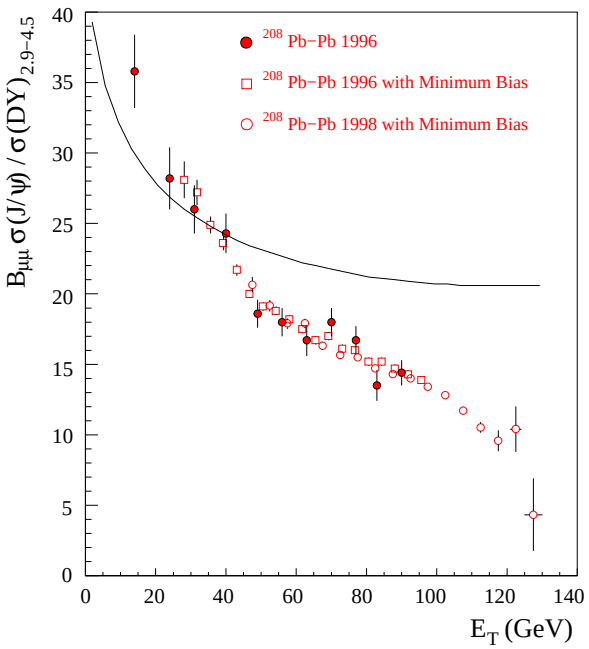


FIG. XV.4 – Rapport de la section efficace de production du J/ψ à la section efficace des paires Drell-Yan, en fonction de l'énergie transverse, dans des collisions Pb–Pb à 158 AGeV [2,7,11]. Courbe : absorption nucléaire.

lorsque le paramètre d'impact devient nul. Ceci signifie qu'à géométrie fixée, des régions plus étendues dans la zone de collision peuvent atteindre des valeurs de la densité d'énergie locale supérieures à ϵ_c et ainsi fournir une suppression supplémentaire à grand E_T.

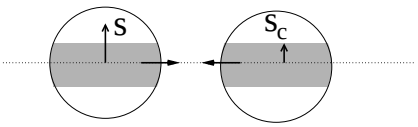


FIG. XV.5 – Géométrie d'une collision centrale : la partie hachurée délimite à la zone de suppression anormale.

Avant d'entrer dans les détails du modèle, une façon simple de voir l'impact sur la production du J/ψ est de considérer une collision centrale entre deux sphères dures de rayon R, schématisée Fig. XV.5. Nous pouvons raisonnablement supposer que la densité d'énergie locale est proportionnelle au nombre de participants au même point (nous préciserons ce point plus tard). Pour $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, en un point $\mathbf{s}$ dans le plan transverse, cette densité est donc proportionnelle au nombre de nucléons dans le petit cylindre d'axe parallèle à l'axe de la collision, centré en $\mathbf{s}$ et de longueur $2\sqrt{R^2 - \mathbf{s}^2}$. La valeur maximale $\epsilon_{\mathbf{max}}$ est atteinte pour $\mathbf{s} = \mathbf{0}$. Nous pouvons associer au seuil critique ϵ_c une zone de suppression anormale délimitée par un vecteur $\mathbf{s}_c$:

$$\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{\mathbf{max}}} = \sqrt{1 - \frac{s_c^2}{R^2}}. \qquad \text{(XV.19)}$$

Supposons maintenant que tous les J/ψ produits en un point $s < s_c$ (donc $\epsilon(\mathbf{s}) > \epsilon_c$) sont supprimés et calculons leur probabilité de survie. La densité de paires $c\bar{c}$ produites en un point $\mathbf{s}$ est proportionnelle au nombre de collisions dans le petit cylindre centré sur $\mathbf{s}$, *i.e.*, approximativement au carré du nombre de participants dans ce cylindre, soit $\propto R^2 - \mathbf{s}^2$. Ainsi, la probabilité de survie du J/ψ est simplement donnée par le rapport du volume non

hachuré dans la Fig. XV.5 sur le volume total [8, 14] :

$$\frac{\int_{s_c}^{R} 2\pi s \mathrm{d}s\ (R^2 - s^2)}{\int_{0}^{R} 2\pi s \mathrm{d}s\ (R^2 - s^2)} = \frac{(R^2 - s_c^2)^2}{R^4} = \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{\max}}\right)^4 . \qquad \text{(XV.20)}$$

Nous avons, à partir de cette dernière équation, une interprétation géométrique de l'effet des fluctuations en E_T : en supposant les fluctuations homogènes dans tout le plan transverse, si E_T augmente (et par suite ϵ également), la région où la suppression anormale se produit augmente de même. Par exemple une fluctuation de 10% en E_T, produisant une augmentation de $\epsilon_{\max}$ du même ordre, donnerait d'après (XV.20) une suppression supplémentaire de 30%, ce qui est l'ordre de grandeur du deuxième décrochement observé par NA50.

Maintenant que nous avons une intuition qualitative de l'effet des fluctuations en E_T, présentons en détail notre modèle de suppression anormale.

XV.2.2 Calcul de la densité locale d'énergie

Nous supposerons la densité d'énergie locale dans le plan transverse proportionnelle à la densité de participants dans ce plan [16]. Cela a été vérifié expérimentalement [17] par l'observation d'une augmentation linéaire de E_T avec le nombre de participants.

Par définition, le nombre de participants dans le plan transverse $n_p(\mathbf{b}, \mathbf{s})$ est donné par la densité de nucléons dans le plan transverse, multipliée par la probabilité pour qu'un nucléon fasse au moins une collision inélastique à paramètre d'impact donné. La probabilité $p_0(\mathbf{b})$ pour qu'un J/ψ ne fasse aucune collision avec un nucléon dans un noyau A est donnée par Eq.(XV.6). La probabilité pour qu'un nucléon de B ne fasse pas de collision inélastique avec les nucléons de A a une expression analogue, à ceci près qu'il faut remplacer la section efficace d'absorption σ_a par la section efficace de collision nucléon–nucléon inélastique $\sigma_N = 32$ mb. Ainsi, la probabilité pour que le nucléon considéré fasse au moins une collision inélastique avec un nucléon du noyau A à $\mathbf{b}$ donné vaut :

$$1 - p_0(\mathbf{b}) = 1 - e^{-\sigma_N T_A(\mathbf{b})}. \qquad \text{(XV.21)}$$

Donc la densité de participants au point $\mathbf{s}$ à paramètre d'impact $\mathbf{b}$ est donnée par (*cf.* Fig.XV.2) :

$$n_p(\mathbf{s}, \mathbf{b}) = T_A(\mathbf{s}) \left[1 - e^{-\sigma_N T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})}\right] + T_B(\mathbf{b} - \mathbf{s}) \left[1 - e^{-\sigma_N T_A(\mathbf{s})}\right] . \qquad \text{(XV.22)}$$

Le nombre total de participants à paramètre d'impact $\mathbf{b}$ est $N_p(\mathbf{b}) = \int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\ n_p(\mathbf{s}, \mathbf{b})$. Nous devons maintenant relier cette densité à la densité d'énergie locale et prendre en compte les fluctuations en E_T.

Avant de poursuivre, revenons sur l'utilisation de la densité d'énergie locale dans le critère de suppression anormale du J/ψ. La Fig.XV.6 représente les densités de participants dans les collisions S–U (à gauche) et Pb–Pb (à droite), calculées par le modèle de Glauber. Nous remarquons que, bien qu'en moyenne, la densité soit approximativement la même dans les deux systèmes, elle est localement très supérieure dans les collisions Pb–Pb par rapport aux collisions S–U. Le maximum est atteint au centre de la zone de collision. Evidemment, étant donné qu'aucune suppression anormale n'a été observée pour le système S–U, le profil de la densité de participants fixe le minimum de la densité critique à $n_c = 3.3$ fm^{-2}.

Intéressons-nous maintenant à la prise en compte des fluctuations dans la suppression anormale.

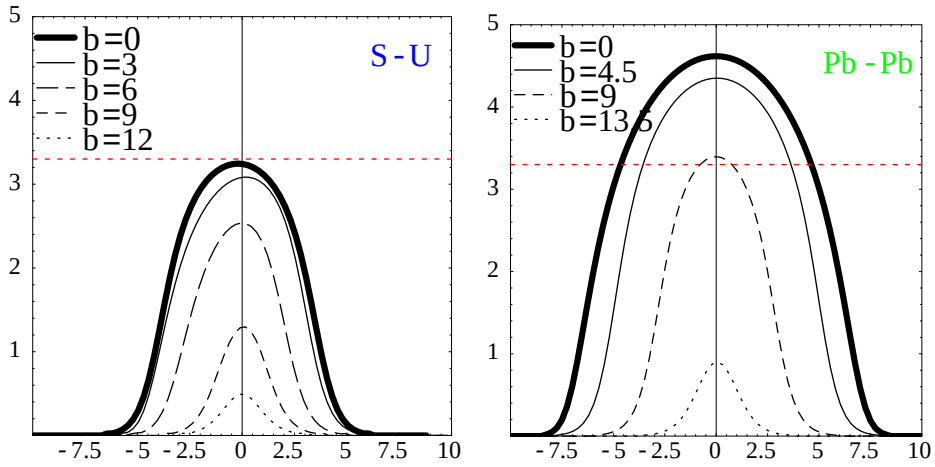


FIG. XV.6 – Densité de participants $n_p(\mathbf{0},\mathbf{s})$, pour différents paramètres d'impact $|\mathbf{b}|$ en fm. S–U à gauche et Pb–Pb à droite.

XV.2.3 Fluctuations de l'énergie transverse

Qu'entendons-nous exactement par fluctuations ? A paramètre d'impact donné, le nombre de participants peut fluctuer mais nous n'allons considérer que les fluctuations de l'énergie transverse produite pour un nombre fixé de participants, *i.e.*, à géométrie (et donc à $\mathbf{b}$) donné. La distribution de E_T à $\mathbf{b}$ donné est considérée comme étant gaussienne [18] :

$$P(E_T|\mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q^2 a N_p(\mathbf{b})}} \exp\left(-\frac{[E_T - qN_p(\mathbf{b})]^2}{2q^2 a N_p(\mathbf{b})}\right). \qquad \text{(XV.23)}$$

Elle est normalisée à paramètre d'impact fixé de la façon suivante :

$$\int \mathrm{d}E_T \; P(E_T|\mathbf{b}) = 1. \qquad \text{(XV.24)}$$

La valeur moyenne de l'énergie transverse est $\langle E_T\rangle(\mathbf{b}) = qN_p(\mathbf{b})$, où q est l'énergie transverse moyenne par participants ; la dispersion vaut $\sigma^2_{E_T} = aq^2 N_p(\mathbf{b})$, avec a un paramètre adimensionnel. L'ajustement de la distribution en E_T de NA50 fournit $q = 0.274$ GeV et $a = 1.27$ [19]. Le «genou» de la distribution, défini comme $E_T^{knee} = qN_p(0)$[1] se trouve à environ 108 GeV. Il est à noter que le deuxième décrochement sur les données de NA50, Fig.XV.4, se produit justement aux alentours du genou, signe que ce décrochement est probablement dû à ces fluctuations.

Dans [8], la densité d'énergie était tout simplement prise proportionnelle au nombre de participants :

$$\epsilon \propto n_p(\mathbf{b},\mathbf{s}). \qquad \text{(XV.25)}$$

Nous modifions cette relation pour prendre compte les fluctuations en énergie transverse [14, 15] :

$$\epsilon \propto \frac{E_T}{\langle E_T\rangle(\mathbf{b})}\, n_p(\mathbf{b},\mathbf{s}). \qquad \text{(XV.26)}$$

[1] Une autre définition est également utilisée : le genou correspondrait au sommet d'une parabole qu'on obtiendrait par un ajustement de la queue de la distribution.

En écrivant cette dernière équation, nous avons fait l'hypothèse que les fluctuations en E_T à $\mathbf{b}$ fixé sont distribuées également dans toute la zone de collision. Jusqu'à des valeurs inférieures au genou, nous pouvons considérer $E_T = \langle E_T \rangle(\mathbf{b})$ en bonne approximation. En revanche, à partir du genou, les fluctuations deviennent importantes et E_T peut prendre des valeurs bien plus grandes que $\langle E_T \rangle(\mathbf{b})$. La densité d'énergie locale augmente fortement et peut donc dépasser le seuil critique ϵ_c.

En revanche, dans (XV.25), ϵ ne dépend pas de E_T mais uniquement du paramètre d'impact $\mathbf{b}$, *i.e.*, de la géométrie de la collision. Près du genou et au-delà, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ et la suppression du J/ψ sature à grand E_T. En fait, (XV.25) est à considérer si nous négligeons les fluctuations en E_T dans la fenêtre en rapidité du J/ψ. En effet, l'énergie transverse neutre de la Fig.XV.4 a été mesurée entre 1.1 et 2.3 en pseudo-rapidité, alors que les paires de muons, signature de la désintégration du J/ψ, sont détectées pour $2.82 < y < 3.92$, où y désigne la rapidité dans le référentiel du laboratoire. En utilisant (XV.26) au lieu de (XV.25), nous faisons l'hypothèse que les deux fenêtres en rapidité sont fortement corrélées. A la vue de nos résultats, il semblerait que cela soit effectivement le cas. D'ailleurs, les auteurs de [20] ont dérivé Eq.(XV.26) dans le cas où les excitations de nucléons sont modélisées par des cordes.

XV.2.4 Autres modèles de suppression anormale

a Modèle se basant sur le déconfinement

Un modèle très proche de celui que nous avons présenté est celui exposé dans [10]. L'idée d'une zone de déconfinement où le J/ψ se dissoudrait est la même mais le critère de suppression est différent. Il fait intervenir le paramètre κ qui est le rapport entre le nombre de collisions binaires sur le nombre de participants :

$$\kappa = \frac{N_{\rm coll}}{N_p}. \tag{XV.27}$$

Notre critère de suppression est plus fort car $N_p \sim T_A + T_B$ alors que $\kappa \sim T_A\, T_B/(T_A + T_B)$.

Une autre point différencie les deux modèles : nous supprimons simultanément tous les états liés $c\bar{c}$, que ces derniers donnent indifféremment un J/ψ ou un χ. En revanche, dans [10], la distinction est faite entre le χ, supprimé en premier car moins lié que le J/ψ (40 % des états pré-résonants $c\bar{c}$ donneraient des χ) et le J/ψ.

Nous verrons que dans notre modèle, la distinction entre la suppression du χ et celle du J/ψ n'est pas nécessaire pour expliquer les données de NA50.

b Modèle de suppression hadronique

Une autre approche [12, 21, 23] est en compétition avec les modèles de suppression par déconfinement. Une suppression liée à des interactions purement hadroniques, en sus de l'absorption nucléaire, pourrait expliquer les données de NA50. Ce modèle se base sur l'interaction entre le J/ψ formé et les hadrons en expansion autour du J/ψ, plus communément appelés «comovers». La densité de «comovers» par unité de volume est notée $n_{\rm co}(\mathbf{b}, \mathbf{s}, t)$ et dépend de l'instant t considéré. Pour un système en expansion purement longitudinale, nous avons

$$n_{\rm co}(\mathbf{b}, \mathbf{s}, t) = n_{\rm co}(\mathbf{b}, \mathbf{s}, t_0)\, \frac{t_0}{t}. \tag{XV.28}$$

Entre un instant t et $t + {\rm d}t$, la probabilité pour qu'une paire $c\bar{c}$ soit détruite par son interaction avec un «comover» vaut $\sigma_{\rm co}\, v_{\rm rel}\, n_{\rm co}(\mathbf{b}, \mathbf{s}, t)\, {\rm d}t$ où $\sigma_{\rm co}$ est la section efficace de collision[2], et $v_{\rm rel}$

[2] Dans [24], la vitesse relative est absorbée dans $\sigma_{\rm co}$.

est la vitesse relative entre le J/ψ et le «comover». En utilisant (XV.28), le taux de destruction des J/ψ produits, relié à la probabilité de survie $S_\psi^{\rm co}$, est donné par

$$\frac{\mathrm{d}S_\psi}{S_\psi} = -\sigma_{\rm co}\, v_{\rm rel}\, n_{\rm co}(\mathbf{b},\mathbf{s},t)\,\mathrm{d}t = -\sigma_{\rm co}\, v_{\rm rel}\, n_{\rm co}(\mathbf{b},\mathbf{s},t_0)\,\frac{t_0}{t}\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(XV.29)}$$

Finalement $S_\psi^{\rm co}$ vaut [10]

$$S_\psi^{\rm co}(\mathbf{b},\mathbf{s}) = \exp\left[-\sigma_{\rm co}\, v_{\rm rel}\, t_0\, n_{\rm co}(\mathbf{b},\mathbf{s},t_0)\ln\left(\frac{n_{\rm co}(\mathbf{b},\mathbf{s},t_0)}{N_f}\right)\right], \qquad \text{(XV.30)}$$

où N_f représente la densité de «comovers» au «freeze-out», instant où les particules en expansion n'interagissent plus entre elles.

Le modèle comporte deux paramètres, le produit $\sigma_{\rm co} v_{\rm rel} t_0$ et N_f. Ce dernier est fixé comme étant la densité de hadrons par unité de rapidité dans les collisions N–N et vaut $N_f = 1.15\ \mathrm{fm}^{-2}$; quant au premier paramètre, il varie entre 0.6 et 1 fm^2 [10, 12, 21]. Enfin la densité initiale de «comovers» $n_{\rm co}(\mathbf{b},\mathbf{s},t_0)$ est calculée dans le cadre du «Dual Parton Model» [24].

Le calcul de $S_\psi^{\rm co}$ est très similaire à celui de la suppression par l'absorption nucléaire, à ceci près qu'une expansion est ici prise en compte, donnant un logarithme supplémentaire. Ce dernier produit une absorption «hadronique» plus importante dans les systèmes plus volumineux. Cependant, l'absorption nucléaire seule suffit à expliquer les données pour les collisions N–A et S–U. Ainsi, si la suppression par les «comovers» ajuste les données de N–A, elle sera trop importante pour le système S-U et *vice versa*. De nouvelles mesures plus précises sur les systèmes N–A et S–U pourraient permettre de confirmer ou d'infirmer ce scénario.

Par ailleurs, l'interaction avec les «comovers» supprime les J/ψ produits de façon continue et aucune «cassure» ne peut alors se produire autour de $E_T = 40$ GeV. Enfin la convolution avec la distribution en E_T à $\mathbf{b}$ donné [12], rendant compte des fluctuations à grand E_T, produit un changement de convexité à peine perceptible au-delà du genou car la suppression par les «comovers» n'est pas assez suffisante. Cependant il a été proposé une explication pour cette suppression supplémentaire en terme de perte d'énergie par la détection du J/ψ et par suite, dans l'énergie transverse déposée dans le calorimètre [25]. Nous reviendrons sur ce point à la fin de la section suivante, après avoir exposé l'analyse des données par NA50.

XV.3 Application aux données de NA50

Pour confronter notre modèle aux données expérimentales, nous devons d'abord détailler l'analyse faite par la collaboration NA50, et notamment ce qui est appelé «minimum bias analysis». Dans ce contexte, nous calculerons alors la production de J/ψ et de Drell-Yan puis nous comparerons nos résultats à ceux de NA50.

XV.3.1 «Minimum bias analysis»

Dans une collision A–B à paramètre d'impact $\mathbf{b}$, le nombre de paires $c\bar{c}$ produites est proportionnel au nombre de collisions nucléon–nucléon, soit à $T_{AB}(\mathbf{b})$ défini par (XV.12). Or le nombre de paires $c\bar{c}$ donne, à un facteur multiplicatif près, le taux de paires Drell–Yan créées dans cette collision. Ces paires de muons produites directement dans la zone de collision ne subissent ni l'absorption nucléaire ni la suppression anormale due à la formation d'un plasma de quarks et de gluons, ou plus généralement aucune des interactions dans l'état final, contrairement aux J/ψ. Le nombre de Drell–Yan constitue donc une référence pour l'étude de la suppression du J/ψ. C'est pour cela que NA50 a présenté ses résultats expérimentaux sous

la forme de rapport de la section efficace (différentielle ou intégrée) de production du J/ψ sur celle des Drell–Yan.

NA50 a effectué deux analyses : la première était de mesurer les J/ψ et les Drell–Yan produits et de faire le rapport des sections efficaces de production. C'est cette analyse qui a été appliquée pour la première fois sur les données de 1996 [7]. Cependant la section efficace de production des Drell–Yan dans une collision nucléon–nucléon étant faible, la statistique sur ces paires de muons est assez pauvre et les barres d'erreur relativement grandes.

La deuxième analyse («minimum bias analysis») est plus performante au niveau de la statistique mais perd un peu en clarté. En effet, le taux de production des Drell–Yan n'est plus mesurée mais calculée théoriquement. La référence expérimentale n'est donc plus le nombre de Drell–Yan produits mais les événements «minimum bias», *i.e.*, tous les événements où se produit au moins une collision inélastique. L'échantillon obtenu est donc beaucoup plus grand que celui avec uniquement des Drell–Yan. Les erreurs statistiques de l'analyse minimum bias sont ainsi beaucoup plus faibles que dans l'analyse standard. NA50 a appliqué cette deuxième méthode à ses données de 1996 et de 1998 [11]. Nous la décrirons en détail à la Section XV.3.4.

XV.3.2 Production de Drell-Yan

La probabilité pour qu'un nucléon fasse au moins une collision inélastique avec un nucléon du noyau A à paramètre d'impact $\mathbf{b}$ est donnée par (XV.21). De façon analogue, la probabilité pour qu'il y ait au moins une collision inélastique nucléon–nucléon dans une collision A–B à $\mathbf{b}$ donné, probabilité que nous noterons $\mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})$, «MB» signifiant «minimum bias», vaut :

$$\mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b}) = 1 - e^{-\sigma_N T_{AB}(\mathbf{b})}. \tag{XV.31}$$

La probabilité de produire une paire Drell–Yan à un certain $\mathbf{b}$ est donnée par le produit suivant :

$$\mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})\,\mathcal{P}(\mathrm{DY}|\mathbf{b}) = \sigma_{NN}^{\mathrm{DY}} \int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\; T_A(\mathbf{s}) T_B(\mathbf{s}-\mathbf{b}) = \sigma_{NN}^{\mathrm{DY}}\; T_{AB}(\mathbf{b}). \tag{XV.32}$$

Dans le membre de gauche apparaissent deux facteurs : $\mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})$, probabilité d'avoir une collision inélastique à $\mathbf{b}$ donné, et $\mathcal{P}(\mathrm{DY}|\mathbf{b})$, probabilité d'avoir une paire Drell–Yan produite étant donné une collision nucléon–nucléon à $\mathbf{b}$ donné. Ainsi dans le membre de droite de (XV.32), nous avons la probabilité pour qu'une paire soit produite à $\mathbf{b}$ donné, sans préciser qu'il y ait eu ou non de collision inélastique, et elle est égale au nombre de collisions nucléon–nucléon $T_{AB}(\mathbf{b})$ fois la section efficace de production des Drell–Yan dans une collision nucléon–nucléon, $\sigma_{NN}^{\mathrm{DY}}$.

La distinction entre la probabilité de produire une paire Drell–Yan sachant qu'il y a eu une collision inélastique à $\mathbf{b}$ donné et la probabilité d'en produire une à $\mathbf{b}$ donné peut paraître surprenante, puisqu'il n'y a pas de Drell–Yan produits sans collision ! Cependant, l'analyse «minimum bias» prenant justement comme référence les événements où il y a eu au moins une collision inélastique, nous sommes obligés de distinguer ces deux probabilités afin de faire apparaître clairement la probabilité d'avoir au moins une collision inélastique $\mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})$. Cette distinction sera aussi valable pour le J/ψ.

D'ailleurs, nous pouvons vérifier que la présence du facteur $\mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})$ est en fait nécessaire en considérant la limite à grand paramètre d'impact de (XV.32). En effet, quand $\mathbf{b}$ devient grand, le recouvrement des noyaux A et B tend vers zéro et il en est donc de même pour $T_{AB}(\mathbf{b})$. Ainsi, d'après (XV.31), nous avons $\mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b}) \longrightarrow \sigma_N\; T_{AB}(\mathbf{b})$. En utilisant (XV.32), nous pouvons déduire que $\mathcal{P}(\mathrm{DY}|\mathbf{b}) \longrightarrow \sigma_{NN}^{\mathrm{DY}}/\sigma_N$ dans la limite des grands paramètres d'impact. Il est clair alors que $\mathcal{P}(\mathrm{DY}|\mathbf{b})$ apparaît bien comme la probabilité de produire une paire Drell–Yan dans une collision inélastique nucléon–nucléon.

Pour avoir la section efficace de production des Drell–Yan en fonction de l'énergie transverse E_T, il faut pondérer (XV.32) par la distribution (XV.23) en E_T à $\mathbf{b}$ donné et intégrer sur $\mathbf{b}$. Etant donné que $\mathcal{P}(\mathrm{DY}|\mathbf{b})$ ne dépend pas de E_T, le nombre de Drell–Yan est entièrement déterminé par la géométrie de la collision, *i.e.*, par le paramètre d'impact $\mathbf{b}$. En fait, les paires Drell–Yan ne subissant pas d'interaction dans l'état final, il semble logique qu'elles ne soient pas affectées directement par l'énergie transverse produite dans la collision. Néanmoins, le nombre de Drell–Yan dépendant de $\mathbf{b}$, il est indirectement relié à E_T par la relation entre $\mathbf{b}$ et E_T. Nous avons aussi négligé les fluctuations du nombre de participants à paramètre d'impact donné. La section efficace de production de Drell-Yan à E_T donné s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{DY}}/\mathrm{d}E_T}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{MB}}/\mathrm{d}E_T} = \frac{\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\ \mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})\ \mathcal{P}(\mathrm{DY}|\mathbf{b})\ \mathrm{P}(\mathrm{E_T}|\mathbf{b})}{\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\ \mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})\ \mathrm{P}(\mathrm{E_T}|\mathbf{b})}, \tag{XV.33}$$

et se calcule grâce à (XV.23), (XV.31) et (XV.32).

XV.3.3 Production de J/ψ

Nous allons maintenant passer au taux de production du J/ψ, ce dernier étant, contrairement aux Drell–Yan, très sensible aux interactions dans l'état final. Plus exactement, non seulement le J/ψ subit l'absorption nucléaire, mais en plus, nous supprimons tout J/ψ qui est produit au point $\mathbf{s}$ dès que la densité d'énergie locale $\epsilon(\mathbf{s})$ dépasse une densité critique ϵ_c. Nous modélisons ainsi la formation d'un plasma de quarks et de gluons par un écrantage de couleur. Comme pour (XV.26) et en utilisant l'absorption nucléaire (XV.11), la probabilité d'avoir un J/ψ produit dans une collision A–B à paramètre d'impact $\mathbf{b}$ et produisant une énergie transverse E_T s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})\,\mathcal{P}(\psi|\mathrm{E_T},\mathbf{b}) = \sigma_{NN}^{\psi}\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\,\Bigg\{\frac{1}{\sigma_a^2}\left[1-e^{-\sigma_a T_A(\mathbf{s})}\right]\left[1-e^{-\sigma_a T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})}\right] \\ \times\,\Theta\left(n_c - \frac{E_T}{\langle E_T\rangle(\mathbf{b})}n_p(\mathbf{s},\mathbf{b})\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{XV.34}$$

où $\Theta(x)$ est la fonction de Heaviside et n_c est le paramètre correspondant à la densité d'énergie critique ϵ_c. La section efficace de production du J/ψ à E_T donné s'écrit, de manière analogue à (XV.33),

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\psi}/\mathrm{d}E_T}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{MB}}/\mathrm{d}E_T} = \frac{\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\ \mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})\ \mathcal{P}(\psi|\mathrm{E_T},\mathbf{b})\ \mathrm{P}(\mathrm{E_T}|\mathbf{b})}{\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\ \mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})\ \mathrm{P}(\mathrm{E_T}|\mathbf{b})}. \tag{XV.35}$$

Nous sommes maintenant parés pour comparer notre modèle aux données expérimentales de NA50.

XV.3.4 Application aux données de NA50

Les données expérimentales de 1998 sont présentées sont la forme du rapport [2]

$$\mathcal{N}_{\mathrm{NA50}}(E_T) = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_{\psi}/\mathrm{d}E_T}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{MB}}/\mathrm{d}E_T}\right)_{\mathrm{mes}} \Bigg/ \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{DY}}/\mathrm{d}E_T}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{MB}}/\mathrm{d}E_T}\right)_{\mathrm{th}}, \tag{XV.36}$$

où le numérateur est mesuré alors que le dénominateur est calculé théoriquement. En injectant (XV.33) et (XV.35), nous obtenons le rapport

$$\mathcal{N}(E_T) = \frac{\sigma_{NN}^{\psi}}{\sigma_{NN}^{\mathrm{DY}}}\,\frac{\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\ \mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})\ \mathcal{P}(\psi|\mathrm{E_T},\mathbf{b})\ \mathrm{P}(\mathrm{E_T}|\mathbf{b})}{\int \mathrm{d}^2\mathbf{b}\ \mathcal{P}(\mathrm{MB}|\mathbf{b})\ \mathcal{P}(\mathrm{DY}|\mathbf{b})\ \mathrm{P}(\mathrm{E_T}|\mathbf{b})}, \tag{XV.37}$$

où le rapport $\sigma^{\psi}_{NN}/\sigma^{\rm DY}_{NN}$ apparaît comme un facteur de normalisation qu'il conviendra de multiplier par le rapport de branchement du canal de désintégration en dimuon (et que nous n'écrirons pas dans la suite). Ce facteur de normalisation a été mesuré dans des systèmes plus légers [3]. Nous utiliserons dans nos applications numériques la valeur $\sigma^{\psi}_{NN}/\sigma^{\rm DY}_{NN} = 53.5 \pm 3$ [19].

a Suppression totale au-delà d'une densité critique

La Fig.XV.7 présente les données de NA50 ainsi que les courbes $\mathcal{N}(E_T)$ calculées avec l'absorption nucléaire seule (tirets), avec la suppression anormale sans fluctuations (tirets et pointillés) et avec fluctuations (courbe pleine). La valeur de la densité critique a été fixée à $n_c = 3.7$ fm^{-2}. La dernière courbe reproduit qualitativement le comportement des données de NA50 à grand E_T. Notons que pour l'instant, le seul paramètre est n_c. La courbe en tirets et pointillés (sans fluctuations) a été obtenue en utilisant (XV.25) au lieu (XV.26). Elle correspond en fait au modèle précédent [8]. Enfin, la courbe d'absorption nucléaire représente notre référence puisqu'elle décrit la suppression «normale» et est donnée par (XV.35) sans la fonction de Heaviside qui traduit elle la suppression anormale du J/ψ.

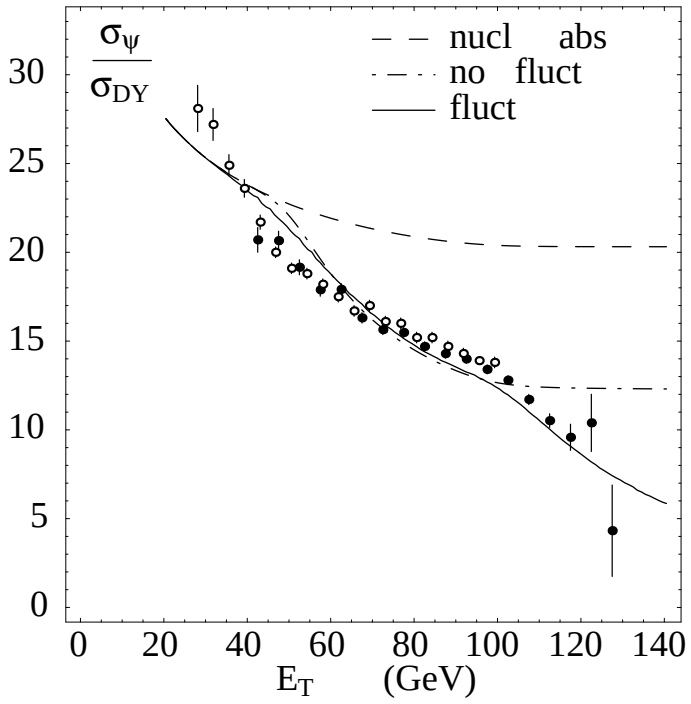


FIG. XV.7 – Rapport de la section efficace de production du J/ψ sur celle du Drell–Yan dans une collision Pb–Pb à 158 AGeV, en fonction de l'énergie transverse en GeV, mesuré par NA50 (points blancs en 1996 et noirs en 1998), après absorption nucléaire (tirets), après dissolution dans un plasma de quarks et de gluons avec une densité critique $n_c = 3.7$ fm^{-2}, sans (tirets et pointillés) et avec fluctuations (courbe pleine).

Plusieurs commentaires sont à faire par rapport à nos résultats. Tout d'abord, les données à bas E_T sont significativement au-dessus de nos courbes et plus particulièrement au-dessus de la courbe d'absorption nucléaire. Or le modèle de Glauber reproduit correctement les données pour les systèmes plus légers où la suppression anormale n'a pas été observée. Il y a actuellement un consensus pour dire que ces points sont biaisés à cause de rediffusions multiples. La collaboration NA50 doit réanalyser ces données.

La deuxième chose à remarquer concerne le premier décrochement et notamment la différence des résultats avec ou sans fluctuations. A partir de 40 GeV, les données dévient significativement de la courbe d'absorption nucléaire. Le choix de n_c fixe la position du premier décrochement pour nos courbes théoriques, *i.e.*, la géométrie à partir de laquelle les densités d'énergie atteintes deviennent suffisantes pour être supérieures à la densité critique[3]. Notons que dans le cas sans fluctuations, la courbe présente une décroissance plus brutale par rapport au cas avec fluctuations. Cela est dû au fait que la convolution avec la distribution en E_T à **b** donné et l'intégration sur **b** adoucissent la courbe de suppression anormale.

Insistons enfin sur l'effet des fluctuations à grand E_T : sans elles, la suppression anormale sature puisqu'à partir de $E_T = E_{\rm knee}$, la collision est centrale et la géométrie est fixée. Ce sont donc les fluctuations en E_T, devenant significativement importantes pour les collisions centrales, qui produisent cette suppression supplémentaire observée par NA50. Remarquons bien que la valeur de n_c n'a ici *aucune* influence sur la concavité de la courbe au-delà de $E_{\rm knee}$: c'est bien la queue de la distribution en E_T [soit les paramètres q et a apparaissant dans (XV.23)] qui imposent cette décroissance. Autrement dit, nous n'avons nul besoin d'introduire une première densité critique pour la suppression du χ puis une deuxième pour le J/ψ. Cette interprétation est radicalement différente de celle faite par NA50 [2] ou par d'autres auteurs [13].

b Suppression graduelle

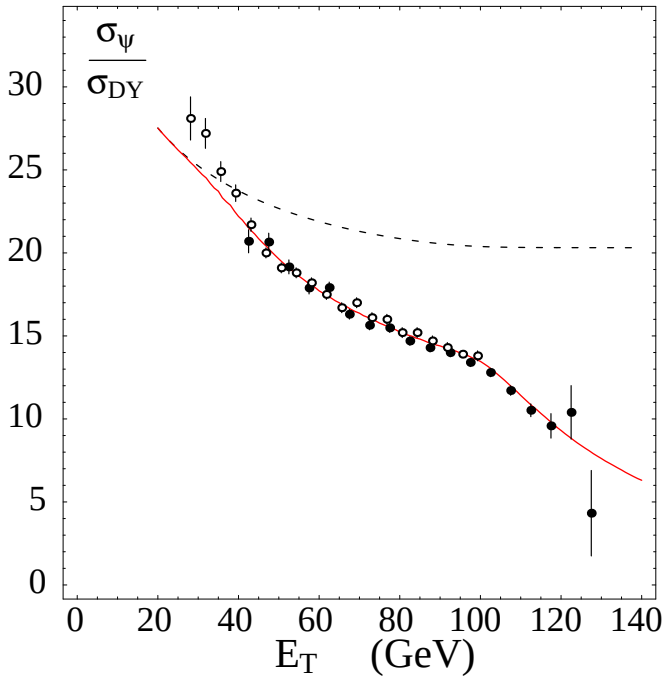


FIG. XV.8 – Rapport des sections efficaces de production du J/ψ et du Drell–Yan dans une collision Pb–Pb, avec suppression de 40% des J/ψ au-dessus de $n_{c1} = 3.3$ fm^{-2} et 100% au-dessus de $n_{c2} = 4.2$ fm^{-2}. Ce résultat est identique en prenant un critère de suppression moins brutal qu'une fonction de Heaviside, (XV.39), avec $n_c = 3.75$ fm^{-2} et $\lambda = 2$ fm^2.

Nous avons néanmoins testé cette interprétation en supprimant les états liés $c\bar{c}$ en deux temps. Plus précisément, nous avons supprimé 40% des J/ψ au-dessus de $n_{c1} = 3.3$ fm^{-2} et

[3] La valeur de n_c joue également un rôle sur la «quantité» de J/ψ supprimés, autrement dit, sur la pente de la partie entre le premier et le deuxième décrochement : plus n_c est grand et plus la courbe décroît rapidement.

100% au-dessus de $n_{c2} = 4.2$ fm^{-2}. Cela revient à remplacer la fonction de Heaviside dans (XV.34) par la fonction suivante

$$\Theta(n_c - \tilde{n}) \quad \longrightarrow \quad \frac{2\Theta(n_{c1} - \tilde{n}) + 3}{5}\,\Theta(n_{c2} - \tilde{n}), \tag{XV.38}$$

où $\tilde{n} = n_p(\mathbf{s}, \mathbf{b})\frac{E_T}{\langle E_T\rangle(\mathbf{b})}$. Le résultat est présenté à la Fig.XV.8 et passe par pratiquement tous les points expérimentaux. La courbe de suppression est bien meilleure entre 60 et 80 GeV puisque nous ne supprimons que 40% des J/ψ dans un premier instant. À partir de 80 GeV, le deuxième seuil commence à jouer, bien qu'il n'y ait pas de nette cassure dans la courbe de suppression. Le choix des densités critiques fixe à la fois le début de la suppression anormale et la décroissance de $\mathcal{N}(E_T)$ entre 40 et 100 GeV mais non au-delà du genou : si nous augmentons n_{c1}, notre courbe se détachera de la courbe d'absorption nucléaire après 40 GeV et sera au-dessus de tous les points expérimentaux même pour les grands E_T. Un œil averti remarquerait une marche insignifiante sur la courbe entre 40 et 100 GeV dont la position varie avec n_{c2}. Mais ce deuxième seuil n'a aucun influence sur la position du deuxième décrochage au-delà de 100 GeV. En d'autres termes, en choisissant n_{c1} et n_{c2} de façon à ce que la suppression anormale ajuste correctement les données entre 40 GeV et 100 GeV, notre courbe passe *naturellement* par les données à grand E_T, confortant notre idée que ce deuxième décrochement n'est pas dû à l'introduction d'un deuxième seuil critique de suppression mais bel et bien aux fluctuations en E_T.

Une alternative à l'introduction d'un deuxième seuil est la suivante : au lieu de considérer une suppression brutale en fonction de Heaviside dans (XV.34), il est plus raisonnable d'imaginer que cette suppression se fait progressivement et de façon plus douce. Nous avons

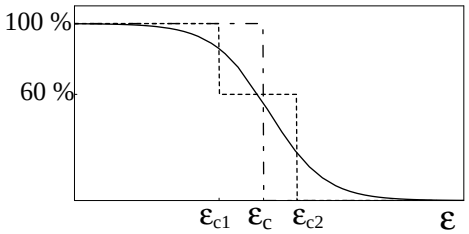


FIG. XV.9 – Critères de suppression anormale utilisés dans notre modèle : suppression de 100% des J/ψ au-delà de la densité critique ϵ_c, Eq.(XV.34) ; suppression de 40% entre ϵ_{c1} et ϵ_{c2}, puis de 100% au-delà de ϵ_{c2}, Eq.(XV.38) ; suppression graduelle autour de ϵ_c, Eq.(XV.39).

représenté nos trois critères de suppression à la Fig.XV.9. Cette fois-ci, la fonction de Heaviside est remplacée par une tangente hyperbolique :

$$\Theta(n_c - \tilde{n}) \quad \longrightarrow \quad \frac{1 - \tanh\lambda(\tilde{n} - n_c)}{2}. \tag{XV.39}$$

Deux paramètres sont maintenant nécessaires : la densité critique n_c et la largeur λ qui adoucit plus ou moins la suppression. Il est remarquable que le résultat du calcul avec la suppression (XV.39) avec $n_c = 3.75$ fm^{-2} et $\lambda = 2$ fm^2 est *indistinguable* de celle calculée avec deux densités critiques, *cf.* Fig.XV.8. Il n'y a donc aucune indication dans les données de NA50 pour conclure à une suppression en deux temps puisqu'une suppression douce et graduelle donne exactement les mêmes résultats.

c Système S–U : pas de suppression anormale

Revenons sur la suppression en deux temps et notamment sur le choix du premier seuil critique, $n_{c1} = 3.3$ fm^{-2}. Il correspond naturellement au maximum atteint localement dans le système S–U, *cf.* Fig.XV.6.

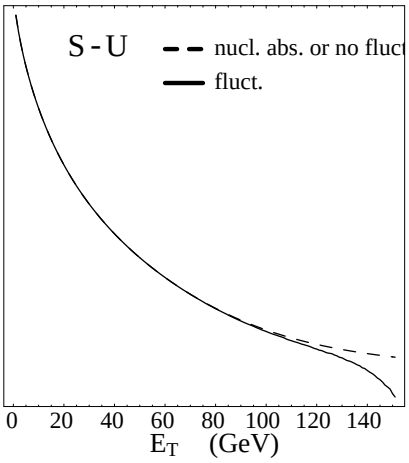


FIG. XV.10 – Rapport entre la production du J/ψ et celle du Drell–Yan dans une collision S–U, avec une densité critique $n_c = 3.3$ fm^{-2}.

Entre la suppression totale de toutes les paires $c\bar{c}$ et celle en deux temps avec suppression de seulement 40 % des paires puis 100 %, nous avons été obligés de passer d'un seuil en densité de $n_c = 3.7$ fm^{-2} à un premier seuil $n_{c1} = 3.3$ fm^{-2} de façon à avoir une suppression suffisante à 40 GeV. Nous ne pouvons pas descendre plus bas au risque d'obtenir une suppression anormale dans les collisions S–U, ce qui est à exclure.

Nous avons justement vérifié notre modèle pour ce dernier système avec une suppression de 100 % des paires $c\bar{c}$ au-delà de $n_c = 3.3$ fm^{-2}. Nos résultats sont présentés à la Fig.XV.10. Comme attendu, nous n'avons pas de suppression anormale qui apparaît à bas E_T. D'ailleurs aucune distinction ne peut être faite entre la courbe d'absorption nucléaire et la suppression anormale sans fluctuations (courbe pointillée). En revanche, nous observons toujours un «deuxième» décrochement, à partir de 110 GeV, dû aux fluctuations en E_T, cependant moins spectaculaire que pour le système Pb–Pb. Malheureusement, les données expérimentales s'arrêtent à 80 GeV et aucune mesure n'a été faite au-delà à cause de réinteractions trop nombreuses [4,6]. Néanmoins, les données de S–U présentent une légère décroissance aux plus grandes valeurs de E_T.

d Fluctuations physiques ou biais expérimental ?

Une objection à notre modèle vient de l'interrogation sur la source des fluctuations à grand E_T : sont-elles physiques ou traduisent-elles la résolution du calorimètre de NA50 ? Nous avons estimé l'effet de ce dernier [15] sur les fluctuations en E_T mesurées par NA50. La résolution intrinsèque du calorimètre de NA50 est donnée par [26]

$$\frac{\sigma_{\text{intrins}}(E_T)}{E_T} = \frac{\alpha}{\sqrt{E_T}} + \beta, \qquad \text{(XV.40)}$$

avec $\alpha \simeq 0.2$ GeV$^{1/2}$ et $\beta \simeq 0.005$. Les fluctuations physiques en E_T résultent donc de la différence entre les fluctuations mesurées par NA50 et la résolution intrinsèque :

$$\sigma_{\text{phys}} = \sqrt{\sigma^2_{E_T} - \sigma^2_{\text{intrins}}}. \qquad \text{(XV.41)}$$

Pour des énergies transverses supérieures à 100 GeV, l'effet est inférieur à 10 %. La majorité des fluctuations observées sont donc bien physiques et nous négligerons par la suite la résolution intrinsèque du calorimètre de NA50.

e Modèle des «comovers»

La suppression par les «comovers» n'est pas assez forte pour provoquer un décrochage à grand E_T, même si les fluctuations en E_T sont prises en compte dans le modèle. Cependant, un biais purement expérimental permettrait à ce modèle d'expliquer le deuxième décrochement au-delà du genou [25]. L'idée est que le J/ψ, lors de sa détection via une paire de muons, perd 3 GeV en énergie transverse et, pour les autres hadrons, cela fait autant moins de E_T

déposée dans le calorimètre. Cette perte d'énergie affecte également la détection des paires Drell-Yan. Elle peut paraître faible mais elle semble suffisante pour augmenter la suppression par les «comovers» à grand E_T.

Cet effet est également présent dans notre modèle mais il pourrait être compensé par le fait que la corrélation entre la fenêtre en rapidité où est mesurée E_T et celle où sont détectés les dimuons n'est pas totale, *cf.* discussion à la fin de la Section XV.2.3.

Quoi qu'il en soit, l'effet que nous venons d'exposer est présent dans la section efficace de production du J/ψ et celle des Drell-Yan. Or NA50 présente ces données comme le rapport $\mathcal{N}_{\rm NA50}(E_T)$ de la production «minimum-bias» de J/ψ *mesurée* sur la production «minimum-bias» de Drell-Yan *théorique*, Eq.(XV.36). Si cette dernière était mesurée et non calculée (analyse standard), l'effet de la perte d'énergie dans le «trigger» du J/ψ se compenserait au numérateur et au dénominateur de $\mathcal{N}_{\rm NA50}(E_T)$. En revanche, ce n'est pas le cas dans l'analyse «minimum-bias». Par l'utilisation d'un ansatz, les auteurs de [25] parviennent à reproduire les données de NA50 à grand E_T.

Une façon de s'affranchir de ce problème de «trigger» serait de considérer la suppression du J/ψ non pas en fonction de E_T mais en fonction de $E_{\rm ZDC}$, énergie déposée dans le calorimètre à zéro degré [22]. Cette dernière est simplement reliée au nombre de participants et à l'énergie incidente. Le deuxième décrochement y serait moins prononcé puisqu'il n'y aurait pas cette perte d'énergie. Notre suppression par un déconfinement serait alors trop importante à petit $E_{\rm ZDC}$, alors que celle par les «comovers» y est moins prononcé [23]. Cependant, pour le moment, aucune conclusion réellement tangible ne peut être tirée à ce stade.

XV.4 Dispersion en impulsion transverse

La suppression du J/ψ s'exprime dans d'autres observables comme la moyenne du carré de l'impulsion transverse $\langle p_T^2 \rangle$ du J/ψ en fonction de E_T. Cette quantité reflète la dispersion de la distribution en p_T du J/ψ («p_T broadening») et est en fait sensible à la longueur de matière nucléaire traversée, c'est l'effet Cronin [27] : une particule produite dans un milieu nucléaire subit des collisions multiples avec ce dernier lorsqu'il le traverse pour s'en échapper, et la dispersion résultante est d'autant plus grande que la longueur de matière transversée est grande.

Nous présentons dans cette section l'application de notre modèle de suppression anormale au calcul de la dispersion en p_T[4]. Nous montrerons notamment que le critère de suppression doit dépendre du p_T des J/ψ, et que les J/ψ de grande impulsion sont moins supprimés que ceux de p_T plus faible.

XV.4.1 Dispersion dans une collision noyau–noyau

La quantité qui rend compte de l'augmentation de la dispersion en p_T dans une collision A–B, par rapport à une collision N–N, est la différence $\delta_{AB}(\mathbf{b})$ définie, à un paramètre d'impact donné, par

$$\delta_{AB}(\mathbf{b}) \equiv \langle p_T^2 \rangle_{AB}(\mathbf{b}) - \langle p_T^2 \rangle_{NN} . \qquad \text{(XV.42)}$$

Nous considérerons que la dispersion en impulsion transverse des J/ψ est due uniquement aux diffusions multiples subies par le gluon dans le noyau projectile et celui dans le noyau cible, ces deux gluons fusionnant pour donner le J/ψ. Autrement dit, le $\langle p_T^2 \rangle$ du J/ψ est calculé comme étant la somme des $\langle p_T^2 \rangle$ pour chacun des gluons. Maintenant, le gluon repéré dans le noyau A par le vecteur $\mathbf{s}$ a une dispersion proportionnelle à la quantité de noyau

[4] Ces travaux ne sont pas publiés.

traversé, *i.e.*, $\propto T_A(\mathbf{s})$. Nous avons une formule analogue pour le deuxième gluon repéré par $\mathbf{b}-\mathbf{s}$ dans le noyau B. Finalement, nous avons la dispersion pour le J/ψ à un paramètre d'impact donné

$$\delta_{AB}(\mathbf{b}) = \sigma_N\,\delta_0\,\frac{\displaystyle\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\,\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}\,\left[T_A(\mathbf{s})+T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})\right]}{\displaystyle\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\,\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}}, \qquad \text{(XV.43)}$$

où $\mathrm{d}\sigma_\psi/\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}$ est la section efficace de survie du J/ψ produit par la fusion des gluons en $\mathbf{s}$ et $\mathbf{b}-\mathbf{s}$ respectivement. Dans le cas de l'absorption nucléaire seule, elle est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}} = \frac{1}{\sigma_a^2}\left[1-e^{-\sigma_a T_A(\mathbf{s})}\right]\left[1-e^{-\sigma_a T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})}\right]. \qquad \text{(XV.44)}$$

Il convient de la multiplier par une fonction de Heaviside, comme en (XV.34), ou par la fonction (XV.39) pour prendre en compte la suppression anormale à un seuil critique ou une suppression plus graduelle. Les paramètres σ_N et δ_0 représentent la section efficace d'une collision N–N inélastique et la dispersion d'un gluon par collision. Le produit des deux est une quantité sans dimension. Nous utiliserons la valeur $\sigma_N\,\delta_0 = 9.4 = 0.36$ fm^{-2}.(GeV/c)^2, provenant d'un ajustement des données pour les systèmes plus légers [28] [5]. La dispersion dans les collisions N–N est une quantité connue et mesurée; sa valeur sera prise égale à $\langle p_T^2\rangle_{NN} = 1.23 \pm 0.05$ (GeV/c)^2 [29]. Enfin, nous devons convoluer (XV.43) avec $P(E_T|\mathbf{b})$ et intégrer sur $\mathbf{b}$ pour obtenir $\langle p_T^2\rangle\,(E_T)$.

XV.4.2 Effets de la suppression anormale et des fluctuations en E_T

Nos résultats sont présentés Fig.XV.12 avec les points expérimentaux de NA50. La courbe de l'absorption nucléaire seule (tirets) sature à grand E_T comme attendu puisqu'elle ne tient compte que de la géométrie de la collision. De même, le résultat du calcul sans tenir des fluctuations en E_T (non représentée) sature également (elle diminue en fait très légèrement).

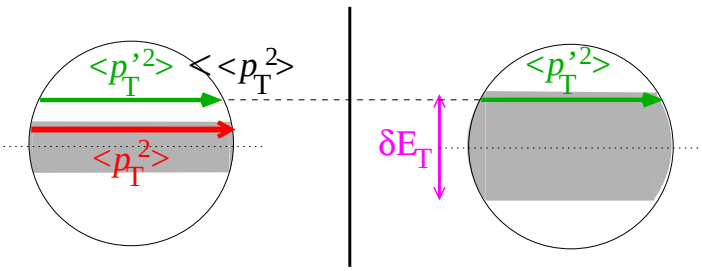


FIG. XV.11 – Représentation schématique d'un noyau pour une collision centrale avec la zone de suppression anormale (grisée). Les flèches désignent la longueur L traversée par le gluon : sa dispersion en p_T est d'autant plus grande que L est grand. A droite, même configuration avec une zone de suppression plus importante due aux fluctuations en E_T.

En revanche, les fluctuations en E_T provoquent une diminution très nette de $\langle p_T^2\rangle$ à grand E_T (trait plein fin, $p_T = \infty$). Ce résultat plutôt intuitif est illustré à la Fig.XV.11 : plaçons-nous à grand E_T et considérons donc une collision centrale. Les J/ψ de grand p_T^2 sont ceux qui traversent plus de matière, *i.e.*, ceux qui sont le plus proche du centre de la zone de

[5] L'intégrale $\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}T_A(\mathbf{s})$ étant en fm^{-2}, nous avons exprimé le produit $\sigma\delta_0$ en fm^{-2}.(GeV/c)^2 afin d'obtenir un $\langle p_T^2\rangle$ en (GeV/c)^2.

collision. Or s'il y a des fluctuations en E_T, la zone de suppression anormale devient plus étendue et les J/ψ qui auraient un grand p_T^2 sont justement supprimés. Un résultat semblable avait également été obtenu dans [28].

Malheureusement les données expérimentales n'ont pas du tout le même comportement : à grand E_T, non seulement elles ne diminuent pas mais elles augmentent ! Ni l'absorption nucléaire seule ni la suppression anormale nous permettent d'expliquer cette augmentation des données à grand E_T. Nous avons là un signe que la suppression anormale doit avoir une dépendance en p_T.

XV.4.3 J/ψ de grande impulsion transverse

Nous n'avons pas tenu compte d'un effet qui pourrait modifier nos résultats à grand E_T. L'idée est la suivante : dans l'état final, un J/ψ de grand p_T pourrait s'échapper de la région de suppression anormale et ne subirait alors que la suppression due à l'absorption nucléaire. Autrement dit, seuls les J/ψ de bas p_T sont supprimés anormalement [30]. Finalement, dans les collisions centrales, parmi les J/ψ de grand $\langle p_T^2 \rangle$ (*cf.* Fig.XV.11 à gauche, flèche dans la zone de suppression anormale), ceux de grande impulsion ne sont plus supprimés et la courbe de $\langle p_T^2 \rangle$ *vs.* E_T doit alors de nouveau augmenter.

Nous introduisons donc dans le calcul de la dispersion en p_T une coupure, $p_T^{\rm cut}$, pour rendre compte de cet effet. Nous supposons que la distribution en p_T est donnée par une gaussienne, à un paramètre d'impact donné, avec une dispersion qui vaut $\delta_{AB}^{\rm nucl}(\mathbf{b})$:

$$P(p_T,\mathbf{b}) = \sqrt{\frac{\pi\,\delta_{AB}^{\rm nucl}(\mathbf{b})}{2}}\,\exp\left(-\frac{p_T^2}{2\delta_{AB}^{\rm nucl}(\mathbf{b})}\right). \qquad \text{(XV.45)}$$

$\delta_{AB}^{\rm nucl}(\mathbf{b})$ est la dispersion due à l'absorption nucléaire seule et est calculée en injectant (XV.44) dans $\delta_{AB}(\mathbf{b})$, Eq.(XV.43).

Nous introduisons ensuite la distribution (XV.45) dans le calcul de $\delta_{AB}(\mathbf{b})$ en ajoutant une intégrale supplémentaire sur p_T. L'intégration sur p_T, à $\mathbf{b}$ et $\mathbf{s}$ donnés, se fera sur deux intervalles différents : nous utilisons la section efficace de production du J/ψ avec une suppression anormale pour $0 < p_T < p_T^{\rm cut}$; et avec l'absorption nucléaire seule pour $p_T^{\rm cut} < p_T$. Autrement dit, la différence $\delta_{AB}(\mathbf{b})$ s'écrit

$$\begin{aligned}\delta_{AB}(\mathbf{b}) &= \sigma_N\,\delta_0\,\frac{\displaystyle\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}\right)_{\rm an}\langle p_T^2\rangle_{p_T<p_T^{\rm cut}} \;+\; \int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}\right)_{\rm nucl}\langle p_T^2\rangle_{p_T>p_T^{\rm cut}}}{\displaystyle\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}\right)_{\rm an}\langle 1\rangle_{p_T<p_T^{\rm cut}} \;+\; \int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}\right)_{\rm nucl}\langle 1\rangle_{p_T>p_T^{\rm cut}}} \\ &= \sigma_N\,\delta_0\,\frac{\displaystyle\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\;[T_A(\mathbf{s})+T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})]\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}\right)_{\rm an}[1-e^{-\alpha}(\alpha+1)]+\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}\right)_{\rm nucl}e^{-\alpha}(\alpha+1)\right\}}{\displaystyle\int \mathrm{d}^2\mathbf{s}\;[T_A(\mathbf{s})+T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})]\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}\right)_{\rm an}[1-e^{-\alpha}]+\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_\psi}{\mathrm{d}^2\mathbf{s}\mathrm{d}^2\mathbf{b}}\right)_{\rm nucl}e^{-\alpha}\right\}}.\end{aligned} \qquad \text{(XV.46)}$$

Les indices «an» et «nucl» se réfèrent à la suppression anormale et à l'absorption nucléaire. Nous avons posé $\alpha = (p_T^{\rm cut})^2/\delta_{AB}^{\rm nucl}(\mathbf{b})$ et nous avons utilisé les intégrales suivantes

$$\int\limits_{0<p_T<p_T^{\rm cut}} P(p_T,\mathbf{b})\,\mathrm{d}p_T = 1-e^{\alpha}, \qquad \int\limits_{p_T^{\rm cut}<p_T<\infty} P(p_T,\mathbf{b})\,\mathrm{d}p_T = e^{\alpha},$$

$$\int\limits_{0<p_T<p_T^{\rm cut}} P(p_T,\mathbf{b})\,p_T^2\,\mathrm{d}p_T = \delta_{AB}\;[1-e^{\alpha}(\alpha+1)], \qquad \int\limits_{p_T^{\rm cut}<p_T<\infty} P(p_T,\mathbf{b})\,p_T^2\,\mathrm{d}p_T = \delta_{AB}\,e^{\alpha}(\alpha+1).$$

Les résultats sont présentés Fig.XV.12. Nous avons choisi différentes valeurs pour $p_T^{\rm cut}$. Nous retrouvons l'absorption nucléaire seule pour $p_T^{\rm cut} = 0$ et la suppression anormale seule pour $p_T^{\rm cut} = \infty$. Nous observons comme attendu une augmentation de la dispersion en p_T à grand E_T au fur et à mesure que nous diminuons $p_T^{\rm cut}$. Le meilleur ajustement est obtenu pour une coupure à 2.3 GeV/c (courbe en trait gras). Bien que le dernier point expérimental ne soit pas sur la courbe, nous obtenons tout de même un comportement assez satisfaisant.

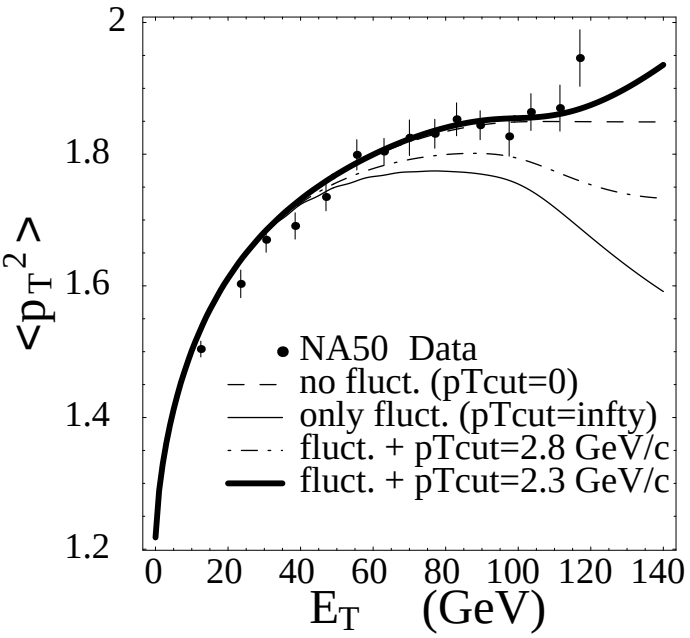


FIG. XV.12 – Dispersion en p_T en fonction de E_T. Données de NA50 [31] comparées à l'absorption nucléaire seule (tirets), à la suppression anormale seule (trait plein fin) et aux résultats obtenus en utilisant diverses valeurs de la coupure en p_T pour la suppression anormale.

Un calcul similaire a été mené dans [32] et les auteurs arrivent aux mêmes conclusions, à savoir que l'augmentation du $\langle p_T^2 \rangle$ pour les grandes valeurs de E_T n'est pas en contradiction avec la prise en compte des fluctuations en énergie transverse mais semblerait être expliquée par le fait qu'un J/ψ de grand p_T s'échappe plus facilement de la zone de suppression anormale que ceux de plus faible impulsion.

XV.5 Prédictions de notre modèle

XV.5.1 Production de J/ψ à RHIC

Après l'ajustement des données de NA50, nous n'avons plus de paramètre libre : la densité critique ainsi que le paramètre λ, décrivant le caractère progressif de la suppression, *cf.* Eq.(XV.39), sont fixés. Nous pouvons donc appliquer notre modèle à des collisions Au–Au à $\sqrt{s}$ =130 AGeV. D'après [33], la densité d'énergie est 70 % fois plus élevée qu'au SPS. Nous devons donc multiplier par 1.7 l'énergie transverse par nucléon, q, qui intervient dans la distribution de E_T à **b** donné, Eq.(XV.23). En fait, pour avoir des échelles en E_T comparables aux données de NA50, nous avons divisé la densité critique n_c par 1.7 au lieu de multiplier toutes les énergies par 1.7. Ceci n'est qu'un artifice de calcul : la densité critique reste évidemment la même entre le SPS et RHIC !

Nos prédictions sont présentées Fig.XV.13. L'énergie transverse est normalisée à l'énergie du genou. La densité d'énergie locale est tellement élevée que pratiquement tous les J/ψ sont

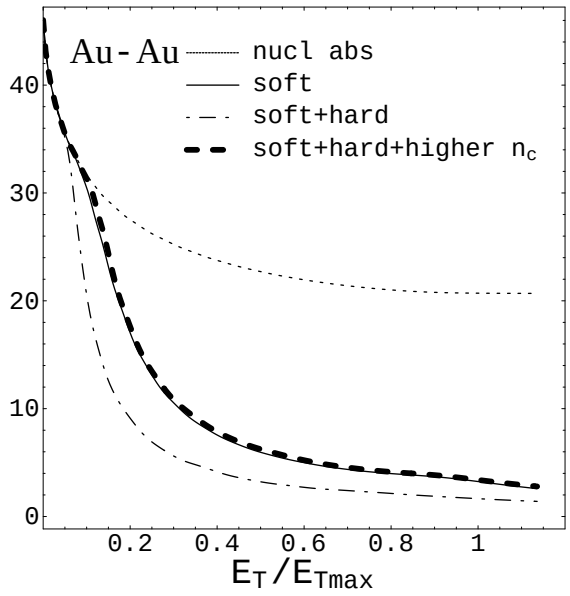


FIG. XV.13 – Prédiction pour le rapport J/ψ sur Drell-Yan pour une collision Au–Au à RHIC, dans le cas d'une suppression anormale graduelle avec fluctuations en E_T, $n_c = 3.75$ fm^{-2} et $\lambda = 2$ fm^2. Pointillés : absorption nucléaire seule ; trait plein : composante «soft» uniquement avec la densité de participants ; tirets et pointillés : composante «hard» additionnelle ; tirets en gras : composantes «soft» et «hard» avec une densité critique plus élevée $n_c' = 4.5$ fm^{-2}.

supprimés (trait plein). L'effet des fluctuations est à peine perceptible.

Dans le critère de suppression (XV.26), nous avons relié la densité d'énergie locale uniquement à la densité de participants n_p. En fait, nous sous-entendions une proportionnalité entre cette densité d'énergie et la multiplicité. Or aux énergies de RHIC, il semblerait que le nombre de participants, composante «soft», ne suffise pas à expliquer le nombre de particules produites [34]. Nous ajoutons alors une composante «hard», proportionnelle au nombre de collisions inélastiques $n_{\rm coll}$. Ce dernier est donné par

$$n_{\rm coll}(\mathbf{s},\mathbf{b}) = \sigma_N\, T_{AB}(\mathbf{s},\mathbf{b}), \tag{XV.47}$$

où σ_N est la section efficace de collision nucléon–nucléon inélastique que nous avons déjà rencontrée, Eq.(XV.21). Nous utilisons la valeur de 41 mb à RHIC au lieu des 32 mb au SPS La densité d'energie est maintenant prise proportionnelle à une combinaison linéaire entre n_p et $n_{\rm coll}$ [34] :

$$\epsilon(\mathbf{s},\mathbf{b}) \propto n_p(\mathbf{s},\mathbf{b}) + 0.2\, n_{\rm coll}. \tag{XV.48}$$

Cette relation remplace Eq.(XV.26) où seule la composante «soft» était utilisée. La suppression anormale devient évidemment plus importante. Nous obtenons alors la courbe en tirets et pointillés de la Fig.XV.13 : la production de J/ψ devient dramatiquement faible. Cependant, l'ajout d'une composante «hard» ne change pas qualitativement la suppression anormale. En effet, si nous augmentons la valeur de n_c, nous devons retrouver la même suppression qu'avec une composante «soft» uniquement. Pour le vérifier, nous pouvons estimer de combien nous devons augmenter la densité critique. En approximant le nombre de participants de la façon

suivante

$$n_p(\mathbf{b},\mathbf{s}) = T_A(\mathbf{b})\left[1 - e^{-\sigma_N T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s})}\right] + \{A \leftrightarrow B\}$$
$$\sim \sigma_N\, T_A(\mathbf{b})\, T_B(\mathbf{b}-\mathbf{s}),$$

Eq.(XV.48) donne une estimation du nouveau seuil n_c'

$$n_c' \simeq n_c(1+0.2) = 4.5 \text{ fm}^{-2}. \qquad \text{(XV.49)}$$

La courbe en tirets gras correspond à un calcul avec n_c' et elle est pratiquement identique au résultat obtenu avec une composante «soft» uniquement et $n_c = 3.75$ fm^{-2} (trait plein).

Nous pouvons toutefois émettre une objection à notre prédiction : nous avons purement et simplement négligé un effet qui semblerait pourtant dominant aux énergies de RHIC, à savoir l'augmentation et non la suppression du J/ψ à très haute énergie [35,36]. Cette augmentation serait tellement forte qu'elle masquerait complètement la suppression, empêchant ainsi la vérification de notre modèle.

Mise à part cette prédiction d'augmentation du J/ψ à RHIC, dans des systèmes aussi gros que Pb–Pb ou Au–Au, la densité d'énergie atteint localement des valeurs très élevées et nous n'observons pas ou à peine l'effet des fluctuations à grand E_T. Un moyen pour les mettre en évidence est d'étudier des systèmes plus petits. Nous en avons exploré quelques-uns et nous les présentons dans la section suivante.

XV.5.2 Petits systèmes

Comme pour les collisions Au–Au, aucun paramètre de notre modèle n'est libre à partir du moment où nous les avons fixés pour le système Pb–Pb à l'énergie du SPS. Nous avons étudié le système Ca–Ca ($A = 40$) à l'énergie RHIC et trois autres systèmes pour le SPS, Ce–Ce ($A = 140$), In–In ($A = 115$) et In–Pb[6]. Dans les figures qui suivent, l'échelle en ordonnées est arbitraire.

a Les collisions Ca–Ca à RHIC

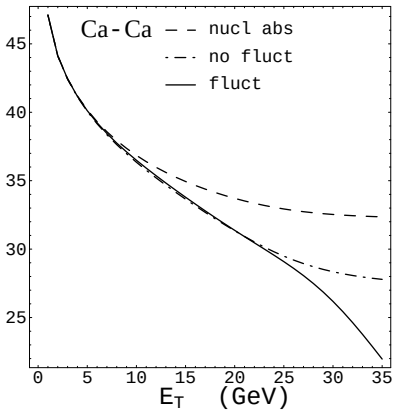


FIG. XV.14 – Rapport de la production du J/ψ sur Drell-Yan pour le système Ca–Ca à $\sqrt{s}$ =130 AGeV.

Nous pouvons estimer le numéro atomique du noyau qui donnerait à RHIC la même suppression du J/ψ qu'au SPS. En effet la densité d'énergie est prise proportionnelle au

[6] Travaux non publiés.

nombre de participants qui se comporte comme $A^{1/3}$. Ainsi, nous obtenons à RHIC la même densité d'énergie que pour le système Pb–Pb si

$$A = \frac{208}{1.7^3} = 42.33. \qquad \text{(XV.50)}$$

Le calcium, de nombre de masse 40, est donc un bon candidat. La Fig.XV.14 présente notre prédiction pour une collision Ca–Ca à $\sqrt{s}$ =130 AGeV. La suppression anormale commence très tôt en E_T et l'effet des fluctuations est bien visible à grand E_T.

b Petits systèmes au SPS

Collision Ce–Ce. Le deuxième système que nous avons étudié est la collision Ce–Ce. Nous en présentons, Fig.b à gauche, le rapport du J/ψ sur Drell-Yan dans le cas d'une suppression totale à partir de $n_c = 3.7$ fm^{-3}. La suppression anormale sans fluctuation est à peine plus importante que l'absorption nucléaire seule. Le premier décrochement est pratiquement inexistant. En revanche, l'effet des fluctuations en E_T est visible très tôt. Ce système semble encore trop volumineux pour permettre l'obtention d'une courbe de suppression avec deux décrochements successifs, l'un à cause de la mise en place de la suppression anormale et l'autre à cause des fluctuations en E_T.

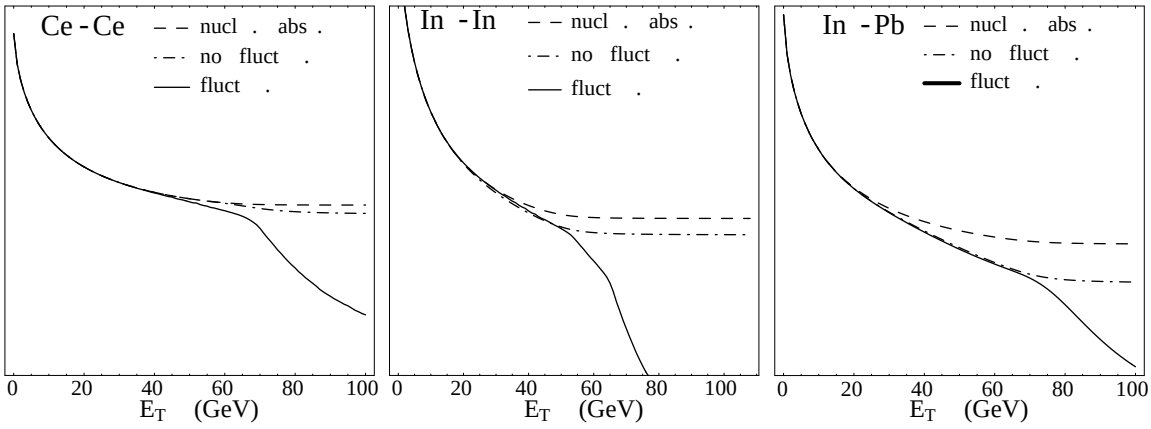


FIG. XV.15 – Rapport de la production du J/ψ sur Drell-Yan à $\sqrt{s}$ = 17 AGeV pour les systèmes Ce–Ce (à gauche), In–In (au centre) et In–Pb (à droite).

Collisions In–In et In–Pb. Nous avons d'abord étudié le système symétrique In–In et le système In–Pb. Les mêmes paramètres que la suppression anormale graduelle pour les collisions Pb–Pb ont été utilisés et les résultats correspondants sont présentés à la Fig.b au centre et à droite respectivement. Le premier décrochement à bas E_T est plus marqué dans le système In–In que pour une collision Ce–Ce mais la suppression supplémentaire à grand E_T se fait encore trop tôt. L'indium semble pour le coup trop petit pour permettre d'obtenir deux décrochements bien distincts en E_T.

En revanche, dans le système In–Pb, la suppression anormale est plus importante puisque nous avons un système plus gros : le premier décrochement est plus visible et le deuxième est plus tardif. En effet, ce dernier se produit aux alentours de $E_{\rm knee} = qN_p(\mathbf{0})$ où $N_p(\mathbf{0})$ correspond au nombre de participants maximal, *i.e.*, pour les collisions très centrales. Nous avons approximativement $N_p(\mathbf{0}) \simeq T_{\rm In}(\mathbf{0}) + T_{\rm Pb}(\mathbf{0})$ [*cf.* (XV.22)]. Le genou se trouve donc à une valeur plus élevée dans les collisions In–Pb que dans les collisions In–In. Le système In–Pb nous semble donc être un bon candidat pour confirmer ou infirmer notre modèle, notamment la prise en compte des fluctuations à grand E_T.

XV.6 Conclusion

Le modèle de suppression anormale du J/ψ que nous avons présenté se base sur une idée simple : tous les J/ψ produits lors de la collision sont supprimés, pourvu qu'ils aient une densité d'énergie locale suffisante. Notre meilleur résultat a été obtenu avec une suppression graduelle de *tous* les états prérésonants $c\bar{c}$, sans distinction entre le χ et le J/ψ. Nous avons eu besoin de deux paramètres, la densité critique $n_c = 3.75$ fm^{-2} et une largeur $\lambda = 2$ fm^2 qui rend compte du caractère progressif de la suppression.

Les deux décrochements successifs de la production de J/ψ, le premier vers E_T =40 GeV et le deuxième au-delà de 100 GeV, ont été interprétés par NA50 comme la preuve de deux suppressions successives, à savoir celle du χ puis du J/ψ. Or nous avons montré que, quel que soit le scénario de suppression adopté (un seul seuil critique, deux seuils critiques ou une suppression graduelle) et les valeurs des paramètres choisies, la deuxième décroissance commence *toujours* autour du genou de la distribution en E_T : la suppression supplémentaire observée à grand E_T correspond en fait aux fluctuations en E_T, très importantes pour les collisions centrales.

Un des modèles en compétition avec le nôtre est la description d'une suppression purement hadronique par les «comovers». L'étude de données plus fines, sur les petits systèmes notamment, permettrait de discriminer ce scénario du nôtre. Il semblerait que dans l'état actuel des données expérimentales, il ne soit pas possible de conclure de façon catégorique [23].

L'augmentation de la dispersion en p_T est un signe de la dépendance en p_T de la suppression anormale. Nous avons montré que si nous «permettons» aux J/ψ de grande impulsion transverse de s'échapper de la zone de suppression anormale, notre modèle de suppression anormale permet de reproduire les données de NA50, notamment l'augmentation à grand E_T du $\langle p_T^2 \rangle$.

Enfin nous avons présenté quelques prédictions pour RHIC et pour de petits systèmes. Aucun paramètre n'est libre à partir du moment où ils ont été fixés pour le système Pb–Pb à l'énergie du SPS. Pour RHIC, nous n'avons pas pris en compte l'augmentation du J/ψ prédite à ces énergies ; nous préconisons l'étude du système Ca–Ca qui devrait donner un comportement similaire à celui des collisions Pb–Pb au SPS. Pour les énergies du CERN, l'étude des collisions In–Pb permettrait également de confirmer ou d'infirmer notre modèle de suppression anormale.

Chapitre XVI
Articles de la Partie D

Bibliographie

[1] T. Matsui et H. Satz, Phys. Lett. B **178** (1986) 416.

[2] M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. B **477** (2000) 28.

[3] M. C. Abreu *et al.* [NA51 Collaboration], Phys. Lett. B **438** (1998) 35 ; M. C. Abreu *et al.* [NA38 Collaboration], Phys. Lett. B **444** (1998) 516.

[4] C. Baglin *et al.* [NA38 Collaboration], Phys. Lett. B **262** (1991) 362.

[5] C. Baglin *et al.* [NA38 Collaboration], Phys. Lett. B **220** (1989) 471.

[6] M. C. Abreu *et al.* [NA38 Collaboration], Phys. Lett. B **449** (1999) 128.

[7] M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. B **410** (1997) 337.

[8] J. P. Blaizot et J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 1703 [arXiv :hep-ph/9606289].

[9] A. Capella, J. A. Casado, C. Pajares, A. V. Ramallo et J. Tran Thanh Van, Phys. Lett. B **206** (1988) 354 ; C. Gerschel et J. Hufner, Z. Phys. C **56** (1992) 171.

[10] D. Kharzeev, C. Lourenco, M. Nardi et H. Satz, Z. Phys. C **74** (1997) 307 [arXiv :hep-ph/9612217].

[11] M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. **B450** (1999) 456. CERN-EP-99-013.

[12] N. Armesto, A. Capella et E. G. Ferreiro, Phys. Rev. C **59** (1999) 395 [arXiv :hep-ph/9807258].

[13] M. Nardi et H. Satz, Phys. Lett. B **442** (1998) 14 [arXiv :hep-ph/9805247].

[14] J. P. Blaizot, P. M. Dinh et J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 4012 [arXiv :nucl-th/0007020].

[15] P. M. Dinh, J. P. Blaizot et J. Y. Ollitrault, Nucl. Phys. A **698** (2002) 579 [arXiv :nucl-th/0103083].

[16] A. Bialas, M. Bleszynski et W. Czyz, Nucl. Phys. B **111** (1976) 461.

[17] J. Bächler *et al.*, Z. Phys. **C52** (1991) 239 ;

[18] J. Schukraft [HELIOS Collaboration], Nucl. Phys. A **498** (1989) 79.

[19] B. Chaurand, communication privée.

[20] J. Hüfner, B. Z. Kopeliovich et A. Polleri, arXiv :nucl-th/0012003.

[21] A. Capella, E. G. Ferreiro et A. B. Kaidalov, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 2080 [arXiv :hep-ph/0002300].

[22] M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. B **521** (2001) 195.

[23] A. Capella et D. Sousa, arXiv :nucl-th/0110072.

[24] N. Armesto et A. Capella, J. Phys. G **23** (1997) 1969 [arXiv :hep-ph/9706452].

[25] A. Capella, A. B. Kaidalov et D. Sousa, arXiv :nucl-th/0105021.

[26] I. Chevrot, "Etude du flot en fonction de la centralité dans les collisions d'ions lourds ultrarelativistes", Doctorat de l'université Blaise Pascal, Clremont-Ferrand, 1998.

[27] J. W. Cronin, H. J. Frisch, M. J. Shochet, J. P. Boymond, R. Mermod, P. A. Piroue et R. L. Sumner, in *C74-07-01.17* Phys. Rev. D **11** (1975) 3105.

[28] D. Kharzeev, M. Nardi et H. Satz, Phys. Lett. B **405** (1997) 14 [arXiv :hep-ph/9702273].

[29] J. Badier *et al.* [NA3 Collaboration], Z. Phys. C **20** (1983) 101.

[30] S. Gavin et M. Gyulassy, Phys. Lett. B **214** (1988) 241 ; J. Hufner, Y. Kurihara et H. J. Pirner, Phys. Lett. B **215** (1988) 218 [Acta Phys. Slov. **39** (1988) 281] ; J. P. Blaizot et J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. B **217** (1989) 386 ; J. P. Blaizot et J. Y. Ollitrault, Phys. Lett. B **217** (1989) 392 ;

[31] M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. B **499** (2001) 85.

[32] J. Hufner et P. f. Zhuang, Phys. Lett. B **515** (2001) 115 [arXiv :nucl-th/0104078].

[33] B. B. Back *et al.* [PHOBOS Collaboration], Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 3100 [arXiv :hep-ex/0007036].

[34] D. Kharzeev et M. Nardi, Phys. Lett. B **507** (2001) 121 [arXiv :nucl-th/0012025].

[35] P. Braun-Munzinger et J. Stachel, Phys. Lett. B **490** (2000) 196 [arXiv :nucl-th/0007059].

[36] R. L. Thews, M. Schroedter et J. Rafelski, Phys. Rev. C **63** (2001) 054905 [arXiv :hep-ph/0007323].

[37] R. Albrecht *et al.* [WA80 Collaboration], Phys. Rev. C **44** (1991) 2736.