Diffusions infini-dimensionnelles et champs de Gibbs sur l'espace des trajectoires continues

David Dereudre

THÈSE

présentée à :

l'École Polytechnique

pour obtenir

le grade de Docteur

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Probabilités

par

David DEREUDRE

Diffusions infini-dimensionnelles et champs de Gibbs sur l'espace des trajectoires continues $C([0,1];\mathbb{R}^d)$

soutenue le 11 décembre 2002 devant le jury composé de

Présidente :	N. El Karoui, École Polytechnique
Directrice de Thèse :	S. Rœlly, CNRS (École Polytechnique)/ Institut Weierstraß (Berlin)
Rapporteurs :	R. Lang, Université de Francfort
	N. Privault, Université de La Rochelle
	A. Wakolbinger, Johann Wolfgang Goethe-Universität
Examinateur :	P. Cattiaux, Université Paris X-Nanterre/École Polytechnique

Remerciements

Pour toute expérience scientifique ou humaine, il est très difficile de prédire son cheminement, son aboutissement, son devenir avant même de l'avoir vécue. Avant d'entamer la thèse, j'étais bien loin d'imaginer la richesse qu'elle allait me procurer mathématiquement et aussi humainement au travers des belles rencontres que j'ai pu faire et par le nouveau visage qu'ont pris les amis et la famille. Il est temps pour moi de remercier toutes ces personnes qui m'ont tant donné avant et pendant la thèse.

Mes premiers remerciements vont à ma directrice de thèse, Sylvie Rœlly qui, avant de diriger ma thèse, avait encadré mon mémoire de DEA avec un tel professionnalisme, charisme que je fus séduit par le personnage et la thématique qu'elle me proposait; le choix du sujet et du directeur de thèse fut alors pour moi une évidence. Son enthousiasme, ses compétences, sa rigueur mathématiques et sa disponibilité sont autant de qualités sans faille que j'ai appréciées chez elle, tout au long de la thèse, et qui m'ont apporté le courage, la confiance et la passion nécessaires à l'aboutissement de ce travail. Qu'elle soit ici remerciée profondément pour tout ce qu'elle m'a apporté et appris. Je n'oublie pas non plus son soutien humain dans de nombreuses et diverses situations personnelles.

Je remercie également Nicolas Privault, Reinhard Lang et Anton Wakolbinger pour s'être intéressés d'aussi près à la thèse et pour les rapports, d'une grande précision et d'une grande richesse dans les remarques, qu'ils ont rédigés. J'adresse une attention toute particulière à Anton Wakolbinger pour les nombreuses rencontres et conversations autour de mon travail et à Nicolas Privault pour la souplesse dont il a fait preuve devant la situation d'urgence du dernier mois.

Ce fut pour moi un grand honneur que Nicole El Karoui fasse partie de mon jury de thèse et accepte d'en être la présidente. Les nombreux compliments qu'elle me témoigna en diverses occasions me touchent profondément. Je remercie également Patrick Cattiaux pour sa participation à mon jury de thèse et pour l'intérêt et l'enthousiasme qu'il manifeste à mon travail. Suite à nos conversations, de nouvelles pistes de recherche semblent se profiler et je l'en remercie.

Je tiens également à remercier les laboratoires qui m'ont accueilli. Tout d'abord je remercie le Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique et son directeur Vincent Giovangigli pour m'avoir accueilli et soutenu pour de nombreux

séjours scientifiques à travers l'Europe. Je remercie également Marie-Claude Viano, et à travers elle, l'ensemble du laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Lille 1, pour l'accueil et les infrastructures mises à ma disposition.
Je remercie Myriam Fradon pour les multiples conversations mathématiques et mon colocataire de bureau, et ami, Pierre-Yves pour son soutien mathématique et moral. Je remercie aussi mes autres amis colocataires, Jean-Christophe, Mohamedou et Octave, qui ont participé au fait que l'ambiance du bureau soit toujours agréable. Je tiens également à remercier Olivier Garet pour ses nombreux conseils qui se sont avérés excellents. Je n'oublie pas non plus mes amis du "labo d'en face" et tout particulièrement Fred pour nos nombreuses conversations et activités aux thématiques très diverses.

Je remercie mes amis et ma famille, sans oublier Catherine, pour leur présence ainsi que l'affection et la chaleur qu'ils m'ont offertes. Certaines de ces personnes ne sont plus là aujourd'hui autour de moi, je n'en oublie pas pour autant tout ce qu'elles m'ont donné. Je remercie aussi mon frère et ma soeur pour avoir partagé les étapes de ma vie, et donc en particulier celle de la thèse, avec une complicité, une affection fraternelle si propre. Il me reste à remercier mes parents pour l'éducation qu'ils m'ont donnée. Par ce qu'ils sont, ils m'ont appris, tel un laboureur fixant un point à l'horizon pour tirer son sillon droit, la rigueur, la responsabilité face à la vie, la volonté de devenir. Je leur dois également une grande part de mon optimisme et enthousiasme dus sans doute à l'insouciance, la stabilité et la joie de vivre dans laquelle ils m'ont bercé, élevé dès mon plus jeune âge. Mais cette éducation aurait été vaine sans la chaleur d'un foyer toujours accueillant et aimant; car, du plus loin que mes songes le permettent, je me souviens, à chaque seconde de mon existence, avoir été aimé de vous.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier sous divers angles certains processus ponctuels sur l'espace des trajectoires continues $\mathcal{C} := C([0,1],\mathbb{R}^d)$. Il s'agit de champs de Gibbs (respectivement champs de Gibbs canoniques) qui sont définis comme des probabilités sur l'espace des mesures ponctuelles sur $\mathcal{C}$, localement absolument continues par rapport au processus de Poisson et dont les densités locales sont construites à partir d'une fonctionnelle d'énergie H appelée hamiltonien.
Nous donnons diverses caractérisations et un procédé de construction de champs de Gibbs (resp. champs de Gibbs canoniques). En particulier, nous exhibons une formule d'intégration par parties sous la mesure de Campbell d'un processus ponctuel caractérisant les champs de Gibbs canoniques et ce, pour une vaste classe d'hamiltoniens locaux. Un théorème de “recollement”, permettant de construire des champs de Gibbs sur $\mathcal{C}$ à partir de champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ et de marques aléatoires sur $\mathcal{C}$, est également présenté et utilisé en particulier pour identifier les lois de certains systèmes d'équations différentielles stochastiques (dits gradients) comme des champs de Gibbs sur $\mathcal{C}$.
Ces systèmes infini-dimensionnels, dont l'étude est proposée au chapitre 4, sont du type suivant :

$$\begin{cases} dX_i(t) = dW_i(t) - \frac{1}{2}\sum\limits_{j\neq i}\nabla\varphi(X_i(t) - X_j(t))dt, \quad i \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1], \\ X_i(0) = x_i, \qquad i \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

où $(W_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et φ une fonction régulière générant l'interaction entre les particules. R. Lang fut le premier à étudier ces systèmes et à prouver en 1977 l'existence et l'unicité de solutions fortes en régime stationnaire. Néanmoins, notre travail se base essentiellement sur des résultats ultérieurs dus à J. Fritz dans lesquels il prouve l'existence et l'unicité de solutions fortes avec une condition initiale déterministe.
Si l'on représente une solution de ce système par la mesure ponctuelle $\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\delta_{X_i}$ sur $\mathcal{C}$, nous montrons alors l'équivalence, en dimension $d \leq 3$, entre être la loi d'une solution d'un système gradient dont la condition initiale est un champ de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ et être un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$ associé à un hamiltonien spécifique.
De manière plus générale, nous montrons que, sous certaines conditions de régularité,

tout champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$ d'hamiltonien local H peut être représenté comme la loi d'un système infini-dimensionnel d'équations différentielles stochastiques dont on peut expliciter la dérive (en général non markovienne) en fonction de H. Dans un dernier chapitre, nous donnons plusieurs applications de ces résultats, notamment au sujet du retournement du temps et sur la régularisation des solutions de systèmes gradients.

Notre étude se situe à l'interface de deux domaines distincts de la Théorie des Probabilités, celui des processus ponctuels et celui des diffusions, solutions d'équations différentielles stochastiques. La principale originalité de cette thèse est d'utiliser les méthodes de l'un pour résoudre certains problèmes de l'autre, et réciproquement.

Table des matières

Notations

Espaces ou ensembles :

$\mathbb{X}$	:	$\mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$	§ 2.1.1
$\mathcal{C}$	:	fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}^d$	§ 2.1.1
$\mathcal{B}(\mathbb{X})$	:	bornés de $\mathbb{X}$	§ 2.1.1
$\mathbf{M}(\mathbb{X})$	:	mesures σ-finies sur $\mathbb{X}$, de masse infinie	§ 2.1.1
$\mathcal{M}(\mathbb{X})$	:	mesures ponctuelles sur $\mathbb{X}$	§ 2.1.1
$\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$	:	processus ponctuels sur $\mathbb{X}$	§ 2.1.1
$\mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)$	:	mesures ponctuelles φ-tempérées sur $\mathbb{R}^d$	§ 2.4.1
$\mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C})$	:	mesures ponctuelles φ-tempérées sur $\mathcal{C}$	§ 2.5.1
$\mathcal{G}(h,m)$	:	champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ d'hamiltonien h et de mesure de référence m	§ 2.3.4
$\mathcal{G}(H,\nu)$	:	champs de Gibbs sur $\mathcal{C}$ d'hamiltonien H et de mesure de référence ν	§ 2.3.4
$\mathcal{G}_c(h,m)$	:	champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{R}^d$ d'hamiltonien h et de mesure de référence m	§ 2.3.4
$\mathcal{G}_c(H,\nu)$	:	champs de Gibbs canoniques sur $\mathcal{C}$ d'hamiltonien H et de mesure de référence ν	§ 2.3.4
$\mathbf{E}$	:	fonctions en escalier de [0,1] dans $\mathbb{R}^d$	§ 3.2.1
$\mathbf{F}_b$	:	fonctions test sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$	§ 3.2.1
$\mathcal{W}$	:	fonctions test sur $\mathcal{C}$	§ 3.2.1
$\overline{\mathcal{W}}$	:	fonctions test sur $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$	§ 3.2.1
$W^{1,2}$	:	fonctionnelles $\mathcal{D}$-différentiables sur $\mathcal{C}$	§ 3.2.1
$\overline{W}^{1,2}$	:	fonctionnelles $\mathcal{D}$-différentiables sur $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$	§ 3.2.1

Probabilités et mesures de référence :

γ	:	mesure ponctuelle sur $\mathbb{R}^d$	§ 2.1.1
Γ	:	mesure ponctuelle sur $\mathcal{C}$	§ 2.1.1
m	:	mesure σ-finie sur $\mathbb{R}^d$	§ 2.1.1
λ	:	mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$	§ 2.1.1
ν	:	mesure σ-finie sur $\mathcal{C}$	§ 2.1.1
ϖ^m	:	mesure de Wiener à condition initiale m	§ 2.1.1
μ	:	processus ponctuel sur $\mathbb{R}^d$	§ 2.1.1
P	:	processus ponctuel sur $\mathcal{C}$	§ 2.1.1
$\tilde{P}$	:	probabilité sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$	§ 2.2.3
π^m	:	processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ d'intensité m	§ 2.2.1
Π^ν	:	processus de Poisson sur $\mathcal{C}$ d'intensité ν	§ 2.2.1
$C^!_\mu$	:	mesure de Campbell réduite associée à μ sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$	§ 2.2.2
$C^!_P$	:	mesure de Campbell réduite associée à P sur $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$	§ 2.2.2

Fonctions, fonctionnelles et opérateurs :

$(\theta_i(\gamma))_{i\in\mathbb{N}^*}$	:	fonctionnelle numérotant les points de γ	§ 2.1.3
$(\Theta_i(\Gamma))_{i\in\mathbb{N}^*}$	:	fonctionnelle numérotant les trajectoires de Γ	§ 2.1.3
h	:	hamiltonien local sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$	§ 2.3.1
H	:	hamiltonien local sur $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$	§ 2.3.1
ψ	:	interaction sur $\mathbb{R}^d$	§ 2.3.2
Ψ	:	interaction sur $\mathcal{C}$	§ 2.3.2
φ	:	potentiel sur $\mathbb{R}^d$	§ 2.3.2
Φ	:	interaction sur $\mathcal{C}$ associée à φ	§ 4.3
$\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$	:	fluctuation logarithmique d'énergie de γ	§ 2.4.1
$\lVert\Gamma\rVert^\varphi_\mathcal{E}$	:	fluctuation logarithmique d'énergie uniforme de Γ	§ 2.5.1
ζ_η, $\zeta_{\log}$	:	fonctions de fluctuation pondérée	§ 2.5.2
D_g	:	opérateur de dérivation de Malliavin dans la direction de g	§ 3.2.1
$\mathcal{D}_{x,g}$	:	opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}$ dans la direction de (x,g)	§ 3.2.1

Chapitre 1

Introduction

Les premières études de dynamiques aléatoires en tant que mesures de Gibbs sur un espace de trajectoires remontent sans doute aux travaux de F. Spitzer dans les années 1970 [54]. Il considère la loi d'une chaîne de Markov à espace d'états fini S comme une probabilité sur l'espace $S^{\mathbb{N}^*} \subset S^{\mathbb{Z}}$. L'espace des sites $\mathbb{Z}$ représente ainsi la dimension temporelle de la chaîne de Markov et l'espace des spins S représente sa dimension spatiale. Si l'on considère maintenant une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indexée par le temps $t \in \mathbb{R}^+$ alors sa loi est une probabilité sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^d) \subset (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}}$. Vue sous cet angle, elle peut dans de nombreux cas être interprétée comme une mesure de Gibbs sur $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}}$. Cette approche fut introduite et développée par Ph. Courrège, P. Renouard dans [4] et G. Royer, M. Yor dans [51]. De nouveau, remarquons que l'espace des sites $\mathbb{R}$ décrit la dimension temporelle de la diffusion alors que l'espace des spins $\mathbb{R}^d$ décrit sa dimension spatiale.

Or habituellement, en mécanique statistique, dans la représentation d'une probabilité par une mesure de Gibbs, l'espace des sites est interprété d'un point de vue spatial. Ainsi, le mariage de la vision spatiale usuelle de l'espace des sites avec la vision temporelle évoquée ci-dessus semble naturelle.

À cet égard, il existe un certain nombre de travaux concernant aussi bien des dynamiques aléatoires indexées par un temps discret que des diffusions à temps continu, abordées sous l'angle des mesures de Gibbs spatio-temporelles. Dans le cadre de dynamiques à temps discret, citons par exemple les travaux de S. Goldstein, R. Kuik, J.L. Lebowitz et C. Maes [27], qui caractérisent la loi d'automates cellulaires probabilistes (à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}^d}$) comme un certain type de mesures de Gibbs sur $S^{\mathbb{Z}^{d+1}}$. L'espace des sites $\mathbb{Z}^{d+1}$ se décompose ainsi en une partie spatiale $\mathbb{Z}^d$ et une partie temporelle $\mathbb{Z}$. Dans le cadre des diffusions, les travaux de P. Dai Pra, R. Minlos, S. Rœlly et H. Zessin [5], [6] mettent en évidence la nature gibbsienne sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}}$ de diffusions infini-dimensionnelles générales (i.e. non forcément markoviennes) indexées par le réseau $\mathbb{Z}^d$, chacune d'elles étant à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Rappelons néanmoins que la structure gibbsienne sur $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^d}$ de diffusions

infini-dimensionnelles à horizon de temps borné T, fut démontrée pour la première fois par J.-D. Deuschel en 1987 [10]. Dans ce cas, la dimension temporelle (bornée) de la diffusion est incluse dans l'espace des spins $\mathcal{C} := \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R})$. L'analyse de systèmes réticulés de diffusions comme mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}^d}$ s'est avérée dès lors très fructueuse, cf. [3].
L'objectif de cette thèse est de généraliser ces résultats à des systèmes dits continus. Les particules sont alors indistingables et diffusent dans $\mathbb{R}^d$ en étant soumises à une interaction par paires qui ne dépend que de leurs positions relatives respectives. Ces modèles, étant moins caricaturaux que ceux où les particules qui diffusent sont indexées par les points d'un réseau, sont donc physiquement plus intéressants. Néanmoins, les difficultés techniques (calculs d'estimées à priori, non explosion...) sont telles que beaucoup moins d'avancées ont été réalisées pour cette classe de systèmes que pour les systèmes réticulés.
Nous représentons la diffusion infini-dimensionnelle par un processus ponctuel sur $\mathcal{C}$ et notre objectif est d'étudier sa loi en tant que champ de Gibbs sur l'espace $\mathcal{C}$. Notre résultat principal est l'équivalence, en dimension $d \leq 3$, entre être une diffusion infini-dimensionnelle d'un modèle continu de type gradient et être un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$ associé à un certain type d'hamiltonien. Nous donnerons également plusieurs applications de ce résultat notamment à propos du retournement du temps, ainsi qu'une caractérisation de champs de Gibbs et champs de Gibbs canoniques par des formules d'intégration par parties sous la mesure de Campbell.
Présentons plus précisément le contenu de la thèse, en donnant un résumé des chapitres à suivre.

Chapitre 2 : Processus ponctuels gibbsiens sur $\mathcal{C}$. Propriétés fines des trajectoires.

Dans ce chapitre, nous introduisons les objets de base de cette thèse, i.e. les processus ponctuels et en étudions certaines propriétés indispensables pour la suite. Au cours de la thèse, nous ne considérerons des processus ponctuels que sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$. Même si les topologies de ces deux espaces sont très différentes, leur étude, en pratique, est assez semblable car nous utilisons essentiellement la structure d'espace métrique complet sous-jacente.
Nous définissons également la notion de mesure de Campbell (en (2.6)) directement associée aux processus ponctuels, puis les classes fondamentales de champs de Gibbs (définition 2.15), et champs de Gibbs canoniques (définition 2.16); ces processus ponctuels sonts définis comme étant localement absolument continus par rapport au processus de Poisson avec pour densité l'exponentielle renormalisée d'un hamiltonien à volume fini construit à partir d'un hamiltonien local (voir définition 2.7). Nous verrons aussi comment un hamiltonien local peut être construit à partir d'une interaction (voir (2.16)) et analysons plus précisément le cas des interactions par paires super-

stables.
Dans la deuxième partie, nous étudions des fonctionnelles de mesures ponctuelles permettant de contrôler uniformément la répartition des points et de l'énergie dans $\mathbb{R}^d$. Entre autres, nous comparons les différentes notions de mesures ponctuelles "tempérées" sur $\mathbb{R}^d$ existant dans la littérature. Dans le dernier paragraphe, nous introduisons des fonctionelles majorant les fluctuations des trajectoires des mesures ponctuelles sur $\mathcal{C}$ autour de leurs positions initiales et les comparons aux fonctionnelles introduites par J. Fritz, pour pouvoir contrôler uniformément en temps la fluctuation logarithmique d'énergie.

Chapitre 3 : Diverses caractérisations de champs de Gibbs et champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{R}^d$ puis sur $\mathcal{C}$. Relations entre ces notions.

Dans ce chapitre, nous présentons diverses caractérisations de champs de Gibbs et champs de Gibbs canoniques. Nous commençons par celles valables sur un espace polonais $\mathbb{X}$ quelconque. La plupart des caractérisations que nous utilisons sont basées sur celles utilisant la mesure de Campbell, que nous rappelons ici : un processus ponctuel P sur $\mathbb{X}$ est un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) si et seulement si la mesure de Campbell réduite $C^!_P$ associée à P a la forme particulière (3.5) (respectivement (3.7)).
Ensuite, dans le cas particulier où $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$, nous établissons des caractérisations de type infinitésimal à l'aide de formules d'intégration par parties sous la mesure de Campbell. Il nous faut alors distinguer les deux cas :
- $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$: on montre que, sous certaines conditions, μ est un champ de Gibbs canonique sur $\mathbb{R}^d$ de mesure de référence la mesure de Lebesgue λ et d'hamiltonien local régulier h si et seulement si, pour toute fonction test régulière f,

$$C^!_\mu(\nabla_x f) = C^!_\mu(f \nabla_x h).$$

- $\mathbb{X} = \mathcal{C}$: sous certaines conditions, P est un champ de Gibbs canonique sur $\mathcal{C}$ de mesure de référence la mesure de Wiener ϖ^λ à condition initiale λ et d'hamiltonien local régulier H si et seulement si, pour toute fonction test régulière F et toute fonction g en escalier sur [0,1],

$$C^!_P\Big(F \int_0^1 g\, dX\Big) = C^!_P\Big(\mathcal{D}_{x,g}F - F\ \mathcal{D}_{x,g}H\Big) \tag{1.1}$$

où $\int_0^1 g\ dX$ est l'intégrale de Wiener de g et $\mathcal{D}$ est un raffinement de l'opérateur de dérivation de Malliavin.

Enfin, la dernière section de ce chapitre est consacrée à diverses propriétés permettant de relier les notions de champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$ et celle de mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$. Ainsi, supposons qu'à toute mesure ponctuelle γ sur $\mathbb{R}^d$ on associe une probabilité $\tilde{P}^\gamma$ sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$. Quelles sont alors les conditions sur la famille $(\tilde{P}^\gamma)_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ et sur le processus ponctuel μ sur $\mathbb{R}^d$ pour que le processus ponctuel P sur $\mathcal{C}$, défini pour toute fonction test F par

$$\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(\Gamma)P(d\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}} F(\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\delta_{X_i})\tilde{P}^\gamma(d(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*})\mu(d\gamma),$$

soit un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) sur $\mathcal{C}$ d'hamiltonien H et de mesure de référence ν?
Le théorème 3.18 y répond de la façon suivante :
P est un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) sur $\mathcal{C}$ d'hamiltonien H et de mesure de référence $\nu = \int_{\mathbb{R}^d}\nu^x\nu_0(dx)$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :
- μ est un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) sur $\mathbb{R}^d$ d'hamiltonien local h, que l'on peut expliciter et de mesure de référence ν_0
- pour μ-presque tout $\gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\delta_{x_i}$, $\tilde{P}^\gamma$ est une mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ d'hamiltonien $\tilde{H}$ construit à partir de H (voir équation (3.23)) et de mesure de référence $\otimes_{i\in\mathbb{N}^*}\nu^{x_i}$,
- la famille $(\tilde{P}^\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^d}$ est compatible (respectivement faiblement compatible); voir définitions 3.16 et 3.17 pour les notions de compatibilité.

Chapitre 4 : Système de particules browniennes en interaction et champs de Gibbs associés

Dans la première partie de ce chapitre nous présentons le système de particules browniennes en interaction; celui-ci représente un système infini de particules qui diffusent dans $\mathbb{R}^d$ selon un mouvement brownien et dont l'interaction par paires entre les particules est induite par le gradient du potentiel φ. On modélise ce système par la diffusion infini-dimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} dX_i(t) = dW_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\nabla\varphi(X_i(t)-X_j(t))dt, & i\in\mathbb{N}^*, t\in[0,1], \\ X_i(0) = x_i, & i\in\mathbb{N}^* \end{cases} \tag{1.2}$$

où $(W_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite localement finie de points de $\mathbb{R}^d$.

Physiquement, le système (1.2) modélise un système de particules en interaction et en suspension dans un fluide lorsque le coefficient $\tau = \frac{m}{f}$, grandeur appelée temps de relaxation en physique, est très petit, m désignant la masse d'une particule et f le coefficient de frottement fluide induit par le fluide ambiant sur la particule. Un système de particules en interaction et en suspension dans un fluide est habituellement modélisé par l'équation de Langevin qui suit : X_i et V_i représentent la position et la vitesse de la $i$ème particule, et sont solutions du système

$$\begin{cases} dV_i(t) = F_i(t)dt - fV_i(t)dt - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\nabla\varphi(X_i(t) - X_j(t))dt, & i \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1], \\ dX_i(t) = V_i(t)dt, \quad i \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1] \end{cases} \tag{1.3}$$

ou encore,

$$\frac{\partial^2 X_i(t)}{\partial t^2} = F_i(t) - f\frac{\partial X_i(t)}{\partial t}(t) - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\nabla\varphi(X_i(t) - X_j(t)), \quad i \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1],$$

où $F_i(t)$ est la force aléatoire au temps t induite par le fluide ambiant. Dans [46], il est démontré que dans le cas où le temps de relaxation τ est petit (voir [46] pour des chiffres précis, un exemple où $\tau = 1.5\ 10^{-10}s$ est donné), le système (1.3) peut être approximé par le système (1.2). Le mouvement brownien W_i modélise ainsi le mouvement aléatoire de la $i$ème particule soumise uniquement à la force aléatoire F_i. L'intérêt de cette approximation est de diminuer l'ordre du système (1.3) (on passe de l'ordre 2 à l'ordre 1) et ainsi de rendre son étude mathématique plus simple.
Dans ce travail, une solution de (1.2) sera toujours représentée par le processus ponctuel sur $\mathcal{C}$ défini par $\Gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\delta_{X_i}$. Cette diffusion dite de type gradient fut étudiée pour la première fois par R. Lang [32] qui prouva l'existence et l'unicité des solutions en régime stationnaire. Le cadre de notre étude dépassant le cas stationnaire, nous nous appuyons sur les résultats de J. Fritz, rappelés dans le théorème 4.2, qui prouva l'existence et l'unicité forte des solutions pour toute configuration initiale déterministe $\gamma = \sum_i \delta_{x_i}$ d'énergie de fluctuation logarithmique $\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$ finie (voir la définition en (2.25)). La deuxième section est consacrée à une étude précise des fluctuations des particules au cours de la diffusion. On montre que la loi de la variable

$$\zeta_{\log}(\Gamma) = \sup_{X\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}\frac{|X(t) - X(0)|}{1 + \ln(1 + |X(0)|)}$$

décroît exponentiellement quand Γ est solution du système (1.2); le nombre aléatoire de particules qui interagissent, au cours de la diffusion, avec une particule donnée est de l'ordre de grandeur de $(\zeta_{\log}\ln(\zeta_{\log}))^d$.
Grâce à cette étude approfondie, on démontre dans la troisième section un des théorèmes principaux de la thèse (Théorème 4.11) qui affirme l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :
- être la loi sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ des solutions du système (1.2) pour une condition initiale de loi gibbsienne associée à un hamiltonien local h
- être un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$ pour l'hamiltonien local $h(X(0),\Gamma(0)) + H^\Phi(X,\Gamma)$, se décomposant donc en une partie provenant de la condition initiale et une partie purement dynamique ; l'expression explicite de H^Φ est donné en (4.15).

Chapitre 5 : Applications et généralisation :

Dans un premier temps, nous donnons quelques applications directes des chapitres précédents. Notamment, nous démontrons que si la condition initiale au système (1.2) est un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique), alors la loi du système, à tout temps $t \in [0,1]$, est encore un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) dont on peut expliciter l'hamiltonien local et la mesure de référence (voir lemme 5.1). Il y donc conservation de la gibbsiannité au cours de la diffusion. On montre également que si la condition initiale est quelconque (aléatoire ou non), alors la loi du système, à tout temps $t \in]0,1]$, est un champ de Gibbs canonique de mesure de référence la mesure de Lebesgue λ et d'hamiltonien local difficile à expliciter. On en déduit par exemple que les mesures stationnaires (i.e. invariantes par translation du temps) sont des champs de Gibbs canoniques.
Nous obtenons également des résultats sur les mesures réversibles pour cette dynamique. Dans [33], R. Lang fut le premier à montrer que les mesures réversibles du système (1.2) sont les champs de Gibbs canoniques de $\mathcal{G}_c(h^\varphi,\lambda)$, où

$$h^\varphi(x,\gamma) = \sum_{y\in\gamma} \varphi(x-y).$$

Nous redémontrons ce résultat, en en affaiblissant considérablement les hypothèses.
Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présentons au théorème 5.10 la généralisation suivante de la réciproque du théorème 4.11 : tout champ de Gibbs P sur $\mathcal{C}$ d'hamiltonien local H régulier est la loi d'une diffusion brownienne infini-dimensionnelle - cf (5.16)- dont la dérive $(\beta_t(X,\Gamma))_{t\in[0,1]}$ a la forme explicite suivante :

$$\beta_t = -C^!_P(D_t H|\mathcal{F}_t).$$

L'outil principal pour démontrer ce résultat est la formule (1.1) d'intégration par parties sous la mesure de Campbell.
Puis nous donnons une application à l'analyse du retournement du temps sur un champ de Gibbs canonique général P sur $\mathcal{C}$. Par le théorème 5.10, on peut associer à un tel champ des dynamiques forward et backward non markoviennes à priori. La projection à tout temps $t > 0$ de P est un champ de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ d'hamiltonien local noté h_t, et nous présentons dans la formule (5.21) le lien entre h_t et les dérives forward et backward associées à P. Cette formule est une généralisation au cadre des systèmes continus du résultat obtenu par H. Föllmer et A. Wakolbinger [19] pour des systèmes indéxés par un réseau, lui-même version infini-dimensionnelle du cas fini-dimensionnel traité tout d'abord par A.N. Kolmogorov [31] puis par H. Föllmer [18].
Dans le cas particulier où le champ de Gibbs canonique P est la loi du système (1.2) avec comme condition initiale un champ de Gibbs canonique, alors la formule (5.21)

s'écrit sous la forme plus simple suivante :

$$-\nabla_x h_t(x,\gamma) \quad = \quad -\frac{1}{2}\nabla_x h^{\varphi}(x,\gamma) + \hat{b}_{1-t}(x,\gamma), \qquad \lambda\text{-p.s.}, \tag{1.4}$$

où h_t est l'hamiltonien local du champ de Gibbs canonique représentant la loi au temps t de la solution du système (1.2) et $-\frac{1}{2}\nabla_x h^{\varphi}$ (respectivement $\hat{b}_t$) la dérive forward (respectivement backward) du système. On en déduit dans le corollaire 5.15, une représentation de l'hamiltonien local des mesures stationnaires du système (1.2). Dans une dernière section, nous revisitons les résultats de la thèse dans le cas où $d > 3$. Nous analysons, en fonctions de d, les résultats qui restent vrais et proposons dans certains cas de nouvelles démonstrations permettant ainsi de traiter les cas particuliers.

Chapitre 2

Processus ponctuels gibbsiens sur $\mathcal{C}$. Propriétés fines des trajectoires.

Dans ce chapitre, nous allons introduire l'objet mathématique central de cette thèse, i.e. les processus ponctuels gibbsiens. Les ouvrages de référence sur lesquels nous nous sommes basés pour les notions générales concernant les processus ponctuels, sont les livres de K. Matthes, J. Kerstan et J. Mecke [36] et de Ch. Preston [43].
Dans le cadre de cette thèse, nous ne considérerons des processus ponctuels que sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ désignant l'ensemble des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}^d$. De nombreuses définitions et propriétés étant identiques pour $\mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$, nous choisissons donc de poser $\mathbb{X}$ un espace générique représentant aussi bien $\mathbb{R}^d$ que $\mathcal{C}$.
Dans un premier temps, nous définissons précisément la notion de processus ponctuel et introduisons les mesures de référence et la notion de champ de Gibbs sur $\mathbb{X}$, en en rappelant quelques propriétés. Dans un deuxième temps, nous étudions des fonctionnelles permettant de contrôler les mesures ponctuelles. Entre autres, nous comparons les différentes notions de mesures ponctuelles "tempérées" dans $\mathbb{R}^d$ existant dans la littérature. Le dernier paragraphe traite, lui, de différents types de contrôle des mesures ponctuelles sur $\mathcal{C}$.

2.1 Définitions

2.1.1 Mesures ponctuelles sur l'espace polonais $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$

A partir de maintenant et dans toute la thèse, $\mathbb{X}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$. On munit $\mathbb{X}$ de sa tribu borélienne $\sigma(\mathbb{X})$. $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{X})$ sont, quant à eux, deux sous-

ensembles de $\sigma(\mathbb{X})$, que l'on précisera plus tard selon la valeur de $\mathbb{X}$. $\mathbf{M}(\mathbb{X})$ désigne l'ensemble des mesures positives diffuses de masse infinie et σ-finies sur $\mathbb{X}$, c'est-à-dire les mesures de masse infinie sur $\mathbb{X}$ qui sont finies sur les sous-ensembles de $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ et nulles sur les sous-ensembles de $\mathcal{S}(\mathbb{X})$.
On note $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$ l'ensemble des mesures Γ de masse infinie sur $\mathbb{X}$ telles que

$$\forall \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{X}), \qquad \Gamma(B) \in \mathbb{N},$$

et $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ le sous-ensemble de $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$ suivant :

$$\mathcal{M}(\mathbb{X}) = \Big\{ \Gamma \in \bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X}) \text{ telle que, pour tout } S \in \mathcal{S}(\mathbb{X}), \quad \Gamma(S) \leq 1 \Big\}.$$

On ne considère donc que des mesures ponctuelles chargeant une infinité de points.
On munit $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$ de la tribu $\sigma(\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X}))$ engendrée par les ensembles

$$\{\Gamma \in \bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X}), \Gamma(\Lambda) = n\}$$

où n parcourt $\mathbb{N}^*$ et Λ parcourt $\mathcal{B}(\mathbb{X})$. La tribu $\sigma(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$ de $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ est obtenue comme la tribu trace de $\sigma(\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X}))$ sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$. Il est bien connu (voir par exemple [36]) que les mesures $\Gamma \in \bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$ ont une représentation en termes de configurations de points. En effet, pour tout $\Gamma \in \bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$, il existe une suite infinie de points $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{X}$, sans accumulation dans aucun ensemble de $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, telle que

$$\Gamma \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{X_i}, \tag{2.1}$$

où δ_X représente la mesure de Dirac en $X \in \mathbb{X}$.
Pour $X \in \mathbb{X}$ et $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{X})$, on définit la mesure ponctuelle $\Gamma\backslash X$ par

$$\Gamma\backslash X = \Gamma - \delta_X \quad \text{si} \quad \Gamma(X) = 1, \text{ et} \quad \Gamma\backslash X = \Gamma \text{ sinon.}$$

Lorsque Γ est dans $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ on impose en plus à la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de satisfaire pour tout $S \in \mathcal{S}(\mathbb{X})$ la condition : Card $\{i \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_i \in S\} \leq 1$.
Par la suite, nous nous intéresserons essentiellement à $\mathcal{M}(\mathbb{X})$; nous avons défini $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$ uniquement dans le but d'éclaircir les questions de topologie sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$, ce que nous présenterons dans le paragraphe 2.1.2.
Si $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$, on particularise les notations X,Γ en x,γ. On choisit pour $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (respectivement $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$) l'ensemble usuel des bornés de $\mathbb{R}^d$ (respectivement des singletons de $\mathbb{R}^d$) :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \Big\{ B \in \sigma(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } \sup_{x\in B} |x| < +\infty \Big\},$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \Big\{ B \in \sigma(\mathbb{R}^d) \text{ tel que Card } B = 1 \Big\}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{M}(\mathbb{R}^d) = \Big\{ m, \text{ mesure positive diffuse } \sigma\text{-finie sur } \mathbb{R}^d \text{ telle que } m(\mathbb{R}^d) = +\infty \Big\}$$

et

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) = \Big\{ \gamma, \text{ mesure ponctuelle simple sur } \mathbb{R}^d \text{ telle que } \gamma(\mathbb{R}^d) = +\infty \Big\}.$$

On note dans toute la thèse par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$; λ est ainsi la mesure de référence de $\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$.
Si $\mathbb{X} = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ sont les ensembles suivants :

$$\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \Big\{ B \in \sigma(\mathcal{C}) \text{ tel que } \{X(0) : X \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Big\},$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{C}) = \Big\{ B \in \sigma(\mathcal{C}) \text{ tel que } \{X(0) : X \in B\} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Big\}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{M}(\mathcal{C}) = \Big\{ \nu, \text{ mesure positive sur } \mathcal{C} \text{ telle que sa marginale au temps 0 soit dans } \mathbf{M}(\mathbb{R}^d) \Big\}$$

et

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \Big\{ \Gamma, \text{ mesure ponctuelle sur } \mathcal{C} \text{ telle que sa marginale au temps 0 soit dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \Big\}.$$

On note dans toute la thèse par ϖ^m la mesure de Wiener de condition initiale $m \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$; ϖ^λ est ainsi la mesure de référence de $\mathbf{M}(\mathcal{C})$. Par abus de notation, $\varpi^x = \varpi^{\delta_x}$ ($x \in \mathbb{R}^d$) représente la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}$ partant de x.
Remarquons que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est un sous-ensemble strictement inclus dans l'ensemble des mesures ponctuelles simples de masse infinie sur $\mathcal{C}$.
Pour $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on notera $\mathcal{C}_\Lambda$ l'ensemble de $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ suivant :

$$\mathcal{C}_\Lambda = \Big\{ X \in \mathcal{C} \text{ tel que } X(0) \in \Lambda \Big\}. \tag{2.2}$$

En notant $\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$ l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$, alors pour tout $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{X})$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$ et $\Lambda \in \sigma(\mathbb{X})$, on note Γ_Λ la projection sur Λ de Γ et P_Λ la projection sur $\mathcal{M}_\Lambda(\mathbb{X})$ de P, où $\mathcal{M}_\Lambda(\mathbb{X})$ est l'espace des mesures poncutelles sur Λ qui sont obtenues par restriction à Λ de mesures ponctuelles de $\mathcal{M}(\mathbb{X})$.
Pour $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ et $t \in [0{,}1]$ on note $\Gamma(t)$ la mesure

$$\Gamma(t) = \Big(\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \delta_{X_i} \Big)(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \delta_{X_i(t)}.$$

Remarquons que $\Gamma(t)$ n'est pas nécessairement dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, excepté dans le cas particulier où $t=0$. Pour $X \in \mathcal{C}$ et $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, on note pr_0 la projection au temps 0 de X, Γ ou (X,Γ) sur $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ ou $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{array}{cccc} pr_0 : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ & X & \longmapsto & X(0), \\ \\ pr_0 : & \mathcal{M}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \\ & \Gamma & \longmapsto & \Gamma(0), \\ \\ pr_0 : & \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \\ & (X,\Gamma) & \longmapsto & (X(0),\Gamma(0)). \end{array}$$

Si pour $t \in [0,1]$, $\Gamma(t) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, alors on généralise les projections ci-dessus au temps t et on les note pr_t. Enfin, pour $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$, on note $P_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ et $P^\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$ les probabilités suivantes :

$$P_0 = P \circ pr_0^{-1}, \qquad P^\gamma = P(\ \ |\Gamma(0) = \gamma). \tag{2.3}$$

Quand il n'y a pas de confusion possible, $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$ désigne indifféremment la filtration canonique de $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ ou $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$ engendrée par les projections aux temps $t \in [0,1]$ sur les espaces respectifs.

2.1.2 Topologie sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$

Donnons dans ce paragraphe une structure topologique à $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$; celle-ci nous sera utile pour justifier les calculs de lois conditionnelles effectués dans $\mathcal{M}(\mathbb{X})$. On note $d_{\mathbb{X}}$ la distance sur $\mathbb{X}$. Dans le cas de $\mathbb{R}^d$, $d_{\mathbb{X}}$ est la distance euclidienne et dans le cas de $\mathcal{C}$, on choisit la norme uniforme.
Soit Γ et Γ' dans $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$ et leurs représentations $\Gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{X_i}$, $\Gamma' = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{Y_i}$; alors pour tout $\rho \geq 0$, on note $I_\rho = \{i \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } d_{\mathbb{X}}(X_i,0) < \rho\}$ et $J_\rho = \{j \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } d_{\mathbb{X}}(Y_j,0) < \rho\}$. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que Γ et Γ' sont des (ε,n)-voisins s'il existe une injection f d'un sous-ensemble $D \subset \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$I_{n-\varepsilon} \subset D, \quad J_{n-\varepsilon} \subset f(D),$$

$$\forall i \in D, \quad d_{\mathbb{X}}(X_i,Y_{f(i)}) < \varepsilon.$$

En posant $d_n = \inf\{\varepsilon > 0 \text{ tel que } \Gamma \text{ et } \Gamma' \text{ sont des } (\varepsilon,n)\text{-voisins } \}$ et

$$d_{\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})}(\Gamma,\Gamma') = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n,$$

on trouve dans [36], page 110, la preuve que $d_{\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})}$ est une distance sur $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$. De plus on a la proposition suivante

Proposition 2.1 (Proposition 1.15.2 [36]). $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$ *muni de la distance* $d_{\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})}$ *est un espace métrique complet séparable.*

Par conséquent l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{X})$, qui sera notre espace de base, est inclus dans un espace polonais. Néanmoins, $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ n'est pas un espace polonais car il n'est pas fermé dans $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$. En effet, il est facile de construire une suite de mesures ponctuelles simples de $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ qui converge vers une mesure ponctuelle non simple dans $\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$. L'inclusion de $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans un espace polonais est suffisante pour justifier les calculs de lois conditionnelles effectués par la suite. En effet, il sera licite de désintégrer les mesures sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$, et de les représenter comme des mélanges de noyaux.

2.1.3 Numérotation des points dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{M}(\mathcal{C})$

Afin d'identifier les mesures ponctuelles simples sur $\mathbb{R}^d$ (respectivement sur $\mathcal{C}$) avec des suites de points distincts de $\mathbb{R}^d$(respectivement de $\mathcal{C}$), on introduit les fonctions $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(\Theta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivantes.
Soit $\prec$ un ordre total sur $\mathbb{R}^d$ compatible avec l'ordre partiel sur $\mathbb{R}^d$ induit par la norme euclidienne ($\forall x,y \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|x| < |y|$, alors $x \prec y$). Pour construire un tel ordre, on peut par exemple considérer l'ordre sur la sphère $\mathbb{R}^d$ induit par les $d-1$ angles naturels et le combiner, grâce à l'ordre lexicographique, avec l'ordre partiel induit par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Construisons maintenant les fonctions $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(\Theta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$: de la simplicité des mesures ponctuelles, on déduit pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, l'existence d'une unique suite $(\theta_i(\gamma))_{i\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^d$ qui vérifie

$$\gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{\theta_i(\gamma)} \text{ et } \big(\theta_i(\gamma)\big)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante dans } \mathbb{R}^d \text{ pour l'ordre } \prec .$$

De même, pour $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, il existe une unique suite $(\Theta_i(\Gamma))_{i\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{C}$ qui vérifie

$$\Gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{\Theta_i(\gamma)} \text{ et } \big(\Theta_i(\Gamma)(0)\big)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante pour l'ordre } \prec .$$

On note ainsi θ l'application de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}^*} \\ & \gamma & \longmapsto & (\theta_i(\gamma))_{i\in\mathbb{N}^*}. \end{array} \tag{2.4}$$

De même Θ désigne l'application de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Theta: & \mathcal{M}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\mathbb{N}^*} \\ & \Gamma & \longmapsto & (\Theta_i(\Gamma))_{i\in\mathbb{N}^*}. \end{array} \tag{2.5}$$

Notre choix de ne considérer que des mesures ponctuelles simples est nécessaire pour pouvoir introduire les fonctions (θ_i). En effet, il nous sera indispensable par la suite de pouvoir numéroter de façon unique les points chargés par les mesures ponctuelles. D'autre part, nous ne considérons que des mesures ponctuelles de masse infinie car il est plus pratique d'indexer les familles θ et Θ par $\mathbb{N}^*$ que par des ensembles éventuellement finis mais aléatoires. Néanmoins, tous les résultats de la thèse restent vrais dans le contexte des mesures ponctuelles finies.

2.2 Mesures de référence

2.2.1 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est le processus de référence par excellence des processus ponctuels. Redonnons en très brièvement les propriétés fondamentales et une esquisse de construction. Soit ν une mesure de $\mathbf{M}(\mathbb{X})$; on note alors Π^ν le processus de Poisson sur $\mathbb{X}$ d'intensité ν, c'est-à-dire la probabilité sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ définie comme suit :

Proposition 2.2. Π^ν *est caractérisé par les trois propriétés suivantes*
i) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *tout* $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ *de* $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ *disjoints*

$$\Gamma_{\Lambda_1}, \dots, \Gamma_{\Lambda_n} \textit{ sont indépendants sous } \Pi^\nu$$

ii) $\forall \Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$,

$$\Gamma(\Lambda) \textit{ suit une loi de Poisson de paramètre } \nu(\Lambda) \textit{ sous } \Pi^\nu$$

iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ *et pour toute fonction* F *mesurable bornée de* $\mathcal{M}_\Lambda(\mathbb{X})$ *dans* $\mathbb{R}$, *on a*

$$\int_{\mathcal{M}_\Lambda(\mathbb{X})} F(\Gamma)\Pi^\nu_\Lambda\big(d\Gamma\big|\Gamma(\Lambda)=n\big) = \int_{\Lambda^n} F(\delta_{X_1}+\dots\delta_{X_n})\Big(\frac{1}{\nu(\Lambda)}\nu_\Lambda\Big)^{\otimes n}\big(dX_1,\dots,dX_n\big).$$

Les propriétés *ii)* et *iii)* permettent de construire les marginales de Π^ν sur tout sous ensemble Λ de $\mathcal{B}(\mathbb{X})$. En considérant une partition dénombrable de $\mathbb{X}$ constituée de sous-ensembles de $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ et grâce à la propriété *i)* on construit le processus de Poisson sur $\mathbb{X}$ par recollement. On remarque aisément que le processus ainsi construit est indépendant de la partition choisie. ■

Dans le cas $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$, on note π^m le processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ d'intensité $m \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$. Le processus de Poisson sur $\mathcal{C}$ d'intensité $\nu \in \mathbf{M}(\mathcal{C})$ est noté quant à lui Π^ν.

Toute mesure m de $\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$ étant diffuse, le processus de Poisson associé π^m est simple, c'est-à-dire qu'il ne charge que des mesures ponctuelles simples sur $\mathbb{R}^d$.

2.2.2 Mesure de Campbell réduite

Il existe de nombreux outils mathématiques pour caractériser et identifier les processus ponctuels et notamment les champs de Gibbs que nous définirons dans la section 2.3; on peut citer par exemple des caractérisations de champs de Gibbs utilisant une formule d'intégration par parties sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ [1], une formule d'équilibre sur les conditionnements [21], une formule de dualité entre l'opérateur intégral de Skorohod et l'opérateur des différences finies [44], le noyau de Papangelou [48] ou encore les fonctions de corrélation [53].
Dans ce travail, nous nous baserons essentiellement sur des caractérisations faisant intervenir la mesure de Campbell réduite associée à un processus ponctuel $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$.

Définition 2.3. *Soit P une probabilité de $\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$; la mesure de Campbell réduite $C_P^!$ est la mesure sur $\mathbb{X} \times \mathcal{M}(\mathbb{X})$ satisfaisant pour toute fonction mesurable, bornée de $\mathbb{X} \times \mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}^+$, l'égalité*

$$\int_{\mathbb{X}\times\mathcal{M}(\mathbb{X})} F(X,\Gamma)C_P^!(dX,d\Gamma) = \int_{\mathcal{M}(\mathbb{X})} \int_{\mathbb{X}} F(X,\Gamma\backslash X)\Gamma(dX)P(d\Gamma). \tag{2.6}$$

La mesure de Campbell $\mathcal{C}_P^!$ d'un processus P donne de l'information sur la loi conjointe d'un "point typique" de la configuration et du reste de la configuration. Il est important de noter que deux processus ponctuels distincts ont des mesures de Campbell différentes. La mesure de Campbell $\mathcal{C}_P^!$ caractérise donc entièrement le processus ponctuel P. A titre d'exemple, on a la proposition suivante, qui montre à quel point cela peut apporter un éclairage instructif que d'analyser les propriétés d'un processus ponctuel via sa mesure de Campbell.

Proposition 2.4 (Theorem 5.4.1 [36]). *Soit ν une mesure σ-finie sur $\mathbb{X}$ et $P \in \mathcal{P}(\bar{\mathcal{M}}(\mathbb{X}))$; alors P est le processus de Poisson Π^ν si et seulement si*

$$C_P^! = \nu \otimes P. \tag{2.7}$$

Ce résultat nous dit que l'environnement typique vu d'un point du processus de Poisson Π^ν est semblable au processus de Poisson Π^ν; le point suit, quant à lui, la "distribution ν". La structure produit de $C_{\Pi^\nu}^!$ prouve l'indépendance entre le point typique et son environnement. Cela met en évidence une grande régularité dans la répartition des points du processus de Poisson. La proposition 2.4 se généralise au cas des mélanges de processus de Poisson. Dans [37], il est démontré, dans le cas où ν est de masse infinie, qu'un processus ponctuel P sur $\mathbb{X}$ est un mélange de processus de Poisson de la forme suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \Pi^{z\nu}\, \vartheta(dz),$$

où ϑ est une probabilité quelconque sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement s'il existe une mesure Q σ-finie sur $\mathbb{X}$ telle que

$$C_P^! = \nu \otimes Q. \tag{2.8}$$

Le cas particulier, où $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ et ν est la mesure de Lebesgue, est traité dans [9] de façon simple et élégante.
Dans le chapitre 3, nous donnerons une généralisation de ces caractérisations aux cas des champs de Gibbs (Proposition 3.1) et champs de Gibbs canoniques (Proposition 3.2).

2.2.3 Mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$

Bien que le cadre de cette thèse soit essentiellement celui des champs de Gibbs et non celui des mesures de Gibbs sur un réseau, à plusieurs reprises nous utiliserons des résultats concernant les mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$. Nous allons donc en donner ici une définition précise et concise. Parmi les ouvrages de référence sur les mesures de Gibbs sur un réseau, nous pouvons citer les livres [23], [28], [39], [43] et [45].
On note $\mathcal{B}(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{N}^*$, $w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la variable canonique sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ et $\varsigma = \otimes_{i\in\mathbb{N}^*}\varsigma_i$ une mesure de probabilité de référence sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$. On appelle hamiltonien une famille de fonctions mesurables $\tilde{H} = (\tilde{H}_\Delta)_{\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{N}^*)}$ de $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant pour un sous-ensemble $\mathcal{R}_{\tilde{H}} \subset \mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ les propriétés suivantes :
i) $\forall\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{N}^*)$, $\forall w' \in \mathcal{R}_{\tilde{H}}$

$$Z_\Delta(w'_{\Delta^c}) = \int_{\mathcal{C}^\Delta} e^{-\tilde{H}_\Delta(w_\Delta w'_{\Delta^c})}\varsigma(dw_\Delta) < +\infty,$$

ii) $\forall\Delta' \subset \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{N}^*)$,$\forall w' \in \mathcal{R}_{\tilde{H}}$, pour $\varsigma_{\Delta'^c\cap\Delta}$-presque tout $w_{\Delta'^c\cap\Delta}$,

$$\left(\frac{1}{Z_\Delta(w'_{\Delta^c})}e^{-\tilde{H}_\Delta(w_\Delta w'_{\Delta^c})}\varsigma_\Delta\right)\big(dw_{\Delta'}\big|w_{\Delta'^c\cap\Delta}\big) = \frac{1}{Z_{\Delta'}(w_{\Delta'^c\cap\Delta}w'_{\Delta^c})}e^{-\tilde{H}_{\Delta'}(w_\Delta w'_{\Delta^c})}\varsigma_{\Delta'}\big(dw_{\Delta'}\big).$$

La condition *i)* est nécessaire pour définir à partir de $\tilde{H}_\Delta$ le noyau de probabilité $\frac{1}{Z_\Delta(w'_{\Delta^c})}e^{-\tilde{H}_\Delta(w_\Delta w'_{\Delta^c})}\varsigma_\Delta\big(dw_\Delta\big)$. L'hypothèse *ii)* garantit quant à elle la compatibilité de ces noyaux.

Définition 2.5. *Une probabilité $\tilde{P}$ sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ est une mesure de Gibbs d'hamiltonien $\tilde{H} = (\tilde{H}_\Delta)_{\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{N}^*)}$ et de mesure de référence ς si $\tilde{P}(\mathcal{R}_{\tilde{H}}) = 1$ et si pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{N}^*)$ et $\tilde{P}$-presque tout w_{Δ^c} on a*

$$\tilde{P}\big(dw_\Delta\big|w_{\Delta^c}\big) = \frac{1}{Z_\Delta(w'_{\Delta^c})}e^{-\tilde{H}_\Delta(w_\Delta w'_{\Delta^c})}\varsigma_\Delta\big(dw_\Delta\big). \tag{2.9}$$

Les équations (2.9) sont dites DLR, car elles sont dues à Dobrushin, Landford et Ruelle. Énonçons la proposition suivante qui nous sera utile par la suite.

Proposition 2.6 (Theorem 1.33 [23]). *$\tilde{P}$ est une mesure de Gibbs si et seulement si les équations DLR sont satisfaites pour les sous-ensembles de la forme $\Delta_i = \{i\}$, $i \in \mathbb{N}^*$.*

Faisons une dernière remarque sur l'existence et la non unicité des mesures de Gibbs. Bien que les noyaux de probabilité du membre de droite de (2.9) soient parfaitement définis pour toute partie finie $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{N}^*)$, et donc uniques, il n'est pas garanti qu'il existe une mesure de Gibbs $\tilde{P}$ satisfaisant (2.9). De plus, si elle existe, rien n'assure qu'elle soit unique; on parle alors de transition de phase. Un objet fondamental de la mécanique statistique est d'exhiber des conditions garantissant l'existence et l'unicité des mesures de Gibbs associées à un hamiltonien donné.

2.3 Champ de Gibbs et champ de Gibbs canonique sur $\mathbb{X}$

De manière similaire aux mesures de Gibbs sur un réseau, les champs de Gibbs sont des probabilités sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ localement absolument continues par rapport au processus de Poisson. Le noyau de densité s'exprime comme l'exponentielle d'un hamiltonien à volume fini renormalisé. Nous nous appuierons systématiquement sur un hamiltonien local pour définir l'hamiltonien à volume fini. Ce cadre est plus large que celui d'hamiltoniens construits à partir d'une interaction; nous traiterons ce cas particulier dans le paragraphe 2.3.2 et comparerons les deux notions.
Parmi les ouvrages de référence sur les champs de Gibbs, le lecteur pourra consulter [21], [35], [39], [43], [47], [56].

2.3.1 Hamiltonien local

Définition 2.7. *Un hamiltonien local H est une fonction mesurable de $\mathbb{X} \times \mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :* $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{X}$, $\forall \Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{X})$,

$$H(X_1,\Gamma) + H(X_2,\Gamma + \delta_{X_1}) = H(X_2,\Gamma) + H(X_1,\Gamma + \delta_{X_2}). \tag{2.10}$$

Nous pouvons alors définir l'hamiltonien à volume fini H_Λ de la façon suivante : $\forall \Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\forall \Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{X})$ tel que $\Gamma_\Lambda = \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$, on pose

$$H_\Lambda(\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c}) = H(X_1,\Gamma_{\Lambda^c}) + H(X_2,\Gamma_{\Lambda^c} + \delta_{X_1}) + \ldots + H(X_n,\Gamma_{\Lambda^c} + \delta_{X_1} + \ldots \delta_{X_{n-1}}).$$

$H_\Lambda(\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c})$ représente l'énergie de la configuration Γ_Λ dans Λ par rapport à la configuration Γ_{Λ^c} extérieure à Λ. L'objectif étant de construire des spécifications locales, c'est-à-dire des noyaux de probabilité, nous allons définir un sous-ensemble de configurations Γ pour lesquelles l'exponentielle de l'hamiltonien $-H_\Lambda(.,\Gamma_{\Lambda^c})$ sera intégrable sous le processus de Poisson Π_Λ^ν. Ainsi, pour un hamiltonien local H et une mesure de référence $\nu \in \mathbf{M}(\mathbb{X})$, on note

$$\mathcal{M}_{H,\nu}(\mathbb{X}) = \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})} \left\{ \Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{X}), \int_{\mathcal{M}(\Lambda)} e^{-H_\Lambda(.,\Gamma_{\Lambda^c})} d\Pi_\Lambda^\nu < +\infty \right\}. \tag{2.11}$$

$\mathcal{M}_{H,\nu}(\mathbb{X})$ est le support des champs de Gibbs que nous définirons un peu plus tard. Définissons maintenant la famille de noyaux de probabilité $(\Upsilon_{\Lambda,H,\nu})_{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})}$ associée aux champs de Gibbs sur $\mathbb{X}$ d'hamiltonien local H et de mesure de référence $\nu \in \mathbf{M}(\mathbb{X})$: Pour tout $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\Upsilon_{\Lambda,H,\nu}$ est défini de $\mathcal{M}_{H,\nu}(\mathbb{X})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbb{X}))$ par la formule suivante :

$$\Upsilon_{\Lambda,H,\nu}(d\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c}) = \frac{1}{Z_\Lambda(\Gamma_{\Lambda^c})} \exp\big(-H_\Lambda(\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c})\big)\Pi_\Lambda^\nu(d\Gamma_\Lambda), \tag{2.12}$$

où $Z_\Lambda(\Gamma_{\Lambda^c})$ est la constante de renormalisation.
Le lemme suivant donne une condition nécessaire sur les hamiltoniens locaux et sur les mesures de référence pour que deux familles de noyaux soient égales. La preuve est évidente.

Lemme 2.8. *Soit H, H' deux hamiltoniens locaux sur $\mathbb{X}$ et ν, ν' deux mesures de $\mathbf{M}(\mathbb{X})$; alors les familles de noyaux $(\Upsilon_{\Lambda,H,\nu})_{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})}$ et $(\Upsilon_{\Lambda,H',\nu'})_{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})}$ sont égales si et seulement si $\nu = \nu'$, $\mathcal{M}_{H,\nu}(\mathbb{X}) = \mathcal{M}_{H',\nu}(\mathbb{X})$ et si pour tout $\Gamma \in \mathcal{M}_{H,\nu}(\mathbb{X})$,*

$$H(X,\Gamma) = H'(X,\Gamma) \qquad \nu\text{-p.s.}$$

Intéressons nous maintenant aux spécifications locales des champs de Gibbs canoniques. Donnons tout d'abord leurs supports, celui-ci étant plus grand que celui des champs de Gibbs.

$$\mathcal{M}_{H,\nu,c}(\mathbb{X}) = \bigcap_{\substack{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X}) \\ n \in \mathbb{N}}} \left\{ \Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{X}), \int_{\mathcal{M}(\Lambda)} e^{-H_\Lambda(\Gamma',\Gamma_{\Lambda^c})} d\Pi_\Lambda^\nu(d\Gamma' | \Gamma'(\Lambda) = n) < +\infty \right\}. \tag{2.13}$$

Définissons également la famille de noyaux de probabilité $(\Upsilon_{n,\Lambda,H,\nu})_{n \in \mathbb{N}^*, \Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})}$ associée aux champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{X}$ d'hamiltonien local H et de mesure de référence $\nu \in \mathbf{M}(\mathbb{X})$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\Upsilon_{\Lambda,H,\nu}$ est défini de $\mathcal{M}_{H,\nu,c}(\mathbb{X})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\Lambda(\mathbb{X}) \cap \{\Gamma(\Lambda) = n\})$ par la formule suivante :

$$\Upsilon_{n,\Lambda,H,\nu}(d\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c}) = \frac{1}{Z_{\Lambda,n}(\Gamma_{\Lambda^c})} \exp\big(-H_\Lambda(\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c})\big)\Pi_\Lambda^\nu(d\Gamma_\Lambda | \Gamma(\Lambda) = n), \tag{2.14}$$

où $Z_{\Lambda,n}(\Gamma_{\Lambda^c})$ est la constante de renormalisation.
De même donnons une condition nécessaire et suffisante sur les hamiltoniens locaux et sur les mesures de référence pour que deux familles de noyaux soient égales.

Lemme 2.9. *Soit H, H' deux hamiltoniens locaux sur $\mathbb{X}$ et ν, ν' deux mesures de $\mathbf{M}(\mathbb{X})$; alors les familles de noyaux $(\Upsilon_{n,\Lambda,H,\nu})_{n\in\mathbb{N}^*,\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{X})}$ et $(\Upsilon_{n,\Lambda,H',\nu'})_{n\in\mathbb{N}^*,\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{X})}$ sont égales si et seulement si $\nu = \nu'$, $\mathcal{M}_{H,\nu,c}(\mathbb{X}) = \mathcal{M}_{H',\nu,c}(\mathbb{X})$ et s'il existe une fonction G de $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $\Gamma \in \mathcal{M}_{H,\nu,c}(\mathbb{X})$,*

$$H(X,\Gamma) = H'(X,\Gamma) + G(\Gamma) \qquad \nu\text{-p.s.}$$

et qui soit constante sur les classes d'équivalence de la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall \Gamma,\Gamma' \in \mathcal{M}(\mathbb{X}), \qquad \Gamma\,\mathcal{R}\,\Gamma' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \Lambda \in \mathcal{B}(X),\, \Gamma_{\Lambda^c} = \Gamma'_{\Lambda^c}. \tag{2.15}$$

Preuve :
La réciproque est facile à vérifier. Pour le sens direct, on remarque aisément que $H(X,\Gamma) - H'(X,\Gamma)$ est une fonction de Γ pour tout $\Gamma \in \mathcal{M}_{H,\nu,c}(\mathbb{X})$ et ν-presque tout X, on la note $G(\Gamma)$.
La condition d'additivité (2.10), permet d'affirmer que pour tout $\Gamma \in \mathcal{M}_{H,\nu,c}(\mathbb{X})$ et ν-presque tout X et Y, alors $G(\Gamma+\delta_X) = G(\Gamma+\delta_Y)$. Il est alors facile de voir que cela est équivalent au fait que G soit constante sur les classes d'équivalence de la relation binaire $\mathcal{R}$. ■
On en déduit que, pour toute mesure $\nu \in \mathbf{M}(\mathbb{X})$ et tout hamiltonien local H sur $\mathbb{X}$, les hamiltoniens locaux $H(X,\Gamma)$ et $H(X,\Gamma\backslash X)$ définissent les mêmes familles de noyaux car la mesure ν ne charge pas les points de $\mathbb{X}$.

2.3.2 Interaction

Souvent, on construit un hamiltonien local à partir d'une interaction. Nous exposons cette situation dans ce paragraphe.
On note $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{X}$.

Définition 2.10. *Une interaction Ψ est une application de $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$ mesurable pour la tribu canonique sur $\mathcal{F}(\mathbb{X})$:*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{F}(\mathbb{X}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathcal{K} & \longmapsto & \Psi(\mathcal{K}). \end{array}$$

Lorsque $\Psi(\mathcal{K}) = 0$ pour toute partie $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ telle que $\mathrm{Card}(\mathcal{K}) \neq 2$, alors Ψ est dite interaction par paires. De même Ψ est appelée interaction par triplets si $\Psi(\mathcal{K}) = 0$ pour tout $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ telle que $\mathrm{Card}(\mathcal{K}) \neq 3$. Une interaction par paires Ψ invariante par translation, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall X_1,X_2,a \in \mathbb{X}, \quad \Psi(\{X_1,X_2\}) = \Psi(\{X_1+a,X_2+a\}),$$

peut être représentée à l'aide d'une fonction paire Φ de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$, dénommée potentiel, de la façon suivante :

$$\Psi(\{X_1,X_2\}) = \Phi(X_1 - X_2).$$

En supposant que la somme ci-dessous ait un sens, on construit l'hamiltonien local H^Ψ à partir de l'interaction Ψ de la façon suivante :

$$H^\Psi(X,\Gamma) = \sum_{\substack{\mathcal{K}\in\mathcal{F}(\mathbb{X}) \\ \mathcal{K}\subset\Gamma}} \Psi(\mathcal{K}\cup\{X\}). \tag{2.16}$$

Lorsque l'interaction Ψ provient d'un potentiel Φ on notera H^Φ au lieu de H^Ψ.
Intéressons nous maintenant à la démarche inverse : étant donné un hamiltonien local H, existe-t-il une interaction Ψ telle que $H = H^\Psi$. E. Glötzl et O. Kozlov y répondent partiellement dans [25] et [30].

2.3.3 Superstabilité

Nous allons présenter dans ce paragraphe différentes notions de stabilité pour des interactions par paires dans $\mathbb{R}^d$ provenant d'un potentiel φ. On dit que φ est **stable** (cf [53] page 131) si :
$\exists A \geq 0$ tel que, pour toute suite finie de points $x_1,x_2,\ldots,x_n$ de $\mathbb{R}^d$,

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} \varphi(x_k - x_j) \geq -nA \qquad ;$$

Pour $k = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{Z}^d$, on note D_k le cube de $\mathbb{R}^d$ centré en k et de côté 1 :

$$D_k = [k_1 - \frac{1}{2},k_1 + \frac{1}{2}[\times\ldots[k_d - \frac{1}{2},k_d + \frac{1}{2}[.$$

Les ensembles $(D_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ forment ainsi une partition de $\mathbb{R}^d$. On peut maintenant introduire la notion de superstabilité. Un potentiel φ est dit **superstable** (cf [53] page 131) si :
$\exists A \geq 0$, $\exists B > 0$ tels que, pour toute suite finie de points $x_1,x_2,\ldots,x_n$

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} \varphi(x_k - x_j) \geq -nA + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma(D_k)^2, \tag{2.17}$$

où $\gamma = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$.
Dans le livre de D. Ruelle [52], on trouve une autre définition de la superstabilité, plus faible que celle évoquée ci-dessus. Son interprétation physique est plus simple mais elle est moins intéressante du point de vue mathématique. Elle s'exprime de la

façon suivante : $\exists A \geq 0$, $\exists B > 0$ tels que, pour tout $M > 0$ et toute suite finie de points $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dans $[-M,M]^d$,

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} \varphi(x_k - x_j) \geq -nA + \frac{B}{M^d}n^2. \tag{2.18}$$

Il est facile de voir que (2.18) implique (2.17). Il semblerait qu'en toute généralité (2.17) n'implique pas (2.18); néanmoins nous n'avons pas trouvé de contre-exemple explicite.
Dans [16], J. Fritz introduit une notion de superstabilité, en apparence différente de celle que nous venons d'exposer en (2.17). Étant donné que par la suite, nous utilisons des résultats provenant de cet article, nous démontrons l'équivalence entre la définition de superstabilité donnée par J. Fritz et celle donnée par D. Ruelle.

Proposition 2.11. *Soit R un réel quelconque strictement positif. Alors, (2.17) est équivalente à l'assertion suivante :*
$\exists A \geq 0$, $\exists B > 0$ *tels que pour toute suite finie de points $x_1,x_2,\ldots,x_n$ de $\mathbb{R}^d$,*

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} \varphi(x_k - x_j) \geq -nA + BN, \tag{2.19}$$

où N est le nombre de couples (j,k) tels que $|x_k - x_j| \leq R$.

Preuve :
Soit N_k le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ défini par

$$N_k = \Big\{k' \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } \exists x \in D_k,\, \exists y \in D_{k'},\, |x-y| \leq R\Big\};$$

on a la majoration évidente suivante :

$$\text{Card } N_k \leq \text{ Vol } B\Big(0,R + \frac{3}{2}\sqrt{d}\Big) := C_{d,R},$$

où $B(x,r)$ est la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre x et de rayon r. On en déduit que, pour toute suite finie de points $x_1,x_2,\ldots,x_n$ de $\mathbb{R}^d$ et en posant $\gamma = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$,

$$\begin{aligned} N &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma(D_k) \sum_{k'\in N_k} \gamma(D_{k'}) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d,\, k'\in N_k} \Big(\frac{1}{2}\gamma(D_{k'})^2 + \frac{1}{2}\gamma(D_k)^2\Big) \\ &\leq C_{d,R} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma(D_k)^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Partitionnons le cube D_0 en une suite de $n_{d,R}$ cubes $\big(\tilde{D}_i\big)_{1\leq i\leq n_{d,R}}$ de diamètres inférieurs à R :

$$D_0 = \bigcup_{1\leq i\leq n_{d,R}} \tilde{D}_i, \forall i \neq j \in \{1,\dots,n_{d,R}\}, \tilde{D}_i \cap \tilde{D}_j = \emptyset \text{ et } \forall i \in \{1,\dots,n_{d,R}\}, \sup_{x,y\in\tilde{D}_i} |x-y| \leq R.$$

Par conséquent, on en déduit

$$\begin{aligned} N &\geq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{1\leq i\leq n_{d,R}} \gamma\Big(\tilde{D}_i + k\Big)^2 \\ &\geq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{n_{d,R}} \Bigg(\sum_{1\leq i\leq n_{d,R}} \gamma\Big(\tilde{D}_i + k\Big)\Bigg)^2 \\ &= \frac{1}{n_{d,R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma(D_k)^2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

En associant (2.20) et (2.21), on trouve

$$\frac{1}{n_{d,R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma(D_k)^2 \leq N \leq C_{d,R} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma(D_k)^2.$$

L'équivalence entre (2.17) et (2.19) est alors évidente et la proposition est démontrée. ■

Dans [16], J. Fritz considère des potentiels φ à support compact, c'est-à-dire qui satisfont :

$$\exists R_0 \geq 0 \text{ tel que } \forall |x| \geq R_0, \varphi(x) = 0.$$

La définition de superstabilité qu'il choisit est alors celle donnée en (2.19) avec $R = R_0$. La proposition 2.11 prouve que cette définition est équivalente à celle donné par D. Ruelle.

Nous allons maintenant comparer les notions de superstabilité et de stabilité. La propriété de superstabilité semble beaucoup plus forte que celle de stabilité. En réalité, elles sont presque équivalentes comme le démontre la proposition suivante. On en trouve un énoncé sans démonstration au paragraphe 3.2.9 de [52].

Proposition 2.12. *Un potentiel φ est superstable si et seulement s'il est la somme d'un potentiel stable φ_1 et d'un potentiel φ_2 positif, strictement positif en 0 et continu en 0 :*

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Preuve :

Démontrons tout d'abord la réciproque. Soit $\varphi := \varphi_1 + \varphi_2$ un potentiel tel que φ_1 soit stable et φ_2 positif, strictement positif en 0 et continu en 0 et démontrons qu'il est superstable. Par continuité de φ_2 en 0, il existe $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ tels que $\varphi_2(x)$ soit supérieur ou égal à ε pour tout x dans la boule $B(0,R)$. On en déduit que pour toute suite finie de points $x_1,x_2,\dots,x_n$ de $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j<k\le n}\varphi(x_k-x_j) &= \sum_{1\le j<k\le n}\varphi_1(x_k-x_j)+\frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le n}\varphi_2(x_k-x_j)-\frac{1}{2}n\varphi_2(0)\\ &\ge -n\Big(A+\frac{1}{2}\varphi_2(0)\Big)+\frac{N}{2}\varepsilon, \qquad (2.22)\end{aligned}$$

où A est la constante provenant de la définition de la stabilité du potentiel φ_1 et N le nombre de couples (j,k) tels que $|x_k-x_j|\le R$. Grâce à la proposition 2.11 et à l'inégalité (2.22), cela montre que φ est superstable.
Démontrons maintenant le sens direct. Soit φ un potentiel superstable. D'après la proposition 2.11, il existe $A\ge 0$ et $B>0$ tels que, pour toute suite finie de points $x_1,x_2,\dots,x_n$ de $\mathbb{R}^d$,

$$\sum_{1\le j<k\le n}\varphi(x_k-x_j)\ge -nA+BN, \qquad (2.23)$$

où N est le nombre de couple (j,k) telles que $|x_k-x_j|\le 1$. Posons φ_2 un potentiel satisfaisant les conditions suivantes :

$$\varphi_2 \text{ est continu en } 0,\quad \forall x\in B(0,1),\ 0\le\varphi_2(x)<2B \quad\text{et}\quad \forall x\in B(0,1)^c,\ \varphi_2(x)=0.$$

En écrivant φ de la façon suivante

$$\varphi=(\varphi-\varphi_2)+\varphi_2,$$

il nous reste à démontrer que le potentiel $\varphi-\varphi_2$ est stable. Soit $x_1,x_2,\dots,x_n$ une suite finie de points de $\mathbb{R}^d$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j<k\le n}(\varphi-\varphi_2)(x_k-x_j) &= \sum_{1\le j<k\le n}\varphi(x_k-x_j)-\frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le n}\varphi_2(x_k-x_j)+\frac{1}{2}n\varphi_2(0)\\ &\ge -nA+BN-\frac{1}{2}N(2B)\\ &\ge -nA.\end{aligned}$$

Le potentiel $\varphi-\varphi_2$ est donc stable et la proposition est démontrée. ■
Remarquons qu'un potentiel superstable est nécessairement strictement positif en 0. En dehors de l'origine, il peut prendre des valeurs positives et négatives; néanmoins les parties où il est négatif sont susceptibles de rompre la superstabilité. Citons maintenant un exemple de ce phénomène :
Pour $M>0,r_2>r_1>0$, on note φ_{M,r_1,r_2} la fonction continue à droite de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par la figure 2.1. Dans [52], D. Ruelle montre que pour tout $r_2>r_1>0$, le potentiel $\varphi(x)=\varphi_{11,r_1,r_2}(|x|)$ n'est pas superstable dans $\mathbb{R}^3$. De plus, tout potentiel

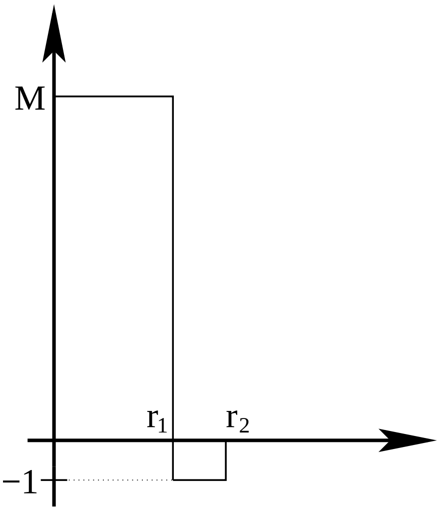

FIG. 2.1 – *Graphe de la fonction* φ_{M,r_1,r_2}

dominé par un potentiel de ce type est également non superstable. Étant donné que la partie négative de φ_{11,r_1,r_2} est très petite quand $r_2 - r_1$ est petit, cela démontre à quel point un potentiel ayant une partie négative est difficilement superstable au sens de Ruelle.

Dans [53], on trouve plusieurs conditions suffisantes pour qu'un potentiel soit superstable. Par exemple, la Proposition 1.4 [53] (voir aussi [11] et [14]) garantit la superstabilité pour des potentiels suffisamment explosifs en zéro et suffisamment décroissant à l'infini. On construit donc facilement des potentiels superstables de type "sphère dure" (i.e. il existe $R > 0$ tel que $\varphi(x) = +\infty$, pour $|x| \leq R$) ayant des parties négatives. Néanmoins, il existe des potentiels superstables bornés, à support compact et ayant une partie négative. La proposition ci-dessous exhibe un tel potentiel en dimension $d = 3$. On généralise facilement cet exemple à la dimension d quelconque.

Proposition 2.13. *Dans $\mathbb{R}^3$, le potentiel φ défini par $\varphi(x) = \varphi_{383,1.8,1.9}(|x|)$ est superstable au sens de Ruelle.*

Preuve:

Soit x un point de $\mathbb{R}^3$ appartenant donc à un certain D_k, $k \in \mathbb{Z}^3$; alors tout point $y \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant $1.8 \leq |x-y| \leq 1.9$ est contenu dans un $D_{k'} \subset B(k, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.9 + \sqrt{3}) \subset B(k, 4.5)$. Par conséquent, en notant

$$N_k = \Big\{ k' \in \mathbb{Z}^3 \text{ tel que } \exists x \in D_k \ \exists y \in D_{k'},\ 1.8 \leq |x-y| \leq 1.9 \Big\},$$

on a

$$\text{Card } N_k \leq \frac{4}{3}\pi(4.5)^3 \leq 382.$$

Soit $x_1,\ldots,x_n$ n points de $\mathbb{R}^3$ et $\gamma = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$; alors on a

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le n} \varphi_{383,1.8,1.9}(|x_i-x_j|) &\ge 383\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\gamma(D_k)^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\gamma(D_k)\sum_{k'\in N_k}\gamma(D_{k'}) \\
&\ge 383\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\gamma(D_k)^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}^3,k'\in N_k}\Big(\frac{1}{2}\gamma(D_k)^2+\frac{1}{2}\gamma(D_{k'})^2\Big) \\
&\ge (383-382)\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\gamma(D_k)^2 \\
&\ge \sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\gamma(D_k)^2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n} \varphi_{383,1.8,1.9}(|x_i-x_j|) &= -\frac{1}{2}n\varphi_{383,1.8,1.9}(0) + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n}\varphi_{383,1.8,1.9}(|x_i-x_j|) \\
&\ge -\frac{383}{2}n + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\gamma(D_k)^2. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Si on note φ_M le potentiel dans $\mathbb{R}^3$ défini par $\varphi_M(x) = \varphi_{M,1.8,1.9}(|x|)$, alors on a montré que φ_M est superstable si $M = 383$; d'après le contre-exemple évoqué précédemment, φ_M n'est pas superstable pour $M = 11$; il existe donc une frontière $11 \le M_0 \le 383$ séparant les potentiels superstables de ceux qui ne le sont pas.

Dans [53], on trouve une généralisation de la définition d'interaction superstable pour des interactions plus générales que celles par paires. Nous la présentons ci-dessous.

Définition 2.14. *Une interaction ψ est dite superstable s'il existe deux constantes $A \ge 0$ et $B > 0$ telles que, pour toute configuration finie de points $\gamma = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \ldots + \delta_{x_n}$,*

$$\sum_{\mathcal{K}\subset\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}} \psi(\mathcal{K}) \ge -nA + B\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma(D_k)^2.$$

2.3.4 Définitions de champ de Gibbs et champ de Gibbs canonique sur $\mathbb{X}$

Donnons maintenant la définition de champ de Gibbs sur $\mathbb{X}$. Parallèlement à la définition de mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$, les champs de Gibbs sur $\mathbb{X}$ sont les probabilités absolument continues par rapport au processus de Poisson avec comme famille de densitées locales, appelées spécifications locales, la famille de noyaux définie en (2.12).

Définition 2.15. *$\mathcal{G}(H,\nu)$, l'ensemble des champs de Gibbs d'hamiltonien local H et de mesure de référence Π^ν, est l'ensemble des probabilités $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$ telles que $P(\mathcal{M}_{H,\nu}(\mathbb{X})) = 1$ et telles que, pour tout $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $P-$ p.t. Γ_{Λ^c},*

$$P\big(d\Gamma_\Lambda \big| \Gamma_{\Lambda^c}\big) = \Upsilon_{\Lambda,H,\nu}(d\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c}).$$

Présentons également la classe des champs de Gibbs canoniques, qui contient celle des champs de Gibbs.

Définition 2.16. *$\mathcal{G}_c(H,\nu)$, l'ensemble des champs de Gibbs canoniques d'hamiltonien local H et de mesure de référence Π^ν, est l'ensemble des probabilités $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$ telles que $P(\mathcal{M}_{H,\nu,c}(\mathbb{X})) = 1$ et*
pour tout $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X}), n \in \mathbb{N}^*$, pour P- p.t.Γ_{Λ^c},

$$P\big(d\Gamma_\Lambda \big| \Gamma_{\Lambda^c}, \Gamma(\Lambda) = n\big) = \Upsilon_{n,\Lambda,H,\nu}(d\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c}).$$

Faisons quelques remarques sur la géométrie des ensembles $\mathcal{G}(H,\nu)$ et $\mathcal{G}_c(H,\nu)$. Il est tout d'abord intéressant de remarquer qu'ils peuvent être vide. En fait, étant donné que ces deux ensembles sont convexes, trois cas se présentent : ils peuvent être vides, réduit à un singleton ou encore avoir une infinité de points.
La proposition suivante prouve que, pour une vaste classe d'hamiltoniens locaux, il existe des champs de Gibbs associés.

Proposition 2.17 (Theorem 5.5 [53]). *Soit φ un potentiel par paires sur $\mathbb{R}^d$, superstable au sens de Ruelle, tel que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |1 - e^{-\varphi(x)}| dx < +\infty,$$

et $\varphi(x) \geq -\tilde{\varphi}(|x|)$, où $\tilde{\varphi}$ est une fonction positive décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant

$$\int_0^{+\infty} t^{d-1}\tilde{\varphi}(t)dt < +\infty.$$

Alors $\mathcal{G}(h^\varphi, z\lambda)$ est non vide pour tout $z \in \mathbb{R}^+$.

D. Ruelle précise encore ce résultat dans le sens où il démontre que, pour z petit (z est appelé activité), l'ensemble $\mathcal{G}(h^\varphi, z\lambda)$ est réduit à un singleton :

Proposition 2.18 (Theorem 5.7 [53]). *Soit φ un potentiel par paires sur $\mathbb{R}^d$, superstable au sens de Ruelle, tel que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |1 - e^{-\varphi(x)}| dx < +\infty,$$

et $\varphi(x) \geq -\tilde{\varphi}(|x|)$, où $\tilde{\varphi}$ est une fonction positive décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant

$$\int_0^{+\infty} t^{d-1}\tilde{\varphi}(t)dt < +\infty.$$

Alors pour z suffisamment petit, $\mathcal{G}(h^\varphi, z\lambda)$ est réduit à un singleton.

Il est intéressant de noter que la Proposition 2.18 ci-dessus n'implique pas que, pour z suffisament grand, $\mathcal{G}(h^\varphi,z\lambda)$ ne soit pas réduit à un singleton. Lorsque ce phénomène a lieu, on parle alors de transition de phase. Même si la transition de phase apparaît souvent en physique, il est très difficile d'en fournir des preuves mathématiques rigoureuses dans le contexte des systèmes continus. Un des rares résultats dans cette direction est celui de [34].
L'ensemble $\mathcal{G}_c(H,\nu)$ est, lui, souvent de cardinal infini. En effet, il suffit que pour deux réels strictement positifs z_1 et z_2, les ensembles $\mathcal{G}(H,z_1\nu)$ et $\mathcal{G}(H,z_2\nu)$ soient non vides pour que $\mathcal{G}_c(H,\nu)$ soit de cardinal infini, puisque d'après le paragraphe 3.1.1, $\mathcal{G}_c(H,\nu)$ contient tous les mélanges des champs de Gibbs de $\mathcal{G}(H,z_1\nu)$ et de $\mathcal{G}(H,z_2\nu)$.

2.4 Contrôle de la répartition des points dans $\mathbb{R}^d$ et de l'énergie associée

Dans cette section, nous allons présenter diverses notions ou quantités permettant de contrôler la répartition des points d'une configuration dans $\mathbb{R}^d$ et de l'énergie associée. Il existe dans la littérature différentes techniques pour maîtriser la géométrie des mesures ponctuelles γ; ci-dessous, nous citons celles que nous utilisons et les comparons avec d'autres existantes. Enfin dans le dernier paragraphe nous analysons la loi de ces quantités sous certains champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$.

2.4.1 Fluctuation logarithmique d'énergie

Dans ce paragraphe, nous allons définir la fluctuation logarithmique d'énergie d'une configuration γ. Cette notion fut introduite par R. Dobrushin et J. Fritz dans [12]. Dans [16], J. Fritz l'utilise pour contrôler la répartition des particules au cours de la diffusion de type gradient que nous présentons dans le chapitre 4. Nous reviendrons sur ces résultats dans ce même chapitre.
On fixe jusqu'à la fin du chapitre 2 un potentiel φ de $\mathbb{R}^d$, superstable et à support compact. Soit $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $l \in \mathbb{Z}^d$, et $\rho > 0$; on note

$$\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l,\rho) = \sum_{x\in\gamma:|x-l|\le\rho} \Bigg(1 + A + \sum_{y\in\gamma\backslash x:|y-l|\le\rho} \varphi(x-y)\Bigg),$$

où A est la constante de superstabilité de φ définie en (2.19). Remarquons que $\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l,\rho)$ est une valeur positive et qu'elle domine le nombre de points de la configuration γ dans la boule de centre l et de rayon ρ ainsi que l'énergie de γ restreinte à cette même boule. En considérant la fonction

$$g(x) = (1 + \ln(1 + x))^{\frac{1}{d}}, \tag{2.24}$$

on définit la fluctuation logarithmique d'énergie par

$$\mathcal{E}_\varphi(\gamma) = \sup_{l\in\mathbb{Z}^d}\sup_{r\in\mathbb{N}^*}\Big[\big(rg(|l|)\big)^{-d}\,\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l,rg(|l|))+1\Big]. \tag{2.25}$$

$\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$ est ainsi une borne uniforme en espace de la quantité $\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l,\rho)$ renormalisée; elle permet de contrôler la non accumulation des points et de l'énergie dans $\mathbb{R}^d$. On note

$$\mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d) = \Big\{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } \mathcal{E}_\varphi(\gamma)<+\infty\Big\}.$$

Ce sont les mesures ponctuelles dites φ-tempérées – au sens de Fritz–.
Une probabilité μ de $\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ est dite φ-tempérée si $\mu(\mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d))=1$.
On déduit facilement de la définition de $\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$ le lemme suivant :

Lemme 2.19. *Soit $\gamma\in\mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)$; alors γ vérifie la propriété de croissance suivante :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \gamma\big(B(0,n)\big)\le n^d\mathcal{E}_\varphi(\gamma).$$

De plus on a un contrôle de la dispersion des points dans l'espace :

$$\forall k\ge 2,\qquad \theta_k(\gamma)\ge\left(\frac{k-1}{\mathcal{E}_\varphi(\gamma)}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

2.4.2 Comparaison de différentes définitions de “tempéré”

Il existe d'autres définitions de mesures ponctuelles tempérées, le terme “tempéré” signifiant généralement “physiquement raisonnable”. Rappelons la définition introduite par D. Ruelle (page 149 [53]) et comparons-la avec celle provenant de J. Fritz et que nous venons d'exposer.
Pour $k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d$, on note $|k|=\max_{i=1,\dots,d}|k_i|$;
une mesure ponctuelle γ est dite tempérée au sens de Ruelle si

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d,|k|\le n}\gamma(D_k)^2<+\infty. \tag{2.26}$$

Remarquons que cette définition de mesure ponctuelle tempérée ne dépend d'aucun potentiel φ; elle est dans un certain sens plus universelle. Pour simplifier la comparaison, nous allons supposer $\varphi=0$; nous cherchons donc à comparer la condition (2.26) et la condition $\mathcal{E}_0(\gamma)<+\infty$. Qualitativement, on peut déjà noter des différences. En effet, dans l'équation (2.25) on considère une borne uniforme du nombre de points dans des ensembles appartenant à une grande famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ alors que dans l'équation (2.26), on considère une borne uniforme des carrés du nombre de points – ce qui semble plus contraignant – mais pris uniformément par rapport à une famille plus petite de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$. Les deux notions de "tempéré" ne peuvent pas se hiérarchiser l'une par rapport à l'autre, tout du moins pour $\varphi_0 \equiv 0$; donnons en une preuve dans la proposition suivante.

Proposition 2.20. *Il existe γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telles que γ_1 soit tempérée au sens de Ruelle sans être φ_0-tempérée et telles que γ_2 soit φ_0-tempérée sans l'être au sens de Ruelle.*

Preuve:
On se place dans le cas $d = 1$, les preuves se généralisant facilement à d quelconque. Etant donné deux suites à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où l_n est supposée strictement croissante, on peut construire une mesure ponctuelle γ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, γ ait N_n points dans D_{l_n} et 0 point dans tous les autres D_k. En choisissant astucieusement les suites l_n et N_n, on construit les mesures ponctuelles γ_1 et γ_2 par ce procédé.
Pour γ_1, on pose $l_n = n^2$ et $N_n = [\sqrt{n}]$,où [.] est la fonction partie entière. Vérifions que γ_1 est tempérée au sens de Ruelle;

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d,|k|\leq n} \gamma(D_k)^2 &= \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{l_n} \sum_{k=1}^{n} \gamma(D_{l_k})^2 \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} n \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Par contre, γ_1 n'est pas φ_0-tempérée car

$$\mathcal{E}_0(\gamma_1) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{N_n}{g(l_n)} = +\infty.$$

Le choix de l_n et N_n pour la construction de γ_2 étant plus complexe, démontrons tout d'abord le lemme suivant

Lemme 2.21. *Il existe une suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

$$N_n = [\frac{1}{2} g(\sum_{k=0}^{n-1} N_k)],$$

où [.] est la fonction partie entière. De plus, cette suite N_n est croissante et tend vers l'infini.

Preuve:
On construit N_n par récurrence en initialisant $N_0 = 0$ et $N_1 = 1$ et en passant de

N_n à N_{n+1} par l'hypothèse de récurrence. Il est alors facile de voir que la suite ainsi construite est croissante et tend vers l'infini. ■

Pour construire γ_2 on choisit N_n comme dans le lemme 2.21 et $l_n = \sum_{k=1}^n N_k$. En utilisant simplement le fait que N_n tend vers l'infini, on montre que (2.26) n'est pas satisfaite pour γ_2 car

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sum_{k=1}^n N_k^2}{l_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sum_{k=1}^n N_k^2}{\sum_{k=1}^n N_k} = +\infty;$$

γ_2 n'est donc pas tempérée au sens de Ruelle.

Montrons qu'elle est φ_0-tempérée : pour toute boule $B(x,\rho)$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x > 0$ et $\rho > g(l)$, on pose

$$n_0 = \inf\Big(k \text{ tel que } D_{l_k} \cap B(x,\rho) \neq \emptyset\Big),$$

$$n_1 = \sup\Big(k \text{ tel que } D_{l_k} \cap B(x,\rho) \neq \emptyset\Big).$$

D'après la construction de la suite N_n, et donc de l_n, les entiers n_0 et n_1 sont bien définis et $n_1 > n_0$. De plus, on a les inégalités suivantes

$$\gamma_2(B(l,\rho)) \leq \sum_{k=n_0}^{n_1} N_k,$$

$$2\rho \geq l_{n_1} - l_{n_0} \geq \sum_{k=n_0+1}^{n_1} N_k.$$

Il est alors facile de voir que

$$\frac{1}{2\rho}\gamma_2(B(x,\rho)) \leq 2.$$

On en déduit aisément que $\mathcal{E}_{\varphi_0}(\gamma_2) \leq 2$. ■

2.4.3 Champ de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ φ-tempéré

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer une estimée de la queue de la loi de $\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$ sous certains champs de Gibbs de $\mathbb{R}^d$. On rappelle que φ est un potentiel de $\mathbb{R}^d$ superstable et à support compact. Nous montrerons au passage que beaucoup de champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ sont φ-tempérés. Énonçons tout d'abord un résultat dû à D. Ruelle.

Lemme 2.22 (Corollaire 2.8 [53]). *Soit μ un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(h^\psi,\lambda)$ où ψ est une interaction générale superstable et inférieurement régulière (voir [53] page 131, pour la définition d'interaction inferieurement régulière); alors il existe deux* *constantes a_1 et b_1 telles que, pour tout sous-ensemble fini Δ de $\mathbb{Z}^d$ et tout $u > 0$, on ait l'inégalité suivante :*

$$\mu\Big(\Big\{\gamma,\ \frac{1}{Card\,\Delta}\sum_{k\in\Delta}\gamma(D_k)^2 \geq u\Big\}\Big) \leq e^{-(au+b)card\,\Delta}. \tag{2.27}$$

Le lemme 2.22 ainsi que le lemme de Borel-Cantelli permettent de conclure que tout champ de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant aux hypothèses du lemme 2.22 est tempéré au sens de Ruelle. Nous allons montrer dans la proposition suivante qu'il est aussi φ-tempéré. De plus, nous démontrons une estimée de la queue de la loi de la fluctuation logarithmique d'énergie.

Proposition 2.23. *Soit μ un champ de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ de $\mathcal{G}(h^\psi,\lambda)$ où ψ est une interaction générale superstable et inférieurement régulière; alors il existe deux constantes strictement positives a_2 et b_2 telles que, pour tout $u \geq 0$,*

$$\mu\Big(\Big\{\gamma,\ \mathcal{E}_\varphi(\gamma) \geq u\Big\}\Big) \leq a_2 e^{-b_2 u}.$$

En particulier, μ est φ-tempérée (voir paragraphe 2.4.1).

Preuve :

Soit $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, x un point de γ et $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $x \in D_k$; comme φ est à support compact il existe un ensemble fini $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ de cardinal C_0 indépendant de x tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ n'appartenant pas à $\cup_{k'\in\Delta} D_{k+k'}$, $\varphi(x-y) = 0$.

Pour tout $l \in \mathbb{Z}^d$ et $\rho \geq 1$, il existe un sous-ensemble minimal $E_{l,\rho}$ de $\mathbb{Z}^d$ tel que

$$B(l,\rho) \subset \bigcup_{k\in E_{l,\rho}} D_k.$$

On en déduit les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l,\rho) &\leq \sum_{k\in E_{l,\rho}}\Big((1+A)\gamma(D_k) + \|\varphi\|_\infty \sum_{k'\in(k+\Delta)\cap E_{l,\rho}} \gamma(D_k)\gamma(D_{k'})\Big)\\
&\leq \sum_{k\in E_{l,\rho}}\Big((1+A)\gamma(D_k)^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_\infty \sum_{k'\in(k+\Delta)\cap E_{l,\rho}} \Big(\gamma(D_k)^2+\gamma(D_{k'})^2\Big)\Big)\\
&\leq \sum_{k\in E_{l,\rho}}\big(1+A+C_0\|\varphi\|_\infty\big)\gamma(D_k)^2
\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.22, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que pour tout $u \geq 0$,

$$\mu\Big(\frac{\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l,\rho)}{\rho^d} \geq u\Big) \leq e^{\rho^d(C_2-C_1u)}. \tag{2.28}$$

Analysons maintenant la queue de la variable aléatoire $\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\varphi(\gamma) &= \sup_{l\in\mathbb{Z}^d}\sup_{r\in\mathbb{N}^*}\left(\big(rg(|l|)\big)^{-d}\,\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l,rg(|l|))+1\right)\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\rho_n^{-d}\,\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l_n,\rho_n)+1\right)\end{aligned}$$

où la suite $(l_n,\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que les deux ensembles suivant coïncident

$$\Big\{B(l,rg(|l|)),\, l\in\mathbb{Z}^d,\, r\in\mathbb{N}^*\Big\}=\Big\{B(l_n,\rho_n), n\in\mathbb{N}^*\Big\}$$

et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit croissante.
Donnons une minoration de ρ_n. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}&\Big\{B(l,rg(|l|)),l\in\mathbb{Z}^d\ r\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } rg(|l|)\le\rho_n\Big\}\\ \subset &\bigcup_{1\le r\le\rho_n}\Big\{B(l,rg(|l|)),l\in\mathbb{Z}^d \text{ tel que } |l|\le g^*(\rho_n)\Big\},\end{aligned}$$

où g^* est la fonction inverse de g. On en déduit qu'il existe une constante C_3 telle que, pour n suffisamment grand, on ait

$$\text{Card}\Big\{B(l,rg(|l|)),l\in\mathbb{Z}^d\ r\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } rg(|l|)\le\rho_n\Big\}\le C_3 g^*(\rho_n)^{d+1};$$

ainsi, puique $C_3g^*(\rho_n)^{d+1}$ est plus grand que n, cela entraine

$$\begin{aligned}\rho_n &\ge g\left(\left(\frac{n}{C_3}\right)^{\frac{1}{d+1}}\right)\\ &\ge C_4\ln(C_5 n)^{\frac{1}{d}},\end{aligned}\tag{2.29}$$

où C_4 et C_5 sont des constantes positives. En réajustant les constantes C_4 et C_5, on montre que la formule (2.29) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Des formules (2.28) et (2.29), on déduit pour $u\ge\frac{C_2}{C_1}$

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge1}\mu\Big(\frac{\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l_n,\rho_n)}{\rho_n^d}\ge u\Big) &\le \sum_{n\ge1} e^{\rho_n^d(C_2-C_1u)}.\\ &\le \sum_{1\le n\le\frac{1}{C_5}} e^{C_2-C_1u}+\sum_{n\ge\left[\frac{1}{C_5}\right]+1} e^{C_4^d\ln(C_5n)(C_2-C_1u)}\\ &\le \frac{e^{C_2}}{C_5}e^{-C_1u}+\sum_{n\ge\left[\frac{1}{C_5}\right]+1}(C_5n)^{C_4^d(C_2-C_1u)}.\end{aligned}$$

Pour $u \geq \frac{C_2}{C_1} + \frac{2}{C_1 C_4^d}$, on a

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n\geq 1} \mu\Big(\frac{\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l_n,\rho_n)}{\rho_n^d} \geq u\Big) \\
\leq\ & \frac{e^{C_2}}{C_5} e^{-C_1 u} + \Big(C_5\big([\frac{1}{C_5}]+1\big)\Big)^{C_4^d(C_2-C_1 u)} \sum_{n\geq \left[\frac{1}{C_5}\right]+1} \Big(\frac{n}{[\frac{1}{C_5}]+1}\Big)^{-2} \\
\leq\ & a_2 e^{-b_2 u},
\end{aligned}
$$

où a_2 et b_2 sont des constantes positives. On en déduit, pour $u \geq \frac{C_2}{C_1} + \frac{2}{C_1 C_4^d}$,

$$
\begin{aligned}
\mu(\mathcal{E}_\varphi(\gamma) \geq u) &\leq \mu\left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\rho_n^{-d}\, \overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l_n,\rho_n) + 1\Big) \geq u\right) \\
&\leq \sum_{n\geq 1} \mu\Big(\frac{\overline{\mathcal{E}_\varphi}(\gamma,l_n,\rho_n)}{\rho_n^d} \geq u\Big) \\
&\leq a_2 e^{-b_2 u}.
\end{aligned}
$$

On généralise l'inégalité à tout $u \geq 0$ en réajustant les constantes a_2 et b_2. ■
Dans [12],[13],[16], J. Fritz prouve que de vastes classes de champs de Gibbs sont φ-tempérées pour des potentiels φ divers ; on y trouve notamment le cas où φ est borné et à support compact, ou encore le cas où φ est dégénéré en 0 (explosion en 0, sphère dure, etc.). L'intérêt de la Proposition 2.23 réside donc dans l'estimée précise de la queue de la loi de $\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$, ce que J. Fritz n'explicite pas ; il se contente de démontrer que la variable $\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$ est finie presque-sûrement. Dans le chapitre 4, nous utiliserons ce résultat pour un potentiel φ régulier et à support compact. Nous n'avons donc pas besoin de plus de généralité sur φ. Néanmoins, il semble envisageable de pouvoir obtenir des estimées similaires pour des potentiels φ plus généraux.

2.5 Contrôle uniforme des trajectoires de $\mathcal{C}$ et de leurs fluctuations

Dans cette section, de façon analogue à la section précédente, nous allons présenter deux quantités permettant de contrôler la répartition des trajectoires d'une configuration Γ de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ et leurs fluctuations : la fluctuation logarithmique d'énergie uniforme et des fonctions de fluctuations pondérées. Ensuite, nous les comparerons.

2.5.1 Fluctuation logarithmique d'énergie uniforme

La fluctuation logarithmique d'énergie uniforme est une borne uniforme en temps de la fluctuation logarithmique d'énergie de $\Gamma(t)$, $t \in [0,1]$.

Définition 2.24. *Soit $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$; on appelle fluctuation logarithmique d'énergie uniforme de Γ la quantité suivante :*

$$\|\Gamma\|_{\mathcal{E}}^{\varphi} = \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{E}_{\varphi}(\Gamma(t)).$$

Un élément Γ de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est dit φ-tempéré si $\|\Gamma\|_{\mathcal{E}}^{\varphi} < +\infty$; on note $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\varphi}(\mathcal{C})$ l'ensemble des mesures ponctuelles φ-tempérées de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ et une probabilité P sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est dite tempérée si $P(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\varphi}(\mathcal{C})) = 1$. Donnons quelques propriétés élémentaires des mesures ponctuelles de $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\varphi}(\mathcal{C})$.

Lemme 2.25. *Soit $\Gamma \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\varphi}(\mathcal{C})$; alors Γ vérifie la propriété de croissance uniforme suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sup_{t\in[0,1]} \Gamma(t)\big(B(0,n)\big) \leq n^d \|\Gamma\|_{\mathcal{E}}^{\varphi}.$$

De plus on a un contrôle uniforme en temps de la dispersion des points dans l'espace :

$$\forall t \in [0,1], \forall k \geq 2, \qquad \theta_k(\Gamma(t)) \geq \left(\frac{k-1}{\mathcal{E}_{\varphi}(\Gamma(t))}\right)^{\frac{1}{d}} \geq \left(\frac{k-1}{\|\Gamma\|_{\mathcal{E}}^{\varphi}}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Preuve :
C'est une conséquence immédiate du lemme 2.19. ■
La fluctuation logarithmique d'énergie uniforme permet un bon contrôle de la géométrie des configurations $\Gamma(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Par contre, elle ne donne pas directement d'informations sur les trajectoires de Γ, notamment sur les fluctuations de celles-ci. Les fonctions de fluctuations pondérées que l'on va définir dans le paragraphe suivant sont, quant à elles, beaucoup plus riches en informations trajectorielles.

2.5.2 Fonctions de fluctuation pondérée ζ_η et $\zeta_{\log}$

Nous allons introduire une famille de fonctions ζ_η, $\eta \in]0,1[$, et une fonction $\zeta_{\log}$ afin de contrôler les fluctuations des trajectoires des processus ponctuels de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. L'intérêt d'introduire plusieurs fonctions de fluctations pondérées est, d'une part, de pouvoir calibrer précisément quel est le niveau de fluctuation des trajectoires d'un processus ponctuel donné et, d'autre part, de pouvoir imposer a priori des hypothèses optimales sur les fluctuations d'un processus ponctuel que l'on veut étudier.

Définition 2.26. *On définit les fonctions de fluctuation pondérée de la façon suivante : soit* $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$*,*

$$\begin{aligned}\zeta_\eta(\Gamma) &= \sup_{X\in\Gamma}\sup_{0\le t\le 1}\frac{|X(t)-X(0)|}{(1+|X(0)|)^\eta}, \quad \eta\in]0,1[,\\ \zeta_{\log}(\Gamma) &= \sup_{X\in\Gamma}\sup_{0\le t\le 1}\frac{|X(t)-X(0)|}{1+\ln(1+|X(0)|)}.\end{aligned}$$

Ces fonctions de fluctuation permettent, lorsqu'elles sont finies, ce qui de manière générale n'est pas du tout assuré, de contrôler l'ordre de grandeur des fluctuations des trajectoires en fonction de leur condition initiale. Dans le cas de ζ_η, l'ordre de grandeur est polynomial en la condition initiale et dans le cas de $\zeta_{\log}$, l'ordre de grandeur est logarithmique en la condition initiale.
Remarquons que les quantités $\zeta_\eta(\Gamma)$ et $\zeta_{\log}(\Gamma)$ ne donnent aucune information sur la position relative des points de $\Gamma(t)$, $t\in[0,1]$.

2.5.3 Comparaison de ces notions

Par la suite, nous supposerons souvent la double hypothèse suivante : $\|\Gamma\|_{\mathcal{E}}^{\varphi}<+\infty$ et $\max\big(\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)),\zeta_\eta(\Gamma)\big)<+\infty$; le propos de ce paragraphe est de montrer que l'une des deux hypothèses n'entraîne pas systématiquement l'autre. Dans la proposition suivante, on prouve que l'une peut-être vraie sans que l'autre le soit et vice et versa.
Proposition 2.27. *Il existe au moins deux configurations* Γ_1 *et* Γ_2 *dans* $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ *telles que*

$$\begin{gathered}\|\Gamma_1\|_{\mathcal{E}}^{\varphi}<+\infty \qquad \textit{et} \qquad \zeta_\eta(\Gamma_1)=+\infty,\\ \|\Gamma_2\|_{\mathcal{E}}^{\varphi}=+\infty \qquad \textit{et} \qquad \max\big(\mathcal{E}_\varphi(\Gamma_2(0)),\zeta_\eta(\Gamma_2)\big)<+\infty.\end{gathered}$$

Preuve :
On note r_θ, $\theta\in[0,2\pi]$, la rotation dans $\mathbb{R}^d$ de centre l'origine et d'angle θ. Soit γ une configuration tempérée de $\mathbb{R}^d$ ($\mathcal{E}_\varphi(\gamma)<+\infty$); on construit Γ_1 de la façon suivante :

$$\Gamma_1(t)=r_{\pi t}(\gamma).$$

Γ_1 est trivialement tempérée dans $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, par contre la fluctuation pondérée d'une trajectoire $X\in\Gamma$ étant égale à $\frac{2|X(0)|}{(1+|X(0)|)^\eta}$, $\zeta_\eta(\Gamma_1)$ est toujours égale à l'infini, et ceci quelque soit $\eta\in]0,1[$.
Pour construire Γ_2, on considère le cas particulier $d=1$ et $\varphi=0$; il sera facile de généraliser cet exemple au cas général.
On note I_n, $n\in\mathbb{N}^*$ l'intervalle suivant $[n^\alpha,n^\alpha+(1+n^\alpha)^\eta]$, où $\alpha=\frac{2}{1-\eta}$. Il existe alors un entier n_0 tel que pour tout $n\neq m$ et $n,m\ge n_0$, $I_n\cap I_m=\emptyset$. Alors on pose $\Gamma_2=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\delta_{X_k}$ où $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est la suite de trajectoires définie par

$$\begin{cases} X_k(t)=k & \text{si } k\notin\cup_{n\ge n_0}I_n\\ X_k(t)=n^\alpha+(1-t)(k-n^\alpha) & \text{si } k\in I_n(n\ge n_0).\end{cases}$$

En d'autres termes, la trajectoire X_k part de k puis elle est constante si k n'appartient pas à un des I_n pour n assez grand et est linéaire jusqu'à n^α si k appartient à I_n, pour $n \geq n_0$. Il est facile de voir que $\zeta_\eta(\Gamma_2) = 1$; par contre $\|\Gamma_2\|^0_{\mathcal{E}} = +\infty$; en effet, la configuration $\Gamma_2(1)$ a exactement $[(1+n^\alpha)^\eta]$ points en n^α, et donc

$$\|\Gamma_2\|^0_{\mathcal{E}} \geq \mathcal{E}_\varphi(\Gamma_2(1)) \geq \sup_n \frac{[(1+n^\alpha)^\eta]}{g(n^\alpha)} = +\infty. \qquad \blacksquare$$

Chapitre 3

Diverses caractérisations de champs gibbsiens sur $\mathbb{R}^d$ puis sur $\mathcal{C}$. Relations entre ces notions.

Dans ce chapitre, nous allons présenter diverses caractérisations de champs de Gibbs et champs de Gibbs canoniques. Nous commencerons par celles valables sur un espace $\mathbb{X}$ polonais quelconque. Nous donnerons ainsi des caractérisations par la mesure de Campbell des champs de Gibbs et champs de Gibbs canoniques, après avoir caractérisé ces derniers par une propriété de mélange. Ensuite, dans le cas particulier où $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$, nous établirons des caractérisations de type infinitésimal à l'aide de formules d'intégration par parties sous la mesure de Campbell. Il nous faudra alors distinguer les deux cas. Dans le paragraphe 3.2.2, on traitera le cas de $\mathbb{R}^d$ puis dans le paragraphe 3.2.3 celui de $\mathcal{C}$. Enfin, la dernière section de ce chapitre sera consacrée à diverses propriétés permettant de relier les notions de champ de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ ou sur $\mathcal{C}$ et celle de mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$.

3.1 Champ gibbsien sur $\mathbb{X}$ quelconque

Dans cette section, nous allons présenter des résultats valables pour un espace polonais $\mathbb{X}$ quelconque, étant entendu que par la suite, nous les appliquerons au cas particulier où $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$. Dans un premier temps nous présentons une caractérisation des champs de Gibbs canoniques comme des mélanges de champs de Gibbs à activité aléatoire. Puis, dans un deuxième temps, nous exposerons une caractérisation de champs de Gibbs et champs de Gibbs canoniques via leur mesure de Campbell.

3.1.1 Champ de Gibbs canonique en tant que mélange de champs de Gibbs

Soit ν une mesure de référence σ-finie de $\mathbf{M}(\mathbb{X})$ et H un hamiltonien local sur $\mathbb{X}$; soit ϑ une probabilité sur $\mathbb{R}^+$, et $(P^z)_{z\in\mathbb{R}^+}$ une famille de champs de Gibbs sur $\mathcal{C}$ telle que $P^z \in \mathcal{G}(H,z\nu)$. Il est alors clair que la probabilité

$$P = \int_{\mathbb{R}^+} P^z \vartheta(dz), \tag{3.1}$$

est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H,\nu)$. Réciproquement, sous certaines conditions topologiques sur $\mathcal{G}_c(H,\nu)$ (voir [21] et théorèmes 2.1 et 2.2 de [43]), tout champ de Gibbs canonique P de $\mathcal{G}_c(H,\nu)$ admet la représentation (3.1).
Ainsi tout champ de Gibbs canonique peut être interprété comme un champ de Gibbs en milieu aléatoire, plus précisément à activité aléatoire.
La caractérisation ci-dessus donne du relief à la notion de champ de Gibbs canonique. En effet, supposons que l'on exhibe une propriété satisfaite par des champs de Gibbs et que de plus cette propriété soit linéaire en la mesure; ce qui signifie que $\alpha P_1 + \beta P_2$ vérifie cette propriété pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$, dès que P_1 et P_2 satisfont cette même propriété. Alors, l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{X}$ satisfaisant cette propriété contient au moins la classe des champs de Gibbs canoniques. La réversibilité des mesures pour les dynamiques de type gradient, traitée au chapitre 5, sera un parfait exemple de propriété linéaire en la mesure et satisfaite par les champs de Gibbs. On y montrera d'ailleurs que les champs de Gibbs canoniques correspondent exactement à la classe des mesures réversibles.
Dans le paragraphe qui suit, nous donnons explicitement la mesure de Campbell des champs de Gibbs de $\mathcal{G}(H,\nu)$; il sera alors facile d'obtenir par mélange, la mesure de Campbell des champs de Gibbs canoniques. Nous montrons également que la structure de la mesure de Campbell caractérise entièrement les champs de Gibbs et les champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{X}$.

3.1.2 Caractérisation d'un champ de Gibbs par sa mesure de Campbell

Dans la Proposition 2.4 du chapitre 2, on a rappelé que la structure produit de la mesure de Campbell caractérise les processus de Poisson (champs de Gibbs sans interaction, H=0). Il existe une généralisation importante de ce résultat au cas avec interaction due à X.X. Nguyen et H. Zessin ([41]); ils y démontrent que P est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(H,\nu)$ si et seulement si

$$P(\mathcal{M}_{H,\nu}(\mathbb{X})) = 1, \qquad C_P^! = \exp(-H)\,\nu\otimes P. \tag{3.2}$$

Par la suite, nous utiliserons d'avantage la propriété suivante, plus faible que (3.2) :

$$C_P^! \sim \nu \otimes P. \tag{3.3}$$

En effet, la propriété (3.3) est équivalente au fait qu'il existe une fonction $\tilde{H}$ quelconque telle que

$$C_P^! = \exp(-\tilde{H})\, \nu \otimes P; \tag{3.4}$$

l'intérêt de (3.3) par rapport à (3.2) réside dans le fait que $\tilde{H}$ n'est pas à priori un hamiltonien local, ce qui signifie que $\tilde{H}$ ne vérifie pas nécessairement la propriété d'additivité (2.10) et que P n'est pas à priori à support dans $\mathcal{M}_{H,\nu}$. L'hypothèse $P(\mathcal{M}_{H,\nu}) = 1$ étant très contraignante, il sera indispensable, par la suite, de pouvoir s'en passer. C'est pourquoi nous présentons la caractérisation suivante due à E. Glötzl, qui améliore les résultats de X.X. Nguyen et H. Zessin.

Proposition 3.1 (Satz 1, [26]). *Soit $\tilde{H}$ une fonction mesurable de $\mathbb{X} \times \mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$, ν une mesure de référence de $\mathbf{M}(\mathbb{X})$ et P une probabilité sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$; alors, P satisfait*

$$C_P^! = \exp(-\tilde{H})\, \nu \otimes P \tag{3.5}$$

si et seulement si $\tilde{H}$ est $\nu \otimes P$-p.s égale à un hamiltonien local et $P \in \mathcal{G}(\tilde{H},\nu)$.

3.1.3 Caractérisation d'un champ de Gibbs canonique par sa mesure de Campbell

D'après la Proposition 3.1, il est facile de voir que pour tout champ de Gibbs canonique P de $\mathcal{G}_c(H,\nu)$ admettant la représentation de mélange (3.1) on a

$$\begin{aligned} C_P^! &= \int_{\mathbb{R}^+} C_{P^z}^! \vartheta(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \exp(-H)\; z\nu \otimes P^z\, \vartheta(dz) \\ &= \exp(-H)\; \nu \otimes Q, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où Q est la mesure sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ égale à $\int_{\mathbb{R}^+} zP^z\vartheta(dz)$. Réciproquement, on peut montrer que toute probabilité P sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ à support dans $\mathcal{M}_{H,\nu,c}$ satisfaisant (3.6) pour une mesure Q quelconque sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$, est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H,\nu)$. Ce résultat se démontre en utilisant la caractérisation de H.-O. Georgii des champs de Gibbs canoniques ([22], Théorème1). Nous ne rentrons pas dans les détails de cette démonstration car nous allons exposer dans la Proposition 3.2 un résultat plus fort. Comme dans le cas des champs de Gibbs, l'hypothèse $P(\mathcal{M}_{H,\nu,c}) = 1$ est trop contraignante dans le cadre de ce travail. Nous allons donc présenter un résultat analogue à la Proposition 3.1.

Supposons qu'il existe une fonction $\tilde{H}$ mesurable de $\mathbb{X} \times \mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$ et Q une mesure sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ telles que

$$C_P^! \quad = \quad \exp(-\tilde{H})\nu \otimes Q; \tag{3.7}$$

il est clair que l'on peut remplacer dans le membre de droite le couple $(\tilde{H},Q)$ par le couple $(\tilde{H}',Q')$ défini par

$$\tilde{H}'(X,\Gamma) = \tilde{H}(X,\Gamma) + G(\Gamma), \quad Q' = e^G Q,$$

où G est une fonction mesurable de $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'équation (3.7) ne garantit pas que la fonction $\tilde{H}$ soit un hamiltonien local, ce qui est pourtant le cas de l'équation (3.5). On en déduit donc que le meilleur résultat possible serait que l'équation (3.7) implique l'existence d'une fonction G telle que P soit un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(\tilde{H}(X,\Gamma) + G(\Gamma),\nu)$. Ce résultat a été démontré par A. Wakolbinger et G. Eder; nous l'énonçons dans la proposition suivante.

Proposition 3.2 (Theorem 2.10, 2.11 et 5.6 [57]). *Soit $\tilde{H}$ une fonction mesurable de $\mathbb{X} \times \mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$, ν une mesure de référence de $\mathbf{M}(\mathbb{X})$ et P une probabilité sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$; alors, il existe une mesure Q sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ tel que*

$$C_P^! = \exp(-\tilde{H})\, \nu \otimes Q$$

si et seulement s'il existe une fonction G de $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\tilde{H}'(X,\Gamma) := \tilde{H}(X,\Gamma) + G(\Gamma)$ soit $\nu \otimes Q$-p.s égale à un hamiltonien local et $P \in \mathcal{G}_c(\tilde{H}',\nu)$.

La fonction G qui apparaît dans la proposition précédente est dans un certain sens que l'on va préciser ci-dessous, unique. En effet, supposons qu'il existe deux fonctions G_1 et G_2 de $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\tilde{H}(X,\Gamma) + G_1(\Gamma)$ et $\tilde{H}(X,\Gamma) + G_2(\Gamma)$ soient $\nu \otimes Q$-p.s égales à un hamiltonien local; alors d'après la propriété d'additivité on a que $G_1 - G_2$ est constante sur les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ définie en (2.15) et par conséquent d'après le lemme 2.9 les hamiltoniens $\tilde{H}(X,\Gamma) + G_1(\Gamma)$ et $\tilde{H}(X,\Gamma) + G_2(\Gamma)$ définissent les mêmes noyaux de probabilité. G_1 et G_2 ne sont donc par nécessairement égales, mais les spécifications locales sous-jacentes des champs de Gibbs canoniques le sont. Par exemple, si la fonction $\tilde{H}$ de la Proposition 3.2 est un hamiltonien local, alors on peut choisir la fonction G égale à 0.

3.2 Caractérisation par une formule d'intégration par parties sous la mesure de Campbell

Dans cette section nous allons donner une caractérisation des champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{C}$ grâce à une formule d'intégration par parties satisfaite sous la mesure de Campbell. L'utilisation d'opérateurs de dérivation nous contraint à considérer des mesures de référence régulières et même très particulières. Nous allons les expliciter dans le paragraphe suivant et définir également les opérateurs considérés ainsi que les classes de fonctions et fonctionnelles sur lesquelles ils agissent.

3.2.1 Définitions et premières propriétés

Dans toute cette section, φ désigne un potentiel superstable à support compact. Les mesures de référence pour les processus de Poisson - et donc pour les champs de Gibbs associés - sont la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$ et sur $\mathcal{C}$ la mesure de Wiener ϖ^λ à condition initiale la mesure de Lebesgue λ.
Une fonction F de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$ est dite localement dans $L^2(\mathbb{X},\nu)$ si pour tout $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, la restriction de F à Λ appartient à $L^2(\mathbb{X}_\Lambda,\nu_\Lambda)$; on note alors $F \in L^2_{loc}(\mathbb{X},\nu)$.
On note $\mathbf{E}$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{E} = \Big\{ g : [0,1] \to \mathbb{R}^d \;\Big|\; g = u_1 1\!\!1_{[0,t_1[} + u_2 1\!\!1_{[t_1,t_2[} + \ldots + u_n 1\!\!1_{[t_n,1]} \Big\}.$$

$\mathbf{F}_b$ désigne l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$ nulles dès que $|x|$ ou $\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$ est au voisinage de l'infini, et dont la dérivée en x existe et est bornée :

$$\mathbf{F}_b = \left\{ f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists M,M' \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall (x,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \\ |f(x,\gamma)| \leq M,\ |\nabla_x f(x,\gamma)| \leq M \\ \text{et } f(x,\gamma) = 0 \text{ dès que } |x| \geq M' \text{ ou } \mathcal{E}_\varphi(\gamma) \geq M'. \end{array} \right\}$$

$\mathcal{W}$ désigne quant à lui l'ensemble des fonctionnelles de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ du type $f(X(0),X(t_1),\ldots,X(t_n))$, où f est une fonction de classe C^1 à support compact :

$$\mathcal{W} = \left\{ F : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists f \in C^1_K\big((\mathbb{R}^d)^{n+1},\mathbb{R}\big) \text{ telle que} \\ F(X) = f(X(0),X(t_1),\ldots,X(t_n)) \end{array} \right\},$$

où $C^1_K\big((\mathbb{R}^d)^{n+1},\mathbb{R}\big)$ désigne les fonctions de classe C^1 à support compact de $(\mathbb{R}^d)^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$.
Plus généralement, $\overline{\mathcal{W}}$ est l'ensemble des fonctionnelles de $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$ dans $\mathbb{R}$ du type $\overline{f}(X(0),X(t_1),\ldots,X(t_n),\Gamma)$ où $\overline{f}$ est une fonction bornée, nulle dès que $|X(0)|,|X(t_1)|,\ldots,|X(t_n)|$ ou $\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0))$ est au voisinage de l'infini, et dont les dérivées par rapport à ses $(n+1)$-premières variables existent et sont bornées :

$$\overline{\mathcal{W}} = \left\{ F : \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists f \in \overline{C}^1_K\big((\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathcal{M}(\mathcal{C}),\mathbb{R}\big) \text{ telle que} \\ F(X,\Gamma) = f(X(0),X(t_1),\ldots,X(t_n),\Gamma) \end{array} \right\},$$

où $\overline{C}^1_K\big((\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathcal{M}(\mathcal{C}),\mathbb{R}\big)$ est l'ensemble suivant :

$$\left\{ f : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists M,M' \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \forall (x_0,\ldots,x_n,\Gamma) \in (\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathcal{M}(\mathcal{C}), \\ |f(x_0,\ldots,x_n,\gamma)| \leq M,\ |\nabla_{x_i} f(x_0,\ldots,x_n,\gamma)| \leq M\ \forall i \\ \text{et } f(x_0,\ldots,x_n,\Gamma) = 0 \text{ dès que} \\ \qquad \max_{0 \leq i \leq n}(|x_i|) \geq M' \text{ ou } \mathcal{E}_\varphi(\gamma) \geq M'. \end{array} \right\}.$$

Définissons maintenant un opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}$ que nous notons $\mathcal{D}$, celui-ci généralisant l'opérateur de dérivation D de Malliavin. Une fonctionnelle F de $L^2_{loc}(\mathcal{C},\varpi^\lambda)$ est dite $\mathcal{D}$-différentiable s'il existe une fonctionnelle $D_.F$ de $[0,1]\times\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^d$ appartenant à $L^2_{loc}([0,1]\times\mathcal{C},\lambda_{[0,1]}\otimes\varpi^\lambda)$ et une fonctionnelle D^0F de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^d$ appartenant à $L^2_{loc}(\mathcal{C},\varpi^\lambda)$ telles que, pour toute fonction g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable sous $\lambda_{[0,1]}$ et tout $x\in\mathbb{R}^d$, on ait

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{x,g}F(X) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\Big(F\big(X+\varepsilon x+\varepsilon\int_0^\cdot g(t)dt\big)-F\big(X\big)\Big)\\ &= x.D^0F(X)+\int_0^1 g(t).D_tF(X)dt,\end{aligned}$$

la limite étant prise au sens $L^2_{loc}(\mathcal{C},\varpi^\lambda)$ et le produit scalaire de $u,v\in\mathbb{R}^d$ étant noté $u.v$.
Dans le cas où la fonctionnelle F est assez régulière (en particulier, si $F\in\mathcal{W}$), la $\mathcal{D}_{x,g}$-différentiabilité correspond à la Gâteaux différentiabilité dans $\mathcal{C}$, dans la direction $x+\int_0^\cdot g(t)dt$. Remarquons que $\mathcal{D}_{0,g}=D_g$, où D_g est l'opérateur de Malliavin bien connu. Pour plus de détails sur D, on pourra consulter notamment [42].
On note $W^{1,2}$ l'ensemble des fonctionnelles $\mathcal{D}$-différentiables de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$:

$$W^{1,2}=\Big\{F\in L^2_{loc}(\mathcal{C},\varpi^\lambda)\text{ telle que }F\text{ soit }\mathcal{D}\text{-différentiable }\Big\}.$$

De façon similaire, on note $\overline{W}^{1,2}$ l'ensemble des fonctionnelles F de $\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\mathcal{C})$ dans $\mathbb{R}$ $\mathcal{D}$-différentiables par rapport à la première variable pour tout $\Gamma\in\mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathcal{C})$:

$$\overline{W}^{1,2}=\left\{F:\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\mathcal{C})\to\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{pour tout }\Gamma\text{ dans }\mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}),\\ F(.,\Gamma)\text{ est dans }W^{1,2}.\end{array}\right\}.$$

Ainsi, toute fonctionnelle F de $\overline{\mathcal{W}}$ est dans $\overline{W}^{1,2}$ et on a si

$$F(X,\Gamma)\;=\;f(X(0),X(t_1),\ldots,X(t_n),\Gamma)$$

alors

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{x,g}F(X,\Gamma) &= \Big(\sum_{i=0}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(0),X(t_1),\ldots,X(t_n),\Gamma)\Big).x\\ &\quad+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(0),X(t_1),\ldots,X(t_n),\Gamma).\int_0^{t_i}g(s)ds.\end{aligned}$$

Donnons d'autres exemples de fonctionnelles $\mathcal{D}$-différentiables. Dans le lemme suivant, nous prouvons la $\mathcal{D}$-différentiabilité d'une fonctionnelle de type intégrale.

Lemme 3.3. *Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ à support compact. Alors la fonctionnelle F de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$F(X) = \int_0^1 f(X(s))ds,$$

est $\mathcal{D}$-différentiable et admet pour différentielle

$$D_tF(X) = \int_t^1 \nabla f(X(s))ds, \qquad D^0F(X) = \int_0^1 \nabla f(X(s))ds.$$

Preuve:
Étant donné que les fonctions f et ∇f sont bornées, il est facile de montrer que le taux d'accroissement

$$\frac{f\Big(X(s) + \varepsilon x + \varepsilon \int_0^s g(t)dt\Big) - f\Big(X(s)\Big)}{\varepsilon}$$

converge, quand ε tend vers 0, dans $L^2_{loc}(\mathcal{C},\varpi^\lambda)$ vers

$$\int_0^1 \nabla f(X(s)).\Big(x + \int_0^s g(t)dt\Big)ds,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$x.\int_0^1 \nabla f(X(s))ds + \int_0^1 g(t).\int_t^1 \nabla f(X(s))ds\, dt. \qquad \blacksquare$$

Il est intéressant de remarquer que dans l'exemple ci-dessus $D^0F(X) = D_0F(X)$. En général, cette égalité n'est pas satisfaite; il suffit de considérer une fonctionnelle F de la forme $f(X(0))$ pour s'en convaincre. Par contre, ce n'est pas un hasard si dans le cas du lemme 3.3, l'égalité est satisfaite : en effet, lorsque la fonctionnelle F est régulière "au voisinage du temps $t = 0$" alors on a $D^0F(X) = D_0F(X)$. Donnons une explication de ce phénomène. Soit g_n une suite de fonctions de [0,1] dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant :

$$\int_0^1 g_n(t)dt = 1, \qquad \forall\delta > 0, \ \lim_{n\to\infty} \int_\delta^1 g_n(t)dt = 0,$$

et F une fonctionnelle de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ $\mathcal{D}$-différentiable "régulière en 0" au sens où les limites et les interversions de limite ci-dessous sont justifiées; alors on a

$$\begin{aligned} x.D^0F(X) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(X+\varepsilon x) - F(x)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{F\Big(X + (\varepsilon \int_0^1 g_n(t)dt)x\Big) - F(x)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F\Big(X + (\varepsilon \int_0^1 g_n(t)dt)x\Big) - F(x)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t) x.D_tF(X)dt \\ &= x.D_0F(X). \end{aligned}$$

On remarque donc que, dans ce cas, $D^0F(X) = D_0F(X)$.
Dans la chapitre 4, on montrera que des fonctionnelles F de $\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\mathcal{C})$ dans $\mathbb{R}$ du type

$$F(X,\Gamma) = \sum_{Y\in\Gamma}\int_0^1 f(X(s)-Y(s))ds,$$

où f est choisie comme dans le lemme 3.3, sont également $\mathcal{D}$-différentiables par rapport à la première variable et ce, pour Π^{ϖ^λ}-presque tout Γ. Pour le moment, il nous manque quelques propriétés sur Π^{ϖ^λ} pour démontrer ce résultat. Nous le ferons dans le chapitre 4.
Pour terminer ce paragraphe, énonçons un lemme de densité dont on trouvera une démonstration dans [42].

Lemme 3.4. *$\mathcal{W}$ est dense dans $W^{1,2}$ pour la norme $L^2_{loc}(\mathcal{C},\varpi^\lambda)$.*

3.2.2 Le cas des champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{R}^d$

Dans ce paragraphe, nous allons donner une caractérisation intégro-différentielle de champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{R}^d$. Cela supposera que la mesure de référence du processus de Poisson sous-jacent soit la mesure de Lebesgue λ et que les hamiltoniens locaux associés aux champs de Gibbs canoniques soient suffisamment réguliers.
Donnons tout d'abord un lemme bien connu permettant de caractériser la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Lemme 3.5. *Une mesure m sur $\mathbb{R}^d$ σ-finie est un multiple de la mesure de Lebesgue si et seulement si, pour toute fonction f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et à support compact,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(x)m(dx) = 0.$$

En utilisant la caractérisation des champs de Gibbs canoniques par leur mesure de Campbell (Proposition 3.2) et le lemme ci-dessus, nous pouvons démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Soit h un hamiltonien local sur $\mathbb{R}^d$, différentiable en sa première variable x pour tout (x,γ) tel que $\mathcal{E}_\varphi(\gamma) < +\infty$. Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^\varphi_\mathcal{E}(\mathbb{R}^d))$ telle que pour tout $M > 0$,*

$$C^!_\mu\Big(\big(1+e^{h(x,\gamma)}\big)\big(1+|\nabla_x h(x,\gamma)|\big)\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|x|,\mathcal{E}_\varphi(\gamma))\Big) < +\infty; \tag{3.8}$$

alors μ est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h,\lambda)$ si et seulement si l'équation de dualité suivante est satisfaite :

$$\forall f \in \mathbf{F}_b, \qquad C^!_\mu(\nabla_x f) = C^!_\mu(f\nabla_x h). \tag{3.9}$$

Preuve : Tout d'abord remarquons que l'hypothèse (3.8) donne un sens aux termes de l'équation de dualité (3.9). Démontrons le sens direct : soit $\mu \in \mathcal{G}(h,\lambda)$; d'après la Proposition 3.2, il existe une mesure $\tilde\mu$ sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que μ satisfasse l'équation

$$C^!_\mu = e^{-h}\lambda \otimes \tilde\mu;$$

on obtient ainsi

$$\begin{aligned} C^!_\mu\Big(\nabla_x f - f\nabla_x h\Big) &= \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x(f(x,\gamma)e^{-h(x,\gamma)})\lambda(dx)\tilde\mu(d\gamma) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour la réciproque, on pose $\tilde C^!_\mu(dx,d\gamma) = e^{h(x,\gamma)}C^!_\mu(dx,d\gamma)$. On déduit de (3.9) l'équation suivante

$$\forall f \in \mathbf{F}_b, \qquad \tilde C^!_\mu(\nabla_x f) = 0;$$

grâce au lemme 3.5, on prouve que, pour $C^!_\mu$-presque tout γ, la mesure $C^!_\mu(\ |\gamma)$ est un multiple de la mesure de Lebesgue λ. Par conséquent, il existe une mesure $\tilde\mu$ sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\tilde C^!_\mu = \lambda \otimes \tilde\mu$ et donc $C^!_\mu = e^{-h}\lambda\otimes\tilde\mu$; on conclut la preuve grâce à la Proposition 3.2. ■

A titre d'exemple, remarquons que l'hamiltonien local h^φ défini par

$$h^\varphi(x,\gamma) = \sum_{y\in\gamma\backslash x} \varphi(x-y), \tag{3.10}$$

satisfait l'hypothèse (3.8) pour toute probabilité μ φ-tempérée sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ lorsque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact.

Dans [1], Theorem 4.3, des champs de Gibbs associés à une interaction par paires sont caractérisés par une dualité plus complexe que (3.9), l'opérateur de dérivation

considéré agissant sur les fonctions de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$. Notre approche via la mesure de Campbell permet de n'utiliser que des techniques de dérivation élémentaires sur $\mathbb{R}^d$, et ce, pour des interactions plus générales.
Un champ de Gibbs étant un champ de Gibbs canonique, l'équation (3.9) est satisfaite par tous les champs de Gibbs de $\mathcal{G}(h,\lambda)$; par contre cette équation ne les caractérise pas. Il aurait été intéressant d'exhiber une équation similaire à (3.9) caractérisant les champs de Gibbs de $\mathbb{R}^d$. Nous n'en avons pas trouvée. Du moins, celles que nous avons obtenues ne nous semblaient pas suffisamment élégantes et efficaces pour justifier le fait qu'on les présente ici. Par contre, dans le cas de $\mathcal{C}$ il existe une formule d'intégration par parties sous la mesure de Campbell caractérisant les champs de Gibbs. Elle est due à S. Rœlly et H. Zessin et nous la présentons dans le paragraphe suivant.

3.2.3 Le cas des champs de Gibbs et champs de Gibbs canoniques sur $\mathcal{C}$

Dans ce paragraphe nous allons tout d'abord présenter la caractérisation des champs de Gibbs sur $\mathcal{C}$ que l'on vient d'évoquer. Puis nous donnons une généralisation au cas des champs de Gibbs canoniques. Ensuite, nous discuterons de l'importance d'avoir choisi l'opérateur de dérivation $\mathcal{D}$ dans notre équation de dualité (3.13).
Soit P une probabilité sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$; alors on note ν_P la mesure intensité de P sur $\mathcal{C}$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}), \qquad \nu_P(B) = E_P(\Gamma(B)).$$

Proposition 3.7 (Théorème 2 [50]). *Soit P une probabilité sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ et ν_P sa mesure intensité que l'on suppose σ-finie. Soit H un hamiltonien local satisfaisant : $\forall M > 0$, $\forall t \in [0,1]$,*

$$C^!_P\Big(\big(1 + e^{H(X,\Gamma)}\big)\big(1 + |X(t)|\big) 1\!\!1_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big) < +\infty;$$

alors P est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(H,\rho^\lambda)$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, toute fonction $g \in \mathbf{E}$ et toute fonctionnelle $F \in \overline{\mathcal{W}}$,

$$\int_{\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\mathcal{C})} \Big(e^{H(X,\Gamma)} F(X,\Gamma) \int_0^1 g(s) dX_s\Big) C^!_P(dX,d\Gamma) = \nu_P \otimes P(\mathcal{D}_{x,g}F). \tag{3.11}$$

Nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite; néanmoins nous avons décidé de le présenter car c'est la première caractérisation dans la littérature utilisant à la fois la mesure de Campbell et le calcul de Malliavin. L'intérêt de ce mélange réside de nouveau dans la simplicité de l'opérateur de dérivation utilisé. En effet, grâce à la mesure de Campbell, il n'est pas nécessaire d'introduire un opérateur de dérivation

agissant sur les fonctionnelles de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ mais uniquement sur les fonctionnelles de $\mathcal{C}$. L'opérateur $\mathcal{D}$ est donc parfaitement adapté à cette situation.
Remarquons que (3.11) est encore satisfaite par les champs de Gibbs de $\mathcal{G}(H,\rho^\lambda)$ si l'on remplace l'opérateur $\mathcal{D}_{x,g}$ par l'opérateur de Malliavin D_g; il suffit de prendre $x = 0$, et c'est d'ailleurs sous cette forme que l'équation (3.11) est donnée dans [50]. Néanmoins, dans ce cas , la famille d'équations (3.11) où $x = 0$, ne caractérise plus les champs de Gibbs de $\mathcal{G}(H,\rho^\lambda)$, car tout champ de Gibbs de $\mathcal{G}(H,\rho^m)$, où m est une mesure quelconque σ-finie de $\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$, satisfait l'équation (3.11) avec $x = 0$. Réciproquement, toute probabilité P satisfaisant (3.11) avec $x = 0$ appartient à la classe suivante :

$$\bigcup_{m\in\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)} \mathcal{G}(H,\varpi^m).$$

Nous ne donnons pas de démonstration de cette affirmation car nous reviendrons par la suite sur le rôle de l'opérateur de dérivation $\mathcal{D}$ par rapport à celui de Malliavin D. Donnons maintenant, une nouvelle caractérisation des champs de Gibbs canoniques sur $\mathcal{C}$. Celle-ci s'inspire de celle donnée à la Proposition 3.7 et nous sera à plusieurs reprises utile dans le chapitre 5.

Théorème 3.8. *Soit H un hamiltonien local sur $\mathcal{C}$ appartenant à $\overline{W}^{1,2}$ et P une probabilité tempérée sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$.*
Si P est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H,\varpi^\lambda)$ satisfaisant la propriété d'intégrabilité suivante : $\forall M > 0$, $\forall t \in [0,1]$,

$$C_P^!\Big(\big(|X(t)| + |D^0H| + \int_0^1 |D_sH|ds\big)\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big) < +\infty, \tag{3.12}$$

alors P satisfait la formule d'intégration par parties suivante :
pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, toute fonction g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable et toute fonctionnelle F de $\overline{W}^{1,2}$ bornée et de dérivée bornée,

$$C_P^!\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) = C_P^!\Big(\mathcal{D}_{x,g}F(X,\Gamma) - F(X,\Gamma)\mathcal{D}_{x,g}H(X,\Gamma)\Big). \tag{3.13}$$

Réciproquement, si de plus $H(.,\Gamma)$ est supposé Gâteaux differentiable pour tout $\Gamma \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\varphi}(\mathcal{C})$ et si P satisfait l'hypothèse d'intégrabilité suivante :
$\forall M > 0$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall g \in \mathbf{E}$

$$C_P^!\Bigg(\Big(1+e^{H(X,\Gamma)}\Big)\Big(1+|X(t)|+|D^0H|+\int_0^1 |D_sH|ds\Big)\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Bigg) < +\infty, \tag{3.14}$$

ainsi que l'équation (3.13) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $g \in \mathbf{E}$ et tout $F \in \overline{\mathcal{W}}$, alors P est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H,\varpi^\lambda)$.

Avant de passer à la preuve de ce théorème, rappelons dans le lemme suivant une caractérisation de la mesure de Wiener.

Lemme 3.9 (Théorème 1.2 [49]). *Soit ν une mesure σ-finie sur $\mathcal{C}$ telle que pour tout $M > 0$ et tout $t \in [0,1]$*

$$E_\nu\Big(|X(t)|\mathbb{1}_{[0,M]}(|X(0)|)\Big) < \infty;$$

alors il existe une mesure m σ-finie sur $\mathbb{R}^d$ pour laquelle $\nu = \varpi^m$ si et seulement si :

$$\forall g \in \mathbf{E}, \forall F \in \mathcal{W}, \qquad E_\nu\Big(F(X)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) = E_\nu\Big(D_gF(X)\Big). \tag{3.15}$$

La formule d'intégration par parties (3.15) a été introduite pour la première fois par B. Gaveau et P. Trauber dans [20]. Dans [49], il est démontré que non seulement toute mesure de Wiener la satisfait, mais qu'elles sont de plus caractérisées par cette dualité. Bien que l'équation (3.15) soit très riche en informations sur la dynamique du processus canonique sous ν (loi des $(X(t)-X(0))$), elle ne caractérise aucunement la projection au temps 0 de la mesure ν. Cela est dû à la forme spécifique de l'opérateur de dérivation de Malliavin. En effet, pour calculer DF, on ne considère, comme perturbations des trajectoires, que des trajectoires nulles en 0 de type $\int_0^\cdot g(r)dr$. Par conséquent, $E_\nu\big(D_gF(X)\big)$ ne tient pas compte de la loi initiale de ν. De même, l'intégrale stochastique ne dépend pas de la loi de $X(0)$ mais uniquement de la loi de la dynamique de X. C'est pour remédier à cela que l'on a introduit l'opérateur de dérivation $\mathcal{D}$ qui est en fait un raffinement de D. Le lemme suivant apporte la preuve de son efficacité.

Proposition 3.10. *Soit ν une mesure σ-finie sur $\mathcal{C}$ telle que pour tout $M > 0$ et tout $t \in [0,1]$,*

$$E_\nu\Big(|X(t)|\mathbb{1}_{[0,M]}(|X(0)|)\Big) < \infty;$$

alors ν est un multiple de ϖ^λ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall g \in \mathbf{E} \text{ et } \forall F \in \mathcal{W}, \qquad E_\nu\Big(F(X)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) = E_\nu\Big(\mathcal{D}_{x,g}F(X)\Big). \tag{3.16}$$

Preuve :

Montrons tout d'abord que l'équation (3.16) est satisfaite si $\nu = \varpi^\lambda$. Soit F une fonctionnelle de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ du type suivant :

$$F(X) = f\Big(X(0)\Big)k\Big(X(t_1)-X(0),X(t_2)-X(0),\ldots,X(t_n)-X(0)\Big), \tag{3.17}$$

où f et k sont des fonctions régulières à support compact. Dans ce cas, montrons que

$$E_{\varpi^\lambda}\Big(\mathcal{D}_{x,g}F\Big) = E_{\varpi^\lambda}\Big(D_gF\Big). \tag{3.18}$$

Pour cela, un calcul élémentaire permet de montrer que

$$\mathcal{D}_{x,g}F = D_gF + k\Big(X(t_1) - X(0),X(t_2) - X(0),\ldots,X(t_n) - X(0)\Big)\nabla f(X(0)).x.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
& E_{\varpi^\lambda}\Big(\mathcal{D}_{x,g}F\Big) - E_{\varpi^\lambda}\Big(D_gF\Big) \\
= & \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathcal{C}} k\Big(X(t_1) - y,\ldots,X(t_n) - y\Big)\nabla f(y).x\ \varpi^y(dX)\lambda(dy) \\
= & \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathcal{C}} k\Big(X(t_1),\ldots,X(t_n)\Big)\nabla f(y).x\ \varpi^0(dX)\lambda(dy) \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(y).x\lambda(dy)\int_{\mathcal{C}} k\Big(X(t_1),\ldots,X(t_n)\Big)\varpi^0(dX) \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

Par densité des combinaisons linéaires de fonctionnelles de type (3.17) dans $\mathcal{W}$, on montre que (3.18) est satisfaite pour toute fonctionnelle de $\mathcal{W}$. L'équation (3.16) avec $\nu = \varpi^\lambda$ découle alors immédiatement du lemme 3.9.
Réciproquement, il est facile de voir que l'équation (3.16) implique que ν est un multiple de ϖ^λ. En effet, grâce au lemme 3.9 et en prenant $x = 0$, on sait que ν est une mesure de Wiener. Il reste donc à identifier la mesure initiale; pour cela, on applique l'équation (3.16) à des fonctionnelles de type $F(X) = f(X(0))$ et le lemme 3.5 permet de conclure. ■
Donnons maintenant **la preuve du Théorème 3.8 :**
Commençons par la première implication; soit P un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}(H,\varpi^\lambda)$. D'après la Proposition 3.2 on a, pour une certaine mesure Q,

$$C^!_P = e^{-H}\varpi^\lambda \otimes Q.$$

Remarquons que l'hypothèse (3.12) donne un sens aux termes de l'équation (3.13). On en déduit, grâce à la proposition 3.10,

$$\begin{aligned}
C^!_P\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) &= \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} e^{-H(X,\Gamma)}F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\ \varpi^\lambda(dX)Q(d\Gamma) \\
&= \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} \mathcal{D}_{x,g}\Big(e^{-H(X,\Gamma)}F(X,\Gamma)\Big)\ \varpi^\lambda(dX)Q(d\Gamma) \\
&= \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} e^{-H(X,\Gamma)}\mathcal{D}_{x,g}F(X,\Gamma)\ \varpi^\lambda(dX)Q(d\Gamma) \\
&\quad -\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} e^{-H(X,\Gamma)}F(X,\Gamma)\mathcal{D}_{x,g}H(X,\Gamma)\ \varpi^\lambda(dX)Q(d\Gamma) \\
&= C^!_P\Big(\mathcal{D}_{x,g}F(X,\Gamma) - F(X,\Gamma)\mathcal{D}_{x,g}H(X,\Gamma)\Big).
\end{aligned}$$

L'équation (3.13) est démontrée.
Dans le calcul précédent, il n'est peut-être pas licite de différencier la fonctionnelle $e^{-H(X,\Gamma)}F(X,\Gamma)$; en effet celle-ci peut ne pas être, pour P-presque tout Γ, dans $L^2_{loc}(\mathcal{C},\varpi^\lambda)$. Pour contourner ce problème, nous allons utiliser la technique classique de localisation suivante. Soit τ_n une suite de fonctions C^1 croissantes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \tau_n(x) = x & \text{si } x \leq n \\ \tau'(x) \leq 2 & \text{si } n < x < n+1 \\ \tau_n(x) = n+1 & \text{si } x \geq n+1. \end{cases}$$

Alors on a,

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} e^{-H(X,\Gamma)}F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\ \varpi^\lambda(dX)P(dG) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} \tau_n\Big(e^{-H(X,\Gamma)}\Big)F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\ \varpi^\lambda(dX)P(dG) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} \tau_n\Big(e^{-H(X,\Gamma)}\Big)\mathcal{D}_{x,g}F(X,\Gamma)\ \varpi^\lambda(dX)P(dG) \\
&\quad - \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} \mathcal{D}_{g,x}H(X,\Gamma)e^{-H(X,\Gamma)}\tau_n'\Big(e^{-H(X,\Gamma)}\Big)F(X,\Gamma)\ \varpi^\lambda(dX)P(dG) \\
&= \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} e^{-H(X,\Gamma)}\mathcal{D}_{x,g}F(X,\Gamma)\ \varpi^\lambda(dX)P(dG) \\
&\quad - \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} e^{-H(X,\Gamma)}F(X,\Gamma)\mathcal{D}_{x,g}H(X,\Gamma)\ \varpi^\lambda(dX)P(dG).
\end{aligned}$$

Démontrons maintenant la seconde implication du Théorème 3.8.
L'hypothèse de Gâteaux différentiabilité sur H est introduite afin que le terme $\mathcal{D}_{x,g}H$ de l'équation (3.13) ait un sens sous la mesure $C^!_P$ dont le support est a priori inconnu. On note $\tilde{C}^!_P$ la mesure $e^H C^!_P$; grâce à l'hypothèse (3.14) et au lemme 3.4, cette mesure est σ-finie et on peut appliquer l'équation (3.13) à des fonctionnelles du type $e^H(X,\Gamma)F(X,\Gamma)$, où F est dans $\overline{\mathcal{W}}$. On en déduit l'équation suivante :
$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall g \in \mathbf{E}$, $\forall F \in \overline{\mathcal{W}}$

$$\tilde{C}^!_P\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) = \tilde{C}^!_P\Big(\mathcal{D}_{x,g}F(X,\Gamma)\Big).$$

Par conséquent pour $\tilde{C}^!_P$-presque tout Γ, on obtient

$$\int_C F(X)\int_0^1 g(s)dX(s)\tilde{C}^!_P(dX|\Gamma) = \int_C \mathcal{D}_{x,g}F(X)\tilde{C}^!_P(dX|\Gamma),$$

et donc grâce à la proposition 3.10, on en déduit qu'il existe une constante $C(\Gamma)$ telle que

$$\tilde{C}^!_P(\ .\ |\Gamma) = C(\Gamma)\varpi^\lambda.$$

Il en découle qu'il existe une mesure Q sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ telle que

$$\tilde{C}^!_P = \varpi^\lambda \otimes Q$$

et donc

$$C^!_P = e^{-H}\varpi^\lambda \otimes Q;$$

on conclut la preuve du théorème grâce à la Proposition 3.2. ■

Pour terminer ce paragraphe, nous allons nous attarder sur l'importance de l'opérateur $\mathcal{D}$. Nous avions remarqué que l'équation (3.15) ne permettait pas de caractériser la loi initiale de la mesure de Wiener. L'équation (3.16) dans laquelle intervient l'opérateur $\mathcal{D}$ permet de résoudre ce problème. Pour l'équation (3.13), le problème est identique, voire plus complexe. En effet, si l'on remplace dans l'équation (3.13) l'opérateur $\mathcal{D}_{x,\gamma}$ par l'opérateur de Malliavin D_g alors celle-ci ne caractérise plus les champs de Gibbs canoniques de $\mathcal{G}_c(H,\varpi^\lambda)$; néanmoins on aurait pu s'attendre au fait qu'elle caractérise les champs de Gibbs canoniques de $\bigcup_{m\in\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)}\mathcal{G}_c(H,\varpi^m)$. Cela aurait été l'analogue de la situation liée à l'équation (3.15) ou encore (3.11). Il n'en est rien. En effet, les "dégâts" sont bien plus importants, car on perd même la nature Gibbsienne des probabilités P ne satisfaisant l'équation d'équilibre (3.13) que pour $x = 0$. Dans la Proposition (3.11) qui suit, nous allons analyser ce phénomène dans le cas très simple où $H = 0$.

On dit qu'une probabilité $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$ est un champ de trajectoires browniennes si pour P_0-presque tout $\gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\delta_{x_i}$ la probabilité P^γ est la loi de $\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\delta_{x_i+X_i}$, où $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille infinie de mouvements browniens indépendants d-dimensionnels partant de 0.

Proposition 3.11. *Soit $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$ telle que P_0 soit tempérée et telle que : $\forall M > 0$, $\forall t \in [0,1]$,*

$$C^!_P\Big(|X(t)|\mathbb{1}_{[0,M]^2}(X(0),\xi(\Gamma(0)))\Big) < +\infty;$$

alors P est un champ de trajectoires browniennes si et seulement si :
$\forall g \in \mathbf{E}$, $\forall F \in \overline{\mathcal{W}}$

$$C^!_P\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) = C^!_P\Big(D_gF(X,\Gamma)\Big). \tag{3.19}$$

Avant de donner la démonstration de cette proposition, faisons quelques commentaires liés aux remarques précédentes. Grâce à cette proposition, il est facile de construire des probabilités sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ qui ne soient pas des champs de Gibbs canoniques de $\bigcup_{m\in\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)}\mathcal{G}_c(0,\varpi^m)$ et qui satisfassent tout de même l'équation (3.13) avec

$H = 0$ et $x = 0$. En effet, il suffit de considérer un champ de trajectoires browniennes P dont la condition initiale n'est pas un champ de Gibbs canoniques de $\bigcup_{m\in\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)} \mathcal{G}_c(0,m)$. P satisfait alors (3.13) avec $H = 0$, $x = 0$ et n'est pas un champ de Gibbs canonique de $\bigcup_{m\in\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)} \mathcal{G}_c(0,\varpi^m)$ car sa projection au temps 0 serait alors un champ de Gibbs de $\bigcup_{m\in\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)} \mathcal{G}_c(0,m)$(voir lemme de projection 3.12). La non gibbsianité de la condition initiale empêche la loi du processus d'être un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$.
La Proposition 5.4 du chapitre 5 exhibe un exemple similaire, dans le cas où H est non nul, de probabilité satisfaisant l'équation (3.13) avec $x = 0$ sans que celle-ci soit un champ de Gibbs canonique de $\bigcup_{m\in\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)} \mathcal{G}_c(H,\varpi^m)$.
Preuve de la Proposition 3.11 :
Remarquons tout d'abord que les hypothèses faites sur P donnent un sens aux termes de l'équation de dualité (3.19). En écrivant $\Gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{X_i}$ où $X_i = \Theta_i(\Gamma)$ et en désintégrant la mesure de Campbell, on obtient

$$C^!_P\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) = \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\sum_{i\in\mathbb{N}^*} F(X_i,\Gamma\backslash X_i)\int_0^1 g(s)dX_i(s)P^\gamma(d\Gamma)P_0(d\gamma)$$

Le sens direct est alors évident car il suffit d'appliquer pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$ la formule (3.15) du lemme 3.9; on obtient ainsi

$$\begin{aligned} C^!_P\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) &= \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\sum_{i\in\mathbb{N}^*} D_gF(X_i,\Gamma\backslash X_i)P^\gamma(d\Gamma)P_0(d\gamma) \\ &= C^!_P\Big(D_gF(X,\Gamma)\Big). \end{aligned}$$

Pour la réciproque, en désintégrant l'équation (3.19) pour une fonctionnelle $\tilde{F}$ du type $\tilde{F}(X,\Gamma) = f(x)k(\gamma)F(X)G(\Gamma)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\sum_{i\in\mathbb{N}^*} f(\theta_i(\gamma))k(\gamma\backslash\theta_i(\gamma))\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X_i)G(\Gamma\backslash X_i)\int_0^1 g(s)dX_i(s)P^\gamma(d\Gamma)P_0(d\gamma) \\ = &\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\sum_{i\in\mathbb{N}^*} f(\theta_i(\gamma))k(\gamma\backslash\theta_i(\gamma))\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} D_gF(X_i)G(\Gamma\backslash X_i)P^\gamma(d\Gamma)P_0(d\gamma). \end{aligned}$$

On en déduit que pour P_0-presque tout γ et tout entier i,

$$E_{P^\gamma}\Big(F(X_i)G(\Gamma\backslash X_i)\int_0^1 g(s)dX_i(s)\Big) = E_{P^\gamma}\Big(D_gF(X_i)G(\Gamma\backslash X_i)\Big).$$

Par conséquent, pour P^γ-presque tout $\Gamma\backslash X_i$ on a

$$E_{P^\gamma(\,.\,|\Gamma\backslash X_i)}\Big(F(X_i)\int_0^1 g(s)dX_i(s)\Big) = E_{P^\gamma(\,.\,|\Gamma\backslash X_i)}\Big(D_gF(X_i)\Big)$$

et donc d'après le lemme 3.9, X_i est un mouvement brownien sous $P^\gamma(\ .\ |X_j,\, j \neq i)$; On en déduit que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de mouvements browniens indépendants sous P^γ et donc que P est un champ de trajectoires browniennes. ■

3.3 Relations entre champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{C}$ et mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$

Dans cette section, nous allons mettre en lumière des liens qui existent entre les champs de Gibbs sur $\mathcal{C}$, les champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ et les mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$. Nous allons nous poser les trois questions suivante dont les réponses coïncident avec les trois paragraphes à suivre :

- Est-ce que les projections temporelles sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ d'un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$ sont des champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$? et qu'en est-il des projections temporelles des champs de Gibbs canoniques sur $\mathcal{C}$?
- Lors de la désintégration d'un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$ par rapport à sa condition initiale, obtient-on une mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$? En d'autres termes, est-ce que la probabilité $P^\gamma \circ \Theta^{-1}$ est une mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ lorsque P est un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$?
- Réciproquement, à quelle condition $\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} P^\gamma P_0(d\gamma)$ est-il un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$ sachant que $P^\gamma \circ \Theta^{-1}$ est une mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ pour P_0-presque tout γ?

3.3.1 Projection au temps t sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ d'un champ de Gibbs (respectivement champ de Gibbs canonique) sur $\mathcal{C}$

Dans le lemme suivant on montre que la projection sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ à tout temps $t \in [0,1]$ d'un champ de Gibbs (respectivement d'un champ de Gibbs canonique) est un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) sur $\mathbb{R}^d$.

Lemme 3.12. *Soit H un hamiltonien local sur $\mathcal{C}$, ν une mesure de référence de $\mathbf{M}(\mathcal{C})$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, la mesure $\nu \circ pr_t^{-1}$ appartienne à $\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$.*
Soit P une probabilité sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Si P est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(H,\nu)$, alors en posant

$$\begin{aligned} h_t(x,\gamma) &:= \log C_P^!\Big(e^{H(X,\Gamma)}\Big|X(t)=x,\Gamma(t)=\gamma\Big) \\ &:= -\log \int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} e^{-H(X,\Gamma)}\nu\big(dX\big|X(t)=x\big)\otimes P\big(d\Gamma\big|\Gamma(t)=\gamma\big) \end{aligned} \tag{3.20}$$

on obtient que $P_t = P \circ pr_t^{-1}$, loi de $\Gamma(t)$ sous P, est un champ de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ élément de $\mathcal{G}(h_t,\nu \circ pr_t^{-1})$ pour tout $t \in [0,1]$.

Si P est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H,\nu)$, alors en posant

$$h_t(x,\gamma) \quad := \quad \log C_P^!\Big(e^{H(X,\Gamma)}\Big|X(t)=x,\Gamma(t)=\gamma\Big), \tag{3.21}$$

il existe une fonction $f_t(\gamma)$ telle que $P\circ pr_t^{-1}$ soit un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h_t(x,\gamma)+f_t(\gamma),\nu\circ pr_t^{-1})$ pour tout $t\in[0,1]$.

Preuve :

Soit $P\in\mathcal{G}(H,\nu)$; d'après la Proposition 3.1 on a

$$C_P^! = e^{-H}\nu\otimes P.$$

En projetant cette dernière au temps $t\in[0,1]$, on obtient

$$C_P^!\Big(e^{H(X,\Gamma)}\Big|X(t)=x,\Gamma(t)=\gamma\Big)C_{P_t}^!\big(d(x,\gamma)\big)=\nu\circ pr_t^{-1}\otimes P_t\big(d(x,\gamma)\big)$$

ou encore

$$C_{P_t}^!\big(d(x,\gamma)\big)=\bigg[\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}e^{-H(X,\Gamma)}\nu\big(dX\big|X(t)=x\big)\otimes P\big(d\Gamma\big|\Gamma(t)=\gamma\big)\bigg]\nu\circ pr_t^{-1}\otimes P_t\big(d(x,\gamma)\big);$$

or, toujours d'après la Proposition 3.1, cela implique que P_t est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(h_t,\nu\circ pr_t^{-1})$. Remarquons qu'il n'était pas évident a priori que la fonction h_t définie par (3.20) soit un hamiltonien local et que $P_t(\mathcal{M}_{h_t,\nu\circ pr_t^{-1}}(\mathbb{R}^d))=1$; Cela souligne l'efficacité de la caractérisation de E. Glötzl rapport à celle de X.X. Nguyen et H. Zessin [41].
Dans le cas où P est un champ de Gibbs canonique, la démonstration est similaire : en effet si P est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H,\nu)$, alors d'après la Proposition 3.2, il existe une mesure Q sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ telle que

$$C_P^! = e^{-H}\nu\otimes Q.$$

En projetant cette équation au temps t, on obtient

$$C_P^!\Big(e^{H(X,\Gamma)}\Big|X(t)=x,\Gamma(t)=\gamma\Big)C_{P_t}^!\big(d(x,\gamma)\big)=\nu\circ pr_t^{-1}\otimes Q_t\big(d(x,\gamma)\big),$$

qui, d'après la Proposition 3.2, implique l'existence d'une fonction f_t de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$ telle que $P\circ pr_t^{-1}$ soit un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h_t(x,\gamma)+f_t(\gamma),\nu\circ pr_t^{-1})$. ■

Remarquons que dans le cas où P est un champ de Gibbs canonique et si h_t défini en (3.21) satisfait la propriété d'additivité (2.10), alors on peut prendre $f_t=0$.
Il est également intéressant de noter qu'il est possible d'avoir une mesure ν σ-finie sur $\mathcal{C}$ sans que, pour tout $t>0$, $\nu\circ pr_t^{-1}$ le soit sur $\mathbb{R}^d$. Dans le lemme suivant nous

donnons une condition suffisante sur la mesure m sur $\mathbb{R}^d$ pour que la mesure ϖ^m admette pour tout $t \in [0,1]$ une projection σ-finie sur $\mathbb{R}^d$ au temps t.

Lemme 3.13. *Soit m une mesure sur $\mathbb{R}^d$ telle que $m([-A,A]^d)$, $A \in \mathbb{R}$, soit dominé par un polynôme en A; alors, ϖ^m admet à tout temps $t \in [0,1]$ une projection σ-finie sur $\mathbb{R}^d$.*

Preuve :
Montrons que pour tout $t > 0$ et tout $A \in \mathbb{R}$, la quantité $\varpi^m \circ pr_t^{-1}([-A,A]^d)$ est finie.

$$\begin{aligned} \varpi^m \circ pr_t^{-1}([-A,A]^d) &= \int_C \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[-A,A]^d}(X(t)) \varpi^x(dX) m(dx) \\ &= \int_C \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{t^{-\frac{1}{2}}[-A-x,A-x]^d}(X(1)) \varpi^0(dX) m(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[\frac{-A-x}{\sqrt{t}},\frac{A-x}{\sqrt{t}}]^d}(y) \mathcal{N}(0,1)(dy) m(dx); \end{aligned}$$

or la queue de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ étant sous exponentielle, la quantité ci-dessus est finie. ■

Remarquons, grâce au calcul précédent, que la mesure $\varpi^m \circ pr_t$ n'est pas σ-finie pour tout $t > 0$ lorsque $m(dx) = e^{x^4} dx$.

Terminons ce paragraphe en soulignant le phénomène de régularisation suivant. Soit P un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H,\varpi^m)$, où m est une mesure de $\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que ϖ^m admette une projection σ-finie sur $\mathbb{R}^d$ à tout temps $t \in [0,1]$; alors la projection de P sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ au temps t est un champ de Gibbs canonique de mesure de référence $m_t = \varpi^m \circ pr_t^{-1}$. Or, quelque soit la régularité de la mesure m, la mesure m_t (pour $t > 0$) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Dans le chapitre 5, nous utiliserons cette remarque pour montrer une propriété de régularisation des solutions du système de particules browniennes en interaction.

3.3.2 Désintégration d'un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$ en une famille de mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que pour tout champ de Gibbs canonique P de $\mathcal{G}_c(H,\nu)$, alors les probabilités $(P^\gamma \circ \Theta^{-1})_\gamma$ sont des mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$, pour lesquelles on précisera la mesure de référence et l'hamiltonien.

Proposition 3.14. *Soit H un hamiltonien local sur $\mathcal{C}$, ν une mesure de $\mathbf{M}(\mathcal{C})$ admettant la représentation suivante :*

$$\nu = \int_{\mathbb{R}^d} \nu^x \nu_0(dx) \quad \textit{où} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \nu^x \in \mathcal{P}(\mathcal{C}) \ \textit{et}\ \nu_0 \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^d). \qquad (3.22)$$

Soit P un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H,\nu)$; alors, pour P_0-presque tout $\gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\delta_{x_i}$, $\tilde{P} = P^\gamma \circ \Theta^{-1}$ est une mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ d'hamiltonien $\tilde{H}$ défini, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, par

$$\tilde{H}_{\{i\}}(w) \quad = \quad H(w_i, \sum_{j\neq i}\delta_{w_j}) \tag{3.23}$$

et de mesure de référence $\otimes_{i\in\mathbb{N}^*}\nu^{x_i}$.

Preuve :

Comme P est un champ de Gibbs canonique d'hamiltonien local H on a, pour $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et pour P_0-presque tout γ,

$$P(d\Gamma_{\mathcal{C}_\Lambda}|\Gamma_{\mathcal{C}_\Lambda^c},\Gamma(0)=\gamma) = \frac{\exp\big(-H_{\mathcal{C}_\Lambda}(\Gamma_{\mathcal{C}_\Lambda},\Gamma_{\mathcal{C}_{\Lambda^c}})\big)}{\tilde{Z}(\Gamma_{\mathcal{C}_{\Lambda^c}},\gamma)}\Pi^{\nu,\gamma}_{\mathcal{C}_\Lambda}(d\Gamma_{\mathcal{C}_\Lambda}), \tag{3.24}$$

où $\mathcal{C}_\Lambda$ est le sous-ensemble de $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ défini en (2.2) et $\tilde{Z}(\Gamma_{\mathcal{C}_{\Lambda^c}},\gamma)$ la constante de renormalisation. Soit $i \in \mathbb{N}^*$; en choisissant Λ de tel sorte que

$$x_i \in \Lambda \qquad \text{et} \qquad \forall j \neq i,\, x_j \notin \Lambda,$$

on montre que l'égalité (3.24) est équivalente à

$$\tilde{P}^\gamma\big(dw_i\big|(w_j)_{j\neq i}\big) = \frac{1}{Z_i\big((w_j)_{j\neq i},\gamma\big)}\exp\big(-\tilde{H}_{\{i\}}(w)\big)\nu^{\theta_i(\gamma)}\big(dw_i\big),$$

ce qui correspond à l'équation DLR au site i pour la mesure $\tilde{P}^\gamma$. Grâce à la Proposition 2.6, on conclut que $\tilde{P}$ est une mesure de Gibbs d'hamiltonien $\tilde{H}$ et de mesure de référence ν. ■

A plusieurs reprises dans les chapitres 4 et 5, nous utiliserons ce lemme afin de pouvoir utiliser des résultats existant déja dans le cadre réseau. Nous nous servirons notamment de certains résultats provenant de [3].

3.3.3 Recollement d'une famille de mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ en un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$

Il est naturel de s'intéresser à la réciproque de la Proposition 3.14. Ce sera le propos de ce paragraphe.

La question sous sa forme générale est la suivante : soit H un hamiltonien local sur $\mathcal{C}$, ν une mesure de $\mathbf{M}(\mathcal{C})$ admettant la représentation (3.22) ; soit P_0 une probabilité sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et $(\tilde{P}^\gamma)_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ une famille de mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ d'hamiltonien $\tilde{H} = (\tilde{H}_{\{i\}})_{i\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ défini en (3.23) et de mesures de référence $\otimes_{i\in\mathbb{N}^*}\nu^{\theta_i(\gamma)}$. Alors que peut-on dire de la probabilité

$$P = \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \tilde{P}^\gamma \circ \Theta \; P_0(d\gamma)$$

sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$? Quand est-elle un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$? ou un champ de Gibbs canonique sur $\mathcal{C}$?
D'après le lemme 3.12 une condition nécessaire pour que P soit un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) sur $\mathcal{C}$ est que P_0 soit un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) sur $\mathbb{R}^d$. Dans le Théorème 3.18 de recollement que nous énoncerons et démontrerons un peu plus loin dans ce paragraphe, nous verrons que cette condition n'est pas suffisante. Avant de démontrer cela, énonçons le lemme suivant :
Lemme 3.15. *Pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, $\gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{x_i}$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$, on suppose que*

$$E_{\tilde{P}^\gamma}(e^{\tilde{H}_{\{i\}}}) < +\infty;$$

alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe une mesure de Gibbs $\tilde{Q}_i^\gamma$ sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ d'hamiltonien $\tilde{H}$ et de mesure de référence $\otimes_{j\in\mathbb{N}^*}\nu^{\theta_j(\gamma\backslash x_i)}$ telle que

$$\frac{1}{E_{\tilde{P}^\gamma}(e^{\tilde{H}_{\{i\}}})}e^{\tilde{H}_{\{i\}}}\tilde{P}^\gamma(dw) \quad = \quad \nu^{x_i}(dw_i) \otimes \tilde{Q}_i^\gamma(d(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots)). \tag{3.25}$$

Preuve :
Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{N}^*)$ tel que $i \in \Delta$; on note Δ_i le sous-ensemble suivant :

$$\Delta_i = \{j \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } j \in \Delta,\, j < i\} \cup \{j-1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } j \in \Delta,\, j > i\}.$$

Alors, en appliquant l'équation DLR à $\tilde{P}^\gamma$ sur le sous-ensemble Δ, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\tilde{H}_{\{i\}}}}{E_{\tilde{P}^\gamma}(e^{\tilde{H}_{\{i\}}(w)})}\tilde{P}^\gamma(dw) \quad &= \quad \frac{e^{\tilde{H}_{\{i\}}(w)-\tilde{H}_\Delta(w)}}{E_{\tilde{P}^\gamma}(e^{\tilde{H}_{\{i\}}})Z_\Delta(w_{\Delta^c})} \otimes_{j\in\Delta} \nu^{x_j}(dw_j) \otimes \tilde{P}^\gamma(dw_{\Delta^c}) \\
&= \quad \frac{e^{-\tilde{H}_{\Delta_i}((w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots))}}{E_{\tilde{P}^\gamma}(e^{\tilde{H}_{\{i\}}})Z_\Delta(w_{\Delta^c})} \otimes_{j\in\Delta} \nu^{x_j}(dw_j) \otimes \tilde{P}^\gamma(dw_{\Delta^c}) \\
&= \quad \nu^{x_i}(dw_i) \otimes \frac{e^{-\tilde{H}_{\Delta_i}((w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots))}}{E_{\tilde{P}^\gamma}(e^{\tilde{H}_{\{i\}}})Z_\Delta(w_{\Delta^c})} \otimes_{j\in\Delta-\{i\}} \nu^{x_j}(dw_j) \otimes \tilde{P}^\gamma(dw_{\Delta^c}) \\
&= \quad \nu^{x_i}(dw_i) \otimes \tilde{Q}_i^\gamma(d(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots)).
\end{aligned}$$

Ce calcul permet de montrer que la mesure $e^{\tilde{H}_{\{i\}}}\tilde{P}^\gamma$ renormalisée se découple en le produit de ν^{x_i} et d'une certaine mesure $\tilde{Q}_i^\gamma$. Les diverses identifications de $\tilde{Q}_i^\gamma$, associées à chaque sous-ensemble Δ, permettent d'affirmer qu'elle est bien la mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ annoncée. ■
Remarquons que $\tilde{Q}_i^\gamma$ et $\tilde{P}^{\gamma\backslash x_i}$ sont deux mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ de même hamiltonien $\tilde{H}$ et de même mesure de référence $\otimes_{j\in\mathbb{N}^*}\nu^{\theta_j(\gamma\backslash x_i)}$. Néanmoins rien ne garantit

que ces deux mesures soient égales. En effet, dans le cas où il y a transition de phase, il est facile d'imaginer un exemple où ces deux probabilités seraient différentes. C'est pour cela que l'on introduit la définition suivante.

Définition 3.16. *La famille de mesures de Gibbs $(\tilde{P}^{\gamma})_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ est dite compatible si pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$, les probabilités $\tilde{P}^{\gamma\backslash\theta_i(\gamma)}$ et $\tilde{Q}_i^{\gamma}$ - définie par (3.25) - sont égales.*

D'après la remarque précédente, s'il n'y a pas de transition de phase pour les mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ d'hamiltonien $\tilde{H}$ et de mesure de référence ν, alors la famille $(\tilde{P}^{\gamma})_{\gamma\in\mathbb{R}^d}$ est automatiquement compatible.
Avant d'énoncer et de démontrer le théorème de recollement, il nous faut introduire la définition de famille faiblement compatible.

Définition 3.17. *La famille de mesures de Gibbs $(\tilde{P}^{\gamma})_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ est dite faiblement compatible si pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\tilde{Q}_i^{\gamma}$ définie par (3.25) ne dépend que de $\gamma\backslash\theta_i(\gamma)$; on la note alors $\tilde{P^*}^{\gamma\backslash x_i}$.*

Remarquons qu'une famille compatible est faiblement compatible et que dans ce cas $\tilde{P^*}^{\gamma\backslash x_i} = \tilde{P}^{\gamma\backslash x_i}$. De plus, si on suppose qu'il y a transition de phase pour les mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ définissant la famille $(P^{\gamma})_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$, alors il est facile de construire une famille faiblement compatible qui ne soit pas compatible. Les deux notions sont donc bien distinctes.

Théorème 3.18. *Soit H un hamiltonien local sur $\mathcal{C}$ et ν une mesure de $\mathbf{M}(\mathcal{C})$ admettant la représentation (3.22) ; soit P_0 une probabilité sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et $(\tilde{P}^{\gamma})_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ une famille de mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ d'hamiltonien $\tilde{H} = (\tilde{H}_{\{i\}})_{i\in\mathbb{N}^*}$ défini en (3.23) et de mesures de probabilité de référence $\otimes_{i\in\mathbb{N}^*}\nu^{\theta_i(\gamma)}$. On suppose que, pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$, $E_{\tilde{P}^{\gamma}}(e^{\tilde{H}_{\{i\}}}) < +\infty$, ce qui permet de définir l'hamiltonien local sur $\mathbb{R}^d$ suivant :*

$$h_0(\theta_i(\gamma),\gamma\backslash\theta_i(\gamma)) = \log\Big(E_{\tilde{P}^{\gamma}}(e^{\tilde{H}_{\{i\}}})\Big).$$

Si P_0 est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h,\nu_0)$, où h est un hamiltonien local quelconque sur $\mathbb{R}^d$, alors la probabilité P définie par

$$P = \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \tilde{P}^{\gamma} \circ \Theta \;\; P_0(d\gamma)$$

est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H + h - h_0,\nu)$ si et seulement si la famille $(\tilde{P}^{\gamma})_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ est faiblement compatible.
De plus, si P_0 est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(h,\nu_0)$, alors P est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(H + h - h_0,\nu)$ si et seulement si la famille $(\tilde{P}^{\gamma})_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ est compatible.

Preuve :
Soit P_0 un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h,\nu_0)$; d'après la Proposition 3.2, il existe

une mesure μ_0 sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$C^!_{P_0} = e^{-h}\nu_0 \otimes \mu_0. \tag{3.26}$$

Soit Q une mesure sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$; définissons, pour toute fonctionnelle F bornée mesurable, les deux quantités suivantes :

$$C^!_P\Bigg(\exp\Big(H(X,\Gamma) + h(X(0),\Gamma(0)) - h_0(X(0),\Gamma(0))\Big)F(X,\Gamma)\Bigg), \tag{3.27}$$

$$\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X,\Gamma)\nu(dX)\otimes Q(d\Gamma). \tag{3.28}$$

D'après la Proposition 3.2, P est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H+h-h_0,\nu)$ si et seulement si, pour une certaine mesure Q, les termes (3.27) et (3.28) sont égaux. Développons-les et montrons qu'il existe Q telle que (3.27) et (3.28) soient égaux si et seulement si la famille $(\tilde{P}^\gamma)$ est faiblement compatible. On aura alors montré la première partie du théorème.
Pour le premier terme (3.27) on a

$$\begin{aligned}
& C^!_P\Bigg(\exp\Big(H(X,\Gamma) + h(X(0),\Gamma(0)) - h_0(X(0),\Gamma(0))\Big)F(X,\Gamma)\Bigg) \\
= & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{C}} \exp\Big(H(X,\Gamma) + h(X(0),\gamma) - h_0(X(0),\gamma)\Big) \\
& \qquad\qquad F(X,\Gamma\backslash X)\Gamma(dX)P^\gamma(d\Gamma)P_0(d\gamma) \\
= & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \sum_{i\in\mathbb{N}^*} e^{h(\theta_i(\gamma),\gamma)}\Bigg(\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} \exp\Big(H(\Theta_i(\Gamma),\Gamma) - h_0(\theta_i(\gamma),\gamma)\Big) \\
& \qquad\qquad F(\Theta_i(\Gamma),\Gamma\backslash\Theta_i(\Gamma))P^\gamma(d\Gamma)\Bigg)P_0(d\gamma) \\
= & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \sum_{i\in\mathbb{N}^*} e^{h(\theta_i(\gamma),\gamma)}\Bigg(\int_{\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}} \frac{1}{E_{\tilde{P}^\gamma}(e^{\tilde{H}_{\{i\}}})} e^{\tilde{H}_{\{i\}}(w)} F(w_i,\sum_{j\neq i}\delta_{w_j})\tilde{P}^\gamma(dw)\Bigg)P_0(d\gamma) \\
= & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \sum_{i\in\mathbb{N}^*} e^{h(\theta_i(\gamma),\gamma)}\Bigg(\int_{\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}} F(w_i,\sum_{j\neq i}\delta_{w_j})\ \nu^{\theta_i(\gamma)}(dw_i)\otimes \\
& \qquad\qquad \tilde{Q}^\gamma_i(d(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots))\Bigg)P_0(d\gamma).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

La dernière égalité provient de (3.25). Décomposons maintenant la quantité (3.28) :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X,\Gamma)\nu(dX)\otimes Q(d\Gamma)\\
= &\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X,\Gamma)\nu^x(dX)\otimes Q^\gamma(d\Gamma)\right)\nu_0(dx)\otimes Q_0(d\gamma)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Supposons maintenant la famille $(\tilde{P}^\gamma)_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ faiblement compatible; alors, de l'égalité (3.29) on déduit que

$$\begin{aligned}
&C^!_P\left(\exp\Big(H(X,\Gamma)+h(X(0),\Gamma(0))-h_0(X(0),\Gamma(0))\Big)F(X,\Gamma)\right)\\
= &\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\sum_{i\in\mathbb{N}^*} e^{h(\theta_i(\gamma),\gamma)}\Bigg(\int_{\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}} F(w_i,\sum_{j\neq i}\delta_{w_j})\nu^{\theta_i(\gamma)}(dw_i)\otimes\\
&\qquad\qquad \tilde{P^*}^{\gamma\setminus x_i}(d(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots))\Bigg)P_0(d\gamma)\\
= &\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathbb{R}^d} e^{h(x,\gamma)}\left(\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X,\Gamma)\nu^x(dX)\otimes\tilde{P^*}^{\gamma\setminus x}\circ\Theta(d\Gamma)\right)\gamma(dx)P_0(d\gamma)\\
= &\,C^!_{P_0}\left(e^{h(x,\gamma)}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X,\Gamma)\nu^x(dX)\otimes\tilde{P^*}^{\gamma}\circ\Theta(d\Gamma)\right)\\
= &\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X,\Gamma)\nu^x(dX)\otimes\tilde{P^*}^{\gamma}\circ\Theta(d\Gamma)\right)\nu_0(dx)\otimes\mu_0(d\gamma).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Il est alors clair que (3.31) et (3.30) sont égaux si on pose $Q^\gamma=\tilde{P^*}^{\gamma}\circ\Theta$ et $Q_0=\mu_0$; par conséquent (3.27) et (3.28) sont égaux si on pose $Q=\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\tilde{P^*}^{\gamma}\circ\Theta\mu_0(d\gamma)$. On en déduit que P est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H+h-h_0,\nu)$.
Démontrons la réciproque, à savoir que la famille $(\tilde{P}^\gamma)_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ est faiblement compatible si on suppose que P est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H+h-h_0,\nu)$.
Soit P est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H+h-h_0,\nu)$; d'après la Proposition 3.2, il existe une mesure Q sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ telle que

$$C^!_P=e^{-(H+h-h_0)}\nu\otimes Q.$$

En projetant cette inégalité au temps $t=0$, on en déduit que

$$C^!_{P_0}\sim\nu_0\otimes Q_0;$$

or, d'après (3.26) on a

$$C^!_{P_0} \sim \nu_0 \otimes \mu_0,$$

ce qui, d'après la Proposition 3.2, entraîne qu'il existe une fonction mesurable f strictement positive de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$Q_0(d\gamma) = f(\gamma)\mu_0(d\gamma). \tag{3.32}$$

On peut ainsi développer l'expression (3.30) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X,\Gamma)\nu(dX)\otimes Q(d\Gamma)\\
=\;& \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} f(\gamma)F(X,\Gamma)\nu^x(dX)\otimes Q^\gamma(d\Gamma)\right)\nu_0(dx)\otimes\mu_0(d\gamma)\\
=\;& C^!_{P_0}\left(e^{h(x,\gamma)}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} f(\gamma)F(X,\Gamma)\nu^x(dX)\otimes Q^\gamma(d\Gamma)\right)\\
=\;& \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathbb{R}^d} e^{h(x,\gamma)}\left(\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} f(\gamma\backslash x)F(X,\Gamma)\nu^x(dX)\otimes Q^{\gamma\backslash x}(d\Gamma)\right)\gamma(dx)P_0(d\gamma)\\
=\;& \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\sum_{i\in\mathbb{N}^*} e^{h(\theta_i(\gamma),\gamma)}\left(\int_{\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}} F(w_i,\sum_{j\neq i}\delta_{w_j})\ \nu^{\theta_i(\gamma)}(dw_i)\otimes\right.\\
&\qquad\left.\left(f(\gamma\backslash\theta_i(\gamma))Q^{\gamma\backslash\theta_i(\gamma)}\circ\Theta^{-1}\right)(d(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots))\right)P_0(d\gamma).
\end{aligned}\tag{3.33}$$

De l'égalité entre (3.33) et (3.29), on déduit que pour P_0-presque tout γ et tout $i\in\mathbb{N}^*$,

$$\tilde{Q}_i^\gamma = f(\gamma\backslash\theta_i(\gamma))\ Q^{\gamma\backslash\theta_i(\gamma)}\circ\Theta^{-1}. \tag{3.34}$$

Il est alors clair que $\tilde{Q}_i^\gamma$ ne dépend que de $\gamma\backslash\theta_i(\gamma)$; la famille $(\tilde{P}^\gamma)_{\gamma\in M^d}$ est donc faiblement compatible.
Démontrons maintenant l'équivalence pour les champs de Gibbs : si P_0 est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(h,\nu_0)$, alors P est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(H+h-h_0,\nu)$ si et seulement si la famille $(\tilde{P}^\gamma)_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ est compatible.
On va reprendre les calculs de la preuve de l'équivalence précédente. Supposons que la famille $(\tilde{P}^\gamma)_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ soit compatible; alors d'après les calculs précédents on a que (3.27) et (3.28) sont égaux avec $Q=\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\tilde{P}^\gamma\circ\Theta\mu_0(d\gamma)$. Or, dans le cas où P_0 est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(h,\nu_0)$, $\mu_0=P_0$; par conséquent $Q=P$ et donc on a

$$C^!_P = e^{-(H+h-h_0)}\nu\otimes P,$$

ce qui prouve, d'après la Proposition 3.1, que P est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(H + h - h_0,\nu)$.
Réciproquement, supposons que P soit un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(H + h - h_0,\nu)$; alors d'après (3.34), on a que

$$\tilde{Q}_i^\gamma = f(\gamma\backslash\theta_i(\gamma)) \;\; P^{\gamma\backslash\theta_i(\gamma)} \circ \Theta^{-1}; \tag{3.35}$$

or, dans le cas où P_0 est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(h,\nu_0)$, la fonction f est égale à 1 et donc la famille $(\tilde{P}^\gamma)_{\gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ est compatible. ■

Dans le chapitre 4 qui suit, nous utiliserons ce Théorème 3.18 pour démontrer que la loi d'un système de particules browniennes en interaction est un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) sur $\mathcal{C}$ lorsque la condition initiale est un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique) sur $\mathbb{R}^d$. Nous utiliserons donc ce théorème de recollement exactement sous la forme énoncée ici. Néanmoins, il est possible de le généraliser dans un cadre bien plus large qui est celui des champs de Gibbs marqués. On obtient alors un théorème de construction de champs de Gibbs sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S})$, où $\mathbb{S}$ représente alors l'espace des marques.
Dans [3], les auteurs démontrent dans le cadre réseau, un lemme de recollement similaire à celui présenté ici. Leur condition nécessaire et suffisante pour que le recollement soit une mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}^d}$ est de nature différente de celle que nous proposons. En effet, il s'agit dans leur cas d'une condition d'indépendance de deux variables sous une mesure et dans le nôtre d'une condition de compatibilité d'une famille de mesures. Nous aurions pu construire une condition similaire à la leur, mais nous avons préféré développer un critère d'un autre type, à notre sens plus explicite.

Chapitre 4

Système de particules browniennes en interaction et champ de Gibbs associé sur $\mathcal{C}$.

L'objectif de ce chapitre est de présenter et d'étudier le système de particules browniennes en interaction et d'en exhiber ses propriétés gibbsiennes. Nous commencerons donc par sa présentation et nous donnerons le modèle physique sous-jacent dont il est inspiré. Ensuite des théorèmes d'existence et d'unicité seront rappelés. Cependant, notre propos n'est pas de construire des solutions de ce système mais d'en étudier les propriétés. La section 4.2 sera d'ailleurs consacrée à l'étude des propriétés de localité des solutions. Nous montrerons, par exemple, qu'il n'y a qu'un nombre fini de particules qui interagissent avec une particule donnée pendant un laps de temps fixé. Enfin la dernière section est le coeur de ce chapitre et de la thèse. On y démontre l'équivalence entre être la loi d'un système de particules browniennes en interaction et être un champ de Gibbs sur l'espace des trajectoires pour un hamiltonien local spécifique.

4.1 Système de particules browniennes en interaction

Dans cette section, nous allons définir le système de particules browniennes en interaction qui nous intéresse. L'interaction considérée sera toujours de type gradient et induite par un potentiel symétrique φ de classe C^3 et à support compact :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \varphi(x) = \varphi(-x) \text{ et } \exists R > 0 \text{ tel que } \varphi(x) = 0 \text{ pour } |x| > R.$$

De plus on suppose φ superstable. Ensuite, nous présenterons des résultats d'existence et d'unicité pour les solutions de tels systèmes. Les premiers résultats sont dus à R.

Lang en 1977 dans [32]; il démontre l'existence et l'unicité des solutions tempérées en régime stationnaire. Le cadre non stationnaire fut développé dix ans plus tard par J. Fritz dans [16]. Nous présenterons ces résultats dans le paragraphe 4.1.2.

4.1.1 Présentation du système

Le système de particules browniennes en interaction que nous considérons est un système infini de particules qui diffusent dans $\mathbb{R}^d$ de façon brownienne et dont l'interaction par paires entre les particules est induite par le gradient du potentiel φ. On modélise ce système par la diffusion infini-dimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} dX_i(t) = dW_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\nabla\varphi(X_i(t) - X_j(t))dt, \quad i \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1], \\ X_i(0) = x_i, \quad i \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{4.1}$$

où $(W_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite localement finie de points de $\mathbb{R}^d$.

Dans notre cas, on s'intéresse d'avantage au système (4.1) en terme de mesures ponctuelles; en posant $\Gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{X_i} \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $\gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{x_i} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, le système (4.1) s'écrit alors

$$\begin{cases} d\Theta_i(\Gamma)(t) = dW_i(t) - \frac{1}{2}\nabla_x h^\varphi\Big(\Theta_i(\Gamma)(t), \Gamma(t)\Big)dt, \qquad i \in \mathbb{N}^* \\ \Gamma(0) = \gamma, \end{cases} \tag{4.2}$$

où h^φ est l'hamiltonien local associé à φ défini en (3.10). Le propos de la section 4.3 est d'étudier la nature gibbsienne de la loi sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ des solutions du système (4.2). En effet, dans le Théorème 4.11, nous montrons que la loi de toute solution tempérée du système (4.2), dont la loi de la condition initiale est gibbsienne, est un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$ pour un certain hamiltonien que l'on précisera plus tard. Réciproquement, tout champ de Gibbs pour ce même hamiltonien est la loi de la solution tempérée du système (4.2). Étant donné que nous nous intéressons essentiellement au loi des solutions du système (4.2), nous donnons une version faible des solutions de ce système : soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$; alors la probabilité Q sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est solution faible du système infini-dimensionnel d'équations différentielles stochastiques de type gradient avec la condition initiale μ si

$$\begin{cases} i) \Big(\Theta_i(\Gamma)(t) - \Theta_i(\Gamma)(0) + \int_0^t \frac{1}{2}\nabla_x h^\varphi\Big(\Theta_i(\Gamma)(s), \Gamma(s)\Big)ds\Big)_{i\in\mathbb{N}^*} \\ \text{est une famille de } \mathcal{F}_t\text{-mouvements browniens de } \mathbb{R}^d \text{ indépendants sous } Q \\ ii) \; Q \circ pr_0^{-1} = \mu. \end{cases} \tag{4.3}$$

Une solution Q du système (4.3) sera dite réversible si, pour tout $t \in [0,1]$, les couples $(\Gamma(0),\Gamma(t))$ et $(\Gamma(t),\Gamma(0))$ ont même loi sous Q. De même, on dira que la solution est stationnaire si, pour tout $t \in [0,1]$, les processus $\Gamma(0)$ et $\Gamma(t)$ ont même loi sous Q. Il est alors évident que les solutions réversibles sont stationnaires. Dès que la solution du système (4.3) est unique parmi une classe de probabilités que l'on précisera plus tard, on la note alors Q^μ. On dit que μ est réversible (respectivement stationnaire) lorsque Q^μ est réversible (respectivement stationnaire). Rappelons maintenant les résultats existant dans la littérature, d'existence et d'unicité pour les solutions de ce type de systèmes.

4.1.2 Résultats d'existence et d'unicité

R. Lang fut le premier à étudier ce système (4.1) dans le cadre réversible. Dans [32], il prouve l'existence et l'unicité des solutions du système (4.1) dans le cas où la condition initiale, aléatoire, est un champ de Gibbs canonique d'hamiltonien local h^φ. Il démontre que ces champs de Gibbs canoniques sont les seules mesures réversibles pour cette diffusion, parmi une classe de mesures régulières et localement à densité. Il se place donc dans le cadre des processus stationnaires. Donnons précisément le théorème d'existence et d'unicité en question.

Théorème 4.1 (Satz 2 et Satz 3 [32]). *Soit μ un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h^\varphi,\lambda)$; alors il existe une unique solution Q^μ au système* (4.3) *telle que $\zeta_{\log} < +\infty$, Q^μ-presque-sûrement.*

Il y a donc existence et unicité des solutions stationnaires au système (4.3) au sein de la classe des probabilités sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ pour lesquelles la variable $\zeta_{\log}$ est finie presque-sûrement.
Par la suite, J. Fritz dans [16] prouve l'existence et l'unicité forte des solutions tempérées du système (4.2) pour $d \leq 4$ quand la condition initiale est déterministe et de fluctuation logarithmique d'énergie finie. Notre travail se basant essentiellement sur ces résultats, nous les rappelons dans le théorème suivant :

Théorème 4.2 (theorem 2 [16]). *Si $d \leq 4$, alors pour toute configuration tempérée $\gamma \in \mathcal{M}^\varphi_\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution forte tempérée pour le système* (4.2) *de condition initiale γ.*

On note $Q^\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^\varphi_\mathcal{E}(\mathcal{C}))$ la loi de la solution tempérée au système (4.2). Dans le Théorème 4.1, R. Lang prouve que la variable $\zeta_{\log}$ est finie sous la loi de la solution du système. J. Fritz ne donne pas de propriétés similaires dans [16]. Néanmoins, dans [17] les auteurs démontrent que les variables aléatoires ζ_η, $\eta \in]0,1[$, sont finies presque sûrement sous Q^γ. Un des objectifs de la section suivante est d'affiner ces résultats en donnant, de plus, une estimée de la queue de la loi des variables $\zeta_{\log}$ et ζ_η, $\eta \in]0,1[$.
La condition $d \leq 4$ est indispensable dans le Théorème 4.2; l'existence de solutions non stationnaires au système (4.2) en dimension $d > 4$ est un problème ouvert. De plus, le lemme 4.4 suivant, également dû à J. Fritz, n'est valide que dans le cas $d \leq 3$. Notre travail s'appuyant sur ces résultats, nous supposerons désormais dans la suite

de la thèse que $d \leq 3$, excepté dans le paragraphe 5.3 où le cas d quelconque sera envisagé et éclairci.

4.2 Étude des propriétés de localité

Comme écrit précédemment, l'un des objectifs de cette section est de donner des estimées de la queue de la loi sous Q^γ des variables $\zeta_{\log}$ et ζ_η, $\eta \in]0,1[$; un autre objectif sera de donner des estimées du nombre de particules qui interagissent au cours de la diffusion avec une particule donnée. Ces estimées nous seront par la suite très utiles pour contrôler la non explosion de la dérive et de l'hamiltonien dynamique du système (4.3).

4.2.1 Estimées de la loi des fonctions de fluctuations pondérées ζ_η et $\zeta_{\log}$

Pour $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ et $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, on pose comme précédemment $X_i = \Theta_i(\Gamma)$ et $x_i = \theta_i(\gamma)$. Notre étude de la localité consiste à estimer la queue des lois des variables aléatoires $\zeta_{\log}$ et ζ_η. Étant donné que $\zeta_\eta \leq \eta^{-1}\zeta_{\log}$, nous allons nous contenter de donner dans la proposition suivante l'estimée de $\zeta_{\log}$, mais il est évident que celle-ci est encore valable pour tout ζ_η, $\eta \in]0,1[$.

Proposition 4.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux réels a_3 et b_3 strictement positifs tels que, pour tout $\gamma \in \mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)$ et tout $u \geq 0$, on ait l'inégalité suivante*

$$Q^\gamma\left(\zeta_{\log} \geq u\right) \leq a_3 \mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2 \exp\left(-\frac{b_3}{\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2} u^{1-\varepsilon}\right). \tag{4.4}$$

En particulier, $\zeta_{\log}$ est finie Q^γ-presque sûrement, et a des moments de tous ordres sous Q^γ.

La preuve de cette proposition représente l'essentiel de ce paragraphe 4.2.1. Commençons par donner quelques lemmes préliminaires. Le premier est dû à J. Fritz et concerne l'estimée de la queue de la loi de la variable $\|\Gamma\|_{\mathcal{E}_\varphi}$.

Lemme 4.4 ([16] Proposition 2). *Soit $d \leq 3$; alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe deux réels a_4 et b_4 strictement positifs tels que, pour tout $\gamma \in \mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)$ et tout $u > 0$ on ait l'inégalité*

$$Q^\gamma(\|\Gamma\|_{\mathcal{E}_\varphi} > u) \leq a_4 \exp\left(-\frac{b_4}{\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2} u^{1-\varepsilon}\right).$$

On note $\overline{N}(t,k)$ pour $t \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, le nombre aléatoire de particules au temps t dans la boule centrée en $X_k(t)$ et de rayon R:

$$\overline{N}(t,k) = \Gamma\big(B(X_k(t),R)\big)$$

et N la variable aléatoire suivante

$$N = 1 + \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \sup_{0\le t\le 1} \frac{\overline{N}(t,k)}{1+\ln(1+|X_k(t)|)} = 1 + \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \sup_{0\le t\le 1} \frac{\overline{N}(t,k)}{g(|X_k(t)|)^d},$$

où g est la fonction définie en (2.24). On a le lemme suivant

Lemme 4.5. *Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe deux réels a_5 et b_5 strictement positifs tels que, pour tout $\gamma \in \mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)$ et tout $u \geq 0$, on ait l'inégalité*

$$Q^\gamma(N \geq u) \leq a_5 \exp\left(-\frac{b_5}{\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2} u^{1-\epsilon} \right).$$

En particulier, N est fini Q^γ-presque sûrement.

Preuve :

On pose $R' = e^{\left((R+\sqrt{d})^d-1\right)} - 1$; ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|x| \geq R'$, alors

$$\exists l \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } |x-l| < \sqrt{d} \text{ et } B(x,R) \subset B\left(l,g(|l|)\right); \tag{4.5}$$

Soit $t \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent :

Soit $|X_k(t)| \leq R'$; alors $B(X_k(t),R) \subset B(0,R'+R)$, et en utilisant le lemme 2.25 on obtient

$$\overline{N}(t,k) \leq \|\Gamma\|_{\mathcal{E}_\varphi}(R'+R+1)^d.$$

Soit $|X_k(t)| > R'$; alors par (4.5) il existe un point l du réseau $\mathbb{Z}^d$ tel que $B(X_k(t),R) \subset B(l,g(|l|))$ et grâce au lemme 2.25, on en déduit

$$\overline{N}(t,k) \leq g(|l|)^d \|\Gamma\|_{\mathcal{E}_\varphi} \leq g(|X_k(t)| + \sqrt{d})^d \|\Gamma\|_{\mathcal{E}_\varphi}.$$

Par conséquent,

$$N \leq 1 + \|\Gamma\|_{\mathcal{E}_\varphi} \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \sup_{0\le t\le 1} \max\left(\frac{g(|X_k(t)|+\sqrt{d})^d}{g(|X_k(t)|)^d}, (R'+R+1)^d \right);$$

or, la fonction $\frac{g(x+\sqrt{d})^d}{g(x)^d}$ étant bornée, on en déduit aisément, grâce au lemme 4.4, les estimées souhaitées pour la queue de la variable N. ■

On note $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la famille suivante de processus :

$$B_k(t) = X_k(t) - X_k(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i\neq k} \nabla\varphi(X_k(s) - X_i(s))ds. \tag{4.6}$$

Notons que la famille $(B_k(t))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de mouvements browniens indépendants sous Q^γ.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|X_k(t) - X_k(0)| \leq \int_0^t \sum_{i \neq k} \frac{1}{2} |\nabla \varphi(X_k(s) - X_i(s))| ds + |B_k(t)|.$$

On en déduit

$$|X_k(t) - X_k(0)| \leq (\frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_\infty + 1) N \int_0^t g(X_k(s))^d ds + |B_k(t)|.$$

On rajoute 1 à la constante multiplicative $\frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|_\infty$ pour s'assurer que cette constante soit strictement positive. Si on pose $\overline{X}_k = \sup_{0 \leq t \leq 1} |X_k(t) - X_k(0)|$ la variable aléatoire de la variation de la trajectoire de la $k$ième particule par rapport à sa position initiale, alors on a

$$\overline{X}_k \leq \xi \Big(g(|X_k(0)|)^d + g(\overline{X}_k)^d \Big), \tag{4.7}$$

où ξ est la variable aléatoire

$$\xi = \Big(\frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_\infty + 1\Big) \Big(N + \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|B_k(t)|}{g(|X_k(0)|)^d} \Big).$$

Montrons le lemme suivant.

Lemme 4.6. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux réels a_6 et b_6 strictement positifs tels que, pour tout $\gamma \in \mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)$ et tout $u \geq 0$, on ait l'inégalité suivante*

$$Q^\gamma(\xi \geq u) \leq a_6 \mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2 \exp\left(-\frac{b_6}{\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2} u^{1-\varepsilon} \right);$$

en particulier, ξ est finie $Q^\gamma-$presque sûrement.

Preuve :

Grâce au lemme 4.5, il suffit de contrôler la loi de la queue de la variable aléatoire

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|B_k(t)|}{g(|X_k(0)|)^d}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in \mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)$; de la loi du suprémum du mouvement brownien on déduit qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $u \geq 0$,

$$Q^\gamma \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_k(t)| \geq u g(|X_k(0)|)^d \right) \leq C_1 \exp\Big(-\frac{1}{2} u^2 g(|X_k(0)|)^{2d} \Big).$$

Pour $u \geq 1$, on en déduit

$$Q^\gamma \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_k(t)| \geq u g(|X_k(0)|)^d \right) \leq C_1 \exp\Big(-\frac{1}{4} u^2 \Big) \exp\Big(-\frac{1}{4} g(|X_k(0)|))^{2d} \Big).$$

Remarquons que $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\exp\Big(-\frac{1}{4}g(|X_k(0)|)^{2d}\Big)$ est finie et donnons-en une majoration en fonction de $\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$. Il existe une constante $C_2>0$ telle que

$$\forall x\geq C_2,\quad g(x)^{2d}\geq 8d\ln(x).$$

Ainsi, en utilisant le lemme 2.25, on obtient pour k plus grand que $k_0=\mathcal{E}_\varphi(\gamma)C_2^d+1$

$$\exp\Big(-\frac{1}{4}g(|X_k(0)|)^{2d}\Big)\ \leq\ \frac{\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^1}{(k-1)^2}.$$

Par conséquent il existe une constante $C_3>0$ telle que

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\exp\Big(-\frac{1}{4}g(|X_k(0)|)^{2d}\Big)\ &\leq\ \mathcal{E}_\varphi(\gamma)C_2^d+\sum_{k\geq k_0}\exp\Big(-\frac{1}{4}g(|X_k(0)|)^{2d}\Big)\\ &\leq\ C_3\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2\end{aligned}\tag{4.8}$$

On en déduit que, pour tout $u>1$,

$$Q^\gamma\left(\sup_{k\in\mathbb{N}^*}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|B_k(t)|}{g(|X_k(0)|)^d}\geq u\right)\leq C_1C_3\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2e^{-\frac{1}{4}u^2}.$$

Il existe donc une constante $C_4>0$ telle que, pour tout $u>0$,

$$Q^\gamma\left(\sup_{k\in\mathbb{N}^*}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|B_k(t)|}{g(|X_k(0)|)^d}\geq u\right)\leq C_4\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2e^{-\frac{1}{4}u}.$$

En compilant ce résultat avec le lemme 4.5, on prouve le lemme 4.6. ■
Nous pouvons désormais terminer la preuve de la Proposition 4.3. Revenons à l'inégalité (4.7)

$$\overline{X}_k-\xi\big(1+\ln(1+\overline{X}_k)\big)\leq\xi\big(1+\ln(1+|X_k(0)|)\big).$$

Pour résoudre cette inégalité, démontrons le lemme technique suivant dont nous n'utiliserons qu'une partie des résultats; le lemme dans sa globalité nous servira dans le paragraphe suivant.

Lemme 4.7. *Pour tout $\eta\in]0,1[$, il existe une constante strictement positive $C(\eta)$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ et tout $\tau>0$,*

$$x-\tau(1+\ln(1+x))\geq\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\tau\ln(2\tau),\tag{4.9}$$

$$x-\tau(1+x)^\eta\geq\frac{1}{2}x-1-C(\eta)\tau^{\frac{1}{1-\eta}}.\tag{4.10}$$

Preuve :
En étudiant la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x - \tau(1+\ln(1+x))$, on constate que sa dérivée s'annule en $2\tau - 1$. Le minimum de cette fonction est donc atteint en cette valeur et vaut $-\frac{1}{2} - \tau\ln(2\tau)$. La première inégalité est donc démontrée. Pour la seconde, on utilise la même démarche et on obtient le résultat attendu. ■
Des inégalités (4.7) et (4.9), on déduit

$$\overline{X}_k \quad \leq \quad 1 + 2\xi\ln(2\xi) + 2\xi g(|X_k(0)|)^d.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_5 > 0$ telle que

$$\overline{X}_k \quad \leq \quad C_5 \xi^{\frac{1}{1-\varepsilon}} g(|X_k(0)|)^d. \tag{4.11}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & Q^\gamma\left(\sup_{k\in\mathbb{N}^*}\sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|X_k(t)-X_k(0)|}{g(|X_k(0)|)^d}\geq u\right) \\ \leq\ & Q^\gamma\left(\xi\geq\left(\frac{u}{C_5}\right)^{1-\varepsilon}\right) \\ \leq\ & a_6\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2\exp\left(-\frac{b_6}{\mathcal{E}_\varphi(\gamma)^2 C_5^{(1-\varepsilon)}}u^{1-\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

où a_6, b_6 sont les constantes associées à ε dans le lemme 4.6. La propriété (4.4) est alors démontrée. ■
Donnons un corollaire de la Proposition 4.3; ce sera d'avantage sous cette forme que nous utiliserons la propriété de localité de la dynamique.
Corollaire 4.8. *Soit μ un champ de Gibbs d'hamiltonien local h^ψ, où ψ est une interaction superstable inférieurement régulière; alors pour tout $\eta \in]0,1[$, les variables ζ_η et $\zeta_{\log}$ admettent des moments de tous ordres sous Q^μ.*

Preuve : démontrons le corollaire pour la variable $\zeta_{\log}$. L'inégalité $\zeta_\eta \leq \eta^{-1}\zeta_{\log}$ permet de conclure dans le cas général. Estimons donc la queue de la variable $\zeta_{\log}$ sous Q^μ. D'après les Propositions 4.3, 2.23 et en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned} Q^\mu\Big(\zeta_{\log}\geq u\Big) \quad &\leq \quad Q^\mu\Big(\zeta\geq u, \mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0))\leq u^{\frac{1}{5}}\Big) + Q^\mu\Big(\zeta\geq u, \mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0))\geq u^{\frac{1}{5}}\Big) \\ &\leq \quad a_1 u^{\frac{2}{5}}\exp\Big(-b_1 u^{\frac{1}{10}}\Big) + a_4\exp(-b_4 u^{\frac{1}{5}}). \end{aligned}$$

Il est alors clair que $\zeta_{\log}$ admet des moments de tous ordres sous Q^μ. ■

Ce résultat est extrêmement important, car il prouve la localité de la dynamique du système (4.3) pour les solutions tempérées, c'est à dire que l'on sait majorer précisément l'ordre de grandeur des fluctuations des particules autour de leur position initiale.

4.2.2 Estimée du nombre de particules en interaction

Dans un premier temps, nous allons contrôler l'emplacement initial des particules qui s'approchent à un moment quelconque à une distance inférieure à $2R$ de la particule X_{i_0}, où i_0 est un entier fixé jusqu'à la fin de ce paragraphe 4.2.2. Par la suite, nous donnerons une estimation du nombre de particules susceptibles de s'approcher à distance $2R$ de la particule X_{i_0}. On fixe également $\eta \in]0,1[$.

Lemme 4.9. *Il existe deux fonctions K_1 et K_2 croissantes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que, pour tout Γ vérifiant $\zeta_\eta(\Gamma) < +\infty$ et pour lequel*

$$\exists i \in \mathbb{N}^*, \exists t \in [0,1] \text{ tel que } |X_i(t) - X_{i_0}(t)| \leq 2R,$$

alors

$$|X_i(0)| \leq K_1(|X_{i_0}(0)|) + K_2(|X_{i_0}(0)|)\zeta^{\frac{1}{1-\eta}}. \tag{4.12}$$

De plus, si $\zeta_{\log} < +\infty$, alors

$$|X_i(0)| \leq K_1(|X_{i_0}(0)|) + K_2(|X_{i_0}(0)|)\zeta_{\log}\ln(\zeta_{\log}). \tag{4.13}$$

Preuve :
Soit $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ tel que $\zeta_\eta(\Gamma) < +\infty$. On rappelle que $x_i = X_i(0)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$ vérifiant $|X_i(t) - X_{i_0}(t)| \leq 2R$; alors on a

$$\begin{aligned} |x_i| &\leq |X_i(t) - x_i| + |X_i(t) - X_{i_0}(t)| + |X_{i_0}(t) - x_{i_0}| + |x_{i_0}| \\ &\leq \zeta(1+|x_i|)^\eta + 2R + \zeta(1+|x_{i_0}|)^\eta + |x_{i_0}|, \end{aligned}$$

donc

$$|x_i| - \zeta(1+|x_i|)^\eta \leq \zeta(1+|x_{i_0}|)^\eta + 2R + |x_{i_0}|. \tag{4.14}$$

En utilisant l'inégalité (4.10), on prouve facilement (4.12). L'inégalité (4.13) se démontre de la même manière en utilisant (4.9). ■

Soit β_η et $\beta_{\log}$, les fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\beta_\eta(z,\gamma,i) = \gamma\left(B\left(0,K_1(|x_i|) + K_2(|x_i|)z^{\frac{1}{1-\eta}}\right)\right),$$

$$\beta_{\log}(z,\gamma,i) = \gamma\left(B\left(0,K_1(|x_i|) + K_2(|x_i|)z\ln(z)\right)\right).$$

Pour $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ satisfaisant $\zeta_\eta(\Gamma) < +\infty$ (respectivement $\zeta_{\log}(\Gamma) < +\infty$), $\beta_\eta(\zeta_\eta,\Gamma(0),i_0)$ (respectivement $\beta_{\log}(\zeta_{\log},\Gamma(0),i_0)$) est un majorant du nombre de particules susceptibles de passer à un moment à une distance inférieure ou égale à $2R$ de la particule i_0.

Cette distance de sécurité de $2R$ est fondamentale pour la suite, car elle correspond à la portée de l'hamiltonien $H^\Phi(X,\Gamma)$ que l'on va analyser dans la section 4.3 qui suit. Grâce aux estimées précises de la fonction β_η et $\beta_{\log}$, données par le lemme 4.10 qui suit, et grâce à la Proposition 4.3 nous allons pouvoir nous ramener par la suite et pour certaines démonstrations au cadre réseau développé dans [3].En effet, nous allons contrôler le "brassage" des particules au cours de leur évolution, et transformer la notion de voisinage d'un point au sein d'une mesure ponctuelle en une notion de voisinage de type réseau qui concerne d'avantage les numéros des particules.

Lemme 4.10. *Il existe deux fonctions K_3 et K_4 de $\mathcal{M}^\varphi_\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que, pour tout $z\in\mathbb{R}^+$,$\gamma\in\mathcal{M}^\varphi_\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ et $i\in\mathbb{N}^*$,*

$$\beta_\eta(z,\gamma,i)\leq K_3(\gamma,i)+K_4(\gamma,i)z^{\frac{d}{1-\eta}},$$

$$\beta_{\log}(z,\gamma,i)\leq K_3(\gamma,i)+K_4(\gamma,i)z^d\ln^d(z).$$

De plus, si i et γ,γ' vérifient $\mathcal{E}_\varphi(\gamma)\leq\mathcal{E}_\varphi(\gamma')$ et $|\theta_i(\gamma)|\leq|\theta_i(\gamma')|$ alors

$$K_3(\gamma,i)\leq K_3(\gamma',i)\ \text{et}\ K_4(\gamma,i)\leq K_4(\gamma',i).$$

Preuve :
D'après le lemme 2.19, pour tout $\gamma\in\mathcal{M}^\varphi_\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, le nombre de points dans la boule $B\Big(0,K_1(|x_i|)+K_2(|x_i|)z^{\frac{1}{1-\eta}}\Big)$ est dominé par $(K_1(|x_i|)+K_2(|x_i|)z^{\frac{1}{1-\eta}})^d\mathcal{E}_\varphi(\gamma)$. En couplant cette remarque avec le lemme 4.9 on prouve immédiatement les propriétés attendues de la fonction β_η. On fait de même pour la fonction $\beta_{\log}$. ■

4.3 Système de particules browniennes en tant que champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$

L'objectif de cette section est de montrer que la probabilité solution du système (4.3) dont la condition initiale est un champ de Gibbs μ d'hamiltonien local h est un champ de Gibbs sur l'espace des trajectoires, d'hamiltonien local $h\circ pr_0+H^\Phi$, où H^Φ est un hamiltonien local que l'on explicitera ci-dessous. Réciproquement, on montre également que les champs de Gibbs sur $\mathcal{C}$ dont l'hamiltonien local est de la forme $h\circ pr_0+H^\Phi$ sont, sous certaines hypothèses, les probabilités solutions de systèmes de type (4.3) avec comme condition initiale un champ de Gibbs d'hamiltonien h .
Avant d'énoncer précisement notre théorème, présentons l'hamiltonien local H^Φ.

Pour $X \in \mathcal{C}$ et $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, on pose

$$\begin{aligned}
H^{\Phi}(X,\Gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{Y \in \Gamma \setminus X} \Big(\varphi(X(1) - Y(1)) - \varphi(X(0) - Y(0)) \\
&\qquad - \int_0^1 (\Delta\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2)(X(s) - Y(s))ds \Big) \\
&\quad + \sum_{\{Y,Z\} \subset \Gamma \setminus X} \frac{1}{4} \int_0^1 \Big[\nabla\varphi(X(s) - Y(s)).\nabla\varphi(X(s) - Z(s)) \\
&\qquad + \nabla\varphi(Y(s) - X(s)).\nabla\varphi(Y(s) - Z(s)) \\
&\qquad + \nabla\varphi(Z(s) - X(s)).\nabla\varphi(Z(s) - Y(s)) \Big] ds. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Notons que H^{Φ} provient de l'interaction par paires et par triplets Φ suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi(\{X,Y\}) &= \frac{1}{2} \Big(\varphi(X(1) - Y(1)) - \varphi(X(0) - Y(0)) \\
&\qquad - \int_0^1 (\Delta\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2)(X(s) - Y(s))ds \Big) \\
\Phi(\{X,Y,Z\}) &= \frac{1}{4} \int_0^1 \Big[\nabla\varphi(X(s) - Y(s)).\nabla\varphi(X(s) - Z(s)) \\
&\qquad + \nabla\varphi(Y(s) - X(s)).\nabla\varphi(Y(s) - Z(s)) \\
&\qquad + \nabla\varphi(Z(s) - X(s)).\nabla\varphi(Z(s) - Y(s)) \Big] ds. \\
\Phi(\mathcal{K}) &= 0 \qquad\qquad \text{pour } \mathrm{Card}(\mathcal{K}) \notin \{2,3\}
\end{aligned}$$

$H^{\Phi}(X,\Gamma)$ n'est pas définie pour tout $X \in \mathcal{C}$ et tout $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. Pour le moment, l'hamiltonien local H^{Φ} n'est donc défini que formellement. On verra par la suite qu'on peut le définir presque sûrement. Énonçons maintenant le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 4.11. *Soit h un hamiltonien local sur $\mathbb{R}^d$ et m une mesure de référence σ-finie de $\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$; alors les deux assertions suivantes sont vraies :*

$$\text{pour tout } \mu \in \mathcal{G}(h,m) \ \varphi\text{-tempérée, alors } Q^\mu \in \mathcal{G}(h \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m);$$

$$\text{pour tout } \mu \in \mathcal{G}_c(h,m) \ \varphi\text{-tempérée, alors } Q^\mu \in \mathcal{G}_c(h \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m).$$

Réciproquement, soit P un champ de Gibbs canonique tempéré de $\mathcal{G}_c\big(h \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m\big)$. S'il existe $\eta \in]0,1[$ tel que la variable ζ_η admet un moment d'ordre $\frac{2d}{1-\eta}$ sous P, alors P est la loi Q^μ solution du système (4.3), où la loi initiale $\mu = P_0$ est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h,m)$. De plus, si $P \in \mathcal{G}\big(h \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m\big)$, alors $P_0 \in \mathcal{G}(h,m)$.

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, faisons une remarque sur l'hypothèse d'intégrabilité de la variable ζ_η introduite dans la seconde partie du théorème. Le corollaire 4.8 prouve que cette hypothèse est raisonnable, puisque la variable ζ_η a des moments de tous ordres sous Q^μ pour une classe très large de mesures μ.

Preuve du Théorème 4.11 : Sens direct

Commençons par démontrer la première partie du théorème en donnant tout d'abord un lemme exhibant une propriété de découplage pour le modèle continu que l'on considère. En effet, la loi du système dans lequel on isole une particule sans modifier les interactions, est la loi du système dans lequel on remplace cette particule par une particule libre, sans interaction avec le reste du système, pourvu que l'on corrige par l'adjonction d'une fonction de densité qui est, en fait, l'énergie locale.

Lemme 4.12. *Soit $\gamma \in \mathcal{M}^\varphi_\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$; pour tout $i_0 \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction F mesurable et bornée de $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$ dans $\mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} \exp\Big(H^\Phi(\Theta_{i_0}(\Gamma),\Gamma)\Big) F(\Theta_{i_0}(\Gamma),\Gamma\backslash\Theta_{i_0}(\Gamma)) Q^\gamma(d\Gamma) \\ = \ &\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{C}} F(X,\Gamma) Q^{\gamma\backslash\theta_{i_0}(\gamma)} \otimes \varpi^{\theta_{i_0}(\gamma)}(d\Gamma,dX). \end{aligned}$$

Preuve :
Il faut tout d'abord noter que le lemme 4.9 permet de donner un sens à l'expression formelle de l'hamiltonien H^Φ (4.15) pour Γ vérifiant $\zeta_{\log}(\Gamma) < +\infty$, ceci étant satisfait $Q^\gamma-$p.s. grâce à la Proposition 4.3. En effet, les sommes qui interviennent dans la formule (4.15) sont finies Q^γ-presque sûrement : pour $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ satisfaisant

$\zeta_{\log}(\Gamma) < +\infty$, on a d'après la décomposition $\Gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \delta_{X_i}$,

$$\begin{aligned} H^\Phi(X_{i_0},\Gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i\neq i_0 \\ 1\leq i\leq \beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)}} \Big(\varphi(X_{i_0}(1) - X_i(1)) - \varphi(X_{i_0}(0) - X_i(0)) \\ &\quad - \int_0^1 \Big(\Delta\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\Big)(X_{i_0}(s) - X_i(s))ds \Big) \\ &+ \sum_{\substack{i,j\neq i_0 \\ 1\leq i<j\leq \beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)}} \frac{1}{4}\int_0^1 \Big(\nabla\varphi(X_{i_0}(s) - X_i(s)).\nabla\varphi(X_{i_0}(s) - X_j(s)) \\ &\quad + \nabla\varphi(X_i(s) - X_{i_0}(s)).\nabla\varphi(X_i(s) - X_j(s)) \\ &\quad + \nabla\varphi(X_j(s) - X_{i_0}(s)).\nabla\varphi(X_j(s) - X_i(s)) \Big) ds. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Nous allons transformer l'hamiltonien local pour que $e^{H(X,\Gamma)}$ apparaisse comme une $Q^\gamma-$martingale exponentielle. On ne va pas réduire brutalement les sommes a priori infinie de la formule (4.15) comme dans (4.16) car on veut mettre en évidence la famille, définie en (4.6), de processus $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui apparaît dans $H(X,\Gamma)$ et qui est, sous Q^γ, une famille de mouvements browniens indépendants. On part donc de l'expression initiale tout en sachant que celle-ci est parfaitement définie pour Γ vérifiant $\zeta_{\log}(\Gamma) < +\infty$, hypothèse que l'on suppose vérifiée dans la suite des calculs. On a donc

$$\begin{aligned} H^\Phi(X,\Gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{Y\in\Gamma\setminus X} \Big(\varphi(X(1) - Y(1)) - \varphi(X(0) - Y(0)) \\ &\quad - \int_0^1 \Big(\Delta\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\Big)(X(s) - Y(s))ds \Big) \\ &+ \sum_{\{Y,Z\}\subset\Gamma\setminus X} \frac{1}{4}\int_0^1 \Big(\nabla\varphi(X(s) - Y(s)).\nabla\varphi(X(s) - Z(s)) \\ &\quad + \nabla\varphi(Y(s) - X(s)).\nabla\varphi(Y(s) - Z(s)) \\ &\quad + \nabla\varphi(Z(s) - X(s)).\nabla\varphi(Z(s) - Y(s)) \Big) ds. \end{aligned}$$

Regroupons différemment les termes, pour obtenir

$$\begin{aligned}
H^{\Phi}(X,\Gamma) &= \frac{1}{2}\sum_{Y\in\Gamma\setminus X}\left(\varphi(X(1)-Y(1))-\varphi(X(0)-Y(0))-\int_0^1\Delta\varphi(X(s)-Y(s))ds\right)\\
&-\sum_{Y\in\Gamma\setminus X}\frac{1}{2}\int_0^1\nabla\varphi(X(s)-Y(s)).\sum_{Z\in\Gamma\setminus Y}\frac{1}{2}\nabla\varphi(Y(s)-Z(s))\\
&+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{4}\left|\sum_{Y\in\Gamma\setminus X}\nabla\varphi(X(s)-Y(s))\right|^2 ds\\
&-\frac{1}{2}\sum_{Y\in\Gamma\setminus X}\int_0^1\frac{1}{4}\left|\nabla\varphi(X(s)-Y(s))\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la représentation de Γ sous la forme $\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\delta_{X_i}$, on obtient

$$\begin{aligned}
H^{\Phi}(X_{i_0},\Gamma) &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\left(\varphi(X_{i_0}(1)-X_i(1))-\varphi(X_{i_0}(0)-X_i(0))-\int_0^1\Delta\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))ds\right)\\
&-\sum_{i\neq i_0}\frac{1}{2}\int_0^1\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s)).\sum_{j\neq i}\frac{1}{2}\nabla\varphi(X_i(s)-X_j(s))\\
&+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{4}\left|\sum_{i\neq i_0}\nabla\varphi(X_{i_o}(s)-X_i(s))\right|^2 ds\\
&-\frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\int_0^1\frac{1}{4}\left|\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))\right|^2 ds. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Par hypothèse, remarquons que la famille de processus $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de mouvements browniens indépendants sous Q^{γ}. En appliquant la formule d'Itô pour chaque $i\in\mathbb{N}^*$ différent de i_0 on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(X_{i_0}(1)-X_i(1))-\varphi(X_{i_0}(0)-X_i(0)) &= \int_0^1\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))(dX_{i_0}(s)-dX_i(s))\\
&+\int_0^1\Delta\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))ds.
\end{aligned}$$

En insérant ce résultat dans la formule (4.17) on trouve

$$\begin{aligned} H^{\Phi}(X_{i_0},\Gamma) &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\left(\int_0^1 \nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))dX_{i_0}(s)-\int_0^1 \nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))dX_i(s)\right)\\ &-\sum_{i\neq i_0}\frac{1}{2}\int_0^1 \nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s)).\sum_{j\neq i}\frac{1}{2}\nabla\varphi(X_i(s)-X_j(s))ds\\ &+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{4}\left|\sum_{i\neq i_0}\nabla\varphi(X_{i_o}(s)-X_i(s))\right|^2 ds\\ &-\frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\int_0^1\frac{1}{4}\left|\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))\right|^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{\Phi}(X_{i_0},\Gamma) &= \int_0^1 \frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))dB_{i_0}(s) && (4.18)\\ &+\sum_{i\neq i_0}\int_0^1 -\frac{1}{2}\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))dB_i(s)\\ &-\frac{1}{2}\int_0^1\left|\frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\nabla\varphi(X_{i_o}(s)-X_i(s))\right|^2 ds\\ &-\frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\int_0^1\left|\frac{1}{2}\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))\right|^2 ds. && (4.19) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant exploiter le fait que $\zeta_{\log}(\Gamma)<+\infty$. Les sommes infinies qui apparaissent dans l'égalité (4.18) sont en fait finies et contiennent au plus $\beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)$ termes non nuls.

$$\begin{aligned} H^{\Phi}(X_{i_0},\Gamma) &= \int_0^1\frac{1}{2}\sum_{\substack{i\neq i_0\\ 1\leq i\leq\beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)}}\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))dB_{i_0}(s)\\ &-\frac{1}{2}\int_0^1\left|\frac{1}{2}\sum_{\substack{i\neq i_0\\ 1\leq i\leq\beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)}}\nabla\varphi(X_{i_o}(s)-X_i(s))\right|^2 ds\\ &+\sum_{\substack{i\neq i_0\\ 1\leq i\leq\beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)}}\int_0^1 -\frac{1}{2}\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))dB_i(s)\\ &-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i\neq i_0\\ 1\leq i\leq\beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)}}\int_0^1\left|\frac{1}{2}\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))\right|^2 ds. \end{aligned}$$

Sous cette forme l'hamiltonien local apparaît comme le log d'une martingale locale exponentielle. On définit la famille de processus $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$A_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{j\neq i_0 \\ 1\leq j\leq \beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)}} \nabla\varphi(X_{i_0}(s) - X_j(s)) & \text{si } i = i_0 \\ \frac{1}{2}\nabla\varphi(X_i(s) - X_{i_0}(s)) & \text{si } i \neq i_0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Remarquons que le processus A_i est adapté malgré une définition qui fait intervenir la variable aléatoire $\zeta_{\log}$ qui est $\mathcal{F}_1$-mesurable. En fait, nous aurions pu écrire une somme infinie, le processus A_i aurait été identique. Nous avons préféré tronquer la somme pour indiquer qu'elle est finie Q^γ-presque sûrement.
On note $M = (M_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la martingale locale infini-dimensionnelle sous Q^γ suivante :

$$M_i(t) = \int_0^t A_i(s)dB_i(s).$$

Alors, on a

$$\exp\left(H^\Phi(X_{i_0},\Gamma)\right) = \mathcal{E}xp(M)(1) \qquad Q^\gamma - p.s.$$

où $\mathcal{E}xp(M)$ représente la martingale locale exponentielle de M,

$$\mathcal{E}xp(M)(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\left(M_i(t) - \frac{1}{2} < M_i > (t)\right)\right). \tag{4.21}$$

Remarquons que le processus $(C_i^{i_0})_{i\in\mathbb{N}^*}$ défini comme ceci

$$C_i^{i_0}(t) = -\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\nabla\varphi(X_i(t) - X_j(t)) + A_i(t), \quad t\in[0,1],$$

représente la dérive d'un système de type (4.1), mais où la particule i_0 est découplée du reste du système. On note $Q_{i_0}^\gamma$ la loi de ce système, c'est à dire que

$$Q_{i_0}^\gamma = Q^{\gamma\setminus x_{i_0}} \otimes \varpi^{x_{i_0}}.$$

Revenons à la preuve du lemme 4.12; on souhaiterait appliquer une version infini-dimensionnelle du théorème de Girsanov. En effet on montrerait que Q^γ est absolument continue par rapport à $Q_{i_0}^\gamma$ avec pour densité $\mathcal{E}xp(M)(1)$. Or, il faudrait prouver que la martingale locale $\mathcal{E}xp(M)$ est une martingale, ce qui est difficile à priori dans notre cas, car la dérive n'est pas bornée et la martingale $M(t)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. En fait, nous allons obtenir cette propriété comme conséquence de résultats généraux de J. Jacod (théorèmes 12.57 et 12.73 de [Ja]) qui affirment que $Q_{i_0}^\gamma$ est absolument continue par rapport Q^γ avec $\mathcal{E}xp(M)(1)$ pour densité dès que

$$\sum_i \int_0^1 |A_i(t)|^2 dt < +\infty \qquad Q_{i_0}^\gamma\text{-p.s.} \quad ;$$

or,

$$\sum_i \int_0^1 |A_i(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \neq i_0 \\ j \leq \beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)}} \nabla\varphi(X_j(t) - X_{i_0}(t)) \right|^2 dt$$

$$+ \sum_{\substack{i \neq i_0 \\ i \leq \beta_{\log}(\zeta_{\log},\gamma,i_0)}} \frac{1}{4} \int_0^1 |\nabla\varphi(X_i(t) - X_{i_0}(t))|^2 dt. \tag{4.22}$$

D'après la Proposition 4.3, on sait que la variable $\zeta_{\log}$ est finie Q^γ presque sûrement. Dans le cas présent, c'est la finitude de $\zeta_{\log}$ sous $Q^\gamma_{i_0}$ qui nous intéresse; pour cela il suffit de remarquer que

$$\zeta_{\log} = \max\left(\sup_{k \neq i_0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|X_k(t) - x_k|}{g^d(|x_k|)}, \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|X_{i_0}(t) - x_{i_0}|}{g^d(|x_{i_0}|)} \right)$$

et que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|X_{i_0}(t) - x_{i_0}|}{g^d(|x_{i_0}|)} < +\infty \qquad \varpi^{x_{i_0}}\text{-p.s.},$$

et

$$\sup_{k \neq i_0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|X_k(t) - x_k|}{g^d(|x_k|)} < +\infty \qquad Q^{\gamma \backslash x_{i_0}}\text{-p.s.}$$

Ainsi, les sommes dans le terme de droite de l'égalité (4.22) sont finies $Q^\gamma_{i_0}$-p.s. et leurs termes bornées. On en déduit

$$\sum_i \int_0^1 |A_i(t)|^2 dt < +\infty \qquad Q^\gamma_{i_0}\text{-p.s.}$$

Par conséquent

$$\exp\left(H^\Phi(X_{i_0},\Gamma)\right) Q^\gamma = Q^\gamma_{i_0},$$

et le lemme 4.12 est démontré. ■

Terminons maintenant la preuve de la première partie du Théorème 4.11. D'après le lemme 4.12, pour tout $\gamma \in \mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$, la mesure $Q^\gamma \circ \Theta^{-1}$ sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ vérifie

$$Q^\gamma \circ \Theta^{-1}(dw) = \exp(-\tilde{H}^\Phi_{\{i\}}(w)) \varpi^{\theta_i(\gamma)}(dw_i) Q^{\gamma \backslash \theta_i(\gamma)} \circ \Theta^{-1}(dw_1, \ldots, dw_{i-1}, dw_{i+1}, \ldots), \tag{4.23}$$

où $\tilde{H}^\Phi_{\{i\}}$ est l'hamitonien sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ construit à partir de H^Φ comme dans (3.23). En conditionnant l'égalité (4.23) par la variable $w_{\{i\}^c}$ on obtient directement que $Q^\gamma \circ \Theta^{-1}(dw)$ satisfait l'équation DLR pour le site $\{i\}$, avec l'hamiltonien $\tilde{H}^\Phi_{\{i\}}$ et la mesure de référence $(\varpi^{\theta_i(\gamma)})_{i \in \mathbb{N}^*}$. On en déduit, grâce à la Proposition 2.6, que $Q^\gamma \circ \Theta^{-1}$ est une mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ pour l'hamiltonien et la mesure de référence cités ci-dessus. De plus, l'égalité (4.23) prouve directement que la famille $(Q^\gamma \circ \Theta^{-1})_{\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ est compatible (voir définition 3.16) et on a

$$E_{Q^\gamma \circ \Theta^{-1}}\left(e^{\tilde{H}^\Phi_{\{i\}}}\right) = 1.$$

En appliquant le théorème de recollement 3.18, la première partie du Théorème 4.11 est démontrée.

Preuve de la réciproque :

Soit P un champ de Gibbs canonique d'hamiltonien local $H^\Phi + h$ et de mesure de référence ϖ^m; d'après le lemme 3.14, pour P-presque tout γ, $\tilde{P}^\gamma = P^\gamma \circ \Theta^{-1}$ est une mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ d'hamiltonien

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^\Phi_{\{i\}}(w) &= \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\Bigg(\varphi(w_i(1)-w_j(1)) - \varphi(w_i(0)-w_j(0)) \\
&\qquad - \int_0^1 (\Delta\varphi + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2)(w_i(s)-w_j(s))ds\Bigg) \\
&\quad + \sum_{j<k, j\neq i, k\neq i} \frac{1}{4}\int_0^1 \Big[\nabla\varphi(w_i(s)-w_j(s)).\nabla\varphi(w_i(s)-w_k(s)) \\
&\qquad + \nabla\varphi(w_j(s)-w_i(s)).\nabla\varphi(w_j(s)-w_k(s)) \\
&\qquad + \nabla\varphi(w_k(s)-w_i(s)).\nabla\varphi(w_k(s)-w_j(s))\Big] ds, \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

et de mesure de probabilité de référence $\otimes_{i\in\mathbb{N}^*}\varpi^{\theta_i(\gamma)}$.

Nous allons appliquer à $\tilde{P}^\gamma$ le Théorème 4.9 de [3]. Celui-ci affirme que toute mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ d'hamiltonien $(\tilde{H}^\Phi_{\{i\}})_{i\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant certaines hypothèses de régularité est la loi d'une diffusion de type gradient associée à $(\tilde{h}^\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Enonçons et démontrons dans le lemme suivant les propriétés d'intégrabilité nécessaires pour avoir le droit d'appliquer le théorème en question.

Lemme 4.13. *Pour P-presque tout γ, $\tilde{P}^\gamma$ vérifie*

$$\forall t\in[0,1], \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad E_{\tilde{P}^\gamma}(|w_i(t)|) < +\infty. \qquad (4.25)$$

et

$$E_{\tilde{P}^\gamma}(\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\int_0^1 |\nabla_j\nabla_i \tilde{h}^\varphi_{\{i\}}(w(t))|^2 dr) < +\infty, \qquad (4.26)$$

où

$$\tilde{h}^\varphi_{\{i\}}(w(t)) = \sum_{j\neq i}\varphi(w_i(t)-w_j(t)).$$

De plus, la fonction $\tilde{H}^{\Phi}_{\{i\}}$ est L^2-différentiable et on a

$$E_{\tilde{P}^\gamma}(\int_0^1 |D^i_r \tilde{H}^{\Phi}_{\{i\}}|dr) < +\infty. \tag{4.27}$$

Notons que (4.25) (respectivement (4.26)) correspond à la propriété (2.12) (respectivement (4.10)) de [3].

Preuve :
Soit $\eta \in]0,1[$ tel que ζ_η ait un moment d'ordre $\frac{2d}{1-\eta}$. On pose alors $\tilde{\zeta}_\eta$ la fonction suivante définie sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$

$$\tilde{\zeta}_\eta(w) = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|w_i(t) - w_i(0)|}{(1 + |w_i(0)|)^\eta} = \zeta_\eta \circ \Theta^{-1}.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} |w_i(t)| &\leq |w_i(0)| + |w_i(t) - w_i(0)| \\ &\leq |w_i(0)| + \tilde{\zeta}_\eta(w)(1 + |w_i(0)|)^\eta; \end{aligned}$$

or $\tilde{\zeta}_\eta$ a un moment d'ordre $\frac{2d}{1-\eta} > 1$ sous $\tilde{P}^\gamma$ ce qui prouve (4.25).
Remarquons que la fonction h_i est bien définie $\tilde{P}^\gamma$-presque sûrement car les sommes sont finies $\tilde{P}^\gamma$-presque sûrement; en effet

$$\tilde{h}^{\varphi}_{\{i\}}(w(t)) = \sum_{\substack{j\neq i \\ j\leq \beta_\eta(\tilde{\zeta}_\eta,\gamma,i)}} \varphi(w_i(t) - w_j(t)) \qquad \tilde{P}^\gamma\text{-p.s.}$$

Les calculs ci-dessous ont donc bien un sens $\tilde{P}^\gamma$-presque sûrement;

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \int_0^1 |\nabla_j \nabla_i \tilde{h}^{\varphi}_{\{i\}}(w(t))|^2 dt &= \sum_{j\leq \beta_\eta(\tilde{\zeta}_\eta,\gamma,i)} \int_0^1 |\nabla\nabla\varphi(w_i(t) - w_j(t))|^2 dt \\ &\leq \|\nabla\nabla\varphi\|_\infty \beta_\eta(\tilde{\zeta}_\eta,\gamma,i) \\ &\leq \|\nabla\nabla\varphi\|_\infty (K_3(\gamma,i) + K_4(\gamma,i)\tilde{\zeta}_\eta^{\frac{d}{1-\eta}}), \end{aligned}$$

où K_3,K_4 sont les fonctions qui apparaissent dans le lemme 4.10. Il est alors clair qu'en combinant l'inégalité ci-dessus et l'hypothèse d'intégrabilité de ζ_η, on prouve (4.26). Il reste à démontrer que $\tilde{H}^{\Phi}_{\{i\}}$ est L^2-différentiable et que (4.27) est satisfaite. Les sommes de $\tilde{H}^{\Phi}_{\{i\}}$ étant finies finies sous $\tilde{P}^\gamma$ et étant clairement Gateaux-différentiable, il est facile de voir que $\tilde{H}^{\Phi}_{\{i\}}$ est L^2-différentiable. Pour prouver (4.27), il suffit de remarquer que les sommes de H_i contiennent au plus $\beta_\eta(\tilde{\zeta}_\eta,\gamma,i)^2$ termes, et donc en dérivant on aura également au plus $C_1\beta_\eta(\tilde{\zeta}_\eta,\gamma,i)^2$ termes, où C_1 est une constante positive; chacun de ces termes étant borné par une constante commune C_2. Ainsi l'inégalité

$$\begin{aligned}\int_0^1 |D_r^i \tilde{H}^\Phi_{\{i\}}\}|dr &\leq C_1 C_2 \beta_\eta(\tilde{\zeta}_\eta,\gamma,i)^2 \\ &\leq C_1 C_2 \Big(K_3(\gamma,i) + K_4(\gamma,i)\tilde{\zeta}_\eta^{\frac{d}{1-\eta}} \Big)^2\end{aligned}$$

et l'hypothèse d'intégrabilité de ζ_η prouvent (4.27). ■
Nous pouvons désormais nous intéresser à la loi du processus $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sous $\tilde{P}^\gamma$.

Lemme 4.14. *La famille infinie de processus*

$$w_i(t) - \theta_i(\gamma) + \int_0^t \frac{1}{2} \sum_{j\neq i} \nabla\varphi(w_i(r) - w_j(r))dr$$

est, sous $\tilde{P}^\gamma$, une famille de mouvements browniens de $\mathbb{R}^d$ indépendants partant de 0.

Preuve :
Le lemme 4.13 prouve que les hypothèses du Théorème 4.9 de [3] sont vérifiées. ce théorème affirme que toutes mesures de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ d'hamiltonien $(\tilde{H}^\Phi_{\{i\}}\})_{i\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant certaines hypothèses de régularité est la loi d'une diffusion de type gradient associé à $(\tilde{h}^\varphi_{\{i\}})_{i\in\mathbb{N}^*}$. On peut donc l'appliquer à $\tilde{P}^\gamma$, et le lemme est démontré. Rappelons, par souci de clarté, les grandes lignes de la démonstration de ce Théorème 4.9. Comme $\tilde{P}^\gamma$ est un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$, on a pour toute partie finie Λ de $\mathbb{N}^*$

$$\tilde{P}^\gamma \ll \left(\bigotimes_{i\in\Lambda} \varpi^{\theta_i(\gamma)} \right) \otimes \tilde{P}^\gamma_{\Lambda^c}.$$

On en déduit l'existence d'un processus adapté α_i tel que le processus

$$w_i(t) - \theta_i(\gamma) - \int_0^t \alpha_i(s)ds$$

soit un mouvement brownien partant de 0 sous $\tilde{P}^\gamma$. De plus, il est clair que la famille, indexée par $i \in \mathbb{N}^*$, des mouvements browniens ci-dessus est indépendante. Grâce à (4.25) on prouve que α_i est intégrable sous $\tilde{P}^\gamma$.
Puis on cherche à identifier le processus α_i. On utilise alors une formule d'intégration par parties caractérisant $\tilde{P}^\gamma$ en tant que mesure de Gibbs. Grâce aux propriétés (4.25) et (4.26) les calculs sont possibles, et on montre que

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \qquad \alpha_j(r) = -\frac{1}{2}\nabla_j \tilde{h}^\varphi_{\{j\}}(w(r)).$$

On a donc démontré que la famille infinie de processus

$$w_i(t) - \theta_i(\gamma) + \int_0^t \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \nabla\varphi(w_i(r) - w_j(r))dr$$

est, sous $\tilde{P}^\gamma$, une famille de mouvements browniens indépendants partant de 0. Le lemme 4.14 est démontré. ■

On déduit du lemme 4.14 que la famille infinie de processus

$$\Big(w_i(t) - w_i(0) + \int_0^t \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \nabla\varphi(w_i(r) - w_j(r))dr, \qquad i \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1]\Big)$$

est indépendante de la loi initiale $\big(P \circ \Theta^{-1}\big) \circ w(0)^{-1}$, car les lois conditionnelles des processus ci-dessus ne dépendent pas de $\Gamma(0)$. En remontant ce résultat sur l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, on prouve que P est solution de (4.3), i). Il nous reste donc à identifier la loi initiale $P_0 = P \circ \Gamma(0)^{-1}$.

Puisque P est un champ de Gibbs canonique sur $\mathcal{C}$, alors d'après le lemme 3.12, P_0 est un champ de Gibbs canonique sur $\mathbb{R}^d$ de mesure de référence m et d'hamiltonien local $\overline{h}(x,\gamma) + f(\gamma)$, où f est une fonction inconnue et $\overline{h}$ la fonction définie par

$$\overline{h}(x,\gamma) \;\; = \;\; \log C_P^! \bigg(\exp\Big(h \circ pr_0 + H^\Phi\Big)\Big|\Gamma(0) = \gamma, X(0) = x\bigg),$$

pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\gamma(x) = 0$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \theta_i(\gamma + \delta_x)$; alors

$$\begin{aligned}\overline{h}(x,\gamma) \;\; &= \;\; \log E_P \bigg(\exp\Big(h(x,\gamma) + H^\Phi(\Theta_i(\Gamma),\Gamma\backslash\Theta_i(\Gamma))\Big)\Big|\Gamma(0) = \gamma\bigg) \\ &= \;\; h(x,\gamma) + \log E_{P^\gamma}\Big(\exp\big(H^\Phi(\Theta_i(\Gamma),\Gamma\backslash\Theta_i(\Gamma))\big)\Big).\end{aligned}$$

D'après la fin de la preuve du lemme 4.12, $\exp\big(H(\Theta_i(\Gamma),\Gamma\backslash\Theta_i(\Gamma)\big)$ est une Q^γ-martingale exponentielle évaluée au temps 1. Mais d'après le raisonnement ci-dessus $P^\gamma = Q^\gamma$; on en déduit que $\overline{h}(x,\gamma) = h(x,\gamma)$. Or, h est un hamiltonien local, par conséquent on peut prendre $f = 0$ et donc $P_0 \in \mathcal{G}_c(h,m)$.

Dans le cas où P est un champ de Gibbs, le lemme de projection 3.12 prouve que P_0 est un champ de Gibbs sur $\mathbb{R}^d$ de mesure de référence m et d'hamiltonien local $\overline{h}$; en reprenant les calculs ci-dessus, on montre facilement que $\overline{h} = h$ et donc que $P_0 \in \mathcal{G}(h,m)$. ■

Donnons une application immédiate de ce théorème. Soit H un hamiltonien local sur $\mathcal{C}$ et m une mesure de référence sur $\mathcal{C}$; alors on pose $\mathcal{G}^\circ(H,\varpi^m)$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}(H,\varpi^m)$ suivant :

$$\mathcal{G}^\circ(H,\varpi^m) = \bigg\{ P \in \mathcal{G}\big(H,\varpi^m\big), \exists \eta \in]0,1[\text{ tel que } E_P\Big(\zeta_\eta^{\frac{2d}{1-\eta}}\Big) < +\infty \bigg\}.$$

Du Théorème 4.11, on déduit le corollaire fondamental suivant.

Corollaire 4.15. *Il y a une bijection entre les deux ensembles suivants :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(h,m) \cap \mathcal{P}(\mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)) & \longrightarrow & \mathcal{G}^{\circ}\big(h \circ pr_0 + H^{\Phi}, \varpi^m\big) \cap \mathcal{P}(\mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C})) \\ \mu & \longmapsto & Q^{\mu} \end{array} .$$

En particulier, si $\mathcal{G}(h,m) \cap \mathcal{P}(\mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d))$ est réduit à un singleton (non transition de phase) alors $\mathcal{G}^{\circ}\big(h \circ pr_0 + H^{\Phi}, \varpi^m\big) \cap \mathcal{P}(\mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}))$ est également réduit à un singleton (non transition de phase dynamique).

La Proposition 2.18 fournit des hypothèses suffisantes sur ψ, interaction par paires, pour qu'il n'y ait qu'un seul champ de Gibbs dans $\mathcal{G}(h^{\psi}, z\lambda)$, dès que $z > 0$ est suffisamment petit. On en déduit alors, que, sous ces mêmes hypothèses, il n'y a pas de transition de phase dynamique, ou encore que $\mathcal{G}^{\circ}\big(h^{\psi} \circ pr_0 + H^{\Phi}, z\varpi^m\big) \cap \mathcal{P}(\mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}))$ est réduit à un seul élément. Cela permet ainsi d'exhiber un critère d'unicité de champs de Gibbs sur $\mathcal{C}$, espace sur lequel il n'existait jusqu'alors aucun critère de non transition de phase.

Chapitre 5

Applications et généralisation

5.1 Quelques conséquences de la gibbsianité du système de particules browniennes en interaction

Dans cette section, nous allons donner les premières applications des résultats des chapitres précédents. Dans un premier temps, nous étudions des propriétés de régularisation et de structure de la loi du système de particules browniennes au cours de son évolution. Ensuite nous démontrons que la formule d'intégration par parties (3.13) du paragraphe 3.2.3 est satisfaite, avec $H = H^{\Phi}$ et $x = 0$, sous la loi du système de particules browniennes à condition initiale quelconque. Ce résultat donne, d'une part, un exemple de champ non gibbsien sur $\mathcal{C}$ satisfaisant cette équation et d'autre part, une formule d'intégration par parties satisfaite sous la mesure de Campbell de champs de $\mathcal{C}$ dont la dynamique est celle du système de particules browniennes en interaction. L'application au retournement du temps en régime stationnaire pour le système de particules browniennes, développée dans le troisième paragraphe, reposera sur cette formule.

5.1.1 Gibbsianité de la loi du système de particules browniennes au cours de son évolution

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la régularité au temps $t \in [0,1]$ de la loi du système de particules browniennes en interaction. Nous remarquons un effet de régularisation de la solution ainsi que la propagation de la gibssianité de la loi. Par exemple, si la condition initiale du système (4.3) est un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs canonique), alors la loi à tout temps $t \in [0,1]$ de la solution du système (4.3) est encore un champ de Gibbs (respectivement un champ de Gibbs

canonique) sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, on a le corollaire suivant du Théorème 4.11.
Corollaire 5.1. *Soit m une mesure σ-finie de $\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $m_t = \varpi^m \circ pr_t^{-1}$ soit σ-finie sur $\mathbb{R}^d$ et h un hamiltonien local sur $\mathbb{R}^d$.*
Si μ est un champ de Gibbs tempéré de $\mathcal{G}(h,m)$, alors en posant

$$\begin{aligned} h_t(x,\gamma) &:= \log C^!_{Q^\mu}\Big(e^{h(X(0),\Gamma(0))+H^\Phi(X,\Gamma)}\Big|X(t)=x,\Gamma(t)=\gamma\Big) \qquad (5.1)\\ &:= -\log\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} e^{-h(X(0),\Gamma(0))-H^\Phi(X,\Gamma)}\varpi^m\big(dX\big|X(t)=x\big)\otimes Q^\mu\big(d\Gamma\big|\Gamma(t)=\gamma\big)\end{aligned}$$

on a que $Q^\mu \circ pr_t^{-1}$, loi au temps t du système (4.3) à condition initiale μ, est un champ de Gibbs de $\mathcal{G}(h_t,m_t)$ pour tout $t \in [0,1]$.
Si μ est un champ de Gibbs canonique tempéré de $\mathcal{G}_c(h,m)$, alors en posant

$$h_t(x,\gamma) := \log C^!_{Q^\mu}\Big(e^{h(X(0),\Gamma(0))+H^\Phi(X,\Gamma)}\Big|X(t)=x,\Gamma(t)=\gamma\Big), \qquad (5.2)$$

il existe une fonction $f_t(\gamma)$ telle que $Q^\mu \circ pr_t^{-1}$ soit un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h_t(x,\gamma)+f_t(\gamma),m_t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Preuve :
C'est une compilation du Théorème 4.11 et du lemme de projection 3.12. ■
Il est donc intéressant de remarquer que la nature gibbsienne se propage au cours du temps. Plus exactement, les champs de Gibbs (respectivement champs de Gibbs canoniques) se transforment en champs de Gibbs (respectivement champs de Gibbs canoniques). Il y a donc stabilité de la structure gibbsienne. Ainsi, si l'on note

$$\mathcal{G}^t(h,m) = \Big\{Q^\mu \circ pr_t^{-1} : \mu \in \mathcal{G}(h,m)\Big\},$$

– en particulier $\mathcal{G}^0(h,m) = \mathcal{G}(h,m)$– on a alors $\mathcal{G}^t(h,m) \subset \mathcal{G}(h_t,m_t)$; nous n'avons pas réussi à démontrer l'inclusion inverse. Néanmoins la question est intéressante, car dans le cas où $\mathcal{G}^t(h,m) = \mathcal{G}(h_t,m_t)$, alors la non transition de phase dans $\mathcal{G}(h,m)$ peut être transportée dans $\mathcal{G}(h_t,m_t)$. Ainsi, il serait possible d'obtenir des critères de non transition de phase dans $\mathcal{G}(h_t,m_t)$, à partir de critères de non transition de phase dans $\mathcal{G}(h,m)$.
Le corollaire 5.1 exhibe également une propriété de régularisation des solutions du système (4.3). En effet, quelque soit la régularité de la mesure m, la mesure m_t, pour $t > 0$, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On peut encore aller plus loin, grâce à la proposition suivante, qui affirme que, quelque soit la condition initiale μ (gibbsienne ou non), la loi de $\Gamma(t)$ sous Q^μ, pour $t > 0$, est un champ de Gibbs canonique de mesure de référence la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$.
Proposition 5.2. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d))$; alors, pour tout $t \in]0,1]$, il existe un hamiltonien local h_t sur $\mathbb{R}^d$ tel que*

$$Q^\mu \circ pr_t^{-1} \in \mathcal{G}_c(h_t,\lambda).$$

Preuve :
Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d))$ et $t \in]0,1]$; alors pour tout $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction f mesurable bornée et positive de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \mathbb{1}_\Lambda(x)f(\gamma)C^!_{Q^\mu\circ pr_t^{-1}}(dx,d\gamma)\\
=\ &\int_{\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\mathcal{C})} \mathbb{1}_\Lambda\Big(X(t)\Big)f\Big(\Gamma(t)\Big)C^!_{Q^\mu}(dX,d\Gamma)\\
=\ &\int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\mathbb{1}_\Lambda\Big(\Theta_i(\Gamma)(t)\Big)f\Big(\Gamma(t)\backslash\Theta_i(\Gamma)(t)\Big)Q^\gamma(d\Gamma)\mu(d\gamma),
\end{aligned}$$

ce qui d'après le lemme 4.12, est encore égal à

$$= \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})\times\mathcal{C}}\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\mathbb{1}_\Lambda\Big(X(t)\Big)f\Big(\Gamma(t)\Big)\exp\big(-H^\Phi(X,\Gamma)\big)Q^{\gamma\backslash\theta_i(\gamma)}\otimes\varpi^{\theta_i(\gamma)}(d\Gamma,dX)\mu(d\gamma)$$

Sachant que la loi de $X(t)$ sous $\varpi^{\theta_i(\gamma)}$ est équivalente à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \mathbb{1}_\Lambda(x)f(\gamma)C^!_{Q^\mu\circ pr_t^{-1}}(dx,d\gamma) = 0$$

pour toute fonction f si et seulement si $\lambda(\Lambda) = 0$. Ce qui prouve que, pour $C^!_{Q^\mu\circ pr_t^{-1}}$-presque tout γ, la mesure $C^!_{Q^\mu\circ pr_t^{-1}}(dx|\gamma)$ est équivalente à λ. On en déduit l'existence d'une mesure $\tilde{Q}$ sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$C^!_{Q^\mu\circ pr_t^{-1}} \sim \lambda\otimes\tilde{Q}$$

et donc d'après la Proposition 3.2, cette proposition est démontrée. ■
L'intérêt de la proposition précédente est de pouvoir obtenir une structure gibbsienne de la loi du système 4.3 à tout temps $t > 0$ lorsque la condition initiale est quelconque; elle peut être déterministe ou aléatoire. Par contre, il semble très difficile de calculer explicitement l'hamiltonien h_t ou de prouver sa régularité. C'est donc un résultat essentiellement structurel.
On en déduit le corollaire suivant sur les mesures stationnaires :

Corollaire 5.3. *Les mesures stationnaires tempérées pour la dynamique du système (4.3) sont des champs de Gibbs canoniques de mesure de référence λ et d'hamiltonien local indéterminé.*

Preuve :
Soit μ une mesure stationnaire tempérée; d'après la Proposition 5.2, $Q^\mu\circ pr_1^{-1}$ est un champ de Gibbs canonique et comme $\mu = Q^\mu\circ pr_1^{-1}$, le corollaire est démontré. ■

5.1.2 Une formule d'intégration par parties dans un cadre non gibbsien

Dans ce paragraphe nous allons compléter les résultats du paragraphe 3.2.3 au sujet de la formule d'intégration par parties intégrée sous la mesure de Campbell. Dans le Théorème 3.8, on a montré que la formule d'intégration par parties (3.13) était satisfaite par les champs de Gibbs canoniques de $\mathcal{G}_c(H,\varpi^\lambda)$ satisfaisant la condition d'intégrabilité (3.12). Par conséquent, grâce au Théorème 4.11, pour tout champ de Gibbs canonique tempéré μ de $\mathcal{G}(h,\lambda)$, la probabilité Q^μ satisfait la formule d'intégration par parties (3.13) avec $H = h \circ pr_0 + H^\Phi$. Le lemme 5.5 prouve que la condition d'intégrabilité (3.12) est satisfaite sous Q^μ.
Analysons la situation dans le cas où μ n'est pas un champ de Gibbs canonique. Dans ce cas, Q^μ ne peut pas satisfaire la formule d'intégration par parties (3.13) pour tout g, F et x, puisque la partie réciproque du Théorème 3.8 permettrait de prouver alors que Q^μ est un champ de Gibbs canonique. Or, ceci est impossible à cause du Lemme 5.2 de projection, qui entraînerait que μ est un champ de Gibbs canonique. Néanmoins, nous allons montrer que Q^μ satisfait la formule (3.13) avec $H = H^\Phi$, pour tout g et F mais seulement quand $x = 0$. Ce résultat à un double intérêt : le premier est d'exhiber une formule d'intégration par parties satisfaite par toute solution du système (4.3) et ceci quelque soit la condition initiale μ. Cette formule nous sera très utile dans le paragraphe 5.1.3 suivant pour démontrer que les mesures réversibles tempérées pour la dynamique du système (4.3) sont des champs de Gibbs canoniques d'hamiltonien local h^φ. Le deuxième intérêt est de donner un exemple, moins trivial que celui de la Proposition 3.11, de champ non gibbsien satisfaisant une formule d'intégration par parties.

Proposition 5.4. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d))$; alors, pour tout $g \in \mathbf{E}$ et tout $F \in \overline{\mathcal{W}}$, on a*

$$C^!_{Q^\mu}\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) = C^!_{Q^\mu}\Big(D_gF(X,\Gamma) - F(X,\Gamma)D_gH^\Phi(X,\Gamma)\Big). \tag{5.3}$$

Preuve :
Démontrons tout d'abord le lemme suivant qui permettra de prouver que les termes de l'équation (5.3) sont bien définis.

Lemme 5.5. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d))$; alors pour tout $M > 0$ et $t \in [0,1]$ on a*

$$C^!_{Q^\mu}\Big(\big(|X(t)| + \int_0^1 |D_sH^\Phi|ds\big)\,\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big) < +\infty; \tag{5.4}$$

Preuve :
Pour $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, on note $X_i = \Theta_i(\Gamma)$, $x_i = X_i(0)$. Pour tout $t \in [0,1]$, $M > 0$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_i \in B(0,M)$ on a

$$|X_i(t)| \;\leq\; M + \zeta_{\frac{1}{2}}(1+M)^{\frac{1}{2}}.$$

Le lemme 2.25 permettant de contrôler le nombre de points dans toute boule, on en déduit

$$\begin{aligned}
&C^!_{Q^\mu}\Big(|X(t)|\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big)\\
\leq\ & \int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{C}}\Big(|X(t)|\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big)\Gamma(dX)Q^\mu(d\Gamma)\\
\leq\ & \int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}(M+\zeta_{\frac12}(1+M)^{\frac12})M^{d+1}\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))Q^\mu(d\Gamma).
\end{aligned}$$

Or, d'après la Proposition 4.3, la variable aléatoire $\zeta_{\frac12}\mathbb{1}_{[0,M]}(\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))$ a des moments de tous ordres sous Q^μ; la quantité $C^!_{Q^\mu}\big(|X(t)|\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))|\big)$ est donc bien finie. Il reste donc à majorer le terme suivant :

$$\begin{aligned}
&C^!_{Q^\mu}\Big(\int_0^1|D_sH^\Phi(X,\Gamma)|ds\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big)\\
\leq\ & \int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\sum_{1\leq i\leq M^{d+1}}\int_0^1|D_sH^\Phi(X_i,\Gamma)|ds\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))Q^\mu(d\Gamma)
\end{aligned}$$

Dans la preuve du lemme 4.13, on a déjà remarqué que $D_sH^\Phi(X_i,\Gamma)$ est bien défini sous Q^γ et qu'il existe une constante C_1 telle que

$$|D_sH^\Phi(X_i,\Gamma)|\leq C_1\beta(\zeta_{\frac12},\gamma,i)^2.$$

D'après le lemme 4.10, il existe deux constantes C_2,C_3 telles que

$$\begin{aligned}
&C^!_{Q^\mu}\Big(\int_0^1|D_sH^\Phi(X,\Gamma)|ds\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big)\\
\leq\ & \int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}M^{d+1}C_1(C_2+C_3\zeta_{\frac12}^{4d})\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))Q^\mu(d\Gamma).
\end{aligned}$$

Or, la variable aléatoire $\zeta_{\frac12}\mathbb{1}_{[0,M]}(\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))$ a des moments de tous ordres sous Q^μ. Par conséquent, le terme $C^!_{Q^\mu}\Big(|X(t)|\mathbb{1}_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big)$ est également finie et le lemme est démontré. $\blacksquare$

Revenons à la preuve de la Proposition 5.4 : soit $g\in\mathbf{E}$ et $F\in\overline{\mathcal{W}}$; grâce au lemme précédent, les calculs ci-dessous sont légitimes.

$$\begin{aligned}
&C^!_{Q^\mu}\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big)\\
=\ & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\sum_i\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\Big(F(X_i,\Gamma\backslash X_i)\int_0^1 g(s)dX_i(s)\Big)Q^\gamma(d\Gamma)\mu(d\gamma).
\end{aligned}$$

Par le lemme 4.12, on obtient

$$\begin{aligned}
& C^!_{Q^\mu}\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) \\
= & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\sum_i\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\Big(\exp\big(-H^\Phi(X,\Gamma)\big)F(X,\Gamma\backslash X)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) \\
& \qquad \varpi^{x_i}\otimes Q^{\gamma\backslash x_i}(dX,d\Gamma)\mu(d\gamma)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties sous ϖ^{x_i} (lemme 3.9) et en utilisant la technique de localisation exposée lors de la preuve du Théorème 3.8, on trouve

$$\begin{aligned}
& C^!_{Q^\mu}\Big(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)dX(s)\Big) \\
= & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\sum_i\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\Big(-D_gH^\Phi(X,\Gamma)\exp\big(-H^\Phi(X,\Gamma)\big)F(X,\Gamma\backslash X) \\
& +D_gF(X,\Gamma\backslash X)\exp\big(-H^\Phi(X,\Gamma)\big)\Big)\varpi^{x_i}\otimes Q^{\gamma\backslash x_i}(dX,d\Gamma)\mu(d\gamma) \\
= & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\sum_i\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\Big(-D_gH^\Phi(X_i,\Gamma)F(X_i,\Gamma\backslash X_i) \\
& +D_gF(X_i,\Gamma\backslash X_i)\Big)Q^\gamma(d\Gamma)\mu(d\gamma) \\
= & C^!_{Q^\mu}\Big(-D_gH^\Phi(X,\Gamma)F(X,\Gamma)+D_gF(X,\Gamma)\Big). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

5.1.3 Application à la réversibilité

Rappelons qu'une probabilité $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d))$ est dite réversible pour la dynamique du système (4.3), si pour tout $t \in [0,1]$, les processus $(\Gamma(s))_{s\in[0,t]}$ et $(\Gamma(t-s))_{s\in[0,t]}$ ont la même loi sous Q^μ .
Dans [33], R. Lang fut le premier à montrer que les mesures réversibles du système (4.3) sont les champs de Gibbs canoniques de $\mathcal{G}_c(h^\varphi,\lambda)$. Nous proposons de redémontrer ce résultat, en en affaiblissant considérablement les hypothèses. En effet, pour démontrer que les mesures réversibles sont des champs de Gibbs canoniques, R. Lang suppose a priori la mesure réversible tempérée au sens de Ruelle et localement à densité par rapport au processus de Poisson d'intensité λ avec des propriétés de régularité et d'intégrabilité sur les densités. Ici, nous supposons uniquement les mesures réversibles a priori tempérées au sens de Fritz sans aucune autre régularité. D'après la Proposition 2.20, les notions de tempéré au sens de Fritz et au sens de Ruelle n'étant pas forcément comparable, notre résultat semble donc meilleur. Avant d'énoncer et de démontrer ce résultat, introduisons les notations suivantes : pour $X \in \mathcal{C}$, $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ et $P \in$

$\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$ on note $\hat{X}$ (respectivement $\hat{\Gamma}$) les processus $(\hat{X}(t))_{t\in[0,1]} = (X(1-t))_{t\in[0,1]}$ (respectivement $\hat{\Gamma}(.) = \Gamma(1-.)$) et $\hat{P}$ la loi de $\hat{\Gamma}$ sous P.

Proposition 5.6. *Une probabilité $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\varphi}(\mathbb{R}^d))$ est réversible pour la dynamique du système (4.3) si et seulement si $\mu \in \mathcal{G}_c(h^\varphi,\lambda)$.*

Preuve :
Commençons par montrer que $\mu \in \mathcal{G}_c(h^\varphi,\lambda)$ implique μ réversible. Soit $\mu \in \mathcal{G}_c(h^\varphi,\lambda)$; d'après le Théorème 4.11, $Q^\mu \in \mathcal{G}_c\big(h^\varphi \circ pr_0 + H^\Phi,\varpi^\lambda\big)$. Or, l'hamiltonien local $h^\varphi \circ pr_0 + H^\Phi$ est invariant par retournement du temps :

$$\begin{aligned}
(h^\varphi \circ pr_0 + H^\Phi)(X,\Gamma) &= \frac{1}{2}h^\varphi(X(0),\Gamma(0)) + \frac{1}{2}h^\varphi(X(1),\Gamma(1)) \\
&\quad - \sum_{Y\in\Gamma\backslash X} \int_0^1 (\Delta\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2)(X(s)-Y(s))ds \\
&\quad + \sum_{\{Y,Z\}\subset\Gamma\backslash X} \frac{1}{4}\int_0^1 \Big[\nabla\varphi(X(s)-Y(s)).\nabla\varphi(X(s)-Z(s)) \\
&\qquad +\nabla\varphi(Y(s)-X(s)).\nabla\varphi(Y(s)-Z(s)) \\
&\qquad +\nabla\varphi(Z(s)-X(s)).\nabla\varphi(Z(s)-Y(s))\Big]ds. \\
&= (h^\varphi \circ pr_0 + H^\Phi)(\hat{X},\hat{\Gamma}),
\end{aligned}$$

et $\varpi^\lambda = \hat{\varpi}^\lambda$; par conséquent $\hat{Q}^\mu$ est encore un champ de Gibbs canonique appartenant aussi à $\mathcal{G}_c\big(h^\varphi \circ pr_0 + H^\Phi,\varpi^\lambda\big)$. Nous allons donc appliquer le Théorème 4.11 à la probabilité $\hat{Q}^\mu$. Il faut donc que $\hat{Q}^\mu$ en vérifie les hypothèses, ce qui revient à montrer qu'il existe $\eta \in]0,1[$ tel que ζ_η ait un moment d'ordre $\frac{2d}{1-\eta}$ sous $\hat{Q}^\mu$. En fait, nous allons montrer que pour tout $\eta \in]0,1[$, ζ_η a des moments de tous ordres sous $\hat{Q}^\mu$. Ceci est équivalent à montrer que la variable aléatoire $\hat{\zeta}_\eta$ suivante

$$\hat{\zeta}_\eta = \sup_{X\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} \frac{|X(t)-X(1)|}{(1+|X(1)|)^\eta},$$

a des moments de tous ordres sous Q^μ.

Lemme 5.7. *Pour tout $\eta \in]0,1[$ et tout champ de Gibbs canonique tempéré μ de $\mathcal{G}_c(h^\varphi,\lambda)$, la variable $\hat{\zeta}_\eta$ a des moments de tous ordres sous Q^μ.*

Preuve :
D'après la définition de ζ_η, on a

$$|X(1)-X(0)| \leq \zeta_\eta(1+|X(0)|)^\eta$$

et donc
$$|X(1)| \geq |X(0)| - \zeta_\eta(1+|X(0)|)^\eta.$$
En utilisant l'inégalité (4.10), on obtient
$$|X(1)| \geq \frac{1}{2}|X(0)| - 1 - C(\eta)\zeta_\eta^{\frac{1}{1-\eta}}$$
et en insérant cette inégalité dans le calcul de $\hat{\zeta}_\eta$ on trouve
$$\begin{aligned}
\hat{\zeta}_\eta &\leq \sup_{X\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} \frac{|X(t)-X(1)|}{\max\left(1,\left(\frac{1}{2}|X(0)| - C(\eta)\zeta_\eta^{\frac{1}{1-\eta}}\right)^\eta\right)} \\
&\leq 4\sup_{X\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} \frac{|X(t)-X(0)|}{\max\left(1,\left(1+|X(0)| - C(\eta)\zeta_\eta^{\frac{1}{1-\eta}}\right)^\eta\right)}. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$
Prouvons maintenant un lemme technique.

Lemme 5.8. $\forall a \geq 1$, $\forall b \geq 0$
$$\frac{1}{\max\left(1,(a-b)^\eta\right)} \leq \frac{(1+b)^\eta}{a^\eta}. \qquad (5.6)$$

Preuve :
L'inégalité est évidente pour $b \geq a-1$; dans le cas où $b \leq a-1$, (5.6) est équivalente à
$$\frac{(1+b)^\eta(a-b)^\eta}{a^\eta} \geq 1. \qquad (5.7)$$
En posant $c = a-b$, (5.7) s'écrit
$$\frac{c^\eta(1+a-c)^\eta}{a^\eta} \geq 1. \qquad (5.8)$$
Or, à $c > 1$ fixé, il est clair que la fonction
$$a \to \frac{c^\eta(1+a-c)^\eta}{a^\eta},$$
est croissante sur $[c, +\infty]$ et qu'elle vaut 1 en $a = c$. On en déduit donc aisément l'inégalité (5.8) et par conséquent (5.6). ■
En utilisant l'inégalité (5.6) dans l'expression (5.5), on obtient
$$\begin{aligned}
\hat{\zeta}_\eta &\leq 4\sup_{X\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} \frac{|X(t)-X(0)|}{(1+|X(0)|)^\eta}\left(1+C(\eta)\zeta_\eta^{\frac{1}{1-\eta}}\right)^\eta \\
&\leq 4\zeta_\eta\left(1+C(\eta)\zeta_\eta^{\frac{1}{1-\eta}}\right)^\eta. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

ζ_η ayant des moments de tous ordres sous Q^μ, l'inégalité (5.9) prouve qu'il en est de même pour $\hat{\zeta}_\eta$. Le lemme 5.7 est démontré. ■

Nous pouvons donc appliquer la réciproque du Théorème 4.11 à la probabilité $\hat{Q}^\mu$ et en déduire qu'elle est solution faible du système (4.3) avec la condition initiale $Q^\mu \circ pr_1^{-1}$. Par unicité des solutions tempérées au système (4.3), il suffit de montrer que $Q^\mu \circ pr_1^{-1} = \mu$, pour démontrer que $Q^\mu = \hat{Q}^\mu$. Pour cela, on introduit

$$\nu = Q^\mu \circ pr_{\frac{1}{2}}^{-1} = \hat{Q}^\mu \circ pr_{\frac{1}{2}}^{-1}.$$

Comme Q^μ et $\hat{Q}^\mu$ sont les lois de solutions du système (4.3), $Q^\mu \circ pr_1^{-1}$ est la loi de $\Gamma(\frac{1}{2})$ sous Q^ν et $\mu = \hat{Q}^\mu \circ pr_1^{-1}$ est également la loi de $\Gamma(\frac{1}{2})$ sous Q^ν. Par conséquent, $\mu = Q^\mu \circ pr_1^{-1}$ et $Q^\mu = \hat{Q}^\mu$. Ainsi, Q^μ reste inchangé par retournement du temps sur l'intervalle [0,1]. Par un raisonnement similaire, on montre l'invariance de la loi Q^μ par retournement du temps sur l'intervalle $[0,t]$, pour tout $t \in]0,1[$. Donc μ est réversible.

Montrons maintenant qu'une mesure réversible tempérée μ est un champ de Gibbs canonique. Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction de $\mathbf{F}_b$. Ecrivons l'équation (5.3) pour

$$g(s) = -\vec{u}, \text{ et } F(X,\Gamma) = f(X(0),\Gamma(0));$$

on obtient

$$C^!_{Q^\mu}\Big(\vec{u}.(X(0) - X(1)) f(X(0),\Gamma(0))\Big) \;=\; C^!_{Q^\mu}\Big(D_{\vec{u}} H^\Phi(X,\Gamma) f(X(0),\Gamma(0))\Big); \tag{5.10}$$

de même écrivons l'équation (5.3) pour

$$g(s) = \vec{u} \text{ et } F(X,\Gamma) = k(X(0)) f(X(1),\Gamma(1)) 1\!\!1_{[0,M]}(\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0))),$$

où k est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ bornée et à support compact; on obtient

$$\begin{aligned} & C^!_{Q^\mu}\Big(\vec{u}.(X(1) - X(0)) f(X(1),\Gamma(1)) k(X(0)) 1\!\!1_{[0,M]}(\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big) \\ = \; & C^!_{Q^\mu}\Big(- D_{\vec{u}} H^\Phi(X,\Gamma) f(X(1),\Gamma(1)) k(X(0)) 1\!\!1_{[0,M]}(\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0))) \\ & + \vec{u}.\nabla_x f(X(1),\Gamma(1)) k(X(0)) 1\!\!1_{[0,M]}(\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Comme μ est réversible on peut retourner le temps dans l'équation (5.11) et ensuite faire tendre k vers 1 et M vers l'infini; on obtient

$$\begin{aligned} & C^!_{Q^\mu}\Big(\vec{u}.(X(0) - X(1)) f(X(0),\Gamma(0))\Big) \\ = \; & C^!_{Q^\mu}\Big(- D_{\vec{u}} H^\Phi(\hat{X},\hat{\Gamma}) f(X(0),\Gamma(0)) + \vec{u}.\nabla_x f(X(0),\Gamma(0))\Big). \end{aligned} \tag{5.12}$$

On déduit de (5.10) et (5.12) l'équation suivante

$$\begin{aligned} & C^!_{Q^\mu}\Big((D_{\vec{u}}H^\Phi(X,\Gamma) + D_{\vec{u}}H^\Phi(\hat{X},\hat{\Gamma}))f(X(0),\Gamma(0))\Big) \\ = \;& C^!_{Q^\mu}\Big(\vec{u}.\nabla_x f(X(0),\Gamma(0))\Big). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Soit i_0 un entier positif, calculons sous Q^γ le terme $D_{\vec{u}}H^\Phi(X_{i_0},\Gamma)$. Pour cela utilisons l'expression (4.17) de $H^\Phi(X_{i_0},\Gamma)$; on obtient

$$\begin{aligned} & D_{\vec{u}}H^\Phi(X_{i_0},\Gamma) \\ = \;& \frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\Big(\vec{u}.\nabla\varphi(X_{i_0}(1)-X_i(1)) - \int_0^1 s\vec{u}.\nabla\Delta\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))ds\Big) \\ & -\frac{1}{4}\sum_{i\neq i_0}\int_0^1 s\Big(\vec{u}.\nabla\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))\Big).\sum_{j\neq i}\nabla\varphi(X_i(s)-X_j(s))ds \\ & +\frac{1}{4}\int_0^1 s\Big(\sum_{i\neq i_0}\nabla\varphi(X_{i_o}(s)-X_i(s))\Big).\Big(\sum_{i\neq i_0}\vec{u}.\nabla\nabla\varphi(X_{i_o}(s)-X_i(s))\Big)ds. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & D_{\vec{u}}H^\Phi(X_{i_0},\Gamma) + D_{\vec{u}}H^\Phi(\hat{X}_{i_0},\hat{\Gamma}) \\ = \;& \frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\Big(\vec{u}.\nabla\varphi(X_{i_0}(1)-X_i(1)) + \vec{u}.\nabla\varphi(X_{i_0}(0)-X_i(0))\Big) \\ & -\frac{1}{2}\sum_{i\neq i_0}\int_0^1 \vec{u}.\nabla\Delta\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))ds\Big) \\ & -\frac{1}{4}\sum_{i\neq i_0}\int_0^1 \Big(\vec{u}.\nabla\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))\Big).\sum_{j\neq i}\nabla\varphi(X_i(s)-X_j(s))ds \\ & +\frac{1}{4}\int_0^1 \Big(\sum_{i\neq i_0}\nabla\varphi(X_{i_o}(s)-X_i(s))\Big).\Big(\sum_{i\neq i_0}\vec{u}.\nabla\nabla\varphi(X_{i_o}(s)-X_i(s))\Big)ds. \end{aligned} \tag{5.14}$$

D'après la formule d'Itô, on a pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} & \nabla\varphi(X_{i_0}(1)-X_i(1)) \;=\; \nabla\varphi(X_{i_0}(0)-X_i(0)) \\ + \;& \int_0^1 \nabla\nabla\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s)).(dX_{i_0}(s)-dX_i(s)) + \int_0^1 \nabla\Delta\varphi(X_{i_0}(s)-X_i(s))ds; \end{aligned}$$

en insérant ce résultat dans l'égalité (5.14) et en regroupant les termes, on trouve

$$\begin{aligned}
& D_{\vec{u}} H^{\Phi}(X_{i_0},\Gamma) + D_{\vec{u}} H^{\Phi}(\hat{X}_{i_0},\hat{\Gamma}) \\
= \; & \vec{u}. \sum_{i \neq i_0} \nabla\varphi(X_{i_0}(0) - X_i(0)) \\
& -\frac{1}{2} \sum_{i \neq i_0} \int_0^1 \vec{u}.\nabla\nabla\varphi(X_{i_0}(s) - X_i(s)) \Big(dX_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \nabla\varphi(X_i(s) - X_j(s)) ds \Big) \\
& +\frac{1}{2} \sum_{i \neq i_0} \int_0^1 \vec{u}.\nabla\nabla\varphi(X_{i_0}(s) - X_i(s)) \Big(dX_{i_0}(s) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i_0} \nabla\varphi(X_{i_o}(s) - X_j(s)) ds \Big)
\end{aligned}$$

Or, on sait que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ le processus

$$X_i(t) - X_i(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j \neq i} \nabla\varphi(X_i(s) - X_j(s)) ds,$$

est un mouvement brownien sous Q^γ. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
& E_{Q^\gamma}\bigg(\Big(D_{\vec{u}} H^{\Phi}(X_{i_0},\Gamma) + D_{\vec{u}} H^{\Phi}(\hat{X}_{i_0},\hat{\Gamma}) \Big) f(X_{i_0}(0),\Gamma(0)) \bigg) \\
= \; & E_{Q^\gamma}\bigg(\Big(\vec{u}.\nabla_x h^{\varphi}(X_{i_0}(0),\Gamma(0)) \Big) f(X_{i_0}(0),\Gamma(0)) \bigg).
\end{aligned}$$

En désintégrant la mesure de Campbell dans l'égalité (5.13), et en insérant le résultat ci-dessus, on prouve l'égalité suivante

$$C^!_{Q^\mu}\Big(\vec{u}.\nabla_x h^{\varphi}(X(0),\Gamma(0)) f(X(0),\Gamma(0)) \Big) \;=\; C^!_{Q^\mu}\Big(\vec{u}.\nabla_x f(X(0),\Gamma(0)) \Big).$$

D'après la proposition 3.6, cela prouve que μ est un champ de Gibbs canonique d'hamiltonien local h^φ. ∎

Remarque :
Pour démontrer qu'une mesure réversible est un champ de Gibbs canonique, nous avons utilisé uniquement le fait que $Q^\mu = \hat{Q}^\mu$, ce qui est à priori plus faible que la réversibilité, puisque l'on ne suppose l'invariance de Q^μ que sous l'action du retournement du temps en 1 : $s \mapsto 1 - s$ et non pour tout $t \in [0,1]$: $s \mapsto t - s$.

5.2 Champs de Gibbs généraux sur $\mathcal{C}$ interprétés comme diffusions

Dans le premier paragraphe de cette section, nous allons démontrer une généralisation de la réciproque du Théorème 4.11, dans le cas où H est un hamiltonien local quelconque régulier. Nous montrons que tout champ de Gibbs canonique d'hamiltonien local H suffisamment régulier est solution faible d'un système d'équations différentielles stochastiques dont la dérive sera donnée explicitement en fonction de H. Ensuite, dans le deuxième paragraphe, on applique ce résultat pour étudier l'action du renversement du temps sur des champs de Gibbs sur $\mathcal{C}$. Cela fournira ainsi une généralisation des résultats de H. Föllmer et A. Wakolbinger aux systèmes continus. Le dernier paragraphe traitera, quant à lui, le cas du retournement du temps en régime non stationnaire pour le système de particules browniennes. Une application aux mesures invariantes sera également donnée.

5.2.1 Représentation comme diffusion d'un champ de Gibbs canonique quelconque sur $\mathcal{C}$

L'objectif de ce paragraphe est d'aboutir au Théorème 5.10 qui permet de représenter une vaste classe de champs de Gibbs canoniques sur $\mathcal{C}$ comme des diffusions browniennes infini-dimensionnelles.
Énonçons et démontrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 5.9. *Soit $(b_t)_{t\in[0,1]}$ une famille de fonctionnelles sur $\mathcal{C}\otimes\mathcal{M}(\mathcal{C})$ $\mathcal{F}_t$-adaptées et P une probabilité sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ telle que $C^!_P$ soit σ-finie; alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
i) La famille de processus

$$W_{i,t} := \Theta_i(\Gamma)(t) - \Theta_i(\Gamma)(0) - \int_0^t b_s(\Theta_i(\Gamma),\Gamma\backslash\Theta_i(\Gamma))ds, \quad i\in\mathbb{N}^*,\ t\in[0,1],$$

est une famille de $\mathcal{F}_t$-mouvements browniens partant de 0 sous P.
ii) Le processus

$$W_t := X(t) - X(0) - \int_0^t b_s(X,\Gamma)ds, \qquad \textit{pour } t\in[0,1],$$

est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien partant de 0 sous $1\!\!1_{[0,M]}(X(0))C^!_P$, pour tout $M>0$.

Preuve :
Démontrons que *i)* implique *ii)*. Prouvons que W_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale de variation quadratique t sous $1\!\!1_{[0,M]}(X(0))C^!_P$ qui est par hypothèse une mesure finie pour tout M. Soit F_s une fonctionnelle de $\overline{\mathcal{W}}$, $\mathcal{F}_s$-mesurable pour $s\in[0,1]$; alors on a pour $t\geq s$

$$\begin{aligned} & C^!_P\Big(F_s(X,\Gamma)(W_t-W_s)\Big) && (5.15)\\ = & \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F_s(\Theta_i(\Gamma),\Gamma\backslash\Theta_i(\Gamma))(W_{i,t}-W_{i,s})P^\gamma(d\Gamma)P_0(d\gamma). \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $W_{i,t}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien sous P. Donc $W_{i,t}$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_0$, et est donc également un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien sous P^γ. Par conséquent, de l'équation (5.15) on déduit

$$C_P^!\Big(F_s(X,\Gamma)(W_t - W_s)\Big) = 0;$$

W_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale. De la même manière on montre que $W_t^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale et on en déduit *ii)*.
Montrons maintenant que *ii)* implique *i)*: Soit $\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et $i \in \mathbb{N}^*$, W_t est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien sous $\mathbb{1}_{[0,M]}(X(0))C_P^!$; il est donc indépendant de $\mathcal{F}_0$ et par conséquent W_t est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien sous $C_P^!\big(\ |X(0) = \theta_i(\gamma),\Gamma(0) = \gamma\backslash\theta_i(\gamma)\big)$.Or,

$$C_P^!\Big((dX,d\Gamma)\Big|X(0) = \theta_i(\gamma),\Gamma(0) = \gamma\backslash\theta_i(\gamma)\Big) = P^\gamma\Big((d\Theta_i(\Gamma),d(\Gamma\backslash\Theta_i(\Gamma)))\Big),$$

donc $W_{i,t}$ est un mouvement brownien sous P^γ. En réintégrant par la condition initiale, on montre que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $W_{i,t}$ est un mouvement brownien sous P. ■
Remarque : Dans la proposition i) on n'affirme pas que la famille de mouvements browniens est indépendante.
Nous pouvons désormais énoncer et démontrer le théorème principal de ce paragraphe.
Théorème 5.10. *Soit $P \in \mathcal{G}_c(H,\varpi^m)$ un champ de Gibbs canonique tempéré sur $\mathcal{C}$, où m est une mesure σ-finie de $\mathbf{M}(\mathbb{R}^d)$ et H un hamiltonien local de $\overline{W}^{1,2}$ satisfaisant la condition d'intégrabilité (3.12); alors, en notant pour $i \in \mathbb{N}^*$ $X_i = \Theta_i(\Gamma)$, la famille de processus*

$$\Big(X_i(t) - X_i(0) - \int_0^t b_s\big(X_i,\sum_{j\neq i}\delta_{X_j}\big)ds\Big)_{i\in\mathbb{N}^*,t\in[0,1]} \tag{5.16}$$

est une famille de P-mouvements browniens indépendants de $\mathbb{R}^d$, où $(b_t(X,\Gamma))_{t\in[0,1]}$ est le processus adapté sur $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$ défini par

$$b_t(X,\Gamma) = -C_P^!\Big(D_tH(X,\Gamma)\Big|\mathcal{F}_t\Big), \qquad \textit{pour } \lambda \textit{ p.t. } t \in [0,1].$$

Preuve :
P est un champ de Gibbs canonique; par conséquent d'après la proposition 3.2, il existe une mesure $\tilde{P}$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ telle que $C_P^!$ soit absolument continue par rapport à $\varpi^m \otimes \tilde{P}$ et donc à fortiori la mesure finie $\mathbb{1}_{[0,M]}(X(0))C_P^!$ est aussi absolument continue par rapport à $\varpi^m \otimes \tilde{P}$; on en déduit l'existence d'un processus adapté $(b_t)_{t\in[0,1]}$ sur $\mathcal{C} \otimes \mathcal{M}(\mathcal{C})$ tel que le processus

$$X(t) - X(0) - \int_0^t b_s(X,\Gamma)ds$$

soit un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien partant de 0 sous $1\!\!1_{[0,M]}(|X(0)|)C^!_P$, pour tout $M \geq 0$. D'après le lemme 5.9, cela entraîne que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$B_i(t) := X_i(t) - X_i(0) - \int_0^t b_s\big(X_i, \sum_{j \neq i} \delta_{X_j}\big) ds$$

est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$ sous P. Montrons l'indépendance de ces mouvements browniens : d'après le lemme 3.14, $P^\gamma \circ \Theta^{-1}$ est une mesure de Gibbs sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$. Par conséquent, pour toute partie finie Λ de $\mathbb{N}^*$, $P^\gamma \circ \Theta^{-1}$ est absolument continue par rapport à $\big(\bigotimes_{i\in\Lambda} \varpi^{\theta_i(\gamma)}\big) \bigotimes (P^\gamma \circ \Theta^{-1})_{\Lambda^c}$ sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ et il existe donc un processus $(b^\Lambda_{i,t})_{i\in\Lambda}$ tel que

$$\Big(w_i(t) - w_i(0) - \int_0^t b^\Lambda_{i,s}(w) ds\Big)_{i\in\Lambda}$$

soit une famille de mouvements browniens indépendants. Ce qui équivaut à

$$\Big(X_i(t) - X_i(0) - \int_0^t b^\Lambda_{i,s}(X_1,X_2,\dots) ds\Big)_{i\in\Lambda} \tag{5.17}$$

est une famille de mouvements browniens indépendants sous P^γ.
Par unicité de la décomposition des semi-martingales, la famille de mouvements browniens $(B_i)_{i\in\Lambda}$ a même loi que la famille de mouvements browniens définie en (5.17), ce qui entraîne l'indépendance de la famille $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.
Il nous reste à identifier le processus $(b_t(X,\Gamma))_{t\in[0,1]}$. Le processus $X(t) - X(0) - \int_0^t b_s(X,\Gamma) ds$ étant un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien, c'est donc une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $1\!\!1_{[0,M]}(|X(0)|)C^!_P$; on en déduit l'équation fonctionnelle suivante :

$$C^!_P\Big(F_s(X,\Gamma)\big(X(t) - X(s) - \int_s^t b_r(X,\Gamma) dr\big)\Big) = 0 \tag{5.18}$$

pour tout $0 \leq s \leq t \leq 1$, et toute fonctionnelle F_s de $\overline{\mathcal{W}}$ $\mathcal{F}_s$-mesurable.
En comparant cette équation à la formule d'intégration par parties (3.13) du Théorème 3.8 appliquée à $g = 1\!\!1_{]s,t]}$ et F_s, on obtient

$$C^!_P\Bigg(F_s(X,\Gamma)\Big(\int_s^t \big(b_r(X,\Gamma) + D_r H(X,\Gamma)\big) dr\Big)\Bigg) = 0.$$

On en déduit que pour $s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ et toute fonction F_s de la forme

$$\begin{aligned} F_s(X,\Gamma) &= f\big(X(t_{0,1}\wedge s),\dots,X(t_{0,n}\wedge s),\Theta_1(\Gamma)(t_{1,1}\wedge s),\dots,\Theta_1(\Gamma)(t_{1,n}\wedge s),\\ &\qquad \dots,\Theta_n(\Gamma)(t_{n,1}\wedge s),\dots,\Theta_n(\Gamma)(t_{n,n}\wedge s)\big), \end{aligned}$$

où $(t_{0,1},\ldots,t_{n,n}) \in (\mathbb{Q}\cap[0,1])^{n(n+1)}$ et f appartient à un ensemble dénombrable de fonctions dense dans l'ensemble des fonctions continues à support compact de $(\mathbb{R}^d)^{n(n+1)}$ dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante est satisfaite pour λ-presque tout $r \in [0,1]$

$$C^!_P\Big(1\!\!1_{s\leq r} F_s(X,\Gamma)\big(b_r(X,\Gamma) + D_r H(X,\Gamma)\big)\Big) = 0.$$

En faisant tendre s vers r et en appliquant le théorème de convergence dominé on obtient que pour λ-presque tout $r \in [0,1]$

$$b_r(X,\Gamma) = -C^!_P\Big(D_r H(X,\Gamma)\Big|\mathcal{F}_r\Big). \qquad \blacksquare$$

Afin de mieux comprendre ce que représente la mesure $C^!_P(\quad|\mathcal{F}_s)$, nous énonçons et démontrons le lemme suivant. On note $X_{[0,t]}$ (respectivement $\Gamma_{[0,t]}$) le processus X (respectivement Γ) restreint à l'intervalle $[0,t]$.

Lemme 5.11. *Soit P une probabilité sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ telle que $C^!_P$ soit σ-finie; alors, pour tout $t \in [0,1]$, $C^!_P$-presque tout $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ et pour tout $X \in \mathcal{C}$, on a*

$$C^!_P\Big(dX,\, d\Gamma \;\Big|\; X_{[0,t]},\, \Gamma_{[0,t]}\Big) \;=\; P\Big(dX_i,\, d(\Gamma\backslash X_i) \;\Big|\; \Gamma_{[0,t]} + \delta_{X_{[0,t]}}\Big), \qquad (5.19)$$

où i est l'entier tel que $\theta_i(\Gamma(0) + \delta_{X(0)}) = X(0)$.

Preuve :

On a pour tout $t \in [0,1]$ et toutes fonctions F et F_t de $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$ dans $\mathbb{R}$, telles que F_t soit $\mathcal{F}_t$-mesurable, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
& C^!_P\Big(F_t(X,\Gamma)F(X,\Gamma)\Big) \\
=\ & \int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{C}} F_t(X,\Gamma\backslash X)F(X,\Gamma\backslash X)\Gamma(dX)P(d\Gamma) \\
=\ & \int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}} F_t(X,\Gamma\backslash X)F(X,\Gamma\backslash X) \\
& \qquad\qquad \Gamma(dX|X_{[0,t]})\Gamma(dX_{[0,t]})P(d\Gamma|\Gamma_{[0,t]})P(d\Gamma_{[0,t]}) \\
=\ & \int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{C}} F(X,\Gamma\backslash X)\Gamma(dX|X_{[0,t]})P(d\Gamma|\Gamma_{[0,t]}) \\
& \qquad\qquad F_t(X,\Gamma\backslash X)\Gamma(dX_{[0,t]})P(d\Gamma_{[0,t]}) \\
=\ & \int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X_i,\Gamma\backslash X_i)P(d\Gamma|\Gamma_{[0,t]}\backslash X_{[0,t]} + \delta_{X_{[0,t]}}) \\
& \qquad\qquad F_t(X,\Gamma\backslash X)\Gamma(dX_{[0,t]})P(d\Gamma_{[0,t]}) \\
=\ & \int_{\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\mathcal{C})}\Big[\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})} F(X_i,\Gamma\backslash X_i)P(d\Gamma|\Gamma_{[0,t]} + \delta_{X_{[0,t]}})\Big]F_t(X,\Gamma)C^!_P(dX_{[0,t]},d\Gamma_{[0,t]}),
\end{aligned}$$

où i est un entier qui dépend de $X(0)$ et $\Gamma(0)$ de la façon indiquée dans l'énoncé du lemme. Il est alors évident que pour tout $t \in [0,1]$, $C_P^!$-presque tout $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ et tout $X \in \mathcal{C}$ on a l'égalité (5.19) attendue. ∎

5.2.2 Application au retournement du temps

Dans ce paragraphe, nous allons donner une application au retournement du temps pour des diffusions provenant d'un champ de Gibbs canonique sur $\mathcal{C}$. Soit P un champ de Gibbs canonique sur $\mathcal{C}$. Le lemme 3.12 affirme que la projection de P sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, à tout temps $t \in [0,1]$, est un champ de Gibbs canonique sur $\mathbb{R}^d$ d'hamiltonien local h_t. Le Théorème 5.10 affirme quant à lui que P et $\hat{P}$ sont les lois de diffusions browniennes. L'objectif du Théorème 5.12 suivant est d'exhiber une relation entre l'hamiltonien h_t et les dérives associées à P et $\hat{P}$. Dans [18], H. Föllmer fut le premier à démontrer cette formule dans le cas fini-dimensionnel; ensuite une version infini-dimensionnelle sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^*}$ fut donnée dans [19] par H. Föllmer et A. Wakolbinger (cf aussi [38]).
Dans la suite, on note $\hat{H}(X,\Gamma)$ l'hamiltonien local $H(\hat{X},\hat{\Gamma})$.

Théorème 5.12. *Soit $P \in \mathcal{G}_c(H,\varpi^\lambda)$ un champ de Gibbs canonique tempéré sur $\mathcal{C}$, où H est un hamiltonien local tel que H et $\hat{H}$ soient dans $\overline{W}^{1,2}$ et qu'ils vérifient la condition d'intégrabilité suivante :*
$\forall M > 0$, $\forall t \in [0,1]$

$$C_P^!\Big(\big(|X(t)| + \int_0^1 (|D_s H|^2 + |D_s \hat{H}|^2) ds\big) 1\!\!1_{[0,M]^2}(|X(0)|,\mathcal{E}_\varphi(\Gamma(0)))\Big) < +\infty; \qquad (5.20)$$

alors, en notant pour $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i = \Theta_i(\Gamma)$, il existe deux processus adaptés $(b_s)_{s\in[0,1]}$ et $(\hat{b}_s)_{s\in[0,1]}$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$ dans $\mathbb{R}$ tels que la famille

$$\Big(X_i(t) - X_i(0) - \int_0^t b_s\big(X_i, \sum_{j\neq i} \delta_{X_j}\big) ds\Big)_{i\in\mathbb{N}^*,\, t\in[0,1]}$$

soit une famille de P-mouvements browniens indépendants et tels que

$$\Big(X_i(t) - X_i(0) - \int_0^t \hat{b}_s\big(X_i, \sum_{j\neq i} \delta_{X_j}\big) ds\Big)_{i\in\mathbb{N}^*\ t\in[0,1]}$$

soit une famille de $\hat{P}$-mouvements browniens indépendants. Donc b et $\hat{b}$ sont les dérives forward et backward associées à P.
En notant h_t l'hamiltonien local du champ de Gibbs canonique $P_t = P \circ pr_t^{-1}$, on a pour λ-presque tout $t \in [0,1]$ et pour P_t-presque tout γ,

$$-\tilde{\nabla}_x h_t(x,\gamma) \;=\; C_P^!\Big(b_t(X,\Gamma) + \hat{b}_{1-t}(\hat{X},\hat{\Gamma})\Big| X(t) = x,\, \Gamma(t) = \gamma\Big) \quad \lambda\text{-}p.t.\ x, \qquad (5.21)$$

où $\tilde{\nabla}$ est l'opérateur gradient faible au sens des distributions dans $\mathbf{H}^{1,2}(\mathbb{R}^d,\lambda)$. Dans le cas $d=1$, l'équation (5.21) est encore vraie si l'on remplace le gradient faible $\tilde{\nabla}$ par l'opérateur gradient ∇ ordinaire.

Preuve :

Comme P est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(H,\varpi^\lambda)$, en remarquant que $\hat{\varpi}^\lambda = \varpi^\lambda$ on a que $\hat{P} \in \mathcal{G}_c(\hat{H},\varpi^\lambda)$. Donc l'existence des dérives b_t et $\hat{b}_t$ est une conséquence du Théorème 5.10.

Par le Théorème 3.8, la formule d'intégration par parties (3.13) est satisfaite sous $C_P^!$. En l'appliquant à $g = \mathbb{1}_{[s,t]}$ et à $F(X,\Gamma) = f(X(t),\Gamma(t))$, on obtient que

$$\begin{aligned} C_P^!\Big(f(X(t),\Gamma(t))\big(X(t)-X(s)\big)\Big) &= (t-s)C_P^!\Big(\nabla_x f(X(t),\Gamma(t)\Big) \\ &\quad -C_P^!\Big(f(X(t),\Gamma(t))D_{\mathbb{1}_{[s,t]}}H(X,\Gamma)\Big). \end{aligned}$$

En retournant le temps dans le membre de gauche on obtient

$$\begin{aligned} &C_{\hat{P}}^!\Big(f(X(1-t),\Gamma(1-t))\big(X(1-t)-X(1-s)\big)\Big) \\ =\ &(t-s)C_P^!\Big(\nabla_x f(X(t),\Gamma(t)\Big) - C_P^!\Big(f(X(t),\Gamma(t)))D_{\mathbb{1}_{[s,t]}}H(X,\Gamma)\Big). \end{aligned}$$

En divisant par $t-s$ et en faisant tendre t vers s, on trouve pour λ-presque tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} -C_{\hat{P}}^!\Big(f(X(1-t),\Gamma(1-t))\hat{b}_{1-t}(X,\Gamma)\Big) &= C_P^!\Big(\nabla_x f(X(t),\Gamma(t))\Big) \\ &\quad +C_P^!\Big(f(X(t),\Gamma(t))b_t(X,\Gamma)\Big), \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$-\,C_{P_t}^!\Big(\nabla_x f(x,\gamma)\Big) = C_{P_t}^!\Big(f(x,\gamma)q(x,\gamma)\Big) \tag{5.22}$$

où $q(x,\gamma) = C_P^!\big(\hat{b}_{1-t}(\hat{X},\hat{\Gamma}) + b_t(X,\Gamma)\big|X(t)=x,\,\Gamma(t)=\gamma\big)$.

Le lemme 3.12 prouve que P_t est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h_t,\lambda)$, où h_t est un hamiltonien local inconnu. Par conséquent, d'après la Proposition 3.2, $C_{P_t}^! = e^{-h_t}\lambda \otimes Q_t$ et l'équation (5.22) peut s'écrire, pour Q_t-presque tout γ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x f(x,\gamma)e^{-h_t(x,\gamma)}\lambda(dx) = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x,\gamma)q(x,\gamma)e^{-h_t(x,\gamma)}\lambda(dx). \tag{5.23}$$

La forme explicite des dérives b et $\hat{b}$ prouve que celles-ci sont dans $L^2(C_P^!)$. Par conséquent la fonction qui à x associe $q(x,\gamma)$ est, pour P_t-presque tout γ, dans $L^2(e^{-h_t(x,\gamma)}\lambda(dx))$ et donc d'après [2], elle est égale à la dérivée logarithmique de la mesure $e^{-h_t(x,\gamma)}\lambda(dx)$, dont nous rappelons, dans la proposition suivante, la définition et la propriété que nous utilisons.

Proposition 5.13 (proposition 1.5 [2]). *Une fonction v de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ est dite la dérivée logarithmique de la mesure σ-finie m sur $\mathbb{R}^d$, si pour toute fonction f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ à support compact et de classe C^1, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x f(x) m(dx) = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)v(x)m(dx).$$

Si de plus, la fonction v est dans $L^2(m(dx))$, alors il existe une fonction w dans $\mathbf{H}^{1,2}(\mathbb{R}^d,\lambda)$ telle que

$$m(dx) = e^{w(x)}\lambda(dx) \qquad et \qquad v = \tilde{\nabla} w.$$

De cette proposition, on en déduit que $-h_t(x,\gamma)$ est pour P_t-presque tout γ dans $\mathbf{H}^{1,2}(\mathbb{R}^d,\lambda)$ avec pour gradient faible $q(x,\gamma)$. En dimension d=1, l'équation (5.23) prouve directement que pour P_t-presque tout γ, $-h_t(x,\gamma)$ est différentiable pour λ-presque tout x et admet comme fonction gradient $q(x,\gamma)$. ■

5.2.3 Retournement du temps pour le système de particules browniennes

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer le Théorème 5.12 du paragraphe précédent au cas particulier du système de particules browniennes (4.3). Ensuite, nous donnerons une application aux mesures invariantes.

Corollaire 5.14. *Soit μ un champ de Gibbs canonique tempéré de $\mathcal{G}_c(h,\lambda)$, où h est un hamiltonien local tel que, pour tout $\gamma \in \mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^d)$, $h(.,\gamma)$ est dans $\mathbf{H}^{1,2}(\mathbb{R}^d,\lambda)$ et*

$$\mathcal{C}^!_{Q^\mu}\Big(|\tilde{\nabla}_x h(X(1),\Gamma(1))|^2\Big) < +\infty; \tag{5.24}$$

alors pour tout $t \in [0,1]$, il existe une fonction mesurable $\hat{b}_t$ de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$ tel que la famille

$$\Big(X_i(t) - X_i(0) - \int_0^t \hat{b}_s\big(X_i(s), \sum_{j\neq i} \delta_{X_j(s)}\big)ds\Big)_{i\in\mathbb{N}^*,\, t\in[0,1]}$$

soit une famille de $\hat{Q}^\mu$-mouvements browniens indépendants.
De plus, pour tout $t \in [0,1]$ $Q^\mu \circ pr_t^{-1}$ est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h_t,\lambda)$, où h_t satisfait pour λ-presque tout t et $Q^\mu \circ pr_t^{-1}$-presque tout γ

$$-\tilde{\nabla}_x h_t(x,\gamma) \;=\; -\frac{1}{2}\nabla_x h^{\varphi}(x,\gamma) + \hat{b}_{1-t}(x,\gamma) \qquad \lambda\text{-}p.s. \tag{5.25}$$

Preuve :

On remarque tout d'abord grâce au Théorème 4.11 que Q^μ est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h \circ pr_0 + H^\Phi)$. De plus, grâce à l'hypothèse (5.24) et à un calcul similaire à celui développé dans la démonstration du lemme 5.5, on montre que $h \circ pr_0 + H^\Phi$ satisfait la condition d'intégrabilité (5.20). On peut donc appliquer le Théorème 5.12; la nature markovienne du système (4.3) et donc de son renversé permet d'obtenir une dérive $\hat{b}_t$ plus simple car markovienne. L'expression (5.21) admet donc également la forme plus simple (5.25). ■

Nous pouvons déduire de ce corollaire une information sur les mesures stationnaires pour la dynamique du système (4.3).

Corollaire 5.15. *Soit μ une mesure stationnaire tempérée pour le système (4.3); alors il existe un hamiltonien local h_μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que μ soit un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h_\mu,\lambda)$.*

Si de plus, on suppose que pour $C^!_\mu$-presque tout $\gamma \in \mathcal{M}^\varphi_\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, $h_\mu(.,\gamma)$ est dans $\mathbf{H}^{1,2}(\mathbb{R}^d,\lambda)$ et

$$\mathcal{C}^!_\mu\Big(|\tilde{\nabla}_x h_\mu|^2\Big) < +\infty, \tag{5.26}$$

alors il existe un hamiltonien local $\hat{h}^\varphi_\mu$ sur $\mathbb{R}^d$ tel que la famille

$$\Big(X_i(t) - X_i(0) + \int_0^t \frac{1}{2}\tilde{\nabla}\hat{h}^\varphi_\mu\big(X_i(s), \sum_{j\neq i}\delta_{X_j(s)}\big)ds\Big)_{i\in\mathbb{N}^*\ t\in[0,1]}$$

soit une famille de $\hat{Q}^\mu$-mouvements browniens indépendants et tel que, pour $C^!_\mu$-presque tout γ,

$$h_\mu(x,\gamma) \quad = \quad \frac{1}{2}h^\varphi(x,\gamma) + \frac{1}{2}\hat{h}^\varphi_\mu(x,\gamma) \qquad \lambda\text{-p.s.}. \tag{5.27}$$

Preuve :

C'est une application directe de la Proposition 5.3 et du Corollaire 5.14. ■

Il existe depuis longtemps la conjecture que les mesures stationnaires pour le système (4.3) sont les champs de Gibbs canoniques d'hamiltonien local h^φ et de mesure de référence λ. D'après le Corollaire 5.15, une mesure stationnaire est un champ de Gibbs canonique d'hamiltonien local h^φ si et seulement $\hat{h}^\varphi_\mu = h^\varphi$. Cette approche, basée sur le retournement du temps, n'ayant pas porté ses fruits pour montrer que, dans le cadre des diffusions indexées par le réseau $\mathbb{Z}^d$, les mesures stationnaires sont réversibles, il semble peu probable que la formule (5.27) permette de démontrer la conjecture dans le cadre des système continus.

Néanmoins, une réponse partielle à cette question fut apportée par J. Fritz , S. Rœlly et H. Zessin [17]. En effet, ils démontrent, en dimension $d \leq 3$, que, sous l'hypothèse supplémentaire d'entropie spécifique finie, les mesures stationnaires invariantes par translation sont des champs de Gibbs canoniques d'hamiltonien local h^φ.

5.3 Le cas $d \geq 4$

Certains résultats présentés dans la thèse restent exacts dans le cas $d \geq 4$.
En effet, dans le cas $d = 4$, le Théorème 4.11 est encore vrai; on en donnera l'énoncé précis et la preuve dans le Théorème 5.16. Par contre les techniques que nous développons ici pour $d \leq 3$ ne permettent pas de démontrer le lemme 4.8 dans le cas $d = 4$, et donc on ne peut pas cerner quand l'hypothèse d'existence de moments pour la variable ζ_η, dans la partie réciproque du Théorème 5.16, est satisfaite. De même, la démonstration de la Proposition 5.6 n'est pas adaptable dans le cas $d = 4$, car elle s'appuie sur la Proposition 5.4 dont la démonstration nécessite des moments pour la fonction ζ_η.
Dans le cas $d > 4$, il n'existe pas de preuve d'existence de solution faible au système (4.3) hormis le cadre stationnaire développé par R. Lang. Dans ce cas le Théorème 4.11 reste valable du moment que $h = h^\varphi$ (voir Théorème 5.19). Par contre, la démonstration du lemme 4.8 n'est pas adaptable dans le cadre stationnaire et donc, de manière analogue au cas $d = 4$, on ne peut pas cerner quand l'hypothèse d'existence de moments pour la variable ζ_η du Théorème 5.19 est satisfaite.
Les Théorèmes 5.10 et 5.12 restent quant à eux évidemment vrais pour d quelconque; la dimension $d \leq 3$ n'intervient à aucun moment ni dans les énoncés, ni dans les preuves. Par contre l'application que l'on peut en faire pour le système (4.3), corollaires 5.14 et 5.15, n'est valable qu'en dimension $d \leq 3$ car l'hypothèse sur les moments de ζ_η est indipensable dans la preuve que nous donnons de ces corollaires.
Énonçons tout d'abord le théorème analogue au Théorème 4.11 dans le cas où $d = 4$.

Théorème 5.16. *Soit h un hamiltonien local sur $\mathbb{R}^4$ et m une mesure de référence σ-finie de $\mathbf{M}(\mathbb{R}^4)$; alors les deux assertions suivantes sont vraies :*

$$\textit{pour tout } \mu \in \mathcal{G}(h,m) \ \varphi\textit{-tempérée, alors } Q^\mu \in \mathcal{G}(h \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m),$$

$$\textit{pour tout } \mu \in \mathcal{G}_c(h,m) \ \varphi\textit{-tempérée, alors } Q^\mu \in \mathcal{G}_c(h \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m).$$

Réciproquement, soit P un champ de Gibbs canonique tempéré de $\mathcal{G}_c\big(h \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m\big)$. S'il existe $\eta \in]0,1[$ tel que la variable ζ_η admette un moment d'ordre $\frac{8}{1-\eta}$ sous P, alors P est la loi Q^μ solution du système (4.3), où la loi initiale $\mu = P_0$ est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h,m)$. De plus, si $P \in \mathcal{G}\big(h \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m\big)$, alors $P_0 \in \mathcal{G}(h,m)$.

Preuve :
Elle est identique à la preuve du Théorème 4.11. Il suffit de remarquer que la variable $\zeta_{\log}$ est finie Q^μ-presque sûrement. En effet, la Proposition 4.3 n'est pas démontrable dans le cas $d = 4$, mais elle peut être remplacée par la proposition suivante, qui prouve que $\zeta_{\log}$ est finie Q^γ-presque sûrement, même si les estimées sur la queue de la loi de $\zeta_{\log}$ de la Proposition 4.3 ne sont plus démontrées dans le cas $d = 4$.

Proposition 5.17. *Pour tout $\gamma \in \mathcal{M}^\varphi_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^4)$, $\zeta_{\log}$ est finie Q^γ-presque sûrement.*

Preuve :
La démonstration est identique a la démonstration de la Proposition 4.3 développée dans le paragraphe 4.2.1. hormis le fait qu'elle ne s'appuie plus sur le lemme 4.4, qui n'est pas démontré dans le cas $d=4$, mais sur le lemme suivant qui est également dû à J. Fritz.

Lemme 5.18 ([16] Proposition 2). *Pour tout $\gamma \in \mathcal{M}^{\varphi}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^4)$, $\|\Gamma\|_{\mathcal{E}_\varphi}$ est finie Q^γ-presque sûrement.*

■

Donnons maintenant le théorème analogue au Théorème 4.11 dans le cadre stationnaire avec d quelconque.

Théorème 5.19. *Soit d un entier positif; alors les deux assertions suivantes sont vraies :*

$$\textit{pour tout } \mu \in \mathcal{G}(h^\varphi,\lambda) \ \textit{ tempéré au sens de Ruelle , alors } Q^\mu \in \mathcal{G}(h^\varphi \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m),$$

$$\textit{pour tout } \mu \in \mathcal{G}_c(h^\varphi,\lambda) \ \textit{ tempéré au sens de Ruelle , alors } Q^\mu \in \mathcal{G}_c(h^\varphi \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m).$$

Réciproquement, soit P un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c\big(h^\varphi \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m\big)$. S'il existe $\eta \in]0,1[$ tel que la variable ζ_η admette un moment d'ordre $\frac{2d}{1-\eta}$ sous P, alors P est la loi Q^μ solution du système (4.3), où la loi initiale $\mu = P_0$ est un champ de Gibbs canonique de $\mathcal{G}_c(h^\varphi,m)$. De plus, si $P \in \mathcal{G}\big(h^\varphi \circ pr_0 + H^\Phi, \varpi^m\big)$, alors $P_0 \in \mathcal{G}(h^\varphi,m)$.

Preuve :
La preuve est identique à celle du Théorème 4.11 en remarquant que $\zeta_{\log}$ est finie Q^μ-presque sûrement grâce au Théorème 4.1. ■

5.4 Perspectives

Sur la base du travail présenté ici, il reste bien évidemment de nombreuses pistes à explorer et d'applications à développer.

Il semble par exemple possible d'utiliser la structure gibbsienne des solutions du système (1.2) pour en étudier la limite hydrodynamique, c'est-à-dire la limite quand ε tend vers 0 de la loi de $\varepsilon\Gamma(\varepsilon^{-2}t)$ lorsque Γ est solution du système (cf [55]).
Une autre piste envisageable est la généralisation du théorème d'équivalence du chapitre 4, entre être une diffusion infini-dimensionnelle de type gradient et être un champ de Gibbs sur $\mathcal{C}$, a des diffusions infini-dimensionnelles plus générales; par exemple, dans le cas où la dérive n'est plus à portée finie ou est de type hardcore, etc.
Enfin, le point de vue des champs de Gibbs espace-temps (donc concernant un horizon de temps infini) est une autre piste qui semble prometteuse pour les systèmes continus puisque dans le cadre des systèmes réticulés, elle a permis d'obtenir (cf [5])

des résultats d'existence et d'unicité de diffusions infini-dimensionnelles à dérives non-markoviennes .

Bibliographie

[1] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev et M. Röckner, Analysis and geometry on configuration spaces : The Gibbsian case, J. Funct. Anal., 157 (1998) 242-291.

[2] S. Albeverio , M. Röckner et T. S. Zhang, Markov uniqueness for a class of infinite dimensional Dirichlet operators, Stochastic Processes and Optimal Control, Stochastics Monographs, 7 (1993) 1-26.

[3] P. Cattiaux, S. Rœlly et H. Zessin, Une approche gibbsienne des diffusions browniennes infini-dimensionnelles, Probab. Theory. Rel. Fields 104, N°2 (1996) 223-248.

[4] Ph. Courrège et P. Renouard, Oscillateurs anharmoniques, mesures quasi-invariantes sur $C(R,R)$ et théorie quantique des champs en dimension 1, astérisque 22-23 Soc. Math. France, Paris (1975).

[5] P. Dai Pra et S. Rœlly, An existence result for infinite-dimensional Brownian diffusions with non-regular and non-Markovian drift, à paraître dans Markov Processes and Related fields (2002).

[6] P. Dai Pra, S. Rœlly et H. Zessin, A Gibbs variational principle in space-time for infinite-dimensional diffusions, Probab. Theory. Rel. Fields 122 (2002) 289-315.

[7] D. Dereudre, Une caractérisation de champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^d)$, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 177-182.

[8] D. Dereudre, Interacting Brownian particles and Gibbs fields on pathspaces , soumis pour publication en 2002.

[9] D. Dereudre, Deux caractérisations de mélanges de processus ponctuels de Poisson, mémoire de DEA, (1999).

[10] J.-D. Deuschel, Infinite dimensional diffusion processes as Gibbs measures on $C[0,1]^{\mathbb{Z}^d}$, Probab. Theory Rel. Fields 76 (1987) 325-340.

[11] R. L. Dobrushin, Investigation of the conditions of the Asymptotic Existence of the configuration Integral of the Gibbs distribution, Teorija verojatn. i ee Prim. 9 (1964) 626-643.

[12] R. L. DOBRUSHIN et J. FRITZ, Non-equilibrium dynamics of one-dimensional infinite particle systems with a hard-core interaction, Comm. Math. Phys. 55 (1977) 275-292.

[13] J. FRITZ et R. L. DOBRUSHIN, Non-equilibrium dynamics of two-dimensional infinite particle systems with a singular interaction, Comm. Math. Phys. 57 (1977) 67-81.

[14] M. E. FISHER et D. RUELLE, The Stability of Many-Particles Systems, J. Math. Phys. 7 (1966) 260-270.

[15] M. FRADON, S. RŒLLY et H. TANEMURA, An infinite system of Brownian balls with infinite range interaction, Stochastic Process. Appl. 90-1 (2000) 43-66.

[16] J. FRITZ, Gradient dynamics of infinite point systems, Ann. Prob. 15 (1987) 487-514.

[17] J. FRITZ, S. RŒLLY et H. ZESSIN, Stationary states of interacting Brownian motions, Stud. Sci. Math. Hung. 34 (1998) 151-164.

[18] H. FÖLLMER, Time reversal on Wiener space, Lecture Notes in Mathematics 1158, Springer (1986) 117-129.

[19] H. FÖLLMER et A. WAKOLBINGER, Time reversal of infinite-dimensional diffusions, Stochastic Process. Appl. 22 (1986) 59-77

[20] B. GAVEAU et P. TRAUBER, L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel, J. of Funct. Analysis 46 (1982) 230-238.

[21] H.-O. GEORGII, *Canonical Gibbs measures*, Lecture Notes in Math. 760, Springer, 1979.

[22] H.-O. GEORGII, Equilibria for particle motions : Conditionally balanced point random fields, Exchangeability in Probability and Statistics, Eds Koch, Spizzichino, North Holland (1982) 265-280.

[23] H.-O. GEORGII, *Gibbs measures and phase transitions* , Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1988.

[24] E. GLÖTZL, Gibbsian description of point processes, Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai, 24 keszthely, Hungary (1978) 69-84.

[25] E. GLÖTZL, Bemerkungen zu einer Arbeit von O. K. Kozlov, Math. Nachr. 94 (1980) 277-289.

[26] E. GLÖTZL, Lokale Energien und Potentiale für Punktprozesse, Math. Nachr. 96 (1980) 195-206.

[27] S. GOLDSTEIN, R. KUIK, J. L. LEBOWITZ et Ch. MAES, From PCA's to equilibrium systems and back, Comm. Math. Phys. 125 N°3-4 (1989) 71-79.

[28] X. GUYON, *Champs aléatoires sur un réseau*, Masson, 1992.

[29] J. JACOD, *Calcul Stochastique et problèmes de martingales*, Lectures Notes in Math. 714, Springer, 1979.

[30] O. K. Kozlov, Gibbsian description of point random fields, Theory Probab. Appl. 21 (1976) 339-356.

[31] A. N. Kolmogorov, *Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze*, Math. Ann. 113 (1937) 766-772.

[32] R. Lang, Unendlich-dimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung I., Z. Wahrsch. verw. Gebiete 38 (1977) 55-72.

[33] R. Lang, Unendlich-dimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung II., Z. Wahrsch. verw. Gebiete 39 (1977) 277-299.

[34] J. L. Lebowitz, A. E. Mazel et E. Presutti, Rigorous proof of liquid-vapour phase transition in a continuum particle system, Phys. Rev. Letters, 80 (1998) 4701-4704.

[35] V. A. Malyshev et R. A. Minlos, *Gibbs random fields*, Kluwer Academic Pub., 1991.

[36] K. Matthes, J. Kerstan et J. Mecke, *Infinitely Divisible Point Process*, Akademie-Verlag, 1978.

[37] J. Mecke, A characterization of Mixed Poisson Processes, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 21 (1976) 1355-1360.

[38] A. Millet, D. Nualart et M. Sanz, Time Reversal for infinite-dimensional diffusions, Probab. Th. Rel. Fields. 82 (1989) 315-347.

[39] R. A. Minlos, *Introduction to mathematical statistical physics*, American Mathematical Society, 2000.

[40] R. A. Minlos, S. Rœlly et H. Zessin, Gibbs states on space-time, Potential Analysis 13 (2000) 367-408.

[41] X. X. Nguyen et H. Zessin, Integral and differential characterizations of the Gibbs process, Math. Nachr. 88 (1979) 105-115.

[42] D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics* , Probability and its Applications, Springer, 1995.

[43] Ch. Preston, *Random fields*, Lecture Notes in Math. 534, Springer, 1976.

[44] N. Privault, A characterization of grand canonical Gibbs measures by duality, Potential Analysis 15 No.1-2 (2001) 23-28.

[45] B. Prum, *Processus sur un réseau et mesures de Gibbs*, Masson, 1986.

[46] P. N. Pusey, Langevin approach to the dynamics of interacting Brownian particles, J. phys. A15 (1982) 1291-1308.

[47] J. Puzicha, Existenz und Charakterisierung von Gibbsmassen, Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik der Universität Bielefeld (1981).

[48] B. Rauchenschwandtner et A. Wakolbinger, Some aspects of the Papangelou kernel, Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai, 24 keszthely, Hungary (1978) 325-336.

[49] S. RŒLLY et H. ZESSIN, Une caractérisation des mesures de Gibbs sur $C(0{,}1)^{\mathbb{Z}^d}$ par le calcul des variations stochastiques, Ann. Inst. H. Poincaré 29 (3) (1993) 327-338.

[50] S. RŒLLY et H. ZESSIN, Une caractérisation de champs gibbsiens sur un espace de trajectoires, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 321 (1995) 1377-1382.

[51] G. ROYER et M. YOR, Représentation intégrale de certaines mesures quasi-invariantes sur $C(R)$; mesures extrémales et propriété de Markov, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26-2 (1976), 7-24

[52] D. RUELLE, *Statistical Mechanics. Rigorous Results.* Benjamin, New York, 1969 .

[53] D. RUELLE, Superstable interactions in classical statistical mechanics, Comm. Math. Phys. 18 (1970) 127-159.

[54] F. L. SPITZER, Markov random fields and Gibbs ensembles, Am. Math. Monthly 78, (1971) 142-154.

[55] H. SPOHN, Equilibrium Fluctuations for interacting Brownian Particles, Comm. Math. Phys. 103 (1986) 1-33.

[56] C. J. THOMPSON, *Mathematical Statistical Mechanics.* Princeton Univ. Press, 1972.

[57] A. WAKOLBINGER et G. EDER, A condition Σ_λ^c for Point Processes, Math. Nachr. 116 (1984) 209-232.

[58] M. YOSHIDA, Construction of infinite dimensional interacting diffusion processes through Dirichlet forms, Probab. Theory. Rel. Fields 106 (1996) 265-297.