



HAL
open science

Condensats de Bose-Einstein dans un piège anisotrope

Fabrice Gerbier

► **To cite this version:**

Fabrice Gerbier. Condensats de Bose-Einstein dans un piège anisotrope. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003. Français. NNT: . tel-00003589v2

HAL Id: tel-00003589

<https://pastel.hal.science/tel-00003589v2>

Submitted on 17 Oct 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT D'OPTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE
LABORATOIRE CHARLES FABRY

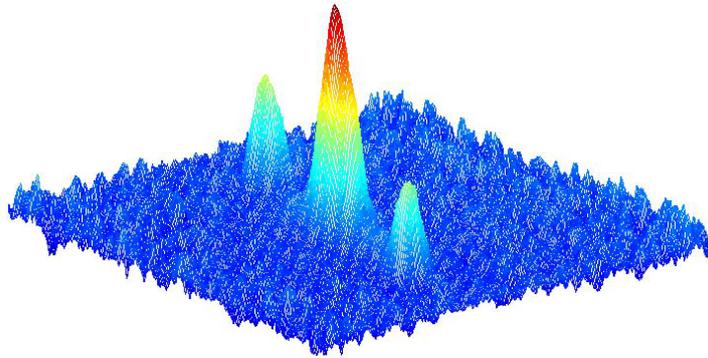
THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI
présentée par
Fabrice Gerbier

pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Paris VI,
spécialité : Physique Quantique

Sujet de la thèse :

**CONDENSATS DE BOSE-EINSTEIN
DANS UN PIÈGE ANISOTROPE**

- I. THERMODYNAMIQUE DU GAZ DE BOSE EN INTERACTIONS.
- II. EXTRACTION D'UNE ONDE DE MATIÈRE COHÉRENTE.
- III. SPECTROSCOPIE EN IMPULSION DES FLUCTUATIONS DE PHASE.



Thèse soutenue le 9 septembre 2003 devant le jury composé de :

M. A. ASPECT	Directeur de thèse
M. P. BOUYER	Membre invité
M. J. DALIBARD	Examineur
M. C. FABRE	Président
M. P. PILLET	Rapporteur
M. G. SHLYAPNIKOV	Examineur
M. S. STRINGARI	Rapporteur

Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés au Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique. Je remercie son directeur, Pierre CHAVEL, de m'y avoir accueilli.

Je remercie Alain ASPECT pour m'avoir accepté dans son équipe, et pour son soutien au cours de ces trois années. J'ai pu apprécié sa culture et sa compréhension de la physique, ses talents d'orateur qui m'ont permis de progresser considérablement dans ce domaine.

Pierre PILLET et Sandro STRINGARI ont bien voulu accepter de rapporter ce manuscrit. Je les remercie pour le temps qu'ils ont consacré à sa relecture, et pour l'intérêt qu'ils ont montré pour ces travaux. Je remercie également Claude FABRE et Jean DALIBARD pour avoir accepté de participer à ce jury. Enfin, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Gora SHLYAPNIKOV pour de nombreuses discussions qui ont permis de me faire progresser dans la compréhension de la physique des condensats, pour l'intérêt constant qu'il a porté à ces travaux, et pour avoir accepté de participer au jury.

L'ensemble des travaux relatés ici constitue bien entendu un travail d'équipe. Philippe BOUYER nous a communiqué au jour le jour son enthousiasme et son énergie, même dans les moments de découragement. Le cœur de ce travail a été mené conjointement avec Joseph THYWISSEN, Simon RICHARD et Mathilde HUGBART. Je les remercie en particulier pour leur bonne humeur et leur ténacité qui ont rendu ces trois années agréables et enrichissantes, tant sur le plan personnel que scientifique. Nous avons été rejoints dans la période finale de ma thèse par Jocelyn RETTER et Andrès VARRON, qui ont su s'adapter rapidement et, avec Mathilde, relancer l'expérience dans une direction nouvelle. Mes premiers pas sur le dispositif expérimental ont été suivis de près par Yann LE COQ, Guillaume DELANNOY et Sadiqali RANGWALA. Partant de connaissances très parcellaires en physique atomique expérimentale et en optique, j'ai pu à leur contact apprendre rapidement les rudiments de l'expérience, et je les remercie pour avoir su m'expliquer avec patience son fonctionnement. La contribution aux expériences de nos électroniciens de choc André VILLING et Frédéric MORON est primordiale. Je les remercie chaleureusement pour leur compétence et leur disponibilité qui nous a souvent permis de nous sortir d'un mauvais pas. Enfin, mes remerciements vont à l'ensemble des membres du groupe d'Optique Atomique, Antoine, Julie, Alice, Olivier, Signe, José, Rodolphe, Martijn, Denis, Chris, Nathalie, David, Jérôme, Christine, Thorsten, Isabelle, Marie, Jean-Félix, William, pour de nombreuses discussions (parfois passionnées), autant que pour avoir contribué à maintenir une ambiance conviviale et amicale.

De nombreuses personnes à l'Institut d'Optique ont aidé à l'aboutissement de ces travaux. Je remercie particulièrement l'équipe technique, Jean-Louis DUCHEMIN, Eric Vigne, Joël Corno et Jacky ROGER, les TPs de l'École Supérieure d'Optique, qui nous ont souvent dépanné en matériel, le personnel de l'atelier mécanique ainsi qu'à Alain AIDE. Je remercie également Christine AVIGNON-VÉRITÉ pour avoir supporté avec patience et compréhension nos demandes.

Table des matières

1	La condensation de Bose-Einstein dans un gaz piégé	11
1.1	Le gaz de Bose sans interactions dans un potentiel harmonique	11
1.1.1	Approximation semi-classique	11
1.1.2	Température de condensation et fraction condensée	13
1.2	Le problème à N corps pour un gaz dilué ultrafroid	13
1.2.1	Collisions ultra-froides	14
1.2.2	Pseudo-potentiel	16
1.2.3	Description d'un système à N corps en seconde quantification	18
1.3	Equation de Gross-Pitaevskii à température nulle	18
1.3.1	Approximation de Thomas-Fermi	20
1.3.2	Equations hydrodynamiques	20
1.4	Au delà du champ moyen : théorie de Bogoliubov	22
1.4.1	La théorie de Bogoliubov dans le point de vue densité/phase	23
1.4.2	Le gaz homogène dans une boîte	25
1.4.3	Excitations collectives dans un piège anisotrope	27
1.5	Propriétés de cohérence des ondes de matière	29
1.5.1	Cohérence en phase	30
1.5.2	Fonction de corrélation de paires	32
1.6	Conclusion	34
2	Production et caractérisation du condensat	35
2.1	Vers la condensation	35
2.1.1	Qualité du vide	36
2.1.2	Critères à respecter	37
2.2	La phase de refroidissement laser	38
2.2.1	Le jet atomique et le ralentisseur Zeeman	38
2.2.2	Le Piège magnéto-optique	39
2.2.3	La phase de compression et la mélasse	39
2.3	Le piège magnétique	40
2.3.1	Piégeage magnétique d'atomes neutres	40
2.3.2	Le piège de Ioffe-Pritchard	41
2.3.3	Deux générations d'électro-aimants	42
2.4	L'évaporation	45
2.4.1	Compression et stratégie d'évaporation dans un piège anisotrope	45
2.4.2	Dynamique du refroidissement	46
2.4.3	Condensation hors-équilibre dans un piège anisotrope	46
2.4.4	Contrôle de la stabilité de la rampe	50
2.5	Imagerie et caractérisation du nuage ultrafroid	50
2.5.1	Imagerie par absorption	50

2.5.2	Montage optique	52
2.5.3	Calibration du nombre d'atomes <i>via</i> la taille du condensat	54
2.6	Analyse des images	55
2.6.1	Nuage thermique au dessus du seuil	55
2.6.2	Condensat à $T=0$	57
2.6.3	Nuage mixte	58
2.7	Conclusion	59
3	Effet des interactions sur la thermodynamique et l'expansion du nuage thermique	61
3.1	Expansion hydrodynamique du nuage non condensé	62
3.1.1	Observation d'une déviation à l'expansion idéale	62
3.1.2	Coupure du piège	64
3.1.3	Influence des collisions sur l'expansion	67
3.1.4	Solution d'échelle de l'équation de Boltzmann	69
3.2	Expansion du nuage mixte	71
3.3	Température critique du gaz en interactions	75
3.3.1	Le cas homogène	75
3.3.2	Le gaz piégé	77
3.3.3	Mise en évidence expérimentale du décalage de T_C	80
3.4	Propriétés du nuage mixte	83
3.4.1	Modèle à deux fluides à l'approximation de Hartree-Fock	83
3.4.2	Profils de densité dans le piège	85
3.4.3	Réduction de la fraction condensée par les interactions	86
3.4.4	Compression du nuage thermique par le condensat	88
3.5	Filtrage des composantes thermiques et condensées par diffraction de Bragg .	90
3.5.1	Sélectivité de la diffraction de Bragg	90
3.5.2	Thermométrie à basse température	92
3.5.3	Mesure de l'énergie d'expansion	92
3.6	Conclusion	95
4	Le laser à atomes : dynamique d'extraction et divergence transverse	97
4.1	Le coupleur radio-fréquence : équations couplées pour le condensat et le laser à atomes	100
4.1.1	Transitions entre sous-niveaux Zeeman induites par un champ radio-fréquence	100
4.1.2	Potentiels incluant la gravité	100
4.1.3	Equations de Gross-Pitaevskii couplées	101
4.2	Taux de couplage vers le continuum	104
4.2.1	Régime de couplage faible et approximation de Markov	105
4.2.2	Règle d'or de Fermi dans l'approximation semi-classique	106
4.2.3	Application au coupleur radio-fréquence	108
4.3	Propagation du laser à atomes	109
4.3.1	Propagation dominée par la gravité	110
4.3.2	Le champ moyen exercé par le condensat comme lentille divergente .	112
4.4	Réalisation expérimentale d'un laser à atomes et dynamique d'extraction . .	114
4.4.1	Le piège et le circuit rf	114

4.4.2	Dynamique d'extraction dans le régime stable	117
4.5	Divergence du laser à atomes	119
4.5.1	Acquisition et analyse des données	119
4.5.2	Propagation du laser dans notre expérience	120
4.6	Conclusion	122
5	Fluctuations de phase à une dimension	123
5.1	Le gaz de Bose à une dimension	124
5.1.1	La condensation du gaz idéal dans un piège 1D	124
5.1.2	Le condensat 1D : rôle du champ moyen	126
5.1.3	Fluctuations de phase et quasicondensat	126
5.1.4	Le quasi-condensat dans l'approche de Bogoliubov	131
5.1.5	Au delà du régime dilué : le gaz de Tonks	132
5.2	Quasicondensat 3D dans un piège anisotrope	133
5.2.1	Fluctuations de phase dans un piège harmonique anisotrope	135
5.2.2	Approximation de densité locale	136
5.3	Fonction de corrélation spatiale et distribution en impulsion dans le piège	140
5.4	Expansion du quasicondensat	140
5.4.1	Conversion des fluctuations de phase en fluctuations de densité	141
5.4.2	Distribution en impulsion du quasicondensat en expansion	142
5.5	Conclusion	144
6	Spectroscopie en impulsion d'un quasi-condensat	145
6.1	La spectroscopie de Bragg comme sonde de la cohérence en phase	146
6.1.1	Diffraction d'une onde de matière par une onde lumineuse stationnaire	146
6.1.2	Vélocimétrie Doppler d'un gaz d'atomes froids	148
6.1.3	Spectroscopie après temps de vol	152
6.2	Mise au point d'un dispositif à haute résolution	155
6.2.1	Montage laser	155
6.2.2	Stabilité mécanique du réseau optique	156
6.2.3	Accélération parasites sur les atomes	159
6.2.4	Condensation hors-équilibre dans un piège anisotrope et excitation du mode de compression axial	161
6.3	Spectroscopie en impulsion à température finie	162
6.3.1	Comparaison à des « spectres témoins »	163
6.3.2	Oscillations résiduelles de la largeur spectrale	164
6.3.3	Forme de raie	165
6.4	Confrontation entre l'expérience et la théorie des quasi-condensats	166
6.4.1	Largeur spectrale	167
6.4.2	Extraction de la largeur Doppler	167
6.4.3	Longueur de cohérence	169
6.5	Absence de fluctuations de densité	169
6.5.1	Profil de densité statique	169
6.5.2	Estimation des fluctuations de densité	172
6.6	Conclusion	173
A	Approximation de Popov à température finie	179
A.1	Aproximation de Hartree-Fock pour les états très excités	179

A.2 Application à un condensat allongé à trois dimensions	181
B Analyse des images	185
C Réduction de l'effet des fluctuations sur la température critique en présence d'un potentiel	189
D Propagateur semi-classique de l'équation de Schrödinger	191
E Rappel sur le couplage d'un état discret à un continuum	193
Bibliographie	196

Introduction

L'observation en 1995 de la condensation de Bose-Einstein [1, 2] dans un gaz ultrafroid [3, 4, 5] a marqué un tournant important dans la physique moderne, reconnu par l'attribution du Prix Nobel de Physique 2002 à E. Cornell, C. Wieman et W. Ketterle [6, 7]. Avec pratiquement une décennie de recul, il semble clair qu'un domaine de recherche à part entière s'est développé à partir de cette découverte : l'étude des *gaz quantiques*, à l'interface entre la physique atomique, la physique de la matière condensée et l'optique quantique.

Une des caractéristiques marquantes des condensats est la cohérence en phase à l'échelle du système entier, qui découle de l'accumulation d'un nombre macroscopique d'atomes dans un état quantique unique. Elle a été démontrée expérimentalement par l'observation de franges d'interférences spatiales lorsque deux condensats, soit indépendants, soit issus d'un même parent, sont amenés à se recouvrir dans une région commune [8, 9]. Ceci justifie la description de ce système en termes de *fonction d'onde macroscopique*, un concept introduit par L. P. Pitaevskii dans les années 1960 [10]. L'analogie avec le phénomène du laser est transparente, dans le sens où le comportement des deux systèmes peut s'interpréter par la concentration des particules (atomes ou photons) dans un seul état quantique. Ainsi, ces deux systèmes réalisent la limite classique du champ quantifié sous-jacent. Par une analogie un peu abusive, on parle ainsi de « laser à atomes » pour désigner un faisceau d'atomes libres extraits d'un condensat.

On sait par ailleurs que la condensation de Bose-Einstein est un concept clé en matière condensée, qui sous-tend notre compréhension de l'hélium superfluide et des supraconducteurs. Cependant, ces systèmes sont en général fortement couplés, et les interactions entre les particules dominent les effets de statistique quantique. Au contraire, les condensats de Bose-Einstein atomiques en phase gazeuse, c'est-à-dire en milieu dilué, constituent un exemple unique de système à N corps, à la fois suffisamment simple pour permettre une approche théorique précise et quantitative, et suffisamment riche pour capturer la physique pertinente pour la compréhension de phénomènes complexes, rencontrés dans les états solides ou liquides. Les gaz quantiques constituent donc en ce sens de véritables « laboratoires » pour la physique à N corps. L'étude des vortex quantifiés [11, 12, 13], de la superfluidité [14, 15, 16, 17] ou de la transition de Mott dans un réseau optique [18, 19] sont des exemples importants de cette démarche.

A l'heure où ces lignes sont écrites, la condensation de Bose-Einstein a été observée pour tous les alcalins [3, 4, 5, 20, 21, 22], pour l'Hydrogène (après une quête de plus de vingt ans) [23], pour l'Hélium métastable [24, 25] et l'Ytterbium [26]. Le Rubidium 87 constitue de très loin l'élément le plus utilisé, car il se prête remarquablement bien et au pré-refroidissement

par laser, et au refroidissement évaporatif. Il est probable que la liste des éléments condensés s’allonge dans les années qui vont venir, peut-être grâce à l’emploi du refroidissement sympathique [21, 27, 28]. Enfin, un effort significatif est consacré à la production de gaz de Fermi dégénérés, à partir d’échantillons de Potassium 40 [29] ou de Lithium 6 [28, 30, 31, 32]. L’objectif majeur de ces expériences est d’atteindre un état superfluide à partir de deux fermions appariés, soit par transition de type BCS, soit par condensation de dimères bosoniques.

Ce travail de thèse : Dans le groupe d’Optique Atomique dirigé par Alain Aspect, quatre expériences de condensation (trois sur le Rubidium 87 et une sur l’Hélium métastable) sont actuellement exploitées. Mon travail de thèse s’est déroulée sur la plus ancienne, supervisée depuis sa construction par Philippe Bouyer, qui utilise le Rubidium. La diversité des sujets abordés reflète à la fois la grande richesse de ce domaine, et les connections avec la physique de l’état condensé et l’optique.

Dans la première partie de ma thèse, notre équipe s’est d’abord concentrée sur l’étude des « lasers à atomes » obtenus en extrayant le condensat du piège magnétique où il est formé [33, 34, 35, 36]. Au bout de quelques mois, pour tirer profit du confinement transverse important offert par les électro-aimants à noyaux ferromagnétiques développés dans le groupe [37, 38, 39], nous nous sommes tournés vers l’étude des condensats très anisotropes, en particulier de leurs propriétés de cohérence. Lorsque la géométrie du piège se rapproche de celle d’un système uni-dimensionnel, celles-ci sont notablement dégradées par des fluctuations importantes de la *phase* du champ de matière [40, 41, 42]. Pour souligner que l’on n’occupe plus à strictement parler un état quantique unique, on parle alors de « quasi-condensats ». L’étude des quasi-condensats nous a conduits à raffiner l’analyse des propriétés statiques des nuages à température finie, où une fraction importante des atomes se trouve hors du condensat. En poussant cette analyse, nous avons pu mettre en évidence l’effet des interactions atomiques sur la thermodynamique [43, 44, 45].

Les expériences décrites dans ce mémoire ont été réalisées au sein d’une équipe essentiellement composée de J. H. Thywissen, S. Richard, P. Bouyer et moi-même. Pour les travaux sur le laser à atomes, la majeure partie du travail a été menée à bien par Y. Le Coq, S. A. Rangwala, et G. Delannoy, notre contribution intervenant en fait pendant la phase finale des expériences. Enfin, nous avons été rejoints à un moment crucial par Mathilde Hugbart, qui a su s’adapter suffisamment rapidement pour apporter une contribution importante à nos travaux. On trouvera ainsi une description plus détaillée des travaux sur les lasers à atomes dans la thèse de Y. Le Coq [46], et une présentation alternative de nos travaux sur les fluctuations de phase dans celle de S. Richard [47].

Plan du mémoire : Ce mémoire est organisée selon le plan suivant.

Une première partie est consacrée à une présentation générale. Le premier chapitre constitue une introduction théorique. Il pose les bases nécessaires pour la compréhension des expériences que nous avons menées.

Dans le second chapitre, nous décrivons très succinctement le dispositif expérimental qui

nous a été légué par nos prédécesseurs [48, 38, 39]. La technique d'imagerie par absorption est décrite plus en détails, car nous avons consacré une part non-négligeable du travail de thèse à essayer d'améliorer ses performances.

Dans un troisième chapitre, nous étudions le comportement du nuage piégé à température finie [49, 50]. Nous étudions en détail l'expansion du nuage thermique, en mettant en particulier en évidence des effets hydrodynamiques, dont il faut tenir compte dans la procédure de thermométrie. Enfin, nous mesurons les propriétés thermodynamiques du gaz en interaction, en nous focalisant sur la température critique, la fraction condensée et l'énergie d'expansion. Nous comparons avec succès nos observations à une théorie de champ moyen [43].

Nous changeons de sujet au chapitre IV, pour passer au laser à atomes. Une première partie, essentiellement théorique, vise à étudier la dynamique d'extraction et la propagation sous l'effet de la gravité [51]. Dans une deuxième temps, nous décrivons nos mesures de la divergence du mode transverse [52], et élucidons le rôle important des interactions avec le condensat dans la divergence observée.

Le coeur de notre travail de thèse est décrit dans la dernière partie, consacrée à l'étude des quasi-condensats. Au chapitre V, une description théorique des fluctuations de phase à une dimension est introduite dans le cadre de la théorie de Bogoliubov. Nous montrons ensuite qu'un condensat à trois dimensions dans un piège très anisotrope subit également des fluctuations de phase, et constitue en ce sens une réalisation approchée d'un système 1D. Nous y introduisons une approximation de densité locale [53], qui permet de calculer la fonction de corrélation et sa transformée de Fourier, la distribution en impulsion.

Au chapitre VI, nous décrivons la mesure spectroscopique de cette distribution en impulsion par diffraction de Bragg [54, 55], qui se révèle un outil puissant pour l'étude des fluctuations de phase. Nos mesures sont en très bon accord avec la théorie présentée au chapitre V. De plus, nous montrons que l'on constate expérimentalement la suppression des fluctuations de densité. Ces expériences confirment ainsi, à une précision de 10 %, la théorie construite dans [40, 41] pour décrire les fluctuations de phase à une dimension.

La condensation de Bose-Einstein dans un gaz piégé

Ce premier chapitre est dédié à une présentation lapidaire de la théorie des condensats de Bose-Einstein. Nous verrons au chapitre suivant qu'un potentiel harmonique

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M(\omega_x^2 x^2 + \omega_{\perp}^2 y^2 + \omega_{\perp}^2 z^2), \quad (1.1)$$

avec $\omega_{\perp} \gg \omega_x$, représente une très bonne approximation du potentiel de piégeage dans nos expériences. Nous analysons en premier lieu le cas d'un gaz parfait dans un tel potentiel, et identifions l'apparition d'un condensat. Ensuite, les interactions inter-atomiques, qui jouent un rôle central, sont introduites, ainsi que la théorie de Gross-Pitaevskii, qui permet de discuter le comportement statique et dynamique d'un condensat à température nulle. Nous complétons ce traitement par une introduction à la théorie de Bogoliubov qui décrit les excitations élémentaires du condensat. Nous étudions particulièrement le cas d'un piège très anisotrope. Enfin, nous introduisons les fonctions de corrélations appropriées pour caractériser certaines propriétés du gaz piégé, considéré du point de vue de la physique des systèmes à N corps : la fonction de corrélation du premier ordre, qui caractérise la cohérence en phase, et la fonction de corrélation du second ordre, qui caractérise les fluctuations de densité. La présentation qui est faite dans ce chapitre est nécessairement orientée et partielle. Nous renvoyons le lecteur aux références générales [56, 57, 58, 59], pour de plus amples développements.

1.1 Le gaz de Bose sans interactions dans un potentiel harmonique

1.1.1 Approximation semi-classique

Nous démarrons ce chapitre en douceur, en rappelant certains résultats bien connus (voir par exemple [56, 57]) concernant un gaz parfait de bosons piégés dans un potentiel harmonique anisotrope. En principe, à partir de la matrice-densité du système (connue exactement pour un potentiel harmonique [60]), on peut calculer toutes les grandeurs à l'équilibre. Cependant, la situation expérimentale correspond à des températures $k_B T \gg \hbar\omega_{\perp}, \hbar\omega_x$. Dans

ce cas, la distribution des particules s'étend sur un grand nombre de niveaux d'énergie, chacun d'eux ayant une population modeste : c'est précisément le champ d'application de l'approximation semi-classique, et on peut donc introduire une fonction de distribution dans l'espace des phases, notée $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ comme le veut l'usage. La fonction f décrit une version moyennée de la fonction de Wigner, la moyenne étant prise sur une cellule de l'espace des phases de taille bien supérieure à \hbar ¹. Comment déterminer la forme précise de f ? L'approximation semi-classique revient à supposer que f varie très lentement dans l'espace des phases, en fait arbitrairement lentement à la limite thermodynamique, définie pour un gaz piégé comme $N \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$, $N\omega^3 = \text{cte}$. Dès lors, dans un volume élémentaire $d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}$ centré en un point (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , elle doit être arbitrairement proche de la fonction de distribution du gaz homogène, donnée par la formule bien connue de Bose-Einstein avec l'énergie locale $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2M + V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\beta(\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \mu)} - 1}, \quad (1.2)$$

avec $\beta = 1/k_B T$ et μ le potentiel chimique. On peut également remarquer qu'on obtient f pour un gaz piégé en remplaçant, dans la formule pour le gaz homogène, le potentiel chimique μ par sa valeur « locale », $\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Nous utiliserons souvent cette méthode dans la suite, même dans le cas d'un gaz d'atomes en interactions. On obtient la densité volumique n_{th} par intégration sur les impulsions (avec la mesure appropriée $d^3\mathbf{p}/h^3$) :

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^3} g_{3/2}(z_0 e^{-\beta\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})}). \quad (1.3)$$

On a introduit dans cette équation la longueur d'onde de de Broglie thermique, $\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{2\pi\hbar^2/Mk_B T}$, la fugacité, $z_0 = e^{\beta\mu}$, et la fonction $g_{3/2}$ qui appartient à la classe plus générale des fonctions polylogarithmes (pour le mathématicien), ou « fonctions de Bose » (pour le physicien), $g_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} x^j/j^\alpha$ [61, 62]. En intégrant sur tout le nuage, on obtient

$$N = \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 g_3(z_0), \quad (1.4)$$

où on a introduit la moyenne géométrique des fréquences de piégeage, $\bar{\omega} = (\omega_\perp^2 \omega_x)^{1/3}$.

Dans le régime « classique », $(k_B T/\hbar\bar{\omega})^3 \gg N$, le potentiel chimique est très négatif, et $z_0 \approx n_{\text{th}}(\mathbf{0})\lambda_{\text{T}}^3 \ll 1$: on retrouve ainsi à partir de (1.2) la statistique habituelle de Maxwell-Boltzmann. Imaginons maintenant qu'on refroidisse le système à N constant. Si la température diminue suffisamment, μ tend vers zéro par valeurs négatives, et la fugacité tend vers 1, valeur au delà de laquelle les fonctions g_α ne sont plus définies : à première vue, le traitement semi-classique semble mener à une impasse. La solution de cet apparent paradoxe est bien connue, puisqu'elle donne lieu au phénomène de condensation de Bose-Einstein. Dans l'approximation semi-classique, on a négligé la contribution de l'état fondamental. Ce dernier occupe une cellule élémentaire de l'espace des phases, et il ne peut donc pas être

¹La fonction de Wigner est une représentation particulière de la matrice densité à un corps qui donne la distribution de (quasi)probabilité en \mathbf{r} et \mathbf{p} : $W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int d^3\mathbf{u} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}} g^{(1)}(\mathbf{r} + \mathbf{u}/2, \mathbf{r} - \mathbf{u}/2)$, avec $g^{(1)}$ la matrice-densité à un corps en représentation position ($g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \rangle$ en seconde quantification).

décrit par la fonction de distribution f . Aussi, il est nécessaire de tenir compte à part de sa contribution, et cela donne pour la densité et le nombre d'atomes :

$$n(\mathbf{r}) = N_0 |\phi_0(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^3} g_{3/2}(z_0 e^{-\beta\mathcal{H}(\mathbf{r},\mathbf{p})}), \quad (1.5)$$

$$N = \int d^{(3)}\mathbf{r} n(\mathbf{r}) = N_0 + \left(\frac{k_{\text{B}}T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 g_3(z_0), \quad (1.6)$$

où le nombre d'atomes dans l'état fondamental du piège ϕ_0 est $N_0 = z_0/(1 - z_0)$.

1.1.2 Température de condensation et fraction condensée

Ainsi, à N fixé, on trouve une température critique où le nombre d'atomes dans les états excités sature à la valeur critique $N_{\text{C}} = (k_{\text{B}}T/\hbar\bar{\omega})^3 g_3(1)$:

$$k_{\text{B}}T_{\text{C0}} = \hbar\bar{\omega} \left(\frac{N}{g_3(1)}\right)^{1/3}, \quad (1.7)$$

avec $g_3(1) \approx 1.202$ et $g_3(1)^{-1/3} \approx 0.94$. Quand on refroidit le système en dessous de cette température critique, N_{C} diminue et les atomes excédentaires ne peuvent que s'accumuler dans l'état fondamental. C'est le phénomène de condensation de Bose-Einstein.

Le mécanisme qui induit la condensation est donc la saturation de la population totale dans les états excités, et il provient en dernier ressort du fait que les atomes obéissent à la statistique de Bose. Elle se produit d'après (1.4) quand le potentiel chimique devient nul, ou plus généralement quand il devient égal à l'énergie de l'état fondamental². Un nombre d'occupation macroscopique peut ainsi être atteint, si bien que le gaz tout entier se comporte comme une « fonction d'onde géante », d'amplitude macroscopique. Pour le cas d'un gaz sans interactions qui nous intéresse dans cette section, la fraction d'atomes condensés dans l'état fondamental suit en effet la loi

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_{\text{C0}}}\right)^3 \quad (1.8)$$

pour $T < T_{\text{C0}}$. Dans le cas des gaz alcalins piégés, la formule (1.8) reste quantitativement vraie à une précision de 20-30 % environ [56, 63, 64]. Nous verrons en détails au chapitre 3 que la différence s'explique si on prend en compte les interactions entre atomes.

1.2 Le problème à N corps pour un gaz dilué ultrafroid

La théorie du gaz parfait, si elle reste utile sur un plan qualitatif, est incapable de reproduire quantitativement les observations expérimentales. En effet, la densité du nuage devient rapidement élevée en dessous du seuil, et les interactions entre atomes, qui ont un effet faible pour un gaz non dégénéré, jouent très rapidement un rôle important. Bien que

²Il faut se rappeler que, dans le cadre de la limite thermodynamique utilisée dans ce paragraphe, les fréquences de piégeage tendent vers zéro, et donc l'énergie du fondamental également.

le concept de condensat garde tout son sens (même dans un système en interactions fortes comme l'hélium liquide [65, 66]), la présence des interactions déforme significativement la fonction d'onde dans laquelle la condensation a lieu. Dans cette section, nous allons donc introduire les collisions entre atomes. Nous traitons en premier lieu le cas de deux atomes isolés, avant d'attaquer dans un second temps le problème de N atomes, dans la limite du gaz dilué. Nous renvoyons le lecteur aux références [67, 68] pour une présentation détaillée des collisions ultra-froides.

1.2.1 Collisions ultra-froides

Potentiel central : D'une manière générale³, l'hamiltonien à deux corps qui décrit l'interaction entre deux alcalins peut s'écrire sous la forme suivante [67, 68] :

$$H_{\text{coll}} = H_{\text{cdm}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V_C(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + \sum_{i=1,2} \left(V_{\text{Zeeman}} + V_{\text{hyperfine}} \right) + V_{\text{dipolaire}} + V_{\text{S.O.}} \quad (1.9)$$

L'hamiltonien du centre de masse H_{cdm} est découplé du mouvement relatif, décrit par une particule fictive de masse réduite $\mu = M/2$ et d'impulsion \mathbf{p} , située au point \mathbf{r} (position relative des deux atomes). Le terme V_C est un potentiel central effectif qui tient compte de toutes les interactions Coulombiennes entre les deux atomes. Les termes suivant, V_{Zeeman} et $V_{\text{hyperfine}}$, représentent l'interaction avec un champ magnétique extérieur et la structure hyperfine des atomes individuels. V_{dip} et $V_{\text{S.O.}}$ représentent les interactions dipôle-dipôle et les couplages spin-orbite entre les électrons périphériques des deux atomes. Ces deux termes sont surtout responsables de processus de pertes, caractérisés par des taux faibles pour le ^{87}Rb [70, 71] : ils jouent un rôle peu important en pratique pour cet atome et nous les ignorerons dans la discussion qui va suivre. Le terme d'énergie cinétique $\mathbf{p}^2/2\mu$ inclut un terme centrifuge qui dépend du moment cinétique orbital relatif l . Aux températures mises en jeu dans les expériences de condensation de Bose-Einstein, les atomes entrent en collision à très faible vitesse, si bien qu'ils n'ont typiquement pas suffisamment d'énergie pour franchir la barrière centrifuge. Par conséquent, toutes les ondes partielles qui correspondent à $l > 0$ contribuent de manière négligeable à l'amplitude de diffusion, et pour des bosons, on ne conserve en général⁴ que le terme de diffusion dans l'onde s .

Considérons donc deux atomes bosoniques (dans l'espace libre pour simplifier) qui interagissent dans l'onde s par les trois premiers termes potentiels de (1.9), le potentiel central, l'interaction hyperfine et le potentiel magnétique. La nature des états propres internes dépend de la séparation r entre les deux atomes (voir aussi la figure 1.1). A grande distance ($r \rightarrow \infty$), le potentiel central est négligeable et les atomes sont bien caractérisés par les nombres quantiques hyperfins individuels, F_1 et F_2 , qui prennent les valeurs 1 ou 2 pour le ^{87}Rb , et leur projection sur la direction du champ magnétique, m_{F_1} et m_{F_2} . Lorsque les atomes se rapprochent, le terme d'interactions devient important et dans la région où r est de

³Nous supposons que l'approximation de Born-Oppenheimer [69] s'applique pour le problème des collisions.

⁴Pour le ^{87}Rb , cette approximation est bonne pour des températures $T \ll 150\mu\text{K}$ [67].

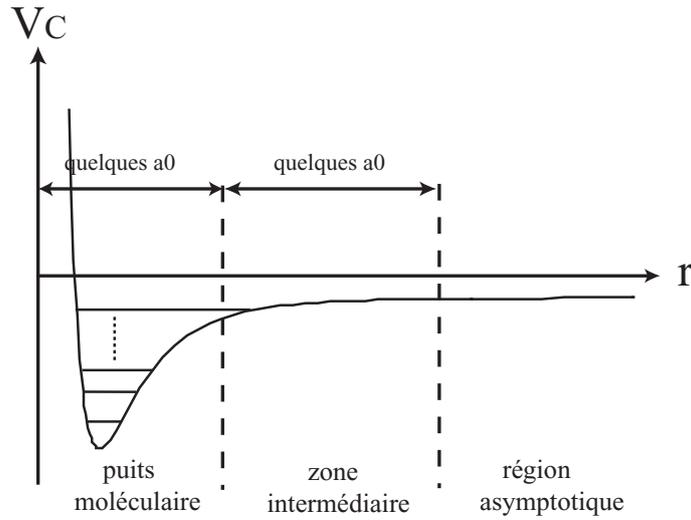


FIG. 1.1 – Allure schématique du potentiel central qui décrit une collision entre deux alcalins. A courte distance, on distingue un puits moléculaire qui supporte en général un grand nombre d'états liés (dimères Rb_2). A longue distance, le potentiel central décroît comme un potentiel de Van der Waals en $-C_6/r^6$.

l'ordre de quelques rayons de Bohr $a_0 \approx 0,05$ nm (« puits moléculaire »), il domine les termes Zeeman et hyperfins : dans cette région, les spins totaux électroniques S et nucléaires I sont les bons nombres quantiques, et le potentiel central est dominé par l'interaction d'échange entre les électrons périphériques. A toute distance, parce qu'il décrit les interactions d'échange (c'est-à-dire électrostatiques) entre les deux électrons périphériques, le potentiel central seul peut se décomposer en un potentiel triplet pour des spins électroniques alignés ($S = 1$), et singulet pour des spins anti-alignés ($S = 0$) :

$$V_C = V_T(r)\hat{P}_T + V_S(r)\hat{P}_S$$

avec les projecteurs $\hat{P}_{T,S}$ sur les sous-espaces appropriés. En fait, si on tient compte de l'interaction hyperfine en champ magnétique nul, seul le moment cinétique total F reste un bon nombre quantique à toute distance. Enfin, en présence d'un champ magnétique \mathbf{B} non nul, seule sa projection m_F sur la direction de \mathbf{B} est un bon nombre quantique pour tout \mathbf{r} , à cause du terme Zeeman.

Collisions d'échange : Comme les états propres à courte distance ne sont pas identiques aux états propres asymptotiques, les spins *individuels* peuvent basculer au cours de la collision : quand la particule fictive arrive dans la zone intermédiaire où V_C commence à agir, l'état propre asymptotique se sépare en composantes triplets et singulets qui évoluent alors dans des potentiels différents. Quand les atomes se séparent après la collision, la fonction d'onde a des composantes différentes de celles de l'état initial sur les états de spins, à cause des déphasages collisionnels différents sur les voies triplets et singulets. Il existe donc *a priori* une probabilité non nulle de sortir sur une autre combinaison d'états hyperfins à l'issue de la collision (avec le même m_F). Ces processus, dits de « collisions avec échange de spins », sont

réduisant les pertes pour les expériences, car ils provoquent un chauffage important du nuage et des pertes si l'état final n'est pas piégeable magnétiquement (voir le chapitre II). On peut cependant les supprimer, par exemple en polarisant les atomes dans un état purement triplet (par exemple $|F = 2; m_F = 2\rangle$), puisque dans ce cas les atomes n'évoluent que selon le potentiel triplet V_S à toute distance. Dans notre expérience, nous travaillons avec des atomes polarisés dans l'état $|F = 1; m_F = -1\rangle$, que les collisions d'échange de spins peuvent dépeupler en faisant passer un ou deux atomes dans $F = 2$. Heureusement, pour les températures auxquelles nous travaillons, très inférieures à l'écart en énergie entre les deux niveaux hyperfins en question ($\mathcal{A}_{\text{hf}} \approx h \times 6.83 \text{ GHz} \approx k_B \times 0,33 \text{ K}$), la conservation de l'énergie empêche ce processus et $|F = 1; m_F = -1\rangle$ est stable vis-à-vis des collisions d'échange de spin.

Collisions élastiques à très basse énergie : Si nous oublions donc les processus inélastiques, la collision a pour seul effet de changer l'état externe. On peut obtenir l'état stationnaire de diffusion $|\Psi_{\text{diff}}\rangle$ à partir de l'état initial $|\Psi_i\rangle$ d'impulsion \mathbf{k} d'après la formule bien connue [69, 72]

$$\Psi_{\text{diff}}(\mathbf{r}) \sim \Psi_i(\mathbf{r}) + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (1.10)$$

Comme nous nous intéressons uniquement à la diffusion dans l'onde s , l'amplitude de diffusion f est isotrope et admet le développement [58, 72] $f(k) \approx -a(1 + ika - \frac{1}{2}(kr_e)^2 + \dots)$. La portée effective r_e caractérise ce qu'on peut appeler un collision ultrafroide, pour laquelle l'énergie typique est faible devant \hbar^2/mr_e^2 . A cette condition, qui est parfaitement remplie dans une expérience typique de condensation de Bose-Einstein, la longueur de diffusion a est le seul paramètre qui caractérise la collision. Pour $ka \ll 1$, l'amplitude de diffusion est pratiquement indépendante de l'énergie :

$$f(k \rightarrow 0) \approx -a. \quad (1.11)$$

Pour le gaz à l'équilibre, on a toujours $ka \ll 1$ pour les énergies typiques qui interviennent ($\hbar^2/2Ma^2 \sim k_B \times 90 \mu\text{K}$), mais nous verrons au chapitre 6 une situation (inhabituelle) où cette condition est violée.

1.2.2 Pseudo-potentiel

Les résultats précédents décrivent une collision entre deux atomes dans l'espace libre. Nous voulons maintenant accomplir un pas supplémentaire et passer à une description (statistique) du gaz qui inclut l'effet des interactions entre atomes. En général, ce problème est très compliqué, mais dans le cas des gaz alcalins piégés, il se simplifie considérablement. En effet, les gaz d'alcalins sont typiquement des milieux très dilués, dans le sens où la distance typique entre particules, $n^{-1/3}$, est grande devant la longueur de diffusion a . Pour les densités typiques des alcalins, $n \sim 10^{14} \text{ at/cm}^3$, et en prenant⁵ $a \approx 5.31 \text{ nm}$, on trouve $na^3 \sim 1.5 \times 10^{-5}$.

⁵Cette longueur de diffusion correspond au ^{87}Rb dans $|F = 1; m_F = 1\rangle$ [73], étudié dans les travaux présentés dans ce mémoire.

Dans ces conditions, les collision élastiques à deux corps⁶ déterminent les propriétés de quasi-équilibre⁷ du gaz. De plus, pour une paire d'atomes donnée (i, j) , la probabilité de trouver une autre particule suffisamment proche des particules i et j pour influencer sur la collision est négligeable. Les deux atomes entrent alors en collision pratiquement comme s'ils se trouvaient dans l'espace libre. Cela permet d'envisager un traitement perturbatif vis à vis de la fonction d'onde à N corps, sous la forme suivante. L'énergie d'interaction peut s'écrire à l'aide de la fonction d'onde à N corps Ψ_N comme

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int \left(\prod_i d^{(3)}\mathbf{r}_i \right) \Psi_N^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) V_C(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \Psi_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (1.12)$$

A l'ordre le plus bas (premier ordre en a), on calcule le déplacement de l'énergie totale dû à l'énergie d'interaction grâce aux fonctions d'onde à N corps perturbées et non-perturbées

$$\begin{aligned} \Psi_N^{(1)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &\approx \Xi_N(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi_{\text{diff}}(\mathbf{r}), \\ \Psi_N^{(0)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &\approx \Xi_N(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi_{(0)}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

avec la coordonnée du centre de masse des particules 1 et 2 $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, leur coordonnée relative $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\Psi_{(0)}$ l'état non-perturbé, et Ψ_{diff} l'état stationnaire de diffusion⁸. La partie $\Xi_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ donne la dépendance de la fonction d'onde à N corps pour une séparation grande devant a et r_e , et, précisément grâce à l'hypothèse du gaz dilué, elle est quasiment constante pour les courtes séparations sur laquelle V_C prend des valeurs non négligeables. Notons que si le traitement précédent est perturbatif vis-à-vis de la structure de la fonction d'onde à N corps, le potentiel d'interaction à deux corps V_C est traité exactement en utilisant l'état stationnaire de diffusion. En substituant les fonctions d'onde ci-dessus dans (1.12), on obtient l'énergie d'interaction,

$$E_{\text{int}} = \frac{U}{2} \int d^{(3)}\mathbf{r} g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad (1.13)$$

avec la matrice-densité à deux corps définie par

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{i,j} \int \left(\prod_{i \neq 1,2} d^{(3)}\mathbf{r}_i \right) |\Xi_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)|^2, \quad (1.14)$$

et la constante de couplage qui s'exprime en fonction de l'amplitude de diffusion f [69]

$$U = \int d^{(3)}\mathbf{r} \Psi_{(0)}^*(\mathbf{r}) V_C(|\mathbf{r}|) \Psi_{\text{diff}}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} f = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M}. \quad (1.15)$$

Ce résultat très simple permet une simplification drastique de la théorie : plutôt que d'utiliser le potentiel d'interaction réel, très compliqué et souvent mal connu, pour étudier la physique

⁶Les processus à trois corps, principalement responsables de la formation de molécules [67, 68, 70, 71], n'interviennent que pour limiter la durée de vie du condensat dans les conditions expérimentales habituelles.

⁷L'équilibre thermodynamique au sens habituel n'est jamais atteint dans les expériences, puisque pour les alcalins, il est atteint dans l'état solide. La situation expérimentale correspond en fait à un équilibre cinétique, et à une situation métastable d'un point de vue thermodynamique. Dans toute la suite du mémoire, cette définition de l'équilibre sera implicitement sous-entendue.

⁸L'amplitude de diffusion ne dépend pas de l'énergie dans le régime ultra-froid, si bien qu'il n'est pas nécessaire de spécifier plus précisément les fonctions d'ondes.

à N corps du système, on utilise un potentiel modèle qui redonne la même longueur de diffusion. Notons cependant qu'on obtient ainsi une description effective du système à N corps qui oublie les corrélations à très courte distance (sur quelques angströms), un point important sur lequel nous revenons dans la section 1.5.2. Le choix le plus simple pour le « pseudo-potentiel » est celui d'un potentiel de contact :

$$V_\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = U\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.16)$$

Si l'on doit aller à un ordre supérieur et prendre en compte la physique des collisions à courte distance, un pseudopotentiel plus élaboré devra être utilisé (voir [58] et la section 1.5.2).

1.2.3 Description d'un système à N corps en seconde quantification

Pour décrire les N atomes en interaction, nous allons utiliser le formalisme de la seconde quantification [61], plus facile à manier que les vecteurs d'états symétrisés à N particules de la section précédente. Nous rappelons que dans ce point de vue, la matière est traitée comme un champ quantifié : le champ $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ détruit une particule au point \mathbf{r} , alors que son conjugué $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ en crée une. Pour des bosons, ces champs obéissent aux relations de commutation $[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Ces opérateurs agissent sur des vecteurs d'états $|\{n\}\rangle = |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle$ évoluant dans l'espace de Fock, et définis par les nombres d'occupation $\{n_i\}$ des états $\{|\phi_i\rangle\}$ d'une base quelconque de l'espace des états à une particule. Dans cette base, on peut développer l'opérateur champ comme $\hat{\Psi} = \sum_i \phi_i(\mathbf{r})\hat{a}_i$, avec l'opérateur \hat{a}_i qui détruit une particule dans l'état $|\phi_i\rangle$. On voit que l'opérateur $\hat{\Psi}$ correspond à la version quantifiée de la fonction d'onde obéissant à l'équation de Schrödinger à une particule, tout comme le champ électromagnétique quantifié correspond au champ classique solution des équations de Maxwell. Ceci justifie l'appellation de « seconde quantification » donnée à la méthode, et le terme de « champ de Schrödinger » parfois utilisé pour $\hat{\Psi}$. Soulignons tout de même qu'il ne s'agit que d'une *formulation* commode de la mécanique quantique d'un système de N particules, et non d'une théorie alternative ou plus élaborée. L'hamiltonien du système s'écrit dans ce formalisme :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \int d^{(3)}\mathbf{r} d^{(3)}\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) V_C(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Cet hamiltonien constitue le point de départ de la théorie, et nous allons présenter plusieurs niveaux d'approximation.

1.3 Equation de Gross-Pitaevskii à température nulle

La plus simple de ces approximations consiste à dire qu'à suffisamment basse température, la proportion d'atomes dans les états excités est négligeable et pratiquement tous les

atomes occupent le même état à une particule. Si l'on suppose donc *a priori* l'existence d'un condensat, on peut toujours développer l'opérateur champ de la manière suivante :

$$\hat{\Psi} = \psi_0(\mathbf{r}, t)\hat{a}_0 + \delta\hat{\Psi}. \quad (1.18)$$

Dans cette expression, ψ_0 représente la fonction d'onde à un corps du mode condensé, \hat{a}_0 l'opérateur de création d'une particule dans ce mode, et $\delta\hat{\Psi}$ décrit l'ensemble des états excités orthogonaux au mode du condensat. Postuler l'existence du condensat revient à supposer que le nombre d'atomes dans le condensat, $N_0 = \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle$, est très grand devant 1. Dans ce cas, le commutateur $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 1$ est négligeable devant N_0 , ou en d'autres termes on peut considérer les opérateurs \hat{a}_0 et \hat{a}_0^\dagger comme des variables quasi-classiques, et les remplacer par des nombres complexes avec une erreur relative d'ordre $1/\sqrt{N_0}$,

$$\hat{\Psi} \approx \Psi_0(\mathbf{r}, t) + \delta\hat{\Psi}. \quad (1.19)$$

La fonction d'onde du condensat, $\Psi_0(\mathbf{r}, t) \approx \sqrt{N_0}\psi_0(\mathbf{r}, t)$, a dans cette approximation tous les comportements d'un champ classique⁹. Notons qu'avec cette définition, la fonction d'onde du condensat est normée à N_0 , et pas à 1.

Equation de Gross-Pitaevskii à $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ K : Revenons à l'équation du mouvement pour $\hat{\Psi}$, dans le point de vue de Heisenberg. Avec la substitution (1.16) $V_C \rightarrow V_\delta$, on trouve sans peine que

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \hat{\Psi} + V_{\text{ext}} \hat{\Psi} + U \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}. \quad (1.20)$$

A température nulle, on peut supposer en première approximation que tous les atomes sont condensés. En injectant dans l'équation (1.20) $\hat{\Psi} \approx \Psi_0(\mathbf{r}, t)$, on obtient l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps. En régime stationnaire (*i.e.* à l'équilibre), en substituant $\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar}$, celle-ci se réduit à l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi_0 + V_{\text{ext}} \Phi_0 + U |\Phi_0|^2 \Phi_0 = \mu \Phi_0. \quad (1.21)$$

L'« énergie » μ s'identifie en fait au potentiel chimique, $\partial E / \partial N_0$. Pour le comprendre, nous allons discuter plus en détails l'interprétation de la fonction d'onde Ψ_0 [66]. Dans la limite d'un gaz à très basse température, sans faire l'approximation $\hat{a}_0 \approx a_0$, celle-ci correspond d'après (1.18) à l'élément de matrice (dans le point de vue de Heisenberg), $\langle N_0 - 1 | \hat{\Psi}(t) | N_0 \rangle = \langle N_0 - 1 | e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{\Psi}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar} | N_0 \rangle$, entre deux états comprenant respectivement N_0 et $N_0 - 1$ particules. Cette écriture permet de s'apercevoir que la dépendance temporelle de la fonction d'onde Ψ_0 (pour un système stationnaire) doit être $\exp[-i(E[N_0] - E[N_0 - 1])t/\hbar] \approx \exp(-i\frac{\partial E}{\partial N_0}t/\hbar)$. Cela signifie que la valeur propre apparaissant dans l'équation de Gross-Pitaevskii est nécessairement le potentiel chimique, et non pas l'énergie du fondamental.

⁹En adoptant cette description, on abandonne la conservation rigoureuse du nombre de particules, et on se place implicitement dans l'ensemble grand canonique de la mécanique statistique [61, 74]. Cela revient donc à considérer que le gaz est en contact thermique et chimique avec un réservoir fictif de chaleur et de particules, si bien que l'énergie et le nombre de particules ne sont conservés qu'en moyenne.

1.3.1 Approximation de Thomas-Fermi

A l'équilibre (on suppose momentanément pour simplifier un potentiel harmonique à symétrie sphérique, de fréquence ω), la fonction d'onde du condensat, d'extension spatiale R , est déterminée par la compétition entre l'énergie d'interaction $E_{\text{int}} \sim UN_0^2/R^3$, l'énergie cinétique « de point zéro » $E_{\text{cin}} \sim N_0\hbar^2/MR^2$, qui joue un rôle pour de petits échantillons, et l'énergie potentielle $E_{\text{pot}} \sim N_0M\omega^2R^2$. La taille du condensat à l'équilibre est celle qui minimise l'énergie totale, et intuitivement, on conçoit que des interactions répulsives vont induire une pression positive, et dilater le nuage. Pour un faible nombre d'atomes condensés, $R \sim a_{\text{oh}}$, et $E_{\text{int}} \ll E_{\text{cin}} \sim E_{\text{pot}}$: la fonction d'onde est pratiquement celle du fondamental du piège. Si maintenant on augmente N_0 , R va augmenter et dans le régime où $Na/a_{\text{ho}} \gg 1$, devenir bien plus grand que a_{ho} . Dans ce cas, le profil de densité à l'équilibre est essentiellement dominée par la compétition entre énergie d'interaction et énergie potentielle, et on peut négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii. Ceci constitue l'approximation dite de Thomas-Fermi [56, 75], qui permet d'obtenir (en revenant au piège anisotrope) une solution analytique pour la fonction d'onde :

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_{0\text{m}}(1 - \tilde{x}^2 - \tilde{\rho}^2)}H(1 - \tilde{x}^2 - \tilde{\rho}^2). \quad (1.22)$$

L'échelon de Heaviside H restreint les valeurs de \mathbf{r} au domaine où l'expression sous la racine est réelle. Dans la suite, nous l'omettrons pour simplifier les notations, mais il sera toujours implicitement sous-entendu. Nous avons utilisé des coordonnées cylindriques, dans lesquelles $\rho^2 = y^2 + z^2$, et normalisé par les dimensions du condensat, définies comme les points où la densité s'annule sur les axes, $R^2 = (2\mu/M\omega_{\perp}^2)$ dans les directions radiales, et $L^2 = R/\lambda$ dans la direction axiale. Le rapport d'aspect du condensat, qui caractérise son anisotropie, est donc donné par le rapport des fréquences de piégeage, $\lambda = \omega_x/\omega_{\perp} \ll 1$. La densité-pic est liée au potentiel chimique par $n_{0\text{m}} = \mu/U$, si bien qu'en normalisant $|\Phi_0(\mathbf{r})|^2$ au nombre d'atomes dans le condensat N_0 , on obtient la valeur du potentiel chimique :

$$\mu = \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left(\frac{15a_{\perp}aN_0}{a_x^2} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (1.23)$$

avec $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/M\omega_{\perp}}$ et $a_x = \sqrt{\hbar/M\omega_x}$. Notons pour terminer que l'approximation de Thomas-Fermi est valable si les dimensions du condensat sont bien plus grandes que la longueur de relaxation (« healing length » en anglais), $\zeta = \sqrt{\hbar^2/2M\mu}$. Cette distance caractéristique s'interprète comme la distance minimale sur laquelle il faut provoquer une perturbation de densité pour induire une contribution significative (de l'ordre de μ) à l'énergie totale.

1.3.2 Equations hydrodynamiques

Nous allons maintenant aborder une autre formulation de l'équation de Gross-Pitaevskii, particulièrement utile dans le régime de Thomas-Fermi. Ecrivons la fonction d'onde du condensat en termes de la densité n_0 et de la phase ϕ_0 : $\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_0(\mathbf{r}, t)}e^{i\phi_0(\mathbf{r}, t)}$. En reportant dans l'équation de Gross-Pitaevskii, et en séparant partie réelle et imaginaire on

trouve les équations suivantes :

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = -\frac{\hbar}{M} \nabla(n_0 \nabla \phi_0), \quad (1.24)$$

$$-\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + U n_0 + \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \phi_0|^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\Delta \sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}}. \quad (1.25)$$

La première équation n'est rien d'autre que l'équation de continuité pour le fluide quantique, si l'on se rappelle qu'en mécanique quantique le champ de vitesses est donné par le gradient de la phase : $\mathbf{v}_0 = \hbar \nabla \phi_0 / M$. Quant à la deuxième équation, elle fait apparaître un terme dit de pression quantique, $-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta n_0 / \sqrt{n_0} \sim (\hbar^2 / 2M R^2) \sqrt{n_0}$. Dans le régime de Thomas-Fermi, l'échelle d'énergie typique est donnée par le potentiel chimique μ , alors que le terme de pression quantique (dans la direction la plus confinante) est d'ordre $(\hbar \omega_\perp)^2 / \mu \ll \mu$. Comme discuté précédemment, on peut donc valablement omettre ce terme, et l'équation pour le champ de vitesses se réduit à l'équation d'Euler du fluide parfait (ou du superfluide dans ce contexte),

$$M \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = -\nabla(V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + U n_0 + \frac{M \mathbf{v}_0^2}{2}). \quad (1.26)$$

Le terme de champ moyen s'identifie au terme de pression habituel, $-\nabla P / n_0$ si on prend $P = U n_0^2 / 2$. A l'équilibre, le champ de vitesses est nul (la phase est uniforme sur tout le condensat) et le profil de densité est déterminé par l'équilibre entre la force de pression et le potentiel de confinement selon l'équation (1.22).

Solution universelle pour un potentiel quadratique : Nous allons maintenant traiter un cas particulier important en pratique, qui est celui où le potentiel reste toujours quadratique, avec des fréquences dépendantes du temps en général. Dans ce cas, si le condensat est initialement dans le régime de Thomas-Fermi, on peut chercher une solution d'échelle [76, 77, 78] de la forme

$$n_0(\mathbf{r}, t) = \frac{n_0(\{x'_i = \frac{x_i}{b_i}\}, t = 0)}{\mathcal{V}}, \quad (1.27)$$

avec $\mathcal{V} = \prod_i b_i$. En reportant dans l'équation de continuité, on trouve que les composantes du champ de vitesses doivent satisfaire $v_i = (\dot{b}_i / b_i) x_i$ pour $i = x, y, z$. Comme discuté précédemment, l'approximation de Thomas-Fermi correspond en fait à négliger les gradients de densité : toute l'énergie cinétique se stocke dans la phase de la fonction d'onde, et le terme de pression quantique reste négligeable au cours du temps. Dans ce cas, la fonction d'onde prend la forme :

$$\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{n_0(\{x'_i = \frac{x_i}{b_i}\}, t = 0)}{\mathcal{V}}} e^{i \sum_{i=x,y,z} \frac{M}{2} \frac{\dot{b}_i}{b_i} x_i^2}. \quad (1.28)$$

En reportant $v_i = (\dot{b}_i / b_i) x_i$ dans l'équation d'Euler, on trouve les équations qui régissent l'évolution des paramètres d'échelles :

$$\frac{d^2 b_i}{dt^2} + \omega_i^2(t) b_i = \frac{\omega_i^2(0)}{\mathcal{V} b_i}. \quad (1.29)$$

Expansion du condensat : Un cas d'application très important de ces équations d'échelles est celui de l'expansion du condensat sous l'effet de sa propre pression lorsqu'il est relâché du piège. Pour des raisons qui seront exposées dans le chapitre 2, c'est seulement après un tel temps de vol que l'on peut prendre une image fiable du nuage, et il est donc crucial de pouvoir remonter aux propriétés dans le piège. Dans la limite d'un piège à symétrie cylindrique très anisotrope, comme celui utilisé dans nos expériences, une solution approchée a été donnée par Y. Castin et R. Dum [76] et Yu. Kagan, E. Sur'kov et G. Shlyapnikov [78]. Si on réécrit les équations d'échelles en fonction du temps adimensionné $\tau = \omega_{\perp} t$ et du rapport d'aspect $\lambda = \omega_x / \omega_{\perp} \ll 1$, on obtient à l'ordre deux en λ

$$\begin{aligned} b_{\perp} &= \sqrt{1 + \tau^2} \approx \tau \text{ pour } \tau \gg 1, \\ b_x &= 1 + \lambda^2 (\tau \arctan \tau - \ln(1 + \tau^2)) \approx 1 + \frac{\pi \lambda^2 \tau}{2} \text{ pour } \tau \gg 1. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur le problème de l'expansion dans les chapitres suivants.

1.4 Au delà du champ moyen : théorie de Bogoliubov

Nous désirons maintenant aller plus loin et décrire également les atomes non condensés. Pour des fractions non condensées faibles, un traitement approché, introduit dès 1947 par N. Bogoliubov, constitue l'approche standard pour décrire les nuages en dessous du seuil de condensation [79]. Cette théorie comporte en fait deux approximations : la première consiste à faire la décomposition (1.19) de l'opérateur champ, *i.e.* à supposer l'existence du condensat et à le considérer comme un champ classique. Dans un deuxième temps, on considère que la plupart des particules sont condensées et donc que la densité du condensat est bien plus grande que celle de la partie non-condensée : on peut alors traiter le terme d'interaction de manière approchée en ne conservant que les premiers termes en $\delta\hat{\Psi}$. En négligeant la partie non condensée, on retrouve l'équation de Gross-Pitaevskii en imposant que Ψ_0 minimise l'énergie [58]. Alors, à cause de la stationnarité de l'énergie vis-à-vis de Ψ_0 , les termes d'ordre $\delta\hat{\Psi}$ s'annulent, et on obtient les premières corrections à la théorie de champ moyen à l'ordre $\delta\hat{\Psi}^2$. Bogoliubov a montré qu'en utilisant la décomposition

$$\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} u_{\nu}(\mathbf{r}) \hat{b}_{\nu} - v_{\nu}^*(\mathbf{r}) \hat{b}_{\nu}^{\dagger}, \quad (1.31)$$

il était possible de diagonaliser l'hamiltonien approché. Les nouveaux opérateurs \hat{b}_{ν} (\hat{b}_{ν}^{\dagger}) détruisent (respectivement créent) non plus une particule dans un niveau donné, mais une excitation élémentaire du nuage, ou *quasi-particule*. Dans la limite des hautes énergies, les quasi-particules décrivent un seul atome excité, l'effet des interactions étant simplement de déplacer les niveaux. Par contre, dans la limite des basses énergies, une quasi-particule décrit un mouvement collectif du nuage. Nous préciserons ces remarques dans la suite, et montrerons comment obtenir les amplitudes u_{ν} et v_{ν} .

Ce calcul suppose *a priori* l'existence du condensat, *i.e.* d'une fonction d'onde macroscopique avec une phase et une amplitude bien définies. Dans le cas habituel à trois dimensions, ce modèle est bien établi tant expérimentalement que théoriquement. Pourtant, lorsqu'on se

dirige vers une situation bi- ou uni-dimensionnelle, on a alors affaire à un « quasi-condensat », qui correspond à un champ classique de module bien défini, mais dont la *phase* fluctue significativement. Ces points seront développés en détails au chapitre V et VI, mais dans ce chapitre introductif, nous souhaitons nous placer d'emblée dans un cadre suffisamment général pour discuter les condensats et les quasi-condensats sur un pied d'égalité.

1.4.1 La théorie de Bogoliubov dans le point de vue densité/phase

Pour cela, nous empruntons les arguments avancés dans la thèse de D. S. Petrov [80]. Nous repartons de l'équation de Heisenberg pour $\hat{\Psi}$ (1.20) en gardant le vrai potentiel V_C pour le moment. En utilisant les relations de commutation de $\hat{\Psi}$, on peut mettre cette équation sous la forme suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} + V_C(0)\hat{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\hat{\Psi} + V_{\text{ext}}\hat{\Psi} + \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \left(\int d^{(3)}\mathbf{r}' V_C(r')\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right). \quad (1.32)$$

On peut se débarrasser du terme $V_C(0)$ par un changement sans conséquence de la phase globale. Introduisons maintenant les opérateurs densité \hat{n} et phase $\hat{\phi}$, par

$$\hat{\Psi} = e^{i\hat{\phi}}\sqrt{\hat{n}} \quad \text{et} \quad \hat{\Psi}^\dagger = \sqrt{\hat{n}}e^{-i\hat{\phi}},$$

avec $[\hat{n}(\mathbf{r}), \hat{\phi}(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. En reportant dans (1.32), en séparant parties réelles et imaginaires, et en remplaçant V_C par V_δ , on obtient la généralisation des équations (1.24) et (1.25) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{n}}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{M}\nabla\left(\nabla\hat{\phi}\hat{n}\right), \\ -\hbar\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} &= V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + U\hat{n} + \frac{\hbar^2}{2M}|\nabla\hat{\phi}|^2 - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\Delta\sqrt{\hat{n}}}{\sqrt{\hat{n}}}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Telles quelles, ces équations sont encore trop complexes pour être traitées exactement. Une simplification cruciale consiste à supposer de faibles fluctuations de densité $\delta\hat{n}$ autour du profil à l'équilibre n_0 : $\hat{n} = n_0 + \delta\hat{n}$. D'après l'équation de continuité, on voit alors que les fluctuations du *gradient* de la phase sont faibles également, ce qui permet de linéariser les équations vis à vis de ces deux quantités. A l'ordre zéro, on trouve que le profil de densité n_0 est déterminé par l'équation de Gross-Pitaevskii, et que la phase est uniforme spatialement : $\phi_0 = -\mu t/\hbar$. Au premier ordre, l'évolution des excitations est déterminée par des équations identiques à celles que l'on obtient dans la théorie de Bogoliubov « habituelle » [81],

$$\frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial t} = -\frac{\hbar}{M}\nabla\left(n_0\nabla\hat{\phi}\right), \quad (1.35)$$

$$-\hbar\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = U\delta\hat{n} - \frac{\hbar^2}{4Mn_0}\nabla\left(n_0\nabla\left(\frac{\delta\hat{n}}{n_0}\right)\right). \quad (1.36)$$

Introduisons les modes propres de ces équations, à l'aide de la décomposition équivalente à (1.31),

$$\delta\hat{n}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} \sum_{\nu} f_{\nu}^{-} \hat{b}_{\nu} e^{-i\omega_{\nu} t} + \text{h.c.}, \quad (1.37)$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2i\sqrt{n_0(\mathbf{r})}} \sum_{\nu} f_{\nu}^{+} \hat{b}_{\nu} e^{-i\omega_{\nu} t} + \text{h.c.}, \quad (1.38)$$

avec $f_{\nu}^{\pm} = u_{\nu} \pm v_{\nu}$. Dans la suite, nous noterons $\delta n_{\nu} = \sqrt{n_0} f_{\nu}^{-}$ et $\phi_{\nu} = (1/2i\sqrt{n_0}) f_{\nu}^{+}$ les amplitudes des fluctuations dues au mode ν .

En utilisant (1.37) et (1.38), on peut diagonaliser l'hamiltonien approché, qui prend la forme de celui d'une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants (modes normaux du système), $\hat{H} = E_0 + \sum_{\nu} \hbar\omega_{\nu} \hat{b}_{\nu}^{\dagger} \hat{b}_{\nu}$, avec E_0 l'énergie du fondamental. Pour cela, les amplitudes u_{ν} , v_{ν} doivent satisfaire aux équations de Bogoliubov-de Gennes :

$$\hbar\omega_{\nu} u_{\nu} = \left[-\frac{\hbar^2 \Delta}{2M} + V_{\text{ext}} + 2Un_0 - \mu \right] u_{\nu} - Un_0 v_{\nu}, \quad (1.39)$$

$$-\hbar\omega_{\nu} v_{\nu} = \left[-\frac{\hbar^2 \Delta}{2M} + V_{\text{ext}} + 2Un_0 - \mu \right] v_{\nu} - Un_0 u_{\nu}. \quad (1.40)$$

et, pour que les relations de commutations de \hat{b}_{ν} et \hat{b}_{ν}^{\dagger} soient de type bosonique, à la condition de normalisation $\int (u_{\nu} u_{\nu'}^* - v_{\nu}^* v_{\nu'}) d^3\mathbf{r} = \delta_{\nu\nu'}$. Cette relation est équivalente à la condition

$$i \int d^3\mathbf{r} \left(\delta n_{\nu}^* \phi_{\nu'} + \delta n_{\nu'} \phi_{\nu}^* \right) = \delta_{\nu\nu'}. \quad (1.41)$$

Les équations (1.39,1.40) sont identiques à celles qui apparaissent dans le traitement habituel utilisant la décomposition (1.31). On s'aperçoit donc que, pour appliquer la théorie de Bogoliubov, il n'est pas *nécessaire* qu'un condensat soit présent. La seule condition nécessaire est que les fluctuations de densité soient faibles, mais les fluctuations de phase peuvent être importantes. Ainsi, ce formalisme permet une description unifiée des systèmes de bosons, comme l'a montré V. N. Popov [82] dans le cadre d'une théorie basée sur le formalisme des intégrales fonctionnelles (voir aussi les références [40, 41, 83, 84, 85]).

Dans le cas où l'amplitude des fluctuations de phase et de densité sont faibles, on peut alors linéariser Ψ_0 vis à vis de ces deux termes. La décomposition $\hat{\Psi} = \sqrt{n_0} + \delta\hat{n}/2\sqrt{n_0} + i\sqrt{n_0}\hat{\phi}$ est alors équivalente à la décomposition « habituelle » (1.31). C'est le cas à trois dimensions ; par contre, à une dimension, les fluctuations de phase sont importantes et les deux décompositions ne sont pas équivalentes.

La théorie que nous venons de décrire est en principe limité à des nuages presque entièrement dégénérés, c'est-à-dire à basse température. C'est le cas si $k_B T < \mu$, mais nos expériences sont plutôt menées dans le régime inverse $k_B T > \mu$, comme nous le verrons dans la suite. Une fraction significative de particules occupe alors les états excités, et forme ce qu'on appelle le nuage thermique. Cependant, cette composante est typiquement diluée (beaucoup plus que la partie dégénérée), et ne diffère pas significativement d'un gaz de Bose « normal ». Aussi, on pourra la décrire par une extension simple du formalisme ci-dessus basée sur un traitement de champ moyen du nuage thermique. Pour alléger l'exposé,

cette extension est présentée dans l'appendice A. Nous consacrons le reste de cette section à l'étude des amplitudes de Bogoliubov et de la structure des états excités, d'abord dans le cas simple d'un système homogène, puis dans celui d'un piège très allongé qui est de première importance pour les travaux présentés dans cette thèse.

1.4.2 Le gaz homogène dans une boîte

Nous allons illustrer les développements précédents sur le cas simple du gaz homogène, confiné dans une boîte cubique de côté L . Par souci de simplicité, nous nous restreignons ici aux cas des basses températures, où pratiquement tous les atomes sont dans le condensat, $N_0 \approx N$. Nous nous contenterons dans ce mémoire de rappeler les résultats essentiels, et renvoyons le lecteur au Cours au Collège de France 1998-1999 de C. Cohen-Tannoudji (par exemple) [58] pour une présentation détaillée.

A la limite thermodynamique que nous considérons, la taille L est arbitrairement grande. On peut négliger les effets de bord et chercher des solutions sous la forme d'ondes planes, $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/L^{3/2}$. La condensation a lieu dans l'état $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, si bien que la phase et la densité du condensat sont constantes,

$$\Phi_0 = \sqrt{n_0} \approx \sqrt{\frac{N}{L^3}}. \quad (1.42)$$

Le potentiel chimique est donné par $\mu \approx Un_0$. La résolution des équations de Bogoliubov-De Gennes (1.39), indique que l'énergie $\hbar\omega_k^B$ d'une quasi-particule satisfait à la relation de dispersion de Bogoliubov :

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\hbar\omega_k(\hbar\omega_k + 2\mu)} = \begin{cases} \approx c_S k & \text{quand } \omega_k^B \ll \mu \\ \approx \omega_k + \mu/\hbar & \text{quand } \omega_k^B \gg \mu, \end{cases} \quad (1.43)$$

où nous avons introduit l'énergie de la particule libre d'impulsion \mathbf{k} , $\hbar\omega_k = \hbar^2 k^2/2M$. Les énergies des quasi-particules sont repérées par rapport au potentiel chimique. La relation de dispersion (1.43) partage les excitations en deux catégories distinctes. La limite des basses énergies correspond à $\hbar\omega_k \ll \mu$, ou encore à $k \ll \zeta^{-1}$, où $\zeta = (8\pi n_0 a)^{-1/2}$ est la longueur de relaxation introduite précédemment. Dans cette limite, la relation de dispersion devient linéaire, ce qui est caractéristique d'une onde sonore (un phonon en mécanique statistique quantique). La vitesse de groupe (pente à l'origine) donne la vitesse du son dans le milieu, $c_S = \sqrt{\mu/M}$. Au contraire, pour des excitations de haute énergie, on retrouve une relation de dispersion parabolique, de type particule libre ; le seul effet de la présence du condensat est un simple déplacement en énergie.

La distinction entre les deux régimes est encore plus nette si on s'intéresse aux amplitudes u_k, v_k , donnés par :

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\omega_k + \mu}{\hbar\omega_k^B} + \frac{1}{2} \right) = \begin{cases} \approx \frac{Mc_S}{2\hbar k} \gg 1 & \text{quand } \omega_k^B \ll \mu \\ \approx 1 + \left(\frac{Mc_S}{\hbar k} \right)^2 & \text{quand } \omega_k^B \gg \mu \end{cases} \quad (1.44)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\omega_k + \mu}{\hbar\omega_k^B} - \frac{1}{2} \right) = \begin{cases} \approx \frac{Mc_S}{2\hbar k} \gg 1 & \text{quand } \omega_k^B \ll \mu \\ \approx \left(\frac{Mc_S}{\hbar k} \right)^2 \ll 1 & \text{quand } \omega_k^B \gg \mu. \end{cases}$$

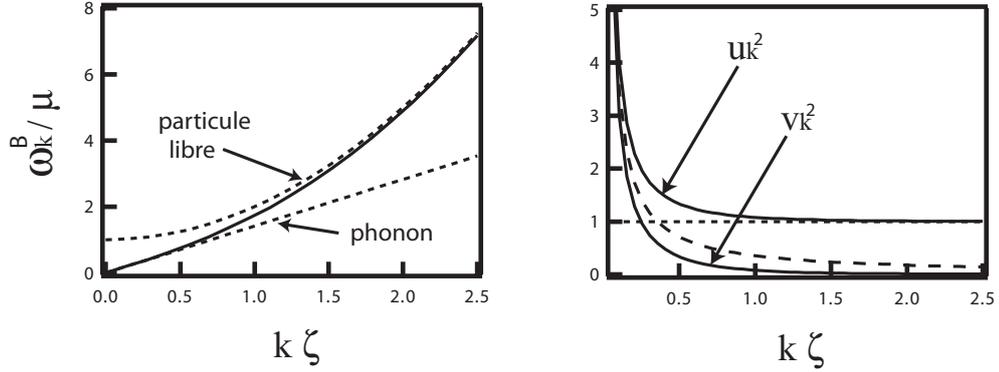


FIG. 1.2 – Relation de dispersion et amplitudes de Bogoliubov dans le cas homogène

Pour les phonons ($k\zeta \ll 1$), on trouve que les amplitudes sont pratiquement égales, et grandes, $u_k \approx v_k \approx \frac{Mc_s}{2\hbar k} \gg 1$. Remarquons que l'opérateur $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ s'écrit, en fonction des opérateurs de création de particules $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$, comme $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}}$. Exciter un phonon de vecteur d'onde \mathbf{k} revient à générer un flux de particules dans le sens de \mathbf{k} , autant qu'à « empêcher » le flux de se développer dans la direction opposée. Au contraire, dans la limite des hautes énergies, on a $u_k \approx 1$ et $v_k \approx 0$, si bien que la distinction particule/quasiparticules s'efface.

Nous avons résumé sur la figure 1.3 les processus élémentaires de collision pris en compte dans le traitement de Bogoliubov. A cause de la conservation de l'impulsion totale, le terme d'interaction couple le condensat aux états de paires $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$. Ce processus (et son inverse) induisent des corrélations paires-à-paires entre particules d'impulsion \mathbf{k} et $-\mathbf{k}$ à basse énergie¹⁰, qui expliquent la forme « hybride » de \hat{b}_k , typique des systèmes de Bose en interaction. Plus l'énergie des excitations est élevée, plus le processus d'excitation à partir du condensat sera difficile, si bien que les amplitudes de Bogoliubov v_k , qui caractérisent le caractère collectif, décroissent rapidement avec l'énergie.

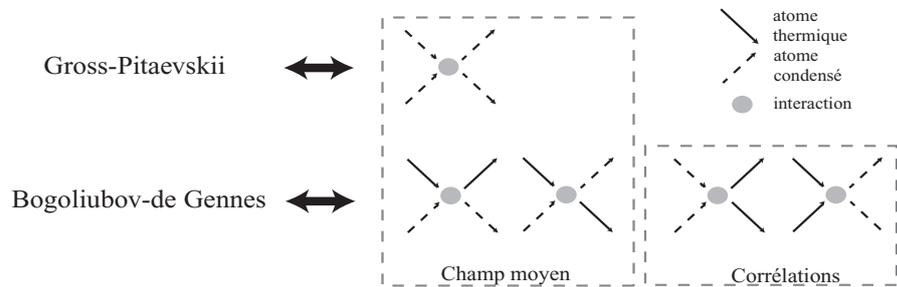


FIG. 1.3 – Processus élémentaires de collisions pris en compte dans l'approximation de Bogoliubov.

¹⁰Ce mécanisme est analogue à celui qui décrit la conversion paramétrique dans un milieu non-linéaire du second ordre (Kerr), connu pour générer des états comprimés du rayonnement [86].

Déplétion du condensat : On déduit de (1.44) la densité de la partie non condensée, $n' = N'/L^3$, avec le nombre d'atomes non-condensés N'

$$N' = \sum_k (u_k^2 + v_k^2) N_k + \sum_k v_k^2, \quad (1.45)$$

Le premier terme du membre de gauche correspond aux quasi-particules excitées par l'agitation thermique. Les nombres d'occupation N_k suivent la statistique de Bose, $N_k = N_{\text{BE}}(\hbar\omega_k^{\text{B}}) = (\exp(\beta\hbar\omega_k^{\text{B}}) - 1)^{-1}$, sans corrélations entre vecteurs d'ondes différents (« chaos moléculaire »). Le deuxième terme, correspondant aux fluctuations quantiques, est présent même à température nulle. Il donne lieu à une « déplétion quantique » du condensat due aux interactions binaires [87],

$$\left(\frac{N'}{N}\right)_{T=0} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}(n_0 a^3)^{1/2}. \quad (1.46)$$

Cette équation met une fois encore en évidence la quantité $n_0^{1/3} a \ll 1$ comme le petit paramètre de la théorie. Pour la valeur typique $na^3 \sim 1.5 \times 10^{-5}$, on trouve une déplétion quantique de 2 % environ. Au contraire, dans l'hélium liquide, on trouve à peu près $na^3 \sim 0.25$, et une déplétion de près de 90 % [66]. Dans ce cas, la théorie de Bogoliubov est bien entendue inapplicable.

1.4.3 Excitations collectives dans un piège anisotrope

Si nous revenons maintenant au cas du gaz piégé, la distinction entre excitations de type phonon à basse énergie et de type particule libre à haute énergie reste valable, et le potentiel chimique μ reste la limite approximative entre les deux régions (ce point est discuté dans l'appendice A).

Les excitations de basse énergie $\epsilon \lesssim \hbar\omega_{\perp}$ (grandes longueurs d'ondes) correspondent aux modes collectifs d'excitation, par exemple, les modes d'oscillation du centre de masse et de « respiration », représentés sur la figure 1.4. Leur longueur d'onde caractéristique λ_{ϵ} est cependant grande devant la longueur de relaxation ζ , si bien que l'on peut, comme pour la fonction d'onde du condensat, négliger les termes de pression quantique dans les équations (1.35,1.36). On retrouve alors les équations hydrodynamiques établies précédemment, linéarisées autour de la solution dans la limite de Thomas-Fermi [81, 87, 88] :

$$i\omega_{\nu} \delta n_{\nu} = \frac{\hbar}{M} \nabla(n_0 \nabla \phi_{\nu}), \quad (1.47)$$

$$i\omega_{\nu} \phi_{\nu} = \frac{U}{\hbar} \delta n_{\nu}. \quad (1.48)$$

Si on combine les équations (1.47) et (1.48), on obtient la même équation de propagation pour δn_{ν} et ϕ_{ν} [88], par exemple :

$$-\omega_{\nu}^2 \delta n_{\nu} = \frac{U}{M} \nabla(n_0 \nabla \delta n_{\nu}). \quad (1.49)$$

En utilisant (1.48) et la condition de normalisation des u_ν et v_ν , les solutions de ces équations se mettent sous la forme suivante [89] :

$$\delta n_\nu = \sqrt{\frac{\hbar\omega_\nu}{2U}} W_\nu(\mathbf{r}), \quad (1.50)$$

$$\phi_\nu(\mathbf{r}) = -i\sqrt{\frac{U}{2\hbar\omega_\nu}} W_\nu(\mathbf{r}), \quad (1.51)$$

si on normalise W_ν comme $\int d^3\mathbf{r} |W_\nu|^2 = 1$.

Branche axiale dans un piège très anisotrope : Pour un piège à symétrie cylindrique, on peut chercher W_ν sous la forme $B_{j,m}(\rho, x)\rho^{|m|}e^{im\theta}$ [89]. Dans un piège très anisotrope, le polynôme $B_{j,m}$ va dépendre en général de la coordonnées transverse. Cependant, pour des excitations de très basse énergie, $\epsilon_j \ll \hbar\omega_\perp$, le mode est essentiellement plat dans le plan radial [90] : le nombre quantique m est donc nul et $B_{j,0} \approx y_j(x)$. Ces excitations forment une classe particulière, que nous appellerons « branche axiale », composée de modes excités dans la direction axiale uniquement. On peut se débarrasser de la dépendance en ρ des équations hydrodynamiques en moyennant sur les degrés de liberté transverses [90], une procédure que nous détaillerons au chapitre V. Ceci mène à une équation uni-dimensionnelle pour y_j (avec $\tilde{x} = x/L$) :

$$(1 - \tilde{x}^2)y_j'' - 4\tilde{x}y_j' + \left(\frac{2\omega_j}{\omega_x}\right)^2 y_j = 0,$$

dont la solution s'exprime en termes des polynômes de Jacobi, $P_j^{(1,1)}(\tilde{x})$ [41, 91], avec les énergies propres [90]

$$\omega_j = \omega_x \sqrt{\frac{j(j+3)}{2}}. \quad (1.53)$$

En normalisant, on trouve donc pour les modes axiaux :

$$\frac{\delta n_j(\tilde{x})}{n_{0m}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{30N_0\mu}} \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)}{j+1}} P_j^{(1,1)}(\tilde{x}), \quad (1.54)$$

$$\phi_j(\tilde{x}) = -i\sqrt{\frac{\mu}{30N_0\hbar\omega_j}} \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)}{j+1}} P_j^{(1,1)}(\tilde{x}). \quad (1.55)$$

Pour illustrer ces calculs, nous considérons deux cas simples mais utiles en pratique.

Le mode d'oscillation du centre de masse : Pour $j = 1$, on a simplement $P_1^{(1,1)}(\tilde{x}) = 2\tilde{x}$, et $\omega_1 = \omega_x$. Supposons que ce mode soit fortement excité, de manière cohérente, à partir du condensat en appliquant une perturbation de la forme ax ((voir la section 2.3.3), de telle manière que $\langle \hat{b}_1 \rangle = b_1 e^{i\alpha}$ [56]). La densité totale est alors :

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &\approx n_0(\mathbf{r}) + \delta n_1 b_1 e^{i\omega_x t} + \text{c.c.} \\ &\approx n_{0m} [1 - \tilde{\rho}^2 - (\tilde{x} - \tilde{x}_0 \cos(\omega_x t + \alpha))^2], \end{aligned} \quad (1.56)$$

dans la limite où $\tilde{x}_0 \ll 1$. Lorsque ce mode est excité, le centre de masse du condensat oscille à la fréquence du piège, avec une amplitude reliée au nombre de quantas $N_1 = |b_1|^2$

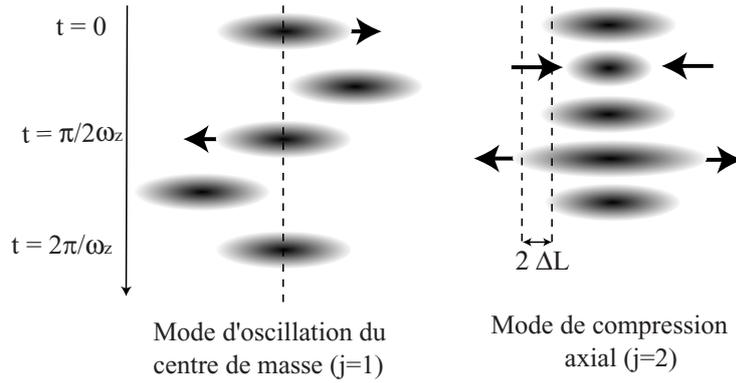


FIG. 1.4 – Modes d'excitation axiaux du condensat. Les deux premiers modes d'excitation axiaux du condensat, l'oscillation du centre de masse, qui se produit à la fréquence du piège, et le mode de compression (ou mode de respiration) axial, de fréquence légèrement plus élevée $\sqrt{5/2} \omega_x$.

par $\tilde{x}_0 = (N_1 \hbar \omega_x / 4 N_0 \mu)^{1/2}$. L'identité entre la fréquence du piège et celle de l'oscillation du centre de masse découle du théorème de Kohn [92] : quelque soit l'importance des interactions et la température, le centre de masse du système oscille toujours à la fréquence du piège, sans amortissement pourvu que le potentiel reste harmonique.

Le mode de compression axiale : De la même manière, le mode $n = 2$ s'écrit à partir de $P_2^{(1,1)}(\tilde{x}) = (5\tilde{x}^2 - 1)/2$, et sa fréquence propre¹¹ vaut $\omega_2 = \sqrt{5/2} \omega_x$. On voit donc que lorsque ce mode est excité, il s'ajoute au terme en \tilde{x}^2 déjà présent dans l'expression de la densité. Il en résulte une oscillation de la longueur du condensat, avec une amplitude $\Delta L/L = (N_2 \hbar \omega_x / 21 N_0 \mu)^{1/2}$. On peut exciter volontairement ce mode en modulant la fréquence de piégeage autour de la valeur d'équilibre [93, 94]. Au chapitre VI, nous verrons qu'il peut également être excité de manière dynamique pendant la condensation si le piège est très anisotrope [95, 55].

1.5 Propriétés de cohérence des ondes de matière

La caractérisation des propriétés statistiques du gaz dans son ensemble repose sur l'emploi de fonctions de corrélations du champ de matière, et sur l'identification des observables qui permettent de les mesurer. Dans cette section, nous introduisons les fonctions de corrélation appropriées pour décrire de manière quantitative les propriétés de cohérence en phase et en

¹¹Sur cet exemple précis, on constate que la fréquence propre d'un mode collectif ne dépend que de la fréquence du piège dans la limite de Thomas-Fermi [88, 89]. Ceci se comprend [93] par analogie avec le cas uniforme : l'énergie est en effet donnée par $\hbar\omega = c_S k$, mais le vecteur d'onde est maintenant discret à cause de la taille finie du système, $k \sim n/L$. Comme $L = \sqrt{2\mu/M\omega_x^2}$ et $c_S = \sqrt{\mu/M}$, le rapport L/c_S ne dépend que de ω_x .

amplitude du champ bosonique. L'analogie avec l'optique se révèle fructueuse pour accomplir ce programme. Pour quantifier le degré de cohérence d'un champ optique (classique ou quantique), on introduit les fonctions de corrélation pour les composantes du champ électrique [96]. De la même manière, pour une onde de matière, on peut introduire les fonctions de corrélation du champ $\hat{\Psi}$. Nous allons nous restreindre dans ce mémoire à décrire les fonctions de corrélation dites d'ordre 1 et 2 (qui sont en fait d'ordre 2 et 4 en champ, respectivement), que nous discutons tour à tour.

1.5.1 Cohérence en phase

La fonction de corrélation du premier ordre¹² (au même temps) est définie par

$$g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle. \quad (1.57)$$

Les crochets indiquent une moyenne statistique sur l'ensemble approprié, dans notre cas grand-canonique. Cette fonction est fondamentale pour discuter les expériences d'interférométrie atomique, car comme dans le cas de l'optique, elle quantifie le contraste des franges d'interférences dans une expérience idéale, *après moyenne statistique sur un grand nombre de réalisations*. En d'autres termes, cette fonction permet de quantifier dans quelle mesure la phase relative entre les deux points \mathbf{r} et \mathbf{r}' reste bien définie quand la séparation $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ augmente. Pour un système homogène, $g^{(1)}$ ne dépend que de la différence $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, à cause de l'invariance par translation. Par contre, pour un système inhomogène, comme c'est le cas dans un piège, $g^{(1)}$ dépend de \mathbf{r} et \mathbf{r}' séparément. Pour caractériser globalement la cohérence du nuage, on introduit alors la fonction (réelle) dite de corrélation spatiale

$$\mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{s}) = \int d^3\mathbf{R} g^{(1)}(\mathbf{R} + \mathbf{s}/2, \mathbf{R} - \mathbf{s}/2). \quad (1.58)$$

La manière dont cette fonction tombe à zéro renseigne sur les propriétés de cohérence du gaz. En particulier, nous introduisons la « longueur de cohérence » L_C comme la demi-largeur à mi-hauteur de $\mathcal{C}^{(1)}$. Pour quantifier le degré de cohérence, on pourra comparer L_C à la taille physique du système L . Si $L_C \sim L$, on parlera de cohérence complète (au premier ordre), et la phase du champ devient une notion pertinente. Pour $L_C \ll L$, le système peut être qualifié de globalement incohérent, même si sur des distances de l'ordre de L_C , les phénomènes d'interférence sont bien entendu observables.

Lien avec la distribution en impulsion : La fonction $\mathcal{C}^{(1)}$ est reliée à la distribution en impulsion \mathcal{P} par une transformée de Fourier :

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}) = \langle \tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{p})\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{s} \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{s}) e^{-i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{\hbar}}, \quad (1.59)$$

avec l'opérateur champ atomique en représentation impulsion,

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}(\mathbf{r}) e^{-i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}. \quad (1.60)$$

¹²ou matrice densité à un corps,

La largeur de la distribution en impulsion vérifie donc une relation de conjugaison,

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{L_C}. \quad (1.61)$$

Intuitivement, on comprend ce résultat à l'aide de la relation de de Broglie : une largeur en impulsion Δp implique une distribution de longueur d'onde $\Delta \lambda \sim \hbar/\Delta p$ qui détermine la longueur de cohérence. On retrouve immédiatement avec ce résultat que pour un gaz thermique¹³, comme $\Delta p \sim \sqrt{Mk_B T}$, la longueur de cohérence est de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie thermique $\lambda_{dB} = \sqrt{2\pi\hbar^2/Mk_B T}$. Pour un condensat, par contre, le principe d'Heisenberg impose $\Delta p \sim \hbar/L$, ce qui implique que la longueur de cohérence est de l'ordre de la taille du système : $L_C \approx L$.

Fonction de corrélation dans le point de vue densité/phase : Dans le point de vue densité/phase introduit plus haut, on obtient la fonction de corrélation à l'ordre le plus bas en $\delta\hat{n}/n_0$ comme¹⁴

$$g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sqrt{n_0(\mathbf{r})n_0(\mathbf{r}')} \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta\phi^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right). \quad (1.63)$$

La variance de la différence de phase entre les points \mathbf{r} et \mathbf{r}' est donnée par

$$\Delta\phi^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^2 \rangle = \sum_{\nu} |\phi_{\nu}(\mathbf{r}) - \phi_{\nu}(\mathbf{r}')|^2 (2N_{\nu} + 1) \quad (1.64)$$

avec le nombre d'occupation $N_{\nu} = N_{BE}(\hbar\omega_{\nu}) = (\exp(\hbar\omega_{\nu}/k_B T) - 1)^{-1}$.

Dans le cas simple du gaz homogène à trois dimensions, les fluctuations quantiques sont négligeables sous la condition $n_0 a^3 \ll 1$ (voir la section 1.4.2). Pour la partie thermique, on trouve

$$\Delta\phi^2(\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}') \sim \frac{T}{\mu} \sqrt{n_0 a^3} \frac{\zeta}{|\mathbf{s}|}, \quad (1.65)$$

sur des distances $s \gg \zeta$. Pour les distances $s \ll \zeta$, le comportement de la fonction de corrélation $\mathcal{C}^{(1)}$ est déterminé par celui de \mathcal{P} pour $p \gg \hbar/\zeta^{-1}$: dans cette région de haute énergie, les excitations se comportent comme des particules libre et la statistique de Bose tend vers celle de Boltzmann. On trouve donc une dépendance gaussienne pour les très courtes distances. Malgré la dépendance en $1/s$, le préfacteur est très petit, et la contribution des excitations à $g^{(1)}$ est négligeable au bout de quelques longueurs de relaxation.

Ce résultat reste qualitativement vrai pour un gaz piégé, si bien que la fonction de corrélation

¹³Pour un gaz de Boltzmann, \mathcal{P} étant gaussienne, c'est aussi le cas de sa transformée de Fourier $\mathcal{C}^{(1)}$.

¹⁴Montrons la relation $\langle \exp[-i\hat{\phi}(\mathbf{r}) + i\hat{\phi}(\mathbf{r}')] \rangle = \exp(-\frac{1}{2}\Delta\phi^2)$ utilisée pour obtenir (1.63). Ecrivons

$$\langle \exp[-i\hat{\phi}(\mathbf{r}) + i\hat{\phi}(\mathbf{r}')] \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^n \rangle \quad (1.62)$$

Comme l'hamiltonien est une forme quadratique, et la différence de phase $\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')$ une forme linéaire, des $\hat{b}_{\nu}, \hat{b}_{\nu}^{\dagger}$, seuls les termes avec n pair survivent à la moyenne statistique $\langle \cdot \rangle$. De plus, on peut alors utiliser le théorème de Wick [] pour montrer que $\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^{2m} \rangle = \langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^2 \rangle^m$, avec m un entier quelconque. La resommation de la série mène à la formule désirée.

s'identifie pratiquement à celle d'un champ classique de phase constante et de module bien définie, et $C^{(1)}$ n'est limité que par le recouvrement des enveloppes de densité :

$$C^{(1)}(\mathbf{s}) = \int d^3\mathbf{R} \sqrt{n_0(\mathbf{R} + \mathbf{s}/2)n_0(\mathbf{R} - \mathbf{s}/2)} + \dots \quad (1.66)$$

En prenant pour n_0 le profil de Thomas-Fermi, la fonction de corrélation est alors pratiquement gaussienne¹⁵ avec une longueur de cohérence L_C égale à 0.77 fois la taille du condensat dans la direction de \mathbf{s} [97]. Ce comportement a été mesuré expérimentalement à une bonne approximation dans les expériences du NIST [98] et du MIT [99]. Les points dans l'équation précédente indiquent qu'en général, on doit inclure des termes décrivant la contribution des excitations, en particulier à température finie. Les termes omis tombent à zéro sur une échelle spatiale beaucoup plus courte (de l'ordre de ζ). L'expérience d'interférométrie entre deux lasers à atomes menée à bien à Munich a permis de mettre clairement en évidence ces deux échelles de longueurs très différentes dans la fonction de corrélation [9].

1.5.2 Fonction de corrélation de paires

Un autre fonction importante est la fonction de corrélation du second ordre¹⁶, qui donne la probabilité conditionnelle de trouver un boson en \mathbf{r} , sachant qu'on en a détecté un premier en \mathbf{r}' . Elle est définie mathématiquement par

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle = \langle \hat{n}(\mathbf{r})\hat{n}(\mathbf{r}') \rangle. \quad (1.67)$$

Pour des photons, la fonction $g^{(2)}$ décrit les fluctuations d'intensité du champ lumineux [86]. Dans le cas d'une source thermique, constituée d'un ensemble d'émetteurs élémentaires mutuellement incohérents (en champ lointain), la statistique du rayonnement qu'elle émet est gaussienne d'après le théorème central limite. Après moyenne statistique, la fonction de corrélation est alors $g^{(2)}(|t - t'| \rightarrow 0) \approx 2$: il y a deux fois plus de chances de détecter (quasi)simultanément deux photons qu'après un laps de temps important, où $g^{(2)}(|t - t'| \rightarrow \infty) = 1$ (temps d'arrivée décorrelés). C'est le fameux effet Hanbury-Brown et Twiss, qui a largement contribué à l'essor de l'optique quantique dans les années 1950-1960. Pour un laser, par contre, les sources élémentaires émettent en phase. Le flux lumineux est régulier, et on a alors $g^{(2)} \approx 1$ quelque soit $|t - t'|$, correspondant à une statistique de Poisson. On interprète parfois cet effet comme une conséquence de la nature bosonique du rayonnement : une source thermique constitue un mélange statistique d'états à deux photons du point de vue de l'expérience de corrélation d'intensité, et le facteur 2 qui intervient aux temps courts résulte dans ce point de vue du principe de symétrisation. Dans le cas du laser, les photons occupent tous un seul mode du champ électromagnétique, et il n'y a pas lieu de symétriser : c'est pourquoi le facteur 2 est absent.

Influence des collisions élastiques : Dans le cas d'un gaz atomique, la situation se complique à cause des collisions élastiques, qui affectent les corrélations à courte séparation

¹⁵Cette forme gaussienne de la fonction de corrélation est naturelle. En effet, pour des fonctions réelles à support borné, comme Φ_0 dans le régime de Thomas-Fermi, la forme gaussienne est un point stable pour le produit de convolution, et la convergence est atteinte très rapidement.

¹⁶ou fonction de corrélation densité/densité, ou matrice densité à deux corps,

[100]. Si la plus petite des longueurs caractéristiques du système à N particules¹⁷ est grande devant a , alors pour $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \lesssim a$, on doit retrouver la fonction d'onde à deux corps qui décrit la diffusion élastique. D'après les résultats de la section 1.2.2, on a alors

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \tilde{g}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(1 - \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)^2 \quad (1.68)$$

La nouvelle fonction $\tilde{g}^{(2)}$ est une fonction de corrélation « fictive », qui ne tient pas compte des corrélations à deux corps dûes au détail des collisions, pour se concentrer sur les corrélations à N corps. En conséquence, on pourra calculer $\tilde{g}^{(2)}$ sans états d'âmes en utilisant le pseudo-potentiel (1.16). On peut également relier $\tilde{g}^{(2)}$ aux fluctuations de densité par la formule [87, 85] :

$$\tilde{g}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = n_0(\mathbf{r})n_0(\mathbf{r}') + \langle \delta\hat{n}(\mathbf{r})\delta\hat{n}(\mathbf{r}') \rangle \quad (1.69)$$

Lien avec l'énergie d'interaction : Pour caractériser globalement la cohérence du second ordre d'un échantillon inhomogène, on peut introduire la quantité sans dimensions

$$\mathcal{C}^{(2)} = \frac{\int d^3\mathbf{r} \tilde{g}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{\int d^3\mathbf{r} n(\mathbf{r})^2} \quad (1.70)$$

Pour un condensat totalement pur, $\hat{\Psi} \approx \Psi_0$, et on trouve que $\mathcal{C}^{(2)} \approx 1$: les fluctuations de densité sont négligeables. Par contre, pour un nuage thermique sans interactions, l'énergie dépend quadratiquement du champ $\hat{\Psi}$ (voir l'équation (1.17) en omettant le terme d'interaction). La statistique de $\hat{\Psi}$ est donc gaussienne, et, comme pour le rayonnement thermique, on trouve que $\mathcal{C}^{(2)} = 2$, une valeur qui reflète l'existence de fluctuations de densité importantes dans l'échantillon ($\sqrt{\langle \delta\hat{n}^2 \rangle} \sim \langle \hat{n} \rangle$). Nous concluons que $\mathcal{C}^{(2)}$ joue un rôle analogue pour le nuage de bosons piégés à celui du terme $g^{(2)}(0)$ en optique quantique : il caractérise globalement l'importance des fluctuations de l'*amplitude* du champ (atomique ou photonique). L'expérience de Masuda et Shimizu a permis de mesurer directement les corrélations à deux corps dans un jet d'atomes de Néon refroidi par laser [101], en confirmant la valeur $\mathcal{C}^{(2)} = 2$. Cette mesure directe n'est possible qu'avec des atomes dans un état métastable : l'énergie interne élevée rend alors possible une détection à l'échelle d'un seul atome. Ce type de techniques pourrait être appliqués dans un futur proche à un condensat d'hélium métastable [102], et permettre l'étude directe des corrélations à deux corps dans un nuage thermique et dans un nuage condensé. Pour les atomes alcalins dans l'état fondamental électronique, une telle mesure est impossible. Heureusement, pour un échantillon où les interactions sont fortes, on peut remonter à $\mathcal{C}^{(2)}$ par une mesure de l'énergie d'interaction E_{int} (1.13) [103, 104] :

$$E_{\text{int}} = \frac{U}{2} \int d^3\mathbf{r} \tilde{g}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{U\mathcal{C}^{(2)}}{2} \int d^3\mathbf{r} n(\mathbf{r})^2 \quad (1.71)$$

Par de simples mesures de temps de vol, on peut déterminer E_{int} et le profil de densité [103, 104], et donc remonter à $\mathcal{C}^{(2)}$. De telles expériences donnent effectivement $\mathcal{C}^{(2)} \approx 1$ pour un condensat à très basse température [103].

¹⁷Pour un condensat, c'est en général la longueur de relaxation qui compte, et on retrouve la condition $n_0 a^3 \ll 1$.

Notons pour terminer que l'on peut également introduire une fonction de corrélation du troisième ordre, donnant la probabilité de détecter un atome conditionnellement à la détection de deux autres. Lorsque les positions des trois atomes sont « identiques »¹⁸, cette fonction détermine le taux de formation de molécules par recombinaison à trois corps. Pour un condensat, Yu. Kagan, B. Svistunov et G. Shlyapnikov ont prédit une réduction (d'un facteur $3! = 6$, et non plus d'un facteur 2) qui reflète l'absence de fluctuations de densité [105]. Les expériences de Burt *et al.* [70] ont permis de le mettre en évidence sans ambiguïté (voir aussi la thèse d'O. Sirjean pour une discussion détaillée de ce sujet [102]).

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une « boîte à outils » pour la description théorique des condensats de Bose-Einstein piégés. En particulier, nous avons introduit l'équation de Gross-Pitaevskii comme première approximation, puis l'approximation de Bogoliubov à un ordre supérieur. Le formalisme développé permet bien entendu de traiter le cas d'un véritable condensat, dont les fluctuations de phase et de densité sont faibles. A température finie, et pour un gaz piégé, il nécessite cependant d'être complété par une description du nuage thermique. Nous abordons ce problème de manière théorique dans l'appendice A, et d'un point de vue expérimental aux chapitre III, consacrés aux propriétés globales du nuage à température finie. Le chapitre IV aborde le problème du laser à atomes, et nous y étendons le formalisme de Gross-Pitaevskii pour inclure les degrés de liberté de spin. Enfin, la description dans le point de vue densité/phase sera utilisée lourdement dans les chapitres V et VI pour étudier le gaz de Bose uni-dimensionnel, et sa réalisation approchée dans un piège très anisotrope sous la forme d'un quasi-condensat. Avant d'aborder ces chapitres, qui constituent le coeur de cette thèse, nous allons décrire brièvement le dispositif expérimental sur lequel les expériences ont été réalisées.

¹⁸On entend par là qu'ils sont localisés dans un volume $\sim a^3$ où la probabilité de recombinaison augmente fortement.

Production et caractérisation du condensat

Dans ce chapitre, nous donnons une présentation succincte du dispositif expérimental utilisé dans les expériences décrites aux chapitres suivants. Il nous a été légué par nos prédécesseurs, B. Desruelle, V. Boyer, G. Delannoy, S. Murdoch, S. Rangwala et Y. Le Coq, et on trouvera des exposés plus détaillés dans les thèses de B. Desruelle [38], V. Boyer [39] et G. Delannoy [48]. Une variante de ce dispositif, comprenant notamment une version « améliorée » du banc de refroidissement laser, est décrite dans la thèse de Y. Le Coq [46].

En guise d'introduction, nous indiquons les principaux obstacles à surmonter pour franchir le seuil de condensation avec un maximum d'atomes. Nous donnons ensuite une vue d'ensemble du dispositif, avant de discuter brièvement la phase cruciale de refroidissement laser¹, en mettant l'accent sur les difficultés supplémentaires qui apparaissent quand on veut piéger un grand nombre d'atomes [109, 110]. Nous discutons ensuite du piège magnétique de type Ioffe-Pritchard, et de son implémentation dans notre dispositif sous la forme d'un électro-aimant à noyau ferromagnétique [37]. L'évaporation forcée [111, 112], qui permet de franchir les derniers paliers avant la condensation, est présentée dans le contexte de notre expérience. Enfin, nous terminons par une discussion détaillée de l'imagerie par absorption [113], qui est utilisée pour sonder le nuage ultra-froid.

2.1 Vers la condensation

Atteindre le régime de dégénérescence quantique dans un gaz atomique dilué représente un bond significatif dans l'espace des phases. Le critère de condensation² peut s'écrire, en fonction de la densité au centre du piège $n(\mathbf{0})$ et de la longueur d'onde de de Broglie thermique λ_T comme (relation d'Einstein)

$$n(\mathbf{0})\lambda_T^3 = 2,612. \quad (2.1)$$

¹Pour une introduction générale et une bibliographie complète, on pourra se reporter aux conférences Nobel de S. Chu, C. Cohen-Tannoudji et W. D. Phillips [106, 107, 108].

²En toute rigueur, ce critère n'est valable que dans le cadre d'une approximation de champ moyen. Nous discutons le rôle des fluctuations critiques dans le chapitre III, et montrons qu'il ne modifie que faiblement ce critère.

La quantité $\mathcal{D} = n(\mathbf{0})\lambda_T^3$, appelée densité dans l'espace des phases, est extrêmement faible dans les conditions habituelles. Pour un gaz à pression et température ambiante, on a par exemple $\mathcal{D} \sim 10^{-8}$, et pour les échantillons plus dilués utilisés traditionnellement en physique atomique, on se rapproche de $\mathcal{D} \sim 10^{-15}$. La phase de refroidissement laser permet de gagner la plupart des ordres de grandeur manquants, pour aboutir à $\mathcal{D} \sim 10^{-5}$. Ensuite, le refroidissement laser « standard » bute sur une limite intrinsèque, liée au caractère aléatoire de l'émission spontanée. Les techniques de refroidissement sub-recul [106, 107] permettent de s'affranchir de cette limite, mais jusqu'ici elles n'ont été démontrées que pour des échantillons peu denses. Au contraire, un nuage dense sera soumis à des effets de chauffage supplémentaires, dûs par exemple à la diffusion multiple de photons ou aux collisions assistées par la lumière [110]. Pour ces raisons, l'évaporation forcée dans un piège conservatif [112] est devenue la technique standard pour prendre le relais du refroidissement laser. L'idée de base est d'éjecter sélectivement du piège les atomes plus rapides que la moyenne. L'énergie moyenne totale diminue après rethermalisation par collisions élastiques, assurant ainsi le refroidissement. La sélection en énergie se fait par un « couteau » radio-fréquence qui transfère vers un état non-piégeant les atomes les plus rapides, dans les ailes de la distribution de Maxwell-Boltzmann. La fréquence ω_{rf} du couteau détermine l'énergie à partir de laquelle les atomes sont éjectés, et donc la surface d'évaporation selon

$$\hbar\omega_{\text{rf}} = V_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

En plus de l'évaporation, un gaz piégé magnétiquement subit à des pertes, soit par collisions avec les atomes du gaz résiduel, soit par collisions inélastiques dans le gaz lui-même. On caractérise ces deux processus par les taux de pertes respectifs τ_{res}^{-1} et γ_{inel} . L'efficacité du refroidissement repose sur le processus de thermalisation : celui-ci doit se produire suffisamment vite par rapport à la durée de vie des atomes dans le piège magnétique. Le temps de thermalisation est de l'ordre de l'inverse du taux de collisions élastiques [61], $\gamma_{\text{el}} = n\sigma_{\text{el}}v_{\text{th}}$. La vitesse thermique est donnée par $v_{\text{th}} = \sqrt{8k_{\text{B}}T/\pi M}$, n est la densité typique et σ_{el} est la section efficace de collisions élastiques entre atomes piégés. Pour que l'évaporation fonctionne, il faut donc satisfaire la condition $\gamma_{\text{inel}}, \tau_{\text{res}}^{-1} \ll \gamma_{\text{el}}$. Le premier critère est lié aux propriétés collisionnelles de l'atome, mais le second dicte des conditions drastiques sur la qualité du vide que l'on doit atteindre dans l'enceinte de piégeage.

2.1.1 Qualité du vide

Si on suppose que le gaz résiduel est composé essentiellement de Rubidium, à une température de 300 K, avec une section efficace de collision typique $\sigma \sim 10 \text{ nm}^2$ à température ambiante, on trouve que la durée de vie des atomes piégés s'exprime en fonction de la pression comme $\tau_{\text{res}}[s] \sim 2.10^{-9}/P[\text{mbar}]$: une durée de vie de 1 minute, typique pour notre expérience, correspond à une pression de l'ordre de 4.10^{-11} mbars. Une des clés de la réussite d'une expérience de condensation de Bose-Einstein est donc d'atteindre un ultra-vide stable au niveau de 10^{-11} mbars. On trouvera sur la figure 2.1 un schéma d'ensemble du système à vide conçu par B. Desruelle, V. Boyer, et P. Bouyer, qui s'est révélé très robuste et n'a causé aucun problème majeur en trois années de thèse. L'enceinte primaire, dans laquelle débouche le four contenant du Rubidium (enrichi par rapport à la proportion naturelle en ce qui concerne l'isotope 87), est pompée par une pompe turbo-moléculaire et une pompe

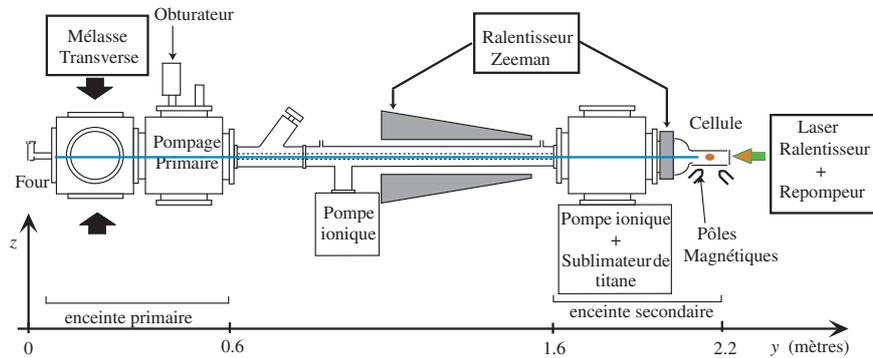


FIG. 2.1 – Schéma global du dispositif expérimental. La figure est adaptée de la thèse de Yann Le Coq [46].

ionique. Elle est isolée de l'enceinte secondaire, où les atomes sont piégés, par un tube de pompage différentiel qui permet d'atteindre la qualité de vide nécessaire.

2.1.2 Critères à respecter

En supposant un vide suffisamment bon, il reste encore deux conditions essentielles à remplir pour atteindre la condensation de Bose-Einstein. En premier lieu, on doit charger le piège magnétique. Ceci ne peut être réalisé de façon efficace qu'à partir d'un échantillon préalablement refroidi par laser. En effet, la « profondeur » d'un piège magnétique est limitée à quelques mK environ. De plus, le taux de thermalisation doit être suffisamment élevé pour que le refroidissement puisse procéder rapidement, sans être gêné par les processus inélastiques. En pratique, on cherchera à atteindre le « régime d'emballement » [112], dans lequel le taux de collisions élastiques, qui varie comme $n(\mathbf{0})\sqrt{T}$, augmente au cours de l'évaporation. Le refroidissement devient alors de plus en plus efficace au fur et à mesure que l'évaporation procède. Enfin, il faut évidemment charger le plus d'atomes possibles pour en conserver un maximum à la fin de l'évaporation. Ces contraintes sont parfois contradictoires. Elles imposent un protocole compliqué de refroidissement laser, que nous allons maintenant détailler.

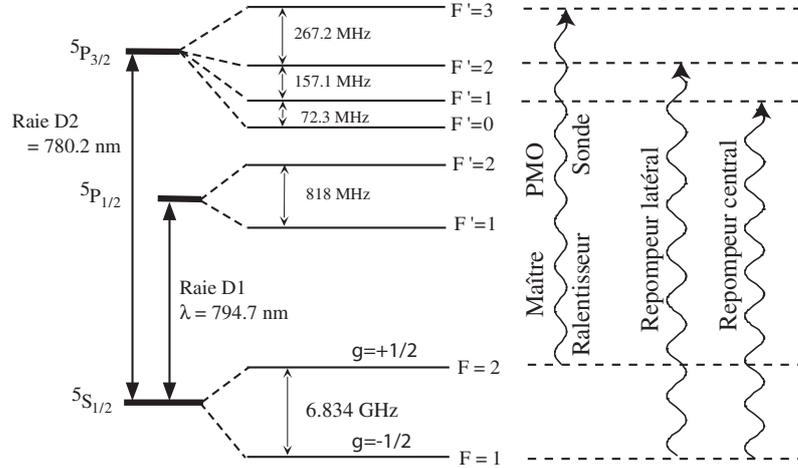


FIG. 2.2 – Schéma des niveaux du ^{87}Rb (en champ magnétique nul). Nous indiquons les structures fines et hyperfines, avec les écarts en énergie correspondants. À droite, nous indiquons les transitions utilisées pour le refroidissement laser et l'imagerie.

2.2 La phase de refroidissement laser

2.2.1 Le jet atomique et le ralentisseur Zeeman

Nous produisons, à partir d'un four à 420 K environ, un jet atomique de Rubidium qui s'échappe dans l'enceinte primaire. Pour améliorer le flux sur l'axe, nous le collimatons à l'aide d'une mélasse transverse quasi-résonante avec la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$, assistée d'un repompeur (figure 2.2). Ce jet entre ensuite à l'intérieur d'un solénoïde, dont le champ magnétique compense l'effet Doppler et maintient une partie importante de la distribution en vitesses en résonance avec un laser contra-propageant au jet atomique, désaccordé de 133 MHz sur le rouge de la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ (figure 2.2). A cause de la pression de radiation exercée par ce laser sur les atomes [108], le jet atomique est ralenti et amené quasiment à l'arrêt au niveau de la cellule en verre, où se trouve le piège magnéto-optique. Dans sa thèse [39], V. Boyer discute en détails le fonctionnement de ce ralentisseur, en particulier l'utilisation de deux solénoïdes inversés pour diminuer la puissance Joule dissipée dans le ralentisseur et annuler le champ au niveau du PMO. Aussi, nous renvoyons le lecteur à son manuscrit pour plus de précisions. Les atomes ralentis arrivent dans la cellule en verre avec une vitesse longitudinale d'environ 50 m/s. Un piège magnéto-optique (PMO) les

capture et constitue la première étape vers la condensation.

2.2.2 Le Piège magnéto-optique

En combinant un champ magnétique de type quadrupole sphérique (créé par deux bobines en configuration anti-Helmoltz) et trois paires de faisceaux deux-à-deux contra-propageants et polarisés σ^\pm , on obtient à la fois une force de rappel vers le point où le champ magnétique s'annule et une force de friction. Pour des vitesses atomiques élevées, la friction trouve son origine dans l'effet Doppler, qui rend l'interaction avec la lumière sensible à la vitesse atomique. Ce mécanisme cesse d'être efficace pour des températures de l'ordre de la largeur naturelle de la transition $\hbar\Gamma/k_B \sim 100 \mu\text{K}$, et il est relayé par des mécanismes de refroidissement Sisyphé, qui mettent en jeu la structure des états fondamentaux et des phénomènes de pompage optique [114]. Le coefficient de friction « sub-Doppler » est bien plus élevé que celui associé au mécanisme Doppler, alors que le taux de chauffage est sensiblement équivalent dans les deux cas. Dans ces conditions, on comprend qu'il soit possible d'atteindre des températures notablement plus basses, idéalement limitées par le caractère aléatoire du recul dû à l'émission spontanée. Le PMO utilisé dans notre expérience fonctionne sur la « transition cyclante » $|F' = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ de la raie D2 (figure 2.2). Les lasers de piégeage ont un rayon d'environ 1 cm, pour une puissance de 2 mW par faisceau, et ils sont désaccordés de -15 MHz. Plutôt que des faisceaux rétro-réfléchis, on utilise six lasers indépendants pour éviter les effets d'absorption qui existent dans les nuages denses. Par ailleurs, une excitation non résonante vers $|F' = 2\rangle$ est possible, permettant la désexcitation vers $|F = 1\rangle$. Pour que le PMO fonctionne correctement, il faut compenser cet effet par l'ajout d'un repompeur qui ramène les atomes sur la transition cyclante (figure 2.2).

2.2.3 La phase de compression et la mélasse

Dans un PMO, à partir d'un certain nombre d'atomes, la dynamique est fortement affectée par des effets collectifs liés à la diffusion multiple de photons (voir les références [109, 110, 115, 116] pour des études détaillées des phénomènes décrits dans ce paragraphe). En fait, ce n'est que pour un très faible nombre d'atomes ($\lesssim 10^4$) qu'on peut considérer le nuage comme une collection d'atomes indépendants soumis à une force combinée de rappel et de friction. Quand le nombre d'atomes, la densité et le rayon augmentent, le nuage devient opaque pour la lumière de piégeage et un photon réémis spontanément peut alors être absorbé par un autre atome avec une probabilité élevée. Du point de vue des atomes, le coefficient de diffusion en impulsion augmente, alors que la friction nette diminue : ces deux effets conduisent à une température plus élevée³. A l'échelle du nuage, cela donne lieu à une force répulsive qui sature la densité autour d'une valeur typique de 10^{10} at/cm^3 . En piégeant plus d'atomes, le volume du nuage augmente à densité constante. Quand le nombre d'atomes devient élevé (autour de $10^8 - 10^9$), le nuage acquiert une structure bimodale, avec un coeur dense et un halo périphérique de plus faible densité.

³Dans [116], la loi empirique $T[\mu\text{K}] \approx 1.2N^{1/3}\Omega_R/\delta_L$ est constatée sur des atomes de Césium, avec Ω_R la fréquence de Rabi par faisceau et δ_L le désaccord des faisceaux pièges, en MHz.

Ces limitations sont rédhibitoires pour charger efficacement un piège magnétique avec un taux de collision élastique élevé. Aussi, nous utilisons une phase de compression (« DarkSPOT », pour Dark SPontaneous force Optical Trap). Cette technique, mise au point par le groupe du MIT sur un PMO de Sodium [117], ménage une zone sans repompeur au centre du PMO : les atomes y sont pompés dans un état noir, et la diffusion de lumière est supprimée. Autour de cette zone, le PMO agit à plein et continue de refroidir les atomes qui diffusent hors de la région centrale. Dans notre expérience, cette technique est implémentée en imageant un cache (de diamètre 2 mm environ) sur le centre du piège à l'aide des quatre faisceaux repompeurs situé dans le plan horizontal (« repompeur latéral »). Les deux autres faisceaux repompeurs (« repompeur vertical ») sont superposés aux faisceaux verticaux. Ils ne sont pas masqués, car ils sont utilisés pour améliorer le chargement du PMO, et coupés avant la phase de compression. Pour le Rubidium, cette technique de compression est moins efficace que pour le Sodium [117] : les niveaux hyperfins dans l'état excité sont plus écartés et la probabilité de dépompage est plus faible. Aussi, on ajoute finalement pendant un temps court (20 ms) un faisceau de diamètre adapté à la zone sombre (dérivé du laser ralentisseur) qui dépompe les atomes vers $F = 1$ (« Ultra-Dark SPOT »). Cette phase est en fait très efficace pour augmenter la densité : on gagne typiquement un ordre de grandeur, pour atteindre environ 10^{11} at/cm³.

A la fin de la compression, la température est encore trop élevée (plusieurs centaines de μ K) pour charger (et comprimer) efficacement le piège magnétique. Aussi, on a recours à une phase de refroidissement par mélasse sub-Doppler en coupant le champ magnétique du PMO et en désaccordant le laser piège par plusieurs largeurs naturelles. Le nuage n'est plus piégé et il s'étale significativement pendant la durée typique (6 ms) de la phase de mélasse. Pour optimiser le refroidissement obtenu contre la perte en densité (voir Figure 2.3), cette durée est ajustée en maximisant la densité optique d'un piège magnétique, comme nous le verrons plus en détails par la suite.

2.3 Le piège magnétique

2.3.1 Piégeage magnétique d'atomes neutres

L'étape suivante vers la condensation consiste à charger le nuage refroidi par laser dans un piège magnétique. Le principe de cette technique de piégeage repose sur l'interaction entre le moment magnétique \mathbf{m} de l'atome et un champ magnétique extérieur \mathbf{B} , donné au premier ordre en champ par

$$E_{\text{mag}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.3)$$

Les équations de Maxwell interdisant un maximum de champ magnétique dans le vide, on doit avoir $g_F m_F > 0$ pour pouvoir piéger les atomes dans l'état $|F, m_F\rangle$ autour d'un minimum du champ. Pour le Rubidium 87, seuls les atomes dans les états $|F = 2, m_F = +2, +1\rangle$ ($g_F = 1/2$) et $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ($g_F = -1/2$) peuvent l'être. Dans notre expérience, nous avons choisi l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ pour des raisons exposées dans [118, 119, 38, 39], liées à l'influence néfaste de la partie quadratique en champ du potentiel sur l'évaporation, que nous ne détaillons pas ici.

Un atome en mouvement dans le potentiel (2.4) subit également l'effet de termes non-adiabatiques qui peuvent provoquer des changements de niveau hyperfins [113, 120]. Autour d'un zéro de champ, ces transitions (dites de Majorana) deviennent très probables et elles tuent le refroidissement évaporatif. Une solution populaire pour les éviter consiste à utiliser un « piège de Ioffe-Pritchard », une configuration de piégeage pour lequel le champ ne s'annule jamais. Dans ce cas, et pour les vitesses typiques des atomes pré-refroidis par laser, les probabilités de transition non-adiabatique sont très faibles : le long de la trajectoire, le moment magnétique de l'atome précède autour du champ magnétique local sans jamais basculer. Dans cette limite, le potentiel d'interaction avec le champ magnétique de piégeage est purement scalaire. Les champs magnétiques typiques que nous utilisons sont suffisamment faibles pour pouvoir être traités en perturbation, si bien qu'on obtient au second ordre en champ [39] :

$$E_{F,m_F}(\mathbf{r}) = g_F m_F \mu_B |B_{\text{ext}}(\mathbf{r})| + (-1)^F a_m \frac{\mu_B^2 |B_{\text{ext}}(\mathbf{r})|^2}{\mathcal{A}_{\text{hf}}}, \quad (2.4)$$

avec $a_m = 1 - m_F^2/4$, et l'écart hyperfin $\mathcal{A}_{\text{hf}} \approx 6.834$ GHz.

2.3.2 Le piège de Ioffe-Pritchard

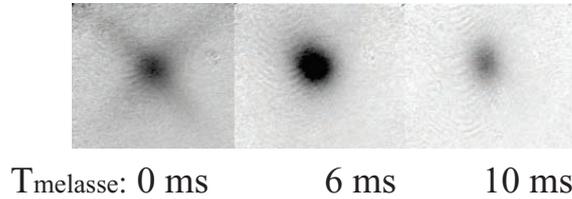


FIG. 2.3 – Influence de la phase de mélasse sur le chargement du piège magnétique. On a indiqué la durée de la mélasse. Les images d'absorption sont prises 25 ms après le chargement du piège magnétique, en incluant 5 ms de temps de vol.

La géométrie de type Ioffe-Pritchard possède une symétrie cylindrique. Dans la direction axiale x , à l'ordre le plus bas du développement multipolaire du champ magnétique, le champ est harmonique avec un « biais » magnétique B_0 (terme uniforme) et une courbure C_x . Dans le plan radial (y, z), le premier terme non nul dans le développement multipolaire est linéaire, avec un gradient b' . En imposant que la divergence de B_{ext} soit nulle, on trouve la forme complète [113, 121], dont on peut déduire le module du champ. Sans entrer dans les détails, nous notons qu'à température élevée, $k_B T \gg \mu_B B_0$, les atomes explorent essentiellement une zone dite « semi-linéaire », dans laquelle le mouvement axial est quasi-harmonique, alors que le mouvement radial se produit dans un potentiel pratiquement linéaire. Par contre, à basse température, $k_B T \ll \mu_B B_0$, dans la région occupée par les atomes, le potentiel est quasiment harmonique dans les trois directions de l'espace :

$$V_{\text{ext}} = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_{\perp}^2 y^2 + \omega_{\perp}^2 z^2), \quad (2.5)$$

avec les fréquences de piégeage⁴ :

$$\omega_{\perp} \approx \sqrt{\frac{\mu_B b'^2}{MB_0}} \quad \text{et} \quad \omega_x = \sqrt{\frac{\mu_B C_x}{M}}. \quad (2.6)$$

Le potentiel est typiquement assez anisotrope, avec $\omega_{\perp} \gg \omega_x$. Un point important est que la fréquence radiale augmente quand le biais magnétique B_0 diminue. En pratique, on adopte donc la stratégie de compression suivante. On charge le nuage refroidi par laser dans un piège magnétique sphérique et faiblement confinant, pour adapter la taille initiale du nuage refroidi par laser à la taille à l'équilibre dans le piège magnétique, à la même température. Puis le biais est fortement diminué, augmentant le confinement radial, la densité et donc le taux de collisions. Cette compression, si elle est faite suffisamment lentement, est adiabatique d'un point de vue thermodynamique et préserve la densité dans l'espace des phases. Ceci implique que la température augmente également pendant cette phase ($D \sim n/T^3$), et impose de démarrer avec un nuage le plus froid possible. Le rôle crucial de la phase de mélasse optique dans l'expérience est illustré sur la figure 2.3, où on voit clairement des directions de fuite (en projection à 45 degrés des axes principaux du piège) dans le cas où on omet la phase de mélasse. Ces directions correspondent à un point-col du potentiel [48, 113], où le champ axial annule le confinement radial. C'est la position de ce point-col qui détermine la profondeur du piège magnétique non comprimé. Si des atomes sont suffisamment rapides pour l'atteindre au cours de leurs trajectoires, comme cela se produit sur la figure 2.3, ils échappent au confinement le long de la direction de fuite et sont perdus. Avec un mélasse de 6 ms, on voit que le chargement est bien plus efficace, alors qu'après 10 ms, il se dégrade. En effet, dans ce cas, la mélasse s'est trop étalée spatialement, et on a dépassé l'optimum. Avant de détailler l'implémentation de la compression dans notre expérience, nous présentons rapidement les électro-aimants à noyaux ferromagnétiques utilisés pour générer le potentiel de Ioffe-Pritchard.

2.3.3 Deux générations d'électro-aimants

Une tradition de piégeage basée sur cette technologie s'est installée dans notre groupe, en collaboration étroite avec M. Lécivain, du LeSIR de Cachan. L'idée de base est qu'avec des pièges magnétiques « classiques » produits par des bobines conductrices, l'éloignement des atomes du centre des bobines se traduit par une perte de confinement, car des lignes de flux s'échappent alors dans l'espace libre. Au contraire, pour l'électro-aimant dessiné sur la Figure 2.4, des bobines traditionnelles induisent un champ dans une culasse ferromagnétique, plutôt que dans l'espace libre. A cause de la très grande perméabilité magnétique du matériau⁵, les lignes de champ restent pratiquement parallèles dans l'entrefer et tout le flux arrive

⁴Ces expressions sont valables au premier ordre en champ. Pour l'électro-aimant de seconde génération utilisé dans les expériences sur le laser à atomes (décrites dans le chapitre IV), des corrections dues aux termes quadratiques et au déplacement du piège par la gravité doivent être prises en compte si on cherche une précision de 1 %. Pour l'électro-aimant de troisième génération, ces deux corrections sont négligeables.

⁵Nous utilisons du fer doux en lamelles, pressé et aggloméré avant usinage (de perméabilité magnétique relative $\mu_r \sim 10^4$). Pour les électroaimants utilisés dans ce travail, les étapes de fabrication et un grande partie de la conception ont été prises en charge par M. Lécivain. Pour l'électroaimant de troisième génération, la phase de test a été initiée par V. Boyer et finalisée par J. Thywissen et S. Richard.

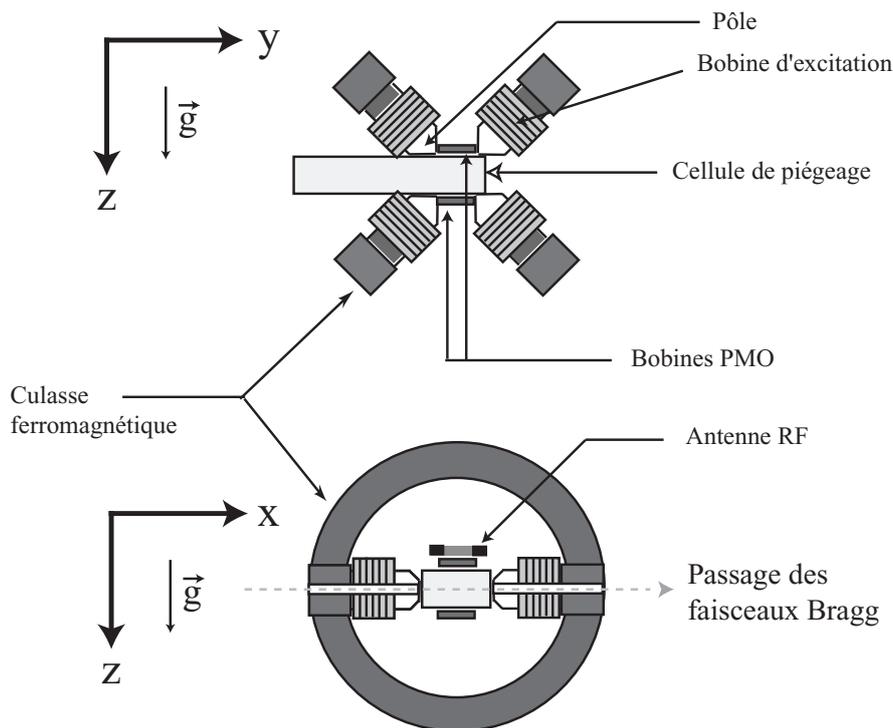


FIG. 2.4 – Schéma en coupe de l'électro-aimant de troisième génération utilisé pour piéger magnétiquement les atomes.

sur les atomes. On obtient alors des confinements élevés, avec des gradients supérieurs à 1 kG/cm, pour un courant modeste d'environ 30 A. Nous avons utilisé successivement deux électro-aimants au cours de ce travail de thèse :

- l'électro-aimant de deuxième génération a permis les expériences sur le laser à atomes. Son inconvénient majeur était l'impossibilité de travailler à un champ inférieur à 56 G environ. Aussi, malgré le gradient élevé ($b' \sim 1.4$ kG/cm), le confinement obtenu était relativement faible, avec une fréquence d'oscillation typique de 140 Hz dans la direction radiale.
- pour améliorer le confinement, un troisième aimant a été conçu, avec la possibilité de diminuer le biais à quelques Gauss en compensant le champ sur l'axe long [39, 47]. On a pu obtenir dans cette configuration des fréquences transverses élevées, comprises entre 400 et 1000 Hz. La courbure axiale est cependant assez faible (100 G/cm², ce qui correspond à des fréquences d'oscillation de 5-10 Hz). Le nuage est donc extrêmement anisotrope (en forme d'« aiguille »), ce qui nous a permis d'explorer la physique des gaz uni-dimensionnels.

Un avantage de taille de ce type de pièges est la faible consommation électrique, qui permet un refroidissement à eau sans nécessiter de haute pression. Les inconvénients sont essentiellement au nombre de deux. Tout d'abord, l'accès optique est limité par l'encombrement important autour de l'électro-aimant. Ensuite, l'utilisation de matériaux ferromagnétiques entraîne nécessairement l'existence de champs rémanents, à cause de l'effet bien connu d'hys-

Chapitre	Electro-aimant	ω_{\perp}	ω_x	ω_{\perp}/ω_x
II, III	3ème génération	$2\pi \times 413$ Hz	$2\pi \times 8,7$ Hz	48
IV	2ème génération	$2\pi \times 144$ Hz	$2\pi \times 9$ Hz	16
VI	3ème génération	$2\pi \times 760$ Hz	$2\pi \times 5$ Hz	152

TAB. 2.1 – Les différentes configurations du piège magnétique utilisées au cours de cette thèse.

térésis magnétique.

Champs rémanents : Lorsqu'on coupe les bobines excitatrices, le champ dans l'entrefer ne revient pas à une valeur nulle. C'est un inconvénient de taille pour le refroidissement laser. D'une part, le champ rémanent peut être suffisamment fort pour annuler l'effet des bobines du piège magnéto-optique, et d'autre part, il perturbe considérablement le pompage optique et détériore le refroidissement sub-Doppler. Pour remédier à ce problème, deux paires de bobines de compensation sont installées sur chaque axe de l'électro-aimant : la première (en configuration Helmholtz) compense les composantes paires du champ rémanent (essentiellement les champs uniformes et les courbures), et la seconde (en configuration anti-Helmholtz) compense les composantes impaires (essentiellement les gradients). Les valeurs des champs sont réglées grossièrement en recentrant le piège magnéto-optique, puis finement en regardant sur un écran vidéo l'explosion du nuage durant la phase de mélasse. La composante constante est la plus facile à régler : en effet, elle introduit un déséquilibre dans les forces de pression de radiation, si bien qu'en éliminant le mouvement du centre de masse du nuage on peut compenser les champs constants (à mieux que 0,1 G d'après nos estimations). Si le champ à compenser respecte la géométrie du piège, les courbures sont alors automatiquement compensées si le biais l'est. Par contre, il est plus délicat de régler les gradients puisqu'ils influent principalement sur l'isotropie et la vitesse d'expansion de la mélasse. Bien que cette procédure soit pénible à mener à bien en partant de zéro, les valeurs des compensations sont assez stables vis à vis du cycle magnétique, même si elles nécessitent des ajustements mineurs sur une échelle de temps de quinze jours environ.

D'une manière générale, les caractéristiques du piège données dans ce mémoire (en particulier dans la suite de ce chapitre) correspondent à l'électro-aimant de troisième génération, utilisé pour les expériences clés de ce travail. Nous résumons les différentes configurations de piégeage, qui diffèrent selon les expériences, sur la table 2.1. Les détails sur l'électroaimant de seconde génération ne seront pas fournis, car il est décrit de manière détaillée dans les thèses de B. Desruelle, V. Boyer et G. Delannoy [38, 39, 48] : nous citerons simplement les paramètres importants au chapitre 4. Enfin, nous signalons que de plus amples développements sur l'électro-aimant de troisième génération sont donnés dans la thèse de S. Richard [47].

Calibration des fréquences de piégeage : Nous mesurons la fréquence d'oscillation radiale par une méthode standard de chauffage paramétrique. En modulant le potentiel de piégeage à deux fois ω_{\perp} , on excite un mode de respiration transverse du nuage thermique. En s'amortissant, il transfère de l'énergie aux atomes. Cette résonance peut donc être détectée en

examinant la température du nuage en fonction de la fréquence de modulation. Nous avons répété cette expérience pour plusieurs configurations différentes, en mesurant simultanément B_0 d'après la valeur de la radio-fréquence $\nu_0 \approx h\nu_0/2\mu_B$ qui vide le piège. D'après (2.6), on en déduit un gradient de

$$b' \approx 1.46(1) \text{ kG/cm} \Rightarrow \frac{\omega_{\perp}}{2\pi} [\text{Hz}] = 752.12 \frac{b' [\text{kG/cm}]}{\sqrt{\nu_0 [\text{MHz}]} } \approx \frac{1106 \text{ Hz}}{\sqrt{\nu_0 [\text{MHz}]} }. \quad (2.7)$$

Cette valeur pour le gradient est en excellent accord avec une mesure indépendante (statique) effectuée grâce à une sonde Hall par S. Richard et J. Thywissen.

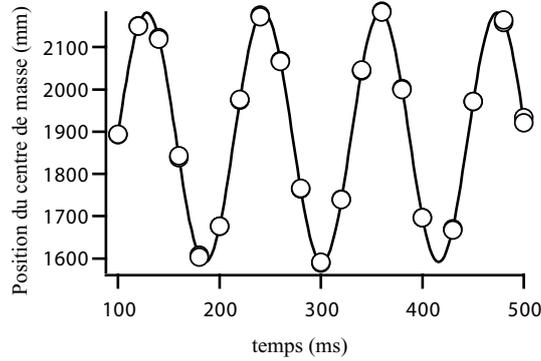


FIG. 2.5 – Oscillation du centre de masse du condensat selon l'axe long. L'ajustement par une courbe sinusoïdale donne une fréquence de 8.69 Hz.

Pour mesurer la fréquence axiale, le chauffage paramétrique est inefficace car le taux de chauffage est alors très lent. Par conséquent, nous avons eu recours à une méthode alternative qui consiste à appliquer un gradient magnétique sur le condensat pour exciter le mode d'oscillation du centre de masse, qui oscille à la fréquence propre axiale du piège. La figure 2.5 donne un exemple d'une telle oscillation, et un ajustement sinusoïdal donne une fréquence de $\omega_x/2\pi = 8.69$ Hz dans ce cas particulier. Notons que le taux d'amortissement est négligeable sur quatre périodes, ce qui indique que le potentiel est harmonique à une bonne approximation.

2.4 L'évaporation

2.4.1 Compression et stratégie d'évaporation dans un piège anisotrope

Lors du chargement du piège magnétique, celui-ci est choisi quasiment sphérique, avec une fréquence de 15 Hz environ, pour adapter son volume de piégeage à l'extension spatiale du nuage d'atomes refroidi par laser. Ensuite, débute une phase de compression, où le gradient transverse est amené à sa valeur maximale en 2 s, tandis que le biais est abaissé d'une valeur

initiale de 200 G environ à 56 G. Après cette première phase de compression, la température du nuage d'atomes a significativement augmentée. Dans le cas de l'électro-aimant de troisième génération, une deuxième phase de compression (2 s également) est nécessaire pour amener le biais à quelque Gauss. Cependant, la courbure suivant x diminue aussi pendant cette opération, si bien qu'on obtient finalement un piège très anisotrope. Comme le piège est lâche dans la direction x et que la température a augmenté significativement, la longueur du nuage est alors de l'ordre de la taille de la cellule en verre (environ 8 mm), et on perd des atomes par collisions contre les parois. Pour éviter cet effet, on doit démarrer l'évaporation pendant la seconde compression pour garder une température suffisamment basse, et limiter l'extension du nuage selon x .

2.4.2 Dynamique du refroidissement

Nous présentons sur la Figure 2.6 un résumé de la trajectoire d'évaporation, démarrant après la compression. On voit qu'on perd environ deux ordres de grandeur sur le nombre d'atomes, mais qu'on en gagne trois sur la température. L'augmentation de la densité dans l'espace des phases accélère en fin d'évaporation, en approchant l'unité : c'est la signature d'une rampe efficace. La rampe consiste en cinq tronçons linéaires, de quelques secondes chacun. Leur durées respectives ont été optimisées expérimentalement, les valeurs initiales et finales étant fixées par le fonctionnement du synthétiseur Anritsu utilisé pour générer la radio-fréquence. En effet, celui-ci présente un comportement transitoire erratique lorsque la rampe radio-fréquence croise une puissance de 2 (MHz), qui correspond à la commutation vers un oscillateur interne différent. Nous avons donc fixé le début et la fin de chaque tronçon de rampe à une telle valeur, et varié uniquement la durée. Une attention particulière doit être prise pour éviter la présence de lumière parasite qui détruit pratiquement à coup sûr le nuage. Notons que la rampe utilisée correspond à une profondeur réduite $\eta = h\nu_{\text{rf}}/k_{\text{B}}T \approx 6$, à peu près constante pendant l'évaporation, sauf sur la dernière partie durant laquelle le condensat apparaît. En effet, dans un piège très anisotrope, la dernière partie de la rampe doit être considérablement ralentie, car les temps de mise à l'équilibre deviennent alors beaucoup plus longs : avec une rampe trop rapide on provoque des oscillations du condensat [95], un phénomène que nous allons regarder de plus près.

2.4.3 Condensation hors-équilibre dans un piège anisotrope

Pour comprendre pourquoi les temps de relaxation du système imposent un ralentissement considérable de l'évaporation si on souhaite rester raisonnablement proche de l'équilibre, supposons qu'on refroidisse brutalement le nuage (« troncature » en énergie) par un couteau radio-fréquence abaissé rapidement devant le temps de thermalisation. Une troncature de ce type provoque un flux de particules vers les « basses énergies » au cours de la rethermalisation. En présence du potentiel de piégeage, cela se traduit un flux de particules initialement dirigé vers le centre du piège, qui évolue ensuite en oscillation dans le potentiel de piégeage, amortie plus ou moins rapidement par le processus de thermalisation.

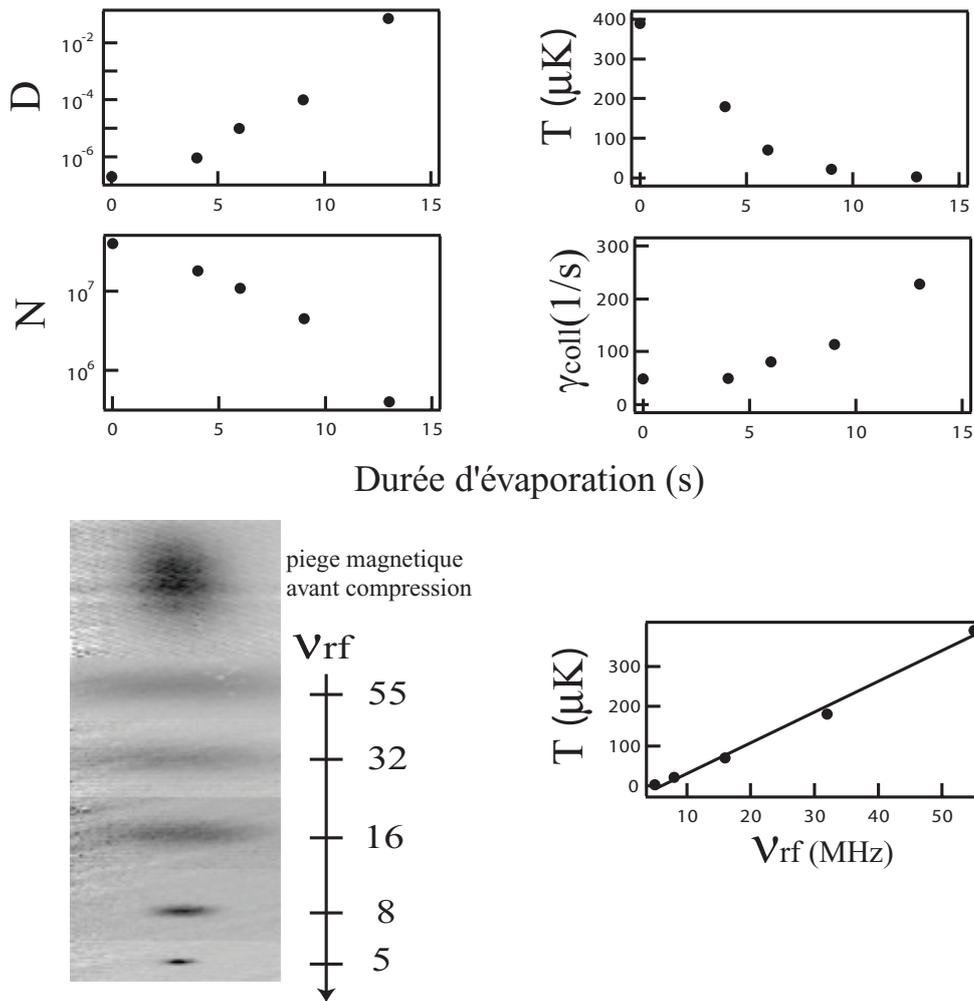


FIG. 2.6 – Le refroidissement évaporatif à l’oeuvre dans notre expérience. On a indiqué l’évolution de la densité dans l’espace des phases D , du nombre d’atomes N , de la température T et du taux de collisions élastiques γ_{coll} en fonction du temps d’évaporation. De plus, la courbe de température en fonction de la fréquence du couteau radio-fréquence indique une profondeur $\eta = h\nu_{\text{rf}}/k_{\text{B}}T$ constante et égale approximativement à 6.

A cause du rapport d’aspect élevé de notre piège, des constantes de temps très différentes caractérisent la relaxation d’un mouvement radial par rapport à un mouvement axial. En effet, près de la température de transition, le libre parcours moyen est typiquement grand devant la taille radiale du nuage, alors qu’il est petit devant sa taille axiale. Un mouvement à trois dimensions est donc essentiellement balistique (« collisionless » en anglais), une particule exécutant plusieurs oscillations radiales avant de subir une collision. Par contre, un mouvement purement axial s’effectue dans le régime hydrodynamique, où l’oscillation elle-même est entretenue par les collisions, qui établissent quasi-instantanément un équilibre local. Ce régime est caractérisé par des taux d’amortissement faibles [56, 122]. Si on franchit le seuil de condensation au cours du refroidissement, la densité augmente brutalement quand

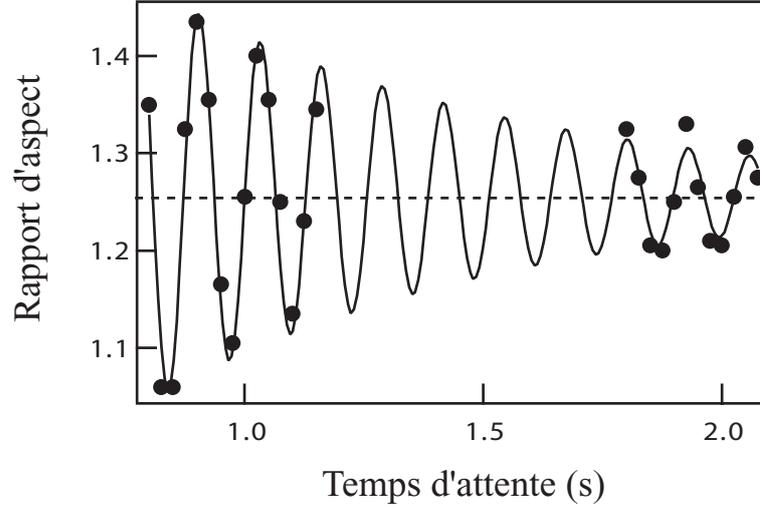


FIG. 2.7 – Oscillations du quasi-condensat hors d'équilibre, provoquées par une rampe de condensation brutale. Pour s'affranchir des fluctuations du nombre d'atomes condensés, on a tracé le rapport d'aspect plutôt que la longueur. En effet, dans le régime de Thomas-Fermi, le rayon R et la longueur L ont la même dépendance avec N_0 . Un ajustement par une sinusoïde amortie donne la fréquence de l'oscillation, $\omega_Q = 7,79(3)$ Hz, proche de la valeur attendue (7.75 Hz), et un temps d'amortissement $\tau = 760(110)$ ms. Le trait en pointillés donne le rapport d'aspect attendu dans le régime de Thomas-Fermi, après 24.27 ms de temps de vol et des fréquences $\omega_{\perp} = 2\pi \times 760$ Hz et $\omega_x = 2\pi \times 5$ Hz.

on forme le condensat et on entre profondément dans le régime hydrodynamique⁶. On se trouve donc dans une situation hors d'équilibre où en chaque point de l'axe x , le gaz revient quasi-instantanément à l'équilibre local dans le plan transverse, les excitations 3D étant rapidement amorties, alors que le mouvement d'oscillation selon x persiste sur des temps beaucoup plus longs. De manière équivalente, on a créé une population élevée dans le mode de compression axial⁷. On se convainc facilement que cet effet est déclenché par la rampe radio-fréquence, très bien contrôlée, ce qui explique la bonne reproductibilité de l'instant de déclenchement, et donc de la phase de l'oscillation.

On observe donc des oscillations de la longueur du condensat consécutives au refroidissement brutal (voir la figure 2.7), un effet observé et expliqué pour la première fois dans le groupe de J. Walraven à Amsterdam [95]. La fréquence mesurée pour l'exemple de la figure 2.7 est en bon accord avec la valeur $\omega_Q = \sqrt{5/2} \omega_x$ prédite pour le mode de compression dans le régime de Thomas-Fermi. Le taux d'amortissement de ce mode dans le régime

⁶Les valeurs typiques autour de T_C correspondent à un libre parcours moyen $l \sim 20 \mu\text{m}$, pour une taille axiale $L_{\text{th}} \sim 180 \mu\text{m}$.

⁷Le mode de plus basse énergie d'oscillation du centre de masse ne peut pas être excité par une troncature brutale en énergie, qui ne se couple qu'aux modes pairs par raison de symétrie.

hydrodynamique a été calculé par P. Fedichev et G. Shlyapnikov [123] :

$$\frac{\Gamma_{\text{hydro}}}{\omega_Q} \approx 12 \frac{\hbar\omega_x}{\mu} \ln(n_{0m}\lambda_T^3). \quad (2.8)$$

Pour les paramètres mesurés on trouve un temps d'amortissement $\tau \approx 830$ ms, en bon accord avec la valeur mesurée $\tau = 760(110)$ ms.

La rampe habituelle est beaucoup moins rapide que celle utilisée pour obtenir les oscillations de la figure 2.7, et considérablement ralentie par rapport au début de l'évaporation (vitesse de rampe $\dot{\eta}/\eta \sim 500$ kHz/s). Le seuil d'évaporation η augmente sur la fin de la rampe, pour atteindre $\eta \sim 10 - 12$ (voir la figure 2.8). Bien que l'amplitude des oscillations soit alors nettement réduite, ce phénomène reste généralement nuisible (en particulier dans l'expérience de spectroscopie de Bragg, comme nous le verrons au chapitre VI). En pratique, pour se rapprocher de la situation d'équilibre, on ajoute un temps de relaxation de 1 à 7 s après la fin de la rampe. La durée de relaxation est déterminé empiriquement, dans chaque configuration de piégeage particulière, pour que le rapport d'aspect du condensat atteigne une valeur stationnaire. Pendant cette période, le couteau radio-fréquence est maintenu à sa valeur finale [63, 124]. Ce « bouclier » radio-fréquence élimine les atomes très chauds, mais encore piégés, qui provoqueraient s'ils restaient présents un chauffage important du nuage ultra-froid par collisions multiples.

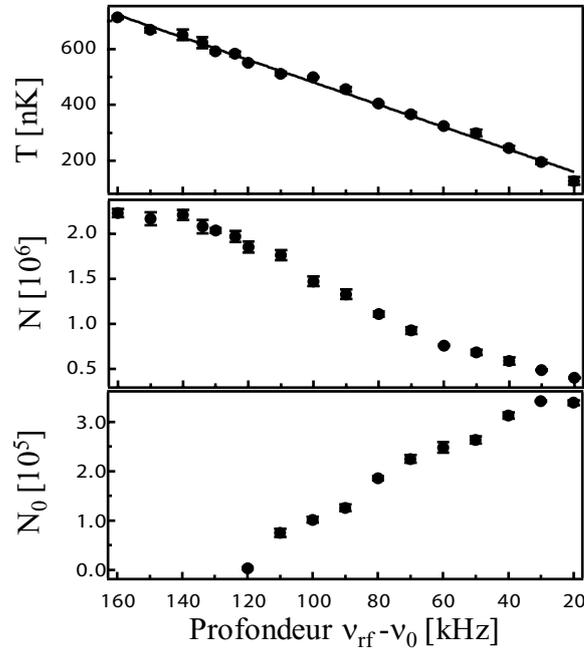


FIG. 2.8 – Évaporation en fin de rampe. On a reporté la température, le nombre total et le nombre condensé en fonction de la profondeur du piège, contrôlée par la fréquence du couteau d'évaporation. Dans cette dernière partie, l'évaporation est ralentie par rapport au reste de la rampe. On a par exemple $\eta = h\nu_{\text{rf}}/k_B T \approx 11.9(5)$ d'après l'évolution de T .

2.4.4 Contrôle de la stabilité de la rampe

Pour la plupart de nos mesures, il est essentiel d'assurer une bonne reproductibilité de l'expérience au niveau de la température et du nombre d'atomes. Un obstacle particulièrement pénible, si on ne le combat pas activement, vient des fluctuations de la fréquence finale de la rampe d'évaporation, d'une expérience sur l'autre. Nous verrons au chapitre IV que ce problème se révèle encore plus crucial pour l'extraction du laser à atomes. Heureusement, l'électro-aimant de troisième génération utilisé pour ce travail est intrinsèquement assez stable⁸. La procédure suivie expérimentalement pour contrer les dérives résiduelles est la suivante. Toutes les cinq images (typiquement), on repère la fréquence ν_0 qui vide le piège magnétique. Comme nous le discutons en détails dans le chapitre IV, elle correspond au fonds du potentiel piégeant. Cette fréquence est bien définie à ± 2 kHz environ, qui est la demie-largeur de la zone sur laquelle on vide le condensat (et qui correspond *grosso modo* au potentiel chimique). La fréquence ν_0 fournit un repère par rapport auquel les dérives de la fin de la rampe peuvent être repérées, et finalement corrigées en translatant en bloc la dernière partie de la rampe rf (voir la figure 2.9). De cette manière, on compense les fluctuations tout en préservant les conditions d'évaporation.

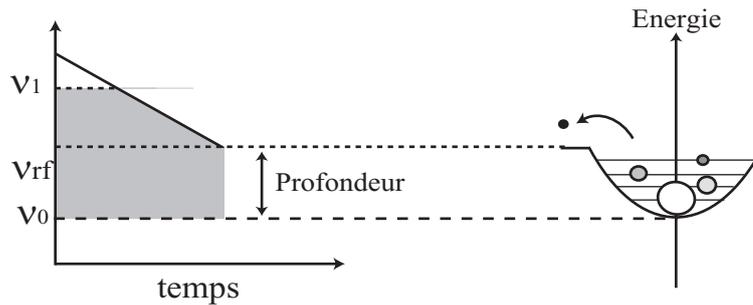


FIG. 2.9 – Contrôle de la stabilité de l'évaporation. Pour contrer les fluctuations du biais magnétique d'une expérience sur l'autre, on mesure régulièrement la valeur ν_0 de la radiofréquence qui vide le piège. Les variations éventuelles sont répercutées sur la fréquence ν_1 , en gardant la dernière partie de la rampe constante.

2.5 Imagerie et caractérisation du nuage ultrafroid

2.5.1 Imagerie par absorption

Une des forces des expériences de condensation de Bose-Einstein est la possibilité d'imager directement la densité du nuage, à travers l'absorption d'un faisceau sonde résonant. D'après

⁸Il bénéficie en particulier d'un refroidissement à eau, qui lui assure une assez bonne stabilité en température.

la loi de Beer-Lambert, l'intensité I_T de la lumière transmise par le nuage peut s'écrire, dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation z de la sonde (le vecteur 2D ρ repère un point de ce plan) comme

$$I_T(\rho) = I_0(\rho) \exp \left(- \int dz n(\mathbf{r}) \sigma_{\text{abs}} [\delta_S, I_0(\rho)] \right). \quad (2.9)$$

L'efficacité d'absorption est donnée par le produit de la section efficace d'absorption σ_{abs} , qui dépend du désaccord de la sonde par rapport à la résonance δ_S et de l'intensité incidente $I_0(\rho)$, par la densité du nuage $n(\mathbf{r})$, le tout intégré sur la direction y de propagation de la sonde, pratiquement parallèle à la verticale. Pour un atome à deux niveaux, la section efficace d'absorption est donnée par

$$\sigma_{\text{abs}}(\delta_S, I_0) = \frac{\sigma_0}{1 + \left(\frac{2\delta_S}{\Gamma} \right)^2 + \left(\frac{2I_0}{I_{\text{sat}}} \right)}, \quad (2.10)$$

avec $\sigma_0 = 3\lambda_L^2/2\pi$ la section efficace à résonance. Pour $I \ll I_{\text{sat}}$, on s'attend donc à une résonance de forme Lorentzienne et de largeur 6 MHz. Expérimentalement, la figure 2.10 montre qu'on observe plutôt une largeur de 8 MHz, qui peut être due à la largeur finie de la sonde, estimée à 1 MHz environ, et à la présence d'un petit champ magnétique (inférieur à 1 G) à l'endroit où on prend l'image. L'enveloppe du profil de la sonde est gaussienne (avec

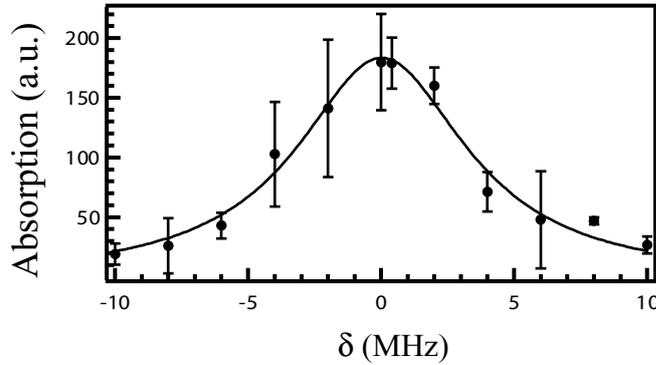


FIG. 2.10 – Absorption d'un faisceau résonant par le nuage. Le fit Lorentzien donne une largeur à mi-hauteur de 8.0(1.8) MHz, légèrement élargie par rapport à la largeur naturelle de 6 MHz.

un rayon à $1/e^2$ de 2.5 mm dans notre cas), si bien que l'absorption dépend a priori de la position. Pour obtenir une image la plus fiable possible de la densité atomique, il faut donc utiliser une intensité faible devant l'intensité de saturation $I_{\text{sat}} \approx 1.68 \text{ mW/cm}^2$ pour la raie D2 du Rubidium⁹. Typiquement, nous utilisons une puissance totale de 20 – 40 μW , ce qui correspond à $I_0(\mathbf{0}) \approx 0.12 - 0.24 I_{\text{sat}}$ ¹⁰. En plus de l'enveloppe gaussienne, le profil d'intensité de la sonde présente des variations contrastées, notamment dues à des interférences avec de la

⁹Nous expliquons plus loin qu'il est inutile de désaccorder [113].

¹⁰Cette valeur doit être corrigé d'un facteur correctif lié à la polarisation discuté plus loin, qui la diminue d'un facteur 4.

lumière diffusée sur des impuretés de la cellule. En effet, celle-ci n'est pompée que d'un côté, et elle est couverte d'une couche de Rubidium adsorbé. Nous avons essayé de réduire cette couche en utilisant de la lumière ultra-violette¹¹, sans beaucoup de succès à ce jour. Nous nous contentons donc de réduire les imperfections du profil au maximum en positionnant la sonde au mieux, et en nettoyant soigneusement les optiques. La plupart des imperfections sont néanmoins corrigées *a posteriori* grâce à une procédure de normalisation des images (voir [113] et l'appendice B). Pour cela, on prend également une image séparée de la sonde, sans atomes, et on effectue la division numérique de l'image d'absorption par cette image témoin pour obtenir le signal

$$S = \exp\left(-EO(\rho)\right) \quad \text{avec} \quad EO(\rho) = \frac{\sigma_0}{1 + \left(\frac{2\delta_S}{\Gamma}\right)^2} \int dz n(\mathbf{r}). \quad (2.11)$$

Si l'épaisseur optique EO est trop élevée, le signal d'absorption se perd dans le bruit (exponentiellement vite), et l'image ne reproduira pas avec fidélité la densité en colonne $\tilde{n} = \int dz n(\mathbf{r})$. Pour un condensat piégé, où $EO \sim 300$, c'est un problème crucial. On peut penser à diminuer le désaccord de la sonde pour y remédier, mais l'indice de réfraction (nul à résonance) devient alors très élevé et défléchit significativement les rayons lumineux (effet de lentille). Pour éviter ce problème, on se place à résonance, mais après un temps de vol assez long : le nuage s'étale sous l'effet de son énergie cinétique initiale (pour un nuage thermique) ou de sa propre pression (pour un condensat) et la densité chute. On attend pendant un temps de vol suffisant pour que $EO \sim 1$.

2.5.2 Montage optique

Le montage optique construit par Y. Le Coq et A. Robert [125] que nous utilisons pour transporter l'image du nuage ultra-froid jusqu'à la caméra CCD est schématisé sur la figure 2.11. Il est constitué d'une paire de lentilles (type Clairault-Mossotti), corrigées des aberrations sphériques, de la coma et de l'astigmatisme, de focale 15 mm et de rayon 10 mm, qui conjuguent l'objet (le nuage atomique) sur un objectif de microscope. Ce dernier permet d'agrandir l'image obtenue sur une caméra CCD d'un facteur $\times 1.8$ pour les nuages très froids. Le choix d'une caméra de bonne qualité s'est avéré déterminant pour améliorer la qualité des images. Pour remplacer la caméra vidéo utilisée au début de cette thèse, nous avons implémenté une caméra numérique PixelFly (modèle VCA-Scientific), fabriquée par la compagnie allemande PCO et distribuée par Photon Lines. La puce CCD elle-même comporte 1024×1280 pixels de $6,7 \mu\text{m}$ de côté, avec un faible bruit intrinsèque. Pour diminuer la taille des images, les pixels sont généralement regroupés deux-par-deux, ce qui donne une taille de pixel effective dans le plan objet de $5,7 \mu\text{m}$ environ, une taille comparable mais un peu supérieure à la résolution percussionnelle de $3,5 \mu\text{m}$ [125]. La calibration du grandissement effectif du système d'imagerie dans son ensemble est faite en imageant un réseau de pas connu sur chacune des faces de la cellule. La différence de grandissement entre les deux faces est de l'ordre de 1 %, et constitue la principale erreur systématique de mesure des tailles, dans la mesure où elle semble dépendre de la position exacte de la mire par rapport

¹¹La longueur d'onde qui correspond à l'énergie d'adsorption du Rubidium sur le verre est autour de 400 nm.

à la cellule. Le convertisseur en image numérique 16 bits se caractérise par un faible bruit de lecture, si bien qu'il n'est pas nécessaire de prendre une troisième image sans lumière pour se débarrasser du bruit électronique : le bruit sur nos images est dominé par les imperfections de la division d'images, mais ne dépasse pas 15 niveaux de gris (sur 1500 à 2000 utiles, environ).

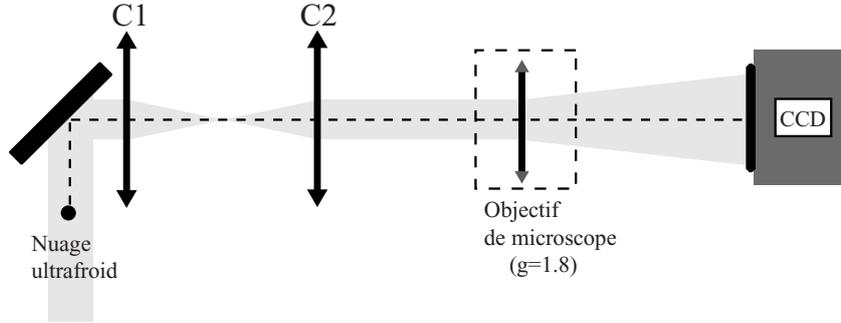


FIG. 2.11 – Schéma du système d'imagerie utilisé pour observer le nuage. Les symboles C1,C2 désignent les doublets utilisés pour le transport d'image, g est le grandissement de l'objectif de microscope couramment utilisé.

Mise au point du système d'imagerie : La mise au point du système d'imagerie est faite sur un condensat de petite taille, en déplaçant en bloc l'objectif de microscope et la caméra tout en maintenant le tirage image (distance entre le plan focal image de l'objectif et la puce CCD) à 160 mm, valeur fixée par construction. Les tailles de l'objet atteignent alors un minimum lorsque le plan focal objet de l'objectif est conjugué avec le système de transport d'image, et elles varient quadratiquement avec le défaut de mise au point. Le résultat de la mesure est reporté sur la figure 2.12, sur laquelle on voit clairement cette dépendance quadratique. On constate également que le minimum coïncide dans les deux directions. Cela signifie que le système est bien corrigé pour l'astigmatisme.

Contraintes pour l'absorption : Typiquement, l'image est prise de manière pulsée, et un certain nombre de contraintes existent entre la durée de cette impulsion T_P et l'intensité I_0 . Premièrement, comme évoqué plus haut, l'intensité doit être petite devant l'intensité de saturation. Deuxièmement, l'interaction des atomes avec l'impulsion sonde ne doit pas perturber le nuage. En moyenne, le flux incident de photons est $I_0/h\nu_L$, et le nombre moyen de photons échangés par atome s'écrit

$$N_{\text{ech}} = \frac{C_N I_0 T_P S_{\text{eff}}}{h\nu} (1 - e^{-EO}) \quad (2.12)$$

avec S_{eff} une « section effective » de l'objet absorbant. Les photons sonde absorbés communiquent une impulsion $N_{\text{ech}} \hbar k_L$ dans la direction z qui peut déplacer la résonance par effet de recul et par effet Doppler. Les photons réémis spontanément induisent une diffusion

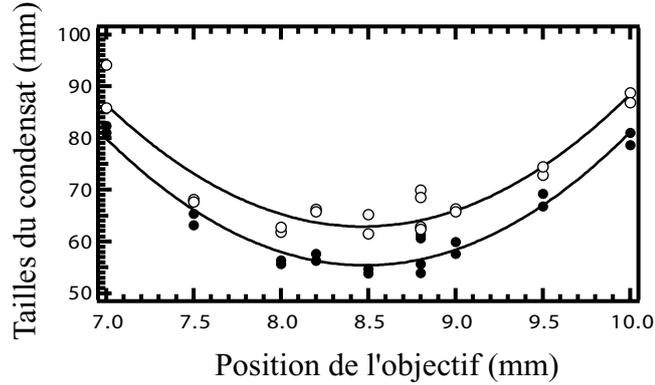


FIG. 2.12 – Mise au point du système d’imagerie. Les cercles pleins et creux correspondent à la longueur et au rayon d’un condensat après 22.3 ms de temps de vol, respectivement.

en impulsion qui se traduit par un chauffage de $N_{\text{ech}}/3T_{\text{rec}}$, avec la température de recul $k_{\text{B}}T_{\text{rec}} = \hbar^2 k_{\text{L}}^2 / 2M$, qui s’accompagne d’une diffusion spatiale que l’on peut majorer par $\Delta r \sim \sqrt{N_{\text{ech}}/3v_{\text{rec}}T_{\text{P}}}$, et qui doit être négligeable devant la taille d’un pixel de la caméra CCD. Avec nos paramètres typiques et un temps de vol de 20 ms environ, on atteint une épaisseur optique de 1. Le pulse sonde durant $34 \mu\text{s}$ ¹², on échange quelques photons par atome ($N_{\text{ech}} \sim 7 \times 10^5/N$) dans ce laps de temps. Cela entraîne un décalage en fréquence, un chauffage et une diffusion spatiale négligeables.

2.5.3 Calibration du nombre d’atomes *via* la taille du condensat

Pour terminer ce paragraphe, nous remettons en question le modèle de l’atome à deux niveaux pour décrire l’absorption du Rubidium. En principe, on doit tenir compte de plusieurs transitions susceptibles d’être excitées. Nous sondons sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$, qui est pratiquement fermée si la polarisation du laser est σ^+ (figure 2.2). Nous n’avons pas réussi à obtenir une polarisation σ^+ pure de la sonde, car nous ne maîtrisons pas suffisamment le champ magnétique local au moment de la prise d’image. A cause du temps de vol, le nuage est alors proche de la face inférieure de la cellule en verre, alors que le champ magnétique n’est bien compensé qu’au centre de la cellule. De plus, nous n’avons pas non plus une liberté totale pour le choix de la direction de propagation de la sonde, à cause de l’encombrement au voisinage de la cellule, si bien que la composante du champ magnétique perpendiculairement à la direction de propagation de la sonde est non-nulle. Il est donc impossible d’avoir une polarisation purement σ^+ , et nous utilisons en fait une polarisation linéaire. La section efficace d’absorption est alors modifiée par un facteur numérique qui dépend des coefficients de Clebsch-Gordan mis en jeu, et l’épaisseur optique à résonance peut s’écrire globalement comme :

$$EO(\rho) = C_{\text{N}}\sigma_0\tilde{n}(\rho) \quad (2.13)$$

¹²Le programme qui gère l’expérience n’est pas suffisamment stable à ce niveau, aussi l’impulsion sonde est générée en déclenchant en externe un générateur d’impulsion carrées.

Nous pouvons heureusement calibrer le facteur C_N en utilisant la dépendance de la taille d'un condensat pur avec le nombre d'atomes¹³. En effet, dans la limite de Thomas-Fermi, les relations

$$\begin{aligned} R(t) &= a_{\perp} \left(\frac{15aa_{\perp}}{a_x^2} \right)^{1/5} b_{\perp}(t) \left(C_N N_{\text{mes}} \right)^{1/5} \\ L(t) &= \frac{a_x^2}{a_{\perp}} \left(\frac{15aa_{\perp}}{a_x^2} \right)^{1/5} b_x(t) \left(C_N N_{\text{mes}} \right)^{1/5} \end{aligned} \quad (2.14)$$

entre les dimensions du nuage et le nombre d'atomes mesuré $N_{\text{mes}} = N_0/C_N$ permet de remonter au facteur de calibration d'une manière indépendante, puisque la longueur de diffusion est connue à 0,1 % [73]. La comparaison de (2.14) aux données de la figure 2.5.3, collectées dans les conditions des expériences décrites au chapitre III, pour un temps de vol de 22.3 ms et sur une large gamme de N_0 , donne un facteur correctif $C_N = 4.00(12)$ dans la direction radiale, et $C_N = 4.06(10)$ dans la direction axiale¹⁴. Nous utilisons le facteur de calibration sur l'axe radial dans la suite, car la longueur du condensat est susceptible d'osciller autour de l'équilibre dans un piège anisotrope (voir la section 2.4.3). La différence entre les deux facteurs de calibration est tout de même prise en compte dans l'incertitude finale sur $C_N = 4.00(18)$. Pour cette calibration, il est bien entendu important de s'assurer que la fraction thermique est bien indiscernable. Sinon, l'ajustement parabolique a tendance à surestimer la taille du condensat après temps de vol en englobant une partie du nuage thermique, et donc à surestimer également le facteur correctif sur N .

2.6 Analyse des images

D'un point de vue pratique, il faut connaître la densité *après temps de vol* pour décrire les images d'absorption. Dans deux cas limites, celui d'un gaz idéal ou celui d'un condensat sans fraction thermique discernable et dans le régime de Thomas-Fermi, des solutions analytiques basées sur des lois d'échelles [76, 77] existent. Malheureusement, à notre connaissance, on ne sait pas résoudre analytiquement le problème du temps de vol pour un nuage mixte en incluant les interactions. On doit se contenter en pratique d'un modèle phénoménologique qui décrit séparément les deux composantes.

2.6.1 Nuage thermique au dessus du seuil

La dynamique d'un gaz thermique est déterminée en général par l'équation d'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases, ou équation de Boltzmann, qui prend la

¹³Nous avons mesuré que ce facteur de calibration ne dépendait pas de l'intensité et du temps de pulse, ainsi que de la durée du pulse repompeur qui précède l'image. Par contre, il dépend de la polarisation du laser, et du champ magnétique local à travers le temps de vol.

¹⁴Cette valeur peut paraître surprenante, dans la mesure où le plus petit coefficient de Clebsch-Gordan pour une transition π est en fait 1/3. Cependant, si on tient compte de l'élargissement de la résonance d'absorption (25 % plus large que la transition naturelle), le plus petit coefficient devient 1/4, avec des valeurs compatibles avec l'incertitude comprises entre 1/3 et 1/5.

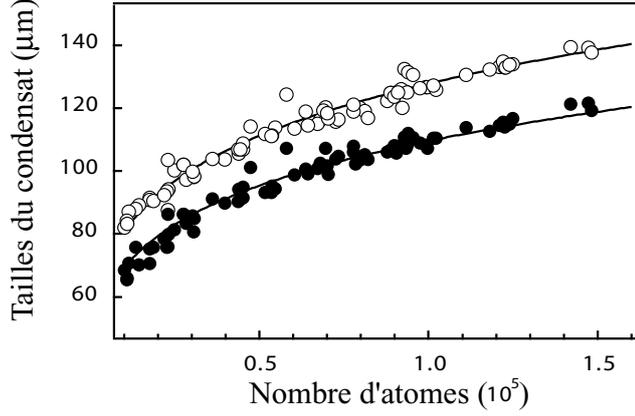


FIG. 2.13 – Calibration du nombre d’atomes. Les cercles creux désignent la dimension radiale et les cercles pleins la dimension axiale, issues d’un ajustement parabolique. Les dimensions du condensat dépendent du nombre d’atomes comme $N_0^{1/5}$ dans la limite de Thomas-Fermi (ajustements en traits pleins). On peut ainsi convertir une mesure absolue des tailles, fiable à quelques %, en mesure absolue du nombre d’atomes. Les facteurs correctifs mesurés d’après chaque axe sont en accord à 1 % près.

forme typique [61]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = I_{\text{coll}}[f]. \quad (2.15)$$

La fonction f évolue sous l’action de trois termes : le terme de vol libre, la force totale $\mathbf{F} = -\nabla 2Un_{\text{th}} - \nabla V_{\text{ext}}$ exercée par le champ moyen et le potentiel extérieur, et l’intégrale de collisions I_{coll} , qui détermine en particulier la relaxation vers l’équilibre.

Pour le problème du temps de vol qui nous intéresse, nous allons supposer momentanément que le potentiel de piégeage V_{ext} est coupé instantanément. Le nuage thermique étant typiquement très dilué, on suppose généralement que les termes de champ moyen et de collisions sont négligeables. La distribution initiale est alors celle d’un gaz idéal, et l’expansion purement balistique : un point initial $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ dans l’espace des phases se retrouve en $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{r}_0 + \mathbf{p}_0 t/M, \mathbf{p}_0)$ après un temps de vol t , et d’après le théorème de Liouville, la densité dans l’espace de phases évolue comme $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t = 0)$. En intégrant sur les impulsions, on trouve la densité spatiale au cours du temps de vol

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}, t) = \frac{n_{\text{th}}(\{ \frac{x_i}{b_i^{\text{th}}} \}_{i=x,y,z}, t = 0)}{\prod_j b_j^{\text{th}}}, \quad (2.16)$$

qui ne diffère de la densité dans le piège

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}, t = 0) = \frac{1}{\lambda_{\text{T}}^3} g_{3/2} \left\{ \exp \left(\frac{\mu}{k_{\text{B}} T} - \beta V_{\text{ext}} \right) \right\}, \quad (2.17)$$

que par des facteurs d’échelles donnés par

$$b_x^{\text{th}}(t) = \sqrt{1 + (\omega_x t)^2} \quad \text{et} \quad b_{\perp}^{\text{th}}(t) = \sqrt{1 + (\omega_{\perp} t)^2}, \quad (2.18)$$

avec la direction axiale x et les directions radiales désignées par \perp . Par intégration suivant z (direction de propagation de la sonde), on obtient la densité en colonne¹⁵, dénotée par le symbole $\tilde{}$,

$$\tilde{n}_{\text{th}}(x, y, t) = \frac{1}{\lambda_{\text{T}}^3} g_2 \left\{ \exp \left(\beta \mu - \frac{x^2}{2L_{\text{th}}^2} - \frac{y^2}{2R_{\text{th}}^2} \right) \right\}, \quad (2.19)$$

On interprète également ces résultats en notant qu'en l'absence d'interactions, la densité après temps de vol reflète la distribution en vitesses. Pour un gaz thermique, celle-ci est isotrope, et l'expansion suivant l'un ou l'autre axe procède avec la même vitesse typique $v_0 = \sqrt{k_{\text{B}}T_0/M}$. Les tailles obéissent donc à $R_{\text{th}}^2(t) = R_{\text{th}}^2(0) + v_0^2 t^2 = (k_{\text{B}}T_0/M\omega_{\perp}^2)(b_{\perp}^{\text{th}})^2$, et une relation similaire dans l'autre direction. Nous définissons pour la suite des températures effectives suivant chaque axe, déduites des tailles après expansion selon

$$k_{\text{B}}T_{\perp} = M\omega_{\perp}^2 \left(\frac{R_{\text{th}}(t)}{b_{\perp}^{\text{th}}} \right)^2, \quad \text{et} \quad k_{\text{B}}T_x = M\omega_x^2 \left(\frac{L_{\text{th}}(t)}{b_x^{\text{th}}} \right)^2. \quad (2.20)$$

Pour que le modèle du gaz idéal soit valable, il faut qu'elles soient égales (et égales à la température initiale T_0). Nous verrons au chapitre 3 que nous observons en fait une légère asymétrie dans l'expansion du nuage thermique due aux collisions, et que les relations ci-dessus doivent être corrigées en conséquence.

2.6.2 Condensat à $\mathbf{T=0}$

Pour des condensats purs dans le régime de Thomas-Fermi, nous avons déjà introduit la solution d'échelle (1.28) pour l'expansion. Après intégration suivant la direction de propagation de la sonde, on trouve la densité en colonne [113]

$$\tilde{n}_0(x, y, t) = \frac{4n_{0\text{m}}R_0}{3\beta_{\perp}^2 b_x} (1 - \tilde{y}^2 - \tilde{x}^2)^{3/2}, \quad (2.21)$$

avec $\tilde{y} = y/R_0$ la coordonnée radiale observée sur l'image, et $\tilde{x} = x/L_0$. Les tailles augmentent durant le temps de vol comme $R_0^2(t) = (2\mu/M\omega_{\perp}^2)b_{\perp}^2(t)$, et $L_0^2(t) = (2\mu/M\omega_x^2)b_x^2(t)$, avec les facteurs d'échelle b_i donnés par (1.30)

$$\begin{aligned} b_{\perp}(t) &\approx \sqrt{1 + \tau^2} + \lambda^4 \dots \\ b_x(t) &\approx 1 + \lambda^2 \left(\tau \arctan \tau - \ln \sqrt{1 + \tau^2} \right) + \lambda^4 \dots \end{aligned}$$

et $\tau = \omega_{\perp} t$. Dans un piège très anisotrope, pratiquement toute l'énergie d'interaction se convertit ainsi en énergie cinétique radiale. L'expansion radiale procède à la vitesse asymptotique $\dot{R}_0 = \sqrt{2}c_{\text{S}}$, alors que l'expansion axiale est nettement plus lente, avec une vitesse asymptotique $\dot{L}_0 \approx (\pi/\sqrt{2})\lambda c_{\text{S}}$, comme on le voit sur la figure 2.14. Pour les paramètres typiques de ce chapitre, $\lambda \approx 1/50$, $t \approx 22$ ms et $c_{\text{S}} \approx 3$ mm/s, la longueur du condensat n'a augmentée que de 4 %. En première approximation, on pourra alors considérer que la longueur après temps de vol est presque égale à la longueur initiale. De plus, la mesure des tailles après temps de vol donne accès au potentiel chimique μ d'après $\mu = M\omega_{\perp}^2 R_0(t)^2/2 b_{\perp}^2 = M\omega_x^2 L_0(t)^2/2 b_x^2$.

¹⁵En pratique, nous utilisons dans le programme d'ajustement la forme approchée suivante : $g_2(z) \approx (1-z)\ln(1-z) + 1,98z - 0,16z^2 - 0,17z^3$, précise à mieux qu'1 % [13].

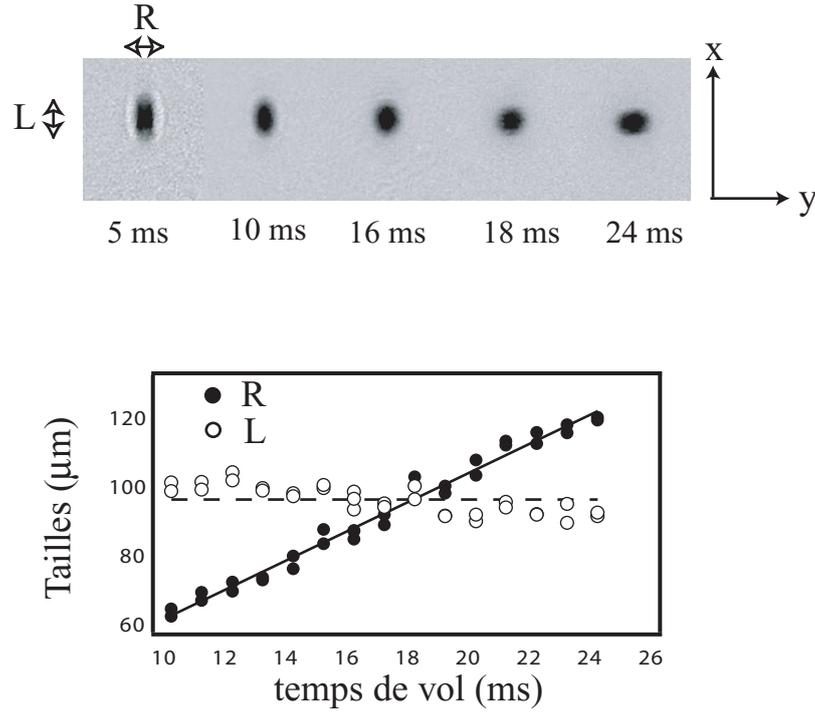


FIG. 2.14 – Expansion d'un condensat, montrant l'inversion d'ellipticité pour $t \approx \omega_x^{-1} \approx 18$ ms. Dans le graphe donnant l'évolution des tailles, on voit que le rayon croît, alors que la longueur reste pratiquement constante (la variation lente est due à une dérive de N_0 au cours de la prise de données). Cela reflète la redistribution presque complète de l'énergie de champ moyen dans le piège en énergie cinétique radiale dans un condensat très allongé.

2.6.3 Nuage mixte

En dessous du seuil de condensation, la résolution des équations couplées qui décrivent le nuage thermique et le condensat est difficile : même dans un cadre simplifié où seul le champ moyen du condensat est inclus (« modèle semi-idéal »), elle nécessite une analyse numérique assez lourde (décrite dans [126]), et mal adaptée à une procédure d'analyse systématique. Pour cette raison, les images d'absorption sont généralement analysées sous l'hypothèse que la densité du nuage thermique est bien décrite par une distribution de Bose idéale avec un potentiel chimique nul (correspondant à un nuage thermique idéal saturé), et que le condensat reste décrit par l'approximation de Thomas-Fermi, avec un nombre d'atomes N_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{n}(x, y) = & \tilde{n}_0(\mathbf{0}) \left(1 - \left(\frac{y}{R_0} \right)^2 - \left(\frac{x}{L_0} \right)^2 \right)^{3/2} \\ & + \tilde{n}_{\text{th}}(\mathbf{0}) g_2 \left\{ \exp \left(- \left(\frac{y}{2R_{\text{th}}} \right)^2 - \left(\frac{x}{2L_{\text{th}}} \right)^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Les paramètres libres dans l'ajustement sont un fonds global, les tailles $R_0, L_0, R_{\text{th}}, L_{\text{th}}$, les densités-pics à deux dimensions $\tilde{n}_0(\mathbf{0}), \tilde{n}_{\text{th}}(\mathbf{0})$ des deux composantes, et le centre de la

distribution atomique sur l'image. La seule contrainte que nous imposons est que les centres de deux composantes coïncident. Nous donnons plus de détails sur la procédure utilisée en pratique dans l'appendice B.

2.7 Conclusion

Dans cette section, nous avons décrit de manière succincte le dispositif expérimental utilisé pour produire le condensat de Bose-Einstein, en décomposant le parcours en trois phases essentielles : refroidissement laser, chargement dans un piège magnétique, et évaporation forcée. Nous avons également décrit le montage utilisé pour observer le nuage et discuté un certain nombre de contraintes pour que les images d'absorption obtenues reflètent de manière fiable la distribution en densité. Nous terminons par une présentation de la procédure d'analyse des images.

Pour parvenir à une mesure précise de la température critique et de la fraction condensée, il est important de s'interroger sur la pertinence de cette méthode d'analyse, dans chaque cas particulier (nuage thermique, condensat et nuage mixte) : c'est en partie l'objet du chapitre III. Ensuite, nous y caractérisons les propriétés thermodynamiques du nuage piégé, en insistant sur l'effet des interactions.

Effet des interactions sur la thermodynamique et l'expansion du nuage thermique

A température finie, le nuage comprend en plus du condensat une composante thermique (ou « normale ») qui constitue le réservoir d'atomes à partir duquel se construit le condensat. Dans le cas des gaz piégés, cette structure bi-modale s'observe directement sur les images d'absorption. En effet, l'extension spatiale du nuage thermique est typiquement grande devant celle du condensat, et sa densité notablement plus faible. L'observation d'une double structure marquée constitue ainsi une signature forte de l'apparition du condensat à partir de la vapeur thermique [3], et indique que le seuil de dégénérescence quantique a été franchi. Dans cette partie du mémoire, nous nous intéressons au comportement du système mixte formé par les deux fluides, normal et dégénéré, au dessus et en dessous du seuil de condensation. L'accent est mis sur l'étude de la température critique et de la fraction condensée. A travers ces deux quantités principalement, nous allons mettre expérimentalement en évidence l'influence des interactions atomiques sur la thermodynamique du fluide normal.

Les propriétés thermodynamiques ont été étudiées dans le groupe de S. Stringari et L. Pitaevskii dès 1996 [43, 44, 45, 127] (voir aussi les références [100, 128, 129]). La conclusion générale dégagée dans ces références est que, bien que les interactions modifient considérablement la fonction d'onde du condensat, leur influence sur les propriétés thermodynamiques est assez faible. En particulier, la température critique n'est que légèrement décalée (de l'ordre de 10 % pour nos paramètres typiques) par rapport à la valeur pour le gaz idéal. La mesure la plus convaincante de T_C publiée à notre connaissance date de 1996 [64] et aboutit à $T_C = 0.94(5)T_{C0}$. L'écart au gaz idéal mesuré est compatible avec les prédictions théoriques, mais de l'ordre de l'incertitude. Aussi, des mesures plus précises sont nécessaires, et elles font l'objet du présent chapitre.

Nous avons présenté au chapitre 2 la méthode d'analyse des images, qui repose sur deux hypothèses : le condensat est dans le régime de Thomas-Fermi, et le nuage thermique s'étend en temps de vol pratiquement comme un nuage idéal. Pour parvenir à une mesure précise de la température critique et de la fraction condensée, il est important de s'interroger sur la pertinence de cette description. La première question que nous nous posons dans cette section est de savoir dans quelle mesure le nuage thermique peut-il être considéré comme un gaz idéal. Nous commençons par le cas le plus simple, celui d'un nuage non condensé. Nous montrons que dans un piège très anisotrope, des effets hydrodynamiques perturbent l'expansion du

nuage thermique, et doivent être pris en compte dans la détermination de la température. Nous les étudions en détail au dessus de T_C , où une théorie d'échelle est disponible [130]. Nous discutons ensuite les corrections à la température critique du gaz idéal, d'abord dans le cas uniforme puis dans le cas piégé. Dans un deuxième temps, nous montrons comment localiser le point critique à partir de mesures du nombre d'atomes condensés, et nous en déduisons la température critique que nous comparons aux prédictions développées précédemment. Enfin, en nous basant sur la technique de temps de vol, nous mesurons une réduction de la fraction condensée de 20-30 % environ. Nos mesures sont en bon accord avec la théorie de Hartree-Fock du nuage mixte. Nous introduisons également une nouvelle technique, basée sur la diffraction de Bragg pour mesurer des températures très basses et des fractions condensées élevées, inaccessibles à la technique de temps de vol habituelle. Elle permet également de mesurer l'énergie d'expansion radiale séparément pour chaque composante.

3.1 Expansion hydrodynamique du nuage non condensé

3.1.1 Observation d'une déviation à l'expansion idéale

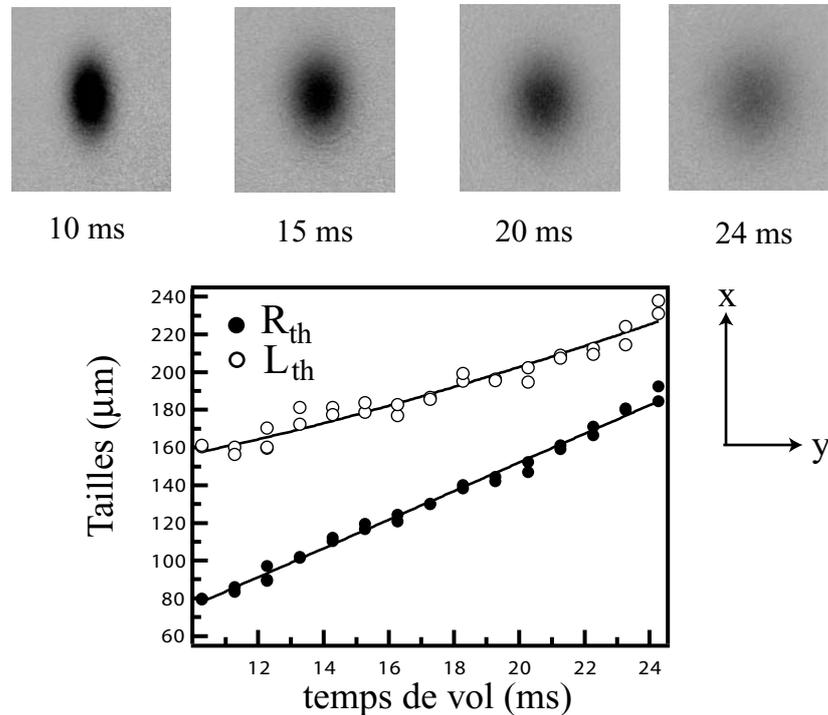


FIG. 3.1 – Expansion d'un nuage thermique en temps de vol. L'évolution des tailles mesurées en fonction du temps de vol (cercles) est bien reproduite par les équations pour un gaz idéal, si on autorise un léger écart à l'expansion isotrope. Les températures effectives T_{\perp} et T_x , extraites d'ajustements indépendants (lignes continues) sont en effet légèrement différentes ($T_{\perp}=608$ nK et $T_x=588$ nK).

Pour tester la validité du modèle du gaz idéal pour décrire l'expansion du nuage thermique, nous avons regardé le comportement de nuages thermiques non condensés, mais assez près du seuil. Sur la figure 3.1, nous montrons l'évolution des tailles (à $N \sim 4 \times 10^6$ et $T \sim 600$ nK fixés) au cours du temps de vol. En ajustant par les formules déterminées au chapitre 2, nous obtenons un bon accord avec l'évolution générale, mais le meilleur ajustement est obtenu pour des températures radiales et axiales légèrement différentes, $T_{\perp} = 608$ nK et $T_x = 588$ nK. Ce résultat est observé de manière systématique pour une vaste gamme de températures et de densités, comme le montrent les données reportées sur la figure 3.2. En effet, le modèle du gaz idéal prédit un rapport d'aspect

$$\sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle}} = \frac{b_{\perp}^{\text{th}}}{b_x^{\text{th}}} = \frac{\omega_x}{\omega_{\perp}} \sqrt{\frac{1 + (\omega_{\perp} t)^2}{1 + (\omega_x t)^2}} \approx \frac{\omega_x t}{\sqrt{1 + (\omega_x t)^2}}, \quad (3.1)$$

avec y la coordonnée radiale sur l'image et x la coordonnée axiale. Le dernier développement est valable pour des temps de vol longs, $t \gg \omega_{\perp}^{-1}$. Nous constatons que le rapport d'aspect d'un gaz idéal ne dépend que des fréquences et du temps de vol t , et pas de la température ou du nombre d'atomes. Sur la figure 3.2, nous avons reporté le rapport d'aspect mesuré pour un temps de vol de 22.3 ms, et une large gamme de températures et nombre d'atomes. On constate une déviation claire par rapport à un gaz idéal. La figure 3.2 met de plus en évidence une dépendance approximativement linéaire avec le taux de collisions dans l'échantillon, ce qui conduit naturellement à suspecter un effet des interactions. Notons tout de même que la déviation est faible, de l'ordre de 5 %, ce qui permet d'envisager un traitement perturbatif à partir du gaz idéal.

Equation de Boltzmann : L'étude du nuage thermique par l'équation de Boltzmann (2.15)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f - \nabla (2Un_{\text{th}} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = I_{\text{coll}}[f],$$

permet de prendre en compte trois effets qui pourraient gêner la mesure de température :

- un temps fini de coupure du piège magnétique, qui apparaît dans le terme $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$,
- l'influence du terme de champ moyen $2Un_{\text{th}}$, qui crée un *champ* de vitesses dans le fluide,
- et le rôle des collisions « rethermalisantes », qui déforment la *distribution* en vitesses au début de l'expansion.

Pour étudier les deux premiers effets, nous allons supposer que la densité garde la forme universelle (2.16),

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}, t) = \frac{n_{\text{th}}(\{x_i/b_i^{\text{th}}\}_{i=x,y,z}, t=0)}{\prod_j b_j^{\text{th}}},$$

au cours du temps de vol. Si on néglige (pour le moment) l'influence du terme de collisions I_{coll} , l'équation de Liouville impose alors à la fonction de distribution d'évoluer comme $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f(\{x'_i\}, \{p'_i\}, t=0)$, avec $x'_i = x_i/b_i^{\text{th}}$ et $p'_i = b_i^{\text{th}} p_i - \dot{b}_i^{\text{th}} p_i$ [122, 131, 132]. En reportant dans l'équation de Boltzmann (2.15), on obtient les équations auxquelles obéissent les nouveaux paramètres d'échelle b_i^{th} [122, 131, 132],

$$\frac{d^2 b_i^{\text{th}}}{dt^2} + \omega_i^2(t) b_i^{\text{th}} + \frac{U \langle n_{\text{th}} \rangle}{k_{\text{B}} T + U \langle n_{\text{th}} \rangle} \left(\frac{1}{(b_i^{\text{th}})^3} - \frac{1}{b_i^{\text{th}} \prod_j b_j^{\text{th}}} \right) = \frac{\omega_i^2(0)}{(b_i^{\text{th}})^3}. \quad (3.4)$$

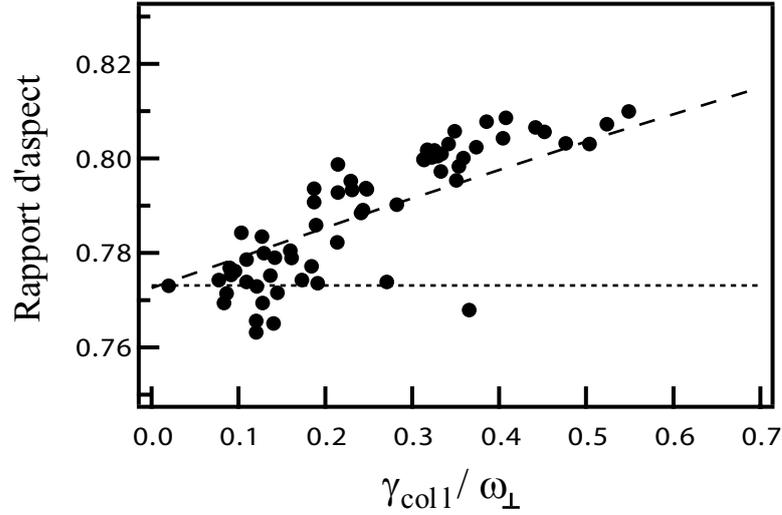


FIG. 3.2 – Effets hydrodynamiques dans l’expansion d’un nuage thermique. Le temps de vol est le même pour tous les points (22.3 ms), si bien que pour un gaz idéal on s’attendrait à un rapport d’aspect constant et égal à 0.773 (ligne en pointillés courts). Les points expérimentaux (représentés par les cercles) montrent que ce n’est pas le cas, et nous expliquons dans cette section pourquoi la déviation observée peut être attribuée aux interactions (voir également la figure 3.5). Le pointillé long est un ajustement linéaire des données, de pente 0.15. Le taux de collisions est calculé en incluant les effets de la statistique de Bose, comme nous l’expliquons dans la section 3.1.4.

Les deux derniers termes du membre de droite donnent les contributions des forces dues au potentiel de piégeage instantané et de champ moyen, respectivement, et le terme de gauche décrit le vol balistique. En négligeant les termes de force, on retrouve immédiatement les équations (2.18).

3.1.2 Coupure du piège

Dans un premier temps, nous allons examiner sur le cas du gaz thermique l’hypothèse faite plus haut d’une coupure (quasi) instantanée du piège magnétique. Si elle est justifiée, pratiquement toute l’énergie potentielle due à V_{ext} est retirée instantanément du nuage, qui explose sous l’effet de son énergie cinétique initiale. Cependant, si la coupure se passe avec une constante de temps trop lente (par rapport aux fréquences de piégeage), une partie de cette énergie d’expansion est perdue, et l’expansion est ralentie. Pour étudier ces effets, nous utilisons les équations d’échelle données plus haut et négligeons le terme de champ moyen dans (3.4),

$$\frac{d^2 b_i^{\text{th}}}{dt^2} + \omega_i^2(t) b_i^{\text{th}} = \frac{\omega_i^2(0)}{(b_i^{\text{th}})^3}. \quad (3.5)$$

Pour un piège très anisotrope, la fréquence axiale est faible ($\omega_x = 2\pi \times 8.7$ Hz dans notre cas), et la coupure du confinement selon cet axe (de constante de temps ≈ 200 μ s) peut être considérée comme instantanée (les degrés de liberté sont découplés quand on omet les termes de collisions). Par contre, dans les directions radiales, bien plus confinées, le temps de coupure est facilement comparable à la période radiale. La résolution numérique de l'équation (3.5) pour une décroissance instantanée de ω_x et exponentielle de ω_\perp , avec une constante de temps à $1/e$ égale à τ_C , prédit effectivement un ralentissement de l'expansion quand le temps de coupure radial augmente. Nous en montrons un exemple sur la figure 3.3. La vitesse d'expansion asymptotique est la quantité importante, car dans notre expérience toutes les images sont prises pour des temps de vol $t \gg \omega_\perp^{-1}$. Sur la figure 3.3, on voit qu'elle peut être drastiquement affectée par une coupure trop lente (pour un temps de coupure très long, on tend au contraire vers une ouverture adiabatique du potentiel et la vitesse d'expansion tend vers zéro). Il est donc clair que le temps de coupure doit être très court devant ω_\perp^{-1} si on veut utiliser les équations (2.20) pour déduire une température de la vitesse d'expansion.

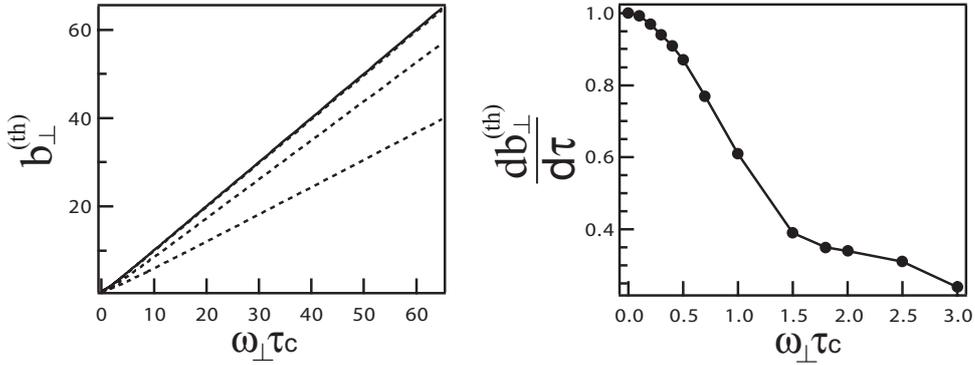


FIG. 3.3 – Résolution des équations d'échelle pour le nuage thermique idéal, incluant une coupure exponentielle de la fréquence de piégeage transverse, avec une constante de temps τ_C . La courbe de gauche correspond à $\omega_\perp \tau_C = 0, 0.5$ et 1 , respectivement. La courbe de droite donne la vitesse d'expansion asymptotique (normalisée à $\sqrt{k_B T/M}$) $\dot{b}_\perp^{\text{th}}$, en fonction du temps de coupure.

Estimation des temps de coupure dans notre expérience : Qu'en est-il dans notre expérience ? La courbure radiale dépend *a priori* des valeurs instantanées du gradient radial et du biais magnétique. Nous n'avons en fait aucun moyen de mesurer séparément ces quantités, aussi nous sommes nous contenté de mesurer (à l'aide d'une pince ampèremétrique) la décroissance du courant dans les bobines qui créent le champ quadrupolaire, et de supposer que la décroissance du gradient était identique¹. Aussi, les résultats de ce paragraphe ne sont donnés qu'à titre indicatif, et nous ne les utilisons pas pour corriger les expansions mesurées.

¹Cette hypothèse est sujette à caution, puisque la décroissance du champ magnétique peut être très différente de l'évolution du courant à cause des courants de Foucault. Cependant, l'utilisation d'un matériau en lamelles (de 100 μ m d'épaisseur) agglomérées, au lieu d'une pièce massive, pour la culasse de l'électroaimant est supposée diminuer ces effets considérablement [38, 39, 46].

Nous avons mesuré une décroissance linéaire vers zéro, sur un temps de $130 \mu\text{s}^2$.

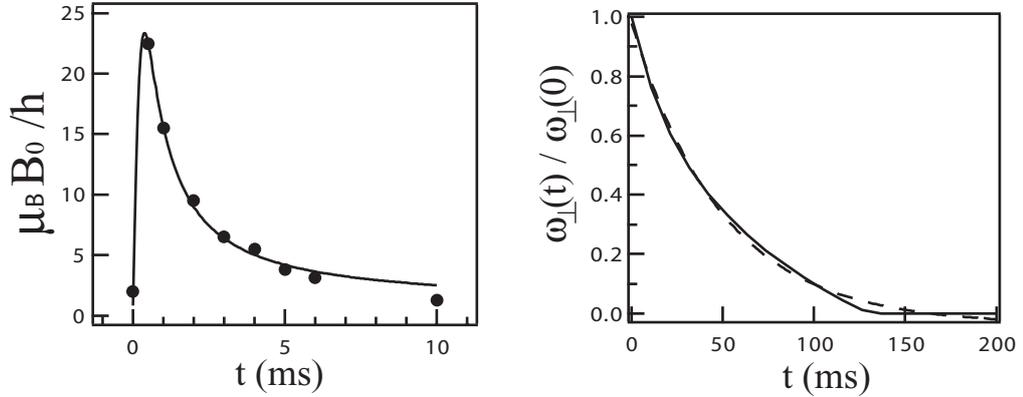


FIG. 3.4 – Evolution du biais magnétique à la coupure du piège, mesurée par résonance radio-fréquence (la courbe en trait plein est un guide pour l’oeil), à gauche. La courbe de droite représente l’évolution extrapolée de la fréquence de piégeage ω_{\perp} (trait plein). Un ajustement par une exponentielle donne une constante de temps à $1/e$ de $50 \mu\text{s}$ (pointillés).

Pour mesurer l’évolution du biais magnétique B_0 à la coupure, nous avons utilisé une technique de résonance radio-fréquence (voir le chapitre IV pour plus de détails). Le champ B_0 monte brutalement (pour des raisons non comprises) sur quelques centaines de μs , puis décroît plus lentement sur une échelle de quelques ms (figure 3.4). Ce comportement est en fait bénéfique. En effet, la fréquence radiale évolue comme $b'/\sqrt{B_0}$, et l’augmentation du biais participe donc à la diminution du temps de coupure. En utilisant la formule pour calculer la fréquence radiale dans le piège statique, et les comportements « mesurés » du gradient et du biais, on obtient la courbe de droite sur la figure 3.4. Cette décroissance est bien ajustée par une exponentielle, avec une constante de temps $\tau_C = 50 \mu\text{s}$, ou $\omega_{\perp}\tau_C = 0,13$. En reportant ce résultat dans les équations d’échelles, on trouve un écart de $\lesssim 1\%$ seulement sur b_{\perp}^{th} par rapport à la coupure instantanée, c’est-à-dire une erreur $\lesssim 2\%$ sur la température. Aussi, nous concluons que la coupure du piège est suffisamment rapide pour permettre des mesures de températures fiables.

Champs rémanents pendant l’expansion : Nous venons de voir que les courbures transitoires sont négligeables dans notre expérience. Un autre point à examiner dans notre cas est l’importance des champs magnétiques rémanents pendant l’expansion du nuage. Il est important de se rendre compte que seule la partie du champ avec une dépendance quadratique ou plus en position importe en ce qui concerne l’expansion. En effet, un champ uniforme ne produit pas de forces, et un champ linéaire en position (« gradient ») n’affecte que le mouvement du centre de masse. Nous étudierons les conséquences de l’existence de gradients aux chapitres IV et VI, mais pour le problème de thermométrie qui nous préoccupe, ils sont

²Une diode est utilisée pour couper abruptement les oscillations éventuelles du circuit total, qui inclue un gros condensateur pour stocker l’énergie magnétique et éviter les surtensions aux bornes de l’alimentation de courant (voir aussi [47]). Ceci explique pourquoi la décroissance est brutale, au lieu d’exponentielle comme on peut s’y attendre. La forme linéaire de la décroissance en courant n’est cependant pas bien comprise.

sans importances. De plus, le champ uniforme rémanent est *a priori* bien compensé, car cette étape, cruciale pour le fonctionnement de la mélasse, doit être optimale pour atteindre le seuil de condensation. Cela suggère que les composantes paires en position du champ doivent l'être également, puisque qu'elles sont toutes produites par les mêmes bobines.

Des données d'expansion comme celle de la figure 3.1 permettent de répondre plus quantitativement à ces questions. En effet, la température déduite de la vitesse d'expansion coïncide à mieux que les barres d'erreur (quelques %) avec celle déterminée par la procédure d'ajustement, appliquée à l'image qui correspond au temps de vol le plus long (et également aux images « courantes »). Ceci est vrai tant sur l'axe radial que sur l'axe axial, bien que les deux températures soient différentes, comme indiqué plus haut. Nous déduisons de cette observation que les champs rémanents sont trop faibles pour perturber significativement l'expansion, au moins pour les temps de vol que nous regardons.

3.1.3 Influence des collisions sur l'expansion

A la lumière de la discussion précédente, nous excluons donc que l'anisotropie observée sur les nuages thermiques soit causée par des effets parasites, dûs à une coupure trop lente ou à des champs magnétiques non contrôlés. Par contre, l'augmentation de l'anisotropie avec la densité dans le piège conduit naturellement à envisager l'effet des interactions sur l'évolution du nuage. Celles-ci peuvent avoir deux conséquences que nous distinguons. Premièrement, le gaz à l'équilibre peut se dilater sous l'effet de son propre champ moyen. L'énergie correspondante se transforme en énergie cinétique au début de l'expansion. Deuxièmement, les collisions peuvent modifier la distribution (hors-équilibre) du gaz au début de l'expansion. Nous examinons ces points tour-à-tour, en nous basant sur des arguments simples puis sur une théorie d'échelle [130].

Energie de champ moyen : Pour un gaz piégé à l'équilibre, seul le champ moyen affecte le profil de densité (l'intégrale de collision est nulle). Le théorème du viriel [56, 57] permet d'écrire

$$\frac{1}{3}E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}M\omega_i^2\langle x_i^2 \rangle = \frac{1}{3}E_{\text{cin}} + \frac{1}{2}E_{\text{int}} = \frac{\langle p_i^2 \rangle}{2M} + U\langle n_{\text{th}} \rangle. \quad (3.6)$$

On en déduit la taille à l'équilibre³[131]

$$\langle x_i^2 \rangle = \frac{g_4(z)}{g_3(z)} \frac{k_B T}{M\omega_i^2} (1 + \chi), \quad (3.7)$$

avec $\chi = (g_3(z)U/g_4(z)Nk_B T) \int d^{(3)}\mathbf{r} [n_{\text{th}}(\mathbf{r})]^2 \ll 1$. En utilisant la densité non perturbée

$$n_{\text{th}}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left\{ \exp(\beta\mu - \beta V_{\text{ext}}) \right\},$$

on trouve que $\chi = \frac{a}{\lambda_T} f_\chi(z)$, avec

$$f_\chi(z) = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}g_4(z)} \int_0^\infty x^2 \left(g_{3/2}[\exp(\beta\mu - x^2/2)] \right)^2 dx. \quad (3.9)$$

³Noter que pour une distribution de Bose-Einstein, $M\omega_i^2\langle x_i^2 \rangle/2 = \langle p_i^2 \rangle/2M = (g_4(z)/2g_3(z))k_B T$.

Pour $z \ll 1$ (régime de Boltzmann), on a $f_\chi(z) \approx \exp(\beta\mu)/\sqrt{2}$ et en $z = 1$ (transition), $f_\chi(z) \approx 1.23$.

Pour prédire l'évolution après temps de vol, on peut tirer avantage du rapport d'aspect élevé du piège. Comme pour un condensat, l'énergie de champ moyen se transforme presque entièrement en énergie cinétique dans les deux directions radiales. Cela conduit à une vitesse d'expansion radiale donnée par la somme quadratique de la vitesse initiale $v_0^2 = k_B T_0/M$ et de la vitesse de champ moyen donnée par $v_{\text{cm}}^2 = \chi v_0^2$. Après temps de vol, la taille radiale est donc donnée (approximativement) par⁴

$$R_{\text{th}}^2(t) \approx R_{\text{th}}^2(0) + v_0^2(1 + \chi)t^2 = \frac{k_B T_0}{M\omega_\perp^2} (1 + \chi) (1 + (\omega_\perp t)^2). \quad (3.10)$$

Par contre, dans la direction axiale, l'expansion est dûe uniquement à l'énergie cinétique initiale, puisque presque toute l'énergie d'interaction participe à l'expansion radiale. Aussi, la taille axiale est simplement

$$L_{\text{th}}^2(t) \approx L_{\text{th}}^2(0) + v_0^2 t^2 = \frac{k_B T_0}{M\omega_x^2} (1 + \chi + (\omega_x t)^2). \quad (3.11)$$

Ces résultats correspondent à des paramètres d'échelle $b_\perp^{\text{th}} \approx \sqrt{1 + (\omega_\perp t)^2}$ et $b_x^{\text{th}} \approx \sqrt{1 + (1 - \chi)(\omega_x t)^2}$ [132].

On déduit des calculs qui précèdent le rapport d'aspect après un temps de vol t (pour $t \gg \omega_\perp^{-1}$),

$$\frac{R_{\text{th}}}{L_{\text{th}}} \approx \frac{\omega_x t}{\sqrt{1 + (\omega_x t)^2}} \left(1 + \frac{\chi}{2} \frac{(\omega_x t)^2}{1 + (\omega_x t)^2} \right). \quad (3.12)$$

On voit donc que la tendance qualitative de la figure 3.2 pourrait être expliquée par la présence de l'énergie de champ moyen. Cependant, quantitativement, la quantité χ ne dépasse pas 2 % pour les données de la figure 3.2, si bien que cette explication est nettement insuffisante pour justifier la déviation observée (voir aussi la courbe en pointillés courts sur la figure 3.5, calculée à partir de la solution numérique de (3.4) en supposant une coupure instantanée).

Effets hydrodynamiques : Nous avons négligé jusqu'ici l'influence des collisions (terme I_{coll} dans l'équation de Boltzmann). Pour un gaz piégé, ce terme est responsable en général du retour vers l'équilibre du gaz. Pour un nuage très anisotrope, cependant, il est susceptible d'introduire une anisotropie dans la distribution en impulsion après expansion [95, 133]. En effet, dans notre situation, le libre parcours moyen est petit devant la taille axiale, tout en étant grand devant la taille radiale. En ce cas, une trajectoire qui suit un des axes transverses sera pratiquement balistique. Par contre, les particules dont la trajectoire suit approximativement l'axe long vont subir des collisions, qui ne peuvent que freiner l'expansion selon cet axe. Ces collisions vont redistribuer une partie de l'énergie cinétique axiale dans les deux directions radiales et introduire une anisotropie dans la distribution en impulsion. Pour une

⁴Les tailles R_{th} et L_{th} utilisées dans l'ajustement sont reliées aux tailles quadratiques moyennes par les relations $R_{\text{th}}^2 = (g_3(z)/g_4(z))\langle y^2 \rangle$, et $L_{\text{th}}^2 = (g_3(z)/g_4(z))\langle x^2 \rangle$.

faible anisotropie, on s'attend à ce qu'elle soit déterminée par le taux de collisions initial $\gamma_{\text{coll}} \sim n_{\text{th}}(\mathbf{0})\sigma_{\text{el}}v_{\text{th}}$, avec $\sigma_{\text{el}} = 8\pi a^2$ et $v_{\text{th}} = \sqrt{8k_{\text{B}}T/\pi M}$ ⁵. De plus, la densité du nuage chute en quelques ω_{\perp}^{-1} , qui donne également le temps sur lequel la redistribution peut se produire. Après quelques périodes radiales, on attend donc une distribution en vitesses quasiment stationnaire caractérisée par

$$\frac{\langle v_y^2 \rangle}{v_0^2} \approx 1 + \frac{\beta \gamma_{\text{coll}}}{2 \omega_{\perp}} \quad \text{et} \quad \frac{\langle v_x^2 \rangle}{v_0^2} \approx 1 - \beta \frac{\gamma_{\text{coll}}}{\omega_{\perp}}, \quad (3.13)$$

avec un coefficient β qui dépend *a priori* des fréquences de piégeage et du temps de vol, fixés pour cette série de données. Par un raisonnement similaire au précédent, on obtient alors

$$\frac{R_{\text{th}}}{L_{\text{th}}} \approx \frac{\tau_x}{\sqrt{1 + \tau_x^2}} \left(1 + \frac{\beta \gamma_{\text{coll}}}{4\omega_{\perp}} \frac{1 + 3\tau_x^2}{1 + \tau_x^2} \right) \quad (3.14)$$

pour le rapport d'aspect du nuage, avec $\tau_x = \omega_x t$. On trouve donc une dépendance approximativement linéaire du rapport d'aspect avec le taux de collisions, les autres paramètres étant fixés. Avec un ajustement en laissant β libre, nous pouvons rendre compte de la tendance générale observée sur nos données, en obtenant le meilleur ajustement pour $\beta = 0.15$.

Les données d'expansion en fonction du temps de vol présentées sur la figure 3.1 sont également en accord avec les arguments qui viennent d'être présentés. En effet, pour $\beta\gamma_{\text{coll}}/\omega_{\perp} \approx 0.035$, qui correspond aux températures et aux densités extrapolées à partir des images, on trouve à partir des vitesses d'expansion mesurées une température initiale de 600 nK en mesurant sur l'axe radial, et 598 nK sur l'axe axial, en très bon accord.

3.1.4 Solution d'échelle de l'équation de Boltzmann

La théorie développée par P. Pedri, D. Guéry-Odelin et S. Stringari [130] permet de rendre compte quantitativement de l'expansion anisotrope que nous observons. Ces auteurs proposent une solution pour la fonction de distribution de la forme

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{\prod_j b_j^{\text{th}} \theta_j^{1/2}} f_0 \left(\left\{ \frac{x_i}{b_i^{\text{th}}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\theta_i^{1/2}} \left(v_i - \frac{\dot{b}_i}{b_i^{\text{th}}} x_i \right) \right\}, t = 0 \right), \quad (3.15)$$

qui généralise la résolution de l'équation de Boltzmann par une solution d'échelle pour inclure une déformation dans l'espace des vitesses induite par les collisions, décrite par les paramètres θ_i . En traitant le terme de collisions de l'équation de Boltzmann (2.15) à l'approximation du temps de relaxation [61], et en supposant une coupure instantanée, on obtient alors une série d'équations qui ne dépend que du rapport d'aspect du piège $\lambda = \omega_x/\omega_{\perp}$, et du taux de

⁵Nous calculons plus loin une estimation plus précise du taux de collisions, utilisée pour tracer la figure 3.5 et dans tous les ajustements.

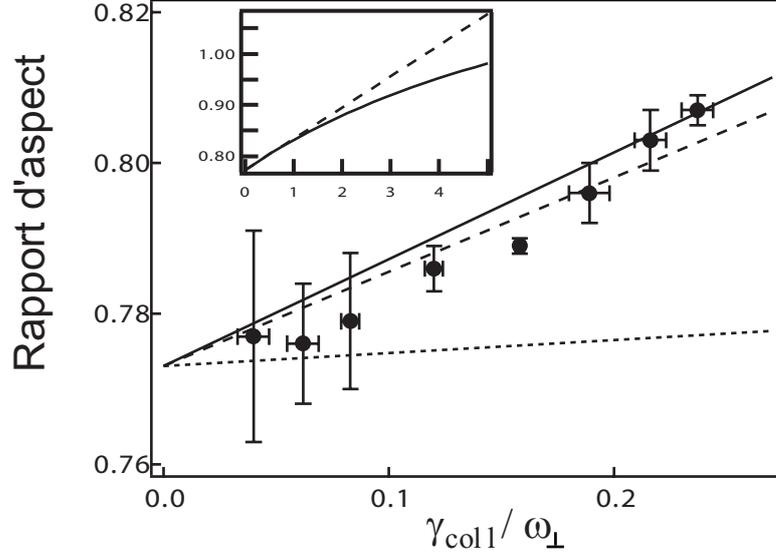


FIG. 3.5 – Effets hydrodynamiques dans l’expansion d’un nuage thermique. Les points expérimentaux après moyenne sont représentés par les cercles avec les barres d’erreur statistiques. L’existence d’une énergie de champ moyen finie dans le piège ne peut expliquer ce comportement (pointillés courts). La différence ne peut être expliquée que par la prise en compte d’effets hydrodynamiques, qui redistribuent une partie de l’énergie cinétique axiale vers les direction radiales. La courbe continue, déduite des équations d’échelle [130], inclut ces effets (et le champ moyen). Elle est en bon accord (15 % près dans la gamme de paramètres mesurés) avec le meilleur ajustement linéaire des données (en pointillés longs). En médaillon, nous indiquons également la solution numérique de ces équations pour des taux de collisions plus élevés, qui montre une déviation par rapport au démarrage linéaire quand $\gamma_{\text{coll}} \sim \omega_{\perp}$.

collision adimensionné $\gamma_{\text{coll}}/\omega_{\perp}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 b_{\perp}^{\text{th}}}{d\tau^2} &= -\chi \left(\frac{\theta_{\perp}}{b_{\perp}^{\text{th}}} - \frac{1}{b_{\perp}^{\text{th}} \left(\prod_j b_j^{\text{th}} \right)} \right) - \frac{\theta_{\perp}}{b_{\perp}^{\text{th}}}, \\
 \frac{d^2 b_x^{\text{th}}}{d\tau^2} &= -\lambda^2 \chi \left(\frac{\theta_{\perp}}{b_x^{\text{th}}} - \frac{1}{b_x^{\text{th}} \left(\prod_j b_j^{\text{th}} \right)} \right) - \lambda^2 \frac{\theta_x}{b_x^{\text{th}}}, \\
 \frac{d\theta_{\perp}}{d\tau} + 2 \frac{db_{\perp}^{\text{th}}}{d\tau} \frac{\theta_{\perp}}{b_{\perp}^{\text{th}}} &= -\frac{\gamma_{\text{coll}}}{\omega_{\perp}} \frac{(\theta_{\perp} - \theta_x)}{3\bar{\theta} \left(\prod_j b_j^{\text{th}} \right)}, \\
 \frac{d\theta_x}{d\tau} + 2 \frac{db_x^{\text{th}}}{d\tau} \frac{\theta_x}{b_x^{\text{th}}} &= +\frac{\gamma_{\text{coll}}}{\omega_{\perp}} \frac{2(\theta_{\perp} - \theta_x)}{3\bar{\theta} \left(\prod_j b_j^{\text{th}} \right)},
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

avec $\tau = \omega_{\perp} t$ et $\bar{\theta} = \left(\sum_j \theta_j \right) / 3$.

Pour calculer γ_{coll} en fonction des paramètres expérimentaux, nous utilisons les résultats de [134] qui tiennent compte des effets de la statistique de Bose-Einstein. Le résultat numérique

obtenu dans cet article est très bien reproduit par la formule empirique

$$\gamma_{\text{coll}} = \frac{2}{5} n_{\text{class}}(\mathbf{0}) \sigma_{\text{el}} v_{\text{th}} \left(1 + 0.23 \left(\frac{T_{\text{C0}}}{T} \right)^3 + 0.4 \left(\frac{T_{\text{C0}}}{T} \right)^4 \right), \quad (3.17)$$

avec $n_{\text{class}}(\mathbf{0}) = N\bar{\omega}^3(m/2\pi k_{\text{B}}T)^{3/2}$ la densité d'un gaz de Boltzmann comprenant autant d'atomes, et à la même température que le gaz de Bose considéré.

Nous avons résolu numériquement les équations (3.16) pour nos paramètres expérimentaux. Pour des taux de collisions assez faibles, on retrouve une évolution linéaire, et la pente coïncide à 15 % près avec celle déduite de nos données (trait plein sur la figure 3.5). Nous en déduisons que le calcul numérique est non seulement en accord avec les arguments simples présentés dans le paragraphe précédent, mais également avec nos observations expérimentales. En ce sens, nos mesures constituent un test réussi de la solution d'échelle de l'équation de Boltzmann. Notons pour terminer que, bien que le terme de champ moyen soit inclus dans ces équations, pour nos données expérimentales il joue un rôle mineur : l'effet important des collisions est bel et bien de permettre le transfert d'énergie entre les deux axes.

Le calcul numérique pour des taux de collisions plus élevés est inséré en médaillon dans la figure 3.5. Pour des taux de collisions plus faibles que la fréquence transverse, on retrouve l'évolution linéaire en fonction du taux de collisions. Quand on entre franchement dans le régime hydrodynamique ($\gamma_{\text{coll}} > \omega_{\perp}$), la distribution en vitesses se modifie plus significativement, et les arguments simples présentés plus haut ne reproduisent plus la courbe numérique de manière fiable.

Correction sur la température mesurée : Nous déduisons des considérations ci-dessus que pour obtenir une estimation plus fiable de la température initiale T_0 à partir des vitesses d'expansion, on pourra utiliser la formule (indépendante de la valeur de β et de γ_{coll})

$$T_0 \approx \frac{2\tau_x^2}{1 + 3\tau_x^2} T_{\perp} + \frac{1 + \tau_x^2}{1 + 3\tau_x^2} T_x, \quad (3.18)$$

sous réserve que l'énergie de champ moyen soit négligeable, ce qui est le cas pour les expériences sur les nuages thermiques présentées dans ce mémoire. Cette formule corrige l'effet des collisions au premier ordre, et ne peut donc être appliquée que pour $\gamma_{\text{coll}} \ll \omega_{\perp}$. Pour des taux de collisions plus élevés, on pourra se reporter à [95], où une théorie approchée est développée, ou résoudre numériquement les équations d'échelles.

3.2 Expansion du nuage mixte

Pour les mesures précédentes, les fractions condensées étaient négligeables. Par contre, quand la fraction condensée dépasse 5 % environ, le pic du condensat est plus dense, et il est nécessaire de reprendre l'analyse des sections précédente en tenant compte de sa présence.

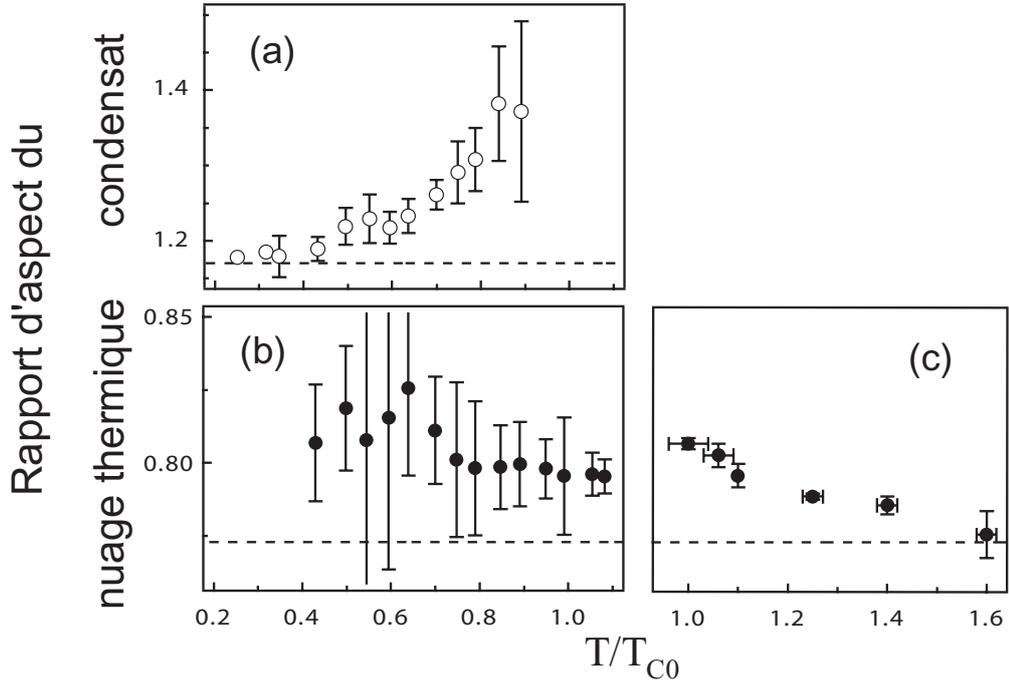


FIG. 3.6 – Expansion d’un nuage mixte. Sur la figure (a), on a représenté le rapport d’aspect observé du condensat en fonctions de la température (cercles), qui dévie de celui calculé dans la limite de Thomas-Fermi pour nos paramètres ($R_0/L_0 \approx 1,22$, tracé en pointillés). La figure (b) montre le rapport d’aspect observé du nuage thermique en fonctions de la température. Les données au dessus de T_{C0} correspondent à la figure 3.5, et la ligne en pointillés le rapport d’aspect attendu pour un gaz idéal, soit 0,77.

Dans cette section, nous nous précoccuperons principalement de la validité de la procédure de thermométrie, en restant à un niveau qualitatif. L’expansion du nuage mixte en dessous de T_C est en effet considérablement plus complexe, à cause de la structure bi-modale. D’une part, le condensat va exploser sous l’effet de sa pression interne, comme à température nulle, mais il va également repousser le nuage thermique qui n’est plus retenu par le potentiel de piégeage. Ce dernier agit en retour sur le condensat au début de l’expansion. D’autre part, l’intégrale de collisions qui intervient dans l’équation d’évolution de f se sépare en deux termes [135] : l’un d’entre eux décrit la relaxation dans le nuage thermique, et le second la relaxation mutuelle des deux composantes. On s’attend alors à ce que les effets hydrodynamiques se traduisent également par une conversion d’une partie de l’énergie cinétique axiale du nuage thermique en énergie cinétique radiale du condensat, en plus de la redistribution de l’énergie cinétique entre les degrés de liberté du nuage thermique. De plus, un transfert de particules du condensat vers le nuage thermique peut également se produire dans une telle situation hors-équilibre.

Nous examinons dans cette section une série de données prises entre 0,4 et 0,95 T_{C0} , pour environ 2×10^6 atomes à la transition (figure 3.6). Examiner les rapports d’aspect des deux composantes est encore une bonne méthode pour détecter des déviations systématiques, dans la mesure où pour un condensat dans le régime de Thomas-Fermi ou pour un gaz thermique

idéal, ils ne dépendent que du temps de vol et des fréquences de piégeage. Sur la figure 3.6, on constate que le rapport d'aspect d'un nuage thermique dévie encore de la loi idéale (0,77), et que celui du condensat dévie de la prédiction de Thomas-Fermi (1,22). L'hypothèse sous laquelle nous analysons les données, qui suppose l'expansion du nuage thermique dominée par la distribution en vitesses initiale, et celle du condensat par l'effet de sa propre pression, est donc mise en défaut.

Nous concluons que ces données tendent à montrer un couplage entre les degrés de liberté du condensat et ceux du nuage thermique. Une investigation plus poussée, que nous n'avons pas essayé de mettre en oeuvre, consisterait à résoudre numériquement à trois dimensions une équation de Gross-Pitaevskii couplée à l'équation de Boltzmann, en incluant les termes de collisions croisés (voir par exemple [135]). C'est un programme difficile à mener à bien, particulièrement pour un système en expansion, c'est-à-dire très loin de l'équilibre. Nous pensons néanmoins qu'il s'agit d'un problème intéressant sur le plan théorique. Sur le plan expérimental, les paramètres accessibles dans notre expérience ne se prêtent pas bien à une investigation systématique, ces effets restant de l'ordre de quelques %. Pour les étudier de manière confortable, il s'agit d'augmenter significativement la densité, comme dans l'expérience d'Amsterdam [95], ou d'utiliser un atome dont la longueur de diffusion est plus importante (par exemple l'atome d'Hélium) [24, 25].

Ici, nous sommes principalement intéressés par la thermométrie. Dans cette optique, nous remarquons que les déviations à l'expansion balistique restent modestes même en dessous de T_C . De plus, la température mesurée sur l'axe radial est moins affectée par les effets hydrodynamiques, dans la mesure où le taux de collisions entre atomes thermiques et condensat chute en dessous de T_C . Seule l'énergie de champ moyen joue un rôle, et elle n'excède pas quelques %. De plus, nous constatons empiriquement que la valeur de la température T_x mesurée sur l'axe radial est plus robuste vis à vis des paramètres du programme d'analyse que celle que l'on mesure sur l'axe axial (voir l'appendice B). Pour ces deux raisons, en dessous de T_C , nous utilisons la température radiale T_x pour estimer la température initiale.

Pour estimer l'importance des collisions ⁶, nous calculons les quantités

$$\zeta_0 = \frac{U}{N_{\text{th}}k_B T} \int d^{(3)}\mathbf{r} n_0(\mathbf{r})n_{\text{th}}(\mathbf{r}), \quad (3.19)$$

$$\zeta_{\text{th}} = \frac{U}{N_{\text{th}}k_B T} \int d^{(3)}\mathbf{r} (n_{\text{th}}(\mathbf{r}))^2, \quad (3.20)$$

qui quantifient l'importance des énergies de champ moyen exercées par le condensat et le nuage thermique par rapport à l'énergie cinétique initiale. Nous utilisons le modèle Hartree-Fock pour calculer n_{th} et n_0 , en prenant des valeurs de température et de nombre d'atomes extrapolées à partir des données ci-dessus. Le résultat est tracé sur la figure 3.7a. La quantité ζ_0 domine rapidement, mais elle garde une valeur modeste même à basse température. En effet, plus le condensat est dense, plus le nuage thermique est exclu de la région centrale, ce qui diminue le recouvrement entre les deux composantes et freine l'augmentation de χ_{th}

⁶La définition du taux de collisions utilisée dans ce paragraphe diffère du calcul plus rigoureux du paragraphe précédent par un facteur numérique. Comme nous sommes intéressés ici par l'ordre de grandeur et les variations avec T , il n'y a pas de problème majeur à utiliser la définition beaucoup plus simple donnée ici.

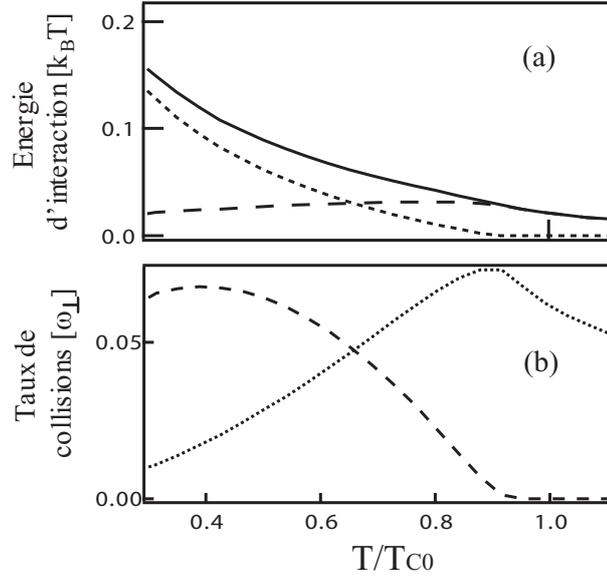


FIG. 3.7 – Energie de champ moyen et taux de collisions. Sur la courbe (a), nous traçons les quantités ζ_0 en pointillés courts, ζ_{th} en pointillés long, et leur somme en trait plein. Elle donne l'ordre de grandeur de l'erreur maximale (en pourcentage) sur la température qui est dû à la répulsion par le champ moyen. La courbe (b) montre une estimation du taux de collisions condensat/non-condensat en trait pointillés longs, et du taux de collisions entre atomes du nuage thermique en pointillés courts. On voit sur cette courbe que le taux de collisions maximum est atteint vers T_C .

quand la densité du condensat augmente. Dans la gamme de température étudiée, négliger le terme de champ moyen revient à surestimer la température par 15 % au plus aux plus basses températures, $T \approx 0,3 T_{C0}$. Ceci est compensé par le fait qu'à cause de la coupure non instantanée du piège, la vitesse d'expansion mesurée sous-estime la température initiale par 3 % environ. Au final, cela revient à une erreur systématique de l'ordre de -1 % près de T_C (fraction condensée de 10 % environ) et de $+12$ % à très basse température. Nous pouvons de manière similaire estimer les taux de collisions moyens par

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{\sigma_{el} v_{th}}{N_{th} \omega_{\perp}} \int d^{(3)}\mathbf{r} n_0(\mathbf{r}) n_{th}(\mathbf{r}), \\ \gamma_{th} &= \frac{\sigma_{el} v_{th}}{N_{th} \omega_{\perp}} \int d^{(3)}\mathbf{r} [n_{th}(\mathbf{r})]^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Comme on le voit sur la figure 3.7b, ils restent du même ordre de grandeur en dessus et en dessous de T_C . Nous concluons que les erreurs commises sur la température sont également comparables, soit de l'ordre de 10 % au plus.

Pour résumer la procédure de thermométrie, nous avons vu qu'au dessus de T_C , on pouvait corriger assez rigoureusement des effets hydrodynamiques, pourvu qu'on sache mesurer les tailles suivant les deux axes. Par contre, en dessous de T_C , l'analyse de l'expansion est bien plus difficile, et un traitement à base d'équations d'échelles semble compromis. Nos données montrent que l'expansion du nuage thermique n'est pas compatible avec une expansion purement balistique. Par contre, les déviations restent relativement faibles, de l'ordre de 10-20 %

au plus. Nous soulignons qu'il s'agit là d'une borne supérieure sur l'erreur commise : comme la région centrale, plus susceptible d'être affectée, est exclue lors de l'ajustement qui fournit T (appendice B), il est vraisemblable que l'erreur réelle est plus faible que celle que nous avons estimé ici.

3.3 Température critique du gaz en interactions

Nous nous tournons maintenant vers la mesure de la température de transition. Pour un gaz idéal à la limite thermodynamique, le seuil de transition est atteint pour une température donnée par l'équation (1.7), $k_B T_{C0} \approx 0,94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3}$. La température critique est atteinte quand la densité dans l'espace des phases atteint la valeur critique $g_{3/2}(1) \approx 2,612$, ou encore lorsque le potentiel chimique du nuage non condensé atteint l'énergie de l'état fondamental. Pour obtenir T_{C0} , nous avons fait tendre les fréquences du piège vers zéro et ignoré les interactions, si bien que $T = T_{C0}$ correspond à $\mu = 0$. Avant de déterminer les premières corrections à cette expression, nous discutons le comportement du gaz uniforme. Nous présentons nos mesures dans un deuxième temps.

3.3.1 Le cas homogène

Le cas du gaz homogène (à la limite thermodynamique) a reçu récemment une attention soutenue de la part des théoriciens. En particulier, on trouve dans la littérature une dispersion considérable des résultats pour le déplacement au premier ordre en a de la température critique d'un gaz non-idéal, par rapport à celle d'un gaz idéal, $T_{C0} \propto \hbar^2 n_{\text{th}}^{2/3} / 2M$ [136, 137, 138]⁷. Récemment, un consensus semble s'être dégagé [140, 141, 142], et nous présentons ici les grandes lignes du développement.

La raison de la contradiction entre les différentes prédictions (et de l'intérêt soulevé par cette question) vient de ce que la physique de la transition est gouvernée par les fluctuations. Il est bien connu [74] qu'au voisinage d'une transition de phase du second ordre, des fluctuations de densité (dites « critiques ») sont susceptibles de se développer, et de hâter l'apparition du condensat : leur longueur de corrélation devient macroscopique, ce qui préfigure l'ordre à longue portée qui tend à apparaître. Pour aller plus loin, nous allons nous contenter du critère de Ginzburg qui permet de cerner la région où les fluctuations critiques sont négligeables (voir [74] pour un exposé détaillé). Il s'écrit dans notre cas particulier [43, 143] :

$$|\delta\mu - \Sigma| \gg \epsilon_{\text{crit}} = k_B T_{C0} \left(\frac{a}{\lambda_0} \right)^2, \quad (3.22)$$

avec λ_0 la longueur d'onde de de Broglie pour $T = T_{C0}$. Lorsque ce critère est violé, on entre dans la région des fluctuations critiques, et la longueur de corrélation caractéristique des

⁷L'article [139] contient un historique et une liste complète de références.

fluctuations de densité est

$$l_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2M\epsilon_{\text{crit}}}} \sim \frac{\lambda_0^2}{a} \gg \lambda_0. \quad (3.23)$$

Pour estimer leur effet sur la température critique, nous écrivons de manière générale la densité du gaz en interaction comme

$$n = \int \frac{d^{(3)}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} N_{\text{BE}} \left(\frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2M} + \Sigma(\mathbf{k}) - \mu \right), \quad (3.24)$$

avec N_{BE} la distribution de Bose-Einstein. La densité du gaz idéal $n^{(0)}$ correspond à une « énergie interne par particule » $\Sigma = 0$. Cependant, quand on « branche » les interactions, l'énergie interne Σ devient non nulle (elle décrit alors la modification du spectre des excitations élémentaires du système), et la température critique passe de T_{C0} à T_C . Pour trouver le déplacement de T_C , nous considérons que le nombre d'atomes reste fixé, $n_c(T_C)V = n_c^{(0)}(T_{C0})V$, avec V le volume de la boîte. Le déplacement de la densité critique n_C par rapport à un gaz idéal à la température T_C , est donné par [138]

$$\begin{aligned} n_c(T_C) - n_c^{(0)}(T_C) &= \int \frac{d^{(3)}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[N_{\text{BE}} \left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2M} + \Sigma(\mathbf{k}) - \delta\mu \right) - N_{\text{BE}} \left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2M} \right) \right] \\ &\approx \frac{3}{2} n_c^{(0)}(T_{C0}) \frac{\delta T_C}{T_{C0}}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec $\delta\mu$ le déplacement du potentiel chimique à la transition. Cette équation permet de calculer le déplacement de T_C si on est capable de calculer le spectre $\hbar^2\mathbf{k}^2/2M + \Sigma(\mathbf{k})$ des excitations élémentaires du système.

Une première étape consiste à essayer de calculer ce déplacement dans le cadre d'une théorie de champ moyen (Hartree-Fock). Dans ce cas, l'énergie interne Σ est simplement proportionnelle à la densité, $\Sigma_{\text{HF}} \approx 2Un$, mais le potentiel chimique est lui aussi déplacé de la même quantité : $\delta\mu_{\text{HF}} = 2Un$. Par conséquent, la quantité (3.25) s'annule, et il n'y a pas de décalage de T_C à l'approximation de champ moyen.

Intéressons nous donc maintenant à l'impact des fluctuations critiques. Ce type de phénomène est dominé par les excitations de basse énergie, dont la longueur d'onde caractéristique est plus grande que $l_{\text{crit}} \gg \lambda_T$. On peut alors développer le facteur de Bose comme $N_{\text{BE}}(\epsilon) \approx k_B T_{C0}/\epsilon$. De plus, la longueur de corrélation est la seule longueur pertinente pour décrire la physique de la transition, si bien que $\Sigma(k) = \Sigma(kl_{\text{crit}})$. L'expression pour le décalage de T_C se simplifie alors en

$$\frac{\delta T_C}{T_{C0}} = a_1 \frac{\lambda_0^3 2M k_B T_{C0}}{\hbar^2 l_{\text{crit}}} \int d\kappa \frac{H(\kappa)}{\kappa^2 + H(\kappa)} = c_1 \frac{a}{\lambda_0}, \quad (3.26)$$

avec $\kappa = kl_{\text{crit}}$, $H(\kappa) = (\Sigma(k) - \delta\mu)/\epsilon_{\text{crit}}$, et a_1, c_1 des facteurs numériques positifs⁸. Nous constatons donc que l'effet des fluctuations est d'*augmenter* la température critique, et que

⁸Par des calculs numériques de type Monte-Carlo, la valeur du coefficient de proportionnalité a été trouvée égale à $c_1 \approx 1,3$ [141, 142].

le déplacement d'ordre le plus bas est linéaire en a (bien que le calcul ne soit pas perturbatif [138]).

Ce comportement a été observé expérimentalement dans un échantillon d' ^4He adsorbé sur un verre poreux (Vycor) par J. Reppy *et al.* [144]. La comparaison n'est pas entièrement quantitative, dans la mesure où elle repose sur l'utilisation d'une masse effective et d'une « longueur de diffusion », extrapolées respectivement à partir de données à haute densité et dans l'espace libre. Par contre, dans cette expérience, il s'est révélé possible de sortir du régime de gaz dilué et d'observer le comportement suivant : le déplacement de la température critique croît linéairement jusqu'à un maximum, puis décroît jusqu'à une valeur négative à haute densité⁹. Ce comportement est également observé sur les simulations (non perturbatives) de [137].

3.3.2 Le gaz piégé

Dans le cas d'un gaz piégé dans un piège harmonique, la situation est tout à fait différente. En effet, si on fixe le nombre d'atomes, le volume de l'échantillon n'est pas fixé, contrairement au cas d'un gaz uniforme. Si on « branche adiabatiquement » les interactions dans un gaz idéal, le nuage a tendance à se dilater à N constant. Ainsi, quand on branche les interactions, la différence entre $N_c(T_C)$ et $N_c^{(0)}(T_{C0})$ est donné à l'approximation de densité locale par

$$N_c(T_C) - N_c^{(0)}(T_{C0}) = \int \frac{d^{(3)}\mathbf{r} d^{(3)}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ N_{\text{BE}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2M} + \Sigma(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \delta\mu \right) - N_{\text{BE}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2M} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right) \right\}, \quad (3.27)$$

Deux effets, inexistant dans le cas homogène, dominent le comportement du nombre d'atomes critiques. En premier lieu, l'état fondamental du piège correspondant en réalité à une énergie de point zéro $\hbar(2\omega_{\perp} + \omega_x)/2$, le potentiel chimique au seuil est déplacé de cette même quantité, par rapport à la limite thermodynamique (« effet de taille finie »). Deuxièmement, les interactions traitées à l'approximation de Hartree-Fock augmentent le potentiel chimique d'une quantité proportionnelle à la densité au centre, $n_{\text{th}}(\mathbf{0})$, et l'énergie interne d'une quantité proportionnelle à la densité locale, $n_{\text{th}}(\mathbf{r})$. Par conséquent, on trouve un déplacement même au niveau de l'approximation de champ moyen, contrairement au cas homogène. La nouvelle température critique, plus basse que T_C , satisfait toujours à l'équation d'Einstein, $n_{\text{th}}(\mathbf{0})\lambda_{\text{T}}^3 = g_{3/2}(1)$, l'effet des interactions répulsives étant de dilater légèrement le nuage à l'équilibre, donc de diminuer la densité au centre. Dans une boîte à volume fixé, il est bien entendu impossible de changer la densité à nombre d'atomes constant, mais pour un gaz piégé rien ne s'y oppose.

⁹Ce comportement est naturel : à très haute densité, on doit tendre vers la température critique de l'hélium liquide superfluide, de l'ordre de 2,2 K, comparable mais inférieure à $T_{C0} = 3,1$ K calculée pour la densité volumique mesurée [61]. Ce décalage négatif à haute densité s'interprète simplement en remplaçant dans la formule pour le gaz idéal la masse nue d'un atome d'hélium par une masse effective plus grande, qui tient compte des effets de friction sur le liquide environnant [145].

Pour de faibles déplacements, on peut calculer ces deux corrections perturbativement par rapport à la densité du gaz idéal (1.3). En utilisant le développement $T_C = T_{C0} + \delta T_C$ et $\mu = \mu^{(0)} + \delta\mu$, avec

$$\delta\mu = \frac{\hbar}{2}(\omega_x + 2\omega_\perp) + 2Un_{\text{th}}^{(0)}(0), \quad (3.28)$$

on obtient alors¹⁰

$$\begin{aligned} \delta T_C = & -\frac{\hbar}{2}(\omega_x + 2\omega_\perp) \left\{ \frac{\int d^{(3)}\mathbf{r} \frac{\partial n_{\text{th}}^{(0)}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}}{\int d^{(3)}\mathbf{r} \frac{\partial n_{\text{th}}^{(0)}}{\partial T} \Big|_{T=T_{C0}}} \right\} \\ & -2Un_{\text{th}}^{(0)}(\mathbf{0}) \left\{ \frac{\int d^{(3)}\mathbf{r} \frac{\partial n_{\text{th}}^{(0)}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} \left(1 - \frac{n_{\text{th}}^{(0)}(\mathbf{r})}{n_{\text{th}}^{(0)}(\mathbf{0})}\right)}{\int d^{(3)}\mathbf{r} \frac{\partial n_{\text{th}}^{(0)}}{\partial T} \Big|_{T=T_{C0}}} \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le calcul explicite des intégrales [43] donnent les contributions dûes aux effets de taille finie et aux interactions, respectivement,

$$\left(\frac{\delta T_C}{T_{C0}} \right)_{\text{taille finie}} \approx -0.728 \frac{\omega_m}{\bar{\omega}} N^{-1/3}, \quad (3.30)$$

$$\left(\frac{\delta T_C}{T_{C0}} \right)_{\text{interactions}} \approx -3.426 \frac{a}{\lambda_0} \approx -1.326 \frac{a}{a} N^{1/6}, \quad (3.31)$$

avec les moyennes arithmétiques $\omega_m = (2\omega_\perp + \omega_x)/3$ et géométriques $\bar{\omega} = \omega_\perp^{2/3} \omega_x^{1/3}$ des fréquences de piégeage, et en tenant compte de $\lambda_0 = \sqrt{2\pi\zeta(3)^{1/3} a} N^{-1/6}$ pour un gaz harmoniquement piégé. Ces expressions sont tracées sur la figure 3.8, ainsi que la zone explorée expérimentalement en gris.

Corrections dûes aux fluctuations critiques dans un piège : On peut cependant s'interroger sur l'impact des fluctuations critiques sur la température de transition du gaz piégé. En effet, si on étend directement la formule (3.26) valable pour le gaz idéal, on obtient une correction comparable au décalage dû au champ moyen, mais en sens opposé,

$$\frac{\delta T_C}{T_{C0}} \Big|_{\text{extrapolé}} \approx +0.5 \frac{a}{a} N^{1/6}, \quad (\leftarrow \text{FAUX!}) \quad (3.32)$$

Ce calcul naïf est-il justifié ?

La réponse est négative, car l'effet des fluctuations critiques de grandes longueurs d'onde est bloqué par la présence du potentiel de piégeage. Pour le voir, nous invoquons une fois de plus le critère de Ginzburg [43, 143], en suivant les arguments de la référence [143]. Supposons qu'il soit violé au centre du piège (supposé isotrope pour simplifier). A cause du potentiel de piégeage, qui augmente le potentiel chimique local (en valeur absolue) par rapport à sa valeur au centre, il est satisfait à partir d'un certain rayon donné par $M\omega^2 R_{\text{crit}}^2 \sim k_B T_{C0} (a/\lambda_0)^2$, ou $R_{\text{crit}}^2 \sim R_{\text{th}}^2 (a/\lambda_0) \ll R_{\text{th}}^2$, avec R_{th} le rayon global du nuage à la transition. Il vient donc que la région des fluctuations critiques, loin de s'étendre à l'ensemble du système, est

¹⁰Noter que la dimension du terme entre accolades est [température/énergie].

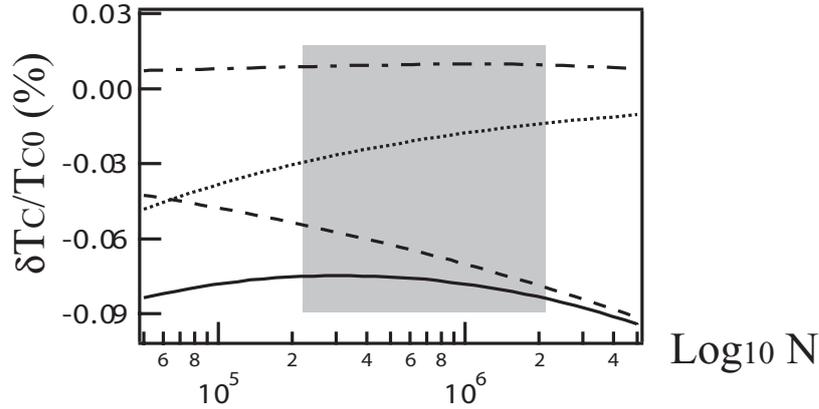


FIG. 3.8 – Déplacement calculé de la température critique, en fonction du nombre d’atomes de ^{87}Rb à la transition dans notre piège. Les contributions de taille finie (points) et du champ moyen (pointillés) sont du même ordre de grandeur (5 %) pour 8×10^4 atomes à la transition environ. Dans la zone grisée qui délimite la région que nous avons étudiée expérimentalement, le décalage dû au champ moyen domine le décalage total (trait plein). La contribution au deuxième ordre en a (champ moyen et effet résiduel des fluctuations critiques) ne dépasse pas le % dans cette gamme (trait interrompu).

en fait restreinte à une zone très petite près du centre. En conséquence, dans l’équation qui donne le nombre d’atomes critique, les fluctuations critiques de très grande longueur d’onde apportent un contribution corrigée de cet effet de volume, donc plus petite d’un facteur $(R_{\text{crit}}/R_{\text{th}})^3 \sim (a/\lambda_0)^3 \sim 10^{-6}$, par rapport au cas uniforme. Dans l’appendice C, nous donnons une présentation alternative de cette réduction.

Par contre, les fluctuations critiques de longueur d’onde plus courte que l_{crit} contribuent au second ordre en a/λ_0 (c’est également le cas dans le gaz homogène [140]). Le décalage au second ordre en a a été calculé par Arnold et Tommasik [143]. Il inclue l’effet de champ moyen calculé à l’ordre suivant, et une renormalisation du potentiel chimique par les fluctuations critiques extrapolé à partir de simulations Monte-Carlo [141, 142]. Le résultat prend la forme finale

$$\frac{\delta T_C}{T_{C0}} \Big|_{\text{ordre } a^2} = \left[c'_2 + c''_2 \ln \left(\frac{a}{\lambda_0} \right) \right] \times \left(\frac{a}{\lambda_0} \right)^2 \quad (3.33)$$

avec les coefficients numériques $c'_2 \approx -45,9$ et $c''_2 \approx -155,0$. Pour nos paramètres expérimentaux, ce décalage supplémentaire n’excède pas 1%. Notre sensibilité expérimentale ne nous permet pas de le mettre en évidence. Les calculs des références [146, 147] prévoient un écart plus important dû aux fluctuations critiques, comparable au calcul naïf (3.32). Cependant, si on extrapole le calcul de [146] au cas homogène, on trouve alors une correction en $a \ln(a)$ qui surestime également le déplacement [138]. De ce point de vue, les calculs de la référence [143] semblent plus fiables.

Pour résumer ces calculs un peu longs, on peut écrire les équations suivantes pour les cas homogènes et piégés,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta T_C}{T_{C0}}\right)_{\text{boîte}} &= \begin{pmatrix} 1.3 & - & 0 \end{pmatrix} \times \frac{a}{\lambda_0} + \left[c'_1 + c''_1 \ln\left(\frac{a}{\lambda_0}\right) \right] \times \left(\frac{a}{\lambda_0}\right)^2 + \dots \\
\left(\frac{\delta T_C}{T_{C0}}\right)_{\text{piège}} &= \begin{pmatrix} \underbrace{0}_{\text{critique}} & - & \underbrace{3.4}_{\text{champ}} \end{pmatrix} \times \frac{a}{\lambda_0} + \left[c'_2 + c''_2 \ln\left(\frac{a}{\lambda_0}\right) \right] \times \left(\frac{a}{\lambda_0}\right)^2 + \dots \\
&\quad \epsilon \ll \epsilon_{\text{crit}} \qquad \text{moyen}
\end{aligned}$$

On a mis particulièrement en évidence la contribution du premier ordre en a/λ_0 , en distinguant l'effet du champ moyen et des fluctuations critiques de grande longueur d'onde. L'effet de ces dernières est bloqué dans le cas piégé, même si l'effet des fluctuations de longueurs d'onde plus courte persiste au deuxième ordre¹¹.

3.3.3 Mise en évidence expérimentale du décalage de T_C

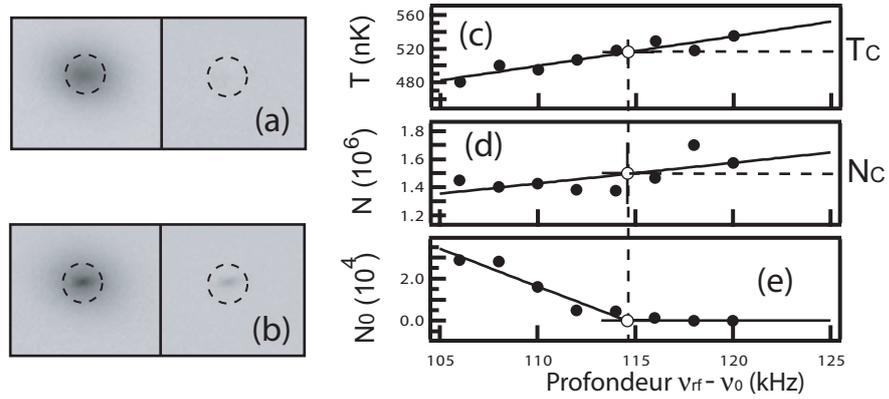


FIG. 3.9 – Localisation de la température critique et du nombre d'atomes à la transition. Le programme d'ajustement peut discriminer entre un nuage juste au dessus du seuil (a), et un nuage juste en dessous (b). Pour l'exemple (b), la fraction condensée est de l'ordre de 1 %. La valeur ν_{rf} de la fréquence du couteau d'évaporation à laquelle la transition est atteinte est obtenue par un fit linéaire sur le nombre d'atomes condensés (e). En reportant sur les courbes donnant T (c) et N (d) en fonction de ν_{rf} , on obtient la température critique T_C et le nombre d'atomes critique N_C .

Localisation du point critique : La mesure expérimentale de la température critique a été menée de la manière suivante. Pour un nombre d'atomes critique donné, nous avons pris une série de données « en rafale » autour du seuil, en variant la fréquence d'évaporation par pas de 2 kHz. Les images sont analysées en utilisant la procédure d'ajustement sur un nuage mixte (appendice B). Les fractions condensées ne dépassant pas quelques % dans les données examinées dans cette section, les considérations de la section précédente relatives au gaz non

¹¹Il y a aussi une contribution de champ moyen au deuxième ordre, incluse dans le calcul d'Arnold et Tommasik.

condensés sont pertinentes pour cette étude : aussi, nous avons appliqué la correction (3.18) pour éliminer les effets hydrodynamiques et améliorer la précision sur la température. De plus, nous avons constaté que le programme était capable de détecter des fractions condensées de l'ordre de 1 %, et de discriminer un nuage condensé d'un nuage non condensé à ce niveau de précision. Ensuite, les données moyennées sont tracées en fonction de la fréquence d'évaporation, comme sur la figure 3.9. La valeur ν_C de la fréquence d'évaporation à laquelle le seuil est atteint est obtenue par un ajustement linéaire sur le nombre d'atomes condensés. La variation de T et du nombre d'atomes total N est également ajustée par une droite, et en reportant la valeur de ν_C , on obtient la température critique T_C et le nombre d'atomes critique N_C . Cette mesure a été effectuée pour des nombres d'atomes critiques différents, variant entre 3×10^5 et 2×10^6 .

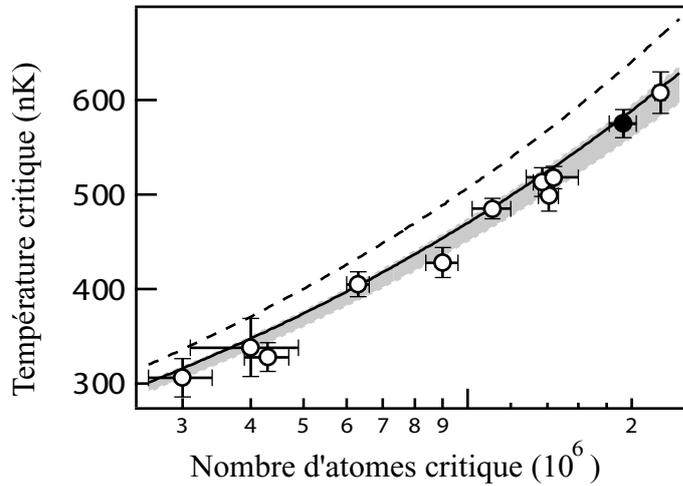


FIG. 3.10 – Observation d'un décalage de la température critique dû aux interactions. La prédiction du gaz idéal est tracée en pointillés, la courbe en trait plein tient compte du décalage dû au champ moyen. La zone grisée délimite les valeurs compatibles avec nos estimations sur les incertitudes de calibration.

Mesure du décalage : Les valeurs de T_C sont reportées en fonction de N_C sur la figure 3.10. En comparant à la température de transition attendue pour un gaz idéal (incluant l'effet de taille finie),

$$T_C^{\text{idéal}} = T_{C0} - \frac{\zeta(2)}{6\zeta(3)} \frac{\hbar(\omega_x + 2\omega_\perp)}{k_B}, \quad (3.34)$$

on se rend compte que les points expérimentaux se trouvent systématiquement plus bas, avec un écart de deux déviations standards. Par contre, si on compare avec le décalage dû au champ moyen (en traits pleins), on constate un accord assez bon, bien qu'un léger décalage vers le bas demeure. Pour le quantifier, nous avons supposé la forme fonctionnelle attendue, $\delta T_C/T_{C0} = -\alpha N^{1/6}$, avec un paramètre libre α . Un ajustement des données donne $\alpha = -0.009(1)_{-0.002}^{+0.003}$, en accord aux incertitudes près avec $\alpha = -1.326a/\bar{a} \approx -0.007$ attendu

pour nos fréquences de piégeage dans la théorie de champ moyen. Les incertitudes systématiques (bornes supérieures et inférieures) dépendent de la calibration du grandissement ($\pm 1.4\%$) et de l'écart probable dû au temps de coupure fini (-1.2%). Elles affectent à la fois la température et le nombre d'atomes (à travers le coefficient de correction C_N), et les incertitudes sur α en résultent. Elles correspondent à une précision de $\pm 3\%$ sur le décalage de T_C .

Nous concluons que les mesures expérimentales permettent de mettre en évidence un écart de deux déviations standard au gaz idéal. De plus, comme le déplacement mesuré est en bon accord avec le calcul de champ moyen présenté plus haut, nos mesures indiquent également que, contrairement au cas homogène, l'effet des fluctuations critiques de grandes longueurs d'onde est fortement réduit. Par exemple, le calcul naïf (3.32) ajouté à l'effet de champ moyen donnerait $\alpha = 0.004$. Comme nous l'avons vu, ceci est en accord avec les prédictions analytiques de [143], et le déplacement supplémentaire de T_C est compatible avec nos incertitudes, bien que de manière marginale. Au contraire, les calculs de renormalisation de [146, 147], qui prévoient un écart nettement supérieur, ne sont pas compatibles avec nos barres d'erreur. Notons cependant que notre mesure, qui tente d'extrapoler le point où la fraction condensée s'annule (aux effets de taille finie près), ne peut être comparée en toute rigueur aux calculs que si le comportement de la fraction condensée près de T_C est connu. En effet, on ne peut exclure un changement de pente très près de T_C dû aux fluctuations critiques, pour des nombre d'atomes condensés inférieurs au seuil de détectivité de notre méthode (quelques milliers). En ce cas, l'extrapolation linéaire que nous avons utilisée ne retrouverait pas le même point critique que celui obtenu dans le calcul. Sur la base des estimations de la référence [143], nous excluons qu'un tel effet produise une erreur supérieure à 1% sur T_C .

Pour terminer cette section, nous remarquons que, si l'effet des fluctuations critiques sur T_C est très réduit, il n'en est pas de même pour toutes les quantités observables. En particulier, la densité *au centre du piège* est susceptible d'être affectée, tout comme dans le cas homogène,

$$\frac{\delta n_c(\mathbf{0})}{n_c^{(0)}(\mathbf{0})} = \frac{3}{2}c_1 \frac{a}{\lambda_0} + \dots \quad (3.35)$$

Dans le cas du gaz idéal, la relation d'Einstein prédit $\mathcal{D} = n_c(\mathbf{0})\lambda_T^3 = g_{3/2}(1) \approx 2.612$ au seuil de transition. Ce critère reste valable dans le cadre de la théorie de champ moyen, qui revient à considérer un gaz idéal dans un potentiel modifié. Une signature des fluctuations critiques se traduirait donc par une violation du critère d'Einstein, comparable à celle que l'on attendrait dans un boîte. La différence entre les comportements de ces deux quantités reflète le fait que la densité critique est une quantité *universelle*, caractéristique de la théorie des champs avec interaction de type ϕ^4 , qui décrit le gaz dilué mais également le comportement à basse énergie de quantité d'autres systèmes [138, 140, 141, 142]. Par contre, la température critique n'est *pas* universelle, et dépend du système précis en considération, en particulier de ses caractéristiques « à haute énergie ». Expérimentalement, on mesure en fait la densité en colonne $\tilde{n} \sim R\sqrt{T_c}$, de surcroît après un temps de vol. Il est très probable que l'effet d'intégration tend à gommer la contribution de la zone critique qui se forme au centre, et masque le décalage sur la densité en colonne. Ainsi, des méthodes alternatives à la méthode d'imagerie par absorption sont sans doute nécessaires pour mettre en évidence les fluctuations

critiques [146].

3.4 Propriétés du nuage mixte

Une autre observable intéressante des gaz piégés est la fraction d'atomes condensés. Elle est accessible directement à travers les images d'absorption. Ceci représente une grande nouveauté par rapport à l'hélium liquide [66], où la mesure de la fraction condensée¹² est assez difficile [148].

Ce chapitre décrit une telle mesure de fraction condensée. Nous introduisons en premier lieu une théorie de type champ moyen (Hartree-Fock) du nuage mixte, incluant les interactions entre les deux composantes [45, 100, 149, 150, 151, 128, 129]. La pertinence de ce modèle pour décrire les nuages piégés a été confirmée par plusieurs études théoriques, basées sur la comparaison de ce modèle avec l'approximation de Popov (voir [44, 45] et l'appendice A) et un calcul *ab-initio* de type Monte-Carlo [100]. Les différences observées dans ces calculs sont minimales en ce qui concerne la thermodynamique. En nous basant sur la technique de temps de vol, nous mesurons une réduction de la fraction condensée de 20-30 % environ. Nos mesures sont en bon accord avec la théorie de Hartree-Fock du nuage mixte.

Dans un deuxième temps, nous améliorons la technique de temps de vol par l'adjonction d'un filtre entre les composantes condensées et thermiques, réalisé par diffraction de Bragg. Nous mesurons par ce biais des fractions condensées très basses et l'énergie d'interaction de chaque composante séparément.

3.4.1 Modèle à deux fluides à l'approximation de Hartree-Fock

Pour décrire le nuage à température finie, nous nous basons la théorie présentée dans l'appendice A, qui complète les calculs du chapitre I pour décrire le gaz dans son ensemble, en incluant le nuage thermique. Nous supposons que le nuage thermique est suffisamment dilué pour pouvoir négliger les corrélations entre atomes induites par les interactions (qui se manifestent essentiellement dans la partie dégénérée) : c'est ce qu'on appelle couramment l'approximation de Hartree-Fock [45, 149, 150, 152]. Dans le langage du premier chapitre, on suppose $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx n_0(\mathbf{r})n_0(\mathbf{r}') + 2n_{\text{th}}(\mathbf{r})n_{\text{th}}(\mathbf{r}')$ ¹³. Cela revient à considérer que le nuage thermique est constitué de (quasi)particules indépendantes, qui se déplacent dans un potentiel auto-consistant, constitué du potentiel de piégeage et d'un potentiel d'interaction moyenné,

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + 2Un_0(\mathbf{r}) + 2Un_{\text{th}}(\mathbf{r}). \quad (3.36)$$

¹²Attention, il n'y a pas identité en général entre fraction condensée et fraction superfluide. L'hélium liquide à $T = 0$ est complètement superfluide, bien que la fraction condensée ne soit que de 10 % environ [61, 148].

¹³Comme nous l'avons indiqué au chapitre I, cela revient à supposer une statistique gaussienne pour le champ $\delta\hat{\Psi}$.

A l'équilibre, la fonction de distribution f décrit alors une distribution de Bose-Einstein idéale dans le potentiel V_{eff} ,

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[\beta \mathcal{H}_{\text{SC}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})] - 1}, \quad (3.37)$$

avec l'hamiltonien semi-classique $\mathcal{H}_{\text{SC}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2M + V_{\text{eff}}(\mathbf{r})$. Bien entendu, la partie dégénérée ne peut pas être traitée par cette approximation de champ moyen. Nous montrons dans l'appendice A que la théorie développée au premier chapitre reste valable, à condition d'incorporer le terme de champ moyen $2Un_{\text{th}}$ dans le potentiel pour tenir compte de la présence du nuage thermique. Dans l'approximation de Thomas-Fermi, on obtient alors le profil de densité n_0 par

$$\mu = Un_0(\mathbf{r}) + 2Un_{\text{th}}(\mathbf{r}) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (3.38)$$

La densité du nuage thermique s'obtient par intégration de la fonction de distribution sur les impulsions, soit

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}) \lambda_{\text{T}}^3 = \begin{cases} g_{3/2} \left\{ \exp \left(-\beta Un_0(\mathbf{r}) \right) \right\} & \text{si } \tilde{r} \leq 1, \\ g_{3/2} \left\{ \exp \left(\beta \mu - \beta V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - 2\beta Un_{\text{th}}(\mathbf{r}) \right) \right\} & \text{si } \tilde{r} \geq 1, \end{cases} \quad (3.39)$$

avec $\tilde{r}^2 = \tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2$. Les coordonnées réduites $\tilde{\rho}$ et \tilde{z} sont adimensionnées par les dimensions R , L où n_0 s'annule, conformément à (3.38). Les équations couplées (3.38) et (3.39), qui décrivent les composantes « normales » et « dégénérées », constituent la base de notre étude du nuage mixte. Elles sont également capables de décrire un condensat presque pur ($N_0 \approx N$) ou un nuage thermique au dessus du seuil de condensation ($N_0 \approx 0$). Elles permettent donc en particulier de calculer la température critique et la fraction condensée du nuage. Pour cela, il faut résoudre de manière auto-consistante les équations (3.38) et (3.39) pour un nombre d'atomes total N et une température T donnée, sous la condition de normalisation

$$N = \int d^{(3)}\mathbf{r} \left(n_0(\mathbf{r}) + n_{\text{th}}(\mathbf{r}) \right), \quad (3.40)$$

qui permet de fixer le potentiel chimique $\mu = Un_0(\mathbf{0}) + 2Un_{\text{th}}(\mathbf{0})$. Cette résolution doit être faite numériquement.

Pour terminer cette section, nous introduisons le paramètre sans dimensions η , qui caractérise l'influence des interactions sur la thermodynamique du gaz de Bose piégé [56],

$$\eta = \frac{\mu_{\text{TF}}[N_0 = N]}{k_{\text{B}}T_{\text{C0}}} = \frac{\zeta(3)^{1/3} 15^{2/5}}{2} \left(\frac{a}{\tilde{a}} \right)^{2/5} N^{1/15}, \quad (3.41)$$

où le potentiel chimique est évalué dans l'approximation de Thomas-Fermi, en utilisant le nombre d'atomes total N au lieu de N_0 . Ce paramètre est en fait caractéristique de l'approximation quasi-classique, et Giorgini *et al.* [44] ont montré la propriété remarquable suivante (indépendante de l'approximation de Hartree-Fock) : tous les paramètres thermodynamiques du système ont un comportement universel en fonction des deux seules variables η et T/T_{C0} , avec T_{C0} la température de transition du gaz idéal.

Modèle semi-idéal : Dans la plus grande partie de la gamme de température, la densité du nuage thermique est suffisamment faible pour qu'on puisse négliger le terme correspondant dans (3.36), et ne garder que le terme d'interaction $2Un_0$ [153, 154]. Dans ce modèle dit « semi-idéal », on trouve alors que les densités du condensat et du nuage thermique se simplifient en

$$n_0(\mathbf{r}) = n_{\text{om}}(1 - \tilde{r}^2), \quad (3.42)$$

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_{\text{T}}^3} g_{3/2} \left\{ \exp \left(-\beta\mu \left| 1 - \tilde{r}^2 \right| \right) \right\}. \quad (3.43)$$

Le condensat est décrit par la solution de Thomas-Fermi, à condition de déterminer le nombre d'atomes condensés N_0 par la condition de normalisation [154]

$$\begin{aligned} N &= \int d^{(3)}\mathbf{r} \left(n_0(\mathbf{r}) + n_{\text{th}}(\mathbf{r}) \right) \\ &= N_0 + \frac{15N_0}{4n_{\text{om}}\lambda_{\text{T}}^3} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^3} \left(e^{\frac{\mu}{k_{\text{B}}T}} \int_0^1 \sqrt{u} e^{-ju} du \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\mu}{k_{\text{B}}T}} \int_1^{+\infty} \sqrt{u} e^{ju} du \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

L'approximation indiquée est valable à l'ordre le plus bas en α , c'est à dire à haute température $k_{\text{B}}T > \mu$. Elle revient à négliger totalement l'effet du potentiel de champ moyen sur les états excités, en considérant que la vaste majorité des atomes thermiques orbitent sur des trajectoires externes au condensat, pratiquement balistiques. Les interactions n'interviennent que pour modifier le potentiel chimique à travers l'équation de Gross-Pitaevskii : le nuage thermique est pratiquement identique à un gaz idéal saturé, hormis le « coeur central » qui contribue de manière négligeable à (3.44).

3.4.2 Profils de densité dans le piège

Dans le modèle simple de Hartree-Fock, la forme spatiale de la distribution en densité est essentiellement déterminée par l'équilibre entre le potentiel de piégeage V_{ext} , et le potentiel (répulsif) de champ moyen $2Un_0(\mathbf{r})$. Ce dernier s'exerce dans le volume du condensat et son effet est naturellement d'expulser le nuage thermique vers la périphérie du piège. Ainsi, la ségrégation spatiale entre la composante condensée et la composante normale est encore augmentée par les interactions. Nous comparons sur la figure 3.11 les profils de densité dans le modèle semi-idéal aux résultats du calcul auto-consistant évoqué plus haut. L'accord est raisonnable dès que la fraction thermique dépasse 10 % environ, bien qu'en général le modèle semi-idéal sur-estime la taille du condensat, et donc sous-estime la densité au centre. En effet, le nuage thermique agit en retour sur le condensat par le terme $2Un_{\text{th}}$. La « coquille » d'atomes thermiques qui entoure le condensat exerce une force de pression dirigée vers le centre du piège, qui tend à comprimer légèrement le condensat. Cet effet de compression est la conséquence principale de la prise en compte des interactions avec le nuage thermique dans la distribution statique du nuage piégé. Enfin, sur la figure 3.11d, nous avons indiqué la correction au profil de densité « intérieur » due aux excitations collectives. On constate visuellement que, même pour une température relativement basse, elle peut être omise sans commettre une erreur importante.

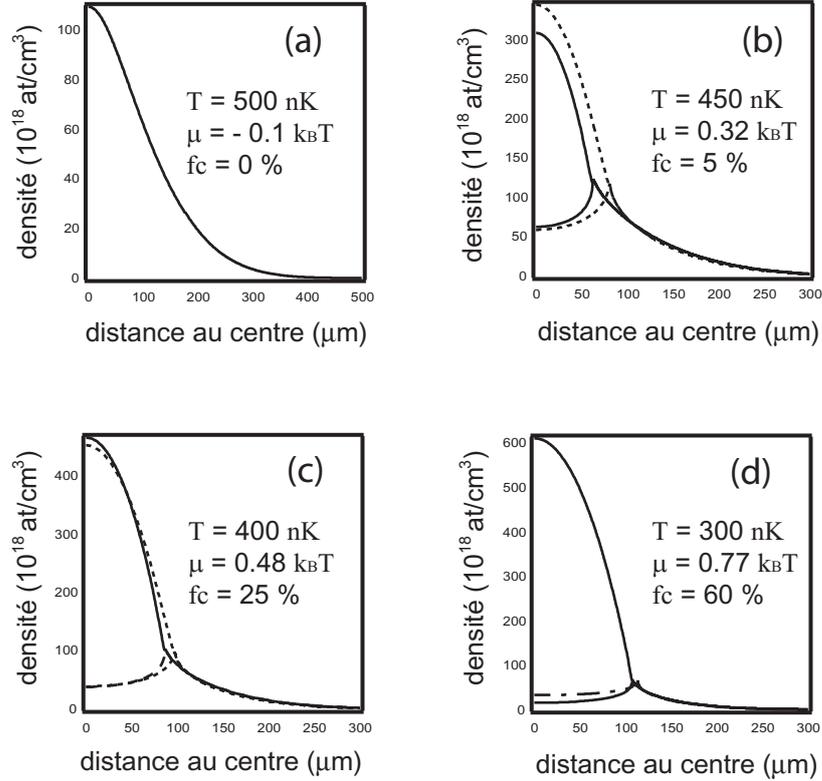


FIG. 3.11 – Profil de densité dans l’approximation de Hartree-Fock. Nous avons fixé le nombre d’atomes total à 10^6 (correspondant à $T_{C0} = 515$ nK) pour toutes les courbes, et choisi quatre températures différentes pour la comparaison. La courbe en traits pleins donne le profil de densité total, et l’extrapolation de la densité du nuage thermique sous le profil du condensat. Les pointillés sur (b),(c) donnent le résultat obtenu dans le modèle semi-idéal. Le trait interrompu sur (d) indique la correction dûe aux excitations collectives.

3.4.3 Réduction de la fraction condensée par les interactions

Nous nous concentrons maintenant sur l’évolution de la fraction condensée au cours de la rampe d’évaporation. Nous avons déjà mentionné que la fraction condensée suivait une loi universelle en fonction de deux paramètres seulement, T/T_{C0} et $\eta = \mu_{TF}/k_B T_{C0}$ [équation (3.41)]. Pour en tirer parti, nous reportons la fraction condensée en fonction de T/T_{C0} sur la figure 3.12. Le nombre d’atomes total varie au cours de la rampe, à cause de l’évaporation. Cependant, le paramètre $\eta \sim N^{1/15}$ varie peu, entre 0.47 et 0.51, si bien que nous avons utilisé la valeur moyenne $\eta = 0.49$ pour tracer les courbes théoriques (en utilisant les valeurs réelles, on change de manière imperceptible les courbes théoriques). En fixant η , il n’y a plus aucun paramètre ajustable dans le modèle théorique.

Le résultat important est que le modèle du gaz idéal, en incluant les effets de taille finie (pointillés sur la figure 3.12) est exclu par plus de deux déviations standard par nos mesures.

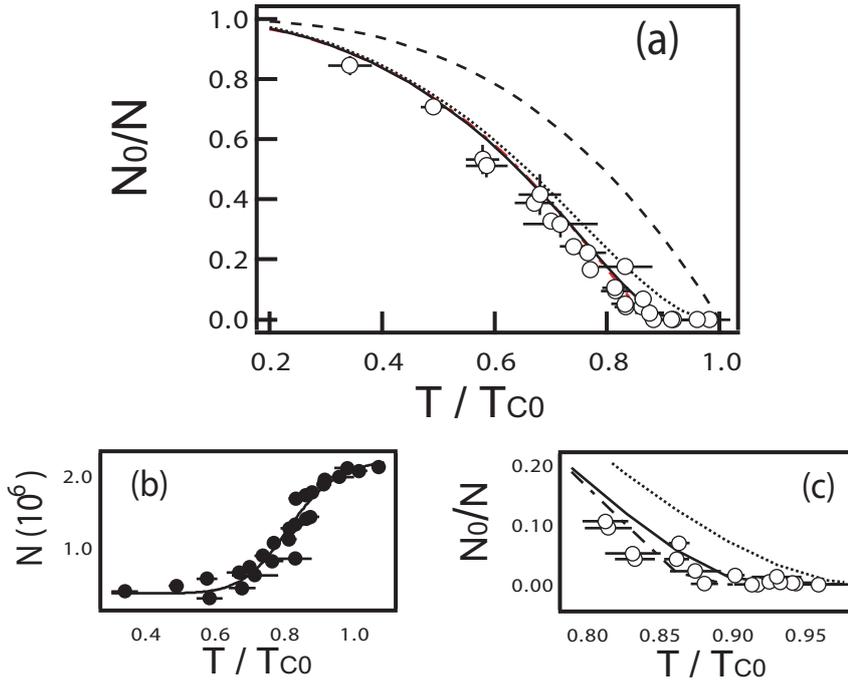


FIG. 3.12 – Mise en évidence de la réduction de la fraction condensée par les interactions. Les points expérimentaux sont en accord avec la théorie de Hartree-Fock (trait plein), et excluent clairement un comportement idéal (en pointillés) ou même semi-idéal (points). La ligne en traits interrompus correspond à la formule (3.46). Elle reproduit très fidèlement les prédictions du modèle Hartree-Fock, excepté dans le voisinage immédiat de la température critique (c). Pour tracer les courbes théoriques, on a utilisé $\eta = 0.49$. Cette valeur correspond aux points expérimentaux à 4 % près.

Dans ce cas, nous avons vu que la loi donnant la fraction condensée en dessous de T_C était [voir Eq. (1.8)] :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_{C0}} \right)^3,$$

avec $T < T_{C0} \approx 0.94N^{1/3}\hbar\bar{\omega}/k_B$ la température de transition du gaz idéal à la limite thermodynamique. Les effets de taille finie [56] corrigent légèrement cette prédiction, sans toutefois expliquer la différence avec nos données. Par contre, les résultats expérimentaux sont en bon accord avec le modèle Hartree-Fock du nuage mixte présenté plus haut (courbe en traits pleins sur la figure 3.12). En effet, en présence d'interactions, le potentiel chimique (positif) augmente par rapport à un gaz idéal où $\mu = 0$. Il est alors favorable de placer plus d'atomes dans la partie thermique pour diminuer l'énergie d'interaction dans le condensat, qui domine l'énergie totale. La clarté de cette observation constitue une première à notre connaissance : dans des mesures similaires précédemment reportées dans la littérature, l'effet des interactions sur la fraction condensée ne pouvait mesuré à cause de l'importance des barres d'erreur et/ou des effets de taille finie. Au contraire, nos données le montrent clairement. Nous avons également reporté la courbe correspondant au modèle semi-idéal, c'est-à-dire en négligeant les interactions dans le nuage thermique (terme $2Un_{th}$). On voit que l'accord avec les données est médiocre pour des températures proches de T_C . Ceci montre que dans cette zone, il est

crucial de tenir compte des interactions couplées entre le condensat et le nuage thermique.

Cette réduction de la fraction condensée est liée à la présence du potentiel de piégeage, et constitue donc une spécificité des gaz piégés. Pour un gaz homogène avec les mêmes paramètres [45], on observerait le phénomène inverse. En effet, dans ce cas, les deux composantes (normales et condensées) occupent exactement le même volume, et l'énergie d'interaction est diminuée du facteur 2 d'indiscernabilité par l'adjonction d'atomes supplémentaires au condensat à partir du nuage thermique. Il est donc naturel que l'on observe au contraire une *augmentation* du nombre d'atomes condensés par rapport au cas idéal pour un gaz uniforme dans une boîte.

Pour un condensat dans le régime de Thomas-Fermi, on peut calculer à partir de (3.44) la fraction condensée en traitant le nuage thermique en perturbation par rapport au gaz idéal. À l'ordre le plus bas en η , on obtient [94]

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_{C0}}\right)^3 - \eta \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_{C0}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{T}{T_{C0}}\right)^3\right]^{2/5}. \quad (3.46)$$

Cette formule reproduit très fidèlement (2 % près) le calcul auto-consistant sur pratiquement toute la gamme de température, bien mieux que le modèle semi-idéal traité de manière auto-consistante. C'est assez mystérieux, compte tenu des approximations drastiques faites pour obtenir la formule (3.46).

3.4.4 Compression du nuage thermique par le condensat

On obtient une évidence supplémentaire de l'interaction mutuelle entre le nuage thermique et le condensat en examinant la longueur (dimension axiale) du condensat en fonction de la température (figure 3.13). En traçant la taille attendue pour un condensat dans le régime de Thomas-Fermi, en incluant l'expansion de 4 % prédite par les équations d'échelle (1.30), on surestime systématiquement la longueur mesurée. La longueur calculée dans le modèle Hartree-Fock *du gaz piégé* est par contre légèrement plus faible. En l'absence d'une théorie plus complète de l'expansion, nous supposons pour tenir compte de l'expansion que la longueur après temps de vol se déduit de la longueur dans le piège par le même facteur d'échelle que dans le régime de Thomas-Fermi (*i.e.* $b_x \approx 1.04$). En ce cas, l'accord avec nos observations devient satisfaisant, et constitue une signature supplémentaire de l'effet de compression du condensat par la « coquille thermique » qui l'entoure.

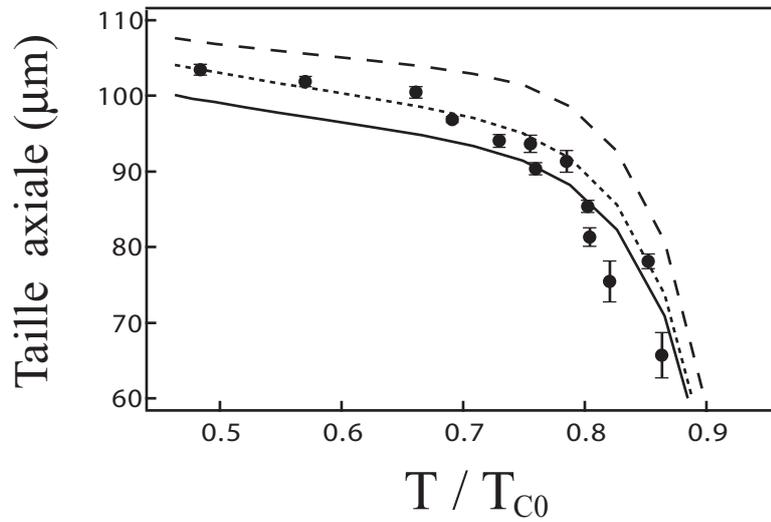


FIG. 3.13 – Compression du condensat par le nuage thermique. Les cercles représentent les points expérimentaux. La taille attendue pour un condensat dans le régime de Thomas est tracée en pointillés longs. La courbe en traits pleins indique la taille calculée dans le modèle Hartree-Fock pour le nuage piégé. La courbe en pointillés courts prend l'hypothèse que le condensat s'étale de 4 % dans la direction axiale, *i.e.* de la même quantité qu'un condensat dans le régime Thomas-Fermi.

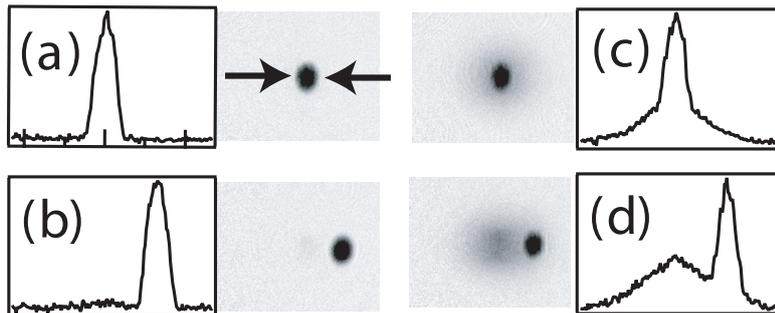


FIG. 3.14 – Séparation du condensat et du nuage thermique par diffraction de Bragg. On constate que après la séparation que le condensat ne dissimule aucune structure particulière dans la distribution thermique.

3.5 Filtrage des composantes thermiques et condensées par diffraction de Bragg

3.5.1 Sélectivité de la diffraction de Bragg

Nous avons vu dans la section introductive de ce chapitre que le nuage thermique était expulsé du centre du piège par le potentiel de champ moyen exercé par le condensat. On peut alors se demander s'il ne reste pas des traces du creux de densité dans le piège sur la distribution après temps de vol. Dans ce cas, l'hypothèse d'une fonction de Bose saturée pour décrire la fraction thermique conduirait en particulier à sous-estimer la fraction condensée. Il est cependant difficile de répondre directement à cette question expérimentalement, puisque le condensat recouvre la partie centrale du nuage thermique dans laquelle l'ajustement pourrait faire une erreur. Pour contourner cette difficulté, nous avons utilisé un pulse de Bragg pour séparer le condensat et le nuage thermique dans l'espace des vitesses.

La diffraction de Bragg d'un condensat par une onde lumineuse stationnaire sera décrite en détails dans le chapitre VI. Ici, nous nous contentons d'indiquer que cette technique permet de transférer, de manière cohérente et soudaine, tout ou partie de la fonction d'onde du condensat vers un état d'impulsion élevée $2\hbar\mathbf{k}_L$, où \mathbf{k}_L est le vecteur d'onde associé à une des ondes progressives qui composent le réseau. En termes de vitesses, cela correspond à $2\hbar k_L/M \approx 1,1$ cm/s, c'est-à-dire à un déplacement de plusieurs centaines de μm pour le temps de vol de 22,3 ms utilisé.

Le point-clé est que la diffraction de Bragg dans les conditions utilisées ici n'est que peu sensible à la distribution en vitesses du condensat. Pour un vrai condensat, celle-ci est très étroite dans la direction du réseau (dirigé selon l'axe long). Dans le régime de Thomas-Fermi, la largeur Δ_0 de la résonance est dominé par la vitesse d'expansion axiale, et correspond à $\Delta_0 \sim 200$ Hz pour les condensats étudiés dans ce chapitre. Le pulse de Bragg utilisé dure typiquement 250 μs , avec une enveloppe temporelle en forme de créneau. Dans l'espace des fréquences, cela correspond à une largeur de 1.5 kHz environ, si bien qu'on n'a aucune sélectivité en vitesses, et qu'on peut diffracter 100 % des atomes (« pulse π »). Par contre, la largeur typique en vitesses du nuage thermique, $\sqrt{8k_B T_0/\pi M}$, correspond à une largeur Doppler Δ_{th} variant entre 12 et 28 kHz, si T_0 varie entre 100 et 500 nK. Vis-à-vis de la partie thermique, on est donc sélectif en vitesses, ce qui signifie que l'efficacité globale de diffraction est supprimée par un facteur $\Delta_0/\Delta_{\text{th}} \sim 10^{-2}$ par rapport aux atomes condensés. Le nuage thermique sera donc peu affecté par le réseau de diffraction¹⁴. Ceci est illustré sur la figure 3.14, pour un condensat presque pur et pour un nuage avec une fraction thermique significative. Dans le premier cas, on a réglé les paramètres pour diffracter un maximum d'atomes à partir d'un condensat le plus pur possible. On atteint des efficacités proches de 100 % (96 sur l'exemple choisi). Dans le second cas, où les paramètres du réseau sont identiques, seule la fraction condensée est affectée par le réseau diffractant, et, à cause de

¹⁴En fait, nous estimons à partir des calculs du chapitre VI que moins de 5 % des atomes sont diffractés près de T_C , et environ 10 % pour $T \sim 0,3T_{C0}$. Néanmoins, nous nous attendons à ce que position et vitesses soient largement décorréélées dans le nuage thermique (Noter que c'est rigoureusement vrai pour un gaz de Boltzmann, quel que soit le potentiel). Ainsi, le profil de densité ne devrait pas être modifié significativement.

l'impulsion impartie par le processus, elle se sépare de la fraction thermique en temps de vol. Notons qu'une technique similaire a été utilisée dans [155] pour séparer le condensat du nuage thermique dans un réseau optique et étudier les modes collectifs de ce système.

De ces mesures, nous tirons deux conclusions. Premièrement, aucune variation spectaculaire de la densité du nuage thermique n'est visible. Le profil est mou sous le pic du condensat, et il n'y a aucun souvenir de l'effet de répulsion par le condensat qui creuse le profil du nuage thermique près du centre. C'est assez naturel, puisqu'après un temps de vol suffisamment long, on s'attend à observer la distribution en vitesses après expansion (*i.e.* en incluant la conversion de l'énergie d'interaction en énergie cinétique). Celle-ci, contrairement à la densité spatiale initiale, ne présente pas de dépression marquée au centre. Dans notre cas ($\omega_x t \approx 1, 2$), on n'est pas dans le régime de champ lointain vis à vis de l'expansion axiale. Cependant, on est y largement dans les directions radiales, et cela se révèle suffisant pour masquer le trou. Par contre, la distribution que nous observons est en général plus plate que la fonction de Bose g_2 , comme nous le montrons sur la figure 3.15.

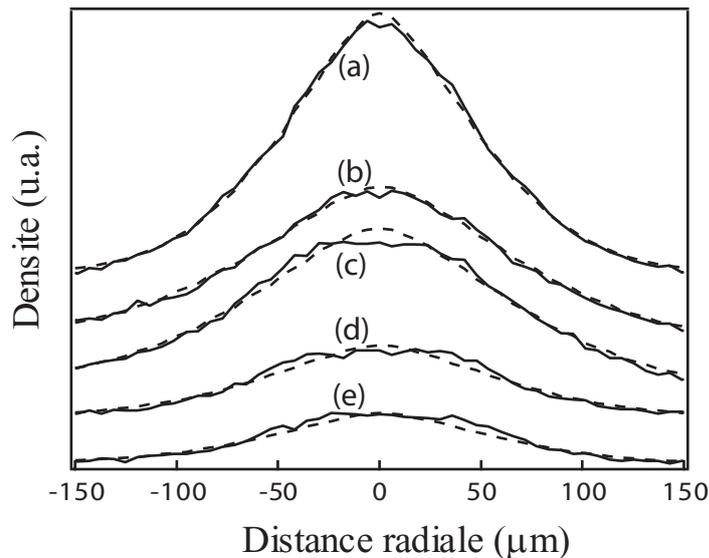


FIG. 3.15 – Profil radial du nuage thermique, dévoilé par le filtre de Bragg. On constate que, après la séparation, le condensat ne dissimule aucune structure particulière dans la distribution thermique. Par contre, le profil expérimental (ligne continue) est en général plus plat que la fonction de Bose g_2 ajustée sur les images (tracées en pointillés). La courbe (a) correspond à un nuage au dessus du seuil, et elle est par contre bien ajustée par une fonction de Bose. Les courbes (b), (c), (d) et (e) correspondent à des fractions condensées de 5, 15, 35 et 60 %, respectivement.

Si on compare les résultats de l'analyse de ces images « à composantes séparées », à ceux d'images témoins prises dans les mêmes conditions, on trouve que les deux procédures d'ajustement donnent les mêmes résultats pour la fraction condensée et les tailles des nuages à 5 % près au pire (une valeur comparable à la dispersion des mesures dans cette expérience

particulière). Nous concluons donc que la procédure « standard » est capable de déterminer la fraction condensée à ce niveau de précision. Par contre, cette expérience ne nous dit rien sur l'exactitude de la détermination de la température à partir des tailles du nuage thermique après expansion.

3.5.2 Thermométrie à basse température

Les mesures de fraction condensée de la section précédente reposaient sur la technique de temps de vol. Elles sont ainsi intrinsèquement limitées : quand la température devient comparable ou inférieure au potentiel chimique, le nuage thermique est dissimulé sous le condensat, même après le temps de vol. Il devient alors difficile de mesurer la fraction condensée, et impossible de mesurer la température. Pour cette raison, les données de la section 3.4.3 ne descendent pas en dessous de $T \approx 0.4T_{C0}$, soit une fraction condensée $N_0/N \lesssim 80\%$.

Grâce à l'utilisation de la diffraction de Bragg, on peut cependant contourner cette limitation : en effet, comme on sépare spatialement les deux composantes, on a accès aux informations sur le nuage thermique même à très basse température. Une telle mesure est présentée sur la figure 3.16. La gamme de température couverte est plus large, de $0.2T_{C0}$ jusqu'à T_C , et reste en bon accord avec la fraction condensée prédite par le modèle Hartree-Fock. On pourrait se demander si cette technique pourrait permettre de mesurer à très basse température la contribution des excitations collectives ou la déplétion quantique. Dans l'état actuel des choses, cela ne semble pas réaliste. En effet, plus la température est basse, et plus une fraction importante des atomes thermiques sera diffractée. Pour les températures les plus basses que nous avons obtenues (environ 50 nK), nous estimons que jusqu'à 20 % des atomes thermiques peuvent l'être. De plus, expérimentalement nous avons observé des fluctuations typiques de 2 % sur l'efficacité de diffraction. Ainsi, des mesures de fraction condensée de l'ordre de 95 % sont suspectes. Néanmoins, cette technique permet de mesurer des fractions condensées de 90 % à 75 %, difficilement accessibles par la méthode habituelle.

3.5.3 Mesure de l'énergie d'expansion

La méthode du filtre de Bragg permet également de mesurer indépendamment les tailles quadratiques moyennes des deux composantes dans la direction (radiale) y . Si on néglige les effets hydrodynamiques, l'énergie E_y disponible pour l'expansion dans la direction y est donnée par la somme de l'énergie cinétique dans la direction y (toujours dominée par celle du nuage thermique) et de l'énergie d'interaction¹⁵,

$$E_y = \frac{1}{3}E_{\text{cin}} + \frac{1}{2}E_{\text{int}}. \quad (3.47)$$

¹⁵En toute rigueur, une fraction de l'énergie d'interaction est également convertie en énergie cinétique axiale. Comme nous l'avons vu, elle est de l'ordre de quelques pour cents dans notre situations (4 % à très basse température). Nous négligeons la correction correspondante dans notre démarche.

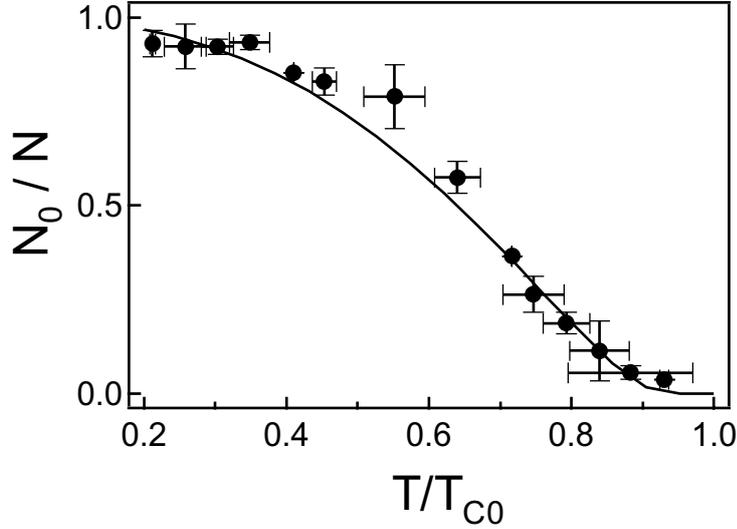


FIG. 3.16 – Fraction condensée mesurée grâce au filtre de Bragg, avec la prédiction du modèle Hartree-Fock pour $\eta = 0.47$ en traits pleins.

En définissant ζ_0 et ζ_{th} par les équations (3.19) et (3.20), nous avons

$$E_{\text{int}} = \frac{U}{2} \left(\int d^{(3)}\mathbf{r} n_0(\mathbf{r})^2 \right) + k_B T (2\zeta_0 + \zeta_{\text{th}}), \quad (3.48)$$

Comme l'expansion radiale est asymptotique, cette énergie, entièrement convertie en énergie cinétique, peut être mesurée à partir de $\langle y^2 \rangle = 2E_y t^2 / M$.

De la même manière, si on définit une énergie d'expansion pour le nuage thermique par

$$E_y^{(\text{th})} = \frac{1}{3} E_{\text{cin}} + k_B T (\zeta_0 + \zeta_{\text{th}}), \quad (3.49)$$

elle sera reliée à la taille quadratique moyenne du nuage thermique $\langle y^2 \rangle_{\text{th}}$ par $\langle y^2 \rangle_{\text{th}} = 2E_y^{(\text{th})} t^2 / M$.

Nous présentons sur la figure 3.17 une mesure de l'énergie d'expansion, et sur la figure 3.18 de l'énergie d'expansion thermique correspondante. Ces points ont été collectés en utilisant le filtre de Bragg, pour pouvoir analyser séparément les deux composantes. Nous pouvons également calculer ces quantités dans le modèle Hartree-Fock. En adimensionnant les énergies par $Nk_B T_{C0}$, elles ne dépendent plus que de $\eta = 0.47$ et T/T_{C0} . L'accord entre un tel calcul et nos mesures est correct, et en particulier l'énergie mesurée est toujours plus élevée que celle du gaz idéal. Comme on s'y attend, près de T_C , l'énergie totale se réduit pratiquement à la composante cinétique, alors qu'à basse température elle est dominée par l'énergie d'interaction dans le condensat. L'écart manifeste entre ces deux courbes ne signifie pas que la mesure de température est faussée d'autant. En effet, il ne faut pas oublier que l'on exclue la région centrale de l'ajustement qui détermine T , pour diminuer les effets de la répulsion de champ moyen. Le bon accord que nous trouvons avec l'énergie calculée confirme dans une certaine

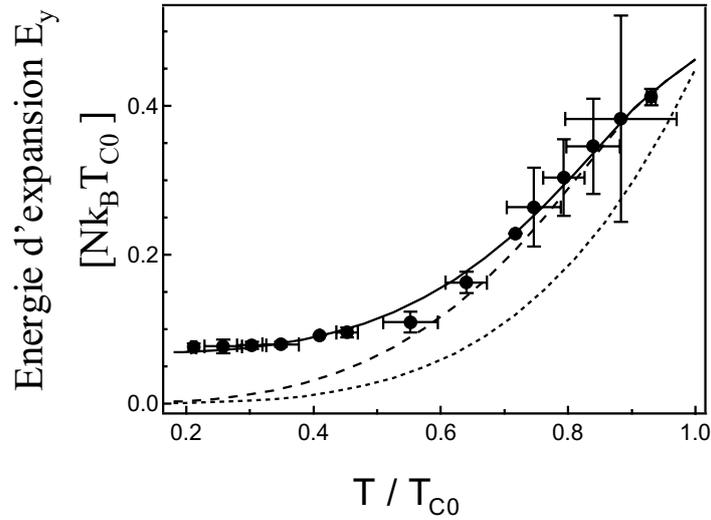


FIG. 3.17 – Energie d’expansion totale E_y , mesurée grâce au filtre de Bragg. La prédiction du modèle Hartree-Fock, tracée en trait continu pour $\eta = 0.47$, est vérifiée dans une large gamme de températures, contrairement au modèle du gaz idéal (pointillés courts), et l’énergie du nuage thermique $E_y^{(th)}$ (pointillés longs).

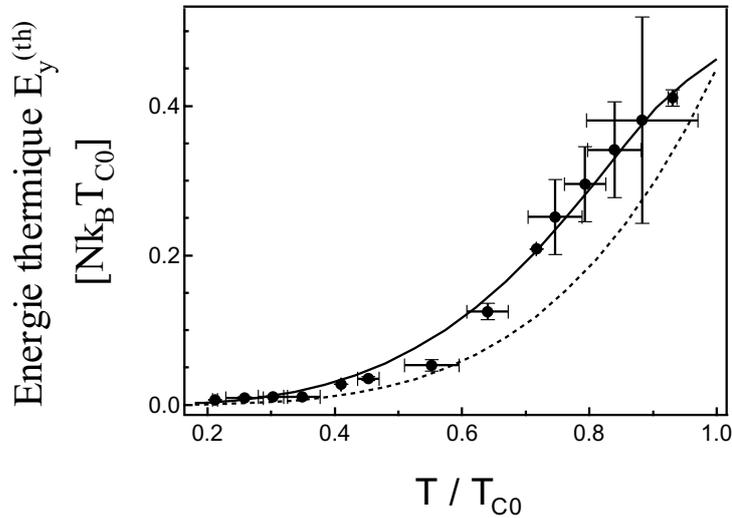


FIG. 3.18 – Energie d’expansion mesurée grâce au filtre de Bragg. La prédiction du modèle Hartree-Fock, tracée en traits pleins pour $\eta = 0.47$, est vérifiée pour les plus hautes températures. Pour les plus basses, on ne peut pas vraiment distinguer sur ces données entre le modèle Hartree-Fock et celui du gaz thermique idéal (en pointillés courts).

mesure l’efficacité de cette procédure. Notons qu’au contraire, les effets hydrodynamiques, qui déforment la distribution en vitesses, ne sont probablement pas éliminés.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'expansion du nuage thermique était perturbée par les collisions entre atomes. Pour des nuages non-condensés, nous avons pu mettre en évidence l'importance de la relaxation. Nos mesures constituent ainsi une observation de l'entrée dans le régime hydrodynamique, et elles permettent de tester à une bonne précision le modèle d'échelle de [130]. Nous expliquons comment corriger de ces effets dans la mesure de température, une procédure cruciale dans la mesure de T_C . En présence du condensat, aucune théorie n'est disponible et nous nous contentons de constater des déviations à l'expansion idéale, qui restent tout de même modestes. Ainsi, si la mesure de température est faussée, l'ordre de grandeur de l'erreur commise est suffisamment faible pour pouvoir envisager des mesures thermodynamiques précises.

Les mesures expérimentales de la température critique que nous avons présentées permettent de mettre en évidence un écart de deux déviations standard par rapport au gaz idéal. De plus, le déplacement mesuré est en bon accord avec le calcul de champ moyen présenté plus haut, ce qui indique que le critère d'Einstein reste valable à une très bonne approximation (quelques %). Nos mesures confirment ainsi que les fluctuations critiques n'affectent pas T_c au premier ordre, contrairement au cas homogène.

Nous avons également étudié l'effet des interactions sur deux importantes quantités thermodynamiques, la fraction condensée et l'énergie d'expansion radiale. Dans les deux cas, les expériences sont bien reproduites par une théorie de champ moyen qui décrit l'interaction mutuelle entre le condensat et le nuage thermique. Ceci montre expérimentalement que le rôle des excitations collectives sur la thermodynamique est négligeable, et constitue à notre connaissance la première mesure quantitative de l'influence des interactions sur la thermodynamique. De plus, le comportement observé diffère considérablement de celui prédit pour un gaz homogène. Ces mesures soulignent donc la spécificité des gaz piégés, et le rôle important joué par le potentiel de piégeage. Nous avons également amélioré la méthode de thermométrie usuelle par l'adjonction d'un filtre de Bragg entre le condensat et le nuage thermique. Ainsi, des températures aussi basses que $T \approx 0.2T_{C0}$ peuvent être mesurées. Nous soulignons cependant qu'une comparaison plus précise avec la théorie est limitée par notre méconnaissance des détails de l'expansion du nuage mixte. Ainsi, des études supplémentaires, tant théoriques qu'expérimentales, sont nécessaires pour mieux caractériser la dynamique.

Dans le chapitre suivant, nous allons quitter momentanément le domaine des températures finies pour nous intéresser au problème du laser à atomes. La fraction thermique n'y joue qu'un rôle mineur, que nous n'avons pas cherché à étudier en détails, et les expériences présentées ont été menées à basse température. Nous reviendrons au problème d'une température non-nulle au chapitre 5, avec un point de vue totalement différent. Nous nous intéresserons aux excitations collectives, qui, si elles ne jouent pas de rôle sur les propriétés statiques, peuvent affecter de façon dramatique la cohérence du système.

Le laser à atomes : dynamique d'extraction et divergence transverse

La dénomination de « laser à atomes », parfois utilisée pour désigner les condensats de Bose-Einstein, repose sur une analogie forte avec les lasers photoniques. Dans un laser traditionnel, une pompe externe transfère des atomes présents dans le milieu amplificateur d'un niveau fondamental vers un niveau excité. Si le pompage est suffisamment puissant, l'excitation l'emporte sur la relaxation (due à l'émission spontanée, aux collisions, ...) et l'inversion de population des niveaux atomiques est atteinte. Elle conduit à la concentration des photons dans un mode particulier de la cavité résonante, d'une manière générale celui pour lequel le gain total est le plus élevé¹. Ce champ lumineux macroscopique est couplé vers l'extérieur de la cavité par un des miroirs, qui transmet une faible partie des photons accumulés.

Dans le cas d'un condensat de Bose-Einstein, la cavité atomique est constituée par le piège magnétique qui confine les atomes, et les modes sont les états propres dans ce potentiel. L'accumulation dans un mode unique (qui ne peut être que le mode fondamental pour un système à l'équilibre thermodynamique) est provoquée par le refroidissement évaporatif : la relaxation vers l'équilibre par collisions élastiques, amplifiées par le phénomène de stimulation bosonique, tend à favoriser l'apparition et la croissance du condensat. En dernier ressort, l'analogie entre condensats et lasers provient bien entendu du caractère bosonique des particules : le champ bosonique associé (champ électromagnétique ou champ de matière) admet une limite classique qui correspond à un mode unique macroscopiquement occupé. Il est cependant intéressant de noter que cette limite se réalise dans des conditions très différentes, selon que l'on a affaire à des photons ou à des particules massives. Pour des photons, le potentiel chimique est nul, et l'accumulation ne se produit jamais à l'équilibre. On doit au contraire créer une situation fortement hors équilibre (inversion de population) pour l'obtenir.

Une source cohérente pour l'optique atomique : L'objectif de l'optique atomique, une discipline récente issue des progrès en matière de refroidissement et de manipulation d'atomes par laser, est de développer pour des atomes des techniques de manipulation et de contrôle similaires à celles qui existent pour la lumière. En particulier, le domaine de l'interférométrie atomique a connu ces dernières années un développement spectaculaire. Comme les atomes

¹Nous excluons de cette discussion volontairement simplifiée les phénomènes de type compétitions entre modes..., pour nous concentrer sur le principe.

sont notablement plus sensibles aux forces inertielles que les photons [156], des gyroscopes [157] et des gravimètres [158, 159] à atomes froids ont été développés et l'amélioration de leurs performances mobilise de nombreuses équipes de la communauté des atomes froids. Enfin, l'interférométrie atomique permet également de mesurer très précisément certaines constantes fondamentales, par exemple le rapport \hbar/M que l'on peut déduire d'une mesure de la fréquence de recul [160].

Certaines de ces expériences reposent sur la manipulation des degrés de liberté *externes* de l'atome. La longueur de cohérence d'un condensat étant de l'ordre de son extension spatiale, bien supérieure à la longueur d'onde de de Broglie pour les températures expérimentalement accessibles, il constitue donc une source de choix pour l'interférométrie atomique basée sur la cohérence spatiale². Une mesure de \hbar/M pour le Sodium qui exploite ces propriétés a récemment été réalisée dans l'équipe de D. Pritchard au MIT [161]. L'environnement du piège magnétique n'est cependant pas approprié pour des telles expériences, à cause de l'inhomogénéité du champ magnétique et de l'importance des interactions entre atomes. Pour utiliser efficacement une telle source d'ondes de matières cohérentes, il s'agit donc d'arriver à extraire les atomes du piège de manière contrôlée.

Coupleurs de sortie : Plusieurs méthodes ont été proposées pour coupler les atomes vers l'extérieur du piège. L'obtention d'un régime stationnaire nécessite cependant l'utilisation d'un mécanisme de pompage continu vers le mode dans lequel les particules s'accumulent, pour compenser l'extraction du faisceau de sortie. Les configurations réalisées expérimentalement jusqu'à présent se contentent de remplir le niveau fondamental, d'« arrêter la pompe » (c'est-à-dire le refroidissement évaporatif), puis de coupler une partie des atomes vers l'extérieur. A strictement parler, il s'agit de lasers pulsés, à faibles taux de répétition (inférieur au Hertz). Notons cependant que l'équipe de W. Ketterle au MIT [162] a réussi à charger un condensat en continu à l'aide d'une pince optique connectant une région de production et une région de stockage bien séparées : des progrès rapides sont à espérer dans cette direction. Outre les expériences menées dans ce groupe, nous pouvons mentionner les efforts menés en parallèle dans notre laboratoire pour mettre au point un transport par pince optique [46], et ceux d'une équipe de l'ENS de Paris pour condenser directement un jet atomique refroidi [163].

En ce qui concerne les techniques d'extraction, le groupe du MIT [33] a le premier démontré l'efficacité d'un pulse radiofréquence bref et intense, qui transfère de manière cohérente une partie importante du condensat vers un état non piégeant. Les atomes se propagent ensuite sous l'effet de la force de pesanteur. Cette technique a été raffinée par la suite grâce aux travaux du groupe de Munich, qui a démontré la faisabilité d'un laser à atomes quasi-continu [35] avec un coupleur radiofréquence de faible puissance. Le faisceau est continu pendant toute la durée d'application de la radiofréquence (typiquement quelques dizaines de ms). De plus, on s'attend à ce que le faisceau extrait ait une largeur spectrale bien plus faible dans le cas quasi-continu que dans le cas pulsé [164]. Grâce à cette technique, de nombreuses expériences ont pu être réalisées dans ce groupe [9, 164, 165, 166].

Notons brièvement que deux autres méthodes ont été démontrées pour extraire les atomes

²On comparera cette propriété à la cohérence transverse d'un laser monomode.

d'un piège. A l'université de Yale, dans le groupe de M. Kasevich [34], un condensat a été chargé dans un réseau optique vertical très désaccordé. La gravité se superpose au réseau optique pour induire des couplages entre puits : par effet tunnel, les atomes peuvent alors s'échapper du réseau. L'équipe de W. Phillips et K. Helmerson au NIST [36] a réussi à extraire des atomes grâce à des impulsions Raman très brèves, qui confèrent aux atomes une impulsion déterminée par la différence entre les impulsions des deux photons. En augmentant le taux de répétition, les pulses d'atomes se recouvrent et on obtient un faisceau quasi-continu, dont la cohérence temporelle est cependant limitée par la largeur spectrale des impulsions utilisées. Cette méthode permet également de contrôler la direction d'émission du faisceau atomique en modifiant l'orientation relative des deux lasers, alors que les autres méthodes s'en remettent à la gravité.

La technique d'extraction par radiofréquence dans le régime quasi-continu nous parait la plus adaptée à notre expérience. D'une part, elle est simple à mettre en oeuvre expérimentalement. D'autre part, elle permet d'obtenir d'un faisceau atomique continu et de grande cohérence transverse et longitudinale. Nous étudions dans ce chapitre la dynamique de ce coupleur de sortie et la propagation du laser à atomes. Dans un premier temps, nous abordons ce problème sous l'angle théorique. Grâce à plusieurs approximations décisives, nous réduisons le problème à celui du couplage d'un état lié discret (le mode du condensat) avec un continuum d'états libres, dont la résolution est bien maîtrisée. Nous montrons que, pour les paramètres utilisés dans nos expériences et dans celles du groupe de Munich, la gravité joue un rôle prépondérant dans la dynamique d'extraction et le mouvement longitudinal [51]³. Dans les études théoriques antérieures, ce point était souvent mésestimé, et les propriétés des laser à atomes étaient discutées dans le cadre d'une propagation dans l'espace libre [167, 168, 169, 170, 171, 172]. La gravité n'était traitée que dans le cadre de simulations numériques 1D, dont l'accord avec l'expérience était médiocre [173]. Dans le formalisme présenté ici, nous obtenons au contraire des expressions analytiques qui permettent une interprétation physique claire des phénomènes, et s'appliquent à une situation 3D. Dans une seconde partie, nous présentons les résultats expérimentaux obtenus dans notre équipe. Le problème critique de la stabilité du biais magnétique est évoqué, ainsi que les solutions que nous avons mis en oeuvre [46]. Puis, après l'étude de la dynamique d'extraction, des mesures de la divergence du laser à atomes sont présentées [52]. Elles mettent en évidence l'effet important des interactions entre le condensat et le laser à atomes sur la dynamique transverse, effet que l'on peut interpréter en terme de lentille divergente pour l'onde de matière. Dans notre article, une interprétation basée sur l'extension du formalisme des matrices ABCD au problème du laser à atomes [174] a été donnée. On trouvera un développement détaillé dans la thèse de Y. Le Coq [46]. Nous proposons ici une approche alternative dans le cadre de l'approximation semi-classique, qui néglige donc les effets de diffraction. Nous montrons qu'elle revient à propager le profil initial du condensat selon les trajectoires classiques appropriées que nous identifions.

³Dans notre article, une expression incorrecte du taux de couplage (par un facteur 2) a été donnée. La valeur correcte est donnée dans cette thèse.

4.1 Le coupleur radio-fréquence : équations couplées pour le condensat et le laser à atomes

On considère dans la suite de ce chapitre un condensat de Rubidium 87. On se restreint ici au niveau hyperfin $F = 1$. La fonction d'onde atomique évolue dans un espace $\mathcal{E}_{\text{ext}} \otimes \mathcal{E}_{\text{spin}}$, décrivant les degrés de liberté externes des atomes et les degrés de liberté internes, restreints à $F = 1$. Le couplage entre sous-niveaux est assuré par un champ radio-fréquence (rf) résonant, traité en détails dans la section 4.1.1. Dans chaque sous-niveau de $\mathcal{E}_{\text{spin}}$, la fonction d'onde externe évolue dans un potentiel différent, que nous explicitons dans la section 4.1.2.

4.1.1 Transitions entre sous-niveaux Zeeman induites par un champ radiofréquence

Le condensat est soumis à un champ radiofréquence (rf) créé par une antenne, de la forme $\mathbf{B}_{\text{rf}} = B_{\text{rf}} \cos(\omega_{\text{rf}} t) \mathbf{e}_z$. Ce champ induit une transition entre les états m_F et $m_{F'}$, si la fréquence ω_{rf} est résonante avec la fréquence de Bohr associée. Plus précisément, l'hamiltonien de couplage $W_{\text{rf}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{rf}}$ du champ rf avec le moment magnétique \mathbf{m} de l'atome s'écrit, avec les notations habituelles en physique atomique :

$$W_{\text{rf}} = \frac{g_F \mu_B B_{\text{rf}}}{2\sqrt{2}} (e^{i\omega_{\text{rf}} t} + e^{-i\omega_{\text{rf}} t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

La matrice de spin 1 agit sur la base hyperfine $\{|F, m_F\rangle\}_{m_F=-1,0,+1}$. On a négligé les variations spatiales du champ radiofréquence, la longueur d'onde étant très supérieure aux dimensions du condensat pour les fréquences typiques de quelques MHz. Nous introduisons pour la suite la fréquence de Rabi de la transition :

$$\hbar\Omega_{\text{rf}} = \frac{|g_F| \mu_B B_{\text{rf}}}{\sqrt{2}}. \quad (4.2)$$

Dans l'élément de matrice complet, comme W_{rf} ne dépend que des degrés de liberté interne, on devra multiplier l'expression ci-dessus par l'intégrale de recouvrement entre les fonctions d'onde externes des sous-niveaux Zeeman considérés. Ce point est important et nous y reviendrons plus loin.

4.1.2 Potentiels incluant la gravité

Dans la plupart des expériences de condensation de Bose-Einstein, les champs mis en jeu sont suffisamment faibles pour pouvoir traiter le déplacement des niveaux atomiques au premier ordre en champ magnétique⁴. Dans ce cas, l'effet Zeeman linéaire rend les sous-niveaux Zeeman $m_F = -1$ piégeant, $m_F = 0$ non piégeant et $m_F = +1$ anti-piégeant.

⁴Dans nos expériences, la partie quadratique en champ du potentiel Zeeman joue un rôle non négligeable. Nous omettons ces contributions dans un premier temps, par souci de simplicité.

Les atomes polarisés dans $m_F = -1$ sont initialement piégés dans un potentiel harmonique anisotrope, l'axe faible du piège étant pris suivant la direction x , perpendiculaire à la gravité (l'axe z pointe vers le bas, comme indiqué sur la figure 4.1). Le potentiel extérieur pour une particule dans le sous-niveau Zeeman m_F s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} m_F = -1 & : V_{-1} = |g_F| \mu_B B_0 + V_{\text{ext}} + \frac{Mg^2}{2\omega_{\perp}^2}, \\ m_F = 0 & : V_0 = -Mgz, \\ m_F = +1 & : V_{+1} = -|g_F| \mu_B B_0 - V_{\text{ext}} + \frac{3Mg^2}{2\omega_{\perp}^2} - 2Mgz. \end{aligned} \quad (4.3)$$

On a noté $V_{\text{ext}} = \frac{1}{2}M\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}M\omega_{\perp}^2 y^2 + \frac{1}{2}M\omega_{\perp}^2 z^2$ le potentiel de piégeage, comme aux chapitres précédents. L'origine suivant z (verticale) est prise par rapport au centre du condensat, déplacé par rapport au centre du potentiel magnétique d'une distance g/ω_{\perp}^2 . Le zéro d'énergie est choisi en $z = 0$ dans $m_F = 0$.

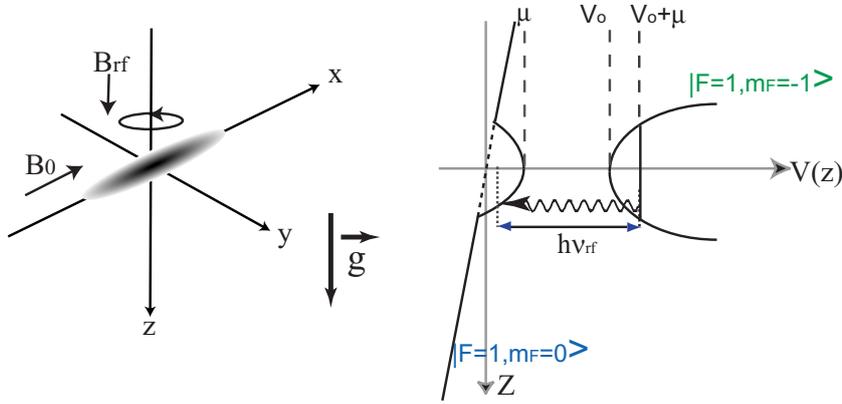


FIG. 4.1 – Principe d'extraction d'un laser à atomes par transitions radiofréquence. À gauche, nous illustrons la géométrie du condensat et le repère choisi. Les bobines qui créent le champ rf sont indiquées, avec les directions relatives du champ de piégeage (approximativement parallèles à l'axe long du piège) et du champ rf (perpendiculaire). À droite, nous avons tracé les potentiels vus par les atomes dans les états hyperfins $m_F = -1$ et $m_F = 0$, dans le plan $x = y = 0$, connectés par un photon radiofréquence résonnant avec la séparation Zeeman entre ces niveaux.

4.1.3 Equations de Gross-Pitaevskii couplées

Comme dans le cas d'un échantillon « sans spin » (*i.e.* totalement polarisé), dans l'approximation de Hartree-Fock la fonction d'onde à N corps est un produit factorisé, tous les atomes occupant la *même* fonction d'onde à un corps. Cependant, comme le spin est maintenant un degré de liberté supplémentaire, la fonction d'onde à un corps qui intervient dans ce produit est un spineur vectoriel $\Psi = \{\Psi_{m_F}(\mathbf{r})\}_{m_F=-1,0,+1}$. L'évolution du système est régie par trois équations de Gross-Pitaevskii, couplées par W_{rf} , qui décrivent le condensat piégé

et le faisceau extrait par le coupleur rf [175] :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{m_F}}{\partial t} \Big|_{m_F=0,\pm 1} = h_{m_F} \Psi_{m_F} + \sum_{m_{F'}} W_{\text{rf}}^{m_F m_{F'}} \Psi_{m_{F'}} \quad (4.4)$$

$$+ \left(\sum_{m_{F'}} U_{m_F m_{F'}} |\Psi_{m_{F'}}|^2 \right) \Psi_{m_F},$$

avec $h_{m_F} = \mathbf{p}^2/2M + V_{m_F} - Mgz$. On a introduit les constantes de couplage $U_{ij} = 4\pi\hbar^2 a_{ij}/M$, où a_{ij} est la longueur de diffusion pour une collision entre deux atomes dans les niveaux Zeeman i et j . En posant $\tilde{\Psi}_{m_F} = \Psi_{m_F} e^{-im_F\omega_{\text{rf}}t}$, on peut éliminer la dépendance temporelle explicite du couplage en faisant une approximation séculaire, qui ne conserve que le terme résonnant avec la transition considérée (« approximation du champ tournant »).

Une simplification supplémentaire consiste à restreindre ce système à deux équations seulement. En effet, en régime de couplage faible (on précisera plus loin dans quelles conditions il faut se placer pour le réaliser), l'état $m_F = +1$ est très peu peuplé : on peut ne pas en tenir compte et réduire le problème à deux niveaux seulement. Dans la suite de ce chapitre, nous ferons cette approximation systématiquement. De plus, à cause de la quasi-coïncidence des longueurs de diffusion dans les états triplets et singulets pour le rubidium 87 [176], on peut à une très bonne approximation considérer que la longueur de diffusion est la même quelque soit les espèces mises en jeu dans la collision : ainsi dans la suite on ne notera plus les indices pour U et a (et on prendra $a \approx 5.31$ nm [73]). On obtient ainsi les équations :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_{m_F=-1} = [\hbar\delta_{\text{rf}} + \mathcal{L}_{-1}] \tilde{\Psi}_{m_F=-1} + \frac{\hbar\Omega_{\text{rf}}}{2} \tilde{\Psi}_{m_F=0} \quad (4.5)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_{m_F=0} = \mathcal{L}_0 \tilde{\Psi}_{m_F=0} + \frac{\hbar\Omega_{\text{rf}}}{2} \tilde{\Psi}_{m_F=-1}. \quad (4.6)$$

On a défini les opérateurs différentiels $\mathcal{L}_{m_F} = -\hbar^2\Delta/2M + V_{m_F} + Un(\mathbf{r})$, avec les potentiels donnés précédemment et la densité totale $n(\mathbf{r}) = |\tilde{\Psi}_{m_F=-1}|^2 + |\tilde{\Psi}_{m_F=0}|^2$. Le désaccord δ_{rf} vaut $\delta_{\text{rf}} = V_0 - \hbar\omega_{\text{rf}}$, en comptant par rapport au fonds du potentiel piégeant $V_0 = |g_F| \mu_B B_0 + Mg^2/2\omega_{\perp}^2$.

Toujours dans l'hypothèse d'un faible taux de couplage, on peut encore simplifier le problème en négligeant les interactions entre les atomes qui composent le laser. Par contre, les interactions entre les atomes qui restent dans le condensat et ceux qui sont couplés sont prises en compte. Sous ces hypothèses, la densité totale à utiliser dans le terme non linéaire devient simplement $n(\mathbf{r}) \approx |\tilde{\Psi}_{m_F=-1}|^2$, et \mathcal{L}_0 devient un hamiltonien « ordinaire » :

$$H_0(t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - Mgz + U |\Psi_{-1}(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (4.7)$$

Nous avons introduit explicitement la dépendance temporelle de l'hamiltonien : elle vient du terme de champ moyen, qui change dans le temps sous l'effet du couplage.

Solution adiabatique pour $m_F = -1$: Pour le niveau piégeant $m_F = -1$, une difficulté supplémentaire, par rapport à la résolution de l'équation de Schrödinger, vient de la non-linéarité du problème. Pour les atomes du condensat, nous la contournerons en introduisant

une approximation adiabatique pour le condensat piégé. En régime stationnaire (*i.e.* pour $t \leq 0$, avant d'appliquer le coupleur), $\tilde{\Psi}_{m_F=-1}$ n'est autre que la solution à l'équilibre $\tilde{\Phi}_{-1}$ de l'équation de Gross-Pitaevskii, avec le potentiel chimique μ_0 :

$$[\mathcal{L}_{-1} + \hbar\delta_{\text{rf}} - \mu_0]\tilde{\Phi}_{-1}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (4.8)$$

Cette fonction d'onde constitue la condition initiale à partir de laquelle le couplage rf est appliqué. Pour $t \geq 0$, le hamiltonien dépend du temps par l'intermédiaire de $N_{m_F=-1}(t)$, qui décroît dans le temps. A chaque instant, on doit donc introduire une base instantanée formée par l'état de plus basse énergie $\Phi_{-1}(\mathbf{r}, t)$ de \mathcal{L}_{-1} , qui est le mode condensé instantané, et les excitations associées, qui sont orthogonales à cet état. On peut donc écrire à chaque instant :

$$\tilde{\Psi}_{m_F=-1}(\mathbf{r}, t) = \left(\Phi_{-1}(\mathbf{r}, t) + \delta\Psi(\mathbf{r}, t) \right) e^{-i\delta_{\text{rf}}t - i\int_0^t \frac{\mu(t')dt'}{\hbar}}, \quad (4.9)$$

avec le potentiel chimique instantané $\mu(t)$ et $\mu(0) = \mu_0$. Dans le régime de Thomas-Fermi, avec les notations introduites au chapitre I, la fonction d'onde instantanée s'écrit simplement :

$$\Phi_{-1}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\mu(t)}{U} \right)^{1/2} (1 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2)^{1/2}. \quad (4.10)$$

Comme au premier chapitre, on a introduit les variables spatiales \tilde{x}_i adimensionnées par rapport aux tailles du condensat R et L . Il est important de noter que nous avons normée Φ_{-1} à $N_{m_F=-1}(t)$, différemment des conventions habituelles de la mécanique quantique mais en accord avec l'interprétation de $|\Phi_{-1}|^2$ en termes de densité du condensat.

Le terme $\delta\Psi$ décrit les niveaux excités. Initialement, nous les avons supposés non peuplés, et donc $\delta\Psi(\mathbf{r}, t=0) = 0$. Par contre, $\delta\Psi$ peut, en présence du champ rf, développer une valeur non-nulle à cause de couplages non-adiabatiques. En remplaçant dans l'équation (4.5), et en projetant sur $\Phi_{-1}(\mathbf{r}, t)$, on obtient une équation contenant en effet des termes décrivant le mélange entre fondamental et états excités (dépendants du temps). Si on suppose que le couplage est adiabatique, ce terme est très petit et la population des niveaux excités reste négligeable au cours du temps. Alors, l'équation pour la population $N_{m_F=-1}$ est simplement régie par le terme de couplage rf :

$$\frac{d}{dt}N_{m_F=-1} \approx \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2i} \int d^3\mathbf{r} \Phi_{-1}^*(\mathbf{r}, t) \tilde{\Psi}_{m_F=0}(\mathbf{r}, t) e^{i\delta_{\text{rf}}t + i\int_0^t \frac{\mu(t')dt'}{\hbar}} + \text{c.c.} \quad (4.11)$$

Réduction à une équation de type Schrödinger : Les approximations successives que nous avons faites nous ont permis de réduire le problème à celui d'un niveau discret, le mode du condensat, couplé à un continuum de modes propagatifs (les états propres de H_0). Ce problème est bien connu, et le formalisme de la résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps va pouvoir s'appliquer à l'équation décrivant la dynamique du laser. La méthode habituelle [177] consiste à décomposer la fonction d'onde $\tilde{\Psi}_{m_F=0}$ sur les états propres du continuum. Dans notre article [51], nous avons suivi cette voie, en négligeant toutefois l'effet répulsif exercé par le champ moyen du condensat : dans cette approximation, la gravité est le seul moteur de l'extraction. Nous verrons plus loin que cette approximation, qui peut sembler brutale, est en réalité assez bonne dans le cadre de nos expériences. Dans ce mémoire, nous présentons une approche alternative basée sur l'utilisation du propagateur de l'hamiltonien H_0 [60]. Bien qu'équivalente en principe à la décomposition sur les modes du

continuum, cette méthode devient puissante dans le cadre de l'approximation semi-classique, et nous verrons qu'elle donne dans ce cas une prédiction particulièrement simple pour le taux d'extraction.

Nous introduisons donc le propagateur de H_0 , défini comme

$$K_0(\mathbf{r}_f, t_f; \mathbf{r}_i, t_i) = \langle \mathbf{r}_f | e^{-i \int_{t_i}^{t_f} \frac{H_0(\tau) d\tau}{\hbar}} | \mathbf{r}_i \rangle \quad (4.12)$$

dans le cas général où H_0 dépend du temps, avec $t_f > t_i$. Les propriétés de K_0 sont discutées en détails dans le livre de R.P. Feynman et A. Hibbs [60], et certaines sont rappelées dans l'appendice D. On pourra également se reporter aux références [156, 174] qui traitent de l'application du formalisme du propagateur aux problèmes d'optique atomique, et à la référence [178] pour une discussion de l'approximation semi-classique.

La solution de l'équation inhomogène

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_{m_F=0} = H_0 \tilde{\Psi}_{m_F=0} + \frac{\hbar \Omega_{\text{rf}}}{2} \tilde{\Psi}_{m_F=-1} \quad (4.13)$$

est donnée par la propagation du terme source à l'aide de K_0 :

$$\tilde{\Psi}_{m_F=0}(\mathbf{r}_f, t) = \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2i} \int_0^t dt' \int d^3 \mathbf{r}_i K_0(\mathbf{r}_f, t; \mathbf{r}_i, t') \tilde{\Psi}_{m_F=-1}(\mathbf{r}_i, t'). \quad (4.14)$$

Sous cette forme, la dénomination de propagateur est transparente : si on connaît la fonction d'onde en \mathbf{r}_i , au temps t , alors grâce à K_0 on peut propager cette fonction d'onde le long de tous les chemins d'espace-temps aboutissant au point final (\mathbf{r}_f, t') . Nous verrons un peu plus loin que le chemin le plus important est celui qui serait effectivement suivi par une particule obéissant strictement aux lois de la mécanique classique. Néanmoins, les trajectoires voisines (c'est-à-dire celles dont l'excursion autour de la trajectoire classique intégrée sur tout le trajet ne dépasse pas \hbar) doivent en général être prises en compte, en tant que fluctuations autour du chemin classique. Nous précisons plus loin dans quelles conditions ces fluctuations jouent un rôle mineur.

4.2 Taux de couplage vers le continuum

Dans ce paragraphe, nous utilisons les résultats précédents, ainsi que ceux établis dans les appendices D et E, pour retrouver la règle d'or de Fermi adaptée à notre problème non-linéaire où le hamiltonien du continuum dépend de la fonction d'onde de l'état discret. Nous traitons le cas d'un couplage suffisamment faible pour que cette non-linéarité ne soit importante que sur une échelle de temps longue. Ceci permet d'obtenir une équation de taux pour la population du mode condensé couplé au continuum. Nous calculons le taux de couplage dans le cadre de l'approximation semi-classique, qui prend une forme simple à interpréter. Ce résultat est ensuite appliqué au coupleur radio-fréquence, en ne considérant dans un premier temps que l'influence de la gravité, puis en traitant le champ moyen du condensat comme une perturbation.

4.2.1 Régime de couplage faible et approximation de Markov

Si nous reportons la solution formelle pour $\tilde{\Psi}_{m_F=0}$ (4.14) dans l'équation d'évolution de la population du mode condensé (4.11), en utilisant la forme adiabatique de la fonction d'onde du condensat (4.9), on aboutit à

$$\frac{dN_{m_F=-1}}{dt} = - \int_{-t}^t d\tau \mathcal{N}(t, \tau), \quad (4.15)$$

où le noyau de l'intégrale est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t, \tau) = & \frac{\Omega_{\text{rf}}^2}{4} \int d^3\mathbf{r}_f d^3\mathbf{r}_i \Phi_{-1}^*(\mathbf{r}_f, t) \\ & K_0(\mathbf{r}_f, t; \mathbf{r}_i, t - \tau) \Phi_{-1}(\mathbf{r}_i, t - \tau) e^{i\delta_{\text{rf}}\tau}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nous avons changé l'origine des énergies selon $H_0 \rightarrow H_0 - \mu$, pour alléger l'écriture. Le problème est maintenant très proche de celui traité dans l'appendice E, dans le cas où H_0 est stationnaire. Nous y introduisons le paramètre Δ , la largeur spectrale du continuum, qui correspond à la largeur en fréquence de la transformée de Laplace de \mathcal{N} , en d'autres termes la plage en δ_{rf} sur laquelle le couplage entre le condensat et le continuum est efficace. Le temps de décohérence caractéristique de \mathcal{N} est alors $t_C = 1/\Delta$, encore appelé temps de mémoire du continuum. Les résultats de l'appendice E montrent que l'on doit comparer t_C au temps de décroissance caractéristique Γ^{-1} de l'état discret, pour déterminer si l'on est dans le régime de couplage faible.

Le cas qui nous intéresse correspond donc à $\Gamma t_C \ll 1$, c'est-à-dire à un état discret pratiquement inchangé sur le temps t_C nécessaire pour annuler l'intégrale (4.16). Les cohérences entre le continuum et l'état initial disparaissent rapidement, et l'état discret se désintègre alors progressivement dans le continuum, de manière irréversible. Pour les temps $t > t_C$, il est alors possible de simplifier l'équation sur la population en faisant une approximation du type Born-Markov [86, 177], c'est-à-dire en sortant les termes lentement variables de l'intégrale sur τ et en étendant les bornes à l'infini. La population du niveau discret $m_F = -1$ décroît alors continûment, selon l'équation (non linéaire) :

$$\frac{d}{dt} N_{m_F=-1} = -\Gamma(t) N_{m_F=-1} \quad (4.17)$$

avec le taux

$$\begin{aligned} \Gamma(t) = & \frac{\Omega_{\text{rf}}^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int d^3\mathbf{r}_f d^3\mathbf{r}_i \phi_{-1}^*(\mathbf{r}_f, t) \\ & K_0(\mathbf{r}_f, t; \mathbf{r}_i, t - \tau) \phi_{-1}(\mathbf{r}_i, t) e^{i\delta_{\text{rf}}\tau}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

On a introduit $\phi_{-1} = \Phi_{-1}/\sqrt{N_{m_F=-1}}$, la fonction d'onde normée à 1 du mode condensé. Dans le problème du laser à atomes, Γ dépend du temps par l'intermédiaire de la fonction d'onde spatiale ϕ_{-1} , qui suit adiabatiquement la diminution du nombre d'atomes dans $m_F = -1$.

En utilisant la décomposition de K_0 sur les modes du continuum (voir l'appendice D), on retrouve l'expression habituelle de la règle d'or de Fermi, adaptée à un état discret lentement

variable :

$$\Gamma(t) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_k |I_k(t)|^2 \delta(\omega_k(t) - \delta_{rf}). \quad (4.19)$$

Cette équation fait intervenir les intégrales de recouvrement $I_k(t)$ entre le mode k , de fréquence propre instantanée $\omega_k(t)$, et la fonction d'onde du mode condensé,

$$I_k(t) = \int d^3\mathbf{r} \phi_k^*(\mathbf{r}, t) \phi_{-1}(\mathbf{r}, t).$$

4.2.2 Règle d'or de Fermi dans l'approximation semi-classique

Pour aller plus loin, nous repartons de l'expression (4.18) du taux de couplage en fonction du propagateur K_0 . L'expression du propagateur fait en général intervenir une intégrale de chemin, et le calcul exact n'est possible que dans certain cas particuliers. Mêmes pour ces situations, effectuer les intégrales restantes sur \mathbf{r}_i et τ reste difficile. Cependant, la force de la méthode des intégrales de chemin est qu'elle se prête remarquablement bien à un traitement semi-classique, qui simplifie considérablement le calcul. L'approche semi-classique considère

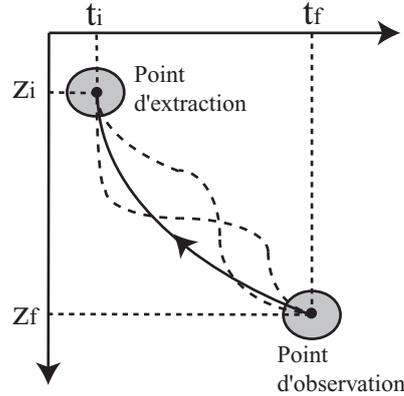


FIG. 4.2 – Illustration de l'approximation semi-classique. On a tracé dans un diagramme spatio-temporel la trajectoire classique partant du point d'extraction \mathbf{r}_i et arrivant au point d'observation \mathbf{r}_f en traits pleins. Ce chemin domine largement la propagation, si bien qu'il n'est nécessaire de tenir compte que des trajectoires voisines, représentées par les lignes en pointillés.

que dans tous les chemins imaginables que peut emprunter la particule quantique, ceux autorisés par la mécanique classique dominent la propagation. Ainsi, il est suffisant de ne tenir compte que des petites déviations autour du chemin classique (figure 4.2). Dans cette limite, valable dès que l'action classique est grande devant \hbar , la forme semi-classique du propagateur, rappelée dans l'appendice D,

$$K_0(\mathbf{r}_f, t; \mathbf{r}_i, t - \tau) = (2\pi\hbar)^{3/2} \left| \det \frac{\partial^2 S_{\text{CL}}}{\partial x_i \partial x_f} \right|^{1/2} e^{iS_{\text{CL}}(\mathbf{r}_f, t; \mathbf{r}_i, t - \tau)/\hbar}, \quad (4.21)$$

pourra être utilisée. Le préfacteur dépend *a priori* de toutes les variables. L'action classique S_{CL} s'exprime comme une intégrale le long du chemin classique \mathbf{R}_{CL} , solution des équations du mouvement, comme

$$S_{\text{CL}}(\mathbf{r}_f, t_f; \mathbf{r}_i, t_i) = \int_{\mathbf{R}_{\text{CL}}} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - H dt). \quad (4.22)$$

Pour pouvoir appliquer cette approximation, l'action classique doit être grande devant \hbar . Dans ces conditions, pour calculer les intégrales du type

$$I = \int f(x) e^{i\alpha g(x)} dx \quad (4.23)$$

qui apparaissent dans (4.18), une approximation de phase stationnaire [179] est appropriée. Quand $\alpha \gg 1$, le point x_0 , qui correspond à une valeur stationnaire de la phase $g'(x_0) = 0$, domine le comportement de l'intégrale. En tenant compte des fluctuations au second ordre autour de ce point, on obtient une expression approchée

$$I \approx \sqrt{\frac{2i\pi}{|g''(x_0)|}} f(x_0) e^{i\alpha g(x_0)}. \quad (4.24)$$

Nous utiliserons cette technique de manière systématique dans la suite.

Pour spécifier complètement la trajectoire classique \mathbf{R}_{CL} , il faut en général connaître les conditions initiales \mathbf{r}_i et \mathbf{p}_i . Nous allons voir qu'elles sont fixées sans ambiguïté par les conditions de phase stationnaire sur \mathbf{r}_i et τ . Commençons par l'intégrale sur \mathbf{r}_i dans (4.18). La phase du propagateur est stationnaire par rapport aux coordonnées initiales \mathbf{r}_i , à condition que

$$\frac{\partial S_{\text{CL}}}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{0} = -\mathbf{p}_i \quad (4.25)$$

où \mathbf{p}_i est l'impulsion initiale⁵, et la dernière égalité découle d'un résultat classique de mécanique du point (voir (4.22)). La condition de phase stationnaire dans l'intégrale sur \mathbf{r}_i nous indique donc que nous pouvons nous restreindre aux chemins classiques qui partent du point \mathbf{r}_i à vitesse nulle. Effectuer l'intégrale revient à inverser l'équation $\mathbf{r}_f = \mathbf{R}_{\text{CL}}(\mathbf{r}_i, t_f, t_i)$ pour exprimer les coordonnées du point initial en fonction de celles du point final.

La phase qui survit à l'intégrale sur \mathbf{r}_i détermine l'intégrale sur τ . En effet, quand τ est non-nul, la phase n'est jamais nulle au point stationnaire, et la double intégrale sur τ et \mathbf{r}_f moyenne la contribution à zéro. Par contre, la double somme reste finie au voisinage de $\tau \approx 0$, *i.e.* quand les points finaux et initiaux coïncident. La phase stationnaire à l'ordre le plus bas en τ est en effet donnée par

$$S_{\text{CL}}(\mathbf{r}_f, t; \mathbf{R}_{\text{CL}}^{-1}, t - \tau) \approx S_{\text{CL}}(\mathbf{r}_f, t; \mathbf{r}_f, t) - H(\mathbf{p}_f, \mathbf{r}_f)\tau \approx V_{m_F=0}(\mathbf{r}_f)\tau + \mathcal{O}(\tau^2), \quad (4.26)$$

en tenant compte de $\mathbf{p}_f \approx \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ quand on reste à l'ordre 0 en τ . L'intégration sur τ , en sortant les termes lentement variables de l'intégrale, fait alors apparaître une fonction δ de

⁵Le gradient de la phase dans l'état initial est nul dans notre cas, si bien que l'impulsion initiale est nulle aussi.

Dirac, les préfacteurs se compensent et on trouve l'expression finale du taux de couplage :

$$\Gamma(t) = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{\hbar\Omega_{\text{rf}}}{2} \right)^2 \int d^3\mathbf{r} |\Phi_{-1}(\mathbf{r}, t)|^2 \delta(V_{m_F=0}(\mathbf{r}, t) - \hbar\delta_{\text{rf}}). \quad (4.27)$$

L'interprétation de cette formule est transparente : seuls les points où la condition de résonance locale $\hbar\delta_{\text{rf}} = V_0(\mathbf{r})$ est vérifiée contribuent au couplage. Leurs poids relatif est donné par la densité de probabilité de présence aux points correspondants dans le niveau initial. Ces points sont appelés points de rebroussement classiques, et cette formule pour le taux d'extraction est analogue à celle donnant les probabilités de transition d'un état lié vers un état libre en physique moléculaire [172] : la transition se produit essentiellement aux points de rebroussement classiques, une règle connue dans ce contexte sous le nom de principe de Franck-Condon. Pour appliquer cette formule semi-classique, les fluctuations quantiques autour du chemin classique, qui introduisent des fluctuations de l'action de l'ordre de \hbar , doivent être négligeables sur l'extension de la fonction d'onde Φ_{-1} . Dit autrement, on doit s'assurer que la phase accumulée par un atome qui traverse le condensat est bien grande devant \hbar .

4.2.3 Application au coupleur radio-fréquence

Extraction par la gravité seule : Réécrivons le potentiel $V_{m_F=0}$ agissant sur un atome dans le volume du condensat sous la forme :

$$V_{m_F=0} = -\hbar\Delta \left\{ \tilde{z} + \frac{\mu(t)}{\hbar\Delta} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) \right\}. \quad (4.28)$$

Si la condition

$$\mu \ll \hbar\Delta = MgR \quad (4.29)$$

est vérifiée, l'extraction sera due principalement à la gravité, et on peut en première approximation négliger le terme de champ moyen et ne garder que $V_{m_F=0} = -Mgz$. Dans ce cas, l'extraction a lieu dans des plans horizontaux, d'altitude $z_0/R = -\delta_{\text{rf}}/\Delta$. L'intégrale spatiale dans le calcul du taux (4.27) est alors immédiate, et on trouve :

$$\Gamma(t) = \frac{15\pi}{32} \frac{\Omega_{\text{rf}}^2}{\Delta} \left(1 - \left(\frac{\delta_{\text{rf}}}{\Delta} \right)^2 \right). \quad (4.30)$$

Toute la dépendance temporelle du taux est contenue dans $\Delta(t) = MgR(t)/\hbar$, avec le rayon $R^2 = 2\mu(t)/M\omega_{\perp}^2$, qui diminue avec $N_{-1}(t)$.

Correction de champ moyen : En réalité, les surfaces de résonance sont légèrement courbées au niveau du condensat à cause du terme de champ moyen, et on peut chercher à obtenir une correction analytique à l'expression ci-dessus au premier ordre⁶ en $\alpha = \mu/\hbar\Delta \ll 1$. La condition de résonance $V_{m_F=0}(\mathbf{r}) = \hbar\delta_{\text{rf}}$ donne l'altitude de résonance z_0 pour une position transverse $(x, y) = \mathbf{r}_T$ donnée :

$$\frac{z_0}{R} = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 - \frac{4\alpha\delta_{\text{rf}}}{\Delta} - 4\alpha^2\tilde{r}_T^2} - 1 \right) \approx -\frac{\delta_{\text{rf}}}{\Delta} - 2\alpha^2 \left(\frac{\delta_{\text{rf}}}{\Delta} \right)^2 - \alpha^2\tilde{r}_T^2. \quad (4.31)$$

⁶Pour nos paramètres expérimentaux, $\mu \approx h \times 1,6$ kHz et $\Delta \approx 9$ kHz, on a $\alpha \approx 0,17$.

En intégrant sur les coordonnées transverses, on obtient la correction :

$$\Gamma(t) \approx \frac{15\pi}{32} \frac{\Omega_{\text{rf}}^2}{\Delta} \left(1 - \left(1 + 2\alpha \frac{\delta_{\text{rf}}}{\Delta} \right) \left(\frac{\delta_{\text{rf}}}{\Delta} \right)^2 \right)^2. \quad (4.32)$$

La prise en compte du champ moyen introduit ainsi une asymétrie dans le spectre suivant le signe de δ_{rf} , qu'on peut comprendre comme une asymétrie dans la surface où la condition de Franck-Condon est vérifiée. Nous avons tracé cette expression sur la figure 4.3, avec le calcul numérique complet et le taux (4.30) calculé avec la gravité seule. Pour la valeur $\alpha \approx 0,17$ qui correspond à notre expérience, le calcul à l'ordre 1 est fiable.

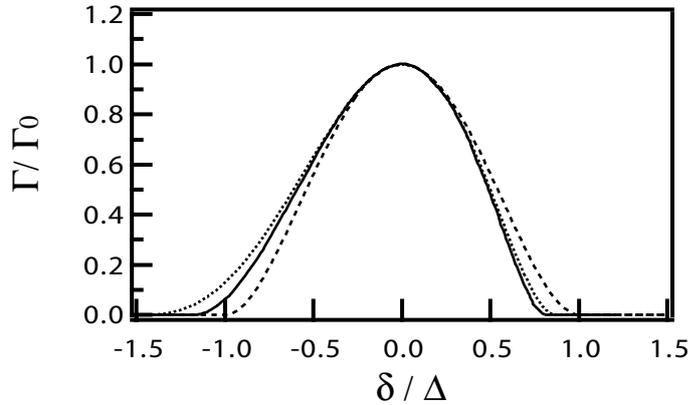


FIG. 4.3 – Taux de couplage de condensat vers le continuum, en fonction de $\delta_{\text{rf}}/\Delta$. Le taux caractéristique $\Gamma_0 = 15\hbar\Omega_{\text{rf}}^2/32\Delta$ est utilisé pour adimensionner les courbes. La courbe en pointillés ne tient compte que de la gravité (Eq. (4.30)). La ligne en trait plein (calculée numériquement) tient compte de la gravité et du champ moyen. L'approximation (4.32), en pointillés plus courts, la reproduit assez bien, pour la valeur $\alpha \approx 0,17$ qui correspond à la situation expérimentale décrite plus loin.

4.3 Propagation du laser à atomes

Nous nous tournons maintenant vers un problème différent, qui est celui de la propagation du laser à atomes. En particulier, nous allons chercher à déterminer la forme spatiale du mode : dans un premier temps, nous ne considérons que la gravité pour extraire les caractéristiques essentielles de la propagation longitudinale. Ce n'est que dans une deuxième étape que nous incluons les interactions, dans le cadre d'une approximation paraxiale qui permet de découpler dynamique transverse et propagation. Pour simplifier les calculs, nous allons supposer systématiquement que la déplétion du condensat est négligeable, $N_{m_F=-1}(T) \approx N_{m_F=-1}(0) = N$. Dans ces conditions, le taux de couplage est constant (nous le notons simplement Γ dans la suite), et le nombre d'atomes extraits est simplement $N_{m_F=0} = N\Gamma T \ll N$, où T est la durée du couplage.

4.3.1 Propagation dominée par la gravité

Nous revenons à l'équation (4.14),

$$\tilde{\Psi}_{m_F=0}(\mathbf{r}_f, t) = \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2i} \int_0^t dt' \int d^3\mathbf{r}_i K_0(\mathbf{r}_f, t; \mathbf{r}_i, t') \tilde{\Psi}_{m_F=-1}(\mathbf{r}_i, t').$$

qui donne la fonction d'onde du laser en fonction de celle du condensat et du propagateur K_0 . Pour effectuer l'intégrale sur \mathbf{r}_i , on utilise la même démarche que pour le calcul du taux de couplage. La condition de phase stationnaire (4.25) nous indique que la trajectoire démarre du point initial à vitesse nulle. Dans l'intégrale restante sur τ , la phase est alors stationnaire lorsque la condition

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S_{\text{CL}}(\mathbf{r}_f, t; \mathbf{R}_{\text{CL}}^{-1}, t - \tau) = -\hbar \delta_{\text{rf}} \quad (4.34)$$

est vérifiée. Cette relation n'est autre que l'équation d'Hamilton-Jacobi de la mécanique classique. Elle permet de fixer l'énergie du mouvement classique, ou, en d'autres termes, les points d'extraction $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0$, avec \mathbf{r}_0 les points qui satisfont à la condition de Franck-Condon donnée plus haut. On obtient finalement une expression équivalente pour le propagateur, valable loin du point d'extraction,

$$K_0(\mathbf{r}_f, \mathbf{r}_i; t_f, t_i) \approx \sqrt{\frac{|\det \frac{\partial^2 S_{\text{CL}}}{\partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_f}|}{|\det \frac{\partial^2 S_{\text{CL}}}{\partial \mathbf{r}_i^2}|}} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \delta(\tau - t_{\text{CL}}) e^{i \int_0^{t_{\text{CL}}} M \dot{\mathbf{r}}^2 dt - i \delta_{\text{rf}} t_{\text{CL}}}. \quad (4.35)$$

Ce résultat s'interprète simplement. Un point d'extraction donné est propagé le long de la trajectoire classique démarrant à vitesse nulle, pour aboutir au point d'observation \mathbf{r}_f , au bout du temps de propagation t_{CL} calculé selon la mécanique classique. La phase accumulée au cours de la propagation n'est autre que l'intégrale de l'action le long du chemin classique allant de \mathbf{r}_0 à \mathbf{r}_f . Le préfacteur assure que l'équation de continuité est vérifiée (ou, pour emprunter la terminologie de l'optique, que l'étendue géométrique est conservée). Notons pour terminer que l'expression (4.35) est l'analogue à trois dimensions de l'approximation WKB.

On peut résumer ce calcul en disant qu'il revient à identifier les trajectoires classiques qui aboutissent au point d'observation, en partant à vitesse nulle du point d'extraction sélectionné par le principe de Franck-Condon. Pour l'utiliser, il faut pouvoir inverser l'équation donnant ces trajectoires en fonction des coordonnées initiales, pour obtenir les coordonnées du point d'extraction en fonction du point d'observation \mathbf{r}_f et du temps de propagation τ , $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{\text{CL}}^{-1}(\mathbf{r}_f, \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \tau)$.

Réécrivons maintenant le terme de potentiel (incluant le champ moyen) dans le niveau non-piégeant comme :

$$V_{m_F=0} = V_z(z) + V_{\perp}(x, y, z). \quad (4.36)$$

La dépendance en z du potentiel transverse V_{\perp} est supposée lente devant celle de V_z , si bien que dans un premier temps, nous le négligeons pour nous concentrer sur l'effet du potentiel

longitudinal V_z^7 . En ce cas, l'extraction a lieu à l'altitude z_0 déterminée par $\hbar V_z(z_0) = \hbar \delta_{\text{rf}}$. Les trajectoires transverses sont rectilignes, et la trajectoire longitudinale s'obtient en résolvant l'équation classique du mouvement avec la force $-dV_z/dz$, et les conditions initiales $z_{\text{CL}}(t_i) = z_0$ et $\dot{z}_{\text{CL}}(t_f) = 0$. On obtient finalement la fonction d'onde du laser sous la forme

$$\Psi_{m_F=0}(x, y, z, t) \approx \mathcal{C} \cdot \Phi_{-1}(x, y, z_0) \frac{e^{i \int_{z_0}^z k_z dz - i \delta_{\text{rf}} t_{\text{CL}}(z, z_0)}}{|v_{\text{CL}}|^{1/2}} \text{Rect}_{\text{T}}(t_{\text{CL}}), \quad (4.37)$$

avec $\mathcal{C} = \sqrt{2\pi/\hbar V_z'(z_0)} \hbar \Omega_{\text{rf}}/2$. On a introduit la fonction rectangle, $\text{Rect}_{\text{T}}=1$ si $0 \leq t_{\text{CL}} \leq T$, et zéro sinon : cette fonction décrit l'extension verticale finie du laser, due au temps fini de couplage.

Pour le potentiel de pesanteur $V_0 = -Mgz$, le temps de chute depuis le plan $z = z_0$ est simplement donné par $t_{\text{CL}}(z, z_0) = \sqrt{2(z - z_0)/g}$ et la vitesse par $v_{\text{CL}} = \sqrt{2(z - z_0)/g}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \Psi_{m_F=0}(\mathbf{r}, t) \approx & \sqrt{\frac{2\pi (\hbar \Omega_{\text{rf}})^2}{\hbar 4Mg}} \Phi_{-1}(\rho, z_0) \\ & \frac{e^{i \frac{2}{3} |z - z_0|^{3/2} - i \delta_{\text{rf}} t_{\text{CL}}}}{|2g(z - z_0)|^{1/4}} \text{Rect}_{\text{T}}(t_{\text{CL}}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

On a posé $l = (\hbar^2/2M^2g)^{1/3}$ ($l \approx 300$ nm pour le ^{87}Rb). Cette longueur caractéristique est un paramètre important. Pour une particule immobile, localisée à une altitude bien définie (mais quelconque), elle donne l'ordre de grandeur des fluctuations en position imposée par le principe d'incertitude. L'approximation semi-classique sur laquelle nous nous basons néglige ces fluctuations, et elle se justifie si l'extension verticale typique du condensat est bien supérieure à l . Pour les condensats considérés dans ce chapitre, cette condition est bien vérifiée, mais ce n'est pas une propriété générale et pour un condensat très confiné dans la direction z , elle peut être mise en défaut.

L'équation (4.38) s'interprète simplement, si on note qu'en intégrant sur les coordonnées transverses, on obtient le flux sur l'axe :

$$\mathcal{F}(z) = \int d^2\rho |\Psi_{m_F=0}(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{\Gamma N}{v_{\text{CL}}(z)} \text{Rect}_{\text{T}}(t_{\text{CL}}) \quad (4.39)$$

avec $v_{\text{CL}}(z, z_0) = \sqrt{2g(z - z_0)}$ la vitesse classique au point z d'une particule partant du point d'extraction z_0 . L'intégration sur z , en utilisant $dz/v_{\text{CL}}(z) = dt_{\text{CL}}$, redonne donc le nombre d'atomes couplés, $N_{m_F=0} = \Gamma T$. Comme nous n'avons pris en compte aucun potentiel transverse, et négligé les effets de diffraction, le mode du laser dans cette approximation ne diverge pas. En nous basant sur les résultats de ce paragraphe, nous allons essayer d'améliorer notre description de ce mode en prenant en compte les premières corrections.

⁷Le calcul que nous menons est valable pourvu que V_z n'admette pas de point de focalisation. En effet l'approximation semi-classique échoue dans ce cas à décrire la dynamique, et on doit employer des méthodes plus élaborées que nous n'abordons pas ici [180].

4.3.2 Le champ moyen exercé par le condensat comme lentille divergente

Pour tenir compte des degrés de liberté transverses, nous allons calculer l'effet de V_\perp le long de la trajectoire déterminée précédemment. Pour le potentiel de champ moyen exercé par le condensat, les trajectoires partant du point \mathbf{r}_i à vitesse nulle obéissent à

$$\begin{aligned} X_{\text{CL}}^{\text{int}}(\mathbf{r}_i, t) &= x_i \cosh(\omega_x t) \\ Y_{\text{CL}}^{\text{int}}(\mathbf{r}_i, t) &= y_i \cosh(\omega_\perp t) \\ Z_{\text{CL}}^{\text{int}}(\mathbf{r}_i, t) &= \left(z_i + \frac{g}{\omega_\perp^2} \right) \cosh(\omega_x t) - \frac{g}{\omega_\perp^2} \end{aligned} \quad (4.40)$$

dans le volume du condensat. Les trajectoires quittent le volume du condensat au point $\mathbf{R}_{\text{CL}}^{\text{sortie}}$, avec la vitesse $\dot{\mathbf{R}}_{\text{CL}}^{\text{sortie}}$ et au bout du temps de propagation t_{sortie} déterminé par

$$\left(\frac{X_{\text{CL}}^{\text{sortie}}}{L} \right)^2 + \left(\frac{Y_{\text{CL}}^{\text{sortie}}}{R} \right)^2 + \left(\frac{Z_{\text{CL}}^{\text{sortie}}}{R} \right)^2 = 1. \quad (4.41)$$

Une fois la trajectoire hors du volume du condensat, le potentiel de champ moyen s'annule et les particules se propagent ballistiquement dans les directions transverses, et en chute libre dans la direction verticale.

Le problème est d'inverser ces équations, *i.e.* d'exprimer les coordonnées initiales en fonction des coordonnées du point d'observation et du temps de propagation. C'est un problème très complexe à résoudre analytiquement, à cause de la condition (4.41) qui le rend non-séparable. Nous proposons une solution d'échelle approchée basée sur les considérations suivantes. Nous considérons que dans le volume du condensat, les trajectoires ne dévient pas significativement des trajectoires déterminées par V_z seul. Elles restent rectilignes, et l'accélération verticale est toujours celle de la pesanteur. Par contre, les atomes accumulent une vitesse qui est prise en compte dans la propagation en dehors du condensat. Cette approximation n'a de sens que si la longueur du laser à atomes est bien plus grande que celle du condensat (le temps de couplage est grand devant $\sqrt{2R/g}$), ce qui est le cas en pratique. Notons que c'est l'analogie de l'approximation du réseau de phase mince en optique traditionnelle [181] (d'où l'indice ^(pm) utilisé dans la suite) : cela revient à traiter l'effet du champ moyen à l'ordre le plus bas en perturbation vis à vis des trajectoires déterminées par V_z seul.

Dans cette approximation, le temps de sortie t_{sortie} est calculé le long de la trajectoire en chute libre seulement, et on trouve

$$t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})} = \sqrt{\frac{2R}{g} (\sqrt{1 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2} - \tilde{z}_0)}. \quad (4.42)$$

Hors du condensat, on obtient facilement les trajectoires,

$$Y_{\text{CL}}^{\text{ext}}(\mathbf{r}_i, t) \approx y_i \left\{ 1 + \omega_\perp (t - t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})}) \sinh(\omega_\perp t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})}) \right\}, \quad (4.43)$$

et, si on suppose $\omega_x t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})} \ll 1$ (c'est le cas pour la situation expérimentale envisagée plus loin),

$$X_{\text{CL}}^{\text{ext}}(\mathbf{r}_i, t) \approx x_i \left\{ 1 + \omega_x (t - t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})}) \sinh(\omega_x t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})}) \right\} \approx x_i. \quad (4.44)$$

On voit sur (4.42) que la déviation à la trajectoire rectiligne est maximale pour un point d'extraction (x_M, y_M, z_0) , situé à l'intérieur du condensat (figure 4.4). Par contre, la trajectoire issue du point en périphérie ne voit pas de champ moyen, et elle n'est pas déviée. Ainsi, à une certaine altitude, un croisement de trajectoire se produit entre les trajectoires peu déviées issues de la périphérie du condensat et les trajectoires plus fortement déviées issues de la région intérieure. Au point de croisement, les différents chemins classiques possibles interfèrent, et par conséquent, des structures apparaissent dans le mode transverse du laser. Elles ont été étudiées en détails dans [182], mais sans tenir compte de la gravité. Si nous utilisons (4.42) pour calculer la trajectoire la plus déviée, on se rend compte qu'elle reste tout de même proche de la taille du condensat à l'altitude z_0 , $W_0 = R\sqrt{1 - z_0^2}$ (figure 4.4). Nous allons donc négliger les « effets de surface », en posant que la trajectoire la plus déviée sort du volume du condensat avec sa vitesse calculée comme précédemment, mais au point $z = z_0, y = W_0, x$ pour tout z_0 .

Nous supposons que le potentiel transverse est quadratique par morceaux (ceci sera utile dans la suite), et, en analogie avec les équations d'échelle, que le profil transverse reste quadratique en bonne approximation après la sortie du condensat. Nous insérons l'*ansatz* correspondant à ce modèle pour le propagateur,

$$K_0(\mathbf{r}_f, \mathbf{r}_i; t_f, t_i) = \frac{\mathcal{K}}{\beta_0^{1/2}} \delta(x_i - x_f) \delta(\beta_0 y_i - y_f) \delta(z - z_0) \delta(\tau - t_{\text{CL}}) e^{i \int_{z_0}^{z_f} k_z(z') dz' - \delta_{\text{rf}} t_{\text{CL}} + i\phi_{\perp} + i\eta}, \quad (4.45)$$

avec la phase accumulée au cours de la propagation transverse, $\phi_{\perp} = M\dot{\beta}_0 y^2 / 2\hbar\beta_0$, et η une phase uniforme. La constante \mathcal{K} fixe le flux sur l'axe, et on peut la déterminer de la même manière que dans la précédente section. Le paramètre d'échelle β_0 décrit l'étalement transverse du laser à atomes sous l'effet de potentiels quadratiques, et des interactions dans le laser à atomes. Cet *ansatz* ne peut être cohérent que si on néglige toutes les dérivées spatiales de la fonction d'onde transverse, en accord avec l'approximation de Thomas-Fermi « habituelle » et sa généralisation aux problèmes dynamiques sous la forme d'équations d'échelles. Le paramètre β_0 obéit alors à l'équation

$$\frac{d^2 \beta_0}{d^2 t_{\text{CL}}} = \omega_{\perp}^2 \beta_0 + \frac{U\mathcal{K}^2}{v_{\text{CL}}(t_{\text{CL}})} \frac{\omega_{\perp}^2}{\beta_0^2}. \quad (4.46)$$

En accord avec la discussion précédente, nous résolvons cette équation hors du volume du condensat, avec les conditions initiales approximatives

$$\beta_0 \approx 1 \quad (4.47)$$

$$\dot{\beta}_0 \approx \omega_{\perp}(t - t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})}) \sinh(\omega_{\perp} t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})}), \quad (4.48)$$

le temps de sortie étant calculé pour la trajectoire la plus déviée. En pratique, le terme d'interactions dans (4.46) est négligeable pour les paramètres utilisés. Dans le régime de champ lointain ($W \gg W_0$), la taille transverse W du laser à atomes dans la direction y , en $x = 0$ et à l'altitude z est alors déterminée approximativement par

$$W \approx \beta_0 W_0 \approx R\sqrt{1 - z_0^2} \sinh\left(\omega_i t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})}(x_M, y_M, z_0)\right) t_{\text{CL}}(z, z_0) \quad (4.49)$$

Remarquons que le déphasage transverse accumulé par la fonction d'onde du laser à la traversée du condensat est approximativement quadratique en position. La situation est donc tout à fait semblable à la traversée d'une lentille mince idéale par un faisceau laser, une analogie poussée plus avant dans la thèse de Y. Le Coq [46]. Si on tient compte du fait que des nombreuses simplifications que nous avons apportées (en particulier, $t_{\text{sortie}}^{(\text{pm})}$ dépend en général de la position), nous voyons que cette lentille présente en fait des aberrations significatives. Le traitement présenté ici rappelle l'approximation paraxiale en optique géométrique habituelle.

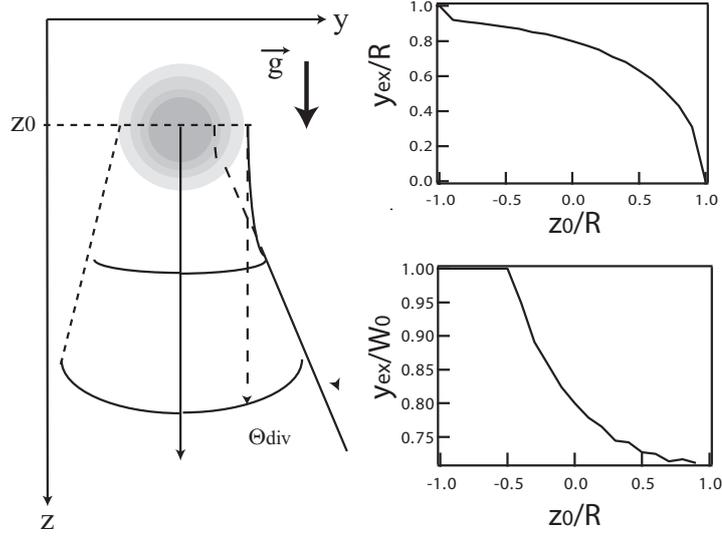


FIG. 4.4 – Propagation du laser à atomes. À gauche, on a tracé schématiquement deux trajectoires classiques, partant respectivement du centre et de la périphérie qui ne sont pas déviées du trajet rectiligne par le potentiel de champ moyen. Par contre, la trajectoire partant de la zone intérieure est bel et bien déviée. À gauche, on a tracé sur la courbe du haut la position transverse y (pour $x=0$) du point d'extraction pour lequel la trajectoire est la plus déviée, en fonction de l'altitude d'extraction sélectionnée par la fréquence du coupleur de sortie. Sur la courbe du bas, elle est normalisée par l'extension W_0 du condensat à l'altitude de couplage. La discontinuité est non physique, et résulte des simplifications drastiques opérées dans notre modèle.

4.4 Réalisation expérimentale d'un laser à atomes et dynamique d'extraction

4.4.1 Le piège et le circuit rf

Les expériences sur les lasers à atomes ont été réalisées en utilisant l'électro-aimant de seconde génération. Nous avons travaillé à un biais $B_0 \approx 54$ G, et des fréquences de piégeage dans $|F = 1, m_F = -1\rangle$ de $\omega_x = 2\pi \times 9\text{Hz}$ et $\omega_\perp = 2\pi \times 144\text{Hz}$. Pour un condensat typique contenant $4 \cdot 10^5$ atomes, cela correspond à des dimensions $R \approx 4\mu\text{m}$ et $L \approx 67\mu\text{m}$.

Le champ radio-fréquence utilisé pour l'extraction est généré par le même circuit que celui qui assure l'évaporation forcée, en utilisant une puissance bien inférieure (par environ 30 dBm) pour se situer en régime de couplage faible. La sortie d'un synthétiseur (Anritsu MG 3641A), dont la fréquence est définie à mieux que 1 Hz, est amplifiée par 30 dBm. Le transport de l'amplificateur (EN 310L) jusqu'à l'antenne de courant se fait par câble coaxial, mais l'impédance de l'antenne elle-même n'est pas adaptée à la ligne, si bien que des pertes et réflexions (que nous n'avons pas caractérisées) existent dans le circuit. Le champ est émis d'une boucle de courant, qui constitue une antenne magnétique (voir la figure 4.1). Le condensat étant bien plus petit que le diamètre de cette boucle, les atomes voient essentiellement le champ émis sur l'axe normal au plan de la boucle, qui est à peu près perpendiculaire à l'axe long du piège. Ce dernier correspond également à la direction du champ magnétique de piégeage, qui définit les axes propres adiabatiques (par rapport au mouvement des atomes dans le piège) et les sous-niveaux Zeeman. On se trouve donc dans la géométrie optimale pour le couplage entre sous-niveaux Zeeman, avec un champ exciteur \mathbf{B}_{rf} perpendiculaire au champ magnétique local \mathbf{B}_0 .

Imagerie verticale : Nous avons utilisé deux dispositifs d'imagerie différents dans l'étude des lasers à atomes. Le premier (« imagerie horizontale ») permet d'observer le condensat avec un grandissement approprié ; il a été décrit au second chapitre. Cependant, pour des raisons d'encombrement de l'expérience, la sonde se propage presque parallèlement à la gravité, et ce système est donc peu adapté à l'étude des lasers à atomes. Il est essentiellement utilisé ici pour l'étude du couplage. Une autre géométrie (« imagerie verticale ») permet de visualiser le laser à atomes lui-même (voir Figure 4.5) : la sonde se propage dans un plan horizontal, ce qui donne accès à la propagation du laser sous l'effet de la gravité. Par contre, le laser étant notablement plus long que le condensat, cet angle de vue ne permet pas de faire des analyses fiables sur le condensat lui-même, qui ne couvre que quelques pixels carrés de la caméra. De plus, dans le plan horizontal la sonde se propage à un angle θ par rapport à l'axe long du condensat. Comme l'image reflète une intégration le long de cet axe, d'éventuelles structures dans le mode du laser (suivant l'un ou l'autre axe) sont masquées par l'effet d'intégration. On constate également sur la Figure 4.5 que le condensat est spatialement séparé de l'extrémité du laser à atomes. Ceci est dû au gradient de champ rémanent déjà mentionné au chapitre III, et à un gradient transitoire qui apparaît pendant la coupure. La combinaison des deux agit comme un filtre de Stern-Gerlach sur différents sous-niveaux Zeeman en les accélérant sélectivement, d'où la séparation spatiale entre les différents états de spins après temps de vol.

Stabilité du biais : Expérimentalement, il est assez difficile de produire un laser à atomes quasi-continu car cela nécessite une bonne stabilité du biais magnétique B_0 . En effet, une fluctuation de B_0 entraîne une fluctuation de δ_{rf} , et donc du flux couplé. On peut distinguer deux types de fluctuations aux conséquences distinctes :

- des dérives lentes (fréquence caractéristique inférieures au Hz) qui font varier B_0 d'une expérience sur l'autre.
- des fluctuations rapides à l'échelle de la durée du couplage (10 ms environ) qui, pour une expérience donnée, vont produire des fluctuations importantes dans la densité du laser à atomes.

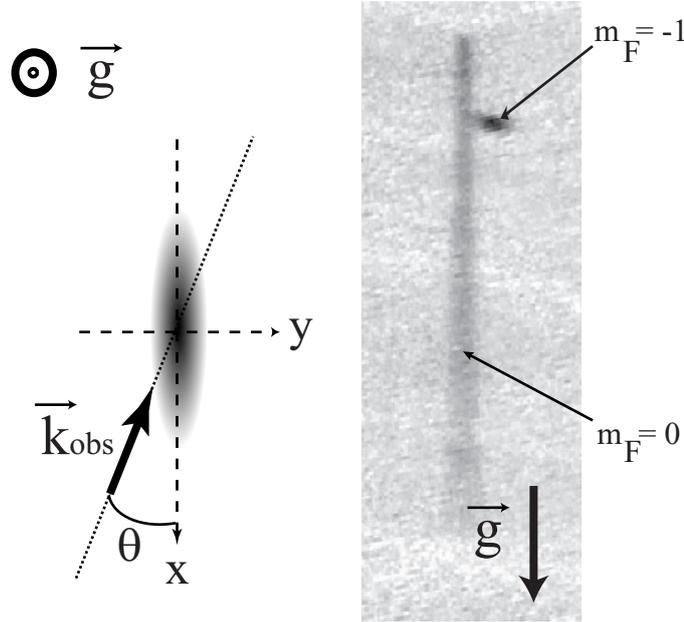


FIG. 4.5 – Imagerie d'un laser à atomes. A gauche, les directions relatives de l'axe de propagation de la sonde et des axes propres du piège sont indiquées. A droite, une image typique de laser à atomes. Le centre de masse du condensat devrait en théorie se trouver à l'extrémité du laser. En pratique, un gradient de champ magnétique parasite à la coupure du piège donne une vitesse d'ensemble au condensat (sans perturber le laser, insensible à l'effet Zeeman au premier ordre). Il agit donc comme un filtre de Stern-Gerlach pour séparer spatialement les différents sous-niveaux Zeeman.

Nous attribuons les dérives lentes à des fluctuations de la température de l'électro-aimant, qui modifient légèrement la perméabilité magnétique du matériau, ainsi que la résistance du circuit global⁸. Comme ces fluctuations sont lentes (échelle de temps : une heure), on peut tout de même les corriger « en temps réel » en ajustant la rampe au cours de l'expérience.

Les fluctuations rapides sont nettement plus problématiques, puisqu'elles agissent sur chaque expérience. Plus précisément, l'amplitude δB_0 des fluctuations du biais doit être suffisamment faible pour que le flux reste à peu près constant. La plage de couplage ayant une extension $\Delta \approx MgR$, on doit donc s'assurer que :

$$\mu_B \delta B_0 \ll \Delta \implies \frac{\delta B_0}{B_0} \ll \frac{MgR}{\mu_B B_0} \sim 3.10^{-4} \quad (4.50)$$

où l'application numérique est faite pour $B_0 \approx 54\text{G}$. Pour atteindre cette stabilité aux fréquences caractéristiques du couplage ($\lesssim 1\text{KHz}$), les câbles d'alimentation de l'électro-aimant ont été blindés pour éviter tout phénomène parasite, sans amélioration notable. En

⁸En effet, utiliser un refroidissement à eau pour l'électro-aimant de troisième génération (au lieu d'un refroidissement à air pour celui de seconde génération) a permis d'améliorer considérablement la stabilité du biais.

fait, après bien des efforts, il a été conclu que les fluctuations de courant de l'alimentation (Kepco BOP 50-8M) des bobines dipôle elle-même étaient responsables des fluctuations du biais observées. En fait, bien que stable à 10^{-4} sur charge résistive, ses performances se dégradent lorsqu'elle débite sur charge inductive, ce qui est le cas de notre électro-aimant. Après des essais provisoires avec une batterie de voiture, nous avons utilisé une alimentation stable (Rhode & Schwarz NGPV 20/5) en courant qui a permis l'extraction d'un faisceau quasi-continu. Cette dernière n'étant pas commandable facilement, l'essentiel de l'expérience est toujours réalisée avec l'ancienne alimentation, puis on bascule sur la source stable avant d'extraire le laser [46].

4.4.2 Dynamique d'extraction dans le régime stable

L'effet Zeeman quadratique : Pour rendre compte quantitativement des caractéristiques mesurées des lasers à atomes, il est nécessaire de tenir compte du potentiel Zeeman quadratique. Ceci est déjà évident sur la longueur du laser à atomes mesurée sur l'image. Si seuls la gravité et le champ moyen agissaient, on s'attendrait à une extension de $gT^2/2 \approx 1.33$ mm, avec $T = 16$ ms (temps de couplage de 10 ms, suivi d'un vol libre de 6 ms). Or, on mesure une longueur de 1.84(9) mm [52]. Le potentiel répulsif dû à l'effet Zeeman du second ordre permet d'expliquer cette différence. En effet, à l'aide de l'expression au deuxième ordre en champ (2.4), on obtient une correction anti-harmonique (de courbure négative) qui prend la forme [46] :

$$\delta V_{\perp} = -\frac{1}{2}M\Omega_0^2(\lambda^2 x^2 + y^2 + z^2) \quad (4.51)$$

La courbure peut se calculer à partir du gradient transverse, de la valeur du biais magnétique et de l'écart entre les niveaux hyperfins [46]. Dans notre cas, on a $\Omega_0 \approx 2\pi \times 30.3$ Hz⁹. Pour le temps de couplage de 10 ms, suivi d'un vol balistique de 6 ms, en incluant le potentiel quadratique et le champ moyen dans le calcul des trajectoires longitudinales, on calcule une extension verticale de 1.87 mm, en bon accord avec la valeur observée.

Pour le taux de couplage, ce potentiel est faible devant la gravité et le champ moyen à l'intérieur du volume du condensat. La fréquence totale du potentiel anti-harmonique, $\omega_0 = \sqrt{\omega_{\perp}^2 + \Omega_0^2}$ ne diffère de la fréquence du potentiel de champ moyen ω_{\perp} que de quelques pour cents. On pourra donc utiliser le taux de couplage calculé précédemment à une bonne approximation. Par contre, le calcul de l'extension du laser montre qu'il doit être pris en compte pour décrire la propagation sur des distances plus grandes que l'extension verticale du condensat.

Calibration de la puissance rf : Expérimentalement, il n'est pas possible de déduire la puissance rf vue par les atomes à partir de celle débitée par le synthétiseur, car l'antenne n'est pas spécialement adaptée à la ligne de transmission, et ne transmet donc pas toute la puissance en sortie de l'amplificateur. De plus, la présence du piège magnétique modifie

⁹Cette valeur est déduite de mesures de fréquence d'oscillation du centre de masse dans $|F = 2; m_F = 0\rangle$. Dans ce cas, l'effet Zeeman quadratique introduit une courbure légèrement positive et cet état devient piégeant. On consultera la référence [46] pour plus de détails.

significativement la réponse du circuit entier en se couplant à l'antenne rf, et génère de nombreuses résonances mal caractérisées. Cependant, à partir de la formule du taux d'extraction établie plus haut et de l'équation de taux intégrée numériquement, il est possible de calibrer la puissance qui arrive sur les atomes en mesurant la fraction couplée. Le résultat est reporté sur la figure 4.6. Pour cette expérience, on s'est placé pratiquement à résonance, avec un temps de couplage de 10 ms, en variant la puissance débitée par le synthétiseur (exprimée en dBm). La relation entre la puissance rf et la fréquence de Rabi (comme nous l'avons définie au paragraphe 4.1.1) s'écrit :

$$P_{\text{dBm}} = 20 \log_{10} \Omega_{\text{rf}} + C \quad (4.52)$$

On peut laisser C comme paramètre libre pour ajuster les données expérimentales avec l'équation de taux développée plus haut. On trouve $C \approx 104$ dBm, correspondant à une fréquence de Rabi de 400 Hz pour une puissance rf typique de -50 dBm (utilisée pour les données présentées sur la figure 4.7).

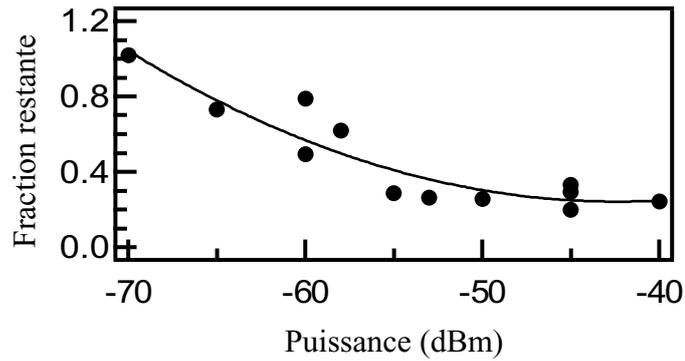


FIG. 4.6 – Calibration de la fréquence de Rabi. On applique la rf avec une puissance donnée, puis on mesure le nombre d'atomes restants dans le condensat. La puissance varie dans cette expérience, mais le temps de couplage (10 ms) et le désaccord (à peu près nul) sont fixes. On utilise l'équation de taux développée dans ce chapitre pour comparer aux mesures expérimentales.

Spectroscopie radiofréquence du condensat : Nous avons également réalisé des expériences de résonance rf, similaire à celles menées à Munich [35]. La figure 4.7 donne un exemple d'une telle courbe, prises pour $P_{\text{rf}} = -50$ dBm, pour un temps de couplage de 10 ms. Pour s'affranchir des dérives lentes de la rampe, qu'on ajuste manuellement au cours de la prise de données, on repère sur ce graphe les radio-fréquences par rapport à la fréquence d'évaporation pour laquelle on n'arrive plus à distinguer la fraction thermique. La courbe réelle est centrée environ 25 kHz en dessous de cette fréquence. La comparaison à la théorie nécessite de recentrer chaque courbe de résonance en zéro, puisqu'on ne dispose pas de moyen assez précis de mesurer le biais. A noter que la courbe calculée (trait plein sur la figure 4.7) n'a alors qu'un paramètre ajustable, sa hauteur, fixée par l'ajustement de la puissance rf. On s'aperçoit que la résonance observée est légèrement plus large que la prédiction de

l'approche semi-classique. Nous attribuons cet élargissement à des fluctuations résiduelles du biais. Des données antérieures prises avec le biais non stabilisé donnent une largeur de résonance de l'ordre de 30 kHz, clairement limitée par les fluctuations du champ magnétique. Cette amélioration notable est dûe entièrement à l'utilisation d'une alimentation stable en courant, comme nous l'avons discuté plus haut.

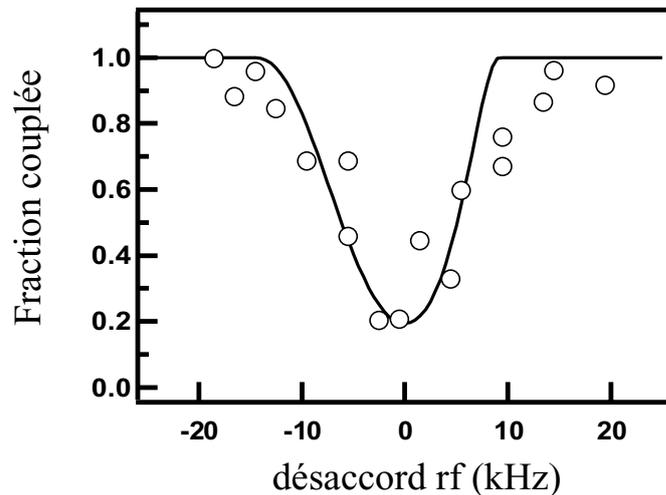


FIG. 4.7 – Spectroscopie RF du condensat. Le nombre d'atomes encore présent après l'application du coupleur est tracé en fonction du désaccord. Les courbes expérimentales et théoriques ont été ramenées autour du désaccord nul pour comparer. Pour cette expérience, on a couplé les atomes pendant 10 ms, à une puissance de -50 dBm.

4.5 Divergence du laser à atomes

Nous nous intéressons maintenant à la forme spatiale du laser à atomes, en nous focalisant sur la dynamique transverse. Pour cela, nous avons varié la hauteur à laquelle les atomes étaient couplés en variant le désaccord rf. Comme nous l'avons vu, cela modifie la phase accumulée à cause de l'interaction entre le condensat et le laser. Après un temps de couplage, puis de propagation libre (fixés tous les deux), l'effet sur les trajectoires est mesuré en prenant une image d'absorption. Nous détaillons en premier lieu la procédure d'analyse. Nous indiquons ensuite comment modifier les calculs du paragraphe 4.3.2 pour inclure l'effet du potentiel dû à l'effet Zeeman quadratique, et comparons aux observations expérimentales.

4.5.1 Acquisition et analyse des données

Pour analyser la divergence du mode transverse, la procédure suivante a été employée (voir la Figure 4.8). Pour chaque désaccord δ_{rf} , les données ont été collectées pour un temps

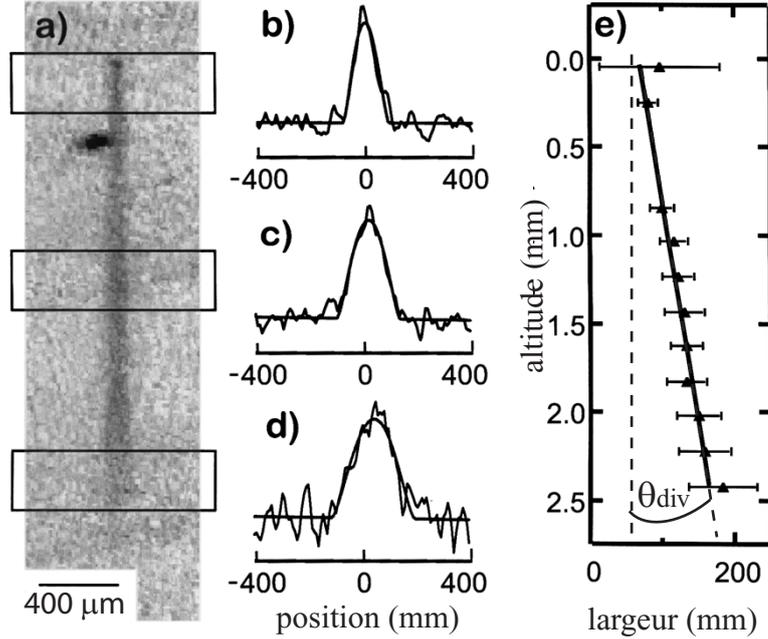


FIG. 4.8 – Illustration de la procédure d'analyse de la divergence transverse du laser à atomes.

de couplage fixé (10 ms) et une puissance rf fixée (-50 dBm). L'extraction est réalisée sur un condensat presque pur (dans les limites de détektivité du système vertical). On laisse ensuite un temps de vol supplémentaire de 6 ms, après avoir coupé le piège magnétique, puis on prend une image d'absorption avec le système d'imagerie verticale. Pour chaque image de laser à atomes, on divise l'axe vertical z en plusieurs intervalles, qui définissent chacun une boîte. Dans chaque boîte, on obtient un profil transverse en moyennant selon z . Ce profil est ajusté par une parabole à une dimension. On obtient ainsi l'extension transverse W en fonction de z , qui s'ajuste très bien par une droite. En répétant cette procédure pour tous les désaccords utilisés, on déduit l'angle de divergence θ_{div} de la pente de cette droite. Le résultat de cette analyse est tracé en fonction du désaccord sur la figure 4.9.

4.5.2 Propagation du laser dans notre expérience

Par rapport au calcul développé précédemment pour décrire la propagation transverse, il faut tenir compte ici de deux effets supplémentaires, la présence du potentiel magnétique transverse dû à l'effet Zeeman quadratique et le vol libre de 6 ms que l'on autorise avant la prise d'images. Le premier effet revient à considérer un potentiel transverse quadratique partout dans l'espace, mais dont la fréquence dépend de z : $\omega_0^2 = \omega_{\perp}^2 + \Omega_0^2 \approx \omega_{\perp}^2$ si $t < t_{\text{sortie}}$, et $\omega_0^2 = \Omega_0^2$ si $t \geq t_{\text{sortie}}$. Remarquons également que la courbure du potentiel selon l'axe x est nettement plus faible que selon l'axe y , par un facteur $(\omega_x/\omega_{\perp})^2 \sim 10^{-2}$. En conséquence, la divergence des trajectoires dans cette direction est négligeable pour les paramètres utilisés ici,

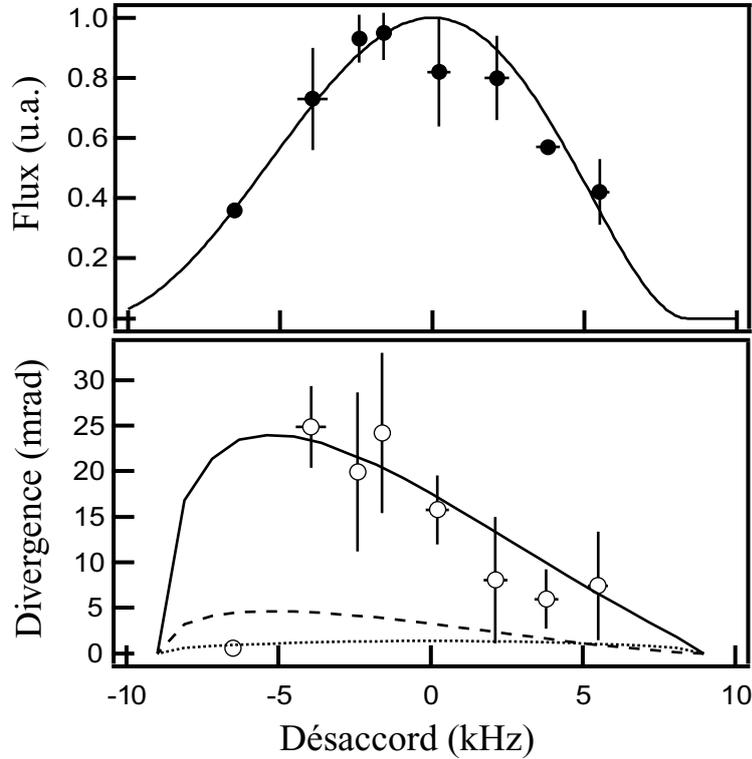


FIG. 4.9 – Mesure de la divergence du laser à atomes. Sur la courbe du haut, on a indiqué le flux mesuré et celui attendu d'après (4.32). La mesure du nombre d'atomes est calibrée d'après la largeur de cette courbe, utilisée comme paramètre libre. La courbe du bas indique la divergence mesurée en fonction du désaccord du coupleur rf. Nous avons également reporté plusieurs calculs, correspondant à l'effet de la gravité et du potentiel Zeeman quadratique seuls (points), du champ moyen et de la gravité seuls (tirets), et des trois effets réunis (trait plein).

et il suffit de ne considérer que la divergence selon l'axe y . Bien que les calculs de trajectoires soient élémentaires, le résultat final est lourd à écrire et apporte peu d'éléments nouveaux par rapport à l'équation (4.49), si bien que nous ne donnons pas son expression. Nous nous contentons de le tracer sur la figure 4.9 en fonction de la fréquence du coupleur rf, avec les points expérimentaux. On voit que l'accord avec la courbe en traits pleins est assez bon, au moins à 25 % près si on tient compte de l'incertitude sur le nombre d'atomes. Pour tracer la courbe en traits pleins, le nombre d'atomes a été pris égal à 4.2×10^5 ($R \approx 4, 2\mu\text{m}$). Pour les raisons évoquées plus haut, et également à cause de la trop faible dynamique de la caméra¹⁰, il n'est pas possible de calibrer le nombre d'atomes aussi précisément que dans les autres expériences. La dépendance avec le rayon du condensat est cependant assez faible, en $N^{1/5}$, si bien que cette incertitude n'affecte pas dramatiquement les résultats. En comparant les courbes calculées sans le champ moyen, sans l'effet Zeeman quadratique avec le calcul qui prend tout en compte, on constate qu'il est crucial de tenir compte de ces deux effets à la

¹⁰Ce travail sur le laser à atomes n'a pas été réalisé avec la caméra numérique décrite au chapitre II, mais avec une caméra vidéo aux piètres performances.

fois. Le champ moyen du condensat donne une impulsion initiale qui est magnifiée par le potentiel anti-harmonique, et il est remarquable que seule cette combinaison d'accélération et d'impulsion initiale puisse expliquer la divergence observé, de l'ordre de la dizaine de mrad.

4.6 Conclusion

En conclusion, nous avons étudié dans ce chapitre la dynamique d'extraction et la propagation d'un laser à atomes. Nous avons montré que la gravité constituait le terme dominant, et qu'elle devait être incluse dans un traitement théorique du problème. En nous basant sur une approche semi-classique, nous avons pu obtenir des expressions analytiques pour le taux de couplage qui se comparent favorablement aux résultats expérimentaux obtenus dans notre groupe. Nous avons également caractérisé expérimentalement la propagation du mode transverse, et mesuré la divergence angulaire du faisceau atomique. Les résultats expérimentaux sont en accord raisonnable, compte-tenu de nos incertitudes expérimentales, avec un modèle semi-classique, simplifié mais qui tient compte des interactions entre le laser à atomes et le condensat, et du potentiel résiduel dû à l'effet Zeeman quadratique.

Ces expériences et calculs sur les lasers à atomes ont constitué le point de départ de mon travail de thèse. Cependant, une fois l'électro-aimant de troisième génération installé sur l'expérience, nous avons décidé de ne pas pousser notre investigation de ce problème au delà des études présentées dans ce chapitre, pour se concentrer sur la physique des gaz quantiques dans un potentiel très anisotrope. La dernière partie de ce mémoire leur est consacrée.

Fluctuations de phase à une dimension

Ce chapitre constitue une introduction à la physique des gaz de Bose uni-dimensionnels. Ce système, qui peut paraître académique à première vue, est en fait expérimentalement accessible dans des potentiels de piégeage extrêmement anisotropes. Tout se résume en fait à comparer l'énergie typique par particule ϵ à la fréquence du mouvement radial, ω_{\perp} . Lorsque $\epsilon \ll \hbar\omega_{\perp}$, le mouvement transverse est essentiellement restreint à l'oscillation de point zéro, et la plupart des atomes se regroupent dans le fondamental transverse. On parle alors de « degrés de liberté transverses gelés », et le comportement du système se réduit à celui d'un gaz à une dimension. Pour un gaz thermique, l'énergie typique est $\epsilon \sim k_{\text{B}}T$, alors que, pour un condensat quasi-pur ($T \approx 0$ K), on a au contraire $\epsilon \sim \mu$. Nous allons examiner successivement ces deux cas, avant d'aborder le régime « intermédiaire » à température finie. Nous verrons qu'il existe une plage de température où le profil de densité du gaz 1D est le même que celui d'un condensat, les fluctuations de densité étant également supprimées. Par contre, la phase n'est bien définie que sur une longueur de cohérence réduite. On parle alors de « quasi-condensat » [40]. Pour se faire une image intuitive de ces quasi-condensats, on pourra imaginer qu'on divise le système en sous-parties, dont la taille est de l'ordre de la longueur de cohérence. Chacun des sous-condensats locaux est alors parfaitement cohérent (la phase garde une valeur bien définie sur tout le sous-domaine, et les fluctuations locales de densité sont supprimées), mais les phases relatives de deux sous-domaines distincts sont complètement décorréliées.

Le régime uni-dimensionnel a été atteint expérimentalement dans des pièges optiques [183, 184] ou magnétiques [28]. Son importance pourrait dépasser le cadre de la physique des gaz ultra-froids, dans la mesure où des interféromètres à onde de matière guidées, actuellement en cours de développement [185, 186, 187, 188] et aux potentielles applications métrologiques [157, 158, 159, 160], opèreront très probablement dans un régime de fort confinement transverse. Il est crucial pour le fonctionnement de ces sources de caractériser en détails les propriétés de cohérence, intrinsèquement liées aux fluctuations de phase mentionnées plus haut.

Il n'est cependant pas strictement nécessaire d'atteindre le régime 1D pour observer ces phénomènes de fluctuations de phase. En effet, ces dernières sont liées à la population anormalement élevée des états de basse énergie à une dimension. Or, nous avons vu au premier chapitre que, même pour un condensat à trois dimensions, les excitations de très basse énergie adoptaient un comportement uni-dimensionnel pourvu que le piège soit suffisamment aniso-

trope [90]. A cause de ces excitations, la phase des condensats 3D dans un piège anisotrope est donc susceptible de fluctuer [41].

L'existence de tels quasi-condensats dans des pièges anisotropes a été établie expérimentalement dans le groupe de W. Ertmer et K. Sengstock à Hannovre [42, 189, 190]. Ces expériences ont permis de mettre en évidence la transformation des fluctuations de phase en modulations de la densité du nuage après un temps de vol. L'amplitude de ces modulations s'est révélée être en accord avec les calculs de D. Petrov et G. Shlyapnikov [41, 189], à un facteur 2 près. Cette différence est attribuée par les auteurs à la difficulté de calibrer précisément l'expérience en question. De plus, dans ces expériences, la longueur de cohérence n'est accessible qu'indirectement, à travers la théorie décrivant la transformation des fluctuations de phase au cours du temps de vol. Pour ces deux raisons, nous avons entrepris de sonder les corrélations en phase dans un quasi-condensat à l'équilibre par une méthode plus directe, basée sur la mesure de la distribution en impulsion, que nous aborderons au chapitre suivant.

Après une introduction aux propriétés des gaz de Bose à une dimension, ce chapitre étudie principalement les propriétés de cohérence des quasi-condensats 3D. Nous nous basons principalement sur une approximation de densité locale [191, 42], qui donne des prédictions analytiques pour la fonction de corrélation et la distribution en impulsion qui caractérisent la cohérence en phase. Cette approche permet également de décrire la limite 1D, et les situations intermédiaires. Nous calculons la fonction de corrélation spatiale et la distribution en impulsion, et discutons finalement le problème du quasi-condensat en expansion.

5.1 Le gaz de Bose à une dimension

5.1.1 La condensation du gaz idéal dans un piège 1D

Nous considérons pour commencer le cas d'un gaz de bosons idéal dans un piège harmonique à une dimension de fréquence ω_x . Contrairement à son homologue tri-dimensionnel, un tel système ne présente pas de condensation de Bose-Einstein à la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$, $\omega_x \rightarrow 0$, $N\omega_x \rightarrow \text{constante}$). En effet, le nombre d'atomes dans les états excités vérifie (quand $k_B T \gg \hbar\omega_x$) [192, 193] :

$$N_{\text{th}} = \frac{k_B T}{\hbar\omega_x} \log \left(1 - z_0 e^{-\frac{\hbar\omega_x}{2k_B T}} \right), \quad (5.1)$$

qui n'est jamais borné si $N \rightarrow \infty$, $\omega_x \rightarrow 0$. Ce problème est bien connu, et il est lié à la densité d'états qui, dans le cas 3D, tend vers zéro à basse énergie, mais diverge dans le cas 1D. Pour un système de taille finie, par contre, la condensation devient possible. La densité d'états étant nulle en dessous de l'énergie du premier état excité $\hbar\omega_x$, la population totale des états excités reste toujours finie. Au premier ordre, on trouve une température de transition [192, 193] :

$$k_B T_{1D} \approx \frac{N\hbar\omega_x}{\log N}. \quad (5.2)$$

A la limite thermodynamique, la température de transition tend vers zéro comme $1/\log(N)$.

A trois dimensions, dans un piège très anisotrope à symétrie cylindrique, on peut distinguer deux classes importantes d'états excités selon les nombres quantiques n_\perp et n_x , qui déterminent l'énergie $\epsilon = n_\perp \hbar\omega_\perp + n_x \hbar\omega_x$: ceux qui correspondent à un mouvement tri-dimensionnel ($n_\perp > 0, n_x > 0$), et ceux qui correspondent à un mouvement uni-dimensionnel selon l'axe faible ($n_\perp = 0, n_x > 0$). Aux états 1D (respectivement 3D), correspond la température de transition T_{1D} , étudiée ci-dessus (respectivement T_{C0} , étudiée aux chapitres I et III), pour laquelle la population totale de ces états sature. Suivant les valeurs relatives de T_{C0} et de T_{1D} , la condensation se produit de manière différente (voir la Figure 5.1) :

- Dans le cas $k_B T_{C0}, k_B T_{1D} < \hbar\omega_\perp$, les degrés de liberté transverses gèlent avant que la condensation ne se produise, et on se trouve dans le cas décrit plus haut d'une distribution thermique 1D. Notons que pour que cela se produise, on doit avoir $N < \omega_\perp/\omega_x$: il faut donc des pièges extrêmement anisotropes, et le nombre d'atomes sera nécessairement limité.
- Dans la situation $T_{1D} > T_{C0} > \hbar\omega_\perp$, les états 1D saturent avant les états 3D. Ce sont ces derniers qui limitent donc le processus, et la condensation se produit de manière « ordinaire ».
- Enfin, dans le cas $T_{C0} > T_{1D} > \hbar\omega_\perp$, alors ce sont les états 3D qui saturent en premier, et un nombre macroscopique d'atomes va aller peupler le fondamental transverse. Par contre, la distribution axiale reste thermique, jusqu'au point où la population des états 1D sature. A partir de ce point de transition, l'état fondamental *global* se peuple alors significativement de manière abrupte. Ce comportement a été appelée « condensation en deux étapes » dans la littérature [193].

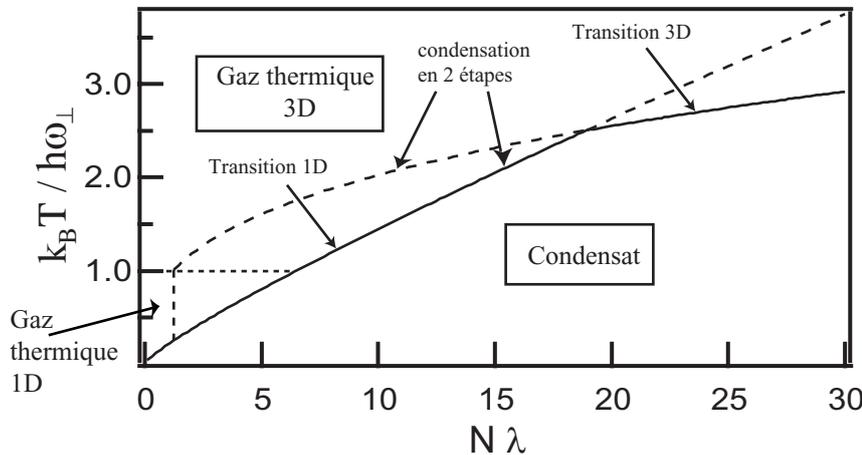


FIG. 5.1 – Diagramme de phases d'un gaz idéal dans un piège très anisotrope, en fonction du nombre d'atomes et de la température. On a choisi un rapport d'aspect de $\lambda = 1/100$ pour tracer ce graphe. La transition de Bose-Einstein est matérialisée par le trait plein. Pour un nombre d'atomes assez large, $N\lambda > 19$, on a une transition vers un condensat 3D. En dessous de cette limite, la condensation se produit en deux étapes. Enfin, pour de très faibles nombres d'atomes, $N\lambda < 1$, on gèle d'abord les degrés de liberté transverses et on condense directement à une dimension.

5.1.2 Le condensat 1D : rôle du champ moyen

Comme pour le cas 3D, il est cependant nécessaire d'inclure les interactions binaires pour arriver à une description satisfaisante. Une autre échelle d'énergie intervient alors, qui n'est rien d'autre que le potentiel chimique μ qui caractérise l'importance des interactions. Pour le moment, nous nous plaçons à température nulle et nous ignorons la fraction non condensée. Si $\mu \gg \hbar\omega_\perp$, on est simplement dans le régime de Thomas-Fermi 3D décrit au chapitre I. Par contre, quand on atteint $\mu \sim \hbar\omega_\perp$ (*i.e.* le terme de pression quantique dans les directions radiales devient de l'ordre de μ), le rayon du condensat tend progressivement vers l'extension de l'état fondamental transverse $a_\perp = \sqrt{\hbar/M\omega_\perp}$, et l'approximation de Thomas-Fermi s'effondre (au moins en ce qui concerne les degrés de liberté transverses). A la limite $\mu \ll \hbar\omega_\perp$, on a un condensat 1D [90, 40] : la fonction d'onde est construite à partir du fondamental transverse du piège $\Phi_\perp = \exp(-\rho^2/2a_\perp^2)/\pi^{1/2}a_\perp$ (normalisée à 1), et d'une composante axiale

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \Phi_\perp(\rho)\Phi_x(x) \text{ (limite 1D)}. \quad (5.3)$$

Dans cette limite, le gaz est équivalent à un système unidimensionnel : il est décrit par une équation de Gross-Pitaevskii à une dimension pour $\Phi_x(x)$, avec une constante de couplage 1D qui s'obtient simplement en moyennant sur le profil transverse [194] :

$$U_{1D} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \int d^2\rho |\Phi_\perp(\rho)|^2 = \frac{2\hbar^2 a}{Ma_\perp^2} = 2a\hbar\omega_\perp. \quad (5.4)$$

Cette constante de couplage permet d'introduire l'équivalent d'une longueur de diffusion pour les collisions à basse énergie dans une géométrie 1D, a_{1D} , par $g_{1D} = 2\hbar^2/Ma_{1D}^2$ (voir [194] et la section 5.1.5). Elle permet également de chiffrer l'importance des interactions sur la dynamique 1D, en comparant $U_{1D} |\Phi_x(0)|^2$ à la fréquence axiale. Si $U_{1D} |\Phi_x(0)|^2 \gg \hbar\omega_x$ (« régime de Thomas-Fermi 1D »), l'expression de la fonction d'onde axiale est [195, 40]

$$\Phi_x(x) = \sqrt{n_{1m}(1 - \tilde{x}^2)}, \quad (5.5)$$

avec la densité-pic $n_{1m} = \mu_{1D}/U_{1D}$ et le potentiel chimique 1D (repéré par rapport à ω_\perp) $2\mu_{1D}/\hbar\omega_\perp = (3\chi)^{2/3}$, avec $\chi = N_0 a a_\perp / a_x^2$ le paramètre qui caractérise la transition entre le régime 3D ($\chi \gg 1$) et le régime 1D ($\chi \ll 1$). Cette discussion reste vraie à température finie, si bien qu'on peut avoir la situation où le condensat est 3D, mais le nuage thermique 1D (si $k_B T \ll \hbar\omega_\perp \ll \mu$), et également le cas contraire où le condensat est 1D, mais le nuage thermique est 3D (à haute température, si $k_B T \gg \hbar\omega_\perp, \mu$). A notre connaissance, les expériences qui ont pu atteindre ce régime uni-dimensionnel étaient dans cette dernière situation [183, 184, 28]. Le profil transverse gaussien du condensat a ainsi pu être mis en évidence expérimentalement, mais ni les effets de condensation en deux étapes, ni le gel des degrés de liberté transverses pour un nuage thermique.

5.1.3 Fluctuations de phase et quasicondensat

A température finie, la situation est plus complexe si on tient compte des interactions. Dans une large gamme de température, on a affaire à un « quasi-condensat », intermédiaire

entre un condensat et un gaz thermique. Contrairement à un « vrai » condensat, la phase n'est bien définie que sur une longueur de cohérence plus faible que l'extension physique du système, et qui dépend de la température. Par contre, comme dans un condensat, à cause de leur coût en énergie d'interaction, les fluctuations locales de densité sont fortement supprimées, et le profil statique s'obtient toujours à l'approximation de Thomas-Fermi. Nous allons faire un détour par le cas du gaz homogène pour mieux le comprendre.

L'ordre à longue portée ne survit pas à la limite thermodynamique à une dimension : A la limite thermodynamique, nous avons vu qu'il n'y avait pas de condensation pour un gaz idéal piégé. Ceci reste vrai dans le cas uniforme 1D, même en présence d'interactions [196, 197, 198], et on peut le voir comme le résultat d'un principe général qui interdit l'établissement d'un ordre à longue portée dans les systèmes de basse dimension¹ [74]. Citons les exemples (classiques) suivants :

- Solide : l'ordre solide ne peut pas s'établir à une dimension. Les fluctuations de position des atomes interdisent la localisation.
- Chaîne de spins : de la même manière, les fluctuations thermiques et quantiques permettent de vaincre l'alignement des spins à longue portée. L'ordre ferromagnétique (ou anti-ferromagnétique) est donc détruit également.
- Superfluides et superconducteurs : dans les superfluides (respectivement les superconducteurs), l'ordre à longue portée est caractérisé par un paramètre d'ordre complexe, la fonction d'onde du condensat (respectivement la fonction de corrélation des paires de Cooper) dont la *phase* est une quantité bien définie. Pour un système de basse dimension, cette phase fluctue si bien que les corrélations ne s'étendent plus sur la totalité du système.

D'une manière générale, ces fluctuations proviennent de la présence d'une population importante dans les états de basse énergie du système². A trois dimensions, pour un gaz de Bose uniforme, la densité d'états $\rho_{3D}(E)$ varie comme $VE^2/(\hbar c_S)^3$ (V est le volume du système et c_S la vitesse du son). A basse énergie, le facteur de Bose-Einstein se réduit à $N_{BE}(E) \approx k_B T/E$, et le nombre de particules d'énergie comprise entre E et $E + dE$, $\rho_{3D}(E)N_{BE}(E) \propto E$, tend vers zéro quand l'énergie des excitations tend vers zéro : leur population est susceptible de saturer et de provoquer à la condensation de Bose-Einstein. Au contraire, à une dimension, la densité d'états reste constante à basse énergie $\rho_{1D}(E) \sim L/\hbar c_S$. A cause du facteur de Bose-Einstein, la population $\int \rho_{1D}(E)N_{BE}(E)dE$ diverge logarithmiquement à la limite thermodynamique. L'hypothèse d'un spectre de phonons à une dimension est donc incompatible avec l'existence d'un condensat³, et cela signifie que les états de faible énergie ne saturent jamais et que l'on ne forme pas le condensat. Par contre, ces états de basse énergie (ou grande longueur d'onde), de population élevée, dictent la physique du système à l'échelle macroscopique.

¹Dans ce mémoire, on ne discute que le cas 1D. A deux dimensions, la situation est en général différente. Pour le cas du gaz de Bose, on pourra se reporter à la référence [199] pour une introduction théorique et [200, 201] pour une réalisation expérimentale dans un gaz d'hydrogène adsorbé sur un film d'hélium.

²Pour le solide et le fluide, il s'agit des phonons, qui sont des ondes sonores quantifiées ; pour le ferromagnétique on parle de magnons, qui sont des ondes de spin quantifiées. Dans tous les cas, il s'agit d'excitations de grande longueur d'onde (faible énergie) du paramètre d'ordre.

³Ce résultat a été obtenu par P. C. Hohenberg, N. Mermin et C. Wagner, et il est souvent mentionné dans la littérature sous la forme du théorème du même nom [197, 198].

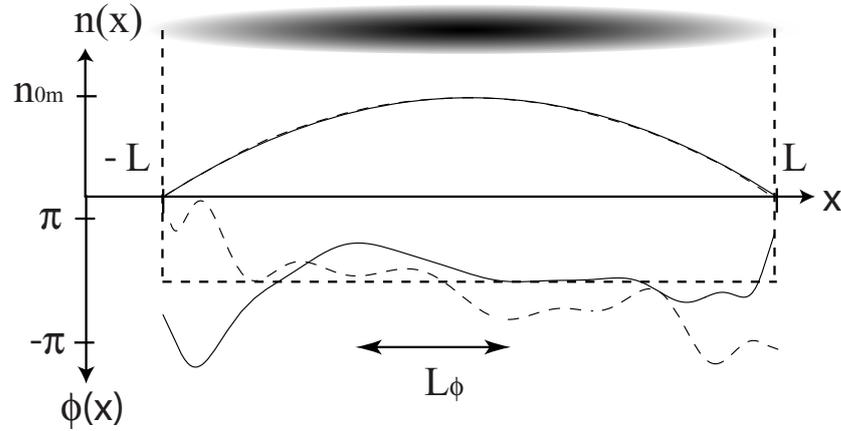


FIG. 5.2 – Quasi-condensat dans un piège anisotrope. On a tracé le profil de densité et de phase pour $T = 5 T_\phi$, $\mu/h = 2$ kHz et $\omega_x/2\pi = 5$ Hz, calculés à partir des équations (5.26,5.27), en représentant les amplitudes \hat{b}_j par des variables aléatoires gaussiennes avec la variance appropriée [42]. Le profil de densité est pratiquement identique à celui d'un condensat, et on ne distingue pas les fluctuations de densité à l'échelle de la figure. Par contre, le profil de phase fluctue dans l'espace, et aussi d'une réalisation sur l'autre : on a tracé deux réalisations différentes pour les mêmes paramètres (et indiqué le profil de phase plat, attendu pour un vrai condensat).

Fluctuations de phase pour un système de taille finie : Approche qualitative

Nous avons discuté jusqu'ici le comportement d'un système à la limite thermodynamique, où la notion de transition de phase est bien définie. Dans ce cas, le spectre des excitations est continu de 0 à $+\infty$. Dans le cas d'un système de taille finie L , le spectre d'excitation est borné par l'énergie du premier état excité, $\hbar^2/2ML^2$. A suffisamment basse température, le facteur de Bose est donc inefficace puisqu'il n'y a aucun état accessible à peupler, et la saturation des états excités (donc la condensation de Bose-Einstein) devient possible.

Pour rendre ce point plus quantitatif, nous allons obtenir simplement l'expression de la longueur de cohérence de l'ensemble atomique 1D, en identifiant deux images physiques complémentaires. D'une part, comme nous l'avons déjà indiqué, on peut décrire un quasi-condensat comme un champ classique dont la phase fluctue, bien que son amplitude reste bien définie. Ceci conduit à l'image déjà introduite de « domaines », à l'intérieur desquels la phase reste assez bien définie. Par contre, les phases relatives de deux domaines disjoints sont décorréélées. Cette image est équivalente à celle qui considère le quasi-condensat comme un ensemble thermique 1D de quasi-particules, *i.e.* d'excitations élémentaires du système de Bose en interactions. Nous rendrons cette affirmation plus rigoureuse plus loin, dans le cadre de la théorie de Bogoliubov, et nous contenterons ici d'arguments d'ordre de grandeur.

Revenons au point de vue densité-phase introduit au chapitre I, en introduisant la forme suivante de l'opérateur champ 1D : $\hat{\Psi}(x) = \sqrt{n_1 + \delta\hat{n}_1} \exp(i\hat{\phi})$, avec n_1 le profil de densité à l'équilibre (supposé uniforme et égale à $n_1 = N_0/2L$ dans ce paragraphe), $\delta\hat{n}_1$ et $\hat{\phi}$ les opérateurs qui donnent les fluctuations de densité et de phase autour de l'équilibre. Une

comparaison des échelles d'énergie est instructive. A l'équilibre, on associe une énergie d'interaction (totale) $E_{\text{int}} \sim U_{1\text{D}} n_1^2 L$, et une énergie cinétique reliée à la taille du système par $E_{\text{cin}} \sim N_0 \hbar^2 / 2ML^2$. On supposera également que $E_{\text{cin}} \ll E_{\text{int}}$, c'est-à-dire un système dans le régime de Thomas-Fermi. Appelons L_ϕ la distance moyenne sur laquelle la phase varie de 2π le long de l'échantillon⁴. Dans la suite, nous appellerons L_ϕ « la longueur de corrélation de la phase ». Des fluctuations de phase autour de l'équilibre sur une échelle typique L_ϕ coûtent en moyenne une énergie cinétique

$$E_\phi = \int dx n_1 \frac{\hbar^2 \langle |\partial_x \hat{\phi}|^2 \rangle}{2M} \sim n_1 L \frac{\hbar^2}{ML_\phi^2}. \quad (5.6)$$

D'après l'autre image, celle de l'ensemble 1D, cette énergie est fournie par les excitations de basse énergie [87]. Comme ces dernières sont peuplées de manière quasi-classique ($N_k \gg 1$), l'énergie cinétique par mode est $k_B T / 2$ (équipartition de l'énergie). L'énergie cinétique totale E_ϕ est donc d'ordre $k_B T$ multiplié par le nombre de modes qui contribuent significativement aux fluctuations de la phase. Dans l'espace des impulsions 1D, ces modes occupent un volume $1/L_\phi$, et l'écart entre deux modes adjacents est $\sim 1/L$ à cause de la taille finie du système. On trouve donc approximativement L/L_ϕ états pour une longueur de corrélation de phase L_ϕ . En égalant les deux expressions pour E_ϕ , nous trouvons [196]

$$L_\phi = \hbar^2 n_1 / M k_B T. \quad (5.7)$$

Nous avons anticipé sur la section 5.1.4 en utilisant le signe =, où nous utilisons la théorie hydrodynamique [202] pour le démontrer.

A partir de la définition

$$L_\phi = L \frac{T_\phi}{T}, \quad (5.8)$$

on peut introduire la température caractéristique T_ϕ qui délimite la frontière entre condensat cohérent en phase et quasi-condensat [40, 41]. Pour $T \ll T_\phi$, le profil de phase est pratiquement plat ($L_\phi \gg L$). Par contre, si $T \gg T_\phi$, il fluctue sauvagement à l'échelle du système ($L_\phi \ll L$), comme nous l'avons illustré sur la Figure 5.2. Pourtant, à cause de l'énergie de champ moyen, les fluctuations de densité sont réduites, même lorsque la phase fluctue [40, 196, 41]. On peut comprendre ce point en notant que l'énergie d'interaction associée aux excitations élémentaires qui provoquent les fluctuations de phase est

$$E_{\delta n} = \int dx U_{1\text{D}} \langle \delta \hat{n}^2 \rangle \sim U_{1\text{D}} \delta n^2 L \quad \text{et} \quad E_{\delta n} = E_\phi. \quad (5.9)$$

L'égalité est vraie, car l'hamiltonien des fluctuations est celui d'un oscillateur harmonique, avec les variables conjuguées $\hat{\phi}$ et $\delta \hat{n}$ (voir la section 1.4) pour les excitations de basse énergie qui dominent les fluctuations de phase. On peut donc écrire que

$$\left\langle \left(\frac{\delta \hat{n}}{n_0} \right)^2 \right\rangle \approx \frac{E_{\delta n}}{E_{\text{int}}} = \frac{E_\phi}{E_{\text{int}}} = \frac{\zeta_1}{L_\phi} \ll 1. \quad (5.10)$$

Nous concluons donc que les fluctuations de densité sont supprimées, à condition que la longueur de relaxation $\zeta_1 = \sqrt{\hbar^2 / 2MU_{1\text{D}} n_1}$ soit petite devant la longueur de corrélation de

⁴La distance L_ϕ donne alors la taille typique des « domaines » de phase.

la phase. Les inégalités suivantes entre L_ϕ et les deux longueurs caractéristiques λ_T et ζ_1 résument la situation :

$$\begin{aligned} L_\phi &\gg \lambda_T && \text{pourvu que } n_1 \lambda_T \gg 1, \\ L_\phi &\gg \zeta_1 && \text{pourvu que } U_{1D} n_1 \gg \frac{\hbar^2}{2ML_\phi^2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

La première condition indique qu'on est dans le régime de dégénérescence quantique à une dimension, atteint pour une température $T_d \approx \hbar^2 n_1^2 / 2M$. Si $T \gg T_{\delta n} = \hbar^2 n_1 / 2M \zeta_1$, la seconde condition est violée, et on entre dans un régime où les fluctuations de densité sont importantes. Le rapport $T_{\delta n} / T_d \sim 1 / \zeta_1 n_1$ est petit dans le régime du gaz dilué (qui correspond à $n_1 \zeta_1 \gg 1$, un point discuté plus en détails dans la section 5.1.5), si bien qu'il existe une plage de température comprise entre T_d et $T_{\delta n}$ dans laquelle les fluctuations de densité sont notables, bien qu'on se trouve dans le régime de dégénérescence quantique. Ce domaine (dit « décohérent ») a été étudié dans [203].

L'existence d'un tel domaine est une particularité du cas homogène, dans lequel on travaille toujours à « volume » fixé (et donc à densité constante si N est constant). Pour un gaz piégé, le volume va dépendre au contraire de la température et/ou des interactions. La température de dégénérescence sur l'axe s'obtient en prenant la densité appropriée pour un gaz thermique 1D, $n_1 \sim N \sqrt{m\omega_x^2 / k_B T}$. On obtient alors $T_d \sim N \hbar \omega_x$. Dans le régime de Thomas-Fermi, la condition pour la suppression des fluctuations de densité s'obtient par contre en choisissant la densité $n_1 \sim N_0 \sqrt{M\omega_x^2 / 2U_{1D} n_1}$, et on trouve $T_{\delta n} \sim (N_0 / N) T_d \sim T_d$. Pour un gaz piégé 1D, le domaine décohérent est donc quasiment absent⁵, et on pourra considérer que les fluctuations de densité sont toujours faibles dans le régime de dégénérescence quantique.

De ce point de vue, il est intéressant de comparer le quasi-condensat au gaz thermique 1D sans interactions, discuté dans la première section et étudié en détails par Y. Castin *et al.* [204] avec les conclusions suivantes. La longueur de corrélation de la phase est la même que pour le système en interaction à la même température et avec la même densité⁶, soit $L_\phi = \hbar^2 n_1 / k_B T$. Par contre, les fluctuations de densité sont importantes à toutes les températures, puisque $\zeta_1 \rightarrow \infty$ dans la limite du gaz idéal, et on a $\langle \delta n^2 \rangle \sim n_0^2$. Nous concluons donc que l'effet essentiel des interactions est de réduire les fluctuations de densité, qui deviennent énergétiquement coûteuses. Les fluctuations de phase restent importantes, car leur contribution se compare à l'énergie cinétique à l'équilibre E_{cin} , bien plus faible que l'énergie d'interaction E_{int} . Pour résumer, on peut écrire la hiérarchie suivante pour les échelles d'énergie discutées dans ce paragraphe :

$$E_{\text{int}} \gg E_{\text{cin}} \gg E_\phi, E_{\delta n} \quad \text{si } T \ll T_\phi \quad (5.12)$$

$$E_{\text{int}} \gg E_\phi, E_{\delta n} \gg E_{\text{cin}} \quad \text{si } T \gg T_\phi. \quad (5.13)$$

Ce calcul d'ordre de grandeur est confirmé par une théorie plus rigoureuse, que nous présentons plus loin. Une autre conséquence de la présence du champ moyen est la disparition

⁵En anticipant quelque peu sur la suite, il est important de noter que dans le cas d'un quasi-condensat 3D, il s'agit de comparer ces températures à la température de transition pour estimer si on peut les atteindre expérimentalement. On vérifie sans peine que $T_d / T_{C0} \sim (N\lambda)^{2/3} \gg 1$ hors du régime 1D. En effet, la condition $N\lambda \sim 1$ équivaut à $k_B T_{C0} \sim \hbar \omega_\perp$. Pour $T < T_{C0}$, on aura donc toujours $T \ll T_{\delta n}$ pour un quasi-condensat 3D.

⁶La longueur de cohérence globale se trouve être $L_\phi / 2$. Ce facteur 2 est significatif, car il reflète la contribution des fluctuations de densité à la fonction de corrélation $g^{(1)}$.

de la transition abrupte vers un condensat qu'on observe dans le cas du gaz idéal, due à la structure discrète des niveaux du piège [192, 193]. Les interactions lissent cette structure, et le quasi-condensat se transforme continûment en un condensat quand on diminue la température [40, 41].

5.1.4 Le quasi-condensat dans l'approche de Bogoliubov

Pour asseoir la discussion précédente sur des fondements plus solides, nous allons appliquer le formalisme général établi au premier chapitre au cas du gaz uniforme à une dimension, confiné sur un segment. Nous notons U_{1D} la constante de couplage du terme de champ moyen. La densité sur l'axe n_1 est uniforme pour $-L < x < L$, et on peut écrire les fluctuations de phase et de densité sur la base des ondes planes :

$$\delta n_1(x) = \sum_k \delta n_k e^{ikx} \hat{b}_k + \text{c.c.}, \quad (5.14)$$

$$\phi(x) = -i \sum_k \phi_k e^{ikx} \hat{b}_k + \text{c.c.} . \quad (5.15)$$

Les équations de Bogoliubov-de Gennes se résolvent de la même manière que pour les excitations à 3D, donnant le spectre de Bogoliubov

$$\omega_k^B = \sqrt{\omega_k^2 + c_{1D}^2 k^2}, \quad (5.16)$$

avec $c_{1D}^2 = U_{1D} n_1 / M$, et l'expression explicite pour les amplitudes des fluctuations de densité et de phase :

$$\frac{\delta n_k}{n_1} = \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_k^B}} \frac{1}{\sqrt{2n_1 L}}, \quad (5.17)$$

$$\phi_k = \sqrt{\frac{\omega_k^B}{4\omega_k}} \frac{1}{\sqrt{2n_1 L}}. \quad (5.18)$$

Comme dans le chapitre III, il est important de distinguer les parties basse énergie ($\epsilon \lesssim \mu$) pour laquelle les fluctuations de densité sont faibles, et la partie incohérente du gaz à haute énergie ($\epsilon \gtrsim \mu$). Nous nous concentrons sur la partie basse énergie, en omettant la composante « normale » dans la fonction de corrélation (nous discuterons la pertinence de cette approximation dans le cas du gaz piégé).

Fluctuations de densité : Les fluctuations de densité sont dominées par les excitations dont l'énergie est de l'ordre de $\mu_{1D} = U_{1D} n_1$. Avec un coupure pour $k\zeta_1 \approx 1$, on a

$$\left\langle \left(\frac{\delta \hat{n}}{n_1} \right)^2 \right\rangle \approx \frac{\sqrt{2}-1}{2\pi} \frac{1}{n_1 \zeta_1} + \frac{T}{T_{\delta n}}. \quad (5.19)$$

Loin du régime de Tonks ($n_1 \zeta_1 \gg 1$, voir la section 5.1.5), les fluctuations quantiques sont négligeables, et il en est de même à température finie si $T \ll T_{\delta n}$ [40, 203] (voir la discussion de la section précédente pour le cas du gaz piégé).

Fluctuations de phase : Dans ces conditions, la matrice-densité à un corps est dominée par les fluctuations de phase. Pour calculer leur variance, remarquons sur (5.18) que la somme sur k est dominée par les modes de basse énergie $k \rightarrow 0$. On peut donc utiliser l'approximation $\langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \rangle \approx k_B T / \hbar \omega_k^B$ et se placer dans la limite hydrodynamique en faisant tendre k vers 0 dans (5.18) et dans la relation de dispersion ($\omega_k^B \approx c_{1D} k$). En passant à une intégrale⁷, on trouve sans peine que

$$\Delta\phi^2(s) = \frac{|s|}{L_\phi}. \quad (5.20)$$

On retrouve la longueur de corrélation de la phase L_ϕ que nous avons obtenue par des arguments d'ordre de grandeur dans la première section. La fonction $g^{(1)}$ décroît donc exponentiellement avec la séparation s :

$$g^{(1)}(s) = n_1 \exp\left(-\frac{|s|}{2L_\phi}\right). \quad (5.21)$$

Cette décroissance est caractéristique des fluctuations de phase à une dimension. On peut aussi la comprendre en notant que la phase relative entre deux points est une variable stochastique, qui subit une diffusion de type brownien : à une dimension, l'écart quadratique moyen croît donc linéairement avec la distance. Une conséquence importante pour la suite est que la distribution en impulsion, qui s'en déduit par transformée de Fourier, est Lorentzienne, avec une demi-largeur à mi-hauteur $\Delta p_\phi = \hbar/2L_\phi$. Nous revenons plus loin sur ce point important expérimentalement.

5.1.5 Au delà du régime dilué : le gaz de Tonks

Nous quittons momentanément les quasi-condensats pour évoquer le cas du gaz de bosons impénétrables, ou gaz de Tonks-Girardeau [194, 205]. Rappelons nous que pour un gaz à trois dimensions, le critère de gaz dilué $n^{1/3}a \ll 1$ peut s'écrire en fonction de la longueur de relaxation $\zeta = \sqrt{\hbar^2/2MUn}$ et de la distance moyenne entre atomes $n^{-1/3}$ comme $1/(\zeta n^{1/3})^2 \ll 1$. A une dimension, il devient $1/(\zeta_1 n_1)^2 \ll 1$. En accord avec notre intuition, à trois dimensions, le critère de gaz dilué peut être mis en défaut en augmentant la densité de l'échantillon ou la longueur de diffusion. Par contre, à une dimension, on a $1/(\zeta_1 n_1)^2 \propto 1/n_1$, et c'est au contraire en *diminuant* la densité qu'on peut obtenir $1/(\zeta_1 n_1)^2 \sim 1$ et sortir du régime dilué. Pour comprendre ce résultat paradoxal, nous devons revenir au problème de base de diffusion de deux atomes à une dimension. Ce problème a été traité par M. Olshanii [194], qui a obtenu l'amplitude de transmission pour deux atomes dans le fondamental transverse, avec un vecteur d'onde k du mouvement relatif selon l'axe x ⁸ :

$$t(k) = 1 - \frac{1}{1 + ika_{1D} + \mathcal{O}[(ka_\perp)^3]}. \quad (5.22)$$

Comme nous l'avons déjà indiqué dans la section 5.1.2, elle est identique à celle que produirait un pseudo-potential 1D en $U_{1D}\delta(x-x')$, avec la constante de couplage U_{1D} donnée plus haut.

⁷et en utilisant $\int_0^{+\infty} du \sin^2(au)/u^2 = \pi |a|/2$.

⁸Les atomes sont suffisamment lents pour ne pas induire d'excitations transverses, $\hbar^2 k^2/2M \ll \hbar\omega_\perp$ ou $ka_\perp \ll 1$. Cette condition est cohérente avec la définition d'un gaz 1D.

Pour $ka_{1D} \ll 1$, l'amplitude de transmission tend vers zéro et les deux atomes se réfléchissent l'un sur l'autre. Ceci se comprend facilement puisque ce problème est équivalent à celui de la diffusion par une barrière δ à une dimension. Si $ka_{1D} \ll 1$, l'énergie incidente est plus faible que la hauteur de la barrière et la probabilité de réflexion est proche de 1. Si nous revenons au gaz dans son ensemble, et si la condition $ka_{1D} \ll 1$ est remplie pour le vecteur d'onde k typique du mouvement d'une particule, alors le gaz se comporte comme un ensemble de bosons impénétrables : la probabilité de trouver deux atomes proches l'un de l'autre est presque nulle. Pour cette raison, l'analogie du principe de Pauli joue pour les atomes bosoniques (on parle de « fermionisation » du gaz de bosons). En particulier, la fonction d'onde à N corps se déduit d'un déterminant de Slater, comme pour des fermions libres [205]. A température nulle, on a $k \sim \zeta^{-1}$ et on retrouve la condition donnée précédemment pour sortir du régime dilué. A la lumière de cette discussion, on voit qu'à une dimension, le régime « non-dilué » correspond en fait à un régime fortement corrélé, plutôt qu'à un régime de fortes interactions. La cohérence en phase dans ce régime est totalement perdue [206, 203].

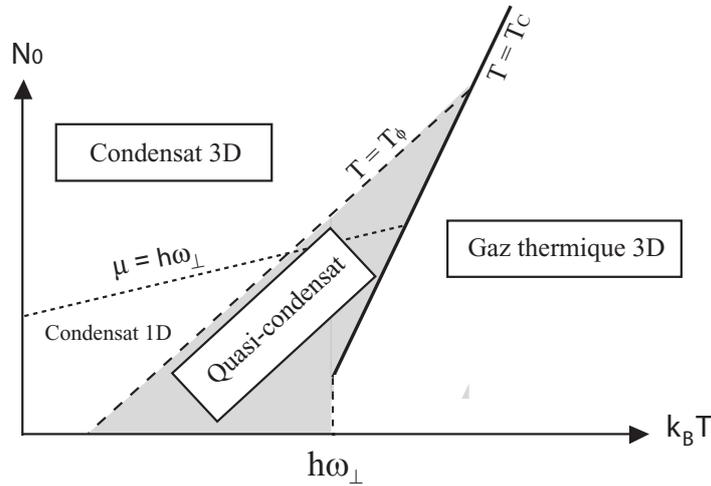


FIG. 5.3 – Diagramme de phases d'un gaz en interactions dans un piège très anisotrope, en supposant le régime de Thomas-Fermi axial. Le potentiel chimique détermine si on est dans le régime 3D ou 1D, alors que la température contrôle l'importance des fluctuations de phase.

5.2 Quasicondensat 3D dans un piège anisotrope

Au chapitre précédent, nous avons introduit le concept de quasi-condensat, ou « condensat de phase mal définie ». Nous avons vu qu'il fallait l'interpréter comme une distribution thermique d'excitations collectives 1D du nuage, plutôt que comme un état quantique unique d'occupation macroscopique. Les arguments présentés dans le cas d'un système homogène s'étendent au cas d'un gaz de bosons dans un piège très anisotrope, dans le régime de Thomas-Fermi 1D mais également à 3D et dans les situations intermédiaires. En effet, nous avons vu au chapitre I qu'il existait une branche d'excitations collectives de très basse énergie

exclusivement axiale. Ces excitations se comportent exactement comme dans un système uni-dimensionnel, et peuvent donc provoquer des fluctuations de la phase du condensat [41]. Ainsi, les fluctuations de phase apparaissent comme une caractéristique des systèmes très anisotropes, et pas uniquement des systèmes 1D.

Le calcul d'ordre de grandeur de la section 61 s'applique point par point, à condition de choisir pour L la taille du (quasi)condensat. On doit alors comparer la température T_ϕ à la température critique 3D, que nous prenons ici égale à T_{C0} pour simplifier. Pour $T_{C0} < T_\phi$, les fluctuations de phase ne se manifestent pas et on assiste à un phénomène de condensation « habituel ». Par contre, si $T_{C0} > T_\phi$, il existe une plage de température dans laquelle on a affaire à un quasi-condensat, même si on n'est pas à strictement parler dans le régime 1D. Les différents régimes accessibles (pour un gaz dilué) sont résumés sur la figure 5.3.

En reprenant les calculs de l'appendice A, nous introduisons la décomposition suivante de l'opérateur champ, $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}_0 + \delta\hat{\Psi}$. Le terme $\delta\hat{\Psi}$ décrit les états hautement excités (« 3D ») qui forment le nuage thermique, et il est identique au terme équivalent pour un vrai condensat. La composante $\hat{\Psi}_0$ de l'opérateur champ qui décrit le quasi-condensat est caractérisée par des fluctuations de densité faibles, comme nous allons le vérifier *a posteriori*. Le profil de densité à l'équilibre découle alors de l'équation de Gross-Pitaevskii, comme pour un véritable condensat (en incluant éventuellement le champ moyen exercé par le nuage thermique, que nous négligeons pour le moment).

Les fluctuations de phase sont largement dominées par les excitations de la branche axiale. Les excitations 3D ont le même effet que pour le vrai condensat, et n'empêchent pas l'ordre à longue portée. Nous omettons par la suite leur contribution à la fonction de corrélation et à la distribution en impulsion, car, comme nous l'expliquons dans le chapitre I, ils n'affectent les propriétés de corrélations qu'à très courte distance (ou encore les ailes de la distribution en impulsion), et nous n'avons pas la sensibilité expérimentale pour détecter cette influence. On écrit donc $\hat{\Psi}_0(\mathbf{r}) \approx \sqrt{n_0(\rho, x)} \exp[i\hat{\phi}(x)]$, ce qui mène à la fonction de corrélation

$$g^{(1)}(\rho, \bar{x}, s) = \sqrt{n_0(\rho, \bar{x} + s/2)n_0(\rho, \bar{x} - s/2)} e^{-\frac{1}{2}\Delta\phi^2(\bar{x}, s)}. \quad (5.23)$$

Nous avons introduit la variance $\Delta\phi^2(\bar{x}, s) = \langle [\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(x')]^2 \rangle$ de la phase relative entre les deux points x et x' , la coordonnée moyenne $\bar{x} = (x + x')/2$ et la coordonnée relative $s = x - x'$.

Le profil de phase se calcule à partir du développement sur les excitations élémentaires du système :

$$\hat{\phi} = \sum_{\nu} \phi_{\nu}(x) \hat{b}_{\nu} + \text{c.c.} \quad (5.24)$$

On obtient donc la variance par

$$\Delta\phi^2(\bar{x}, s) = \sum_{\nu} |\phi_{\nu}(\bar{x} + s/2) - \phi_{\nu}(\bar{x} - s/2)|^2 (2N_{\nu} + 1), \quad (5.25)$$

avec le nombre d'occupation $N_{\nu} = (\exp(\hbar\omega_{\nu}/k_B T) - 1)^{-1}$, et en ne gardant que les excitations de la branche axiale dans la somme. La partie quantique de la variance $\Delta\phi^2$ est négligeable en général.

5.2.1 Fluctuations de phase dans un piège harmonique anisotrope

Le spectre ω_ν et les amplitudes ϕ_ν des excitations élémentaires du condensat piégé ont été déterminées au premier chapitre dans le cas d'un condensat à la limite de Thomas-Fermi 3D, dans un piège harmonique anisotrope. Pour la branche axiale d'énergie $\hbar\omega_j = \hbar\omega_x\sqrt{j(j+3)}/2$, les amplitudes s'expriment en fonction des polynômes de Jacobi $P_j^{(1,1)}$:

$$\frac{\delta n_j(x)}{n_{0m}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{30N_0\mu}} \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)}{j+1}} P_j^{(1,1)}\left(\frac{x}{L}\right), \quad (5.26)$$

$$\phi_j(x) = -i\sqrt{\frac{\mu}{30N_0\hbar\omega_j}} \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)}{j+1}} P_j^{(1,1)}\left(\frac{x}{L}\right). \quad (5.27)$$

Les fluctuations de densité sont faibles en valeur relative, étant majorées par $k_B T/N_0\lambda\mu \ll 1$ au centre du piège. Pour les fluctuations de la phase à $T = 0$, on trouve des corrélations algébriques avec un exposant $\sim \mu/N_0\hbar\omega_x \ll 1$, qui modifie de manière imperceptible la fonction de corrélation à température nulle. Dans la suite, nous ignorerons donc les fluctuations quantiques pour alléger l'exposé.

La contribution importante à $g^{(1)}$ est celle des fluctuations thermiques de la phase, pour lesquelles la variance est [41] :

$$\Delta\phi^2(\bar{x}, s) = \frac{T}{T_\phi} f(\bar{x}, s), \quad (5.28)$$

avec la fonction universelle

$$f(\bar{x}, s) = \sum_j \frac{(j+2)(j+3/2)}{4j(j+1)(j+3)} \left[P_j^{(1,1)}\left(\frac{\bar{x}+s/2}{L}\right) - P_j^{(1,1)}\left(\frac{\bar{x}-s/2}{L}\right) \right]^2. \quad (5.29)$$

Sur la Figure 5.4, nous avons tracé f en fonction de la séparation s , pour trois valeurs de la position moyenne \bar{x} . En examinant la Figure 5.4, on s'aperçoit que la fonction f démarre linéairement en fonction de s , pour \bar{x} donné, avec une pente qui dépend visiblement de \bar{x} . Dans la situation $T \gg T_\phi$, seule cette partie linéaire importe puisque f apparaît dans une exponentielle qui fait tomber $g^{(1)}$ rapidement à zéro. Elle correspond aux petites distances s , donc aux grands k , si bien que l'on peut décrire les modes correspondants à l'approximation semi-classique, ou approximation de densité locale, qui considère que les excitations sont localement équivalentes à celles d'un gaz 1D homogène. Le passage explicite du cas 1D homogène, pour une densité n_1 , une longueur $2L$ et un potentiel chimique μ au cas inhomogène, se fait en substituant le potentiel chimique local, donné par :

$$\mu \rightarrow \mu - \frac{1}{2}M\omega_x^2 x^2. \quad (5.30)$$

qui fixe la forme précise de $n_1(\tilde{x})$. Dit autrement, pour que cette approche soit valable, il faut que le profil de densité soit lentement variable par rapport à la longueur de cohérence, c'est à dire que $L \gg L_\phi$, ou $T \gg T_\phi$.

Une telle approche a plusieurs avantages : elle mène à des résultats analytiques, elle permet de prendre en compte facilement les corrections éventuelles au profil de densité liées

à la pression du nuage thermique et au confinement radial (pression quantique), et elle permet de résoudre analytiquement le problème d'un quasi-condensat en expansion [42, 189]. Nous reviendrons plus loin sur son domaine d'application.

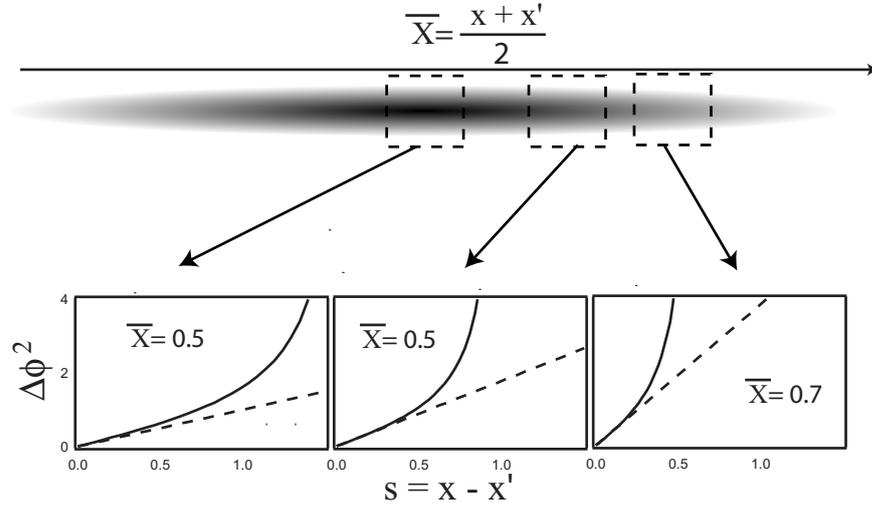


FIG. 5.4 – Fonction de corrélation de la phase d'un quasi-condensat 3D, pour trois positions moyennes \bar{x} , en fonction de la séparation s . On a tracé en traits pleins les résultats du calcul numérique (5.28), et en pointillés l'approximation de densité locale (5.42).

5.2.2 Approximation de densité locale

Quasi-condensat dans un piège cylindrique : Nous nous tournons donc vers le cas d'un quasi-condensat axialement confiné sur un segment de longueur $2L$ (potentiel axial plat), alors que le confinement radial reste harmonique. La densité sur l'axe est uniforme pour $-L < x < L$, et le profil radial de densité est donné par l'équation de Gross-Pitaevskii (nous nous plaçons pour le moment à température finie, mais suffisamment basse pour négliger le champ moyen du nuage thermique) :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\Delta\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}} + \frac{1}{2}M\omega_{\perp}^2\rho^2 + gn_0 = \mu. \quad (5.31)$$

Dans le régime de Thomas-Fermi 3D, le terme de pression quantique radial est négligeable et à basse température $n_0(\tilde{\rho}) = n_{0m}(1 - \tilde{\rho}^2)$. Dans le régime 1D, on retrouve la fonction d'onde du fondamental, $n_0 = |\phi_0(\rho)|^2$.

Les excitations élémentaires de ce système peuvent se classer suivant les nombres quantiques $\nu = (n_{\perp}, m, k)$, avec n_{\perp} le nombre de noeuds dans la direction radiale, m le nombre quantique orbital et k le vecteur d'onde selon l'axe du cylindre. Pour la branche d'excitations axiale, de première importance ici, les nombres quantiques n_{\perp} et m qui caractérisent le mouvement radial sont nuls. En introduisant une enveloppe de densité radiale $\mathcal{A}_k(\rho)$ (dimensions

L^{-2}), normalisée comme $\int d^{(2)}\rho \mathcal{A}_k(\rho) = 1$, on peut alors écrire les fluctuations de phase ϕ_k et de densité 1D δn_k (dimension L^{-1}) comme

$$\delta n_\nu(\rho, x) = \delta n_k \mathcal{A}_k(\rho) e^{ikx} \quad (5.32)$$

$$\phi_\nu(x) = -i\phi_k e^{ikx} \quad (5.33)$$

Une fois les amplitudes (5.32) et (5.33) reportées dans les équations de Bogoliubov-de Gennes (1.35,1.36), on obtient les équations suivantes pour les excitations axiales

$$\hbar\omega_k^B \delta n_k \mathcal{A}_k(\rho) = \frac{\hbar k^2}{M} n_0(\rho) \phi_k, \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \hbar\omega_k^B \phi_k n_0(\rho) &= \left(\frac{\hbar^2 k^2}{4M} + U n_0(\rho) \right) \delta n_k \mathcal{A}_k(\rho) \\ &\quad - \frac{\hbar^2 \delta n_k}{4M} \nabla \left[n_0(\rho) \nabla \left(\frac{\mathcal{A}(\rho)}{n_0(\rho)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Le terme de gradient transverse dans le membre de droite de (5.35) ne joue aucun rôle pour les excitations considérées : pour que la condition $\omega_k^B \ll \omega_\perp$ soit satisfaite, ils doivent être négligeables⁹. Dans le régime de Thomas-Fermi 3D, cela signifie que l'enveloppe radiale est pratiquement plate ($\mathcal{A}_k \approx 1/\pi R^2$) dans le volume du condensat, et chute très vite en dehors. Dans le régime de Thomas-Fermi 1D, au contraire, la dépendance radiale se factorise et $\mathcal{A}_k = |\phi_\perp(\rho)|^2$. Au total, dans ces deux régimes et dans les cas intermédiaires, on peut donc négliger le terme de gradient transverse, et les équations qui déterminent les excitations axiales ne dépendent alors de ρ qu'à travers $n_0(\rho)$ et $\mathcal{A}_k(\rho)$. Suivant la procédure mise en avant par S. Stringari dans [90], on se débarrasse de la dépendance en ρ en moyennant sur les coordonnées radiales, pour découpler les degrés de liberté transverses et axiaux. On peut comprendre cette procédure comme une élimination adiabatique des degrés de liberté transverses, beaucoup plus rapides que les degrés de liberté axiaux qui dominent la dynamique « macroscopique ». On obtient alors des équations effectives pour la dynamique axiale pratiquement identiques aux équations de Bogoliubov pour un gaz 1D confiné sur un segment,

$$\omega_k^B \frac{\delta n_k}{n_1} = 2\omega_k \phi_k \quad (5.36)$$

$$\omega_k^B \phi_k = \frac{1}{2} (\omega_k + 2U \overline{n_0 \mathcal{A}_k}) \frac{\delta n_k}{n_1}, \quad (5.37)$$

avec la densité 1D, ou nombre d'atomes par unité de longueur,

$$n_1 = \int d^{(2)}\rho n_0(\mathbf{r}), \quad (5.38)$$

et $\overline{n_0 \mathcal{A}_k} = \int d^{(2)}\rho n_0 \mathcal{A}_k$. Les fréquences propres sont alors données par

$$\omega_k^B = \sqrt{\omega_k^2 + c_{1D}^2 k^2} \quad (5.39)$$

avec la vitesse du son 1D $c_{1D}^2(k) = U \overline{n_0 \mathcal{A}_k} / M$, et des expressions identiques à celles obtenues dans le cas homogène pour les amplitudes de Bogoliubov. Notons qu'en général, la vitesse du son peut dépendre de k (quand $k \lesssim R^{-1}$), à cause de la dépendance radiale des fluctuations

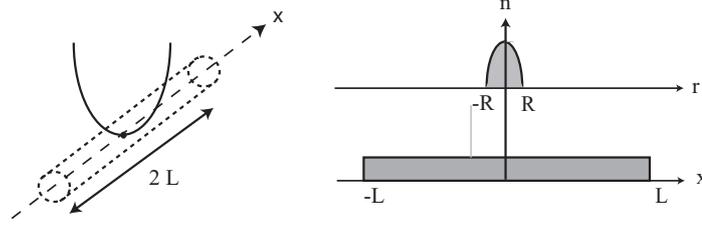


FIG. 5.5 – Condensat dans un piège cylindrique. Le profil de densité à l'équilibre est parabolique dans les directions transverses, et plat axialement.

de densité. Cet effet, qui diminue la vitesse de groupe des excitations, et donc la vitesse critique au dessus de laquelle la superfluidité disparaît, a été étudié dans [207].

Passage au cas du gaz piégé : Nous incorporons maintenant le potentiel de piégeage axial au modèle, en considérant que son effet est de modifier localement le potentiel chimique selon (5.30)¹⁰. On doit donc ajuster le profil de densité axial à ce potentiel chimique local [132]. On trouve comme au paragraphe précédent le potentiel chimique local à l'équilibre, $\mu_{e.l.}[n_1]$, en l'absence de confinement axial, en fonction de la densité 1D n_1 . Dans les limites de Thomas-Fermi 1D et 3D, on a respectivement $\mu_{e.l.}[n_1] = 2an_1$ et $\mu_{e.l.}[n_1] = 2\sqrt{an_1}$. On trouve alors le profil de densité intégré en égalant les deux expressions,

$$\mu_{e.l.}[n_1(\bar{x})] + V_{\text{ext}} = \mu, \quad (5.40)$$

avec μ le potentiel chimique global¹¹. Cette modification implique donc les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} n_1 &\rightarrow n_1(\bar{x}) \\ c_{1D}\sqrt{f(\bar{x})} &\rightarrow c_{1D}\sqrt{f(\bar{x})} \\ L &\rightarrow L \end{aligned} \quad (5.41)$$

La quantité $f(\bar{x}) = \mu_{e.l.}[n_1(\bar{x})]/\mu_{e.l.}[n_1(\tilde{0})]$ se réduit en fait $f(\bar{x}) = 1 - \bar{x}^2$ d'après (5.40). Les excitations sont également affectées par cette procédure, mais l'énergie de chaque mode, $\hbar c_{1D}k$, ne doit pas dépendre de \bar{x} après substitution. Pour satisfaire cette condition, on doit donc utiliser un vecteur d'onde local (« quasi-classique ») $k \rightarrow k/\sqrt{f(\bar{x})}$, et la densité d'états locale $\mathcal{N}(k, \bar{x}) = L/\pi\sqrt{f(\bar{x})}$. Le profil de phase se déduit alors¹² de (5.18,5.30,5.41), ce qui permet de calculer la variance des fluctuations de phase,

$$\Delta\phi^2(\bar{x}, s) \approx \frac{Mk_B T}{\hbar^2 n_1(\bar{x})} \Big|_s = \frac{T}{T_\phi} \frac{n_1(0)}{n_1(\bar{x})} \frac{|s|}{L}, \quad (5.42)$$

ne dépend alors que de $n_1(\bar{x})$ et de la température caractéristique $k_B T_\phi = \hbar^2 n_1(0)/ML$. La longueur de cohérence près du centre est alors $L_\phi = LT_\phi/T$. Le profil de densité 1D

⁹Quand l'énergie de l'excitation approche ω_\perp , cet argument peut être mis en défaut. Les premières corrections ont été calculées par S. Stringari dans le cas 3D [90]. Elles sont faibles même si $kR \sim 1$.

¹⁰Cette approximation n'a de sens que si $\mu \gg \hbar\omega_x$, qui est le régime d'intérêt.

¹¹Cette équation permet de définir la longueur L du (quasi-)condensat par $\mu_{e.l.}[n_1 = 0] + \frac{1}{2}M\omega_x^2 L^2 = \mu$.

¹²Comme l'intégrande est borné par $1/k^2$, on peut étendre la borne supérieure à l'infini. Dans le présent contexte, comme en fait $k \lesssim R^{-1}$, cela donne le comportement correct de la variance pour des distances s grandes devant R qui est le cas qui nous intéresse.

adimensionné, $n_1(\bar{x})/n_1(\tilde{0})$, entre comme un paramètre dans l'équation qui détermine $\Delta\phi^2$. Il est intéressant de noter que cette expression est universelle, dans le sens où elle ne dépend pas de la forme précise de la relation de dispersion. Si le profil complet à trois dimensions $n_0(\mathbf{r})$ est connu, on obtient aisément le nombre d'atomes par unité de longueur par intégration sur les degrés de liberté transverses. Nous allons examiner les deux cas limites du régime de Thomas-Fermi à 3D et à 1D, où les calculs sont simples.

Régime de Thomas-Fermi 3D : Dans le régime de Thomas-Fermi 3D, l'intégration radiale doit être limitée à la section transverse où $n_0 > 0$ (*i.e.* $\rho < R$). De plus, comme $R \propto \sqrt{\mu}$, la borne d'intégration dépend de \bar{x} comme $R(\bar{x}) = R_0\sqrt{1 - \bar{x}^2}$, avec R_0 le rayon de Thomas-Fermi habituel. On obtient ainsi $n_1(\bar{x}) = \frac{15N_0}{16L}(1 - \bar{x}^2)^2$ et, en prenant $\mathcal{A}_k \approx 1/\pi R^2$, on a $\overline{n_0\mathcal{A}_k} \approx \pi R^2 n_{0m}/2$. La vitesse du son est alors diminuée par l'effet d'intégration, $c_{1D}^2 \approx Un_{0m}/2M$ [208, 209, 90]. Les fluctuations de phase sont contrôlées par la température $k_B T_\phi = 15N_0(\hbar\omega_x)^2/32\mu$, qui est le résultat de la référence [41].

Régime de Thomas-Fermi 1D : Si le confinement transverse est assez fort pour geler le mouvement radial, on retrouve les expressions déjà établies, $n_1(\bar{x}) = \frac{4N_0}{3L}(1 - \bar{x}^2)$. Par des calculs analogues à ceux menés dans le régime 3D, on trouve $T_\phi = 2N_0(\hbar\omega_x)^2/3\mu$. Cela reproduit bien l'expression de la référence [199] pour la variance des fluctuations de phase.

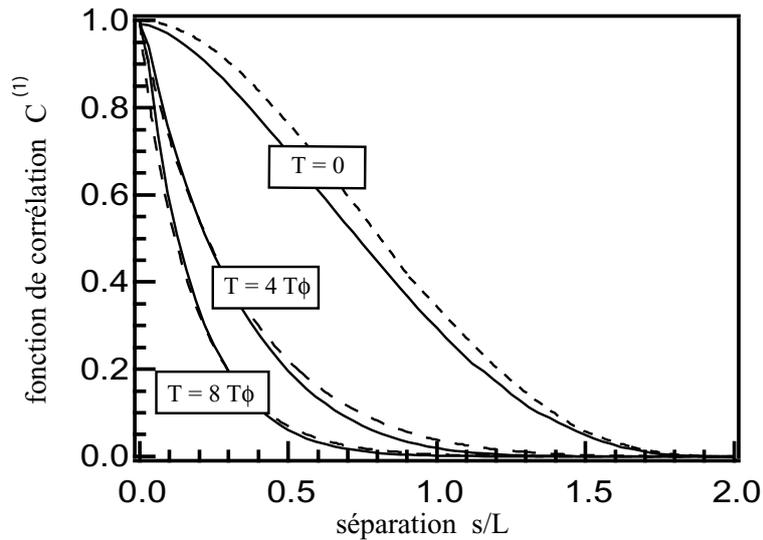


FIG. 5.6 – Fonction de corrélation $\mathcal{C}^{(1)}$ d'un quasi-condensat dans un piège très anisotrope. Les courbes en traits pleins correspondent au calcul numérique basé sur (5.28), et les courbes en traits tiretés traduisent l'approximation de densité locale (5.43).

5.3 Fonction de corrélation spatiale et distribution en impulsion dans le piège

La fonction de corrélation globale $\mathcal{C}^{(1)}$ se déduit de (5.23) et (5.42) :

$$\mathcal{C}_{\text{piège},T}^{(1)}\left(\frac{s}{L}\right) \approx \int d\bar{x} \sqrt{n_1(\bar{x} + s/2)n_1(\bar{x} - s/2)} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{T}{T_\phi} \frac{n_1(0)}{n_1(\bar{x})} \frac{|s|}{L}\right). \quad (5.43)$$

Nous comparons sur la figure 5.6 le résultat de ce calcul avec celui obtenu par le calcul numérique de $\mathcal{C}^{(1)}$, à partir des équations (5.23) et (5.28). On voit que l'accord est rapidement bon, en fait dès que $T \approx 4T_\phi$. Le terme dû à l'enveloppe de densité, $\chi(\bar{x}, s) = \sqrt{n_1(\bar{x} + s/2)n_1(\bar{x} - s/2)}$, joue cependant encore un rôle. Par contre, pour $T > 8T_\phi$, la décroissance de $\mathcal{C}^{(1)}$ est presque entièrement due aux fluctuations de phase, et on peut faire la simplification supplémentaire $\chi(\bar{x}, s) \approx n_1(\bar{x})$, en conservant un accord de quelques pour cents entre l'approximation de densité locale et le calcul numérique. En faisant cette approximation et en prenant la transformée de Fourier, on déduit la distribution en impulsion dans le quasi-condensat :

$$\mathcal{P}_{\text{piège},T}(p_x) \approx \frac{n_1(0)}{2\pi p_\phi} \int d\bar{x} \frac{\left(\frac{n_1(\bar{x})}{n_1(0)}\right)^2}{\left(\frac{n_1(\bar{x})}{n_1(0)}\right)^2 \left(\frac{p_x}{p_\phi}\right)^2 + \frac{1}{4}}. \quad (5.44)$$

Cette fonction, universelle en p/p_ϕ , est très bien ajustée par une Lorentzienne normalisée, avec une largeur à mi-hauteur Δp_ϕ , qui dépend peu de la forme exacte de n_1 (figure 5.7). En effet, le meilleur ajustement est donné par

$$\begin{aligned} \Delta p_\phi &= 0.67 \frac{\hbar}{L_\phi} \text{ dans le cas 3D,} \\ \Delta p_\phi &= 0.635 \frac{\hbar}{L_\phi} \text{ dans le cas 1D.} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Si l'on compare à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation numérique, on obtient un accord à mieux que 4 % si $T > 8T_\phi$. Ce résultat doit être comparé à celui mentionné dans le premier chapitre pour la distribution en impulsion d'un condensat pur. Dans le régime de Thomas-Fermi, nous avons trouvé une distribution en impulsion Gaussienne, de largeur à mi-hauteur $1.57\hbar/L$. La forme de \mathcal{P} permet donc de discriminer entre un ensemble cohérent et un quasi-condensat, comme nous le verrons au chapitre 6. Pour la comparaison quantitative aux données, on s'intéressera bien sûr à sa largeur.

5.4 Expansion du quasicondensat

Pour pouvoir comparer les calculs à nos observations, il est important d'examiner l'évolution des fluctuations de phase dans une expansion balistique. En effet, pour des raisons qui seront éclaircies en temps voulu (chapitre 6), nos mesures sont effectuées après un court temps de vol. Or, on sait que pendant le temps de vol l'énergie de champ moyen se libère dans

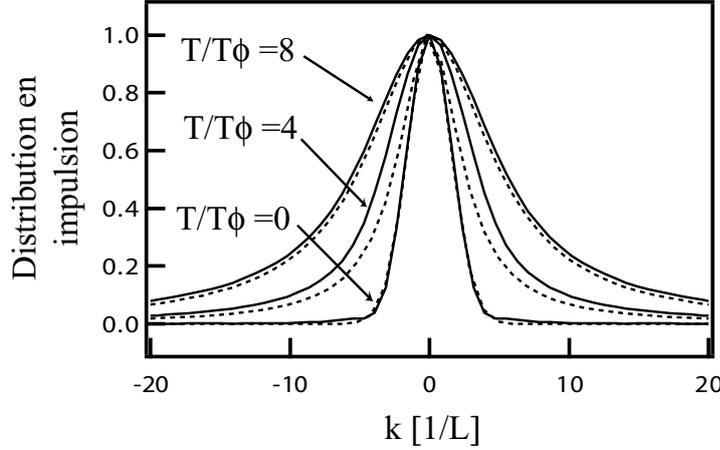


FIG. 5.7 – Distribution en impulsion d’un quasi-condensat piégé. La courbe en traits pleins correspond au calcul numérique basé sur (5.28). La courbe en pointillés pour $T = 0$ est une Gaussienne de largeur à mi-hauteur $1.84\hbar/L$ [99, 97]. Pour $T/T_\phi = 4$ et 8 , la courbe en pointillés correspond au contraire à une Lorentzienne de largeur à mi-hauteur $0.67\hbar/L_\phi$. Pour faciliter la comparaison, on a normalisé les courbes pour qu’elles valent 1 en $p = 0$.

le nuage et modifie donc la distribution des vitesses. De plus, les fluctuations de phase elle-même évoluent et se transforment en modulations contrastées du profil de densité, comme le montrent les images obtenues à Hannovre [42]¹³. Il est donc important *a priori* de tenir compte de l’expansion explicitement pour comparer à nos mesures.

5.4.1 Conversion des fluctuations de phase en fluctuations de densité

L’anisotropie du piège permet de simplifier considérablement la question de l’expansion d’un quasi-condensat. En effet, nous savons déjà que l’énergie de champ moyen se convertit pratiquement en totalité en énergie cinétique *radiale*, et que l’expansion est extrêmement lente dans la direction longue du piège (presque imperceptible pour les temps de vol utilisés dans les expériences). Aussi, il suffit, au moins en première approximation, de discuter l’expansion du quasi-condensat dans le modèle simplifié d’un cylindre très anisotrope, avec un potentiel de piégeage harmonique radial. Nous avons déjà rencontré ce type de calculs au chapitre V, et nous avons vu qu’il permettait de déduire les propriétés d’un condensat harmoniquement piégé *via* une approximation de densité locale à une dimension. Ce modèle a été élaboré dans [42, 189] pour rendre compte des résultats expérimentaux obtenus

¹³Cette évolution peut s’interpréter en termes de redistribution de l’énergie cinétique : dans le piège, le terme de champ moyen empêche la formation de fluctuations de densité importantes, et toute l’énergie cinétique se stocke dans la phase. Après un temps de vol, le champ moyen s’est effondré, et la densité aux temps longs reflète les fluctuations de phase initiales. Notons que l’énergie cinétique totale, initialement liée au gradient de la phase uniquement, est alors partagée entre gradient de phase et gradient de densité.

à Hannovre. L'enveloppe de densité globale évolue selon une équation d'échelle radiale : $n_0(\rho/b_\perp, t) = n_0(\rho, 0)/b_\perp^2$, avec $b_\perp = \sqrt{1 + \tau^2}$ et $\tau = \omega_\perp t$. Les fluctuations de phase et de densité (ces dernières étant initialement négligeables) sont alors des ondes planes, avec un vecteur d'onde selon l'axe x du cylindre. Pour une excitation donnée de vecteur d'onde k , l'énergie de Bogoliubov instantanée s'écrit $\omega_k^B(t) = \sqrt{\omega_k(\omega_k + 2Mc_{1d}^2/b_\perp^2)}$, et on peut distinguer deux étapes dans l'expansion suivant le vecteur d'onde $k = Mv_k/\hbar$:

- une phase initiale qui correspond à $b_\perp \ll c_{1d}/v_k$: l'excitation est encore dans le régime phonon.
- une phase asymptotique, $b_\perp \gg c_{1d}/v_k$: la relation de dispersion est devenue d'une particule libre, et l'excitation se propage de manière ballistique.

La transition entre les deux régimes se produit continûment au cours du temps de vol. Le temps caractéristique qui sépare les deux régimes est $t_k = \omega_\perp^{-1} c_{1d}/v_k$ (typiquement quelques ms). Les auteurs de [42, 189] ont proposé une solution analytique de l'évolution des fluctuations de densité au cours du temps de vol, et le résultat pour $\omega_\perp/\omega_x^2 \gg t \gg \omega_\perp^{-1}$ est

$$\frac{\delta n_k}{n_1}(x, t) \approx 2 \delta \phi_k(x, 0) \tau^{-\left(\frac{\omega_k^B}{\omega_\perp}\right)^2} \sin(\omega_k t). \quad (5.46)$$

En utilisant l'équation de continuité, qui prend la forme $\partial_t \delta n_k = -2\omega_k n_1 \delta \phi_k$, on déduit l'expression suivante pour les fluctuations de phase :

$$\phi_k(x, t) \approx \phi_k(x, 0) \tau^{-(\omega_k^B/\omega_\perp)^2} \cos(\omega_k t). \quad (5.47)$$

Pour les temps de vol considérés dans notre expérience, les excitations de vecteur d'onde $\sim L_\phi^{-1}$ ont évolué de manière négligeable ($\omega_k t \ll 1$)¹⁴, si bien que le cosinus dans (5.47) vaut à peu près 1 (l'exposant ω_k^B/ω_\perp est très petit, par définition des modes axiaux). On peut donc utiliser l'expression de la variance des fluctuations de phase dans le piège dans le piège à une très bonne approximation (mieux que 1 % pour nos paramètres). Notons cependant un dernier point. C. Mora et Y. Castin [85] ont proposé de tenir compte de la contribution des fluctuations de densité à la fonction de corrélation $g^{(1)}$ de la manière suivante :

$$g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sqrt{n_0(\mathbf{r})n_0(\mathbf{r}')}\exp\left(-\frac{1}{2}\Delta\phi^2 - \frac{1}{8}\frac{\langle[\delta\hat{n}(\mathbf{r}) - \delta\hat{n}(\mathbf{r}')^2]\rangle}{n_{0m}}\right). \quad (5.48)$$

À l'équilibre, cette expression est équivalente à celle que l'on obtient dans la théorie linéarisée au premier ordre en $\langle\delta\hat{n}^2\rangle/n_{0m}^2$. Si on suppose cette équation valable même pour des fluctuations de phase et de densité comparables, comme cela se produit après un temps de vol long, elle implique que, bien qu'il y ait conversion d'une partie des fluctuations de phase en fluctuations de densité, la fonction de corrélation reste pratiquement la même, car $\Delta\phi^2(t) + \frac{1}{4}\langle\Delta\delta\hat{n}^2(t)\rangle/n_{0m} \approx \Delta\phi^2(0)$ d'après les expressions ci-dessus.

5.4.2 Distribution en impulsion du quasicondensat en expansion

Pour le quasi-condensat en expansion, les fluctuations de phases sont donc pratiquement gelées à leur valeur initiale. Si maintenant on tient compte du potentiel de piégeage axial,

¹⁴Par exemple, pour $L_\phi \approx 10 \mu\text{m}$, et $k \sim L_\phi^{-1}$, on a $\omega_k^{-1} \approx 250$ ms, alors que le temps de vol qui correspond à la fin du pulse de Bragg est de 4 ms.

l'opérateur $\hat{\Psi}_0$ développe en supplément une phase déterministe ϕ_0 , due à la conversion de l'énergie de champ moyen en énergie cinétique, qui a été calculée au premier chapitre dans le régime de Thomas-Fermi 3D que nous considérons ici. En se limitant à des temps de vol¹⁵ tels que $b_x \approx 1$ et $\omega_\perp t \gg 1$, l'opérateur champ du quasi-condensat en expansion devient alors

$$\hat{\Psi}_0(\rho, x, t) \approx \sqrt{\frac{n_0(\tilde{\rho}', \tilde{x}, t=0)}{(\omega_\perp t)^2}} \exp\left(i\frac{\mu\tilde{\rho}'^2}{\hbar t} + i\phi_0(\tilde{x}, t) + i\delta\hat{\phi}(x, 0)\right), \quad (5.49)$$

avec [76, 77] $\tilde{\rho}' = \rho/R(t)$, $R(t) = R(0)\omega_\perp t$, $\tilde{x} = x/L$ et $\phi_0(\tilde{x}) = \frac{\pi\mu}{2\hbar\omega_\perp}\tilde{x}^2$. Comme le champ de vitesses dans la direction x , $v_x = (\dot{b}_x/b_x)x$, est linéaire en position, la distribution en impulsion axiale pour $t \gg \omega_\perp^{-1}$ reflète le profil de densité :

$$\mathcal{P}_{\text{exp}, T=0}(p_x) = \frac{n_1(0)}{p_{\text{exp}}} \left(1 - \left(\frac{p_x}{p_{\text{exp}}}\right)^2\right)^2, \quad (5.50)$$

avec la vitesse d'expansion typique

$$p_{\text{exp}} = (\pi/\sqrt{2})\lambda M c_S. \quad (5.51)$$

A température finie, on doit inclure les fluctuations de phase, ce qui conduit à la fonction de corrélation spatiale

$$\mathcal{C}_{\text{exp}, T}^{(1)}\left(\frac{s}{L}\right) \approx \frac{15N_0}{16L} \int_{-1}^1 d\bar{x} (1 - \bar{x}^2)^2 \exp\left(i\frac{\pi\mu}{\hbar\omega_\perp} \frac{\bar{x}s}{L^2} - \frac{T}{2T_\phi} \frac{|s|}{L(1 - \bar{x}^2)^2}\right). \quad (5.52)$$

L'expression (5.52) généralise les résultats du chapitre V, obtenus pour un quasi-condensat statique. Par transformée de Fourier, on obtient immédiatement la distribution en impulsion

$$\mathcal{P}_{\text{exp}, T}(p_x) \approx \frac{N_0}{p_{\text{exp}}} g_{\gamma=p_\phi/p_{\text{exp}}}\left(\frac{p_x}{p_{\text{exp}}}\right), \quad (5.53)$$

avec la fonction g_γ définie par

$$g_\gamma(y) = \frac{15\gamma}{32\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{(1-x^2)^4}{(1-x^2)^4(y-x)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (5.54)$$

et le rapport $\gamma = p_\phi/p_{\text{exp}}$ qui contrôle l'importance relative du champ moyen et des fluctuations de phase (rappelons que $p_\phi = \hbar/L_\phi$). Nous avons tracé cette fonction sur le graphe 5.8, sur lequel on voit qu'en pratique, si $p_\phi > 3p_{\text{exp}}$, la distribution en temps de vol est quasiment similaire à celle du quasi-condensat dans le piège. Par contre, à basse température, $p_{\text{exp}} \gg p_\phi$, les fluctuations de phase sont masquées par le champ moyen. Notons que dans le régime de Thomas-Fermi, on peut avoir simultanément $L_\phi \ll L$ et $p_{\text{exp}} \gg p_\phi$. Heureusement, ce n'est pas le cas des expériences présentées dans ce chapitre grâce au rapport d'aspect important de notre piège et au nombre d'atomes relativement faible ($N_0 \sim 5 \times 10^4$) : en effet, plus λ augmente et N_0 diminue, plus p_{exp} diminue et plus \hbar/L_ϕ augmente (les autres paramètres étant fixés). Dans les conditions des expériences décrites au chapitre VI, nous pourrions en fait considérer à une bonne approximation que la distribution axiale en impulsion est pratiquement celle d'un quasi-condensat piégé (nous revenons sur ce point plus loin).

¹⁵Pour l'expérience de spectroscopie de Bragg décrite au chapitre 6, on a par exemple $b_x < 1.01$ et $\omega_\perp t > 9$.

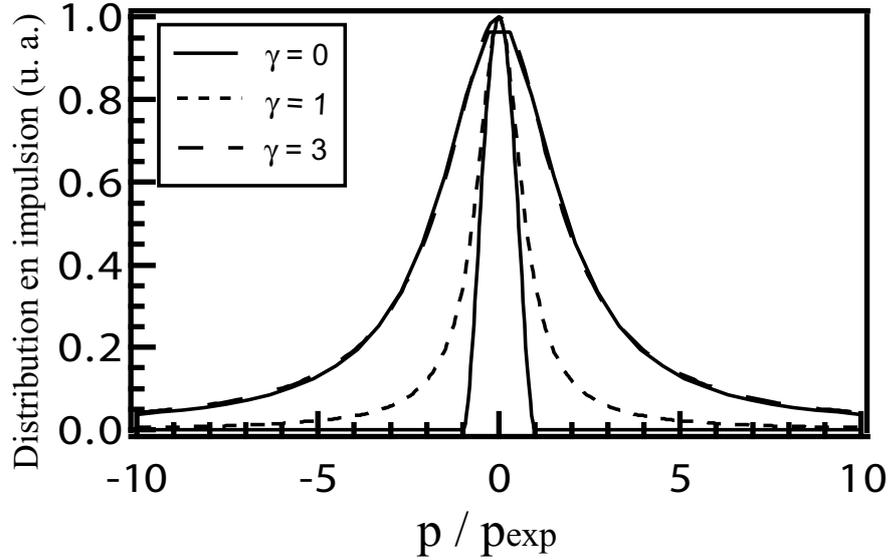


FIG. 5.8 – Distribution en impulsion du quasi-condensat en expansion. Nous avons tracé la distribution (normalisée à 1) pour $\gamma = p_\phi/p_{\text{exp}} = 0, 1, 3$. Nous avons également tracé une Lorentzienne de largeur 0.67×3 , qui reproduit fidèlement la distribution en impulsion dans le piège, et qui se confond avec la courbe $\gamma = 3$. On voit que la distribution après temps de vol est alors très peu sensible à la présence du champ moyen.

5.5 Conclusion

Nous concluons donc que l'approximation de densité locale, sous la forme développée ici, permet de rendre compte simplement de deux propriétés importantes des quasi-condensats :

- la forme Lorentzienne de la distribution en impulsion, caractéristique de corrélations en phase qui décroissent exponentiellement,
- la largeur en impulsion selon l'axe long, inversement proportionnelle à L_ϕ , avec un coefficient numérique qui dépend très mollement de la forme exacte du profil de densité.

En pratique, cette forme simple est une bonne approximation à quelques pour cents près si $T > 8T_\phi$, et même à 15 % près si $T > 4T_\phi$. Pour des températures plus basses, le profil de densité doit être inclus dans le calcul pour rendre compte précisément de la fonction de corrélation. De plus, nous avons étudié l'expansion du quasi-condensat. Nous avons montré que, dans le régime que nous avons exploré expérimentalement, les conclusions de ce chapitre sont essentiellement inchangées, même si en général le champ moyen peut jouer un rôle. Dans le chapitre suivant, nous allons montrer comment on peut accéder expérimentalement à la distribution en impulsion calculée dans ce chapitre.

Spectroscopie en impulsion d'un quasi-condensat

Au chapitre précédent, nous avons vu en détails que dans un piège anisotrope, un gaz de bosons dégénéré pouvait se trouver dans un état « quasi-condensé », intermédiaire entre un condensat et un nuage thermique. Des fluctuations de phase caractéristiques d'une distribution thermique 1D se manifestent, bien que le profil de densité soit presque identique à celui d'un condensat. Grâce au fort confinement radial de l'électro-aimant de troisième génération utilisé pour cette expérience (chapitre II et [39]), nous pouvons créer des condensats avec un rapport d'aspect de 150 environ, et pénétrer profondément dans le régime de quasi-condensation.

Pour le mettre en évidence et parvenir à des mesures précises des propriétés de cohérence en phase, deux méthodes sont envisageables. La plus directe consiste à utiliser des techniques interférométriques [36]. Le contraste des franges d'interférences pour une séparation s entre les deux bras de l'interféromètre reflète alors la fonction de corrélation spatiale, $\mathcal{C}^{(1)}(s)$. Cette méthode est bien entendu adaptée à des ensembles de grande longueur de cohérence, et devient difficile à mettre en oeuvre pour des fluctuations de phase importantes. Aussi, nous avons décidé d'implémenter une méthode complémentaire, basée sur la mesure de la distribution en impulsion. Une longueur de cohérence faible se traduit alors par une distribution en impulsion large, donc plus aisée à mesurer (un concept familier en optique).

Notons cependant que la méthode interférométrique a été implémentée avec succès par l'équipe d'Hannovre [210], pour des ensembles qui présentent indiscutablement des fluctuations de phase, mais dont la longueur de cohérence reste tout de même plus grande que celles que nous examinons dans ce chapitre. Les résultats de cette expérience et ceux obtenus dans notre groupe constituent des tests complémentaires de la théorie développée dans [41], dans la limite de fluctuations de phase importantes. Une zone demeure inexplorée, celle des grandes longueurs de cohérence ($T \sim T_\phi$). Dans l'expérience de spectroscopie de Bragg, elles sont inaccessibles à cause de la résolution finie du système. Dans l'expérience d'Hannovre, il n'a pas non plus été possible de mesurer la transition du quasi-condensat vers un vrai condensat. Des mesures interférométriques basées sur une technique d'analyse alternative, sur laquelle nous reviendrons dans la conclusion, sont en cours dans notre équipe pour cette raison. Pour résumer cette discussion, la méthode interférométrique, qui sonde *localement* la cohérence en phase, est bien adaptée pour des longueurs de cohérence grandes. Pour des longueurs de cohérence courtes, par contre, il est plus adapté de mesurer la distribution en impulsion par spectroscopie de Bragg, qui sonde *globalement* la cohérence en phase.

Le plan de ce chapitre est le suivant. La technique de spectroscopie de Bragg [99] est introduite dans un premier temps dans le contexte général de la physique des condensats. Nous entrons ensuite dans les spécificités de notre expérience, en insistant sur les difficultés qui surgissent lorsqu'on sonde selon l'axe d'un condensat très allongé, et sur les solutions que nous avons apportées.

6.1 La spectroscopie de Bragg comme sonde de la cohérence en phase

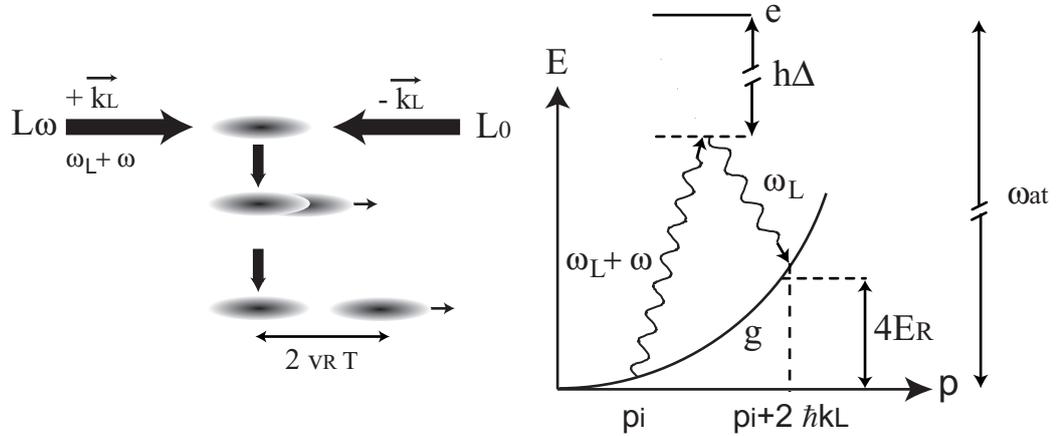


FIG. 6.1 – Principe de la diffraction de Bragg d'un atome libre. Le schéma de droite indique la configuration expérimentale, et celui de gauche la transition d'un atome d'impulsion initiale \mathbf{p}_i vers l'état final d'impulsion $\mathbf{p}_i + 2\hbar\mathbf{k}_L$. Le léger décalage par rapport à l'énergie $4E_R$ est dû à l'effet Doppler.

6.1.1 Diffraction d'une onde de matière par une onde lumineuse stationnaire

La spectroscopie de Bragg est basée sur la diffraction d'une onde de matière par une onde stationnaire lumineuse. Ces expériences ont une longue histoire : elle commence dans les années 1980 avec la démonstration qu'en analogie avec la diffraction de la lumière par une structure périodique, il était possible de diffracter un jet atomique par un réseau lumineux formé de faisceaux lasers contra-propageants [211, 212, 213]. La condition à remplir pour obtenir une bonne efficacité de diffraction est évidemment de disposer d'une source dont la longueur de cohérence transverse est supérieure au pas du réseau, ce qui était réalisé dans les premières expériences en collimatant sévèrement le jet. D'autres types de transitions, comme les transitions Raman [214], avec échange d'impulsion mais changement d'état interne, permettent de mesurer ou de manipuler la distribution en impulsion. Nous mention-

nous particulièrement les travaux sur les « résonances induites par le recul » [215], comme précurseurs de la technique de spectroscopie de Bragg utilisée ici.

Pour un condensat, la longueur de cohérence est en général très grande devant le pas du réseau optique, si bien qu'on peut atteindre des efficacités de diffraction proches de 100 %, comme l'ont montrées les premières expériences menées par M. Kozuma *et al.* [216]. En pratique, au lieu de diffracter un condensat en mouvement sur un réseau stationnaire, il est nettement plus simple expérimentalement de se placer dans la situation inverse, équivalente par changement de repère galiléen. Le condensat est (initialement) au repos, et le réseau est mis en mouvement en imposant une différence de fréquence ω entre les deux ondes progressives qui forment l'onde stationnaire. Pour faciliter la discussion, nous appellerons L_ω le faisceau laser de vecteur d'onde \mathbf{k}_L et de fréquence $\omega_L + \omega$, et L_0 le faisceau de vecteur d'onde opposé $-\mathbf{k}_L$, de fréquence ω_L (voir la figure 6.1). La fréquence commune ω_L est dans le domaine optique, mais loin de toute résonance pour éviter les effets de décohérence liés à l'émission spontanée. L'absorption d'un photon dans une des ondes progressives, par exemple L_ω , suivie de la réémission stimulée dans L_0 , s'accompagne d'un transfert d'impulsion $2\hbar\mathbf{k}_L$ et d'énergie $\hbar\omega$ représenté sur la figure 6.1. Ce processus n'est efficace qu'autour de la résonance de Bragg, où les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_f &= \mathbf{p}_i + 2\hbar\mathbf{k}_L, \\ E_f &= E_i + \hbar\omega. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Le transfert d'énergie compense alors exactement le gain en énergie cinétique, c'est-à-dire que l'on a $\omega = 4\omega_R$, avec $\omega_R = \hbar k_L^2/2M$ la fréquence de recul à un photon¹. Si maintenant on considère un atome en mouvement, les fréquences des deux ondes vues par les atomes sont déplacées *en sens opposés* par effet Doppler : au total, la résonance est déplacée d'une quantité proportionnelle à la vitesse atomique, et l'efficacité de diffraction reflète la population de la classe de vitesses résonante \mathbf{v}_{res} , qui vérifie

$$\omega = 4\omega_R + 2\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{v}_{\text{res}}. \quad (6.2)$$

On peut alors reproduire la distribution en impulsion du nuage en mesurant l'efficacité de diffraction en fonction de la fréquence relative ω [99]. C'est le principe de la spectroscopie en impulsion par diffraction de Bragg, que nous détaillons dans la suite de ce chapitre. Cette méthode a été mise au point dans le groupe de W. Ketterle au MIT [99, 217, 218], qui a pu vérifier ainsi que la longueur de cohérence du condensat était bien de l'ordre de sa taille (voir le chapitre I).

Ce n'est cependant pas la seule force de la diffraction de Bragg. En effet, nous verrons plus loin qu'elle peut aussi permettre de sonder le spectre des excitations élémentaires du système [217, 219]. De plus, par diffraction de Bragg, on couple de manière cohérente deux états d'impulsion du centre de masse différents, et seulement deux à cause de la condition de résonance. On peut donc observer des oscillations de Rabi entre les deux états d'impulsion

¹Dans le cas où on applique les faisceaux lasers pendant un temps T_P court devant l'inverse de la séparation en fréquence entre l'état final et l'état initial, $T_P < (4\omega_R)^{-1}$, alors la relation de conservation de l'énergie n'est plus sélective qu'à \hbar/T_P près, et on observe de la diffraction à fréquence nulle. C'est l'analogie du régime de Raman-Nath en optique traditionnelle, dans lequel le nombre d'ordres diffractés et leur population ne dépend que de ΩT_P et pas de l'angle d'incidence.

couplés par le réseau optique (figure 6.2). Aussi est-il possible de s'en servir comme « lame séparatrice » (avec un pulse $\pi/2$), qui met chaque atome dans une superposition cohérente de l'état d'impulsion $\mathbf{0}$ et de l'état d'impulsion $2\hbar\mathbf{k}$. Il est alors facile de construire des interféromètres pour condensats en utilisant cette technique de Bragg [210, 220, 221, 222]. Ce chapitre ne traitera pas de ces aspects de la diffraction de Bragg. Il est au contraire consacré à la discussion du couplage perturbatif, et à l'utilisation de la diffraction de Bragg comme sonde en impulsion, plutôt que comme outil pour l'optique atomique. Avant d'entrer dans une discussion détaillée, nous allons faire le lien entre ces expériences de spectroscopie de Bragg et certains concepts généraux (et importants !) de physique de la matière condensée.

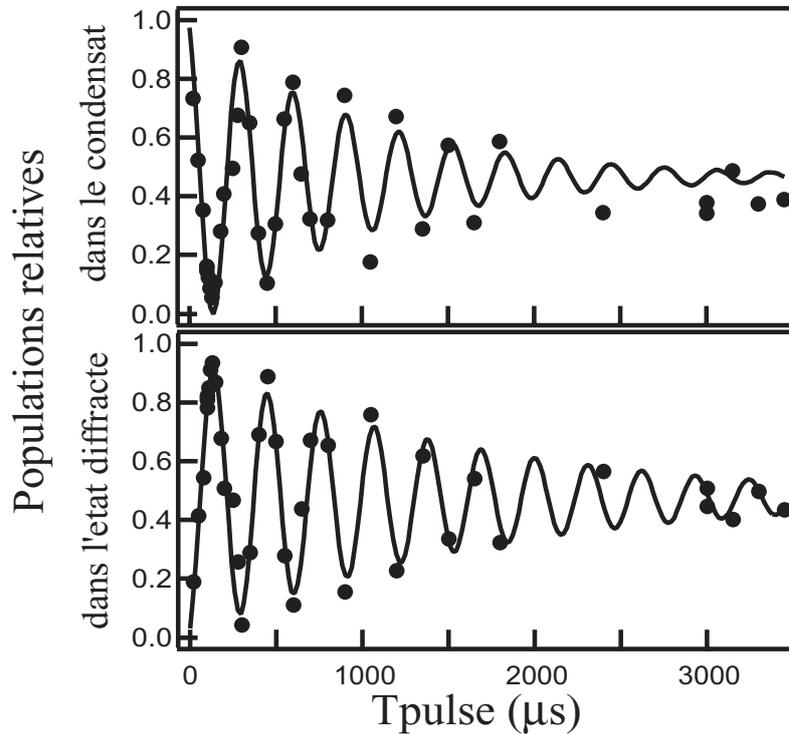


FIG. 6.2 – Oscillations de Rabi entre deux états d'impulsion couplés par le réseau optique. Les cercles pleins donnent la population (relative au nombre total d'atomes) de l'état initial sur la courbe du haut, et de l'état diffracté sur celle du bas. La ligne continue est un ajustement par une sinusoïde exponentiellement amortie, qui donne un temps de décohérence à $1/e$ de 1,6 ms.

6.1.2 Vélométrie Doppler d'un gaz d'atomes froids

Pour rendre la discussion précédente plus quantitative et comparer à d'autres types d'expériences, nous allons esquisser la description théorique de la spectroscopie de Bragg [97, 223, 224], en nous concentrant sur les aspects pertinents pour comprendre le travail présenté dans ce mémoire. Nous considérons donc un gaz d'atomes dégénérés soumis au réseau

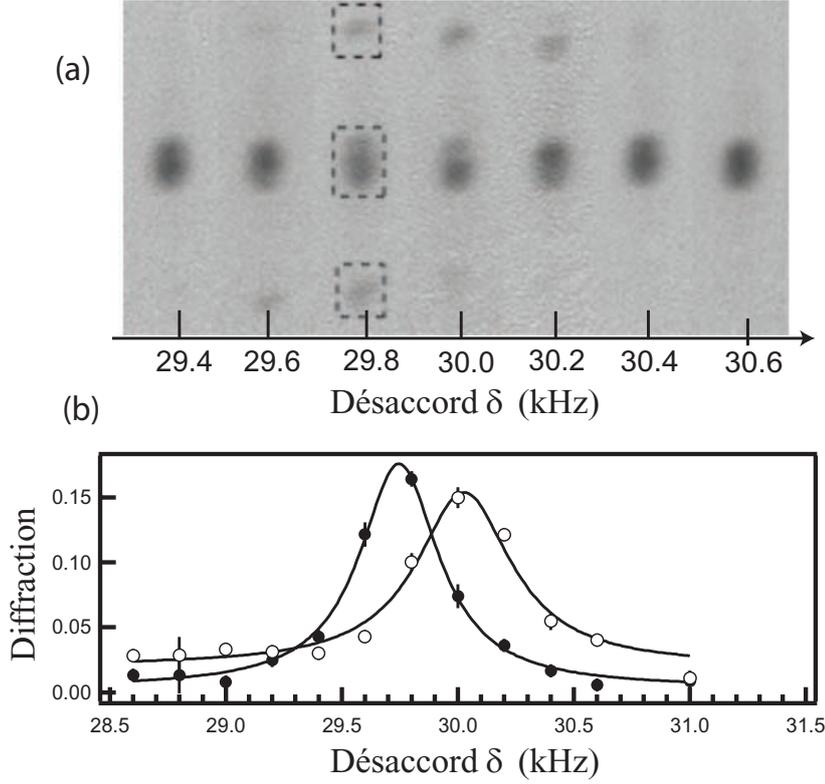


FIG. 6.3 – (a) Images en absorption d'un condensat et des composantes diffractées, pour plusieurs désaccords entre les lasers Bragg. On a montré par des rectangles en pointillés les zones utilisées pour intégrer et obtenir les populations des ordres diffractés et du condensat. Le rapport entre les deux donne l'efficacité de diffraction. Les spectres de Bragg correspondant à l'ordre $+4\hbar\mathbf{k}$ (cercles pleins) et $-4\hbar\mathbf{k}$ (cercles creux) sont reportés sur le graphe (b). Les barycentres des deux spectres sont légèrement décalés, à cause de l'effet d'accélération discuté dans la section 6.2.3.

lumineux formé par les deux ondes progressives L_ω et L_0 , que nous prenons parallèles à l'axe long du piège (dans la direction x). Les faisceaux lasers sont supposés loin de toute résonance atomique, si bien que le taux de diffusion spontanée est négligeable et que le seul effet de l'onde stationnaire est de créer un potentiel dipolaire, que nous écrivons en seconde quantification comme [97, 217] :

$$\begin{aligned} V_{\text{Bragg}} &= \hbar\Omega \int d^3\mathbf{r} \cos(qx - \omega t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\hbar\Omega}{2} \left(\tilde{n}_q e^{-i\omega t} + \tilde{n}_{-q} e^{i\omega t} \right), \end{aligned} \quad (6.3)$$

avec $\tilde{n}_q = \int d^3\mathbf{r} e^{iqx} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r})$, $\Omega = \Omega_1^2/2\Delta$ la fréquence de Rabi à deux photons², $\hbar\mathbf{q} = 2\hbar k_L \mathbf{e}_x$ le transfert d'impulsion, correspondant à une vitesse $\hbar q/M = 2v_R \approx 1.1$ cm/s, et $\hbar\omega$ le transfert d'énergie (de l'ordre de l'énergie de recul à deux photons, $4\hbar\omega_R \approx h \times 15$ kHz). Le potentiel diffractant couple ainsi deux états distincts, l'un avec une impulsion moyenne

² $\Omega_1 = \Gamma/2\sqrt{I/I_{\text{sat}}} \approx 2\pi \times 3$ MHz $\times \sqrt{I/I_{\text{sat}}}$ est la fréquence de Rabi à un photon.

nulle et l'autre avec une impulsion moyenne $\hbar\mathbf{q}$.

Facteur de structure : Pour une efficacité de diffraction faible, on peut calculer le taux de diffraction, *i.e.* la probabilité de transition par unité de temps du condensat au repos vers l'état final d'impulsion $\hbar\mathbf{q}$, en utilisant la règle d'or de Fermi [66, 97, 218, 224] :

$$\gamma = \frac{\pi\Omega^2}{2} \left(S(\mathbf{q}, \omega) - S(-\mathbf{q}, -\omega) \right), \quad (6.4)$$

avec

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{N} \sum_f | \langle f | \tilde{n}_q | i \rangle |^2 \delta(\omega_{\tilde{f}} - \omega), \quad (6.5)$$

avec $|i\rangle$ et $|f\rangle$ les états à N particules initiaux et finaux⁴. La quantité S est appelée « facteur de structure dynamique » (voir par exemple [66] pour une description générale) : il caractérise la réponse (linéaire) du système à N corps à la perturbation imposée par le réseau lumineux. Cette quantité a été introduite pour caractériser la diffusion d'une particule-sonde, en général un neutron, par un système liquide ou solide, une approche qui s'est révélée fructueuse dans de nombreux domaines de la matière condensée. Dans le cas de la spectroscopie de Bragg, ce point de vue revient à considérer le processus de diffraction comme la diffusion inélastique d'un photon d'une onde vers l'autre par les atomes. Une différence importante avec les expériences de diffraction de neutrons est qu'ici on n'observe pas la particule-sonde, mais directement le milieu lui-même. En effet, si on laisse un temps de vol, les atomes diffractés se séparent des atomes encore au repos à cause de leur grande différence de vitesses, et on peut déterminer l'efficacité de diffraction (c'est à dire S à un facteur près) simplement en comptant les populations relatives. Ceci est illustré sur la figure 6.3, même si deux nuages diffractés dans des ordres opposés sont visibles, au lieu d'un (la raison, liée à l'implémentation de la spectroscopie de Bragg dans notre expérience, deviendra claire plus loin).

Pour une première approche, nous allons appliquer l'équation (6.4) au cas du gaz homogène dans une boîte, traité à l'approximation de Bogoliubov. Dans ce cas, on trouve à partir de la décomposition (1.31) que l'opérateur qui décrit l'excitation d'une quasi-particule d'impulsion \mathbf{q} à partir du condensat s'écrit

$$\hat{n}_q = \sqrt{N_0}(u_k - v_k)\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\omega_k^B - \omega)t} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \text{c.c.} \quad (6.6)$$

A partir des expressions des amplitudes de Bogoliubov établies au premier chapitre, on trouve sans difficulté que

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\omega_q}{\omega_q^B} \delta(\omega_q^B - \omega). \quad (6.7)$$

Cette formule (établie par R. P. Feynman dans un cadre général [66]) montre que le facteur de structure est formé de raies très étroites à la fréquence propre des excitations élémentaires. Elle montre qu'il est possible de mesurer le spectre des excitations élémentaires du système,

³Pour un condensat piégé, l'impulsion n'est pas un bon nombre quantique, et on doit en fait considérer deux paquets d'ondes d'impulsion moyenne $\mathbf{0}$ et $\hbar\mathbf{q}$. Ces paquets d'onde sont très étroits : leur largeur en impulsion Δp est petite devant $2\hbar k_L$ (c'est précisément cette largeur finie que l'on veut mesurer). On peut donc considérer en très bonne approximation qu'ils sont orthogonaux [97, 224, 225].

⁴Avec cette définition, le facteur de structure a les dimensions d'un temps.

si on est capable de varier l'impulsion transférée (l'angle entre les deux faisceaux laser) [217, 219, 226]. L'amplitude de diffusion a un comportement intéressant, suivant la valeur du transfert d'impulsion $\hbar q$. Si $q\zeta \ll 1$, alors $\omega_q/\omega_q^B \approx \hbar q/Mc_S \ll 1$: cela signifie qu'à basse énergie, l'excitation d'un phonon se fait de manière moins efficace que pour un atome libre [217]. On peut voir ceci comme une conséquence de la superfluidité du condensat : le potentiel lumineux peut être vu comme une perturbation stationnaire pour un condensat mobile, si on se place dans le référentiel du réseau. Tant que la vitesse du condensat ne dépasse pas la vitesse du son, la probabilité de générer des excitations à partir du condensat est diminuée (mais pas totalement supprimée, contrairement au cas d'une impureté *discernable* qui diffuse sur le condensat [15]). Nous allons nous concentrer dans ce mémoire sur le cas inverse, à haute énergie ($q\zeta \gg 1$), où on retrouve l'amplitude de diffusion pour un atome libre $\omega_q/\omega_q^B \approx 1$: le condensat répond presque comme s'il était composé d'atomes libres et indépendants. Nous allons voir dans les paragraphes suivants que cela permet de mesurer la distribution en impulsion.

Régime Doppler : Dans ce régime de haute énergie, on considère que dans l'état final la particule diffusée est si rapide qu'on peut ignorer tous les termes de potentiel éventuels et la considérer comme une particule libre [97, 225]. Formellement, cela correspond à prendre pour l'opérateur qui crée la particule diffusée $\hat{\Psi}^\dagger \approx \exp(i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar)/\sqrt{2\pi\hbar}$, et cela conduit à $\tilde{n}_{\mathbf{p}} = \tilde{\Psi}(\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \hbar\mathbf{q})$, avec $\tilde{\Psi}$ la transformée de Fourier de l'opérateur champ initial, dont on déduit la distribution en impulsion par $\mathcal{P}(\mathbf{p}) = \langle \tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{p})\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \rangle$. La règle d'or de Fermi (6.4) mène alors, en négligeant l'énergie cinétique initiale, à [97, 225]

$$\begin{aligned} S(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{p} \langle \tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{p})\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \rangle \delta\left(4\omega_R + \frac{2k_L p_x}{M} - \omega\right) \\ &= \frac{M}{2Nk_L} \int dp_y dp_z \mathcal{P}\left(p_x, p_y, p_z = M\frac{4\omega_R - \omega}{2k_L}\right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Dans cette limite dite d'impulsion, le facteur de structure se réduit à la distribution longitudinale d'impulsion dans le nuage, *i.e.* intégrée suivant le plan perpendiculaire à la direction de \mathbf{q} . En variant la différence de fréquence ω , il est clair sur (6.8) qu'on peut sélectionner la classe de vitesses résonante et mesurer sa population, simplement en comptant le nombre d'atomes diffractés pendant la durée T_P du pulse de Bragg, donné par $N_{\text{diff}} = N\gamma T_P \propto S(\mathbf{q}, \omega)$. La largeur en ω de la résonance reflète la largeur en impulsion selon x à travers l'effet Doppler,

$$\Delta\omega_D = \frac{2k_L \Delta p_x}{M}. \quad (6.9)$$

Pour un condensat pur, nous attendons une largeur en vitesses limitée par le principe de Heisenberg, $\Delta p_x \sim \hbar/L = \Delta p_H$, alors que dans le cas d'un quasi-condensat, les fluctuations de phase élargissent la distribution en vitesses et $\Delta p_x \sim \hbar/L_\phi \gg \Delta p_H$. C'est tout le principe de notre expérience, et la discussion précédente montre qu'il est en effet possible de détecter les fluctuations de phase, et de mesurer leur effet quantitativement à l'aide de la diffraction de Bragg.

Dans notre expérience, nous utilisons en fait un transfert à quatre photons au lieu de deux, pour la simple raison que la séparation spatiale entre les nuages diffractés est alors deux fois plus grande après le temps de vol maximum (environ 25 ms) autorisé par l'extension verticale

de la cellule. Ceci rend plus facile la détermination du nombre d'atomes diffractés⁵. L'efficacité de diffraction est pratiquement identique à (6.8), puisqu'il suffit de substituer la fréquence de résonance à quatre photons, $8\omega_R$, et la fréquence de Rabi à 4 photons, $\Omega_4 = \Omega^2/4\omega_R$ dans la formule (6.8). On mesure donc finalement la quantité $\gamma T_P = (\pi\Omega_4^2 T_P/2)S(\mathbf{q}, \omega)$, avec la « nouvelle » expression pour S :

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{M}{4Nk_L} \int dp_x dp_y \mathcal{P}(p_x, p_y, p_z = \frac{8\omega_R - \omega}{2k_L}). \quad (6.10)$$

Ceci se démontre en utilisant la théorie des perturbations dépendantes du temps au second ordre [177] entre les états initiaux et finaux $\mathbf{0}$ et $4\hbar\mathbf{k}_L$, le seul état intermédiaire important étant $2\hbar\mathbf{k}_L$. Nous ne détaillerons pas plus ce calcul.

De nombreux effets parasites peuvent cependant obscurcir la mesure et le diagnostic. Jusqu'ici, nous avons considéré une situation idéale, où le pulse était très long devant l'inverse de la largeur de la résonance (pour pouvoir appliquer directement la règle d'or de Fermi) et où la phase relative des deux lasers était parfaitement définie. Nous discutons plus loin longuement que ces simplifications ne s'appliquent pas dans notre expérience, et dans ce paragraphe nous nous contentons de noter que ces deux effets conduisent à une indétermination sur la fréquence de résonance. La fonction δ qui apparaît dans (6.8) doit alors être remplacée par une fonction de résolution, qui tient compte à la fois de l'élargissement « de Fourier » par le temps de pulse, et des variations aléatoires de la phase relative des deux lasers (ainsi que d'autres contributions mentionnées dans la suite). Le spectre final (à quatre photons) est donc obtenu en convoluant la formule « idéale » (6.10) par une fonction de résolution

$$\begin{aligned} f_{\text{res}}(\omega, T_P) &= \langle \left| \int_0^{T_P} e^{-i(16\omega_R + 4k_L p_x/M - 2\omega)t' + i2\delta\phi_L(t')} dt' \right|^2 \rangle \\ &= \text{sin}_C^2\left(\frac{\omega T_P}{2}\right) * \text{DSP}_{\delta\phi_L}[2\omega_{\text{res}}(p_x) - 2\omega] \end{aligned} \quad (6.11)$$

avec $\omega_{\text{res}} = 8\omega_R + 2k_L p_x/M$. Nous avons indiqué par des crochets une moyenne statistique sur différentes réalisations de l'expérience, et par $*$ un produit de convolution. Les fluctuations de la phase relative $\delta\phi_L$ des lasers formant le réseau de Bragg déterminent le spectre de bruit du réseau optique, défini ici comme la densité spectrale de puissance $\text{DSP}_{\delta\phi_L}$ associée à $\exp(i2\delta\phi_L)$ (cette expression suppose que les fluctuations d'amplitude du réseau sont négligeables). Nous discuterons plus loin une mesure optique de cette fonction de résolution, et examinerons son effet sur les spectres après avoir dressé une liste des effets qui y participent.

6.1.3 Spectroscopie après temps de vol

Nous n'avons pas évoqué l'influence du potentiel de piégeage dans le paragraphe précédent. En effet, nous effectuons l'expérience de Bragg après la coupure du piège, suivie d'un court temps de vol, afin de réduire la densité de l'échantillon. Ceci est nécessaire pour éviter deux effets collisionnels qui empêcheraient une interprétation quantitative des spectres de Bragg, que nous discutons tour-à-tour.

⁵Avec un transfert à six photons et plus, on doit utiliser une puissance laser trop élevée, qui induit des effets de diffusion incohérente, si bien que nous nous sommes limités à quatre photons.

Élargissement collisionnel dû au champ moyen : La première limitation est liée à l'approximation d'impulsion, qui n'est pas vraiment justifiée pour les transferts d'impulsion considérés si on sonde un condensat piégé. Pour le voir, on peut considérer le raisonnement classique suivant. Un atome initialement dans le condensat, au point \mathbf{r} , avec une impulsion $\hbar\mathbf{k}$ possède une énergie classique $E_i = \hbar^2\mathbf{k}^2/2M + gn_0(\mathbf{r})$. S'il est diffracté, son impulsion devient $\hbar(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ et l'énergie finale est $E_f = \hbar^2(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2/2M + 2gn_0(\mathbf{r})$. Dans ce point de vue classique, la condition de résonance devient donc locale,

$$E_f - E_i = 4E_R + 2\hbar v_R k_x + gn_0(\mathbf{r}) = \hbar\omega. \quad (6.12)$$

La contribution moyenne du terme d'interactions s'obtient par une moyenne spatiale sur le profil de densité (parabolique), et mène à un déplacement de la résonance d'une quantité $2\mu/7\hbar$ [99, 97, 218]. En calculant la variance, on obtient un élargissement de cette résonance par l'énergie de champ moyen, d'une quantité [99, 97, 218] :

$$\Delta_{mf} = \sqrt{\frac{8}{137}}\mu. \quad (6.13)$$

Si on néglige le terme de champ moyen, la largeur de la résonance est la largeur Doppler (6.9), qui est la quantité qui nous intéresse. On pourra donc négliger la contribution du champ moyen et utiliser l'approximation d'impulsion à condition que la largeur Doppler soit grande devant l'élargissement de champ moyen, soit

$$\sqrt{\frac{8}{137}}\frac{\mu}{\Delta\omega_D} \ll 1. \quad (6.14)$$

L'étude plus rigoureuse menée dans [97] confirme ce raisonnement classique. Dans notre cas, l'extension du condensat selon x est grande, à cause de la fréquence de piégeage modeste dans cette direction. En utilisant nos paramètres typiques, on trouve que la largeur Doppler dépasse le potentiel chimique quand la longueur de cohérence devient inférieure à 30 μm environ. Dans notre expérience, de telles longueurs de cohérence sont atteintes, si bien qu'il serait envisageable de déconvoluer les données pour en extraire une largeur Doppler. Cependant, un deuxième problème plus sévère intervient, lui aussi lié aux collisions, et à l'extension du condensat selon x .

Collisions entre deux paquets d'ondes de vitesse relative élevée : En effet, la vitesse de groupe du paquet d'ondes diffracté est grande par rapport à la vitesse du son dans le condensat, précisément pour se placer dans le régime d'impulsion. Par conséquent, des collisions élastiques se produisent entre le condensat au repos et les atomes diffractés, pratiquement avec le taux classique $\gamma_{\text{coll}} = n_0\sigma v_{\text{rel}}$, la vitesse relative étant $v_{\text{rel}} = 2v_R$ [15, 227]. Ce taux est très élevé devant la période axiale, si bien que le libre parcours moyen est très petit devant la longueur du condensat. Alors, les atomes diffractés vont subir un grand nombre de collisions avant de se séparer du condensat. Ces collisions se comprennent en fait à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii [227], si on se rappelle que l'amplitude de diffusion dans l'onde s admet l'expansion : $f \approx -a + ika^2 + \dots$. Avec le vecteur d'onde $2\hbar k_L$, on a $ka \sim 0, 1$ et le terme imaginaire n'est plus tout à fait négligeable. Il intervient dans l'équation de Gross-Pitaevskii comme un terme d'amortissement, avec le taux $8\pi\hbar^2 k_L a^2 n_0/M = \gamma_{\text{coll}}/2$. Ces collisions sont isotropes et redistribuent l'impulsion moyenne $2\hbar\mathbf{k}_L$ sur une « sphère de

diffusion » , centrée dans l'espace des impulsions autour de $\hbar\mathbf{k}_L$ et de rayon $\hbar k_L$: en d'autres termes, le condensat est dispersé vers un grand nombre d'états quantiques correspondants à des impulsions moyennes différentes. Ainsi, au lieu d'observer deux nuages avec une faible dispersion en vitesse et nettement séparés après le temps de vol, on a au contraire deux nuages diffus (voir l'exemple de la figure 6.4). Dans ces conditions, on comprend qu'il soit difficile de mesurer le nombre d'atomes diffractés, d'autant que les collisions élargissent la résonance d'un facteur γ_{coll} , qui reflète la durée de vie finie des excitations rapides générées par le potentiel optique. Notons que les impulsions après collision, qui satisfont simultanément aux relations de conservation de l'impulsion et de l'énergie, ne se distribuent rigoureusement sur une sphère que si l'impulsion initiale est très grande devant la vitesse du son (ce qui correspond à la situation de [15]). On voit sur la figure 6.4 que si l'impulsion initiale $\hbar q_i$ vérifie $\hbar q_i \ll Mc_S$, la diffusion est fortement supprimée. Ceci est une conséquence de la forme de la relation de dispersion à basse énergie, et peut donc se comprendre comme une conséquence de la superfluidité du condensat. Sur la figure 6.4, on a une impulsion initiale $\hbar q_i = 2\hbar k_L \sim 2Mc_S$, et dans ces conditions, on observe un halo collisionnel de forme ovale, en accord avec nos observations.

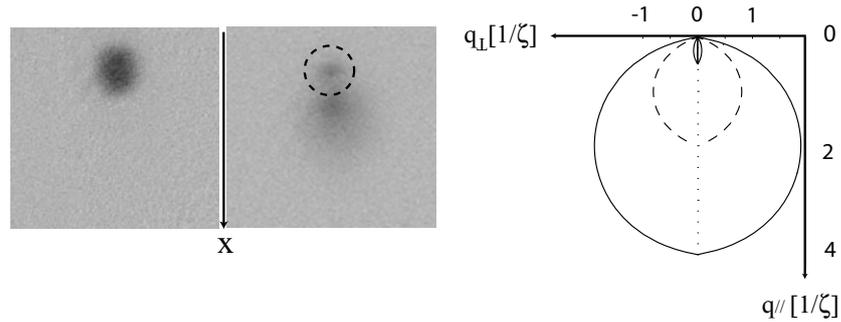


FIG. 6.4 – Collisions entre un condensat au repos et un condensat rapide créé par diffraction de Bragg. L'image de gauche est prise en l'absence du réseau de diffraction. En appliquant ce dernier dans des conditions identiques, les collisions élastiques redistribuent les atomes vers de nombreux états d'impulsion et détruisent le condensat (image du milieu). Pour mettre l'effet en évidence, on a diffracté une fraction importante des atomes (de l'ordre de 50 %). Nous avons également indiqué sur la figure de droite les vecteurs d'onde autorisés, $q_{//}$ dans l'axe des faisceaux et q_{\perp} perpendiculairement, pour trois valeurs de l'impulsion initiale, 0,5 , 2 et 4 Mc_S .

Super-radiance : Enfin, mentionnons brièvement qu'avec les valeurs de densités dans le piège, de puissances lumineuses et d'anisotropies atteintes dans nos expériences, des effets de super-radiance se manifestent [228]. Un flux de photons dirigé dans l'axe long du piège se construit alors exponentiellement vite par émission « coopérative » , à partir de quelques évènements initiaux de diffusion Rayleigh. Par conservation de l'impulsion, des atomes ayant émis un photon reculent dans la direction de l'axe. C'est un effet qui a lieu en présence d'un seul faisceau laser, mais comme les atomes ayant diffusé un photon reculent dans la même direction que ceux qui sont diffractés par le réseau optique, ils gênent considérablement la mesure de la distribution en impulsion.

Pour éviter tous ces effets liés à la densité, nous autorisons un temps de vol $t = 2$ ms avant d'appliquer les faisceaux de Bragg. Ainsi, la densité chute de deux ordre de grandeur $[(\omega_{\perp} t)^2 \approx 91]$. L'élargissement dû au champ moyen n'est alors plus que d'une dizaine de Hz, et le libre parcours moyen devient grand devant la taille du nuage, si bien qu'on peut en bonne approximation considérer qu'on sonde des particules libres et indépendantes. De plus, d'après l'étude de l'expansion du quasi-condensat menée au chapitre 5, si $p_{\phi} > 3p_{\text{exp}}$, la distribution en temps de vol est quasiment similaire à celle du quasi-condensat dans le piège, alors qu'à suffisamment basse température, on a $p_{\text{exp}} \gg p_{\phi}$ et les fluctuations de phase sont masquées par le champ moyen. Heureusement, les expériences présentées dans ce chapitre se situent dans le premier cas de figure, grâce au rapport d'aspect important de notre piège et au nombre d'atomes relativement faible ($N_0 \sim 5 \times 10^4$) : en effet, plus λ augmente et N_0 diminue, plus p_{exp} diminue et plus \hbar/L_{ϕ} augmente (les autres paramètres étant fixés). En fait, nous pourrions considérer à une bonne approximation que la distribution axiale en impulsion est pratiquement celle d'un quasi-condensat piégé (nous revenons sur ce point dans la suite).

6.2 Mise au point d'un dispositif à haute résolution

Nous détaillons maintenant le dispositif expérimental qui permet d'acquérir un spectre d'impulsion du condensat par diffraction de Bragg. Nous décrivons tout d'abord le montage laser utilisé, puis nous soulignons plusieurs difficultés expérimentales qu'il a fallu surmonter. En particulier, un soin important a dû être apporté à la stabilité en phase des faisceaux lasers. Nous terminons par la description d'un phénomène « parasite » pour l'acquisition des spectres de Bragg, la condensation dans un état hors-équilibre dans un piège anisotrope (section 2.4.3 et [95]).

6.2.1 Montage laser

La figure 6.5 présente un schéma du dispositif optique utilisé pour générer le potentiel diffractant. Nous détournons en fait une partie de la puissance du laser ralentisseur, décalé de -133 MHz par rapport à la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ ⁶, qui est ensuite amené *via* une fibre optique monomode à maintien de polarisation vers le piège magnétique. Le faisceau laser est ensuite séparé en deux parties d'égale intensité, chacun d'eux passant dans un modulateur acousto-optique à 80 MHz (Crystal Technologies). Pour assurer une très bonne stabilité en fréquence, les signaux radio-fréquence qui alimentent les modulateurs sont générés par deux synthétiseurs stables au Hertz près. L'un d'entre eux (Hameg HM 8133-2) est fixé à une fréquence de 80 MHz. Le second (Hewlett-Packard 8647A) est commandé par ordinateur *via* une connection GPIB, si bien que sa fréquence peut être variée autour de 80 MHz de la quantité ω nécessaire pour se placer autour de la résonance de Bragg. La

⁶Les atomes étant polarisés dans $|F = 1, m_F = -1\rangle$, le laser est donc désaccordé de $\Delta \approx 6,83$ GHz, correspondant à l'écart hyperfin dans le fondamental électronique. Le taux d'émission spontané typique est alors de $\Gamma_{\text{sp}} \sim \Gamma(\Omega_1/\Delta)^2 \sim 2\pi \times 0,2 \text{ s}^{-1}$, soit une probabilité d'excitation de 0,1 % pendant la durée du pulse.

séparation en deux faisceaux est faite à l'aide d'un cube polariseur, si bien qu'après passage dans les modulateurs puis recombinaison, on dispose de deux faisceaux décalés en fréquence, qui se propagent parallèlement avec des polarisations orthogonales. Ces faisceaux sont ensuite envoyés sur la cellule de piégeage à travers un trou de 8 mm de diamètre foré à travers un pôle de l'électro-aimant, parallèlement à l'axe long du piège (voir les figures 2.4 et 6.5).

L'alignement de la direction de propagation des faisceaux avec l'axe long du piège est crucial. En effet, pour un angle θ entre ces deux directions, le potentiel diffractant est alors sensible à la vitesse dans la direction $\cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y$. Or, la vitesse dans la direction radiale y est nettement plus élevée que dans l'axe long (d'un facteur ω_\perp/ω_x), si bien qu'un angle petit est suffisant pour obscurcir la distribution des vitesses axiales. Pour un quasi-condensat en expansion, le rapport des largeurs en impulsion dans les deux directions est $\sqrt{\langle p_x^2 \rangle} / \sqrt{\langle p_y^2 \rangle} \sim \hbar/L_\phi Mc_S = (2\hbar\omega_x/\mu) \times (T/T_\phi)$. On doit donc s'assurer que $\theta < 2\hbar\omega_x/\mu \times (T/T_\phi) \sim 2,5$ mrad $\times (T/T_\phi)$. D'après le diamètre (8 mm) et la longueur du passage dans l'électroaimant (30 cm), on déduit pour un faisceau de forme cylindrique et de 1 mm de rayon un angle *maximum* de 10 mrad pour que le faisceau traverse sans être coupé. En pratique, on aligne l'axe des faisceaux *sur le trou* à une précision bien meilleure (mais difficile à évaluer), en regardant sur un trajet optique de 2 m environ. Ceci n'indique pas forcément qu'on est aussi bien aligné sur l'axe long du piège, car celui-ci et l'axe du trou ne coïncident pas nécessairement à quelques mrad près. Cependant, même dans une estimation pessimiste, les données étant prises pour $6 < T/T_\phi < 26$, nous déduisons qu'un alignement imparfait n'a pas d'effet notable sur les spectres.

6.2.2 Stabilité mécanique du réseau optique

Pour former le réseau optique, il importe de superposer ces deux faisceaux (appelés L_0 et L_ω dans la première section de ce chapitre) de manière à ce qu'ils soient contra-propageants au niveau des atomes (avec bien entendu la même polarisation). Si on ne prend pas de précautions, la phase relative des deux faisceaux devient sensible aux vibrations des miroirs utilisés pour les amener vers les atomes. En effet, des vibrations aléatoires de ces miroirs (dûes à des effets mécaniques parasites transmises par la table optique, ...) vont provoquer des fluctuations de fréquence par effet Doppler. Ceci entraîne un élargissement de la fonction de résolution spectrale (6.11) qui peut obscurcir considérablement le spectre atomique. Dans notre cas, si on considère une largeur typique de 200 Hz, pour de la lumière à 780 nm, on trouve que l'effet total des vibrations (en comptant le trajet complet) ne doit pas correspondre à une vitesse quadratique moyenne de plus de $80 \mu\text{m/s}$. En fait, seuls les miroirs non partagés peuvent introduire de telles fluctuations. En effet, quand les deux faisceaux se propagent parallèlement à l'aide des mêmes miroirs, ils ressentent les mêmes fluctuations et la fréquence relative n'est pas affectée. Par contre, quand dans certaines parties du montage, ils se propagent sur des chemins optiques différents, à l'aide de miroirs différents, les fluctuations sur chaque trajet optique sont *a priori* décorréliées et la phase relative fluctue d'autant plus.

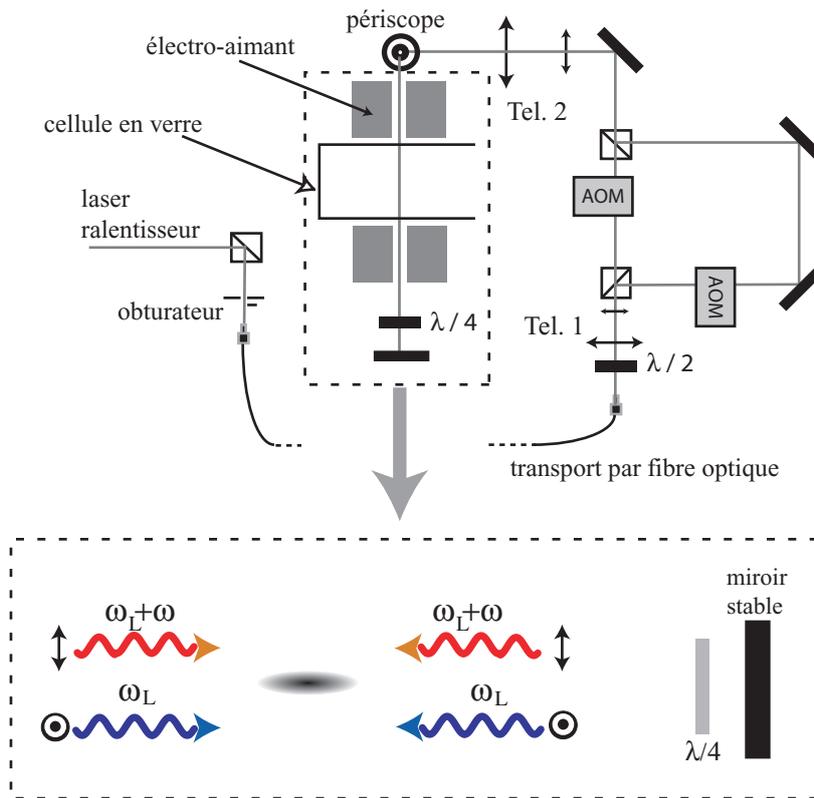


FIG. 6.5 – Montage optique utilisé pour générer le réseau diffractant. On a dessiné une vue globale dans la partie supérieure, et un agrandissement de la région cruciale autour des atomes dans la partie inférieure qui montre les deux réseaux diffractants de polarisation orthogonale.

Montage à deux réseaux : Dans un premier temps, nous avons utilisé un montage avec deux chemins optiques séparés après passage par les modulateurs. Un spectre de Bragg obtenu avec ce montage est montré sur la figure 6.6, et on voit nettement une bande latérale présente à une fréquence légèrement inférieure à celle du pic central (décalée de 1 kHz environ). En regardant le spectre associé au battement entre les deux faisceaux sur un analyseur de spectre (voir plus loin pour plus de détails sur la mise en place de cette mesure), nous avons clairement distingué cette double structure.

Nous avons alors adopté un arrangement différent, qui est celui indiqué sur la figure 6.5. Les faisceaux lasers L_0 et L_ω sont co-propageants tout du long, mais avec une fréquence décalée et surtout des polarisations orthogonales. Ils passent la cellule, puis traversent une lame quart d'onde avant d'être rétro-réfléchis. Dans cette configuration, un seul miroir est non-partagé et contribue aux fluctuations de la phase du réseau. Les deux faisceaux qui reviennent, L'_ω et L'_0 , ont donc une polarisation tournée de $\pi/2$ par rapport à L_ω et L_0 , avec des vecteurs d'ondes opposés. En les recouvrant avec les faisceaux aller, on forme deux réseaux de diffraction indépendants et symétriques par parité (L_ω, L'_0) et (L'_ω, L_0) . Ils sont résonants pour la même fréquence, mais transfèrent une impulsion opposée aux atomes. Ainsi, pour une image de diffraction donnée, on observe deux nuages diffractés, visibles sur

la figure 6.3. Pour une seule série d'acquisition, nous obtenons donc deux spectres diffractés, un pour chaque réseau.

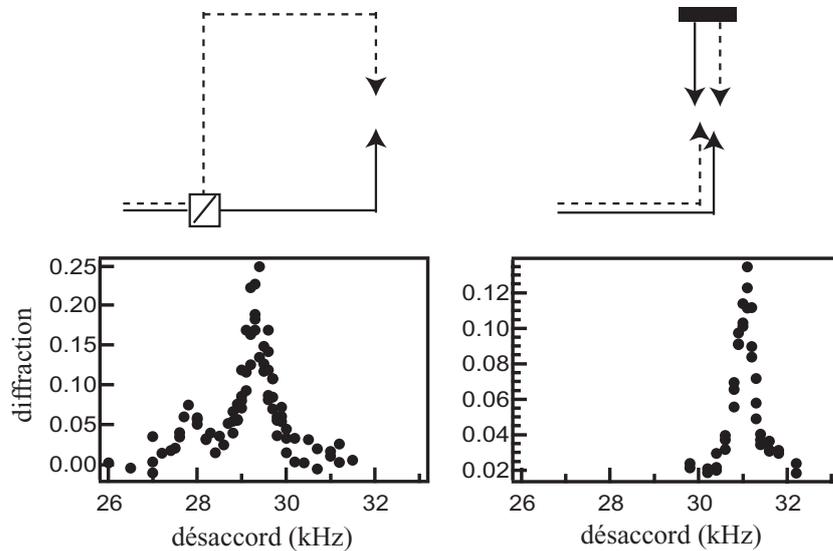


FIG. 6.6 – Deux spectres de Bragg, obtenus l'un avec des faisceaux lasers contra-propageant, l'autre avec des faisceaux co-propageant et rétro-réfléchis.

Mesure optique de la stabilité en fréquence du réseau : Pour caractériser (et améliorer) la stabilité en phase des faisceaux dans des conditions les plus proches possibles de celles de l'expérience, nous avons utilisé les éléments du montage pour mesurer le battement entre un faisceau aller et un autre qui a accompli le trajet jusqu'à la cellule (voir la figure 6.7). Chaque faisceau est amené sur une photodiode (avec la même polarisation), et le battement est mesuré sur une fenêtre temporelle typique de quelques ms, un temps comparable à celui des expériences de Bragg. Après avoir enregistré le signal à l'aide d'un oscilloscope numérique, nous en effectuons la transformée de Fourier discrète et après moyenne sur plusieurs réalisations de l'expérience, on obtient une approximation de la densité spectrale de bruit du réseau optique. Cette méthode permet de s'affranchir de la durée d'intégration typique d'un analyseur de spectre commercial, de l'ordre de la seconde, soit beaucoup plus longue que la durée d'un pulse.

Nous avons d'abord vérifié que lorsque les deux faisceaux co-propageant sont amenés sur la photodiode, on observe le profil en sinus cardinal attendu pour (6.11) dans le cas d'une phase relative fixée, pour des temps de pulse de l'ordre de la dizaine de ms. Les signaux radio-fréquences étant issus de synthétiseurs stables au Hz près, le battement entre les deux signaux rf est bien entendu extrêmement stable. Ceci implique que le fait de séparer les faisceaux en deux pour les faire passer dans les modulateurs acousto-optiques n'ajoute pas de bruit significatif. Les montures de ces miroirs sont montés solidement sur la table optique, et nous avons utilisé des montures Radiant Dyes, massives et de meilleure qualité mécanique que celles que nous utilisons habituellement. Par contre, pour amener les lasers sur le piège on est amené à les élever de 30 cm au dessus de la table optique. Une monture de miroir

placée à cette hauteur est bien plus susceptible de réagir à des perturbations mécaniques, si bien que le miroir qui rétro-réfléchit les lasers pour former le réseau diffractant (le seul à être en hauteur et non-partagé par deux faisceaux d'une même paire) devient le problème critique. Nous l'avons finalement monté sur la tranche d'une plaque massive d'aluminium, de dimensions $30 \times 30 \times 2$ cm. Ainsi, les vibrations mécaniques principales se produisent dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation des faisceaux Bragg, ce qui minimise les fluctuations de la phase relative.

Dans cette configuration, après quelques efforts supplémentaires pour améliorer la stabilité mécanique, nous avons pu mesurer la densité spectrale de puissance du battement entre les deux faisceaux contra-propageants, pour différents temps de pulse. Cette mesure est faite en « situation », c'est-à-dire qu'on regarde un pulse lumineux déclenché 2 ms après la coupure du piège magnétique, et avec la séquence utilisée dans l'expérience avec les atomes. Ainsi, on peut détecter des vibrations générées par certaines composantes de l'expérience, et qui ne seraient pas présentes si on faisait la même expérience « au repos ». Comme on le voit sur la figure 6.7, pour des temps de l'ordre de 4 ms (6 ms après la coupure), le spectre est significativement perturbé, et la double structure reste nettement visible. Par contre, pour des temps plus courts (2 ms, ou 4 ms après la coupure), le spectre est clairement limité par la durée finie du pulse, comme le montre la comparaison du spectre mesuré et du profil attendu en sinus cardinal carré. Nous attribuons ces différences importantes à des vibrations causées par des forces magnétiques transitoires qui se développent à la coupure (et qui sont donc non-stationnaires). Suite à cette étude, nous avons choisi de fixer la durée du pulse à 2 ms pour une impulsion déclenchée 2 ms après la coupure. Le spectre de bruit du réseau est alors limité par le temps de pulse, mais sa largeur à mi-hauteur de 180 Hz est tout à fait acceptable. Les efforts portés à améliorer la stabilité se sont cependant révélés importants. Avec l'ancien système optique, l'amplitude de la bande latérale à - 1 kHz est nettement plus importante, et la largeur des spectres observés (pour les mêmes paramètres) est de l'ordre de 400-500 Hz, plutôt que 180 Hz.

6.2.3 Accélération parasites sur les atomes

Revenons aux expériences de spectroscopie de Bragg pour évoquer un autre problème, passé sous silence jusqu'ici. Au cours du temps de vol, comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre III, les atomes subissent une accélération en bloc que nous attribuons à des gradients de champ magnétiques parasites. Cet effet déplace la résonance par effet Doppler, un gradient de champ de 1 G/cm induisant un déplacement de 3,2 kHz /ms fois la durée du pulse. Si la résonance se déplace significativement pendant le pulse de Bragg, cela entraînera un élargissement du spectre. Pour contrer cet effet, nous avons d'abord essayé de transférer par une rampe radio-fréquence les atomes dans le sous-niveau $m_F = 0$, où l'effet des champs magnétiques résiduels est totalement négligeable, avant d'appliquer le pulse de Bragg. Sans entrer dans les détails (voir [47]), plusieurs séries d'expériences nous ont convaincus qu'un tel transfert perturbait la distribution dans le piège (le temps effectif de transfert n'était pas très petit devant le fréquence transverse). De plus, l'efficacité de transfert est assez sensible aux différents paramètres de la rampe rf utilisée, puisqu'on essaie de ne pas peupler $m_F = +1$ dans le processus, tout en dépeuplant entièrement $m_F = -1$ (en d'autres termes, on doit

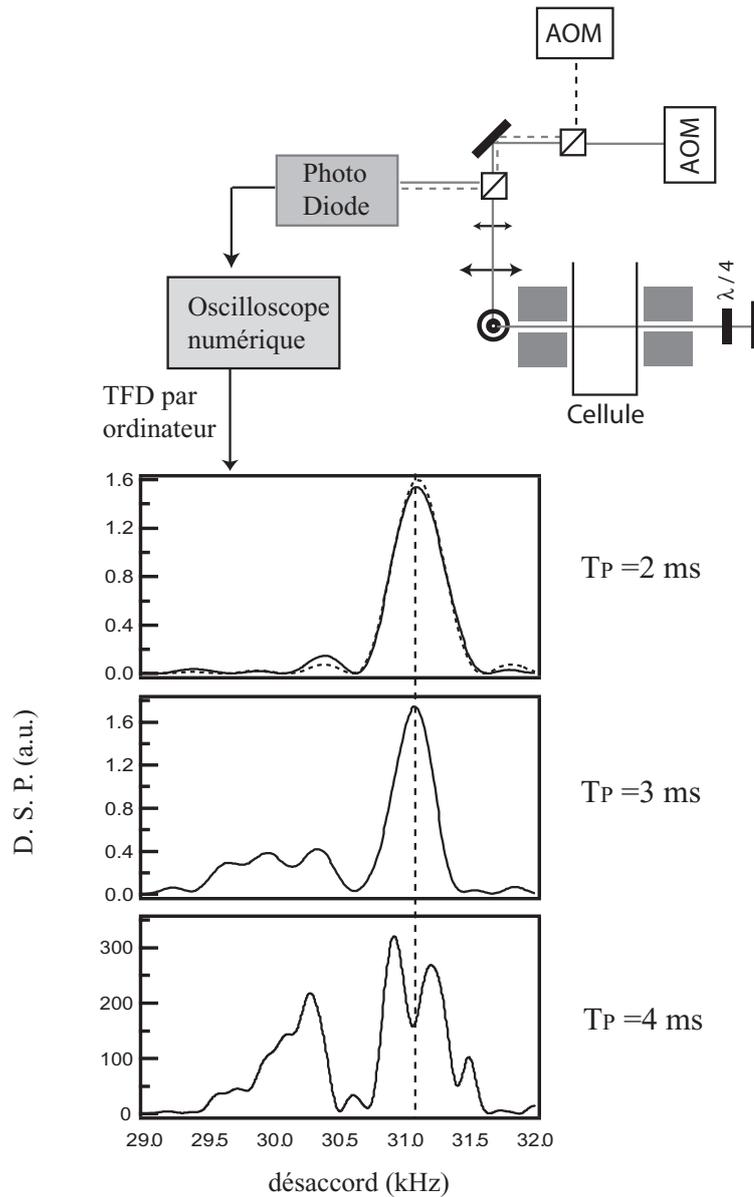


FIG. 6.7 – Montage interférométrique pour observer la stabilité en phase du réseau de diffraction. On a reproduit le spectre de bruit du réseau, pour trois durée de pulse différentes, $T_P = 2, 3$ et 4 ms, et une différence de fréquence $\omega = 2\pi \times 31$ kHz. L'impulsion est déclenchée 2 ms après la coupure du piège. Sur la courbe qui correspond à $T_P = 2$ ms, on a également indiqué le profil en sinus cardinal, attendu pour un réseau parfaitement stable en fréquence.

réaliser un transfert adiabatique).

Nous avons également implémenté un balayage lent de la fréquence relative, pour compenser l'accélération due aux gradients magnétiques pendant le pulse. Un exemple d'une telle mesure (pour une configuration de piégeage de $\omega_{\perp} = 2\pi \times 470$ Hz et $\omega_x = 2\pi \times 7$ Hz) est présenté sur la figure 6.8. Sur cet exemple, la pente sans compensation pour quatre photons (250 Hz/ms) correspond à un gradient de champ très faible, de l'ordre 0,08 G/cm. Pour la

configuration de piégeage finale, en comparant des spectres obtenus « normalement » avec des spectres obtenus par cette technique, nous n'avons pas détecté d'élargissement significatif pour une durée typique de pulse de 2 ms (moins de 10 %, inférieur à la dispersion statistique). Si on calcule la transformée de Fourier du profil carré de l'impulsion Bragg en incluant la dérive mesurée de la fréquence centrale, on aboutit à la même conclusion. Aussi, nous avons considéré que cet effet n'était pas gênant pour notre mesure, et les données finales ont été acquises sans compensation de la dérive de la résonance.

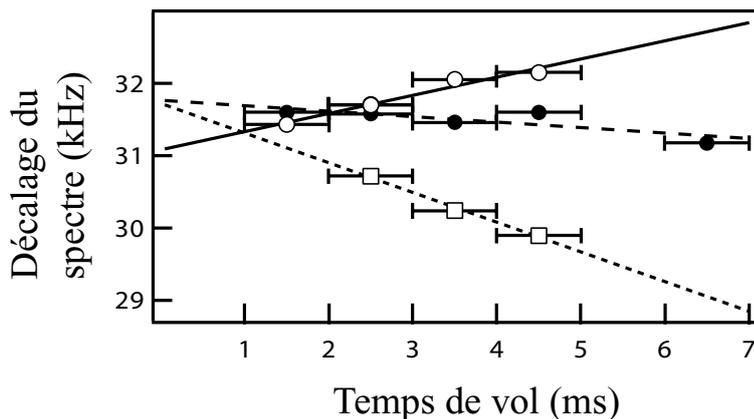


FIG. 6.8 – Compensation de l'accélération du nuage pendant le temps de vol par un balayage de la fréquence relative des lasers. La résonance sans balayage est représentée par les cercles creux, avec une pente de 0,25 kHz/ms. Les carrés montrent une compensation trop forte, qui induit une diminution « artificielle » de la fréquence de résonance, et les cercles pleins une compensation correcte de l'accélération pour les cinq premières ms (pente de -0,08 kHz/ms). Ces deux dernières courbes ont été mesurées pour des spectres à 2 photons, mais nous les avons rééchelonnées pour faciliter la comparaison.

6.2.4 Condensation hors-équilibre dans un piège anisotrope et excitation du mode de compression axial

Par contre, les oscillations hors-équilibre provoquées par le franchissement du seuil, constatées au chapitre 2 (section 2.4.3), constituent un fléau pour cette expérience de spectroscopie de Bragg. En effet, à cause du long temps d'amortissement, il est difficile de ne pas le provoquer dans notre géométrie. Un champ de vitesses se développe pour soutenir l'oscillation, si bien qu'une signature des oscillations existe également sur la distribution en impulsion. Nous avons utilisé la spectroscopie de Bragg « en temps réel » (figure 6.2.4) pour observer cet effet avec une rampe d'évaporation beaucoup plus lente que pour l'expérience « témoin » de la figure 2.7 : l'amplitude de l'oscillation sur la largeur est alors faible, et difficilement observable sur les images brutes. Pour une oscillation quadrupolaire de la densité, le champ de vitesses reste linéaire en position dans le régime de Thomas-Fermi, comme pour un condensat en expansion : les deux situations peuvent en effet être décrites par des équations d'échelles, avec dans le cas présent $\beta_x \approx 1 + (\Delta L/L) \cos(\omega_Q t)$ [76, 77, 95]. La distribution en vitesses

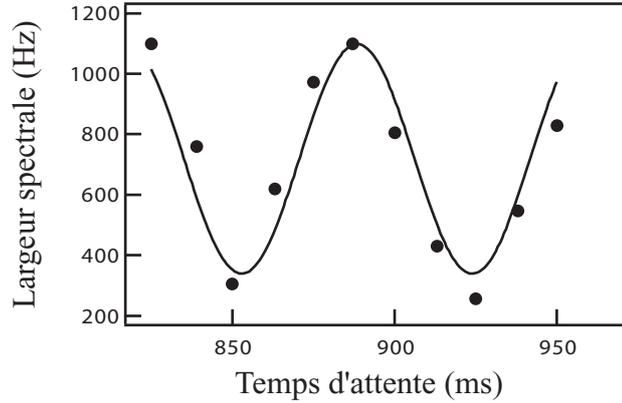


FIG. 6.9 – Oscillations du quasi-condensat hors d'équilibre observées dans l'espace des vitesses par spectroscopie de Bragg. Pour cette expérience, l'amplitude relative $\Delta L/L$ était de l'ordre de quelques pour cents, difficiles à observer directement sur les images d'absorption avec un rapport signal à bruit suffisant.

(à température nulle) est donc donnée par (5.50), à condition de remplacer p_{exp} par

$$p_{\text{osc}} = \left| \frac{\dot{b}_x}{b_x} \right| MR = \sqrt{5} \frac{\Delta L}{L} \left| \sin(\omega_Q t) \right| M c_S. \quad (6.15)$$

L'oscillation en impulsion a lieu au double de la fréquence propre du mode, soit $2\omega_Q = \sqrt{10}\omega_x$. En effet, la distribution en impulsion est la même que le (quasi)condensat soit dans une phase d'expansion ou de contraction. Après de nombreux test, nous sommes arrivés à la conclusion que même une rampe très lente excite un nombre de quanta suffisants pour obscurcir considérablement le spectre en vitesse du nuage dans l'axe long. En effet, l'amplitude de l'oscillation de la largeur en impulsion correspond à une largeur Doppler $\approx \frac{\Delta L}{L} \times 17$ kHz. Pour que l'oscillation ne participe pas pour plus de 100 Hz à la largeur Doppler totale, on s'aperçoit qu'il faut une oscillation relative de la longueur $\Delta L/L < 1$ %. Aussi, nous avons laissé un temps de relaxation de 6.5 s après la fin de la rampe d'évaporation, choisi empiriquement pour ne plus observer d'oscillations⁷. Bien entendu, on perd pendant cette période de « thermalisation » un nombre considérable d'atomes condensés. Pour notre expérience, ce n'est cependant pas rédhibitoire, car les fluctuations de phase augmentent quand le nombre d'atomes diminue, si bien que le signal recherché est en fait renforcé.

6.3 Spectroscopie en impulsion à température finie

Avec toutes ces précautions, nous avons pu obtenir des quasi-condensats à l'équilibre et un dispositif de spectroscopie de Bragg avec une résolution de l'ordre de 200 Hz. Nous avons alors commencé une campagne d'investigation systématique en variant la température, le nombre d'atomes et la fraction condensée suivant la procédure décrite au chapitre 2,

⁷Cela correspond à un facteur d'amortissement $\exp(-t/\tau) \sim 10^{-4}$.

avec un soin équivalent apporté au contrôle des dérives de la rampe. Dans la configuration la plus anisotrope, correspondant à $\omega_x = 2\pi \times 5$ Hz et $\omega_\perp = 2\pi \times 760$ Hz, nous avons pris des spectres de Bragg pour sept valeurs caractéristiques de la rampe radio-fréquence, ν_{rf} , variant ainsi la température de 90 à 350 nK environ, le nombre d'atomes de 8×10^4 à 2×10^4 , et la fraction condensée de 70 % à 8 %. Plusieurs spectres ont été pris pour chaque valeur de ν_{rf} (typiquement 5), en variant le temps d'attente après la fin de rampe, pour ne pas introduire d'effets systématiques dûs à de possibles oscillations quadrupolaires résiduelles. La prise de données pour chaque ν_{rf} s'est étalée sur plusieurs jours, dans l'espoir de moyenner sur d'éventuelles fluctuations très lentes. Ainsi, plus de 900 images ont été prises pour chaque valeur de ν_{rf} , le temps d'acquisition total des données étant de 15 jours environ. Les paramètres moyens (température, nombre d'atomes, ...) sont déterminés sur des images témoins (typiquement une dizaine pour chaque ν_{rf}), prises dans des conditions identiques, mais sans diffraction de Bragg.

6.3.1 Comparaison à des « spectres témoins »

En traçant les largeurs (à mi-hauteur) de chaque spectre en fonction de la température moyenne, on constate sans ambiguïté un élargissement des spectres avec l'augmentation de la température pour le cas $T \gg T_\phi$ (figure 6.10b, qui correspond à $6 < T/T_\phi < 26$). Il s'agit d'une première indication que nous avons effectivement atteint le régime de quasi-condensation, en particulier si on compare cette évolution à celle de la figure 6.10a, qui correspond à des spectres de Bragg dans un piège moins anisotrope ($\omega_x = 2\pi \times 7.0$ Hz et $\omega_\perp = 2\pi \times 430$ Hz), avec un nombre d'atomes nettement plus élevé ($N_0 \sim 1 - 4 \times 10^5$). Ces données « témoins », correspondent à $T/T_\phi \approx 0,5 - 4$, et présentent donc *a priori* des fluctuations de phase. Cependant, ces dernières sont masquées par le champ moyen libéré sur l'axe⁸, car p_ϕ/p_{exp} varie entre 7×10^{-2} et 0,4. Dans ce cas, on s'attend d'après la discussion de la première section à ce que la largeur en impulsion soit dominée par le champ moyen libéré dans l'axe axial, que l'on peut écrire $p_{\text{exp}} \propto N_0^{1/5}$. Ainsi, si la température augmente, le nombre d'atomes condensés diminue et p_{exp} également.

Cependant, si qualitativement ce comportement est bien observé, la largeur mesurée diminue plus vite que ce qu'on attendrait en ne comptant que le champ moyen à l'équilibre. Nous attribuons cette différence au fait que lors de la prise de ces données, le problème des oscillations n'était pas encore clairement identifié, bien qu'elles doivent être également présentes pour ces données. Comme discuté précédemment, elles contribuent à un élargissement du spectre, avec un coefficient qui dépend du temps de relaxation après le franchissement du seuil. Etant limité par la résolution du système à des valeurs comparables à celles attendues pour un condensat dominé par le champ moyen, nous nous sommes contentés de cet accord mitigé pour nous concentrer sur le régime de quasi-condensation.

⁸Pour les données prises dans l'autre piège, p_ϕ/p_{exp} varie entre 1.5 et 10.

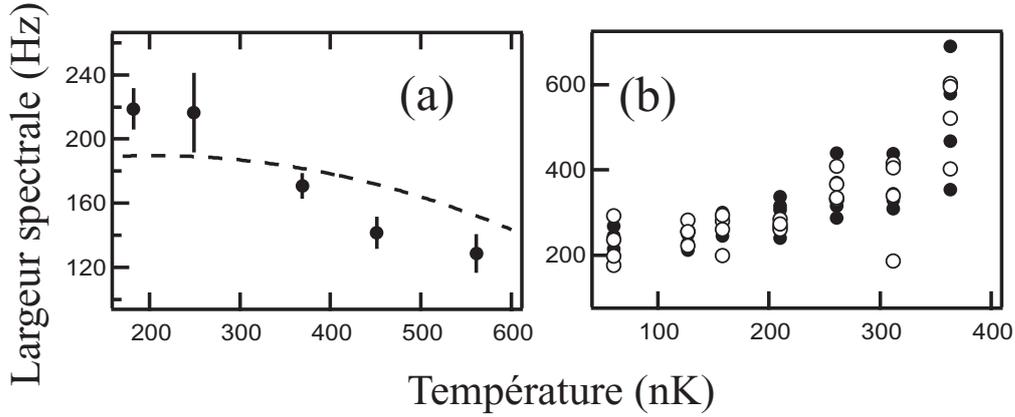


FIG. 6.10 – Spectres individuels, pour deux pièges différents. Dans le premier cas (a), les fluctuations de phase sont faibles, et leur signature spectrale est masquée par celle de l'énergie de champ moyen libérée sur l'axe, dont la contribution est tracée en trait pointillé. Dans le second cas (b), on est profondément dans le régime de quasi-condensation, si bien que la dépendance croissante de la largeur avec la température est observée. Les cercles creux correspondent aux spectres de diffraction dans l'ordre $+4\mathbf{k}_L$ et les cercles pleins dans l'ordre $-4\mathbf{k}_L$.

6.3.2 Oscillations résiduelles de la largeur spectrale

En examinant les données prises dans le piège le plus anisotrope de plus près (figure 6.10b), on s'aperçoit que chaque point n'est pas équivalent, puisqu'il est pris pour un temps d'attente différent. Sur la figure 6.11, nous avons tracé la largeur mesurée pour une valeur donnée de ν_{rf} en fonction de ce temps d'attente, qui présente un comportement oscillant. Nous avons initialement pensé à des oscillations dues à au mode de compression, imparfaitement amorties malgré les 6.5 ms d'attente. La fréquence de l'oscillation observée sur 6.11 ne confirme pas cette hypothèse, car elle coïncide avec (le double de) la fréquence de piégeage ω_x et non avec celle du mode de compression. De plus, les centres des spectres oscillent également à une fréquence compatible avec une oscillation du centre de masse. Normalement, un mouvement déterministe du centre de masse ne devrait pas avoir d'autre incidence qu'un décalage des fréquences centrales. Un mouvement totalement aléatoire élargirait le spectre, mais on ne serait alors pas capable de résoudre la phase des oscillations. La seule interprétation que nous pouvons proposer consiste à impliquer un mouvement de centre de masse dont la phase est (relativement) bien définie, mais dont l'amplitude fluctue. Nous ne disposons pas d'explications plus précises quant à l'origine de ce phénomène, et malheureusement, nous ne disposons pas d'autant de données à chaque température pour mettre clairement ces oscillations en évidence, infirmer ou confirmer l'hypothèse ci-dessus ou même extraire l'amplitude moyenne de l'oscillation. Pour cette raison, et également pour améliorer le rapport signal à bruit, nous avons suivi une méthode différente pour l'analyse des données, qui permet dans une certaine mesure de s'affranchir de ce signal parasite.

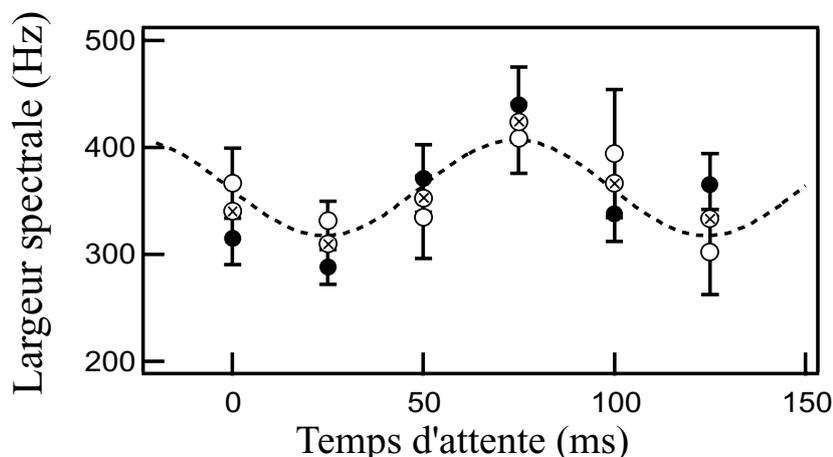


FIG. 6.11 – Oscillation de la largeur des spectres en fonction du temps d'attente dans le piège, correspondant à $T = 270$ nK sur la figure 6.10b. L'oscillation de la largeur spectrale a lieu au double de la fréquence d'oscillation du centre de masse, soit 2×5 Hz. Les cercles creux correspondent aux spectres de diffraction dans l'ordre $+4\mathbf{k}_L$, les cercles pleins dans l'ordre $-4\mathbf{k}_L$ et les cercles barrés à la moyenne des deux.

Procédure d'analyse finale : La procédure finale que nous avons retenue consiste en effet à englober toutes les données à une même température sur un même spectre renormalisé. Pour cela, nous faisons un premier ajustement par une Lorentzienne, pour trouver le centre, le fond et la hauteur. Les spectres individuels sont alors recentrés, corrigés du fond et renormalisés par leur aire totale. On obtient alors un spectre global (voir figure 6.12) avec un bien meilleur rapport signal-à-bruit. Nous avons « vérifié », en utilisant d'autres méthodes pour renormaliser et recentrer, que cette procédure n'affectait pas le résultat final de manière significative.

6.3.3 Forme de raie

Ce spectre fournit immédiatement une information importante : on voit sur la figure 6.12 que le spectre observé est bien ajusté par une Lorentzienne. De manière plus rigoureuse, ce point est confirmé par l'examen des résidus de l'ajustement en choisissant soit une Lorentzienne, soit une Gaussienne, qui sont également tracés sur cette figure : le premier est relativement plat, tandis que le second est nettement plus contrasté. Nous avons déjà discuté longuement au chapitre V que la forme Lorentzienne, qui implique des corrélations en phase décroissant exponentiellement avec la distance, est caractéristique des fluctuations de phase à une dimension. Cette forme de raie et l'élargissement avec la température discuté précédemment indiquent de manière nette l'existence de quasi-condensats dans notre piège.

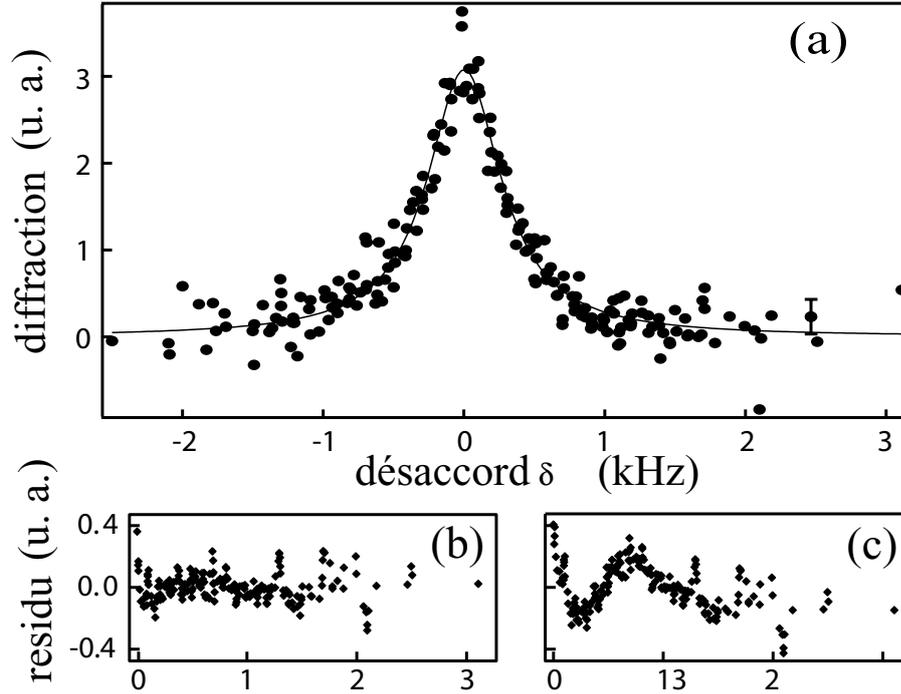


FIG. 6.12 – Spectre global après traitement de 900 images environ, composé de 5 spectres individuels par ordre diffracté (a), correspondant au point à 270 nK. Nous montrons également le résidu d'un ajustement de spectre par une Lorentzienne (b), en trait plein sur le graphe (a), et par une Gaussienne (c).

6.4 Confrontation entre l'expérience et la théorie des quasi-condensats

Pour comparer quantitativement nos observations à la théorie présentée au chapitre V, certaines précautions doivent être prises. En effet, à cause de la fréquence de piégeage transverse élevée ($\omega_{\perp} = 2\pi \times 760$ Hz) et du « faible » nombre d'atomes dans le quasi-condensat ($N_0 \sim 2$ à 7×10^4), le potentiel chimique est en fait deux à trois fois plus grand que la fréquence transverse, si bien que le terme de pression quantique radial ne peut pas être entièrement négligé. De plus, l'approximation semi-classique n'est pas toujours très justifiée, car on a $k_B T \sim 3\hbar\omega_{\perp}$ pour les températures les plus basses. Enfin, le champ moyen exercé par le nuage thermique intervient comme une correction supplémentaire à haute température. Nous avons observé expérimentalement qu'un ajustement par une parabole à deux dimensions et une distribution de Bose idéale g_2 reproduisait tout de même les images de manière satisfaisante, mais que les paramètres de cette parabole (R, L) montrent des déviations par rapport aux lois attendues dans le régime de Thomas-Fermi. Nous revenons sur ce point un peu plus loin, en examinant la longueur du quasi-condensat.

6.4.1 Largeur spectrale

Pour le moment, nous nous contentons de noter que l'approximation de densité locale permet de prendre en compte ces effets, qui ne modifient que le profil de densité n_0 . En effet, dans cette approximation, la fonction de corrélation et la distribution en impulsion, dépendent seulement de L_ϕ et de la densité 1D $n_1(\tilde{X})$, avec une dépendance très molle sur la forme fonctionnelle exacte de n_1 . En pratique, nous utilisons toujours l'ajustement à deux dimensions par une parabole et une fonction de Bose (appendice B). Comme pour un condensat « normal », le nombre d'atomes dans le quasi-condensat N_0 est obtenu par intégration sur l'image, et sa longueur L est fournie par le programme d'ajustement. La température est toujours déduite d'un ajustement sur les ailes de la distribution thermique, en utilisant la direction radiale. On en déduit $n_1(0)$ par la formule $n_1(0) = 15N_0/16L^9$.

Ces informations permettent de calculer L_ϕ par $L_\phi = \hbar^2 n_1(0)/Mk_B T$. L'échelle caractéristique pour la largeur spectrale du quasi-condensat est donnée par la largeur Doppler qui correspond à $p_\phi = \hbar/L_\phi$, c'est-à-dire

$$\Delta\nu_\phi = \frac{1}{2\pi} \frac{2\hbar k_L}{ML_\phi} = \frac{1}{\pi} \frac{v_R}{L_\phi}. \quad (6.16)$$

En principe, la largeur Doppler due à l'impulsion libérée selon l'axe long pendant l'expansion, p_{exp} , devrait être prise en compte également. Cependant, comme nous l'avons déjà indiqué, pour nos paramètres, nous estimons qu'elle contribue à la largeur pour 50 Hz au plus, soit bien moins que la largeur mesurée et la résolution de l'expérience. La largeur Doppler associée à \hbar/L est *a fortiori* négligeable. Nous n'avons donc pas inclus ces contributions dans notre analyse.

6.4.2 Extraction de la largeur Doppler

Par contre, nous devons tenir compte des causes « techniques » d'élargissement discutées plus haut, en particulier la largeur finie du pulse, les vibrations résiduelles des miroirs, et l'oscillation du centre de masse observée. En l'absence d'informations détaillées sur ces causes d'élargissement, nous avons supposé qu'elles étaient indépendantes de la température et du nombre d'atomes dans le quasi-condensat, et qu'elles n'affectaient que la fréquence relative des atomes et des faisceaux. Dans ces conditions, une modélisation raisonnable consiste à considérer une fonction d'appareil f_{res} gaussienne, de largeur à mi-hauteur w_{res} constante. Le spectre Doppler attendu pour le quasi-condensat étant Lorentzien, de largeur $\alpha\Delta\nu_\phi$, le spectre mesuré est donc décrit dans notre modèle par la convolution d'une Lorentzienne et d'une Gaussienne, une fonction connue dans la littérature sous le nom de profil de Voigt et bien connue en spectroscopie pour décrire l'élargissement Doppler d'une raie atomique.

Dans notre cas, la Lorentzienne prédomine en général largement sur la Gaussienne. Parce que le rapport signal à bruit n'est pas assez élevé, on ne peut pas extraire de manière fiable

⁹Nous avons vérifié que la valeur de $n_1(0)$ dépendait peu de la méthode utilisée, mais différons la discussion de ce point à la section 6.5.1.

les contributions relatives de la Gaussienne et de la Lorentzienne au profil total par des ajustements sur les spectres individuels (en laissant les deux paramètres (α, w_{res}) libres). Nous avons donc extrait la demi-largeur *globale* $\Delta\nu_M$ de chaque spectre (un ajustement Lorentzien ou par un profil de Voigt donne les mêmes résultats), que nous avons reporté sur la figure 6.13. Un ajustement de $\Delta\nu_M$ sur la gamme entière de température est ensuite effectué d'après la loi

$$\Delta\nu_M = \frac{\alpha\Delta\nu_\phi}{2} + \sqrt{w_{\text{res}}^2 + \left(\frac{\alpha\Delta\nu_\phi}{2}\right)^2}, \quad (6.17)$$

qui donne la demi-largeur d'un profil de Voigt, en fonction des demi-largeurs w_{res} de la Gaussienne et $\alpha\Delta\nu_\phi$ de la Lorentzienne. Nous obtenons ainsi le meilleur ajustement pour $w_{\text{res}} = 176(16)$ Hz et $\alpha = 0.65(5)(5)$.

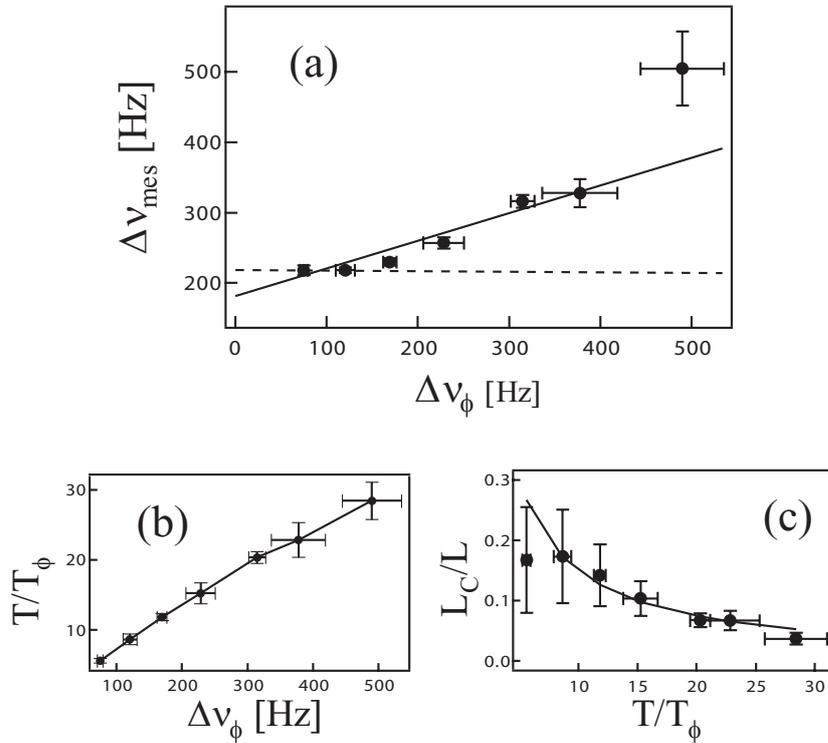


FIG. 6.13 – (a) Largeur spectrale après moyenne, en fonction du paramètre $\Delta\nu_\phi \propto T/T_\phi$. La courbe continue indique le résultat d'un ajustement par un profil de Voigt, la composante Lorentzienne correspondant aux fluctuations de phase. La courbe en pointillés indique la largeur spectrale qu'on attendrait si les fluctuations de phase étaient absentes, en tenant compte de la résolution finie de l'expérience. Nous indiquons également les variations de T/T_ϕ sur la figure (b), et la longueur de cohérence mesurée, définie comme $L_C = \hbar/\Delta p$ (cercles), sur la figure (c). Le calcul du chapitre V, qui prédit $L_C = \hbar/0.67L_\phi$, est tracé sur le même graphe pour la comparaison. La longueur physique du condensat, qui varie entre 140 et 120 μm , est nettement supérieure à L_C .

6.4.3 Longueur de cohérence

La pente obtenue se compare favorablement aux calculs du chapitre V. Elle serait égale à $1/2$ pour un gaz uniforme, et la valeur que nous mesurons reflète l'inhomogénéité du profil de densité. Nous avons obtenu au chapitre V $\alpha = 0.67$ dans le régime de Thomas-Fermi 3D, et $\alpha = 0.63$ dans le régime de Thomas-Fermi 1D. La valeur intermédiaire que nous mesurons pourrait refléter le fait que nos expériences ont été réalisées dans un régime intermédiaire, bien que l'incertitude sur α ne permette pas de l'affirmer sereinement. Notons que l'approximation de densité locale se révèle cruciale pour obtenir cet accord. Si on utilise en effet la relation $T_\phi = 15N_0(\hbar\omega_x)^2/\mu k_B$, établie dans le régime de Thomas-Fermi à 3D, on trouve une pente α plus petite (0,4), et en moins bon accord avec la théorie. Utiliser l'approximation de densité locale et la formule $T_\phi = \hbar^2 n_1(0)/MLk_B$ permet de s'affranchir des effets qui modifient le profil de densité et le potentiel chimique, comme la pression quantique et l'interaction avec le nuage thermique. Ainsi, la distribution en impulsion prend une forme pratiquement universelle, qui dépend très peu du confinement transverse.

Ce très bon accord entre théorie et expérience valide expérimentalement les prédictions de [41] : il montre en particulier que la contribution des fluctuations de densité à la fonction de corrélation est faible. De plus, il confirme qu'il est correct de ne considérer que la contribution des excitations de la branche axiale à la fonction de corrélation du quasi-condensat. Comme on le voit sur 6.13, ces résultats indiquent une longueur de cohérence (que nous définissons ici par rapport à la largeur en impulsion mesurée, $L_C = \hbar/\Delta p$) réduite par un facteur T_ϕ/T , compris entre $1/6$ et $1/26$, par rapport à l'extension physique du quasi-condensat. L'expérience d'interférométrie menée à Hannovre [210] atteint des conclusions similaires, en travaillant directement sur la fonction de corrélation spatiale .

6.5 Absence de fluctuations de densité

6.5.1 Profil de densité statique

Nous revenons maintenant au problème de la détermination du profil de densité, que nous avons évité jusqu'ici. Nous avons indiqué dans la section précédente que pour les expériences décrites dans ce chapitre, l'approximation de Thomas-Fermi n'était pas tout à fait valable, dans le sens où le potentiel chimique n'est pas très grand devant la fréquence d'oscillation radiale. Sur la figure 6.14, on a tracé la longueur du quasi-condensat, obtenue grâce à la procédure d'ajustement habituelle, et la longueur calculée par les relations valables dans le régime de Thomas-Fermi 3D, pour le nombre d'atomes mesuré (en pointillés courts). On voit clairement que la longueur observée est surestimée, et on peut remonter à l'origine du problème en envisageant l'effet combiné de la pression quantique et du nuage thermique.

Pour cela, des simulations numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii ont été menées par S. Richard [47], en incluant l'effet du nuage thermique dans l'approximation de Hartree-Fock et sans négliger le terme de pression quantique. On obtient ainsi le profil de densité du

quasi-condensat à l'équilibre par

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\Delta\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + Un_0 + 2Un_{\text{th}} = \mu, \quad (6.18)$$

avec la densité thermique¹⁰ n_{th} , déterminée comme au chapitre III dans l'approximation semi-classique,

$$n_{\text{th}}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_{\text{T}}^3} g_{3/2} \left\{ \exp \left(\beta\mu - \beta V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) \right) \right\},$$

et $V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + 2Un_{\text{th}}(\mathbf{r}) + 2Un_0(\mathbf{r})$. Nous avons déjà vu au chapitre III que l'interaction avec le nuage thermique contribuait à réduire les dimensions du condensat. De plus, la longueur du condensat est également réduite par l'inclusion de la pression quantique au modèle. En effet, elle tend à délocaliser la fonction d'onde dans les directions transverses, et donc à réduire la densité et l'énergie d'interaction. Comme dans la direction axiale, on reste dans le régime de Thomas-Fermi à une très bonne approximation, la longueur est également réduite. Pour comparer à nos données, nous avons utilisé le nombre d'atomes *total* N et la température T mesurés. Le calcul numérique fournit alors le profil de densité 3D du (quasi-)condensat, qui permet par exemple de déduire la fraction condensée.

Sur la figure 6.14c, nous avons comparé la fraction condensée fournie par le calcul numérique (ligne continue) à celle mesurée à partir de l'ajustement à deux dimensions sur les images d'absorption (cercles pleins). On constate que la mesure fournit une fraction condensée plus faible, d'environ 20 %. Ainsi, le nombre d'atomes N_0 dans la simulation est plus élevé que celui que l'on mesure, et la longueur Thomas-Fermi correspondante (ligne en pointillés longs sur la figure 6.14a) est encore plus grande que celle que nous calculons d'après l'ajustement aux données.

Nous sommes parvenus à la conclusion que ces écarts significatifs étaient dûs principalement à l'ajustement des images expérimentales par un profil parabolique. En effet, en regardant le profil transverse dans le piège fourni par le calcul, on peut constater qu'il est mal reproduit par un ajustement parabolique (voir la figure 6.15a). L'effet des termes de pression quantique est visible : on constate des ailes plus marquées par rapport à un profil de type Thomas-Fermi. De plus, l'énergie cinétique et l'énergie d'interaction sont comparables pour les paramètres typiques qui caractérisent les expériences. Ainsi, bien que la simulation ne tienne pas compte du temps de vol, on peut conjecturer que les valeurs pour la densité-pic à trois dimensions $n_{0\text{m}}$ et l'extension radiale R , déduites expérimentalement d'un ajustement parabolique, sont suspectes à 20 % près. Ceci s'ajoute à l'incertitude sur le profil du nuage thermique que nous avons envisagée au chapitre III. Nous expliquons ainsi l'écart constaté sur la fraction condensée¹¹. Malheureusement, nous n'avons pas trouvé de méthode plus fiable pour tenir compte à la fois de la pression quantique, du champ moyen du nuage thermique et du temps de vol dans l'analyse bi-dimensionnelle des données.

¹⁰Rappelons que nous entendons par « nuage thermique » les états excités de haute énergie, plus grande que $\hbar\omega_{\perp}$, et qu'ils contribuent de manière négligeable aux fluctuations de la phase. Ils ne sont donc pas considérés comme appartenant au quasi-condensat, qui désigne la composante dégénérée.

¹¹On obtient en effet le nombre d'atomes N_0 par intégration sur le profil parabolique retourné par le programme d'ajustement, soit $N_0 \propto n_{0\text{m}}/R^2L$. Une erreur sur $n_{0\text{m}}$ ou R se reporte ainsi sur N_0 .

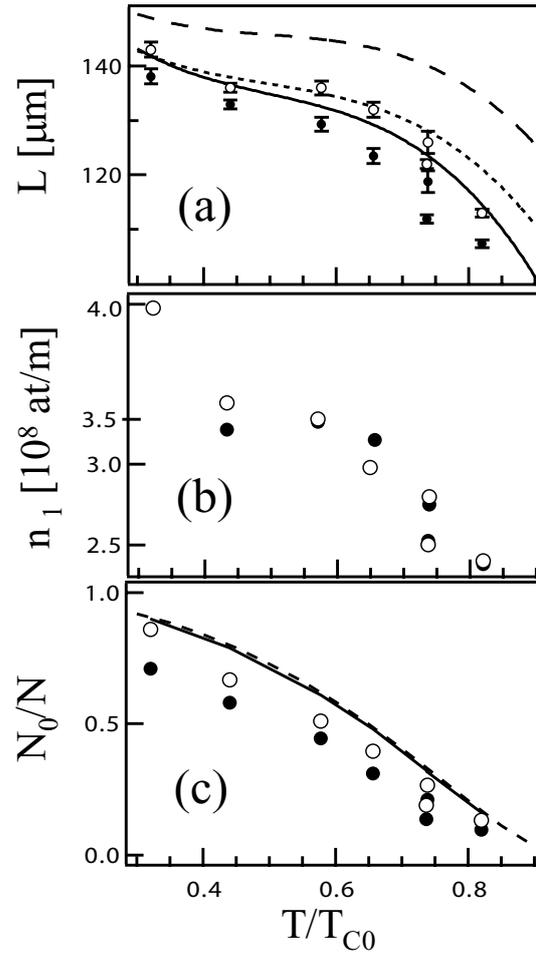


FIG. 6.14 – (a) Longueur du quasi-condensat, obtenue par un ajustement des données à 2D (cercles pleins), ou à 1D après intégration sur les coordonnées transverses (cercles creux). Nous comparons ces deux procédures à la longueur déterminée par un ajustement 1D de la simulation numérique (trait plein), et à la longueur d'un condensat Thomas-Fermi, soit pour le nombre d'atomes mesuré (pointillés courts), soit pour le nombre d'atomes calculé dans la simulation (pointillés longs). (b) Densité axiale (intégrée sur les coordonnées transverses) fournie par l'ajustement à 2D (cercles pleins) et à 1D (cercles creux). (c) Fraction d'atomes dans le quasi-condensat. Les cercles pleins (respectivement creux) correspondent à la valeur déduite de l'ajustement 2D (1D) des images, la ligne en pointillés à la théorie de Hartree-Fock « simple », testée dans le cas 3D au chapitre III, et la ligne continue à la simulation.

Ces constatations n'invalident pas notre mesure de la distribution en impulsion. En effet, si le profil dans les directions transverses est mal reproduit, par contre le profil axial reste proche de $(1 - \tilde{x}^2)^2$, approprié pour une distribution 3D parabolique (figure 6.15b). Comme l'expansion axiale est très lente ($b_x \lesssim 1.01$), le profil axial intégré après temps de vol est quasi-identique au profil dans le piège. Ceci suggère d'effectuer un ajustement directement

sur le profil axial par¹²

$$n_1(x) = n_1(\mathbf{0}) \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]^2 + n_{\text{th}}(\mathbf{0}) g_{5/2} \left[\exp \left(-\frac{x}{2L_{\text{TH}}^2} \right) \right], \quad (6.19)$$

au lieu de procéder par un ajustement à deux dimensions. En procédant ainsi, on constate que les longueurs et fractions condensées mesurées¹³ se rapprochent des prédictions théoriques, bien qu'un écart de 5-10 % demeure sur cette dernière quantité. De plus, nous vérifions ainsi que les valeurs mesurées de la densité 1D au centre $n_1(0)$, et de l'extension axiale L reproduisent assez bien (mieux que 10 %) celle que fournit le calcul numérique, et dépendent peu de la méthode utilisée (figure 6.14b). Ce sont en fait les deux paramètres importants pour le calcul de T/T_ϕ et $\Delta\nu_\phi$, les deux quantités centrales dans notre analyse des spectres. En refaisant l'ajustement de la largeur en utilisant les paramètres retournés par l'ajustement 1d, on trouve ainsi $\alpha = 0.64$ et $\Delta\nu_{\text{res}} = 180$ Hz, soit presque exactement les valeurs que celles nous avons déterminées au paragraphe précédent.

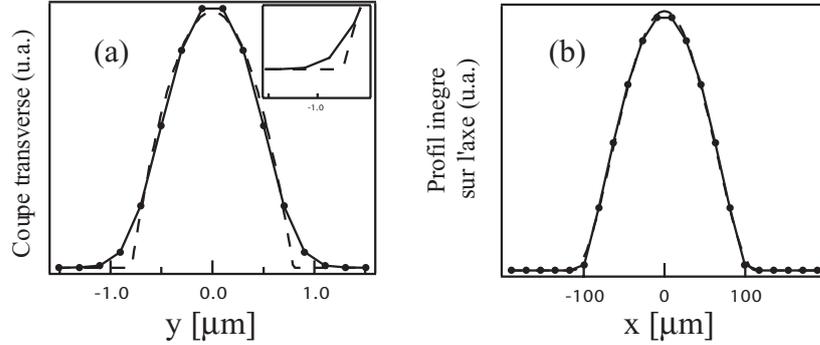


FIG. 6.15 – (a) Profil transverse (en coupe), et (b) profil axial (intégré), du quasi-condensat dans le piège. Les cercles indiquent le résultat du calcul numérique pour 4×10^4 atomes et nos paramètres de piégeage. Pour comparer à la méthode d'analyse, nous avons effectué un ajustement sur la densité en colonne calculée numériquement par un profil 2D de type Thomas-Fermi (pointillés).

6.5.2 Estimation des fluctuations de densité

Cette étude sur la longueur montre également que les fluctuations de densité restent modestes. En effet, si celles-ci étaient présentes dans le quasi-condensat, elles augmenteraient l'énergie d'interaction d'un facteur compris entre 1 et 2, suivant leur importance relative (2 correspondant à une distribution thermique « ordinaire »). Pour caractériser de manière globale la cohérence au second-ordre, nous avons introduit au premier chapitre la quantité

¹²Notons cependant que, dans la mesure où $k_B T \approx 3 - 12 \hbar \omega_\perp$, la forme semi-classique pour la densité du nuage thermique utilisée dans (6.19) peut également induire une erreur aux plus basses températures.

¹³Pour extraire une longueur des profils générés numériquement, nous avons utilisé un ajustement sur la densité intégrée selon les axes transverses, de la forme $n_{1m} (1 - (x/L)^2)^2$, matérialisé par la ligne continue sur la figure 6.14a.

$\mathcal{C}^{(2)}$. Pour étudier la partie dégénérée, nous utilisons une définition légèrement différente, et relierons $\mathcal{C}^{(2)}$ à l'énergie d'interaction du quasi-condensat par

$$E_{\text{int}} = \frac{U}{2} \int d^3\mathbf{r} (n_0^2(\mathbf{r}) + \langle \delta n^2(\mathbf{r}) \rangle) = \frac{U\mathcal{C}^{(2)}}{2} \int d^3\mathbf{r} n_0(\mathbf{r})^2. \quad (6.20)$$

Les calculs de la section précédente ont été menés sous l'hypothèse que $\mathcal{C}^{(2)} \approx 1$. L'accord relatif des données de la figure 6.14 avec ce calcul montre que cette hypothèse est justifiée. En principe, on pourrait déduire de la longueur mesurée ou de l'expansion radiale une valeur plus précise de $\mathcal{C}^{(2)}$ en fonction de T . En pratique, les incertitudes systématiques limitent la précision sur la valeur de $\mathcal{C}^{(2)}$ à 10-20 % environ, si bien que la valeur précise n'aurait pas beaucoup de sens. Nous pouvons cependant affirmer que nos observations sont compatibles, avec une précision de à 10-20 %, avec l'absence de fluctuations de densité ($\mathcal{C}^{(2)} \approx 1$). Autrement dit, malgré une longueur de cohérence très réduite, le quasi-condensat se comporte du point de vue des corrélations locales (*i.e.* sur une distance de l'ordre de $\zeta \sim 200$ nm, $\ll L_\phi$) comme un condensat habituel, et diffère ainsi considérablement d'un ensemble thermique « normal ».

Nous pouvons néanmoins estimer l'ordre de grandeur des fluctuations de densité en nous basant sur l'approximation de densité locale. Contrairement aux fluctuations de phase, le confinement transverse intervient directement, et nous nous plaçons dans le régime de Thomas-Fermi 3D pour simplifier. Nous nous occupons uniquement de la contribution de la branche axiale, $\hbar c_{1D}k < \omega_\perp$ ¹⁴. En supposant que la forme de basse énergie ($\mathcal{A}_k \approx 1/\pi R^2$, $\omega_k^B = c_{1D}k$) reste valable dans toute la branche, on a alors

$$\langle \delta \hat{n}^2 \rangle \approx \frac{n_{0m}^2}{2\pi\zeta_\perp\zeta_x(1 - \tilde{X}^2)^{3/2}} \frac{T}{T_\phi}, \quad (6.21)$$

avec $\zeta_i = \hbar\omega_i/\mu$. En intégrant sur le volume de Thomas-Fermi, on obtient

$$\mathcal{C}^{(2)} \lesssim 1 + \frac{105}{32} \frac{T}{T_\phi} \frac{1}{\zeta_\perp\zeta_x}. \quad (6.22)$$

Cette expression donne une borne supérieure sur les fluctuations de densité. En effet, le mode radial que nous avons négligé contribuerait à diminuer $\mathcal{C}^{(2)}$ à cause de l'intégration. Pour les données qui correspondent aux spectres de Bragg, cette estimation prédit une valeur de $\mathcal{C}^{(2)}$ comprise entre 1.01 et 1.1 pour nos paramètres expérimentaux. Sur la longueur, cela se traduirait par un écart de 5 % au plus, soit bien moins que les erreurs systématiques. Nous concluons donc que les fluctuations de densité sont bel et bien faibles dans le régime de quasi-condensation, mais que notre sensibilité expérimentale n'est pas suffisante pour les résoudre.

6.6 Conclusion

Le dispositif de spectroscopie de Bragg, que nous avons mis au point après bien des efforts, est suffisamment précis pour permettre la mesure des fluctuations de phase dans un condensat

¹⁴Les excitations d'énergie plus élevée donnent en fait une contribution plus importante (si $k_B T > \hbar\omega_\perp$), mais identique à celles d'un condensat « ordinaire ». Dans notre démarche, elles sont considérées comme appartenant au nuage thermique et non à la partie dégénérée qui nous préoccupe.

anisotrope. En premier lieu, il nous a permis de montrer la forme de raie Lorentzienne qui caractérise les quasi-condensats. Dans un second temps, nous avons pu mesurer la dépendance de la largeur en impulsion (ou, de manière équivalente, de la longueur de cohérence) avec la température. Nous comparons avec succès la dépendance de la largeur en impulsion avec celle que nous avons calculée au chapitre 5, confirmant à une précision de 10 % environ (limitée par les incertitudes de calibration) la validité du cadre théorique mis en place par D. Petrov, J. Walraven et G. Shlyapnikov à une bonne précision. Nous terminons le chapitre en examinant la question des fluctuations de densité. Ces dernières pourraient être détectées par une mesure de l'énergie de champ moyen, qui différerait alors de celle d'un condensat dans les mêmes conditions. Nous montrons que ce n'est pas le cas aux incertitudes de calibration près, confirmant ainsi expérimentalement que les fluctuations de densité sont nettement réduites (un résultat également observé à Hannover [190]).

De plus, sur un plan plus technique, nous soulignons que la précision de la technique de Bragg est remarquable. Les résonances de 200 Hz que nous sommes capable d'observer correspondent à des vitesses de $78 \mu\text{m/s}$, soit une température équivalente de 25 pK. Avec le même dispositif, il est de surcroît possible d'implémenter un technique complémentaire de la spectroscopie de Bragg, que nous allons discuter dans la conclusion générale de cette thèse.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire trois études concernant un gaz de bosons dégénérés dans un piège anisotrope.

Le premier chapitre introduit le domaine de recherches du point de vue théorique. Une revue rapide est faite, dans laquelle nous avons essayé d'introduire les notions importantes pour la compréhension de ces travaux de thèse.

Le second chapitre survole les techniques expérimentales de production du condensat. Le dispositif y est décrit brièvement, ainsi que la technique d'imagerie par absorption qui fournit toutes les informations sur le nuage ultra-froid.

Au chapitre III, nous avons étudié l'effet des interactions sur l'expansion de la fraction non condensée. Nous montrons que l'expansion du nuage thermique au dessus de la température critique T_C est affectée par les collisions, qui déforment la distribution en vitesses. La procédure de thermométrie doit être modifiée en conséquence. Nous avons également étudié la température critique en fonction du nombre d'atomes à la transition, la fraction condensée et l'énergie d'expansion radiale. Des différences systématiques, vers une température critique et une fraction condensée plus faible, sont observées. Nous comparons avec succès nos observations à une théorie de champ moyen, ce qui confirme en particulier l'effet réduit des fluctuations critiques dans le gaz piégé par rapport au gaz homogène.

Le chapitre IV de ce mémoire a traité du problème du laser à atomes, ou comment extraire de manière contrôlée une onde de matière cohérente du piège. L'approche théorique qui y est développée nous a permis de conclure que, contrairement à la plupart des études publiées dans la littérature, il était essentiel de tenir compte de la gravité pour rendre de compte du processus d'extraction. Dans un deuxième temps, nous décrivons nos mesures de la divergence transverse, et concluons qu'elle est causée dans notre expérience par une combinaison du potentiel résiduel dû à l'effet Zeeman quadratique et des interactions entre les atomes du laser et ceux qui forment encore le condensat piégé.

Dans le chapitre V, nous discutons de nos travaux sur les fluctuations de phase dans les pièges très anisotropes. Une description théorique des fluctuations de phase à une dimension est introduite dans le cadre de la théorie de Bogoliubov. Nous l'appliquons au cas d'un quasi-condensat 3D dans un piège très anisotrope, dans le cadre d'une approximation de densité locale qui permet de calculer analytiquement la fonction de corrélation et sa transformée de Fourier, la distribution en impulsion. Nous en tirons deux conclusions principales. D'une part, en présence de fluctuations de phase importantes, la distribution en impulsion devient

Lorentzienne, alors qu'elle est Gaussienne pour un vrai condensat. D'autre part, la largeur en impulsion est donnée par $\Delta p_\phi \approx 0.67\hbar/L_\phi$, avec $L_\phi = (\hbar^2 n_1 / M k_B T)L$. Cette définition fournit une paramétrisation insensible dans une large mesure à la forme précise du profil de densité.

La spectroscopie en impulsion du quasi-condensat que nous avons implémentée pour mesurer l'impact des fluctuations de phase est décrite au chapitre VI. Nos données mettent expérimentalement en évidence la forme de raie Lorentzienne. La largeur en impulsion mesurée est en très bon accord avec la théorie présentée au chapitre V, confirmant à une précision de 10 % la validité du cadre théorique établi dans [41] dans une large gamme de températures. De plus, la suppression des fluctuations de densité est également observée.

Une limitation des expériences de spectroscopie de Bragg est qu'il est difficile de mesurer des longueurs de cohérence élevées (plus que le tiers de la longueur du condensat dans notre cas), à cause de la résolution finie de cette technique, dûe notamment aux vibrations mécaniques du système. Ceci interdit l'observation de la transition entre un quasi-condensat et un vrai condensat (pour $T \sim T_\phi$) sur la distribution en impulsion. Nous avons développé pour cette raison une approche complémentaire, qui utilise un interféromètre $\pi/2$ - $\pi/2$, et qui est au contraire adaptée pour de grandes longueurs de cohérence. Ces expériences sont en cours à l'heure où ces lignes sont rédigées.

Développements futurs : Dans la lignée des études présentées ici, l'étape suivante consiste à s'intéresser à la cinétique de formation de la cohérence en phase. La dynamique de formation de l'ensemble cohérent à partir du nuage thermique est encore mal comprise, et deux scénarios ont été proposés. Dans le premier [229], on passe le seuil de condensation avec une rampe d'évaporation lente, et le condensat croît adiabatiquement à partir du réservoir thermique. Le modèle considère qu'il est complètement cohérent dès le début de sa croissance. Dans le second scénario [230], au contraire, on applique une rampe d'évaporation brutale. On forme alors en un temps très rapide un quasi-condensat *dynamique*, qui relaxe lentement vers l'équilibre. Ces deux modèles n'ont à ce jour pas été validés expérimentalement de manière totalement convaincante [95, 231, 232]. La cinétique du processus reste donc une question ouverte, et nous disposons des outils pour l'aborder expérimentalement, soit par spectroscopie de Bragg, soit par la technique d'interférométrie.

A plus long terme, d'autres voies intéressantes pourraient être explorées dans une géométrie très allongée. Nous citerons deux exemples, d'abord celui de deux quasi-condensats dans deux puits de potentiels séparés, mais couplés par effet tunnel [233]. Les fluctuations de phase dans chaque quasi-condensat individuel peuvent détruire ou non la phase relative entre les puits, suivant l'importance du couplage tunnel. Un autre exemple seraient d'étudier l'effet du désordre sur la cohérence et la superfluidité à une dimension. Ce sujet a également une importance pratique, car dans les réalisations expérimentales de condensat sur des puces, on observe systématiquement une fragmentation du condensat, liée à la rugosité de surface du potentiel de piégeage [234]. En vue de l'implémentation d'interféromètres intégrés, il est donc important de caractériser l'effet des fluctuations du potentiel de piégeage sur les propriétés de cohérence. Nous terminons donc sur une note optimiste, en constatant que l'étude des fluctuations de phase à une dimension est loin d'être terminée, et que des développements

intéressants sont à attendre dans les années à venir.

Approximation de Popov à température finie

A.1 Approximation de Hartree-Fock pour les états très excités

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la théorie de Bogoliubov sous l'hypothèse que la plupart des atomes étaient contenus dans la partie dégénérée. Cependant, à une température relativement proche de la température de transition, une fraction thermique importante, dont le recouvrement avec le condensat est faible en général, est également présente. Ainsi, dans toute la région où le nuage thermique prédomine, les fluctuations de densité sont importantes et le traitement du premier chapitre est inapplicable¹. La théorie que nous allons brièvement esquisser est appelée « approximation de Popov » dans la littérature, en référant aux travaux de cet auteur sur le gaz de Bose homogène [82]. Elle se base sur la séparation entre les composantes « rapides » (haute énergie) et « lentes » (basse énergie) du champ de matière. Cette hiérarchie permet d'éliminer adiabatiquement les degrés de liberté rapides pour obtenir une équation effective pour les degrés de liberté plus lents [82, 177]. L'approximation de Popov correspond ainsi à traiter les degrés de liberté rapides à l'approximation de Hartree-Fock, et les degrés de liberté lents à l'approximation de Bogoliubov. De plus, nous allons utiliser dans cet appendice le point de vue densité/phase du chapitre I. Ainsi, la démarche sera également applicable au cas d'un quasi-condensat, et permettra de justifier certaines affirmations faites aux chapitres V et VI.

Pour tenir compte d'une population importante dans les états excités, nous allons repartir de l'équation donnant l'opérateur champ [voir (1.32) en utilisant V_δ à la place de V_C],

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \hat{\Psi} + V_{\text{ext}} \hat{\Psi} + U \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}).$$

En suivant la logique du chapitre I, nous décomposons l'opérateur champ de la manière suivante :

$$\hat{\Psi} = e^{i\hat{\phi} - i\mu t/\hbar} \left(\sqrt{\hat{n}_0} + \delta \hat{\Psi} \right). \quad (\text{A.1})$$

¹De la même manière, dans l'approximation de Bogoliubov « habituelle », on suppose que la densité du condensat est le terme dominant dans l'énergie d'interaction. Ce n'est bien entendu pas le cas dans la région périphérique où le nuage thermique domine.

La distinction entre le terme qui décrit la partie « incohérente », $\delta\hat{\Psi}$, et ceux qui décrivent la partie « dégénérée », $\sqrt{\hat{n}_0}, \hat{\phi}$, se fait en introduisant une coupure en énergie $\hbar\omega_0$. Le terme $\delta\hat{\Psi}$ correspond ainsi à la partie de « haute énergie » du champ bosonique, $\omega > \omega_0$, alors que $\sqrt{\hat{n}_0}$ et $\hat{\phi}$ ne comprennent que les modes de « basse énergie », $\omega < \omega_0$. Il est important de souligner que les deux composantes de l'opérateur champ que nous avons introduites agissent ainsi sur des domaines disjoints de l'espace des états. En négligeant les interactions entre quasi-particules, on obtient alors des équations découplées pour les modes de haute et basse énergie².

Le terme $\delta\hat{\Psi}$ ne peut en général être traité exactement, et nous utilisons une *approximation de champ moyen* pour traiter les termes d'interaction (dit autrement, nous *supposons* que la statistique de $\delta\hat{\Psi}$ est pratiquement gaussienne). Cela revient à opérer les substitutions suivantes dans le terme d'interaction qui apparaît dans l'équation du mouvement pour $\hat{\Psi}$ [45] :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} &= e^{i\hat{\phi}} (\hat{n}_0 + 2n_{\text{th}}) \sqrt{\hat{n}_0} \\ &\quad + e^{i\hat{\phi}} (2\hat{n}_0 + 2n_{\text{th}}) \delta\hat{\Psi} + e^{i\hat{\phi}} \hat{n}_0 \delta\hat{\Psi}^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Nous avons introduit la densité thermique $n_{\text{th}}(\mathbf{r}) = \langle \delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle$, et négligé les « moyennes anormales » du type $m_{\text{th}} = \langle \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle$ devant n_{th} .

Grâce à cette approximation de champ moyen, la présence du nuage thermique ne se manifeste que par le terme $2Un_{\text{th}}$, qui acquiert le même statut que le potentiel extérieur V_{ext} . Commençons par supposer $\delta\hat{n} \ll n_0$ pour la partie dégénérée. À l'ordre 0 en $\delta\hat{n}/n_0$, on obtient le profil de densité à l'équilibre par l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\Delta\sqrt{\hat{n}_0}}{\sqrt{\hat{n}_0}} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + Un_0 + 2Un_{\text{th}} = \mu, \quad (\text{A.3})$$

qui généralise l'équation de Gross-Pitaevskii à température finie. Comme la fraction condensée peut être faible, on doit conserver le terme $\delta\hat{\Psi}$ au même ordre. Le développement de Bogoliubov habituel,

$$\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\omega_\nu > \omega_0} u_\nu(\mathbf{r}) \hat{b}_\nu - v_\nu^*(\mathbf{r}) \hat{b}_\nu^\dagger, \quad (\text{A.4})$$

avec la restriction aux modes de haute énergie indiquée explicitement, résout l'équation du mouvement de $\delta\hat{\Psi}$, pourvu que les amplitudes u_ν, v_ν des excitations élémentaires obéissent aux équations

$$\begin{aligned} \hbar\omega_\nu u_\nu &= \left[-\frac{\hbar^2\Delta}{2M} + V_{\text{ext}} + 2Un_0 + 2Un_{\text{th}} - \mu \right] u_\nu - Un_0 v_\nu, \\ -\hbar\omega_\nu v_\nu &= \left[-\frac{\hbar^2\Delta}{2M} + V_{\text{ext}} + 2Un_0 + 2Un_{\text{th}} - \mu \right] v_\nu - Un_0 u_\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Au premier ordre en $\delta\hat{n}/n_0$, les termes qui décrivent les fluctuations de densité et de phase admettent exactement le même traitement qu'à très basse température, développé en détails

²Les couplages entre excitations de basse énergie et excitations de haute énergie apparaissent à un niveau de raffinement plus élevé [85], qui permet par exemple de traiter l'amortissement des modes collectifs. À l'équilibre, le principe du bilan détaillé indique que les processus de collisions qui enlèvent des particules dans un mode donné sont en moyenne compensés exactement par ceux qui le peuplent [61].

au chapitre I. On trouve ainsi que les amplitudes u_ν, v_ν pour $\omega_\nu < \omega_0$ obéissent aux mêmes équations de Bogoliubov-de Gennes (A.5) que les modes de haute énergie. Enfin, il est possible de calculer la correction du profil de densité statique, du potentiel chimique, ... au deuxième ordre en $\delta\hat{n}/n_0$. Nous ne présenterons pas les calculs ici car ils sont forts longs (voir [85]), et nous contentons de souligner à titre indicatif qu'à trois dimensions, on obtient des corrections identiques à celle que l'on obtient dans la théorie de Bogoliubov habituelle. Dans notre description du nuage très allongé, nous n'en tiendrons pas compte car les calculs à l'ordre un suffisent pour isoler les termes dominants.

Les équations (A.5) ne diffèrent qu'en apparence de celles qui déterminent les amplitudes de Bogoliubov à très basse température, par le terme de potentiel $V_{\text{ext}} + 2Un_0 + 2Un_{\text{th}}$. En réalité, si on utilise l'équation de Gross-Pitaevskii, ce terme se réduit à $\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\Delta\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}} + Un_0$ quelque soit la température. Ainsi, le seul effet apparent de la présence du nuage thermique est de modifier le profil de densité à l'équilibre n_0 (et donc le potentiel chimique). Comme celui-ci se répercute sur la forme des excitations et leurs fréquences propres, en réalité les équations pour le nuage thermique et le profil de densité doivent être résolues de manière auto-consistante (voir le chapitre 3).

Pour que la décomposition (A.1) soit pertinente, il faut choisir ω_0 de telle manière que les modes de très basse énergie qui contribuent significativement aux fluctuations de phase soient compris dans le terme Ψ_0 . Ainsi, on demandera que

$$\langle [\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(\mathbf{r}')]^2 \rangle = \sum_{\omega_\nu < \omega_0 \rightarrow \infty} [\phi_\nu(\mathbf{r}) - \phi_\nu(\mathbf{r}')]^2 (2N_{\text{BE}}(\hbar\omega_\nu) + 1) + \epsilon_1, \quad (\text{A.6})$$

avec $\epsilon_1 \rightarrow 0$. Autrement dit, on doit pouvoir faire tendre ω_0 vers l'infini, en ne changeant la variance des fluctuations de phase que d'une quantité négligeable ϵ_1 . De plus, le « petit » paramètre de la théorie, $\langle \delta\hat{n}(\mathbf{r})^2 \rangle / n_0^2(\mathbf{r})$ ne peut être petit quelque soit \mathbf{r} dans le cas inhomogène qui nous préoccupe, étant donné que n_0 devient arbitrairement faible en dehors d'un volume fini. Aussi, nous imposerons la condition plus faible

$$\int d^{(3)}\mathbf{r} \langle \delta\hat{n}^2(\mathbf{r}) \rangle = \epsilon_2 \int d^{(3)}\mathbf{r} n_0^2(\mathbf{r}), \quad \epsilon_2 \ll 1, \quad (\text{A.7})$$

qui demande que les fluctuations de densité soient négligeables dans la plupart du volume occupé par la composante dégénérée. Dans le langage des fonctions de corrélations introduit au chapitre I, cela revient à demander que $\mathcal{C}^{(2)} \approx 1 + \epsilon_2$. Dans le cas du piège très allongé qui nous préoccupe, nous examinons ces deux critères aux chapitres 5 et 6, respectivement.

A.2 Application à un condensat allongé à trois dimensions

Pour illustrer ces développements un peu formels, nous allons appliquer l'approximation de Popov à un condensat dans un piège allongé. Nous supposons pour simplifier que la condition de Thomas-Fermi, $\mu \gg \hbar\omega_\perp, \hbar\omega_x$, est vérifiée, si bien que l'on peut oublier les

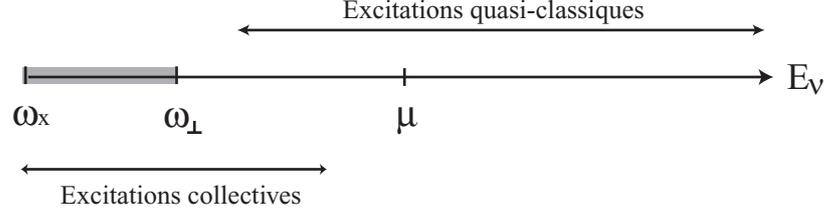


FIG. A.1 – Différentes catégories d'excitation dans un piège anisotrope. La zone grisée distingue les excitations de la branche axiale ($\epsilon < \hbar\omega_\perp$) des modes 3D. On a indiqué approximativement la zone où les excitations sont de type mode collectif, ainsi que celle où on peut les traiter à l'approximation semi-classique.

termes de pression quantique. Le profil du condensat s'obtient donc par l'équation

$$\mu = Un_0(\mathbf{r}) + 2Un_{\text{th}}(\mathbf{r}) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.8})$$

Les équations de Bogoliubov-de Gennes se simplifient alors en

$$\begin{aligned} \hbar\omega_\nu u_\nu &= \left[-\frac{\hbar^2\Delta}{2M} + V_{\text{ext}} + Un_0 \right] u_\nu - Un_0 v_\nu, \\ -\hbar\omega_\nu v_\nu &= \left[-\frac{\hbar^2\Delta}{2M} + V_{\text{ext}} + Un_0 \right] v_\nu - Un_0 u_\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Comme indiqué au premier chapitre, les excitations peuvent se trouver dans différentes catégories, suivant leur énergie (voir la figure A.1). Une première catégorie importante est composée d'excitations 1D, d'énergie $\epsilon \ll \hbar\omega_\perp$. Nous traitons ces excitations à part, car ce sont elles qui contribuent de manière importante aux fluctuations de phase. Ainsi, nous prendrons $\omega_0 = \omega_\perp$, et désignerons dans la suite les modes d'énergie $\epsilon \geq \hbar\omega_\perp$ comme les modes 3D. Ces derniers contribuent donc au terme $\delta\hat{\Psi}$, et nous allons supposer que la condition $k_B T \gg \hbar\omega_\perp, \hbar\omega_x$ est vérifiée³. Ainsi, la vaste majorité des excitations qui composent le nuage thermique correspondent à des états fortement excités. Conformément au traitement habituel en mécanique quantique, on peut alors les décrire par l'approximation quasi-classique⁴. On écrit que $u_\nu(\mathbf{r}) = \tilde{u}_\nu(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ (et une expression similaire pour v_ν). L'enveloppe \tilde{u}_ν est lentement variable par rapport à la longueur d'onde $1/k$, si bien qu'on peut négliger ses dérivées spatiales (c'est l'analogie de l'approximation eikonale en optique). On obtient alors les mêmes équations pour \tilde{u}_ν et \tilde{v}_ν que dans le cas homogène, à condition de remplacer la

³Cette approximation est peu contraignante. Lorsque ce n'est pas le cas, la population des états excités est typiquement extrêmement faible. En fait, pour $k_B T \ll \mu$, la déplétion quantique est la contribution dominante, et elle est en général négligeable pour les gaz alcalins piégés, comme nous l'avons souligné au chapitre I.

⁴Les modes dont l'énergie est comparable à ω_\perp ne sont pas bien traités par l'approximation quasi-classique. Cependant, ils contribuent de manière négligeable à la densité du nuage thermique, dominée par les excitations quasi-classique, et aux fluctuations de phase, dominées par les modes 1D. Aussi, nous ne nous préoccupons pas de les décrire plus précisément, ce qu'on pourrait faire en utilisant la limite hydrodynamique (1.49) des équations de Bogoliubov-de Gennes.

densité n_0 par sa valeur locale déterminée par (A.8), $n_0(\mathbf{r})$. Dans la suite, nous noterons $u_k^2[n_0(\mathbf{r})]$, $v_k^2[n_0(\mathbf{r})]$ et $\omega_k^B[n_0(\mathbf{r})]$ les amplitudes et l'énergie correspondantes. Les sommes sur les indices ν deviennent dans cette approximation des sommes sur les impulsions $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. On passe ainsi d'une description par un opérateur $\delta\hat{\Psi}$ à une description en terme de fonction de distribution dans l'espace des phases F pour décrire les propriétés moyennes des modes quasi-classiques [56]. La fonction F est définie par

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} (u_k^2[n_0(\mathbf{r})] + v_k^2[n_0(\mathbf{r})]) N_{\text{BE}}(\hbar\omega_k^B[n_0(\mathbf{r})]) \quad (\text{A.10})$$

$$= \int \frac{d^{(3)}\mathbf{p}}{h^3} F(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \quad (\text{A.11})$$

Avec les expressions déterminées au premier chapitre, on obtient ainsi

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{E_p + Un_0(\mathbf{r})}{\sqrt{E_p(E_p + 2Un_0(\mathbf{r}))}} N_{\text{BE}}\left(\sqrt{E_p(E_p + 2Un_0(\mathbf{r}))}\right), \quad (\text{A.12})$$

en notant $E_p = \mathbf{p}^2/2M$. En principe, cette somme doit être restreinte à des énergie plus petites que $\hbar\omega_{\perp}$. La condition $k_{\text{B}}T \gg \hbar\omega_{\perp}$ permet de rejeter la coupure à 0 et de négliger la contribution des excitations de très basse énergie à la somme globale.

Profil de densité : La densité du nuage thermique en dehors du volume du condensat s'obtient par intégration de la fonction de distribution sur les impulsions. Hors du volume du condensat, on obtient

$$n_{\text{th}}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_{\text{T}}^3} g_{3/2} \left\{ \exp\left(\beta\mu - \beta V_{\text{eff}}(\mathbf{r})\right) \right\}. \quad (\text{A.13})$$

Ceci correspond bien à une approximation de Hartree-Fock, où chaque excitation se déplace dans le champ moyen créé par toutes les autres, considéré comme un potentiel auto-consistant

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + 2Un_0(\mathbf{r}) + 2Un_{\text{th}}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.14})$$

A l'intérieur du volume du condensat, on a au contraire

$$n_{\text{th}}^{\text{int}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2\lambda_{\text{T}}^3} \int_0^{\infty} dv v \frac{v^2 + 4\pi\alpha(1 - \tilde{r}^2)}{\sqrt{v^2 + 8\pi\alpha(1 - \tilde{r}^2)}} N_{\text{BE}}\left(\frac{v}{4\pi}\sqrt{v^2 + 8\pi\alpha(1 - \tilde{r}^2)}\right), \quad (\text{A.15})$$

en notant $\tilde{r}^2 = \tilde{\rho}^2 + \tilde{x}^2 \leq 1$, avec les coordonnées réduites introduites au premier chapitre, et $\alpha = Un_0(\mathbf{0})/k_{\text{B}}T$.

Approximation de Hartree-Fock : On peut en fait simplifier encore les expressions ci-dessus pour n_{th} . En effet, pour un gaz piégé, le caractère collectif des excitations disparaît en réalité pour des énergies nettement plus petites que μ , à cause de l'inhomogénéité du

condensat [127]⁵. On peut en fait étendre l'approximation de Hartree-Fock (A.13) sous le volume du condensat à une très bonne approximation pour le calcul de la densité thermique, comme le montre la comparaison avec le calcul numérique complet [127], avec l'approximation de Popov [45] et avec des simulations Monte-Carlo basées sur le formalisme des intégrales de chemin [235, 100]. On obtient alors en utilisant (A.8),

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}) \lambda_{\text{T}}^3 = \begin{cases} g_{3/2} \left\{ \exp \left(-\beta U n_0(\mathbf{r}) \right) \right\} & \text{si } \tilde{r} \leq 1, \\ g_{3/2} \left\{ \exp \left(\beta \mu - \beta V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - 2\beta U n_{\text{th}}(\mathbf{r}) \right) \right\} & \text{si } \tilde{r} \geq 1. \end{cases}$$

⁵En effet, une excitation de type phonon près du centre, d'énergie $\omega_k^B[n_0(\mathbf{0})] < U n_0(\mathbf{0})$, passe dans le régime particule libre, $\omega_k^B[n_0(\mathbf{r})] > U n_0(\mathbf{r})$, quand $\tilde{r}^2 \sim 1 - (\omega_k^B[n_0(\mathbf{0})]/\mu)^2$. Le volume (relatif au volume du condensat) dans lequel l'excitation est de type phonon est donc approximativement $\left[1 - (\omega_k^B[n_0(\mathbf{0})]/\mu)^2\right]^{3/2} < 1$. Cet effet diminue beaucoup le poids des excitations collectives à la densité du nuage thermique [127], même pour $k_{\text{B}}T \lesssim \mu$.

Analyse des images

Le problème central de l'analyse des images obtenues est d'extraire de la distribution en densité après temps de vol les informations pertinentes sur le nuage comme le nombre d'atomes, la température, ... Pour cela, on procède à l'ajustement de la densité (en colonne) par une distribution théorique. Le programme¹ utilisé pour l'ajustement comporte ainsi trois options.

Les deux premières utilisent les distributions en densités appropriées pour un nuage thermique et un condensat pur (sans fraction thermique discernable), qui se déduisent des densités dans le piège par de simples changements d'échelle [113]. Nous précisons ces points en détails au chapitre III. L'ajustement est effectué en minimisant numériquement le χ^2 correspondant à la différence entre la densité mesurée et la distribution théorique. Pour affecter une déviation standard à chaque point, les pixels de la caméra sont regroupés quatre par quatre, la moyenne et la déviation standard sur le carré étant utilisées pour l'ajustement.

Pour une distribution bi-modale, la procédure d'ajustement de (2.22) aux images d'absorption procède en trois étapes, comme indiqué sur la figure (B.1). Dans un premier temps, une distribution de Bose idéale est ajustée sur les ailes de la distribution thermique, en masquant la zone centrale contenant le condensat par un « trou ». La taille du trou dépend de la température : il doit exclure clairement la région du condensat et la partie du nuage thermique qui l'entoure, tout en préservant un rapport signal à bruit suffisant (le choix de la taille de la région d'exclusion est décrit par la figure B.2). Dans un deuxième temps, la distribution thermique déduite du premier ajustement est soustraite à l'image d'absorption, ne laissant que le pic du condensat qui est ajusté par une parabole. Enfin, dans un troisième temps, en utilisant les paramètres obtenus à l'issue des deux premières étapes, on ajuste la distribution globale par (2.22). La fraction condensée, les tailles du condensat et les densités centrales sont toutes extraites de ce dernier ajustement. Par contre, les températures effectives T_{\perp} et T_x sont extraites du premier ajustement pour bénéficier de l'exclusion de la région centrale, plus susceptible d'être affectée par les interactions.

La géométrie de l'expérience est également à prendre en compte. En effet, en général, la direction de propagation de la sonde ne coïncide pas avec les axes propres du piège, si bien que pour un nuage anisotrope, les tailles mesurées correspondent à la projection du nuage sur un plan incliné par rapport aux plans de symétrie du piège (voir la figure B.3). La relation entre la taille mesurée L_{mes} , l'angle de la sonde avec la verticale θ et les « vraies » dimensions

¹Tous nos programmes d'analyse d'images sont basés sur le logiciel de traitement numérique Matlab.

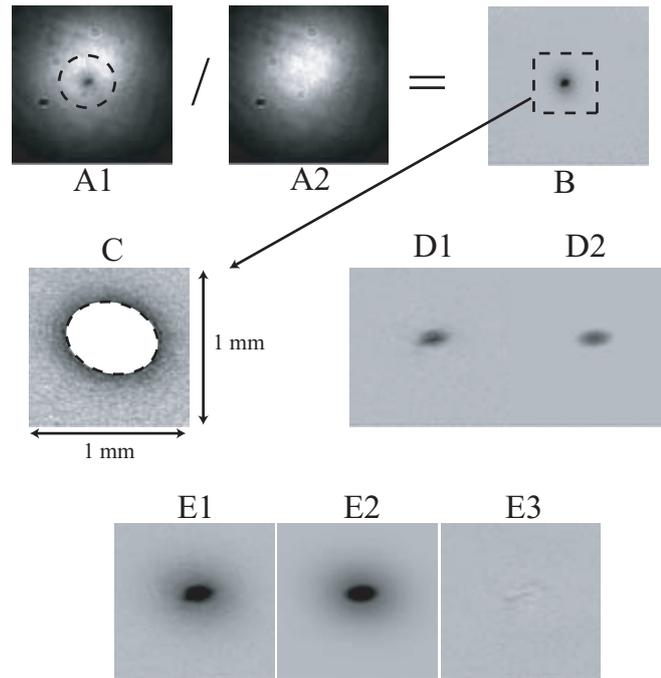


FIG. B.1 – Illustration de la procédure d’ajustement sur un nuage mixte. Les images brutes avec (A1) et sans (A2) atomes donnent le profil d’absorption par division (B). Une fois l’image restreinte à la zone contenant les atomes (indiquée par le cadre en pointillé), on procède à un premier ajustement sur les ailes de la distribution thermique (C), en masquant la zone contenant le condensat. Ce premier ajustement est soustrait du profil total pour ne laisser que le condensat (D1), ajusté par une parabole (D2). Les paramètres issus de ces deux étapes sont utilisées dans la troisième comme point de départ pour ajuster le profil bi-modal (E2) à l’image d’absorption (E1). Nous montrons également la différence (E3) entre l’image (E1) et l’ajustement (E2).

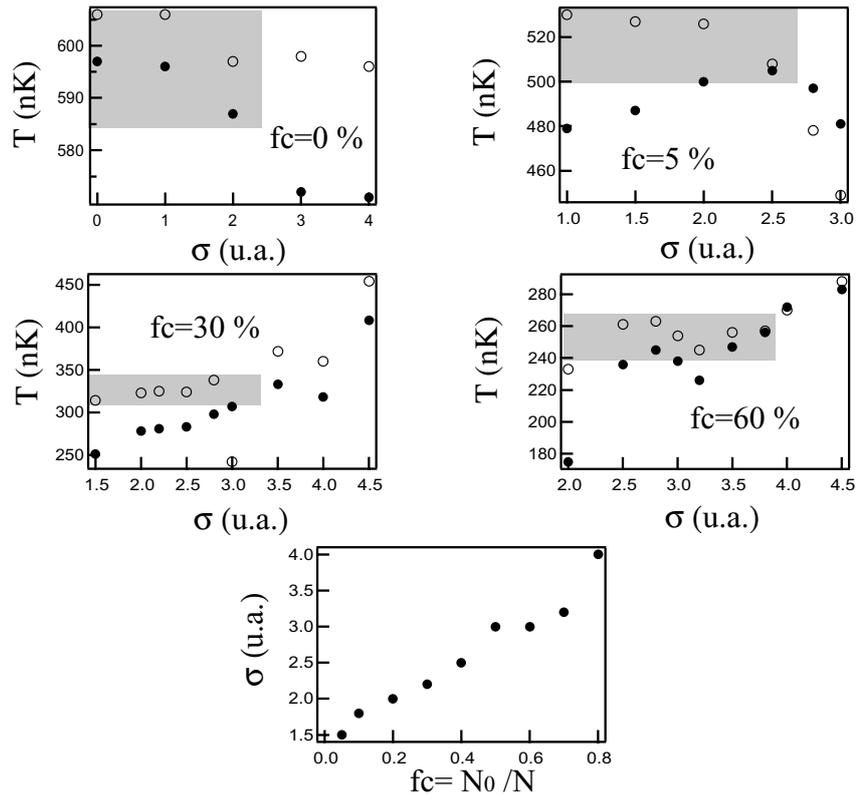


FIG. B.2 – Dépendance de la température mesurée sur le choix du « trou » destiné à masquer le condensat, pour quatre fractions condensées différentes. Les symboles creux désignent la température mesurée sur l'axe transverse T_x et les symboles pleins sur l'axe long, T_z . La taille du trou σ est repérée par rapport à la taille quadratique moyenne du *profil total*. La zone grisée indique la gamme dans laquelle la température radiale ne varie pas de plus de 5 % par rapport à la valeur moyenne. On constate qu'il existe un zone confortable pour choisir la taille de la zone d'exclusion. La dernière courbe montre le taille « optimale » (c'est-à-dire celle qui correspond au centre de la zone grisée), choisie empiriquement en fonction de la fraction condensée.

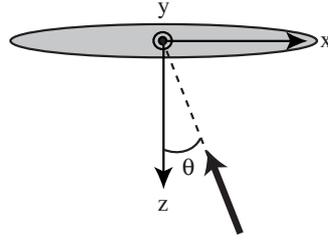


FIG. B.3 – Géométrie de l'imagerie. La flèche en trait gras indique la direction de propagation de la sonde.

R, L s'écrit simplement [46]

$$L_{\text{mes}} = \sqrt{L^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta} \approx_{R \approx L} L \left(1 + \frac{R^2 - L^2}{R^2} \tan^2 \theta \right) \quad (\text{B.1})$$

Cette relation s'applique indifféremment au nuage thermique ou au condensat. Pour les expériences décrites dans le chapitre III, V et VI, la sonde se propage presque parallèlement à la gravité, avec un angle faible (inférieur à 10 degrés) avec l'axe long du piège. De plus, la plupart des images sont prises pour un temps de vol de l'ordre de ω_x^{-1} , pour lesquels les nuages sont pratiquement sphériques quelque soit la température. Pour $R \approx L$, la correction (B.1) est insignifiante. C'est seulement pour les séries d'images en fonction du temps de vol (figures 2.14 et 3.1) que cette correction importe.

Réduction de l'effet des fluctuations sur la température critique en présence d'un potentiel

Nous donnons ici un argument complémentaire de celui de la référence [143] (repris au chapitre 3) pour expliquer la suppression de l'effet des fluctuations critiques sur le décalage de T_C dans le cas piégé. Pour cela, nous reprenons l'expression (3.25) du décalage de T_C dans le cas homogène, en faisant l'approximation $N_{BE} \approx k_B T_{C0}/E$, qui ignore explicitement les fluctuations de longueur d'onde courte devant la longueur d'onde de De Broglie. Nous obtenons ainsi le décalage de T_C sous la forme

$$N_C(T_C) - N_C^{(0)}(T_{C0}) = k_B T_{C0} V \int \frac{d^{(3)}\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(\mathbf{k}) - \mu}{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2M} (\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2M} + \Sigma(\mathbf{k}) - \mu)} \quad (\text{C.1})$$

avec V le volume de la boîte de quantification. Nous pouvons réécrire cette expression en fonction de l'énergie E et de la densité d'états, définie pour le cas homogène par $\rho(E)dE = V4\pi k^2 dk / (2\pi)^3$,

$$\left(\frac{\partial N_C^{(0)}}{\partial (k_B T)} \right)_{T=T_{C0}} \cdot \frac{\delta T_C}{T_{C0}} = \int \rho(E) \frac{\sigma(E)}{E + \sigma(E)} \frac{dE}{E}. \quad (\text{C.2})$$

La fonction $\sigma(E) = \Sigma(kl_{\text{crit}})$, qui ne dépend que de $\epsilon = E/E_{\text{crit}}$, décrit la modification du spectre par les fluctuations critiques. L'énergie caractéristique E_{crit} est donnée par le critère de Ginzburg, qui donne dans notre cas (voir chapitre III)

$$E_{\text{crit}} \approx k_B T_{C0} \left(\frac{a}{\lambda_0} \right)^2. \quad (\text{C.3})$$

Incorporons maintenant le potentiel V_{ext} sous l'hypothèse qu'il varie suffisamment lentement pour pouvoir appliquer l'approximation semi-classique. En ce cas, l'équation (C.2) reste valable, à condition d'utiliser la densité d'états semi-classique dans le potentiel V_{ext} ,

$$\rho(E) = \frac{1}{(2\pi^2 \hbar)^3} \int d^{(3)}\mathbf{r} d^{(3)}\mathbf{p} \delta \left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right). \quad (\text{C.4})$$

Nous nous intéressons à partir de maintenant aux ordres de grandeur, et oublions les coefficients numériques. De plus, nous prenons pour simplifier une densité d'états en loi de

190 Annexe C - Réduction de l'effet des fluctuations sur la température critique en présence d'un potentiel à puissance¹,

$$\rho(E) \propto E^\alpha / \Delta^{\alpha+1}. \quad (\text{C.5})$$

Comme $\partial N_{\text{C0}}^{(0)} / \partial T \sim N / T_{\text{C0}}$, on obtient alors

$$\frac{\delta T_{\text{C}}}{T_{\text{C0}}} \sim \frac{1}{N} \rho(E_{\text{crit}}) k_{\text{B}} T_{\text{C0}}. \quad (\text{C.6})$$

En calculant la température critique pour la densité d'états ρ par $N = \int dE \rho(E) N_{\text{BE}}(E)$, on obtient

$$k_{\text{B}} T_{\text{C0}} \sim \Delta N^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (\text{C.7})$$

Finalement, nous trouvons que

$$\frac{\delta T_{\text{C}}}{T_{\text{C0}}} \sim \left(\frac{E_{\text{crit}}}{k_{\text{B}} T_{\text{C0}}} \right)^\alpha \approx \left(\frac{a}{\lambda_0} \right)^{2\alpha}. \quad (\text{C.8})$$

Ainsi, pour le gaz homogène à trois dimensions ($\beta \rightarrow \infty$, ou $\rho(E) \propto \sqrt{E}$), on retrouve un décalage linéaire en a/λ_0 . Par contre, pour un piège harmonique ($\beta = 2$, ou $\rho(E) \propto E^2$), on a au contraire un décalage en $(a/\lambda_0)^4$, qui est extrêmement faible ($\sim 10^{-5}$ si on remet des facteurs numériques raisonnables). Pour pouvoir observer un effet notable des fluctuations critiques sur T_{C} , nous concluons qu'il est impératif d'utiliser un piège très raide, $\beta \gg 1$.

¹Pour un potentiel de piégeage en $V = V_0(r/r_0)^\beta$, on trouve [151] $\rho(E)V_0 \propto (E/V_0)^{1/2+3/\beta}$.

Propagateur semi-classique de l'équation de Schrödinger

Nous rappelons ici certaines propriétés du propagateur K_0 de l'équation de Schrödinger pour l'hamiltonien H_0 . Mathématiquement, K_0 est une fonction de Green pour l'équation aux dérivées partielles homogène (*i.e.* en omettant le terme source décrivant les atomes transférés depuis $m_F = -1$) satisfaite par $\tilde{\psi}_0$. Cela signifie que K_0 obéit à l'équation aux dérivées partielles

$$i\hbar \frac{\partial K_0}{\partial t} = H_0 K_0 + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i, t_f - t_i). \quad (\text{D.1})$$

Il est alors immédiat de se rendre compte que la solution de l'équation inhomogène

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}_{m_F=0}}{\partial t} = H_0 \tilde{\Psi}_{m_F=0} + \frac{\hbar \Omega_{\text{rf}}}{2} \tilde{\Psi}_{m_F=-1} \quad (\text{D.2})$$

est donnée par la propagation du terme source à l'aide de K_0 :

$$\tilde{\Psi}_{m_F=0}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\Omega_{\text{rf}}}{2i} \int_0^t dt' \int d^3 \mathbf{r}' K_0(\mathbf{r}_f, t_f; \mathbf{r}_i, t_i) \tilde{\Psi}_{m_F=-1}(\mathbf{r}_i, t'). \quad (\text{D.3})$$

Le calcul de K_0 se mène dans le formalisme des intégrales de chemin de Feynman. De manière formelle, on peut l'exprimer comme

$$K_0(\mathbf{r}_f, t_f; \mathbf{r}_i, t_i) = \int D\mathbf{R} e^{iS[\mathbf{R}]}. \quad (\text{D.4})$$

La connection avec le traitement habituel du problème dépendant du temps, basé sur une décomposition en modes propres de H_0 , se fait de la manière suivante. En introduisant une relation de fermeture sur les états propres ϕ_k de H_0 , d'énergie $\hbar\omega_k$, dans la définition de K_0 , et en intégrant sur l'espace, on obtient dans le cas où H_0 est stationnaire :

$$K_0(\mathbf{r}_f, t_f; \mathbf{r}_i, t_i) = \sum_k \phi_k(\mathbf{r}_i) \phi_k^*(\mathbf{r}_f) e^{-i\omega_k(t_f - t_i)}. \quad (\text{D.5})$$

En insérant ce résultat dans l'expression pour $\tilde{\psi}_{m_F=0}$, on obtient les coefficients de sa décomposition sur les états propres de H_0 : cela permet de retrouver le calcul habituel qui sert de point de départ à la théorie des perturbations dépendantes du temps.

La formule (D.4) doit être comprise comme une intégrale fonctionnelle : elle met en jeu une version discrétisée de l'action, $S[\mathbf{R}] = \int_{t_i}^{t_f} dt (M\dot{\mathbf{R}}^2/2 - V(\mathbf{R}, t))$, et la somme est prise sur

tous les chemins d'espace-temps qui connectent le point initial (\mathbf{r}_i, t_i) au point final (\mathbf{r}_f, t_f) . Le chemin le plus important connectant ces deux points est celui qui serait effectivement suivi par une particule obéissant strictement aux lois de la mécanique classique, que nous appelons \mathbf{R}_{CL} . Néanmoins, le principe d'incertitude interdit *stricto sensu* de suivre exactement cette trajectoire, et impose à une particule quantique quelques excursions ζ autour de ce chemin : $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{CL}} + \zeta$. L'approximation semi-classique consiste à ne garder que les termes d'ordre le plus bas en ζ . On obtient alors la forme suivante du propagateur :

$$K_0(\mathbf{r}_f, t_f; \mathbf{r}_i, t_i) = C(t_f, t_i) e^{iS_{\text{CL}}(\mathbf{r}_f, t_f; \mathbf{r}_i, t_i)/\hbar}, \quad (\text{D.6})$$

où toute la dépendance en position est contenue dans l'action classique S_{CL} , qu'on peut exprimer comme une intégrale le long du chemin classique :

$$S_{\text{CL}}(\mathbf{r}_f, t_f; \mathbf{r}_i, t_i) = \int_{\mathbf{R}_{\text{CL}}} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - H dt). \quad (\text{D.7})$$

On notera qu'à une dimension, on retrouve la fonction d'onde donnée par la méthode WKB. On peut montrer que, si la quantité $\partial^2 S_{\text{CL}}/\partial x_i^2$ ne change pas de signe sur le chemin considéré¹, le préfacteur vaut :

$$C(t_f, t_i) = \sqrt{\frac{\prod_{x_i=x,y,z} \left| \frac{\partial^2 S_{\text{CL}}}{\partial x_i^2} \right|}{(2i\pi)^3}}. \quad (\text{D.8})$$

Pour terminer, remarquons que nous avons discuté dans cet appendice un cas où H_0 est stationnaire. Dans notre problème, il ne l'est pas, puisque le hamiltonien dépend, à travers le potentiel de champ moyen, du nombre d'atomes dans le condensat $N_{m_F=-1}$, qui varie au cours du temps. Cependant, nous avons supposé une variation de $N_{m_F=-1}$ suffisamment lente pour pouvoir considérer que la fonction d'onde du condensat suit adiabatiquement. Dans ces conditions, c'est aussi le cas pour H_0 , et on peut généraliser l'équation (D.5) au cas quasiment stationnaire, simplement en remplaçant les états propres stationnaires par les états propres instantanés et le facteur de phase par $e^{-i \int_{t_i}^{t_f} \omega_k(t') dt'}$.

¹Si $\partial^2 S_{\text{CL}}/\partial x_i^2$ s'annule et change de signe, des facteurs de phase supplémentaires (liés aux indices de Maslov [178]) apparaissent. Dans les problèmes traités dans ce mémoire, ce n'est pas le cas et nous ignorerons donc ce point par souci de simplicité.

Rappel sur le couplage d'un état discret à un continuum

Dans cet appendice, nous rappelons des résultats classiques relatifs à l'équation de Schrödinger couplant un niveau discret à un continuum. On suppose un hamiltonien de la forme $H = H^{(0)} + V$, le terme de couplage V reliant un seul état discret $|0\rangle$, d'énergie $\hbar\omega_0$ à un continuum de modes propagatifs $|k\rangle$, d'énergie $\hbar\omega_k$.

$$\begin{aligned} H^{(0)} |0\rangle &= \hbar\omega_0 |0\rangle, \\ H^{(0)} |k\rangle &= \hbar\omega_k |k\rangle, \\ \langle 0 | 0 \rangle &= 1 \quad \forall i, \\ \langle k | k' \rangle &= \delta(k - k') \quad \forall k, k', \\ \langle k | 0 \rangle &= 0 \quad \forall k. \end{aligned} \tag{E.1}$$

Des méthodes générales de résolution existent pour ce type de problèmes [177], et nous en rappelons ici les grandes lignes. Le vecteur d'état s'écrit en général

$$|\psi\rangle(t) = c_0(t)e^{-i\omega_0 t} |0\rangle + \sum_k c_k(t)e^{-i\omega_k t} |k\rangle, \tag{E.2}$$

avec les conditions initiales $c_0 = 1$, $c_k = 0 \quad \forall k$. L'équation de Schrödinger nous donne les équations d'évolution des amplitudes :

$$i\hbar\dot{c}_0 = \sum_k V_{0k} e^{-i(\omega_k - \omega_0)t} c_k, \tag{E.3}$$

$$i\hbar\dot{c}_k = V_{k0} e^{i(\omega_k - \omega_0)t} c_0. \tag{E.4}$$

En éliminant c_k au profit de c_0 , on trouve l'équation de convolution :

$$\dot{c}_0(T) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{N}(\tau) R_T(\tau) c_0(T - \tau), \tag{E.5}$$

où le noyau de l'intégrale est défini par :

$$\mathcal{N}(\tau) = \sum_k |V_{k0}|^2 e^{-i(\omega_k - \omega_0)\tau}, \tag{E.6}$$

et où on a introduit une fonction rectangle de largeur T , $R_T(\tau)$, qui décrit la forme temporelle du couplage ¹. Pour résoudre une telle équation de convolution, il est naturel de passer en

¹Nous supposons ici un pulse carré. Pour un pulse rf d'une forme différente on aurait bien sûr une autre fonction, mais toujours de largeur $1/T$.

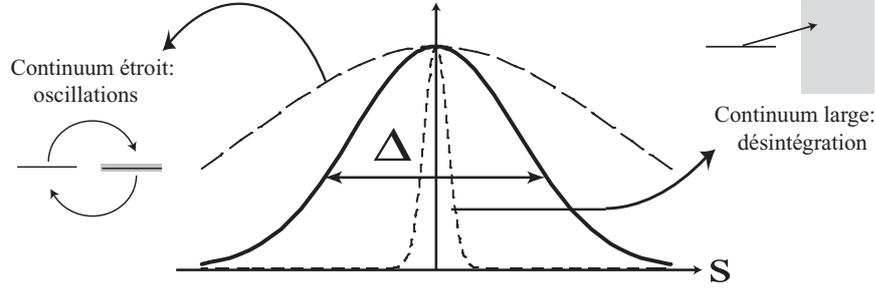


FIG. E.1 – Représentation schématique des cas limites. La courbe en traits pleins représente la fonction spectrale du continuum, $\mathcal{L}[\mathcal{N}]$, de largeur Δ . En pointillés, la représentation de l'état initial, de largeur Γ . Pour un continuum étroit, $\Delta \ll \Gamma$, des oscillations de Rabi ont lieu. Au contraire, pour un continuum large, $\Gamma \ll \Delta$, l'état initial se désintègre progressivement dans le continuum.

transformée de Laplace (et non en transformée de Fourier, car on manipule des fonctions causales). On obtient :

$$\mathcal{L}[c_0](s) = \frac{1}{s + \mathcal{L}[\mathcal{N}] * \mathcal{L}[R_T]}, \quad (\text{E.7})$$

avec $\mathcal{L}[\mathcal{N}](s) = \sum_k |V_{k0}|^2 / (s - i(\omega_0 - \omega_k))$. On revient dans le domaine temporel par la formule d'inversion de Mellin-Fourier :

$$c_0(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{i\mathbb{R}} \mathcal{L}[c_0](s) e^{-st}, \quad (\text{E.8})$$

où l'intégrale doit être effectuée le long de l'axe imaginaire pur (on la calcule par le théorème des résidus). La largeur spectrale du couplage est déterminée soit par la fonction $\mathcal{L}[\mathcal{N}]$, qui dépend des intégrales de recouvrement de l'état discret avec le continuum, soit par la fonction $\mathcal{L}[R_T]$ qui dépend du temps de couplage (élargissement de Fourier). Nous appelons Δ la largeur de $\mathcal{L}[\mathcal{N}]$ (« largeur spectrale du continuum »). Dans la suite, nous supposons un couplage suffisamment long, $\Delta \gg 1/T$, pour que $\mathcal{L}[\mathcal{N}] * \mathcal{L}[R_T] \approx \mathcal{L}[\mathcal{N}]$.

Pour ce type de problèmes dépendants du temps, deux cas limites simples existent : l'oscillation de Rabi et la décroissance exponentielle. L'oscillation de Rabi se retrouve dans le cas où le couplage n'a lieu que vers un seul état k_1 du continuum : $V_{k0} = V_0 \delta(k - k_1)$. Dans ce cas, le calcul redonne la formule de Rabi :

$$c_0(T) = \cos\left(\frac{\Omega_{\text{eff}} T}{2}\right) - i \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Omega_{\text{eff}}} \sin\left(\frac{\Omega_{\text{eff}} T}{2}\right), \quad (\text{E.9})$$

avec la fréquence de Rabi $\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{4V_0^2 + (\omega_1 - \omega_0)^2}$.

Le cas limite opposé correspond à un continuum complètement plat, $V_{k0} = V_0$. Dans ce cas, on trouve une décroissance exponentielle de l'état initial :

$$c_0(T) = \exp\left(-\frac{\gamma T}{2}\right), \quad (\text{E.10})$$

avec un taux γ donné par la règle d'or de Fermi :

$$\gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_k |V_{k0}|^2 \delta(\omega_0 - \omega_k). \quad (\text{E.11})$$

Dans le cas général, V_{k0} dépend du mode k de manière plus complexe, et la solution va présenter un comportement mixte. Pour préciser ce point, nous introduisons Γ^{-1} , le temps de décroissance (encore inconnu à ce stade du calcul) de c_0 ; $\mathcal{L}[c_0](s)$ est alors une fonction de largeur Γ . Deux situations extrêmes se présentent alors, dans lesquelles on tend vers les deux cas limites évoqués plus haut. Dans le cas $\Delta \ll \Gamma$, on peut qualifier le continuum d'étroit : l'état discret voit une très petite portion du continuum, et le système effectue des oscillations de Rabi amorties aux temps longs entre le (véritable) état discret et la partie étroite du continuum effectivement couplée. Dans le cas opposé d'un continuum presque plat, $\Delta \gg \Gamma$, qui correspond à un couplage faible, le continuum se couple à beaucoup d'états propagatifs : l'état discret se désintègre alors progressivement dans le continuum. Pour discuter ce dernier cas plus en détails, nous revenons dans l'espace réel pour faire la connexion avec le traitement utilisé dans le problème spécifique du laser à atomes. Dans ce cas, le noyau $\mathcal{N}(\tau)$ est une fonction de largeur $t_C = 1/\Delta$, alors que c_0 est une fonction lentement variable à cette échelle. On peut donc sortir c_0 de l'intégrale de convolution (approximation de Born-Markov). L'intégrale sur τ donne alors [86] :

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{N}(\tau) d\tau = \frac{\gamma}{2} + i \frac{\delta\omega_0}{2}, \quad (\text{E.12})$$

où le taux de désintégration γ est donné par la règle d'or de Fermi, et le déplacement du niveau $\delta\omega_0$ s'exprime comme une valeur principale de Cauchy. On a finalement une désintégration exponentielle de l'état initial, assortie d'un déplacement du niveau

$$c_0(T) = \exp\left(-\frac{\gamma T}{2} - i \frac{\delta\omega_0 T}{2}\right). \quad (\text{E.13})$$

Le traitement de couplage faible n'est justifié que si $\gamma \gg \delta\omega_0$.

Bibliographie

- [1] S. BOSE, “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).
- [2] A. EINSTEIN, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung”, *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.* **1925**, 3 (1925).
- [3] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”, *Science* **269**, 198 (1995).
- [4] K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN, ET W. KETTERLE, “Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [5] C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT, J. J. TOLLETT, ET R. G. HULET, “Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995), *ibid.* **79**, 1170 (1997).
- [6] E. A. CORNELL ET C. E. WIEMAN, “Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 875 (2002).
- [7] W. KETTERLE, “When atoms behave as waves : Bose-Einstein condensation and the atom laser”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1131 (2002).
- [8] M. R. ANDREWS, C. G. TOWNSEND, H.-J. MIESNER, D. S. DURFEE, D. M. KURN, ET W. KETTERLE, “Observation of Interference Between Two Bose-Einstein Condensates”, *Science* **275**, 637 (1997).
- [9] I. BLOCH, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition”, *Nature* **403**, 166 (2000).
- [10] L. P. PITAEVSKII, “Vortex lines in an imperfect Bose gas”, *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961).
- [11] M. R. MATTHEWS, B. P. ANDERSON, P. C. HALJAN, D. S. HALL, C. E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL, “Vortices in a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [12] K. W. MADISON, F. CHEVY, W. WOHLLEBEN, ET J. DALIBARD, “Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
- [13] F. CHEVY, *Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2002.
- [14] O. MARAGÒ, S. A. HOPKINS, J. ARLT, E. HODBY, G. HECHENBLAIKNER, ET C. FOOT, “Observation of the scissors mode and evidence for superfluidity of a trapped Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2056 (2000).

- [15] A. P. CHIKKATUR, A. GÖRLITZ, D. M. STAMPER-KURN, S. INOUE, S. GUPTA, ET W. KETTERLE, “Suppression and enhancement of impurity scattering in a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 483 (2000).
- [16] R. ONOFRIO, C. RAMAN, J. M. VOGELS, J. R. ABO-SHAEER, A. P. CHIKKATUR, ET W. KETTERLE, “Observation of superfluid flow in a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2228 (2000).
- [17] S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, C. FORT, F. MINARDI, M. INGUSCIO, M. L. CHIOFALO, ET M. P. TOSI, “Superfluid and dissipative dynamics of a Bose-Einstein condensate in a periodic optical potential”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4447 (2001).
- [18] C. ORZEL, A. K. TUCHMAN, M. L. FENSELAU, M. YASUDA, ET M. A. KASEVICH, “Squeezed states in a Bose-Einstein condensate”, *Science* **291**, 2386 (2001).
- [19] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH, ET I. BLOCH, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms”, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [20] S. L. CORNISH, N. R. CLAUSSEN, J. L. ROBERTS, E. A. CORNELL, ET C. E. WIEMAN, “Stable ^{85}Rb Bose-Einstein condensate with widely tunable interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1795 (2000).
- [21] G. MODUGNO, G. FERRARI, G. ROATI, R. J. BRECHA, A. SIMONI, ET M. INGUSCIO, “Bose-Einstein condensation of potassium atoms by sympathetic cooling”, *Science* **294**, 1320 (2001).
- [22] T. WEBER, J. HERBIG, M. MARK, H.-C. NÄGERL, ET R. GRIMM, “Bose-Einstein condensation of cesium”, *Science* **299**, 232 (2003).
- [23] D. G. FRIED, T. C. KILLIAN, L. WILLMANN, D. LANDHUIS, S. C. MOSS, D. KLEPPNER, ET T. J. GREYTAK, “Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3811 (1995).
- [24] A. ROBERT, O. SIRJEAN, A. BROWAEYS, J. POUPARD, C. WESTBROOK, ET A. ASPECT, “A Bose-Einstein condensate of metastable atoms”, *Science* **292**, 1320 (2001).
- [25] F. PEREIRA-DOS SANTOS *et al.*, “Bose-Einstein condensation of metastable helium”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3459 (2001).
- [26] Y. TAKASU, K. MAKI, K. KOMORI, T. TAKANO, K. HONDA, M. KUMAKURA, T. YABUZAKI, ET Y. TAKAHASHI, “Spin-singlet Bose-Einstein condensation of two-electron atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040404 (2003).
- [27] C. J. MYATT, E. A. BURT, R. W. GHRIST, E. A. CORNELL, ET C. E. WIEMAN, “Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586 (1997).
- [28] F. SCHRECK, L. KHAYKOVICH, K. L. CORWIN, G. FERRARI, T. BOURDEL, J. CUBIZOLLES, ET C. SALOMON, “Quasipure Bose-Einstein Condensate Immersed in a Fermi Sea”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
- [29] B. DEMARCO ET D. S. JIN, “Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas”, *Science* **285**, 1703 (1999).
- [30] A. TRUSCOTT ET R. G. HULET, “Observation of Fermi pressure in a gas of trapped atoms”, *Science* **291**, 2570 (2001).
- [31] S. R. GRANADE, M. E. GEHM, K. M. O’HARA, ET J. E. THOMAS, “All-optical production of a degenerate Fermi gas”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120405 (2002).

- [32] Z. HADZIBABIC, C. A. STAN, K. DIECKMANN, S. GUPTA, M. W. ZWIERLEIN, A. GÖRLITZ, ET W. KETTERLE, “Two-species mixture of quantum degenerate Bose and Fermi gases”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 160401 (2002).
- [33] M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, D. M. KURN, D. S. DURFEE, C. G. TOWNSEND, ET W. KETTERLE, “Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997).
- [34] B. P. ANDERSON ET M. A. KASEVICH, “Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays”, *Science* **282**, 1686 (1998).
- [35] I. BLOCH, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Atom laser with a cw output coupler”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3008 (1999).
- [36] E. W. HAGLEY, L. DENG, M. KOZUMA, J. WEN, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS, “A well-collimated quasi-continuous atom laser”, *Science* **283**, 1706 (1999).
- [37] B. DESRUELLE, V. BOYER, P. BOUYER, G. BIRKL, M. LÉCRIVAIN, F. ALVES, C. WESTBROOK, ET A. ASPECT, “Trapping cold neutral atoms with an iron-core electromagnet”, *Euro. Phys. J. D* **1**, 255 (1998).
- [38] B. DESRUELLE, *Évaporation par radio-fréquence et condensation de Bose-Einstein d'un gaz d'alcalins en régime de champ fort*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 1999.
- [39] V. BOYER, *Condensation de Bose-Einstein avec un électroaimant à noyau ferromagnétique : stratégies de refroidissement dans les champs magnétiques intenses*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2000.
- [40] D. S. PETROV, G. V. SHLYAPNIKOV, ET J. T. M. WALRAVEN, “Regimes of quantum degeneracy in trapped 1D gases”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).
- [41] D. S. PETROV, G. V. SHLYAPNIKOV, ET J. T. M. WALRAVEN, “Phase-fluctuating 3D Bose-Einstein condensates in elongated traps”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 050404 (2001).
- [42] S. DETTMER *et al.*, “Observation of phase fluctuations in elongated Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160406 (2001).
- [43] S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas”, *Phys. Rev. A* **54**, R4633 (1996).
- [44] S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Scaling and thermodynamics of a trapped Bose-Condensed gas”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3987 (1997).
- [45] S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Thermodynamics of a trapped Bose-condensed gas”, *J. Low Temp. Phys.* **109**, 309 (1997).
- [46] Y. LE COQ, *Condensats de Bose-Einstein et lasers à atomes*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2002.
- [47] S. RICHARD, *Spectroscopie de Bragg d'un quasi-condensat*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2003.
- [48] G. DELANNOY, *Étude des techniques de production de condensats de Bose-Einstein : évaporation multi-fréquence et refroidissement sympathique*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2001.
- [49] F. GERBIER, J. H. THYWISSEN, S. RICHARD, M. HUGBART, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Critical temperature of a trapped, weakly-interacting Bose gas”, *cond-mat* (2003).

- [50] F. GERBIER, J. H. THYWISSEN, S. RICHARD, M. HUGBART, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Bose-Einstein condensed gases at finite temperatures”, *en préparation* (2003).
- [51] F. GERBIER, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Quasicontinuous atom laser in the presence of gravity”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4729 (2001).
- [52] Y. L. COQ, J. H. THYWISSEN, S. A. RANGWALA, F. GERBIER, S. RICHARD, G. DELANNOY, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Atom laser divergence”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 170403 (2001).
- [53] F. GERBIER, J. H. THYWISSEN, S. RICHARD, M. HUGBART, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Momentum distribution and correlation function of quasi-condensates in elongated traps”, *Phys. Rev. A* **67**, 051602(R) (2003).
- [54] S. RICHARD, F. GERBIER, J. H. THYWISSEN, M. HUGBART, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Momentum spectroscopy of 1D phase fluctuations in Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. Lett* **91**, 010405 (2003).
- [55] F. GERBIER, S. RICHARD, J. H. THYWISSEN, M. HUGBART, P. BOUYER, ET A. ASPECT, dans *Interactions in ultracold gases*, ÉDITÉ PAR C. ZIMMERMANN ET M. WEIDEMÜLLER (Wiley-VCH, 2003), actes de la conférence « Cool Interactions 2002 » (Heidelberg,2002); e-print cond-mat/0210206.
- [56] F. DALFOVO, S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [57] C. Cohen-Tannoudji, Cours au Collège de France, 1998, disponible sur <http://www.lkb.ens.fr/cours/college-de-france>.
- [58] C. Cohen-Tannoudji, Cours au Collège de France, 1999, disponible sur <http://www.lkb.ens.fr/cours/college-de-france>.
- [59] Y. CASTIN, dans *Coherent atomic matter waves, Lecture Notes of Les Houches Summer School*, ÉDITÉ PAR R. KAISER, C. WESTBROOK, ET F. DAVID (EDP Sciences and Springer-Verlag, 2000), p. 1, e-print cond-mat/0105058.
- [60] R. P. FEYNMAN ET A. HIBBS, *Quantum mechanics and path integrals* (Mc-Graw Hill, New-York, 1965).
- [61] K. HUANG, *Statistical mechanics* (Wiley, New York, 1990).
- [62] J. E. ROBINSON, “Note on the Bose-Einstein integral functions”, *Phys. Rev.* **83**, 678 (1951).
- [63] M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. M. KURN, D. S. DURFEE, ET W. KETTERLE, “Bose-Einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 416 (1996).
- [64] J. R. ENSHER, D. S. JIN, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL, “Bose-Einstein condensation in a dilute gas : Measurement of energy and ground-state occupation”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4984 (1996).
- [65] O. PENROSE ET L. ONSAGER, “Bose-Einstein condensation and liquid helium”, *Phys. Rev.* **104**, 576 (1956).
- [66] P. NOZIÈRES ET D. PINES, *The theory of quantum liquids* (Perseus Books, Cambridge, MA, 1999).

- [67] J. DALIBARD, dans *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, S. STRINGARI, ET C. WIEMAN (IOS Press, 1999), p. 321.
- [68] D. J. HEINZEN, dans *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, S. STRINGARI, ET C. WIEMAN (IOS Press, 1999), p. 351.
- [69] A. MESSIAH, *Mécanique quantique, tome II* (Dunod, Paris, 1960).
- [70] E. A. BURT, R. W. GHRIST, C. J. MYATT, M. J. HOLLAND, E. A. CORNELL, ET C. E. WIEMAN, “Coherence, correlations, and collisions : What one learns about Bose-Einstein condensates from their decay”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).
- [71] J. SÖDING, D. GUÉRY-ODELIN, P. DESBIOLLES, F. CHEVY, H. INAMORI, ET J. DALIBARD, “Three-body decay of a rubidium Bose-Einstein condensate”, *Appl. Phys. B* **69**, 257 (1999).
- [72] L. D. LANDAU ET E. M. LIFSHITZ, *Quantum mechanics* (Butterworth-Heyneman Ltd., London, 1980).
- [73] E. VAN KEMPEN, S. KOKKELMANS, D. J. HEINZEN, ET B. J. VERHAAR, “Inter-isotope determination of ultracold Rubidium interactions from three high-precision experiments”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 093201 (2002).
- [74] L. D. LANDAU ET E. M. LIFSHITZ, *Statistical Physics, part 1* (Butterworth-Heynemann Ltd., London, 1980).
- [75] G. BAYM ET C. J. PETHICK, “Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed Rubidium gas”, **76**, 6 (1996).
- [76] Y. CASTIN ET R. DUM, “Bose-Einstein condensates in time-dependent traps”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [77] Y. KAGAN, E. L. SURKOV, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential”, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).
- [78] Y. KAGAN, E. L. SURKOV, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps”, *Phys. Rev. A* **55**, R18 (1997).
- [79] N. N. BOGOLIUBOV, “On the theory of superfluidity”, *J. Phys.* **11**, 23 (1947).
- [80] D. S. PETROV, *Bose-Einstein condensation in low-dimensional trapped gases*, Thèse de doctorat, Universiteit van Amsterdam, 2003.
- [81] W.-C. WU ET A. GRIFFIN, “Quantized hydrodynamic model and the dynamic structure factor for a trapped Bose gas”, *Phys. Rev. A* **54**, 4204 (1996).
- [82] V. N. POPOV, *Functional integrals in quantum field theory and statistical physics* (Reidel, Dordrecht, 1983).
- [83] J. O. ANDERSEN, U. A. KHAWAJA, ET H. STOOF, “Phase fluctuations in atomic Bose gases”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 070407 (2002).
- [84] U. A. KHAWAJA, J. O. ANDERSEN, N. P. PROUKAKIS, ET H. STOOF, “Low-dimensional Bose gases”, *Phys. Rev. A* **66**, 013615 (2002).
- [85] C. MORA ET Y. CASTIN, “Extension of Bogoliubov theory to quasi-condensates”, *Phys. Rev. A* **67**, 053615 (2003).
- [86] D. F. WALLS ET G. J. MILBURN, *Quantum optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1988).
- [87] E. M. LIFSHITZ ET L. P. PITAEVSKII, *Statistical physics, part 2* (Butterworth-Heyneman Ltd., London, 1980).

- [88] S. STRINGARI, “Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2360 (1996).
- [89] P. ÖHBERG, E. L. SURKOV, I. TITTONEN, S. STENHOLM, M. WILKENS, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Low-energy elementary excitations of a trapped Bose-condensed gas”, *Phys. Rev. A* **56**, R3346 (1997).
- [90] S. STRINGARI, “Dynamics of Bose-Einstein condensed gases in highly deformed traps”, *Phys. Rev. A* **58**, 2385 (1998).
- [91] I. S. GRADSHTEYN ET I. M. RYZHIK, *Table of series, integrals and products* (Academic Press, London, 1980).
- [92] W. KOHN, “Cyclotron resonance and de Haas-van Alphen oscillations of an interacting electron gas”, *Phys. Rev.* **123**, 1242 (1961).
- [93] M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. M. KURN, D. S. DURFEE, C. G. TOWNSEND, ET W. KETTERLE, “Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a magnetic trap”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988 (1996).
- [94] D. M. STAMPER-KURN, H.-J. MIESNER, S. INOUE, M. R. ANDREWS, ET W. KETTERLE, “Collisionless and hydrodynamic excitations of a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 500 (1998).
- [95] I. SCHVARCHUCK *et al.*, “Bose-Einstein condensation in non-equilibrium states studied by condensate focusing”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270404 (2002).
- [96] R. J. GLAUBER, “The Quantum Theory of Optical Coherence”, *Phys. Rev.* **131**, 2529 (1963).
- [97] F. ZAMBELLI, L. P. PITAEVSKII, D. M. STAMPER-KURN, ET S. STRINGARI, “Dynamic structure factor and momentum distribution of a trapped Bose gas”, *Phys. Rev. A* **61**, 063608 (2000).
- [98] E. W. HAGLEY *et al.*, “Measurement of the Coherence of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3112 (1999).
- [99] J. STENGER, S. INOUE, A. P. CHIKKATUR, D. M. STAMPER-KURN, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999).
- [100] M. HOLZMANN ET Y. CASTIN, “Pair correlation function of an inhomogeneous interacting Bose-Einstein condensate”, *Eur. Phys. Jour. D* **7**, 425 (1999).
- [101] M. YASUDA ET F. SHIMIZU, “Observation of two-atoms correlations of an ultracold Neon atomic beam”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).
- [102] O. SIRJEAN, *Collisions ionisantes : un nouveau diagnostic pour les condensats d’hélium métastable*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2003.
- [103] W. KETTERLE ET H.-J. MIESNER, “Coherence properties of Bose-Einstein condensates and atom lasers”, *Phys. Rev. A* **56**, 3291 (1997).
- [104] R. J. DODD, C. W. CLARK, M. EDWARDS, ET K. BURNETT, “Characterizing the coherence of Bose-Einstein condensates and atom lasers”, *Opt. Exp.* **1**, 284 (1997).
- [105] Y. KAGAN, B. V. SVISTUNOV, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Effect of Bose condensation on inelastic processes in gases”, *Sov. Phys. JETP Lett.* **42**, 209 (1985).
- [106] S. CHU, “The manipulation of neutral particles”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 685 (1998).

- [107] C. N. COHEN-TANNOUJDI, “Manipulating atoms with photons”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 707 (1998).
- [108] W. D. PHILLIPS, “Laser cooling and trapping of neutral atoms”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 721 (1998).
- [109] T. G. WALKER, D. W. SESKO, ET C. E. WIEMAN, “Collective behavior of optically trapped neutral atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 408 (1990).
- [110] C. G. TOWNSEND *et al.*, “Phase-space density in the magneto-optical trap”, *Phys. Rev. A* **52**, 1423 (1995).
- [111] H. F. HESS, “Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen”, *Phys. Rev. B* **34**, 3476 (1986).
- [112] W. KETTERLE ET N. J. VAN DRUTEN, “Evaporative Cooling of Trapped Atoms”, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **37**, 181 (1996).
- [113] W. KETTERLE, D. S. DURFEE, ET D. M. STAMPER-KURN, dans *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, S. STRINGARI, ET C. E. WIEMAN (IOS Press, 1999), p. 67.
- [114] J. DALIBARD ET C. COHEN-TANNOUJDI, “Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical-models”, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023 (1989).
- [115] D. W. SESKO, T. G. WALKER, ET C. E. WIEMAN, “Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap”, *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 946 (1991).
- [116] M. DREWSSEN, P. LAURENT, A. NADIR, G. SANTARELLI, A. CLAIRON, D. GRISON, ET C. SALOMON, “Investigation of sub-Doppler cooling effects in a Cesium magneto-optical trap”, *Appl. Phys. B* **59**, 283 (1994).
- [117] W. KETTERLE, K. B. DAVIS, M. A. JOFFE, A. MARTIN, ET D. E. PRITCHARD, “High Densities of Cold Atoms in a *Dark* Spontaneous-Force Optical Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2253 (1993).
- [118] B. DESRUELLE, V. BOYER, S. G. MURDOCH, G. DELANNOY, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Interrupted evaporative cooling of ^{87}Rb atoms trapped in a high magnetic field”, *Phys. Rev. A* **60**, R1759 (1999).
- [119] V. BOYER, S. MURDOCH, Y. L. COQ, G. DELANNOY, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Multifrequency evaporative cooling to Bose-Einstein condensation in a high magnetic field”, *Phys. Rev. A* **62**, 021601(R) (2000).
- [120] C. V. SUKUMAR ET D. M. BRINK, “Spin-flip transitions in a magnetic trap”, *Phys. Rev. A* **56**, 2451 (1997).
- [121] T. BERGEMAN, G. EREZ, ET H. METCALF, “Magnetostatic trapping fields for neutral atoms”, *Phys. Rev. A* **35**, 1535 (1987).
- [122] D. GUÉRY-ODELIN, F. ZAMBELLI, S. STRINGARI, ET J. DALIBARD, “Collective oscillations of a classical gas in a harmonic trap”, *Phys. Rev. A* **60**, 4851 (1999).
- [123] P. O. FEDICHEV, A. E. MURYSHEV, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Damping of low-energy excitations of a Bose-condensed gas in the hydrodynamic regime”, *cond-mat/9911238* (2000).
- [124] D. S. JIN, M. R. MATTHEWS, J. R. ENSHER, C. E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL, “Temperature dependent frequency shift ...”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 764 (2001).

- [125] Y. LE COQ ET A. ROBERT, *Dispositif d'imagerie pour observer un condensat de Bose-Einstein*, Rapport de stage, École Supérieure d'Optique, 1998.
- [126] D. CLEMENT, *Platine de pince optique et modélisation d'images de temps de vol*, Rapport de stage, DEA Physique Quantique, Université Paris VI, 2003.
- [127] F. DALFOVO, S. GIORGINI, M. GUILLEUMAS, L. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, "Collective and single-particle excitations of a trapped Bose gas", *Phys. Rev. A* **56**, 3840 (1997).
- [128] H. SHI ET W.-M. ZHENG, "Critical temperature of a trapped interacting Bose gas", *Phys. Rev. A* **56**, 1046 (1997).
- [129] H. SHI ET W.-M. ZHENG, "Energy of a trapped interacting Bose gas", *Phys. Rev. A* **56**, 2984 (1997).
- [130] P. PEDRI, D. GUÉRY-ODELIN, ET S. STRINGARI, "Dynamics of a classical gas including dissipative and mean-field effects", *cond-mat/0305624* (2003).
- [131] D. GUÉRY-ODELIN, "Mean-field effects in a classical gas", *Phys. Rev. A* **66**, 033613 (2002).
- [132] C. MENOTTI, P. PEDRI, ET S. STRINGARI, "Expansion of an interacting Fermi gas", *Phys. Rev. Lett.* **89**, 250402 (2002).
- [133] H. WU ET E. ARIMONDO, "Expansion of the non-condensed trapped Bose gas in Bose-Einstein condensation", *Europhys. Lett.* **43**, 141 (1998).
- [134] G. M. KAVOULAKIS, C. J. PETHICK, ET H. SMITH, "Collisional relaxation in diffuse clouds of trapped bosons", *Phys. Rev. A* **61**, 053603 (2001).
- [135] E. ZAREMBA, T. NIKUNI, ET A. GRIFFIN, "Dynamics of a trapped Bose gas at finite temperature", *J. Low Temp. Phys.* **43**, 141 (1999).
- [136] M. BIJLSMA ET H. STOOF, "Effect on interactions on the critical temperature of a dilute Bose gas", *Phys. Rev. A* **54**, 5085 (1996).
- [137] P. GRÜTER, D. CEPERLEY, ET F. LALOË, "Critical temperature of Bose-Einstein condensation for hard-spheres", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3549 (1997).
- [138] G. BAYM, J.-P. BLAIZOT, M. HOLZMANN, F. LALOË, ET D. VAUTHERIN, "The transition temperature of the dilute interacting Bose gas", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1703 (1999).
- [139] M. HAQUE, "Weakly non-ideal Bose gas : comments on critical temperature calculations", *cond-mat/0302076* (2003).
- [140] M. HOLZMANN, G. BAYM, J.-P. BLAIZOT, ET F. LALOË, "Nonanalytic dependence of the transition temperature of the homogeneous dilute Bose gas on scattering length", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120403 (2001).
- [141] V. A. KASHURNIKOV, N. V. PROKOF'EV, ET B. V. SVISTUNOV, "Critical temperature shift in a weakly interacting Bose gas", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120402 (2001).
- [142] P. ARNOLD ET G. MOORE, "BEC transition temperature of a dilute homogeneous Bose gas", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120401 (2001).
- [143] P. ARNOLD ET B. TOMÁŠIK, " T_c for trapped dilute Bose gases : A second-order result", *Phys. Rev. A* **64**, 053609 (2001).

- [144] J. D. REPPY, B. C. CROOKER, B. HEBRAL, A. D. CORWIN, J. HE, ET G. M. ZASSENHAUS, “Density Dependence of the Transition Temperature in a Homogeneous Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2060 (2000).
- [145] G. CHAPLINE, JR, “Theory of the superfluid transition in liquid helium”, *Phys. Rev. A* **3**, 1671 (1971).
- [146] M. HOUBIERS, H. STOOF, ET E. A. CORNELL, “Critical temperature of a trapped Bose gas : mean-field theory and fluctuations”, *Phys. Rev. A* **56**, 2041 (1997).
- [147] G. METIKAS, O. ZOBAY, ET G. ALBER, “Thermodynamics of a trapped interacting Bose gas and the renormalization group”, *cond-mat/0307391* (2003).
- [148] P. E. SOKOL, dans *Bose-Einstein condensation*, ÉDITÉ PAR A. GRIFFIN, D. W. SNOKE, ET S. STRINGARI (Cambridge Univ. Press, 1993), p. 51.
- [149] V. V. GOLDMAN, I. F. SILVERA, ET A. J. LEGGETT, “Density profiles of a weakly-interacting Bose gas”, *Phys. Rev. B* **24**, 2870 (1981).
- [150] D. A. HUSE ET E. SIGGIA, “The density distribution of a weakly interacting Bose gas in an external potential”, *J. Low Temp. Phys.* **46**, 137 (1982).
- [151] V. BAGNATO, D. E. PRITCHARD, ET D. KLEPPNER, “Bose-Einstein condensation in an external potential”, *Phys. Rev. A* **35**, 4354 (1988).
- [152] J. OLIVA, “Density profile of the weakly interacting Bose gas confined in a potential well : Nonzero temperature”, *Phys. Rev. B* **39**, 4197 (1989).
- [153] A. MINGUZZI, S. CONTI, ET M. P. TOSI, “Internal energy and condensed fraction of a trapped interacting Bose gas”, *J. Phys : Condens. Matter* **9**, L33 (1997).
- [154] M. NARASCHEWSKI ET D. M. STAMPER-KURN, “Semi-analytical description of a trapped Bose gas at finite temperature”, *Phys. Rev. A* **58**, 2423 (1998).
- [155] F. FERLAINO, P. MADDALONI, S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, C. FORT, M. MODUGNO, ET M. INGUSCIO, “Dynamics of a Bose-Einstein condensate at finite temperatures in an atom-optical coherence filter”, *Phys. Rev. A* **66**, 011604(R) (2002).
- [156] P. STOREY ET C. COHEN-TANNOUJDI, “The Feynman path integral approach to atomic interferometry : a tutorial.”, *J. Phys. II France* **4**, 1999 (1994).
- [157] T. L. GUSTAVSON, P. BOUYER, ET M. A. KASEVICH, “Precision rotation measurements with an atom interferometer gyroscope”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2046 (1997).
- [158] A. PETERS, K. Y. CHUNG, ET S. CHU, “Measurement of the gravitational acceleration by dropping atoms”, *Nature* **400**, 849 (1999).
- [159] J. M. MCGUIRK, G. T. FOSTER, J. B. FIXLER, M. J. SNADDEN, ET M. A. KASEVICH, “Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry”, *Phys. Rev. A* **65**, 033608 (2002).
- [160] D. S. WEISS, B. C. YOUNG, ET S. CHU, “Precision measurement of the photon recoil of an atom using atomic interferometry”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2706 (1993).
- [161] S. GUPTA, K. DIECKMANN, Z. HADZIBABIC, ET D. E. PRITCHARD, “Contrast interferometry using Bose-Einstein condensates to measure h/m and α ”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 140401 (2002).
- [162] A. P. CHIKKATUR, Y. SHIN, A. E. LEANHARDT, D. KIELPINSKI, E. TSIKATA, T. L. GUSTAVSON, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “A continuous source of Bose-Einstein condensed atoms”, *Science* **296**, 2193 (2002).

- [163] P. CREN, C. F. ROOS, A. ACLAN, J. DALIBARD, ET D. GUÉRY-ODELIN, “Loading of a cold atomic beam into a magnetic guide”, *Eur. Phys. J. D* **20**, 107 (2002).
- [164] M. KÖHL, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Measuring the temporal coherence of an atom laser beam”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160404 (2001).
- [165] I. BLOCH, M. KÖHL, M. GREINER, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Optics with an atom laser beam”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 030401 (2001).
- [166] M. KÖHL, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Continuous detection of an atom laser beam”, *Phys. Rev. A* **65**, 021606 (2002).
- [167] R. J. BALLAGH, K. BURNETT, ET T. F. SCOTT, “Theory of an output coupler for Bose-Einstein condensed atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1607 (1997).
- [168] H. STECK, M. NARASCHEWSKI, ET H. WALLIS, “Output of a pulsed atom laser”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1 (1998).
- [169] M. EDWARDS, D. A. GRIGGS, P. L. HOLMAN, C. W. CLARK, S. L. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS, “Properties of a Raman atom-laser output coupler”, *J. Phys. B* **32**, 2935 (1999).
- [170] G. M. MOY ET C. M. SAVAGE, “Output coupling for an atom laser by state change”, *Phys. Rev. A* **56**, R1087 (1997).
- [171] G. M. MOY, J. J. HOPE, ET C. M. SAVAGE, “Atom laser based on Raman transitions”, *Phys. Rev. A* **55**, 3631 (1997).
- [172] Y. B. BAND, P. S. JULIENNE, ET M. TRIPPENBACH, “Radio-frequency output coupling of the Bose-Einstein condensate for atom lasers”, *Phys. Rev. A* **59**, 3823 (1999).
- [173] J. SCHNEIDER ET A. SCHENZLE, “Output from an atom laser : theory vs. experiment”, *Applied Physics B* **69**, 353 (1999).
- [174] C. J. BORDÉ, “Theoretical tools for atom optics and atom interferometry”, *C. R Acad. Sc. - séries IV - Physics* **2**, 509 (2001).
- [175] R. J. BALLAGH ET C. M. SAVAGE, dans *Proceedings of the Thirteenth Physics Summer School : Bose-Einstein Condensation : Atomic Physics to Quantum Fluids*, ÉDITÉ PAR C. SAVAGE ET M. DAS (World Scientific, Singapore, 1999), cond-mat/0008070.
- [176] B. D. ESRY, C. H. GREENE, J. P. BURKE, JR., ET J. L. BOHN, “Hartree-Fock theory for double condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3594 (1997).
- [177] C. COHEN-TANNOUJDI, J. DUPONT-ROC, ET G. GRYNBERG, *Processus d’interaction entre photons et atomes* (CNRS Inter-Editions, Paris, 1992).
- [178] G.-L. INGOLD, “Path Integrals and Their Application to Dissipative Quantum Systems”, *e-print quant-ph/0208026* (2002).
- [179] L. MANDEL ET E. WOLF, *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1990).
- [180] C. HENKEL, *Réflexion et diffraction d’atomes lents par un miroir à onde évanescente*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 1996.
- [181] C. HENKEL, J.-Y. COURTOIS, ET A. ASPECT, “Atomic diffraction by a thin phase grating”, *J. Phys. II* **4**, 1955 (1994).
- [182] T. BUSCH, M. KÖHL, T. ESSLINGER, ET K. MÖLMER, “Transverse mode of an atom laser”, *Phys. Rev. A* **65**, 043615 (2002).

- [183] A. GÖRLITZ *et al.*, “Realization of Bose-Einstein condensates in lower dimensions”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).
- [184] M. GREINER, I. BLOCH, O. MANDEL, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160405 (2001).
- [185] D. CASSETTARI, B. HESSMO, R. FOLMAN, T. MAIER, ET J. SCHMIEDMAYER, “Beam splitter for guided atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5483 (2000).
- [186] W. HÄNSEL, P. HOMMELHOFF, T. W. HÄNSCH, ET J. REICHEL, “Bose-Einstein condensation on a chip”, *Nature* **413**, 498 (2001).
- [187] H. OTT, J. FORTÀGH, G. SCHLOTTERBECK, A. GROSSMANN, ET C. ZIMMERMANN, “Bose-Einstein condensation in a surface microtrap”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 230401 (2001).
- [188] E. ANDERSSON, T. CALARCO, R. FOLMAN, M. ANDERSSON, B. HESSMO, ET J. SCHMIEDMAYER, “Multimode interferometer for guided matter waves”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 100401 (2002).
- [189] D. HELLWEG *et al.*, “Phase fluctuations in Bose-Einstein condensates”, *App. Phys. B* **73**, 781 (2001).
- [190] H. KREUTZMANN *et al.*, “Characterization and control of phase fluctuations in Bose-Einstein condensates”, *App. Phys. B* **76**, 165 (2003).
- [191] C. MENOTTI ET S. STRINGARI, “Collective oscillations of a trapped 1D gas”, *Phys. Rev. A* **66**, 043610 (2002).
- [192] W. KETTERLE ET N. J. VAN DRUTEN, “Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions”, *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).
- [193] N. J. VAN DRUTEN ET W. KETTERLE, “Two-Step Condensation of the Ideal Bose Gas in Highly Anisotropic Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 549 (1997).
- [194] M. OLSHANII, “Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938 (1998).
- [195] T.-L. HO ET M. MA, “Quasi 1d and 2d dilute Bose gas in magnetic trap : existence of off-diagonal order and anomalous quantum fluctuations”, *J. Low. Temp. Phys* **61**, 115 (1999).
- [196] J. W. KANE ET L. P. KADANOFF, “Long-range order in superfluid Helium”, *Phys. Rev.* **155**, 80 (1967).
- [197] P. C. HOHENBERG, “Existence of long-range order in one and two dimensions”, *Phys. Rev.* **157**, 383 (1967).
- [198] N. D. MERMIN ET H. WAGNER, “Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-Dimensional isotropic Heisenberg models”, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966).
- [199] D. S. PETROV, M. HOLZMANN, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Bose-Einstein condensation in quasi-2D trapped gases”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2551 (2000).
- [200] A. I. SAFONOV, S. A. VASILYEV, I. S. YASNIKOV, I. I. LUKASHEVICH, ET S. JAAKKOLA, “Observation of Quasicondensate in Two-Dimensional Atomic Hydrogen”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4545 (1998).

- [201] A. I. SAFONOV, S. A. VASILYEV, I. S. YASNIKOV, I. I. LUKASHEVICH, ET S. JAAKKOLA, “Experimental Evidence for a New State in 2D Bose Gas : Quasi-Condensation in Atomic Hydrogen”, *J. Low Temp. Phys.* **113**, 201 (1998).
- [202] J. M. HALDANE, “Effective Harmonic-Fluid Approach to Low-Energy Properties of One-Dimensional Quantum Fluids”, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1840 (1981).
- [203] K. V. KHERUNTSYAN, D. M. GANGARDT, P. D. DRUMMOND, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Pair correlations in a finite-temperature 1D Bose gas”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040403 (2003).
- [204] Y. CASTIN, R. DUM, E. MANDONNET, A. MINGUZZI, ET I. CARUSOTTO, “Coherence properties of a continuous atom laser”, *J. Mod. Opt.* **47**, 2671 (2000).
- [205] M. D. GIRARDEAU ET E. M. WRIGHT, “Breakdown of Time-Dependent Mean-Field Theory for a One-Dimensional Condensate of Impenetrable Bosons”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5239 (2000).
- [206] D. M. GANGARDT ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Stability and phase coherence of trapped 1D Bose gases”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 010401 (2003).
- [207] P. O. FEDICHEV ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Critical velocity in a cylindrical Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* (2001).
- [208] E. ZAREMBA, “Sound propagation in a cylindrical Bose-condensed gas”, *Phys. Rev. A* **57**, 518 (1998).
- [209] G. M. KAVOULAKIS ET C. J. PETHICK, “Quasi-one-dimensional character of sound propagation in elongated Bose-Einstein condensed clouds”, *Phys. Rev. A* **58**, 1563 (1998).
- [210] D. HELLWEG, L. CACCIAPUOTI, M. KOTTKE, T. SCHULTE, K. SENGSTOCK, W. ERTMER, ET J. J. ARLT, “Measurement of the spatial correlation function of a phase-fluctuating Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett* **91**, 010406 (2003).
- [211] P. L. GOULD, G. A. RUFF, ET D. E. PRITCHARD, “Diffraction of atoms by light : the near-resonant Kapitza-Dirac effect”, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 827 (1986).
- [212] P. J. MARTIN, B. G. OLDAKER, A. H. HIKLICH, ET D. E. PRITCHARD, “Bragg scattering of atoms from a standing light wave”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 515 (1988).
- [213] D. M. GILTNER, R. W. MCGOWAN, ET S. A. LEE, “Atom interferometer based on Bragg scattering of atoms from standing light waves”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2638 (1995).
- [214] M. A. KASEVICH, D. WEISS, E. RIIS, K. MOLER, S. KASAPI, ET S. CHU, “Atomic velocity selection using stimulated Raman transitions”, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2297 (1991).
- [215] J.-Y. COURTOIS, G. GRYNBERG, B. LOUNIS, ET P. VERKERK, “Recoil-induced resonances in cesium : an atomic analog to the free electron laser”, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3017 (1994).
- [216] M. KOZUMA, L. DENG, E. W. HAGLEY, L. WEN, R. LUTWAK, K. HELMERSON, S. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS, “Bragg diffraction of a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999).
- [217] D. M. STAMPER-KURN, A. P. CHIKKATUR, A. GÖRLITZ, S. INOUE, S. GUPTA, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “Excitation of phonons in a Bose-Einstein condensate by Bragg scattering”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2876 (1999).

- [218] D. M. STAMPER-KURN ET W. KETTERLE, dans *Proceedings of the Les Houches Summer School - session LXXII in 1999*, ÉDITÉ PAR R. KAISER, C. WESTBROOK, ET F. DAVID (Springer, New York, 1999), p. 137.
- [219] J. STEINHAUER, R. OZERI, N. KATZ, ET N. DAVIDSON, “Excitation spectrum of a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120407 (2002).
- [220] J. E. SIMSARIAN *et al.*, “Imaging the phase of a Bose-Einstein condensate wavefunction”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2040 (2000).
- [221] K. BONGS, S. BURGER, S. DETTMER, D. HELLWEG, J. J. ARLT, W. ERTMER, ET K. SENGSTOCK, “A waveguide for Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **61**, R31602 (2000).
- [222] Y. TORII, Y. SUZUKI, M. KOZUMA, T. SUGIURA, L. DENG, ET E. W. HAGLEY, “A Mach-Zehnder-Bragg interferometer for Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **61**, R041602 (2000).
- [223] A. BRUNELLO, F. DALFOVO, L. P. PITAEVSKII, S. STRINGARI, ET F. ZAMBELLI, “Momentum transferred to a trapped Bose-Einstein condensate by stimulated light scattering”, *Phys. Rev. A* **64**, 063614 (2001).
- [224] P. B. BLAKIE, R. J. BALLAGH, ET C. W. GARDINER, “Theory of coherent Bragg spectroscopy”, *Phys. Rev. A* **65**, 033602 (2002).
- [225] P. C. HOHENBERG ET P. M. PLATZMAN, “High-energy neutron scattering from liquid ^4He ”, *Phys. Rev.* **152**, 198 (1966).
- [226] J. STEINHAUER, N. KATZ, R. OZERI, N. DAVIDSON, C. TOZZO, ET F. DALFOVO, “Bragg spectroscopy of the multibranch spectrum of an elongated Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060404 (2002).
- [227] Y. B. BAND, M. TRIPPENBACH, J. P. BURKE, JR., ET P. S. JULIENNE, “Elastic scattering loss of atoms from colliding Bose-Einstein condensate wave packets”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5462 (2000).
- [228] S. INOUE, A. P. CHIKKATUR, D. M. STAMPER-KURN, J. STENGER, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “Superradiant Rayleigh scattering from a Bose-Einstein condensate”, *Science* **285**, 571 (1999).
- [229] C. W. GARDINER, M. D. LEE, R. J. BALLAGH, M. J. DAVIS, ET P. ZOLLER, “Quantum Kinetic Theory of Condensate Growth : Comparison of Experiment and Theory”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5266 (1998).
- [230] Y. M. KAGAN, B. V. SVISTUNOV, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Kinetics of Bose-Einstein condensation in gases”, *Sov. Phys JETP* **75**, 387 (1992).
- [231] H.-J. MIESNER, D. M. STAMPER-KURN, M. R. ANDREWS, D. S. DURFEE, S. INOUE, ET W. KETTERLE, “Bosonic stimulation in the formation of a Bose-Einstein condensate”, *Science* **279**, 1005 (1998).
- [232] M. KÖHL, M. J. DAVIS, C. W. GARDINER, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Growth of Bose-Einstein condensates from thermal vapor”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 080402 (2002).
- [233] N. WHITLOCK ET I. BOUCHOULE, “Relative phase between two coupled quasi-condensates”, *cond-mat/0306282* (2003).
- [234] J. FORTÀGH, H. OTT, S. KRAFT, A. GÜNTHER, ET C. ZIMMERMANN, “Surface effects in magnetic microtraps”, *Phys. Rev. A* **66**, 041604(R) (2002).

- [235] W. KRAUTH, “Quantum Monte Carlo Calculations for a Large Number of Bosons in a Harmonic Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3695 (1996).

Résumé :

Dans ce mémoire, nous présentons trois études effectuées sur un condensat de Bose-Einstein dans un piège très anisotrope. Nous nous intéressons en premier lieu au comportement du nuage thermique à des température proches de la température critique. Nous mettons en particulier en évidence un décalage de la température critique et une réduction de la fraction condensée dûs aux interactions, en bon accord avec une description de type Hartree-Fock du nuage mixte. Dans une seconde partie, nous étudions théoriquement et expérimentalement le taux d'extraction et le mode spatial d'un laser à atomes extrait du condensat par un coupleur radio-fréquence. Nous concluons que les interactions sont en grande partie responsables de la divergence observée. Enfin, nous consacrons une part importante de ce mémoire à l'étude des fluctuations de phase dans un (quasi-)condensat très allongé, étude basée sur la mesure de la distribution en impulsion par spectroscopie de Bragg. Nous mettons en évidence que la distribution en impulsion devient Lorentzienne en présence de fluctuations de phase importantes. Nos mesures de la largeur en impulsion, et l'observation de fluctuations de densité fortement réduites par rapport à une distribution thermique « ordinaire », confirment la validité de l'approche de Bogoliubov pour décrire les quasi-condensats en dimensionnalité réduite.

Abstract :

In this Thesis, we report on the study of Bose-Einstein condensates in anisotropic traps. First, the behavior of the thermal cloud is investigated for temperatures close to the condensation threshold. A shift in the critical temperature and a reduction of the condensed fraction due to interactions are observed, in good agreement with a Hartree-Fock theory of the mixed cloud. A second study focuses on the extraction and propagation of atom lasers created through radio-frequency output coupling. Measurements of the transverse divergence identify as the primary contributor the mean field exerted by the condensate on the outcoupled atoms. The third part is devoted to the study of phase fluctuations in very elongated (quasi-)condensates through Bragg spectroscopy of the momentum distribution. We observe a Lorentzian line-shape of the momentum distribution, characteristic of strongly phase-fluctuating samples. Measurements of the momentum width, along with the observation of suppressed density fluctuations when compared to a thermal-like distribution, confirm the validity of the Bogoliubov approach to describe low-dimensional quasi-condensates.