

Résolution des équations intégrales pour la diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques - Stabilisation d'algorithmes itératifs et aspects de l'analyse numérique

Snorre H. Christiansen

▶ **To cite this version:**

Snorre H. Christiansen. Résolution des équations intégrales pour la diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques - Stabilisation d'algorithmes itératifs et aspects de l'analyse numérique. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2002. Français. NNT : . tel-00004520

HAL Id: tel-00004520

https://pastel.hal.science/tel-00004520

Submitted on 5 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur de l'Ecole Polytechnique

spécialité :

Mathématiques Appliquées

Snorre H. Christiansen

Résolution des équations intégrales pour la diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques

Stabilisation d'algorithmes itératifs et aspects de l'analyse numérique

Soutenue le 11 Janvier 2002 devant le Jury composé de :

Jean-Claude	Nédélec	Directeur
Patrick	Joly	Président
Alain	Bachelot	Rapporteur
Björn	Engquist	Rapporteur
Christoph	Schwab	Rapporteur
Toufic	Abboud	Examinateur
Abderrahmane	Bendali	Examinateur
François	Béreux	Examinateur

til Mamma og Pappa

Résolution des équations intégrales pour la diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques – *Stabilisation d'algorithmes itératifs et aspects de l'analyse numérique*

Résumé : Cette thèse porte sur la résolution numérique, par la méthode des équations intégrales de frontière de problèmes de diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques, en régime fréquentiel. La méthode de Galerkin avec des éléments finis (scalaires ou vectoriels) de surface conduit à des systèmes matriciels mal conditionnés. Dans une première partie, pour accélérer la convergence d'algorithmes itératifs, on propose et étudie théoriquement et numériquement des préconditionneurs basés sur les relations de Calderon qui lient les opérateurs intégraux apparaissant dans les équations. En électromagnétisme on utilise de plus des analogues discrets de la décomposition de Helmholtz des champs tangents. Dans une deuxième partie on utilise des estimations sur ces décompositions pour effectuer une nouvelle analyse numérique de l'équation intégrale de champ électrique. Cette analyse est étendue au cas de la diffraction par les surfaces ouvertes (écrans), modélisant les conducteurs parfaits minces.

Mots clés : diffraction d'ondes, équation intégrale, préconditionneur, formule de Calderon, décomposition de Helmholtz.

•

Solution of integral equations for scattering of acoustic and electromagnetic waves – *Stabilization of iterative algorithms and aspects of the numerical analysis*

Abstract : This thesis deals with the numerical solution of acoustic and electromagnetic time-harmonic scattering problems, by the boundary integral equation method. The Galerkin method with (scalar or vector) surface finite elements leads to ill-conditioned linear systems of equations. In the first part, in order to enhance the convergence of iterative solvers we propose and study theoretically and numerically preconditioners based on Calderon formulas, which link the involved integral operators. In electromagnetism we also use discrete analogues of the Helmholtz decomposition of tangent fields to construct stable discretizations of the operators. In the second part we use estimates on such decompositions to provide a new numerical analysis of the electric field integral equation. This analysis is extended to open surfaces (screens), modeling thin perfect conductors.

Key words : scattering of waves, integral equation, preconditioner, Calderon formula, Helmholtz decomposition.

AMS subject classification : 31B10, 35Q60, 65F35, 65N12, **65N38** (primary), 65R20, 78A45, **78M15** (secondary).

Takk!

Turkar toll som i tunet stend
Det hjelp korkje bark eller bar
Så er kvar mann
Som kjærleik vantar
Kvi skal han lenge leva!

Håvamål, env. 1200

Jean-Claude Nédélec a dirigé mon travail avec l'envergure d'esprit et la vision scientifique qui lui sont connues et dont c'est une chance exceptionnelle d'avoir pu bénéficier. Mais je tiens également à exprimer ma profonde gratitude pour la confiance, l'attention et le soutien qu'il m'a accordés tout au long de ce parcours, les jours fastes comme pendant les périodes d'errance.

Je suis très sensible au fait que tant de personnalités du monde de l'électromagnétisme ont bien voulu faire partie du jury de thèse, dont la présidence de Patrick Joly me réjouit au plus haut point.

Qu'Alain Bachelot ait consenti sans hésitation et dans un esprit fraternel à rapporter sur cette thèse témoigne d'une générosité que je ne pourrai pas oublier. Je garde aussi un souvenir ému et plein de reconnaissance du fait que Björn Engquist ait accepté de rapporter. Je remercie Christoph Schwab pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à mon travail et qui a été un important encouragement pendant la thèse.

Je remercie Toufic Abboud pour ses conseils avisés en analyse numérique et pour ses nombreux témoignages d'amitié fraternelle. Qu'Abderrahmane Bendali, pionnier de la méthode sur laquelle cette thèse porte, soit venu me touche beaucoup. François Béreux m'a aussi donné conseils et encouragements amicaux et je le remercie pour ses efforts constants pour permettre et faire aboutir ce projet parfois sinueux sinon ondulant. Je remercie également Jean-Paul Mar-

tinaud pour l'interaction positive avec son équipe.

Je remercie chaleureusement Annalisa Buffa de m'avoir tant appris sur les surfaces non-régulières et d'avoir supporté mon caractère pendant notre collaboration.

Je tiens également à remercier Geo Boléat ainsi que Jeanne Bailleul, Nathalie Limonta et Liliane Doaré pour tout leur travail (effectué souvent à mon insu) et la gentillesse avec laquelle j'ai été accueilli et entouré au CMAP. Cette thèse repose aussi sur l'utilisation de nombreux outils informatiques, et j'exprime ici ma gratitude envers Sylvain Ferrand, Pedro Ferreira, François Jouve, Aldjia Mazari et Natacha Vialle-Béreux. J'ai aussi bénéficié des conseils complémentaires de Habib Ammari et Frédéric Nataf.

De nombreuses autres personnes comptent dans le plaisir et la joie que j'ai eu à être au CMAP, et m'ont fait m'y sentir chez moi. J'ai apprécié en particulier la cohabitation avec Sylvie Mas-Gallic et la bonne humeur qu'inspire sensei Vincent Giovangigli. Je remercie enfin les autres thésards, post-docs, enseignants et chercheurs du labo. Chacun à leur façon ils ont contribué à mon bien-être et ils occupent bien plus de place dans mon souvenir (et j'espère aussi mon avenir) que sur cette page.

Table des matières

Introduction **1**

Des préconditionneurs pour les équations intégrales **15**

1 Acoustique **17**
1.1 Diffraction d'ondes 18
1.1.1 Cadre fonctionnel 18
1.1.2 Représentations intégrales 20
1.1.3 Equations intégrales 22
1.1.4 Formules de Calderon 24
1.2 Résolution numérique stabilisée 25
1.2.1 Discrétisation, conditionnement 25
1.2.2 Préconditionneurs variationnels 28
1.2.3 Applications à l'acoustique 30
1.2.4 Résultats numériques sur une cavité 31
1.2.5 Comportement aux résonances 33
1.3 Adaptation aux surfaces ouvertes 35
1.4 Géométries approchées 40

2 Electromagnetism **45**
2.1 The Electric Field Integral Equation 47
2.1.1 The continuous problem 47
2.1.2 Discretization 50
2.1.3 Calderon formulas 53
2.2 Some properties of some Galerkin spaces 55
2.2.1 Surface Finite Element spaces 55
2.2.2 Basic negative norm estimates 56
2.2.3 Approximation of harmonic fields 57
2.2.4 Discrete Helmholtz decomposition 59

2.3 Stable discretizations of the Calderon formulas 60
2.3.1 A flawed idea 61
2.3.2 Auxiliary spaces 63
2.3.3 Definition 64
2.3.4 Interpretation of the system 64
2.3.5 Interpretation of the projections 65
2.3.6 A characterization of the kernel of Θ_h 66
2.3.7 Approximation properties of the range of $\Theta_h^\star$ 68
2.3.8 Well-posedness 70
2.3.9 Stopping criterion 70
2.4 Behavior of the iterates 73
2.4.1 Stability, and convergence of Krylov subspaces 73
2.4.2 Convergence of the iterates 76
2.4.3 Evidence of super-linear convergence 79
2.5 Numerical results 81
2.5.1 Sphere 81
2.5.2 Cavity 83
2.5.3 Indented cube 84

The Electric Field Integral Equation 87

3 Discrete Fredholm properties for the EFIE 89
3.1 The Electric Field Integral Equation 91
3.1.1 Integral representation of interior and exterior waves . . . 91
3.1.2 Variational formulation and discretization 94
3.1.3 Galerkin methods in the presence of Gårding inequalities 94
3.2 Some strategies for the analysis of the EFIE 96
3.2.1 Helmholtz decomposition 96
3.2.2 Introduction of charge density 97
3.2.3 A canonical splitting 97
3.2.4 Reformulation of the EFIE as a saddle-point 98
3.3 Discrete Fredholm properties 100
3.3.1 Results on left semi-Fredholm operators 100
3.3.2 Discrete left semi-Fredholm operators 101
3.3.3 Error control of discrete LSF operators 103
3.3.4 Compact perturbations of discrete LSF operators 105
3.3.5 Extensions to quasi-conforming Galerkin approximations . 106
3.4 Inf-Sup estimates for the EFIE 107
3.4.1 Sufficient conditions for uniform Inf-Sup estimates 107
3.4.2 Sufficient conditions in integer exponent Sobolev spaces . 109
3.4.3 Some well known spaces 111
3.5 Back to the Helmholtz decomposition 113

4 The EFIE on Lipschitz screens **115**
4.1 Integration and differential operators on surfaces 118
4.1.1 Locally Lipschitz graph sub-manifolds with boundary . . 118
4.1.2 Integration on Γ 119
4.1.3 Traces on Γ 120
4.1.4 Jumps on Γ 120
4.1.5 Integration by parts in $\mathbb{E}$ 122
4.1.6 Differential operators on traces and jumps of smooth fields 123
4.1.7 Differential operators in the sense of distributions/currents 124
4.2 Sobolev spaces on Γ 125
4.2.1 The spaces $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ for $s \geq 0$ 125
4.2.2 Dual spaces 127
4.2.3 Sobolev spaces for the curl operator 128
4.2.4 Helmholtz decomposition 132
4.3 Electric field integral equation 132
4.3.1 Scattering problem 132
4.3.2 Integral representation 133
4.3.3 Variational formulation 135
4.3.4 The non-connected case 137
4.4 Discretization 137
4.4.1 Inf-Sup condition for the EFIE 138
4.4.2 Application to some Finite Element spaces 139
4.4.3 Convergence rates 143
4.4.4 A regularity result for the Neumann Laplacian 144
4.5 Addendum 145
4.5.1 A jump formula 145
4.5.2 The Calderon approach to trace theorems 145

Annexes **147**

A Conditions Inf-Sup **149**
A.1 Discrétisation des problèmes variationnels 149
A.2 Conditions Inf-Sup 150
A.3 Conditions Inf-Sup discrètes 151
A.4 Forme linéaire et bilinéaire approchées 153
A.5 Perturbations compactes 155

B Gradients Conjugués **157**
B.1 Introduction 157
B.2 L'algorithme des gradients conjugués préconditionnés 158
B.3 Propriétés d'orthogonalité 160
B.4 Vitesse de convergence 161

C Implémentation **163**
C.1 Interfaces 163
C.2 Maillages 164
C.3 Calcul des matrices 166
C.4 Algèbre linéaire 167

Bibliographie **169**

Introduction

"John Von Neumann believed that computers need a very good theory of partial differential equations ; on the one hand they need general existence, uniqueness and continuity theorems, to make sure that what they compute does exist and to show that it can be estimated as they do ; on the other hand computing is efficiently aided by the discovery of explicit solutions of special problems and by the study of the special functions appearing there."

Jean Leray
SIAM Review, Vol. 5, p. 321-334, 1963

"More is different."

Philip W. Anderson
Science, Vol. 177, p. 393-396, 1972

On s'intéresse dans cette thèse au calcul effectif de certaines ondes physiques, ou des quantités s'y rapportant, dans l'espace Euclidien tridimensionnel, noté $\mathbb{E}$. On garde en mémoire des applications à la simulation numérique par exemple d'haut-parleurs (ondes acoustiques) et d'antennes de radars ou de télécommunications (ondes électromagnétiques). Au cours des 20 ou 30 dernières années de nombreuses méthodes numériques ont été proposées, étudiées, améliorées et utilisées dans des codes académiques et commerciaux. Pourtant – les besoins en simulations semblant aller de pair avec les possiblités – dans des cas qui apparaissent aujourd'hui comme industriellement intéressants et traitables, les algorithmes existants sont trop lents ou instables pour fournir des réponses complètes. C'est notre objectif ici de contribuer au développement et à l'analyse d'algorithmes plus efficaces.

Après avoir rappellé sur le cas le plus simple (et le plus fondamental) la méthode utilisée, à savoir celle des équations intégrales et des éléments finis de frontière, telle qu'elle a vu le jour dans Nédélec-Planchard [62], nous exprimons plus précisément le problème d'instabilité. Ensuite nous esquissons le remède proposé par Steinbach-Wendland [72]. Son adaptation à des problèmes d'acoustique fait l'objet du premier chapitre. Ensuite nous rappelons l'extension de Bendali [10] de la méthode des équations intégrales aux problèmes de diffraction électromagnétique. La stabilisation (préconditionnement) et l'étude de la discrétisation Galerkin de cette équation font l'objet des trois autres chapitres [1].

•

Une onde acoustique est donnée par une fonction $P : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ (ou une distribution de ce type), où Ω est un ouvert de $\mathbb{E}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $P(x,t)$ est la pression au point x à l'instant t. Cette fonction satisfait l'équation des ondes :

$$c^2 \Delta_x P - \partial_t^2 P = 0, \tag{1}$$

où $c > 0$ est la vitesse de propagation (célérité). De plus P satisfait des conditions au bord sur $\partial\Omega$, par exemple la condition de Dirichlet homogène $P|_{\partial\Omega\times I} = 0$ (en un sens à préciser) pour un obstacle mou, ou la condition de Neumann homogène, qui s'écrit notant n une normale sur $\partial\Omega$, $\partial_n P|_{\partial\Omega\times I} = 0$, pour un obstacle dur.

Si on suppose que P est une onde harmonique en temps, i.e. est de la forme :

$$P(x,t) = \mathfrak{Re}(p(x)e^{-i\omega t}) \tag{2}$$

pour une pulsation $\omega > 0$ et une fonction $p : \Omega \to \mathbb{C}$, alors p doit satisfaire *l'équation d'Helmholtz* :

$$\Delta p + k^2 p = 0, \tag{3}$$

où $k = \omega/c$ est appellée *nombre d'onde* de p, et des conditions au bord $p|_{\partial\Omega} = 0$ (Dirichlet) ou $\partial_n p|_{\partial\Omega} = 0$ (Neumann).

Il y aurait beaucoup à dire sur les relations entre l'équation de Helmholtz et l'équation des ondes, notamment par l'intermédiaire de la transformée de Fourier. Nous renvoyons à Taylor [110] pour une introduction à la théorie de Lax-Phillips. Ici nous laissons de côté l'aspect temporel et nous nous concentrons sur le calcul de solutions de l'équation de Helmholtz pour des nombres d'onde k donnés. Pour une antenne fonctionnant à une fréquence fixe ce calcul correspond au régime permanent.

On suppose qu'on connait une onde incidente p^{inc} (de nombre d'onde k), et on cherche p tel que $p^{tot} = p^{inc} + p$ satisfait la condition au bord homogène sur $\partial\Omega$. Par exemple p^{inc} peut être une onde plane donnée par, pour tout $x \in \mathbb{E}$:

$$p^{inc}(x) = e^{ik\sigma\cdot x}, \tag{4}$$

1. Les résumés de chapitre sont signalés par le symbole ¶ .

où σ est un vecteur unitaire, la direction de propagation. Une attention particulière est accordée au problèmes extérieurs ; Ω est le complémentaire dans $\mathbb{E}$, supposé connexe, d'un compact (à bord suffisamment régulier). Rappelons que pour les applications qui nous intéressent la *longueur d'onde* $\lambda = 2\pi/k$ est du même ordre de grandeur que le diamètre de ce compact (l'objet diffractant). Pour obtenir un problème bien posé on ajoute la *condition de radiation* de Sommerfeld sur p à l'infini :

$$\partial_r p - ikp = o(1/r) \quad \text{avec} \quad r = |x|, \tag{5}$$

(ou une variante). Elle exprime que la fonction P donnée par (2) se propage vers l'infini.

Pour obtenir une expression maniable de p on utilise la méthode de représentation intégrale. Soit G_k le noyau de Green de $-\Delta - k^2$ sur $\mathbb{E}$ satisfaisant la condition de Sommerfeld :

$$G_k(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}. \tag{6}$$

Posons $\Gamma = \partial\Omega$, et cherchons p sous la forme d'un *potentiel simple couche*, i.e. pour tout $y \in \Omega$:

$$p(y) = \int_\Gamma G_k(x,y)u(x)\mathrm{d}x, \tag{7}$$

pour une fonction[2] u sur Γ. On note S_k l'opérateur de simple couche sur Γ, qui à u sur Γ associe la fonction $S_k u$ sur Γ donnée par, pour tout $y \in \Gamma$:

$$(S_k u)(y) = \int_\Gamma G_k(x,y)u(x)\mathrm{d}x, \tag{8}$$

La condition au bord de Dirichlet homogène pour p^{tot}, avec p donné par (7) s'écrit alors :

$$S_k u = -p^{inc}|_{\partial\Omega}. \tag{9}$$

Réciproquement, on montre que si k n'est pas une résonance de Dirichlet pour le problème intérieur, l'équation de simple couche (9) admet une unique solution, et le potentiel de simple couche correspondant (7) résout le problème extérieur correspondant. On est donc amené à résoudre des équations du type (9).

Elles peuvent être mises sous forme variationnelle. Avec des notations un peu abusives, il s'agit de trouver $u \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ tel que pour tout $v \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$:

$$\iint_{\Gamma\times\Gamma} G_k(x,y)u(x)v(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_\Gamma p^{inc}(y)v(y)\mathrm{d}y \tag{10}$$

2. Dans cette introduction le mot fonction est utilisé de façon quelque peu abusive ; de même le signe intégral est utilisé à des endroits où il serait plus prudent d'écrire une dualité entre espaces de Sobolev, et les opérateurs de trace sont naïvement écrits avec des valeurs ponctuelles. Ces abus de notations, qui aident l'intuition, seront justifés plus tard.

On utilise la méthode Galerkin. On choisit une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Γ et un espace de type élements finis $X_h \subset X = \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ construit sur $\mathcal{T}_h$. Le choix usuel est de prendre des fonctions constantes par triangle, convenablement transportées sur Γ. On cherche une approximation u_h de u sous la forme d'un $u_h \in X_h$ tel que pour tout $v_h \in X_h$:

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \tag{11}$$

où a et l sont les formes bilinéaires et linéaires sur X, apparaissant dans (10).

L'opérateur S_k étant d'ordre $-1 \neq 0$, le système matriciel correspondant à cette équation est en général *mal conditionné*. En particulier pour des pas de maillages h petits la convergence d'algorithmes itératifs est très lente. Les matrices n'étant pas symétriques définies positives (SDP) cette convergence n'est d'ailleurs pas garantie pour des algorithmes du type gradients conjugués (CG), et il arrive, notamment sur des objets présentant des cavités (tels que les haut-parleurs et les antennes), qu'elle n'ait pas lieu.

L'objet de la première partie de cette thèse est la construction de préconditionneurs *pour la discrétisation Galerkin des équations intégrales correspondant à la diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques. La deuxième partie est consacrée à de nouveaux résultats dans l'*analyse numérique *de ces équations intégrales en électromagnétisme.*

•

On peut aussi considérer le problème de Neumann, résolu par un *potentiel double couche* :

$$p(y) = \int_\Gamma \partial_{n(x)} G_k(x, y) u(x) \mathrm{d}x. \tag{12}$$

L'opérateur sur Γ qui apparait alors, noté N_k, est donné par :

$$(N_k u)(y) = -\partial_{n(y)} \int_\Gamma \partial_{n(x)} G_k(x, y) u(x) \mathrm{d}x \tag{13}$$

Etant donné un choix d'espace de Galerkin $X_h \subset \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ et de base de X_h, on note A_h la matrice de la forme bilinéaire induite par N_k sur X_h dans cette base. Cette matrice est appellée matrice de Galerkin de N_k.

Pour un problème Galerkin avec une matrice A_h SDP, il est bien connu qu'un bon préconditionneur pour A_h est obtenu si on sait construire une matrice SDP Z_h telle que les valeurs propres de $Z_h A_h$ sont dans un intervalle $[\alpha, \beta]$, pour des réels $0 < \alpha < \beta$ indépendants du raffinement du maillage h. On dit alors que A_h et Z_h^{-1} sont *spectralement équivalents* [3]. Il faut aussi que le précalcul associé

3. D'ailleurs de nombreux auteurs utilisent la convention que le préconditionneur est Z_h^{-1} et non Z_h, sans doute parce que les premiers préconditonneurs étaient obtenus en cherchant une approximation $\tilde{A}_h$ de A_h ayant une structure (par exemple creuse) facilitant son inversion.

à Z_h ne soit pas trop couteux et que la multiplication d'un uplet par Z_h ne soit pas trop lente.

Cependant il semblerait que Steinbach et Wendland [72] soient les premiers à avoir reconnu qu'un bon préconditionneur pour (la matrice de) S_0 puisse être construit à partir de (la matrice de) N_0, et vice versa. Nous renvoyons à leur article pour des références à des travaux apparentés antérieurs. Plus généralement, pour un opérateur SDP d'ordre s ils notent qu'un opérateur SDP d'ordre $-s$ donne, sous des hypothèses de stabilité LBB de la discrétisation, un préconditionneur spectralement équivalent. Beaucoup d'effort est consacré au cas d'opérateurs ayant un noyau non-nul. Ils donnent aussi des résultats numériques très prometteurs en dimension 2 d'espace.

•

¶ Le *chapitre 1* reprend avec plus de détails le cadre fonctionnel utilisé pour formuler le problème de diffraction acoustique. Nous y étudions la variante $k > 0$, non SDP, de la méthode de préconditionnement de Steinbach et Wendland. En vue aussi de son extension à l'électromagnétisme nous considérons le cadre général d'une forme bilinéaire inversible sur un espace de Hilbert et nous développons le point de vue qu'un préconditionneur est obtenu à partir d'une forme bilinéaire inversible sur un espace dual, lorsque des conditions Inf-Sup discrètes uniformes sont satisfaites.

Plus explicitement, considérons un problème variationnel sur un espace de Hilbert X :

$$u \in X \quad \text{et} \quad \forall u' \in X \quad a(u,u') = l(u'). \tag{14}$$

Supposons que nous connaissons un espace de Hilbert Y qui soit dual de X par une forme bilinéaire b sur $Y \times X$, ainsi qu'une forme bilinéaire inversible c sur Y. Supposons que (X_h) et (Y_h) soient deux familles de sous-espaces de dimensions finies de X et Y respectivement, munies de bases. On note A_h, B_h et C_h les matrices de Galerkin correspondantes. Si les trois formes bilinéaires satisfont des conditions Inf-Sup discrètes uniformes par rapport à h alors le préconditionneur $Z_h = B_h^{\star -1} C_h B_h^{-1}$, est tel que le conditionnement spectral de $Z_h A_h$ est borné indépendamment de h (et des choix de bases).

Nous vérifions ensuite que ces conditions Inf-Sup sont satisfaites pour le problème d'acoustique (sauf aux résonances), i.e. : $X = \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$, $Y = \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$; a, b et c donnés par :

$$a(u,u') = \langle N_k u, u' \rangle, \quad b(v,u) = \langle v, u \rangle, \quad c(v,v') = \langle S_{k'} v, v' \rangle; \tag{15}$$

et $X_h = Y_h$ l'espaces d'éléments finis curvilignes P^m continus sur $\mathcal{T}_h$. Ceci fait intervenir notamment la stabilité de la projection L^2 sur X_h, dans divers espaces de Sobolev.

Un point de vue complémentaire est que si Γ est de classe C^∞, alors en vertu les formules de Calderon $S_{k'} N_k - I/4$ est compact (d'ordre -2). Ainsi on

s'attend à ce que les valeurs propres s'accumulent (en un sens à préciser) en un seul point (à savoir 1/4), ce qui produirait une convergence supra-linéaire.

Nous donnons des résultats numériques sur une cavité, et quelques indications sur les performances de la méthode aux résonances. Une section est consacrée à l'extension de la méthode aux surfaces ouvertes, où on sort du cadre général ci-dessus. On y montre que la méthode la plus simple donne un conditionnement spectral borné par une puissance de $|\log h|$. Le principal lemme technique consiste à montrer (une version renforcée du fait) que l'application trace de Γ vers $\partial\Gamma$, sur X_h a une norme $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^0(\partial\Gamma)$ bornée par une puissance de $|\log h|$.

Ce chapitre comprend en particulier des synthèses détaillées des articles :

[133] S.H. Christiansen, J.-C. Nédélec : *Des préconditionneurs pour la résolution numérique des équations intégrales de frontière de l'acoustique* ; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., Vol. 330, No. 7, p. 617-622, 2000.

[134] S.H. Christiansen, J.-C. Nédélec : *Preconditioners for the boundary element method in acoustics* ; Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostella, 2000), SIAM, p. 776-781, 2000.

L'adaptation aux surfaces ouvertes est extraite du document de référence (non publié à ce jour) donné en appui de la Note [133] lors de la soumission initiale, conformément aux instructions aux auteurs. Une section sur l'approximation de la géométrie a aussi été ajoutée.

•

Considérons maintenant le problème de la diffraction d'une onde éléctromagnétique par un conducteur parfait. Plus précisément, dans $\mathbb{E}$ on considère comme ci-dessus un ouvert Ω, complémentaire d'un compact suffisamment régulier, on se donne une onde électromagnétique incidente (E^{inc}, H^{inc}) et on cherche (E, H) tel que :

$$\operatorname{curl} E = +i\omega\mu H \quad \text{et} \quad \operatorname{curl} H = -i\omega\epsilon E, \tag{16}$$

où μ est la perméabilité magnétique, ϵ la permittivité électrique et ω la pulsation. De plus on impose la condition de radiation de Silver-Müller à l'infini :

$$\mu^{1/2} H \times x/|x| - \epsilon^{1/2} E = o(1/|x|), \tag{17}$$

et la condition au bord sur $\partial\Omega = \Gamma$ de conducteur parfait (composante tangentielle nulle) pour le champ total $E^{tot} = E + E^{inc}$ s'écrit :

$$E_{\mathrm{T}} = -E^{inc}_{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

Le nombre d'onde associé est $k = \omega(\mu\epsilon)^{1/2}$. Cherchons E sous la forme d'un potentiel électrique dans Ω :

$$E(y) = (1 + (1/k^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}) \int_\Gamma G_k(x, y) u(x) \mathrm{d}x, \tag{19}$$

où l'inconnue u est un champ tangent sur Γ représentant le courant électrique. On introduit l'opérateur A_k qui au champ tangent u associe le champ tangent, composante tangentielle sur Γ du potentiel électrique E défini dans (19). La condition au bord de conducteur parfait s'écrit alors sous la forme $A_k u = v$. Cette équation est appellée EFIE (Electric Field Integral Equation).

Posons $X = \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, espace des champs tangents de régularité $-1/2$ à divergence de régularité $-1/2$. Mise sous forme variationnelle le problème à résoudre devient :

$$u \in X \quad \text{et} \quad \forall u' \in X \quad \langle A_k u, u' \rangle = -\langle E^{inc}, u' \rangle. \tag{20}$$

On rappelle que pour u et u' suffisamment réguliers :

$$\begin{aligned} \langle A_k u, u' \rangle \quad = \quad & \iint G_k(x,y) u(x) \cdot u'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdots \\ & -(1/k^2) \iint G_k(x,y) \operatorname{div} u(x) \operatorname{div} u'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{21}$$

Suivant Bendali [10] on résout ce problème variationnel en utilisant une méthode de Galerkin à éléments finis courbes, conformes $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{0}(\Gamma)$, du type Raviart-Thomas [67] (RT) ou Brezzi-Douglas-Marini [23] (BDM).

Le système matriciel est particulièrement mal conditionné. Via la décomposition de Helmholtz dans X (mise en valeur dans De La Bourdonnaye [18] et Nédélec [116]) :

$$u = \operatorname{grad} p + \operatorname{rot} q + \text{champ harmonique}, \tag{22}$$

on voit que l'opérateur A_k comporte un terme d'ordre 1 et un terme d'ordre -1 agissant sur des sous-espaces de dimensions infinies, supplémentaires dans X et que ces deux termes sont de signes *opposés*.

•

¶ Dans le *chapitre 2*, on se propose de construire un préconditionneur pour la discrétisation Galerkin de l'EFIE. Ce problème constitue la motivation principale de cette thèse. Pour une large part le chapitre 1 y était une préparation, alors que le chapitre 3 donne des compléments utilisés pour justifier la méthode proposée.

Abandonnant le point de vue matriciel, pour un espace de Galerkin X_h donné, on note $\mathcal{A}_h : X_h \to X_h^\star$ l'application induite par la forme bilinéaire sur X associée à A_k. Un préconditionneur pour $\mathcal{A}_h$ est une application $\mathcal{Z}_h : X_h^\star \to X_h$, qui, quand elle est incorporée dans une méthode itérative, réduit suffisamment le nombre d'itérations nécessaires, pour compenser le temps de multiplication par $\mathcal{Z}_h$ (et le précalcul éventuel qui lui est associé).

Notons B l'opérateur $u \mapsto u \times n$. Les formules de Calderon en électromagnétisme entrainent que l'opérateur $4k^2 B A_k B$ est un inverse de A_k, modulo un

opérateur compact. L'opérateur B induit une forme bilinéaire continue $b = \langle B\cdot,\cdot\rangle$ sur X, donc aussi un opérateur continu $\mathcal{B} : X \to X^\star$. L'opérateur $\mathcal{B}$ est un isomorphisme. On note aussi a_k (ou a) la forme bilinéaire sur X induite par A_k, et $\mathcal{A}(k) : X \to X^\star$ l'application induite par A_k. Quand k n'est pas une résonance du problème de Maxwell intérieur, $\mathcal{A}(k)$ est un isomorphisme. On est alors dans la situation où X est dual de X par la forme bilináire b, et où on connait une forme bilinéaire continue inversible sur ce dual, à savoir a lui-même.

Etant donné un espace de Galerkin X_h, notant $\mathcal{B}_h : X_h \to X_h^\star$ l'application induite par b, il est donc tentant de procèder comme en acoustique et proposer le préconditionneur :

$$\mathcal{Z}_h = \mathcal{B}_h^{\star -1} \mathcal{A}_h \mathcal{B}_h^{-1}. \tag{23}$$

Cependant, quand X_h est un espace usuel de type RT ou BDM, $\mathcal{Z}_h$ ainsi construit donne des résultats médiocres. La raison en est que la forme bilinéaire b, bien qu'inversible sur X, ne satisfait pas les conditions Inf-Sup sur X_h uniformes par rapport au pas de maillage h.

Pour obtenir une discrétisation stable de B on utilise des décompositions de Helmholtz discrètes. Nous ne considérons dans cette introduction que le cas le plus simple. Soit $(\mathsf{S}_h^0, \mathsf{S}_h^1, \mathsf{S}_h^2)$ le triplet d'espaces de Galerkin constitué dans l'ordre des EF scalaires continus P^1, des EF vectoriels de type RT de plus bas degré, et des EF scalaires P^0. Soit aussi $(\mathsf{S}_h'^0, \mathsf{S}_h'^1, \mathsf{S}_h'^2)$ un triplet d'espaces, qui peut être le même triplet que le précédant, ou être constitué dans l'ordre des EF scalaires continus P^2, des EF de type BDM de plus bas degré, et des EF scalaires P^0.

A partir d'une forme linéaire $l \in \mathsf{S}_h^{1\star}$ on détermine la solution (u, q) de :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathsf{S}_h^1 \\ q \in \mathsf{S}_h^{2\bullet} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \forall u' \in \mathsf{S}_h^1 & \langle u, u'\rangle + \langle q, \operatorname{div} u'\rangle & = \ l(u') \\ \forall q' \in \mathsf{S}_h^{2\bullet} & \langle q', \operatorname{div} u\rangle & = \ 0 \end{array} \right. . \tag{24}$$

Ensuite à (u, q) on associe l'élément suivant de $\mathsf{S}_h'^1$:

$$v = \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^1}(u \times n) - \operatorname{rot} \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{0\bullet}}(q), \tag{25}$$

où pour tout espace X_h, $\mathcal{P}_{\mathsf{X}_h}$ désigne la projection L_2-orthogonale sur X_h.

Soit $\Theta_h : \mathsf{S}_h^{1\star} \to \mathsf{S}_h'^1, l \mapsto v$ la composée de ces deux applications, et $\Theta_h^\star : \mathsf{S}_h'^{1\star} \to \mathsf{S}_h^{1\star\star} \approx \mathsf{S}_h^1$, son adjoint. Alors on pose :

$$\mathcal{Z}_h = \Theta_h^\star \mathcal{A}_h'(k) \Theta_h, \tag{26}$$

où $\mathcal{A}_h'(k) : \mathsf{S}_h'^1 \to \mathsf{S}_h'^{1\star}$ est l'application induite par $\mathcal{A}(k)$.

Le chapitre 2 consiste essentiellement à justifier cette construction de façon théorique et numérique. L'application $\mathcal{Z}_h$ n'est pas en général bijective. On montre cependant que :

1. $\mathcal{A}(k)$ satisfait une condition Inf-Sup discrète uniforme en h sur l'image de $\Theta_h^\star$, espace qui a les propriétés d'approximation usuelles. Ainsi la solution

de l'algorithme itératif satisfait la même étude d'erreur que la solution de Galerkin usuelle (sur S_h^1) ;

2. les espaces de Krylov associés à ce préconditionneur convergent, quand h tend vers 0, vers les espaces de Krylov associés au problème "continu". Ainsi les propriétés de convergence de l'algorithme itératif sont semblables à celles du problème continu.

Ces deux propriétés compensent à nos yeux l'absence d'une borne sur le conditionnement spectral. On montre aussi les graphes de convergence obtenus sur quelques cas tests, en particulier pour la diffraction par une cavité et par une surface à coins.

Ces travaux ont fait l'objet d'un brevet ainsi que des publications :

[135] S.H. Christiansen, J.-C. Nédélec : *Des préconditionneurs pour la résolution numérique des équations intégrales de frontière de l'électromagnétisme* ; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., Vol. 331, No. 9, p. 733-738, 2000.

[136] S.H. Christiansen, J.-C. Nédélec : *A preconditioner for the Electric Field Integral Equation based on Calderon formulas* ; Tech. Rep. 463 (submitted), CMAP Ecole Polytechnique Palaiseau, April 26th 2001.

•

¶ Le *chapitre 3* fournit le cadre nécessaire pour démontrer la condition Inf-Sup pour l'EFIE sur une classe d'espaces de Galerkin qui inclut les espaces standards ainsi que l'image de $\Theta_h^\star$ (voir le point 1. ci-dessus). On y donne aussi quelques indications sur le comportement du problème discret à la résonance.

Depuis Bendali [10] il semblerait qu'aucune étude numérique nouvelle ne soit consacrée à la discrétisation Galerkin de l'EFIE. D'autre part l'utilisation de décompositions de Helmholtz discrètes suggérait une approche différente à cette analyse. Elle est peut-être plus simple et donne en tout cas une estimation d'erreur optimale, qui semblait faire défaut jusqu'à présent.

Notons X l'espace $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, et a la forme bilinéaire sur X associée à l'EFIE. Les espaces de Galerkin sont notés X_h. L'EFIE ne rentre pas directement dans le cadre des perturbations compactes injectives des formes bilinéaires coercives, dont l'étude numérique est relativement standard. Pour s'y ramener on introduit des multiplicateurs de Lagrange, mais au lieu de considérer les fonctions $\mathrm{div}\, u_h$ pour $u_h \in X_h$ comme dans [10] on considère les élements w_h de X_h à divergence nulle. On note W_h le sous-espace de X_h de ces éléments, de même qu'on note W le noyau de div sur X. Suivant une variante d'une technique utilisée pour étudier le problème continu dans Nédélec [116], on est amené à étudier les systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in X_h \\ w \in W_h \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \forall v' \in X_h & a(v,v') + b(w,v') & = \; l(v') \\ \forall w' \in W_h & c(w',v) & = \; 0 \end{array} \right. , \tag{27}$$

où b est la restriction de a à $W \times X$, et c la restriction à $W \times X$ de la forme

bilinéaire SDP d sur X définie par :

$$d(u,u') = \iint G_0(x,y)u(x)\cdot u'(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdots \\ +(1/k^2)\iint G_0(x,y)\operatorname{div}u(x)\operatorname{div}u'(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{28}$$

On remarque que b est une perturbation compacte de c et que a satisfait une inégalité de Gårding sur le noyau à droite de c sur $W\times X$, noté (provisoirement) V. De plus pour c la condition de compatiblité de Brezzi est triviale. Les principales difficultés restantes sont donc que le noyau à droite de c sur $W_h\times X_h$, noté V_h n'est pas inclus dans V, et qu'on maîtrise encore moins bien le noyau à droite de b sur $W_h\times X_h$.

Pour traiter ce type de problèmes on introduit un cadre général où des propriétés de Fredholm sont exprimées en termes de conditions Inf-Sup. On définit un analogue discret de ces conditions Inf-Sup généralisées, appellé LSF discret (pour left semi-Fredholm), et on montre en particulier que :

- si un opérateur vérifie la condition LSF discrète et est injectif, alors il vérifie une condition Inf-Sup discrète uniforme au sens usuel ;
- la condition LSF discrète est stable par perturbations compactes (que les opérateurs soient injectifs ou non).

On revient alors au système (27). On remplace tous les noyaux G_k par G_0 ; c'est une perturbation compacte. On obtient ainsi un système symétrique, mais peut-être non-injectif. Les conditions de compatiblité sont triviales et on montre qu'il suffit de vérifier que le gap $\delta(V_h,V)$ tend vers 0 pour en déduire la propriété LSF discrète de ce système. Or premièrement la conditon LSF discrète pour ce système implique la conditon LSF discrète sur X_h pour l'opérateur obtenu en remplaçant G_k par G_0 dans la définition de A_k ; quand A_k est injectif la conditon Inf-Sup pour A_k sur X_h en découle. Deuxièmement quand X_h est un des espaces standards ou l'image de $\Theta_h^\star$ on peut déduire le fait que $\delta(V_h,V)\to 0$ de l'estimation suivante. Si u_h est un élément de X_h qui est L^2-orthogonal à W_h, et p vérifie $\Delta p = \operatorname{div}u_h$, alors :

$$|u_h - \operatorname{grad}p|_0 \le Ch|\operatorname{div}u_h|_0. \tag{29}$$

Autrement dit ces éléments u_h, bien qu'ils ne soient pas des gradients, jouent le rôle de gradients discrets. Ce fait a d'ailleurs été beaucoup utilisé récemment dans des contextes différents, en particulier l'étude des méthodes multigrilles et des problèmes aux valeurs propres en formulation mixte.

La propriété LSF discrète permet aussi de dire des choses sur les résonances intérieures. En effet on sait que les éléments du noyau de A_k quand k est une résonance intérieure, ne rayonnent pas dans le domaine extérieur. Ainsi ils ne devraient pas poser de problème si on ne s'intéresse qu'au diagramme de rayonnement associé à des ondes incidentes. En pratique après discrétisation on observe que des courants parasites sont bien présents dans la solution approchée

mais qu'ils rayonnent peu. C'est ce fait que nous avons essayé de quantifier. De la propriété LSF discrète on déduit que pour tout intervalle I compact et tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ et $h_0 > 0$ tel que si $k \in I$, $h < h_0$ et $u \in X_h$ alors :

$$\big(\sup_{u' \in X_h} |\langle A_k u, u' \rangle| / \|u'\|_X \leq \delta \|u\|_X \big) \Rightarrow \big(\|A_k u\|_{X'} \leq \epsilon \|u\|_X \big). \qquad (30)$$

Il s'ensuit que le champ rayonné par un courant parasite *discret* est arbitrairement plus petit que ce courant.

Cette approche à la discrétisation de l'EFIE a été brièvement esquissée dans [136] (sans indications sur les résonances), et constitue le contenu[4] de :

[131] S.H. Christiansen : *Discrete Fredholm properties and convergence estimates for the EFIE* ; Tech. Rep. 454 (submitted), CMAP Ecole Polytechnique Palaiseau, January 17th 2001.

On y a esquissé aussi une autre approche, plus proche encore de la décomposition de Helmholtz, qui est reprise dans le chapitre 4.

•

¶ Le *chapitre 4* poursuit l'étude de l'EFIE. Il a été écrit en collaboration avec Annalisa Buffa.

Dans de nombreuses applications industrielles la surface Γ n'est pas régulière. Il arrive aussi que l'objet diffractant soit très mince, et on considère alors que l'objet diffractant est correctement modélisé par une surface Γ à bord, appellée écran. Cette méthode est utilisée avec succès dans de nombreux codes industriels. Cependant à notre connaissance, si les équations de Maxwell ont bien été étudiées dans des domaines non réguliers et en présence d'écrans (voir en particulier [14] et [33]), l'EFIE n'a reçu de justification que sur les écrans réguliers (voir [2]) et même dans ce cas aucune analyse numérique n'a été proposée.

Nous explicitons donc un cadre fonctionnel inspiré de [77], [24] et [26], adapté à l'étude de l'EFIE sur les écrans de classe Lipschitz, et effectuons l'analyse numérique de l'EFIE sur les écrans polyédriques. De plus on autorise des écrans non-orientables.

Dans le cas régulier de nombreuses définitions de l'espace $X = \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ sont possibles et équivalentes. Posant $\Omega = \mathbb{E} \backslash \overline{\Gamma}$ le point de vue utile pour l'EFIE sur une surface non-régulière semble être celui des traces et des sauts de champs de Ω, doublé de quelques définitions d'espaces de Sobolev par cartes locales. Ainsi on définit par cartes locales les espaces scalaires $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ pour $s \in [-1, 1]$ et on définit l'espace des champs tangents $\mathrm{H}^{1/2}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ comme le sous-espace de $\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ constitué des traces tangentielles de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})$. Sur les traces de champs réguliers on peut définir les opérateurs différentiels grad et div via des intégrations par parties dans Ω ; par dualisation on obtient des opérateurs différentiels au sens des distributions. Par cartes locales on montre que l'opérateur grad admet une

4. Le présent chapitre est une version réorganisée de ce rapport.

(unique) extension continue en un opérateur $\mathrm{H}^1(\Gamma) \to \mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma)$. Si on définit $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ pour $s > 1$ comme étant l'espace des traces de $\mathrm{H}^{s+1/2}(\mathbb{E})$, on montre aussi que le gradient est continu par exemple $\mathrm{H}^{3/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{1/2}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$.

On définit alors X comme étant l'espace :

$$\{u \in \mathrm{H}^{1/2}_{\mathrm{T}}(\Gamma)' \ : \ \exists q \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)\ \forall p \in \mathrm{H}^{3/2}(\Gamma) \quad \langle u, \operatorname{grad} p\rangle = -\langle q, p\rangle\}. \tag{31}$$

Le champ q n'est autre que la divergence de u (correspondant à la charge électrique), et la condition ci-dessus exprime non seulement qu'il est de régularité $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mais aussi que le flux sortant de u à travers $\partial\Gamma$ est nul.

On montre que l'opérateur de saut est bien défini, continu et surjectif en tant qu'opérateur $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega) \to X$. Aussi, les éléments u de X admettent une unique décomposition de Helmholtz $u = \operatorname{grad} p + w$ avec $\operatorname{div} w = 0$ et p donné par le problème de Neumann :

$$p \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \text{et} \quad \forall p' \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \int \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} p' = -\langle \operatorname{div} u, p'\rangle. \tag{32}$$

Notant $P : X \to X$ le projecteur $u \mapsto \operatorname{grad} p$ on a ainsi la décomposition $X = V \oplus W$ avec V l'image[5] et W le noyau de P. Appliquant cette décomposition à la formulation variationnelle de l'EFIE sur X on constate que A_k satisfait des inégalités de Gårding sur V et W séparément (avec des signes opposés), et que les termes de couplage sont compacts. On en déduit l'inversiblité de $A_k : X \to X'$ ainsi que l'existence et l'unicité pour le problème de diffraction extérieur.

Alors que dans le chapitre 3 nous avons mis l'accent sur le point selle (27) nous basons ici l'étude numérique directement sur la décomposition de Helmholtz discrète des espaces de Galerkin X_h de type RT ou BDM. On pose $W_h = X_h \cap W$ et on note V_h l'espace :

$$V_h = \{u_h \in X_h \ : \ \forall w_h \in W_h \quad \int u_h \cdot w_h = 0\} \tag{33}$$

On a donc $X_h = V_h \oplus W_h$, mais *pas* $V_h \subset V$. Le problème de Galerkin sur X_h revient alors à chercher $u_h \in X_h$ sous la forme $u_h = v_h + w_h$, avec (v_h, w_h) solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_h \in V_h \\ w_h \in W_h \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \forall v'_h \in V_h & a(v_h, v'_h) + a(w_h, v'_h) = l(v'_h) \\ \forall w'_h \in W_h & a(v_h, w'_h) + a(w_h, w'_h) = l(w'_h) \end{array} \right. . \tag{34}$$

En utilisant une variante plus technique de (29) valable sur des surfaces non-régulières et due à Hiptmair et Schwab [44] (pour les surfaces fermées), on montre que $\delta(V_h, V) \to 0$, et on déduit de là la condition Inf-Sup discrète uniforme. L'étude d'erreur peut être déduite de la condition Inf-Sup en considérant

5. Cette notation diffère de celle employée pour le chapitre 3, mis à part sa dernière section.

des sauts d'éléments finis de Nédélec [58][61], dans le domaine extérieur Ω (éventuellement tronqué).

Dans le cas particulier d'une surface fermée on obtient une étude d'erreur qui améliore celle de [44] en cela que l'exposant de régularité du Laplacien sur Γ n'y apparait pas explicitement.

Ce travail a fait l'objet de la publication :

[130] A. Buffa, S.H. Christiansen : *The Electric Field Integral Equation on Lipschitz screens : definitions and numerical approximation* ; Tech. Rep. 1216 (submitted), Institute of Numerical Analysis C.N.R. Pavia, 2001.

Ce rapport contient aussi une approche intrinsèque (qui évite de faire appel aux éléments finis de volume) à l'étude d'erreur.

•

En *annexe* nous fournissons des rappels sur les conditions Inf-Sup et l'algorithme des gradients conjugués, ainsi que des renseignements sur l'implémentation des préconditionneurs proposés.

Des préconditionneurs pour les équations intégrales

Chapitre 1

Acoustique

Résumé : Après des rappels généraux sur les équations intégrales, nous étendons la méthode de préconditionnement introduite par O. Steinbach et W.L. Wendland dans [72] aux opérateurs satisfaisant des conditions Inf-Sup. Nous associons ainsi à la matrice de Galerkin A_h de l'opérateur de simple couche S_k ou l'opérateur hyper-singulier N_k, une matrice implicite Z_h telle que la multiplication par Z_h soit de même complexité que la multiplication par A_h, et $Z_h A_h$ modélise une perturbation compacte de l'identité. Nous démontrons que sur des familles de maillages suffisamment régulières le conditionnement spectral de $Z_h A_h$ est borné indépendamment du pas h. Des expériences numériques illustrent l'efficacité de la méthode. Enfin nous l'adaptons aux écrans, pour lesquels nous démontrons que le conditionnement est borné par une puissance de $|\log h|$.

Abstract : After having detailed the functional setting for integral equations applied to the Helmholtz equation $\Delta p + k^2 p = 0$, we extend the preconditioning technique developed by O. Steinbach and W.L. Wendland in [72] to operators satisfying Inf-Sup conditions. Thus to the Galerkin matrix A_h of the single layer operator S_k or the hypersingular operator N_k we associate an implicit preconditioning matrix Z_h such that multiplication by Z_h is of the same complexity as multiplication by A_h, and $Z_h A_h$ models a compact perturbation of the identity operator. We prove that the spectral condition number of $Z_h A_h$ is uniformly bounded for any regular enough family of meshes, as $h \to 0$. Numerical evidence of the efficiency of the preconditioning technique is also provided, for cavities and close to resonant wavenumbers. Finally we adapt the method to screens for which we prove a polylogarithmic bound on the spectral condition number.

Pour une introduction à ce chapitre nous renvoyons à l'introduction générale.

1.1 Diffraction d'ondes

1.1.1 Cadre fonctionnel

Nous regroupons ici des résultats d'analyse fonctionnelle qui nous seront utiles. Pour des précisions et des démonstrations on pourra consulter (par ordre chronologique d'édition) Paquet [64], Abboud [1], Terrasse [78], Taylor [110], Cessenat [112] et Nédélec [116].

Pour toute partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ on note $\mathrm{H}^s(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{R}$ les espaces de Sobolev usuels sur Ω. En particulier $\mathrm{H}^0(\Omega) = \mathrm{L}^2(\Omega)$. On note aussi $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Omega)$ les espaces de Sobolev de champs de vecteurs correspondants. Ces définitions s'étendent aux parties ouvertes des variétés Riemanniennes compactes de classe C^∞.

Soit $\mathbb{E}$ un espace Euclidien de dimension trois (ainsi $\mathbb{E} \approx \mathbb{R}^3$). Sur les ouverts de $\mathbb{E}$ on considère les trois opérateurs différentiels usuels grad, curl et div. Pour chacun de ces operateurs op, $\mathrm{H}^s_{\mathrm{op}}(\Omega)$ désignera l'espace des champs (scalaires ou tangents) u de régularité H^s tels que $\mathrm{op}\, u$ défini au sens des distributions (ou courants) sur Ω soit un champ (scalaire ou tangent suivant les cas) de régularité H^s. Ainsi $\mathrm{H}^1(\Omega) = \mathrm{H}^0_{\mathrm{grad}}(\Omega)$. L'absence d'exposant s signifie $s = 0$.

Soit Ω_- un ouvert borné régulier de $\mathbb{E}$. On note Γ sa frontière, et Ω_+ le complémentaire de $\overline{\Omega_-} = \Omega_- \cup \Gamma$. Ainsi $\overline{\Omega_-}$ est une sous-variété à bord de $\mathbb{E}$, de classe C^∞ et de dimension trois. Son bord Γ est une sous-variété sans bord de $\mathbb{E}$ compacte et de dimension deux. Il hérite une structure Riemannienne de $\mathbb{E}$; en particulier on peut considérer les opérateurs différentiels :

$$\mathrm{grad} : \mathrm{H}^s(\Gamma) \to \mathrm{H}^{s-1}_{\mathrm{T}}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathrm{div} : \mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{s-1}(\Gamma). \tag{1.1.1}$$

Soit n la normale extérieure sur Γ relativement à Ω_-. Cette normale induit une orientation sur Γ et des automorphismes $u \mapsto u \times n$ de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)$. Elle permet de définir les opérateurs rotationnel scalaire et vectoriel par respectivement :

$$\mathrm{rot}\, u = (\mathrm{grad}\, u) \times n \quad \text{et} \quad \mathrm{rot}\, u = \mathrm{div}(u \times n). \tag{1.1.2}$$

Sur Γ la notation $\mathrm{H}^s_{\mathrm{op}}(\Gamma)$ sera utilisée avec la signification ci-dessus. Par ailleurs il existe un voisinage tubulaire de Γ sur lequel la projection orthogonale $\wp$ sur Γ est bien définie et régulière, et il nous arrivera d'étendre n à ce voisinage par $n(x) = n(\wp(x))$.

Traces On rappelle que les opérateurs de trace :

$$\gamma^\pm \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{D}(\overline{\Omega_\pm}) & \to & \mathscr{D}(\Gamma) \\ u & \mapsto & u|_\Gamma \end{array} \right. , \tag{1.1.3}$$

admettent, pour $s > 0$, des extensions continues uniques :

$$\gamma^{\pm} : \mathrm{H}^{1/2+s}(\Omega_{\pm}) \to \mathrm{H}^{s}(\Gamma), \tag{1.1.4}$$

et que celles-ci sont surjectives. On utilise la même notation pour les traces vectorielles non nécessairement tangentes des éléments de $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2+s}(\Omega_{\pm})$. L'image correspondante est $\mathrm{H}^{s}(\Gamma;\mathbb{E})$. On utilisera aussi les opérateurs de trace tangentielle et normale :

$$\gamma_{\mathrm{T}}^{\pm}\left\{\begin{array}{rcl}\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\overline{\Omega_{\pm}}) & \to & \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)\\ u & \mapsto & (u-(u\cdot n)n)|_{\Gamma}\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \gamma_{n}^{\pm}\left\{\begin{array}{rcl}\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\overline{\Omega_{\pm}}) & \to & \mathscr{D}(\Gamma)\\ u & \mapsto & (u\cdot n)|_{\Gamma}\end{array}\right. . \tag{1.1.5}$$

Lorsqu'il n'est pas nécessaire de préciser nous omettons l'exposant $\pm$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{H}^{1}(\mathbb{E}) & \overset{\mathrm{grad}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}) & \overset{\mathrm{curl}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\mathbb{E})\\ \gamma\ \downarrow & & \gamma_{\mathrm{T}}\ \downarrow & & \gamma_{n}\ \downarrow\\ \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) & \underset{\mathrm{grad}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}^{-1/2}(\Gamma) & \underset{\mathrm{rot}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)\end{array} \tag{1.1.6}$$

La composée de deux flèches horizontales est nulle.

Sauts Posons $\Omega = \Omega_{-} \cup \Omega_{+}$. On définit l'opérateur de saut $[\cdot]$ sur les champs (scalaires ou tangents) sur Ω par :

$$[u] = \gamma^{-}u - \gamma^{+}u, \tag{1.1.7}$$

de sorte qu'il est bien défini et continu en particulier comme opérateur $\mathrm{H}^{1}(\Omega)_{loc} \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{H}^{1}(\Omega) & \overset{\mathrm{grad}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega) & \overset{\mathrm{curl}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Omega)\\ [\cdot]\ \downarrow & & [\cdot\times n]\ \downarrow & & [\cdot\cdot n]\ \downarrow\\ \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) & \underset{\mathrm{rot}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma) & \underset{\mathrm{div}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)\end{array} \tag{1.1.8}$$

La composée de deux flèches horizontales est nulle.

Mesures multicouches de surface Les applications traces sur $\mathbb{E}$, notées ici $\gamma^{(i)}$:

$$\gamma^{(i)}\left\{\begin{array}{rcl}\mathscr{D}(\mathbb{E}) & \to & \mathscr{D}(\Gamma)\\ u & \mapsto & \partial_{n}^{i}u\end{array}\right. \tag{1.1.9}$$

sont surjectives et admettent des adjoints injectifs pour lesquels nous utilisons la notation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{D}(\Gamma)' & \to & \mathscr{D}(\mathbb{E})' \\ u & \mapsto & u\delta_\Gamma^{(i)} \end{array} \right. . \tag{1.1.10}$$

On notera $\gamma = \gamma^{(0)}$ et $\gamma' = \gamma^{(1)}$, et pour $u \in \mathscr{D}(\Gamma)'$, $u\delta_\Gamma = u\delta_\Gamma^{(0)}$ et $u\delta'_\Gamma = u\delta_\Gamma^{(1)}$, appellés mesures de simple couche et double couche respectivement. Il est à noter que ici la notation δ'_Γ s'apparente à la dérivation et pas à l'adjoint.

Des proprietés de continuité de $u \mapsto u\delta_\Gamma^{(i)}$ dans les espaces de Sobolev seront utilisées. En particulier puisque $\gamma : \mathrm{H}^1(\mathbb{E})_{loc} \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$, son adjoint est continu $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \to (\mathrm{H}^1(\mathbb{E})_{loc})'$. Les formules d'intégration par parties usuelles dans Ω_- et Ω_+ montrent que, au sens des distributions:

$$\begin{array}{llcll} \forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega)_{loc} & \mathrm{grad}_{\mathbb{E}}\, u & = & \mathrm{grad}_{\Omega}\, u & - \quad [u]n\delta_\Gamma \\ \forall u \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)_{loc} & \mathrm{curl}_{\mathbb{E}}\, u & = & \mathrm{curl}_{\Omega}\, u & + \quad [u \times n]\delta_\Gamma \\ \forall u \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Omega)_{loc} & \mathrm{div}_{\mathbb{E}}\, u & = & \mathrm{div}_{\Omega}\, u & - \quad [u \cdot n]\delta_\Gamma \end{array} \tag{1.1.11}$$

De plus les mesures de surface qui apparaissent dans ces formules agissent non seulement sur les champs (scalaires ou vectoriels suivant les cas) de classe $C^\infty(\mathbb{E})$, mais aussi sur ceux de classe $\mathrm{H}^1(\mathbb{E})$ (même $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\mathbb{E})$, $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})$ et $\mathrm{H}^1(\mathbb{E})$ respectivement).

1.1.2 Représentations intégrales

Etant donné un nombre d'onde $k > 0$, nous nous intéressons aux solutions p, dans Ω_- ou Ω_+ de l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = 0, \tag{1.1.12}$$

qui satisfont des conditions au bord sur Γ, de type Dirichlet ($p|_\Gamma = u$) ou Neumann ($\partial_n p|_\Gamma = u$). Pour les problèmes extérieurs (i.e. dans Ω_+) on impose aussi la condition de radiation de Sommerfeld :

$$\partial_\sigma p(x) - ikp(x) = o(1/|x|) \quad \text{avec } \sigma(x) = x/|x|. \tag{1.1.13}$$

On dit aussi qu'on impose aux ondes d'être sortantes. Dans la suite on fait l'hypothèse que Ω_+ est connexe.

Pour résoudre les problèmes de diffraction nous utilisons des représentations intégrales. Soit G_k le noyau de Green sortant pour $-\Delta - k^2$ sur $\mathbb{E}$:

$$G_k(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}. \tag{1.1.14}$$

On construit alors les potentiels de simple couche Φ_k et double couche Φ'_k définis a priori pour $u \in \mathrm{H}^0(\Gamma)$ et $y \in \Omega_+ \cup \Omega_-$ par :

$$(\Phi_k u)(y) = \int_\Gamma G_k(x,y)u(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad (\Phi'_k u)(y) = \int_\Gamma \partial_{n(x)} G_k(x,y)u(x)\mathrm{d}x. \tag{1.1.15}$$

Ces potentiels opèrent aussi sur les champs de vecteurs sur Γ (pas nécessairement tangents). Ils peuvent être exprimés en termes de convolution de distributions. Soit g_k la solution fondamentale sortante de $-\Delta - k^2$ sur $\mathbb{E}$. Alors on vérifie qu'on a :

$$\Phi_k u = g_k * (u\delta_\Gamma) \quad \text{et} \quad \Phi'_k u = g_k * (u\delta'_\Gamma) \tag{1.1.16}$$

La première expression permet d'étendre Φ_k en un opérateur continu $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{E})_{loc}$. En particulier si $u \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$, $[\Phi_k u] = 0$. On a alors aussi, puisque $\operatorname{grad} \Phi_k u \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Omega)_{loc}$:

$$\begin{aligned}
[\partial_n \Phi_k u]\delta_\Gamma &= [(\operatorname{grad} \Phi_k u)\cdot n]\delta_\Gamma && (1.1.17)\\
&= (\operatorname{div}_\Omega - \operatorname{div}_\mathbb{E}) \operatorname{grad}(g_k * u\delta_\Gamma) && (1.1.18)\\
&= (-k^2 - \Delta_\mathbb{E}) g_k * u\delta_\Gamma && (1.1.19)\\
&= u\delta_\Gamma && (1.1.20)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la *première formule de saut*, $[\partial_n \Phi_k u] = u$.

Concernant le potentiel de double couche on a $\operatorname{div}_\mathbb{E}(un\delta_\Gamma) = -u\delta'_\Gamma$, donc :

$$\Phi'_k u = -\operatorname{div}(g_k * un\delta_\Gamma). \tag{1.1.21}$$

Puisque sur les champs de vecteurs $\Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{curl}\operatorname{curl}$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}_\Omega \Phi'_k u &= -\operatorname{grad}_\Omega \operatorname{div}_\Omega (g_k * un\delta_\Gamma) && (1.1.22)\\
&= (-\operatorname{curl}_\Omega \operatorname{curl}_\Omega + k^2) g_k * un\delta_\Gamma. && (1.1.23)
\end{aligned}$$

Or $\operatorname{curl}_\mathbb{E}(un\delta_\Gamma) = (\operatorname{rot} u)\delta_\Gamma$, donc pour tout $u \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$:

$$\operatorname{curl}_\mathbb{E} g_k * (un\delta_\Gamma) = g_k * (\operatorname{rot} u\delta_\Gamma) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})_{loc}. \tag{1.1.24}$$

On obtient ainsi :

$$\operatorname{grad}_\Omega \Phi'_k u = -\operatorname{curl} g_k * (\operatorname{rot} u\delta_\Gamma) + k^2 g_k * (un\delta_\Gamma). \tag{1.1.25}$$

Donc $\operatorname{grad}_\Omega \Phi'_k u \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\mathbb{E})_{loc}$. En particulier $[\partial_n \Phi'_k u] = 0$. Ce calcul montre aussi que Φ'_k est continu $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^1(\Omega)_{loc}$. On a aussi :

$$\begin{aligned}
[\Phi'_k u] n\delta_\Gamma &= -[g_k * \operatorname{div}_\mathbb{E}(un\delta_\Gamma)] n\delta_\Gamma && (1.1.26)\\
&= (\operatorname{grad}_\mathbb{E} - \operatorname{grad}_\Omega) \operatorname{div} g_k * (un\delta_\Gamma) && (1.1.27)\\
&= (\Delta_\mathbb{E} - \Delta_\Omega) g_k * (un\delta_\Gamma) && (1.1.28)\\
&= -un\delta_\Gamma && (1.1.29)
\end{aligned}$$

Ce qui donne la *deuxième formule de saut*, $[\Phi'_k u] = -u$.

Ces calculs montrent que si $u \in \mathrm{H}^{1/2}(\Omega)$ et $v \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Omega)$, alors avec :

$$p = \Phi_k v - \Phi'_k u, \tag{1.1.30}$$

p est une solution dans $\mathrm{H}^1(\Omega)_{loc}$ de l'équation de Helmholtz dans Ω satisfaisant la condition de radiation de Sommerfeld. De plus $v = [\partial_n p]$ et $u = [p]$. Réciproquement on a le théorème suivant, dit *de représentation* :

Théorème 1.1.1 *Si p est une solution de l'équation de Helmholtz sur $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+$ de classe $\mathrm{H}^1(\Omega)_{loc}$ et satisfaisant la condition de radiation de Sommerfeld, alors on a $[p] \in \mathrm{H}^{1/2}(\Omega)$, $[\partial_n p] \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Omega)$ et :*

$$p = \Phi_k[\partial_n p] - \Phi'_k[p] \tag{1.1.31}$$

–Démonstration : Puisque $p \in \mathrm{H}^1(\Omega)_{loc}$ on a :

$$\mathrm{grad}_{\mathbb{E}}\, p = \mathrm{grad}_{\Omega}\, p - [p] n \delta_\Gamma \tag{1.1.32}$$

et puisque $\mathrm{grad}_\Omega\, p \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Omega)_{loc}$ on a :

$$\Delta_{\mathbb{E}} p = \Delta_\Omega p - [\partial_n p]\delta_\Gamma - \mathrm{div}_{\mathbb{E}}([p] n \delta_\Gamma) \tag{1.1.33}$$

D'autrepart $\Delta_\Omega p = -k^2 p$ et p est sortante ; il s'ensuit que :

$$p = g_k * \big([\partial_n p]\delta_\Gamma - [p]\delta'_\Gamma\big), \tag{1.1.34}$$

ce qui n'est autre que la formule annoncée. □

1.1.3 Equations intégrales

Les résultats précédents montrent que les deux opérateurs S_k et N_k définis par :

$$S_k u = \gamma \Phi_k u \quad \text{et} \quad N_k u = -\gamma' \Phi'_k u, \tag{1.1.35}$$

sont continus $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ et $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ respectivement. L'étude théorique et numérique de ces opérateurs repose sur la propriété de coercivité (voir Nédélec-Planchard [62]) :

Proposition 1.1.2 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$:*

$$\langle S_0 u, \overline{u} \rangle \geq 1/C \|u\|^2_{-1/2}. \tag{1.1.36}$$

–Démonstration : Pour tout $R > 0$ on note B_R la boule $\{x \ : \ |x| < R\}$ et S_R la sphère $\{x \ : \ |x| = R\}$; σ désigne le champ $x \mapsto x/|x|$. Dès que $\Gamma \subset B_R$ on a :

$$\langle S_0 u, [\partial_n \Phi_0 \overline{u}] \rangle = \int_{B_R} |\,\mathrm{grad}\, \Phi_0 u|^2 - \int_{S_R} (\Phi_0 u)(\partial_\sigma \Phi_0 \overline{u}). \tag{1.1.37}$$

Or $\Phi_0 u$ hérite des propriétés de décroissance à l'infini de g_0, en particulier :

$$\operatorname{grad}\Phi_0 u = O(1/|x|^2), \quad \Phi_0 u = O(1/|x|) \quad \text{et} \quad \partial_\sigma \Phi_0 \overline{u} = O(1/|x|^2). \tag{1.1.38}$$

Ainsi, passant à la limite $R \to \infty$, on obtient :

$$\langle S_0 u, \overline{u}\rangle = \int_{\mathbb{E}} |\operatorname{grad}\Phi_0 u|^2. \tag{1.1.39}$$

On conclut alors par la continuité $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ de l'opérateur $v \mapsto [v\cdot n]$. □

Poursuivant le calcul commencé en (1.1.25) on obtient :

$$\begin{aligned} N_k u &= \gamma_n\big(\operatorname{curl} g_k * (\operatorname{rot} u\delta_\Gamma) - k^2 g_k * (un\delta_\Gamma)\big) && (1.1.40)\\ &= \operatorname{rot}\gamma_{\mathrm{T}} g_k * (\operatorname{rot} u\delta_\Gamma) - k^2\gamma_n g_k * (un\delta_\Gamma), && (1.1.41)\end{aligned}$$

et donc notant aussi S_k l'opérateur de simple couche agissant sur les champs de vecteurs on obtient (voir Nédélec [57][60] et Hamdi [39]) :

Proposition 1.1.3 *On a pour tout $u, v \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$:*

$$\langle N_k u, v\rangle = \langle S_k \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v\rangle - k^2\langle S_k un, vn\rangle. \tag{1.1.42}$$

Il est clair que pour tout $v \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\Phi_k u$ résout le problème diffraction de Dirichlet relatif à v dans Ω_-, Ω_+ ou Ω si et seulement si $S_k u = v$. De même pour tout $v \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$, $-\Phi'_k u$ résout le problème diffraction de Neumann relatif à v dans Ω_-, Ω_+ ou Ω si et seulement si $N_k u = v$. On est donc amené à étudier l'inversibilité de ces opérateurs.

Proposition 1.1.4 *Les opérateurs $S_k : \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ et $N_k : \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ sont Fredholm d'indice 0.*

–Démonstration : On montre que l'opérateur $S_k - S_0$ est compact en tant qu'opérateur $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ ce qui avec la coercivité de Nédélec-Planchard donne le résultat pour S_k. De même la formule (1.1.42) montre que N_k satisfait une inégalité de Gårding sur $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$, ce qui donne le résultat pour N_k. □

L'étude du problème intérieur (dans Ω_-) est classique et repose sur celle des valeurs propres d'un opérateur compact auto-adjoint. On note (λ_i^D) (resp. (λ_i^N)) la suite strictement croissante des valeurs propres de $-\Delta$ sur Ω_- avec des conditions au bord de Dirichlet (resp. Neumann). On pose :

$$\mathcal{K}^D = \{(\lambda_i^D)^{1/2} \ : \ i \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}^N = \{(\lambda_i^N)^{1/2} \ : \ i \in \mathbb{N}\}. \tag{1.1.43}$$

Lorsque $k \notin \mathcal{K}^D$ (resp. $k \notin \mathcal{K}^N$) le problème de Dirichlet (resp. Neumann) non-homogène dans Ω_- admet une solution unique. On note aussi $\mathcal{E}_k^D$ (resp. $\mathcal{E}_k^N$) le noyau de $\Delta + k^2$ avec des conditions au bord homogènes de Dirichlet (resp. Neumann). Ainsi $\mathcal{E}_k^{D,N}$ est de dimension finie et est non nul si et seulement si $k \in \mathcal{K}^{D,N}$. On dit dans ce cas que k est une résonance intérieure.

Pour le problème extérieur on montre d'abord l'unicité d'une solution éventuelle. Une théorie spectrale plus élaborée que celle utilisée pour le problème intérieur donne l'existence de solutions pour tout $k > 0$ par le *principe d'absorption limite* (passage à la limite $\epsilon \searrow 0$ pour des nombres d'onde $k + i\epsilon$). Une autre stratégie consiste à étudier le problème extérieur à une boule B contenant Γ en utilisant des harmoniques sphériques sur ∂B, puis à réduire le problème extérieur à un problème dans $B \cap \Omega_+$. Cette méthode fait donc intervenir des *conditions au bord de transparence* sur ∂B. Il est possible de déduire de ces études, l'inversibilité de S_k et N_k quand k n'est pas une résonance. Nous esquissons ici une troisième méthode, elle aussi classique, dans laquelle l'existence de solutions du problème extérieur est déduite de la propriété de Fredholm des opérateurs intégraux.

Proposition 1.1.5 *Pour tout $k > 0$ si un élement p de $\mathrm{H}^1_{loc}(\Omega_+)$ vérifie l'équation de Helmholtz, la condition de radiation de Sommerfeld et la condition au bord $\gamma p = 0$ (Dirichlet) ou $\gamma' p = 0$ (Neumann) alors $p = 0$.*

–Démonstration : Cette proposition découle d'un théorème de Rellich qui était déja implicite dans la démonstration du théorème de représentation. Voir par exemple Taylor [110] (Vol. II, Chap. 9, p. 147-148). □

On en déduit :

Proposition 1.1.6 *Pour tout $k > 0$, l'opérateur S_k (resp. N_k) est inversible si et seulement si k n'est pas une résonance intérieure de Dirichlet (resp. Neumann). On a :*

$$\ker S_k = \gamma' \mathcal{E}_k^D \quad et \quad \ker N_k = \gamma \mathcal{E}_k^N. \tag{1.1.44}$$

–Démonstration : Considérons le cas Dirichlet, le cas Neumann étant analogue.

Si $u = \gamma' p$ avec $p \in \mathcal{E}_k^D$, alors étendant p par 0 dans le domaine extérieur, on a par le théorème de représentation $p = \Phi_k u$, donc $S_k u = \gamma p = 0$.

Réciproquement si $S_k u = 0$ alors $\Phi_k u|_{\Omega_-} \in \mathcal{E}_k^D$ et par unicité des solutions extérieures $\Phi_k u|_{\Omega_+} = 0$. Donc d'après la première formule de saut $u \in \gamma' \mathcal{E}_k^D$. □

Corollaire 1.1.7 *Si k n'est pas une résonance intérieure de Dirichlet (resp. Neumann), le problème de Dirichlet (resp. Neumann) extérieur admet une solution unique, représentable par potentiel de simple (resp. double) couche.*

On peut montrer qu'il y a des solutions aux problèmes extérieurs pour tout $k > 0$. Cependant celles-ci ne sont pas toujours représentables par des potentiels comme dans le corollaire ci-dessus. Nous y reviendrons.

1.1.4 Formules de Calderon

L'étude des opérateurs intégraux montre que S_k et N_k sont des opérateurs d'ordre -1 et 1 respectivement. Sur Γ le noyau défini par :

$$(x, y) \mapsto \partial_{n(x)} G_k(x, y), \tag{1.1.45}$$

a un singularité bornée par $C/|x-y|$. On obtient ainsi un troisième opérateur, noté D_k et donné par :

$$(D_k u)(y) = \int_\Gamma \partial_{n(x)} G_k(x,y) u(x) \mathrm{d}x. \tag{1.1.46}$$

Il est d'ordre -1. Son transposé est noté $D_k^\star$. On montre alors que :

Proposition 1.1.8 *On a :*

$$\gamma^\pm \Phi_k' u = \pm(1/2)u + D_k u \quad et \quad \gamma'^\pm \Phi_k u = \mp(1/2)u + D_k^\star u \tag{1.1.47}$$

Proposition 1.1.9 *L'opérateur suivant est un projecteur :*

$$(1/2)\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_k & -S_k \\ -N_k & -D_k^\star \end{bmatrix} \tag{1.1.48}$$

–Démonstration : Il s'agit de l'opérateur produit :

$$-\begin{bmatrix} \gamma^+ \\ \gamma'^+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\Phi_k' & \Phi_k \end{bmatrix} \tag{1.1.49}$$

Donc à tout (u,v) il associe les sauts du champ égal à $\Phi_k v - \Phi_k' u$ dans Ω_+ et 0 dans Ω_-. La propriété de projection découle alors du théorème de représentation. □

Cet opérateur est appellé projecteur de Calderon extérieur. On a :

$$\begin{bmatrix} D_k & -S_k \\ -N_k & -D_k^\star \end{bmatrix}^2 = (1/4)\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{1.1.50}$$

Soit plus explicitement :

$$\begin{bmatrix} D_k D_k + S_k N_k & -D_k S_k + S_k D_k^\star \\ -N_k D_k + D_k^\star N_k & N_k S_k + D_k^\star D_k^\star \end{bmatrix} = (1/4)\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{1.1.51}$$

1.2 Résolution numérique stabilisée

1.2.1 Discrétisation, conditionnement

Dans la suite nous considérons le problème de Neumann dans le domaine extérieur : Etant donné $k > 0$, et $v \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ trouver l'onde diffractée p dans $\mathrm{H}^1(\Omega_+)_{loc}$, solution de l'équation de Helmholtz dans Ω_+ satisfaisant la condition de radiation de Sommerfeld, et la condition au bord $\partial_n p = v$. En pratique $v = -\partial_n p^{inc}$, pour une onde incidente p^{inc} de nombre d'onde k et régulière sur un voisinage de Γ. Si k n'est pas une résonance intérieure de Neumann on peut représenter p par un potentiel de double couche $p = \Phi_k' u$ où u est la solution de $N_k u = -v$. La formulation variationnelle de ce problème est :

$$u \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \forall u' \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \quad \langle N_k u, u' \rangle = -\langle v, u' \rangle \tag{1.2.1}$$

On résout ce problème de façon approchée par la méthode Galerkin. Le choix usuel consiste à trianguler la surface Γ et à prendre des éléments finis P^1 continus sur ces triangles, transportées sur Γ par la projection orthogonale.

Plus explicitement, soit $(\mathcal{T}_h)$ une famille de triangulations de Γ, paramétrée par h, le plus grand diamètre des triangles de $\mathcal{T}_h$. On suppose que h parcourt un ensemble dénombrable qui ne s'accumule qu'en 0. On suppose aussi que $(\mathcal{T}_h)$ est *régulière* au sens où, si pour chaque triangle T on note h_T son diamètre et ρ_T le diamètre du cercle inscrit de T, il existe $C > 0$ tel que pour tout h et tout triangle T de $\mathcal{T}_h$:

$$\rho_T \geq 1/Ch_T. \tag{1.2.2}$$

Soit Γ_h le polyèdre déterminé par $\mathcal{T}_h$. On note $X(\mathcal{T}_h)$ l'espace des fonctions (complexes) continues sur Γ_h et dont la restriction à chaque triangle est un polynome de degré 1. Pour h suffisamment petit la projection orthogonale $\wp$ sur Γ est bien définie sur Γ_h et admet un inverse (à droite) $\Xi_h : \Gamma \to \Gamma_h$ et on pose :

$$X_h = \{u \circ \Xi_h \ : \ u \in X(\mathcal{T}_h)\}. \tag{1.2.3}$$

On résout :

$$u \in X_h \quad \text{et} \quad \forall u' \in X_h \quad \langle N_k u, u' \rangle = -\langle v, u' \rangle. \tag{1.2.4}$$

Puisque N_k satisfait une inégalité de Gårding cette équation admet, pour h suffisamment petit, une unique solution u_h, et (u_h) tend vers u dans $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$.

Nous renvoyons aux ouvrages généraux, e.g. Nédélec [122] et Ciarlet-Lions [120] pour les généralités sur la méthode des éléments finis ; à Nédélec [55] pour des aspects spécifiques aux équations intégrales (par exemple l'approximation de la géométrie et l'effet du calcul approché des intégrales singulières) ; et e.g. à Demkowicz [35] pour l'étude des systèmes satisfaisant une inégalité de Gårding dans le cadre des conditions Inf-Sup de Babuska [6]. Les résultats nécessaires sur ce dernier point sont regroupés dans l'appendice A. Notons que pour certaines propriétés liées à l'approximation de la géométrie (non prise en compte ici) il faut faire une hypothèse supplémentaire dite de quasi-uniformité, rappellée ci-dessous.

L'aspect qui nous intéresse ici est le mauvais conditionnement du système matriciel correspondant au problème de Galerkin ci-dessus. Soit $e_h = (e_h(i))$ la base usuelle de X_h ; pour chaque sommet i de $\mathcal{T}_h$, $e_h(i)$ est l'élément de X_h qui vaut 1 en ce sommet et 0 aux autres sommets de $\mathcal{T}_h$. Soit $A_h(k)$ la matrice de Galerkin de N_k :

$$(A_h(k))_{ij} = \langle N_k e_h(j), e_h(i) \rangle \quad \text{et} \quad (L_h)_i = -\langle v, e_h(i) \rangle. \tag{1.2.5}$$

La traduction matricielle du système (1.2.4) ci-dessus est alors :

$$A_h(k) U_h = L_h \tag{1.2.6}$$

Soit B_h la matrice (dite matrice de masse) définie par :

$$(B_h)_{ij} = \langle e_h(j), e_h(i) \rangle. \tag{1.2.7}$$

Supposons que la famille $(\mathcal{T}_h)$ soit *quasi-uniforme*, c'est à dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout h et pour tout couple (T, T') de triangles de $\mathcal{T}_h$ on a :

$$h_{T'} \geq 1/C h_T. \tag{1.2.8}$$

Alors le choix de base ci-dessus entraine que B_h satisfait une estimation :

$$(1/C)h^2 \|U\|^2 \leq |B_h U \cdot U| \leq Ch^2 \|U\|^2 \qquad \text{avec} \quad \|U\|^2 = \sum_i |U_i|^2. \tag{1.2.9}$$

Autrement dit, à un facteur d'échelle près le produit scalaire sur les uplets associé à B_h –qui correspond au produit scalaire $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ sur les champs scalaires– est équivalent au produit scalaire ℓ_2 sur les uplets.

D'autrepart l'hypothèse de quasi-uniformité donne l'*inégalité inverse* : Il existe $C > 0$ tel que pour tout h :

$$\forall u \in X_h \quad \|u\|_1 \leq Ch^{-1} \|u\|_0. \tag{1.2.10}$$

Cette inégalité est optimale.

L'opérateur N_k étant elliptique, injectif et d'ordre $s = 1$, il s'ensuit que le conditionnement ℓ_2 de la matrice $A_h(k)$ se comporte comme $h^{-|s|} = h^{-1}$ quand h tend vers 0 (à k fixé). De plus les parties réelles des valeurs propres sont réparties de façon relativement régulière entre les valeurs extrèmes. Ces deux propriétés font que la convergence d'algorithmes itératifs du type gradients conjugués devient très lente quand h tend vers 0. En particulier puisque le pas du maillage doit être inférieur à au moins le cinquième de la longueur d'onde, cela contribue à la difficulté de résoudre des problèmes haute fréquence. A haute fréquence il semblerait que des fortes interactions longue distance de type optique géométrique, soient aussi nuisibles à la convergence, sans que ce mécanisme soit bien compris. Nous reviendrons plus tard aux problèmes liés aux résonances intérieures de Neumann.

La littérature existante sur les méthodes de préconditionnement est trop large pour qu'on puisse en rendre compte ici. De plus le domaine évolue très rapidement. Les premiers préconditionneurs étaient de nature très algébrique (factorisation LU incomplète par exemple, en relation avec de la théorie des graphes appliquée à la structure creuse des matrices) et n'utilisaient pratiquement pas les propriétés des opérateurs sous-jacents aux matrices. Plus récemment des méthodes de décomposition de domaine en liaison avec la parallélisation se sont montrées efficaces pour résoudre des problèmes avec des opérateurs différentiels *locaux*, dont l'archétype est le Laplacien. Citons également les méthodes multiniveaux, qui d'une certaine façon consistent à construire des bases hierarchisées

pour résoudre les problèmes. En séparant par ces choix de base les comportements haute fréquence et basse fréquence, ou les comportements locaux à un sous-domaine, on obtient des algorithmes plus stables et rapides. L'extension de ces méthodes à des problèmes vectoriels ou mixtes est relativement récente ; voir en particulier Hiptmair [43], Arnold-Falk-Winther [5] et les références qu'ils donnent.

La méthode proposée ici se distingue entre autre par le fait qu'elle est indépendante des choix de base, au sens où la solution approchée obtenue à chaque itération ne dépend pas de la base choisie pour l'espace de Galerkin.

1.2.2 Préconditionneurs variationnels

Le problème Galerkin précédent s'inscrit dans le cadre général suivant, dans lequel nous pouvons aussi décrire la méthode de préconditionnement que nous proposons.

Soit X un espace de Hilbert , dont le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur X vérifiant les conditions Inf-Sup de Babuska. Soit l une forme linéaire continue sur X. Nous considérons le problème variationnel :

$$u \in X \quad \text{et} \quad \forall u' \in X \quad a(u,u') = l(u'). \tag{1.2.11}$$

Pour le résoudre de façon approchée nous introduisons une famille (X_h) de sous-espaces de dimension finie de X et nous supposons que $a(\cdot,\cdot)$ vérifie une condition Inf-Sup discrète uniforme en h. Nous résolvons :

$$u \in X_h \quad \text{et} \quad \forall u' \in X_h \quad a(u,u') = l(u'). \tag{1.2.12}$$

A cette fin nous choisissons une base $e_h = (e_h(i))$ de X_h et définissons la matrice A_h et le uplet L_h par :

$$(A_h)_{ij} = a(e_h(j), e_h(i)) \quad \text{et} \quad (L_h)_i = l(e_h(i)). \tag{1.2.13}$$

Alors il existe un unique uplet U_h tel que :

$$A_h U_h = L_h, \tag{1.2.14}$$

et $\sum_i (U_h)_i e_h(i)$ est la solution du problème variationnel discret ci-dessus.

Nous considérons ici des stratégies de préconditionnement du système (1.2.14) ci-dessus basés sur la remarque suivante : On suppose qu'on connait un espace de Hilbert Y, dual de X par une forme bilinéaire $b(\cdot,\cdot)$ sur $Y \times X$, ainsi qu'une forme bilinéaire continue non dégénérée $c(\cdot,\cdot)$ sur Y. Pour en déduire un préconditionneur nous supposons que nous disposons d'une famille de sous-espaces (Y_h) de Y tels que $b(\cdot,\cdot)$ et $c(\cdot,\cdot)$ vérifient des conditions Inf-Sup discrètes uniformes en h (sur $(Y_h \times Y_h)$ et $(Y_h \times X_h)$ respectivement). Nous nous donnons une base f_h de Y_h et nous définissons deux matrices B_h et C_h par :

$$(B_h)_{ij} = b(f_h(j), e_h(i)) \quad \text{et} \quad (C_h)_{ij} = c(f_h(j), f_h(i)). \tag{1.2.15}$$

Notant Λ_h la bijection $U \mapsto \sum_i U_i e_h(i)$ de $\mathbb{K}^{N_h}$ vers X_h (où $N_h = \dim X_h$) nous avons :

Proposition 1.2.1 *Il existe α et β strictement positifs, tels que pour tout h et tout U dans $\mathbb{K}^{N_h}$:*

$$\alpha\|\Lambda_h U\|_X \leq \|\Lambda_h B_h^{\star -1} C_h B_h^{-1} A_h U\|_X \leq \beta\|\Lambda_h U\|_X \tag{1.2.16}$$

–Démonstration : Nous exprimons α et β à partir des constantes de continuité et d'Inf-Sup de a, b et c. Soit donc c_i des constantes telles que pour tous $u, u' \in X$ et $v, v' \in Y$:

$$|a(u,u')| \leq c_0\|u\|\ \|u'\|, \quad |c(v,v')| \leq c_1\|v\|\ \|v'\| \quad \text{et} \quad |b(v,u)| \leq c_2\|v\|\ \|u\|. \tag{1.2.17}$$

Soit c_i des constantes positives telles que pour tout h :

$$\inf_{v\in Y_h}\sup_{u\in X_h}\frac{|b(v,u)|}{\|v\|\ \|u\|} \geq \frac{1}{c_3}, \quad \inf_{u\in X_h}\sup_{v\in Y_h}\frac{|b(v,u)|}{\|v\|\ \|u\|} \geq \frac{1}{c_4}, \tag{1.2.18}$$

$$\inf_{u\in X_h}\sup_{u'\in X_h}\frac{|a(u,u')|}{\|u\|\ \|u'\|} \geq \frac{1}{c_5}, \quad \inf_{v\in Y_h}\sup_{v'\in Y_h}\frac{|c(v,v')|}{\|v\|\ \|v'\|} \geq \frac{1}{c_6}. \tag{1.2.19}$$

En utilisant en particulier l'estimation (A.3.2), on voit que l'énoncé est satisfait dès que $\beta \geq c_4c_1c_3c_0$ et $\frac{1}{\alpha} \geq c_5c_2c_6c_2$. On remarque par ailleurs que ces constantes sont indépendantes des choix de base sur X_h et Y_h. □

Nous proposons donc de préconditionner A_h par la matrice :

$$Z_h = B_h^{\star -1} C_h B_h^{-1}. \tag{1.2.20}$$

Pour toute matrice carrée M on note $\rho(M)$ son rayon spectral. Si M est inversible on appelle conditionnement spectral de M le réel $\kappa(M) = \rho(M)\rho(M^{-1})$. Si M n'est pas inversible on considère que son conditionnement spectral est infini.

La proposition ci-dessus entraine que pour tout h le rayon spectral de Z_hA_h est inférieur à β et le rayon spectral de $(Z_hA_h)^{-1}$ est inférieur à α^{-1}. Le conditionnement spectral de Z_hA_h est donc inférieur à β/α.

Si a et c sont des formes bilinéaires continues symétriques et coercives sur des espaces de Hilbert réels, on en déduit que si U_h^n est le n'ième itéré de l'algorithme des gradients conjugués préconditionnés (PCG) et U_h la solution du système $A_hU = L_h$ alors :

$$\|U_h^n - U_h\|_{A_h} \leq 2(\frac{\nu-1}{\nu+1})^n\|U_n^0 - U_h\|_{A_h} \quad \text{avec } \nu = (\frac{\beta}{\alpha})^{1/2}. \tag{1.2.21}$$

Ici comme ailleurs on note $\|U\|_{A_h}^2 = A_hU \cdot U = a(\Lambda_hU, \Lambda_hU)$. Puisque $a(\cdot,\cdot)$ définit un produit scalaire sur X compatible avec sa topologie, la convergence ci-dessus a lieu dans une *norme naturelle*.

1.2.3 Applications à l'acoustique

Revenons au cas de la diffraction d'ondes acoustiques, et plus précisément au problème de Neumann résolu par potentiel de double couche. Les matrices $A_h(k)$ et B_h ont déjà été définies, B_h étant interprétée comme la matrice de la dualité $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. On définit $C_h(k)$ comme la matrice de Galerkin dans e_h de l'opérateur S_k, et on pose :

$$Z_h(k) = B_h^{\star -1} C_h(k) B_h^{-1} \tag{1.2.22}$$

Pour préconditionner $A_h(k)$ on utilise la matrice $Z_h(k')$ pour un nombre d'onde k' qui peut être différent de k (par exemple à partie imaginaire positive). On utilisera la plupart du temps ici le choix $k' = k$, mais on s'autorise aussi des k' différents pour éviter des problèmes liés aux résonances. D'autres variantes sont aussi possibles (par exemple remplacer $S_{k'}$ par une perturbation compacte de S_0).

Si $S_{k'}$ et N_k sont inversibles, les formes bilinéaires a et c satisfont des conditions Inf-Sup discrètes uniformes en h, en conséquence des théorèmes généraux sur les perturbations compactes des formes coercives (voir l'appendice A et en particulier la proposition A.5.2).

Pour b rappellons d'abord que b satisfait une condition Inf-Sup uniforme sur X_h en norme $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ si (et seulement si) le projecteur de Ritz associé à b sur X_h –qui n'est autre que la projection L^2 sur X_h– est stable en norme $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$, i.e. a une norme d'opérateur $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ bornée indépendamment de h. C'est un cas particulier de la proposition A.3.2. Si le maillage est quasi-uniforme il est bien connu que cette projection est stable en norme $\mathrm{H}^1(\Gamma)$; notant P_h^0 la projection L^2 et P_h^1 la projection H^1 il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\|P_h^0 u\|_1 &\leq \|P_h^0(u - P_h^1 u)\|_1 + \|P_h^0 P_h^1 u\|_1 && (1.2.23)\\
&\leq Ch^{-1}\|P_h^0(u - P_h^1 u)\|_0 + \|P_h^1 u\|_1 && (1.2.24)\\
&\leq Ch^{-1}\|u - P_h^1 u\|_0 + \|u\|_1 && (1.2.25)\\
&\leq C\|u\|_1, && (1.2.26)
\end{aligned}$$

où on a utilisé en particulier une inégalité inverse et le lemme d'Aubin-Nitsche. Par interpolation on en déduit la stabilité $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. Notons aussi que ce raisonnement vaut pour des éléments finis de tout ordre.

En présence de singularités de la surface ou du second membre (l'excitation) la solution est (ou peut être) singulière (en un sens à préciser) et il est avantageux d'utiliser des maillages localement raffinés. Les familles de maillages correspondantes ne sont pas quasi-uniformes. Cependant pour de larges classes de telles familles de maillages, la stabilité de la projection L^2 en norme H^1 a été démontrée (voir en particulier Crouzeix-Thomée [34]), et donne l'Inf-Sup discret recherché comme nous l'avions remarqué dans [133].

D'ailleurs, alors que la condition de stabilité énoncée dans Steinbach-Wendland [72] y était justifiée par un argument matriciel, affirmant que la matrice de masse est à diagonale fortement dominante, la stabilité de la projection L^2 a été mise en valeur et beaucoup étudiée depuis, voir en particulier Steinbach [71], Bramble-Pasciak-Steinbach [20] et Carstensen [27].

On résume ces conclusions dans la proposition :

Proposition 1.2.2 *Si la norme* $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ *de la projection* L^2 *sur* X_h *est bornée uniformément par rapport à* h *(par exemple si* $(\mathcal{T}_h)$ *est quasi-uniforme) alors le conditionnement spectral de* $Z_h(k')A_h(k)$ *l'est aussi.*

En plus, en vertu des formules de Calderon $4S_{k'}$ est un inverse de N_k à un opérateur compact près ; en effet :

$$S_{k'}N_k = 1/4 + (S_{k'} - S_k)N_k - D_k^2, \tag{1.2.27}$$

et le noyau de $S_{k'} - S_k$ est Lipshitzien. La propriété d'inversion à opérateur compact près peut aussi être vue comme une conséquence du fait que le symbole principal de $4S_{k'}$ est inverse de celui de N_k. On peut donc s'attendre à ce que le spectre de Z_hA_h s'accumule (en un sens à préciser) en un seul point non-nul (à savoir $1/4$) ce qui produirait une convergence supra-linéaire.

1.2.4 Résultats numériques sur une cavité

Comme première illustration de l'efficacité de la méthode nous montrons des calculs sur la cavité sphérique de la Figure 1.1. Elle est contruite à partir de deux sphères concentriques. Le rayon de la sphère intérieure est $7/8$ et le rayon de la sphère extérieure est $9/8$. La cavité determinée par la sphère intérieure communique avec l'extérieur par une ouverture circulaire de demi-angle à l'origine égal à $\pi/8$.

Le maillage comporte 8000 triangles et 4002 sommets. Ainsi la matrice de Galerkin $A_h(k)$ est une matrice complexe symétrique dense, 4002 par 4002. La cavité est exposée à une onde sphérique d'origine le centre commun des deux sphères i.e. à g_k. Nous faisons varier le nombre d'onde k de 2π à 3π, ce qui correspond à une longueur d'onde de 1 à $2/3$. Cette plage de fréquences correspond semble-t-il à la région où l'onde commence à s'échapper de la cavité et où les méthodes itératives non préconditionnées commencent à faire défaut.

Le solveur itératif utilisé est l'algorithme des gradients conjugués préconditionnés (PCG), pour les matrices complexes symétriques. Pour évaluer la performance du préconditionneur nous calculons à chaque itération la norme ℓ_2 du résidu. Plus pécisément dans la Figure 1.2 nous montrons le graphe de la fonction :

$$\delta : n \mapsto \log_{10} \frac{\|A_h(k)U_h^n - L_h(k)\|}{\|L_h(k)\|} \quad \text{avec } \|V\|^2 = \sum_i |V_i|^2, \tag{1.2.28}$$

où U_h^n est l'approximation de la solution U_h obtenue à l'itération n. Deux cas sont montrés : l'absence de préconditionneur donne la courbe du haut, alors

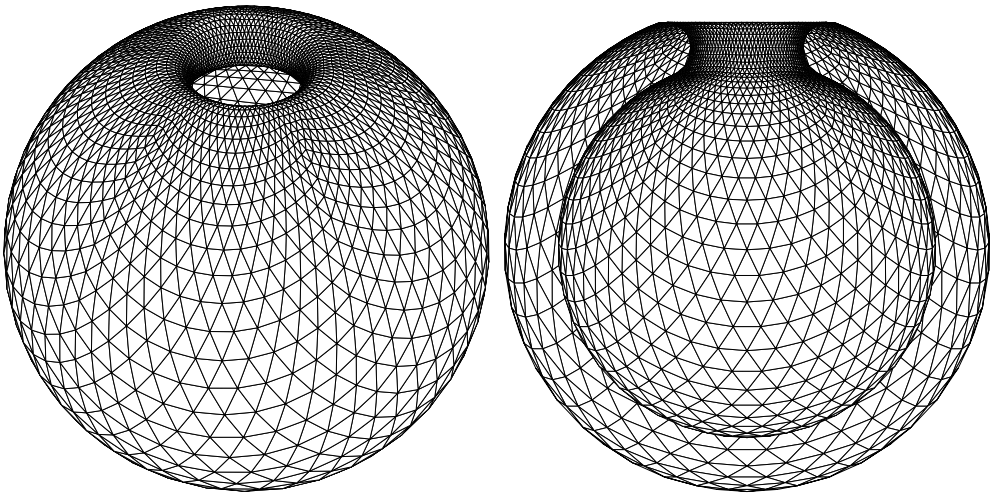


FIG. 1.1 – *Cavité sphérique : vue de l'extérieur et coupe verticale.*

que le préconditionneur suggéré, avec le choix $k' = k$, donne la courbe du bas. Tous les calculs sont effectués en double precision. On constate que le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre tout critère de convergence est réduit de façon importante par le préconditionneur.

Remarquons par ailleurs qu'appliquer $Z_h(k')$ à un uplet nécessite à peu près le même temps de calcul qu'appliquer $A_h(k)$. Il faut effectuer un produit par $C_h(k')$ et résoudre deux systèmes linéaires. Le produit par $C_h(k')$ est du même type que le produit par $A_h(k)$, en particulier pour ces deux produits on peut utiliser les méthodes multipolaires (FMM) qui permettent de les accélerer et/ou réduire le coût mémoire. Les deux systèmes linéaires avec B_h sont réels, symétriques, définis positifs, creux et en général bien conditionnés. L'algorithme du gradient conjugué (éventuellement préconditionné par l'inverse de sa diagonale si le maillage comporte des raffinements locaux importants) suffit pour les résoudre et nécessite un temps négligeable par rapport à la multiplication par $A_h(k)$ ou $C_h(k')$.

Il existe des variantes de CG qui sont plus stables au sens où les courbes de convergence données par (1.2.28), avec et sans préconditionneur, oscillent moins. C'est le cas par exemple des algorithmes GMRES (generalized minimum residual) et QMR (quasi-minimal residual) et leurs variantes préconditionnées, qui sont très utilisés dans notre contexte. Cette stabilité est obtenue en remplacant les conditions d'orthogonalité (du type Galerkin) sur les espaces de Krylov qui caractérisent CG, par un problème de minimisation de la norme du résidu. Pour QMR cette norme dépend de l'itération, ce qui permet de garder des récurrences courtes, contrairement à GMRES.

Cependant pour les problèmes qui nous intéressent, si la convergence pour GMRES et QMR semble plus stable, elle n'est pas beaucoup plus rapide que

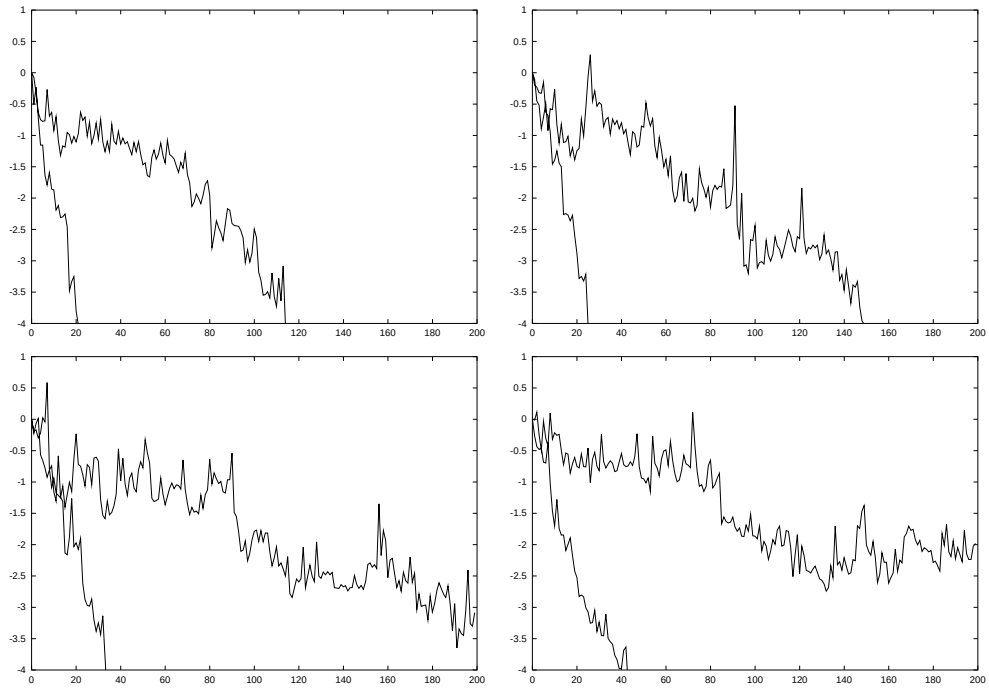


FIG. 1.2 – *Graphes de δ pour $k = 2\pi, 7\pi/3, 8\pi/3, 3\pi$ (dans le sens de la lecture)*

celle de CG. Ainsi d'après les Figures 6.1 et 6.2, p. 443-444 dans Freund [84], il semblerait que *grosso modo* pour QMR sans poids les courbes de convergence soient données par :

$$\delta_{\mathrm{QMR}}(n) \approx \inf_{i \leq n} \delta_{\mathrm{CG}}(i). \tag{1.2.29}$$

Pour QMR avec poids les résultats sont un peu meilleurs, mais il semblerait quand-même que *la vitesse de convergence soit davantage liée aux espaces de Krylov qu'au critère de sélection des solutions approchées U_h^n sur ces espaces.* Puisque le préconditionnement consiste justement à construire de bons espaces de Krylov, nous nous attendons à ce que le préconditionneur que nous proposons soit aussi performant quand il est appliqué aux différentes variantes de CG. De plus ce préconditionneur semble suffisamment bon pour qu'on puisse préférer CG à ces variantes, en raison de sa simplicité.

1.2.5 Comportement aux résonances

L'exemple précédent indiquerait que pour des géométries complexes et à des fréquences relativement hautes (objets de diamètre plusieurs longueurs d'ondes), la méthode soit efficace avec le choix $k' = k$. Ici nous examinons la performance de ce choix lorsque que de larges intervalles de fréquences sont

parcourus, de telle sorte que des résonances ont lieu. Ces résonances affectent à la fois le système linéaire à résoudre et le préconditionneur.

Rappellons que nous avons démontré l'estimation suivante sur le conditionnement spectral:

$$\kappa(Z_h(k')A_h(k)) \leq c_h \frac{\sup_{u\in S_h}\sup_{v\in S_h}\frac{|\langle S_{k'}u,v\rangle|}{\|u\|_{-1/2}\|v\|_{-1/2}} \sup_{u\in S_h}\sup_{v\in S_h}\frac{|\langle N_k u,v\rangle|}{\|u\|_{1/2}\|v\|_{1/2}}}{\inf_{u\in S_h}\sup_{v\in S_h}\frac{|\langle S_{k'}u,v\rangle|}{\|u\|_{-1/2}\|v\|_{-1/2}} \inf_{u\in S_h}\sup_{v\in S_h}\frac{|\langle N_k u,v\rangle|}{\|u\|_{1/2}\|v\|_{1/2}}}, \tag{1.2.30}$$

où nous avons posé:

$$(c_h)^{-1} = \inf_{u\in S_h}\sup_{v\in S_h}\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|_{1/2}\|v\|_{-1/2}} \inf_{u\in S_h}\sup_{v\in S_h}\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|_{-1/2}\|v\|_{1/2}} \tag{1.2.31}$$

De plus c_h est borné par le carré de la norme dans $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ du projecteur L^2 sur S_h, et est donc borné indépendamment de h pour une large classe de maillages, qui inclut les maillages quasi-uniformes. Cette borne sur le conditionnement explose quand k' est une résonance de Dirichlet ou k est une résonance de Neumann, et nous nous demandons quelles en sont les répercussions sur la convergence d'algorithmes itératifs.

Considérons, en plus du problème de Neumann précédent, le problème de Dirichlet, résolu grâce à une représentation en simple couche de la solution. L'équation intégrale correspondante, qui s'écrit $S_k u = v$, peut être préconditionnée avec $N_{k'}$.

Prenons la diffraction par la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ dont les résonances sont bien connues. Alors $k = \pi$ en détermine une pour le problème de Dirichlet intérieur, pour le vecteur propre $x \mapsto \sin(k|x|)/|x|$. La triangulation comporte 1002 sommets et 2000 triangles. La règle $h \leq (1/5)(2\pi/k)$ autorise alors des nombres d'onde k inférieurs à environ 12. On éclaire la sphère par des ondes sphériques d'origine $(0, 0, 0.5)$, dont les nombres d'onde croissent de 3 à 3.3.

Dans la figure 1.3 nous traçons le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une réduction de la norme ℓ_2 du résidu d'un facteur 10^{-4}. Le trait plein correspond à l'absence de préconditionneur et le trait pointillé correspond à l'utilisation du préconditionneur de Calderon avec $k' = k$.

Donc même lorsque k est très proche d'une résonance de Dirichlet, l'opérateur $N_{k'}$, avec le choix $k' = k$ donne un bon préconditionneur pour S_k. Pour en obtenir un encore meilleur il faudrait introduire un pôle dans le préconditionneur. Il semble aussi que $S_{k'}$ soit un bon préconditionneur pour N_k i.e. la non-inversibilité du préconditionneur est un problème moindre que ce qu'on pouvait craindre. Cependant ces problèmes méritent d'avantage d'expériences numériques et une étude plus poussée.

Nous avons observé aussi que si la source (l'origine de l'onde sphèrique) est située en dehors du diffracteur, alors, avec et sans préconditionneur, la convergence n'est pratiquement pas affectée par les résonances, qu'elles aient lieu dans

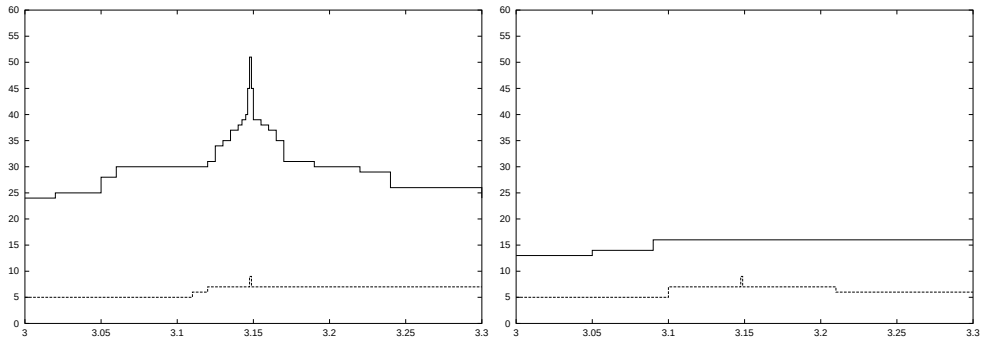


FIG. 1.3 – *Nombre d'itérations en fonction du nombre d'onde k (Dirichlet à gauche, Neumann à droite)*

le préconditionneur ou dans l'équation à résoudre. Cette hypothèse qui garantit l'existence de solutions à l'équation intégrale même aux résonances, est naturelle pour les problèmes extérieurs.

1.3 Adaptation aux surfaces ouvertes

On est parfois amené à résoudre des problèmes de diffraction dans le complémentaire d'une surface qui ne délimite pas un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément on se donne une surface Γ qui peut être considérée comme un ouvert régulier de la frontière d'un ouvert régulier borné Ω de $\mathbb{R}^3$ (c'est le cadre de Stephan [73]). Ceci entraine en particulier qu'on peut choisir sur Γ une normale n régulière.

Le problème de Neumann peut être résolu à l'aide d'un potentiel de double couche. On cherche alors u sur Γ solution de:

$$u \in \mathrm{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \forall u' \in \mathrm{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) \quad \langle N_k u, u' \rangle = \int_\Gamma \partial_n p^i u'. \tag{1.3.1}$$

On rappelle que:

$$\mathrm{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) = [\mathrm{L}^2(\Gamma), \mathrm{H}_0^1(\Gamma)]_{1/2}. \tag{1.3.2}$$

Le problème de Dirichlet peut lui être résolu grâce à un potentiel de simple couche. Ceci conduit à chercher v sur Γ solution de:

$$v \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \forall v' \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \quad \langle S_k v, v' \rangle = -\int_\Gamma p^i v'. \tag{1.3.3}$$

La difficulté est que les espaces $\mathrm{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$ et $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ ne sont pas duaux l'un de l'autre, de sorte qu'on sort du cadre défini dans la première partie. Pour le problème discret on voit d'ailleurs qu'on discrétise $\mathrm{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$ avec des fonctions

nulles au bord, ce qui n'est pas le cas de $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Les choix usuels des espaces X_h et Y_h sont donc incompatibles avec l'inversibilité de la matrice de dualité.

On se donne une famille de maillages $\mathcal{T}_h$ de Γ et on note X_h l'espace des fonctions continues, affines sur chaque triangle de $\mathcal{T}_h$ et nulles au bord. On résout :

$$u \in X_h \quad \text{et} \quad \forall u' \in X_h \quad \langle N_k u, u' \rangle = \int_\Gamma \partial_n p^i u' \tag{1.3.4}$$

Munissant X_h de sa base usuelle $e_h(i)$ on note comme précédamment A_h, B_h et C_h les matrices définies par :

$$(A_h)_{ij} = \langle N_k e_h(j), e_h(i) \rangle \quad (B_h)_{ij} = \int_\Gamma e_h(j) e_h(i) \quad (C_h)_{ij} = \langle S_{k'} e_h(j), e_h(i) \rangle. \tag{1.3.5}$$

Dans ce qui suit nous allons montrer que si on préconditionne A_h par $Z_h = B_h^{\star -1} C_h B_h^{-1}$ le conditionnement spectral de $Z_h A_h$ est un $O(|\log h|^3)$.

Notons $X = \mathrm{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$ et $Y = \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Par commodité introduisons aussi a, b, et c les formes bilinéaires induites par N_k, S_k et $\mathcal{I}$ sur respectivement X, Y et un espace qui contient tous les X_h. Soit aussi δ tel que $\mathcal{V} = \{x \in \Gamma : d(x, \partial\Gamma) \leq \delta\}$ est un voisinage tubulaire de $\partial\Gamma$ dans Γ (d désignant la distance Riemannienne sur Γ induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ sur $T\Gamma$). Sur $\mathcal{V}$, $x \mapsto d(x, \partial\Gamma)$ est une fonction C^∞ prolongeable à Γ en une fonction C^∞ minorée par δ hors de $\mathcal{V}$. On note ρ un tel prolongement. Le flot du champ de vecteur $\nabla\rho$ sur $\mathcal{V}$ détermine un C^∞-isomorphisme $\mathcal{F} : [0, \delta] \times \partial\Gamma \to \mathcal{V}$. On désigne par $\overline{X}_h$ l'analogue de X_h où on autorise des valeurs non nulles au bord. De plus, de même que P_h^s désigne la projection orthogonale sur X_h suivant la norme H^s, $\overline{P}_h^s$ désigne celle sur $\overline{X}_h$.

Nous ferons un usage répété du lemme suivant :

Lemme 1.3.1 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout h et tout $u \in \overline{X}_h$:*

$$\int_{\partial\Gamma} \sup_{r \in [0,\delta]} |u(\mathcal{F}(r, x))|^2 dx \leq C |\log(h)| \|u\|_{1/2}^2 \tag{1.3.6}$$

–Démonstration : La démonstration repose sur les trois points suivants :

(i) Avec le choix de norme usuel sur $\mathrm{H}^s([0, \delta])$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon \leq 1/2$ et tout $u \in \mathrm{H}^{1/2+\epsilon}([0, \delta])$:

$$\sup_{x \in [0,\delta]} |u(x)|^2 \leq C \epsilon^{-1} \|u\|_{1/2+\epsilon}^2 \tag{1.3.7}$$

(ii) Avec les choix de normes usuels il existe $C > 0$ tel que pour tout $s \in [0, 1]$ les applications suivantes sont de norme inférieure à C :

$$\mathrm{H}^s([0, \delta] \times \partial\Gamma) \to L^2(\partial\Gamma, \mathrm{H}^s([0, \delta])) \tag{1.3.8}$$

$$\mathrm{H}^s(\mathcal{V}) \to \mathrm{H}^s([0, \delta] \times \partial\Gamma) \tag{1.3.9}$$

$$\mathrm{H}^s(\Gamma) \to \mathrm{H}^s(\mathcal{V}) \tag{1.3.10}$$

(iii) Avec le choix de norme usuel sur $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ il existe $C > 0$ tel que pour tous les réels σ et s vérifiant $0 \leq \sigma \leq s \leq 1$, tout h et tout $u \in \overline{X}_h$:

$$\|u\|_s \leq Ch^{\sigma-s}\|u\|_\sigma \tag{1.3.11}$$

On en déduit que pour tout $0 < \epsilon \leq 1/2$, tout h et tout $u \in \overline{X}_h$ on a, avec des constantes C indépendantes de ϵ et h :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Gamma} \sup_{r\in[0,\delta]} |u(\mathcal{F}(r,x))|^2 \mathrm{d}x &\leq C\epsilon^{-1} \int_{\partial\Gamma} ||r \mapsto u(\mathcal{F}(r,x))||^2_{1/2+\epsilon} \mathrm{d}x & (1.3.12)\\ &\leq C\epsilon^{-1}||u||^2_{1/2+\epsilon} & (1.3.13)\\ &\leq C\epsilon^{-1}h^{-2\epsilon}||u||^2_{1/2} & (1.3.14) \end{aligned}$$

En particulier le choix $\epsilon = -1/\log h$ donne $\epsilon^{-1}h^{-2\epsilon} = -e^2 \log h$, ce qui achève la démonstration. □

On en déduit les corollaires suivants :

Corollaire 1.3.2 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout h et tout $u \in X_h$:*

$$\|u\|_{1/2,00} \leq C|\log(h)|\ \|u\|_{1/2} \tag{1.3.15}$$

–Démonstration : Nous prenons comme norme sur $\mathrm{H}^{1/2}_{00}(\Gamma)$ celle définie par :

$$||u||^2_{\mathrm{H}^{1/2}_{00}(\Gamma)} = ||u||^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)} + \int_\Gamma \rho^{-1}|u|^2 \tag{1.3.16}$$

de sorte qu'on est amené à majorer :

$$\frac{\int_\Gamma \rho^{-1}|u|^2}{\|u\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)}} \tag{1.3.17}$$

Soit $\mathcal{C}_h$ la couronne de Γ constituée des points appartenant à un triangle de $\mathcal{T}_h$ ayant au moins un sommet sur le bord. On écrit (C suffisamment grand) :

$$\int_\Gamma \rho^{-1}|u|^2 \leq \int_{\mathcal{C}_h} \rho^{-1}|u|^2 + \int_{C^{-1}h\leq d(x,\partial\Gamma)\leq\delta} \rho^{-1}|u|^2 + \int_{\delta\leq d(x,\partial\Gamma)} \rho^{-1}|u|^2 \tag{1.3.18}$$

Pour le premier terme un petit calcul montre que sur un triangle T de $\mathcal{T}_h$ de sommets T_i, ayant au moins un sommet sur $\partial\Gamma$ on a :

$$\int_T \rho^{-1}|u|^2 \leq Ch\sum_i |u(T_i)|^2 \tag{1.3.19}$$

Donc si on appelle N_i les noeuds de la triangulation qui sont dans $\mathcal{C}_h$ mais pas sur le bord, et $\mathcal{L}_h$ la ligne brisée qui les joint naturellement, constituée d'arêtes du maillage, on a :

$$\int_{\mathcal{C}_h} \rho^{-1}|u|^2 \leq Ch\sum_i |u(N_i)|^2 \leq C\int_{\mathcal{L}_h} |u|^2 \tag{1.3.20}$$

En utilisant le fait que l'image réciproque de $\mathcal{L}_h$ par $\mathcal{F}$ forme un angle avec $\partial\Gamma$ borné par un $\theta < \frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$\int_{\mathcal{L}_h} |u|^2 \leq C \int_{\partial\Gamma} \sup_{r\in[0,\delta]} |u(\mathcal{F}(r,x)|^2 dx \tag{1.3.21}$$

et on applique le lemme.
A un Jacobien près le deuxième terme est majoré par :

$$\iint_{[C^{-1}h,\delta]\times\partial\Gamma} r^{-1}|u(\mathcal{F}(r,x))|^2 dr dx \leq (\log\delta + \log C - \log h) \sup_{r\in[0,\delta]} \int_{\partial\Gamma} |u(\mathcal{F}(r,x))|^2 dx \tag{1.3.22}$$

Là encore le lemme s'applique.
Pour le dernier terme nous remarquons que :

$$\int_{\delta\leq d(x,\partial\Gamma)} \rho^{-1}|u|^2 \leq \delta^{-1}\|u\|_0^2 \leq \delta^{-1}\|u\|_{1/2}^2 \tag{1.3.23}$$

ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 1.3.3 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout h :*

$$\forall u \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \quad \|u - P_h^0 u\|_0 \leq C|h\log(h)|^{1/2}\|u\|_{1/2} \tag{1.3.24}$$

$$\forall u \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \quad \|P_h^0 u\|_{1/2} \leq C|\log(h)|^{1/2}\|u\|_{1/2} \tag{1.3.25}$$

$$\inf_{u\in X_h} \sup_{u'\in X_h} \frac{|\int uu'|}{\|u\|_{\pm 1/2}\|u'\|_{\mp 1/2}} \geq \frac{1}{C|\log(h)|^{1/2}} \tag{1.3.26}$$

–Démonstration : (i) On sait déjà que pour tout $u \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ on a :

$$\|u - \overline{P}_h^0 u\|_0 \leq Ch^{1/2}\|u\|_{1/2} \tag{1.3.27}$$

de sorte qu'il suffit de traiter le cas où $u \in \overline{X}_h$. Or pour un tel u, si on note u_0 l'élément de X_h qui coïncide avec u sur les noeuds intérieurs on a :

$$\|u - P_h^0 u\|_0 \leq \|u - u_0\|_0 = (\int_{\mathcal{C}_h} |u - u_0|^2)^{1/2} \tag{1.3.28}$$

Ce dernier terme est majorable par :

$$Ch^{1/2}\|u\|_{0,\partial\Gamma} \tag{1.3.29}$$

On conclut alors avec le lemme.

(ii) Il suffit encore une fois de le montrer pour $u \in \overline{X}_h$. Or pour un tel u on a :

$$\|u - P_h^0 u\|_{1/2} \leq Ch^{-1/2}\|u - P_h^0 u\|_0 \leq C|\log(h)|^{1/2}\|u\|_{1/2} \tag{1.3.30}$$

ce qui permet de conclure.

(iii) Ces estimations proviennent de la précédente par la proposition A.3.2. □

Nous pouvons maintenant obtenir des estimations sur les Inf-Sup discrets :

Proposition 1.3.4 *En plus des constantes c_0, c_1, c_2 telles que pour tout h et tout $u, u', v, v' \in X_h$ on ait :*

$$|a(u,u')| \leq c_0\|u\|_X\|u'\|_X, \quad |c(v,v')| \leq c_1\|v\|_Y\|v'\|_Y \quad |b(v,u)| \leq c_2\|v\|_Y\|u\|_X, \tag{1.3.31}$$

il existe c_3, c_4, c_5, c_6 strictement positifs et $\overline{h}$ tels que pour tout $h < \overline{h}$:

$$\inf_{v\in X_h}\sup_{u\in X_h}\frac{|b(v,u)|}{\|v\|_Y\|u\|_X} \geq \frac{1}{c_3|\log h|^{\frac{3}{2}}} \quad , \inf_{u\in X_h}\sup_{v\in X_h}\frac{|b(v,u)|}{\|v\|_Y\|u\|_X} \geq \frac{1}{c_4|\log h|^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.3.32}$$

$$\inf_{u\in X_h}\sup_{u'\in X_h}\frac{|a(u,u')|}{\|u\|_X\|u'\|_X} \geq \frac{1}{c_5}, \quad \inf_{v\in X_h}\sup_{v'\in X_h}\frac{|c(v,v')|}{\|v\|_Y\|v'\|_Y} \geq \frac{1}{c_6}. \tag{1.3.33}$$

–Démonstration : La constante c_3 s'obtient en combinant les deux corollaires ; en effet pour tout $v \in X_h$ on a :

$$\sup_{u\in X_h}\frac{|\int vu|}{\|u\|_{1/2,00}} \geq \frac{1}{C|\log h|}\sup_{u\in X_h}\frac{|\int vu|}{\|u\|_{1/2}} \geq \frac{1}{C|\log h|^{\frac{3}{2}}}\|v\|_{-1/2} \tag{1.3.34}$$

On obtient c_4 de manière analogue ; pour tout $u \in X_h$ on a :

$$\sup_{v\in X_h}\frac{|\int vu|}{\|v\|_{-1/2}} \geq \frac{1}{C|\log h|^{1/2}}\|u\|_{1/2} \geq \frac{1}{C|\log h|^{\frac{3}{2}}}\|u\|_{1/2,00} \tag{1.3.35}$$

La constante c_6 est inhabituelle dans la mesure où X_h est constitué de fonctions nulles au bord. Cependant d'une part $c(\cdot,\cdot)$ est non-dégénérée et est une perturbation compacte d'une forme bilinéaire coercive sur Y, et d'autre part X_h vérifie :

$$\forall v \in Y \quad \lim_{h\to 0}\inf_{v'\in X_h}\|v - v'\|_Y = 0 \tag{1.3.36}$$

Ceci suffit pour assurer l'existence de c_6. □

L'analogue suivant de la proposition 1.2.1 s'ensuit.

Proposition 1.3.5 *Il existe α et β deux réels strictement positifs, tels que pour tout h et tout U dans $\mathbb{K}^{N_h}$:*

$$\alpha\|\Lambda_h U\|_X \leq \|\Lambda_h B_h^{\star -1} C_h B_h^{-1} A_h U\|_X \leq \beta|\log h|^3\|\Lambda_h U\|_X \tag{1.3.37}$$

Nous montrons pour conclure des résultats numériques sur la cavité obtenue en remplaçant les doubles parois précédentes par une paroi simple (Figure 1.4). A ceci près que cette fois le nombre d'onde est $k = 4\pi$, l'onde incidente est la même. Nous montrons comme ci-dessus le graphe de la norme relative du reste en fonction de l'itération, en l'absence de préconditionneur (courbe du haut), et en présence du préconditionneur ci-dessus (courbe du bas).

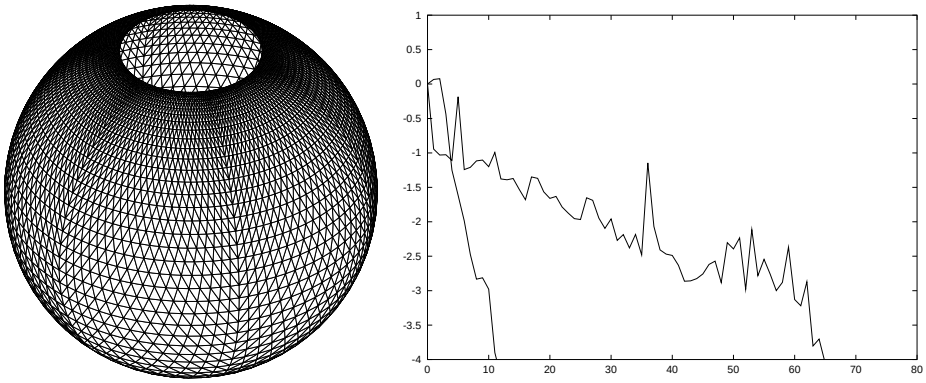


FIG. 1.4 – *Cavité vue de l'extérieur et résultats numériques.*

•

Des bornes logarithmiques apparentées à celles ci-dessus ont été obtenues de manière indépendante dans McLean-Steinbach [52] et BenBelgacem-Buffa-Maday [8].

1.4 Géométries approchées

Nous avons passé sous silence les problèmes liés à l'approximation de la géométrie. On reprend donc ici les principaux outils qui permettent via le lemme de Strang (voir l'annexe A) de contrôler ces erreurs.

Soit Γ une hypersurface sans bord, compacte et orientée d'un espace Euclidien orienté $\mathbb{E}$ (de dimension finie quelconque). On suppose que Γ est de classe C^∞. On note n la normale sur Γ, compatible avec son orientation et celle de $\mathbb{E}$.[1] Un voisinage tubulaire est un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{E}$ tel que pour un $\delta > 0$ l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma\times]-\delta,\delta[& \to & \mathcal{V} \\ (x,s) & \mapsto & x+sn(x) \end{array} \right. \tag{1.4.1}$$

est un C^∞ isomorphisme. De tels voisinages existent (on applique le théorème d'inversion locale à la fonction ci-dessus, considérée comme étant à valeurs dans

1. C'est à dire que, notant ω les formes volumiques canoniques associées aux structures Riemanniennes, $\omega_{\mathbb{E}}\lfloor n$ induit ω_Γ sur $T_x\Gamma$

$\mathbb{E}$, et on globalise grâce à la compacité de Γ) et dans la suite on en fixe un, qu'on note $\mathcal{V}$.

Puisque cette application est inversible on a :

– il existe une unique application $\wp : \mathcal{V} \to \Gamma$ telle que :

$$\forall x \in \Gamma \ \forall s \in]-\delta, \delta[\quad \wp(x + sn(x)) = x. \tag{1.4.2}$$

Elle est C^∞ et on l'appelle projection orthogonale ;

– il existe une unique application $\sigma : \mathcal{V} \to]-\delta, \delta[$ telle que :

$$\forall x \in \Gamma \ \forall s \in]-\delta, \delta[\quad \sigma(x + sn(x)) = s \tag{1.4.3}$$

Elle est C^∞ et on a :

$$\forall y \in \mathcal{V} \quad |y - \wp(y)| = |\sigma(y)| = \inf_{x \in \Gamma} |y - x|. \tag{1.4.4}$$

On se donne une famille $(\mathscr{T}_h)$ de maillages de Γ, c'est à dire, pour chaque h un complexe simplical d'ordre la dimension de $\mathbb{E}$, non dégénéré dont les sommets sont sur Γ.

On dit qu'un maillage $\mathscr{T}$ de Γ est conforme si la réalisation affine $[\mathscr{T}]$ de $\mathscr{T}$ est dans $\mathcal{V}$ et $\wp|_{[\mathscr{T}]} : [\mathscr{T}] \to \Gamma$ admet un inverse continu. Dans la suite nous supposerons toujours les $\mathscr{T}_h$ conformes, et on note Ξ_h les inverses de $\wp$ correspondant.

Nous appellons tetraèdres, triangles, arètes et points les réalisations affines de simplexes non dégénérés d'ordre 4, 3, 2 et 1 respectivement.

Soit T un simplexe d'ordre la dimension de $\mathbb{E}$. Son diamètre est noté h_T et le rayon de la plus grande boule inscrite dans T est noté ρ_T.

On dit que $(\mathscr{T}_h)$ est régulière si :

$$\sup_h \quad \sup\{h_T/\rho_T : T \in \mathscr{T}_h \quad \text{et} \quad \#T = \dim \mathbb{E}\} < \infty \tag{1.4.5}$$

et qu'elle est quasi-uniforme si de plus:

$$\sup_h \quad \sup\{h_T/h_{T'} : T \in \mathscr{T}_h \quad \text{et} \quad \#T = \#T' = \dim \mathbb{E}\} < \infty \tag{1.4.6}$$

On dit que $(\mathscr{T}_h)$ est localement quasi-uniforme si (en plus d'être régulière) elle vérifie une majoration comme ci-dessus mais seulement pour T et T' adjacents ($T \cap T' \neq \emptyset$).

On note Γ_h la réalisation affine de $\mathscr{T}_h$. Etant donné un entier $m \geq 1$ on définit l'approximation d'ordre m de Γ comme suit. Chaque élément T d'ordre maximal de $\mathscr{T}_h$ est muni de son réseau Σ_T^m de points de coordonnées barycentriques multiples de $1/m$. Il existe une unique application polynomiale d'ordre m, de T vers $\mathbb{E}$ qui envoie chaque $x \in \Sigma_T^m$, en $\wp(x)$. L'image par cette application de $[T]$ est une variété à coins (triangle curviligne quand $\dim \mathbb{E} = 3$) algébrique.

On note Γ_h^m la variété Lipshitzienne réunion de ces images pour T parcourant $\mathscr{T}_h$. Ainsi $\Gamma_h = \Gamma_h^1$.

La projection $\wp$ induit une bijection $\Gamma_h^m \to \Gamma$, et on note Ξ_h^m son inverse. Les espaces de Galerkin sur Γ sont alors construites en prenant des éléments finis (déja curvilignes!) sur la surface Γ_h^m et en les transportant sur Γ par Ξ_h^m. En général on n'a pas de formule explicite pour Ξ_h^m ; tous les calculs pratiques sont effectues sur la surface Γ_h^m qui elle est bien explicite (algébrique par morceaux). Des estimations générales sur Ξ_h^m permettent alors de dire de combien on s'écarte du résultat qu'on aurait obtenu en calculant sur les éléments finis tansportés sur Γ.

On présente maintenant les principales estimations sur Ξ_h^m dont on a besoin pour mener à terme cette étude. Les théorèmes standards sur l'interpolation donnent :

Proposition 1.4.1 *Il existe C tel que pour tout h et presque tout $x \in \Gamma$:*

$$|\Xi_h^m(x) - x| \leq Ch^{m+1}, \tag{1.4.7}$$

$$\forall \xi \in T_x\Gamma \quad |\mathrm{D}\Xi_h^m(x)\xi - \xi| \leq Ch^m|\xi|. \tag{1.4.8}$$

On en déduit les estimations suivantes, qui améliorent de 1 les ordres naïfs. Ces résultats sont dûs à Nédélec [55] pour $\dim \mathbb{E} = 3$. La démonstration qui y figure repose sur des calculs ad hoc sur la forme volumique, écrite $(\xi_1, \xi_2) \mapsto n \cdot (\xi_1 \times \xi_2)$ sur les surfaces de $\mathbb{R}^3$. Auparavant LeRoux [69] avait considéré les courbes dans $\mathbb{R}^2$. En basse dimension le développement limité du Jacobien est explicite ; l'emploi de la différentielle du déterminant nous permet de simplifier la démonstration et d'étendre le résultat à toutes les dimensions.

Proposition 1.4.2 *Il existe C tel que pour tout h et presque tout $x \in \Gamma$, et tout $\xi_1, \xi_2 \in T_x\Gamma$:*

$$|\mathrm{D}\Xi_h^m(x)\xi_1 \cdot \mathrm{D}\Xi_h^m(x)\xi_2 - \xi_1 \cdot \xi_2| \leq Ch^{m+1}|\xi_1||\xi_2|, \tag{1.4.9}$$

$$|\operatorname{Jac}\Xi_h^m(x) - 1| \leq Ch^{m+1}. \tag{1.4.10}$$

–Démonstration : (i) Pour $i = 1, 2$ on pose $\xi_i^h = \mathrm{D}\Xi_h^m(x)\xi_i$. On a :

$$\xi_1^h \cdot \xi_2^h - \xi_1 \cdot \xi_2 = (\xi_1^h - \xi_1) \cdot \xi_2 + \xi_1 \cdot (\xi_2^h - \xi_2) + (\xi_1^h - \xi_1) \cdot (\xi_2^h - \xi_2). \tag{1.4.11}$$

Nous traitons maintenant le premier terme du second membre ; le deuxième lui est semblable et le troisième ne pose pas de problème.

Soit $\Phi : U \to \Gamma$ une carte locale. Puisque pour tout $x \in \Gamma$, $\Xi_h^m(x) - x$ est colinéaire à la normale $n(x)$, on a pour presque tout $x \in U$ et tout $y \in \mathrm{Vect}(U)$:

$$(\Xi_h^m - I)(\Phi(x)) \cdot \mathrm{D}\Phi(x)y = 0. \tag{1.4.12}$$

En différenciant par rapport à x à y fixé on obtient que pour presque tout $x \in U$, tout $y_1, y_2 \in \mathrm{Vect}(U)$:

$$(\mathrm{D}\Xi_h^m - I)(\Phi(x))\mathrm{D}\Phi(x)y_1 \cdot \mathrm{D}\Phi(x)y_2 + (\Xi_h^m - I)(\Phi(x)) \cdot \mathrm{D}^2\Phi(x)y_1y_2 = 0. \tag{1.4.13}$$

Puisqu'on peut choisir un atlas fini de Γ, il s'ensuit que pour presque tout $x \in \Gamma$, pour tout $\xi_1, \xi_2 \in T_x\Gamma$:

$$|(\mathrm{D}\Xi_h^m - I)(x)\xi_1 \cdot \xi_2| \leq C|(\Xi_h^m - I)(x)|\ |\xi_1|\ |\xi_2|. \tag{1.4.14}$$

La première majoration à démontrer en découle.

(ii) En presque tout $x \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Jac}\,\Xi_h^m(x))^2 &= \det(\mathrm{D}\Xi_h^m(x)^\star \mathrm{D}\Xi_h^m(x)) && (1.4.15)\\ &= 1 + \mathrm{tr}(\mathrm{D}\Xi_h^m(x)^\star \mathrm{D}\Xi_h^m(x) - I(x)) + && (1.4.16)\\ &\quad O(\|\mathrm{D}\Xi_h^m(x)^\star \mathrm{D}\Xi_h^m(x) - I(x)\|^2). && (1.4.17)\end{aligned}$$

Et choisissant (ξ_i) une base orthonormée de $T_x\Gamma$ on a :

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(\mathrm{D}\Xi_h^m(x)^\star \mathrm{D}\Xi_h^m(x) - I(x)) && (1.4.18)\\ =\ &\textstyle\sum_i((\mathrm{D}\Xi_h^m(x)^\star \mathrm{D}\Xi_h^m(x) - I(x))\xi_i) \cdot (\xi_i) && (1.4.19)\\ =\ &\textstyle\sum_i |\mathrm{D}\Xi_h^m(x)\xi_i|^2 - |\xi_i|^2. && (1.4.20)\end{aligned}$$

On applique alors la première majoration. □

Pour x et y sur Γ on pose $x_h = \Xi_h^m(x)$ et $y_h = \Xi_h^m(y)$. On étudie maintenant l'erreur commise dans l'approximation du noyau intégral, i.e. :

$$\left|\frac{1}{|x_h - y_h|} - \frac{1}{|x-y|}\right|. \tag{1.4.21}$$

Nous démontrons le résultat suivant, plus général:

Proposition 1.4.3 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe $C > 0$ tel que pour tout h et tout $x, y \in \Gamma$ vérifiant $x \neq y$ on a:*

$$||x_h - y_h|^\alpha - |x-y|^\alpha| \leq Ch^{m+1}|x-y|^\alpha. \tag{1.4.22}$$

–Démonstration : La fonction :

$$x \mapsto |x|^\alpha, \tag{1.4.23}$$

a pour différentielle, en tout $x \neq 0$, l'application :

$$y \mapsto \alpha|x|^{\alpha-2}x \cdot y. \tag{1.4.24}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}|x_h - y_h|^\alpha - |x-y|^\alpha = \int_0^1 &\alpha|(x + t(x_h - x)) - (y + t(y_h - y))|^{\alpha-2}\\ &\big((x + t(x_h - x)) - (y + t(y_h - y))\big) \cdot \big((x_h - x) - (y_h - y)\big)\mathrm{d}t. \quad (1.4.25)\end{aligned}$$

Or (distinguant les cas $\alpha < 2$ et $\alpha \geq 2$) on constate que :

$$(i) \quad |(x + t(x_h - x)) - (y + t(y_h - y))|^{\alpha-2} \leq C|x-y|^{\alpha-2}. \tag{1.4.26}$$

Ensuite, d'une part :

$$
\begin{aligned}
(ii) \qquad & |(x-y)\cdot((x_h-x)-(y_h-y))| && (1.4.27)\\
\leq\ & |(x-y)\cdot n(x)||x_h-x| + |(x-y)\cdot n(y)||y_h-y| && (1.4.28)\\
\leq\ & C|x-y|^2 \sup\{|\Xi_h^m(z)-z| \ :\ z\in\Gamma\} && (1.4.29)\\
\leq\ & Ch^{m+1}|x-y|^2, && (1.4.30)
\end{aligned}
$$

et d'autre part, si x et y sont dans la même composante connexe de Γ :

$$
\begin{aligned}
& |(x_h-x)-(y_h-y)| && (1.4.31)\\
\leq\ & C\sup\{\|\mathrm{D}\Xi_h^m(z) - I_{T_z(\Gamma)}\| \ :\ z\in\Gamma\}\ |x-y| && (1.4.32)\\
\leq\ & Ch^m|x-y|. && (1.4.33)
\end{aligned}
$$

Lorsque x et y n'appartiennent pas à la même composante connexe de Γ, on a $|x-y|\geq C^{-1}$, et pour $z=x,y$ on a aussi $|\Xi_h^m(z)-z|\leq Ch^{m+1}$ de sorte que l'estimation ci-dessus est vraie aussi dans ce cas. L'élevant au carré on en déduit :

$$
(iii) \quad t|(x_h-x)-(y_h-y)|^2 \leq Ch^{2m}|x-y|^2. \qquad (1.4.34)
$$

Puisque $2m\geq m+1$, combinant les majorations (ii) et (iii) avec (i) on obtient la proposition. □

On en déduit l'erreur commise sur les formes bilinéaires approchées et aussi comment combiner les ordres d'approximation de la géométrie et les ordres des éléments finis pour obtenir une convergence optimale pour les équations scalaires [55] et vectorielles [10]. Notons cependant qu'en pratique, à cause de la grande complexité des codes d'équations intégrales, on ne se place pas toujours sous les hypothèses qu'ils emploient mais qu'on obtient quand même de très bons résultats.

Chapitre 2

Electromagnetism

Abstract : We describe a preconditioning technique for the Galerkin approximation of the Electric Field Integral Equation, which arises in the scattering theory for harmonic electromagnetic waves. It is based on a discretization of the Calderon formulas and the Helmholtz decomposition. We prove several properties of the method, in particular that it produces a variational solution on a subspace of the Galerkin space for which we have an LBB Inf-Sup condition. When the Krylov spaces associated with the continuous operators are non degenerate we prove that the discrete Krylov spaces converge as the mesh refinement goes to zero ; when moreover the EFIE is non-degenerate on the continuous Krylov spaces, the discrete Krylov-iterates converge towards the continuous ones. We also argue that one might expect the continuous Krylov-iterates to exhibit super-linear convergence of the form $n \mapsto C^n(n!)^{-\alpha}$ for some $C > 0$ and $\alpha > 0$. Finally we illustrate the theory with numerical experiments.

Introduction

In [72] O. Steinbach and W.L. Wendland described several strategies for the preconditioning of some boundary integral equations of the first kind, based on the knowledge of an operator of the opposite order. On several examples of symmetric positive definite (SPD) integral operators, they provided a discretization of the operators, to construct a preconditioner such that the extreme eigenvalues of the preconditioned matrix remain bounded away from 0 and $+\infty$ independently of the mesh refinement. When iterative algorithms are used to solve the matrix equations, this in turn is well known to yield convergence estimates that are also independent of the mesh refinement, of the form $\|U^n - U^\star\| \leq C\alpha^n \|U^\star\|$ for some $C > 0$, $0 < \alpha < 1$ (so-called linear convergence).

In [133] we adapted the theory to some non-SPD problems. We showed that in these cases one can still prove that the spectral condition number of the preconditioned matrix remains bounded independently of the mesh refinement, as long as all the bilinear forms involved satisfy uniform Inf-Sup estimates on the Galerkin spaces. This was applied to some problems of three-dimensional acoustic scattering. Complementary results, in particular close to resonant frequencies, were exposed in [134].

We restricted attention to preconditioners deduced from Calderon formulas – for some scalar operators –, and remarked that they provide an inverse up to a compact endomorphism. One would expect this to produce a matrix with a spectrum clustered around 1. This would imply very fast, perhaps in some sense super-linear, convergence of Krylov subspace methods. However we presented no formal proof of this intuition.

In this paper we use the Calderon formulas – for some operators on tangential vector fields – to construct a preconditioner for the Electric Field Integral Equation (EFIE). Compared with the scalar case there is a major pitfall: the involved bilinear forms do not all satisfy uniform Inf-Sup conditions on the standard Galerkin spaces (Proposition 2.3.1). We nevertheless construct a numerically efficient preconditioner, for which we can identify and prove satisfactory properties. In effect the Galerkin problem is solved on a subspace of the standard space and we show that this subspace has all the properties required to ensure the well-posedness of the EFIE on it (Theorem 2.3.16). We also prove that the discretized preconditioner is stable and approximating in the sense of Proposition 2.4.6. The discrete Krylov spaces converge as the mesh refinement h decreases to 0 (Theorem 2.4.7) and from this we deduce that under some natural hypotheses, the approximate solution at iteration n converges as $h \to 0$, towards a vector u^n (Corollary 2.4.12). We also explain why we expect (u^n) to converge super-linearly, perhaps even at the rate $C^n(n!)^{-\alpha}$, for some $C > 0$, $\alpha > 0$ (§2.4.3).

We first officially detailed this discretization technique in Patent [132], and announced the theorems justifying it in [135]. Proofs of one of them (Theorem 2.1.2) can be found in [131] (this paper also contains complementary results on the behavior of the equation at resonant frequencies). In the present paper we explicitate and prove – and sometimes improve – the remaining announced results, as well as a few others that sustain the construction.

At about the same time, in [31], another research team announced progress on what also amounts to the use of the Calderon formulas for the construction of a stable method. However discretizations were proposed only for Nyström schemes, and it seems that for these they did not encounter a difficulty comparable to Proposition 2.3.1. Since this was the main problem we had to solve in the Galerkin setting, in extending the method from acoustics to electromagnetics, we believe there to be no overlap as for the techniques involved.

Outline The paper is organized as follows:

§2.1 We describe the continuous problem we are dealing with and state sufficient conditions for the discretization to satisfy uniform Inf-Sup estimates. We also prove the Calderon formulas.

§2.2 We define the Galerkin spaces we will use and give some useful properties: negative norm estimates, approximation properties for harmonic tangent fields and properties of the discrete Helmholtz decomposition.

§2.3 We introduce the preconditioner we propose, after having described the main difficulty. Then we give a first interpretation of the system we solve and the projections we use. We give several characterizations of the range of the discrete rotation operator, and deduce from these that the EFIE is well posed on this subspace. We also devise an intrinsic stopping criterion for the algorithm.

§2.4 We show the convergence of the Krylov subspaces and explain why this should lead to super-linear convergence of the iterates.

§2.5 We illustrate the theory with numerical results for diffraction by a sphere, a cavity and a singular geometry.

2.1 The Electric Field Integral Equation

We briefly recall the setting for exterior boundary value problems for the harmonic Maxwell equations, the integral representation of exterior electromagnetic fields and the related integral equation known as the EFIE, as presented for instance in Cessenat [112] or Nédélec [116]. Then we turn to the discretization of this equation by the Galerkin method and state some new sufficient conditions (obtained in Christiansen [131]) for its well posedness, in the sense of satisfying a uniform Inf-Sup condition. This in turn is well known to guarantee *quasi-optimal* convergence of the approximate solutions. Finally we include a proof of the Calderon formulas and explain why they should lead to an efficient preconditioning technique.

2.1.1 The continuous problem

Let Ω_- be a smooth, bounded and open subset of $\mathbb{R}^3$, denote by Γ its surface and by Ω_+ the complement of $\Omega_- \cup \Gamma$. We refer to Ω_- as the interior domain, and to Ω_+ as the exterior domain. The unit-length orthogonal vector field on Γ, pointing into Ω_+, is denoted n. We suppose throughout that Ω_+ is connected. The free-space harmonic Maxwell equations for vector fields E and H in Ω_+ are:

$$\operatorname{curl} E = +i\omega\mu H, \tag{2.1.1}$$

$$\operatorname{curl} H = -i\omega\epsilon E, \tag{2.1.2}$$

where μ is the magnetic permeability, ϵ is the electric permittivity and ω is the pulsation. Define the wavenumber k and the impedance Z by :

$$k = \omega(\mu\epsilon)^{1/2}, \tag{2.1.3}$$
$$Z = (\mu/\epsilon)^{1/2}. \tag{2.1.4}$$

Then we have $+i\omega\mu = +ikZ$ and $-i\omega\epsilon = -ik/Z$.

Spaces of functions On any smooth Riemannian manifold M which is either an open subset of an Euclidean space or is compact without boundary, the usual Sobolev spaces of scalar and tangential fields of regularity order $s \in \mathbb{R}$ are denoted $\mathrm{H}^s(M)$ and $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(M)$ respectively (see e.g. Taylor [110] Vol. I, Chap. 4), and the corresponding norms are both written :

$$u \mapsto |u|_s. \tag{2.1.5}$$

On any open subset Ω of $\mathbb{R}^3$, define the Sobolev spaces $\mathrm{H}^s_{\mathrm{curl}}(\Omega)$ of vector fields by :

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{curl}}(\Omega) = \{v \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Omega) \ : \ \mathrm{curl}\, v \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Omega)\}. \tag{2.1.6}$$

We will use also the Hilbert spaces $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ of tangent fields on Γ defined by :

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma) = \{u \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma) \ : \ \mathrm{div}\, u \in \mathrm{H}^s(\Gamma)\}. \tag{2.1.7}$$

The spaces $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ are equipped with the norms :

$$u \mapsto \|u\|_s \ : \ \|u\|_s^2 = |u|_s^2 + |\,\mathrm{div}\, u|_s^2. \tag{2.1.8}$$

We define $\mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ in a similar way but we don't introduce any notation for the corresponding norm. Notice that $u \mapsto u \times n$ induces isomorphisms $\mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}(\Gamma) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ and $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$.

For any space of (scalar) distributions X on Γ, we denote by $X^\bullet$ the subspace of elements u such that for all v that are constant on each connected component of Γ (i.e. satisfying $\Delta v = 0$) $\langle u, v\rangle = 0$. As usual, the Hilbert spaces we consider are vector spaces over $\mathbb{C}$ obtained as complexifications of real Hilbert spaces of scalar and tangent fields. In particular they are equipped with conjugations $u \mapsto \overline{u}$, induced by the standard conjugation in $\mathbb{C}$.

Recall the result of Paquet [64] ([116] Theorem 5.4.2, p. 209) that we have well defined continuous and surjective tangential trace operators for arbitrary large enough $R > 0$ (with $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| < R\}$) :

$$\gamma_{\mathrm{T}} \ : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+ \cap B_R) & \to & \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma) \\ v & \mapsto & v_{\mathrm{T}} = v - (v \cdot n)n \end{array} \right. . \tag{2.1.9}$$

For simplicity we denote by $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+)_{loc}$ the Fréchet space of vector fields in Ω_+ whose restrictions are in $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+ \cap B_R)$ for all $R > 0$. We caution the reader

that this notation is sometimes (but not in this article) used for a different space consisting of the fields whose restrictions are in $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+ \cap U)$ for all open U such that $\overline{U}$ is a compact subset of Ω_+. This space is larger since it allows rather wild behavior close to Γ. In particular there is no trace operator on this space.

A technique we shall use many times, is to write tangential vector fields u in the form of their Helmholtz decomposition:

$$u = \operatorname{grad} p + \operatorname{rot} q + \alpha, \tag{2.1.10}$$

with $\Delta\alpha = 0$, and to use regularity theorems of the Laplacian to characterize p and q. We shall refer to this technique as the *HDRL*. It was used to study electromagnetic scattering by DeLaBourdonnaye [18].

Integral representation for exterior scattering problems The basic property for exterior boundary value problems for the harmonic Maxwell equations is ([116] Theorem 5.4.6, p. 220) that for any $k > 0$, and any $v \in \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ there is a unique $(E, H) \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+)^2_{loc}$ such that:

- (E, H) solves the harmonic Maxwell equations in Ω_+,
- (E, H) satisfies the Silver-Müller radiation conditions,
- and $\gamma_{\mathrm{T}} E = v$.

Let G_k be the fundamental solution of the Helmholtz operator $-\Delta - k^2$ satisfying the Sommerfeld radiation condition:

$$G_k(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \tag{2.1.11}$$

and let Φ_k be the potential, mapping any sufficiently smooth tangent field u on Γ to the field in $\mathbb{R}^3$ defined away from Γ by:

$$(\Phi_k u)(y) = \int_\Gamma G_k(x, y) u(x) \mathrm{d}x. \tag{2.1.12}$$

Returning to the above boundary value problem, if k is not a resonance of the *interior* Maxwell equations there is a unique $u \in \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ such that for all $y \in \Omega_+$:

$$E = (1 + (1/k^2) \operatorname{grad} \operatorname{div}) \Phi_k u, \tag{2.1.13}$$

$$H = 1/(ikZ) \operatorname{curl} \Phi_k u. \tag{2.1.14}$$

This formula is a special case of the Stratton-Chu integral representation ([116] Theorem 5.5.1, p. 234). For any $k \neq 0$ we define the Electric Field Integral Operator A_k by:

$$A_k u = \gamma_{\mathrm{T}} (1 + (1/k^2) \operatorname{grad} \operatorname{div}) \Phi_k u. \tag{2.1.15}$$

One shows that the EFIO is continuous $A_k : \mathrm{H}^s_{\mathrm{div}} \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}$, and that if k is not a resonance of the interior problem it is an isomorphism ([116] Theorem 5.6.2, p. 247).

Thus if k is not a resonant frequency the exterior problem for a given $v \in \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ is reduced to the problem of solving the integral equation $A_k u = v$, called EFIE.

Variational formulation From the HDRL it follows that the bilinear form on smooth tangent fields:

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = \int_\Gamma u \cdot v, \tag{2.1.16}$$

extends continuously to a duality between $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ and $\mathrm{H}^{-1-s}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ (see also [116] Lemma 4.5.1, p. 208). Thus one obtains the variational formulation of the EFIE. For a given $v \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ solve:

$$u \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma) \quad \text{and} \quad \forall u' \in \mathrm{H}^{-1-s}_{\mathrm{div}}(\Gamma) \quad \langle A_k u, u' \rangle = \langle v, u' \rangle. \tag{2.1.17}$$

Remark that the case $s = -1/2$ is symmetric. From a practical point of view it is important that we have the following expression, with only weakly singular integrals (all integrals are on Γ):

$$\begin{aligned} \langle A_k u, u' \rangle \;\; = \;\; & \iint G_k(x,y) u(x) \cdot u'(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ & -(1/k^2) \iint G_k(x,y) \operatorname{div} u(x) \operatorname{div} u'(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

2.1.2 Discretization

Put $X = \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$. Given some sequence (X_h) of closed (finite-dimensional) subspaces of X, the Galerkin method to solve equation (2.1.17) is to consider the problems:

$$u \in X_h \quad \text{and} \quad \forall u' \in X_h \quad \langle A_k u, u' \rangle = \langle v, u' \rangle. \tag{2.1.19}$$

When it is uniquely solvable for each h one obtains a sequence (u_h), and it is of fundamental importance to know to which extent it converges towards $A_k^{-1} v$.

In this context we have the following fundamental theorem due to Babuska [6]:

Theorem 2.1.1 *Let X be a reflexive Banach space and $\mathcal{A} : X \to X^\star$ be linear and continuous. Suppose we have a closed subspace X_h of X, and that for some $\alpha > 0$ we have:*

$$\inf_{u \in X_h} \sup_{u' \in X_h} \frac{|(\mathcal{A}u)(u')|}{\|u\| \, \|u'\|} \geq \alpha, \tag{2.1.20}$$

$$\forall u' \in X_h \quad \big(\forall u \in X_h \;\; (\mathcal{A}u)(u') = 0\big) \Rightarrow \big(u' = 0\big). \tag{2.1.21}$$

Then the induced map $\mathcal{A}_h : X_h \to X_h^\star$ *is invertible (with an inverse of norm less than* α^{-1}*). Moreover for all* $l \in X^\star$*, if we have a solution* $u \in X$ *to* $\mathcal{A}u = l$ *then :*

$$\|\mathcal{A}_h^{-1}(l|_{X_h}) - u\| \leq \left(1 + \alpha^{-1}\|\mathcal{A}\|\right) \inf\{\|u' - u\| \ : \ u' \in X_h\}. \tag{2.1.22}$$

Notice that finite dimensional subspaces are closed and that for these, condition (2.1.21) is implied by (2.1.20).

Now suppose we have a family (X_h) of closed subspaces of X. When there is an α that holds for all h in estimate (2.1.20), and (2.1.21) holds for all h, we say that we have a *uniform discrete Inf-Sup condition*. Then the only remaining point is whether the spaces X_h are *approximating*, in the sense that :

$$\forall u \in X \quad \lim_h \inf\{\|u - u'\| \ : \ u' \in X_h\} = 0. \tag{2.1.23}$$

In general this question is well studied in the literature (with improved convergence estimates on some dense subspaces of X). However in order to justify the preconditioning technique we shall describe in this paper, we will need to study this question for some non standard spaces.

Inf-Sup conditions for the EFIE The Galerkin discretization of the EFIE by Raviart-Thomas type vector fields was studied by Bendali [10]. More generally we consider the following hypotheses for the Galerkin spaces (X_h).

(H0) The spaces X_h are finite-dimensional subspaces of $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$, which are stable under the conjugation $u \mapsto \overline{u}$ (*conj.-stable* for short).

(H1) There is $C > 0$ such that for all $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{div}}(\Gamma)$:

$$\inf_{u' \in X_h} \|u - u'\|_0 \leq Ch\|u\|_1. \tag{2.1.24}$$

(H2) There is $C > 0$ such that for all $u \in X_h$, $\|u\|_0 \leq Ch^{-1}\|u\|_{-1}$.

(H3) Putting $W_h = \{u \in X_h \ : \ \operatorname{div} u = 0\}$, there is $C > 0$ such that for all $u \in X_h$ if:

$$\forall w \in W_h \quad \langle u, w\rangle = 0, \tag{2.1.25}$$

then the solution ϕ of:

$$\phi \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \text{and} \quad \Delta\phi = \operatorname{div} u, \tag{2.1.26}$$

satisfies :

$$|u - \operatorname{grad}\phi|_0 \leq Ch|\operatorname{div} u|_0. \tag{2.1.27}$$

Notice that (H3) implies the usual Inf-Sup estimate: There is $C > 0$ such that:

$$\inf_{q \in \operatorname{div} X_h} \sup_{u \in X_h} \frac{|\langle q, \operatorname{div} u \rangle|}{|q|_0 \|u\|_0} \geq \frac{1}{C}. \tag{2.1.28}$$

The following theorem was proved in Christiansen [131]:

Theorem 2.1.2 *If k is not a resonance of the interior problem and a family (X_h) of Galerkin spaces satisfies the four conditions (H0),...,(H3), then the bilinear form induced by A_k on X satisfies a uniform Inf-Sup condition on X_h.*

Of course these hypotheses also guarantee that in addition the (X_h) are approximating, so the approximate solution converges to the exact one (see §2.2.2 for some details on this question).

The fact that the fields obtained by suitable transportation of Raviart-Thomas fields onto Γ, satisfy these hypotheses, is also checked in Christiansen [131], relying mostly on classical results that can be found for instance in Brezzi-Fortin [119]. Variants of the estimate on discrete Helmholtz decompositions appearing in (H3) have been used to study eigenvalue problems in mixed form and related discrete compactness results (see Kikuchi [51], Boffi et al. [16],[17], Demkowicz et al. [36]). Here, as already indicated, we will need to prove the hypothesis for some new spaces, in order to justify our preconditioning technique.

Solving the matrix equation To solve the Galerkin problem one chooses a basis $e_h = (e_h(i))$ of X_h, and defines the matrix $A_h(k)$ and the tuple V_h by:

$$A_h(k)_{ij} = \langle A(k) e_h(j), e_h(i) \rangle \quad (V_h)_i = \langle v, e_h(i) \rangle. \tag{2.1.29}$$

In other words $A_h(k)$ is the matrix, from e_h to its dual basis, of the induced map:

$$\mathcal{A}_h(k) : \left\{ \begin{array}{rcl} X_h & \to & X_h^\star \\ u & \mapsto & \langle A(k)u, \cdot \rangle \end{array} \right. , \tag{2.1.30}$$

whereas V_h is the coordinate vector, in the dual basis of e_h, of the linear form $\langle v, \cdot \rangle$ restricted to X_h.

Then the discrete Galerkin problem (2.1.19) is stated in matrix terms as:

$$A_h(k) U = V_h \tag{2.1.31}$$

When this equation is solved iteratively one usually observes very slow convergence, if one observes it at all. Loosely speaking this is due to the fact that the operator A_k, via the Helmholtz decomposition, is seen to have one term of order 1 and another of order -1 acting on supplementary infinite-dimensional subspaces and with different signs. Thus, at least if the basis e_h is such that the canonical scalar product on $\mathbb{C}^{\dim X_h}$ corresponds to the $\mathrm{H}^0_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ scalar product,

the spectrum of $A_h(k)$ accumulates both at 0 and ∞. The presence of resonant frequencies further deteriorates the conditioning of the matrix.

This motivates our search for a preconditioner, that is, a matrix Z_h such that when Z_h is incorporated in an iterative solver, the reduction in the number of iterations required to obtain a satisfactory approximate solution outweighs the overhead of multiplying by Z_h. It is well-known that this is achieved whenever Z_h is some easily computable approximate inverse of $A_h(k)$.

For ease of interpretation we will drop the matrix point of view and look instead for some easily computable $\mathcal{Z}_h : X_h^\star \to X_h$ which approximately inverts $\mathcal{A}_h(k)$. However it should be kept in mind that the method is effective only in as far as it can be translated into a matrix manipulating algorithm.

2.1.3 Calderon formulas

The preconditioning technique we study in this paper is based on the Calderon formulas which we start by recalling. They are detailed in the electromagnetic setting in both Cessenat [112] and Nédélec [116]. We include a derivation of them mainly because the notations adopted here are not quite the same. Of course many of the arguments developed in this section were implicitly assumed while we introduced the EFIE, and should be placed earlier in a strictly logical development.

Denote by B the operator on tangent fields on Γ defined by :

$$Bu = u \times n. \tag{2.1.32}$$

Let $\wp$ be the orthogonal projection onto Γ, which is defined and smooth on a tubular neighborhood of Γ. Extending n to this neighborhood by $\wp$, we can define at any point x of this neighborhood, the tangential component of any vector v, by $\mathrm{T}_x v = v - (v \cdot n(x))n(x)$. Define an operator C_k on tangent fields on Γ, by taking the principal value of the tangential component in the exterior and interior domains (with respect to shrinking balls centered on Γ), of the following potential :

$$C_k u = \mathrm{PV}\,\mathrm{T}\,\mathrm{curl}\,\Phi_k u. \tag{2.1.33}$$

In fact for smooth u the field $\mathrm{curl}\,\Phi_k u$ has different interior and exterior tangential traces which are both finite. More precisely denoting γ_{T}^+ and γ_{T}^- the exterior and interior trace operators one has :

$$\gamma_{\mathrm{T}}^+ \,\mathrm{curl}\,\Phi_k u = +(1/2)Bu + C_k u, \tag{2.1.34}$$

$$\gamma_{\mathrm{T}}^- \,\mathrm{curl}\,\Phi_k u = -(1/2)Bu + C_k u. \tag{2.1.35}$$

In particular one has the familiar *jump formula* :

$$u = [(\mathrm{curl}\,\Phi_k u) \times n] = B(\gamma^- \,\mathrm{curl}\,\Phi_k u - \gamma^+ \,\mathrm{curl}\,\Phi_k u). \tag{2.1.36}$$

We also remind the reader that for potentials of the form:

$$(1 + (1/k^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div})\Phi_k u, \tag{2.1.37}$$

the exterior and interior tangential traces are equal (and given by the EFIO), thus there is no tangential "jump" for these.

To derive the Calderon formulas the last ingredient we need is the *representation theorem*:

Theorem 2.1.3 *Suppose (E, H) is a field whose restrictions to Ω_- and Ω_+ are in $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_-)^2$ and $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+)^2_{loc}$ and solve Maxwell's equations for a given wave number k. Suppose also that it verifies the Silver-Müller radiation conditions. Define the electric and magnetic currents j and m on Γ by the jump formulas:*

$$j = [H \times n] = (\gamma_{\mathrm{T}}^- H - \gamma_{\mathrm{T}}^+ H) \times n, \tag{2.1.38}$$
$$m = [E \times n] = (\gamma_{\mathrm{T}}^- E - \gamma_{\mathrm{T}}^+ E) \times n. \tag{2.1.39}$$

Then in Ω_- and Ω_+ we have:

$$E = (+ikZ)(1 + (1/k^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div})\Phi_k j + \mathrm{curl}\,\Phi_k m, \tag{2.1.40}$$
$$H = (-ik/Z)(1 + (1/k^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div})\Phi_k m + \mathrm{curl}\,\Phi_k j. \tag{2.1.41}$$

Now the theorem we are interested in is:

Theorem 2.1.4 *The following operator is a projector:*

$$\begin{bmatrix} 1/2 - BC_k & -(-ik/Z)BA_k \\ -(+ikZ)BA_k & 1/2 - BC_k \end{bmatrix}. \tag{2.1.42}$$

More explicitly we have:

$$BC_kBC_k + k^2 BA_kBA_k = 1/4, \tag{2.1.43}$$
$$BC_kBA_k + BA_kBC_k = 0. \tag{2.1.44}$$

–Proof : Choose two (smooth enough) tangent fields u and v, on Γ. Define fields E and H by putting, *in the exterior domain*:

$$E = (+ikZ)(1 + (1/k^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div})\Phi_k u + \mathrm{curl}\,\Phi_k v, \tag{2.1.45}$$
$$H = (-ik/Z)(1 + (1/k^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div})\Phi_k v + \mathrm{curl}\,\Phi_k u. \tag{2.1.46}$$

Then we have:

$$-\gamma_{\mathrm{T}}^+ H \times n = -(-ik/Z)BA_k v + (1/2 - BC_k)u, \tag{2.1.47}$$
$$-\gamma_{\mathrm{T}}^+ E \times n = -(+ikZ)BA_k u + (1/2 - BC_k)v. \tag{2.1.48}$$

In the interior domain put $E = 0$ and $H = 0$. Now we have:

$$[H \times n] = -\gamma_{\mathrm{T}}^+ H \times n, \tag{2.1.49}$$
$$[E \times n] = -\gamma_{\mathrm{T}}^+ E \times n. \tag{2.1.50}$$

Using the representation theorem, these tangent fields give rise to new integral representations for E and H. Now, to say that the announced operator is a projector just expresses that taking the jumps (or the appropriate exterior traces) of these new integral representations for the same fields (E, H), should yield the same jumps (or exterior traces). □

The operator appearing in equation (2.1.42) is called the *exterior Calderon projector*.

The crucial remark is now that the operator BC_kBC_k is a compact endomorphism of $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$, thus $4k^2BA_kB$ inverts A_k up to a compact operator. The scalar coefficient $4k^2$ is unimportant for preconditioning purposes, so our aim will be to discretize the operator BA_kB. Since we deal with variational formulations we express our goal in terms of bilinear forms, for which it is preferable to have symmetric formulations, so, remarking that $B = -B^\star = B^{\star-1}$, we set out to discretize the map:

$$\mathcal{Z}_k = \mathcal{B}^{\star-1}\mathcal{A}_k\mathcal{B}^{-1}, \tag{2.1.51}$$

where $\mathcal{B}$ is the isomorphism:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma) & \to & \mathrm{H}^{-1-s}_{\mathrm{div}}(\Gamma)^\star \\ u & \mapsto & \langle Bu, \cdot \rangle \end{array} \right. . \tag{2.1.52}$$

2.2 Some properties of some Galerkin spaces

We recall the definition and basic properties of the Galerkin spaces on Γ that we will use in this article, including the null sequences relating spaces of scalar and tangent finite elements, as well as some negative norm estimates. Of particular importance will be the approximation of harmonic tangent fields, and the structure of the discrete Helmholtz decomposition that largely follows from it.

2.2.1 Surface Finite Element spaces

Recall that we denote by $\wp$ the orthogonal projection onto Γ, which is defined and smooth on a tubular neighborhood of Γ. Let $(\mathcal{T}_h)$ be a family of triangulations of Γ, where for all h the largest diameter of a triangle of $\mathcal{T}_h$ is h. We will always suppose that $(\mathcal{T}_h)$ is regular, and most often that it is (globally) quasi-uniform. Let Γ_h be the affine polyhedron determined by $\mathcal{T}_h$, considered as a Lipschitz manifold. For small enough h, $\wp$ induces Lipschitz-isomorphisms $\Gamma_h \to \Gamma$, and we denote by Ξ_h the inverse mappings.

Fix a nonzero $m \in \mathbb{N}$. On Γ_h we consider the space $\mathsf{S}^0(\mathcal{T}_h)$ of continuous scalar functions whose restriction to any triangle is P^m (a polynomial of degree m), the space $\mathsf{S}^1(\mathcal{T}_h)$ of Raviart-Thomas $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}$-conforming vector fields of degree m, and the space $\mathsf{S}^2(\mathcal{T}_h)$ of scalar functions whose restriction to any triangle is P^{m-1}.

From these finite element spaces on Γ_h we deduce finite element spaces on Γ by the transport formulas:

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{S}_h^0 & = & \{x \mapsto & u(\Xi_h(x)) \ : u \in \mathsf{S}^0(\mathcal{T}_h)\}, \\ \mathsf{S}_h^1 & = & \{x \mapsto & \mathrm{Jac}\,\Xi_h(x)\mathrm{D}\Xi_h(x)^{-1}u(\Xi_h(x)) \ : u \in \mathsf{S}^1(\mathcal{T}_h)\}, \\ \mathsf{S}_h^2 & = & \{x \mapsto & \mathrm{Jac}\,\Xi_h(x)u(\Xi_h(x)) \ : u \in \mathsf{S}^2(\mathcal{T}_h)\}. \end{array} \quad . \tag{2.2.1}$$

These transport formulas were chosen to make the following diagram commute. The horizontal arrows are the differential operators rot and div, whereas the vertical ones are the above transport formulas.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathsf{S}^0(\mathcal{T}_h) & \to & \mathsf{S}^1(\mathcal{T}_h) & \to & \mathsf{S}^2(\mathcal{T}_h) & \to & 0 \\ \downarrow & 0 & \downarrow & \mathrm{rot} & \downarrow & \mathrm{div} & \downarrow & 0 & \downarrow \\ 0 & \to & \mathsf{S}_h^0 & \to & \mathsf{S}_h^1 & \to & \mathsf{S}_h^2 & \to & 0 \end{array} \tag{2.2.2}$$

Of course this diagram is a realization of a corresponding diagram on differential forms, on which the exterior derivative act, transported by the standard pull-back of differential forms determined by Ξ_h. The connection between finite elements and differential forms, especially Whitney forms, was stressed by Bossavit [19] and further explicitated in the affine case in Hiptmair [43]. While this is useful to keep in mind we stick to tangent vector fields and scalar fields on Γ, since in accordance with widespread conventions, we have chosen to represent the exterior electromagnetic fields as fields of vectors, not alternate forms. The relevance of commuting diagrams to the study of Finite Elements is noted in Boffi [16].

Remark also that when studying the approximation of the boundary Γ by piece-wise polynomial triangulations as in Nédélec [55], one is lead to consider Galerkin spaces defined by pull-backs by maps that are slightly different from Ξ_h.

2.2.2 Basic negative norm estimates

Since negative (and non-integer) Sobolev norms and corresponding approximation results pervade this article, we now recall rather informally the results needed. Of course we don't claim any originality for these results, and we have included them mainly for the convenience of the exposition.

Let (X_h) be a family of Galerkin spaces satisfying (H0) and (H1). Let $\mathcal{Q}_h$ be the $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$-orthogonal projection onto X_h.

It is well known that:

$$\|\mathcal{Q}_h u\|_0 \leq C\|u\|_0 \quad \text{and} \quad \|u - \mathcal{Q}_h u\|_0 \leq Ch\|u\|_1. \tag{2.2.3}$$

From the HDRL (§2.1.1) it follows that the spaces $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ for $0 \leq s \leq 1$ can be obtained by interpolation. Hence interpolation on the operator $\mathcal{I} - \mathcal{Q}_h$, for $0 \leq s \leq 1$ gives:

$$\|u - \mathcal{Q}_h u\|_0 \leq Ch^s\|u\|_s. \tag{2.2.4}$$

Then one uses the regularity of the $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$-inner product (written $(\cdot|\cdot)_0$) on various Sobolev spaces. This technique is the familiar Aubin-Nitsche trick. That $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ and $\mathrm{H}^{-s}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ are dual with respect to the $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$-inner product can be deduced form the fact that the operator $I - \operatorname{grad}\operatorname{div}$ is an isomorphism $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{s-1}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ and that this space, as already remarked, is the $\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}$-dual of $\mathrm{H}^{-s}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$. Both of these facts can be proved using the HDRL. For $0 \leq s \leq 1$ we have:

$$\begin{aligned} \|u - \mathcal{Q}_h u\|_{-s} &\leq C \sup_{v \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}} \frac{|(u - \mathcal{Q}_h u | v)_0|}{\|v\|_s} && (2.2.5) \\ &\leq C \sup_{v \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}} \frac{|(u - \mathcal{Q}_h u | v - \mathcal{Q}_h v)_0|}{\|v\|_s} && (2.2.6) \\ &\leq C \|u - \mathcal{Q}_h u\|_0 \ \|\mathcal{I} - \mathcal{Q}_h\|_{0,s}. && (2.2.7) \end{aligned}$$

Here $\|\mathcal{I} - \mathcal{Q}_h\|_{0,s}$ is of course the norm of the induced map:

$$\mathcal{I} - \mathcal{Q}_h \ : \mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma) \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma) \tag{2.2.8}$$

This gives for $0 \leq s, s' \leq 1$:

$$\|u - \mathcal{Q}_h u\|_{-s} \leq C h^{s+s'} \|u\|_{s'}. \tag{2.2.9}$$

If in addition we have the inverse inequality (H2) we obtain:

$$\|\mathcal{Q}_h u\|_{-1} \leq \|u\|_{-1} + \|u - \mathcal{Q}_h u\|_{-1} \leq \|u\|_{-1} + Ch\|u\|_0 \leq C\|u\|_{-1}. \tag{2.2.10}$$

This is proved first for $u \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ and then extended to $u \in \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ by a density argument. By interpolation on $\mathcal{Q}_h$ one then extends this stability result to all $-1 \leq s \leq 0$:

$$\|\mathcal{Q}_h u\|_s \leq C\|u\|_s. \tag{2.2.11}$$

2.2.3 Approximation of harmonic fields

Since we deal with surfaces which we do not require to be simply connected, a useful construct is that of the associated cohomology groups of which we give the realizations in terms of vector and scalar fields, the so-called harmonic fields (this notion of harmonicity is only remotely related to the harmonicity of the electromagnetic waves we consider). We denote these spaces by $\mathbb{G}^i$ for $i = 0, 1, 2$. For instance $\mathbb{G}^1$ can be characterized as the L_2-orthogonal of the range of the rot operator on smooth scalar fields (or $\mathrm{H}^1(\Gamma)$), in the kernel of the div operator on smooth tangent fields (resp. $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$).

Noticing that the two rows in the diagram (2.2.2) are null sequences, we consider, for each horizontal pair of consecutive arrows, the L_2-orthogonal of the range of the left arrow, in the kernel of the right arrow. For the second row we denote these vector spaces by G^0_h, G^1_h and G^2_h.

It is a remarkable fact that these "discrete" cohomology groups have the "right" dimension, i.e. the dimension of their continuous analogues $\mathbb{G}^i$. This is either elementary or can be deduced from the *Euler-Poincaré formula*. The use of this formula should not come as a surprise since it is one of the main reasons for the effectiveness of *simplical* triangulations in algebraic topology. It has been used in Finite Element theory for quite some time, even at the textbook level, see for instance Nédélec [122].

For each h, let N_h^0 be the number of vertices, N_h^1 the number of edges (segments) and N_h^2 the number of faces (triangles) in $\mathcal{T}_h$. Let N^C be the number of connected components of Γ.

We leave it as an exercise to check that for G_h^0, and G_h^2 the dimension is the number N^C of connected components of Γ. Remark also that $\mathsf{G}_h^0 = \mathbb{G}^0$ whereas $\mathsf{G}_h^2 \neq \mathbb{G}^2$. However the elements of $\mathbb{G}^2$, which are the functions that are constant on each connected component of Γ are of course well approximated by the elements of G_h^2.

We now turn to the more interesting case of G_h^1. We have:

$$\begin{aligned}
\dim \mathsf{G}_h^1 &= \big(\dim \mathsf{S}_h^1 - (\dim \mathsf{S}_h^2 - N^C)\big) - \big(\dim \mathsf{S}_h^0 - N^C\big) && (2.2.12)\\
&= -\dim \mathsf{S}_h^0 + \dim \mathsf{S}_h^1 - \dim \mathsf{S}_h^2 + 2N^C && (2.2.13)\\
&= -\big(N_h^0 + (m-1)N_h^1 + (m-2)(m-1)/2N_h^2\big) && (2.2.14)\\
&\quad +\big(mN_h^1 + m(m-1)N_h^2\big) - \big(m(m+1)/2N_h^2\big) + 2N^C && (2.2.15)\\
&= -N_h^0 + N_h^1 - N_h^2 + 2N^C && (2.2.16)\\
&= \dim \mathbb{G}^1. && (2.2.17)
\end{aligned}$$

To see that G_h^1 converges in some sense to $\mathbb{G}^1$, consider the map Ω_h, called a Fortin operator in Boffi [15], which to any $u_0 \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ associates the first component u of the solution (u, q) of:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathsf{S}_h^1 \\ q \in \mathsf{S}_h^{2\bullet} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \forall u' \in \mathsf{S}_h^1 & \langle u, u' \rangle + \langle q, \operatorname{div} u' \rangle &= \langle u_0, u' \rangle \\ \forall q' \in \mathsf{S}_h^{2\bullet} & \langle q', \operatorname{div} u \rangle &= \langle q', \operatorname{div} u_0 \rangle \end{array} \right. . \qquad (2.2.18)$$

This saddle-point problem satisfies the LBB Inf-Sup conditions, therefore there is a $C > 0$ such that for all h and all $u \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ we have:

$$\|u - \Omega_h u\|_0 \leq C \inf\{\|u - u'\|_0 \ : \ u' \in \mathsf{S}_h^1\}. \qquad (2.2.19)$$

Notice also that Ω_h maps divergence-free fields to divergence-free fields, and that if $u \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ is such that $\operatorname{rot} u = 0$ (as elements of $\mathrm{H}^{-1}(\Gamma)$) then $\Omega_h u$ is L_2-orthogonal to $\operatorname{rot} \mathsf{S}_h^0$. In particular Ω_h maps $\mathbb{G}^1$ into G_h^1. Since all norms on $\mathbb{G}^1$ are equivalent we therefore have an estimate of the form:

$$\forall u \in \mathbb{G}^1 \quad \|u - \Omega_h u\|_0 \leq C h^m \|u\|_0, \qquad (2.2.20)$$

($m = 1 > 0$ for lowest order elements[1]) so that for sufficiently small h, Ω_h determines injections $\mathbb{G}^1 \to \mathsf{G}^1_h$ which are arbitrarily close in norm to the identity mapping on $\mathbb{G}^1$. Since the spaces have the same dimension these induced maps are in fact isomorphisms, and the inverse mappings are Ch^m-close to the identity mapping on G^1_h.

Remark 2.2.1 *For reasons of dimension, for the above system (2.2.18) to satisfy the LBB Inf-Sup conditions it is necessary that* among all spaces that contain $\operatorname{div}\mathsf{S}^1_h$, $\mathsf{S}^{2\bullet}_h$ *be minimal (of course the LBB condition can be verified for some smaller spaces that do not contain* $\operatorname{div}\mathsf{S}^1_h$*). On the other hand, for the above constructed injection* $\mathbb{G}^1 \to \mathsf{G}^1_h$ *to be* onto *it is necessary that* $\mathsf{S}^{0\bullet}_h$ *be maximal* among all spaces that rot maps into S^1_h. *It is remarkable that these algebraic optimality conditions (which where our guide for the choice of spaces) are also sufficient for convergence purposes.*

Given a tangent field u one may now ask how the field a_0 defined by:

$$a_0 \in \mathbb{G}^1 \quad \text{and} \quad \forall a' \in \mathbb{G}^1 \quad \langle a_0, a' \rangle = \langle u, a' \rangle, \tag{2.2.21}$$

relates to its discrete analogue a_h defined by:

$$a_h \in \mathsf{G}^1_h \quad \text{and} \quad \forall a' \in \mathsf{G}^1_h \quad \langle a_h, a' \rangle = \langle u, a' \rangle. \tag{2.2.22}$$

Since G^1_h is not a subspace of $\mathbb{G}^1$ one can view this as a non-conforming Galerkin problem. We have already proved that G^1_h converges in a sense to $\mathbb{G}^1$. Later, in Proposition 2.4.9 we provide the necessary variant of Theorem 2.1.1 to deduce from this the existence of a_h and its convergence to a_0.

Proposition 2.2.2 *For the exact and approximate harmonic tangent fields a_0 and a_h obtained as solutions of equations (2.2.21) and (2.2.22), for a given tangent field u, we have the estimates:*

$$\|a_h - a_0\|_0 \leq Ch^m \|u\|_{\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)}. \tag{2.2.23}$$

Another useful observation is that, parallel to the fact that all norms on the finite dimensional space $\mathbb{G}^1$ are equivalent, we have easily obtain:

Lemma 2.2.3 *There is $C > 0$ such that for all $-1 \leq s \leq 0$ and all h:*

$$\forall u \in \mathsf{G}^1_h \quad \|u\|_0 \leq C\|u\|_s. \tag{2.2.24}$$

2.2.4 Discrete Helmholtz decomposition

We will frequently use the fact that each $u \in \mathsf{S}^1_h$ can be written in a unique way:

$$u = \operatorname{rot} p + a + g, \tag{2.2.25}$$

1. In fact to derive the Inf-Sup estimates and related stability results we need, it will not be necessary to know that higher order elements yield higher order estimates.

with $p \in \mathsf{S}_h^{0\bullet}$, $a \in \mathsf{G}_h^1$ and g in the L_2-orthogonal of the kernel of the divergence operator in S_h^1. Notice that this decomposition expresses that S_h^1 is split into a direct sum of three subspaces which are orthogonal both for the $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^0$ and the $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^0$ scalar products.

What makes this decomposition useful is that it has the following continuity and approximation properties, compared with the "exact" Helmholtz decomposition, which we write:

$$u = \operatorname{rot} p_0 + a_0 + g_0, \tag{2.2.26}$$

with $p_0 \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)^\bullet$, $a_0 \in \mathbb{G}^1$ and $g_0 \in \operatorname{grad} \mathrm{H}^{3/2}(\Gamma)$.

Proposition 2.2.4 *There is $C > 0$ such that for all h, all $u \in \mathsf{S}_h^1$, the above decompositions (2.2.25) and (2.2.26) are related by:*

$$\|g - g_0\|_0 \le Ch\|u\|_0 \qquad \|g\|_{-1} \le C\|u\|_{-1}, \tag{2.2.27}$$

$$\|a - a_0\|_0 \le Ch\|u\|_0 \qquad \|a\|_{-1} \le C\|u\|_{-1}, \tag{2.2.28}$$

$$\|\operatorname{rot} p - \operatorname{rot} p_0\|_0 \le Ch\|u\|_0 \qquad \|\operatorname{rot} p\|_{-1} \le C\|u\|_{-1}. \tag{2.2.29}$$

–Proof : (i) As already remarked, by hypothesis (H3), we have:

$$|g - g_0|_0 \le Ch|\operatorname{div} u|_0. \tag{2.2.30}$$

this immediately gives $\|g - g_0\|_0 \le Ch\|u\|_0$. Then we remark that:

$$\|g\|_{-1} \le \|g - g_0\|_{-1} + \|g_0\|_{-1} \le Ch\|u\|_0 + \|u\|_{-1} \le C\|u\|_{-1}. \tag{2.2.31}$$

(ii) The fact that $\|a - a_0\|_0 \le Ch\|u\|_0$ was proved in the preceding section, and gives $\|a\|_{-1} \le C\|u\|_{-1}$ just as above.

(iii) The last part of the proposition is deduced from the two preceding ones writing:

$$\operatorname{rot} p - \operatorname{rot} p_0 = -(g + a) + (g_0 + a_0) = (g_0 - g) + (a_0 - a). \tag{2.2.32}$$

□

2.3 Stable discretizations of the Calderon formulas

First we explain why the most natural idea (at least to us, for quite some time) is actually flawed. Then we define the discretization which we propose to use for preconditioning. It is associated with a subspace of the usual Galerkin space for which we prove an LBB Inf-Sup condition and some basic approximation properties.

2.3.1 A flawed idea

Given a family of Galerkin spaces X_h in X the most straightforward idea is to introduce the maps:

$$\mathcal{B}_h \ : \left\{ \begin{array}{ccc} X_h & \to & X_h^\star \\ u & \mapsto & \langle Bu, \cdot \rangle \end{array} \right. , \tag{2.3.1}$$

And then to put:

$$\mathcal{Z}_h(k) = \mathcal{B}_h^{\star -1} \mathcal{A}_h(k) \mathcal{B}_h^{-1}. \tag{2.3.2}$$

As remarked in Christiansen-Nédélec [133], if not only $\mathcal{A}_h(k)$ but also $\mathcal{B}_h$ satisfies a uniform discrete Inf-Sup condition on X_h, then the spectral condition number of $\mathcal{Z}_h(k)\mathcal{A}_h(k)$ is bounded independently of h. Of course, since the operators we deal with are not SPD, this is not enough to guarantee convergence of Krylov subspace algorithms, but it is nevertheless a significant progress compared with the lack of a preconditioner. Unfortunately, for the standard Galerkin spaces, this last Inf-Sup condition does not hold. Indeed throughout this paragraph let X_h denote the Raviart-Thomas spaces of degree m (with our conventions the minimal degree is $m = 1$), on Γ. We will use the fact that X_h satisfies the hypotheses (H0),...,(H3).

Proposition 2.3.1 *Let $X_h = \mathsf{S}_h^1$. Let K_h be the space:*

$$\begin{array}{rcl} \{u \in \mathsf{S}_h^1 & : & \forall v \in \mathsf{S}_h^1 \quad \operatorname{div} v = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0 \quad \textit{and} \\ & & \forall v \in \mathsf{S}_h^0 \quad \langle u, \operatorname{grad} v \rangle = 0\}. \end{array} \tag{2.3.3}$$

Then we have:

$$\liminf_h \frac{\dim K_h}{\dim X_h} \geq \frac{1}{2m+1}, \tag{2.3.4}$$

and:

$$\limsup_h \sup_{u \in K_h} \sup_{u' \in X_h} \frac{b(u,u')}{\|u\|_{-1/2} \|u'\|_{-1/2}} h^{-1/2} < +\infty. \tag{2.3.5}$$

–Proof : (i) We have:

$$\begin{array}{rcll} \dim K_h & \geq & (\dim \mathsf{S}_h^2 - N^C) - (\dim \mathsf{S}_h^0 - N^C) & (2.3.6) \\ & \geq & (m(m+1)/2)N_h^2 - & \\ & & \quad N_h^0 + (m-1)N_h^1 + ((m-2)(m-1)/2)N_h^2 & (2.3.7) \\ & \geq & -N_h^0 - (m-1)N_h^1 + (2m-1)N_h^2. & (2.3.8) \end{array}$$

Recall that since each segment is shared by exactly two triangles $2N_h^1 = 3N_h^2$, which together with the Euler-Poincaré formula gives:

$$N_h^1 \sim 3N_h^0 \quad \text{and} \quad N_h^2 \sim 2N_h^0. \tag{2.3.9}$$

This gives:

$$-N_h^0 - (m-1)N_h^1 + (2m-1)N_h^2 \sim mN_h^0. \tag{2.3.10}$$

One also checks that:

$$\dim X_h \sim m(2m+1)N_h^0. \tag{2.3.11}$$

This gives the first inequality.

(ii) To prove the second part of the theorem we use the fact that X_h satisfies (H3). For any $u \in X_h$ we denote by ϕ_u the unique $\phi \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet$ such that $\Delta\phi = \operatorname{div} u$. Then (H3) asserts that if $u \in X_h$ is L_2-orthogonal to the kernel of the divergence operator on X_h we have an estimate of the form $|u - \operatorname{grad}\phi_u|_0 \leq Ch|\operatorname{div} u|_0$. From Proposition 2.2.4, using an inverse inequality, one can deduce that:

$$\|u - \operatorname{grad}\phi_u\|_{-1/2} \leq Ch^{1/2}\|u\|_{-1/2}, \tag{2.3.12}$$

and:

$$\|\operatorname{grad}\phi_u\|_{-1/2} \leq C\|u\|_{-1/2}. \tag{2.3.13}$$

Choose $u \in K_h$ and $u' \in X_h$. Put $u' = \operatorname{rot} p' + a' + g'$ as in equation (2.2.25). Remark first that:

$$\langle u \times n, \operatorname{rot} p' \rangle = -\langle \operatorname{div} u, p' \rangle = 0. \tag{2.3.14}$$

Then write:

$$\langle u \times n, g' \rangle = \langle (u - \operatorname{grad}\phi_u + \operatorname{grad}\phi_u) \times n, (g' - \operatorname{grad}\phi_{g'} + \operatorname{grad}\phi_{g'}) \rangle \tag{2.3.15}$$

Developing and using the continuity of b as well as the fact that:

$$\langle \operatorname{grad}\phi_u \times n, \operatorname{grad}\phi_{g'} \rangle = 0, \tag{2.3.16}$$

we obtain:

$$\begin{aligned} |\langle u \times n, g' \rangle| \quad \leq \quad & C\|u - \operatorname{grad}\phi_u\|_{-1/2}\|g' - \operatorname{grad}\phi_{g'}\|_{-1/2} + & (2.3.17)\\ & C\|u - \operatorname{grad}\phi_u\|_{-1/2}\|\operatorname{grad}\phi_{g'}\|_{-1/2} + & (2.3.18)\\ & C\|\operatorname{grad}\phi_u\|_{-1/2}\|g' - \operatorname{grad}\phi_{g'}\|_{-1/2}. & (2.3.19) \end{aligned}$$

By the above estimates (2.3.12) and (2.3.13) it follows that:

$$|\langle u \times n, g' \rangle| \leq Ch^{1/2}\|u\|_{-1/2}\|g'\|_{-1/2}. \tag{2.3.20}$$

Therefore:

$$|\langle u \times n, g' \rangle| \leq Ch^{1/2}\|u\|_{-1/2}\|u'\|_{-1/2}. \tag{2.3.21}$$

Finally for the last part, for any $\tilde{a}'$, $\langle u \times n, a' \rangle$ equals:

$$\langle (u - \operatorname{grad} \phi_u) \times n, \tilde{a}' \rangle + \langle \operatorname{grad} \phi_u \times n, \tilde{a}' \rangle + \langle u \times n, (a' - \tilde{a}') \rangle. \qquad (2.3.22)$$

Choosing $\tilde{a}' \in \mathbb{G}^1$ to be an approximation of a', one immediately obtains the proposition. □

Thus one sees that the reason for the degeneracy is that the subspace of X_h of elements which are in a sense discrete gradients does not have the same dimension as the subspace of rotationals.

2.3.2 Auxiliary spaces

Let $(\mathsf{S}_h^0, \mathsf{S}_h^1, \mathsf{S}_h^2)$, and $(\mathsf{S}_h'^0, \mathsf{S}_h'^1, \mathsf{S}_h'^2)$ be two triples of spaces of the type we discussed; more precisely they should satisfy the null sequence condition, the discrete cohomology groups should have the "right" dimension, and S_h^1 and $\mathsf{S}_h'^1$ should satisfy the hypotheses (H0),...,(H3).

Two examples to keep in mind (the first one detailed and the second one mentioned in Christiansen-Nédélec [135]) are:

- the case where S_h^1 and $\mathsf{S}_h'^1$ are equal and consist of lowest order Raviart-Thomas fields (then S_h^0 consists of continuous P^1 FE and S_h^2 of P^0 FE);
- the case where $(\mathsf{S}_h^0, \mathsf{S}_h^1, \mathsf{S}_h^2)$ corresponds to lowest order Raviart-Thomas fields, whereas $(\mathsf{S}_h'^0, \mathsf{S}_h'^1, \mathsf{S}_h'^2)$ corresponds to lowest order Brezzi-Douglas-Marini fields on the same mesh (then $\mathsf{S}_h'^0$ consists of continuous P^2 FE and $\mathsf{S}_h'^2$ of P^0 FE).

More generally (though it is not necessary) one might want to choose spaces such that the L_2-projections $\mathsf{S}_h^{2\bullet} \to \mathsf{S}_h'^{0\bullet}$, and $(\ker_{\mathrm{div}} \mathsf{S}_h^1) \times n \to \mathsf{S}_h'^1$ have kernels which are small in some sense (for instance: have dimensions bounded by some small integer independently of h). Anticipating on what follows, this would guarantee that the subspace $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ of S_h^1, to be defined later, is almost all of S_h^1. If the first triple of spaces is based on Raviart-Thomas fields of any order, one can take for this purpose Brezzi-Douglas-Marini fields *of the same order* on the same mesh in the second triple.

In fact in addition to the hypothesis H0, ... ,H3 we will use some L^2 estimates for the spaces S_h^0 and S_h^2 (in the proofs of Lemmas 2.3.12 and 2.3.13), and an additional L^2 estimate for S_h^1 (proof of Proposition 2.4.2). Therefore we require in what follows that the spaces $(\mathsf{S}_h^0, \mathsf{S}_h^1, \mathsf{S}_h^2)$ and $(\mathsf{S}_h'^0, \mathsf{S}_h'^1, \mathsf{S}_h'^2)$ are the standard finite element spaces based on Raviart-Thomas or Brezzi-Douglas-Marini finite elements. The two triples can however have different orders m and m'. They can even be constructed on different meshes (with associated parameters h and h') as long as $(1/C)h \leq h' \leq Ch$. The most useful cases are $m' \geq m$ and $h' \leq h$.

Other Galerkin spaces are commonly used to solve boundary integral equations and the method might work in the present state for such Galerkin spaces also. For instance Finite Elements based on meshes with both triangular and

quadrilateral elements pose no additional problem, once one has identified the appropriate null-sequences.

2.3.3 Definition

Our starting point is to try to construct a preconditioner for the variational formulation of the EFIE on S_h^1. For this purpose we will use the auxiliary spaces $(\mathsf{S}_h'^0, \mathsf{S}_h'^1, \mathsf{S}_h'^2)$. As it turns out, with this preconditioner the EFIE is actually solved variationnally on a subspace of S_h^1. However we shall prove that this subspace (it will be denoted $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$) satisfies the hypotheses (H0),...,(H3), which insures the well-posedness of the discrete problem.

Starting with a linear form $l \in \mathsf{S}_h^{1\star}$, determine the solution (u, q) of:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathsf{S}_h^1 \\ q \in \mathsf{S}_h^{2\bullet} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \forall u' \in \mathsf{S}_h^1 & \langle u, u' \rangle + \langle q, \operatorname{div} u' \rangle & = \; l(u') \\ \forall q' \in \mathsf{S}_h^{2\bullet} & \langle q', \operatorname{div} u \rangle & = \; 0 \end{array} \right. . \tag{2.3.23}$$

Then, to (u, q) associate the following element of $\mathsf{S}_h'^1$:

$$v = \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^1}(u \times n) - \operatorname{rot} \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{0\bullet}}(q), \tag{2.3.24}$$

where for any space X_h, $\mathcal{P}_{\mathsf{X}_h}$ denotes the L_2-orthogonal projections onto X_h.

Let $\Theta_h : \mathsf{S}_h^{1\star} \to \mathsf{S}_h'^1, l \mapsto v$ be the composition of these two maps (defined by (2.3.23) and (2.3.24)), and $\Theta_h^\star : \mathsf{S}_h'^{1\star} \to \mathsf{S}_h^{1\star\star} \approx \mathsf{S}_h^1$, its adjoint. Then we put:

$$\mathcal{Z}_h = \Theta_h^\star \mathcal{A}_h'(k) \Theta_h, \tag{2.3.25}$$

where $\mathcal{A}_h'(k) : \mathsf{S}_h'^1 \to \mathsf{S}_h'^{1\star}$ is the map induced by $\mathcal{A}(k)$.

Remark 2.3.2 *In some cases it might be of interest to replace $\mathcal{A}_h'(k)$ by $\mathcal{A}_h'(k')$, for some different, possibly complex, wavenumber k'. In particular a small perturbation $k' = k + i\epsilon$, guarantees invertibility even at resonant frequencies, and is related to the limiting absorption principle. However we will not discuss this possibility here.*

2.3.4 Interpretation of the system

The invertibility in the sense of Babuska-Brezzi of the system (2.3.23), can be reinterpreted as the fact that the bilinear form b satisfies a uniform LBB Inf-Sup estimate on the spaces $\mathsf{S}_h^{1\#} \times \mathsf{S}_h^1$, where we have used the notation:

$$\mathsf{S}_h^{1\#} = \{u \times n \; : u \in \mathsf{S}_h^1 \quad \text{and} \quad \operatorname{div} u = 0\} + \{\operatorname{rot} q \; : q \in \mathsf{S}_h^{0\bullet}\}. \tag{2.3.26}$$

To give a precise meaning to and prove this statement, notice that $\mathsf{S}_h^{1\#}$ is a subspace of $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1}(\Gamma)$ (but contains vector valued measures concentrated on the curved lines $\Xi_h^{-1}([S])$, where S is a segment in $\mathcal{T}_h$). We will also need the following lemma:

Lemma 2.3.3 *Any $v \in \mathrm{H}^{-1+s}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$, can be written in a unique way :*

$$v = u \times n - \mathrm{rot}\, q, \tag{2.3.27}$$

with $u \in \mathrm{H}^{s}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$, $\mathrm{div}\, u = 0$ and $q \in \mathrm{H}^{s}(\Gamma)^{\bullet}$, and we have the equivalence of norms[2] :

$$\|v\|^2_{-1+s} \approx |u|^2_s + |q|^2_s. \tag{2.3.28}$$

–Proof : This can be proved using the HDRL (§2.1.1). □

The lemma expresses that we have exhibited isomorphisms (for each s) :

$$\{u \in \mathrm{H}^{s}_{\mathrm{div}}(\Gamma) \ : \ \mathrm{div}\, u = 0\} \times \mathrm{H}^{s}(\Gamma)^{\bullet} \to \mathrm{H}^{s-1}_{\mathrm{div}}(\Gamma). \tag{2.3.29}$$

In particular the sum appearing in the definition of $\mathsf{S}^{1\#}_h$ is direct. Furthermore we notice that :

$$b(u \times n - \mathrm{rot}\, q, v') = \langle B(u \times n - \mathrm{rot}\, q), v' \rangle = -\langle u, v' \rangle - \langle q, \mathrm{div}\, v' \rangle, \tag{2.3.30}$$

where we have used the notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$, for the three different standard dualities on :

$$\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{rot}} \times \mathrm{H}^{0}_{\mathrm{div}} \ , \ \mathrm{H}^{0}_{\mathrm{T}} \times \mathrm{H}^{0}_{\mathrm{T}} \quad \text{and} \quad \mathrm{H}^{0} \times \mathrm{H}^{0}. \tag{2.3.31}$$

Therefore, given $l \in \mathsf{S}^{1\star}_h$, if (u, q) solves system (2.3.23) then $v = u \times n - \mathrm{rot}\, q$ solves :

$$v \in \mathsf{S}^{1\#}_h \quad \forall v' \in \mathsf{S}^{1}_h \quad -b(v, v') = l(v'), \tag{2.3.32}$$

and if v solves this equation then, writing $v = u \times n - \mathrm{rot}\, q$ as in (2.3.26), (u, q) is also given by the *continuous* inverse of the map (2.3.29) and solves system (2.3.23).

Using the well-known properties of this system, one immediately obtains :

Proposition 2.3.4 *There is $C > 0$ such that for all h :*

$$\inf_{v \in \mathsf{S}^{1\#}_h} \sup_{v' \in \mathsf{S}^{1}_h} \frac{|b(v, v')|}{\|v\|_{-1} \|v'\|_0} \geq 1/C \tag{2.3.33}$$

One also checks directly that these spaces have the same dimension.

2.3.5 Interpretation of the projections

According to Lemma 2.3.3 the projections defined by equation (2.3.24) correspond to a projection in the $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$-norm. Lemma 2.3.17 and Proposition 2.3.19 further justify this interpretation.

2. There is an obvious misprint in [135].

2.3.6 A characterization of the kernel of Θ_h

In this paragraph, for any space X_h, $\mathcal{P}_{\mathsf{X}_h}$ is the orthogonal projection onto X_h for the usual L_2-inner product (on scalar or vector fields). The symbol $\perp$ is also relative to these inner products.

We introduce the following auxiliary spaces:

$$\mathsf{s}_h^0 = \{\, p \in \mathsf{S}_h^{0\bullet} \;:\; p \perp \mathsf{S}_h'^{2\bullet}\} \quad \text{and} \quad \mathsf{s}_h^2 = \{\, q \in \mathsf{S}_h^{2\bullet} \;:\; q \perp \mathsf{S}_h'^{0\bullet}\}. \tag{2.3.34}$$

Define also:

$$(\mathsf{S}_h^1)^\wedge = \{v \in \mathsf{S}_h^1 \;:\; v \perp \operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0 \quad \text{and} \quad \operatorname{div} v \perp \mathsf{s}_h^2\}. \tag{2.3.35}$$

The introduction of s_h^0 and s_h^2 is justified by the two following lemmas, whereas that of $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ is justified by Proposition 2.3.8. It shows that (for h small enough – we will not always repeat this condition –) $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ is the range of $\Theta_h^\star$.

Lemma 2.3.5 *There is h_0 such that for all $h < h_0$ and all divergence-free $u \in \mathsf{S}_h^1$:*

$$\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^1}(u \times n) = 0 \iff u \in \operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0 \tag{2.3.36}$$

–Proof : We use the fact that for all $\epsilon > 0$ there is $h_0 > 0$ such that for $h < h_0$:

$$\forall a \in \mathsf{G}_h^1 \quad |a \times n - \mathcal{P}_{\mathsf{G}_h'^1}(a \times n)|_0 \le \epsilon |a|_0. \tag{2.3.37}$$

Choosing a h_0 relative to a $\epsilon < 1$ we suppose from now on that $h < h_0$.

Pick $u \in \ker_{\mathsf{S}_h^1} \operatorname{div}$. Put $u = \operatorname{rot} p + a$, with $p \in \mathsf{S}_h^{0\bullet}$ and $a \in \mathsf{G}_h^1$.

(i) Suppose that the projection of $u \times n$ is zero. For all divergence free $a' \in \mathsf{S}_h'^1$ we have:

$$0 = \langle \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^1}(-\operatorname{grad} p + a \times n), \overline{a'}\rangle = \langle (-\operatorname{grad} p + a \times n), \overline{a'}\rangle = \langle a \times n, \overline{a'}\rangle. \tag{2.3.38}$$

Put $a' = \mathcal{P}_{\mathsf{G}_h'^1}(a \times n)$. Then:

$$|a|_0^2 = |\langle a \times n, \overline{a \times n}\rangle| = |\langle a \times n, (\overline{a \times n - a'})\rangle| \le \epsilon |a|_0^2. \tag{2.3.39}$$

Hence $a = 0$. Moreover for all $v \in \mathsf{S}_h'^1$:

$$\langle \operatorname{rot} p \times n, v\rangle = \langle p, \operatorname{div} v\rangle. \tag{2.3.40}$$

It follows that $p \perp \mathsf{S}_h'^{2\bullet}$ and $u \in \operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0$.

(ii) Conversely, if $u \in \operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0$ then the above equality (2.3.40) shows that $u \times n \perp \mathsf{S}_h'^1$, and hence its projection is zero. □

Lemma 2.3.6 *For all $q \in \mathsf{S}_h^{2\bullet}$ we have:*

$$\operatorname{rot} \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{0\bullet}}(q) = 0 \iff \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{0\bullet}}(q) = 0 \iff q \in \mathsf{s}_h^2. \tag{2.3.41}$$

–Proof : Trivial. □

Lemma 2.3.7 *The spaces* $\mathcal{P}_{\mathsf{S}'^1_h}((\ker_{\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)}\mathrm{div})\times n)$ *and* $\mathrm{rot}\,\mathsf{S}'^0_h$ *are* L_2*-orthogonal.*

–Proof : Indeed if $u \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ is divergence free and $p \in \mathsf{S}'^0_h$ then (since $\mathrm{rot}\,p \in \mathsf{S}'^1_h$) :

$$\langle \mathcal{P}_{\mathsf{S}'^1_h}(u\times n), \mathrm{rot}\,p\rangle = \langle u\times n, \mathrm{rot}\,p\rangle = -\langle \mathrm{div}\,u, p\rangle = 0. \tag{2.3.42}$$

□

We now prove:

Proposition 2.3.8 *For all* $l \in \mathsf{S}^{1\star}_h$ *we have :*

$$\Theta_h(l) = 0 \iff \forall u' \in (\mathsf{S}^1_h)^\wedge \quad l(u') = 0. \tag{2.3.43}$$

–Proof : Pick $l \in \mathsf{S}^{1\star}_h$. Let (u,q) be the solution of:

$$\left\{\begin{array}{l} u \in \mathsf{S}^1_h \\ q \in \mathsf{S}^{2\bullet}_h \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lll} \forall u' \in \mathsf{S}^1_h & \langle u, u'\rangle + \langle q, \mathrm{div}\,u'\rangle & = \quad l(u') \\ \forall q' \in \mathsf{S}^{2\bullet}_h & \langle q', \mathrm{div}\,u\rangle & = \quad 0 \end{array}\right. \tag{2.3.44}$$

With these definitions we have $\Theta_h(l) = 0$ if and only if:

$$\mathcal{P}_{\mathsf{S}'^1_h}(u\times n) - \mathrm{rot}\,\mathcal{P}_{\mathsf{S}'^{0\bullet}_h}(q) = 0. \tag{2.3.45}$$

According to Lemma 2.3.7 this is in turn equivalent to:

$$\mathcal{P}_{\mathsf{S}'^1_h}(u\times n) = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{rot}\,\mathcal{P}_{\mathsf{S}'^{0\bullet}_h}(q) = 0. \tag{2.3.46}$$

In Lemmas 2.3.5 and 2.3.6 we gave equivalent statements for these two conditions.

(i) If $\Theta_h(l) = 0$ then $u \in \mathrm{rot}\,\mathsf{s}^0_h$ and $q \in \mathsf{s}^2_h$, hence for all $u' \in (\mathsf{S}^1_h)^\wedge$:

$$l(u') = \langle u, u'\rangle + \langle q, \mathrm{div}\,u'\rangle = 0. \tag{2.3.47}$$

That is to say, l vanishes on $(\mathsf{S}^1_h)^\wedge$.

(ii) If l vanishes on $(\mathsf{S}^1_h)^\wedge$ then:

– for all $u' \in \ker_{\mathsf{S}^1_h}\mathrm{div}$ such that $u' \perp \mathrm{rot}\,\mathsf{s}^0_h$ we have (since $u' \in (\mathsf{S}^1_h)^\wedge$) :

$$\langle u, u'\rangle = l(u') = 0, \tag{2.3.48}$$

so $u \in \mathrm{rot}\,\mathsf{s}^0_h$;

– for all $q' \in \mathsf{S}^{2\bullet}_h$ such that $q' \perp \mathsf{s}^2_h$, picking $u' \in \mathsf{S}^1_h$ such that $\mathrm{div}\,u' = q'$ and $u' \perp \ker_{\mathsf{S}^1_h}\mathrm{div}$, we have (since $u' \in (\mathsf{S}^1_h)^\wedge$) :

$$\langle q, q'\rangle = \langle q, \mathrm{div}\,u'\rangle = l(u') = 0, \tag{2.3.49}$$

hence $q \in \mathsf{s}^2_h$.

The proof is complete. □

2.3.7 Approximation properties of the range of $\Theta_h^\star$

We give yet another characterization of $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$, which will enable us to deduce its approximation properties.

Lemma 2.3.9 *Pick $u \in \mathsf{S}_h^1$. Put $u = \operatorname{rot} p + a + g$ with $p \in \mathsf{S}_h^{0\bullet}$, $a \in \mathsf{G}_h^1$ and $g \in \mathsf{S}_h^1$ such that $g \perp \ker_{\mathsf{S}_h^1} \operatorname{div}$. Then we have:*

$$u \in (\mathsf{S}_h^1)^\wedge \iff \operatorname{rot} p \perp \operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0 \quad \textit{and} \quad \operatorname{div} g \perp \mathsf{s}_h^2. \tag{2.3.50}$$

–Proof : Trivial. □

Now we give equivalent expressions for the above two conditions.

Lemma 2.3.10 *Choose $q \in \mathsf{S}_h^{2\bullet}$. We have:*

$$q \perp \mathsf{s}_h^2 \iff \exists p \in \mathsf{S}_h^{\prime 0\bullet} \quad q = \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h^{2\bullet}}(p) \tag{2.3.51}$$

–Proof : More generally we have the following result : Let X be a Hilbert space. The orthogonal projection onto a closed subspace Y of X is written P_Y and orthogonality is denoted by $\perp$. If Y and Z are two closed subspaces of X we put :

$$Y_{\perp Z} = \{x \in Y \ : \ x \perp Z\}. \tag{2.3.52}$$

Let A and B be two closed subspaces of X. Then :

$$A_{\perp(A_{\perp B})} = P_A(B). \tag{2.3.53}$$

□

Lemma 2.3.11 *Choose $p \in \mathsf{S}_h^{0\bullet}$. We have:*

$$\operatorname{rot} p \perp \operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0 \iff \exists q \in \mathsf{S}_h^{\prime 2\bullet} \quad \operatorname{rot} p = \mathcal{P}_{\operatorname{rot} \mathsf{S}_h^{0\bullet}}(\operatorname{rot} \Delta^{-1} q). \tag{2.3.54}$$

–Proof : We apply the same technique once again. For all $p \in \mathsf{S}_h^{0\bullet}$ and all $q \in \mathsf{S}_h^{\prime 2\bullet}$ we have :

$$\langle p, q \rangle = -\langle \operatorname{rot} p, \operatorname{rot} \Delta^{-1} q \rangle. \tag{2.3.55}$$

Hence :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} p \in \operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0 &\iff p \in \mathsf{s}_h^0 && (2.3.56)\\
&\iff p \perp \mathsf{S}_h^{\prime 2\bullet} && (2.3.57)\\
&\iff \operatorname{rot} p \perp \operatorname{rot} \Delta^{-1} \mathsf{S}_h^{\prime 2\bullet} && (2.3.58)\\
&\iff \operatorname{rot} p \perp \mathcal{P}_{\operatorname{rot} \mathsf{S}_h^{0\bullet}}(\operatorname{rot} \Delta^{-1} \mathsf{S}_h^{\prime 2\bullet}). && (2.3.59)
\end{aligned}$$

So :

$$\operatorname{rot} p \perp \operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0 \iff \operatorname{rot} p \in \mathcal{P}_{\operatorname{rot} \mathsf{S}_h^{0\bullet}}(\operatorname{rot} \Delta^{-1} \mathsf{S}_h^{\prime 2\bullet}). \tag{2.3.60}$$

□

We will also need the following two approximation results:

Lemma 2.3.12 *There is $C > 0$ such that for all h and all $\phi \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet$:*

$$\inf\{|\phi - q|_0 \ : \ q \in \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h^{2\bullet}}(\mathsf{S}_h'^{0\bullet})\} \leq Ch|\phi|_1. \tag{2.3.61}$$

–Proof : Notice that:

$$\begin{aligned} |\phi - \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h^{2\bullet}}\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{0\bullet}}\phi| &\leq |\phi - \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{0\bullet}}\phi| + |\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{0\bullet}}\phi - \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h^{2\bullet}}\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{0\bullet}}\phi| && (2.3.62)\\ &\leq Ch|\phi|_1 + Ch|\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{0\bullet}}\phi|_1 && (2.3.63)\\ &\leq Ch|\phi|_1. && (2.3.64) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.3.13 *There is $C > 0$ such that for all h and all $\phi \in \mathrm{H}^2(\Gamma)^\bullet$:*

$$\inf\{|\operatorname{rot}\phi - u|_0 \ : \ u \in \mathcal{P}_{\operatorname{rot}\mathsf{S}_h^{0\bullet}}(\operatorname{rot}\Delta^{-1}\mathsf{S}_h'^{2\bullet})\} \leq Ch|\operatorname{rot}\phi|_1. \tag{2.3.65}$$

–Proof : We have:

$$|\Delta^{-1}\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{2\bullet}}\Delta\phi - \phi|_1 \leq C|\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{2\bullet}}\Delta\phi - \Delta\phi|_{-1} \leq Ch|\Delta\phi|_0. \tag{2.3.66}$$

So, with $\psi = \Delta^{-1}\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h^{2\bullet}}\Delta\phi$ we have:

$$|\operatorname{rot}\psi - \operatorname{rot}\phi|_0 \leq Ch|\operatorname{rot}\phi|_1. \tag{2.3.67}$$

And:

$$|\mathcal{P}_{\operatorname{rot}\mathsf{S}_h^{0\bullet}}\operatorname{rot}\psi - \operatorname{rot}\psi|_0 \leq Ch|\operatorname{rot}\psi|_1. \tag{2.3.68}$$

However:

$$|\operatorname{rot}\psi|_1 \leq C|\Delta^{-1}\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{2\bullet}}\Delta\phi|_2 \leq C|\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^{2\bullet}}\Delta\phi|_0 \leq C|\Delta\phi|_0 \leq C|\operatorname{rot}\phi|_1. \tag{2.3.69}$$

Now combine inequalities (2.3.68) and (2.3.69), and conclude using (2.3.67). □

From the above results we deduce the following fundamental theorem:

Theorem 2.3.14 *The spaces $X_h = (\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ satisfy hypothesis (H1).*

–Proof : Pick $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{div}}(\Gamma)$. Consider its Helmholtz decomposition:

$$u = \operatorname{rot}\phi + \alpha + \operatorname{grad}\psi. \tag{2.3.70}$$

(i) The field $\operatorname{rot}\phi$ is approximated using Lemma 2.3.13, which gives an element of X_h according to the Lemmas 2.3.9 and 2.3.11.

(ii) The field α is approximated by $a = \Omega_h\alpha$ where Ω_h is defined by system (2.2.18).

(iii) The field $\Delta\psi$ is approximated by a $q \in \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h^{2\bullet}}(\mathsf{S}_h'^{0\bullet})$ following Lemma 2.3.12. Then we consider $\Omega_h \operatorname{grad}\Delta^{-1}q$ which is in X_h according to Lemmas 2.3.9 and 2.3.10. □

2.3.8 Well-posedness

Proposition 2.3.15 *The spaces $X_h = (\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ satisfy hypothesis (H3).*

–Proof : Choose $u \in X_h$, such that :

$$u \perp \ker_{X_h} \operatorname{div}. \tag{2.3.71}$$

Trivially he have $u \in \mathsf{S}_h^1$. Moreover, if u' is a divergence free element of S_h^1 it can be written $\operatorname{rot} p + u''$ with $p \in \mathsf{s}_h^0$ and a divergence free $u'' \in X_h$ (to see this just remark that the L_2-orthogonal of $\operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0$ in $\ker_{\mathsf{S}_h^1} \operatorname{div}$ is a subspace of X_h). And since $u \perp \operatorname{rot} \mathsf{s}_h^0$ and $u \perp u''$ we therefore have :

$$u \perp \ker_{\mathsf{S}_h^1} \operatorname{div}. \tag{2.3.72}$$

Then the proposition follows from the result known to hold for S_h^1. □

We have therefore reached the main goal of this section :

Theorem 2.3.16 *The spaces $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ satisfy the four hypothesis (H0),...,(H3).*

If $\mathcal{A}(k)$ were symmetric positive definite then $\mathcal{Z}_h\mathcal{A}_h$ would determine an isomorphism $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge \to (\mathsf{S}_h^1)^\wedge$, and, for a given h, the preconditioned conjugate gradients (PCG) algorithm would converge towards the variational solution on $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$, which by the above theorem is a good one.

In our indefinite case it might be that $\mathcal{Z}_h\mathcal{A}_h$ does not determine an isomorphism $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge \to (\mathsf{S}_h^1)^\wedge$; this would be the case if the bilinear form induced by $\mathcal{A}$ on the range of Θ_h (as opposed to $\Theta_h^\star$) were degenerate, a question we have not settled. However we are sure that the PCG algorithm constructs iterates that are in $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$, and later – in §2.3.9 – we'll show how to construct stopping criteria that guarantee that the residual is small as a linear form on $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$. Thus one can *check* that the approximate solution given by the PCG algorithm is close to the variational solution on $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$. The above Theorem 2.3.16 ensures that this variational solution (exists, is unique and) is close to the *best* (for any chosen norm) approximation on $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ of the exact solution, and that for small h this best approximation is a *good* approximation.

2.3.9 Stopping criterion

Proposition 2.3.8 shows that for all $u \in (\mathsf{S}_h^1)^\wedge$, u solves the variational problem :

$$u \in (\mathsf{S}_h^1)^\wedge \quad \text{and} \quad \forall v \in (\mathsf{S}_h^1)^\wedge \quad a(u,v) = l(v). \tag{2.3.73}$$

if and only if:

$$\Theta_h(\mathcal{A}_h u - l_h) = 0, \tag{2.3.74}$$

which is in turn equivalent to:

$$\|\Theta_h(\mathcal{A}_h u - l_h)\| = 0, \tag{2.3.75}$$

for any norm $\|\cdot\|$ on $\mathsf{S}_h'^1$. We now set out to define norms on $\mathsf{S}_h'^1$ that are uniformly equivalent to the $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1}(\Gamma)$-norm, but more readily computable.

The following lemma should be seen in relation to Lemma 2.3.3.

Lemma 2.3.17 *There is $C > 0$ such that for all $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1}(\Gamma)$, if $u = \mathrm{rot}\, p + v$ with $v \in \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^0(\Gamma)$ and $p \in \mathrm{H}^0(\Gamma)$, we have:*

$$\|u\|_{-1}^2 \leq C\big(|p|_0^2 + |v|_0^2\big). \tag{2.3.76}$$

–Proof : It holds:

$$\|\mathrm{rot}\, p + v\|_{-1}^2 = |\mathrm{rot}\, p + v|_{-1}^2 + |\mathrm{div}\, v|_{-1}^2. \tag{2.3.77}$$

But:

$$|\mathrm{rot}\, p + v|_{-1}^2 \leq 2\big(|\mathrm{rot}\, p|_{-1}^2 + |v|_{-1}^2\big) \leq C\big(|p|_0^2 + |v|_{-1}^2\big). \tag{2.3.78}$$

Then one immediately concludes using $|\mathrm{div}\, v|_{-1} \leq C|v|_0$. □

For convenience we state as a separate lemma the following fact which follows from (H3):

Lemma 2.3.18 *There is $C > 0$ such that for all $u \in X_h$ if:*

$$\forall u' \in X_h \quad \mathrm{div}\, u' = 0 \;\Rightarrow\; \langle u, u' \rangle = 0, \tag{2.3.79}$$

then:

$$|u|_0 \leq C|\mathrm{div}\, u|_{-1}. \tag{2.3.80}$$

–Proof : Let ϕ be the solution of:

$$\phi \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \text{and} \quad \Delta\phi = \mathrm{div}\, u. \tag{2.3.81}$$

We have:

$$|u|_0 \leq |u - \mathrm{grad}\, \phi|_0 + |\mathrm{grad}\, \phi|_0 \leq Ch|\mathrm{div}\, u|_0 + C|\mathrm{div}\, u|_{-1}. \tag{2.3.82}$$

The lemma then follows from an inverse inequality. □

It is a particular case of Lemma 2.3.3 that the converse inequality of Lemma 2.3.17 holds whenever v is such that $\mathrm{rot}\, v = 0$. This fact has the following discrete analogue:

Proposition 2.3.19 *There is $C > 0$, such that for all h and all $u \in \mathsf{S}_h^1$, if $u = \mathrm{rot}\, p + v$ with $p \in \mathsf{S}_h^{0\bullet}$ and $v \perp \mathrm{rot}\, \mathsf{S}_h^{0\bullet}$, then:*

$$|p|_0^2 + |v|_0^2 \leq C\|u\|_{-1}^2. \tag{2.3.83}$$

–Proof : Put $v = a + w$ with $a \in \mathsf{G}_h^1$ and $w \perp \ker_{\mathsf{S}_h^1} \operatorname{div}$. We have:

$$|v|_0^2 = |a|_0^2 + |w|_0^2. \tag{2.3.84}$$

But by Lemma 2.2.3 and Proposition 2.2.4 we have:

$$|a|_0 \leq C|a|_{-1} \leq C\|u\|_{-1}, \tag{2.3.85}$$

and by Lemma 2.3.18 we have:

$$|w|_0 \leq C|\operatorname{div} w|_{-1} = |\operatorname{div} u|_{-1} \leq \|u\|_{-1}. \tag{2.3.86}$$

So:

$$|v|_0^2 \leq C\|u\|_{-1}^2. \tag{2.3.87}$$

Moreover:

$$|p|_0^2 \leq C|\operatorname{rot} p|_{-1}^2 \leq C\big(|\operatorname{rot} p + v|_{-1}^2 + |v|_{-1}^2\big). \tag{2.3.88}$$

The proposition follows. □

Of course the same holds true for the spaces with a prime, which is in fact what will be of interest to us.

Let l be a linear form on S_h^1, and as in the definition of the preconditioner, let (u, q) be the solution of system (2.3.23), so that

$$\Theta_h l = \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^1}(u \times n) - \operatorname{rot} \mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^0 \bullet}(q). \tag{2.3.89}$$

Lemma 2.3.17 together with Proposition 2.3.19 now prove that we have the uniform (i.e. independent of h) equivalence of norms:

$$\|\Theta_h l\|_{-1}^2 \approx |\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^1}(u \times n)|_0^2 + |\mathcal{P}_{\mathsf{S}_h'^0 \bullet}(q)|_0^2. \tag{2.3.90}$$

A stopping criterion can therefore be a sufficient reduction of this norm. It is important to notice that to effectively compute these norms in the course of a conjugate gradients algorithm, is a negligible task compared with the other ones, requiring only two sparse matrix products (at each iteration).

Another norm which is both natural and easily computable is $\|\Theta_h l\|_0$. Also, the quantity $(\|\Theta_h l\|_0 \|\Theta_h l\|_{-1})^{1/2}$, though not a norm satisfies the interpolation inequality:

$$\|\Theta_h l\|_{1/2} \leq C\big(\|\Theta_h l\|_0 \|\Theta_h l\|_{-1}\big)^{1/2}, \tag{2.3.91}$$

and is therefore another good candidate for the construction of a stopping criterion. We have not determined to which extent the choice between these candidates really produces any significant differences on industrial problems.

2.4 Behavior of the iterates

We denote by Θ the continuous analogue of Θ_h, that is the map $(\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma))^\star \to \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ which to l associates $u \times n - \mathrm{rot}\, q$, where u and q are the solutions of the continuous saddle-point problem. We also have $\mathcal{Z} = \Theta^\star \mathcal{A} \Theta$.

The Krylov subspaces are defined to be:

$$\mathfrak{K}^n_h = \{P(\mathcal{Z}_h \mathcal{A}_h)\mathcal{Z}_h l|_{\mathsf{S}^1_h} \ : \ P \in \mathbb{C}[X],\ \deg P \leq n\}. \tag{2.4.1}$$

Their importance stems from the fact that – for fixed h – the preconditioned conjugate gradients (PCG) algorithm attempts to determine (by short recurrences) the sequence of solutions (u^n_h) of the problems:

$$u \in \mathfrak{K}^n_h \quad \text{and} \quad \forall v \in \mathfrak{K}^n_h \quad a(u,v) = l(v). \tag{2.4.2}$$

For generalities about the PCG and related algorithms we refer to Barret et al. [123] or Kelley [127]. Since we deal with complex-symmetric matrices, see also Freund [84]. In this section we investigate the convergence of the spaces $\mathfrak{K}^n_h$ towards their continuous analogues $\mathfrak{K}^n$, for fixed n as $h \to 0$, where naturally we have put:

$$\mathfrak{K}^n = \{P(\mathcal{Z}\mathcal{A})\mathcal{Z} l \ : \ P \in \mathbb{C}[X],\ \deg P \leq n\}. \tag{2.4.3}$$

We will deduce from this, results on the convergence as $h \to 0$ of the iterate u^n_h towards the solution u^n of:

$$u \in \mathfrak{K}^n \quad \text{and} \quad \forall v \in \mathfrak{K}^n \quad a(u,v) = l(v). \tag{2.4.4}$$

We emphasize that for non SPD problems the convergence or breakdown of the Lanczos process is as of today not completely understood. Here our point of view is to suppose that the continuous Lanczos process is well-defined up to iteration n, and then show that for small enough h, the discrete one is also well-defined, and yields arbitrarily close iterates. If the ideal Lanczos process breaks down one should not expect the discrete one to behave well. We have not observed this pathology yet but should it occur one can consider in addition to various restart and look-ahead techniques, to perturbate the preconditioning operator.

Finally we argue that the sequence (u^n) might converge super-linearly, as we show it to be the case for SPD operators, when the preconditioner is an inverse modulo a compact endomorphism.

2.4.1 Stability, and convergence of Krylov subspaces

Proposition 2.4.1 *There is $C > 0$ such that for all h and all $l \in (\mathsf{S}^1_h)^\star$:*

$$\|\Theta_h(l)\|_{-1} \leq C \sup_{v \in \mathsf{S}^1_h} \frac{|l(v)|}{\|v\|_0}. \tag{2.4.5}$$

–Proof : Lemma 2.3.17 gives :

$$\|\Theta_h(l)\|_{-1}^2 \leq C\big(|\mathcal{P}_{\mathsf{S}'^1_h}(u\times n)|_0^2 + |\mathcal{P}_{\mathsf{S}'^0_h}(q)|_0^2\big) \leq C\big(|u|_0^2 + |q|_0^2\big). \tag{2.4.6}$$

This gives the announced estimate. □

Proposition 2.4.2 *There is $C>0$ such that for all $l \in (\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{div}}(\Gamma))^\star$ and all h :*

$$\|\Theta_h l|_{\mathsf{S}^1_h} - \Theta l\|_{-1} \leq Ch\|l\|_{-1\star}. \tag{2.4.7}$$

–Proof : Let (u_h, q_h) be the solutions of the discrete saddle-point problem, and (u_0, q_0) be the solutions of the continuous one. The well-known properties of this problem (in particular Proposition 2.13, p. 64, and Proposition 3.9, p. 132, in Brezzi-Fortin [119]) yield :

$$|u_h - u_0|_0^2 + |q_h - q_0|_0^2 \leq Ch^2(|u_0|_1^2 + |q_0|_1^2) \leq Ch^2\|l\|_{-1\star}^2. \tag{2.4.8}$$

Denoting for simplicity the L_2-orthogonal projections onto the appropriate spaces by $\mathcal{P}_h$, we have :

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{P}_h(u_h\times n) - (u_0\times n)|_0 && (2.4.9)\\
\leq\ & |\mathcal{P}_h(u_h\times n) - \mathcal{P}_h(u_0\times n)|_0 + |\mathcal{P}_h(u_0\times n) - u_0\times n|_0 && (2.4.10)\\
\leq\ & |(u_h\times n) - (u_0\times n)|_0 + Ch|u_0\times n|_1 && (2.4.11)\\
\leq\ & Ch|u_0|_1. && (2.4.12)
\end{aligned}$$

Using the same technique, we also obtain :

$$|\mathcal{P}_h(q_h) - q_0|_0 \leq Ch|q_0|_1. \tag{2.4.13}$$

This completes the proof, using Lemma 2.3.17. □

From these two propositions we deduce stability and convergence estimates for Θ_h in half-integer Sobolev norms.

Corollary 2.4.3 *There is $C>0$ such that for all h and all $l \in \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{div}}(\Gamma)^\star$:*

$$\|\Theta_h l|_{\mathsf{S}^1_h} - \Theta l\|_{-1/2} \leq Ch^{1/2}\|l\|_{-1\star}, \tag{2.4.14}$$

and there is $C>0$ such that for all h and all $l \in (\mathsf{S}^1_h)^\star$:

$$\|\Theta_h l\|_{-1/2} \leq C \sup_{v\in\mathsf{S}^1_h} \frac{|l(v)|}{\|v\|_{-1/2}}, \tag{2.4.15}$$

–Proof : Let $\mathcal{Q}_h$ be the $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$-orthogonal projection onto S'^1_h. The required properties of this projection were summarized in §2.2.2. We have for all $l \in \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{div}}(\Gamma)^\star$:

$$\begin{aligned}
\|\Theta_h l|_{\mathsf{S}^1_h} - \Theta l\|_{-1/2} \leq\ & \|\Theta_h l|_{\mathsf{S}^1_h} - \mathcal{Q}_h\Theta l\|_{-1/2} + \|\mathcal{Q}_h\Theta l - \Theta l\|_{-1/2} && (2.4.16)\\
\leq\ & Ch^{-1/2}\|\Theta_h l|_{\mathsf{S}^1_h} - \mathcal{Q}_h\Theta l\|_{-1} + Ch^{1/2}\|\Theta l\|_0 && (2.4.17)\\
\leq\ & Ch^{-1/2}\big(\|\Theta_h l|_{\mathsf{S}^1_h} - \Theta l\|_{-1} + \|\Theta l - \mathcal{Q}_h\Theta l\|_{-1}\big) && (2.4.18)\\
\leq\ & Ch^{1/2}\|l\|_{-1\star}, && (2.4.19)
\end{aligned}$$

and repeating the same sort of arguments, still supposing that $l \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1}(\Gamma)^\star$:

$$\begin{aligned} \|\Theta_h l|_{\mathsf{S}_h^1}\|_0 &\leq \|\Theta_h l - \mathcal{Q}_h\Theta l\|_0 + \|\mathcal{Q}_h\Theta l\|_0 && (2.4.20)\\ &\leq Ch^{-1}\|\Theta_h l - \mathcal{Q}_h\Theta l\|_{-1} + \|\Theta l\|_0 && (2.4.21)\\ &\leq Ch^{-1}\big(\|\Theta_h l - \Theta l\|_{-1} + \|\Theta l - \mathcal{Q}_h\Theta l\|_{-1}\big) + \cdots && (2.4.22)\\ &\leq C\|l\|_{-1\star}. && (2.4.23) \end{aligned}$$

Combining this estimate with Proposition 2.4.1 by interpolation, we obtain, for $l \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)^\star$:

$$\|\Theta_h l|_{\mathsf{S}_h^1}\|_{-1/2} \leq C\|l\|_{-1/2\star}. \tag{2.4.24}$$

The apparently more refined version announced can then be deduced from the existence of an extension operator with norm one (the adjoint of the $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$-orthogonal projection onto S_h^1), or a Hahn-Banach theorem. □

We have similar estimates for $\Theta_h^\star$:

Corollary 2.4.4 *There is $C > 0$ such that for all h and all $l \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1}(\Gamma)^\star$:*

$$\|\Theta_h^\star l|_{\mathsf{S}_h'^1} - \Theta^\star l\|_{-1/2} \leq Ch^{1/2}\|l\|_{-1\star}, \tag{2.4.25}$$

and there is $C > 0$ such that for all h and all $l \in (\mathsf{S}_h'^1)^\star$:

$$\|\Theta_h^\star l\|_{-1/2} \leq C \sup_{v\in\mathsf{S}_h'^1} \frac{|l(v)|}{\|v\|_{-1/2}}, \tag{2.4.26}$$

–Proof : Using the fact that a (bounded) operator has the same norm as its adjoint we first obtain from Proposition 2.4.2 :

$$\|\Theta_h^\star l|_{\mathsf{S}_h'^1} - \Theta^\star l\|_{-1} \leq Ch\|l\|_{-1\star}. \tag{2.4.27}$$

As in the proof of Corollary 2.4.3 this yields the first equation. The second one follows trivially from the second estimate of the same corollary. □

From this one deduces :

Corollary 2.4.5 *Let (l_h) be a sequence of linear forms on $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ which converges to l (in the norm sense in the dual of $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$). Then $\Theta_h l_h|_{\mathsf{S}_h^1}$ converges to Θl in $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$. Similarly $\Theta_h^\star l_h|_{\mathsf{S}_h'^1}$ converges to $\Theta^\star l$.*

–Proof : The technique of proof is very classical (see for instance Folland [100], Proposition 5.17, p. 169, for the just as easy case of constant l_h), and relies on the above Corollary 2.4.3 (and Corollary 2.4.4 for the second part) using the density of $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1}(\Gamma)^\star$ in $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)^\star$. □

Then we immediately obtain stability and approximation properties for the preconditioner $\mathcal{Z}_h$.

Proposition 2.4.6 *There is $C > 0$ such that for all h and all $l \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)^\star$:*

$$\|\mathcal{Z}_h l|_{\mathsf{S}_h^1}\|_{-1/2} \leq C\|l\|_{-1/2\star}. \tag{2.4.28}$$

If a sequence of linear forms $l_h \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)^\star$ converges to l in $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)^\star$, then $\mathcal{Z}_h l_h|_{\mathsf{S}_h^1}$ converges to $\mathcal{Z}l$.

We are now ready to prove the announced theorem:

Theorem 2.4.7 *For all $l \in (\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2})^\star$ and all $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{Z}_h\mathcal{A}_h)^n\mathcal{Z}_h l|_{\mathsf{S}_h^1}$ converges to $(\mathcal{Z}\mathcal{A})^n\mathcal{Z}l$ in $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$.*

–Proof : This follows from the above results using a simple recursion argument. □

Remark 2.4.8 *We have not derived any optimal orders of convergence, for smoother than necessary data and perhaps higher order finite elements, though we don't expect this to yield any serious difficulties, or require methods of proof different from the above ones. Nor have we tried to determine the minimum hypotheses on the regularity of the triangulations under which our conclusions hold; in particular we haven't determined to which extent the quasi-uniformity hypothesis (which is used for the inverse inequalities) can be relaxed. Of course also, working on non-smooth surfaces would put severe limitations on the range of Sobolev spaces we could use.*

2.4.2 Convergence of the iterates

Let X be a Banach space and X_1, X_0 two closed subspaces. When these are non-zero, the *gap* from X_1 to X_0, denoted $\delta(X_1, X_0)$, is defined to be:

$$\delta(X_1, X_0) = \sup_{u_1 \in X_1} \inf_{u_0 \in X_0} \|u_1 - u_0\|/\|u_1\|. \tag{2.4.29}$$

This definition is extended straight-forwardly to the case when X_1 or X_0 is zero. For a thorough discussion of the gap we refer to Kato [103], but for us the definition is enough.

Suppose that X_0 *splits*, i.e. has a closed supplementary (for instance finite dimensional spaces automatically split, as do closed subspaces of Hilbert spaces), so that we have a continuous projector $P : X \to X$ with range X_0. For all $u \in X$ one has:

$$\forall u' \in X_0 \quad \|u - Pu\| = \|(u - u') - (Pu - u')\| = \|(u - u') - P(u - u')\|. \tag{2.4.30}$$

Hence:

$$\|u - Pu\| \leq \|I - P\|(\inf_{u' \in X_0} \|u - u'\|/\|u\|)\|u\|. \tag{2.4.31}$$

In particular:

$$\forall u \in X_1 \quad \|u - Pu\| \leq \|I - P\|\delta(X_1, X_0)\|u\|. \tag{2.4.32}$$

Thus if (X_h) is a family of closed subspaces such that $\lim_h \delta(X_h, X_0) = 0$, then for sufficiently small h the spaces PX_h are closed in X_0 and P induces isomorphisms $X_h \to PX_h$ which are arbitrarily close in norm to the identity mapping on X_h.

Proposition 2.4.9 *Let X be a reflexive Banach space and $\mathcal{A} : X \to X^\star$ a continuous linear map. Suppose X_0 is a closed subspace that splits yielding a projector P. Suppose X_h is another closed subspace, and that the induced maps $\mathcal{A}_0 : X_0 \to X_0^\star$, $\mathcal{A}_h : X_h \to X_h^\star$, satisfy the Inf-Sup conditions (2.1.20), (2.1.21), with constants α_0 and α_h. Put also $\delta_h = \delta(X_h, X_0)$.*

Then $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{A}_h$ are invertible; moreover, for any $l \in X^\star$, if we put $u_h = \mathcal{A}_h^{-1} l|_{X_h}$ and $u_0 = \mathcal{A}_0^{-1} l|_{X_0}$, we have for all $u' \in X_h$:

$$\|u_h - u_0\| \leq \alpha_h^{-1}(1 + \alpha_0^{-1}\|\mathcal{A}\|)\|I - P\|\delta_h\|l\| + (1 + \alpha_h^{-1}\|\mathcal{A}\|)\|u_0 - u'\|. \tag{2.4.33}$$

–Proof : That $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{A}_h$ are invertible is part of Theorem 2.1.1. Concerning the approximation property, we have (as usual we denote by a the bilinear form corresponding to $\mathcal{A}$):

$$\|u_h - u_0\| \leq \|u_h - u'\| + \|u' - u_0\| \leq \alpha_h^{-1} \sup_{v \in X_h} \frac{|a(u_h - u', v)|}{\|v\|} + \|u' - u_0\|. \tag{2.4.34}$$

Now (for $v \in X_h$) write:

$$\begin{aligned} a(u_h - u', v) &= a(u_h, v) + a(u_0 - u', v) - a(u_0, Pv) - a(u_0, v - Pv) && (2.4.35)\\ &= l(v - Pv) + a(u_0 - u', v) - a(u_0, v - Pv). && (2.4.36) \end{aligned}$$

Therefore:

$$|a(u_h - u', v)|/\|v\| \leq (1 + \alpha_0^{-1}\|a\|)(\|I - P\|)\delta_h\|l\| + \|a\|\,\|u_0 - u'\|. \tag{2.4.37}$$

This proves the proposition. □

Remark 2.4.10 *Just as Theorem 2.1.1 this proposition can easily be extended to the more general setting of a continuous map $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ and subspaces $X_0 \subset X$ and $Y_0 \subset Y$.*

Suppose now (and this is the case for both the approximation of harmonic fields, and the approximation of Krylov subspaces we were discussing), that we have a family (X_h) of subspaces of X and *surjective* linear maps $\Lambda_h : X_0 \to X_h$ such that $\lim_h \|\Lambda_h - I\| = 0$. When $\|\Lambda_h - I\| < 1$, Λ_h is invertible (so X_h

is closed) and $\|\Lambda_h^{-1}\| \leq (1 - \|\Lambda_h - I\|)^{-1}$, and $\Lambda_h^{-1} - I$ considered as a map $X_h \to X$ has norm $\|\Lambda_h^{-1} - I\| \leq (1 - \|\Lambda_h - I\|)^{-1}\|\Lambda_h - I\|$. In particular:

$$\delta(X_h, X_0) \leq (1 - \|\Lambda_h - I\|)^{-1}\|\Lambda_h - I\|. \tag{2.4.38}$$

We also trivially have:

$$\delta(X_0, X_h) \leq \|\Lambda_h - I\|. \tag{2.4.39}$$

Given some continuous bilinear form a on X, we define is_h and is_0 by:

$$\mathrm{is}_h = \inf_{u\in X_h}\sup_{v\in X_h}\frac{|a(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|} \quad \text{and} \quad \mathrm{is}_0 = \inf_{u\in X_0}\sup_{v\in X_0}\frac{|a(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|}. \tag{2.4.40}$$

Some tedious elementary manipulations yield (independently of the existence of the map Λ_h) the inequality:

$$\mathrm{is}_h \geq \mathrm{is}_0\frac{\big(1-\delta(X_h,X_0)\big)}{\big(1+\delta(X_0,X_h)\big)} - \|a\|\Big(\frac{\big(1+\delta(X_h,X_0)\big)}{\big(1-\delta(X_0,X_h)\big)}\delta(X_0,X_h) + \delta(X_h,X_0)\Big). \tag{2.4.41}$$

Now if we plug estimates (2.4.38) and (2.4.39) into (2.4.41) we can conclude that as $h \to 0$, is_h becomes greater than $\mathrm{is}_0 - \epsilon$, for any $\epsilon > 0$. Combining this fact with Proposition 2.4.9 we obtain:

Proposition 2.4.11 *Let X be a reflexive Banach space and $\mathcal{A} : X \to X^\star$ be a continuous linear map. Suppose that X_0 is a closed linear subspace that splits yielding a projector P, and that $\mathcal{A}$ induces an isomorphism $X_0 \to X_0^\star$, with an Inf-Sup estimate α_0. Suppose we have a family (X_h) of subspaces of X, equipped with surjective linear continuous maps $\Lambda_h : X_0 \to X_h$ such that $\lim_h \|I - \Lambda_h\| = 0$.*

Then for any $0 < \alpha < \alpha_0$ there is $h_0 > 0$ such that for all $h < h_0$, $\mathcal{A}$ induces isomorphisms $X_h \to X_h^\star$, and for all $l \in X^\star$, with the notations of Proposition 2.4.9 we have:

$$\|u_h - u_0\| \leq \alpha^{-1}(1 + \alpha^{-1}\|\mathcal{A}\|)(1 + \|I - P\|)\,\|\Lambda_h - I\|\,\|l\|. \tag{2.4.42}$$

Applying this proposition to the discrete and continuous Krylov spaces yields:

Corollary 2.4.12 *Fix an $n \in \mathbb{N}$. Suppose that $\dim \mathfrak{K}^n = n + 1$ and that the map $\mathfrak{K}^n \to \mathfrak{K}^{n\star}$ induced by $\mathcal{A}$ is invertible. Then there is $h_n > 0$ such that for all $h < h_n$ the map $\mathfrak{K}_h^n \to \mathfrak{K}_h^{n\star}$ induced by $\mathcal{A}$ is invertible; moreover, given $l \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)^\star$, the solutions u_h^n and u^n of equations (2.4.2) and (2.4.4), satisfy an estimate of the form:*

$$\|u_h^n - u^n\|_{-1/2} \leq C\|\Lambda_h^n - I\|, \tag{2.4.43}$$

where $\Lambda_h^n : \mathfrak{K}^n \to \mathfrak{K}_h^n$ is the unique linear map that satisfies for $0 \leq i \leq n$:

$$\Lambda_h^n : (\mathcal{Z}\mathcal{A})^i\mathcal{Z}l \mapsto (\mathcal{Z}_h\mathcal{A}_h)^i\mathcal{Z}_h l|_{\mathsf{S}_h^1}. \tag{2.4.44}$$

Of course Theorem 2.4.7 shows that (for fixed n) $\|\Lambda_h^n - I\| \to 0$, and the above mentioned question of regularity is whether for smooth l we have estimates of the form $\|\Lambda_h^n - I\| \leq Ch^s$ for $s > 0$.

It is also possible to give a slightly different and more algorithmic variant of this corollary. Namely, define an "abstract" conjugate gradients algorithm, by skipping all the h indices in some implementation in terms of $\mathcal{Z}_h$ and $\mathcal{A}_h$ of the conjugate gradient algorithm on S_h^1 (it should be checked that this is actually possible). Then if the abstract algorithm is well defined up to iteration n there is $h_n > 0$ such that for all $h < h_n$ the discrete algorithm is well defined up to iteration n. Convergence of the iterates is described by the above corollary. Notice that it covers the case of algorithms that can skip full rank Krylov subspaces on which $\mathcal{A}$ is degenerate, as long as the next Krylov subspace is also full rank and $\mathcal{A}$ is non-degenerate on it, so-called Look-ahead algorithms described in Parlett et al. [90]. Abstract conjugate gradient algorithms are common folklore even for non-Hermitian operators and described for instance in Gutknecht [126].

Remark 2.4.13 *We have not proved that the spectral condition number of the restriction of $\mathcal{Z}_h\mathcal{A}_h$ to $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ is uniformly bounded, and we even suspect that this may not be true. More precisely the spectral radius of the endomorphism induced by $\mathcal{Z}_h\mathcal{A}_h$ on $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ is uniformly bounded, but perhaps not that of its inverse. The lack of this property (which was the guide and main focus of Steinbach-Wendland [72] and Christiansen-Nédélec [133]) was our principal motivation for proving the convergence of the Krylov spaces and the corresponding approximate solutions.*

2.4.3 Evidence of super-linear convergence

The above discussion (in particular Corollary 2.4.12) suggests that the behavior of the approximate solutions (u_h^n) is similar to the behavior of (u^n), at least for moderate n (compared with $\dim \mathsf{S}_h^1 \approx h^{-2}$). Concerning the behavior of (u^n), the convergence theory is more satisfactory in the SPD case than in the non-SPD case we're dealing with.

Here we remind the reader how, in the infinite-dimensional SPD case, the property of inversion up to a compact operator leads to *super-linear* convergence. In other words with the proposed preconditioner for the first kind integral equation EFIE, one recovers the kind of convergence usually associated with second kind integral equations. Though preconditioning was not a focus at the time, such estimates seem to date back to Hayes [86]. The theory doesn't directly apply to the studied case but (for smooth surfaces) it does give complementary convergence estimates on some related preconditioning techniques, in particular those described in Steinbach-Wendland [72], which were the starting point of the method we have described here. We also believe these developments to give good *indication* on the behavior we can expect for our present problem.

Suppose X is a real Hilbert space, $\mathcal{A} : X \to X^\star$ is linear continuous, and

induces a symmetric positive definite bilinear form. Suppose $\mathcal{Z} : X^\star \to X$ is linear continuous and symmetric. Given $l = \mathcal{A}u^\star \in X^\star$ define the Krylov spaces as above with real polynomials only. We suppose that we don't provide an approximate solution -other than 0- to start the algorithm, though this can easily be accounted for.

Remark first that $\mathcal{A}$ induces a scalar product on X with associated norm $\|\cdot\|_\mathcal{A}$, and that u^n solves equation (2.4.4) if and only if $u \mapsto \|u - u^\star\|_\mathcal{A}$ is minimal on $\mathfrak{K}^n$ at u^n. Thus for all real polynomials P such that $\deg P \leq n$:

$$\|u^n - u^\star\|_\mathcal{A} \leq \|P(\mathcal{Z}\mathcal{A})\mathcal{Z}\mathcal{A}u^\star - u^\star\|_\mathcal{A}. \tag{2.4.45}$$

Hence for all P such that $\deg P \leq n+1$, and $P(0) = 1$:

$$\|u^n - u^\star\|_\mathcal{A} \leq \|P(\mathcal{Z}\mathcal{A})u^\star\|_\mathcal{A}. \tag{2.4.46}$$

Then remark that $\mathcal{Z}\mathcal{A}$ is continuous, and symmetric with respect to the bilinear form induced by $\mathcal{A}$, and therefore has a resolution of the identity E on the spectrum $\sigma = \sigma(\mathcal{Z}\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$ such that we can write (we refer to Rudin [108] Chap. 12, for definitions and notations):

$$\begin{aligned} \|P(\mathcal{Z}\mathcal{A})u^\star\|^2_\mathcal{A} &\leq \int_\sigma |P(\lambda)|^2 \mathrm{d}E_{u^\star,u^\star} && (2.4.47)\\ &\leq \sup\{|P(\lambda)|^2 \ : \ \lambda \in \sigma \cap \operatorname{supp} \mathrm{d}E_{u^\star,u^\star}\} \, \|u^\star\|^2_\mathcal{A}. && (2.4.48) \end{aligned}$$

Finally in the case were $\mathcal{Z}\mathcal{A} - I$ is compact we can put $\sigma = \{1\} \cup \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ where $(|\lambda_i - 1|)$ is a decreasing sequence converging to 0. To be sure that the algorithm is well defined for all n we suppose that $\mathcal{Z}$ is positive definite. Then $\lambda_i \neq 0$, and we can define polynomials P_n by:

$$P_n \ : \ P_n(\lambda) = \Pi_{i=0}^n (1 - \lambda/\lambda_i). \tag{2.4.49}$$

Remark that for any i and any λ such that $|1 - \lambda| \leq |1 - \lambda_i|$:

$$|1 - \lambda/\lambda_i| = |(\lambda_i - 1 + 1 - \lambda)/\lambda_i| \leq 2|1 - 1/\lambda_i|, \tag{2.4.50}$$

which gives:

$$\sup_{\lambda \in \sigma} |P_n(\lambda)| \leq 2^{n+1} \Pi_{i=0}^n |1 - 1/\lambda_i|. \tag{2.4.51}$$

Since $|1 - 1/\lambda_i| \to 0$, this immediately implies super-linear convergence. More generally if (λ_i) is a sequence of non-zero *complex* numbers, such that $(|\lambda_i - 1|)$ decreases to 0, the estimates (2.4.50) (for complex λ) and (2.4.51) (with the same definition of P_n, and still with $\sigma = \{1\} \cup \{\lambda_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$) remain true, which might be of interest to other Krylov-subspace algorithms applied to non-SPD operators. Moreover, if the asymptotic behavior of the eigenvalues of the residual $\mathcal{Z}\mathcal{A} - I$ is known and we have an estimate of the form $|1 - \lambda_i| \leq Ci^{-\alpha}$

for some $C > 0$, $\alpha > 0$, we get the convergence estimate (for a larger C and the same α):

$$\|u^n - u^\star\|_{\mathcal{A}} \leq C^n (n!)^{-\alpha} \|u^\star\|_{\mathcal{A}}. \tag{2.4.52}$$

More explicitly, returning to the case of operators on a smooth compact Riemannian manifold Γ, if the dimension of the manifold is N and the residual is an operator of order $-s$ for some $s > 0$ (i.e. in terms of Sobolev spaces, continuous $\mathrm{H}^{s'}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{s'+s}(\Gamma)$ for all s') which commutes with the Laplacian on Γ, this holds with $\alpha = s/N$. This can be deduced from the eigenvalue asymptotics of the Laplacian, for which we refer to Taylor [110] (Vol. II, Chap. 8). An alternative and more general approach based on trace-class theory is exposed in Winther [95] and also gives a factor of the form $C^n(n!)^{-\alpha}$. When Γ has symmetries an even larger α might hold in the estimate (2.4.52) due to the degeneracy of eigenvalues. For the determination of the orders of different integral operators we refer to Nédélec [116]; in particular the order of the residual in our preconditioning strategy for the EFIE is -2 (though we do not even claim to have proved that the PCG doesn't break down in this case).

2.5 Numerical results

In order to evaluate the performance of the preconditioner it is customary to show the convergence graphs. We use the notations of equation (2.1.29), and we denote by U_h^n the tuple of coordinates of the approximate solution u_h^n at iteration n in the chosen basis. The convergence graphs are then of the form:

$$n \mapsto \log_{10}(\|A_h(k)U_h^n - V_h\|/\|V_h\|), \tag{2.5.1}$$

for a given choice of norms on the tuples. The standard norm is the ℓ_2 norm on tuples. From a functional point of view this is not very natural, but on the other hand functional norms are not readily computable – with a notable exception for those we defined in §2.3.9.

2.5.1 Sphere

We start by showing convergence graphs for the canonical example of diffraction of a plane wave by the unit sphere for the wave lengths $\lambda = 8,\ 4,\ 2,\ 1$ ($k = 2\pi/\lambda$); see Figure 2.1. The discretization of the sphere has 2252 vertices and 4500 triangles, leading to 6750 degrees of freedom for lowest order Raviart-Thomas finite elements.

We consider here the case of the preconditioner using the same Galerkin space as the original, and use a complex symmetric conjugate gradients algorithm.

Each graphic displays three curves. The thin line (upper graph) is obtained without preconditioning, for the ℓ_2 norm on tuples; the dotted line (which stagnates) is obtained with the proposed preconditioner for the ℓ_2 norm on tuples;

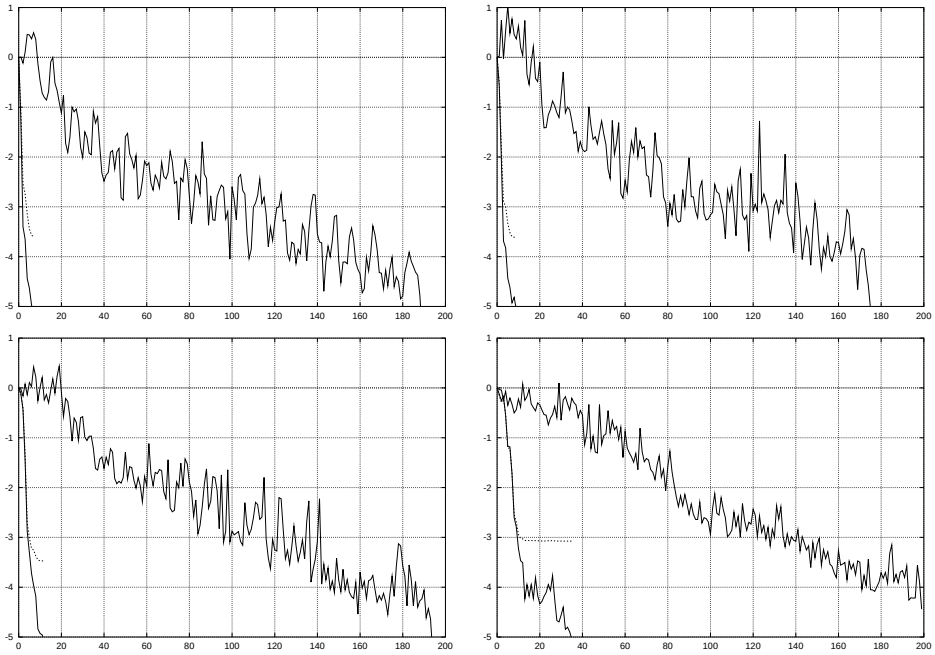


FIG. 2.1 – *Convergence graphs for the unit sphere at* $\lambda = 8,\ 4,\ 2,\ 1$ *(top left to bottom right).*

the third line (the bottom graph) is obtained with the proposed preconditioner, for the natural norm defined in §2.3.9.

We make a few comments:

- with the preconditioner, each iteration is a little more than twice as slow as without any preconditioner: we apply the Galerkin matrix once more, and do a considerable amount of sparse matrix manipulations;
- in the preconditioned case and in particular at $\lambda = 1$, the ℓ_2 norm (dotted line) of the residual stagnates, whereas the natural norm continues to decrease, confirming that the variational problem is indeed solved on a strict subspace;
- the preconditioner is particularly efficient at low frequencies – which is the only really ill-conditioned case on spheres;
- usual stopping criteria vary from 10^{-2} to 10^{-5}, depending on the accuracy of the result required; for all these the preconditioned algorithm is several times faster than the algorithm without preconditioning;
- the auxiliary problems in the preconditioner were solved iteratively with a tolerance of 10^{-7} (saddle-point problem) and 10^{-8} (L^2 projections); accumulation of such errors and other round-off errors could also partly explain the instabilities observed at the last iterations at $\lambda = 1$;
- the far-field patterns deduced from the electric currents computed iterati-

vely with and without preconditioner were not graphically distinguishable from those computed by standard factorization;

– using the Brezzi-Douglas-Marini finite elements in the preconditioner (while still using Raviart-Thomas for the original problem) yields slightly better accuracy and requires slightly fewer iterations. Also the dotted line does not stagnate, confirming that the equation is then solved variationnally on a much larger subspace. However each iteration is much slower since there are twice as many degrees of freedom in the preconditioner (at the lowest level).

2.5.2 Cavity

We consider now diffraction by a cavity. In cavities trapped rays create long range non-trivial interactions. This is a considerably more challenging problem than scattering by convex objects since, without preconditioning, it happens that the iterates do not converge.

The particular geometry we consider can be described as follows: take two concentric spheres, one with radius $5/6$ and one with radius $7/6$; excavate a cone with top at the origin and half-angle $\pi/4$, and join the interior surface with the exterior one with half a torus. See Figure 2.2. The mesh of the cavity was constructed from a mesh of the unit sphere (in fact the same one as in the preceding example) by successive deformations.

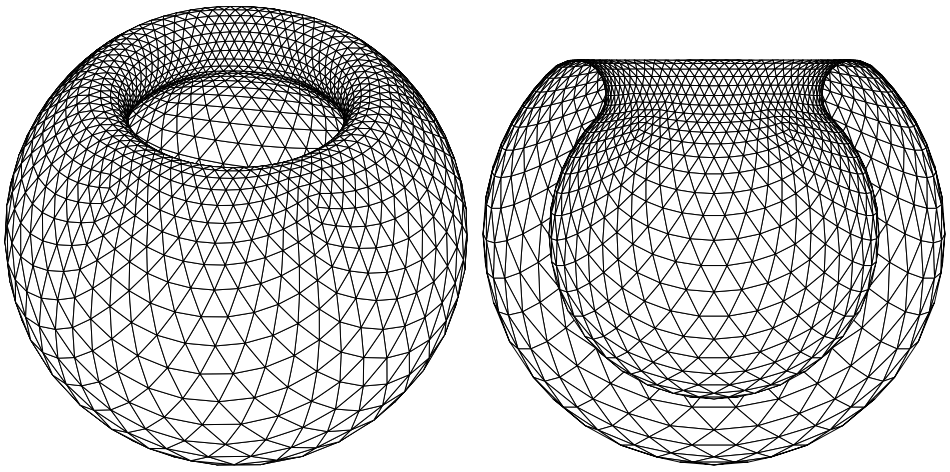


FIG. 2.2 – *Cavity seen from outside and vertical section.*

The cavity is lit by a horizontally polarized plane wave entering the cavity tangentially to its walls (the wave vector makes an angle of $3\pi/4$ with the vertical direction). The convergence graphs obtained for the cavity are displayed in Figure 2.3.

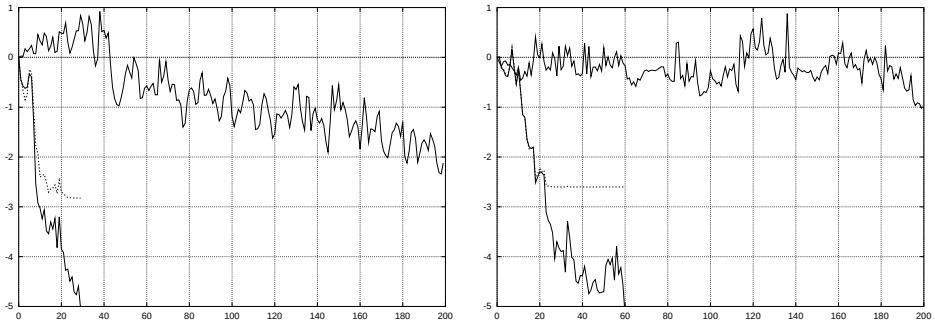


FIG. 2.3 – *Convergence graphs for the cavity at* $\lambda = 8,\ 2$ *(left and right).*

Notice that at $\lambda = 2$, the preconditioner not only speeds up convergence, it actually enables it.

In the preconditioned case, we observe a slow-down in the convergence, which we interpret as stemming from the fact that the Calderon formulas are less well represented on a discrete level (the discrete iterates depart from the continuous ones). It seems also that the slow-down always occurs slightly after the ℓ_2 norm of the residual stagnates. This stagnation could be indication that the current iterate is as close to the exact continuous solution as the exact Galerkin solution. Thus the stagnation in the ℓ_2 norm of the residual would be a good stopping criterion and then the slow-down would never be observed.

2.5.3 Indented cube

The Galerkin discretization of the EFIE is well-known to perform well not only on smooth surfaces but also for the polyhedral ones that often occur in applications. Though we have justified the preconditioning technique only for smooth surfaces, it appears to perform well also on such non-smooth ones. However when the preconditioning operator $Z : X' \to X$ does not invert the operator $A : X \to X'$ up to a compact residual, but rather is such that ZA is an automorphism of X, one expects the ideal conjugate gradients algorithm to converge not super-linearly, but rather linearly, as is easily proven for SPD operators.

We show numerical results for the following geometry. The scattering object is the indented cube $[-1,1]^3 \backslash]0,1]^3$. The interior domain contains several types of singularities, both convex and non-convex. Also when a plane wave with wave-vector $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, with $\sigma_i < 0$, hits the reentrant corner, geometrical optics predicts that it should be scattered mainly in the direction $-\sigma$, after three reflections. The mesh used for the numerical experiments is shown in Figure 2.4. It has 2164 vertices and 4324 triangles, leading to 6486 edges (and degrees of freedom for RT finite elements).

In Figure 2.5 we show the convergence graphs obtained for an incident plane

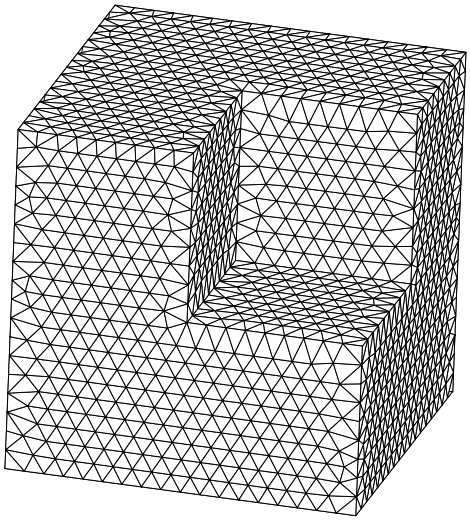


FIG. 2.4 – *Indented cube seen from outside.*

wave with wave-vector positively proportional to $(-1,-1,-1)$, with wavelength $\lambda = 8$ and $\lambda = 4$, and with horizontal polarization. Contrary to the case of smooth surfaces there might be significant loss of accuracy when solving the Galerkin problem on $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ rather than S_h^1 when lowest degree RT fields are used both in the problem formulation and the preconditioner. This problem would be remedied using BDM fields in the preconditioner since then $(\mathsf{S}_h^1)^\wedge$ has very low codimension in S_h^1. However for the wavelengths used here the far-field patterns were not graphically distinguishable.

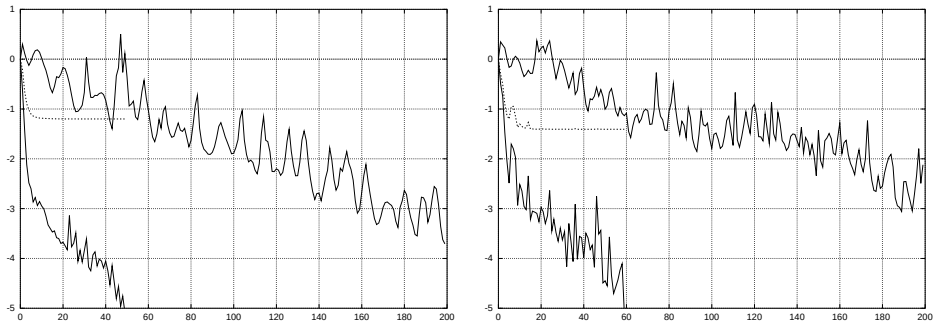


FIG. 2.5 – *Convergence graphs for the indented cube at* $\lambda = 8,\ 4$ *(left and right).*

Perspectives

The study of the method on non-smooth surfaces is still ongoing. In particular the evaluation of the impact of singularities in the surface and corresponding mesh refinement strategies is important for many applications, and could perhaps be achieved using recent results from Buffa et al. [25] and Hiptmair-Schwab [44].

As remarked on the numerical experiments, the preconditioning technique displays good stability at low frequencies. This stability can be enhanced by making the discrete Helmholtz decompositions still more explicit. For instance, focusing on the preconditioner, one applies separately the two terms of the operator in equation (2.1.18) to the two terms of the vector in equation (2.3.24). We shall come back elsewhere to this point, which is important for simulating semi-conductor devices.

The method can also be extended to treat scattering by perfectly conducting simplical complexes (including open surfaces as well as branched ones, where more than two surfaces meet at an edge). In these cases one can no longer keep the same type of Galerkin spaces in the preconditioner as in the variational formulation of the EFIE, and the Calderon formulas, which require the surface to be orientable, need to be adapted. For some generalizations of the method described here we have obtained speed-ups comparable to the above ones, though the justifications are as of today at best intuitive.

The Electric Field Integral Equation

Chapitre 3

Discrete Fredholm properties for the EFIE

Abstract : The Galerkin discretization of the Electric Field Integral Equation is reinvestigated. We prove quasi-optimal convergence estimates at non-resonant frequencies, and show that at resonant frequencies the spurious electric currents radiate only weakly in the exterior domain. This is achieved through the study of some finitely degenerated problems in terms of LBB Inf-Sup estimates and the use of discrete Helmholtz decompositions.

Introduction

The Electric Field Integral Equation (EFIE) is defined in subsection 3.1.1. It is the basic equation in the theory of integral methods for the scattering of electromagnetic harmonic (i.e. mono-frequential) waves. The discretization of this equation is a widespread method for the computation of radar cross sections, antenna performance and electromagnetic compatibility issues, to mention just a few important fields of application.

In this article we give improved convergence estimates for the Galerkin discretization of the EFIE, and new indications on the behavior of the discretized equation at resonant frequencies. One of the main motivations for constructing this theory was to provide a rigorous justification for the use of a new non-local finite element space, which appeared naturally in a preconditioning technique for the EFIE described in Christiansen-Nédélec [135]. We therefore remain sufficiently general throughout the paper to provide a theory that applies to such non-standard spaces.

To achieve this the three main tools used are:

– a reformulation of the EFIE as an equivalent saddle-point problem, following a technique used by Nédélec [116] to prove the Fredholm property

of the (continuous) EFIE;

- estimates on discrete Helmholtz decompositions closely related to a discrete compactness result due to Kikuchi [51] which has recently been found to be important in the discretization of eigenvalue problems by saddle-point formulations;
- a general theory of the discretization of finitely degenerated problems, which we have tried to develop in the spirit of Babuska's Inf-Sup conditions [6].

The most well-known Galerkin space is the one introduced for the EFIE by Rao-Wilton-Glisson in [66]. This space of tangent fields on Γ had previously been used by Nédélec [56] for the computation of eddy currents and, as noted by him, is an adaptation to arbitrary surfaces of the lowest degree Raviart-Thomas (RT) finite element (FE) space developed for planar problems [67].

A numerical analysis of the Galerkin discretization of the EFIE by RT FE of any order was first presented by Bendali [10]. We improve the results of Bendali by getting rid of a parasitic factor of the form $Ch^{-1/2-\epsilon}$ (for arbitrary $\epsilon > 0$, C depending on ϵ) in the error estimates[1]. It should be remarked that we do not need to compute any residual error in the sense of Hsiao-Kleinman [46] to assess the quality of the solution.

We also consider what happens at resonant frequencies. This topic seems to have been neglected in the past (Demkowicz [35] speaks of "forbidden frequencies") but, as one would expect, it suffices to cancel *in some way* the kernel of the Electric Field Integral Operator to recover a discrete Inf-Sup estimate. We shall link this to the fact, observed and communicated to me by F. Béreux, that when the EFIE is solved close to a resonant frequency one observes spurious electric currents in the solution, but that these do not pollute the far-field pattern.

The paper is organized as follows. In section 3.1 we recall the basic properties of the exterior electromagnetic scattering problem, and the corresponding integral equation. Then we introduce its variational formulation and the basic notations that will be used for Galerkin problems. We also briefly recall some well-known results on the discretization of problems satisfying a Gårding estimate. In section 3.2 we outline the available techniques for the study of the EFIE, including the Helmholtz decomposition, Bendali's original approach and Nédélec's technique leading to a saddle-point problem . After having exposed the setting for the discretization of such problems, we introduce the equivalent saddle-point formulation that will be used in the sequel to study the discretization of the EFIE. In section 3.3 we develop an "abstract" framework for this purpose. In section 3.4 we give general sufficient conditions on the Galerkin spaces for the EFIE to satisfy an Inf-Sup estimate on them and show that these conditions are satisfied by the usual RT spaces. We also give a precise interpretation of F. Béreux's observation (Remark 3.4.3). Finally we return to the

1. Via results from section 2.2.2.

Helmholtz decomposition and outline how we could have used it also to reach the same conclusions (section 3.5).

3.1 The Electric Field Integral Equation

3.1.1 Integral representation of interior and exterior waves

Let Ω_- be an open bounded subset of $\mathbb{R}^3$, and Γ its boundary. We suppose that $\Omega_- \cup \Gamma$ is a C^∞ smooth submanifold with boundary, though this hypothesis could be relaxed to C^p smoothness for some $p < \infty$ without much extra effort. More interesting would have been an extension of the theory to Lipschitz manifolds, but even though scalar equations are well understood (see Costabel [32]), the case of Maxwell's equations is still an active research direction (see Buffa et al. [25]) which we will not pursue here. We denote by Ω_+ the complement of $\Omega_- \cup \Gamma$, and n the outward pointing normal on Γ. We suppose throughout that Ω_+ is *connected*, which ensures uniqueness of solutions to exterior problems.

The free-space harmonic Maxwell equations for the electromagnetic field (E, H) in an open region $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ are:

$$\operatorname{curl} E = +i\omega\mu H, \tag{3.1.1}$$

$$\operatorname{curl} H = -i\omega\epsilon E, \tag{3.1.2}$$

where $\mu > 0$ is the magnetic permeability and $\epsilon > 0$ is the electric permittivity. If the pulsation ω is zero one also has to add explicitly that the fields are divergence free. In the sequel these equations will be referred to as Maxwell's equations. It is convenient to introduce the *wavenumber* k and the impedance Z defined by:

$$k = \omega(\mu\epsilon)^{1/2}, \tag{3.1.3}$$

$$Z = (\mu/\epsilon)^{1/2}. \tag{3.1.4}$$

Then we have $+i\omega\mu = +ikZ$ and $-i\omega\epsilon = -ik/Z$.

We will consider here only non-homogeneous boundary value problems for the free-space harmonic Maxwell equations, with *real non-zero positive* pulsations. Referring to Colton-Kress [113], Cessenat [112] and Nédélec [116] for proofs we briefly state the main results which will be of interest to us.

On Γ the usual Sobolev spaces of scalar and tangential fields of regularity order $s \in \mathbb{R}$ are denoted $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ and $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ respectively, and the corresponding norms are both written:

$$u \mapsto |u|_s. \tag{3.1.5}$$

Introduce the Hilbert spaces $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ of tangent fields on Γ:

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma) = \{u \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma) \ : \ \operatorname{div} u \in \mathrm{H}^s(\Gamma)\}. \tag{3.1.6}$$

They are equipped with the norms:

$$u \mapsto \|u\|_s \ : \ \|u\|_s^2 = |u|_s^2 + |\operatorname{div} u|_s^2. \tag{3.1.7}$$

We define $\mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ in a similar way but we don't introduce any notation for the corresponding norm. Notice that $u \mapsto u \times n$ induces isomorphisms $\mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}(\Gamma) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ and $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$.

Recall that we have well defined continuous tangential trace operators:

$$\gamma_{\mathrm{T}}^- : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_-) & \to & \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma) \\ v & \mapsto & v_{\mathrm{T}} = v - (v \cdot n)n \end{array} \right. , \tag{3.1.8}$$

and, for arbitrary large enough $R > 0$ (with $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| < R\}$):

$$\gamma_{\mathrm{T}}^+ : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+ \cap B_R) & \to & \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma) \\ v & \mapsto & v_{\mathrm{T}} = v - (v \cdot n)n \end{array} \right. . \tag{3.1.9}$$

For simplicity we denote by $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+)_{loc}$ the Fréchet space of vector fields in Ω_+ whose restrictions are in $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+ \cap B_R)$ for all $R > 0$. For *exterior* problems we have the existence and uniqueness result:

Theorem 3.1.1 *For all $k > 0$, all $v \in \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ there is a unique $(E, H) \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+)^2_{loc}$ solving Maxwell's equations in Ω_+, satisfying the Silver-Müller radiation conditions, and such that $\gamma_{\mathrm{T}}^+ E = v$. The corresponding solution operator is continuous.*

For *interior* problems we have:

Theorem 3.1.2 *There is a unique real positive strictly increasing and unbounded sequence (k_n) such that, with $\mathcal{K} = \{k_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ we have:*

- *for all $k \notin \mathcal{K}$, for all $v \in \mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ there is a unique $(E, H) \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_-)^2$ solving Maxwell's equations in Ω_- and such that $\gamma_{\mathrm{T}}^- E = v$;*
- *for all $k \in \mathcal{K}$, the space of solutions $(E, H) \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_-)^2$ to Maxwell's equations in Ω_- such that $\gamma_{\mathrm{T}}^- E = 0$, is a non-zero finite-dimensional space.*

The elements of $\mathcal{K}$ are called *resonant wavenumbers*. For any k, the vector space of electric fields E in Ω_-, such that with $H = 1/(ikZ) \operatorname{curl} E$, (E, H) is in $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_-)^2$ and solves Maxwell's equations in Ω_- with the *perfect conductor* boundary condition $\gamma_{\mathrm{T}}^- E = 0$, is denoted $\mathcal{E}_k$. It is finite dimensional and it is non-zero only if $k \in \mathcal{K}$.

Let G_k be the fundamental solution of the Helmholtz operator $-\Delta - k^2$ satisfying the Sommerfeld radiation condition:

$$G_k(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \tag{3.1.10}$$

and let Φ_k be the potential, mapping any sufficiently smooth tangent field u on Γ to the field in $\mathbb{R}^3$ defined away from Γ by:

$$(\Phi_k u)(y) = \int_\Gamma G_k(x,y)u(x)\mathrm{d}x. \tag{3.1.11}$$

Of fundamental importance to us will be the representation theorem:

Theorem 3.1.3 *Suppose (E,H) is a field whose restrictions to Ω_- and Ω_+ are in $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_-)^2$ and $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+)^2_{loc}$ and solve Maxwell's equations for a given wave number k. Suppose also that it verifies the Silver-Müller radiation conditions. Define the electric and magnetic currents j and m on Γ by the jump formulas:*

$$j = [H\times n] = (\gamma_{\mathrm{T}}^- H - \gamma_{\mathrm{T}}^+ H)\times n, \tag{3.1.12}$$
$$m = [E\times n] = (\gamma_{\mathrm{T}}^- E - \gamma_{\mathrm{T}}^+ E)\times n. \tag{3.1.13}$$

Then in Ω_- and Ω_+ we have:

$$E = (+ikZ)(1+(1/k^2)\operatorname{grad}\operatorname{div})\Phi_k j \ + \operatorname{curl}\Phi_k m, \tag{3.1.14}$$
$$H = (-ik/Z)(1+(1/k^2)\operatorname{grad}\operatorname{div})\Phi_k m + \operatorname{curl}\Phi_k j. \tag{3.1.15}$$

Definition 3.1.4 *For $k\neq 0$ we define the Electric Field Integral Operator, on tangent fields on Γ, by (the interior and exterior traces are equal):*

$$A_k u = \gamma_T(1+(1/k^2)\operatorname{grad}\operatorname{div})\Phi_k u. \tag{3.1.16}$$

One shows that A_k is continuous $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)\to\mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$. The EFIE for a given tangent field v is the equation $A_k u = v$. From the preceding equations it follows that if $k\in\mathbb{R}_+^*\setminus\mathcal{K}$, $A_k:\mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma)\to\mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ is invertible. But more interestingly we have the following results even if k is a resonant wavenumber:

- for any $v\in\mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$, if the interior problem with respect to v has a solution, then there is $u\in\mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ such that $A_k u = v$;
- for any $v\in\mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$, if we have a solution $u\in\mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ to $A_k u = v$, then the solution (E,H) of the exterior problem with respect to v is given by:

$$E = (1-(1/k^2)\operatorname{grad}\operatorname{div})\Phi_k u, \quad H = 1/(ikZ)\operatorname{curl}\Phi_k u; \tag{3.1.17}$$

- for any $u\in\mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$, $A_k u = 0$ if and only if $u\in(\gamma_{\mathrm{T}}^-\operatorname{curl}\mathcal{E}_k)\times n$.

Thus for instance if v is the tangential trace of a planar wave -which is the case in RCS computations- then the EFIE has a solution even at resonances, which is determined up to a finite dimensional space, and for any such solution the corresponding potential solves the exterior problem. One of the main goals of this paper is to determine to which extent an analogous property holds true for the discretized EFIE.

3.1.2 Variational formulation and discretization

Recall that the $\mathbb{C}$ bilinear form on tangent fields:

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = \int_\Gamma u \cdot v, \tag{3.1.18}$$

induces a duality between $\mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ and $\mathrm{H}^{-1-s}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$, see in particular Paquet [64].

For sufficiently smooth tangent fields we have (all integrals are on Γ):

$$\begin{aligned} \langle A_k u, u' \rangle &= \iint G_k(x,y) u(x) \cdot u'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdots \\ &\quad -(1/k^2) \iint G_k(x,y) \operatorname{div} u(x) \operatorname{div} u'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

In order to have a highest order term which is positive we will sometimes consider the opposite bilinear form. This leads to a variational formulation of the EFIE, also known as the Rumsey reaction principle. For a given $v \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ solve:

$$u \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{div}}(\Gamma) \quad \text{and} \quad \forall u' \in \mathrm{H}^{-1-s}_{\mathrm{div}}(\Gamma) \quad \langle A_k u, u' \rangle = \langle v, u' \rangle. \tag{3.1.20}$$

The case $s = -1/2$ is symmetric and is the natural starting point for the study of this equation. Whenever we have a family (X_h) of subspaces of $\mathrm{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$, the Galerkin method consists in trying to solve the equations:

$$u \in X_h \quad \forall u' \in X_h \quad \langle A_k u, u' \rangle = \langle v, u' \rangle, \tag{3.1.21}$$

and studying the convergence of the corresponding solutions, with respect to the parameter h.

3.1.3 Galerkin methods in the presence of Gårding inequalities

Let X be a Hilbert space. The base field $\mathbb{K}$ of X is either $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Let $a : X \times X \to \mathbb{K}$ be a $\mathbb{K}$-bilinear continuous form on X. We say that a is non-degenerate if the induced map $\mathcal{A} : X \to X^\star, u \mapsto a(u, \cdot)$ is an isomorphism (since X is reflexive this is equivalent to $u \mapsto a(\cdot, u)$ being one). When a is non degenerate, we construct approximations of $\mathcal{A}^{-1}$ by choosing a family of closed subspaces (X_h) of X, which is *approximating* in the sense that:

$$\forall u \in X \quad \lim_h \inf_{u' \in X_h} \|u - u'\| = 0. \tag{3.1.22}$$

Then for a given $l \in X^\star$ we try to solve:

$$u \in X_h \quad \forall u' \in X_h \quad a(u, u') = l(u'). \tag{3.1.23}$$

In accordance with usual conventions it is implicit that $(X_h) = (X_h)_{h \in H}$ where H is some subset of $\mathbb{R}^*_+$ accumulating at 0, and that $\lim_h$ means $\lim_{h \to 0}$.

Let $\mathcal{A}_h$ be the map: $X_h \to X_h^\star, u \mapsto a(u,\cdot)$. Then 3.1.23 can be restated as: $u \in X_h \quad \mathcal{A}_h u = l|_{X_h}$. If $\mathcal{A}_h$ is invertible and if:

$$\exists C > 0 \ \forall l \in X^\star \ \forall h \quad \|\mathcal{A}^{-1} l - \mathcal{A}_h^{-1} l|_{X_h}\| \leq C \inf_{u' \in X_h} \|\mathcal{A}^{-1} l - u'\|, \tag{3.1.24}$$

we say that the Galerkin method yields *quasi-optimal convergence.*

A sufficient condition for a to be non degenerate is that it is coercive in the sense that for some $\mathbb{R}$-linear isometric involution of X, denoted $u \mapsto \overline{u}$ and called conjugation, we have:

$$\exists C > 0 \ \forall u \in X \quad \mathfrak{Re}\, a(u, \overline{u}) \geq (1/C)\|u\|^2. \tag{3.1.25}$$

This is the Lax-Milgram theorem. If a is coercive Céa's lemma asserts that if the spaces X_h are stable under conjugation, the Galerkin method yields quasi-optimal convergence.

In the context of boundary integral equations one soon encounters bilinear forms satisfying only a weaker estimate, known as a Gårding inequality:

$$\exists C > 0 \ \forall u \in X \quad \mathfrak{Re}\, a(u, \overline{u}) \geq (1/C)\|u\|_X^2 - C\|u\|_Y^2, \tag{3.1.26}$$

where Y is a Hilbert space containing X and such that the canonical injection $X \to Y$ is compact.

It was soon recognized that if a is non degenerate and satisfies a Gårding inequality, and if the spaces X_h are stable under conjugation, then there exists $h_0 > 0$ such that the Galerkin method has quasi-optimal convergence on $(X_h)_{h<h_0}$. Early contributions in this direction include Schatz [70]. This fact is naturally stated in terms of the Inf-Sup conditions due to Babuska [6] [7]. For an insightful account on this we refer to Demkowicz [35]; see also Wendland [80]. For future reference we recall Babuska's Theorem:

Theorem 3.1.5 *Let X and Y be two reflexive Banach spaces. Let a be a continuous bilinear form on $X \times Y$. If:*

$$\inf_{u \in X} \sup_{v \in Y} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|} \geq \alpha \quad > \quad 0, \tag{3.1.27}$$

$$\forall v \in Y \quad (\forall u \in X \ a(u,v) = 0) \quad \Rightarrow \quad (v = 0) \tag{3.1.28}$$

then:

$$\inf_{v \in Y} \sup_{u \in X} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|\,\|u\|} = \inf_{u \in X} \sup_{v \in Y} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|}, \tag{3.1.29}$$

and for all $l \in Y^\star$ there is a unique $u \in X$ such that:

$$\forall v \in Y \quad a(u,v) = l(v). \tag{3.1.30}$$

It satisfies $\|u\| \leq \alpha^{-1}\|l\|$.

We will use the following notation whenever it makes sense:

$$\inf_X \sup_Y a = \inf_{u \in X} \sup_{v \in Y} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|}, \tag{3.1.31}$$

where it is implicit that u and v are non-zero.

3.2 Some strategies for the analysis of the EFIE

On function spaces the standard conjugation is the one induced by the complex conjugation in $\mathbb{C}$. With this conjugation the variational formulation of the EFIE does *not* lead to a compact perturbation of a coercive form on $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$. Several techniques have been deployed to compensate for this. The general idea is to introduce an equivalent variational formulation, usually on some product space, with a block structure such that the different blocks are either compact perturbations of coercive operators, or compact coupling terms.

3.2.1 Helmholtz decomposition

The most well-known strategy is to consider the Helmholtz decomposition of tangent fields on Γ. If Γ is simply connected any $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ can be written in a unique way $u = \operatorname{grad} p + \operatorname{rot} q$ with $p \in \mathrm{H}^{3/2}(\Gamma)^\bullet$ and $q \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)^\bullet$. With this splitting of $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ a variational formulation of the EFIE is:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in \mathrm{H}^{3/2}(\Gamma)^\bullet \\ q \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)^\bullet \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall p' \in \mathrm{H}^{3/2}(\Gamma)^\bullet \\ \forall q' \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)^\bullet \end{array} \right. \quad \begin{array}{rcl} a(p,p') + b(q,p') & = & l(\operatorname{grad} p') \\ b(q',p) + c(q,q') & = & l(\operatorname{rot} q') \end{array} , \tag{3.2.1}$$

where:

$$\begin{aligned} a(p,p') &= (1/k^2) \iint G_k(x,y) \Delta p(x) \Delta p'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdots \qquad (3.2.2) \\ &\quad - \iint G_k(x,y) \operatorname{grad} p(x) \cdot \operatorname{grad} p'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ b(q,p') &= - \iint G_k(x,y) \operatorname{rot} q(x) \cdot \operatorname{grad} p'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (3.2.3) \\ c(q,q') &= - \iint G_k(x,y) \operatorname{rot} q(x) \cdot \operatorname{rot} q'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (3.2.4) \end{aligned}$$

The diagonal terms are compact perturbations of coercive forms whereas the off diagonal terms are compact. This has wide ranging implications for the EFIE, see in particular De La Bourdonnaye [18]. Ivakhnenko et al. [49] (among others) have suggested to base algorithms on this splitting. However -as acknowledged by the authors- the theory they develop does not cover the most widespread methods, since it requires a splitting of the Galerkin spaces for which the gradients are tangent fields with $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma)$ regularity.

One remarks that the above splitting technique can be restated as the fact that the EFIE satisfies a Gårding inequality for the *non-standard* conjugation:

$$\operatorname{grad} p + \operatorname{rot} q \mapsto \operatorname{grad} \overline{p} - \operatorname{rot} \overline{q}. \tag{3.2.5}$$

Then the difficulty is that this conjugation does not leave the Galerkin spaces stable.

3.2.2 Introduction of charge density

It seems that the only numerical analysis available for the variational discretization of the EFIE is the original approach of Bendali [10], who introduces the charge density $q = \operatorname{div} u$ into the formulation, with Lagrange multipliers. More precisely the EFIE is formulated in the following way :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma) \\ q \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)^{\bullet} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u' \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma) \\ \forall q' \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)^{\bullet} \end{array} \right. \quad \begin{array}{rcl} a(u,u') + b(q,u') & = & l(u') \\ c(q',u) + d(q,q') & = & 0 \end{array} , \tag{3.2.6}$$

where :

$$a(u,u') = -\iint G_k(x,y) u(x) \cdot u'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.2.7}$$

$$b(q,u') = (1/k^2) \iint G_k(x,y) q(x) \operatorname{div} u'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.2.8}$$

$$c(q',u) = (1/k^2) \iint G_0(x,y) q'(x) \operatorname{div} u(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.2.9}$$

$$d(q,q') = -(1/k^2) \iint G_0(x,y) q(x) q'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.2.10}$$

This formulation has much weaker properties than the preceding one, leading to an intricate mathematical analysis. It's main advantage is that for the usual Galerkin spaces $X_h \subset \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ the spaces $W_h = \operatorname{div} X_h$ are simple subspaces of the usual Galerkin spaces of piecewise polynomial functions (with no continuity requirements). Thus the formulation (3.2.6) has a discrete counterpart on $W_h \times X_h$.

We shall now turn to a reformulation of the EFIE which combines the strong properties of the Helmholtz decomposition with the possibility of a corresponding interpretation of the discretization.

3.2.3 A canonical splitting

Nédélec [116] has used the following splitting of $X = \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ to prove the Fredholm property of the EFIE. Let a be the bilinear form induced by the EFIE. Put $W = \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. Then $\operatorname{rot} W$ is a closed subspace of X. Instead of adding to it its orthogonal with respect to the duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$ as in the Helmholtz decomposition, one can consider the orthogonal V of $\operatorname{rot} W$ with respect to a, i.e. :

$$V = \{ u \in X \ : \ \forall w \in W \quad a(\operatorname{rot} w, u) = 0 \}. \tag{3.2.11}$$

Since the restriction of a to $\operatorname{rot} W$ is a compact perturbation of a coercive form, $V \cap W$ is finite dimensional, and $V + W$ is closed and has finite codimension in

X. Thus, up to finite dimensional spaces, one can search for the solution of the EFIE in the form $u = v + \operatorname{rot} w$, with (v, w) solving:

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in X \\ w \in W \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \forall v' \in X & a(v, v') + a(\operatorname{rot} w, v') & = l(v') \\ \forall w' \in W & a(\operatorname{rot} w', v) & = 0 \end{array} \right. . \tag{3.2.12}$$

The conclusive remark is that on V, a satisfies a Gårding inequality, thus this saddle-point problem is Fredholm of index 0.

3.2.4 Reformulation of the EFIE as a saddle-point

We will use a non-symmetric variant of this last technique which has the advantage of not introducing the parasitic finite dimensional subspaces. In order to be more precise in our statements we will require the theory of saddle-point problems. We assume familiarity with the theory of Inf-Sup conditions as presented for instance in Roberts-Thomas [68], and in particular the way *discrete* Inf-Sup conditions lead to convergence estimates for Galerkin methods. However, for completeness we include a result of Nicolaides [63], which generalizes the classical theorem of Brezzi [21].

Theorem 3.2.1 *Let X_i and W_i for $i = 1, 2$ be Hilbert spaces. Let a, b and c be continuous bilinear forms on $X_1 \times X_2$, $W_1 \times X_2$ and $W_2 \times X_1$. Suppose that:*

$$\inf_{V_1} \sup_{V_2} a \geq \alpha \quad > \quad 0, \tag{3.2.13}$$

$$\inf_{W_1} \sup_{X_2} b \geq \beta \quad > \quad 0, \tag{3.2.14}$$

$$\inf_{W_2} \sup_{X_1} c \geq \gamma \quad > \quad 0, \tag{3.2.15}$$

$$\forall v_2 \in V_2 \quad (\forall v_1 \in V_1 \ a(v_1, v_2) = 0) \quad \Rightarrow \quad (v_2 = 0). \tag{3.2.16}$$

Then for all $(g, f) \in W_2^\star \times X_2^\star$ there is a unique $(w_1, u_1) \in W_1^\star \times X_1^\star$ such that:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \in X_1 \\ w_1 \in W_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \forall u_2 \in X_2 & a(u_1, u_2) + b(w_1, u_2) & = f(u_2) \\ \forall w_2 \in W_2 & c(w_2, u_1) & = g(w_2) \end{array} \right. . \tag{3.2.17}$$

Moreover one has the continuity estimate for the solution operator:

$$\|u_1\| \leq \alpha^{-1}\|f\| + \gamma^{-1}(1 + \alpha^{-1}\|a\|)\,\|g\|, \tag{3.2.18}$$

$$\|w_1\| \leq \beta^{-1}(1 + \alpha^{-1}\|a\|)\,(\|f\| + \gamma^{-1}\|a\|\,\|g\|). \tag{3.2.19}$$

If for all (g, f) there is a unique solution (w_1, u_1), then the above Inf-Sup conditions are satisfied for some α, β and γ, as noted by Bernardi et al. [12].

We return now to the special case of interest, the EFIE. We put $X = \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ and let a be the bilinear form on X induced by the EFIE:

$$\begin{aligned} a(u, u') &= (1/k^2) \iint G_k(x, y) \operatorname{div} u(x) \operatorname{div} u'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdots \\ &\quad - \iint G_k(x, y) u(x) \cdot u'(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Let d be the bilinear form on X defined by:

$$d(u,u') = -(1/k^2)\iint G_0(x,y)\,\mathrm{div}\,u(x)\,\mathrm{div}\,u'(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdots - \iint G_0(x,y)u(x)\cdot u'(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad (3.2.21)$$

The involution of X induced by the complex conjugation is denoted $u \mapsto \overline{u}$. Then $-d(\cdot,\bar{\cdot})$ is a Hermitian scalar product on X. Thus for any closed subspace X_0 of X and any closed subspace W_0 of X_0, if X_0 and W_0 are stable under conjugation (*conj.-stable* for short) one has the orthogonal splitting: $X_0 = V_0 \oplus W_0$, with:

$$V_0 = \{u \in X_0 \ : \ \forall w \in W_0 \quad d(w,u) = 0\}. \quad (3.2.22)$$

Put $W = \{u \in X \ : \ \mathrm{div}\,u = 0\}$. Now let X_0 be any closed and conj.-stable subspace of X, and put $W_0 = X_0 \cap W$, which is also closed and conj.-stable. Then, for all $l \in X_0^\star$, u solves:

$$u \in X_0 \quad \text{and} \quad \forall u' \in X_0 \quad a(u,u') = l(u'), \quad (3.2.23)$$

if and only if $u = v + w$, with (v,w) solving:

$$\begin{cases} v \in X_0 \\ w \in W_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \forall v' \in X_0 & a(v,v') + b(w,v') = l(v') \\ \forall w' \in W_0 & c(w',v) = 0 \end{cases}, \quad (3.2.24)$$

where b is the restriction of a to $W \times X$, and c the restriction of d to $W \times X$.

Consider first the case $X_0 = X$. Let $\Theta : W \times X \to W^\star \times X^\star$ be the map induced by the above saddle-point. If the kernels G_k are replaced by G_0 in a and b (keeping the outside coefficient $(1/k^2)$ untouched), the corresponding operator $\Theta_0 : W \times X \to W^\star \times X^\star$ is symmetric; it is the saddle-point mapping associated with the bilinear form a_0 defined by:

$$a_0(u,u') = (1/k^2)\iint G_0(x,y)\,\mathrm{div}\,u(x)\,\mathrm{div}\,u'(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdots - \iint G_0(x,y)u(x)\cdot u'(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad (3.2.25)$$

For Θ_0 the Brezzi compatibility estimates (3.2.14) and (3.2.15) are trivial. The cornerstone of the argument is:

Theorem 3.2.2 *On the right kernel of c on $W \times X$, the bilinear form a_0 satisfies a Gårding inequality.*

–Proof : Let V denote the right kernel of c on $W \times X$. Remark first that V is a supplementary of $\ker_X \mathrm{div}$, and that $\mathrm{div} : X \to \mathrm{H}^{-1/2}$ has closed range. It follows that div determines and isomorphism from V to its range, so there is $C > 0$ such that:

$$\forall v \in V \quad \|v\|_X \le C|\,\mathrm{div}\,v|_{-1/2}. \quad (3.2.26)$$

Hence the first term in the right hand side of equation (3.2.25) is coercive on V.

Concerning the second term notice that for elements v of V we have:

$$\mathrm{rot} \int G_0(x,y)v(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{3.2.27}$$

As shown in Nédélec [116], it follows that rot maps V continuously into $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$, hence V is continuously imbedded in $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma)$. In turn the injection $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma) \to \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{-1/2}(\Gamma)$ is compact so the proof is complete. □

From this it follows that Θ_0 is Fredholm, and by symmetry its index must be 0. Since Θ is a compact perturbation of Θ_0, Θ is also Fredholm of index 0.

If $u \mapsto a(u,\cdot)$ is injective, the above splitting, in the case $X_0 = X$ shows that the map Θ is also injective. Therefore it is an isomorphism.

We now turn to the case where X_0 is a Galerkin space, one among a family (X_h). Putting $W_h = X_h \cap W$, our strategy will be to first study the saddle-point problem on $W_h \times X_h$, and give sufficient conditions on (X_h) for it to satisfy uniform Inf-Sup estimates. From these we easily deduce Inf-Sup estimates for the original problem on X_h.

Remark 3.2.3 *We could also have made the choice $W = \mathrm{rot}\,\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$, which differs from the adopted one only by a finite dimensional space, whose elements are known as the Neumann fields (or harmonic fields). Some proofs would have to be modified.*

3.3 Discrete Fredholm properties

In this section we state Fredholm properties in terms of Inf-Sup estimates and examine some discrete analogues. One can hardly claim any originality in the well-trodden realm of Fredholm theory. Concerning the discretization of Fredholm operators we mention in particular work by Gohberg and Mikhlin. Most of this work is expressed in terms of the projection method for linear operators in general Banach spaces, see Stummel [75], which predates the LBB Inf-Sup conditions. Here we restrict attention to bilinear forms on reflexive spaces and express the results we need in the framework of Inf-Sup conditions.

3.3.1 Results on left semi-Fredholm operators

We collect some well known facts that will be useful later, and serve as reference for discrete counterparts. The classical reference on the subject is Kato [103].

Theorem 3.3.1 *Let X and Y be two Banach spaces and $A : X \to Y$ be linear and continuous. The following are equivalent:*

1. *A has closed range and finite dimensional kernel;*

2. $\dim\ker A < \infty$ *and on any closed supplementary* M *of* $\ker A$ *:*

$$\inf_{u\in M} \|Au\|/\|u\| > 0; \tag{3.3.1}$$

3. there is a closed subspace M *of* X *with finite codimension such that:*

$$\inf_{u\in M} \|Au\|/\|u\| > 0. \tag{3.3.2}$$

Definition 3.3.2 *Let* X *and* Y *be two Banach spaces and* $A : X \to Y$ *be linear and continuous. We say that* A *is* left semi-Fredholm *(LSF) if the stated conditions are satisfied. The set of LSF operators from* X *to* Y *is denoted* $\mathrm{LSF}(X, Y)$.

Theorem 3.3.3 *Let* X *and* Y *be two Banach spaces. For all* $n \in \mathbb{N}$ *the following sets (whose union is* $\mathrm{LSF}(X, Y)$*) are open in* $\mathrm{L}(X, Y)$ *:*

$$\{A \in \mathrm{L}(X, Y) : A \text{ has closed range and } \dim\ker A \leq n\}. \tag{3.3.3}$$

Moreover $\mathrm{LSF}(X, Y)$ *is stable under translation by compact operators.*

3.3.2 Discrete left semi-Fredholm operators

The following lemma is trivial and stated just for the record.

Lemma 3.3.4 *Let* X *and* Y *be two Banach spaces, and* $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ *be continuous. Let* M *be a closed subspace of* X*. Let* (X_h) *and* (Y_h) *be families of closed subspaces of* X *and* Y*. Suppose* (X_h) *is approximating (and* $Y_h \neq \{0\}$*). If:*

$$\liminf_h \inf_{X_h\cap M} \sup_{Y_h} \mathcal{A} > 0, \tag{3.3.4}$$

then : $M \cap \ker\mathcal{A} = \{0\}$*. If in addition* M *has finite codimension, then* $\mathcal{A}$ *is LSF.*

We will need two more lemmas, which are less trivial.

Lemma 3.3.5 *Let* X *be a Banach space. Let* M *and* N *be closed subspaces of* X *such that* $M \oplus N = X$ *and* N *is finite dimensional. Let* $P : X \to X$ *be the projector with range* M *and kernel* N*. Let* (X_h) *be a family of closed subspaces of* X *which is approximating. Then :*

- *there are projectors* P_h *with range* M *which converge in norm to* P *and which leave* X_h *stable for sufficiently small* h*;*
- *if* (P_h) *is any family of such projectors then for sufficiently small* h*,* $\ker P_h \subset X_h$ *and* $X_h = (X_h \cap M) \oplus \ker P_h$*.*

–Proof : Choose a basis (e^i) of N, and pick elements e^i_h of X_h such that :

$$\lim_h \|e^i - e^i_h\| = 0. \tag{3.3.5}$$

For any h, let N_h be the space spanned by the e^i_h. Then there is $h_0 > 0$ such that for $h < h_0$ we have $X = M \oplus N_h$.

1. For $h < h_0$ let P_h be the projector with range M and kernel N_h, and for $h \geq h_0$ put $P = P_h$. One checks that the family (P_h) has the desired properties.

2. If (P_h) is a family of projectors with these properties, then $P_h|_{X_h}$ are projectors with range $X_h \cap M$, so for sufficiently small h:

$$\dim N_h \leq \dim \ker P_h|_{X_h} \leq \dim \ker P_h \leq \dim N. \tag{3.3.6}$$

For sufficiently small h these dimensions are all equal. □

Lemma 3.3.6 *Let X be a Banach space and Y be a reflexive Banach space. Let $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ be continuous and have closed range. Then for any $l \in X^\star$ that vanishes on $\ker \mathcal{A}$ there is a $v \in Y$ such that:*

$$\forall u \in X \quad l(u) = (\mathcal{A}u)(v). \tag{3.3.7}$$

–Proof : Remark first that $\mathcal{A}$ induces an isomorphism of Banach spaces $X/\ker \mathcal{A} \to \mathcal{A}(X)$. Let $\mathcal{Z}$ be the inverse mapping. For convenience we put $N = \ker \mathcal{A}$.

Pick $l \in X^\star$ that vanishes on N. Let $\tilde{l}$ be the canonical image of l in $(X/N)^\star$. Put $f = \mathcal{Z}^\star \tilde{l} \in (\mathcal{A}(X))^\star$. Extend f to a continuous linear form on $Y^\star$, and put $v = (i_Y)^{-1} f$. For all $u \in X$ we have:

$$(\mathcal{A}u)(v) = f(\mathcal{A}u) = \tilde{l}(\mathcal{Z}\mathcal{A}u) = \tilde{l}(\tilde{u}), \tag{3.3.8}$$

where $\tilde{u}$ is canonical image of u in X/N. The proof is complete. □

Theorem 3.3.7 *Let X and Y be two reflexive Banach spaces, and $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ be LSF. Let (X_h) and (Y_h) be families of closed subspaces of X and Y which are approximating.*

Put $N_0 = \ker \mathcal{A}$. Suppose we have closed subspaces M_0 and M_1 such that $M_0 \oplus N_0 = X$, $M_1 \oplus N_1 = M_0$ and $\dim N_1 < \infty$. If:

$$\liminf_h \inf_{X_h \cap M_1} \sup_{Y_h} \mathcal{A} > 0, \tag{3.3.9}$$

then:

$$\liminf_h \inf_{X_h \cap M_0} \sup_{Y_h} \mathcal{A} > 0. \tag{3.3.10}$$

–Proof : If not let (u_n), (h_n) be sequences such that:

$$u_n \in X_{h_n} \cap M_0, \quad \|u_n\| = 1, \quad \lim_n h_n = 0, \quad \lim_n \sup_{Y_{h_n}} \mathcal{A}u_n = 0. \tag{3.3.11}$$

Let P the projector with range M_1 and kernel $N_1 \oplus N_0$. The sequence $(u_n - P(u_n))$ is a bounded sequence in the finite dimensional space $N_1 \oplus N_0$, so modulo extraction we can suppose that it converges in norm to some $u^N \in N_1 + N_0$. Since $u_n \in M_0$, we actually have $u^N \in N_1$.

Since (Y_{h_n}) is approximating we have:

$$\forall v \in Y \quad \lim_n (\mathcal{A}u_n)(v) = 0. \tag{3.3.12}$$

Therefore for any continuous linear form $l \in X^\star$ that vanishes on N_0 we have:

$$\lim_n l(u_n) = 0. \tag{3.3.13}$$

If $l \in X^\star$ vanishes on $M_1 + N_0$ we have:

$$l(u^N) = \lim_n l(u_n - Pu_n), \tag{3.3.14}$$

and $Pu_n \in M_1$ so this limit must be 0. Therefore $u^N \in M_1 + N_0$, so $u^N = 0$.

Let $P_h : X \to X$ be projectors with range M_1, leaving X_h stable and converging in norm to P. Notice that:

$$\lim_h \|u_n - P_{h_n} u_n\| = 0. \tag{3.3.15}$$

One obtains a contradiction using the discrete Inf-Sup estimate on $(X_h \cap M_1) \times Y_h$ for the sequence $(P_{h_n} u_n)$. □

Definition 3.3.8 *Let X and Y be two reflexive Banach spaces, and $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ be continuous. Let (X_h) and (Y_h) be families of closed subspaces of X and Y. We say that $\mathcal{A}$ is* discrete LSF *on $(X_h \times Y_h)$ if there is a closed subspace M of X, with finite codimension in X such that:*

$$\liminf_h \inf_{X_h \cap M} \sup_{Y_h} \mathcal{A} > 0, \tag{3.3.16}$$

In this situation, if we wish to be more precise we say that $\mathcal{A}$ is discrete LSF on $(X_h \times Y_h)$ with respect to (w.r.t.) M.

Corollary 3.3.9 *With the hypotheses of the theorem 3.3.7, if $\mathcal{A}$ is discrete LSF on $(X_h \times Y_h)$ w.r.t. M then so it is w.r.t. any extension of M whose intersection with $\ker \mathcal{A}$ is $\{0\}$. In particular if in addition $\mathcal{A}$ is injective then $\mathcal{A}$ satisfies a uniform discrete Inf-Sup condition on $X_h \times Y_h$ in the sense of Babuska for small enough parameters h.*

3.3.3 Error control of discrete LSF operators

The following property of discrete LSF operators will be important to us:

Theorem 3.3.10 *Let X and Y be two reflexive Banach spaces, and $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ be LSF. Let (X_h) and (Y_h) be approximating families of closed subspaces of X and Y. If $\mathcal{A}$ is discrete LSF on $(X_h \times Y_h)$, then there is $C > 0$, such that for all $\epsilon > 0$ there is $h_\epsilon > 0$ such that for all $h < h_\epsilon$ and all $u \in X_h$:*

$$\sup_Y \mathcal{A}u \;\leq\; C \sup_{Y_h} \mathcal{A}u \;+\; \epsilon \|u\|. \tag{3.3.17}$$

–Proof : Let N be the kernel of $\mathcal{A}$ on X and let M be a closed supplementary of N in X such that $\mathcal{A}$ is discrete LSF w.r.t. M. Let P be the projector with range M and kernel N, and let P_h be projectors as in Lemma 3.3.2. Pick $\alpha > 0$ and h_0 such that for all $h < h_0$, X_h is stable under P_h and :

$$\inf_{X_h} \sup_{Y_h} \mathcal{A} \geq \alpha. \tag{3.3.18}$$

Remark first that for all $u \in X$:

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}Pu. \tag{3.3.19}$$

In particular :

$$\sup_{Y} \mathcal{A}u = \sup_{Y} \mathcal{A}Pu \leq \|\mathcal{A}\| \, \|Pu\|. \tag{3.3.20}$$

Moreover :

$$\|Pu\| \leq \|P_h u\| + \|P - P_h\| \, \|u\|, \tag{3.3.21}$$

and if $u \in X_h$ and $h < h_0$:

$$\|P_h u\| \leq \alpha^{-1} \sup_{Y_h} \mathcal{A}P_h u, \tag{3.3.22}$$

and :

$$\sup_{Y_h} \mathcal{A}P_h u \leq \sup_{Y_h} \mathcal{A}u + \|\mathcal{A}\| \, \|P - P_h\| \, \|u\|. \tag{3.3.23}$$

All in all, if $u \in X_h$ and $h < h_0$:

$$\sup_{Y} \mathcal{A}u \;\leq\; \alpha^{-1}\|\mathcal{A}\| \sup_{Y_h} \mathcal{A}u \;+\; \|\mathcal{A}\|(1 + \alpha^{-1}\|\mathcal{A}\|)\|P - P_h\| \, \|u\|. \tag{3.3.24}$$

The theorem follows. □

Remark 3.3.11 *Equation 3.3.24 together with the construction of projectors P_h shown in point 1 of the proof of Lemma 3.3.2, yield rather explicit bounds on the constant C and the threshold h_ϵ appearing in the theorem.*

In particular under the hypotheses of the theorem, $\mathcal{A}$ has the following property :

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \exists h_0 > 0 \; \forall h < h_0 \; \forall u \in X_h \\ &(\sup_{Y_h} \mathcal{A}u \leq \delta \|u\|) \Rightarrow (\sup_{Y} \mathcal{A}u \leq \epsilon \|u\|). \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

In other words, in a sense, small discrete residual error indicates small continuous residual error. This property is easily extended to hold uniformly for some families of operators, as follows :

Corollary 3.3.12 *Let X and Y be two reflexive Banach spaces, and $\mathfrak{A}$ be a compact subset of* $\mathrm{LSF}(X, Y^\star)$ *(in the norm topology). Let (X_h) and (Y_h) be approximating families of closed subspaces of X and Y. If all $\mathcal{A}$ in $\mathfrak{A}$ are discrete LSF on $(X_h \times Y_h)$, then:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists h_0 > 0\ \forall h < h_0\ \forall u \in X_h\ \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{A}$$
$$(\sup_{Y_h} \mathcal{A}u \leq \delta \|u\|) \Rightarrow (\sup_{Y} \mathcal{A}u \leq \epsilon \|u\|). \tag{3.3.26}$$

–Proof : Choose a $\epsilon > 0$. For each $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ choose a $\delta(\mathcal{A})$ and a $h_0(\mathcal{A})$ so that 3.3.25 holds for $\mathcal{A}$ relatively to $\epsilon/2$.

The family of balls with center $\mathcal{A}$ and radius $\min\{\delta(\mathcal{A}), \epsilon\}/2$, for $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, covers $\mathfrak{A}$, so we can extract a finite subcover indexed by, say $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$.

Put $\delta = \min_i \delta(\mathcal{A}_i)/2$ and $h_0 = \min_i h_0(\mathcal{A}_i)$. Take $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ and choose i so that $\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_i\|$ is less than both $\delta(\mathcal{A}_i)/2$ and $\epsilon/2$.

For any $h < h_0$ and any $u \in X_h$ we have: If $\sup_{Y_h} \mathcal{A}u \leq \delta\|u\|$, then $\sup_{Y_h} \mathcal{A}u \leq (\delta(\mathcal{A}_i)/2)\|u\|$, so $\sup_{Y_h} \mathcal{A}_i u \leq \delta(\mathcal{A}_i)\|u\|$. This implies $\sup_Y \mathcal{A}_i u \leq (\epsilon/2)\|u\|$, and hence $\sup_Y \mathcal{A}u \leq \epsilon\|u\|$. □

3.3.4 Compact perturbations of discrete LSF operators

Theorem 3.3.13 *Let X and Y be two reflexive Banach spaces, and $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ be continuous and have closed range. Let $\mathcal{B} : X \to Y^\star$ be compact. Let (X_h) and (Y_h) be families of closed subspaces of X and Y. Suppose (Y_h) is approximating.*

Suppose furthermore that M_0 is a closed subspace of X that verifies:

$$\liminf_h \inf_{X_h \cap M_0} \sup_{Y_h} \mathcal{A} > 0. \tag{3.3.27}$$

Let N_1 be the kernel of $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ restricted to M_0, and suppose it has a closed supplementary M_1 in M_0 (i.e. $M_0 = M_1 \oplus N_1$). Then:

$$\liminf_h \inf_{X_h \cap M_1} \sup_{Y_h} \mathcal{A} + \mathcal{B} > 0. \tag{3.3.28}$$

–Proof : If not let (u_n), (h_n) be sequences such that:

$$u_n \in X_{h_n} \cap M_1, \quad \|u_n\| = 1, \quad \lim_n h_n = 0, \quad \lim_n \sup_{Y_{h_n}} (\mathcal{A} + \mathcal{B})u_n = 0. \tag{3.3.29}$$

Since X is reflexive, modulo extraction, we can also suppose that (u_n) converges weakly to some $u_0 \in M_1$. Since (Y_{h_n}) is approximating we have:

$$\forall v \in Y \quad \lim_n ((\mathcal{A} + \mathcal{B})u_n)(v) = 0. \tag{3.3.30}$$

Therefore, for any continuous linear form $l \in X^\star$ that vanishes on $\ker(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ we have:

$$\lim_n l(u_n) = 0. \tag{3.3.31}$$

Hence $u_0 \in \ker(\mathcal{A}+\mathcal{B})$, so $u_0 = 0$. Since $\mathcal{B}$ is compact, $(\mathcal{B}u_n)$ converges in norm to 0. One obtains a contradiction using the discrete Inf-Sup estimate for $\mathcal{A}$ on $((X_h \cap M_0) \times Y_h)$. □

Corollary 3.3.14 *With the hypotheses of the above theorem 3.3.13, if $\mathcal{A}$ is LSF and discrete LSF on $(X_h \times Y_h)$ (w.r.t. to M) then so is $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ (w.r.t. any supplementary of* $\ker \mathcal{A}+\mathcal{B}$ *in M) .*

Example 3.3.15 *If X is a Hilbert space and $\mathcal{A} : X \to X^\star$ is continuous and satisfies a Gårding inequality then $\mathcal{A}$ is discrete LSF on any approximating family of conj.-stable and closed subspaces (w.r.t. any supplementary of* $\ker \mathcal{A}$*).*

3.3.5 Extensions to quasi-conforming Galerkin approximations

Definition 3.3.16 *Let X be a Banach space and X_0 a closed subspace. Let (X_h) be a family of closed subspaces of X. We say that:*

1. *(X_h) is* approximating *in X_0 if:*

$$\forall u \in X_0 \quad \lim_h \inf_{u' \in X_h} \|u - u'\| = 0; \tag{3.3.32}$$

2. *(X_h) is* quasi-conforming *in X_0 if:*

$$\lim_h \sup_{u \in X_h} \inf_{u' \in X_0} \|u - u'\|/\|u\| = 0. \tag{3.3.33}$$

Suppose X_0 has a closed supplementary X_1 in X (one says that X_0 *splits*), and let $P : X \to X$ be the projection with range X_0 and kernel X_1. For all $u \in X$ one has:

$$\forall u' \in X_0 \quad \|u - Pu\| = \|(u - u') - (Pu - u')\| = \|(u - u') - P(u - u')\|, \tag{3.3.34}$$

hence:

$$|\,\|u\| - \|Pu\|\,| \le \|u - Pu\| \le (1 + \|P\|)\|u\| \inf_{u' \in X_0} \|u - u'\|/\|u\|. \tag{3.3.35}$$

In particular if (X_h) is a family of closed subspaces which is quasi-conforming in X_0, then for sufficiently small h the spaces PX_h are closed in X_0 and P induces isomorphisms $X_h \to PX_h$ which are arbitrarily close in norm to the identity mapping on X_h ; also if in addition (X_h) is approximating in X_0 then so is (PX_h). The following lemma entails.

Lemma 3.3.17 *Let X and Y be Banach spaces and $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ be continuous. Let X_0 and Y_0 be closed subspaces of X and Y that split -yielding projectors P in X and Y as above- and $\mathcal{A}_0 : X_0 \to Y_0^\star$ be the map induced by $\mathcal{A}$. Let (X_h) and (Y_h) be families of closed subspaces of X and Y, which are quasi-conforming in X_0 and Y_0. For any closed M_0 in X_0, one has:*

$$\liminf_h \inf_{M_0 \cap PX_h} \sup_{PY_h} \mathcal{A}_0 = \liminf_h \inf_{(M_0 \oplus \ker P) \cap X_h} \sup_{Y_h} \mathcal{A}. \tag{3.3.36}$$

With this Lemma most results from the preceding sections carry over to the quasi-conforming setting in some form or another. However -as will be shown in the next section- the lemma is sufficient for our needs, so we will not develop this possibility here.

3.4 Inf-Sup estimates for the EFIE

3.4.1 Sufficient conditions for uniform Inf-Sup estimates

Lemma 3.4.1 *Let X be a Hilbert space and $X = V \oplus W$ an orthogonal splitting. Let (X_h) be an approximating family of closed subspaces. Put $W_h = W \cap X_h$, and $V_h = \{u \in X_h : u \perp W_h\}$. Then (V_h) is approximating in V, and if (V_h) is quasi-conforming in V then (W_h) is approximating in W.*

–Proof : Indeed the orthogonal projection P_h onto X_h maps V into V_h, therefore (V_h) is approximating. For any $w \in W$, put $P_h w = v_h + w_h$ with $v_h \in V_h$ and $w_h \in W_h$. We have :

$$\forall v' \in V \quad (v_h|v_h) = (v_h|P_h w) = (v_h|w) = (v_h - v'|w). \tag{3.4.1}$$

Hence :

$$\|v_h\|^2 \leq \|w\|^2 \sup_{v \in V_h} \inf_{v' \in V} \|v - v'\|/\|v\|, \tag{3.4.2}$$

and since :

$$\|w - w_h\| \leq \|w - P_h w\| + \|v_h\|, \tag{3.4.3}$$

it follows that if (V_h) is quasi-conforming in V, then $\|w - w_h\|$ tends to 0. □

Theorem 3.4.2 *Recall notations from subsection 3.2.4. Let (X_h) be an approximating family of closed and conj.-stable subspaces of X. If the right kernel of c on $W_h \times X_h$ is quasi-conforming in the right kernel of c on $W \times X$, then Θ is discrete LSF on $(W_h \times X_h) \times (W_h \times X_h)$, and $u \mapsto a(u, \cdot)$ is discrete LSF on $(X_h \times X_h)$.*

–Proof : We prove the result for Θ_0. Then the theorem follows for Θ by corollary 3.3.14, for $u \mapsto a_0(u, \cdot)$ by the equivalent splitting and for $u \mapsto a(u, \cdot)$ likewise.

Let V be the right kernel on c on $W \times X$. Let V_h be the right kernel of c on $W_h \times X_h$. By Theorem 3.2.2, Example 3.3.15 and Lemma 3.3.17 it follows that if N_0 is the kernel of a_0 on $V \times V$, we have, for some $\alpha_0 > 0$ and $h_0 > 0$:

$$\forall h < h_0 \qquad \inf_{N_0^\perp \cap V_h} \sup_{V_h} a_0 > \alpha_0, \tag{3.4.4}$$

where $N_0^\perp$ is the orthogonal of N_0 in X.

For any h, let $V_h^\perp$ be the orthogonal of V_h in X_h. Since c is the restriction of d, which induces a scalar product we can choose a $\gamma > 0$ such that :

$$\forall h \quad \gamma < \inf_{V_h^\perp} \sup_{W_h} c = \inf_{W_h} \sup_{V_h^\perp} c = \inf_{W_h} \sup_{X_h} c. \tag{3.4.5}$$

Choose $h < h_0$, $w \in W_h$, $v \in N_0^\perp \cap V_h$ and $u \in V_h^\perp$. Put $(g, f) = \Theta_0(w, u+v)$. Following Nicolaides, one checks that :

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq \gamma^{-1}(\|g\|_{W_h}), & (3.4.6)\\ \|v\| &\leq \alpha_0^{-1}(\|f\|_{X_h} + \|a_0\|\,\|u\|), & (3.4.7)\\ \|w\| &\leq \gamma^{-1}(\|f\|_{X_h} + \|a_0\|\,\|v\| + \|a_0\|\,\|u\|). & (3.4.8) \end{aligned}$$

Hence :

$$\begin{aligned} \|u+v\| &\leq \alpha_0^{-1}\|f\|_{X_h} + \gamma^{-1}(1+\alpha_0^{-1}\|a_0\|)\,\|g\|_{W_h}, & (3.4.9)\\ \|w\| &\leq \gamma^{-1}(1+\alpha_0^{-1}\|a_0\|)\,(\|f\|_{X_h} + \gamma^{-1}\|a_0\|\,\|g\|_{W_h}). & (3.4.10) \end{aligned}$$

Since $(N_0^\perp \cap V_h) + V_h^\perp$ is uniformly close to $N_0^\perp \cap X_h$, it follows that :

$$\liminf_h \inf_{W_h \times (N_0^\perp \cap X_h)} \sup_{W_h \times X_h} \Theta_0 > 0. \tag{3.4.11}$$

Considering that W and X are orthogonal subspaces of the product space, the theorem obtains. □

We will give some explicit examples of such Galerkin spaces in the next sections.

Remark 3.4.3 *Suppose for the moment that the hypotheses of the theorem is verified, so that for* any *non-zero wavenumber k the associated bilinear form a_k is discrete LSF on $(X_h \times X_h)$. Let I be a compact interval of positive reals (which might very well contain resonant wave numbers). Since the map $k \mapsto a_k$ is continuous, it maps I to a compact set, and we can apply corollary 3.3.12, which we express in terms of sequences :*

Suppose we have for each integer n, a wavenumber $k_n \in I$, a discretization parameter h_n and a current $u_n \in X_{h_n}$, such that (h_n) tends to 0 and :

$$\sup_{u' \in X_{h_n}} \frac{|a_{k_n}(u_n, u')|}{\|u'\|_{-1/2}} = o(\|u_n\|_{-1/2}). \tag{3.4.12}$$

Then we have (the constant C stems from the standard duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$ between $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ and $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ and is of course independent of the wavenumber) :

$$\|A_{k_n} u_n\|_{\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \sup_{u' \in X} \frac{|a_{k_n}(u_n, u')|}{\|u'\|_{-1/2}} = o(\|u_n\|_{-1/2}). \tag{3.4.13}$$

From the uniform continuity of the solution operator for the exterior problem on I, we deduce that the electromagnetic field generated by u_n is negligible compared with $\|u_n\|_{-1/2}$. More precisely if (E_n, H_n) is given by:

$$E_n = (1 - (1/k_n^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div})\Phi_{k_n} u_n, \quad H_n = 1/(ik_n Z)\,\mathrm{curl}\,\Phi_{k_n} u_n, \tag{3.4.14}$$

then for any R:

$$\|E_n\|_{\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega_+ \cap B_R)} = o(\|u_n\|_{-1/2}). \tag{3.4.15}$$

and a similar estimate holds for H_n. Expressed differently: if we have bounded *currents producing small* discrete *residual errors, then the near-fields they radiate are also small. The far-field pattern associated with an exterior electromagnetic field depends continuously upon the boundary data, so it is also negligible compared with $\|u_n\|_{-1/2}$. Also if one looks at a single wave-number of interest (for instance a resonant one) then by remark 3.3.11 one can exhibit rather explicit estimates.*

3.4.2 Sufficient conditions in integer exponent Sobolev spaces

The preceding sufficient conditions for the good behavior of the EFIE were formulated in half-integer Sobolev norms. We prove here that these condition hold under some hypotheses formulated in the more familiar integer Sobolev norms.

Recall notations from subsection 3.2.4. Consider the following hypotheses for a family of spaces X_h:

(H0) The spaces X_h are finite-dimensional conj.-stable subspaces of $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$.

(H1) There is $C > 0$ such that for all $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{div}}(\Gamma)$:

$$\inf_{u' \in X_h} \|u - u'\|_0 \leq Ch\|u\|_1. \tag{3.4.16}$$

(H2) There is $C > 0$ such that for all $u \in X_h$, $\|u\|_0 \leq Ch^{-1}\|u\|_{-1}$.

(H3) There is $C > 0$ such that for all $u \in X_h$ if:

$$\forall w \in W_h \quad \langle u, w \rangle = 0, \tag{3.4.17}$$

then the solution p of:

$$p \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \text{and} \quad \Delta p = \mathrm{div}\, u, \tag{3.4.18}$$

satisfies:

$$|u - \mathrm{grad}\, p|_0 \leq Ch|\,\mathrm{div}\, u|_0. \tag{3.4.19}$$

Notice that by (H3) we have the usual Inf-Sup estimate: there is $C > 0$ such that:

$$\inf_{q \in \operatorname{div} X_h} \sup_{u \in X_h} \frac{|\langle q, \operatorname{div} u \rangle|}{|q|_0 \|u\|_0} \geq \frac{1}{C}. \tag{3.4.20}$$

Let $\Omega_h : \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}} \to X_h$ map $u_0 \in \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}$ to $u \in X_h$, solution of:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in X_h \\ q \in \operatorname{div} X_h \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \forall u' \in X_h & \langle u, u' \rangle + \langle q, \operatorname{div} u' \rangle & = \langle u_0, u' \rangle \\ \forall q' \in \operatorname{div} X_h & \langle q', \operatorname{div} u \rangle & = \langle q', \operatorname{div} u_0 \rangle \end{array} \right. \tag{3.4.21}$$

Under the above hypotheses one has an estimate of the form, for $u_0 \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{div}}$:

$$\|\Omega_h u_0 - u_0\|_0 \leq Ch \|u_0\|_1. \tag{3.4.22}$$

Moreover Ω_h maps divergence-free fields to divergence-free fields.

We denote by V the right kernel of c on $W \times X$, and by V_h the one on $W_h \times X_h$.

Theorem 3.4.4 *Under the above hypotheses (V_h) is quasi-conforming in V. More precisely there is C such that for all h and all $v \in V_h$, if p solves:*

$$p \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \textit{and} \quad \Delta p = \operatorname{div} v, \tag{3.4.23}$$

and w solves:

$$w \in W \quad \forall w' \in W \quad d(w, w') = -d(\operatorname{grad} p, w'), \tag{3.4.24}$$

then $\operatorname{grad} p + w \in V$ *and:*

$$\|v - (\operatorname{grad} p + w)\|_{-1/2} \leq Ch^{1/2} \|v\|_{-1/2}. \tag{3.4.25}$$

–Proof : Put $v = v_0 + v_1$ with $v_0 \in W_h$ and $v_1 \in X_h$ such that $\forall w \in W_h \quad \langle w, v_1 \rangle = 0$. According to (H3) we have:

$$\|v_1 - \operatorname{grad} p\|_0 \leq Ch \|u\|_0. \tag{3.4.26}$$

So from (H2) we deduce:

$$\|v_1 - \operatorname{grad} p\|_{-1/2} \leq Ch^{1/2} \|u\|_{-1/2}. \tag{3.4.27}$$

We will use a regularity result that we state without proof. Let Λ be the operator on tangent fields that maps any u to a divergence free w such that

for all divergence free w' we have $d(w,w') = d(u,w')$. Then Λ is continuous $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)$.[2]

The field w is defined by $w = -\Lambda \operatorname{grad} p$. From the $\mathrm{H}^1_{\mathrm{T}}$ continuity of Λ, it follows that :

$$\|\Omega_h w - w\|_0 \leq Ch\|w\|_1 = Ch|w|_1 \leq Ch|\operatorname{grad} p|_1 \leq Ch\|u\|_0. \tag{3.4.28}$$

Hence :

$$\|\Omega_h w - w\|_{-1/2} \leq Ch^{1/2}\|u\|_{-1/2}. \tag{3.4.29}$$

But for all $w' \in W_h$:

$$d(\Omega_h w - v_0, w') = d(\Omega_h w + v_1, w') = d((\Omega_h w - w) + (v_1 - \operatorname{grad} p), w'). \tag{3.4.30}$$

The absolute value of this last expression is bounded by :

$$C(\|\Omega_h w - w\|_{-1/2} + \|v_1 - \operatorname{grad}\phi\|_{-1/2})\|w'\|_{-1/2}. \tag{3.4.31}$$

Taking w' to be the conjugate of $\Omega_h w - v_0 \in W_h$ gives :

$$\|\Omega_h w - v_0\|_{-1/2} \leq Ch^{1/2}\|u\|_{-1/2}. \tag{3.4.32}$$

Combining equation (3.4.27) with (3.4.29) and (3.4.32) gives the theorem. □

3.4.3 Some well known spaces

Let $\wp$ be the orthogonal projection onto Γ, which is defined and smooth on a tubular neighborhood of Γ. Let $(\mathcal{T}_h)$ be a family of triangulations of Γ, where for all h the largest diameter of a triangle of $\mathcal{T}_h$ is h. We will always suppose that $(\mathcal{T}_h)$ has the minimum angle property. Let Γ_h be the affine polyhedron determined by $\mathcal{T}_h$, considered as a Lipschitz manifold. For small enough h, $\wp$ induces Lipschitz-isomorphisms $\Gamma_h \to \Gamma$, and we denote by Ξ_h the inverse mappings.

Fix a nonzero $m \in \mathbb{N}$. On Γ_h we consider the space $\mathsf{S}^0(\mathcal{T}_h)$ of continuous scalar functions whose restriction to any triangle is P^m (a polynomial of degree

2. This regularity result is comparable to the following more standard one. The pseudo-differential operator A defined by :

$$\langle A\varphi, \varphi'\rangle = \iint \frac{1}{|x-y|} \operatorname{rot}\varphi(x) \cdot \operatorname{rot}\varphi'(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

is an isomorphism of order 1, and the pseudo-differential operator B defined by :

$$\langle B\varphi, \varphi'\rangle = \iint \frac{1}{|x-y|} \operatorname{grad}\varphi(x) \cdot \operatorname{rot}\varphi'(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

is a morphism of order less that 1 (one can show that it's of order 0). The operator $A^{-1}B$ is therefore of order less than 0.

m), the space $\mathsf{S}^1(\mathcal{T}_h)$ of Raviart-Thomas $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}$ conforming vector fields of degree m, and the space $\mathsf{S}^2(\mathcal{T}_h)$ of scalar functions whose restriction to any triangle is P^{m-1}.

From these finite element spaces on Γ_h we deduce finite element spaces on Γ by the transport formulas:

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{S}^0_h & = & \{x \mapsto & p(\Xi_h(x)) : p \in \mathsf{S}^0(\mathcal{T}_h)\} \\ \mathsf{S}^1_h & = & \{x \mapsto & \operatorname{Jac}\Xi_h(h)\mathrm{D}\Xi_h(x)^{-1}u(\Xi_h(x)) : u \in \mathsf{S}^1(\mathcal{T}_h)\} \\ \mathsf{S}^2_h & = & \{x \mapsto & \operatorname{Jac}\Xi_h(x)q(\Xi_h(x)) : q \in \mathsf{S}^2(\mathcal{T}_h)\} \end{array} . \tag{3.4.33}$$

These transport formulas were chosen to make the following diagram commute. The horizontal arrows are the differential operators rot and div, whereas the vertical ones are the above transport formulas.

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{S}^0(\mathcal{T}_h) & \to & \mathsf{S}^1(\mathcal{T}_h) & \to & \mathsf{S}^2(\mathcal{T}_h) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{S}^0_h & \to & \mathsf{S}^1_h & \to & \mathsf{S}^2_h \end{array} \tag{3.4.34}$$

If we wish to be precise about the order m we use superscripts $\mathsf{S}^{0,m}_h$, $\mathsf{S}^{1,m}_h$ and $\mathsf{S}^{2,m-1}_h$.

It is well known that (S^1_h) satisfies (H1). If the mesh is quasi-uniform then (H2) also holds. The only remaining point is (H3). This property has been found to be very important in the study of eigenvalue problems by mixed formulations, see in particular Boffi et al. [17], and Demkowicz et al. [36]. This is because it implies a discrete compactness result which in the three-dimensional setting is due to Kikuchi [51]. Since this property is equally important to the present problem we include a short proof of it. It goes without saying that the absence of a boundary on Γ greatly simplifies our task. Ramifications can be found in Boffi [15].

The usual degrees of freedom pertaining to $\mathcal{T}_h$ on Γ_h can be transported to the curved triangles $\Xi_h^{-1}(T)$ for $T \in \mathcal{T}_h$. With these, an interpolation operator Π_h onto S^1_h can be defined on spaces with slightly stronger regularity than $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$; see Brezzi-Fortin [119] p. 125 and Roberts-Thomas [68] p. 549 for two different variants in the planar setting. We will use the following properties of this interpolation operator:

- Π_h is a projector onto S^1_h defined on some extension of $\mathrm{H}^1_{\mathrm{T}}(\Gamma) + \mathsf{S}^1_h$;
- Π_h maps divergence-free fields to divergence-free fields;
- $\exists C > 0\ \forall u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{T}}(\Gamma)\ \forall h \quad |u - \Pi_h u|_0 \leq Ch|u|_1$.

Theorem 3.4.5 *For any regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)$, (S^1_h) satisfies (H3), i.e. with $X_h = \mathsf{S}^1_h$, there is $C > 0$ such that for all $u \in X_h$ if:*

$$\forall w \in W_h \quad \langle u, w\rangle = 0, \tag{3.4.35}$$

then the solution p of:

$$p \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \Delta p = \operatorname{div} u, \tag{3.4.36}$$

satisfies :

$$|u - \operatorname{grad} p|_0 \leq Ch|\operatorname{div} u|_0. \tag{3.4.37}$$

–Proof : Remark that $\operatorname{div}(\operatorname{grad} p - u) = 0$, so :

$$\operatorname{div}(\Pi_h \operatorname{grad} p - u) = \operatorname{div} \Pi_h(\operatorname{grad} p - u) = 0. \tag{3.4.38}$$

Put $\tilde{u} = \Pi_h \operatorname{grad} p$. The approximation property of Π_h and the regularity of the Laplacian yield :

$$|\tilde{u} - \operatorname{grad} p|_0 \leq Ch|\operatorname{grad} p|_1 \leq Ch|\operatorname{div} u|_0. \tag{3.4.39}$$

Moreover for any divergence-free $u' \in X_h$ we have :

$$\langle \tilde{u} - u, u' \rangle = \langle \tilde{u}, u' \rangle = \langle \tilde{u} - \operatorname{grad} p, u' \rangle. \tag{3.4.40}$$

Applying this identity with u' the conjugate of $\tilde{u} - u$ gives :

$$|\tilde{u} - u|_0 \leq |\tilde{u} - \operatorname{grad} p|_0 \leq Ch|\operatorname{div} u|_0. \tag{3.4.41}$$

Therefore we have :

$$|u - \operatorname{grad} p|_0 \leq |u - \tilde{u}|_0 + |\tilde{u} - \operatorname{grad} p|_0 \leq Ch|\operatorname{div} u|_0. \tag{3.4.42}$$

□

3.5 Back to the Helmholtz decomposition

In this section we will use the notations of subsection 3.2.4 concerning a, X_h and W_h, but we suppose that the X_h are finite dimensional and lie in $\mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ and *unlike* in subsection 3.4.2 we define V_h by :

$$V_h = \{u \in X_h \ : \ \forall w \in W_h \quad \langle u, w \rangle = 0\}. \tag{3.5.1}$$

We also put :

$$V = \operatorname{grad} \mathrm{H}^{3/2}(\Gamma). \tag{3.5.2}$$

The Helmholtz decomposition in X is then the assertion that V and W are closed in X and $X = V \oplus W$. Suppose the spaces X_h are conj.-stable. Then we have the L^2 orthogonal splitting $X_h = V_h \oplus W_h$. For all $l \in X_h^\star$, u solves :

$$u \in X_h \quad \forall u' \in X_h \quad a(u, u') = l(u'), \tag{3.5.3}$$

if and only if $u = v + w$, with (v, w) solving :

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in V_h \\ w \in W_h \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \forall v' \in V_h & a(v, v') + a(w, v') & = \ l(v') \\ \forall w' \in W_h & a(v, w') + a(w, w') & = \ l(w') \end{array} \right. . \tag{3.5.4}$$

Since V_h is not a subspace of V, this formulation should be seen as a non-conforming Helmholtz decomposition.

Lemma 3.5.1 *Under hypotheses (H2) and (H3) the family of subspaces (V_h) of X is quasi-conforming in V.*

–*Proof :* Indeed we have (with the notations of (H3)):

$$\|u - \operatorname{grad} p\|_{-1/2} \leq Ch^{1/2}\|u\|_{-1/2} \tag{3.5.5}$$

□

One can deduce the discrete LSF property of the EFIE from this fact. More generally for systems that can be rewritten as a compact coupling of two systems satisfying Gårding inequalities, discretized on quasi-conforming approximating Galerkin spaces, one has a uniform discrete Inf-Sup condition.

•

We initially introduced explicit discrete Helmholtz decompositions as a key ingredient to precondition the EFIE in Christiansen-Nédélec [135] (see also patent [132]). There we also outlined its use both in the convergence analysis of the EFIE and the justification of the preconditioning technique on smooth surfaces. As it turned out the convergence analysis could be extended to polyhedral surfaces and screens and we refer to Buffa-Christiansen [130] for more on this.

Chapitre 4

The EFIE on Lipschitz screens

Abstract : We use the integral equation approach to study electromagnetic scattering by perfectly conducting (possibly non-orientable) Lipschitz screens. The well-posedness of the electric field integral equation is derived using the Helmholtz decomposition. The Galerkin method for this problem is analysed in a general setting and optimal error bounds are proved for conforming finite elements in natural norms.

This chapter was written in collaboration with Annalisa Buffa. I also thank Christoph Schwab for having invited me to the SAM at ETH in Zürich beginning of May 2001, where large parts of this chapter were written.

Introduction

The scattering of time-harmonic electromagnetic waves in the three-dimensional Euclidean space $\mathbb{E}$, by a perfect conductor, is a model for many physical phenomena of practical interest e.g. radar surveillance and telecommunications.

As is well-known, the use of the free-space Green's function reduces rather formally the problem of determining the electromagnetic field in the exterior domain, to that of solving integral equations on the boundary of the conductor, whose unknowns are tangent vector fields.

Among the many possible integral equations, the one known as the electric field integral equation (EFIE) was studied in a variational setting and discretized with the Galerkin method on Raviart-Thomas (RT) finite element (FE) spaces by Bendali [10]. We refer to this discretization as EFIE-B. While a numerical analysis was provided only for scatterers with smooth boundaries, excellent accuracy was observed also for more complicated geometries, and in particular for the polyhedral surfaces that occur in industrial applications [9].

In several situations the scatterer is a thin object, for which the thickness is small compared with the wavelength and other characteristic lengths. It is then convenient to model it by a sub-manifold with boundary of $\mathbb{E}$, called a *screen*. The EFIE-B on screens, with finite elements whose outward flux is zero (through the boundary of the screen), is known to perform well but, to the best of our knowledge, no numerical analysis is available, even on smooth ones.

Abboud and Starling [1][2] studied the EFIE on smooth screens using techniques from the theory of pseudo-differential operators (ΨDO), much in the spirit of [10]. They relied also on a method developed by Stephan [73] (for scalar problems) which consists in considering the screen as part of the boundary of some fictitious domain Ω.

In this paper we provide an analysis of the EFIE on Lipschitz screens which may not be orientable. Thus we can use neither the above mentioned ΨDO techniques, nor Stephan's method. Moreover we study the convergence of the EFIE-B. Our approach is based on several progresses made in recent years, and aims to explain the observed robustness of the EFIE-B.

A key ingredient to the approach we present here is the Helmholtz decomposition (HD) of tangent fields on sub-manifolds of $\mathbb{E}$. Its use in the analysis of integral equations was emphasized in Nédélec's lecture notes, now translated [116]. For surfaces that are boundaries $\partial\Omega$ of domains Ω (we shall say *exact* surfaces) and that are moreover smooth, the HD was applied to the exterior electromagnetic scattering problem by DeLaBourdonnaye [18]. More recently discrete HDs were used to precondition the EFIE and to improve the convergence analysis of the EFIE-B. In particular, on smooth boundaries, proof of quasi-optimal convergence at non-resonant frequencies was outlined in [135] and detailed in Christiansen [131], for classes of Galerkin spaces that include RT FE, as well as some non-local subspaces.

On the other hand the understanding of Maxwell's equations on non-smooth domains Ω has recently accomplished decisive progress. In particular Costabel and Dauge [33] have described the singularities that arise at corners and edges in polyhedral domains and also for screens. Traces of $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)$ were characterized on Lipschitz-domains by Tartar [77] among 3D vectorfields on $\partial\Omega$, extending results for smooth domains obtained by Paquet [64]. Buffa et al. [24][26] have developed a functional framework for the study of such trace spaces on non-smooth boundaries. In particular differential operators and HDs on $\partial\Omega$ were studied in a Sobolev setting, and traces of $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)$ were characterized in spaces of vector fields that are in a sense tangent. This lead to a justification of the EFIE on non-smooth boundaries and a new weak discretization of it [25].

As pointed out in [131] and to a larger extent by Hiptmair and Schwab [44], estimates on discrete analogues of HDs have been used extensively for the analysis of 2D and 3D multigrid methods and eigenvalue problems free of spurious modes (we refer to [131] and [44] for references on this). On smooth surfaces a rather elementary estimate is sufficient to conclude [131]. Adapting

more sophisticated techniques, developed for 3D $H_{curl}(\Omega)$ problems, to the above mentioned functional framework, [44] provided the first convergence analysis of the EFIE-B on boundaries of polyhedral domains.

The present study is largely based on [131][25][44]. But since non-orientable screens are not part of the boundary of any domain and since also the boundary of the screen needs to be handled carefully some theory needs to be developed. This is done much in the spirit of [26], in the full generality of a Lipschitz screen denoted Γ throughout (for a precise definition see below).

We would like to have a general and flexible definition of the divergence of tangent fields, and the gradient of scalar fields on Γ. The natural framework for this is the theory of currents, which are to (compactly supported and smooth) differential forms on (open subsets of) $\mathbb{E}$, what distributions are to (compactly supported and smooth) functions. We refer to such classics as Whitney [111], Federer [99] and DeRham [107]. But more specifically we will need some Sobolev spaces of currents with support in $\overline{\Gamma}$ which arise as trace or jump spaces of Sobolev spaces on $\mathbb{E}$ and $\mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma}$.

Therefore we define differential operators in terms of currents and then study their action on various Sobolev spaces. The general idea is to define differential operators on Γ via differential operators on $\mathbb{E}$. This is done first on traces of smooth fields. Then one extends these definitions to spaces on Γ with weaker regularity requirements, by dualization (integration by parts) and density arguments. When studying Sobolev spaces we also need to use local charts.

We provide just enough machinery to be able to reformulate the electromagnetic scattering problem as an integral equation on Γ, in a variational setting. The integral representation allows then the analysis of the solvability of the original scattering problem in a very natural way, making up the first part of the paper.

The second part of the paper is devoted to the numerical approximation under the further restriction that Γ is piecewise regular (polyhedral). As in [131] we give general conditions on the Galerkin spaces under which the Galerkin method applied to the EFIE yields quasi-optimal convergence. Then, drawing on [25][44], we prove that these conditions are satisfied in the natural finite element setting, i.e. for Raviart-Thomas and Brezzi-Douglas-Marini finite elements of any order. Finally, optimal rates of convergence in natural norms are obtained.

Notice that the theory of layer potentials for harmonic boundary value problems on exact Lipschitz surfaces has been extended to differential forms of arbitrary degree in arbitrary dimension, see Mitrea-Mitrea-Taylor [54]. However the authors emphasize second kind integral equations and consider boundary values with L^2 regularity. This is not a natural framework for the variational formulation of the first kind integral equations such as the EFIE.

The outline of the paper is the following: In section 1 we give a precise definition of a Lipshitz screen, study integration on it and corresponding inte-

gration by part formulas in $\mathbb{E}$, by which differential operators can be defined on Γ. In section 2 the mapping properties of trace operators and differential operators on Γ are studied in a Sobolev setting. In particular the space of jumps of $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma})$ is characterized and HDs are studied. In section 3 the EFIE is analysed and the exterior scattering problem is solved using it. Finally section 4 is devoted to the numerical approximation by conforming finite elements and to the error analysis.

4.1 Integration and differential operators on surfaces

4.1.1 Locally Lipschitz graph sub-manifolds with boundary

Let Γ be a subset of an Euclidean three-dimensional space $\mathbb{E}$ ($\mathbb{E} \approx \mathbb{R}^3$). We suppose that $\overline{\Gamma}$ is a compact two-dimensional Lipschitz-class sub-manifold with boundary of $\mathbb{E}$. The boundary of $\overline{\Gamma}$ is denoted by $\partial\Gamma$, and we require also that $\Gamma = \overline{\Gamma} \setminus \partial\Gamma$ (i.e. Γ is "open"). In addition we impose the stronger condition that Γ and $\partial\Gamma$ can be described locally by graphs. More precisely we suppose that there is a finite set of open cubes, whose union contains $\overline{\Gamma}$ and such that for each such cube C, denoting by a the length of its sides, the following holds:

- If C contains a point in $\partial\Gamma$, there is an origin and an orthonormal basis of $\mathbb{E}$ in which the cube C can be identified with $]0,a[^3$ and there are uniformly Lipschitz continuous functions $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, and $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, with values in $]0,a[$ such that:

$$\Gamma \cap C = \{(x,y,z) \in C \ : \ y < \psi(x), \quad z = \phi(x,y)\} \tag{4.1.1}$$
$$\partial\Gamma \cap C = \{(x,y,z) \in C \ : \ y = \psi(x), \quad z = \phi(x,y)\} \tag{4.1.2}$$

  In words, in the cube C, Γ is the graph of ϕ above the subgraph of ψ. Notice that the map $(x,y,z) \mapsto (x, y+\psi(x), z+\phi(x, y+\psi(x)))$ determines a Lipschitz-isomorphism between an open subset of $\mathbb{R}^3$ and C, which, loosely speaking, straightens out Γ and $\partial\Gamma$.
- If C contains no boundary point, Γ is simply the graph above $]0,a[^2$ of some uniformly Lipschitz continuous function $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, with values in $]0,a[$.

Notice that we use a covering in which each cube either does not intersect the boundary $\partial\Gamma$, or contains a portion of the boundary which is *connected* (and even Lipschitz-isomorphic to an open segment). For briefness we shall say that $\overline{\Gamma}$ is a (two-dimensional) *locally Lipschitz graph* (LLG) sub-manifold (with boundary) of $\mathbb{E}$.

One shows that for any covering of $\overline{\Gamma}$ by open subsets of $\mathbb{E}$ there is a family of open cubes of the above described type, which is subordinated to this covering. Moreover for such a family (C_i) of cubes one can choose a family (θ_i) of smooth

functions $\mathbb{E} \to \mathbb{R}$ with values in $[0,1]$, such that θ_i has support in C_i, and such that there is a neighborhood V of $\overline{\Gamma}$ in $\mathbb{E}$ such that for all $x \in V$, $\sum_i \theta_i(x) = 1$. The restrictions of the θ_i to $\overline{\Gamma}$ then form a partition of unity of $\overline{\Gamma}$ by Lipschitz continuous functions.

We denote by $\mathrm{Lip}(\Gamma)$ (resp. $\mathrm{Lip}(\mathbb{E})$) the space of Lipschitz continuous functions on Γ (resp. $\mathbb{E}$). It is a Banach space when equipped with the standard norm.

Notice that we do not require that Γ be orientable. For instance Γ could be a Möbius strip.

4.1.2 Integration on Γ

Recall that on Γ there is a standard measure, inherited by the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^2$. It is uniquely determined by the property that for any Lipschitz isomorphism $\Phi : U \to V$ with U open in $\mathbb{R}^2$ and V open in Γ and any continuous function u on Γ with support in V one has:

$$\int_\Gamma u = \int_U u \circ \Phi \,\mathrm{Jac}\,\Phi, \quad \mathrm{Jac}\,\Phi = |\det(\partial_i \Phi \cdot \partial_j \Phi)_{ij}|^{1/2} \in \mathrm{L}^\infty(U). \tag{4.1.3}$$

With respect to this measure we consider the spaces $\mathrm{L}^p(\Gamma)$ and $\mathrm{L}^p(\Gamma;\mathbb{E})$, for $1 \le p \le \infty$. These spaces are considered as vector spaces over $\mathbb{C}$ by standard complexification. The associated complex conjugations are denoted $u \mapsto \overline{u}$.

Though there is no canonical normal vector-field on Γ one can split elements of $\mathrm{L}^p(\Gamma;\mathbb{E})$ into the sum of a tangential and a normal vector-field as follows: Pick an $u \in \mathrm{L}^p(\Gamma;\mathbb{E})$. Consider a finite covering of Γ by open *orientable* subsets of Γ. For each of its elements V one can construct an oriented unit length normal $n_V \in \mathrm{L}^\infty(V;\mathbb{E})$ and consider the field:

$$\pi_{\mathrm{T}}(V,n_V)u : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{E}_{\mathbb{C}} \\ x & \mapsto & u(x) - (u(x)\cdot n_V(x))n_V(x) \end{array} \right. . \tag{4.1.4}$$

On the intersection of two such open sets, the definitions coincide, independently of the choice of normals, giving rise to an element of $\mathrm{L}^p(\Gamma;\mathbb{E})$ which does not depend on the choice of covering[1]. We denote this element by $\pi_{\mathrm{T}} u$.

We have thus defined a map π_{T} and one shows that π_{T} is a continuous projector $\mathrm{L}^p(\Gamma;\mathbb{E}) \to \mathrm{L}^p(\Gamma;\mathbb{E})$, with norm 1. We denote by $\mathrm{L}^p_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ its range and $\mathrm{L}^p_{\mathrm{n}}(\Gamma)$ its kernel. Thus we have the direct sum:

$$\mathrm{L}^p(\Gamma;\mathbb{E}) = \mathrm{L}^p_{\mathrm{T}}(\Gamma) \oplus \mathrm{L}^p_{\mathrm{n}}(\Gamma). \tag{4.1.5}$$

In the case $p = 2$, π_{T} is an orthogonal projector and the above sum is orthogonal.

1. Sustaining this type of definition is the fact that the functor L^p determines a sheaf (of Banach spaces) on Γ.

4.1.3 Traces on Γ

We denote by $\mathscr{D}(\mathbb{E})$ (resp. $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})$) the space of smooth compactly supported scalar (resp. vector) fields on $\mathbb{E}$. For $u \in \mathscr{D}(\mathbb{E})$ and $x \in \overline{\Gamma}$, we put:

$$(\gamma u)(x) = u(x). \tag{4.1.6}$$

This defines a continuous linear map $\gamma : \mathscr{D}(\mathbb{E}) \to \mathrm{L}^\infty(\overline{\Gamma})$, called *trace operator*, and we use the notation $\mathscr{D}(\overline{\Gamma}) = \gamma(\mathscr{D}(\mathbb{E}))$. We will also use the spaces:

$$\mathscr{D}(\Gamma) = \{u \in \mathscr{D}(\overline{\Gamma}) \ : \ \operatorname{supp} u \subset \Gamma\} \tag{4.1.7}$$

Notice that $u \in \mathscr{D}(\Gamma)$ if and only if $u = \gamma v$ for some $v \in \mathscr{D}(\mathbb{E})$ such that $\operatorname{supp} v \cap \partial\Gamma = \emptyset$. The space of such v can be identified with $\mathscr{D}(\mathbb{E} \setminus \partial\Gamma)$.

For $u \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})$ one can also consider its trace $(\gamma_{\mathbb{E}} u) \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma; \mathbb{E})$. We put $\gamma_{\mathrm{T}} = \pi_{\mathrm{T}} \circ \gamma_{\mathbb{E}}$. This defines a linear continuous map $\gamma_{\mathrm{T}} : \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E}) \to \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{T}}(\overline{\Gamma})$ called *tangential trace operator* and we use the notation $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\overline{\Gamma}) = \gamma_{\mathrm{T}}(\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E}))$. The space $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ is defined as above. In what follows by a slight abuse of notations we shall write $\gamma = \gamma_{\mathbb{E}}$ also on vector fields.

Proposition 4.1.1 *The space $\mathscr{D}(\Gamma)$ (resp. $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$) is dense in $\mathrm{L}^p(\Gamma)$ (resp. $\mathrm{L}^p_{\mathrm{T}}(\Gamma)$) for all $1 \leq p < +\infty$ (but not in general for $p = +\infty$).*

–Proof : Pick a $p < +\infty$. For the case of $\mathscr{D}(\Gamma)$, using a partition of unity one is reduced to consider functions on Γ with support in a cube of the above described type, for which the result is fairly standard (using for instance techniques from Nečas [106]).

It follows that $\gamma(\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})$ is dense in $\mathrm{L}^p(\Gamma; \mathbb{E})$. Since $\pi_{\mathrm{T}} : \mathrm{L}^p(\Gamma; \mathbb{E}) \to \mathrm{L}^p_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ is continuous and surjective, the density of $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ in $\mathrm{L}^p_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ entails.

The fact that the result is not true for $p = +\infty$ is standard. □

4.1.4 Jumps on Γ

Let $\mathscr{D}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ denote the space of functions $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma})$ with bounded support in $\mathbb{E}$ and such that:

- u vanishes on a neighborhood of $\partial\Gamma$;
- for any $x \in \Gamma$ there is $r > 0$ such that $B(x, r) \setminus \Gamma$ has exactly two connected components A and B such that $u|_A$ and $u|_B$ both admit smooth compactly supported extensions to $\mathbb{E}$.

A crucial point is that if $u \in \mathscr{D}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ and $x \in \Gamma$, then with the above definitions the limits:

$$u_A(x) = \lim_{y \to x, y \in A} u(y), \quad u_B(x) = \lim_{y \to x, y \in B} u(y), \tag{4.1.8}$$

both exist but might very well be different.

The space $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ is defined similarly. It can be characterized as the space of vector fields u on $\mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma}$ such that for any linear form on $\mathbb{E}$, $l \circ u \in \mathscr{D}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$.

Dual (in a sense which will be detailed later on) to the definition of trace operators, we define jump operators as follows. For $u \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ and $x \in \Gamma$, choose $r > 0$ as above and denote by n_A (resp. n_B) the outward-pointing normal on $\Gamma \cap B(x,r)$ relatively to A (resp. B). Thus $n_A + n_B = 0$. Then put:

$$[\![u]\!]_{\mathrm{n}}(x) = u_A(x) \cdot n_A(x) + u_B(x) \cdot n_B(x), \tag{4.1.9}$$

and:

$$[\![u]\!]_{\times}(x) = u_A(x) \times n_A(x) + u_B(x) \times n_B(x). \tag{4.1.10}$$

These definitions do not depend on the local orientations, and define continuous operators $[\![\cdot]\!]_{\mathrm{n}} : \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E}) \to \mathrm{L}^{\infty}(\Gamma)$ and $[\![\cdot]\!]_{\times} : \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E}) \to \mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{\infty}(\Gamma)$. Indeed whatever the "right" topology on $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ is, the $\sup_{\mathbb{E}}$-norm is certainly continuous on it!

We put $\mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma) = [\![\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})]\!]_{\mathrm{n}}$ and $\mathscr{D}_{\times}(\Gamma) = [\![\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})]\!]_{\times}$. Similar to Proposition 4.1.1 we have:

Proposition 4.1.2 *The space $\mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma)$ (resp. $\mathscr{D}_{\times}(\Gamma)$) is dense in $\mathrm{L}^p(\Gamma)$ (resp. $\mathrm{L}_{\mathrm{T}}^p(\Gamma)$) for all $1 \leq p < +\infty$ (but not in general for $p = +\infty$).*

–Proof : (i) Define p' by $1/p + 1/p' = 1$. Suppose $u \in \mathrm{L}^{p'}(\Gamma)$ satisfies:

$$\forall u' \in \mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma) \quad \int_{\Gamma} uu' = 0. \tag{4.1.11}$$

We shall show that $u = 0$. To this aim, choose $x \in \Gamma$ and then $r > 0$ as above. Put $V = \Gamma \cap B(x,r)$. Choose $\eta \in \mathscr{D}_{\Gamma}(\mathbb{E})$ such that for some $\delta > 0$ we have for almost every $y \in V$, $\eta(y) \cdot n_A(y) \geq \delta$ (see for instance Grisvard [101]).

For any $v \in \mathscr{D}(\mathbb{E})$ such that $\operatorname{supp} v \subset B(x,r)$ there is a $w \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ such that w coincides with $v\eta$ on A, and is equal to 0 outside $A \cup \overline{\Gamma}$. Then we have:

$$0 = \int_{\Gamma} u[\![w]\!]_{\mathrm{n}} = \int_{V} uv\eta \cdot n_A \tag{4.1.12}$$

Since (essentially by the argument of Proposition 4.1.1) the traces of such v on V are dense in $\mathrm{L}^p(V)$ it follows that the element $u|_V(\eta \cdot n_A)$ of $\mathrm{L}^{p'}(V)$ is 0. Hence $u|_V = 0$. Now u being locally 0 it is globally 0. Since by the restriction that $p < +\infty$, $\mathrm{L}^p(\Gamma)' \approx \mathrm{L}^{p'}(\Gamma)$, this proves the density of $\mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma)$ in $\mathrm{L}^p(\Gamma)$.

(ii) The case of $\mathscr{D}_{\times}(\Gamma)$ is proved using similar techniques [2]. Keep the above definition of p'. Suppose $u \in \mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{p'}(\Gamma)$ satisfies:

$$\forall u' \in \mathscr{D}_{\times}(\Gamma) \quad \int_{\Gamma} u \cdot u' = 0. \tag{4.1.13}$$

2. In higher dimensions, if one expresses everything in terms of differential forms, we expect that similar results hold and can be proved replacing formulas with "$\times$" and "$\cdot$" by their well known counterparts in terms of contractions and exterior products.

Introduce x, r, V and η as above. For any $v \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})$ such that $\operatorname{supp} v \subset B(x,r)$ there is a $w \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ such that w coincides with $v \times \eta$ on A, and is equal to 0 outside $A \cup \overline{\Gamma}$. Then we have:

$$0 = \int_{\Gamma} u \cdot [\![w]\!]_{\times} = \int_{V} u \cdot (v \times \eta) \times n_A = \int_{V} (u \times n_A) \times \eta \cdot v \tag{4.1.14}$$

Hence $(u|_V \times n_A) \times \eta = 0$. Thus $(\eta \cdot u|_V) n_A - (\eta \cdot n_A) u|_V = 0$, from which the announced result follows. □

4.1.5 Integration by parts in $\mathbb{E}$

On any open subset Ω of $\mathbb{E}$ we have the operators grad, curl and div, satisfying the null sequence:

$$\mathscr{D}(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Omega) \xrightarrow{\text{curl}} \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Omega) \xrightarrow{\text{div}} \mathscr{D}(\Omega) \tag{4.1.15}$$

Theorem 4.1.3 *For elements u of $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$, letting the divergence operator act on u as a distribution on $\mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma}$, we have:*

$$\int_{\mathbb{E}} \operatorname{div} u = \int_{\Gamma} [\![u]\!]_{\mathrm{n}}. \tag{4.1.16}$$

–Proof : Let V be an open neighborhood of $\partial\Gamma$ such that u vanishes on V and for each $x \in \Gamma$ pick an $r > 0$ with respect to u as in the second point of the definition of $\mathscr{D}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$, and denote by $V_x = B(x,r)$ the corresponding ball. Now choose a finite family of cubes $(C_i)_{i \in I}$ of the type described in the definition of Γ, such that $\overline{\Gamma} \subset \cup_i C_i$ and such that the covering $\{C_i \,:\, i \in I\}$ is subordinated to the covering $\{V\} \cup \{V_x : x \in \Gamma\}$. Then choose a family $(\theta_i)_{i \in I}$ of smooth functions on $\mathbb{E}$ such that θ_i has support in C_i and which is a partition of unity of a neigborhood of $\overline{\Gamma}$ in $\mathbb{E}$. Then $\theta = 1 - \sum_i \theta_i$ has support in $\mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma}$, and we can write:

$$u = \theta u + \sum_i \theta_i u, \tag{4.1.17}$$

Now remark the following. First, since θu is smooth on $\mathbb{E}$ and has bounded support we have:

$$\int_{\mathbb{E}} \operatorname{div}(\theta u) = 0. \tag{4.1.18}$$

Second, for each i, either $C_i \subset V$ or C_i is in a ball V_x, so if $\theta_i u$ is not identically 0 on $\mathbb{E}$, then the cube C_i is of the second type, i.e. does not contain points on the boundary $\partial\Gamma$. For these last ones it is a standard result that:

$$\int_{\mathbb{E}} \operatorname{div}(\theta_i u) = \int_{\Gamma} [\![\theta_i u]\!]_{\mathrm{n}} = \int_{\Gamma} (\gamma\theta_i) [\![u]\!]_{\mathrm{n}} \tag{4.1.19}$$

so this identity holds in fact for every i. Since $(\gamma\theta_i)_{i\in I}$ is a partition of unity of Γ, this completes the proof. □

Equivalently, the divergence in the sense of distributions/currents of u viewed as a field on $\mathbb{E}$, contains, in addition to the classical term, a measure which can be expressed by integration on Γ. This fact can be applied in several ways, which we formulate in the classical way, yielding integration by parts formulas:

– Taking $u \in \mathscr{D}(\mathbb{E})$ and $v \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ we have $\operatorname{div}(uv) = \operatorname{grad} u \cdot v + u \operatorname{div} v$ hence:

$$\int_{\mathbb{E}} \operatorname{grad} u \cdot v + \int_{\mathbb{E}} u \operatorname{div} v = \int_{\Gamma} [\![uv]\!]_{\mathrm{n}} = \int_{\Gamma} \gamma u \, [\![v]\!]_{\mathrm{n}}. \tag{4.1.20}$$

– Taking $u \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})$ and $v \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ we have $\operatorname{div}(u \times v) = \operatorname{curl} u \cdot v - u \cdot \operatorname{curl} v$ hence:

$$\int_{\mathbb{E}} \operatorname{curl} u \cdot v - \int_{\mathbb{E}} u \cdot \operatorname{curl} v = \int_{\Gamma} [\![u \times v]\!]_{\mathrm{n}} = \int_{\Gamma} \gamma_{\mathrm{T}} u \cdot [\![v]\!]_{\times}. \tag{4.1.21}$$

Notice that the last formula holds also when replacing γ_{T} by γ. The following identity will be encountered throughout the paper in various forms:

Proposition 4.1.4 *For all $u \in \mathscr{D}(\mathbb{E})$ and all $v \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$, ($\operatorname{grad} u \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})$ and $\operatorname{curl} v \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$) we have:*

$$\int_{\Gamma} (\gamma \operatorname{grad} u) \cdot [\![v]\!]_{\times} + \int_{\Gamma} (\gamma u) [\![\operatorname{curl} u]\!]_{\mathrm{n}} = 0 \tag{4.1.22}$$

–Proof : Indeed, by equation (4.1.21) the first term is equal to $-\int_{\mathbb{E}} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{curl} v$ which by (4.1.20) is the opposite of the second term. □

4.1.6 Differential operators on traces and jumps of smooth fields

We first define the gradient on traces:

Proposition 4.1.5 *There is a unique map $\mathscr{D}(\overline{\Gamma}) \to \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\overline{\Gamma})$, denoted $\operatorname{grad}_\Gamma$ (or grad), such that the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbb{E}) & \overset{\operatorname{grad}_{\mathbb{E}}}{\longrightarrow} & \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E}) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma_{\mathrm{T}} \\ \mathscr{D}(\overline{\Gamma}) & \underset{\operatorname{grad}_\Gamma}{\longrightarrow} & \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\overline{\Gamma}) \end{array} . \tag{4.1.23}$$

It is linear and maps $\mathscr{D}(\Gamma)$ into $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$.

–Proof : Notice first that if $u \in \mathscr{D}(\mathbb{E})$ satisfies $\gamma u = 0$ then by equation (4.1.22) and the density of $\mathscr{D}_\times(\Gamma)$ in $\mathrm{L}^1_{\mathrm{T}}(\Gamma)$, it follows that $\gamma_{\mathrm{T}} \operatorname{grad} u = 0$.

For $u \in \mathscr{D}(\overline{\Gamma})$, consider an extension $u^E \in \mathscr{D}(\mathbb{E})$ of u (i.e. $\gamma u^E = u$). By the above property $\gamma_{\mathrm{T}} \operatorname{grad}_{\mathbb{E}} u^E$ does not depend on the choice of this extension.

Therefore putting $\mathrm{grad}_\Gamma u = \gamma_{\mathrm{T}} \mathrm{grad}_{\mathbb{E}} u^E$ yields a well defined map. By the same argument grad_Γ is uniquely determined by the commutative diagram.

That grad_Γ is linear and maps $\mathscr{D}(\Gamma)$ into $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ is easy. In fact, more precisely one sees that for $u \in \mathscr{D}(\overline{\Gamma})$ one has $\mathrm{supp}\,\mathrm{grad}\, u \subset \mathrm{supp}\, u$. □

Similarly one can define the divergence on jumps:

Proposition 4.1.6 *There is a unique map $\mathscr{D}_\times(\Gamma) \to \mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma)$, denoted* div_Γ *(or* div*) such that the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E}) & \overset{\mathrm{curl}_{\mathbb{E}}}{\longrightarrow} & \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E}) \\ [\![\cdot]\!]_\times \downarrow & & \downarrow [\![\cdot]\!]_{\mathrm{n}} \\ \mathscr{D}_\times(\Gamma) & \underset{\mathrm{div}_\Gamma}{\longrightarrow} & \mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma) \end{array} . \tag{4.1.24}$$

It is linear.

–*Proof :* The essential remark is that if $u \in \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ satisfies $[\![u]\!]_\times = 0$, then the element $\mathrm{curl}_{\mathbb{E}} u$ of $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$, satisfies $[\![\mathrm{curl}_{\mathbb{E}} u]\!]_{\mathrm{n}} = 0$. This follows from equation (4.1.22) and the density of $\mathscr{D}(\Gamma)$ in $\mathrm{L}^1(\Gamma)$ (the density of $\mathscr{D}(\overline{\Gamma})$ would do). The proposition then immediately follows. □

These operators are linked by the following integration by parts formula on Γ:

Proposition 4.1.7 *For any $u \in \mathscr{D}(\overline{\Gamma})$ and any $v \in \mathscr{D}_\times(\Gamma)$, we have:*

$$\int_\Gamma \mathrm{grad}_\Gamma u \cdot v + \int_\Gamma u \,\mathrm{div}_\Gamma v = 0 \tag{4.1.25}$$

–*Proof :* In view of the definitions of grad_Γ and div_Γ this is a variant of Proposition 4.1.4. □

4.1.7 Differential operators in the sense of distributions/currents

Equip the spaces $\mathscr{D}(\Gamma)$ and $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ with the largest locally convex vector topologies that make $\gamma : \mathscr{D}(\mathbb{E} \setminus \partial\Gamma) \to \mathscr{D}(\Gamma)$ and $\gamma_{\mathrm{T}} : \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E} \setminus \partial\Gamma) \to \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$, respectively continuous. With respect to these topologies one considers the duals $\mathscr{D}(\Gamma)'$ and $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)'$ equipped with the weak-star topologies. As usual one considers that $\mathscr{D}(\Gamma) \subset \mathrm{L}^2(\Gamma) \subset \mathscr{D}(\Gamma)'$ and $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma) \subset \mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma) \subset \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)'$, with dense and continuous inclusions.

One shows that the operator $\mathrm{grad} : \mathscr{D}(\Gamma) \to \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ is continuous. Thus the opposite of its adjoint is a linear and continuous operator from $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)'$ to $\mathscr{D}(\Gamma)'$. Moreover the integration by parts formula shown in Proposition 4.1.7 ensures that this operator is the extension by continuity of the divergence on jumps of smooth fields. It is therefore also called divergence operator.

Similarly, starting from a natural topology on $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E})$ one would define topologies on $\mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma)$ and $\mathscr{D}_\times(\Gamma)$, making $[\![\cdot]\!]_{\mathrm{n}} : \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E}) \to \mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma)$ and $[\![\cdot]\!]_\times :$

$\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E}) \to \mathscr{D}_{\times}(\Gamma)$ continuous, and consider their duals with the weak-star topologies. Using the same integration by parts formula and the density of the range of the injection $\mathscr{D}(\Gamma) \to \mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma)'$ one obtains a linear and continuous operator from $\mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma)'$ to $\mathscr{D}_{\times}(\Gamma)'$ which is the extension by continuity of the gradient operator on traces of smooth fields. It is therefore also called gradient operator.

We summarize this in the following theorem :

Theorem 4.1.8 *The operators* grad *and* div *defined in Propositions 4.1.5 and 4.1.6 extend to linear and continuous operators :* $\mathrm{grad} : \mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma)' \to \mathscr{D}_{\times}(\Gamma)'$ *and* $\mathrm{div} : \mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)' \to \mathscr{D}(\Gamma)'$.

4.2 Sobolev spaces on Γ

4.2.1 The spaces $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ for $s \geq 0$

On Γ one defines the Hilbert space $\mathrm{H}^1(\Gamma)$ by local charts. This uses the fact that for any two open subsets U_1 and U_2 of $\mathbb{R}^2$, if $\Phi : U_1 \to U_2$ is a Lipschitz isomorphism then $u \mapsto u \circ \Phi$ is an isomorphism $\mathrm{H}^1(U_2) \to \mathrm{H}^1(U_1)$.

Disregard for the time-being that a gradient operator was defined earlier. On $\mathrm{H}^1(\Gamma)$ one can define one denoted by grad_Γ (or grad) by local charts. It is a linear continuous map $\mathrm{H}^1(\Gamma) \to \mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma)$, uniquely determined by the property that for any open subset U of $\mathbb{R}^2$, and any open subset V of Γ, if $\Phi : U \to V$ is Lipschitz continuous then, for any $u \in \mathrm{H}^1(\Gamma)$ and for a.e. $x \in U$:

$$\mathrm{D}\Phi(x)^\star(\mathrm{grad}_\Gamma u)(\Phi(x)) = \mathrm{grad}_{\mathbb{R}^2}(u \circ \Phi)(x). \tag{4.2.1}$$

A variant of this statement is that we have the following commuting diagram :

$$\begin{array}{rcc} \mathrm{H}^1(\Gamma) & \overset{\mathrm{grad}_\Gamma}{\longrightarrow} & \mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma) \\ u \mapsto u \circ \Phi \quad \downarrow & & \downarrow \quad u \mapsto \mathrm{D}\Phi^\star(u \circ \Phi) \\ \mathrm{H}^1(U) & \underset{\mathrm{grad}_{\mathbb{R}^2}}{\longrightarrow} & \mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(U) \end{array} \quad . \tag{4.2.2}$$

If Φ is a Lipschitz isomorphism and if Γ is replaced by V in the first line of the above diagram, then the vertical arrows are in fact isomorphisms, which is why these diagrams characterize de gradient operator. Later we'll show that this definition of the gradient coincides with the first one. On $\mathrm{H}^1(\Gamma)$, for any chosen ("characteristic length") $\ell > 0$, the following sesquilinear form induces the topology inherited from the local charts :

$$(u, v) \mapsto \ell^2 \int \mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, \overline{v} + \int u\, \overline{v} \tag{4.2.3}$$

One defines $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ for $s \in [0, 1]$ by interpolation. We denote by $|\cdot|_s$ the associated norm. Alternatively one can define these spaces using local charts as for $\mathrm{H}^1(\Gamma)$.

Then the interpolation norm is equivalent to the one inherited by the charts, uniformly in s.

Recall the classical result on traces:

Theorem 4.2.1 *For any $s \in]0,1[$, γ has a unique extension to a continuous operator $\mathrm{H}^{1/2+s}(\mathbb{E}) \to \mathrm{H}^s(\Gamma)$. It is surjective.*

This result, for $s = 1$ has been claimed but was questioned by M. Costabel and proved false by G. David, as recounted in Jerison-Kenig [50]. However we do have the following:

Proposition 4.2.2 *For any $s > 0$, γ has a unique extension to a continuous operator $\mathrm{H}^{3/2+s}(\mathbb{E}) \to \mathrm{H}^1(\Gamma)$.*

–Proof : For the important case of $s = 1/2$ on boundaries, see Theorem 4.11 p. 89 in Nečas [106]. For our more general setting a proof can be adapted from the proof of Lemma 3.6 of Costabel [32]. Putting $\sigma = 3/2 + s$ it suffices to replace the estimate p. 624 line 13 by the estimate:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m(\xi', \xi_n)^{-1} \mathrm{d}\xi_n \leq C_\sigma (1 + |\xi'|)^{-2}, \tag{4.2.4}$$

where for $(\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ we have:

$$m(\xi', \xi_n) = (1 + |\xi_n|)^{2\sigma} + (1 + |\xi_n|)^{2(\sigma-1)} (1 + |\xi'|)^2. \tag{4.2.5}$$

The rest of the proof is unchanged, remarking that in H^1 the restriction to the half-graphs that appear in the definition of Γ is continuous. □

A weaker variant of Theorem 4.2.1 is that for any $s > 0$, γ maps continuously $\mathrm{H}^{1/2+s}(\mathbb{E}) \to \mathrm{L}^2(\Gamma)$. From this one deduces that γ_{T} extends uniquely to a continuous map $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2+s}(\mathbb{E}) \to \mathrm{L}_{\mathrm{T}}^2(\Gamma)$. We are now ready to state and prove the following:

Proposition 4.2.3 *For any $s > 0$, the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{3/2+s}(\mathbb{E}) & \overset{\mathrm{grad}_{\mathbb{E}}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2+s}(\mathbb{E}) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma_{\mathrm{T}} \\ \mathrm{H}^1(\Gamma) & \underset{\mathrm{grad}_\Gamma}{\longrightarrow} & \mathrm{L}_{\mathrm{T}}^2(\Gamma) \end{array} . \tag{4.2.6}$$

–Proof : Pick an $u \in \mathscr{D}(\mathbb{E})$. For any open $U \subset \mathbb{R}^2$ and any open $V \subset \Gamma$, if $\Phi : U \to V$ is a Lipschitz isomorphism we have (using the chain rule for the differentiation of Lipschitz functions and the property that $\mathrm{D}\Phi^\star$ maps normal vector-fields to 0):

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}_{\mathbb{R}^2}((\gamma u) \circ \Phi) &= \mathrm{grad}_{\mathbb{R}^2}(u \circ \Phi) && (4.2.7) \\ &= \mathrm{D}\Phi^\star(\mathrm{grad}_{\mathbb{E}}\, u) \circ \Phi && (4.2.8) \\ &= \mathrm{D}\Phi^\star \gamma_{\mathrm{T}}(\mathrm{grad}_{\mathbb{E}}\, u) \circ \Phi && (4.2.9) \end{aligned}$$

By the characterization of the gradient operator in equation (4.2.2) it follows that $\mathrm{grad}_\Gamma(\gamma u)$ and $\gamma_{\mathrm{T}}(\mathrm{grad}_{\mathbb{E}}\, u)$ are two fields in $\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ which coincide locally. Therefore they are equal. One then concludes using the density of $\mathscr{D}(\mathbb{E})$ in $\mathrm{H}^{3/2+s}(\mathbb{E})$. □

Proposition 4.2.4 *The space $\mathscr{D}(\overline{\Gamma})$ is a dense subspace of $\mathrm{H}^1(\Gamma)$.*

–Proof : Using a partition of unity one is left with the problem of approximating an element u of $\mathrm{H}^1(\Gamma)$ with support in a cube C of the type described in the definition of Γ. We use two functions ϕ and (if C contains boundary points) ψ defined as before, and use the notation Γ_ϕ for the graph of ϕ and (if C contains boundary points) $\Gamma_{\phi\psi}$ for the graph of ϕ above the subgraph of ψ.

If C contains boundary points one can extend u to an element (still denoted u) of $\mathrm{H}^1(\Gamma_\phi)$ with support in C using the natural local chart for C. We use the notations of Lemma 3.6 in Costabel [32]. Let v be the map $(x', x_3) \mapsto \theta(x_3)u(x', \phi(x'))$, for some smooth cut-off function θ with support in $]0, a[$ such that $\theta(x_3) = 1$ for $x_3 \in \phi([0, a]^2) \subset]0, a[$. Then v is in $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}; \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2))$ and has support in C. In this space $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ is dense and v can be approximated by elements of $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ with support in C. Moreover the estimate (4.2.4) shows that the trace mapping $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}; \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)) \to \mathrm{H}^1(\Gamma_\phi)$ is continuous. Since it maps v to u, the Proposition follows. □

Corollary 4.2.5 *The above defined gradient operator is the unique continuous extension to $\mathrm{H}^1(\Gamma)$ of the gradient operator previously defined on $\mathscr{D}(\overline{\Gamma})$.*

For $s > 1$ denote by $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ the space of traces of $\mathrm{H}^{1/2+s}(\mathbb{E})$. On $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ we denote by $|\cdot|_s$ the norm induced by γ, which makes it a Hilbert space. It is a dense continuously embedded subspace of $\mathrm{H}^1(\Gamma)$. Likewise, for $s > 0$ denote by $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ the space of tangential traces of $\mathrm{H}^{1/2+s}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})$, equipped with the norm induced by γ_{T}. When no confusion is possible we denote this norm also by $|\cdot|_s$. Be aware that, compared with the case of a smooth surface Γ there is a major difference when Γ has a corner : if u is in $\mathrm{H}^{1/2}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ it does *not* follow that its three components (in some chosen basis) are in $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbb{E})$. However we do have the following property :

Proposition 4.2.6 *For any $s \geq 0$, the operator* grad *maps $\mathrm{H}^{1+s}(\Gamma)$ continuously into $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)$.*

–Proof : For $s = 0$ it is the construction of the gradient operator on Γ, and for $s > 0$ it follows from the existence of a continuous lifting $\mathrm{H}^{1+s}(\Gamma) \to \mathrm{H}^{3/2+s}(\mathbb{E})$ and Proposition 4.2.3. □

4.2.2 Dual spaces

For $s > 0$ denote by $\mathrm{H}^s_{\mathbb{E}}(\Gamma)$ the subspace $\gamma(\mathrm{H}^{1/2+s}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E}))$ of $\mathrm{L}^2(\Gamma; \mathbb{E})$. By Proposition 4.1.1, $\mathrm{H}^s_{\mathbb{E}}(\Gamma)$ and $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ are dense subspaces of $\mathrm{L}^2(\Gamma; \mathbb{E})$ and $\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ respectively. Thus we can consider their duals with L^2-type pivot spaces, which

we denote by $\mathrm{H}^s_{\mathbb{E}}(\Gamma)'$ and $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)'$. The $\mathbb{C}$-bilinear duality pairings are denoted by $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{E}}$ and $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{T}}$ respectively, or $\langle\cdot,\cdot\rangle$ when no confusion is possible. For any $s>0$, π_{T} determines a continuous surjection $\mathrm{H}^s_{\mathbb{E}}(\Gamma)\to\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)$. Hence we have the isomorphism Λ:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)' & \to & (\ker\pi_{\mathrm{T}}|_{\mathrm{H}^s_{\mathbb{E}}(\Gamma)})^\circ\subset\mathrm{H}^s_{\mathbb{E}}(\Gamma)'\\ u & \mapsto & v\ :\ \langle v,\cdot\rangle_{\mathbb{E}}=\langle u,\pi_{\mathrm{T}}(\cdot)\rangle_{\mathrm{T}}\end{array}\right. . \tag{4.2.10}$$

Notice that if $u\in\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ then $\Lambda u=u$. Thus as in Buffa et al. [26] we can identify $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)'$ with its range under Λ, i.e. in symbols:

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)'\approx\{v\in\mathrm{H}^s_{\mathbb{E}}(\Gamma)'\ :\ \forall w\in\mathrm{H}^s_{\mathbb{E}}(\Gamma)\quad(\pi_{\mathrm{T}}(w)=0)\Rightarrow(\langle v,w\rangle_{\mathbb{E}}=0)\}. \tag{4.2.11}$$

As is well-known, for $s\le 1$, the space $\mathscr{D}(\mathbb{E}\setminus\partial\Gamma)$ is dense in $\mathrm{H}^s(\mathbb{E})$. It follows that for $s\le 1/2$ the space $\mathscr{D}(\Gamma)$ is dense in $\mathrm{H}^s(\Gamma)$. Similarly for $s\le 1/2$, $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ is dense in $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)$. It is well known that this is false for $s>1/2$.

Hence the above dual spaces $\mathrm{H}^s(\Gamma)'$ (and $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(\Gamma)'$) are normal spaces of distributions/currents only when for $s\in[0,1/2]$. As usual the dual of for instance the completion $\mathrm{H}^s_0(\Gamma)$ of $\mathscr{D}(\Gamma)$ in $\mathrm{H}^s(\Gamma)$ is denoted $\mathrm{H}^{-s}(\Gamma)$ (so for $s\in[0,1/2]$ we have $\mathrm{H}^s(\Gamma)'=\mathrm{H}^{-s}(\Gamma)$).

4.2.3 Sobolev spaces for the curl operator

For any open set $U\subset\mathbb{E}$ we consider the Sobolev spaces $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(U)$ and $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(U)$:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(U) = \{u\in\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(U)\ :\ \mathrm{div}\,u\in\mathrm{L}^2(U)\}, \tag{4.2.12}$$
$$\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(U) = \{u\in\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(U)\ :\ \mathrm{curl}\,u\in\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(U)\}, \tag{4.2.13}$$

the operators being defined a priori in the sense of distributions/currents on U. Moreover for any space S of generalized vector-fields on U we consider the space S_{loc} of generalized vector fields u such that for all $\theta\in\mathscr{D}(\mathbb{E})$ (not only $\mathscr{D}(U)$) we have $\theta|_U u\in S$. Those we'll encounter are Fréchet spaces.

Lemma 4.2.7 *The space $\mathscr{D}^{\mathrm{slit}}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})$ is dense both in $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$ and in $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$.*

Proposition 4.2.8 *The jump operator $[\![\cdot]\!]_{\mathrm{n}}:\mathscr{D}^{\mathrm{slit}}_{\mathrm{T}}(\mathbb{E})\to\mathscr{D}_{\mathrm{n}}(\Gamma)$ has a unique extension to a continuous map $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})\to\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)'$. For all $u\in\mathrm{H}^1(\mathbb{E})$ and all $v\in\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$ we have:*

$$\int_{\mathbb{E}}\mathrm{grad}\,u\cdot v+\int_{\mathbb{E}}u\,\mathrm{div}\,v=\langle\gamma u,[\![v]\!]_{\mathrm{n}}\rangle, \tag{4.2.14}$$

where the bracket denotes the duality associated with $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$.

–Proof : This follows from Theorem 4.2.1, Lemma 4.2.7 and the integration by parts formula (4.1.20). □

Proposition 4.2.9 *The jump operator $[\![\cdot]\!]_\times : \mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\mathbb{E}) \to \mathscr{D}_\times(\Gamma)$ has a unique extension to a continuous map $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma}) \to \mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)'$. Its values are in $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma)'$. For all $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^1(\mathbb{E})$ and all $v \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$ we have :*

$$\int_{\mathbb{E}} \operatorname{curl} u \cdot v - \int_{\mathbb{E}} u \cdot \operatorname{curl} v = \langle \gamma u, [\![v]\!]_\times \rangle, \tag{4.2.15}$$

where the bracket denotes the duality associated with $\mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)$.

–Proof : This follows from Theorem 4.2.1, Lemma 4.2.7 and the integration by parts formula (4.1.21) (see also the remark below it). □

Combining these two propositions we obtain the following variant of Proposition 4.1.4 :

Corollary 4.2.10 *For all $u \in \mathrm{H}^2(\mathbb{E})$ and all $v \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$, ($\operatorname{grad} u \in \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^1(\mathbb{E})$ and $\operatorname{curl} v \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$) we have :*

$$\langle \gamma \operatorname{grad} u, [\![v]\!]_\times \rangle + \langle \gamma u, [\![\operatorname{curl} u]\!]_{\mathrm{n}} \rangle = 0 \tag{4.2.16}$$

For any $s \in [-1/2, 0[$, let D^s denote the space of elements $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{-s}(\Gamma)'$, such that $\operatorname{div} u \in \mathrm{H}^{-s}(\Gamma)'$. The space D^s is equipped with the graph norm, which makes it a Hilbert space. This norm will be denoted $\|\cdot\|_s$. For $s = -1/2$ we drop the superscript : $D = D^{-1/2}$, and the subscript : $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{-1/2}$. From the above corollary we deduce :

Corollary 4.2.11 *The following diagram commutes :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma}) & \overset{\operatorname{curl}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma}) \\ [\![\cdot]\!]_\times \downarrow & & \downarrow [\![\cdot]\!]_{\mathrm{n}} \\ D & \overset{\operatorname{div}}{\longrightarrow} & \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \end{array} . \tag{4.2.17}$$

Definition 4.2.12 *Let X^s denote the subspace of elements u of D^s such that for all $v \in \mathscr{D}(\overline{\Gamma})$:*

$$\langle u, \operatorname{grad} v \rangle + \langle \operatorname{div} u, v \rangle = 0 \tag{4.2.18}$$

Then, by Proposition 4.2.6 the above identity holds in fact for $v \in \mathrm{H}^{1-s}(\Gamma)$ and expresses X^s as the right kernel of a continuous bilinear form on $D^s \times \mathrm{H}^{1-s}(\Gamma)$. In particular X^s is a closed subspace of D^s. For $s = -1/2$ we drop the superscript $X = X^{-1/2}$.

We shall prove that X is the range of $[\![\cdot]\!]_\times$ on $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$. Using the identification of equation (4.2.11) we show as in Buffa et al. [26] that the elements of X are elements of $\mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)'$ with a certain property (essentially expressed by

equation(4.2.16)), for which we can use the results of Tartar [77] to conclude. We first state some local results.

Let $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a uniformly Lipschitz function and denote by Γ_ϕ its graph and Ω_ϕ the (open) domain above it. The outward normal to Ω_ϕ on Γ_ϕ is denoted n_ϕ. A variant of the above Proposition states that $u \mapsto u \times n_\phi$ is well-defined and continuous $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega_\phi) \to \mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma_\phi)'$. The following result is from [77] :

Theorem 4.2.13 *Let U be an open subset of $\mathbb{E}$. Suppose $u \in \mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma_\phi)'$ has support in U and there is $q \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_\phi)'$ such that :*

$$\forall p \in \mathrm{H}^2(\mathbb{E}) \quad \langle u, (\gamma \operatorname{grad} p)\rangle = -\langle q, \gamma p\rangle. \tag{4.2.19}$$

Then there is $v \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega_\phi)$ such that $u = v \times n_\phi$ and $\operatorname{supp} v \subset U$.

For the convenience of the exposition, we also state separately the following fact on surfaces with boundary. Let $\Omega_{\phi+}$ be the domain above Γ_ϕ, and $\Omega_{\phi-}$ the domain beneath. Let $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be uniformly Lipschitz continuous, and put :

$$\Gamma_{\phi\psi} = \{(x, y, z) \in \Gamma_\phi \ : \ y < \psi(x)\}. \tag{4.2.20}$$

With respect to Γ_ϕ the jump operator $[\![\cdot]\!]_\times$ is well defined on the elements of $\mathrm{L}^2(\mathbb{E})$ whose restrictions are in $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega_{\phi\pm})$, with values in $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma_\phi)' \subset \mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma_\phi)'$. Then we have :

Lemma 4.2.14 *If $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{E})$ satisfies $u|_{\Omega_{\phi\pm}} \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega_\pm)$ and* $\operatorname{supp}[\![u]\!]_\times \subset \overline{\Gamma_{\phi\psi}}$ *then $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma_{\phi\psi}})$.*

–Proof : This is an application of a variant of the integration by parts formula (4.2.15) with respect to Γ_ϕ. □

Theorem 4.2.15 *The jump operator $[\![\cdot]\!]_\times$ determines a linear continuous surjection $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma}) \to X$.*

–Proof : That $[\![\cdot]\!]_\times$ maps $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma})$ continuously into X has already been established.

We now turn to the surjectivity result. Suppose u is in X. Then u is an element of $\mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)'$ such that with $q = \operatorname{div} u \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)'$ we have, for all $p \in \mathscr{D}(\mathbb{E})$:

$$\langle u, \gamma \operatorname{grad}_{\mathbb{E}} p\rangle_{\mathbb{E}} = \langle u, \gamma_{\mathrm{T}} \operatorname{grad}_{\mathbb{E}} p\rangle_{\mathrm{T}} = \langle u, \operatorname{grad}_\Gamma \gamma p\rangle_{\mathrm{T}} = -\langle q, \gamma p\rangle \tag{4.2.21}$$

We now show that the elements u of $\mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)'$ such that for some $q \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)'$ we have :

$$\forall p \in \mathscr{D}(\mathbb{E}) \quad \langle u, \gamma \operatorname{grad} p\rangle_{\mathbb{E}} = -\langle q, \gamma p\rangle, \tag{4.2.22}$$

have a preimage by $[\![\cdot]\!]_\times$ in $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$. Let $\mathscr{X}$ denote the space of such u. Notice by the way that q is unique and that the property holds for all $p \in \mathrm{H}^2(\mathbb{E})$.

The following localization argument is also adapted from [77]. Let (C_i) be a covering of $\overline{\Gamma}$ of the type described in the definition of Γ, with an associated partition of unity θ_i. For any $u \in \mathcal{X}$, we have for any i, dropping the subscript i:

$$\begin{aligned} \langle (\gamma\theta)u, \gamma \operatorname{grad} p\rangle &= \langle u, \gamma(\theta \operatorname{grad} p)\rangle & (4.2.23)\\ &= \langle u, \gamma\big(\operatorname{grad}(\theta p) - (\operatorname{grad}\theta)p\big)\rangle & (4.2.24)\\ &= \langle u, \gamma \operatorname{grad}(\theta p)\rangle - \langle u\cdot\gamma\operatorname{grad}\theta, \gamma p\rangle & (4.2.25)\\ &= -\langle (\gamma\theta)q + (\gamma\operatorname{grad}\theta)\cdot u, \gamma p\rangle & (4.2.26) \end{aligned}$$

It follows that $(\gamma\theta_i)u \in \mathcal{X}$. Moreover $(\gamma\theta_i)u$ has support in C_i. Thus it suffices to lift the fields $(\gamma\theta_i)u$ to fields in $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$ with support in C_i.

Drop the subscript i and consider now a $u \in \mathcal{X}$ (with a corresponding q) with support in the cube C. Suppose C is of the first type, i.e. contains a portion of $\partial\Gamma$. In C, Γ is a portion of the graph Γ_ϕ of a uniformly Lipschitz continuous function ϕ. We use the above notations.

Extension by zero to Γ_ϕ is well defined for elements of $\mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)'$ with support in C, so let $\tilde{u}$ be the one of u. It is in $\mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma_\phi)'$ and satisfies the hypothesis of Theorem 4.2.13 with respect to the extension by zero of q. Thus there is v in $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega_\phi)$, with support in C and such that $v \times n_\phi = \tilde{u}$. Denote by $\tilde{v}$ the extension by 0 of v to $\mathbb{E}$. With respect to Γ_ϕ, $[\![\tilde{v}]\!]_\times = \tilde{u}$. Moreover by Lemma 4.2.14, $\tilde{v} \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$. Finally one sees that with respect to Γ, $[\![\tilde{v}]\!]_\times = u$. This completes the proof. □

In Buffa et al. [26], when Γ is the boundary of a domain, it was shown directly that (with the notations of the above proof) $\mathcal{X} = X$. In view of the identification (4.2.11) the main intermediate step consisted in showing that if $u \in \mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)$ satisfies $\pi_{\mathrm{T}} u = 0$ then there is $p \in \mathrm{H}^2(\mathbb{E})$ such that $\gamma p = 0$ and $u = \gamma \operatorname{grad} p$ (the converse is trivial).

The bilinear form $(u, v) \mapsto \int_\Gamma u \cdot v$ on $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\overline{\Gamma}) \times \mathscr{D}_\times(\Gamma)$ is left and right injective. Since $\mathscr{D}_\times(\Gamma)$ is dense in X it follows that the dual of X can be identified with an extension of $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}(\overline{\Gamma})$ in which this subspace is dense. It is denoted X' and the duality $\langle\cdot,\cdot\rangle$. By the surjectivity proved above we have:

Corollary 4.2.16 *The operator γ_{T} extends uniquely to a continuous operator $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}) \to X'$. For all $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})$ and all $v \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$ we have:*

$$\int_{\mathbb{E}} \operatorname{curl} u \cdot v - \int_{\mathbb{E}} u \cdot \operatorname{curl} v = \langle \gamma_{\mathrm{T}} u, [\![v]\!]_\times\rangle, \tag{4.2.27}$$

where the bracket denotes duality between X' and X.

By in particular the density of $\mathscr{D}(\mathbb{E})$ in $\mathrm{H}^1(\mathbb{E})$ we obtain:

Corollary 4.2.17 *For all $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{E})$, all $v \in X$ we have:*

$$\langle \gamma_{\mathrm{T}} \operatorname{grad} u, v\rangle = -\langle \gamma u, \operatorname{div} v\rangle, \tag{4.2.28}$$

where the first bracket is the duality $X' \times X$, and the second is the duality associated with $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$.

4.2.4 Helmholtz decomposition

Let $\mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet$ denote the subspace of elements of $\mathrm{H}^1(\Gamma)$ which are L^2-orthogonal to the elements that are constant on each connected component of Γ. For any $s \in [-1/2, 0[$, let $\mathcal{G}^s : X^s \to \mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma)$ be the map which to any $u \in X^s$ associates $\mathcal{G}^s u = \operatorname{grad} p$ where p solves the Neumann problem:

$$p \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \forall p' \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \int \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} p' = -\langle \operatorname{div} u, p' \rangle \tag{4.2.29}$$

Notice that then equation (4.2.29) actually holds for all $p' \in \mathrm{H}^1(\Gamma)$, so $\operatorname{div} \mathcal{G}^s u = \operatorname{div} u$. It follows that $\mathcal{G}^s$ induces a continuous linear map $X^s \to D^s$. Moreover the values are clearly in X^s.

Notice that:

$$\ker \mathcal{G}^s = \{u \in X^s \ : \ \operatorname{div} u = 0\}. \tag{4.2.30}$$

For any $u \in X^s$, since $\operatorname{div}(\mathcal{G}^s u - u) = 0$ it follows that $(\mathcal{G}^s)^2 u = \mathcal{G}^s u$.

For $s = -1/2$ we denote by $P : X \to X$ this (continuous) projector, V its range and W its kernel. The Helmholtz decomposition in X is then the assertion that V and W are closed subspaces of X and:

$$X = V \oplus W. \tag{4.2.31}$$

4.3 Electric field integral equation

We are now ready to study the scattering of electromagnetic waves by $\overline{\Gamma}$. Put $\Omega = \mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma}$. For simplicity *we suppose to begin with that* Ω *is connected* (in particular Γ cannot be the whole surface of some bounded domain). After we have treated this case we comment upon more general ones.

4.3.1 Scattering problem

The scattering problem is, given wave number $k > 0$ and a $v \in X'$, find the electric field $E \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})_{loc}$ such that:

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} E - k^2 E = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{4.3.1}$$

$$\gamma_{\mathrm{T}} E = v \quad \text{on } \Gamma, \tag{4.3.2}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|(\operatorname{curl} E(x) \times \sigma(x) - ikE(x)) = 0 \quad \text{with } \sigma(x) = x/|x|. \tag{4.3.3}$$

In words, we look for solutions of the time harmonic Maxwell equations (4.3.1) in the exterior domain Ω, subject to the perfect conductor boundary condition (4.3.2) on Γ and the Silver-Müller radiation condition (4.3.3) at infinity. Of particular interest is the case when $v = -\gamma_{\mathrm{T}} E^{in}$, for some incident plane wave E^{in} with wave number k.

Since on vector fields $\Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{curl}\operatorname{curl}$, equation (4.3.1) is equivalent to:

$$\Delta E + k^2 E = 0 \quad \text{and} \quad \operatorname{div} E = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{4.3.4}$$

In particular any solution E is smooth in Ω so we can safely consider point values, such as in the radiation condition. Notice also that when we have solved this scattering problem we obtain as a by-product the surjectivity of γ_{T} from $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})$ to X', a fact which could be proved more directly.

We first prove a uniqueness result for the scattering problem.

Theorem 4.3.1 *Problem (4.3.1)-(4.3.2)-(4.3.3) admits at most one solution in* $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})_{loc}$.

–Proof : The proof we include is quite standard and follows Abboud-Starling [1][2].

Suppose $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})_{loc}$ is a solution of the homogeneous scattering problem i.e. with $v = 0$. For any $R > 0$ let B_R be the open ball centered at the origin and with radius R. We denote by n_R the outer normal to B_R, on the corresponding sphere S_R. Suppose R is sufficiently large to satisfy $\overline{\Gamma} \subset B_R$. Using the integration by parts (4.2.27) on the surface $S_R \cup \Gamma$, applied to $\overline{u}$ and $\operatorname{curl} u$ set to zero outside $\overline{B_R}$, one obtains:

$$\int_{S_R} \operatorname{curl} u \times n_R \cdot \overline{u} = \int_{B_R} |\operatorname{curl} u|^2 - k^2 |u|^2, \tag{4.3.5}$$

since the term on Γ vanishes. Now writing:

$$\int_{S_R} ik|u|^2 = \int_{S_R} (iku - \operatorname{curl} u \times n_R) \cdot \overline{u} + \int_{S_R} \operatorname{curl} u \times n_R \cdot \overline{u}, \tag{4.3.6}$$

taking the imaginary part and using the Cauchy-Schwartz inequality we obtain:

$$\int_{S_R} |u|^2 \leq 1/k^2 \int_{S_R} |iku - \operatorname{curl} u \times n_R|^2. \tag{4.3.7}$$

From the radiation condition it now follows that:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{S_R} |u|^2 = 0, \tag{4.3.8}$$

Since by (4.3.4) u satisfies Helmholtz equation it follows by Rellich Theorem (see e.g. Müller [115]) that u vanishes on a neighborhood of infinity. Moreover u is real analytic in Ω, and since Ω is connected we can conclude that $u = 0$. □

4.3.2 Integral representation

Next we investigate a representation formula for the electric field E in terms of $[\![\operatorname{curl} E]\!]_\times$ which is up to a (for our purposes unimportant) scalar the electric current density induced by E on Γ. To this aim, introduce the standard

Helmholtz kernel G_k and the associated single layer potential Φ_k:

$$G_k(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad \text{and} \quad (\Phi_k u)(y) = \int_\Gamma G_k(x,y)u(x)\mathrm{d}x, \tag{4.3.9}$$

defined a priori for $u \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$ and $y \in \Omega$. As is well-known, the single layer potential Φ_k extends to a linear and continuous map from $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)'$ to $\mathrm{H}^1(\mathbb{E})_{loc}$ (the proof in [32] works fine also for screens). Correspondingly the single layer potential acting on tangent fields, also denoted Φ_k, is continuous from $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma)' \to \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^1(\mathbb{E})_{loc}$. It follows that the potential $\mathfrak{A}_k$ defined by:

$$\mathfrak{A}_k u = \Phi_k u + (1/k^2)\,\mathrm{grad}\,\Phi_k\,\mathrm{div}\,u, \tag{4.3.10}$$

is linear and continuous from D to $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})_{loc}$. We are interested mainly in $u \in X$ and define the electric field integral operator to be the bounded operator $A_k = \gamma_{\mathrm{T}} \circ \mathfrak{A}_k : X \to X'$. These definitions are motivated by the following equivalence:

Theorem 4.3.2 *If $E \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})_{loc}$ solves the scattering problem (4.3.1)-(4.3.2)-(4.3.3) then with $u = [\![\mathrm{curl}\,E]\!]_\times$ we have $E = \mathfrak{A}_k u$ so u solves the boundary integral equation:*

$$A_k u = v. \tag{4.3.11}$$

Conversely, if $u \in X$ solves equation (4.3.11) then $\mathfrak{A}_k u \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})_{loc}$ solves (4.3.1)-(4.3.2)-(4.3.3).

This is an exercise on the convolution of distributions and consists mainly in showing that the computations carried out in [116] for smooth boundaries, can be interpreted in the Lipschitz screen setting, as was already remarked for Lipschitz boundaries in [25]. We start by stating many of the preceding results in terms of distributions. For the adjoint of the operator $\gamma : \mathrm{H}^1(\mathbb{E})_{loc} \to \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$, we use the notation $u \mapsto (u\delta_\Gamma)$. We use the same notation on vector fields. Let g_k be the outgoing fundamental solution of $-\Delta - k^2$. Then:

$$\Phi_k u = g_k * (u\delta_\Gamma) \quad \text{and} \quad \mathfrak{A}_k u = g_k * \left(u\delta_\Gamma + 1/k^2\,\mathrm{grad}_{\mathbb{E}}\left((\mathrm{div}_\Gamma\, u)\delta_\Gamma\right)\right) \tag{4.3.12}$$

Moreover in the sense of distributions, by Proposition 4.2.8 for any $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Omega)_{loc}$ we have:

$$\mathrm{div}_{\mathbb{E}}\, u = \mathrm{div}_\Omega\, u - [\![u]\!]_{\mathrm{n}}\delta_\Gamma, \tag{4.3.13}$$

whereas by Proposition 4.2.9 we have for $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)_{loc}$:

$$\mathrm{curl}_{\mathbb{E}}\, u = \mathrm{curl}_\Omega\, u + [\![u]\!]_\times \delta_\Gamma. \tag{4.3.14}$$

Moreover by the computation (4.2.21) we have for all $u \in X$:

$$\mathrm{div}_{\mathbb{E}}(u\delta_\Gamma) = (\mathrm{div}_\Gamma\, u)\delta_\Gamma \tag{4.3.15}$$

–Proof of Theorem 4.3.2 : Suppose first that $E \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})_{loc}$ solves (4.3.1)-(4.3.2)-(4.3.3). Then :

$$\mathrm{curl}_{\mathbb{E}}\,\mathrm{curl}\,E = \mathrm{curl}_{\Omega}\,\mathrm{curl}\,E + [\![\mathrm{curl}\,E]\!]_{\times}\delta_{\Gamma} = k^2 E + [\![\mathrm{curl}\,E]\!]_{\times}\delta_{\Gamma}. \tag{4.3.16}$$

Moreover, using $\mathrm{div}_{\Omega}\,E = 0$ and applying diagram (4.2.17) :

$$\mathrm{div}_{\mathbb{E}}\,E = -[\![E]\!]_{\mathrm{n}}\delta_{\Gamma} = -1/k^2\,[\![\mathrm{curl}_{\Omega}\,\mathrm{curl}\,E]\!]_{\mathrm{n}}\delta_{\Gamma} = -1/k^2(\mathrm{div}_{\Gamma}[\![\mathrm{curl}\,E]\!]_{\times})\delta_{\Gamma}. \tag{4.3.17}$$

Therefore we have :

$$\Delta E + k^2 E = -[\![\mathrm{curl}\,E]\!]_{\times}\delta_{\Gamma} - 1/k^2\,\mathrm{grad}_{\mathbb{E}}\left((\mathrm{div}_{\Gamma}[\![\mathrm{curl}\,E]\!]_{\times})\delta_{\Gamma}\right) \tag{4.3.18}$$

Recall (see e.g. [112]) that for solutions of (4.3.1) the Silver-Müller condition is equivalent to the Sommerfeld condition :

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|(\partial_{\sigma(x)}E(x) - ikE(x)) = 0. \tag{4.3.19}$$

It follows that with $u = [\![\mathrm{curl}\,E]\!]_{\times}$ we have :

$$E = g_k * \left(u\delta_{\Gamma} + 1/k^2\,\mathrm{grad}_{\mathbb{E}}\left((\mathrm{div}_{\Gamma}\,u)\delta_{\Gamma}\right)\right) = \mathfrak{A}_k u. \tag{4.3.20}$$

Conversely if $u \in X$ then $\mathfrak{A}_k u$ solves Helmholtz equation in Ω and by (4.3.15) :

$$\mathrm{div}_{\mathbb{E}}\,\mathfrak{A}_k u = g_k * (1 + 1/k^2\Delta_{\mathbb{E}})(\mathrm{div}_{\Gamma}\,u)\delta_{\Gamma} = -1/k^2(\mathrm{div}_{\Gamma}\,u)\delta_{\Gamma}. \tag{4.3.21}$$

Hence $\mathrm{div}_{\Omega}\,\mathfrak{A}_k u = 0$, so $\mathfrak{A}_k u$ satisfies (4.3.1). Moreover $\mathfrak{A}_k u$ satisfies the radiation condition by the above mentioned equivalence. This completes the proof. □

Corollary 4.3.3 *The electric field integral operator is injective.*

–Proof : Pick $u \in X$. If $A_k u = 0$ then $\mathfrak{A}_k u$ solves (4.3.1)-(4.3.2)-(4.3.3) with $v = 0$ so by Theorem 4.3.1, $\mathfrak{A}_k u = 0$. By the computation (4.3.21), $\mathrm{div}_{\Gamma}\,u = 0$. Thus we have $0 = \mathfrak{A}_k u = g_k * (u\delta_{\Gamma})$, so $u = 0$. □

Equation (4.3.11) is called the Electric Field Integral Equation (EFIE) and we now analyze its well-posedness using a variational formulation.

4.3.3 Variational formulation

Let $a(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$ be the bilinear form defined by :

$$a(u, u') = \langle A_k u, u' \rangle, \tag{4.3.22}$$

where the brackets denote the duality $X' \times X$. By in particular (4.2.28) we have:

$$a(u,u') = \langle \gamma\Phi_k u, u'\rangle - 1/k^2 \langle \gamma\Phi_k \operatorname{div} u, \operatorname{div} u'\rangle, \tag{4.3.23}$$

where the brackets denote the dualities associated with $\mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)$ and $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ respectively. Then the variational formulation of the EFIE reads: Find $u \in X$ such that:

$$\forall u' \in X \quad a(u,u') = \langle v, u'\rangle. \tag{4.3.24}$$

The analysis is based on the following coercivity Theorem:

Theorem 4.3.4 *There is a compact bilinear form b on X such that for all $(v,w) \in V \times W$ we have:*

$$|(a+b)(v+w, \overline{v} - \overline{w})| \geq (1/C)\|v+w\|^2. \tag{4.3.25}$$

The proof is based on the Nédélec-Planchard [62] coercivity:

$$\forall u \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \quad \langle \gamma\Phi_0 u, \overline{u}\rangle \geq 1/C |u|^2_{-1/2} \tag{4.3.26}$$

As remarked in [32], the original proof works fine for Lipschitz boundaries; extension to screens is trivial. Moreover we need two compacity arguments namely, first the bilinear form $(u,u') \mapsto \langle \gamma(\Phi_k - \Phi_0)u, u'\rangle$ is compact on $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)'$ and second the projector P associated with the Helmholtz decomposition viewed as a map $X \to \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma)'$ is compact (this follows from the compactness of the injection $\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(\Gamma) \to \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma)'$).

–Proof : It suffices to prove the statement for the bilinear form a^0 obtained by replacing Φ_k by Φ_0 in the expression (4.3.23) of a, since the difference is compact. Let c be the continuous bilinear form on $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma)'$ defined by:

$$c(u,u') = \langle \gamma\Phi_0 u, u'\rangle. \tag{4.3.27}$$

Let also d be the bilinear form obtained by changing the sign in front of the second duality in a^0 expressed as in (4.3.23). Notice that $a^0(w, -\overline{w}) = -d(w,\overline{w})$ and $a^0(v,\overline{v}) = -d(v,\overline{v}) + 2c(v,\overline{v})$. Therefore we have:

$$a^0(v+w, \overline{v} - \overline{w}) = -d(v,\overline{v}) + 2c(v,\overline{v}) - d(w,\overline{w}) - c(v,\overline{w}) + c(w,\overline{v}). \tag{4.3.28}$$

By the Nédélec-Planchard coercivity we have for some $C > 0$ (recall that $\|\cdot\|$ denotes the norm on X):

$$C(d(v,\overline{v}) + d(w,\overline{w})) \geq \|v\|^2 + \|w\|^2 \geq 1/2\|v+w\|^2, \tag{4.3.29}$$

so to conclude we only need to show that the three remaining terms in (4.3.28) stem from compact bilinear forms on X. With $u = v + w$ we have:

$$c(v,\overline{v}) = c(Pu, P\overline{u}), \quad c(v,\overline{w}) = c(Pu, (I-P)\overline{u}), \quad c(w,\overline{v}) = c((I-P)\overline{u}, P\overline{u}). \tag{4.3.30}$$

In each of these expressions P appears at least once as a map $X \to \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{1/2}(\Gamma)'$. Therefore these are compact and the Theorem is proved. □

In other words, considering the automorphism $\Lambda : u \mapsto (2P - I)u$ of X, we have:

$$\forall u \in X \quad |(a+b)(u, \Lambda\overline{u})| \geq 1/C\|u\|^2. \tag{4.3.31}$$

Therefore we have:

Corollary 4.3.5 *The operator $A_k : X \to X'$ is Fredholm of index 0.*

–Proof : Let $B : X \to X'$ be the operator associated with the bilinear form b above. Since $a+b$ satisfies the LBB Inf-Sup conditions on X, $A_k + B$ is invertible and since B is compact, it follows that A_k is Fredholm of index 0. □

Applying Corollary 4.3.3 then yields:

Corollary 4.3.6 *The operator A_k is invertible and the exterior scattering problem has a unique solution.*

4.3.4 The non-connected case

If Ω is not connected (for instance if Γ is the boundary of a domain) it is well known that resonances may occur. More precisely, the uniqueness Theorem 4.3.1, holds only with respect to the unbounded connected component of Ω. However Theorems 4.3.2 and 4.3.4 (and the proofs) still hold. When the bounded connected components of Ω are Lipschitz domains (i.e. there are no screens inside them), the eigenvalue problems for the curl curl operator on vector fields with the perfect conductor boundary condition, yields a discrete unbounded subset $\mathcal{K}$ of $\mathbb{R}_+$, of wavenumbers k such that the k^2 are the eigenvalues. If moreover each of these domains has a connected complementary, one shows that if $k \notin \mathcal{K}$, A_k is injective.

In what follows we suppose that the bounded connected components of Ω are Lipschitz domains with connected complementaries, we take Theorems 4.3.2 and 4.3.4 for granted, so in particular A_k is Fredholm of index 0. We shall also suppose that $k \notin \mathcal{K}$ and that then A_k is invertible. For indications on what happens at resonant wave numbers we refer to [131].

4.4 Discretization

Given a finite dimensional subspace X_h of X and $v \in X'$ the Galerkin discretization of the EFIE is to find $u_h \in X_h$ such that:

$$\forall u'_h \in X_h \quad a(u_h, u'_h) = \langle v, u'_h \rangle. \tag{4.4.1}$$

As usual we consider that the space X_h is one among a family (X_h), and we study the existence of u_h and the convergence of (u_h). We assume familiarity with the theory of Inf-Sup conditions as presented for instance in Roberts-Thomas [68].

4.4.1 Inf-Sup condition for the EFIE

We first prove some generalities about the splitting of Galerkin spaces. Recall that for any two non-zero closed subspaces V_1 and V_0 of some Banach space X the *gap* $\delta(V_1, V_0)$ from V_1 to V_0 is defined to be:

$$\delta(V_1, V_0) = \sup_{v_1 \in V_1} \inf_{v_0 \in V_0} \|v_1 - v_0\|/\|v_1\|. \tag{4.4.2}$$

This definition is extended straightforwardly to the case when at least one of the V_i is zero. One immediately checks that if P_0 is any (continuous) projector onto V_0, we have:

$$\forall v_1 \in V_1 \quad \|v_1 - P_0 v_1\| \leq \|I - P\|\delta(V_1, V_0)\|v_1\|. \tag{4.4.3}$$

Also we say that a family (X_h) of closed subspaces of X is approximating if:

$$\forall u \in X \quad \lim_h \inf_{u' \in X_h} \|u - u'\| = 0. \tag{4.4.4}$$

The following lemma is elementary.

Lemma 4.4.1 *Let X be a Banach space equipped with a conjugation*[3] *$u \mapsto \overline{u}$. Suppose we have a splitting $X = V \oplus W$ for two closed subspaces V and W which are stable under conjugation. Suppose a is a continuous bilinear form on X such that for some $C > 0$:*

$$\forall (v, w) \in V \times W \quad |a(v + w, \overline{v} - \overline{w})| \geq (1/C)\|v + w\|^2. \tag{4.4.5}$$

Suppose furthermore that we have an approximating family (X_h) of closed subspaces of X which can be split into direct sums $X_h = V_h \oplus W_h$ of closed subspaces of X that are stable under conjugation and satisfy $\delta(V_h, V) \to 0$ and $\delta(W_h, W) \to 0$.

Then there is $h_0 > 0$ and $C > 0$ such that for all $h < h_0$ we have:

$$\inf_{u \in X_h} \sup_{u' \in X_h} \frac{|a(u, u')|}{\|u\|\,\|u'\|} \geq 1/C \tag{4.4.6}$$

–Proof : (i) Put $\delta_h = \max\{\delta(V_h, V), \delta(W_h, W)\}$. We denote by P the projection with range V and kernel W. It commutes with conjugation. For any $(v_h, w_h) \in V_h \times W_h$ we have, with $u_h = v_h + w_h$:

$$\begin{aligned} \|v_h\| &\leq \|P(v_h + w_h)\| + \|(I - P)w_h - w_h\| + \|Pv_h - v_h\| && (4.4.7)\\ &\leq \|P\|\|u_h\| + \|P\|\delta_h\|w_h\| + \|I - P\|\delta_h\|v_h\|. && (4.4.8) \end{aligned}$$

Similarly:

$$\|w_h\| \leq \|I - P\|\|u_h\| + \|I - P\|\delta_h\|v_h\| + \|P\|\delta_h\|w_h\|. \tag{4.4.9}$$

3. i.e a sesquilinear continuous involution.

Adding and rearranging we obtain for h small enough :

$$\|v_h\| + \|w_h\| \leq (1 - \delta_h \max\{\|P\|, \|I-P\|\})^{-1} \max\{\|P\|, \|I-P\|\}\|u_h\|, \tag{4.4.10}$$

In other words the splitting $X_h = V_h \oplus W_h$ is uniformly stable for $h < h_1$ for some h_1.

(ii) We have :

$$\|v_h - Pv_h\| \leq \|I-P\|\delta_h\|v_h\| \leq C\delta_h\|u_h\|, \tag{4.4.11}$$

and similarly :

$$\|w_h - (I-P)w_h\| \leq C\delta_h\|u_h\| \tag{4.4.12}$$

Then using the continuity of a yields :

$$|a(v_h + w_h, \overline{v}_h - \overline{w}_h)| \geq |a(Pv_h + (I-P)w_h, P\overline{v}_h - (I-P)\overline{w}_h)| - C\delta_h\|u_h\|^2 \tag{4.4.13}$$

Finally, using equation (4.4.5) and once again the stability of the discrete splittings yields :

$$|a(v_h + w_h, \overline{v}_h - \overline{w}_h)| \geq (1/C)\|u_h\|^2 - C\delta_h\|u_h\|^2, \tag{4.4.14}$$

and $\|\overline{v}_h - \overline{w}_h\| \leq C\|u_h\|$, hence the lemma. □

We return now to the EFIE and use the notations of the previous sections. As before we suppose that k is not a resonant wavenumber. The following Proposition gives sufficient conditions for the discrete EFIE to satisfy an asymptotic uniform discrete Inf-Sup condition.

Proposition 4.4.1 *Suppose we have an approximating family (X_h) of closed subspaces of X which can be split into direct sums $X_h = V_h \oplus W_h$ of closed subspaces of X that are stable under complex conjugation and satisfy $\delta(V_h, V) \to 0$ and $\delta(W_h, W) \to 0$.*

Then there is $h_0 > 0$ and $C > 0$ such that for all $h < h_0$:

$$\inf_{u \in X_h} \sup_{u' \in X_h} \frac{|a(u,u')|}{\|u\|\,\|u'\|} \geq 1/C. \tag{4.4.15}$$

–Proof : Apply Lemma 4.4.1 to the bilinear form $a + b$ appearing in Theorem 4.3.4 and conclude using Proposition A.5.2. □

4.4.2 Application to some Finite Element spaces

From now on we suppose that Γ is a polyhedral surface which is piecewise flat.

On Γ consider a regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)$. We suppose that these triangulations refine the polyhedral structure of Γ. Constructed on these triangulations, we consider the standard complex Raviart-Thomas [67] or Brezzi-Douglas-Marini [23] finite elements of any fixed order p (we choose the convention that $p = 0$ means lowest order Raviart-Thomas or Brezzi-Douglas-Marini finite elements). We denote by X_h the corresponding subspaces of X. This imposes the outward fluxes through $\partial\Gamma$ to be 0 in the classical sense.

As in [131] we define subspaces W_h and V_h of X_h by setting:

$$W_h = \{u_h \in X_h \ : \ \operatorname{div} u_h = 0\}, \tag{4.4.16}$$

and:

$$V_h = \{u_h \in X_h \ : \ \forall w_h \in W_h \quad \int u_h \cdot w_h = 0\}. \tag{4.4.17}$$

It is clear that X_h, V_h and W_h are stable under complex conjugation, and $X_h = V_h \oplus W_h$. Moreover $W_h \subset W$ (so $\delta(W_h, W) = 0$) and we now set out to prove that $\delta(V_h, V) \to 0$, which is the object of Proposition 4.4.5. For the case of a smooth surface Γ this is rather elementary see [131] (Theorem 6.5 and Lemma 7.1) [4]. Extension to closed polyhedral surfaces was provided in Hiptmair-Schwab [44] (mainly Lemma 6.2). We follow here very closely the steps of their reasoning and state the necessary variants in the following lemmas:

– *Regularity* For any $\epsilon > 0$ we denote by $\mathrm{H}_{-}^{1+\epsilon}(\Gamma)$ the space of elements of $\mathrm{H}^1(\Gamma)$ whose restriction to any face Γ_i of Γ is of class $\mathrm{H}^{1+\epsilon}(\Gamma_i)$.

Lemma 4.4.2 *There is $\epsilon > 0$ such that for all $u \in X$, if p solves the Neumann problem (4.2.29) with respect to* $\operatorname{div} u$ *then $p \in \mathrm{H}_{-}^{1+\epsilon}(\Gamma)$. The corresponding operator $X \to \mathrm{H}_{-}^{1+\epsilon}(\Gamma)$ is continuous.*

–Proof : It is an immediate consequence of Proposition 4.4.2 below. □

– *Interpolator* We denote by Π_h the standard interpolation operator associated to the space X_h as defined for instance in Brezzi-Fortin [119] (Chapter 3). When restricted to a triangle T we use the notation Π_T. We have:

Lemma 4.4.3 *For any $s > 0$, and any triangle T, Π_T is well-defined and continuous as an operator:*

$$\{u \in \mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{s}(T) \ : \ \operatorname{div} u \in \mathrm{L}^2(T)\} \to \{u \in \mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{2}(T)\} \tag{4.4.18}$$

–Proof : This is rather standard and a detailed proof is given in [44] (Lemma 5.1). Notice that we have a Sobolev embedding $\mathrm{H}_{\mathrm{T}}^{s}(T) \to \mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{p}(T)$ for some $p > 2$ and that [119](page 125) asserts that the interpolation operator is well defined on:

$$\{u \in \mathrm{L}_{\mathrm{T}}^{p}(T) \ : \ \operatorname{div} u \in \mathrm{L}^2(T)\}. \tag{4.4.19}$$

□

4. echoed here in Theorem 3.4.5 and Lemma 3.5.1.

– *Scaling* We also need semi-norms for the spaces $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(T)$, $0 < s < 1$. They can be defined as for $\mathrm{H}^s(T)$ by double integrals, see Grisvard [101] (Definition 1.3.2.1). An alternative definition closer in spirit to the Bramble-Hilbert Lemma can also be given: Fix for the time-being a triangle T. Let μ denote $\mathrm{L}^2_{\mathrm{T}}(T)$-orthogonal projection onto the (two-dimensional) subspace of constant tangent vector fields on T. For $0 \leq s \leq 1$ define the semi-norm $\lfloor\cdot\rfloor_s$ on $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(T)$ by:

$$\forall u \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(T) \quad \lfloor u \rfloor_s = |u - \mu u|_s \tag{4.4.20}$$

For $0 \leq s \leq 1$ the operator μ induces continuous projectors in the spaces $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(T)$, and we denote ny N^s their kernels, which are closed subspaces of $\mathrm{H}^s_{\mathrm{T}}(T)$. One checks that $N^s = [N^0, N^1]_s$, when equipped with the inherited norms. Thus, for $s = 0$ and $s = 1$ the restriction of $\lfloor\cdot\rfloor_s$ to N_s is a norm equivalent to the inherited norm; intermediate cases follow by interpolation. The importance of these definitions (used in Lemma 4.4.4) stems from the fact that on N^1 the restriction of the standard $\mathrm{H}^1_{\mathrm{T}}(T)$ *semi*-norm, is in fact a norm equivalent to the norm inherited from $\mathrm{H}^1_{\mathrm{T}}(T)$ (equal to the restriction of $\lfloor\cdot\rfloor_1$).

Let $\hat{T}$ denote a reference triangle, fixed trough-out the paper. Choose for each h and each triangle T of $\mathcal{T}_h$, an affine isomorphism $F_T : \hat{T} \to T$. On vector-fields u on T consider the pull-back $\hat{u}$ of u considered as $2-1$ form, by F_T; more explicitly this transformation –known as Piola's transform– is given by:

$$u \mapsto \hat{u} : \hat{u}(x) = \mathrm{Jac}\, F_T(x) \mathrm{D}F_T(x)^{-1} u(F_T(x)). \tag{4.4.21}$$

Lemma 4.4.4 *There is $C > 0$ such that for all h and all T in $\mathcal{T}_h$, one has the uniform equivalence of (semi-)norms:*

$$\lfloor \hat{u} \rfloor_{s,\hat{T}} \left\{ \begin{array}{cc} \leq & C \\ \geq & 1/C \end{array} \right\} h^s \lfloor u \rfloor_{s,T} \tag{4.4.22}$$

–Proof : For $s = 0$ and $s = 1$ this standard result follows from the change of variables formula for integrals for the standard semi-norms, using the regularity hypothesis made on the family $(\mathcal{T}_h)$. Intermediate estimates follow by interpolation. □

We are now ready to prove the following:

Proposition 4.4.5 *With ϵ given by Lemma 4.4.2, we have $\delta(V_h, V) \leq Ch^\epsilon$.*

Part (i) of the proof is as in Theorem 6.5 in [131], whereas part (ii) is taken almost directly from Lemma 6.2 in [44] and uses the above technical lemmas. The crucial finite dimensionality argument used to control the term involving the differential operator, is adapted from a 3D $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}$ problem in [45] (Lemma 4.3), based on Ciarlet-Zou [29] (Lemma 4.1), where it seems to be attributed to V. Girault.

–Proof : (i) Pick $v_h \in V_h$. Let p be the solution of the Neumann problem:

$$p \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \text{and} \quad \forall p' \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \quad \int \mathrm{grad}\, p \cdot \mathrm{grad}\, p' = -\int \mathrm{div}\, v_h \; p' \tag{4.4.23}$$

Put $v = \operatorname{grad} p \in V$. Thus v is the element of V such that $\operatorname{div} v = \operatorname{div} v_h$. By Lemmas 4.4.2 and 4.4.3, $\Pi_h v$ is well-defined. Since Π_h maps divergence-free fields to divergence-free fields and is a projector onto X_h we have:

$$\operatorname{div}(\Pi_h v - v_h) = \operatorname{div} \Pi_h (v - v_h) = 0. \tag{4.4.24}$$

In other words we have $\Pi_h v - v_h \in W_h$, from which it follows that:

$$|\Pi_h v - v_h|_0^2 = \int (\Pi_h v - v) \cdot (\overline{\Pi_h v - v_h}). \tag{4.4.25}$$

By the Cauchy-Schwartz inequality (and the triangle inequality) we obtain:

$$|v - v_h|_0 \leq |\Pi_h v - v|_0 + |\Pi_h v - v_h|_0 \leq 2|\Pi_h v - v|_0. \tag{4.4.26}$$

(ii) We now estimate the last term of this inequality, by pulling back from each triangle T of $\mathcal{T}_h$ to the reference triangle $\hat{T}$. By Lemma 4.4.3 (and 4.4.2), since $\Pi_{\hat{T}}$ preserves constant vector-fields, we have an estimate of the form:

$$|\Pi_{\hat{T}}(v|_T)\hat{} - (v|_T)\hat{}\,|_0 \leq C\big(\lfloor (v|_T)\hat{}\,\rfloor_{\epsilon,\hat{T}} + |\operatorname{div}(v|_T)\hat{}\,|_0\big), \tag{4.4.27}$$

From the commuting diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(T) & \overset{\operatorname{div}_T}{\longrightarrow} & \mathrm{L}^2(T) \\ u \mapsto \operatorname{Jac} F_T \mathrm{D}F_T^{-1}(u \circ F_T) \;\downarrow & & \downarrow\; u \mapsto \operatorname{Jac} F_T (u \circ F_T) \\ \mathrm{H}^0_{\mathrm{div}}(\hat{T}) & \underset{\operatorname{div}_{\hat{T}}}{\longrightarrow} & \mathrm{L}^2(\hat{T}) \end{array}, \tag{4.4.28}$$

it follows that the term $\operatorname{div}(v|_T)\hat{}$ is in a finite-dimensional space of polynomials on $\hat{T}$ (the dimension is given by the order and type of finite elements used to construct X_h). By the equivalence of norms on finite dimensional spaces, there is a $C > 0$, such that for all elements u of this space:

$$|u|_{0,\hat{T}} \leq C|u|_{-1,\hat{T}} \tag{4.4.29}$$

Thus we have:

$$|\operatorname{div}(v|_T)\hat{}\,|_0 \leq C|\operatorname{div}(v|_T)\hat{}\,|_{-1} \leq C\lfloor (v|_T)\hat{}\,\rfloor_{0,\hat{T}} \tag{4.4.30}$$

from which it follows that:

$$|\Pi_{\hat{T}}(v|_T)\hat{} - (v|_T)\hat{}\,|_0 \leq C\lfloor (v|_T)\hat{}\,\rfloor_{\epsilon,\hat{T}}. \tag{4.4.31}$$

Piola's transform commutes with interpolation, so using the scaling Lemma 4.4.4 gives:

$$|\Pi_T v|_T - v|_T|_0 \leq Ch^\epsilon \lfloor v|_T \rfloor_{\epsilon,T} \tag{4.4.32}$$

Since $\lfloor\cdot\rfloor_\epsilon^2$ is super-additive, summing over all triangles T yields:

$$|\Pi_h v - v|_0 \leq Ch^\epsilon \lfloor v \rfloor_{\epsilon,-}. \tag{4.4.33}$$

All in all we obtain, using once again the regularity Lemma 4.4.2:

$$|v - v_h|_0 \leq Ch^\epsilon |\operatorname{div} v|_{-1/2}. \tag{4.4.34}$$

Since $\operatorname{div} v = \operatorname{div} v_h$, this completes the proof. □

4.4.3 Convergence rates

To conclude we now only need to study:

$$\inf_{u' \in X_h} \|u - u'\|, \tag{4.4.35}$$

as a function of h for u the solution of the EFIE. For smooth surfaces this negative norm estimate can be obtained using an Aubin-Nitsche trick, see for instance [136][5]. In [44] (Lemma 8.2) convergence rates are deduced from those of Nédélec's curl conforming edge elements [58][61] in Ω. Here, contrary to the case of a closed surface the regularity of the solution is too weak to apply the standard interpolator for edge elements, so a slight variant of their reasoning is needed.

Suppose the triangulations $\mathcal{T}_h$ are obtained as the traces of regular meshes $\mathcal{T}_h^{ext}$ of Ω cut off at infinity by, say, a large enough cube D. Let Q_h denote the $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega \cap D)$-orthogonal projector onto the volume Nédélec finite elements on $\mathcal{T}_h^{ext}$ whose jumps by $[\![\cdot]\!]_\times$ constitute X_h (it suffices to match the orders and the FE families).

Pick $u \in X$ and let v be any lifting of u in $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega \cap D)$ ($[\![v]\!]_\times = u$). We have:

$$\|u - [\![Q_h v]\!]_\times\|_{-1/2} \leq C\|v - Q_h v\|_{\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}} \tag{4.4.36}$$

Thus the convergence rate of (4.4.35) is bounded by the order of best approximation of v in the $\mathrm{H}^0_{\mathrm{curl}}(\Omega \cap D)$-norm by edge elements on $\mathcal{T}_h^{ext}$. By the density of $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{slit}}(\Omega \cap D)$ in $\mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega \cap D)$ it follows that the spaces X_h are approximating in X. Applying Propositions 4.4.1 and 4.4.5 we obtain the uniform discrete Inf-Sup condition for the EFIE on (X_h), and hence the convergence of the Galerkin solution u_h towards the exact one u.

When Γ is the boundary of a domain the electric field E satisfies $E \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{curl}}(\Omega)_{loc}$ (hence $\operatorname{curl} E \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{curl}}(\Omega)_{loc}$) for some $s > 1/2$ (see Birman-Solomyak [14] and Costabel-Dauge[33]) and the associated order of convergence is h^s. This is a very low order of convergence. In practice one often constructs locally refined meshes, for which one want to obtain $\|u - u_h\| \leq C(\dim X_h)^{-\sigma}$ for an

5. echoed here in section 2.2.2

as large as possible σ. The design of such meshes is still an open problem. It is even more important for open surfaces : for these the regularity order is an $s \in]0, 1/2[$.

In [130] techniques are developed that avoid the use of the exterior domain to obtain convergence rates and that could moreover be useful to study mesh-refinement strategies.

Though we have used many of the arguments of [44] the present study, when restricted to boundaries of domains, improves their final result ; indeed the regularity the Laplacian on Γ does not explicitly bound the orders of convergence we obtain (see the final remarks of [44]).

4.4.4 A regularity result for the Neumann Laplacian

We prove here the regularity result mentioned in the proof of Lemma 4.4.2. When Γ has no boundary it was established in Buffa-Costabel-Schwab [25] (Theorem 5.2), on advice from M. Dauge. For the present situation the proof needs only simple modifications.

For any vertex $v \in \Gamma$ ($v \in \partial\Gamma$ respectively), we denote by ω_v the closed (open respectively) piecewise smooth arc cut out in the unit sphere S^2 by the rays with origin at v which are tangent to Γ. Then ω_v is a curvilinear polygon (arc respectively) on S^2 which is a union of arcs of great circles.

Proposition 4.4.2 *Suppose $f \in \mathrm{H}^s(\Gamma)$ for some $s \geq -1/2$. Let $p \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet$ be the solution of the Neumann problem :*

$$\forall v \in \mathrm{H}^1(\Gamma)^\bullet \qquad \int_\Gamma \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} p' = \langle f, p' \rangle. \tag{4.4.37}$$

Then $u \in \mathrm{H}^{1+t}(\Gamma)$ for all $t < s^\star(s)$, with :

$$s^*(s) = \min\{\pi/L_\partial, 2\pi/L, s+1\}, \tag{4.4.38}$$

where $L_\partial = \max_{v\in\partial\Gamma}\{|\omega_v|\}$ and $L = \max_{v\in\Gamma}\{|\omega_v|\}$, $|\cdot|$ denoting total arc length.

–Proof : In order to determine the singularity we only need to analyze the singularity due to vertices belonging to $\partial\Gamma$. Let then $v \in \partial\Gamma$ be one such vertex and put $\ell = |\omega_v|$. Fix a system of polar coordinates (r, θ) with origin in v ; θ denotes the arc-length parameter on ω_v and r the distance from the vertex v. Following Grisvard [102] we look for trivial solution of the form $U(r, \theta) = r^\lambda u(\theta)$ of the problem:

$$\Delta_\Gamma U = 0, \quad (r, \theta) \in]0, \infty[\times]0, \ell[; \tag{4.4.39}$$

$$\partial_\theta U = 0, \quad (r, \theta) \in]0, \infty[\times\{0, \ell\}. \tag{4.4.40}$$

By separation of variables and simple manipulations, we obtain the following equation :

$$u''(\theta) + \lambda^2 u(\theta) = 0, \quad u'(0) = u'(\ell) = 0. \tag{4.4.41}$$

which admits non trivial solution only for $\lambda = k\pi/\ell$, $k = 1, 2, \cdots$. Then the first singular solution is $U(r,\theta) = r^{\pi/\ell}\cos(\frac{\pi}{\ell}\theta)$. The statement follows directly. □

Remark 4.4.6 *In formula (4.4.38), the first term is the singular exponent for the Neumann problem of the Laplace operator in the neighborhood of a vertex $v \in \partial\Gamma$, and reduces to the standard formula (see, e.g., [102]) when Γ is "flat" in a neighborhood of v, while the second term, which is relative to interior vertices, is the one appearing in [25] (Theorem 5.2).*

4.5 Addendum

4.5.1 A jump formula

As a complement to Theorem 4.3.2 we have the following Lemma which could be inserted just after it:

Lemma 4.5.1 *For any $u \in X$ we have $[\![\operatorname{curl}\mathfrak{A}_k u]\!]_\times = u$.*

–Proof : Indeed we have:

$$[\![\operatorname{curl}\mathfrak{A}_k u]\!]_\times \delta_\Gamma = \operatorname{curl}_{\mathbb{E}}\operatorname{curl}\mathfrak{A}_k u - \operatorname{curl}_\Omega \operatorname{curl}\mathfrak{A}_k u. \tag{4.5.1}$$

By Theorem 4.3.2 we have $\operatorname{curl}_\Omega \operatorname{curl}\mathfrak{A}_k u = k^2\mathfrak{A}_k u$ so we can therefore write:

$$\begin{aligned}
[\![\operatorname{curl}\mathfrak{A}_k u]\!]_\times \delta_\Gamma &= \operatorname{curl}_{\mathbb{E}}\operatorname{curl}\mathfrak{A}_k u - k^2\Phi_k u - \operatorname{grad}_{\mathbb{E}}\Phi_k(\operatorname{div} u) && (4.5.2)\\
&= -(\Delta_{\mathbb{E}} - k^2)\Phi_k u && (4.5.3)\\
&= u\delta_\Gamma. && (4.5.4)
\end{aligned}$$

The Lemma follows. □

Based on this lemma one can give an alternative proof of Corollary 4.3.3: Once it has been established that $\mathfrak{A}_k u = 0$ on just writes $u = [\![\operatorname{curl}\mathfrak{A}_k u]\!]_\times = 0$.

4.5.2 The Calderon approach to trace theorems

The above lemma suggests an alternative proof of Theorem 4.2.15, using the potential $\mathfrak{A}_k$ instead of the more elementary arguments based on Tartar's Theorem 4.2.13. Recall the definition of $\mathcal{X}$: it is the space of elements u of $\mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)'$ such that for some $q \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)'$ we have:

$$\forall p \in \mathscr{D}(\mathbb{E}) \quad \langle u, \gamma\operatorname{grad} p\rangle_{\mathbb{E}} = -\langle q, \gamma p\rangle. \tag{4.5.5}$$

In other words $\mathcal{X}$ is the space of elements u of $\mathrm{H}_{\mathbb{E}}^{1/2}(\Gamma)'$ such that for some $q \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$:

$$\operatorname{div}_{\mathbb{E}}(u\delta_\Gamma) = q\delta_\Gamma. \tag{4.5.6}$$

Remark that q is thus uniquely determined by u. To prove Theorem 4.2.15 it now suffices to check that if we put :

$$v = \Phi_k u + 1/k^2 \operatorname{grad} \Phi_k q = g_k * (1 + 1/k^2 \operatorname{grad}_{\mathbb{E}} \operatorname{div}_{\mathbb{E}})(u\delta_\Gamma), \tag{4.5.7}$$

then $\operatorname{curl} v \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}\setminus\overline{\Gamma})$ and $[\![\operatorname{curl} v]\!]_\times = u$. This is done as above but we repeat the reasoning since the arguments are somewhat rearranged.

We use here a complex wavenumber $k \in \mathbb{R}_+^* i$ to get rapidly decreasing potentials and put $\Omega = \mathbb{E} \setminus \overline{\Gamma}$. The standard results on the potential Φ_k show that $v \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E})$. Moreover using equation (4.5.6) as in (4.3.21) one obtains $\operatorname{div}_\Omega v = 0$. Also v solves Helmholtz equation in Ω. It follows that $\operatorname{curl}_\Omega \operatorname{curl} v = k^2 v$. In particular $\operatorname{curl} v \in \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\Omega)$. Then the proof of the above Lemma gives $[\![\operatorname{curl} v]\!]_\times = u$.

As already remarked it follows that $\gamma_{\mathrm{T}} : \mathrm{H}_{\mathrm{curl}}(\mathbb{E}) \to X'$ is continuous, and the study of the EFIE (possibly for some $k \in \mathbb{R}_+^* i$ to get a SPD operator) shows that this tangential trace mapping is *onto*. The use of layer potentials to study traces was advocated by Calderon.

Annexes

Annexe A

Conditions Inf-Sup

A.1 Discrétisation des problèmes variationnels

Soient X et Y deux espaces de Banach. Le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $X \times Y$. Nos problèmes de base sont symétriques. Cependant nous aurons à résoudre des problèmes auxilliaires asymétriques. C'est pourquoi nous considérons ici ce cadre plus général. Le lecteur pourra vérifier qu'aucune démonstration n'est sensiblement allongée de ce fait.

Nous notons $\mathcal{A}$ l'application :

$$\mathcal{A}\left\{\begin{array}{ccc} X & \to & Y^\star \\ u & \mapsto & a(u,\cdot) \end{array}\right. \tag{A.1.1}$$

Etant données deux familles (X_h) et (Y_h) de sous espaces de dimension finie de X et Y, nous introduisons de même les applications $\mathcal{A}_h : X_h \to Y_h^\star$.

Etant donné $l \in Y^\star$ nous souhaitons résoudre de façon approchée le problème variationnel :

$$u \in X \quad \text{et} \quad \forall v \in Y \quad a(u,v) = l(v). \tag{A.1.2}$$

Pour cela nous considérons le problème dit *discret* par opposition au problème précédent, dit *continu* :

$$u \in X_h \quad \text{et} \quad \forall v \in Y_h \quad a(u,v) = l(v). \tag{A.1.3}$$

Le problème continu s'écrit aussi :

$$u \in X \quad \text{et} \quad \mathcal{A}u = l, \tag{A.1.4}$$

alors que le problème discret est :

$$u \in X_h \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_h u = l|_{Y_h}. \tag{A.1.5}$$

Nous donnons maintenant des conditions suffisantes pour que les systèmes ci-dessus admettent une et une seule solution.

A.2 Conditions Inf-Sup

Supposons d'abord $\mathcal{A}$ inversible. Alors on a :

$$\|\mathcal{A}^{-1}\| = \sup_{l\in Y^\star} \frac{\|\mathcal{A}^{-1}l\|_X}{\|l\|_{Y^\star}} = \sup_{u\in X} \frac{\|u\|_X}{\|\mathcal{A}u\|_{Y^\star}}, \tag{A.2.1}$$

donc :

$$\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} = \inf_{u\in X} \frac{\|\mathcal{A}u\|_{Y^\star}}{\|u\|_X} = \inf_{u\in X}\sup_{v\in Y} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|_X\|v\|_Y}. \tag{A.2.2}$$

Maintenant, (que $\mathcal{A}$ soit inversible ou pas) on pose :

$$\alpha = \inf_{u\in X} \frac{\|\mathcal{A}u\|_{Y^\star}}{\|u\|_X} = \inf_{u\in X}\sup_{v\in Y} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|_X\|v\|_Y}. \tag{A.2.3}$$

Si $\alpha > 0$ alors $\mathcal{A}$ est injective et d'image fermée, et la réciproque est conséquence des théorèmes standards. Donc $\mathcal{A}$ est inversible ssi $\alpha > 0$ et son image est dense. Cette dernière assertion est équivalente à l'injectivité de son adjoint $\mathcal{A}^\star : Y^{\star\star} \to X^\star$. L'apparition de celui-ci nous incite à considérer le problème dual.

Soit $\hat{a}$ la forme bilinéaire sur $Y \times X$ définie par :

$$\hat{a}(v,u) = a(u,v). \tag{A.2.4}$$

Soit $\hat{\mathcal{A}}$ l'application associée à $\hat{a}$, de la même façon que $\mathcal{A}$ est associée à a, i.e. :

$$\hat{\mathcal{A}}\left\{\begin{array}{ccc} Y & \to & X^\star \\ v & \mapsto & a(\cdot,v)\end{array}\right. \tag{A.2.5}$$

Nous dirons que a est inversible si $\mathcal{A}$ et $\hat{\mathcal{A}}$ sont des isomorphismes.

Pour tout Banach Z on note i_Z l'injection canonique $Z \to Z^{\star\star}$. Avec cette notation on a :

$$(\hat{\mathcal{A}}v)u = a(u,v) = (\mathcal{A}u)v = (i_Y v)(\mathcal{A}u) = (\mathcal{A}^\star(i_Y v))u. \tag{A.2.6}$$

Donc :

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^\star \circ i_Y, \tag{A.2.7}$$

et par répétition :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\star \circ i_Y)^\star \circ i_X = i_Y^\star \circ \mathcal{A}^{\star\star} \circ i_X. \tag{A.2.8}$$

Soit $\hat{\alpha}$ l'Inf-Sup (primal) associé à $\hat{a}$, i.e. :

$$\hat{\alpha} = \inf_{v\in Y}\sup_{x\in X} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|_X\|v\|_Y}. \tag{A.2.9}$$

Si $\mathcal{A}$ et $\hat{\mathcal{A}}$ sont inversibles alors $\alpha > 0$ et $\hat{\alpha} > 0$ mais la réciproque est fausse en général ; en effet si on considère la forme bilinéaire a sur $X \times X^\star$ définie par :

$$a(u, v) = v(u), \tag{A.2.10}$$

alors :

$$\mathcal{A} = i_X \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{A}} = I_{X^\star}. \tag{A.2.11}$$

Donc $\alpha = 1$ (i_X est une isométrie), $\hat{\alpha} = 1$ et $\hat{\mathcal{A}}$ est inversible ; mais $\mathcal{A}$ est inversible si et seulement si X est réflexif.

Cet exemple montre aussi qu'on a :

$$I_{X^\star} = (i_X)^\star \circ i_{X^\star}. \tag{A.2.12}$$

Ceci entraine que X est réflexif si et seulement si $X^\star$ l'est.

Proposition A.2.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach et a une forme bilináire continue sur $X \times Y$. On a :*

(i) *Si $a(\cdot, \cdot)$ est inversible alors X et Y sont réflexifs et :*

$$\alpha = \hat{\alpha} > 0 \tag{A.2.13}$$

(ii) *Si Y est réflexif, $\alpha > 0$ et $\hat{\mathcal{A}}$ est injectif (en particulier si $\hat{\alpha} > 0$), alors $a(\cdot, \cdot)$ est inversible.*

–Démonstration : (i) Si $a(\cdot, \cdot)$ est inversible alors $\mathcal{A}$ est inversible, donc $\mathcal{A}^\star$ est inversible et :

$$i_Y = \mathcal{A}^{\star -1} \hat{\mathcal{A}}, \tag{A.2.14}$$

donc Y est réflexif. De même X est réflexif. On a, entre autre parce que i_Y est une isométrie :

$$\alpha^{-1} = \|\mathcal{A}^{-1}\| = \|\mathcal{A}^{\star -1}\| = \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\| = \hat{\alpha}^{-1}. \tag{A.2.15}$$

(ii) Sous ces hypothèses $\mathcal{A}$ est injectif et d'image fermée, et $\mathcal{A}^\star = \hat{\mathcal{A}} \circ i_Y^{-1}$ est injectif. Donc $\mathcal{A}$ est inversible, et $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^\star \circ i_Y$ aussi. □

A.3 Conditions Inf-Sup discrètes

On pose :

$$\alpha_h = \inf_{u \in X_h} \sup_{v \in Y_h} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_X \|v\|_Y} \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_h = \inf_{v \in Y_h} \sup_{u \in X_h} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_X \|v\|_Y}. \tag{A.3.1}$$

Proposition A.3.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach et a une forme bilináire continue sur $X \times Y$. Soient $X_h \subset X$ et $Y_h \subset Y$ deux sous-espaces de dimensions finies. On a :*

(i) *$\mathcal{A}_h$ est inversible ssi $\alpha_h > 0$ et $\hat{\alpha}_h > 0$.*

(ii) *Si* $\dim X_h = \dim Y_h$ *alors* $\alpha_h = \hat{\alpha}_h$.

–Démonstration : La seule originalité est que si $\dim X_h = \dim Y_h$ alors $\alpha_h = \hat{\alpha}_h$ même s'ils sont nuls. Les démonstrations sont des conséquences directes des théorèmes standards en dimension finie. □

Concernant la norme de $\mathcal{A}_h^{-1}$ nous avons les résultats suivants. D'abord :

$$\|\mathcal{A}_h^{-1}\|_{Y_h^\star \to X_h} = \alpha_h^{-1}. \tag{A.3.2}$$

Ensuite, soit $r_h : Y^\star \to Y_h^\star$ l'application de restriction. On a $\|r_h\| = 1$. Donc :

$$\|\mathcal{A}_h^{-1} \circ r_h\|_{Y^\star \to X_h} \leq \|\mathcal{A}_h^{-1}\|_{Y_h^\star \to X_h}. \tag{A.3.3}$$

D'autre part si on suppose que Y est un Hilbert et si on note P_{Y_h} la projection orthogonale $Y \to Y_h$ on a :

$$\|\mathcal{A}_h^{-1}\|_{Y_h^\star \to X_h} = \sup_{l_h \in Y_h^\star} \frac{\|\mathcal{A}_h^{-1} l_h\|_X}{\|l_h\|_{Y_h^\star}} = \sup_{l_h \in Y_h^\star} \frac{\|(\mathcal{A}_h^{-1} \circ r_h)(l_h \circ P_{Y_h})\|_X}{\|l_h \circ P_{Y_h}\|_{Y^\star}}. \tag{A.3.4}$$

Donc au total :

$$\|\mathcal{A}_h^{-1}\|_{Y_h^\star \to X_h} = \|\mathcal{A}_h^{-1} \circ r_h\|_{Y^\star \to X}. \tag{A.3.5}$$

Cependant il n'y a pas de relation entre α_h et α.

On suppose $\dim X_h = \dim Y_h$ et $\alpha_h > 0$. Alors on note $P_h^a : X \mapsto X_h$ le projecteur de Ritz associé à a, qui à $u \in X$ associe la solution u_h de :

$$u_h \in X_h \quad \text{et} \quad \forall v \in Y_h \quad a(u_h, v) = a(u, v). \tag{A.3.6}$$

Ceci s'écrit aussi :

$$P_h^a(u) = \mathcal{A}_h^{-1}((\mathcal{A}u)|_{Y_h}). \tag{A.3.7}$$

Proposition A.3.2 *Soient X et Y deux espaces de Banach, a une forme bilinéaire continue sur $X \times Y$ et $X_h \subset X$ et $Y_h \subset Y$ deux sous-espaces de dimensions finies. On suppose que la restriction de $a(\cdot,\cdot)$ à $X_h \times Y_h$ est inversible. On a :*

$$\hat{\alpha} \leq \alpha_h \|P_h^a\| \leq \|a\|. \tag{A.3.8}$$

–Démonstration : (i) Pour tout $u \in X$ on a :

$$\alpha_h \|P_h^a u\| \leq \sup_{v \in Y_h} \frac{|a(P_h^a u, v)|}{\|v\|} = \sup_{v \in Y_h} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|} \leq \|a\|\|u\|. \tag{A.3.9}$$

L'inégalité de droite en découle.

(ii) Soit $u \in X_h$. On a :

$$\alpha \|u\| \leq \sup_{v \in Y} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|} = \sup_{v \in Y} \frac{|a(u, P_h^{\hat{a}} v)|}{\|v\|}. \tag{A.3.10}$$

Or pour tout $v \in Y$, $\|v\| \geq \|P_h^{\hat{a}}\|^{-1}\|P_h^{\hat{a}}v\|$. Donc :

$$\alpha\|u\| \leq \|P_h^{\hat{a}}\| \sup_{v\in Y} \frac{|a(u, P_h^{\hat{a}}v)|}{\|P_h^{\hat{a}}v\|} = \|P_h^{\hat{a}}\| \sup_{v\in Y_h} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|}. \tag{A.3.11}$$

Il s'ensuit que :

$$\alpha\|P_h^{\hat{a}}\|^{-1} \leq \alpha_h. \tag{A.3.12}$$

De façon symétrique :

$$\hat{\alpha}\|P_h^{a}\|^{-1} \leq \hat{\alpha}_h. \tag{A.3.13}$$

Or $\alpha_h = \hat{\alpha}_h$, donc l'inégalité de gauche en découle. □

Remarquons que nous n'avons pas supposé X ou Y réflexif ou $a(\cdot,\cdot)$ inversible. Cette proposition établit dans de nombreux cas l'équivalence entre la stabilité du projecteur de Ritz et la condition Inf-Sup uniforme.

Soit $u \in X$. Pour tout $u' \in X_h$ on a :

$$\|u - P_h^a u\| = \|u - u' + u' - P_h^a u\| = \|u - u' - P_h^a(u - u')\| \tag{A.3.14}$$

$$\leq (1 + \|P_h^a\|)\|u - u'\|. \tag{A.3.15}$$

On obtient ainsi :

Proposition A.3.3 *Sous les hypothèses de la proposition précédente on a pour tout $u \in X$:*

$$\|u - P_h^a u\| \leq (1 + \|a\|/\alpha_h) \inf_{u'\in X_h} \|u - u'\|. \tag{A.3.16}$$

Il suffit donc que (en plus du fait que $\dim X_h = \dim Y_h$) :

$$\inf_h \alpha_h > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall u \in X \quad \lim_h \inf_{u'\in X_h} \|u - u'\| = 0, \tag{A.3.17}$$

pour que $P_h^a u$ converge vers u pour tout u. Quand les α_h sont uniformément minorés par un réel strictement positif on dit aussi que $a(\cdot,\cdot)$ satisfait une *condition Inf-Sup discrète uniforme*. Les conditions Inf-Sup sont dues à Babuska [6]. Quand la deuxième condition dans A.3.17 est satisfaite on dit que la famille (X_h) est *approchante*.

On remarque par ailleurs que si pour tout $u \in X$, $P_h^a u$ converge vers u, alors $\|P_h^a\|$ est bornée uniformément en h en vertu des théorèmes généraux, et donc a satisfait une condition Inf-Sup discrète uniforme.

A.4 Forme linéaire et bilinéaire approchées

Revenons à la résolution d'un problème variationnel :

$$u \in X \quad \text{et} \quad \forall v \in Y \quad a(u,v) = l(v). \tag{A.4.1}$$

Soit $a_h(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire sur $X_h \times Y_h$. Posons :

$$\sup_{u\in X_h}\sup_{v\in Y_h}\frac{|a(u,v)-a_h(u,v)|}{\|u\|_X\|v\|_Y}=\beta_h \tag{A.4.2}$$

On se donne aussi une forme linéaire l_h sur Y_h –qui n'est pas a priori la restriction de l– et on considère le problème dit *discret approché* :

$$u\in X_h \quad \text{et} \quad \forall v\in Y_h \quad a_h(u,v)=l_h(v). \tag{A.4.3}$$

Nous commençons par écrire une condition Inf-Sup sur $a_h(\cdot,\cdot)$. Pour tout $u\in X_h$:

$$\sup_{v\in Y_h}\frac{|a_h(u,v)|}{\|v\|_Y}\geq\sup_{v\in Y_h}\frac{|a(u,v)|}{\|v\|_Y}-\sup_{v\in Y_h}\frac{|a(u,v)-a_h(u,v)|}{\|v\|_Y}. \tag{A.4.4}$$

Donc :

$$\inf_{u\in X_h}\sup_{v\in Y_h}\frac{|a_h(u,v)|}{\|u\|_X\|v\|_Y}\geq\alpha_h-\beta_h. \tag{A.4.5}$$

Par ailleurs, si on note u_h la solution du problème discret sur X_h, on a pour tout $u\in X_h$:

$$\begin{aligned}
\|u-u_h\|_X &\leq \frac{1}{\alpha_h}\sup_{v\in Y_h}\frac{|a(u-u_h,v)|}{\|v\|_Y}=\frac{1}{\alpha_h}\sup_{v\in Y_h}\frac{|a(u,v)-l(v)|}{\|v\|_Y} && \text{(A.4.6)}\\
&\leq \frac{1}{\alpha_h}\sup_{v\in Y_h}\frac{|a(u,v)-a_h(u,v)+a_h(u,v)-l_h(v)+l_h(v)-l(v)|}{\|v\|_Y} && \text{(A.4.7)}\\
&\leq \frac{1}{\alpha_h}(\beta_h\|u\|_X+\sup_{v\in Y_h}\frac{|a_h(u,v)-l_h(v)|}{\|v\|_Y}+\|l-l_h\|_{Y_h^\star}) && \text{(A.4.8)}
\end{aligned}$$

En particulier si $\alpha_h-\beta_h>0$, le problème discret approché admet une unique solution $\tilde{u}_h$ et celle-ci vérifie :

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_h-u_h\|_X &\leq \frac{1}{\alpha_h}(\frac{\beta_h}{\alpha_h-\beta_h}\|l_h\|_{Y_h^\star}+\|l-l_h\|_{Y_h^\star}) && \text{(A.4.9)}\\
&\leq \frac{1}{\alpha_h}(\frac{\beta_h}{\alpha_h-\beta_h}\|l\|_{Y^\star}+\frac{\alpha_h}{\alpha_h-\beta_h}\|l-l_h\|_{Y_h^\star}) && \text{(A.4.10)}
\end{aligned}$$

Donc si :

$$\lim_h\beta_h=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_h\|l-l_h\|_{Y_h^\star}=0, \tag{A.4.11}$$

alors la solution du problème discret approché converge vers la solution du problème continu. D'autre part on voit dans quelle mesure la vitesse de convergence est conservée : Notons u_0 la solution du problème continu. Si $\inf_h\alpha_h>0$ et $\beta_h\to 0$ il existe $C>0$ et $\overline{h}$ tel que pour $h<\overline{h}$ on a :

$$\|u_0-\tilde{u}_h\|\leq C\max\Big\{\inf_{u\in X_h}\|u_0-u\|,\ \beta_h\|u_0\|,\ \|l-l_h\|_{Y_h^\star}\Big\}. \tag{A.4.12}$$

Les premières études de ce type ont été faites par Strang [76], et permettent de justifier par exemple l'emploi de formules de quadrature pour le calcul des coefficients des matrices de Galerkin, ou l'utilisation de géométries approchées.

Il apparait aussi, au vu du deuxième terme du second membre de (A.4.8), qu'on peut se permettre de résoudre le problème discret approché de façon approchée, c'est à dire se contenter d'un $\tilde{u}_h \in X_h$ tel que la forme linéaire $a_h(\tilde{u}_h, \cdot) - l_h(\cdot)$ soit petite sur Y_h. On ajoute ainsi un troisième étage d'approximation au problème continu. Ce type d'erreur correspond à celui qu'on s'autorise lorsqu'on utilise une méthode itérative pour résoudre les systèmes matriciels.

A.5 Perturbations compactes

Il est bien connu, et souvent attribué à Mikhlin, que pour des formes bilinéaires non-dégénérées, qui s'écrivent comme somme d'une forme coercive a et d'une forme compacte b on a, sous des hypothèses naturelles, une condition Inf-Sup discrète uniforme; voir par exemple Demkowicz [35]. Plus généralement on a la variante suivante de ce fait, qui ne suppose pas que la forme principale a soit coercive et qui montre que les conditions de compatibilité de Brezzi [21], pour la discrétisation de points-selles, sont stables par perturbations compactes injectives. Remarquons que si a représente une forme coercive, celle-ci vérifie trivialement une condition Inf-Sup discrète uniforme.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme A.5.1 *Soit X et Y deux espaces de Banach réflexifs. Soit $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ une application linéaire continue injective et d'image fermée. Alors pour tout $l \in X^\star$ il existe $v \in Y$ tel que :*

$$\forall u \in X \quad l(u) = (\mathcal{A}u)(v). \tag{A.5.1}$$

–Démonstration : Remarquons d'abord que $\mathcal{A}$ induit un isomorphisme d'espaces de Banach $X \to \mathcal{A}(X)$. Soit $\mathcal{Z}$ son inverse. Soit $l \in X^\star$. Posons $f = \mathcal{Z}^\star l \in (\mathcal{A}(X))^\star$. Etendons f en une forme linéaire continue sur $Y^\star$ et posons $v = (i_Y)^{-1} f$. Pour tout $u \in X$ on a :

$$(\mathcal{A}u)(v) = f(\mathcal{A}u) = l(\mathcal{Z}\mathcal{A}u) = l(u), \tag{A.5.2}$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition A.5.2 *Soient X et Y deux espaces de Banach réflexifs, et soit $\mathcal{A} : X \to Y^\star$ une application linéaire continue d'image fermée. Soit $\mathcal{B} : X \to Y^\star$ un opérateur compact. Soient (X_h) et (Y_h) deux familles de sous-espaces de dimensions finies de X and Y. Supposons que (Y_h) est approchante, que $\mathcal{A}$ satisfait une condition Inf-Sup (à gauche) uniforme sur $(X_h \times Y_h)$, et que $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ est injective.*

Alors il existe $\overline{h} > 0$ *et* $C > 0$ *tel que pour tout* $h < \overline{h}$ *on a :*

$$\inf_{u \in X_h} \sup_{v \in Y_h} \frac{|(\mathcal{A}+\mathcal{B})(u)(v)|}{\|u\| \ \|v\|} \geq 1/C \tag{A.5.3}$$

–Démonstration : Sinon, soient (u_n) et (h_n) deux suites telles que :

$$u_n \in X_{h_n}, \quad \|u_n\| = 1, \quad \lim_n h_n = 0, \tag{A.5.4}$$

$$\lim_n \sup_{v \in Y_{h_n}} |(\mathcal{A}+\mathcal{B})(u_n)(v)|/\|v\| = 0. \tag{A.5.5}$$

Puisque (Y_{h_n}) est approchante on a :

$$\forall v \in Y \quad \lim_n (\mathcal{A}+\mathcal{B})(u_n)(v) = 0. \tag{A.5.6}$$

D'après le lemme précédent il s'ensuit que pour tout $l \in X^\star$:

$$\lim_n l(u_n) = 0. \tag{A.5.7}$$

Puisque $\mathcal{B}$ est compact, $(\mathcal{B}u_n)$ converge en norme vers 0. La suite (u_n) viole alors la condition Inf-Sup uniforme pour $\mathcal{A}$ sur $(X_h \times Y_h)$. □

Annexe B

Gradients Conjugués

B.1 Introduction

Il y a plusieurs façons de présenter l'algorithme des gradients conjugués (CG) et sa variante préconditionnée (PCG) : à partir des méthodes de tridiagonalisation (Lanczos [88]) ou comme une variante des algorithmes de descente suivant le gradient (Hestenes-Stiefel [87]). C'est cette dernière possibilité qui est choisie ici. Cependant notre exposé est suffisamment général pour traiter les matrices complexes symétriques (plutôt qu'Hermitiennes) dont le cadre historique est plutôt la tridiagonalisation des matrices, ou encore des opérateurs entre espaces de Hilbert.

Il est à noter que nous ne supposons pas que ces opérateurs soient des endomorphismes continus d'un espace de Hilbert, mais plutôt des applications linéaires continues d'un espace de Hilbert vers un autre. Ainsi la présentation s'applique naturellement aux opérateurs *non-bornés* sur les espaces L^2, qui constituent une classe importante d'opérateurs nécessitant l'emploi de préconditionneurs.

Plus généralement, soit $\mathbb{K}$ un corps (quelconque). Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire non dégénérée sur $Y \times X$. Soit A un opérateur $X \to Y$ symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au sens $\langle Ax, x' \rangle = \langle Ax', x \rangle$, et y dans Y. Nous voulons résoudre l'équation $Ax = y$. On introduit la quantité $r(x) = y - Ax$, appellée *résidu*.

Interprétation standard. On gardera à l'esprit l'interprétation standard : X et Y sont des espaces des espaces de Hilbert réels, et $A : X \to Y$ est un opérateur symétrique borné et coercif au sens où pour un $\alpha > 0$, $\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$. Alors nous minimisons la fonctionnelle :

$$J : x \mapsto (1/2)\langle Ax, x \rangle - \langle y, x \rangle. \tag{B.1.1}$$

On rappelle que $(x, x') \mapsto \langle Ax, x' \rangle$ est un produit scalaire sur X, et qu'on note $\|\cdot\|_A$ la norme correspondante. L'exemple type de cette situation est (sur les fonctions réelles) $X = \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, $Y = \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la dualité usuelle et $A = \Delta$.

Le cas des espaces de Hilbert complexes est traité dans la mesure où si $(\!(\cdot|\cdot)\!)$ est un produit scalaire Hermitien, $(x|x') = \mathfrak{Re}(\!(x|x')\!)$ est un produit scalaire réel.

Autre interprétation. Cependant une autre interprétation sera pour nous toute aussi importante: Dans le cas complexe nous n'aurons pas seulement affaire à des opérateurs Hermitiens mais aussi à des opérateurs symétriques pour une forme bilinéaire complexe canonique. Ainsi sur $\mathbb{C}^N$ on fera intervenir soit la forme bilinéaire complexe canonique (pour les matrices complexes symétriques), soit le produit scalaire réel défini comme ci-dessus à partir de la forme Hermitienne canonique (pour les matrices Hermitiennes i.e. symétriques en tant que matrices réelles).

B.2 L'algorithme des gradients conjugués préconditionnés

Il s'écrit sous la forme générale suivante:

$$\begin{array}{lllll}
\text{initialisations:} & x_0 & & & \in X \\
& r_0 & = & y - Ax_0 & \\
& s_0 & & & \in X \\
& p_0 & = & s_0 & \\
\\
\text{itérations:} & \alpha_{i+1} & & & \in \mathbb{K} \\
& x_{i+1} & = & x_i + \alpha_{i+1} p_i & \\
& r_{i+1} & = & r_i - \alpha_{i+1} A p_i & \\
& s_{i+1} & & & \in X \\
& \beta_{i+1} & & & \in \mathbb{K} \\
& p_{i+1} & = & s_{i+1} + \beta_{i+1} p_i &
\end{array} \tag{B.2.1}$$

Il reste à expliciter les choix pour α, β et s. Pour nous guider dans ces choix nous notons que dans l'interprétation standard:

$$\mathrm{d}J(x_i) = \langle Ax_i - y, \cdot \rangle = -\langle r_i, \cdot \rangle. \tag{B.2.2}$$

On voit donc que x_i minimise J sur un sous espace-affine contenant x_i et d'espace vectoriel tangent T ssi pour tout t dans T, $\langle r_i, t \rangle = 0$. Pour nous T sera un espace vectoriel engendré par des *directions de descente* p_j pour $j < i$. La propriété remarquable de la variante préconditionnée de CG, démontrée dans la proposition B.3.1, est qu'il suffit d'imposer $\langle r_i, p_{i-1} \rangle = 0$ et $\langle r_i, p_{i-2} \rangle = 0$, pour que $\langle r_i, p_j \rangle = 0$ pour tout $j < i$.

Détermination de α_{i+1}. On a : $\langle r_{i+1}, p_i\rangle = \langle r_i - \alpha_{i+1}Ap_i, p_i\rangle$.
Si $\langle Ap_i, p_i\rangle \neq 0$ on pose donc :

$$\alpha_{i+1} = \frac{\langle r_i, p_i\rangle}{\langle Ap_i, p_i\rangle}. \tag{B.2.3}$$

- Si $i = 0$, $\langle r_i, p_i\rangle = \langle r_i, s_i\rangle$.
- Si $i \geq 1$ et $\langle r_i, p_{i-1}\rangle = 0$, alors $\langle r_i, p_i\rangle = \langle r_i, s_i + \beta_i p_{i-1}\rangle = \langle r_i, s_i\rangle$.

Donc, par récurrence on obtient :

$$\alpha_{i+1} = \frac{\langle r_i, s_i\rangle}{\langle Ap_i, p_i\rangle}. \tag{B.2.4}$$

Détermination de β_{i+1}. On a : $\langle r_{i+2}, p_i\rangle = \langle r_{i+1} - \alpha_{i+2}Ap_{i+1}, p_i\rangle$, donc :

$$\alpha_{i+1}\langle r_{i+2}, p_i\rangle = \alpha_{i+2}\langle -\alpha_{i+1}Ap_i, p_{i+1}\rangle = \alpha_{i+2}\langle r_{i+1} - r_i, s_{i+1} + \beta_{i+1}p_i\rangle. \tag{B.2.5}$$

Si $\langle r_i, s_i\rangle \neq 0$ on pose donc :

$$\beta_{i+1} = \frac{\langle r_{i+1} - r_i, s_{i+1}\rangle}{\langle r_i, s_i\rangle}. \tag{B.2.6}$$

Cette formule donne la variante Polak-Ribière de PCG (cf. [91]).

Préconditionneur. Supposons que pour un $B : Y \to X$ symétrique au sens $\langle y, By'\rangle = \langle y', By\rangle$, on ait pour tout i, $s_i = Br_i$.

On a : $\langle r_i, s_{i+1}\rangle = \langle r_i, Br_{i+1}\rangle = \langle r_{i+1}, Br_i\rangle = \langle r_{i+1}, s_i\rangle$.

- Si $i = 0$, $\langle r_{i+1}, s_i\rangle = \langle r_1, p_0\rangle = 0$.
- Si $i \geq 1$, $\langle r_{i+1}, s_i\rangle = \langle r_{i+1}, p_i - \beta_i p_{i-1}\rangle = 0$

Donc :

$$\beta_{i+1} = \frac{\langle r_{i+1}, s_{i+1}\rangle}{\langle r_i, s_i\rangle}. \tag{B.2.7}$$

Cette formule donne la variante Fletcher-Reeves de PCG (cf. [82]).

La variante de Hestenes-Stiefel était pour $i \geq 1$:

$$\beta_{i+1} = \frac{\langle r_{i+1} - r_i, s_{i+1}\rangle}{\langle r_i - r_{i-1}, s_i\rangle}. \tag{B.2.8}$$

mais nous ne nous en servirons pas.

Dans l'interprétation standard s_i est l'opposé du gradient de J par rapport au produit scalaire induit par B^{-1}. Un PCG est donc une descente suivant le gradient de J pour un produit scalaire donné par B et corrigé par la direction de descente précédente.

En présence d'erreurs d'arrondi provenant de la représentation machine des scalaires ou en présence d'erreurs d'approximation provenant d'une méthode du type multipôles ou d'une résolution approchée de systèmes linéaires auxilliaires, le choix entre les variantes Fletcher-Reeves et Polak-Ribière peut ne pas être anodin. Historiquement les deux variantes proviennent d'extensions de CG à des problèmes non-linéaires, où ce choix a aussi son importance.

B.3 Propriétés d'orthogonalité

Pour tout i on pose $\mathfrak{K}^i = \{P(BA)s_0 \ : \ P \in \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad \deg P \leq i\}$, appelé sous-espace de Krylov d'indice i.

Proposition B.3.1 *Tant qu'une division par 0 n'a pas lieu on a :*

$$\begin{array}{ll} \textit{(a) pour } 0 \leq i & \mathrm{Vect}(p_0, \cdots, p_i) = \mathrm{Vect}(s_0, \cdots, s_i) \\ \textit{(b) pour } 0 \leq j < i & \langle r_i, p_j \rangle = 0 \quad \textit{et} \quad \langle Ap_i, p_j \rangle = 0 \\ \textit{(c) pour } 0 \leq i & \mathrm{Vect}(p_0, \cdots, p_i) = \mathfrak{K}^i \end{array} \tag{B.3.1}$$

–*Démonstration* : (a) Cette égalité est triviale.

(b) On procède par récurrence.

– On a bien $\langle r_1, p_0 \rangle = 0$.

– Si pour un $i \geq 1$ on a pour $j < i$, $\langle r_i, p_j \rangle = 0$ et pour $j < i-1$, $\langle Ap_{i-1}, p_j \rangle = 0$,
alors $\langle r_{i+1}, p_i \rangle = 0$, $\langle r_{i+1}, p_{i-1} \rangle = 0$ et, pour $j < i-1$:

$$\begin{array}{rcl} \langle r_{i+1}, p_j \rangle & = & \langle r_i - \alpha_{i+1} Ap_i, p_j \rangle \\ & = & -\alpha_{i+1} \langle A(s_i + \beta_i p_{i-1}), p_j \rangle \\ & = & -\alpha_{i+1} \langle Ap_j, s_i \rangle \\ & = & \alpha_{i+1} {\alpha_{j+1}}^{-1} \langle r_{j+1} - r_j, s_i \rangle \\ & = & \alpha_{i+1} {\alpha_{j+1}}^{-1} \langle r_i, s_{j+1} - s_j \rangle \\ & = & 0 \ ; \end{array} \tag{B.3.2}$$

et pour $j < i$, $\langle Ap_i, p_j \rangle = -{\alpha_{i+1}}^{-1} \langle r_{i+1} - r_i, p_j \rangle = 0$.

(c) On procède par récurrence.

– On a bien $\mathrm{Vect}(p_0) = \mathfrak{K}^0$.

– Si pour un $i \geq 0$, $\mathrm{Vect}(p_0, \cdots, p_i) = \mathfrak{K}^i$, alors :

$$\begin{array}{rlll} & \mathrm{Vect}(p_0, \cdots, p_{i+1}) & & \\ = & \mathrm{Vect}(p_0, \cdots, p_i) & + \ \mathbb{K} p_{i+1} & \\ = & & + \ \mathbb{K}(s_{i+1} + \beta_{i+1} p_i) & \text{or } \beta_{i+1} p_i \in \mathrm{Vect}(p_0, \cdots, p_i) \\ = & & + \ \mathbb{K} B r_{i+1} & \\ = & & + \ \mathbb{K} B(r_i - \alpha_{i+1} Ap_i) & \text{or } Br_i = s_i \in \mathrm{Vect}(p_0, \cdots, p_i) \\ = & & + \ \mathbb{K} BAp_i & \\ \subset & \mathfrak{K}^{i+1} & & \end{array} \tag{B.3.3}$$

L'égalité s'ensuit pour des raisons de dimension.

□

B.4 Vitesse de convergence

Nous nous plaçons ici dans l'interprétation standard. Dans le cas général nous notons seulement que l'algorithme peut s'arrêter sans que le système ait été résolu. Nous notons $x_\star$ la solution de l'équation $Ax = y$, et $\|\cdot\|_A$ la norme de X induite par le produit scalaire $\langle A\cdot, \cdot\rangle$. Elle induit la topologie usuelle de X.

Estimation générale. Pour tout x dans X :

$$J(x) = (1/2)(\|x - x_\star\|_A^2 - \|x_\star\|_A^2) \tag{B.4.1}$$

D'autrepart $\mathrm{d}J(x_{i+1}) = \langle r_{i+1}, \cdot\rangle$ est nul sur $\mathfrak{K}^i$, donc J atteint son minimum sur $x_0 + \mathfrak{K}^i$ en x_{i+1}. Donc pour tout polynome réel P tel que $\deg P \leq i$:

$$\|x_{i+1} - x_\star\|_A \leq \|P(BA)s_0 + x_0 - x_\star\|_A \tag{B.4.2}$$

Or $s_0 = BA(x_\star - x_0)$, donc pour tout P tel que $\deg P \leq i+1$ et $P(0) = 1$ on a :

$$\|x_{i+1} - x_\star\|_A \leq \|P(BA)(x_0 - x_\star)\|_A \tag{B.4.3}$$

On applique le théorème spectral à la forme bilinéaire induite par A sur l'espace X muni du produit scalaire induit par B^{-1} et on note σ le spectre associé. Alors on obtient le résultat classique :

Proposition B.4.1 *Pour tout i, pour tout polynome réel P tel que* $\deg P \leq i+1$ *et* $P(0) = 1$, *on a :*

$$\|x_i - x_\star\|_A \leq \max\{|P(\lambda)| \ : \ \lambda \in \sigma\}\|x_0 - x_\star\|_A \tag{B.4.4}$$

Dans cette formule on peut même se restreindre aux $\lambda \in \sigma$ tels que $x_0 - x_\star$ a une composante non nulle sur λ.

Propriété de contraction. Etant donnés $0 < a < b$, le problème de minimiser :

$$\max\{|P(\lambda)| \ : \ \lambda \in [a,b]\} \text{ sur } \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ \deg P \leq i+1 \quad \text{et} \quad P(0) = 1\} \tag{B.4.5}$$

admet une unique solution (voir par exemple [128]) exprimable grâce aux polynômes de Tchebytchev et donne le :

Corollaire B.4.2 *Pour tout i on a :*

$$\|x_i - x_\star\|_A \leq 2(\frac{\nu - 1}{\nu + 1})^i \|x_0 - x_\star\|_A \ \textit{avec}\ \nu = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{2}} \tag{B.4.6}$$

Perturbations compactes de l'identité. Lorsque BA est une perturbation compacte de l'identité, on voit que la convergence est asymptotiquement sub-géométrique (on dit aussi supra-linéaire) ; en effet alors les valeurs spectrales différentes de 1 sont des valeurs propres et forment un ensemble dénombrable n'ayant que 1 comme valeur d'adhérence. Soit $\epsilon > 0$. Soit Q un polynôme qui s'annule sur les valeurs propres en dehors de $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$ et qui vaut 1 en 0. On pose aussi $R_j(\lambda) = (1-\lambda)^j$, et $P_j = QR_j$.

Alors $P_j(0) = 1$, $\deg P_j = \deg Q + j$ et $\max_\sigma |P_j| \leq \max_\sigma |Q|\ \epsilon^j$.
Donc pour tout $i \geq \deg Q$:

$$\|x_i - x_\star\|_A \leq \max_\sigma |Q|\ \epsilon^{(i-\deg Q)} \|x_0 - x_\star\|_A \tag{B.4.7}$$

Nous avons donc montré le :

Corollaire B.4.3 *Si BA est une perturbation compacte de l'identité, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour tout i :*

$$\|x_i - x_\star\|_A \leq C\epsilon^i \|x_0 - x_\star\|_A \tag{B.4.8}$$

Pour une variante de ce raisonnement (avec des références) qui donne des résultats plus explicites, voir la section 2.4.3.

Annexe C

Implémentation

Il existe de nombreux codes industriels d'équations intégrales. Cependant ils sont souvent protégés par le secret industriel ou leur intégration et optimisation dans des codes gigantesques les rendent peu maniables ou longs à comprendre. Il existe aussi de nombreuses librairies d'algèbre linéaire, mais à chaque fois qu'une telle librairie pouvait sembler utile nous n'avions besoin que de l'algorithme le plus simple utilisé dans un contexte peut-être inhabituel. Il s'est avéré plus rapide de les reprogrammer que d'essayer d'interfacer ces librairies.

Pour effectuer les expériences numériques qui ont guidé cette thèse nous avons donc construit un code nouveau, à partir uniquement des librairies standards telles que `math.h` et `iostream.h`. Il est écrit en `C++` et comporte environ 10 000 lignes. Je remercie Toufic Abboud et François Béreux pour leurs conseils en analyse numérique pratique et Sylvain Ferrand, Pedro Ferreira, François Jouve et Aldjia Mazari pour les outils informatiques qu'ils ont mis à ma disposition. Ici, très rapidement, nous rendons compte des principales charactéristiques du code développé.

Le langage `C++` est orienté objet. Il permet d'organiser fortement le code et suivre de près les structures mathématiques en jeu. Ceci aide au débogage : une fois que la syntaxe est corrigée il reste peu d'erreurs. La maintenance et la modification du code est simplifiée quand les bons choix de classes sont faits. Mais si on n'y prend garde ces avantages s'obtiennent au détriment de la vitesse d'exécution et du contrôle fin des processus de bas niveau.

C.1 Interfaces

Le code est reparti sur une dizaine de fichiers. Deux programmes principaux, un pour l'acoustique et un pour l'électromagnétisme, font appel à des routines communes d'algèbre linéaire, de traitement des maillages, de calculs d'intégrales singulières etc.

Entrées Le code lit un fichier qui contient :

- le nom des fichiers contenant le ou les maillage(s) ;
- la spécification de l'excitation acoustique ou électromagnétique (par exemple nombre d'onde, vecteur d'onde pour les ondes planes, origine pour les ondes sphériques);
- le type de travail souhaité (calcul pour un nombre d'onde donné, recherche d'une résonance, ou utilisation de plusieurs maillages)
- le type de sorties souhaitées (voir ci-dessous);
- diverses options (par exemple le choix entre Fletcher-Reeves et Polak-Ribière dans les algorithmes PCG, ou le nombre maximal d'itérations).

Sorties Pour deboguer le programme, et essayer ou valider différents préconditionneurs différentes sorties sont écrites :

- les courants et les charges (électromagnétisme), les pressions ou les vitesses normales (acoustique) ; conversion au format `xd3d` utilisé pour la visualisation [1] ;
- les courbes de convergence ;
- les champs lointains (sur un grand cercle de la sphère unité) ;
- le nombre d'itérations en fonction du nombre d'onde ou du paramètre de discrétisation.

Les trois dernières sorties sont des listes aisément visualisables avec `gnuplot` en utilisant des macros adaptés à chaque cas. La première sortie nécessite une conversion puisque, par exemple dans le cas électromagnétique `xd3d` utilise des vecteurs 3D (réels) d'origine soit les noeuds, soit les isobarycentres des triangles, alors que le programme calcule des flux (complexes) à travers les arêtes (pour la numérotation des arêtes il n'y a pas de convention universelle).

C.2 Maillages

Le maillage est défini par deux listes : la liste des noeuds et la liste des triangles. Dans la première liste chaque noeud est défini par ses trois coordonnées. Dans la deuxième liste chaque triangle est défini par les indices de ses trois sommets (position dans la liste des noeuds).

Précalculs sur le maillage A partir de ces informations le programme effectue les précalculs suivants :

- numérotation des arêtes et recherche du bord : chaque arête est définie par les indices de ses deux sommets ; il faut aussi distinguer les sommets et les arêtes qui sont sur le bord (s'il y en a un) ;

1. Je remercie François Jouve pour cet outil que je n'ai cessé d'utiliser.

– information de connectivité : pour chaque noeud déterminer les arêtes adjacentes et les triangles adjacents, pour chaque arête déterminer les triangles adjacents, pour chaque triangle déterminer les arêtes qui en forment les cotés, et d'autres informations de ce type ;
– éléments géométriques : pour chaque triangle calculer les points de Gauss, la normale, les vecteurs directeurs des côtés, etc. ; pour les triangles courbes : la normale en chaque point de Gauss.

Définition de cas tests Les expériences numériques sont effectuées sur des cas test ("benchmarks"). En voici quelques-unes :

– sphère unité : c'est l'exemple canonique. On peut y observer les prédictions de l'optique géométrique. Le maillage utilisé est donné par `cpseudo` qui donne des structures du type Géode[2].
– cavité : nous avons proposé une géométrie à deux paramètres, l'angle d'ouverture et l'épaisseur ; la verticale est un axe de révolution et la section est représentée dans la figure C.1. Il s'agit d'une surface fermée régulière (de

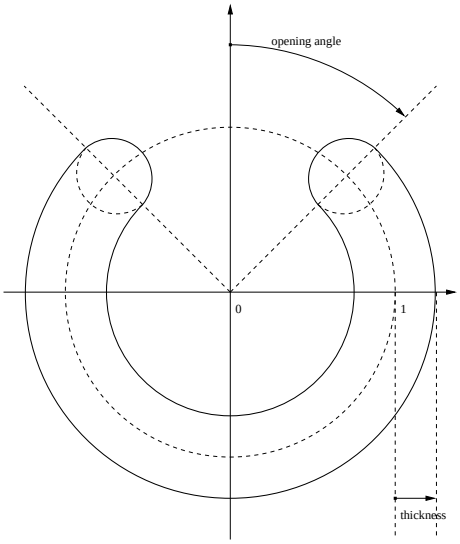


FIG. C.1 – *Section verticale de la cavité*

classe C^1) et à topologie triviale mais présentant par rapport à la sphère une difficulté supplémentaire, importante dans de nombreuses applications, à savoir une cavité dans laquelle (dans l'approximation de l'optique

2. Je remercie Pedro Ferreira de m'avoir fourni ce mailleur.

géométrique) les rayons peuvent être réflechis un nombre arbitraire de fois. Le maillage utilisé est obtenu par déformation du maillage de la sphère unité ;

- cube indenté : la surface de $[-1,1]^3 \setminus [0,1]^3$; toujours à topologie triviale il contient cependant des singularités (des coins rentrants et sortants), ainsi qu'un dièdre qui (dans l'approximation de l'optique géométrique) renvoie tout rayon dans sa direction de provenance ;
- carré : surface ouverte élémentaire, ce type de géométrie apparait dans les antennes "patch" ;
- tore : la topologie non triviale permet de tester les performances d'un algorithme en présence de champs de Neumann.

C.3 Calcul des matrices

Plusieurs types de matrices apparaissent et nécessitent un traitement différent : différents formats de stockage et différentes méthodes de calcul des coefficients.

Matrices pleines On calcule les matrices de Galerkin des opérateurs opérateurs intégraux : S_k, N_k et A_k, ainsi que les variantes qui pouvaient être intéressantes dans le préconditionnement. Les matrices qui interviennent dans les problèmes traités sont à coefficients complexes et sont symétriques. On a aussi calculé la matrice de D_k qui n'est pas symétrique (et qui n'est pas utilisée dans les préconditionneurs décrits ici), ce qui a permis de vérifier à quelle précision les formules de Calderon sont vérifiées après discrétisation. On peut distinguer deux tâches de nature différente :

- parcours des coefficients : pour chaque couple de triangles on calcule la matrice des interactions dont on affecte ensuite les coefficients aux couples de degrés de liberté correspondants. La symétrie réduit de moitié le temps de calcul et la mémoire nécessaire ;
- intégrales singulières : pour deux triangles lointains la matrice des interactions est calculée uniquement avec des points de Gauss ; pour deux triangles proches on extrait la partie singulière du noyau : $G_k = G_0 + (G_k - G_0)$. Pour G_0 une méthode combinant l'utilisation de points de Gauss avec les formules explicites (formules de DeHoop d'après Bendali[3], voir par exemple Van Herk [41]) est utilisée alors que pour $G_k - G_0$ on utilise uniquement des points de Gauss, plus nombreux toutefois que pour les interactions lointaines.

3. Rapport Interne, 1984

Matrices creuses Un grand nombre de matrices auxilliaires est utilisé. Elles sont réelles mais opèrent sur des uplets complexes. Certaines sont symétriques : les produits scalaires L^2, scalaires et vectoriels. D'autres ne le sont pas, par exemple la matrice de l'opérateur rot, qui intervient dans le préconditionneur électromagnétique, ou l'opérateur div qui est utilisé pour les sorties. Quelques points particuliers :

- formats : soit N le nombre de degrés de liberté. La méthode la plus simple consiste à garder pour chaque ligne i les coefficients non-nuls A_{ij} et leur indice de colonne j. Pour un opérateur local ce format nécessite une mémoire en $O(N)$ et permet d'effectuer un produit matrice-vecteur aussi en $O(N)$ opérations. Un format utile pour factoriser les matrices creuses symétriques est de garder pour chaque ligne i le première colonne $j = J(i)$ telle que A_{ij} est non nul et tous les coefficients A_{ij} pour $J(i) \leq j \leq i$ (format Skyline).
- parcours des coefficients : en utilisant les informations de connectivité du maillage on peut parcourir les coefficients non-nuls en vue de les calculer en un temps $O(N)$;
- calcul des coefficients : l'intégration avec des points de Gauss donne ici, du moins pour les triangles plats, un résultat exact.

Seconds membres Les seconds membres des systèmes de Galerkin représentent l'excitation acoustique ou électromagnétique. Dans nos expériences elles sont induites par des ondes incidentes. Quand elles sont régulières il suffit de les définir comme une fonction qui à un point de l'espace associe un nombre complexe (la pression pour des conditions de Dirichlet en acoustique) ou un vecteur tridimensionnel complexe (le gradient de pression pour des conditions de Neumann en acoustique, ou le champ électrique en électromagnétisme). Ces fonctions sont ensuite intégrées contre la base de Galerkin avec des points de Gauss.

C.4 Algèbre linéaire

Algorithmes de factorisation La méthode la plus robuste pour résoudre les systèmes de Galerkin qui nous intéressent consiste à effecteur une factorisation LDL^{T} des matrices (voir par exemple Golub-VanLoan [125]) ; dans les cas traités il n'a pas été nécessaire d'effectuer de pivotage. La factorisation permet de calculer des solutions de référence. Elle peut aussi être utilisée dans les systèmes auxilliaires, pour résoudre des problèmes avec le produit scalaire L^2, dont la matrice est creuse. Alors on effectue une conversion dans le format Skyline, qui est préservé par ce type de factorisation. Voir Duff-Erisman-Reid [124] pour cette technique et d'autres, plus sophistiquées.

Algorithmes itératifs Plusieurs variantes de l'algorithme des Gradients Conjugués sont utilisées : en particulier la variante Hermitienne à préconditionneur diagonal pour les systèmes faisant intervenir le produit scalaire L^2 en acoustique, et la variante symétrique complexe (voir Freund [84]) avec différents préconditionneurs pour les matrices de Galerkin. La surcharge d'opérateurs permet de passer une matrice en référence sans avoir à spécifier son format de stockage : en `C++` on peut définir une classe virtuelle matrice munie d'un produit matrice-vecteur noté `*` ; chaque format de stockage est une classe dérivée implémentant ce produit.

Bibliographie

[1] T. Abboud : *Etude mathématique et numérique de quelques problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques* ; Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique, 1991.

[2] T. Abboud, F. Starling : *Scattering of an electromagnetic wave by a screen* ; in Boundary value problems and integral equations in nonsmooth domains, Lecture notes in pure and applied mathematics, Vol. 167, M. Costabel, M. Dauge and S. Nicaise eds., p. 1-17, 1993.

[3] H. Ammari, J.-C. Nédélec : *Propagation d'ondes électromagnétiques à basses fréquences* ; J. Math. Pures Appl., Vol. 77, No. 8, p. 839-849, 1998.

[4] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, V. Girault : *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains* ; Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 21, No. 9, p. 823-864, 1998.

[5] D.N. Arnold, R.S. Falk, R. Winther : *Multigrid in $H(\mathrm{div})$ and $H(\mathrm{curl})$* ; Numer. Math., Vol. 85, No. 2, p. 197-217, 2000.

[6] I. Babuska : *Error bounds for the finite element method* ; Numer. Math., Vol. 16, p. 322-333, 1971.

[7] I. Babuska, A.K. Aziz : *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method* ; p. 3-359, in A.K. Aziz (ed.), "The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations", Academic Press, New York, 1972.

[8] F. Ben Belgacem, A. Buffa, Y. Maday : *The mortar finite element method for 3D Maxwell equations : first results* ; SIAM J. Numer. Anal., to appear, 2001.

[9] A. Bendali : *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques* ; Thèse de Doctorat d'Etat de l'Université Paris VI, 1984.

[10] A. Bendali : *Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by a boundary finite element method* ; *Part 1 : The continuous problem* ; Math. Comp., Vol. 43, No. 167, p. 29-46, 1984. *Part 2 : The discrete problem* ; Math. Comp., Vol. 43, No. 167, p. 47-68, 1984.

[11] A. Bendali, M.G. Fares, J. Gay : *A boundary element solution of the Leontovitch problem* ; IEEE Trans. Ant. Prop., Vol. 47, No. 10, p. 1597-1605, 1999.

[12] C. Bernardi, C. Canuto, Y. Maday : *Generalized Inf-Sup conditions for the Chebyshev spectral approximation of the Stokes problem* ; SIAM J. Numer. Anal., Vol. 25, No. 6, p. 1237-1271, 1988.

[13] C. Bernardi, V. Girault : *A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements* ; SIAM J. Numer. Anal., Vol. 35, No. 5, p. 1893-1916, 1998.

[14] M. Birman, M. Solomyak : *On the main singularities of the electric component of the electro-magnetic field in regions with screens* ; St. Petersburg Math. J., Vol 5, No. 1, p. 125-139, 1994.

[15] D. Boffi : *Discrete compactness and Fortin operator for edge elements* ; Numer. Math., Vol. 87, no. 2, p. 229-246, 2000.

[16] D. Boffi : *A note on the de Rham complex and a discrete compactness property* ; Appl. Math. Lett., Vol. 14, No. 1, p. 33-38, 2001.

[17] D. Boffi, F. Brezzi, L. Gastaldi : *On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form* ; Math. Comp., Vol. 69, No. 229, p. 121-140, 1999.

[18] A. DeLaBourdonnaye : *Décomposition de* $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ *et nature de l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme* ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., Vol. 316, No. 4, p. 369-372, 1993.

[19] A. Bossavit : *Mixed finite elements and the complex of Whitney forms* ; The mathematics of finite elements and applications, VI (Uxbridge, 1987), p. 137-144, Academic Press, London, 1988.

[20] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, O. Steinbach : *On the stability of the* L^2 *projection in* $H^1(\Omega)$; Math. Comp., to appear, 2001.

[21] F. Brezzi : *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers* ; RAIRO Anal. Numér., Vol. 8, No. R-2, p. 129-151, 1974.

[22] F. Brezzi, J. Douglas Jr., R. Duran, M. Fortin : *Mixed finite elements for second order elliptic problems in three variables* ; Numer. Math., Vol. 51, p. 237-250, 1987.

[23] F. Brezzi, J. Douglas Jr., L.D. Marini : *Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems* ; Numer. Math., Vol. 47, p. 217-235, 1985.

[24] A. Buffa, P. Ciarlet Jr. : *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations* ; *Part I : An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra* ; Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 21, No. 1, p. 9-30, 2001. *Part II : Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications* ; Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 21, No. 1, p. 31-48, 2001.

[25] A. Buffa, M. Costabel, C. Schwab : *Boundary element methods for Maxwell's equations on non-smooth domains* ; Technical Report, SAM-ETH Zürich, 2001.

[26] A. Buffa, M. Costabel, D. Sheen : *On traces for* $\mathrm{H}(\mathrm{curl}, \Omega)$ *in Lipschitz domains* ; Technical report IAN-CNR Pavia, 2000.

[27] C. Carstensen : *Merging the Bramble-Pasciak-Steinbach and Crouzeix-Thomée criterion for the* H^1*-stability of the* L^2*-projection onto finite element spaces* ; Math. Comp., to appear, 2001.

[28] P.G. Ciarlet : *Basic error estimates for elliptic problems* ; p. 17-352 in [120].

[29] P. Ciarlet Jr., J. Zou : *Fully discrete finite element approaches for time-dependant Maxwell's equations* ; Numer. Math., Vol. 82, p. 193-219, 1999.

[30] P. Clément : *Approximation by finite element functions using local regularization* ; RAIRO Sér. Rouge Anal. Numér., Vol. 9, No. R-2, p. 77-84, 1975.

[31] H. Contopanagos, B. Dembart, M. Epton, J.J. Ottusch, V. Rokhlin, J. Visher, S. Wandzura : *Well-conditioned boundary integral equations for three-dimensional electromagnetic scattering* ; Res. Rep. YALEU/DCS/RR-1198, June 15th 2000.

[32] M. Costabel : *Boundary integral operators on Lipschitz domains : elementary results* ; SIAM J. Math. Anal., Vol. 19, No. 3, p. 613-626, 1988.

[33] M. Costabel, M. Dauge : *Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains* ; Arc. Rat. Mech. and Anal., Vol. 151, No. 3, p. 221-276, 2000.

[34] M. Crouzeix, V. Thomée : *The stability in L_p and W_p^1 of the L_2 projection onto finite element function spaces* ; Math. Comp., Vol. 48, No. 178, p. 521-532, 1987.

[35] L. Demkowicz : *Asymptotic convergence in finite and boundary element methods* ; *Part 1, Theoretical results* ; Comput. Math. Appl., Vol. 27, No. 12, p. 69-84, 1994. *Part 2, The LBB constant for rigid and elastic scattering problems* ; Comput. Math. Appl., Vol. 28, No. 6, p. 93-109, 1994.

[36] L. Demkowicz, P. Monk, C. Schwab, L. Vardapetyan : *Maxwell eigenvalues and discrete compactness in two dimensions* ; Comput. Math. Appl., Vol. 40, No. 4-5, p. 589-605, 2000.

[37] I.C. Gohberg, I.A. Feldman : *Convolution equations and projection methods for their solution* ; Translated from the Russian by F. M. Goldware. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 41. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974.

[38] J. Giroire, J.-C. Nédélec : *Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential* ; Math. Comp., Vol. 32, No. 144, p. 973-990, 1978.

[39] M.A. Hamdi : *Une formulation variationnelle par équations intégrales pour la résolution de l'équation de Helmholtz avec des conditions aux limites mixtes* ; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, Vol. 292, No. 1, p. 17-20, 1981.

[40] R.F. Harrington : *Boundary integral formulations for homogeneous material bodies* ; J. Electromagn. Waves Appl., Vol. 3, No. 1, p. 1-15, 1989.

[41] A. Van Herk : *Three dimensional analysis of magnetic fields in recording head configuration* ; IEEE Trans. on Magnetics 5, Mag-16, p. 890-892, 1980.

[42] R. Hiptmair : *Multigrid method for Maxwell's equations* ; SIAM J. Numer. Anal., Vol. 36, No. 1, p. 204-225, 1999.

[43] R. Hiptmair : *Canonical construction of finite elements* ; Math. Comp., Vol. 68, No. 228, p. 1325-1346, 1999.

[44] R. Hiptmair, C. Schwab : *Natural BEM for the electric field integral equation on polyhedra* ; Technical Report, SAM-ETH Zürich, 2001.

[45] R. Hiptmair, A. Toselli : *Overlapping and multilevel Schwarz methods for vector valued elliptic problems in three dimensions* ; Parallel Solution of Partial Differential Equations, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, No. 120, p. 181-202, Springer, Berlin, 1999.

[46] G.C. Hsiao, R.E. Kleinman : *Mathematical foundations of error estimates in numerical solutions of integral equations in electromagnetics* ; IEEE Trans. Ant. Prop., Vol. 47, No. 3, p. 316-328, 1997.

[47] G.C. Hsiao, W.L. Wendland : *A finite element method for some integral equations of the first kind* ; J. Math. Anal. Appl., Vol. 58, No. 3, p. 449-481, 1977.

[48] G.C. Hsiao, W.L. Wendland : *The Aubin-Nitsche lemma for integral equations* ; J. Integral Equations, Vol. 3, No. 4, p. 299-315, 1981.

[49] V.I. Ivakhnenko, Y.G. Smirnov, E.E. Tyrtyshnikov : *The electric field integral equation : theory and algorithms* ; p. 251-262, in "Approximations and numerical methods for the solution of Maxwell's equations (Oxford, 1995)", Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser., Vol. 65, Oxford Univ. Press, New York, 1998.

[50] D. Jerison, C.E. Kenig : *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains* ; J. Funct. Anal., Vol. 130, p. 161-219, 1995.

[51] F. Kikuchi : *On a discrete compactness property for the Nédélec finite elements* ; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A Math., Vol. 36, p. 479-490, 1989.

[52] W. McLean, O. Steinbach : *Boundary element preconditioners for a hypersingular integral equation on an interval* ; Adv. Comput. Math., Vol. 11, No. 4, p. 271-286, 1999.

[53] D. Levadoux : *Etude d'une équation intégrale adaptée à la résolution hautes fréquences de l'équation d'Helmholtz* ; Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, 2000.

[54] D. Mitrea, M. Mitrea, M. Taylor : *Layer potentials, the Hodge Laplacian and global boundary value problems in non-smooth Riemannian manifolds* ; Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 150, No. 713, 2001.

[55] J.-C. Nédélec : *Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surfaces in* $\mathbb{R}^3$; Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 8, No. 1, p. 61-80, 1976.

[56] J.-C. Nédélec : *Computation of eddy currents on a surface in* $\mathbb{R}^3$ *by finite element methods* ; SIAM J. Numer. Anal., Vol. 15, No. 3, p. 580-594, 1978.

[57] J.-C. Nédélec : *Approximation par potentiel de double couche du problème de Neumann extérieur* ; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, Vol. 286, No. 2, p. 103-106, 1978.

[58] J.-C. Nédélec : *Mixed finite elements in* $\mathbb{R}^3$; Numer. Math., Vol. 35, p. 315-341, 1980.

[59] J.-C. Nédélec : *Eléments finis mixtes incompressibles pour l'équation de Stokes dans* $\mathbb{R}^3$; Numer. Math., Vol. 39, p. 97-112, 1982.

[60] J.-C. Nédélec : *Integral equations with non-integrable kernels* ; Integral Equations Operator Theory, Vol. 5, No. 4, p. 562-572, 1982.

[61] J.-C. Nédélec : *A new family of mixed finite elements in* $\mathbb{R}^3$; Numer. Math., Vol. 50, p. 57-81, 1986.

[62] J.-C. Nédélec, J. Planchard : *Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans* $\mathbb{R}^3$; RAIRO Sér. Rouge, Vol. 7, No. R-3, p. 105-129, 1973.

[63] R.A. Nicolaides : *Existence, uniqueness and approximation for generalized saddle point problems* ; SIAM J. Numer. Anal., Vol. 19, No. 2, p. 349-357, 1982.

[64] L. Paquet : *Problèmes mixtes pour le système de Maxwell* ; Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., Vol. 4, No. 2, p. 103-141, 1982.

[65] A.F. Peterson : *The "interior resonance" problem associated with surface integral equations of electromagnetics : Numerical consequences and remedies* ; Electromagnetics, Vol. 10, p. 293-312, 1990.

[66] S.S.M. Rao, D.R. Wilton, A.W. Glisson : *Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape* ; IEEE Trans. Ant. Prop. AP-30, p. 409-418, 1982.

[67] P.A. Raviart, J.-M. Thomas : *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems* ; p. 292-315 in I. Galligani, E. Magenes (ed) : Mathematical aspects of the finite element method ; Lecture Notes in Math., Vol. 606, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.

[68] J.E. Roberts, J.-M. Thomas : *Mixed and hybrid methods* ; p. 523-640 in [120].

[69] M.N. LeRoux : *Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan par une méthode variationnelle d'éléments finis* ; Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes, 1974.

[70] A.H. Schatz : *An observation concerning Ritz-Galerkin methods with indefinite bilinear forms* ; Math. Comp., Vol. 28, p. 959-962, 1974.

[71] O. Steinbach : *On the stability of the L^2 projection in fractional Sobolev spaces* ; Numer. Math., Vol.88, No. 2, p. 367-379, 2001.

[72] O. Steinbach, W.L. Wendland : *The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method* ; Adv. Comput. Math., Vol. 9, No. 1-2, p. 191-216, 1998.

[73] E.P. Stephan : *Boundary integral equations for screen problems in $\mathbb{R}^3$* ; Integral Equations and Operator Theory, Vol. 10, No. 2, p. 236-257, 1987.

[74] E.P. Stephan : *Boundary integral equations for mixed boundary value problems in $\mathbb{R}^3$* ; Math. Nachr., Vol. 134, p. 21-53, 1987.

[75] F. Stummel : *Diskrete konvergenz linearer operatoren. I.* ; (German) Math. Ann., Vol. 190, p. 45-92, 1970/71.

[76] G. Strang : *Variational crimes in the finite element method* ; p. 689-710 in A.K. Aziz (ed.) : The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations ; Academic press, New York, 1972.

[77] L. Tartar : *On the characterization of traces of a Sobolev space used for Maxwell's equation* ; Proceedings of a meeting held in honour of M. Artola, Bordeaux, 1997.

[78] I. Terrasse : *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés* ; Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique, 1993.

[79] G. Verchota : *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains* ; J. Funct. Anal., Vol. 59, p. 572-611, 1984.

[80] W.L. Wendland : *Strongly elliptic boundary integral equations* ; p. 511-561, in A. Iserles, M. Powell (eds.), "The state of the art in numerical analysis (Birmingham 1986)", Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser. 9, Oxford Univ. Press, New York, 1987.

Algorithmes du type gradients conjugués

[81] J.W. Daniel : *The conjugate gradient method for linear and nonlinear operator equations* ; SIAM J. Numer. Anal., Vol. 4, p. 10-26, 1967.

[82] R. Fletcher, C.M. Reeves : *Function minimization by conjugate gradients* ; Comput. J., Vol. 7, p. 149-154, 1964.

[83] R.W. FREUND, N.M. NACHTIGAL : *QMR : A quasiminimal residual method for non hermitian linear systems* ; Numer. Math., Vol. 60, No. 3, p. 315-339, 1991.

[84] R.W. FREUND : *Conjugate gradient-type methods for linear systems with complex symmetric coefficient matrices* ; SIAM J. Sci. Stat. Comp., Vol. 13, No. 1, p. 425-448, 1992.

[85] R.W. FREUND : *A transpose-free quasi-minimal residual algorithm for non-Hermitian linear systems* ; SIAM J. Sci. Stat. Comp., Vol. 14, No. 2, p. 470-482, 1993.

[86] R.M. HAYES : *Iterative methods of solving linear problems on Hilbert space* ; National Bureau of Standards Appl. Math. Ser. No. 39, p. 71-103, 1954.

[87] M.R. HESTENES, E. STIEFEL : *Methods of conjugate gradients for solving linear sytems* ; J. Res. Nat. Bur. Standards, Vol. 49, p. 409-436, 1952.

[88] C. LANCZOS : *Solution of systems of linear equations by minimized iterations* ; J. Res. Nat. Bur. Standards, Vol. 49, p. 33-53, 1952.

[89] C. PAIGE, M. SAUNDERS : *Solution of sparse indefinite systems of linear equations* ; SIAM J. Numer. Anal., Vol. 12, No. 4, p. 617-629, 1975.

[90] B.N. PARLETT, D.R. TAYLOR, Z.A. LIU : *A look-ahead Lanczos algorithm for unsymmetric matrices* ; Math. Comp., Vol. 44, No. 169, p. 105-124, 1985.

[91] E. POLAK, G. RIBIÈRE : *Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées* ; Rev. Fr. Inform. Rech. Op., Vol. 3, No. 16, p. 35-43, 1969.

[92] Y. SAAD, M.H. SCHULTZ : *GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems* ; SIAM J. Sci. Stat. Comp., Vol. 7, No. 3, p. 856-869, 1986.

[93] P. SONNEVELD : *CGS : A fast Lanczos type solver for nonsymmetric linear systems* ; SIAM J. Sci. Stat. Comp., Vol. 10, No. 1, p. 36-52, 1989.

[94] H.A. VANDERVORST : *BiCGstab : A fast and smoothly converging variant to BiCG for the solution of nonlinear systems* ; SIAM J. Sci. Stat. Comp., Vol. 13, No. 2, p. 631-644, 1992.

[95] R. WINTHER : *Some superlinear convergence results for the conjugate gradient method* ; SIAM J. Numer Anal., Vol. 17, No. 1, p. 14-17, 1980.

Analyse, analyse fonctionnelle et EDP.

[96] R.A. ADAMS : *Sobolev spaces* ; Academic Press, New York, 1975.

[97] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications* ; Masson, Paris, 1983.

[98] J. DUGUNDJI : *Topology* ; Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[99] H. FEDERER : *Geometric measure theory* ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.

[100] G.B. FOLLAND : *Real analysis : Modern techniques and their applications, Second edition* ; John Wiley & Sons, 1999.

[101] P. GRISVARD : *Elliptic problems in non-smooth domains* ; Pitman publishing Inc., Massachusetts, 1985.

[102] P. GRISVARD : *Singularities in boundary value problems* ; RMA 22, Masson, Paris, 1992.

[103] T. KATO : *Perturbation theory for linear operators, Second edition* ; Springer-Verlag, Berlin-New York 1976.

[104] S. LANG : *Differential and Riemannian manifolds, Third edition* ; Springer-Verlag, New York, 1995.

[105] J.-L. LIONS, E. MAGENES : *Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. I, Vol. II* ; Dunod, Paris, 1968.

[106] J. NEČAS : *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques* ; Masson, Paris, 1967.

[107] G. DERHAM : *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques (Third edition)* ; Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, III. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1222b. Hermann, Paris, 1973.

[108] W. RUDIN : *Functional analysis, Second edition* ; McGraw-Hill, New York, 1991.

[109] L. TARTAR : *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces* ; Lecture notes, `http://www.math.cmu.edu/cna/publications.html`, 2000.

[110] M. TAYLOR : *Partial differential equations, Vol. I Basic theory, Vol. II Qualitative studies in linear equations* ; Springer-Verlag, New York, 1996.

[111] H. WHITNEY : *Geometric integration theory* ; Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

Ondes acoustiques et électromagnétiques.

[112] M. CESSENAT : *Mathematical methods in electromagnetism, Linear theory and applications* ; World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 1996.

[113] D.L. COLTON, R. KRESS : *Integral equation methods in scattering theory* ; John Wiley & Sons, New York, 1983.

[114] J.D. JACKSON : *Classical electrodynamics, Second edition* ; John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1975.

[115] C. MÜLLER : *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves* ; Springer Verlag, 1969.

[116] J.-C. NÉDÉLEC : *Acoustic and electromagnetic equations, Integral representations for harmonic problems* ; Springer-Verlag, 2001.

[117] G.B. WHITHAM : *Linear and nonlinear waves* ; John Wiley & Sons, 1974.

Éléments finis.

[118] S.C. BRENNER, L.R. SCOTT : *The mathematical theory of finite element methods* ; Springer-Verlag, 1994.

[119] F. BREZZI, M. FORTIN : *Mixed and hybrid finite element methods* ; Springer-Verlag, 1991.

[120] P.G. CIARLET, J.-L. LIONS (ED.) : *Handbook of numerical analysis, Vol. II, Finite element methods (Part 1)* ; North-Holland, 1991.

[121] V. GIRAULT, P.-A. RAVIART : *Finite element methods for Navier-Stokes equations* ; Springer-Verlag, 1986.

[122] J.-C. NÉDÉLEC : *Notions sur les techniques d'éléments finis* ; Publications SMAI, Ellipses, 1991.

Algèbre linéaire matricielle et numérique.

[123] R. BARRETT, M. BERRY, T.F. CHAN, J. DEMMEL, J. DONATO, J. DONGARRA, V. EIJKHOUT, R. POZO, C. ROMINE, H. VANDERVORST : *Templates for the solution of linear systems : Building blocks for iterative methods* ; SIAM, Philadelphia, 1994.

[124] I.S. DUFF, A.M. ERISMAN, J.K. REID : *Direct methods for sparse matrices* ; Oxford University Press, Oxford, 1986.

[125] G.H. GOLUB, C.F. VANLOAN : *Matrix computations, Third edition* ; The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[126] M.H. GUTKNECHT : *Lanczos-type solvers for nonsymmetric linear systems of equations* ; Acta. Numer., Vol. 6, p. 271-397, 1997.

[127] C.T. KELLEY : *Iterative methods for linear and nonlinear equations* ; SIAM Frontiers in Applied Mathematics, Philadelphia, 1995.

[128] B. LARROUTUROU, P.-L. LIONS : *Optimisation et analyse numérique* ; Cours de l'Ecole Polytechnique, 1996.

[129] L.N. TREFETHEN, D. BAU III : *Numerical linear algebra* ; SIAM, Philadelphia, 1997.

Publications relatives à cette thèse

[130] A. BUFFA, S.H. CHRISTIANSEN : *The Electric Field Integral Equation on Lipschitz screens : definitions and numerical approximation* ; Tech. Rep. 1216 (submitted September 2001), Institute of Numerical Analysis C.N.R. Pavia, July 2001.

[131] S.H. CHRISTIANSEN : *Discrete Fredholm properties and convergence estimates for the EFIE* ; Tech. Rep. 454 (submitted December 2000), CMAP Ecole Polytechnique Palaiseau, January 17th 2001.

[132] S.H. CHRISTIANSEN, F. BÉREUX, J.-C. NÉDÉLEC, J.-P. MARTINAUD : *Algorithme de simulation électromagnétique, notamment des performances d'une antenne* ; rédigé par I. Chaperot, TAS, Brevet en France, INPI Reg. No. 00 07456, 9 Juin 2000.

[133] S.H. CHRISTIANSEN, J.-C. NÉDÉLEC : *Des préconditionneurs pour la résolution numérique des équations intégrales de frontière de l'acoustique* ; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., Vol. 330, No. 7, p. 617-622, 2000.

[134] S.H. CHRISTIANSEN, J.-C. NÉDÉLEC : *Preconditioners for the boundary element method in acoustics* ; Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostella, 2000), SIAM, p. 776-781, 2000.

[135] S.H. CHRISTIANSEN, J.-C. NÉDÉLEC : *Des préconditionneurs pour la résolution numérique des équations intégrales de frontière de l'électromagnétisme* ; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., Vol. 331, No. 9, p. 733-738, 2000.

[136] S.H. CHRISTIANSEN, J.-C. NÉDÉLEC : *A preconditioner for the Electric Field Integral Equation based on Calderon formulas* ; Tech. Rep. 463 (submitted April 2001), CMAP Ecole Polytechnique Palaiseau, April 26th 2001.

Résolution des équations intégrales pour la diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques – *Stabilisation d'algorithmes itératifs et aspects de l'analyse numérique*

Résumé : Cette thèse porte sur la résolution numérique, par la méthode des équations intégrales de frontière de problèmes de diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques, en régime fréquentiel. La méthode de Galerkin avec des éléments finis (scalaires ou vectoriels) de surface conduit à des systèmes matriciels mal conditionnés. Dans une première partie, pour accélérer la convergence d'algorithmes itératifs, on propose et étudie théoriquement et numériquement des préconditionneurs basés sur les relations de Calderon qui lient les opérateurs intégraux apparaissant dans les équations. En électromagnétisme on utilise de plus des analogues discrets de la décomposition de Helmholtz des champs tangents. Dans une deuxième partie on utilise des estimations sur ces décompositions pour effectuer une nouvelle analyse numérique de l'équation intégrale de champ électrique. Cette analyse est étendue au cas de la diffraction par les surfaces ouvertes (écrans), modélisant les conducteurs parfaits minces.

Mots clés : diffraction d'ondes, équation intégrale, préconditionneur, formule de Calderon, décomposition de Helmholtz.

•

Solution of integral equations for scattering of acoustic and electromagnetic waves – *Stabilization of iterative algorithms and aspects of the numerical analysis*

Abstract : This thesis deals with the numerical solution of acoustic and electromagnetic time-harmonic scattering problems, by the boundary integral equation method. The Galerkin method with (scalar or vector) surface finite elements leads to ill-conditioned linear systems of equations. In the first part, in order to enhance the convergence of iterative solvers we propose and study theoretically and numerically preconditioners based on Calderon formulas, which link the involved integral operators. In electromagnetism we also use discrete analogues of the Helmholtz decomposition of tangent fields to construct stable discretizations of the operators. In the second part we use estimates on such decompositions to provide a new numerical analysis of the electric field integral equation. This analysis is extended to open surfaces (screens), modeling thin perfect conductors.

Key words : scattering of waves, integral equation, preconditioner, Calderon formula, Helmholtz decomposition.

AMS subject classification : 31B10, 35Q60, 65F35, 65N12, **65N38** (primary), 65R20, 78A45, **78M15** (secondary).