THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité: Mathématiques Appliquées

Résolution hautes fréquences d'équations intégrales par une méthode de discrétisation microlocale

par Marc TOLENTINO

Soutenue le 17 Décembre 1997 devant la commission composée de

MM.	Armel	de La Bourdonnaye	Directeur
	Mikhaël	Balabane	Rapporteurs
	Claude	Bardos	
Mme	Loula	Fézoui	Examinateurs
	Valérie	Périer	
M.	Denis	Pogarieloff	

En mémoire de ma Grand-mère Augusta,

et à mes Parents bien aimés

REMERCIEMENTS

Je suis particulièrement redevable à Armel de La Bourdonnaye pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce magnifique sujet de thèse. Il m'a constamment fait bénéficier de sa compétence scientifique et j'ai beaucoup apprécié sa grande disponibilité.

Je tiens à remercier Monsieur Mikhaël Balabane de s'être intéressé de près à mon travail et ensuite d'avoir accepté d'être mon rapporteur.

Je remercie également Monsieur Claude Bardos d'avoir bien voulu rapporter sur ce travail.

Je remercie Madame Valérie Perrier et Monsieur Denis Pogarieloff qui m'honorent de faire partie du jury.

Un Grand merci à Loula Fézoui et André Cérézo qui m'ont fourni une aide avec une générosité extraordinaire. Leur soutien moral et intellectuel fut essentiel. Je ne saurais assez les remercier.

Je tiens à remercier vivement Didier Issautier qui a passé d'innombrables heures à m'aider. Je lui serai toujours redevable de son aide et de son encouragement.

Je remercie aussi François Sévérin et Serge Piperno qui m'ont apporté leur soutien et leur savoir pendant ces années de recherches.

Bernard Larrouturou m'a accueilli avec chaleur et bienveillance au CERMICS, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres du CERMICS-INRIA Sophia-Antipolis qui ont su créer une ambiance de travail très agréable. Je me dois de mentionner plus spécialement Robert Rivière qui a montré une patience à toute épreuve.

Je remercie enfin toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont soutenu et encouragé tout au long de cette thèse.

Table des matières

Chapitre 1. INTRODUCTION **5**

Chapitre 2. ESTIMATION D'ERREUR ET EXTENSIONS **11**
2.1 Convergence de l'approximation d'une onde par des fonctions oscillantes dans la limite des hautes fréquences . . . 13
2.2 Approximation numérique de problèmes de diffraction incluant des opérateurs Fourier-intégraux . . . 13

Chapitre 3. APPLICATION AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES **15**
3.1 Introduction . . . 17
3.2 L'équation intégrale . . . 17
3.2.1 Représentation intégrale . . . 18
3.2.2 Problème de diffraction . . . 19
3.2.3 Choix de l'équation intégrale . . . 19
3.3 Ansatz . . . 20
3.3.1 Ansatz de u_{ext} . . . 20
3.3.2 Ansatz de $\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ . . . 21
3.3.3 Lien asymptotique entre u_{ext} et $\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ . . . 22
3.4 Approximation hautes fréquences . . . 22
3.5 Élimination des chemins non-optiques . . . 27
3.5.1 Analyse des contributions proches . . . 28
3.5.2 Analyse des contributions lointaines . . . 29
3.5.3 Étude sur les objets convexes . . . 31
3.5.4 Étude sur les objets non-convexes . . . 33
3.6 Discrétisation microlocale . . . 37
3.6.1 Formulation variationnelle . . . 37
3.6.2 Formulation variationnelle discrétisée . . . 38
3.7 Calcul de la matrice . . . 40
3.7.1 Interactions lointaines . . . 41
3.7.2 Interactions proches . . . 43

Chapitre 4. MISE EN ŒUVRE INFORMATIQUE **47**
4.1 Introduction . . . 49
4.2 Construction des maillages . . . 50

4.2.1 Maillage en espace . . . 50
4.2.2 Maillage en direction . . . 52
4.2.3 Maillage microlocal . . . 56
4.3 Front d'onde numérique . . . 58
4.4 Profil de la matrice . . . 64
4.5 Méthode d'intégration . . . 64
4.5.1 Intégration sur Γ. . . . 64
4.5.2 Formules de quadrature. . . . 67
4.5.3 Le cas particulier . . . 68
4.6 Recherche de points . . . 69
4.6.1 Intersection droite-plan . . . 69
4.6.2 Intersection droite-triangle . . . 70
4.6.3 Intersection droite-sphère . . . 71
4.7 Algorithmes . . . 72

Chapitre 5. EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES 73
5.1 Introduction . . . 75
5.2 Cas convexe . . . 75
5.2.1 Cas particulier de la méthode microlocale . . . 79
5.3 Cas non convexe . . . 83
5.4 Annexe . . . 86

Chapitre 6. ÉTUDE DU CONDITIONNEMENT 91
6.1 Introduction . . . 93
6.2 Analyse du problème . . . 93
6.2.1 Equations intégrales . . . 93
6.2.2 Problème modèle . . . 100
6.3 Réduction du conditionnement . . . 104
6.3.1 Première méthode . . . 104
6.3.2 Utilisation d'ondelettes . . . 106
6.4 Application aux équations intégrales . . . 109
6.4.1 Cas convexe . . . 110
6.4.2 Cas non convexe . . . 117
6.5 Annexe . . . 120

Chapitre 7. CONCLUSION 127

Annexe A. ESTIMATION D'ERREUR 135
A.1 Introduction. . . . 137
A.2 Some well-known mathematical facts. . . . 138
A.3 Preliminary results. . . . 139
A.4 Approximation of a wave. . . . 140
A.4.1 Approximation of a plane wave. . . . 140
A.4.2 Approximation of a wave with curved wave surfaces. . . . 141
A.4.3 Approximation of a grazing wave. . . . 142
A.5 Numerical results. . . . 143

A.6 Conclusion. 143

Annexe B. EXTENSIONS **145**
B.1 Introduction 147
B.2 Setting of the problems 148
B.3 Discretization 149
B.3.1 Pseudo-differential operators 149
B.3.2 Fourier-integral operators 153
B.4 Approximation 156
B.4.1 Pseudo-differential operators 157
B.4.2 Fourier-integral operators 160
B.5 Conclusion 163

Chapitre 1

INTRODUCTION

Il s'agit de présenter et valider une nouvelle méthode développée par A. de La Bourdonnaye. Elle a pour objectif essentiel la résolution du modèle de Maxwell en trois dimensions d'espace à hautes fréquences par une discrétisation micro-locale. Les essais numériques antérieurs ont montré que nous obtenons des matrices mal conditionnées. La solution proposée, pour lever cette difficulté numérique, consiste à opérer un filtrage par ondelettes dans la fibre spatiale. Nous montrons que ce filtrage n'affecte pas la précision des résultats et rend ainsi opératoire la méthode.

Ce travail est principalement consacré à la simulation numérique de la propagation d'ondes. Il s'agit d'un domaine qui fait l'objet de recherches actives et le défi actuel est de résoudre des problèmes de diffraction d'ondes en régime harmonique à hautes fréquences. Depuis plusieurs décennies, ce domaine oppose deux grandes familles de méthodes: les méthodes asymptotiques et les méthodes de discrétisation.

La première, justifiée par le calcul pseudodifférentiel, consiste à considérer une approximation particulière de la solution qui est souvent le produit d'une exponentielle d'une phase par une amplitude. L'idée est de localiser la propagation d'ondes suivant des géodésiques qui sont des droites lorsque le milieu est homogène et isotrope. Cette famille regroupe des méthodes telles que les rayons, l'optique physique et la théorie géométrique de diffraction [27]. Pour des milieux hétérogènes, on a recours, par exemple à la méthode des couches limites. Pour un résumé étendu de toutes ces méthodes, nous renvoyons à [9]. Ces méthodes sont aujourd'hui les seules à donner des résultats à hautes fréquences et ont l'avantage d'avoir une complexité qui ne croît pas avec la fréquence. Cependant, elles ont plusieurs limitations liées à la forme de l'obstacle. Parmi elles, la mise en œuvre qui est difficile puisqu'il faut suivre une multitude de rayons à travers les diffractions et réflexions multiples sur toute la surface. De plus, les méthodes sont instables à cause du critère d'arrêt lorsqu'il s'agit de sommer les rayons. Malgré les travaux de F. Cuvelier [17], elles sont impuissantes dans le cas de concavités générales. Enfin, un nouveau calcul doit être fait pour chaque incidence.

La deuxième famille, par contre, ne rencontre pas tous ces problèmes liés à la forme de l'obstacle. La raison est qu'on peut localiser les effets de diffraction à l'aide des discrétisations. Cependant, l'avantage de la localisation est le principal point faible lorsque l'on veut monter en fréquences. En effet, pour bien localiser il faut utiliser un pas de maillage proportionnel à la longueur d'onde. Performantes pour les basses et moyennes fréquences, les méthodes de discrétisations coûtent très cher pour les hautes fréquences et aucune simulation réaliste n'a pu être réalisée en trois dimensions d'espace.

On distingue deux types de méthodes de discrétisations.

Les méthodes des éléments finis, des volumes finis et des différences finis ont l'avantage de pouvoir traiter les milieux hétérogènes. En revanche, l'inconvénient principal est d'exiger le maillage d'un volume. En ce qui concerne la résolution de problèmes de diffraction dans un milieu infini, ces méthodes demandent de tronquer le domaine de calcul dans lequel se trouve l'obstacle. L'idéal est de considérer un domaine le plus petit possible pour éviter le problème de stockage mémoire et la performance des méthodes dépend alors de la traduction de la condition de radiation sur la frontière extérieure ou artificielle [7, 26]. Le développement des conditions aux limites absorbantes a ouvert d'autres perspectives et n'a connu que des progrés récents [6].

La méthode des équations intégrales [16, 22, 36, 37], quant à elle, est mieux adaptée aux problèmes de diffraction puisqu'elle tient compte exactement de la condition de radiation. Elle est une des seules à pouvoir être mise en œuvre facilement quelque soit l'obstacle. En revanche, elle conduit à inverser des matrices complexes pleines dont la taille augmente avec la fréquence. Plus précisément, la complexité est en $\mathcal{O}(k^4)$ où k est proportionnel à la fréquence. A cela s'ajoutent le problème des résonnances qui provient des valeurs propres

du problème intérieur associé et le fait que ces méthodes sont valables uniquement pour des milieux homogènes. Les tentatives pour surmonter ces difficultés sont nombreuses et font l'objet de recherches acharnées.

C'est dans ce dernier cadre que se situe notre travail. Nous étudierons ici l'utilisation des équations intégrales en trois dimensions d'espace.
De nombreuses études ont été effectuées pour réduire la taille ou le nombre de coefficients de la matrice. On peut citer d'abord V. Rokhlin [38] qui a présenté une méthode à base de fonctions de Hankel et de formules d'addition, qui dans le cas de probème de diffraction bidimensionnel, donne une complexité en $\mathcal{O}(k \log k)$ au lieu de $\mathcal{O}(k^2)$. F.X. Canning [11] fait subir à sa matrice un post-traitement à base de transformée de Fourier qui lui permet de réduire beaucoup le nombre de coefficients. Cependant, le passage en 3 dimensions d'espace est délicat. En effet, l'utilisation de FFT n'est possible que sur des parallèlogrammes maillés régulièrement. Dans [43], B. Zhou utilise directement l'approximation de Kirchhoff dans ses fonctions de base pour diminuer la dimension de la matrice. En fait, il isole la partie la plus oscillante de la phase dans ses fonctions. L'inconvénient est que la matrice dépend de l'incidence et la méthode ne peut s'appliquer lorsque l'obstacle est non-convexe. On peut encore citer B. Bradie, R. Coifman et A. Grossman [10], qui ont présenté une méthode d'approximation utilisant une transformation en cosinus locale (LCT).

L'objet de cette thèse est l'étude numérique d'une nouvelle méthode destinée à résoudre les équations intégrales à hautes fréquences. Cette méthode a été proposée par A. de La Bourdonnaye dans [28, 30]. Elle s'est inspirée de la même idée de base que celle de F.X. Canning, puis a été développée et précisée dans [31, 42] et a été intégrée à une méthode volumique par O. Cessenat et B. Després dans [12]. L'idée est d'unir les méthodes asymptotiques et les méthodes de discrétisation en utilisant à la fois la localisation en directions de propagation et la localisation en espace. On fait ainsi une discrétisation microlocale. En effet, localement, la solution que l'on cherche à haute fréquence s'écrit comme une amplitude multipliée par une exponentielle. De plus, le gradient de la phase de l'exponentielle doit vérifier l'équation eikonale. La nouvelle méthode consiste à approcher la solution par une fonction de base de la même forme. Le fait remarquable est qu'ainsi on conserve l'intérêt des méthodes asymptotiques et des méthodes de discrétisations. En effet, d'une part, on peut maintenant étaler suffisamment le support des fonctions de base, sans ruiner la localisation en espace, afin d'utiliser les techniques de lemmes de phase stationnaire et non stationnaire. La conséquence est que cette méthode peut être utilisée à des fréquences plus élevées qu'auparavant et dans la limite des hautes fréquences, les matrices que l'on obtient sont très creuses. Dans [28], on montre que l'on passe d'une complexité en $\mathcal{O}(k^4)$ à une complexité en $\mathcal{O}(k^2)$. D'autre part, la matrice est calculée une fois pour toutes les incidences.
Notons que la méthode de discrétisation microlocale est actuellement étudiée dans le domaine de la discrétisation volumique et d'hybridation avec les éléments finis pour tenir compte de l'hétérogéneité du milieu.

Le plan de cette thèse est le suivant.

Nous résumons dans le chapitre suivant deux publications sur l'estimation d'erreur et une extension de la méthode de discrétisation microlocale.
Dans le chapitre 3, la méthode de discrétisation microlocale est appliquée pour la résolution des équations intégrales. Nous montrons comment adapter les fonctions de base microlocalisantes à partir d'une équation intégrale choisie judicieusement. L'objectif essentiel est une diminution de la complexité algorithmique. Le calcul de la matrice est présenté en détail pour des objets quelconques en trois dimensions d'espace.
Nous avons rassemblé dans le chapitre 4 de nombreux outils nécessaires pour la mise en œuvre informatique de la méthode.
Nous présentons au chapitre 5 une première série d'expériences numériques. Ce chapitre est particulièrement axée autour du calcul de surface équivalente radar.
Nous verrons dans le chapitre 6 comment diminuer de façon spectaculaire la complexité du problème en étudiant le conditionnement élevé des matrices.

Chapitre 2

ESTIMATION D'ERREUR ET EXTENSIONS

2.1 Convergence de l'approximation d'une onde par des fonctions oscillantes dans la limite des hautes fréquences (p.13)

2.2 Approximation numérique de problèmes de diffraction incluant des opérateurs Fourier-intégraux (p.13)

2.1 Convergence de l'approximation d'une onde par des fonctions oscillantes dans la limite des hautes fréquences

Cette section a été acceptée pour publication à *Third international conference on mathematical aspects of wave propagation phenomena*, SIAM.

Résumé

Nous examinons la convergence et l'estimation d'erreur de la méthode de discrétisation microlocale introduite dans [28] lorsqu'il s'agit d'approcher les fonctions de types $A(x)e^{\imath k\phi(x)}$ à hautes fréquences. Plus précisement, nous analysons l'approximation hautes fréquences de trois types d'ondes: les ondes planes, les ondes à surfaces courbées et les ondes rampantes décrites avec les fonctions d'Airy. Nous trouvons que l'erreur de discrétisation tend vers 0 quand le nombre de degrés de liberté par longueur d'onde augmente. En notant C le nombre de degrés de liberté par longueur d'onde, nous montrons que l'erreur décroît en $1/C$.

Nous renvoyons à l'annexe A pour un aperçu de ces résultats.

2.2 Approximation numérique de problèmes de diffraction incluant des opérateurs Fourier-intégraux

Cette section est parue sous la forme d'un rapport de recherche CERMICS ($N°95-36$), acceptée pour publication à *Mathematicals Models and Methods in Applied Science*.

Résumé

La méthode de discrétisation microlocale est étendue ici à la discrétisation d'opérateurs pseudo-différentiels et Fourier-intégraux. Nous montrons que cette méthode permet d'améliorer la complexité algorithmique tant au point de vue stockage que calcul.

Soient X et Y deux variétés régulières de dimensions n. Les deux problèmes analysés sont les suivants.

– Evaluer à hautes fréquences, pour tout $x \in X$:

$$P\ u(t,x)\ =\ \int\int_Y e^{\imath(x-y).\theta} p(x,\theta)u(t,y)dyd\theta$$

où P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1. Ce problème de diffraction intervient lorsque u satisfait $\imath\partial_t u = Pu$. Notons que les milieux sont ici hétérogènes et anisotropes.

– Evaluer à hautes fréquences, pour tout $x \in X$:

$$P\ u(t,x) \ = \ \int\int_Y e^{\imath\phi(x,y,\theta)} p(x,y,\theta) u(t,y) dy d\theta$$

sachant que le problème de diffraction est: $\imath\partial_t(I_\phi u) = Pu$. Ici, P est un opérateur Fourier-intégral d'ordre 1 et I_ϕ est l'opérateur défini par:

$$I_\phi u(t,x) \ = \ \int\int_Y e^{\imath\phi(x,y,\xi)} u(t,y) dy d\theta.$$

Notons que ce type de problème intervient dans le cas de milieux dispersifs.

Nous cherchons des solutions stationnaires à ces deux problèmes c'est-à-dire périodiques en temps. Signalons que le premier problème a été exposé dans [42].
Nous présentons une discrétisation des fonctions de type:

$$\int a(x,\xi) e^{\imath\omega\psi(x,\xi)} d\xi \tag{2.1}$$

où ω est la pulsation. Pour cela, nous procèdons par deux étapes. La première étape consiste à utiliser le principe variationnel connu dans les méthodes d'éléments finis. Quant à la deuxième étape, nous déduisons de l'équation eikonale et de la condition d'ellipticité, une discrétisation de cet ensemble avec un nombre fini de degrés de liberté et avec un pas de maillage en $\mathcal{O}(1/\sqrt{\omega})$. Il en résulte un maillage de la partie du cotangent à X, $T^\star X$, et un maillage dans le cotangent à Y, $T^\star Y$, vérifiant l'équation eikonale et la condition d'ellipticité.
Proposons maintenant les fonctions de base microlocalisantes:

$$\begin{aligned} q_{i,j}(x) &= \int p_{i,j}(x,\xi) e^{\imath\omega(x-x_i).\xi} d\xi \\ q_{i',j'}(y) &= \int p_{i',j'}(y,\eta) e^{\imath\omega(y-y_{i'}).\eta} d\eta \end{aligned}$$

où $p_{i,j}$ et $p_{i',j'}$ sont les fonctions P_1 sur les maillages $T^\star X$ et $T^\star Y$. Comme dans la section 2.1, nous montrons que ce choix permet une bonne approximation des fonctions du type (2.1). Le résultat est que la précision de l'approximation croît linéairement avec le nombre de degrés de liberté par longueur d'onde.
Estimons les coefficients d'interactions entre deux fonctions de base. Ceux-ci s'écrivent:

$$\mathcal{A}_{i,j,i',j'} = < Pq_{i',j'}, q_{i,j} >$$

Nous remarquons que si $(x_i, y_{i'})$ n'est pas dans la projection du front d'onde de l'opérateur, l'intégrale oscillante qui définit le coefficient $\mathcal{A}_{i,j,i',j'}$ est rapidement décroissante avec la pulsation ω. Dans les autres cas, les coefficients $\mathcal{A}_{i,j,i',j'}$ sont conservés et nous obtenons ainsi une nouvelle matrice. Des résultats d'estimations d'erreur sont présentés et nous montrons que la complexité algorithmique et de stockage de calcul de la nouvelle matrice est en $\mathcal{O}(\omega^n)$.

Le lecteur trouvera en détail les énoncés et démonstrations des résultats de cette section dans l'annexe B.

Chapitre 3

DESCRIPTION DE LA MÉTHODE DE DISCRÉTISATION MICROLOCALE APPLIQUÉE À UNE ÉQUATION INTÉGRALE

3.1 Introduction (p.17)
3.2 L'équation intégrale (p.17)
3.3 Ansatz (p.20)
3.4 Approximation hautes fréquences (p.22)
3.5 Elimination des chemins non-optiques (p.27)
3.6 Discrétisation microlocale (p.37)
3.7 Calcul de la matrice (p.40)

3.1 Introduction

La méthode des équations intégrales est reconnue comme étant la plus précise pour résoudre les problèmes de diffraction en régime harmonique. Cela vient du fait qu'elle tient compte exactement de la condition de radiation grâce au noyau de Green dans son expression. Son principal défaut est qu'elle conduit à inverser des matrices pleines dont la taille augmente avec la fréquence.

Ce chapitre est consacré à la présentation de la méthode de discrétisation microlocale [28] pour la résolution des équations intégrales à hautes fréquences.

La méthode proposée consiste à considérer des fonctions de base oscillantes pour pouvoir utiliser les lemmes de phase stationnaire et non stationnaire sur les coefficients des matrices. Le résultat est que nous obtenons des matrices de plus en plus creuses à hautes fréquences.

Cependant, l'avantage du noyau de Green et des fonctions de base oscillantes est aussi une des principales difficultés lors de la mise en œuvre informatique de la méthode. En effet, le noyau de Green et les fonctions de base oscillantes comportent des singularités qu'il faut lever. Pour surmonter cette difficulté, nous proposons, à partir d'un ansatz de la solution, une équation intégrale approchant l'équation exacte dans la limite des hautes fréquences. Cette nouvelle approche nous permettra d'utiliser au mieux la méthode de discrétisation microlocale développée dans [28].

Le chapitre s'organise comme suit. Les trois premières sections ont pour objectif de présenter l'équation intégrale qui permettra une résolution rapide des problèmes de diffractions à hautes fréquences. Elle s'appuie essentiellement sur un ansatz particulier de la solution. Dans la section qui suit, nous montrons les conséquences utiles d'une telle équation. Nous étudierons ensuite la résolution de l'équation considérée par la méthode de discrétisation microlocale. Nous introduirons les nouvelles fonctions de base microlocalisantes en nous inspirant de l'ansatz proposé. Les résultats obtenus dans la dernière section serviront de guide pour la construction et la mise au point du code.

3.2 L'équation intégrale

Nous allons introduire l'équation intégrale qui permettra une résolution efficace des problèmes de diffraction à hautes fréquences.
Tout d'abord, nous rappelons les représentations intégrales des solutions de l'équation de Helmholtz. Ensuite, nous proposons un problème intérieur nécessaire pour établir l'équation intégrale.

3.2.1 Représentation intégrale

Soit Ω_i un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ régulière et soit Ω_e l'ouvert extérieur de même frontière. Considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ u \in H^1(\Omega_i) \cap H^1_{loc}(\Omega_e), \\ \Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega_i \cup \Omega_e, \\ u(x) \ = \ u_0(x), \quad x \in \Gamma \ \text{ et } \ u_0 \in H^{1/2}(\Gamma), \\ \dfrac{\partial u}{\partial |x|}(x) + \imath k u(x) = o(\dfrac{1}{|x|}) \ \text{ pour } \ |x| \longrightarrow +\infty. \end{cases}$$

Rappelons que $\dfrac{\partial u}{\partial |x|}$ désigne la dérivée radiale de u. Nous appellons u_{ext} la fonction u restreinte à Ω_e et u_{int} la fonction u restreinte à Ω_i. Notons n la normale unitaire extérieure sur la frontière Γ et posons, pour tout $x \in \Gamma$:

$$[u](x) \ = \ u_{int}(x) - u_{ext}(x) \ ,$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right](x) \ = \ \frac{\partial u_{int}}{\partial n}(x) - \frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x).$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ exprime la dérivée normale de u.
Nous savons que $[u] \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}\right] \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Proposition 3.2.1 *La solution élémentaire de l'équation de Helmholtz associée à la condition d'onde sortante est la fonction de Green définie par:*

$$G(k, |x|) \ = \ \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\imath k|x|}}{|x|}. \quad \bullet \tag{3.1}$$

Nous définissons deux opérateurs intégraux sur la surface Γ.

$$\begin{aligned} S \ : \quad H^{-1/2}(\Gamma) \ &\longrightarrow \ H^1(\Omega_i) \cap H^1_{loc}(\Omega_e) \\ q \qquad &\longmapsto \ Sq(x) \ = \ \int_\Gamma G(k, |x-y|) q(y) d\sigma(y), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} K \ : \quad H^{1/2}(\Gamma) \ &\longrightarrow \ H^1(\Omega_i) \cap H^1_{loc}(\Omega_e) \\ \varphi \qquad &\longmapsto \ K\varphi(x) \ = \ \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_y}(k, |x-y|) \varphi(y) d\sigma(y), \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $d\sigma(y)$ est la mesure de Liouville de Γ et n_y la normale unitaire extérieure à Γ en y. Nous pouvons maintenant donner des formules de représentation intégrale de u. Pour l'établissement de celles-ci, nous pouvons se référer à [36, 37].

Théorème 3.2.1 *Nous avons, pour $x \notin \Gamma$, la représentation:*

$$u(x) \;=\; S\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right](x) \;-\; K\,[u]\,(x).$$

Et, si nous supposons que la surface est régulière, nous avons, pour $x \in \Gamma$:

$$\frac{u_{int}(x)+u_{ext}(x)}{2} \;=\; S\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right](x) \;-\; K\,[u]\,(x). \;\bullet$$

3.2.2 Problème de diffraction

Nous allons rappeler maintenant comment nous utilisons les formules de représentation intégrale pour résoudre des problèmes aux limites pour l'équation de Helmholtz.
Le problème de diffraction est typiquement le suivant. Nous considérons un objet borné de $\mathbb{R}^3$ sur lequel arrive une onde incidente notée u^{inc}. Nous cherchons à déterminer l'onde diffractée u_{ext} par l'objet. En régime stationnaire harmonique, le champ diffracté u_{ext} est solution d'un problème aux limites régi par l'équation de Helmholtz: trouver u_{ext} dans $H^1_{loc}(\Omega_e)$ vérifiant:

$$(P_0)\quad \begin{cases} \Delta u_{ext} + k^2 u_{ext} = 0 \;\text{ dans }\; \Omega_e, \\ u_{ext} \;=\; -u^{inc} \;\text{ sur }\; \Gamma, \\ (\;\text{ou}\;\; \dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n} \;=\; -\dfrac{\partial u^{inc}}{\partial n} \;\text{ sur }\; \Gamma\;), \\ \dfrac{\partial u_{ext}}{\partial |x|} + \imath k u_{ext} = o(\dfrac{1}{|x|}) \;\text{ pour }\; |x| \longrightarrow +\infty. \end{cases}$$

Théorème 3.2.2 *La solution du problème (P_0) existe et est unique pourvu que l'obstacle soit de complémentaire connexe.* $\bullet$

Pour la démonstration, nous pourrons nous référer à [36].

Nous étudierons principalement le problème de diffraction extérieur (P_0) avec les conditions aux limites de Dirichlet.

3.2.3 Choix de l'équation intégrale

Afin d'utiliser les formules de représentation intégrale du théorème 3.2.1, nous allons prolonger u_{ext} à Ω_i en couplant notre problème extérieur avec un problème intérieur.

Puisque nous pouvons le choisir librement, nous décidons d'associer au problème extérieur (P_0) le problème intérieur suivant:

$$(P_1) \quad \begin{cases} \Delta u_{int} + k^2 u_{int} = 0 \ \text{ dans } \ \Omega_i \\ \\ u_{int} \ = \ 0 \ \text{ sur } \ \Gamma. \end{cases}$$

L'important est l'existence d'une solution u_{int} nulle sur le bord Γ.

Nous présentons maintenant l'équation intégrale que nous utiliserons pour résoudre le problème extérieur (P_0). Si nous considérons le potentiel u_{int} qui vaut zéro dans Ω_i et u_{ext} dans Ω_e, le théorème de représentation 3.2.1 montre que nous avons, pour $x \notin \Gamma$:

$$u_{ext}(x) \ = \ -S\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) \ + \ K u_{ext}(x).$$

Nous pouvons donc calculer le champ diffracté u_{ext} en n'importe quel point $x \in \Omega_e$ si nous connaissons $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ sur le bord Γ.
La condition de Dirichlet sur le bord impose, pour $x \in \Gamma$:

$$\frac{u^{inc}(x)}{2} \ = \ S\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) \ + \ K u^{inc}(x). \tag{3.4}$$

3.3 Ansatz

Au lieu de chercher à déterminer $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ dans (3.4), nous chercherons à déterminer $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ et u_{ext} en même temps sur la surface Γ en considérant l'équation intégrale:

$$\frac{u^{inc}(x)}{2} \ = \ S\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) \ - \ K u_{ext}(x), \quad \forall x \in \Gamma. \tag{3.5}$$

Pour cela, nous allons analyser le lien asymptotique entre $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ et u_{ext} sur le bord Γ afin de les approcher par des fonctions de base communes. Nous proposons ici un ansatz de $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ sur la surface Γ et nous établissons une approximation hautes fréquences de l'opérateur inverse de la dérivée normale. L'important est d'exprimer asymptotiquement u_{ext} en fonction de l'ansatz de $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$.

3.3.1 Ansatz de u_{ext}

Il est classique [41] de considérer que la solution de l'équation de Helmholtz s'écrit localement, hors des points des caustiques, sous la forme:

$$u_{ext}(x) \ = \ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} a_j(x) e^{\imath k \xi_j . x}, \tag{3.6}$$

où $\mathcal{N}$ est un entier, $(\xi_j)_{1 \leqslant j \leqslant \mathcal{N}}$ sont des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$ et $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant \mathcal{N}}$ sont à supports compacts. Posons, pour tout entier j dans l'intervalle $[1, \mathcal{N}]$, les fonctions $u_j(x) = a_j(x) e^{\imath k \xi_j . x}$ définies sous les mêmes hypothèses.

3.3.2 Ansatz de $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$

Nous allons déterminer un ansatz sur $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ à partir de l'ansatz (3.6).
Pour tout point x, nous avons le résultat suivant:

$$\frac{\partial u_j}{\partial n}(x) \;=\; \left(\imath k\ \xi_j.n(x)\ a_j(x) \;+\; \frac{\partial a_j}{\partial n}(x) \right)\ e^{\imath k \xi_j.x}.$$

Nous en déduisons que, pour tout x en dehors du contour apparent ($\xi_j.n \neq 0$), nous avons pour des k grands:

$$\frac{\partial u_j}{\partial n}(x) \;\approx\; \imath k\ \xi_j.n(x)\ a_j(x)\ e^{\imath k \xi_j.x}. \tag{3.7}$$

Nous en concluons l'ansatz de $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ sur la surface Γ, valable hors des points des caustiques et du contour apparent:

$$\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) \;\approx\; \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \imath k\ \xi_j.n(x)\ a_j(x)\ e^{\imath k \xi_j.x}. \tag{3.8}$$

Dorénavant, dans toute la suite, nous supposerons les hypothèses suivantes:

Hypothèse 3.3.1 Les variables en espace décrivent la surface Γ de l'objet diffractant en dehors des caustiques et du contour apparent. •

Hypothèse 3.3.2 Sous l'hypothèse 3.3.1, nous supposons les relations suivantes à hautes fréquences:

$$u_{ext}(x) \;=\; \sum_{j}^{\mathcal{N}} a_j(x) e^{\imath k \xi_j.x}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) \;=\; \imath k\ \sum_{j}^{\mathcal{N}} \xi_j.n(x)\ a_j(x) e^{\imath k \xi_j.x}, \tag{3.10}$$

où les fonctions $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant \mathcal{N}}$ sont régulières à supports compact et les vecteurs $(\xi_j)_{1 \leqslant j \leqslant \mathcal{N}}$ sont unitaires. •

3.3.3 Lien asymptotique entre u_{ext} et $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$

Définition et proposition 3.3.1 *Soient* $\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial n}\right)_{1\leqslant j\leqslant \mathcal{N}}$ *telles que, sous l'hypothèse* 3.3.1*:* $\dfrac{\partial u_j}{\partial n}(x) \;=\; \imath k\; \xi_j.n(x)\; a_j(x) e^{\imath k \xi_j . x}$. *Nous définissons l'opérateur suivant:*

$$\mathcal{D}_{\xi_j} \;:\; \frac{\partial u_i}{\partial n} \;\longmapsto\; \mathcal{D}_{\xi_j}\frac{\partial u_i}{\partial n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\imath k\; \xi_j.n}\; \dfrac{\partial u_j}{\partial n} & \text{si i = j} \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.11}$$

Définissons l'opérateur $\mathcal{D}$ *tel que:*

$$\mathcal{D}\sum_j^{\mathcal{N}} \frac{\partial u_j}{\partial n} \;=\; \sum_j^{\mathcal{N}} \mathcal{D}_{\xi_j}\frac{\partial u_j}{\partial n}. \tag{3.12}$$

Sous l'hypothèse 3.3.2 *et d'après* (3.12)*, nous avons l'approximation hautes fréquences de l'opérateur inverse de la dérivée normale suivante:* $\mathcal{D}\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n} \approx u_{ext}$. •

C'est une conséquence du résultat (3.7).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.3.1 *Soit l'opérateur* $\mathcal{D}$ *défini par* (3.12)*. Sous les hypothèses* 3.3.1 *et* 3.3.2*, l'équation intégrale:*

$$\frac{u^{inc}(x)}{2} \;\approx\; S\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) - K\left(\mathcal{D}\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}\right)(x) \tag{3.13}$$

résout le problème extérieur (P_0) *lorsque le nombre d'onde* k *tend vers l'infini.* •

3.4 Approximation hautes fréquences

Nous allons écrire ici l'équivalent de l'équation intégrale (3.13) à hautes fréquences. Définissons la fonction $\chi_x \in C_0^\infty(\Gamma)$ telle que:

$$\chi_x(y) \;=\; \begin{cases} 1 \quad \text{au voisinage de } x \\ \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.14}$$

Pour simplifier les écritures, nous allons utiliser le fait que l'opérateur $\mathcal{D}$ est linéaire (cf. définition 3.11). En effet, considérons la solution $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ suivant une direction ξ fixée. Elle s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) \;=\; \imath k\; \xi.n(x)\; p(x) e^{\imath k \xi . x} \tag{3.15}$$

où x satisfait l'hypothèse 3.3.1. L'expression de $\dfrac{\partial G}{\partial n_y}$ étant:

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(k,|x-y|) \;=\; \frac{e^{\imath k|x-y|}}{4\pi|x-y|}\left(\imath k - \frac{1}{|x-y|}\right)\frac{y-x}{|y-x|}.n(y)\ ,$$

nous posons, sous les hypothèses 3.3.1 et 3.3.2:

$$S\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) \;-\; K\left(\mathcal{D}_\xi \frac{\partial u_{ext}}{\partial n}\right)(x) \;=\; (\ \mathcal{I}_p(x)+\mathcal{J}_p(x)\ ) \;+\; (\ \mathcal{I}_l(x)+\mathcal{J}_l(x)\ ) \tag{3.16}$$

où $\mathcal{I}_p$, $\mathcal{I}_l$, $\mathcal{J}_p$ et $\mathcal{J}_l$ sont définis par:

$$\diamond\quad \mathcal{I}_p(x) \;=\; \frac{\imath k}{4\pi}\int_\Gamma \frac{e^{\imath k(|y-x|+\xi.y)}}{|y-x|}\left(\xi - \frac{y-x}{|y-x|}\right).n(y)p(y)\chi_x(y)d\sigma(y) \tag{3.17}$$

$$\diamond\quad \mathcal{I}_l(x) \;=\; \frac{\imath k}{4\pi}\int_\Gamma \frac{e^{\imath k(|y-x|+\xi.y)}}{|y-x|}\left(\xi - \frac{y-x}{|y-x|}\right).n(y)p(y)(1-\chi_x(y))d\sigma(y) \tag{3.18}$$

$$\diamond\quad \mathcal{J}_p(x) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{e^{\imath k(|y-x|+\xi.y)}}{|y-x|}\frac{y-x}{|y-x|^2}.n(y)p(y)\chi_x(y)d\sigma(y) \tag{3.19}$$

$$\diamond\quad \mathcal{J}_l(x) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{e^{\imath k(|y-x|+\xi.y)}}{|y-x|}\frac{y-x}{|y-x|^2}.n(y)p(y)(1-\chi_x(y))d\sigma(y) \tag{3.20}$$

Nous précisons maintenant les équivalents de $\mathcal{I}_p$ et $\mathcal{J}_p$ à hautes fréquences.

Contributions proches

Lemme 3.4.1 *Soient φ une fonction $C^\infty(\Gamma)$ et A_x une fonction continue, intégrable à support compact sur Γ contenant le point x et de dérivée bornée.*
Nous avons le résultat suivant valable à hautes fréquences:

$$\int_\Gamma \frac{e^{\imath k\varphi(y)}}{|y-x|}A_x(y)d\sigma(y) \;=\; \mathcal{O}(\frac{1}{k}).\ \bullet$$

Démonstration:
Puisque nous supposons que y décrit un voisinage de x, nous allons considérer le changement de variable suivant:

$$\begin{aligned} y-x &= f(\tau) \\ &= \tau + \mathcal{C}_x(\tau,\tau)n(x) + \mathcal{O}(|\tau|^3) \end{aligned}$$

où τ est un vecteur appartenant au plan $\mathcal{P}_x$ tangent en Γ au point x, $\mathcal{C}_x$ l'opérateur de courbure et n la normale unitaire extérieure à Γ en x.
Remarquons que nous avons:

$$|f(\tau)| \;=\; |\tau|g(\tau)$$

avec $g(\tau) = \left(1 + \left(\frac{\mathcal{C}_x(\tau,\tau)n(x)}{|\tau|}\right)^2 + \mathcal{O}(|\tau|^3)\right)$. Notons que $g(0) = 1$.
Soit J la jacobienne de la transformation qui envoie le support de A_x sur le plan $\mathcal{P}_x$. En posant: $\tilde{A}_x(\tau) = \frac{A_x(f(\tau)+x)}{g(\tau)} J(\tau)$, nous trouvons:

$$\int_\Gamma \frac{e^{\imath k\varphi(y)}}{|y-x|} A_x(y)d\sigma(y) \;=\; \int_{\mathcal{P}_x} \frac{e^{\imath k\bar{\varphi}(\tau)}}{|\tau|} \tilde{A}_x(\tau)d\tau$$

Nous effectuons maintenant le changement de variables en coordonnées polaires. Nous obtenons:

$$\int_\Gamma \frac{e^{\imath k\varphi(y)}}{|y-x|} A_x(y)d\sigma(y) \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{\imath k\bar{\varphi}(\rho,\theta)} \bar{A}_x(\rho,\theta)d\rho d\theta$$

Le développement asymptotique en puissance inverse de k est obtenu par intégrations par parties en la variable ρ. La première intégration par parties en la variable ρ nous donne le terme dominant du développement asymptotique. Puisque $\bar{A}_x$ est à support compact, nous avons:

$$\int_0^\infty e^{\imath k\bar{\varphi}(\rho,\theta)} \bar{A}_x(\rho,\theta)d\rho = \frac{e^{\imath k\bar{\varphi}(0,\theta)}\bar{A}_x(0,\theta)}{\imath k\, \partial_\rho\bar{\varphi}(0,\theta)} - \int_0^\infty \frac{e^{\imath k\bar{\varphi}(\rho,\theta)}}{\imath k\, \partial_\rho\bar{\varphi}(\rho,\theta)} \partial_\rho\left(\bar{A}_x(\rho,\theta)\right) d\rho$$

où nous avons supposé:

$$\partial_\rho\bar{\varphi}(\rho,\theta) \neq 0, \quad \forall \rho \in I\!R^+ \cap \mathrm{Supp}(\bar{A}_x). \tag{3.21}$$

Nous en déduisons que sous l'hypothèse (3.21) et lorsque k tend vers l'infini:

$$\int_\Gamma \frac{e^{\imath k\varphi(y)}}{|y-x|} A_x(y)d\sigma(y) \;=\; \frac{1}{\imath k}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\imath k\bar{\varphi}(0,\theta)}\bar{A}_x(0,\theta)}{\partial_\rho\bar{\varphi}(0,\theta)} d\theta \;+\; \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}).$$

Ceci termine la preuve du lemme. •

Utilisons le lemme 3.4.1 pour évaluer les expressions $\mathcal{I}_p$ et $\mathcal{J}_p$ données par (5.6) et (3.19). Nous avons alors sous l'hypothèse 3.3.1:

$$\mathcal{I}_p = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_p = \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \tag{3.22}$$

En effet, d'une part, les amplitudes dans les intégrales sont intégrables: la singularité est en $\frac{1}{|y-x|}$ car $(y-x).n(y)$ s'annule en $|y-x|^2$ au voisinage de y. D'autre part, la condition (3.21) est toujours vérifiée puisque nous considérons les points hors du contour apparent (cf. l'hypothèse 3.3.1).

Analysons maintenant les expressions de $\mathcal{I}_l$ et $\mathcal{J}_l$ données par (5.5) et (3.20).

Contributions lointaines

Nous allons obtenir ici les estimations de $\mathcal{I}_l$ et $\mathcal{J}_l$ à hautes fréquences directement à partir du lemme de la phase stationnaire:

Lemme 3.4.2 (de la phase stationnaire)
Soient X un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et φ et A deux fonctions indéfiniment dérivables, nulles hors de X. Si $\nabla\varphi$ n'est nul qu'en un point $x_0 \in X$ et si φ ne dégénère pas en x_0, alors il existe des opérateurs différentiels χ_j d'ordre j tels que

$$\int_X e^{\imath k\varphi(x)} A(x)dx \approx e^{\imath k\varphi(x_0)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\chi_j(D)A\right)(x_0) k^{-j-N/2}$$

lorsque k tend vers l'infini.
De plus, nous avons: $\chi_0 = \dfrac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det\varphi''(x_0)}} e^{\imath \mathrm{sgn}\varphi''(x_0)\pi/4}$ •

Pour la démonstration du lemme, on peut se référer à [19, 41] par exemple.

Posons $\varphi_x(y) = |y-x| + \xi.(y-x)$ la phase dans les intégrales oscillantes qui expriment $\mathcal{I}_l$ et $\mathcal{J}_l$. Ecrivons pour simplifier les écritures:

$$\diamond \quad A_x(y) = \frac{1}{4\pi}\left(\xi - \frac{y-x}{|y-x|}\right).n(y)p(y)(1-\chi_x(y))$$

$$\diamond \quad B_x(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{y-x}{|y-x|^2}.n(y)p(y)(1-\chi_x(y)),$$

les amplitudes dans les intégrales oscillantes de $\mathcal{I}_l$ et $\mathcal{J}_l$.
La phase φ_x stationne en deux types de points notés y_1 et y_2. Ils vérifient:

$$\frac{y_1-x}{|y_1-x|} = -\xi \ \text{ et } \ \frac{y_2-x}{|y_2-x|}.n(y_2) = \xi.n(y_2)$$

Notons que puisque nous considérons les variables sur Γ hors des points des caustiques et du contour apparent (cf. hypothèse 3.3.1), il n'y a pas de dégénérescence de la phase φ_x Dans ce cas, appliquons le lemme de la phase stationnaire sur les intégrales oscillantes de $\mathcal{I}_l$ et $\mathcal{J}_l$.

- Si la phase φ_x stationne en y_1, nous avons, sous l'hypothèse 3.3.1:

$$\mathcal{I}_l(x) \approx \chi_0 A_x(y_1) e^{\imath k\xi.x} \ \text{ et } \ \mathcal{J}_l(x) \approx \frac{\chi_0 B_x(y_2) e^{\imath k\xi.x}}{k}$$

  lorque k tend vers l'infini.
  Autrement dit, nous avons les équivalents asymptotiques suivants, sous l'hypothèse 3.3.1:

$$\mathcal{I}_l = \mathcal{O}(1) \ \text{ et } \ \mathcal{J}_l = \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \tag{3.23}$$

- Si la phase φ_x stationne en y_2, nous avons, sous l'hypothèse 3.3.1:

$$\mathcal{I}_l(x) \approx \frac{(\chi_1(D)A_x)(y_2)e^{\imath k\xi.x}}{k} \text{ et } \mathcal{J}_l(x) \approx \frac{\chi_0 B_x(y_2)e^{\imath k\xi.x}}{k}$$

lorsque k tend vers l'infini. En effet, il faut noter que $A_x(y_2) = 0$.
Nous avons donc sous la même hypothèse:

$$\mathcal{I}_l = \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \text{ et } \mathcal{J}_l = \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \tag{3.24}$$

Proposition 3.4.1 *Supposons que* $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ *sous la forme* (3.10). *Soit l'opérateur* $\mathcal{D}$ *défini par* (3.12). *Sous les hypothèses* 3.3.1, *l'équation intégrale:*

$$\frac{u^{inc}(x)}{2} \approx \int_\Gamma G(k,|x-y|)\left(1 - \imath k\frac{y-x}{|y-x|}.n(y)\mathcal{D}\right)\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y)d\sigma(y) \tag{3.25}$$

résout le problème extérieur (P_0) *lorsque le nombre d'onde* k *tend vers l'infini.* •

démonstration:
Au vu des résultats obtenus sur l'étude des contributions proches et lointaines (3.22), (3.23) et (3.24) suivant une direction, la relation (3.16) devient à hautes fréquences:

$$S\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) - K\left(\mathcal{D}\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}\right)(x) \approx \mathcal{I}_p(x) + \mathcal{I}_l(x)$$

où nous avons considéré la solution $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ suivant une direction.
Ce résultat peut être étendu pour plusieurs directions. En effet, il suffit de sommer alors toutes les contributions proches et lointaines et nous obtenons encore (3.25) à hautes fréquences. •

Récapitulatif

Les principales étapes pour la résolution du problème initial (P_0) sont rassemblées ci-dessous.

- Construction de l'équation intégrale (3.4):

$$\frac{u^{inc}(x)}{2} = S\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) + Ku^{inc}(x)\ .$$

en considérant le problème intérieur (P_1).

- Ecriture des ansatz de u_{ext} (3.9) et $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ (3.10) sur le bord Γ reliés par l'opérateur $\mathcal{D}$ défini par (3.12). Nous aboutissons à la représentation intégrale (3.13):

$$\frac{u^{inc}(x)}{2} \approx S\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) - K\left(\mathcal{D}\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}\right)(x)$$

sous les hypothèses 3.3.1 et 3.3.2.

- Approximation hautes fréquences de l'équation intégrale (3.13). Il en résulte, sous les mêmes hypothèses, l'équation intégrale (3.25):

$$\frac{u^{inc}(x)}{2} \approx \int_\Gamma G(k,|x-y|)\left(1 - \imath k \frac{y-x}{|y-x|}.n(y)\mathcal{D}\right)\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y)d\sigma(y)\ .$$

3.5 Élimination des chemins non-optiques

Avant de résoudre l'équation intégrale (3.25), nous allons utiliser la structure du problème pour éliminer les phénomènes non physiques comme:

a) les interactions lointaines qui se propagent dans l'obstacle.

b) la présence d'ondes entrantes sur l'enveloppe convexe de l'objet.

Définissons la fonction *Signe* telle que, pour tout réel z non nul,

$$Signe(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ -1 & \text{si } z < 0\ . \end{cases} \tag{3.26}$$

Comme dans la section précédente, nous allons travailler suivant des directions de propagation. Fixons ξ un vecteur unitaire et supposons $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ sous la forme (3.15).
Nous allons préciser en détail les équivalents asymptotiques des expressions de $\mathcal{I}_p$ et $\mathcal{I}_l$ données par (5.6) et (5.5) à hautes fréquences. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.5.1 *Nous avons les relations asymptotiques au sens des hautes fréquences valables sous les hypothèses* 3.3.1 *et* 3.3.2 *:*

$$\diamond \quad \mathcal{I}_p(x) \approx -Signe(\xi.n(x))\frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2} \tag{3.27}$$

$$\diamond \quad \mathcal{I}_l(x) \approx -\sum_{m=1}^{\text{finie}} Signe(\xi.n(y_m(x)))p(y_m(x))e^{\imath k\xi.x} \tag{3.28}$$

où les points y_m vérifient l'hypothèse 3.3.1 *et satisfont la relation:*

$$\frac{y_m - x}{|y_m - x|} = -\xi\ .$$

L'équation (3.25) *s'écrit alors, pour des k grands et sous les hypothèses* 3.3.1*:*

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_j(x)e^{\imath k\xi_j.x} \approx$$

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\left(\frac{Signe(\xi_j.n(x))p_j(x)e^{\imath k\xi_j.x}}{2} + \sum_{m=1}^{\text{finie}} Signe(\xi_j.n(y_m(x)))p_j(y_m(x))e^{\imath k\xi_j.x}\right) \tag{3.29}$$

où nous avons utilisé la condition de Dirichlet, $u_{ext} = -u^{inc}$ sur le bord Γ, et le fait que $u_{ext} = \mathcal{D}\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$. •

La démonstration est faite dans les deux sous-sections suivantes.
C'est la relation (3.29) qui nous permettra de définir le domaine de dépendance des points $y \in \Gamma$ de la fonction $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ écrite dans (3.15).

3.5.1 Analyse des contributions proches

Dans cette sous-section, nous allons donner l'équivalent de $\mathcal{I}_p$ à hautes fréquences.

Notons $\mathcal{C}_x$ l'opérateur de courbure et n la normale unitaire extérieure à la surface Γ en x. Nous avons:

$$y - x \;=\; \tau \;+\; \frac{1}{2}\mathcal{C}_x(\tau,\tau)n(x) \;+\; \mathcal{O}(|\tau|^3)$$

où τ est un vecteur appartenant au plan tangent à Γ en x, noté $\mathcal{P}_x$.
Nous supposons que les points y n'appartiennent pas au contour apparent. Dans ce cas, nous approchons $\mathcal{I}_p$, hors des points des caustiques et du contour apparent, par:

$$\tilde{\mathcal{I}}_p(x) \;=\; \frac{\imath k}{4\pi}\xi.n(x)e^{\imath k\xi.x}\int_{\mathcal{P}_x}\frac{e^{\imath k(|\tau|+\xi_T.\tau)}}{|\tau|}\tilde{p}(\tau)\tilde{\chi}(\tau)d\tau$$

avec $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathcal{P}_x)$, $\tilde{\chi} = 1$ au voisinage de x. Le vecteur ξ_T représente la projection orthogonale de ξ sur le plan $\mathcal{P}_x$.
Nous faisons ensuite le changement de variables en coordonnées polaires: $\rho = |\tau|$ et $\theta = (\xi_T, \tau)$ et nous obtenons:

$$\tilde{\mathcal{I}}_p(x) \;=\; \frac{\imath k}{4\pi}\xi.n(x)e^{\imath k\xi.x}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{\imath k\rho(1+|\xi_T|\cos\theta)}\tilde{p}(\rho,\theta)\tilde{\chi}(\rho,\theta)d\rho d\theta \;.$$

Remarquons que le fait de supposer les points x en dehors du contour apparent correspond à considérer les points x tels que:

$$|\xi_T| \neq 1 \tag{3.30}$$

Dans ce cas, nous pouvons intégrer par parties en la variable ρ et nous avons que $\tilde{\mathcal{I}}_p$ est asymptotiquement équivalent à hautes fréquences à:

$$\tilde{\mathcal{I}}_p(x) \;\approx\; -\frac{\xi.n(x)}{4\pi}p(x)e^{\imath k\xi.x}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+|\xi_T|\cos\theta}$$

c'est-à-dire, après intégration:

$$\tilde{\mathcal{I}}_p(x) \;\approx\; -\frac{\xi.n(x)}{\sqrt{1-|\xi_T|^2}}\frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2} \;.$$

Comme nous avons $|\xi.n(x)| = \sqrt{1-|\xi_T|^2}$ et (3.30), nous en déduisons l'équivalent $\mathcal{I}_p$ à hautes fréquences sous l'hypothèse 3.3.1:

$$\mathcal{I}_p(x) \;\approx\; -\frac{Signe(\xi.n(x))}{2}p(x)e^{\imath k\xi.x} \tag{3.31}$$

où la fonction *Signe* est définie par (3.26).

3.5.2 Analyse des contributions lointaines

Passons maintenant à l'étude de l'intégrale $\mathcal{I}_l$:

$$\mathcal{I}_l(x) \;=\; \frac{\imath k}{4\pi} e^{\imath k \xi.x} \int_\Gamma \frac{e^{\imath k(|y-x|+\xi.(y-x))}}{|y-x|} \left(\xi - \frac{y-x}{|y-x|}\right) .n(y)p(y)(1-\chi(y))d\sigma(y)\;.$$

Nous supposons que l'hypothèse 3.3.1 est vérifiée.

Il est naturel d'utiliser le lemme de la phase stationnaire pour calculer les intégrales oscillantes lorsqu'il n'y pas de singularités dans les intégrandes.
Pour simplifier les écritures, définissons la phase et l'amplitude dans l'intégrale oscillante $\mathcal{I}_l$ par:

$$\diamond \quad \phi_x(y) \;=\; |x-y| + \xi.(y-x) \tag{3.32}$$

$$\diamond \quad a_x(y) \;=\; \frac{1}{|x-y|}\left(\xi - \frac{y-x}{|y-x|}\right) .n(y)p(y). \tag{3.33}$$

Détaillons ici la situation où la phase ϕ_x stationne en la variable y.
Par définition, un point stationnaire est un point y qui vérifie:

$$\nabla_y \phi_x(y).\tau(y) \;=\; \left(\frac{y-x}{|y-x|} + \xi\right) .\tau(y) \;=\; 0\;. \tag{3.34}$$

La condition (3.34) est vérifiée dans les deux situations suivantes:

- soit

$$\frac{y-x}{|y-x|} \;=\; -\xi\;. \tag{3.35}$$

- soit

$$\frac{y-x}{|y-x|}.n(y) \;=\; \xi.n(y)\;. \tag{3.36}$$

Le dernier cas (3.36) résulte du fait que $|\xi| = 1$.
Les conditions (3.35) et (3.36), représentées sur la figure 3.1, s'interprètent très simplement sur un objet convexe. En effet, le vecteur ξ est le vecteur directeur d'un rayon qui va de y à x soit directement (3.35) soit en passant par une réflexion sur la surface Γ (3.36).

Remarque 3.5.1 Nous venons de voir que la phase ϕ_x stationne en la variable y dans deux cas: (3.35) et (3.36). Ici, l'amplitude (3.33) dans l'intégrale $\mathcal{I}_l$ s'annule lorsque la phase ϕ_x stationne en un point y vérifiant la condition (3.36). •

Remarque 3.5.2 Notons que lorsque l'objet diffractant est convexe, l'unique point stationnaire y vérifie:

$$\xi.n(y) \;<\; 0.\;\bullet$$

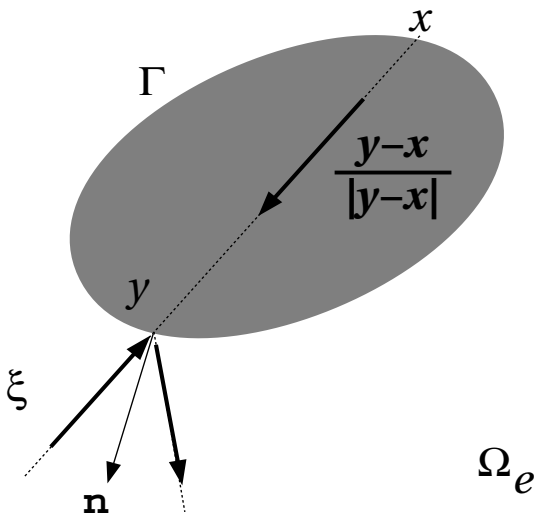


FIG. 3.1: *Interprétation des conditions* (3.35) *et* (3.36) *sur un objet convexe.*

Soit y_0 un point stationnaire vérifiant l'hypothèse 3.3.1. D'après la remarque 3.5.1, le point y_0 vérifie la condition (3.35).
Pour pouvoir appliquer le lemme 3.4.2 de la phase stationnaire, calculons la dérivée seconde de la phase ϕ_x. Notons τ la composante tangentielle de y et $\mathcal{C}_\tau$ l'opérateur de courbure en y. La dérivée seconde de ϕ_x s'écrit:

$$\nabla^2_{\Gamma\Gamma}\phi_x(y) \;=\; \frac{\tau^2}{|x-y|^2} - \frac{1}{|x-y|^2}\left(\frac{y-x}{|y-x|^2}.\tau\right)^2 + \left(\frac{y-x}{|y-x|}+\xi\right)\mathcal{C}_\tau n\;. \tag{3.37}$$

Au point stationnaire y_0, $\nabla^2_{\Gamma\Gamma}\phi_x$ s'écrit:

$$\nabla^2_{\Gamma\Gamma}\phi_x(y_0) \;=\; \frac{1}{|x-y_0|^2}\left(\tau^2 - \left(\frac{y_0-x}{|y_0-x|^2}.\tau\right)^2\right)\;.$$

Remarque 3.5.3 Nous noterons le rôle important du choix de l'équation intégrale (3.25) joué dans l'écriture de $\nabla^2_{\Gamma\Gamma}\phi_x(y_0)$. En effet, l'équation intégrale (3.25) nous a permis d'obtenir l'intégrale oscillante $\mathcal{I}_l$ dont l'amplitude (3.33) sélectionne exactement le point stationnaire qui élimine $\mathcal{C}_\tau$ dans (3.37). Une conséquence utile est que la connaissance de la matrice de courbure $\mathcal{C}_\tau$ n'est pas nécessaire. •

Décomposons les vecteurs $\dfrac{y_0-x}{|y_0-x|} = (l_1,l_2,l_3)$ et $\tau = (\tau_1,\tau_2)$ tels que (l_1,l_2) et (τ_1,τ_2) appartiennent au plan tangent à la fontière Γ au point y_0. La hessienne de la phase ϕ_x s'écrit:

$$\nabla^2_{\Gamma\Gamma}\phi_x(y_0) \;=\; (\tau_1,\tau_2)\frac{1}{|y_0-x|}\begin{pmatrix} 1-l_1^2 & -l_1l_2 \\ -l_1l_2 & 1-l_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}\;.$$

Appelons $\mathcal{H}$ la matrice:

$$\mathcal{H} \;=\; \frac{1}{|y_0 - x|} \begin{pmatrix} 1 - l_1^2 & -l_1 l_2 \\ -l_1 l_2 & 1 - l_2^2 \end{pmatrix} .$$

Nous obtenons:

$$\det\mathcal{H} \;=\; \frac{1 - l_1^2 - l_2^2}{|x - y_0|^2} \;=\; \frac{l_3^2}{|x - y_0|^2} \;=\; \frac{1}{|x - y_0|^2} \left(\frac{y_0 - x}{|y_0 - x|} . n(y_0) \right)^2 . \tag{3.38}$$

En utilisant (3.35), la relation (3.38) devient:

$$\det\mathcal{H} \;=\; \left(\frac{\xi . n(y_0)}{|y_0 - x|} \right)^2 . \tag{3.39}$$

Puisque nous avons considéré y_0 en dehors du contour apparent (cf. l'hypothèse 3.3.1), nous avons que la hessienne ne dégénère pas en ce point. Notons sgn $\mathcal{H}$, la signature de la matrice $\mathcal{H}$. D'après le lemme de la phase stationnaire, nous avons, à hautes fréquences:

$$\mathcal{I}_l(x) \;\approx\; \frac{\imath e^{\imath \,\mathrm{sgn}\, \mathcal{H}\, \pi/4}}{\sqrt{\det\mathcal{H}}} \frac{e^{\imath k(|x-y_0| + \xi.(y_0 - x))}}{|x - y_0|} \xi . n(y_0) p(y_0) e^{\imath k \xi . x}$$

Ici, sgn $\mathcal{H} = 2$ et en utilisant les relations (3.35) et (3.39), nous obtenons l'équivalent asymptotique de $\mathcal{I}_l$ à hautes fréquences:

$$\mathcal{I}_l(x) \;\approx\; -Signe(\xi . n(y_0(x))) p(y_0(x)) e^{\imath k \xi . x} \tag{3.40}$$

Dans le cas où l'obstacle est non-convexe, nous pouvons avoir plusieurs points y_r vérifiant la condition (3.35). Nous obtenons alors d'après le lemme de la phase stationnaire et sous l'hypothèse 3.3.1:

$$\mathcal{I}_l(x) \;\approx\; -\sum_{r=1}^{\text{finie}} Signe(\xi . n(y_r(x))) p(y_r(x)) e^{\imath k \xi . x} .$$

Nous pouvons maintenant analyser les contributions à la solution en un point x et dans une direction ξ en commençant par le cas où Γ est la surface d'un objet convexe.

3.5.3 Étude sur les objets convexes

Nous allons voir comment les résultats précédents s'appliquent lorsque l'objet diffractant est un objet convexe.
Nous allons montrer que les seules contributions en un point x dans une direction ξ sont celles qui proviennent des points y de Γ appartenant à un voisinage de x. Ce résultat est

donné par la proposition suivante.

Proposition 3.5.1 *Nous considérons l'équation intégrale* (3.29) *définie dans le lemme* 3.5.1. *Nous supposons que l'objet diffractant est convexe.*
Alors nous avons, sous les hypothèses 3.3.1*:*

$$\mathcal{I}_l(x) \approx 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_p(x) \approx \begin{cases} -\dfrac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2} & \text{si} \quad \xi.n(x) > 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad \xi.n(x) < 0. \ \bullet \end{cases}$$

lorsque k tend vers l'infini.

Démonstration:
Puisque l'obstacle est convexe, la contribution lointaine $\mathcal{I}_l$ à la solution u_{ext} en x ne provient que d'un seul point, noté y_0. D'après la remarque 3.5.1, le point y_0 vérifie la condition (3.35). Dans ce cas, notons que nous avons la relation suivante:

$$Signe(\xi.n(x)) = -Signe(\xi.n(y_0(x))) \tag{3.41}$$

pour tout $y_0 \in \Gamma$ assez loin de $x \in \Gamma$.
De plus, nous avons vu dans la remarque 3.5.2 que $Signe(\xi.n(y_0)) = -1$. Dans ce cas et d'après la relation (3.41), l'équation (3.29) s'écrit:

$$\frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2} \approx \frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2} + p(y_0)e^{\imath k\xi.x}$$

Nous en déduisons que $p(y_0) \approx 0$. D'après l'expression (3.40) de $\mathcal{I}_l$, nous pouvons dire qu'il n'y a peu de contributions lointaines pour un objet convexe.
Il reste à calculer $\mathcal{I}_p$. Revenons à l'équation (3.29). Puisque nous avons l'expression de $\mathcal{I}_p$ par (3.27) et maintenant $\mathcal{I}_l \approx 0$, nous avons:

$$\frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2} \approx Signe(\xi.n(x))\frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2} \tag{3.42}$$

Nous en déduisons l'expression de $\mathcal{I}_p$ en remarquant:

$$\xi.n(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) \approx 0 \ . \ \bullet$$

Nous venons de montrer que d'une part les points qui contribuent à la solution non nulle en un point x vérifiant l'hypothèse 3.3.1 et tel que $\xi.n(x) > 0$ sont les points y décrivant un voisinage de x, et que d'autre part, nous pouvons nous contenter des directions sortantes pour décrire le champ diffracté par un obstacle convexe.

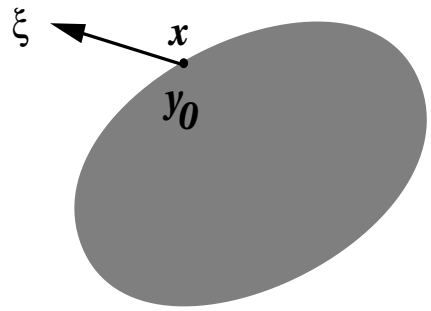


FIG. 3.2: *La contribution en y_0 proche de x et telle que $\xi.n(y_0) > 0$.*

3.5.4 Étude sur les objets non-convexes

Intéressons nous aux objets diffractants non-convexes. Dans cette sous-section, nous examinons sous quelles hypothèse nous pouvons obtenir la solution u_{ext} sur le bord.
Soit x un point appartenant à Γ. Posons D la droite de vecteur ξ passant par x et $\mathcal{N}$ le nombre de points d'intersections entre D et la surface Γ. Puisque nous excluons les points où D et Γ sont tangents (cf. la section 3.3), nous remarquons que $\mathcal{N}$ est toujours un nombre pair. Posons $n = \mathcal{N}/2$. Nous numérotons les $\mathcal{N}$ points d'intersections entre la droite de vecteur ξ et la surface Γ tels que:

$$\xi.n(y_{j,1}) \; < \; 0 \quad \text{et} \quad \xi.n(y_{j,2}) \; > \; 0. \quad \bullet \tag{3.43}$$

pour tout entier j appartenant à $[1, n]$.
Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.5.2 *Nous considérons l'équation intégrale* (3.29) *définie dans le lemme* 3.5.1. *Nous supposons que l'objet diffractant est non-convexe.*
Alors, sous l'hypothèse 3.3.1, *pour tout x appartenant à l'intersection entre la surface Γ et la droite $\mathcal{D}$, nous avons les relations asymptotiques valables à hautes fréquences:*

◇ *Soit $\xi.n(x) < 0$*
Si $x = y_{1,1}$, nous avons:

$$\mathcal{I}_l(x) \; \approx \; 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_p(x) \; \approx \; 0. \tag{3.44}$$

Si $x = y_{j,1}$ pour tout $j > 1$, nous avons:

$$\mathcal{I}_l(x) \; \approx \; -p(y_{j-1,2})e^{\imath k\xi.x} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_p(x) \; \approx \; \frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2}. \tag{3.45}$$

◇ *Soit $\xi.n(x) > 0$*
Nous avons:

$$\mathcal{I}_l(x) \; \approx \; 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_p(x) \; \approx \; -\frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2}. \tag{3.46}$$

De plus, nous avons les relations:

$$p(y_{j,1}) \approx p(y_{j-1,2}) \tag{3.47}$$

pour tout $1 < j \leqslant n$ *et*

$$p(y_{1,1}) \approx 0. \quad \bullet \tag{3.48}$$

Démonstration:
Nous allons procéder par récurrence.
Remarquons que le cas $n = 1$ correspond au cas où l'objet est convexe. Nous allons vérifier que la propriété est vraie pour $n = 2$.
Considérons un objet non-convexe illustré par la figure 3.3 tel que $n = 2$.

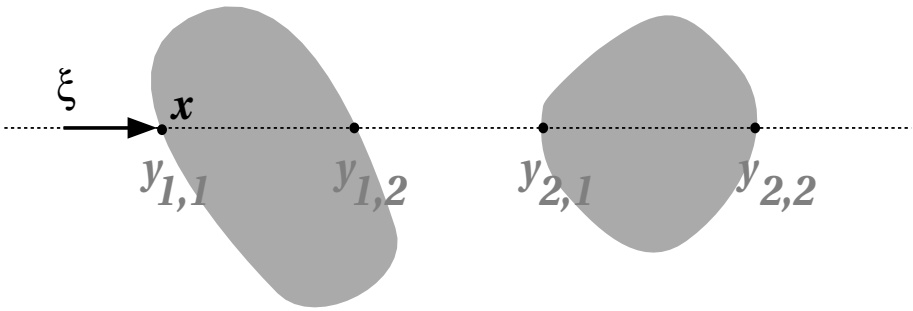


FIG. 3.3: *Aucune contribution en* $x = y_{1,1}$.

Au lieu de chercher, comme dans le cas d'un objet convexe, à établir les contributions de la solution du premier coup, nous procèdons par étapes.
Sur les figures 3.3 à 3.6, nous avons marqué en caratères gras les points y qui contribuent à la solution en un point x suivant la direction ξ.

- Le cas: $x = y_{1,1}$
  Vérifions les conditions (3.44) et (3.48).
  Il est immédiat qu'aucun des points $(y_{j,1})_{1\leqslant j\leqslant 2}$ et $(y_{j,2})_{1\leqslant j\leqslant 2}$ ne vérifie la condition (3.35) quand $x = y_{1,1}$. Il en résulte que l'intégrale $\mathcal{I}_l(x) \approx 0$.
  Par conséquent, nous pouvons remarquer que l'équation (3.29) s'écrit, suivant la direction ξ, sous la forme:

$$\frac{1}{2}(\ 1 - Signe(\xi.n(x))\ )p(x) \approx 0\ .$$

  Ce qui entraine, à hautes fréquences:

$$p(x) \approx 0$$

  puisque nous sommes dans le cas où $\xi.n(x) < 0$ (cf. (3.43)). Nous en déduisons que $\mathcal{I}_p(x) \approx 0$ dans la limite des hautes fréquences.

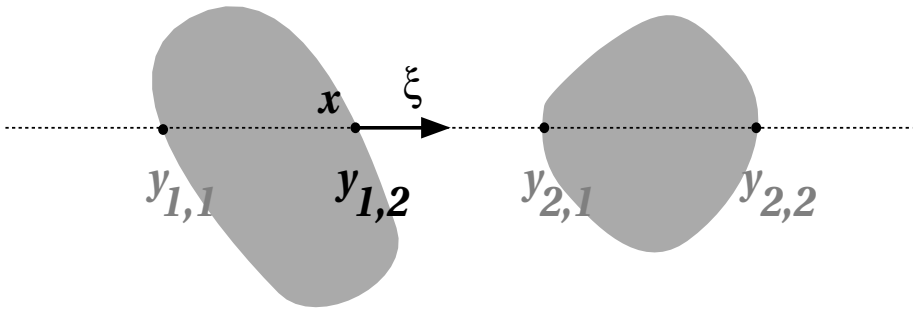


FIG. 3.4: *Une contribution proche en $x = y_{1,2}$.*

- Le cas: $x = y_{1,2}$

  En raisonnant comme dans la sous-section 3.5.3, nous pouvons déduire que nous avons uniquement une contribution proche en $y_{1,2}$.
  Ici, seul le point $y_{1,1}$ vérifie la relation (3.35). Cependant, sa contribution à la solution u_{ext} est nulle. En effet, d'après (3.48), nous savons que $p(y_{1,1}) \approx 0$ lorsque k tend vers l'infini. Nous en déduisons de l'expression (3.28) que $\mathcal{I}_l(x) \approx 0$ pour des k grands.
  L'expression de $\mathcal{I}_p$ est donnée par (3.27). D'après (3.43), nous sommes dans le cas $\xi.n(x) > 0$. Il en résulte, à hautes fréquences, $\mathcal{I}_p(x) \approx -\dfrac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2}$.

- Le cas: $x = y_{2,1}$

  Les points $y_{1,1}$ et $y_{1,2}$ vérifient la condition (3.35) et l'équation (3.29) s'écrit suivant

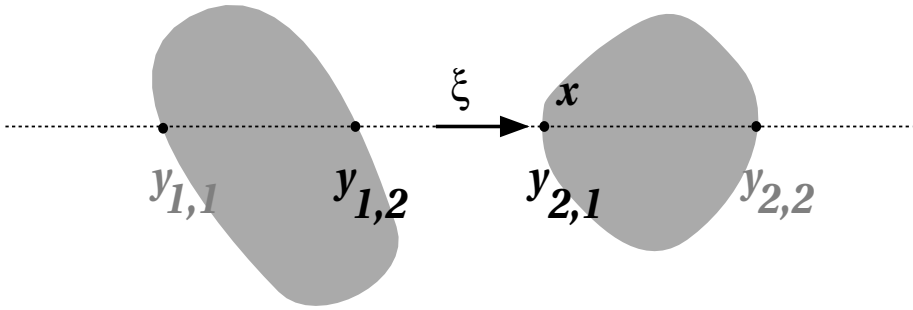


FIG. 3.5: *Deux contributions proche et lointaine en $y_{2,1}$ et $y_{1,2}$.*

  la direction ξ:

$$\frac{1}{2}(\ 1 - Signe(\xi.n(x))\ )p(x) \ \approx\ Signe(\xi.n(y_{1,1}))p(y_{1,1}) \ +\ Signe(\xi.n(y_{1,2}))p(y_{1,2})\ .$$

  Remarquons que les inégalités (3.43) et le fait que $p(y_{1,1}) \approx 0$ permettent de se ramener à la relation:

$$p(y_{2,1}) \approx p(y_{1,2})\ . \tag{3.49}$$

  Comme $p(y_{1,1}) \approx 0$ et $Signe(\xi.n(y_{1,2})) = 1$, nous avons, d'après (3.28)

$$\mathcal{I}_l(x) \approx p(y_{1,2})e^{\imath k\xi.x}$$

Par ailleurs $Signe(\xi.n(x)) = -1$ et à l'aide de (3.27), nous obtenons:

$$\mathcal{I}_p(x) \approx \frac{p(y_{2,1})e^{\imath k\xi.x}}{2}$$

- Le cas: $x = y_{2,2}$

  D'après (3.28), la contribution lointaine s'écrit:
  $\mathcal{I}_l(x) \approx e^{\imath k\xi.x}$.

$$(\ Signe(\xi.n(y_{1,1}))p(y_{1,1}) + Signe(\xi.n(y_{1,2}))p(y_{1,2}) + Signe(\xi.n(y_{2,1}))p(y_{2,1})\ ).$$

  Nous avons toujours $p(y_{1,1}) \approx 0$ d'après (3.48). En utilisant (3.43), nous avons $Signe(\xi.n(y_{1,2})) = 1$ et $Signe(\xi.n(y_{2,1})) = -1$. La relation (3.49) entraine $\mathcal{I}_l(x) \approx 0$. Puisque nous avons $\xi.n(x) > 0$, nous avons une contribution proche en $y_{2,2}$ de la forme:

$$\mathcal{I}_p(x) \approx -\frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2}$$

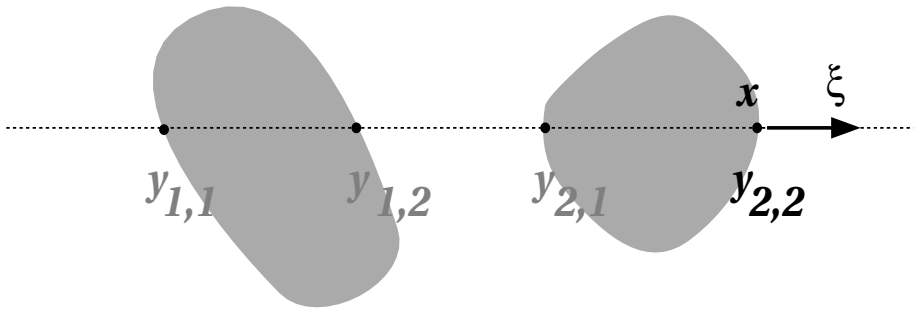


FIG. 3.6: *Une contribution proche en $y_{2,2} = x$.*

Nous pouvons maintenant formuler la récurrence. Puisque la propriété est vérifiée pour $n = 2$, supposons qu'elle est vraie lorsque le nombre de couples $(y_{i,1}, y_{i,2})$ est inférieur à n.
Par hypothèse, nous avons la relation:

$$p(y_{i,1}) \approx p(y_{i-1,2}) \tag{3.50}$$

pour tout $1 < i \leqslant n$ et $p(y_{1,1}) \approx 0$.

- Le cas: $x = y_{n+1,1}$

  D'après (3.28) et les relations (3.50), nous avons:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_l(x) &\approx (\ -p(y_{1,1}) + p(y_{1,2}) \ldots - p(y_{n,1}) + p(y_{n,2})\ )\, e^{\imath k\xi.x} \\ &\approx p(y_{n,2})e^{\imath k\xi.x} \end{aligned}$$

Puisque $Signe(\xi.n(x)) = -1$, nous avons, en utilisant l'équation (3.27):

$$\mathcal{I}_p(x) \approx \frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2}$$

La relation (3.29) devient:

$$p(y_{n+1,1}) \approx p(y_{n,2}) \tag{3.51}$$

- Le cas: $x = y_{n+1,2}$
  Nous allons de nouveau utiliser (3.28) et (3.50). Nous obtenons alors, grâce à (3.51):

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_l(x) &\approx (-p(y_{1,1}) + ... - p(y_{n,1}) + p(y_{n,2}) - p(y_{n+1,1}))\, e^{\imath k\xi.x} \\ &\approx 0\end{aligned}$$

  Puisque $Signe(\xi.n(x)) = 1$, nous avons, d'après (3.27):

$$\mathcal{I}_p(x) \approx -\frac{p(x)e^{\imath k\xi.x}}{2}$$

  ce qui achève la démonstration. •

Dans le cas non convexe, la proposition 3.5.2 montre que:

- on peut se contenter d'ondes sortantes sur l'enveloppe convexe de l'obstacle.
- pour une onde sortante en un point x de la surface, il n'y a pas de contribution lointaine. En effet, elle traverserait l'obstacle en ce point.
- pour une onde entrante en un point x de la surface, il n'y a qu'une contribution lointaine en ce point (les autres traversent l'obstacle).

3.6 Discrétisation microlocale

Nous allons décrire la résolution numérique de l'équation intégrale (3.25) par une méthode de discrétisation microlocale.

3.6.1 Formulation variationnelle

Passons maintenant à la la résolution de l'équation intégrale (3.25).
Rappelons que Γ est une surface régulière d'un objet borné dans $\mathbb{R}^3$ et que u^{inc} représente l'onde incidente. Nous cherchons une fonction $\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ définie sur Γ sous l'hypothèse 3.3.1, à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant (3.10). Pour des raisons pratiques, nous écrirons l'équation (3.25) sous la forme, pour tout x satisfaisant l'hypothèse 3.3.1:

$$-u^{inc}(x) = -2\int_\Gamma G(k,|y-x|)\left(1 - \imath k\frac{y-x}{|y-x|}.n(y)\mathcal{D}\right)\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y)d\sigma(y)$$

où $\mathcal{D}$ est l'opérateur défini par (3.12) et G le noyau de Green donné par (3.1).
Rappelons que la construction et l'étude de la formulation variationnelle de (3.25) sont établies dans [16]. La formulation variationnelle s'écrit, sous l'hypothèse 3.3.1:

$$(P_2)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ sous la forme (3.10) tel que } \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ -\displaystyle\int_\Gamma u^{inc}(x)\bar{q}(x)d\sigma(x) \;=\; \\ -2\displaystyle\int_\Gamma \left(\int_\Gamma G(k,|x-y|)\left(1-\imath k\frac{y-x}{|y-x|}.n(y)\mathcal{D}\right)\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y)d\sigma(y)\right)\bar{q}(x)d\sigma(x). \end{cases}$$

Bien qu'elle ne soit pas justifiée sans les hypothèses 3.3.1 et 3.3.2, nous allons considérer la formulation variationnelle (P_2) comme modèle pour la résolution numérique des problèmes de diffraction d'ondes à hautes fréquences.
En effet, nous verrons comment tenir compte des hypothèses numériquement en construisant des maillages bien adaptés au problème (cf. chapitre suivant) et en introduisant des nouvelles fonctions de bases microlocalisantes (cf. ci-dessous).

Présentons maintenant la méthode numérique de la discrétisation microlocale. Elle est construite à partir du formalisme variationnel (P_2).

3.6.2 Formulation variationnelle discrétisée

Précisons d'abord les notations.

La méthode de discrétisation microlocale, dont nous avons exposé les principes dans le chapitre 1, nécessite un maillage du domaine Γ et un maillage de la sphère unité S^2. Nous présenterons en détail l'obtention de ces maillages dans le chapitre suivant.

Notations 1 Pour $h > 0$, nous considérons une triangulation Γ_h de Γ et nous supposons que le diamètre de tous les triangles de la triangulation Γ_h est inférieur ou égal à h. Nous noterons dans la suite T_l et s_i les triangles et les sommets de la triangulation Γ_h. Posons $\mathcal{N}^s$ le nombre de sommets de Γ_h. •

Notations 2 Posons $\mathcal{N}^d$ le nombre de rayons vecteurs décrivant la sphère unité S^2. Nous noterons $(\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant \mathcal{N}^d}$ les rayons vecteurs de S^2. •

Présentation des fonctions de base microlocalisantes

Introduisons les fonctions $P_1 - Lagrange$ $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant \mathcal{N}^s}$ associées au noeud s_i telles que:

$$p_i \in V_h(\Gamma_h) \text{ et } p_i(s_j) \;=\; \delta_{i,j} \;\; \forall i,j \in \{1,...,\mathcal{N}^s\}$$

où $V_h(\Gamma_h) = \left\{v \in C^0(\Gamma_h) :\; v|_{T_l} \in P_1 \;\forall T_l \in \Gamma_h\right\}$ et $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker ($\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon).

Nous voulons nous inspirer des écritures (3.9) et (3.10). Pour cela, nous allons utiliser la méthode de Petrov-Galerkin en considérant les deux fonctions de base suivantes. Pour tout $x \in \Gamma_h$,

$$\diamond \quad \phi_{i',j'}(x) = p_{i'}(x) e^{\imath k \xi_{j'}.x} \tag{3.52}$$

$$\diamond \quad \psi_{i,j}(x) = \imath k \, \xi_j.n(x) \, p_i(x) e^{\imath k \xi_j.x} \tag{3.53}$$

où les entiers i, i' appartiennent à $\{1, .., \mathcal{N}^s\}$ et j, j' appartiennent à $\{1, .., \mathcal{N}^d\}$.

Remarque 3.6.1 Nous verrons dans le chapitre suivant (sous-section 4.2.3) comment satisfaire numériquement l'hypothèse 3.3.1. En effet, les maillages en espace de la surface Γ et en direction de la sphère unité S^2 vérifiront, pour tout rayon vecteur $(\xi_j)_{1 \leqslant j \leqslant \mathcal{N}^d}$ de S^2 et pour tout sommet $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant \mathcal{N}^s}$ de Γ_h:

$$\xi_j.n(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathrm{Supp}(p_i) \tag{3.54}$$

où $\mathrm{Supp}(p_i)$ désigne le support de la fonction p_i. •

Approximation variationnelle

Pour être complets, décrivons la résolution du problème (P_2) par l'utilisation des fonctions de base microlocalisantes (3.52) et (3.53).
Posons, pour tout $y \in \Gamma_h$:

$$\left(\frac{\partial u_{ext}}{\partial n} \right)_h (y) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}^s} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}^d} \alpha_{i,j} \psi_{i,j}(y) \tag{3.55}$$

et appelons $\alpha_h = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^d} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^d}$ le vecteur des coordonnées de $\left(\frac{\partial u_{ext}}{\partial n} \right)_h$ dans la base $(\psi_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant \mathcal{N}^d}^{1 \leqslant i \leqslant \mathcal{N}^s}$.

Posons ensuite sur Γ_h:

$$q_h(x) = \sum_{i'=1}^{\mathcal{N}^s} \sum_{j'=1}^{\mathcal{N}^d} \beta_{i',j'} \phi_{i',j'}(x) \tag{3.56}$$

et appelons β_h le vecteur $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{\mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^d} \end{pmatrix}$.

La résolution du problème variationnel (P_2) consiste à considérer le problème:

$$(P_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \left(\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n} \right)_h \text{ sous la forme (3.55) tel que } \forall q_h \text{ sous la forme (3.56),} \\ \\ -\displaystyle\int_{\Gamma_h} u^{inc}(x) \bar{q}_h(x) d\sigma(x) = \\ \\ -2 \displaystyle\int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G(k, |x-y|) \left(1 - \imath k \frac{y-x}{|y-x|}.n(y) \mathcal{D} \right) \left(\frac{\partial u_{ext}}{\partial n} \right)_h (y) \bar{q}_h(x) d\sigma(x) d\sigma(y). \end{array} \right.$$

Notons $\mathrm{Supp}(\psi_{i,j})$ et $\mathrm{Supp}(\phi_{i',j'})$ les supports des fonctions $\psi_{i,j}$ et $\phi_{i',j'}$.
Le problème (P_3) conduit à la résolution du sytème linéaire:

$$\beta_h^t \mathcal{A}_h \alpha_h \;=\; \beta_h^t b_h \quad \forall \beta_h \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^d}$$

où les coefficients de la matrice $\mathcal{A}_h$ sont de la forme:

$$-2 \int_{\mathrm{Supp}(\psi_{i,j})} \int_{\mathrm{Supp}(\phi_{i',j'})} G(k,|x-y|) \left(1 - \imath k \frac{y-x}{|y-x|}.n(y)\mathcal{D}\right) \psi_{i,j}(y) \bar{\phi}_{i',j'}(x) d\sigma(x) d\sigma(y)$$

et où un élément du vecteur b_h s'écrit:

$$-\int_{\mathrm{Supp}(\phi_{i',j'})} u^{inc}(x) \bar{\phi}_{i',j'}(x) d\sigma(x) \; . \tag{3.57}$$

Remarquons que:

$$\mathrm{Supp}(\psi_{i,j}) = \mathrm{Supp}(p_i) \;\text{ et }\; \mathrm{Supp}(\phi_{i',j'}) = \mathrm{Supp}(p_{i'}) \; .$$

Le problème (P_3) est approché par le problème discret suivant:

$$\mathcal{A}_h \alpha_h \;=\; b_h \; . \tag{3.58}$$

Le calcul des coefficients du second membre b_h est très simple. En effet, lorsque l'onde incidente est une onde plane de vecteur d'onde ξ^{inc}, les coefficients sont de la forme:

$$-\int_{\mathrm{Supp}(p_{i'})} e^{\imath k(\xi^{inc} - \xi_{j'}).x} p_{i'}(x) d\sigma(x)$$

et peuvent être calculés sur chaque triangle appartenant au support de la fonction $p_{i'}$.
Par contre, l'evaluation des coefficients de la matrice A_h soulève des difficultés que nous décrivons dans les sous-sections 3.7.1 et 3.7.2.

3.7 Calcul de la matrice

Avant d'aller plus loin, il est utile de dire dès maintenant comment nous notons les indices de la matrice $\mathcal{A}_h$.
Posons:

$$a(s_{i'}, \xi_{j'}, s_i, \xi_j) = -2 \iint G(k,|x-y|) \left(1 - \imath k \frac{y-x}{|y-x|}.n(y)\mathcal{D}(y)\right) \psi_{i,j}(y) \bar{\phi}_{i',j'}(x) d\sigma(x) d\sigma(y) \tag{3.59}$$

où les fonctions $\psi_{i,j}$ et $\phi_{i',j'}$ sont données par (3.53) et (3.52), et introduisons les matrices $(A_{i,m})_{i,m}$ de tailles $\mathcal{N}^d \times \mathcal{N}^d$:

$$A_{i',i} \;=\; \begin{pmatrix} a(s_{i'},\xi_1,s_i,\xi_1) & \cdots & \cdots & \cdots & a(s_{i'},\xi_1,s_i,\xi_{\mathcal{N}^d}) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & a(s_{i'},\xi_{j'},s_i,\xi_j) & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a(s_{i'},\xi_{\mathcal{N}^d},s_i,\xi_1) & \cdots & \cdots & \cdots & a(s_{i'},\xi_{\mathcal{N}^d},s_i,\xi_{\mathcal{N}^d}) \end{pmatrix}$$

où les entiers i' et i décrivent $\{1, ..., \mathcal{N}^s\}$.
La matrice $\mathcal{A}_h$ est formée par les matrices $A_{i',i}$ et s'écrit:

$$\mathcal{A}_h = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,\mathcal{N}^s} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,\mathcal{N}^s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{\mathcal{N}^s,1} & A_{\mathcal{N}^s,2} & \cdots & \cdots & A_{\mathcal{N}^s,\mathcal{N}^s} \end{pmatrix} . \tag{3.60}$$

Notons que le profil de la matrice $\mathcal{A}_h$ sera étudié dans le chapitre 4.
Dorénavant, nous noterons les éléments de la matrice $\mathcal{A}_h$, $(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)}$ où les indices (i', j') et (i, j) sont donnés par les relations suivantes:

$$(i', j') = (i' - 1)\mathcal{N}^d + j' \text{ et } (i, j) = (i - 1)\mathcal{N}^d + j . \tag{3.61}$$

Nous allons voir maintenant qu'il est possible d'approcher à hautes fréquences la matrice $\mathcal{A}_h$ par une matrice creuse qui facilitera la résolution du système linéaire (6.3). L'idée de base consiste à appliquer les théorèmes de phase stationnaire ou non stationnaire sur les intégrales oscillantes. Ces méthodes sont valables uniquement dans les hautes fréquences et s'appliquent lorsqu'il n'y a pas de singularités dans les intégrandes et lorsque les hypothèses d'utilisation sont vérifiées.
Pour bien distinguer les intégrales oscillantes (3.59) d'intégrandes singulières et non singulières, introduisons les définitions suivantes.

Définitions 3.7.1 Une interaction proche correspondra au cas où les supports $\text{Supp}(p_{i'})$ et $\text{Supp}(p_i)$ des fonctions de base $p_{i'}$ et p_i ont au moins un triangle en commun. Tandis que l'interaction lointaine correspondra au cas où $\text{Supp}(p_{i'})$ et $\text{Supp}(p_i)$ ont au plus un point en commun. •

Nous pouvons maintenant commencer le calcul des éléments de la matrice. Comme dans une méthode classique d'éléments finis, nous cherchons à calculer l'interaction de deux fonctions de base. C'est l'objet des deux sous-sections suivantes.

3.7.1 Interactions lointaines

Nous précisons ici les expressions des coefficients de la matrice dans le cas des interactions lointaines. La proposition suivante va nous donner l'équivalent à hautes fréquences de l'intégrale $(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)}$ qui n'est autre que le premier terme du développement asymptotique.

Proposition 3.7.1 *Dans le cas des interactions lointaines, s'il existe un point* $y_0 \in \text{Supp}(p_i)$ *vérifiant les hypothèses:*

- ◇ *pour un point* $x \in \text{Supp}(p_{i'})$, *nous avons* $\dfrac{y_0 - x}{|y_0 - x|} = -\xi_j$
- ◇ $\xi_j . n(y_0) > 0$
- ◇ *le chemin optique de* y_0 *à* x *ne rencontre pas l'obstacle,*

alors le coefficient (3.59) *de la matrice* $\mathcal{A}_h$ *est équivalent à:*

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \approx 2 \int_{\mathrm{Supp}(p_{i'})} e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).x} p_{i'}(x) p_i(y_0(x)) d\sigma(x) \tag{3.62}$$

lorsque le nombre d'onde k *tend vers l'infini.*
Sinon, nous avons à hautes fréquences:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \approx 0. \quad \bullet \tag{3.63}$$

Démonstration:
L'expression du coefficient (3.59) est:
$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \ =$

$$-\frac{\imath k}{2\pi} \int_{\mathrm{Supp}(p_{i'})} \int_{\mathrm{Supp}(p_i)} \frac{e^{\imath k(|x-y| + \xi_j.y - \xi_{j'}.x)}}{|x-y|} \left(\xi_j - \frac{y-x}{|y-x|} \right) .n(y) p_i(y) p_{i'}(x) d\sigma(y) d\sigma(x) \tag{3.64}$$

Posons $\mathcal{I}_{i,j}(x,k)$ l'intégrale en la variable y. Elle s'écrit

$$\mathcal{I}_{i,j}(x,k) \ = \ \frac{\imath k}{4\pi} \int_{\mathrm{Supp}(p_i)} \frac{e^{\imath k(|x-y| + \xi_j.y)}}{|x-y|} \left(\xi_j - \frac{y-x}{|y-x|} \right) .n(y) p_i(y) d\sigma(y) \ .$$

Nous allons utiliser la méthode de la phase stationnaire sur l'intégrale $\mathcal{I}_{i,j}$. En raisonnant comme dans la sous-section 3.5.2, nous en déduisons que $\mathcal{I}_{i,j}$ est équivalent à:

$$\mathcal{I}_{i,j}(x) \ \approx \ -e^{\imath k \xi_j.x} \sum_{r=1}^{\text{finie}} Signe(\xi_j.n(y_r)) p_i(y_r)$$

lorsque k tend vers l'infini. Ici, les points y_r appartiennent à Γ_h et satisfont la relation:

$$\frac{y_r - x}{|y_r - x|} \ = \ -\xi_j. \tag{3.65}$$

D'après la proposition 3.5.2, nous avons pour des k grands:

$$\mathcal{I}_{i,j}(x) \ \approx \ \begin{cases} -e^{\imath k \xi_j.x} p_i(y_0(x)) & \text{si } y_0 \text{ vérifient les hypothèses de la proposition} \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration. $\bullet$

Remarque 3.7.1 Le calcul du coefficient $(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)}$ nécessite la recherche du point y_0 vérifiant la condition (3.65). Nous présenterons dans le chapitre 4 l'algorithme qui permet d'effectuer la recherche de y_0 sur les triangles de $\mathrm{Supp}(p_i)$. $\bullet$

Remarque 3.7.2 Notons que, lorsque l'obstacle est convexe, nous retrouvons le résultat de la proposition 3.5.1. En effet, il n'existe pas de points y_0 sur la surface vérifiant les hypothèses de la proposition 3.7.1 et nous avons toujours (3.63). $\bullet$

3.7.2 Interactions proches

Analysons maintenant le calcul des coefficients de la matrice dans le cas des interactions proches. Nous obtiendrons des résultats dans l'approximation haute fréquence.

Proposition 3.7.2 *Dans le cas des interactions proches, le coefficient* (3.59) *de la matrice* $\mathcal{A}_h$ *est équivalent à:*

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \approx \int_{\mathrm{Supp}(p_{i'})\cap\mathrm{Supp}(p_i)} e^{\imath k(\xi_j-\xi_{j'}).x} p_{i'}(x)p_i(x)Signe(\xi_j.n(x))d\sigma(x) \tag{3.66}$$

lorsque le nombre d'onde k *tend vers l'infini.* •

Démonstration:
L'intégrale suivante est à évaluer:
$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} =$

$$-\frac{\imath k}{2\pi}\int_{\mathrm{Supp}(p_{i'})}\int_{\mathrm{Supp}(p_i)} \frac{e^{\imath k(|x-y|+\xi_j.y-\xi_{j'}.x)}}{|x-y|}\left(\xi_j-\frac{y-x}{|x-y|}\right).n(y)p_i(y)p_{i'}(x)d\sigma(x)d\sigma(y)$$

Si l'intégrale extérieure est une intégration en la variable x, nous décomposons le support de la fonction $p_{i'}$ en une somme de triangles T_m ayant pour sommet $s_{i'}$, et

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} = -\frac{\imath k}{2\pi}\sum_{T_m\in\mathrm{Supp}(p_{i'})}\int_{T_m} e^{\imath k(\xi_j-\xi_{j'}).x}p_{i'}(x)\mathcal{I}_{i,j}(x,k)d\sigma(x)$$

où nous avons posé:

$$\mathcal{I}_{i,j}(x,k) = \int_{\mathrm{Supp}(p_i)} \frac{e^{\imath k(|x-y|+\xi_j.(y-x))}}{|x-y|}\left(\xi_j-\frac{y-x}{|y-x|}\right).n(y)p_i(y)d\sigma(y)\ .$$

Fixant alors x dans le triangle T_m, considérons la projection orthogonale du support $\mathrm{Supp}(p_i)$ sur le plan $\mathcal{P}(T_m)$ contenant T_i. Nous approchons alors l'intégrale $\mathcal{I}_{i,j}$ par:

$$\mathcal{I}_{i,j}(x,k) \sim \xi_j.n_{T_m}\int_{\mathcal{P}(T_m)}\frac{e^{\imath k(|\tau|+\xi_j^T.\tau)}}{|\tau|}\tilde{p}_i(\tau)d\tau \tag{3.67}$$

où n_{T_m} désigne la normale unitaire extérieure au triangle T_m. Ici, nous avons noté τ le vecteur $y-x$ projeté sur $\mathcal{P}(T_m)$, ξ_j^T la projection orthogonale de ξ_j sur T_m. Notons que l'approximation (3.67) est d'autant meilleure que nous sommes à hautes fréquences.
Nous effectuons maintenant le passage en coordonnées polaires: $\rho=|\tau|$ et $\theta=(\tau,\xi_j^T)$. Il en résulte:

$$\mathcal{I}_{i,j}(x,k) = \xi_j.n_{T_m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{\imath k\rho(1+|\xi_j^T|\cos\theta)}\tilde{p}_i(\rho,\theta)d\rho d\theta\ .$$

Pour obtenir le développement asymptotique de l'intégrale $\mathcal{I}_{i,j}(x,k)$, nous allons intégrer par parties en ρ. L'intégration par parties en la variable ρ est toujours possible car

$\xi_j.n \neq 0$.
Définissons l'ensemble fini $\{\rho_1, .., \rho_N\}$ comme les points d'intersection de la demi-droite $[0, +\infty[$ et les cotés des triangles de $\mathrm{Supp}(p_i)$ projetés sur le plan $\mathcal{P}(T_m)$.
En intégrant par parties en ρ, nous nous ramenons à estimer:

- si $T_m \in \mathrm{Supp}(p_i)$
$$\mathcal{I}_{i,j}(x,k) \;=\; \frac{\imath\xi_j.n_{T_m}}{k}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+|\xi_j^T|\cos\theta}\left(\tilde{p}_i(0,\theta)+\sum_{l=1}^{N}\int_{\rho_{l-1}(\theta)}^{\rho_l(\theta)} e^{\imath k\rho(1+|\xi_j^T|\cos\theta)}\partial_\rho\tilde{p}_i(\rho,\theta)d\rho\right)d\theta$$

- si $T_i \notin \mathrm{Supp}(p_i)$
$$\mathcal{I}_{i,j}(x,k) \;=\; \frac{\imath\xi_j.n_{T_m}}{k}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+|\xi_j^T|\cos\theta}\left(\sum_{l=1}^{N}\int_{\rho_{l-1}(\theta)}^{\rho_l(\theta)} e^{\imath k\rho(1+|\xi_j^T|\cos\theta)}\partial_\rho\tilde{p}_i(\rho,\theta)d\rho\right)d\theta$$

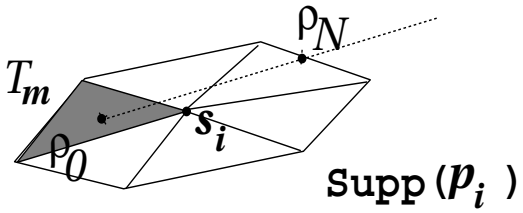


FIG. 3.7: *Le cas* $T_m \in \mathrm{Supp}(p_i)$.

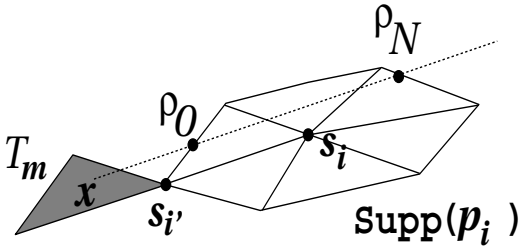


FIG. 3.8: *Le cas* $T_m \notin \mathrm{Supp}(p_i)$.

Observons que $\sum\int e^{\imath k\rho(1+|\xi_j^T|\cos\theta)}\partial_\rho\tilde{p}_i(\rho,\theta)d\rho$ est négligeable devant $\tilde{p}_i(0,\theta)$ lorsque k tend vers l'infini. En effet, à l'aide d'une intégration par parties, nous montrons qu'il existe une constante C telle que:

$$\left|\sum_{l}^{\text{finie}}\int_{\rho_{l-1}}^{\rho_l} e^{\imath k\rho(1+|\xi_j^T|\cos\theta)}\partial_\rho\tilde{p}_i(\rho,\theta)d\rho\right| \;\leqslant\; \frac{C}{k}\,. \tag{3.68}$$

Enfin remarquons que pour $\rho = 0$, on a $y = x$. De plus, $\tilde{p}_i(0,\theta)$ ne dépend pas de la variable θ et on a: $\tilde{p}_i(0,\theta) = p_i(x)$. Nous constatons que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + |\xi_j^T| \cos\theta} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{1 - |\xi_j^T|^2}} \;=\; \frac{2\pi}{|\xi_j . n_{T_m}|} \; .$$

D'après (3.68), nous pouvons dire que le terme équivalent à $\mathcal{I}_{i,j}$ pour des k grands est obtenu lorsque $x \in \mathrm{Supp}(p_i)$. Son expression s'écrit:

$$\mathcal{I}_{i,j}(x,k) \;\approx\; \frac{2\pi\imath}{k} \frac{\xi_j . n_{T_m}}{|\xi_j . n_{T_m}|} p_i(x) \;\approx\; \frac{2\pi\imath}{k} p_i(x) Signe(\xi_j . n_{T_m}) \; . \tag{3.69}$$

Nous sommes maintenant prêts à donner une approximation de l'intégrale $(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)}$ dans la limite des hautes fréquences. Nous avons:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \;\approx\; \sum_{T_m \in \mathrm{Supp}(p_{i'}) \cap \mathrm{Supp}(p_i)} \int_{T_m} e^{\imath k (\xi_j - \xi_{j'}).x} p_{i'}(x) p_i(x) Signe(\xi_j . n_{T_m}) d\sigma(x)$$

ou bien

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \;\approx\; \int_{\mathrm{Supp}(p_{i'}) \cap \mathrm{Supp}(p_i)} e^{\imath k (\xi_j - \xi_{j'}).x} p_{i'}(x) p_i(x) Signe(\xi_j . n(x)) d\sigma(x) \; . \; \bullet$$

Remarque 3.7.3 Nous voici donc passés d'une matrice $\mathcal{A}_h$ pleine à une matrice creuse. En effet, d'une part, en interactions proches les coefficients $(\mathcal{A}_h)_{(i,j),(m,n)}$ sont non nuls uniquement si les sommets s_i et s_m appartiennent à un même triangle $T_m \in \Gamma_h$ et d'autre part, en interactions lointaines, la matrice contient déjà des éléments nuls (cf. la remarque 3.7.2). $\bullet$

Remarque 3.7.4 La méthode numérique, exposée dans la sous-section 3.6, conduit à une matrice $\mathcal{A}_h$ dont les coefficients sont les intégrales oscillantes données par les propositions 3.7.1 et 3.7.2. Ces coefficients peuvent être calculés à l'aide d'intégrations par parties jusqu'aux sommets du maillage Γ_h. Puisqu'à chaque intégration nous gagnons un facteur $\frac{1}{k}$ quand le gradient tangentiel de la phase est non nul, de nombreux coefficients dans la matrice tendent vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Nous retrouvons le résultat du lemme de la phase non stationnaire. Dans le chapitre 4, nous montrons comment repérer ces petits coefficients sans les calculer. En les remplaçant directement par zéro, nous obtiendrons une matrice approchant $\mathcal{A}_h$ d'autant plus creuse que nous sommes à hautes fréquences. $\bullet$

Remarque 3.7.5 Les fonctions $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant \mathcal{N}^s}$ doivent avoir des supports suffisament larges pour utiliser les lemmes de phase stationnaire ou non stationnaire. La conséquence est que nous devons considérer des maillages réguliers de la surface Γ. L'obtention de ces maillages est montré dans le chapitre suivant. $\bullet$

Remarque 3.7.6 Notons que lorsque l'obstacle est convexe, l'écriture de la matrice $\mathcal{A}_h$ est simplifée et ses coefficients s'écrivent à hautes fréquences:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \approx \int_{\mathrm{Supp}(p_{i'})\cap\mathrm{Supp}(p_i)} e^{\imath k(\xi_j-\xi_{j'}).x} p_{i'}(x)p_i(x)d\sigma(x).$$

De plus, nous obtenons une matrice hermitienne définie positive. Ceci résulte de la proposition 3.5.1 qui précise que nous pouvons nous contenter de vecteurs $(\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant \mathcal{N}^d}$ sortants en tout point de $(\mathrm{Supp}(p_i))_{1\leqslant i\leqslant \mathcal{N}^s}$ pour calculer le vecteur α_h de (3.55). Les conséquences utiles sont qu'il n'y plus d'interactions lointaines (cf. la remarque 3.7.2) et que le nombre de degrés de liberté est divisé par deux (puisque nous maillons des demi-sphères unité en chaque sommet de Γ_h). •

Chapitre 4

MISE EN ŒUVRE INFORMATIQUE

4.1 Introduction (p.49)
4.2 Construction des maillages (p.50)
4.3 Front d'onde numérique (p.58)
4.4 Profil de la matrice (p.64)
4.5 Méthode d'intégration (p.64)
4.6 Recherche de points (p.69)
4.7 Algorithmes (p.72)

4.1 Introduction

Nous introduisons dans ce chapitre les outils nécessaires pour l'implémentation de la méthode de discrétisation microlocale. C'est dans le chapitre précédent que nous avons présenté cette méthode qui permet de résoudre de manière approchée des équations intégrales pour des problèmes de diffraction à haute fréquence. Cette méthode, qui repose sur les méthodes de type éléments finis, utilise des fonctions de base qui localisent à la fois en espace (de la variable x) et en direction de propagation (de la variable ξ). Elles sont de la forme:

$$p(x)e^{\imath k\xi.x}$$

où les fonctions p doivent avoir des supports de tailles à peu près identiques pour utiliser les théorèmes de phase stationnaire ou non stationnaire (cf. [28]). Pour la discrétisation spatiale, nous serons donc amenés à considérer des maillages réguliers de la surface de l'obstacle. Quant au vecteur ξ, il décrit la sphère unité S^2 du fait de l'équation eikonale et, comme nous négligeons les rayons glissants (cf. la sous-section 3.3), vérifie la condition:

$$\xi.n(x) \neq 0 \tag{4.1}$$

où n désigne la normale extérieure unitaire sur la frontière Γ de l'objet diffractant. La discrétisation directionnelle de S^2 devra donc satisfaire la condition (4.1).
L'outil de base de la méthode microlocale est l'usage systématique des localisations *en* x et *en* ξ correspondantes. Pour la mise en oeuvre informatique d'un tel outil, il faut utiliser une discrétisation qui tienne compte des deux points de vue spatial et directionnel.
La prochaine section est consacrée à la présentation des maillages de l'espace des couples (x,ξ) ou du fibré cotangent $T^\star\Gamma$ (cf. chapitre 2) qui vérifient l'équation eikonale et la condition (4.1).

Avec les hypothèse et les notations du chapitre précédent, rappelons que les fonctions de bases microlocalisantes permettent, dans la limite des hautes fréquences, d'obtenir une matrice creuse $\mathcal{A}_h$ dont les coefficients sont de la forme:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} = \int e^{\imath k(\xi_j-\xi_{j'}).x} p_{i'}(x)p_i(x)Signe(\xi_j.n(x))d\sigma(x) \tag{4.2}$$

dans le cas des interactions proches et,

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} = 2\int e^{\imath k(\xi_j-\xi_{j'}).x} p_{i'}(x)p_i(y_0(x))d\sigma(x) \tag{4.3}$$

dans le cas des interactions lointaines, où y_0 vérifie la condition:

$$\frac{y_0-x}{|y_0-x|} = -\xi_j. \tag{4.4}$$

Nous avons vu également que les éléments du vecteur second membre b_h s'écrivent:

$$(b_h)_{(i',j')} = -\int e^{\imath k(\xi^{inc}-\xi_{j'}).x} p_{i'}(x)d\sigma(x) \tag{4.5}$$

L'intérêt de la méthode de discrétisation microlocale est que nous pouvons accélérer le calcul des intégrales oscillantes (4.2), (4.3) et (4.5) en appliquant le lemme de la phase non stationnaire. En affinant ceci nous parvenons au concept du *front d'onde numérique*. Cette section 4.3 utilise l'efficacité du maillage microlocal.

Nous le verrons par les expériences numériques dans le chapitre 5, le nombre minimal de degrés de liberté est donné par le critère classique qui est de 5 par longueur d'onde. Puisque le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de nœuds en espace multiplié par le nombre de rayons vecteurs de S^2, nous voyons que, pour monter en fréquences, il suffit de raffiner uniquement le maillage en directions. Dans la pratique, on dispose d'un maillage en espace grossier et il en découle des erreurs d'approximations liées à la géométrie de l'objet diffractant. Une amélioration peut être réalisé en considérant les intégrales oscillantes non plus définies sur la triangulation Γ_h de la surface Γ mais sur Γ. Il faut néanmoins prendre garde que le lien asymptotique entre $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ et u_{ext} décrit dans le chapitre précédent reste valable. Les intégrales obtenues sont évaluées par des formules de quadratures. Ces méthodes d'intégration font l'objet de la section 4.5.

La section 4.6 est consacrée au calcul du coefficient (4.3). Plus précisement, nous montrerons comment procèder à la recherche des points y_0 sur les triangles de la triangulation Γ_h ou sur la surface Γ vérifiant la condition (4.4).

4.2 Construction des maillages

4.2.1 Maillage en espace

La résolution approchée à haute fréquence par discrétisation microlocale des équations intégrales nécessite le découpage de la surface Γ en triangles en tentant de vérifier deux critères:

- le découpage doit être régulier c'est-à-dire que les aires des faces et les longueurs des arêtes doivent être à peu près les mêmes partout. L'idéal serait ici un découpage en triangles équilatéraux.

- le découpage doit être raffinable aisément. C'est en fait une suite de redécoupages que nous voulons construire.

Supposons que nous ayons une triangulation $\mathcal{T}_0$ de la surface Γ où les triangles de $\mathcal{T}_0$ sont assez uniformes. Nous notons $\mathcal{N}_0^T$, $\mathcal{N}_0^A$ et $\mathcal{N}_0^S$ les nombres de triangles, arêtes et sommets de la triangulation $\mathcal{T}_0$.
Le raffinement le plus naturel de $\mathcal{T}_0$, qui conserve les deux points vus ci-dessus, consiste à découper chaque triangle $(T_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}_0^T}$ de $\mathcal{T}_0$ en quatre en introduisant trois nouveaux sommets au milieu des arêtes de $(T_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}_0^T}$ qu'il faut replacer sur Γ. Nous obtenons ainsi une nouvelle triangulation $\mathcal{T}_1$ de la frontière Γ.

En itérant le procédé, il en résulte des maillages très réguliers de la surface Γ si le maillage $\mathcal{T}_0$ l'est. Après n itérations, nous avons les relations suivantes:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{n+1}^S &= \mathcal{N}_n^S + \mathcal{N}_n^A \\ \mathcal{N}_{n+1}^A &= 2\mathcal{N}_n^A + 3\mathcal{N}_n^T \\ \mathcal{N}_{n+1}^T &= 4\mathcal{N}_n^T \end{cases}$$

En effet, nous rajoutons un sommet par arête et nous divisons chaque face en 4; enfin, nous créons 3 arêtes à l'intérieur de chaque face et nous coupons en 2 les anciennes.
Nous pouvons donc partir d'une triangulation très grossière et raffiner ensuite pour mieux approcher la surface Γ.
Nous allons maintenant utiliser cette méthode pour obtenir des maillages de la sphère.

Maillage des sphères

Comme nous l'avons vu plus haut, la méthode qui permet d'obtenir des maillages réguliers nécessite une première triangulation $\mathcal{T}_0$ régulière de la surface Γ.
Dans le cas où Γ est une sphère de rayon R, nous pouvons choisir $\mathcal{T}_0$ parmi les *solides platoniciens* à faces triangulaires. Il y en a trois: le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre.
Si les triangles $(T_k)_{1\leq k\leq \mathcal{N}_0^T}$ de $\mathcal{T}_0$ sont équilatéraux, ils le restent après raffinement. Pour

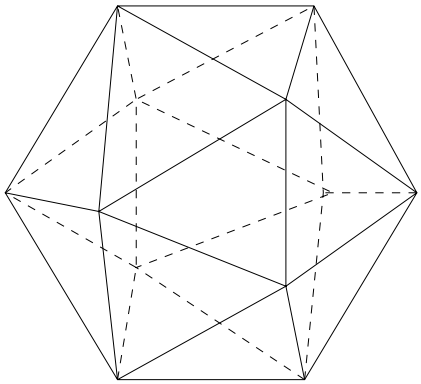


FIG. 4.1: *Icosaèdre régulier.*

en déduire une sphère, il faut replacer à chaque étape les nouveaux sommets sur la sphère c'est-à-dire faire une homothétie sur leurs coordonnées:

$$(x,y,z) \longmapsto (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{R}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Le résultat est que, dès le premier raffinement, les triangles ne sont plus équilatéraux mais seulement isocèles, et dès l'étape suivante, ils ne sont même plus isocèles. Cependant ils restent très réguliers tout au long du processus avec des angles proches de 60 degrés. Plus précisement, les mesures des angles appartiennent à l'intervalle $[54^o, 72^o]$. En effet, la

déformation des triangles est obtenue par des homothéties dont le plus grand rapport est R/D où R est le rayon de la sphère et D la distance du centre de la sphère au centre d'une face de $\mathcal{T}_0$. On pourrait montrer que les angles des triangles obtenus après n raffinements tendent vers 60 degrés quand n tend vers l'infini sauf aux sommets initiaux de $\mathcal{T}_0$.
Nous cherchons le polyèdre régulier qui approche le mieux la sphère pour présenter des résultats numériques pour des moyennes fréquences c'est-à-dire pour des nombres d'onde de l'ordre de $k = 10\mathrm{m}^{-1}$. En particulier, pour $k = 10\mathrm{m}^{-1}$, il nous faut un maillage de la sphère d'environ 40 nœuds. Il faut donc choisir $\mathcal{T}_0$ tel que, dès le deuxième ou troisième raffinement, on obtienne un maillage assez régulier. D'après le tableau ci-contre:

Polyèdre	R/D
tétraèdre	3
octaèdre	1.732
icosaèdre	1.258

observons que c'est pour l'icosaèdre que les triangles obtenus après raffinement restent les plus réguliers. En effet, nous obtenons $R/D = 1.258$.
L'icosaèdre régulier, représenté sur la figure 4.1, constitue la première triangulation de la sphère. Nous avons 20 triangles équilatéraux et douze sommets dont les coordonnées, cf. [5], sont:

$$R\frac{(0,\pm 1,\pm\varphi)}{\sqrt{1+\varphi^2}},\quad R\frac{(\pm 1,\pm\varphi,0)}{\sqrt{1+\varphi^2}},\quad R\frac{(\pm\varphi,0,\pm 1)}{\sqrt{1+\varphi^2}}$$

où φ est le nombre d'or c'est-à-dire la solution supérieure à 1 de l'équation $\varphi^2 = 1+\varphi$, soit $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Sur la figure 4.2, nous montrons le maillage d'une sphère après raffinement.

4.2.2 Maillage en direction

Rappelons que les fonctions de base microlocalisantes, exposées dans le chapitre précédent, s'écrivent pour $x \in \Gamma$:

$$\phi_{i,j}(x) \;=\; p_i(x)e^{\imath k\xi_j.x} \tag{4.6}$$

où p_i est la fonction de base P_1 centrée en un nœud x_i de Γ_h et ξ_j les vecteurs de la sphère unité S^2 centrée à l'origine.

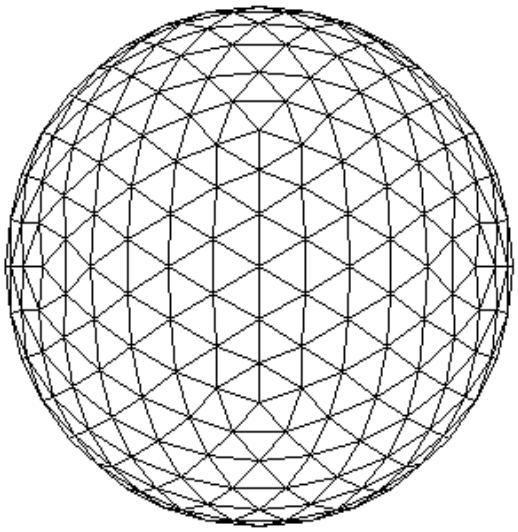


FIG. 4.2: *Maillage d'une sphère.*

Notons que les maillages des sphères obtenus dans la sous-section 4.2.1 ne peuvent pas être utilisés pour représenter les vecteurs ξ_j. En effet, remarquons que lorsque la variable x décrit un triangle T, nous avons, à un déphasage près:

$$\phi_{i,j}(x) \;=\; p_i(x)e^{\imath k\xi_j^T.x}$$

où ξ_j^T est la projection orthogonale de ξ_j sur le plan contenant le triangle T. Si nous considérons un maillage de la sphère comme ci-dessus (figure 4.2) pour représenter les ξ_j, nous observons sur la figure 4.3 que les vecteurs ξ_j^T ne sont plus équirépartis de façon uniforme. L'inconvénient est que nous pouvons avoir certains vecteurs ξ_j^T proches les uns des autres. Ce qui entraîne, pour un $x_i \in \Gamma_h$ fixé, certains $\phi_{i,j}$ de mêmes valeurs. Les maillages de 4.2.1 ne sont donc pas adéquats pour la discrétisation en direction.
L'idée est d'avoir un maillage uniforme pour les vecteurs ξ_j^T. Pour cela, nous chercherons des maillages réguliers des disques unités $D(x_i, 1)$ tangents à Γ en x_i. Puis, nous en déduirons du maillage de $D(x_i, 1)$ un maillage de la sphère unité S^2 tout en tenant compte de la condition (4.1).

Maillage du disque unité $D(O, 1)$

Nous proposons ici une méthode pour mailler $D(O, 1)$ de façon régulière.

La méthode

Les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier. Le pavage obtenu est indéfiniment raffinable par un pavage de même nature.

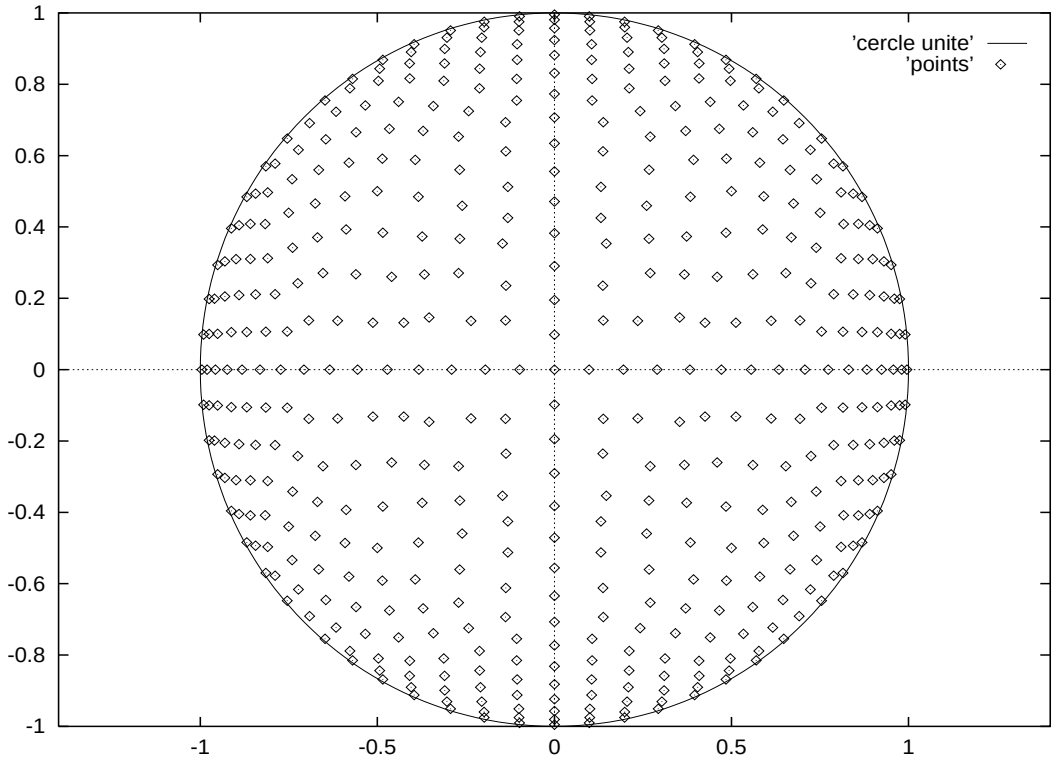


FIG. 4.3: *Projection orthogonale des nœuds d'un maillage d'une sphère de* 4.2.1 *sur le plan* xOy.

Nous avons choisi d'approcher d'abord le disque $D(O,1)$ par un hexagone régulier dans lequel est inscrit le cercle de rayon 1. L'hexagone est découpé en 6 triangles équilatéraux. Nous avons donc au départ $S_0 = 7$ sommets, $A_0 = 12$ arêtes et $C_0 = 6$ cellules. Les coordonnées cartésiennes des 7 sommets sont par exemple:
$M_0 = (0,0,0)$, $M_1 = (1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, $M_2 = (0, 2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, $M_3 = (-1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, $M_4 = (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$,
$M_5 = (0, -2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, et $M_6 = (1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$.

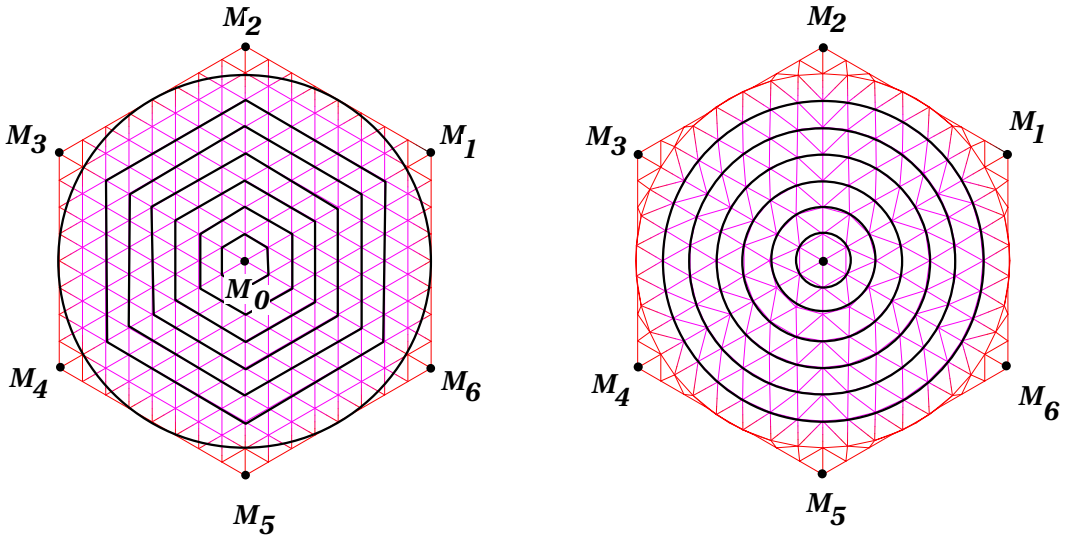
A chaque étape du raffinement, nous redivisons chaque triangle en 4 en utilisant les milieux des arêtes.
Après n itérations, nous avons $2^n - 1$ nouveaux sommets sur les arêtes $[M_0 M_i]_{1 \leq i \leq 6}$ que nous notons $(S_j)_{1 \leq j \leq 2^n - 1}$. Définissons ensuite les cercles $\mathcal{C}_j$ de rayons $||OS_j||_{1 \leq j \leq 2^n - 1}$ vérifiant:

$$||OS_j|| < 1. \tag{4.7}$$

Chaque cercle $\mathcal{C}_j$ est circonsrit à un hexagone régulier $\mathcal{H}_j$ dont les sommets sont sur les arêtes $[M_0 M_i]_{1 \leq i \leq 6}$. Nous déformons ensuite la triangulation en replaçant tous les points de $\mathcal{H}_j$ sur les cerlces $\mathcal{C}_j$ correspondants.

Remarques

Les cellules sont des triangles équilatéraux déformés, mais assez peu pour que les



angles soient presque tous voisins de 60 degrés sauf aux sommets initiaux, où ils tendent vers 90 degrés. Notons que les longueurs des arêtes sont aussi très voisines. En effet, les déformations sont partout inférieures ou égales à la déformation résultant du report d'un point du bord d'un hexagone $\mathcal{H}_j$ sur le cercle $\mathcal{C}_j$. Elle est donc maximale au milieu d'un côté de l'hexagone et vaut $2/\sqrt{3}$. C'est seulement aux sommets appartenant aux 6 segments $[M_0, M_j]$ que les triangles tendent vers des triangles rectangles isocèles, leurs angles restant toutefois aigus.
Remarquons que la condition (4.7) nous permet de réaliser (4.1). En effet, les sommets du maillage correspondent à des projections orthogonales de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$ sur le plan xOy.

Maillage de la sphère unité

Nous sommes maintenant prêts à construire le maillage de la sphère unité S^2.
Soit (i, j, k) un repère orthonormé. Considérons, par exemple, le plan xOy engendré par les vecteurs i et j comme la surface d'un objet diffractant. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, nous cherchons à modéliser les vecteurs ξ *rentrants* et *sortants* c'est-à-dire des directions ξ telles que $\xi.k < 0$ et $\xi.k > 0$. Ces vecteurs ξ sont de norme 1 du fait de l'équation eikonale. C'est à partir du maillage de $D(O, 1) \in xOy$, décrite dans 4.2.2, que nous allons obtenir celui de la sphère unité S^2. En effet, il suffit de relever le maillage de $D(0, 1)$ en posant:

$$\xi_z \;=\; \pm\sqrt{1 - \xi_x^2 - \xi_y^2}$$

où (ξ_x, ξ_y) décrivent les coordonnées des sommets de la triangulation de $D(O, 1)$.
Nous aboutissons ainsi à un maillage de S^2, représenté sur la figure 4.4, ayant les propriétés cherchées.
Nous allons voir comment obtenir les maillages de la sphère unité ayant les propriétés cherchées en chaque sommet d'une triangulation de la surface Γ.

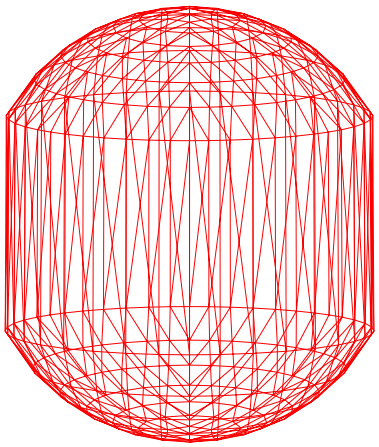


FIG. 4.4: *Maillage en direction.*

4.2.3 Maillage microlocal

Nous allons voir dans cette section comment, à partir de deux maillages issus des sous-sections 4.2.1 et 4.2.2, obtenir un *maillage microlocal*.
Il s'agit de mailler une partie du fibré cotangent de la surface Γ satisfaisant l'équation eikonale. Le maillage s'effectue en deux parties. La première partie, décrite dans 4.2.1, consiste à discrétiser la surface Γ, alors que la deuxième partie, décrite dans 4.2.2, correspond à l'obtention du maillage du disque unité. En chaque sommet x_i de la triangulation de Γ, il faut définir le maillage de $D(x_i, 1)$ et ensuite en déduire le maillage de la sphère unité $S^2(x_i, 1)$. Nous verrons ci-après comment simplifier la deuxième partie. Le maillage final est représenté dans la dernière sous-section.

Maillage d'une fibre

Nous nous plaçons en un point x_i de la triangulation de la surface Γ. Nous supposons que la normale extérieure unitaire sur Γ en x_i noté n_i, est donné. Il s'agit de déterminer le maillage de la sphère unité centrée en x_i tel que la condition (4.1) soit vérifiée. Nous partons du maillage de $D(O, 1)$ obtenu dans 4.2.2 et nous en déduisons les maillages de $D(x_i, 1)$ en chaque sommet x_i de Γ_h par la rotation qui envoie $n = (0, 0, 1)$ en n_i. Ecrivons la rotation qui envoie le vecteur $n = (0, 0, 1)$ sur n_i. Notons d la droite de vecteur directeur $n \wedge n_i$ et posons $\varphi \in [0, 2\pi[$ l'angle entre les vecteurs i et d et $\theta \in [0, \pi[$ l'angle entre les vecteurs n et n_i. Les angles φ et θ sont représentés sur la figure 4.5. La matrice de rotation envoyant n sur n_i s'écrit dans le repère (i, j, k):

$$R_{n_i} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Posons $\mathcal{N}^s$ et $\mathcal{N}^d$ les nombres de sommets des triangulations Γ_h et du disque $D(O, 1) \in xOy$, noté D_h de rayon $r_h < 1$.

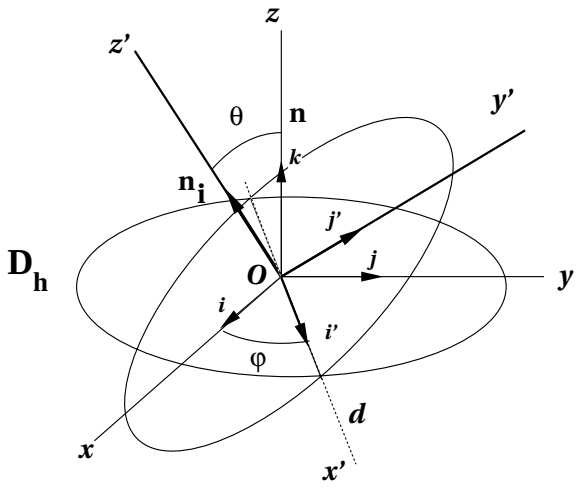


FIG. 4.5: *Les angles de la matrice de rotation* R_{n_i}.

Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, nous cherchons à modéliser des vecteurs ξ de S^2 *sortants* et *rentrants* en chaque support des fonctions $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant \mathcal{N}^s}$ centrées aux sommets $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant \mathcal{N}^s}$ de Γ_h. Pour obtenir une implémentation pratique de la méthode de discrétisation microlocale, nous voulons avoir les mêmes indices j des vecteurs ξ_j en chaque nœud x_i qui désignent un vecteur sortant ou un vecteur rentrant. Pour cela, il suffit de faire une homothétie de rapport $\mathcal{R} = \dfrac{c_i}{r_h}$ sur les vecteurs η_j. Ici,

$$c_i = \min_{x_i \in (\mathrm{Supp}(p_m)\cap\Gamma_h)\setminus\{x_m\}} (\, n_i.n_m \,)$$

où x_m décrivent les sommets de Γ_h et où x_i décrivent les sommets du support $\mathrm{Supp}(p_m)$ avec x_i différent de x_m. Soient $\tilde{\eta}_j$ les sommets de la triangulation D_h du disque unité $D(0,1)$ appartenant au plan xOy. Les nouveaux sommets sont obtenus en appliquant les homothéties suivantes:

$$\eta_j = \mathcal{R}\tilde{\eta}_j.$$

Supposons maintenant $\mathcal{N}^d$ pair. A chaque nœud $(x_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s}$ de Γ_h, on associe les vecteurs $(\xi_j(x_i))_{1\leq j\leq \mathcal{N}^d}$ tels que

$$\begin{cases} \xi_j(x_i) \;=\; R_{n_i}\eta_j \;+\; \sqrt{1-\left|R_{n_i}\eta_j\right|^2}\, n_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq \dfrac{\mathcal{N}^d}{2} \\ \\ \xi_j(x_i) \;=\; R_{n_i}\eta_j \;-\; \sqrt{1-\left|R_{n_i}\eta_j\right|^2}\, n_i \quad \text{pour} \quad \dfrac{\mathcal{N}^d}{2} < j \leq \mathcal{N}^d \end{cases} \tag{4.9}$$

où la matrice R_{n_i} est donnée par (4.8). Le résultat est que les vecteurs $(\xi_j(x_i))_{1\leq j\leq \mathcal{N}^d/2}$ (respectivement les vecteurs $(\xi_j(x_i))_{\mathcal{N}^d/2<j\leq \mathcal{N}^d}$) sont sortants (respectivement rentrants) sur tout le support $\mathrm{Supp}(p_i)$. Rappelons que lorsque l'obstacle est convexe les fonctions de bases microlocalisantes utilisent uniquement les vecteurs ξ_j sortants. Sur la figure 4.6,

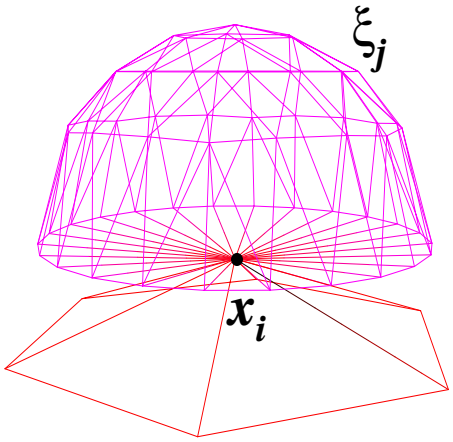


FIG. 4.6: *Maillage d'une fibre dans le cas d'un objet convexe.*

nous montrons le maillage d'une fibre dans le cas où l'objet est convexe.
Nous sommes maintenant prêts à montrer l'outil de base de la méthode de discrétisation microlocale exposée dans le chapitre précédent.

Maillage du fibré

Revenons aux sous-sections 4.2.1 et 4.2.2. Avec les mêmes notations, nous pouvons maintenant présenter le maillage microlocal. Il est défini par les couples:

$$(x_i, \xi_j(x_i)) \quad \text{avec} \;\; 1 \leq i \leq \mathcal{N}^s \;\; \text{et} \;\; 1 \leq j \leq \mathcal{N}^d \tag{4.10}$$

où les nœuds $(x_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s}$ décrivent Γ_h et où les vecteurs $(\xi_j(x_i))_{1\leq j\leq \mathcal{N}^d}$ vérifient la condition (4.9). Ce maillage est illustré sur la figure 4.7 dans le cas où la surface Γ est une sphère.
La méthode de discrétisation microlocale utilise donc un maillage défini par (4.10) qui permettra non seulement d'obtenir des renseignements en espace, mais aussi en direction de propagation. Nous allons voir cette façon de détecter numériquement ces renseignements importants dans la sous-section suivante.

4.3 Front d'onde numérique

Nous allons voir maintenant comment accélérer le calcul des intégrales oscillantes (4.2), (4.3) et (4.5).
Tout d'abord, rappelons que le fait de remplacer une fonction f par:

$$F_{i,j}(k) = \int f(x) e^{-\imath k \xi_j . x} p_i(x) d\sigma(x) \tag{4.11}$$

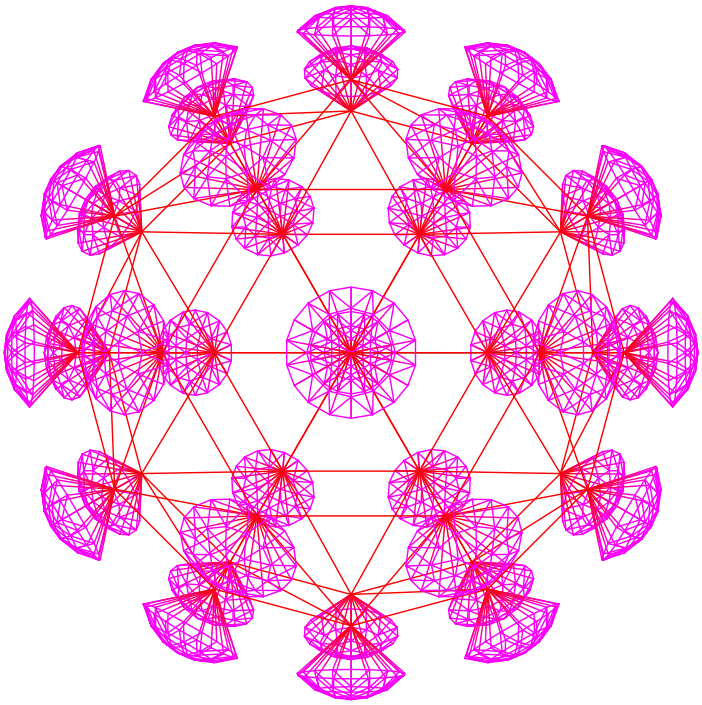


FIG. 4.7: *Maillage de la partie de $T^*\Gamma$ satisfaisant l'équation eikonale dans le cas où la surface Γ est une sphère.*

signifie que l'on microlocalise f en (x_i, ξ_j) (cf. [3, 21]). De plus, nous savons que le couple (x_i, ξ_j) n'appartient pas au front d'onde de f, noté WFf, si pour un certain $C_N > 0$ nous avons:

$$| F_{i,j}(k) | \leq C_N k^{-N} \tag{4.12}$$

Ici, le nombre N est fixé par la régularité des fonctions de base $\phi_{i,j}$ et dans notre cas, $N = 6$ puisque nous pouvons intégrer par partie trois fois jusqu'aux sommets du maillage Γ_h.
Nous savons d'après [28], que c'est précisément l'utilisation de la relation (4.12) à hautes fréquences qui va nous permettre d'annuler plusieurs coefficients (4.2), (4.3) et (4.5). Une conséquence utile est le gain important en stockage de mémoire du fait de la diminution du nombre de degrés de liberté qui va en résulter.
Dans cette section, nous proposons une méthode pour repérer les éléments (4.2), (4.3) et (4.5) négligeables à hautes fréquences. Pour introduire la méthode, décrivons l'expérience numérique suivante. Nous allons considérer le maillage Π_h d'une fibre centrée en un nœud x_i (cf. la sous-section 4.2.3) où les arêtes en espace mesurent environ 56cm. Les coordonnées de x_i sont $(0, 0, 1)$. D'après les expressions (4.2), (4.3) et (4.5), nous choisissons $f(x) = e^{ik\eta.x}$ pour tout $x \in \Pi_h$ où η est un vecteur unitaire donné. Le nombre de vecteurs directions ξ_j est $\mathcal{N}^d = 61$. Nous calculons maintenant les éléments $F_{i,j}$ donnés par (4.11) pour tout $1 \leq j \leq \mathcal{N}^d$. Pour la présentation des résultats, nous avons déformé les vecteurs $(\xi_j)_{1 \leq j \leq \mathcal{N}^d}$ par des homothéties de rapports proportionnels à $|F_{i,j}|$.

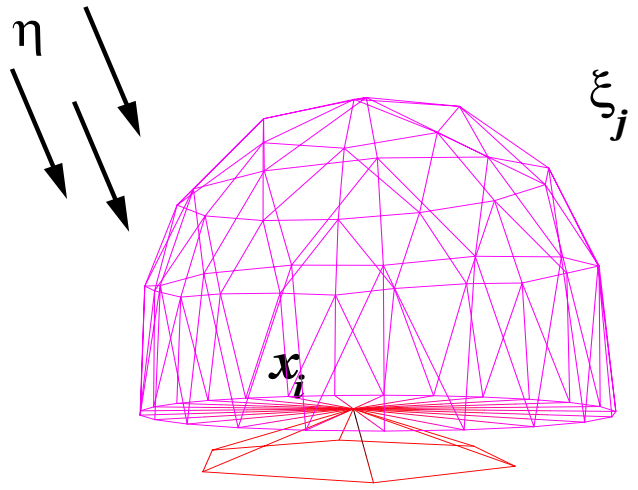


FIG. 4.8: *Homothétie à* $k = 3$.

Plus précisément, les rapports des homothéties sont $\dfrac{4|F_{i,j}|}{\max\limits_j |F_{i,j}|}$. Sur les figures 4.8, 4.9 et

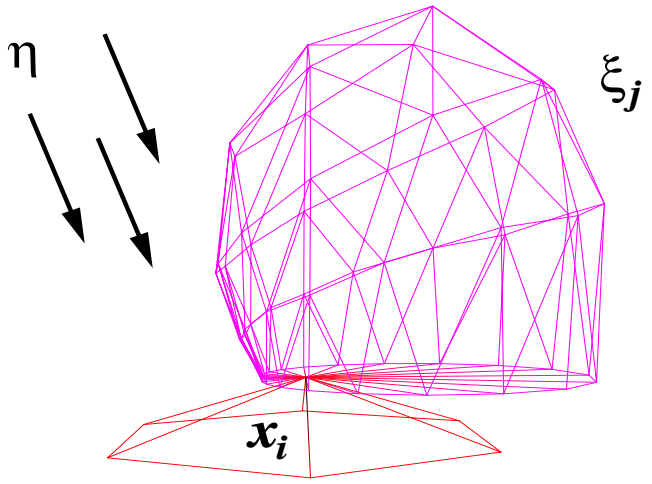


FIG. 4.9: *Homothétie à* $k = 8$.

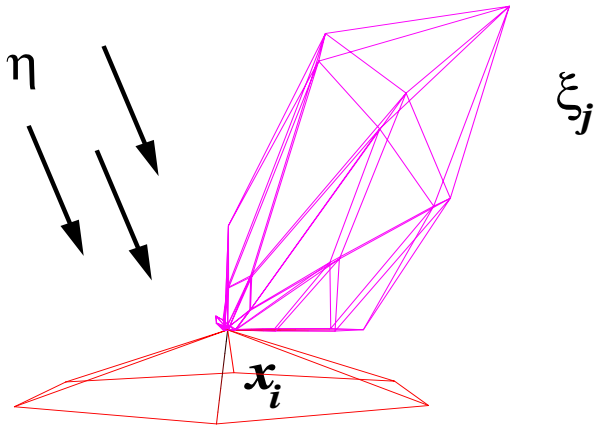


FIG. 4.10: *Homothétie à* $k = 20$.

4.10 nous montrons les calculs sur la fibre Π_h pour divers nombres d'onde. En comparant ces résultats, nous voyons que nous pouvons négliger de plus en plus de coefficients $F_{i,j}$ lorsque le nombre d'onde k augmente. Nous retrouvons numériquement le résultat (4.12). A hautes fréquences les éléments $F_{i,j}$ les plus importants correspondent aux couples (x_i, ξ_j) appartenant à:

$$WF\ f\ =\ \left\{(x,\xi) \in \Gamma \times S^2\ \text{ tel que }\ \xi_T = \eta_T\right\}$$

où T désigne la composante tangentielle. Ce résultat vient du fait que la taille des supports étant grande devant la longueur d'onde, nous pouvons utiliser le théorème de la phase stationnaire pour sélectionner les termes proches de $WF\ f$. Lorsque nous diminuons le nombre d'onde pour un maillage fixé, nous observons sur la figure 4.8 que les vecteurs ξ_j sont à peu près de même taille.

Sur le diagramme 4.11, observons que les termes $F_{i,j}$ les plus importants correspondent

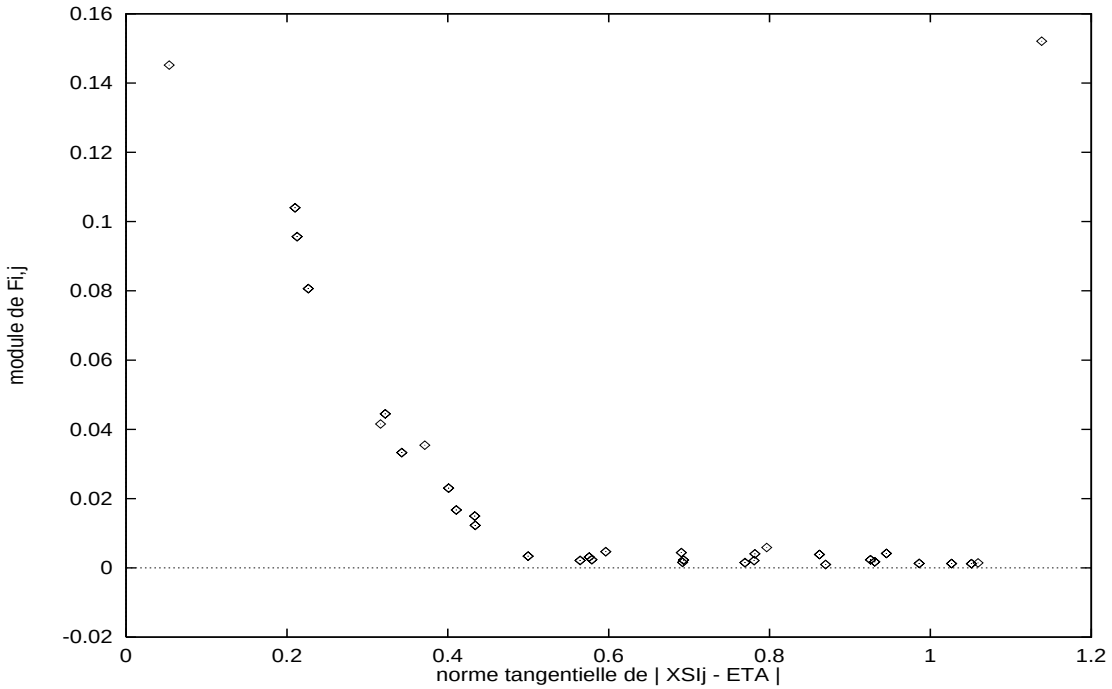


FIG. 4.11: $|F_{i,j}|$ *en fonction de* $|\xi_j - \eta|_T$.

au cas où $|\xi_j - \eta|_T$ est proche de zéro.

L'objectif de cette sous-section est de traduire numériquement $|\xi_j - \eta|_T$ *proche* de zéro. Nous retrouvons l'intérêt de considérer des fonctions de base microlocalisantes pour résoudre les équations intégrales à hautes fréquences. En effet, revenons aux expressions (4.2), (4.3) et (4.5). L'idée est de retenir uniquement les coefficients importants de la matrice $\mathcal{A}_h$ et du vecteur b_h.

Décomposons $\mathrm{Supp}(p_{i'} \cap \mathrm{Supp}(p_i)$ en une somme de $\mathcal{N}$ triangles T_k ayant s_i et s_m comme sommets. Et nous avons:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)}\ =\ \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \int_{T_l \in \mathrm{Supp}(p_i) \cap \mathrm{Supp}(p_m)} e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).x} p_{i'}(x) p_i(x) d\sigma(x)$$

Nous allons introduire un critère de choix qui nous permettra de retenir les coefficients les plus importants de la matrice $\mathcal{A}_h$. Posons $\varphi_{j,j'}(x) = k(\xi_j - \xi_{j'}).x$ la phase de l'intégrale oscillante $(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)}$. Puisque x décrit des triangles de taille $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{k}})$ (cf. [28]), nous avons:

$$|\nabla_\Gamma \varphi_{j,j'}| \sim \sqrt{k}\,|\xi_j - \xi_{j'}|_T$$

où T représente la projection orthogonale sur le plan du triangle T_l.
Remarquons que si:

$$|\xi_j - \xi_{j'}|_T = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{k}})$$

la phase stationne c'est-à-dire que $(s_{i'}, \xi_{j'}, s_i, \xi_j)$ appartient au front d'onde de $\mathcal{A}_h$. Dans ce cas, $(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)}$ est un coefficient dominant de la matrice. Fixant $s_{i'}$ et s_i dans Γ_h, les

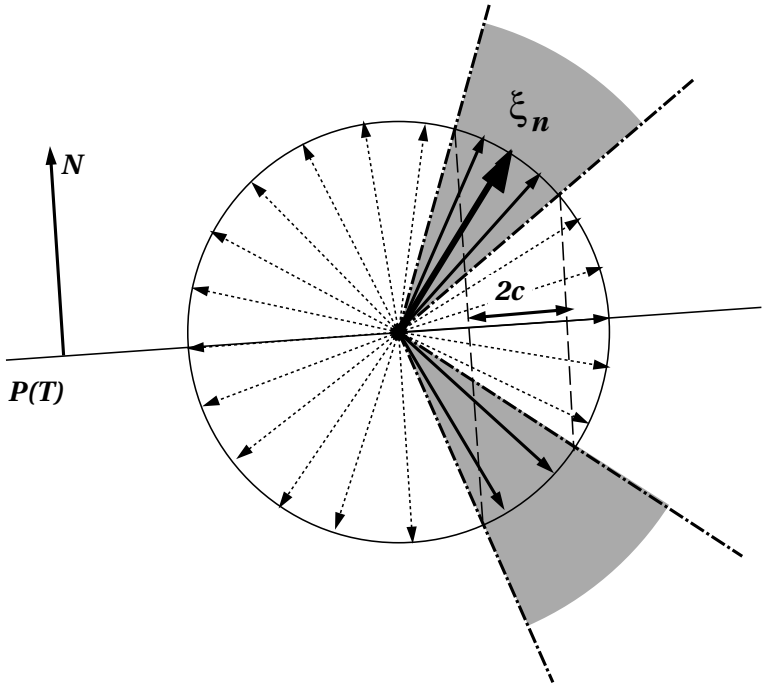


FIG. 4.12: *Cône de sélection autour d'un vecteur ξ_n.*

vecteurs $\xi_{j'}$ et ξ_j devront vérifier la condition, illustrée sur la figure 4.12, suivante:

$$|\xi_j - \xi_{j'}|_T \;\leq\; \frac{c}{\sqrt{k}} \tag{4.13}$$

c étant une constante positive.
Le critère (4.13) est d'autant meilleur qu'on est à hautes fréquences.

4.4 Profil de la matrice

Nous montrons ici le profil de la matrice $\mathcal{A}_h$ issue de la méthode de discrétisation microlocale et des équations intégrales. Son expression, décrite dans le chapitre précédent, est donnée dans (3.60).
Considérons la sphère unité S^2 comme objet diffractant Ω. Son maillage spatial, donné par la section 4.2.1, est composé de 42 points. Quant au maillage directionnel qui correspond au maillage de la demi-sphère extérieure à Ω (cf. la remarque 3.7.6), nous considérons 16 vecteurs directions.
Sur la figure 4.13, nous illustrons le profil de la matrice pour un nombre d'onde fixé à $k = 8m^{-1}$. Chaque dégradé de gris représente le module d'un coefficient de $\mathcal{A}_h$. L'échelle entre blanc et noir correspond à la variation des coefficents entre 0 et $7,92.10^{-2}$. Comme prévu dans la remarque 3.7.4, la matrice est très creuse (moins de 16% de termes non nuls). En effet, le calcul de $\mathcal{A}_h$ fait intervenir uniquement des interactions proches lorsque l'obstacle est convexe. Notons que puisque la matrice est hermitienne (cf. remarque 3.7.6), nous retrouvons le fait que les blocs sont symétriques.
Enfin, observons que les termes les plus importants appartiennent aux blocs diagonaux de la matrice $\mathcal{A}_h$. En fait, ce n'est pas étonnant puisqu'ils correspondent au front d'onde discrétisé de l'opérateur O défini par, pour tout $x \in \Gamma$:

$$O\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) \;=\; \int_\Gamma G(k,|x-y|)\left(1-\imath k\frac{y-x}{|y-x|}\mathcal{D}\right)\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y)d\sigma(y)$$

où nous avons repris les notations du chapitre précédent.
Nous donnons sur la figure 4.14 un exemple de bloc diagonal de la matrice $\mathcal{A}_h$.

4.5 Méthode d'intégration

Cette section est consacrée au calcul numérique des intégrales (4.2), (4.3) et (4.5).

4.5.1 Intégration sur Γ.

Contrairement aux méthodes d'éléments finis classiques, le fait remarquable de la méthode choisie est de pouvoir augmenter la fréquence avec un maillage spatial fixe. Il suffit dans ce cas de raffiner uniquement le maillage directionnel. Dans la pratique, on a un maillage grossier en espace et on désire approcher le mieux possible la géométrie de l'objet diffractant. Nous allons montrer comment la méthode exposée dans le chapitre précédent peut conduire aux mêmes intégrales oscillantes mais définies sur la surface Γ.
Nous avons vu dans le chapitre précédent que les intégrales (4.2), (4.3) et (4.5) tiennent

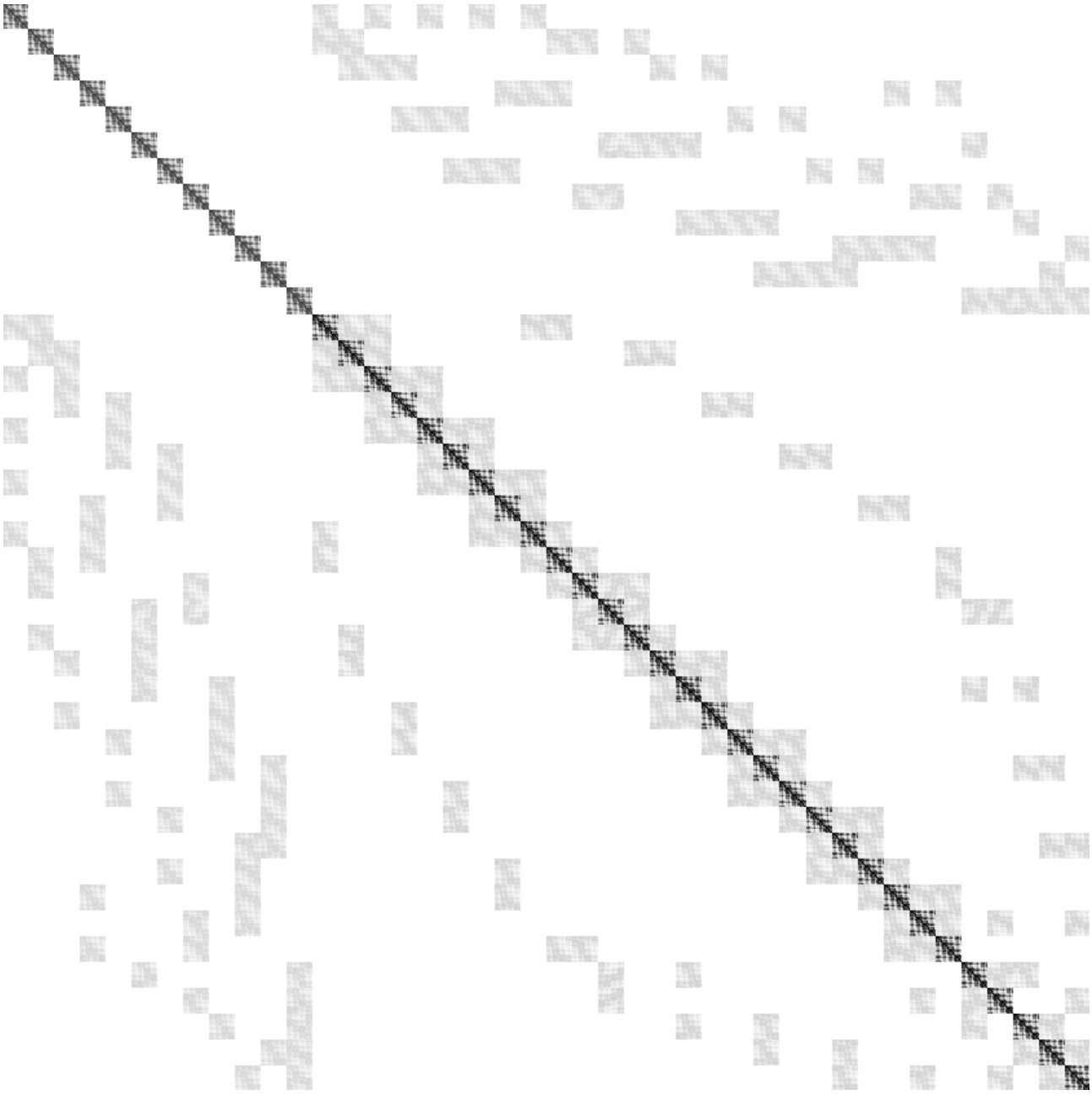


FIG. 4.13: *Profil de la matrice* $\mathcal{A}_h$ *pour* $k = 8m^{-1}$.

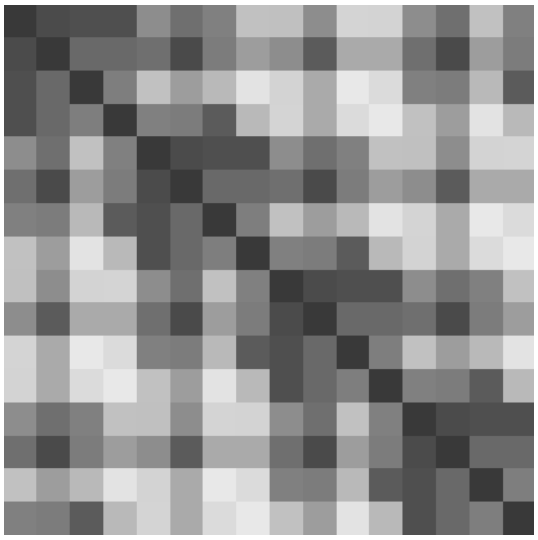


FIG. 4.14: *Bloc diagonal de* $\mathcal{A}_h$ *à* $k = 8m^{-1}$.

compte du lien asymptotique entre $\left(\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}, u_{ext}\right)$ qui s'écrit pour tout $x \in \Gamma_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{ext})_h(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathcal{N}^s} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}^d} \alpha_{i,j} p_i(x) e^{\imath k \xi_j . x} \\ \\ \left(\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}\right)_h (x) = \imath k \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathcal{N}^s} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}^d} \alpha_{i,j}\ \xi_j . n(x)\ p_i(x) e^{\imath k \xi_j . x} \end{array} \right. \tag{4.14}$$

L'objectif ici est d'obtenir des coefficients de $\mathcal{A}_h$ représentant des intégrales sur la surface Γ. Posons $(T_l)_{1 \leq l \leq \mathcal{N}^T}$ les triangles de Γ_h et considérons $(\mathcal{S}(T_l))_{1 \leq l \leq \mathcal{N}^T}$ les triangles courbes dont les surfaces sont sur Γ et les sommets sur Γ_h. Soient $(\tilde{p}_i)_{1 \leq i \leq \mathcal{N}^s}$ les fonctions définies sur $(\mathcal{S}(T_l))_{1 \leq l \leq \mathcal{N}^T}$ de Γ_h telles que pour tout $z \in S^2$:

$$\tilde{p}_i(z) \ = \ p_i(x)$$

où x est le point d'intersection entre la normale n en z et le triangle T_l.
Nous remarquons que le lien (4.14) reste encore valable sur la surface Γ. En effet, nous avons pour tout $z_0 = \lambda_0 x_0$ ($\lambda_0 \in I\!R$), $x_0 \in T_l$

$$\nabla_z \tilde{p}_i(z_0) \ = \ \frac{1}{\lambda_0} \nabla_x p_i(x_0) \ - \ \frac{1}{\lambda_0} \frac{\nabla_x p_i . z_0}{N_{T_l} . z_0} N_{T_l}$$

où N_{T_l} est la normale unitaire du plan contenant le triangle T_l.
Nous trouvons:

$$\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial n}(z_0) \ = \ 0$$

Reprenons les résultats du chapitre précédent. Le principe de la méthode de discrétisation microlocale pour la résolution des équations intégrales conduit à des matrices $\mathcal{A}_h$

creuses quel que soit l'objet diffractant. Les expressions des coefficients de la matrice $\mathcal{A}_h$ deviennent, dans le cas des interactions proches:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} = \sum_{T_l \in \mathrm{Supp}(p_{i'}) \cap \mathrm{Supp}(p_i)} \int_{\mathcal{S}(T_i)} e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).z} Signe(\xi_j.n(z)) \tilde{p}_{i'}(z) \tilde{p}_i(z) d\sigma(z) \quad (4.15)$$

et dans le cas des interactions lointaines:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} = 2 \sum_{T_l \in \mathrm{Supp}(p_{i'})} \int_{\mathcal{S}(T_l)} e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).z} \tilde{p}_{i'}(z) \tilde{p}_i(y_0(z)) d\sigma(z) \quad (4.16)$$

Il n'est plus possible d'intégrer exactement ces termes. L'évaluation de ces intégrales se fait à l'aide des formules de quadratures.

4.5.2 Formules de quadrature.

L'intégration exacte par les formules de quadratures n'est possible que si les termes sont des polynômes. Dans notre cas, la pricipale difficulté est que les termes (4.15) et (4.16) sont de plus en plus oscillants lorsque le nombre d'onde k augmente.
Considérons l'intégrale suivante:

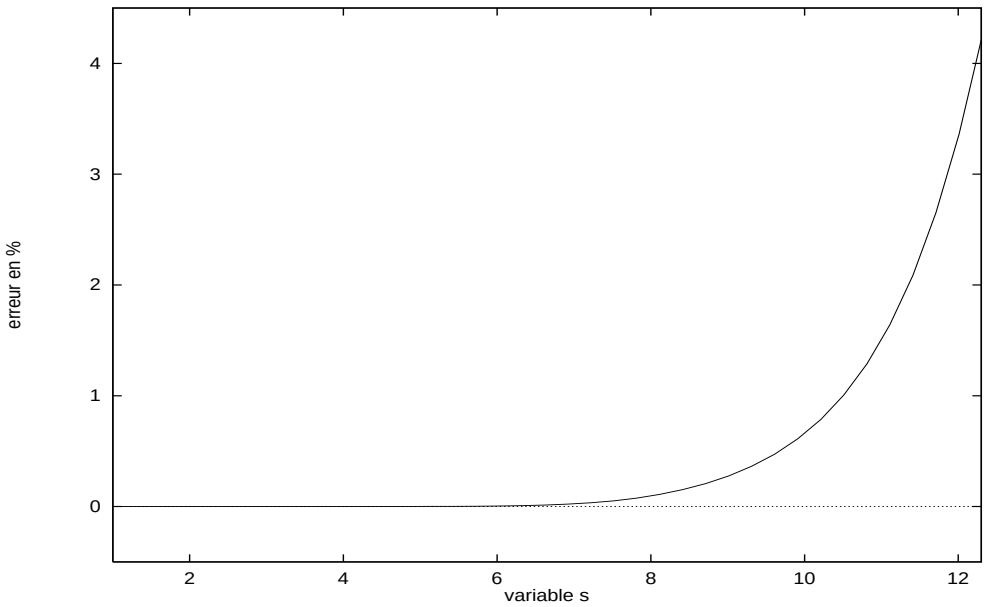


FIG. 4.15: *Erreur relative sur $\mathcal{I}$ en fonction de $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$.*

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\imath(\, s_1.x \, + \, s_2.y \,)} dy dx.$$

Nous utilisons une formule de quadrature à 16 points de Gauss qui se trouve dans [18]. Sur la figure 4.15, nous représentons l'erreur relative faite sur $\mathcal{I}$ en fonction de $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$.

Nous remarquons que l'erreur est inférieure à 5% pour $s = 13$. Bien sûr, ce seuil est insuffisant dans notre cas. En effet, si nous posons $\varphi = k(\xi_n - \xi_j).z$ la phase des intégrales oscillantes vues ci-dessus, nous avons que $|\varphi|$ est d'autant grand lorsque k tend vers l'infini. C'est grâce à l'étude faite dans la section 4.3 que nous pouvons utiliser les formules de quadratures pour calculer les termes (4.15) ou (4.16). En effet, les coefficients les plus importants dans la matrice $\mathcal{A}_h$ sont les intégrales oscillantes (4.15) et (4.16) dont les phases vérifient:

$$|\varphi| \ = \ \mathcal{O}(1)$$

pour des nombres d'onde k aussi grands que l'on veut.
Considérons l'application:

$$\begin{array}{rccc} \Pi \ : & \mathcal{S}(T_l) & \longrightarrow & T_l \\ & z & \longmapsto & x \end{array} \tag{4.17}$$

telle que x soit le point d'intersection entre le vecteur $n(z)$ et le triangle T_l.
Posons J_l le jacobien de l'application Π.
Les éléments de la matrice $\mathcal{A}_h$ s'écrivent, dans le cas des interactions proches:
$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \ =$

$$\sum_{T_l \in \mathrm{Supp}(p_{i'}) \cap \mathrm{Supp}(p_i)} \int_{T_l} e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).z(x)} Signe(\xi_j.n(z(x))) p_{i'}(x) p_i(x) J_k(x) d\sigma(x)$$

et dans le cas des interactions lointaines:
$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \ =$

$$2 \sum_{T_l \in \mathrm{Supp}(p_{i'})} \int_{T_l} e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).z(x)} p_{i'}(x) p_i(y_0(x)) J_l(x) d\sigma(x)$$

Dans tous nos calculs, nous avons utilisé une formule de quadrature avec 16 points de Gauss.

4.5.3 Le cas particulier

Dans le cas où la surface Γ est la sphère unité, nous avons:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \ = \sum_{T_l \in \mathrm{Supp}(p_{i'}) \cap \mathrm{Supp}(p_i)} \int_{T_l} e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).x/|x|} p_{i'}(x) p_i(x) \frac{N_{T_l}.x}{|x|^3} d\sigma(x)$$

où N_{T_l} est la normale unitaire extérieure du triangle T_l. Nous voyons que la jacobienne J_l de l'application Π représente l'angle solide.

4.6 Recherche de points

Avec les hypothèses et les notations du chapitre précédent, nous avons vu que, si $S_{i'} \cap S_i = \emptyset$, alors le coefficient de la matrice $\mathcal{A}_h$ s'écrit:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \;=\; 2 \sum_{T_l \in \mathrm{Supp}(p_{i'})} \int_{T_l} e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).x} p_{i'}(x) p_i(y_0(x)) d\sigma(x)$$

où y_0 vérifie la condition (4.4):

$$\frac{y_0 - x}{|y_0 - x|} \;=\; -\xi_j.$$

Considérons une triangulation Γ_h de la surface Γ. Nous noterons dans la suite $\mathcal{N}^T$ le nombre de triangles T_l de Γ_h. Cette section est consacrée à la recherche des points y_0 sur les triangles T_l d'une triangulation de Γ vérifiant cette dernière condition. La première étape consiste à chercher le point y_0 dans le plan du triangle considéré et puis à déterminer ses coordonnées.
Soit T_l un triangle de $\mathbb{R}^3$, de sommets d, e et f. Ce triangle définit un plan que nous notons $\mathcal{P}$. Fixons ensuite un point $x \in \mathbb{R}^3$ et un vecteur unitaire ξ_j quelconque.

4.6.1 Intersection droite-plan

Considérons la droite D passant par le point x et de vecteur directeur ξ_j. Nous allons chercher le point d'intersection y entre la droite D et le plan $\mathcal{P}$ vérifiant la condition (4.4). Nous avons besoin de la normale N_l du triangle T_l qui est donnée par:

$$N_l \;=\; (e - d) \wedge (f - d)$$

Cherchons le réel t strictement positif tel que:

$$x - y \;=\; t\xi_j$$

Par un produit scalaire, nous montrons que:

$$t \;=\; \frac{x.N_l - y.N_l}{\xi_j.N_l} \tag{4.18}$$

Nous savons que $y.N_l$ est égale à la distance de l'origine au plan $\mathcal{P}$ contenant le triangle T_l. Nous pouvons réécrire (4.18) sous la forme:

$$t \;=\; \frac{x.N_l - d.N_l}{\xi_j.N_l} \tag{4.19}$$

Et pour $t > 0$, nous avons:

$$y \;=\; x \;-\; \frac{x.N_l - a.N_l}{\xi_j.N_l}\xi_j \tag{4.20}$$

Bien sûr, le cas où le vecteur ξ_j appartient au plan du triangle T_l est rejeté ainsi que le cas où $t \leq 0$.

4.6.2 Intersection droite-triangle

Supposons maintenant que $y \in \mathcal{P}$. Nous cherchons à savoir si le point y appartient au triangle T_l c'est-à-dire si y vérifie:

$$y - d \;=\; \alpha(e-d) \;+\; \beta(f-d) \tag{4.21}$$

où les réels α et β réalisent:

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \text{et} \quad \alpha + \beta \leq 1 \tag{4.22}$$

L'équation (4.21) s'écrit:

$$(S) \begin{cases} y_1 - d_1 \;=\; \alpha(e_1 - d_1) \;+\; \beta(f_1 - d_1) \\ y_2 - d_2 \;=\; \alpha(e_2 - d_2) \;+\; \beta(f_2 - d_2) \\ y_3 - d_3 \;=\; \alpha(e_3 - d_3) \;+\; \beta(f_3 - d_3) \end{cases}$$

Une solution existe et est unique. Afin de réduire le système, nous allons considérer la projection orthogonale du triangle T_l sur l'un des trois plans xOy, xOz ou yOz. Il faut néanmoins prendre garde que le triangle T_l ne soit pas perpendiculaire à un plan. En effet, sa projection est alors un segment. Pour éviter ce cas, nous cherchons à déterminer l'axe dominant du vecteur N et nous allons utiliser le plan perpendiculaire à cet axe.
Notons l'indice i_0 qui vérifie:

$$i_0 \;=\; \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad |N_x| \;=\; \max(|N_x|, |N_y|, |N_z|) \\ 2 \quad \text{si} \quad |N_y| \;=\; \max(|N_x|, |N_y|, |N_z|) \\ 3 \quad \text{si} \quad |N_z| \;=\; \max(|N_x|, |N_y|, |N_z|) \end{cases}$$

et définissons les indices i_1 et i_2 tels que:

$$\begin{cases} i_1 \;=\; \text{mod}(i_0, 3) \;+\; 1 \\ i_2 \;=\; \text{mod}(i_0 + 1, 3) \;+\; 1 \end{cases}$$

où la fonction $\text{mod}(i, j)$ donne le reste de la division entière de i par j.
Le système (S) se réduit à:

$$\begin{cases} y_{i_1} - d_{i_1} \;=\; \alpha(e_{i_1} - d_{i_1}) \;+\; \beta(f_{i_1} - d_{i_1}) \\ y_{i_2} - d_{i_2} \;=\; \alpha(e_{i_2} - d_{i_2}) \;+\; \beta(f_{i_2} - d_{i_2}) \end{cases}$$

Résumons-nous.
Fixant $x \in T_i$ et $\xi_j \in S^2$, nous cherchons les points y appartenant à Γ_h vérifiant:

$$\frac{y - x}{|y - x|} \;=\; -\xi_j$$

Parcourons tous les triangles $(T_l)_{1\leq l\leq \mathcal{N}^T}$ de Γ_h différents de T_i.
Dans un premier temps, nous nous assurons que le triangle T_l et la droite D ne sont pas parallèles, puis que le point y appartient bien au plan du triangle T_l c'est-à-dire que $t > 0$.
Dans un second temps, nous calculons les réels α et β. Si ces réels vérifient les conditions (4.22) nous calculons le coefficient de la matrice $(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)}$.

4.6.3 Intersection droite-sphère

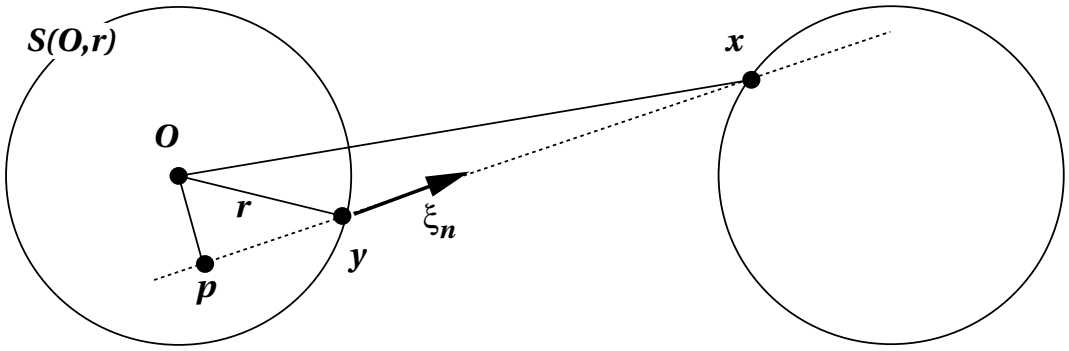


FIG. 4.16: *Recherche du point y.*

Nous allons maintenant rappeler un problème élémentaire qui joue un rôle clé dans la résolution numérique du problème (P_3) lorsque l'objet diffractant est la réunion de deux sphères.
Nous appellerons $S(O,r)$ la sphère de centre O et de rayon r. Pour $x \in I\!R^3$, nous noterons p le point tel que:

$$(x-O)^2 \;=\; (p-O)^2 \;+\; (x-p)^2$$

Soit ξ_j un vecteur unitaire quelconque. Le problème que nous allons considérer est le suivant: trouver le point $y \in S(O,r)$ vérifiant:

$$\frac{y-x}{|y-x|} \;=\; -\xi_j \tag{4.23}$$

Observons que:

$$|y-p| \;=\; \sqrt{r^2 \;-\; (x-O)^2 + (x-p)^2}$$

De plus, $|x-p| \;=\; |(x-O).\xi_j|$ et le point d'intersection, illustré sur la figure 4.16, s'écrit:

$$y \;=\; x \;-\; (|x-p| - |y-p|)\xi_j$$

Remarque 4.6.1 A x et ξ_j fixés, remarquons qu'il suffit d'écarter les deux sphères pour ne pas trouver de point y vérifiant la condition (4.23). •

4.7 Algorithmes

Les principales étapes pour la résolution numérique des équations intégrales par la méthode de discrétisation microlocale sont rassemblées sur la figure 4.17.

FIG. 4.17: *Principales étapes de la résolution numérique d'un problème de diffraction d'ondes par un obstacle convexe.*

Remarque 4.7.1 Notons que la figure 4.17 montre que nous calculons que les coefficients non nuls de la matrice $\mathcal{A}_h$. •

Remarque 4.7.2 La figure 4.17 présente l'algorithme dans le cas où l'obstacle est convexe. En ce qui concerne les objets non convexes, nous devons rajouter le calcul de l'enveloppe convexe avant de commencer le calcul des coefficients de la matrice $\mathcal{A}_h$. En effet, pour utiliser au mieux les résultats de la proposition 3.5.2, nous maillons des demi-sphères unités extérieures en chaque sommet de Γ_h s'il appartient à l'enveloppe convexe et des sphères unités sinon. Les interactions proches sont calculées comme sur la figure 4.17. Quant aux interactions lointaines, elles sont calculées uniquement en dehors de l'enveloppe convexe et utilisent la recherche de points de la section 4.6. •

Chapitre 5

EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

5.1 Introduction (p.75)
5.2 Cas convexe (p.75)
5.3 Cas non convexe (p.83)
5.4 Annexe (p.86)

5.1 Introduction

Les chapitres 3 et 4 nous ont permis de développer et de mettre au point un code en Fortran afin de résoudre les problèmes de diffraction d'ondes via la méthode de discrétisation microlocale. Ici, nous présentons diverses expériences numériques sur lesquelles nous allons vérifier la validité du code.
Reprenons les notations du chapitre 3 et rappelons que nous cherchons à résoudre l'équation intégrale suivante. Pour tout $x \in \Gamma$,

$$\frac{u^{inc}(x)}{2} = \int_{\Gamma} G(k,|x-y|)\left(1 - \imath k \frac{y-x}{|y-x|}.n(y)\mathcal{D}\right)\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y)d\sigma(y) \qquad (5.1)$$

où u^{inc} représente l'onde incidente. Avant de présenter les résultats, précisons que ce problème est caractérisé par:

- La forme et la nature de l'obstacle. Les obstacles sont ici parfaitement réféchissants et tridimensionnels.
- La fréquence du problème qui est déterminée en fonction des maillages spatial et directionnel de l'obstacle. En effet, nous avons choisi de satisfaire le critère classique qui est d'avoir au moins 5 de degrés de liberté par longueur d'onde.
- La direction de l'onde incidente, qui est une onde plane pour nos applications, repérée par son vecteur d'onde, noté ξ^{inc}.

Nous avons vérifié la validité de notre code dans les deux cas suivants. Le cas où l'obstacle est une sphère et le cas où l'obstacle est la réunion de deux sphères. Dans ce chapitre, nous proposons essentiellement des résultats de SER.

5.2 Cas convexe

Nous allons simuler ici la diffraction d'une onde incidente sur un obstacle convexe. Considérons la sphère unité comme objet diffractant. L'intérêt est la connaissance de la SER lorsque l'obstacle est éclairé par une onde incidente plane. Nous trouverons le calcul exact de SER dans l'annexe de ce chapitre. Le maillage spatial est composé de 42 nœuds soit 80 triangles. Nous avons vu dans le chapitre 3 que lorsque l'objet est convexe, les fonctions de base microlocalisantes utilisent un maillage directionnel de la demi-sphère (cf. remarque 3.7.6).

Maillage directionnel composé de 16 vecteurs

Dans un premier temps, nous avons couplé le maillage spatial avec 16 vecteurs directions. Le nombre d'onde a été fixé à $k = 8m^{-1}$ ce qui correspond à environ 5 degrés de liberté par longueur d'onde. Le calcul de la SER est présenté sur la figure 5.1. Observons que l'allure générale de la solution est bien reproduite. Nous effectuons la même expé-

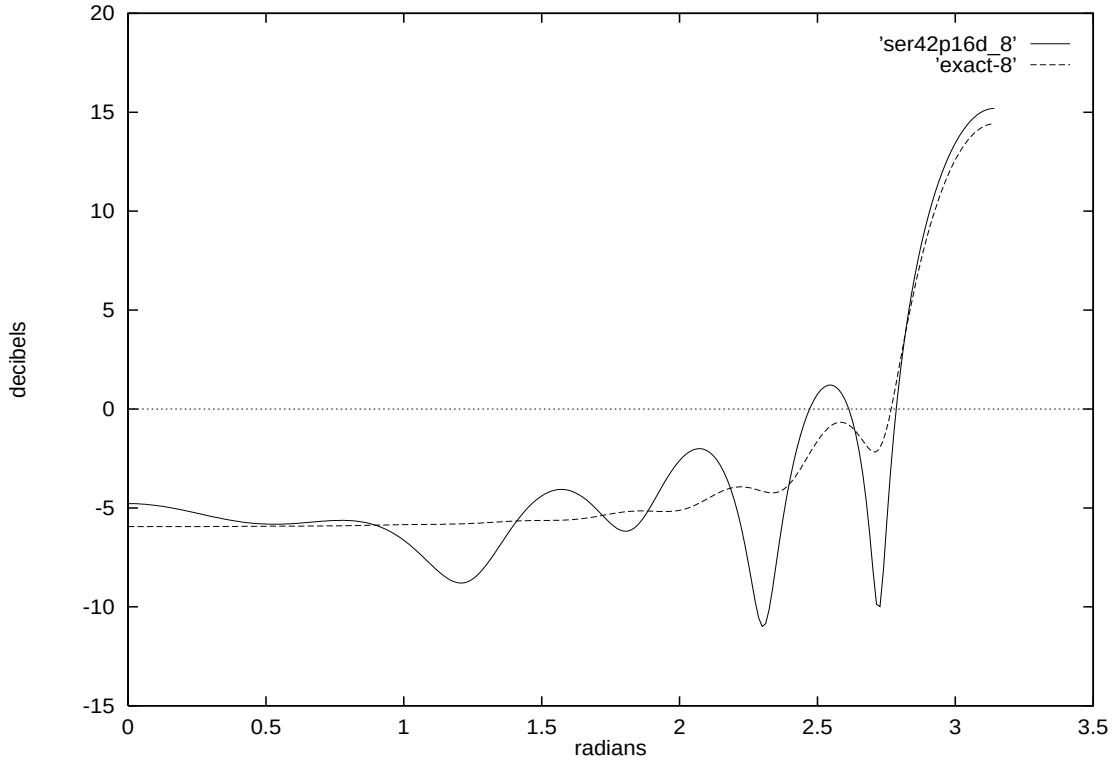


FIG. 5.1: *SER d'une sphère avec 16 vecteurs directions à* $k = 8m^{-1}$.

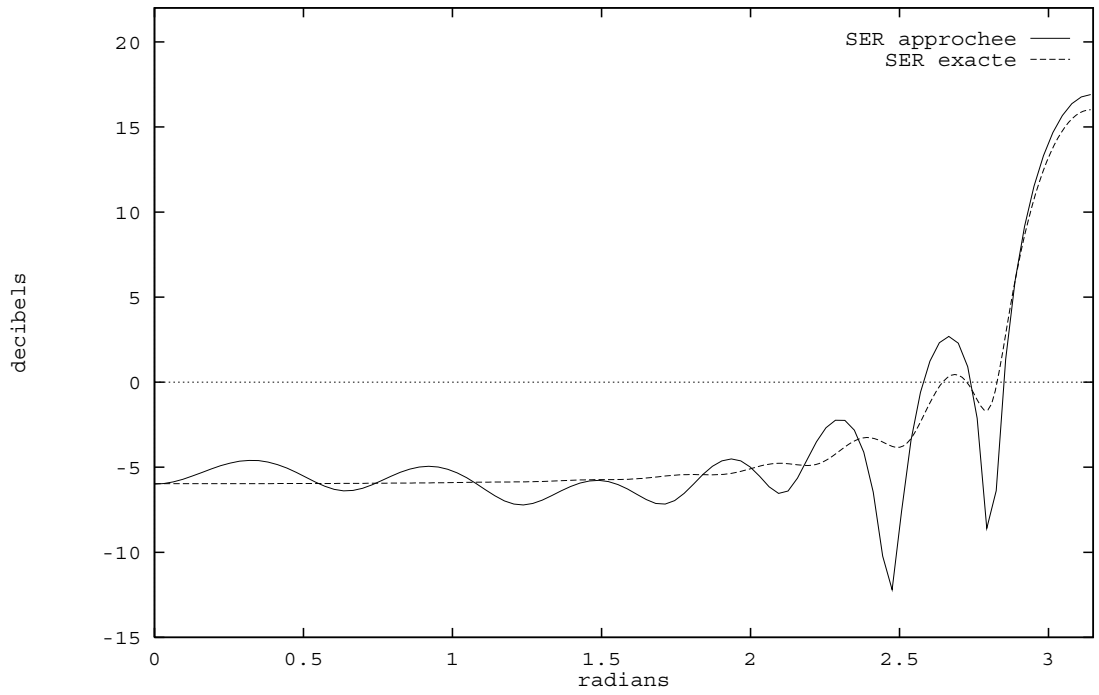


FIG. 5.2: *SER d'une sphère avec 16 vecteurs directions à* $k = 10m^{-1}$.

rience pour divers nombres d'onde ($k = 10m^{-1}$, $k = 12m^{-1}$ et $k = 14m^{-1}$). Sur les figures 5.2 et 5.3, nous montrons le tracé des SER obtenues pour 4.6 et 3.8 degrés de liberté par longueur d'onde. Observons que les SER numériques et exactes se comparent très bien.
La figure 5.4 présente le tracé de la SER à $k = 14m^{-1}$ ce qui correspond à environ 3

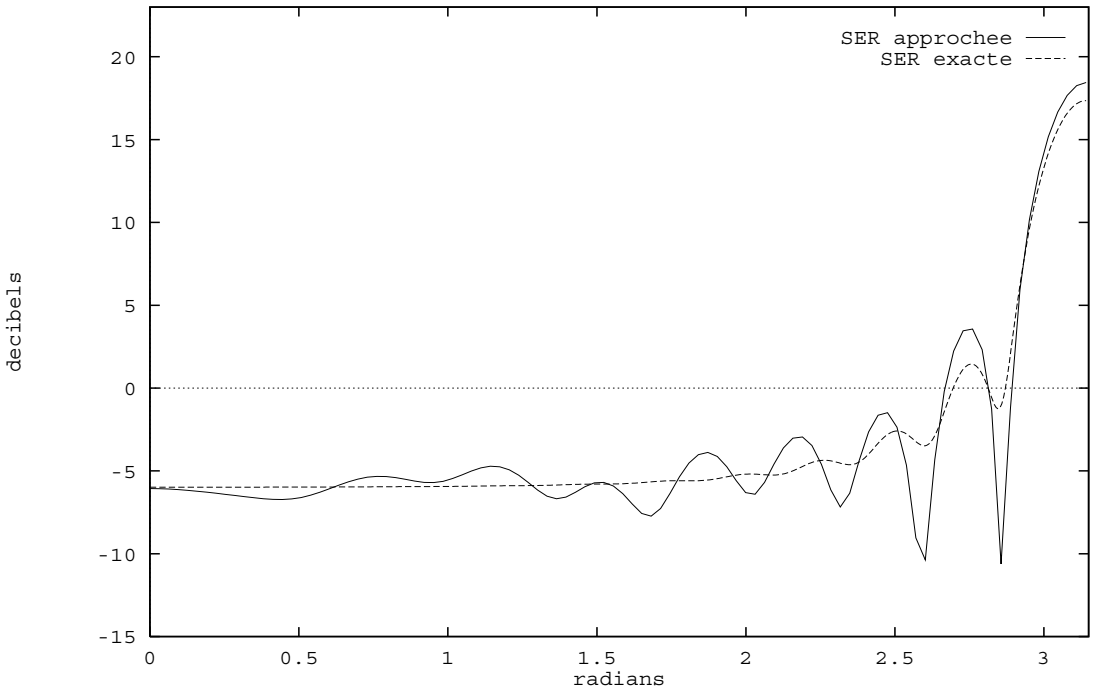


FIG. 5.3: *SER d'une sphère avec 16 vecteurs directions à* $k = 12m^{-1}$.

degrés de liberté par longueur d'onde. Observons que dans ce cas le résultat obtenu n'est pas satisfaisant.

Remarque 5.2.1 Notons que nous retrouvons le critère classique des maillages qui impose au moins 5 degrés de liberté par longueur d'onde. En effet, au vu des résultats exposés ci-dessus, nous pouvons dire que le calcul de la solution est raisonable pour un nombre de degrés de liberté supérieur ou égal à 4. •

Maillage directionnel composé de 64 vecteurs

Un des gros avantages de la méthode de discrétisation microlocale est qu'elle permet de monter en fréquences en raffinant uniquement le maillage en directions. L'important est d'avoir au moins 5 degrés de liberté par longueur d'onde (cf. remarque 5.2.1).
Reprenons l'expérience décrite plus haut en gardant le même maillage en espace. Les calculs numériques utilisent maintenant un maillage directionnel composé de 64 vecteurs et le nombre d'onde a été fixé à $k = 12m^{-1}$. Il en résulte un nombre de degrés de liberté par longueur d'onde entre 7.5 et 8. Malgré cette précision, le résultat de SER obtenu sur la figure 5.5 n'est pas satisfaisant. Ceci s'explique par le fait que la méthode de

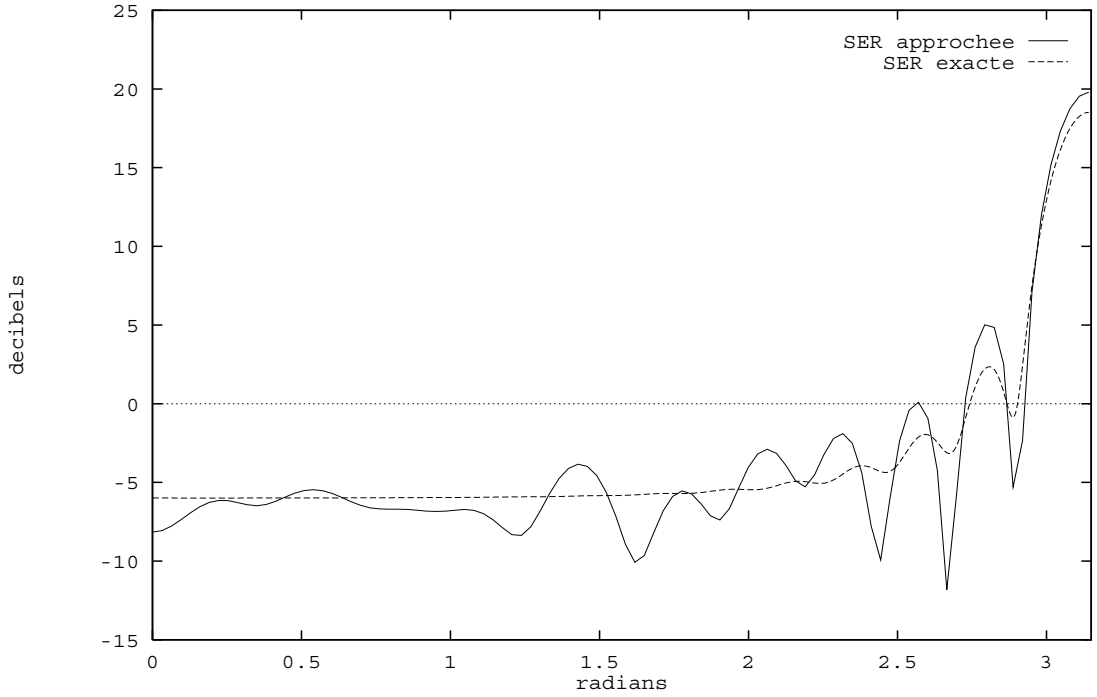


FIG. 5.4: *SER d'une sphère avec 16 vecteurs directions à* $k = 14m^{-1}$.

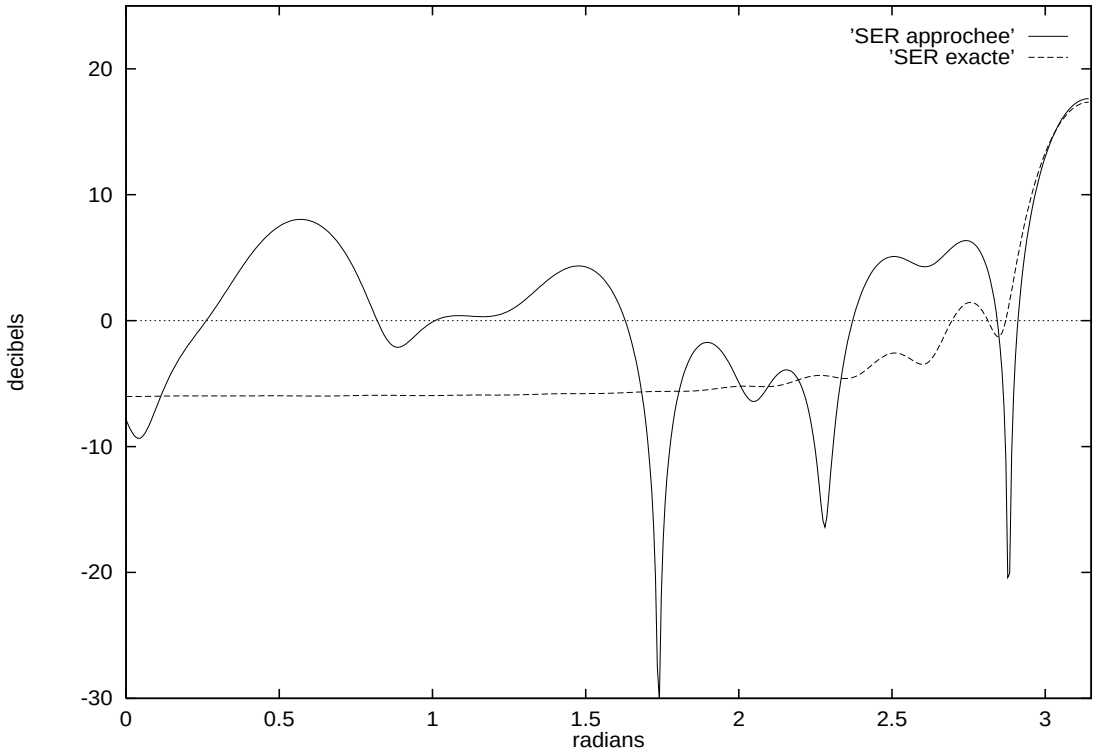


FIG. 5.5: *Dégradation de la SER d'une sphère avec 64 vecteurs directions à* $k = 12m^{-1}$.

discrétisation microlocale conduit à des matrices dont le conditionnement est très élevé. Nous avons constaté ici un conditionnement de l'ordre de 10^{14}.
Nous allons voir ci-dessous une première méthode qui nous permettra de contourner ce défaut pour pouvoir monter en fréquences.

5.2.1 Cas particulier de la méthode microlocale

Rappelons que, dans ce cas, la méthode exposée dans le chapitre 3 utilise des fonctions de base microlocalisantes:

$$\phi_{i,j}(x) \;=\; e^{\imath k \xi_j . x} p_i(x) \tag{5.2}$$

où les vecteurs ξ_j décrivent la demi-sphère unité extérieure à l'obstacle centrée au nœud x_i.
Nous allons présenter ici une version simplifiée de la méthode de discrétisation microlocale. Revenons au chapitre 3. Nous avons établi les expressions des coefficients de la matrice dans le cas où l'objet diffractant est convexe. L'approximation de la solution $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ est faite suivant des vecteurs de directions appartenant à la demi-sphère unité. Dans la pratique, on peut connaître exactement la direction de propagation de la solution. En effet, pour une incidence plane, les approximations sur la frontière Γ (cf. la section 3.3) conduisent à

$$\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y) \;=\; -\imath k \left|\xi^{inc}.n(y)\right| e^{\imath k \xi^{inc}.y}, \quad \text{pour } \; y \in \Gamma. \tag{5.3}$$

pour tout $y \in \Gamma$ en dehors du contour apparent. C'est l'approximation de Kirchhoff [40].

Remarque 5.2.2 Il est important de noter que l'approximation (5.3) est valable uniquement lorsque l'objet diffractant est convexe. •

Dans cette section, nous allons exploiter la relation (5.3) en interprêtant l'approximation

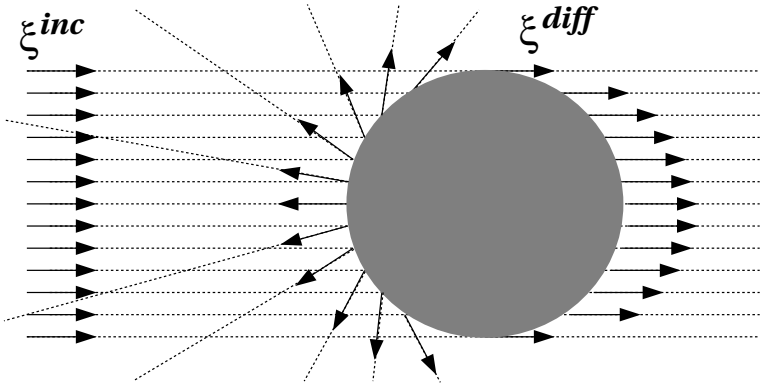


FIG. 5.6: *Représentation des vecteurs diffractés ξ^{diff} résultants du vecteur d'onde ξ^{inc}*

de $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ comme une somme finie de termes de la forme:

$$\left(\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}\right)_h(y) \;=\; \imath k \xi^{diff}(y).n(y) \left(\sum_{m=1}^{\mathcal{N}^s} \alpha_m p_m(y)\right) e^{\imath k \xi^{inc}.y}. \tag{5.4}$$

où $\xi^{diff}(y)$ représente le vecteur diffracté au point y c'est-à-dire vérifiant:

$$\xi^{diff}(y).n(y) \;=\; \left|\xi^{inc}.n(y)\right|$$

Au vu de ce résultat, nous voyons qu'on isole la partie la plus oscillante de la phase, $\xi^{inc}.y$, pour mieux chercher à déterminer l'amplitude de $\left(\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}\right)_h$. Une conséquence utile est la diminution importante du nombre de degrés de liberté. Notons que cette idée a déjà été utilisée dans [1, 43] pour résoudre numériquement les équations intégrales. Précisons maintenant les expressions des coefficients de la matrice $\mathcal{A}_h$.

- **Interactions lointaines**

  Nous retrouvons le résultat de la proposition 3.5.1. En effet, puisque les vecteurs ξ^{diff} sont tous sortants, nous avons:

  $$(\mathcal{A}_h)_{i,m} \;\approx\; 0 \tag{5.5}$$

  lorsque k tend vers l'infini.

- **Interactions proches**

  Un raisonnement analogue à la sous-section 3.7.2 permet d'obtenir à hautes fréquences:

  $$(\mathcal{A}_h)_{i,m} \;\approx\; \int_{\mathrm{Supp(p_i)}\cap\mathrm{Supp(p_m)}} p_i(x)p_m(x)d\sigma(x) \tag{5.6}$$

Remarque 5.2.3 En cherchant la solution $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ de (5.1) sous la forme (5.4), nous voyons que la matrice $\mathcal{A}_h$ dépend de l'onde incidente. •

Remarque 5.2.4 Au vu de (5.5) et (5.6), la matrice $\mathcal{A}_h$ est asymptotiquement égale à la matrice de masse des fonctions P_1. Une première conséquence est que son conditionnement vaut 1. •

Montrons maintenant quelques résultats numériques. Nous avons utilisé trois maillages de la sphère unité issus de la méthode exposée dans le chapitre précédent:

(a) 42 nœuds et 80 triangles,

(b) 1026 nœuds et 2048 triangles,

(c) 4098 nœuds et 8192 triangles.

Comme première vérification, nous avons tracé sur les figures suivantes les SER de la sphère pour divers nombres d'ondes: $k = 8m^{-1}$ pour le maillage (a), $k = 40m^{-1}$ pour (b) et $k = 150m^{-1}$ pour (c). Les calculs utilisent 1.33, 1.9 et 0.70 points en espace par longueur d'onde. Observons que l'allure générale des solutions est bien reproduite et que les erreurs numériques apparaissent pour des angles obtus. Géométriquement, les angles sont

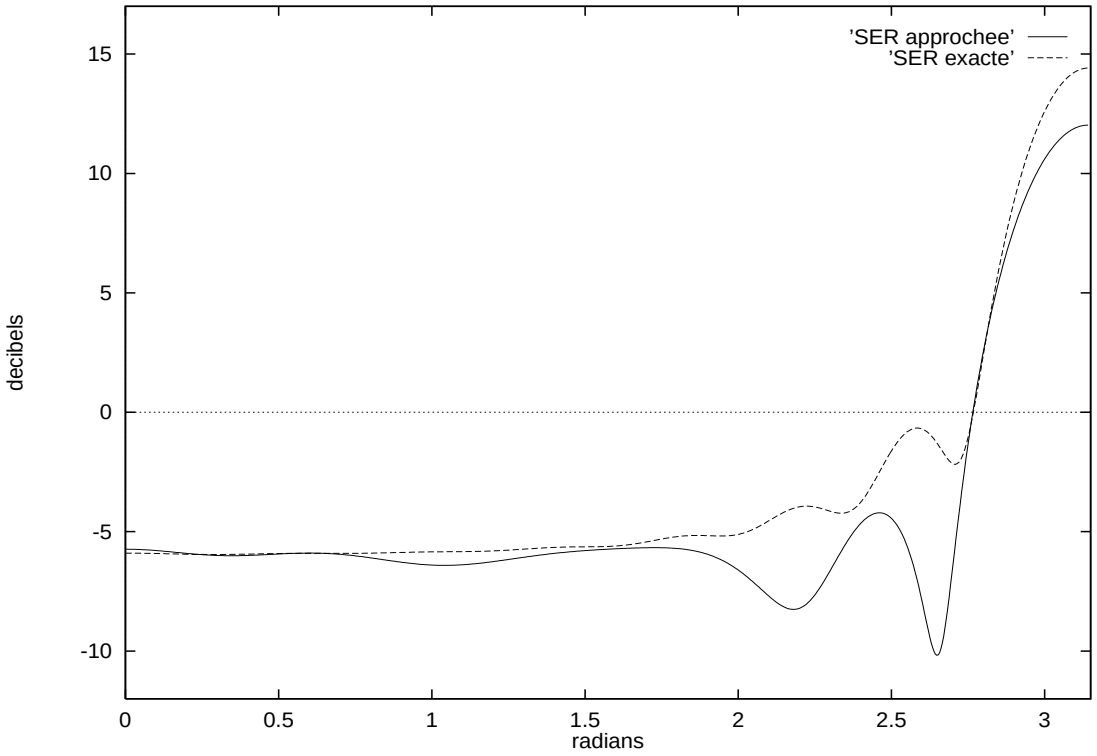


FIG. 5.7: *SER obtenue pour* $k = 8m^{-1}$ *ou* $f = 0.38Ghz$.

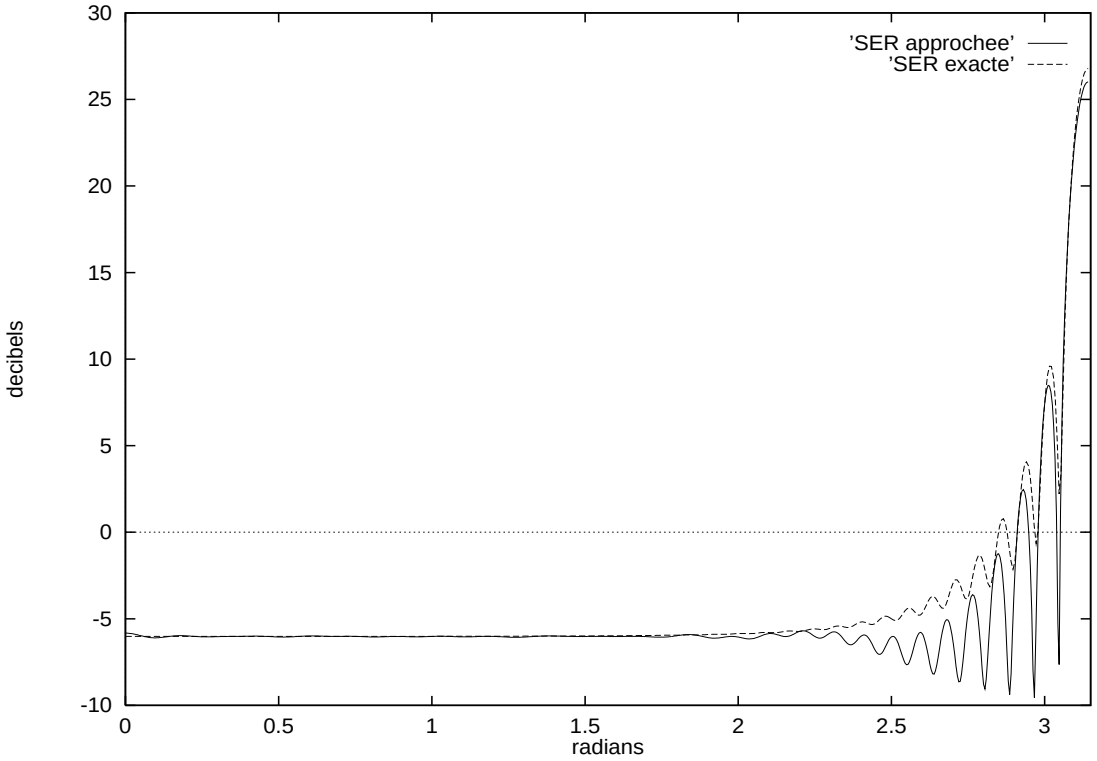


FIG. 5.8: *SER obtenue pour* $k = 40m^{-1}$ *ou* $f = 7.16Ghz$.

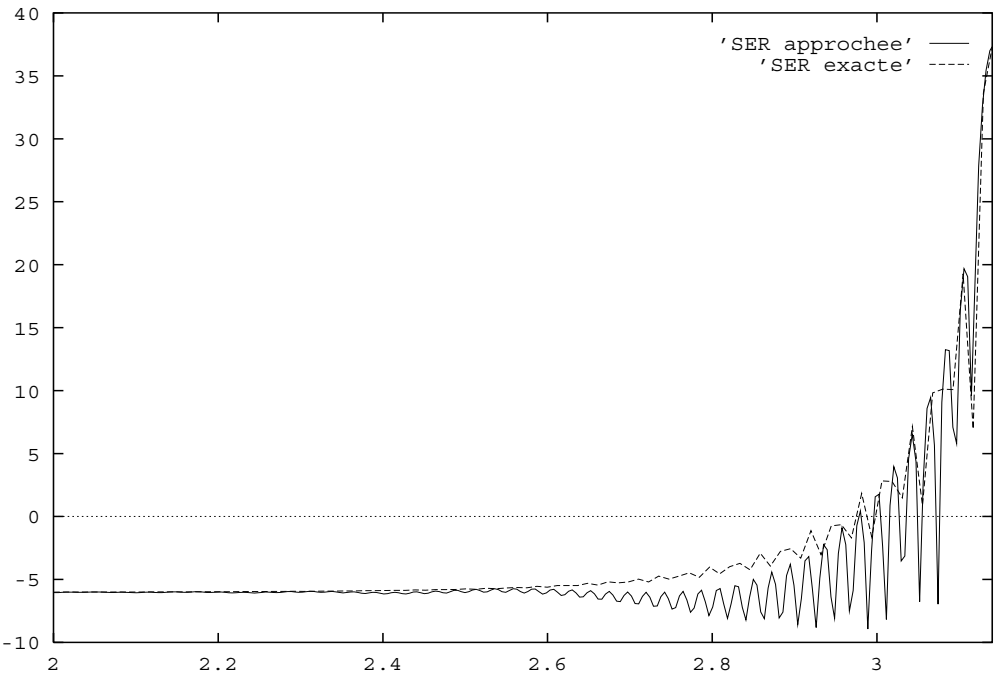


FIG. 5.9: *SER obtenue pour* $k = 150m^{-1}$ *ou* $f = 7.16Ghz$.

obtus dés que les vecteurs ξ^{inc} commençent à être tangents à l'obstacle. Ici, la zone éclairée correspond aux angles aigus tandis que la zone de pénombre correspond aux angles obtus. Quant à la zone d'ombre, elle correspond exactement à l'angle π. Comme la méthode de l'optique physique, nous obtenons des résultats plus précis dans les zones illuminées et d'ombre que sur la zone de transition. Ceci n'est pas étonnant puisque notre méthode tient compte du lien entre $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{ext}$ et u_{ext} sur la surface en s'inspirant directement de l'optique physique [9]. Notons que la solution n'est pas très précise dans la zone d'ombre sur la figure 5.7. Ceci peut s'expliquer par le fait que la taille de la zone de transition, qui est en $\mathcal{O}(k^{-1/3})$ [40], est grande. Au contraire, sur les figures 5.8 et 5.9, la solution est de plus en plus précise pour les angles proches de π. En effet, la solution est moins *perturbée* par la zone de transition qui est de plus en plus petite.

Montrons maintenant le nombre de points par longueur d'onde λ nécessaire pour approcher la solution $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ de l'équation intégrale (5.1). Sur la figure 5.2.1 nous montrons des SER obtenues à partir de quatre maillages différents (42, 66, 146 et 258 nœuds) pour un nombre d'onde fixé à $k = 25m^{-1}$. Nous observons un bon comportement de la SER pour environ 1 point par longueur d'onde.

Notons l'importance de considérer l'équation intégrale (5.1) valable à hautes fréquences. En effet, le calcul de la matrice $\mathcal{A}_h$ devient très simple et très rapide puisque nous obtenons une matrice asymptotiquement égale à la matrice de masse des fonctions P_1. Notons que dans [43], on est limité à $k = 40m^{-1}$ avec un maillage de 4002 nœuds sur la sphère

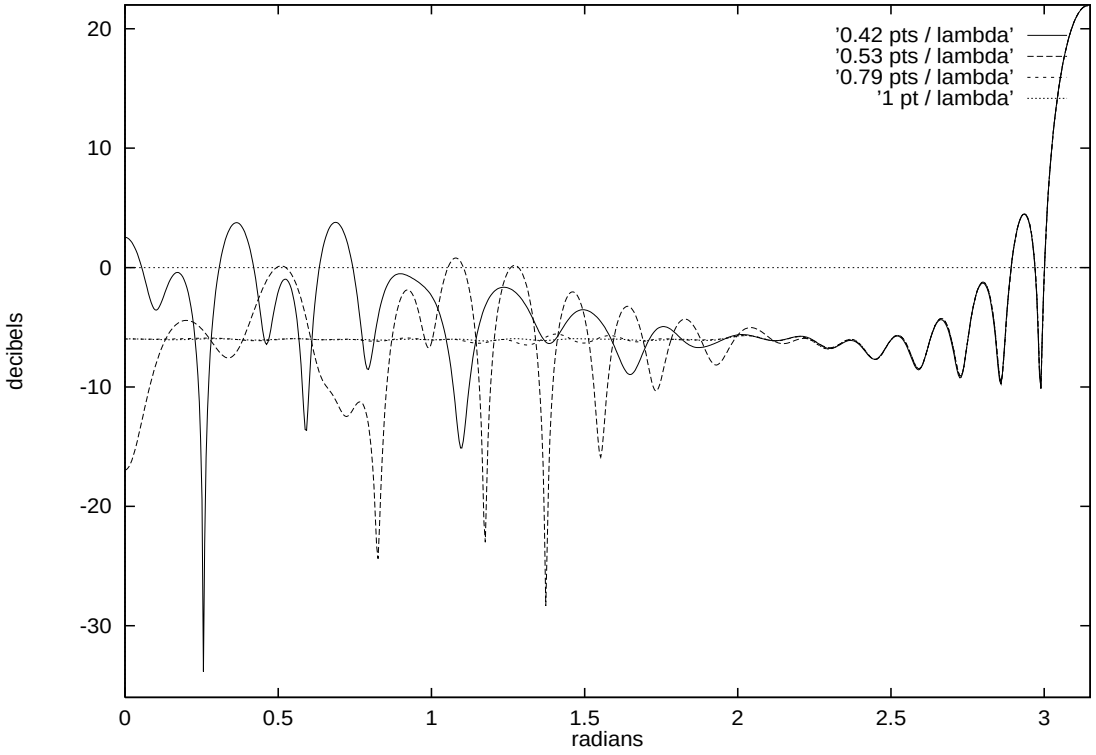


FIG. 5.10: *SER obtenue pour divers maillages à* $k = 25m^{-1}$.

ce qui correspond ici à prendre 2.6 points par longueur d'onde.
L'avantage de la méthode présentée ici est qu'elle conduit à des matrices très bien conditionnées (cf. remarque 5.2.4). L'inconvénient majeur est qu'elle s'applique uniquement lorsque l'obstacle est convexe. Il faut certainement conclure que nous devons revenir à la méthode initiale et résoudre le problème du conditionnement que nous avons rencontré. C'est l'objet du chapitre suivant.

5.3 Cas non convexe

Cette section constitue un premier pas vers les objets non convexes. En effet, nous allons simuler la diffraction d'une onde incidente plane sur la réunion de deux sphères identiques de rayon R. Comme le montre la figure 5.11, nous avons éclairé l'obstacle avec une onde plane d'incidence parallèle à l'axe des deux sphères. Les sphères sont séparées par une longueur L. Le maillage Γ_h de l'obstacle est composé de 84 points et 160 triangles. Quant au maillage directionnel, il comporte à la fois un maillage de la demi-sphère unité et à la fois un maillage de la sphère unité S^2. Contrairement au maillage de S^2, le maillage de la demi-sphère unité est placé en chaque nœud appartenant à l'enveloppe convexe de Γ_h. Nous avons considéré 16 vecteurs pour le maillage de la demi-sphère et 32 pour celui de S^2. Il en résulte un nombre de degrés de liberté égal à 1888.
Avant de passer au calcul de la SER sur deux sphères, nous nous sommes assurés de bien retrouver les résultats numériques dans le cas d'une sphère centrée en n'importe quel

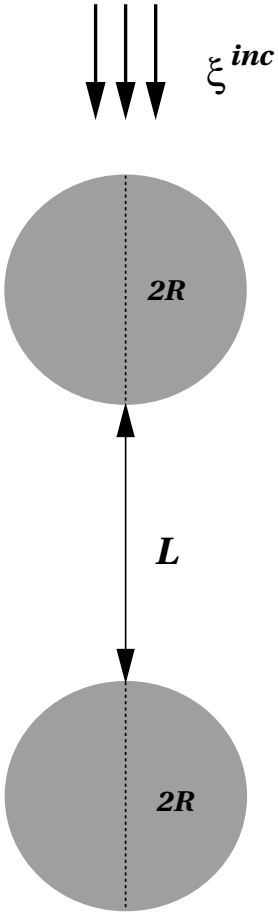


FIG. 5.11: *Description de l'expérience.*

point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Nous avons ensuite effectué l'expérience en fixant le nombre d'onde à $k = 8m^{-1}$ ce qui correspond à prendre environ 7 degrés de liberté par longueur d'onde. La distance entre les deux sphères a été fixée à $L = 10\lambda$ et et $L = 18\lambda$ où $\lambda = 2\pi/k$ représente la longueur d'onde.

Nous avons tracé sur les figures 5.12 et 5.13 les SER de deux sphères unités.

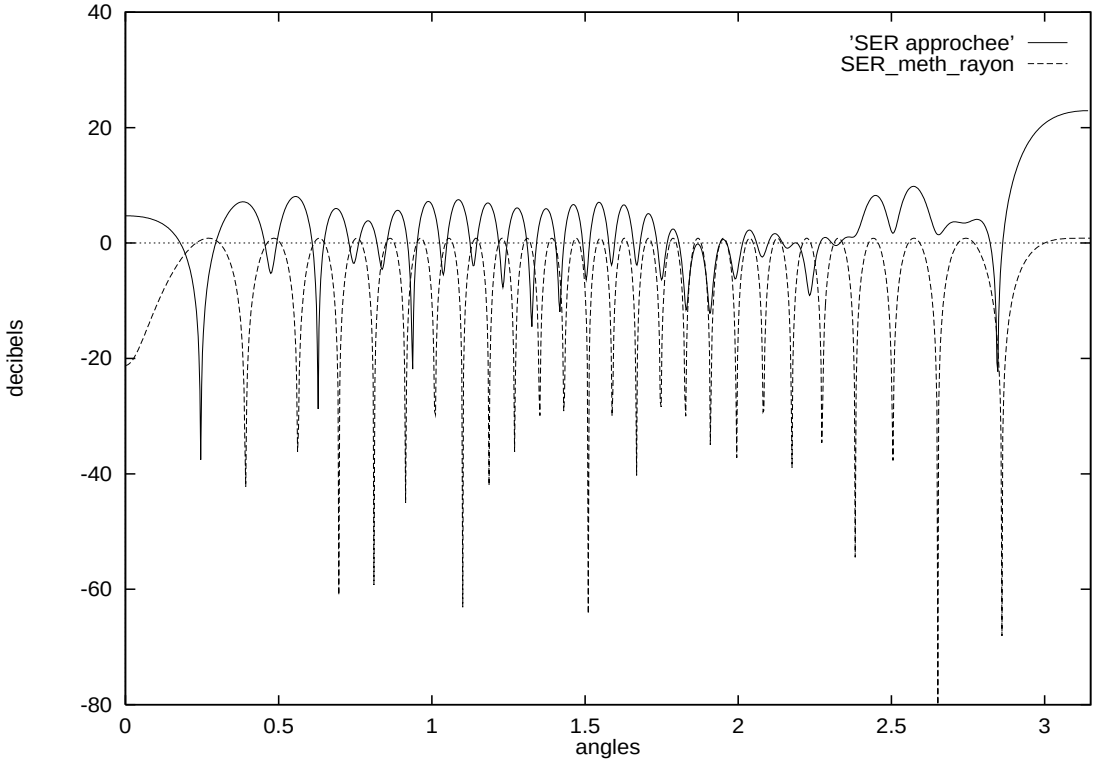


FIG. 5.12: *SER de deux sphères unités séparées par* $L = 10\lambda$.

Remarque 5.3.1 Sur les figures 5.12 et 5.13, nous comparons nos résultats numériques non pas à des SER exactes, mais à des SER qui nous renseignent sur le niveau de décibels et sur le nombre exacte d'oscillations. Les calculs utilisent la méthode des rayons. On renvoie à l'annexe de ce chapitre pour l'obtention de ces SER. •

Nous observons que la qualité des résultats numériques n'est pas satisfaisante; si le niveau global des SER est bien reproduit dans l'ensemble (autour de 0 décibels), les erreurs numériques apparaissent très visiblement dans le nombre d'oscillations.

Remarque 5.3.2 La précision des résultats est détériorée par le mauvais conditionnement des matrices. En effet, nous avons constaté ici un conditionnement autour de 10^{12} pour les deux dernières expériences. •

Cette remarque nous conduit à faire une analyse des problèmes de conditionnement issus de la méthode de discrétisation microlocale. Nous verrons dans le chapitre suivant comment réduire de façon spectaculaire le conditionnement pour obtenir des résultats numériques plus raisonables.

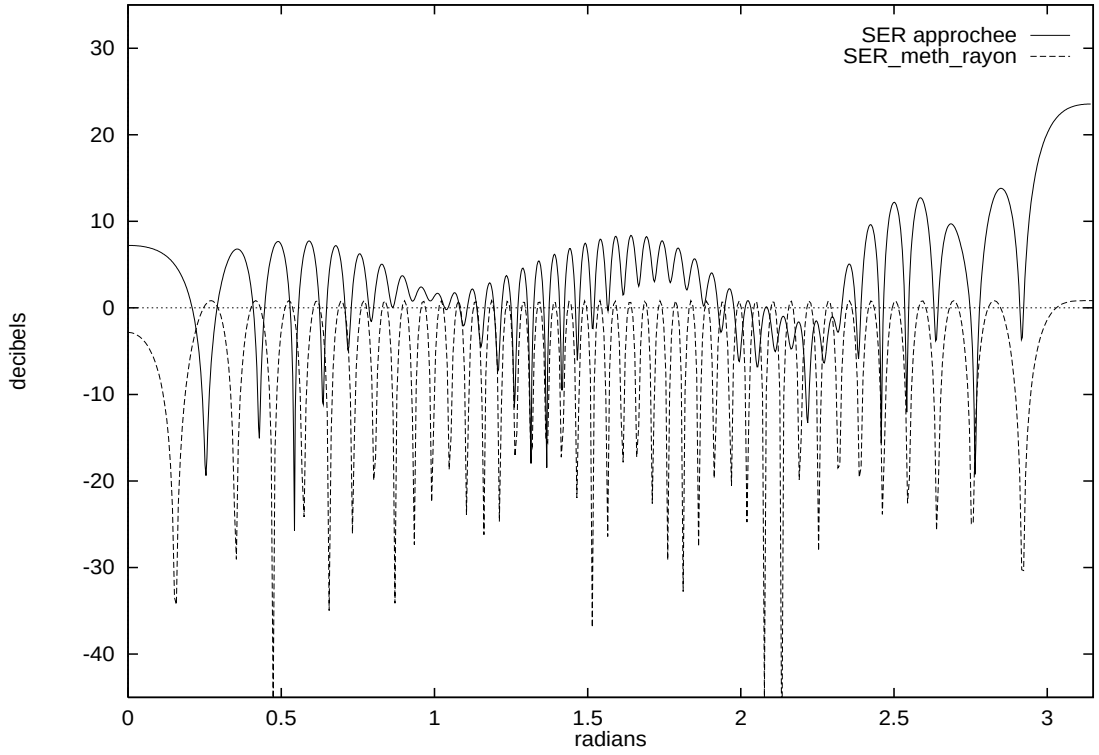


FIG. 5.13: *SER de deux sphères unités séparées par* $L = 18\lambda$.

5.4 Annexe

Calcul de la surface équivalente radar (S.E.R.)

Une des principales applications numériques que nous utiliserons est la calcul de surface équivalente radar. Ce problème type de diffraction d'onde sur un obstacle consiste à évaluer la puissance rayonnée dans plusieurs directions par un objet lorsqu'il est éclairé par une onde incidente u^{inc}.
La SER est calculée à partir de la formule de représentation suivante. Elle est rappelée dans le chapitre précédent et s'écrit, pour $y \notin \Gamma$:

$$u(y) \;=\; \int_\Gamma G(k,|x-y|)\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right](x) \;-\; \frac{\partial G}{\partial n_x}(k,|x-y|)\,[u]\,(x)\;d\sigma(x)$$

Puisque nous éliminons le problème intérieur (cf. chapitre 3, sous-section 3.2.3), nous avons, pour $y \notin \Gamma$ vérifiant les hypothèses 3.3.1:

$$u(y) \;=\; \int_\Gamma G(k,|x-y|)\left((\imath k\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x-y}{|x-y|^2}).n(x)u_{ext}(x) - \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{ext}(x) \right) d\sigma(x)$$

Lorsque la variable y tend vers l'infini, on obtient:

$$u(y) \;=\; \frac{e^{\imath k|y|}}{|y|}\;A(k,\frac{y}{|y|})$$

où A représente l'amplitude limite de diffusion. Son expression est donnée par:

$$A(k,v) \;=\; -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} e^{-\imath k x.v}\left(\;\imath k\; v.n(x)\; u_{ext}(x) \;+\; \frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x)\;\right) d\sigma(x) \tag{5.7}$$

où v est un vecteur de S^2.
Si l'on tient compte de la condition de Dirichlet, nous avons $u_{ext} = -u^{inc}$ sur le bord Γ où u^{inc} représente l'onde incidente. Pour nos applications, nous prendrons pour tout $x \in \Gamma$:

$$u^{inc}(x) \;=\; e^{\imath k \xi^{inc}.x} \tag{5.8}$$

où $|\xi^{inc}| = 1$.
En pratique, l'amplitude limite A est exprimée en fonction de deux angles θ et φ relatifs

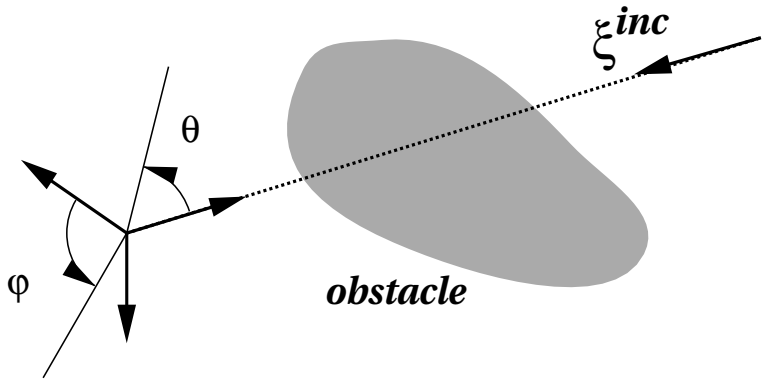


FIG. 5.14: *Définition des angles θ et φ.*

aux coordonnées sphèriques. La définition de ces angles est illustrée sur la figure 5.14. Pour une onde plane incidente d'amplitude unité, la SER en dimension trois d'espace est normalisée et représentée en echelle logarithmique (unité en décibels):

$$SER \;=\; 10 \;*\; \mathrm{Log}_{10}\left(\frac{|A|^2}{|u^{inc}|^2}\right) \;=\; 20 \;*\; \mathrm{Log}_{10}|A(k,\theta,\varphi)|$$

où A et u^{inc} sont donnés par (5.7) et (5.8).

Remarque 5.4.1 Lorsque l'obstacle est invariant par symétrie, on peut fixer l'angle φ et faire varier l'angle θ de 0 à π. •

Calcul numérique

Rappelons que nous cherchons la solution $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ sous la forme:

$$\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(x) \;=\; \imath k \sum_{i,j}^{\mathcal{N}^s,\mathcal{N}^d} \alpha_{i,j}\; \xi_j.n(x)\; p_i(x) e^{\imath k \xi_j.x}$$

et l'amplitude limite A s'écrit dans ce cas, pour tout $v \in S^2$:

$$A(k,v) \;=\; \frac{\imath k}{4\pi}\left(\;\int_{\Gamma} e^{-\imath k x.v} v.n(x) u^{inc}(x) d\sigma(x) \;-\; \sum_{i,j}^{\mathcal{N}^s,\mathcal{N}^d} \alpha_{i,j}\alpha_{i,j}\int_{\Gamma} e^{\imath k(\xi_j - v).x}\xi_j.n(x) p_i(x) d\sigma(x)\;\right)$$

Calcul exact

- Le cas de la sphère.
  Dans le cas où Γ est une sphère de rayon R, l'amplitude limite A est calculée exactement à l'aide des fonctions de Hankel $\mathcal{H}_i^{(1)}$ et Bessel $\mathcal{J}_i$. Son expression est:

$$A(k,\theta) \;=\; \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(i+\frac{1}{2})\frac{\mathcal{J}_{i+1/2}(kR)}{\mathcal{H}^{(1)}_{i+1/2}(kR)}P_i(cos(\theta))$$

  où P_i désigne le polynôme de Legendre. Ce résultat utilise la décomposition dans la base des fonctions harmoniques sphériques de l'onde plane $e^{\imath k\xi^{inc}.x}$ que l'on peut trouver dans [2, 36].

- Le cas de la réunion de deux sphères.
  Dans le cas où Γ est la réunion de deux sphère de même rayon R, nous n'avons pas de formulation exacte de l'amplitude limite A. Cependant, nous pouvons connaître de façon précise le nombre d'oscillations de la SER sur deux sphères. L'idée, qui est basée sur la méthode des rayons, suppose que l'on est suffisament à hautes fréquences et fait l'hypothèse que les deux sphères sont assez éloignées pour éviter les réflexions multiples. Nous choisissons d'éclairer Γ avec une incidence parallèle à l'axe des deux sphères séparées par une distance L (cf. figure 5.15). Notons $\mathcal{S}_1$ la sphère illuminée en premier et $\mathcal{S}_2$ la deuxième. Et fixons une direction v dans laquelle nous voulons calculer la SER. Posons θ l'angle entre les vecteurs $-\xi^{inc}$ et v. Le champ rayonné E dans la direction v est la somme des champs E_1 et E_2 issus des points $x_1 \in \mathcal{S}_1$ et $x_2 \in \mathcal{S}_2$ où $|x_1 - x_2| = 2R + L$ et où le vecteur $x_1 - x_2$ est parallèle à l'axe des sphères. Soit h la distance entre x_2 et le plan $\mathcal{P}$ orthogonale à v passant par x_1. Notons que nous avons $E_2 = E_1 e^{\imath kz}$ où z représente le chemin que met le rayon issu de x_1 pour atteindre $\mathcal{P}$. Nous avons $z = |x_1 - x_2| + h$ soit:

$$z \;=\; 2(2R+L)\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{5.9}$$

  Nous obtenons que le champ rayonné dans la direction v s'écrit:

$$E = E_1(1 + e^{\imath kz}) \tag{5.10}$$

  où z est donné par (5.9).
  La formule de la SER s'écrit:

$$SER = 10 * \log_{10}\left(\frac{|E|^2}{|2E_1|^2}\right)$$

  soit, à l'aide de (5.10):

$$SER = 20 * \log_{10}\left(\left|2\cos(k(2R+L)\cos^2\frac{\theta}{2})\right|\right) - 20 * \log_{10}(2)$$

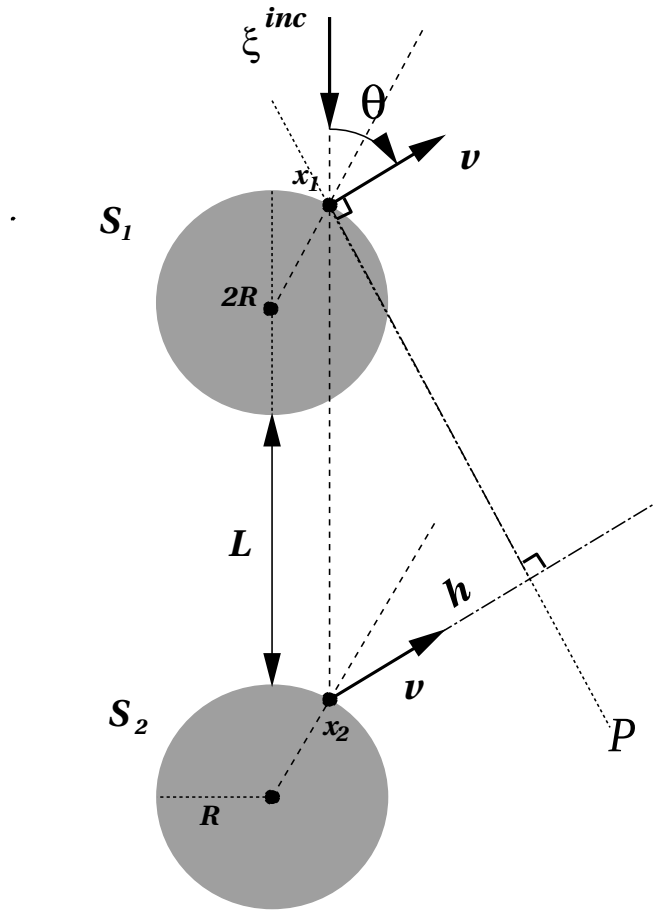


FIG. 5.15: *Description du calcul de la SER par la méthode des rayons.*

Chapitre 6

ÉTUDE DU CONDITIONNEMENT

6.1 Introduction (p.93)
6.2 Analyse du problème (p.93)
6.3 Réduction du conditionnement (p.104)
6.4 Application aux équations intégrales (p.109)
6.5 Annexe (p.120)

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous analysons les propriétés de conditionnement des systèmes linéaires venant de la méthode de discrétisation microlocale.

Comme nous l'avons constaté dans le chapitre précédent, le défaut de cette méthode est qu'elle conduit à des conditionnements très élevés, même pour des problèmes de taille raisonnable en termes de degrés de liberté. Nous verrons dans la suite que ce défaut est la conséquence de la sous optimalité du nombre de degrés de liberté. En effet, la *surdiscrétisation* crée des ondes évanescentes et ce sont ces ondes (qui ne rayonnent pas) qui correspondent aux très faibles valeurs propres qui détériorent le conditionnement.
Le chapitre s'organise comme suit. Dans la prochaine section, nous mettrons en évidence les problèmes de conditionnement à la fois sur une discrétisation des équations intégrales et sur un problème modèle unidimensionnel. Dans la deuxième section, nous montrerons sur ce problème comment on peut à la fois améliorer le conditionnement et réduire la complexité algorithmique grâce à l'utilisation d'ondelettes dans le domaine spectral. Dans la troisième section, nous appliquerons cette méthode aux équations intégrales. Nous terminons en montrant des résultats numériques obtenus sur des objets convexes et non convexes.

6.2 Analyse du problème

Dans cette section, nous allons rappeler le problème que nous regardons et puis présenter les difficultés que nous rencontrons, ainsi que l'analyse que nous en faisons. Nous commençerons par le problème réel que nous avons et qui est liè à la discrétisation microlocale des équations intégrales, puis nous exhiberons un problème modèle qui a les mêmes caractéristiques et sur lequel nous développerons par la suite des éléments de solutions.

6.2.1 Equations intégrales

Nous avons vu au chapitre 3 que l'équation intégrale:

$$u^{inc}(x) \;=\; \int_\Gamma P(x,y)\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y)d\sigma(y) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Gamma \tag{6.1}$$

où $P(x,y) = G(k,|x-y|)\left(1 - \imath k\frac{y-x}{|y-x|}\mathcal{D}\right)$, conduit à une résolution rapide de l'équation de Helmholtz à hautes fréquences.
La méthode d'approximation microlocale exposée dans le chapitre 3 consiste, dans un premier temps, à remplacer (6.1) par:

$$\int_\Gamma u^{inc}(x)\bar{\phi}_{i',j'}(x)d\sigma(x) \;=\; \int_\Gamma \left(\int_\Gamma P(x,y)\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y)d\sigma(y)\right)\bar{\phi}_{i',j'}(x)d\sigma(x)$$

où la fonction de base microlocalisante $\phi_{i',j'}$, introduite dans [28], est de la forme:

$$\phi_{i',j'}(x) \;=\; p_{i'}(x)e^{\imath k\xi_{j'}.x}$$

et, dans un deuxième temps, à chercher $\dfrac{\partial u_{ext}}{\partial n}$ sous la forme:

$$\frac{\partial u_{ext}}{\partial n}(y) \;=\; \imath k \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\xi_j.n(y)\phi_{i,j}(y). \tag{6.2}$$

Ici, les fonctions p_i sont des fonctions de base P_1-Lagrange sur des triangles et les vecteurs ξ_j sont des vecteurs unitaires. Il est montré dans [28] que le nombre total de degrés de liberté doit être proportionnel à k^2.
Pour nos applications, l'onde incidente est une onde plane, $u^{inc}(x) = e^{\imath k\xi^{inc}.x}$, et l'objet diffractant est soit la sphère unité soit la réunion de deux sphères unité.
Nous avons vu dans la limite des hautes fréquences que nous sommes amenés à résoudre le système linéaire suivant:

$$\mathcal{A}_h \alpha_h = b_h, \tag{6.3}$$

où $\mathcal{A}_h$ est une matrice creuse dont les coefficients non nuls sont de la forme:

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \;=\; \int_\Gamma e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).x} p_{i'}(x)p_i(x)d\sigma(x) \tag{6.4}$$

pour les interactions proches,

$$(\mathcal{A}_h)_{(i',j'),(i,j)} \;=\; 2\int_\Gamma e^{\imath k(\xi_j - \xi_{j'}).x} p_{i'}(x)p_i(y_0(x))d\sigma(x) \tag{6.5}$$

pour les interactions lointaines avec y_0 vérifiant:

$$\frac{y_0 - x}{|y_0 - x|} \;=\; -\xi_j$$

et où le vecteur second membre est:

$$b_h = \left(-\int_\Gamma e^{\imath k(\xi^{inc} - \xi_{j'}).x} p_{i'}(x)d\sigma(x) \right)_{(i',j')} \tag{6.6}$$

Spectre et conditionnement

Nous allons maintenant calculer le conditionnement et le spectre de la matrice $\mathcal{A}_h$ pour divers nombres d'onde. Les calculs numériques utilisent un maillage de $\mathcal{N}^s = 42$ points sur la sphère couplée avec $\mathcal{N}^d = 16$ et $\mathcal{N}^d = 64$ vecteurs directions. Pour simplifier, définissons $\mathcal{A}_h^1$ la matrice obtenue à partir du premier maillage et $\mathcal{A}_h^2$, la matrice obtenue à partir du dernier.
La nécessité d'un nombre minimal de degrés de liberté impose de vérifier un critère qui correspond au critère de maillage classique de:

$$\frac{\lambda}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{10} \tag{6.7}$$

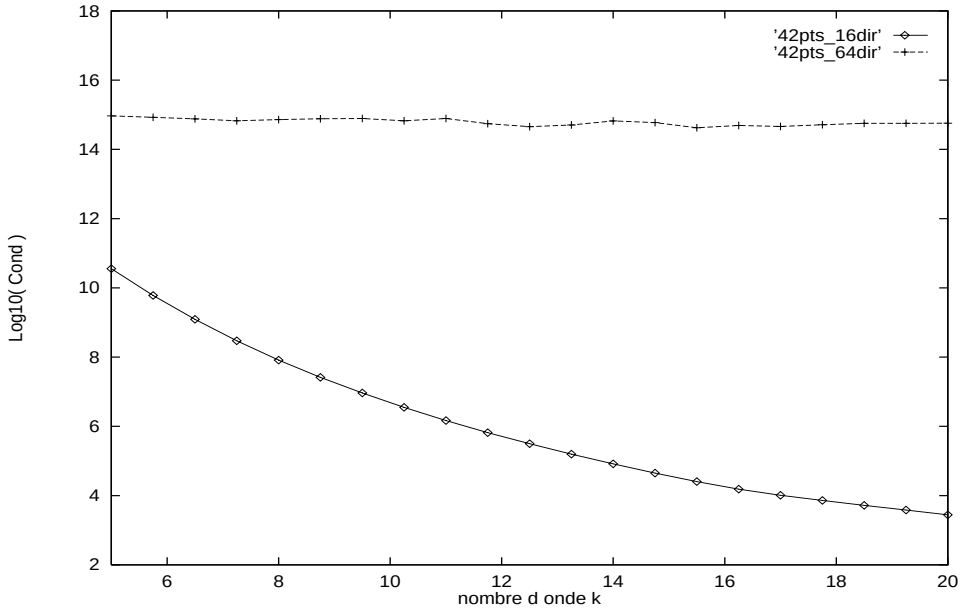


FIG. 6.1: *Conditionnement des matrices $\mathcal{A}_h^1$ et $\mathcal{A}_h^2$.*

où $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ est la longueur d'onde du problème. Il en résulte que le nombre d'onde k est limité à 8 et à $16m^{-1}$ pour les deux maillages.
Bien que le nombre d'onde k soit ainsi limité, nous avons représenté sur la figure 6.1 le logarithme décimal du conditionnement des matrices $\mathcal{A}_h^1$ et $\mathcal{A}_h^2$ en fonction du nombre d'onde k allant jusqu'à $20m^{-1}$. Les matrices étant hermitiennes définies positives (cf. remarque 3.7.6), rappelons que le conditionnement est donné par:

$$Cond \;=\; \frac{\max\limits_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d} |\lambda_i(\mathcal{A}_h)|}{\min\limits_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d} |\lambda_i(\mathcal{A}_h)|}$$

où $(\lambda_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ sont les valeurs propres de $\mathcal{A}_h$.
Comme le montre la figure 6.1, les matrices $\mathcal{A}_h^1$ et $\mathcal{A}_h^2$ sont très mal conditionnées lorsque le nombre d'onde est inférieur à 8 et à $16m^{-1}$. Visiblement, le conditionnement de $\mathcal{A}_h^2$ est ici moins bon que celui de $\mathcal{A}_h^1$ et ce uniquement en multipliant par 4 le nombre de directions. En effet, nous remarquons un décroissance du conditionnement de $\mathcal{A}_h^1$ jusqu'à 10^8 alors que le conditionnement de $\mathcal{A}_h^2$ reste constant à 10^{15}. Ces résultats montrent le caractère très sévère de la question du conditionnement.
Sur les figures 6.2 et 6.3, nous montrons les valeurs propres des matrices $\mathcal{A}_h^1$ et $\mathcal{A}_h^2$ pour $k = 8m^{-1}$ et $k = 16m^{-1}$. Nous voyons ici que le principal problème est dû à l'accumulation des valeurs propres au voisinage de l'origine. Ici, les valeurs propres sont toutes réelles positives puisque les matrices sont hermitiennes définies positives. Les plus petites valeurs propres apparaissant sur les figures 6.2 et 6.3 ont pour valeurs $0.108\ 10^{-7}$ et $0.98\ 10^{-17}$. Sur la figure 6.2, on a 70.83% des valeurs propres qui sont comprises entre 0 et 0.1. Sur la figure 6.3, 75.26% des valeurs propres sont entre 0 et 0.01.

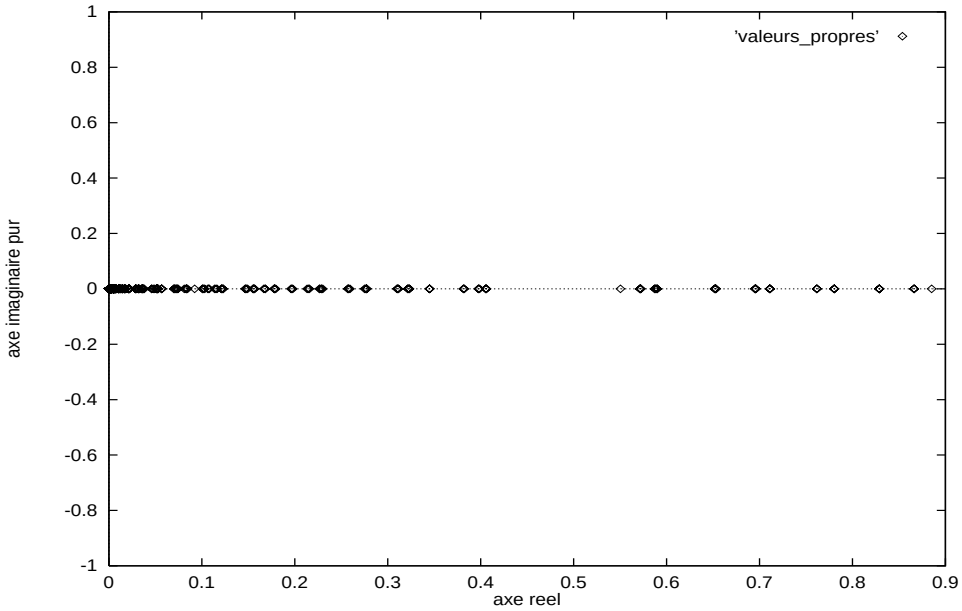


FIG. 6.2: *Valeurs propres de* $\mathcal{A}_h^1$ *à* $k = 8m^{-1}$.

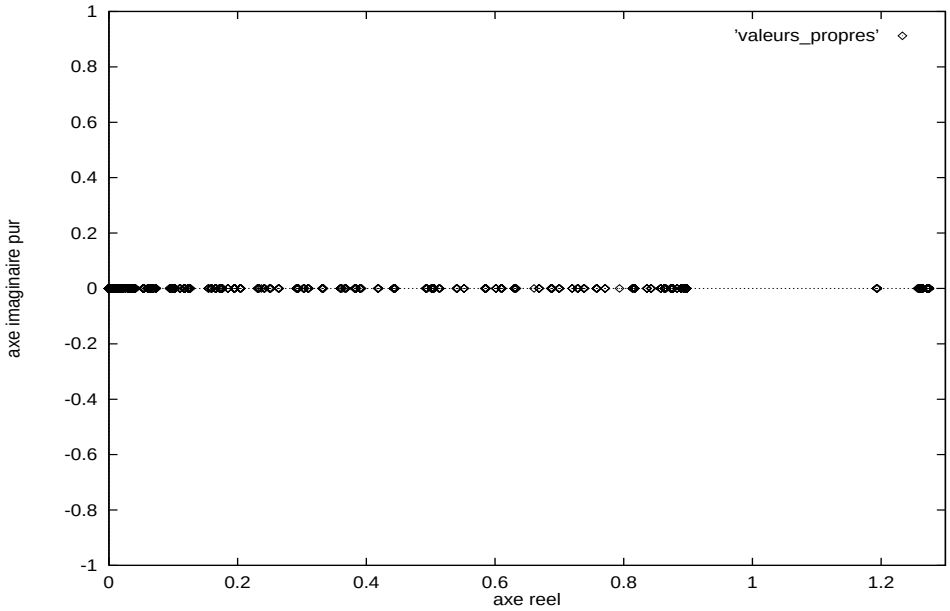


FIG. 6.3: *Valeurs propres de* $\mathcal{A}_h^2$ *à* $k = 16m^{-1}$.

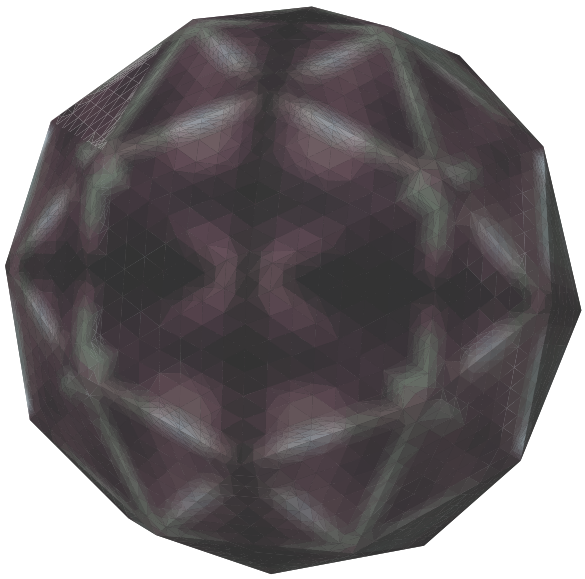


FIG. 6.4: *Module de la fonction* $(s_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}_d}$ *associée à la plus petite valeur propre.*

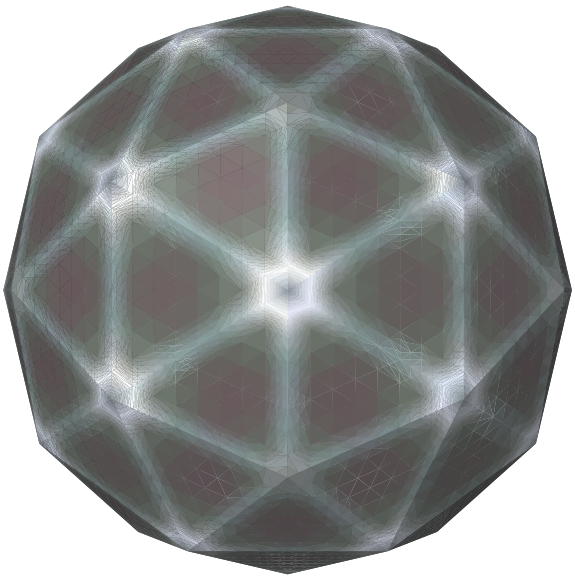


FIG. 6.5: *Module de la fonction* $(s_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ *associée à la plus grande valeur propre.*

Ondes évanescentes

Montrons que les très petites valeurs propres correspondent à des ondes évanescentes. Tout d'abord, notons $(v^n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}_d}$ les vecteurs propres, de coefficients $(v_i^n)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}_d}$, associés aux valeurs propres $(\lambda_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}_d}$. Ces vecteurs forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^{\mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$. Nous allons regarder les vecteurs $(v^n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}_d}$ comme des solutions de $\mathcal{A}_h v^n = b^n$ où $b^n = \lambda_n v^n$. Puisque la solution s'écrit sous la forme (6.2), nous allons considérer les fonctions $(s_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}_d}$ définies par:

$$s_n(x) = \imath k \sum_i^{\mathcal{N}^s} \sum_j^{\mathcal{N}^d} v^n_{(i,j)} \xi_j . n(x) \phi_{i,j}(x) \quad \text{pour tout } x \in \Gamma \tag{6.8}$$

où $(i,j) = j + \mathcal{N}^d(i-1)$.
Nous avons utilisé la matrice $\mathcal{A}_h^1$ et le nombre d'onde k a été fixé à $8m^{-1}$. Sur les figures 6.4 et 6.5, nous représentons sur la sphère le module des fonctions $(s_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ correspondant à la plus petite valeur propre et à la plus grande valeur propre. Nous observons que les petites valeurs propres sont associées à des champs beaucoup plus oscillants que les champs associés aux grandes valeurs propres. De plus, ces oscillations sont plus rapides que la fréquence du problème extérieur.
Montrons maintenant la SER d'une sphère obtenue à partir des fonctions $(s_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$.

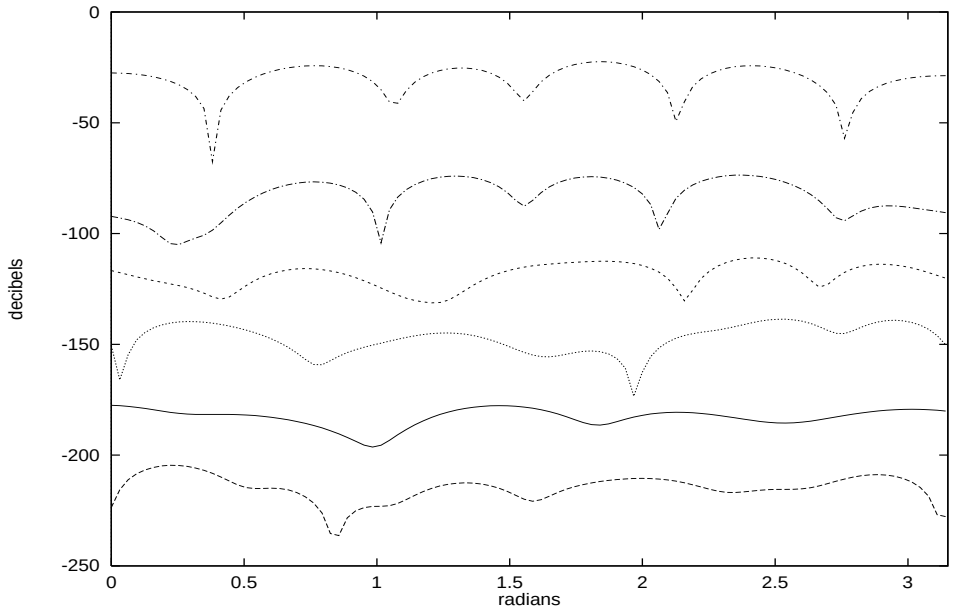


FIG. 6.6: *SER obtenues à partir des fonctions* $(s_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ *associées aux valeurs propres inférieurs à* $3.5\ 10^{-2}$.

Les SER de telles fonctions sont représentées sur les figures 6.6 et 6.7 . Observons que les SER des fonctions $(s_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ associées à des valeurs propres inférieures ou égales à 0.1 sont en dessous de $-20dB$. Ainsi, les modes correspondant aux petites valeurs propres sont des traces d'ondes évanescentes qui ne participent pas au rayonnement. Au vu de ces résultats numériques, nous pouvons dire que le problème du conditionnement est lié

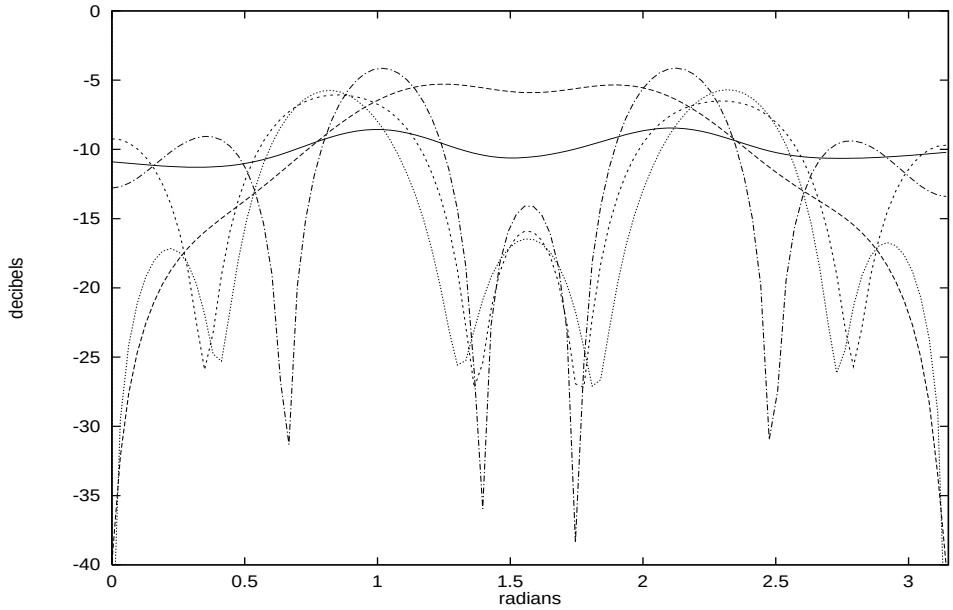


FIG. 6.7: *SER obtenues à partir des fonctions* $(s_n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ *associées aux plus grandes valeurs propres.*

au fait que le nombre de degrés de liberté utilisé permet de discrétiser des traces d'ondes évanescentes qui ne sont pas dans le problème physique que l'on considère. Cette intuition sera confirmée par le problème modèle suivant.

6.2.2 Problème modèle

Présentation de la matrice

Pour mieux étudier le phénomène exposé ci-dessus, nous allons considérer une version simplifiée des coefficients de la matrice $\mathcal{A}_h$ en les ramenant à une seule dimension d'espace. Sur le segment $]-1,1[$, nous voulons discrétiser des ondes oscillant avec un nombre d'onde $k = n\pi$ c'est-à-dire:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\imath n\pi(\xi-\eta).x}dx \tag{6.9}$$

où les points ξ et η varient continûment dans l'intervalle $[0,1]$. Pour ceci, au lieu d'utiliser des fonctions de type élément fini, nous allons prendre des exponentielles complexes. La matrice A qui en résulte a pour coefficients:

$$a_{i,j} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\imath n\pi(\xi_j-\xi_i).x}dx \tag{6.10}$$

Les vecteurs ξ_j décrivent un maillage uniforme de l'intervalle $[0,1]$. Dans ce cas,

$$\xi_j - \xi_i = \frac{j-i}{\mathcal{N}^d}$$

pour tous entiers i et j dans $\{1, .., \mathcal{N}^d\}$.
Le profil de la matrice est illustré sur la figure 6.8.

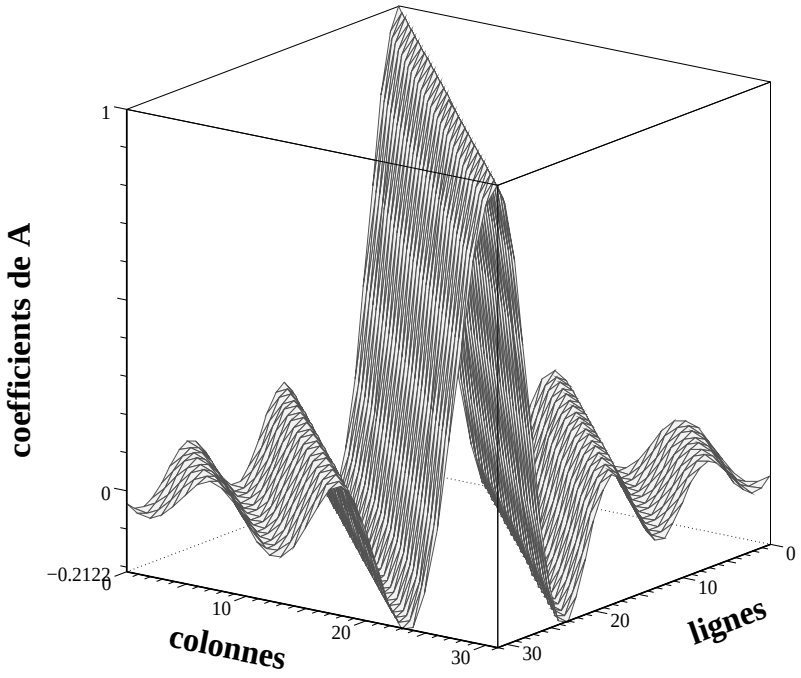


FIG. 6.8: *Profil de la matrice A pour $\mathcal{N}^d = 32$ et $n = 6$.*

Conditionnement

Posons:

$$\alpha = \frac{n}{\mathcal{N}^d}. \tag{6.11}$$

Sur la figure 6.9, nous représentons le logarithme en base 10 du conditionnement des matrices A en fonction du paramètre α. Nous voyons que le rapport $\frac{n}{\mathcal{N}^d} = 1$ joue un rôle important. En effet, nous observons que le conditionnement est très bon lorsque α est plus grand que 1. Par contre, lorsque α est plus petit que 1 le conditionnement est de l'ordre de 10^{18}. En $\alpha = 1$, le conditionnement vaut 1. Bien sûr, quand α est proche de zéro, la matrice est non inversible puisque $a_{i,j} = 1$ pour tout i et j dans $\{1, .., \mathcal{N}^d\}$. Nous allons montrer que, d'après le théorème de Shannon, nous sommes malheureusement toujours dans le cas $\alpha < 1$.
Tout d'abord, notons que les coefficients $a_{i,j}$ sont des formes discrétes de la fonction (6.9) qui est, en fait, $\dfrac{\sin \alpha\pi x}{\alpha\pi x}$.

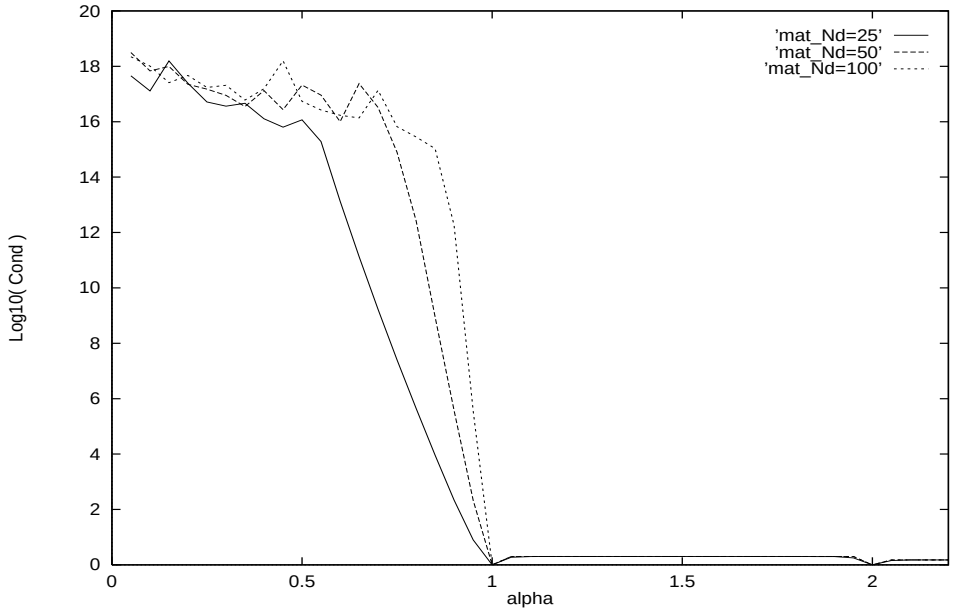


FIG. 6.9: *Conditionnement des matrices A.*

Echantillonnage

Ensuite, rappelons que la transformée de Fourier de la fonction $\frac{\sin \alpha\pi x}{\alpha\pi x}$ est la fonction χ définie par:

$$\chi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \text{ si } x \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Considérons maintenant la fonction $\frac{\sin \alpha\pi x}{\alpha\pi x}$ échantillonnée de telle façon que tous les points de l'échantillonnage soient espacés d'une période T. Nous savons que la transformée de Fourier d'une telle fonction est la reproduction périodique du spectre χ (cf. [20]). Le théorème de Shannon stipule que si les spectres ont des intersections vides entre elles alors on peut retrouver la fonction de départ. Autrement dit, puisque les spectres sont répétés tous les $\frac{1}{T}$, le réel α doit vérifier la condition suivante:

$$\frac{1}{T} - \frac{\alpha}{2} > \frac{\alpha}{2} \quad i.e. \quad T < \frac{1}{\alpha} \tag{6.12}$$

Nous retrouvons ici le critère de Nyquist [20].
La fonction $\frac{\sin \alpha\pi x}{\alpha\pi x}$ est déterminée à chaque ligne de la matrice A. Chaque élément de la matrice A est une valeur discrétisée de la fonction $\frac{\sin \alpha\pi x}{\alpha\pi x}$. Nous voyons que, dans ce cas, $T = 1$. La condition (6.12) devient alors:

$$\alpha < 1 \tag{6.13}$$

Si la condition (6.12) ou (6.13) n'est pas satisfaite, on a une superposition de spectres et il est impossible de retrouver la fonction $\frac{\sin \alpha\pi x}{\alpha\pi x}$. Dans ce cas, les coefficients $a_{i,j}$ ne représentent pas l'échantillonnage de la fonction (6.9) de départ.

Remarque 6.2.1 Par analogie avec la méthode microlocale, l'objet géométrique que nous allons considérer est $[-1, 1]$. La longueur le l'objet est 2 et le nombre de points est $\mathcal{N}^d$. Ici, le nombre d'onde est $k = n\pi$ et la longueur d'onde est $\frac{2}{n}$. Nous en déduisons le nombre de degrés de liberté par longueur d'onde: $\frac{\mathcal{N}^d}{n}$. Et nous avons vu en (6.7) que ce nombre doit satisfaire le critère:

$$\frac{\mathcal{N}^d}{n} \geq 5$$

C'est le premier défaut de la méthode de discrétisation microlocale. En effet, ce critère de Nyquist qui s'écrit, d'après (6.11) et (6.13),

$$\frac{\mathcal{N}^d}{n} > 1$$

est bien respecté mais à un coût prohibitif (cf. figure 6.9).
Le deuxième défaut est que le conditionnement provient de la surdiscrétisation en direction de propagation. •

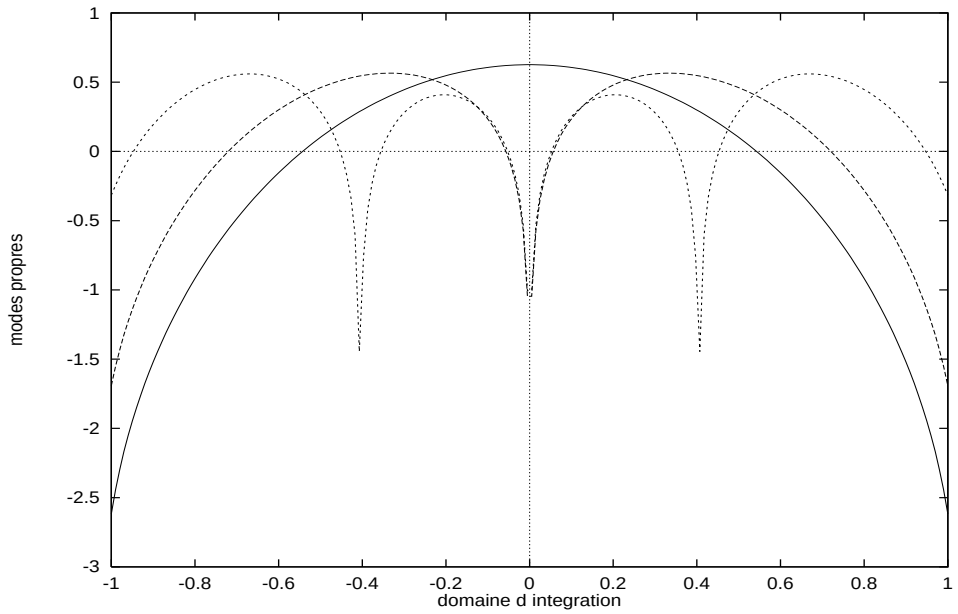


FIG. 6.10: *Modes propres associés aux grandes valeurs propres.*

Représentons sur les figures 6.10 et 6.11 les modes propres pour les valeurs propres croissantes, nous voyons que les plus petites valeurs propres correspondent à un nombre d'oscillations important, alors que les plus fortes ont peu d'oscillations. Nous retrouvons bien

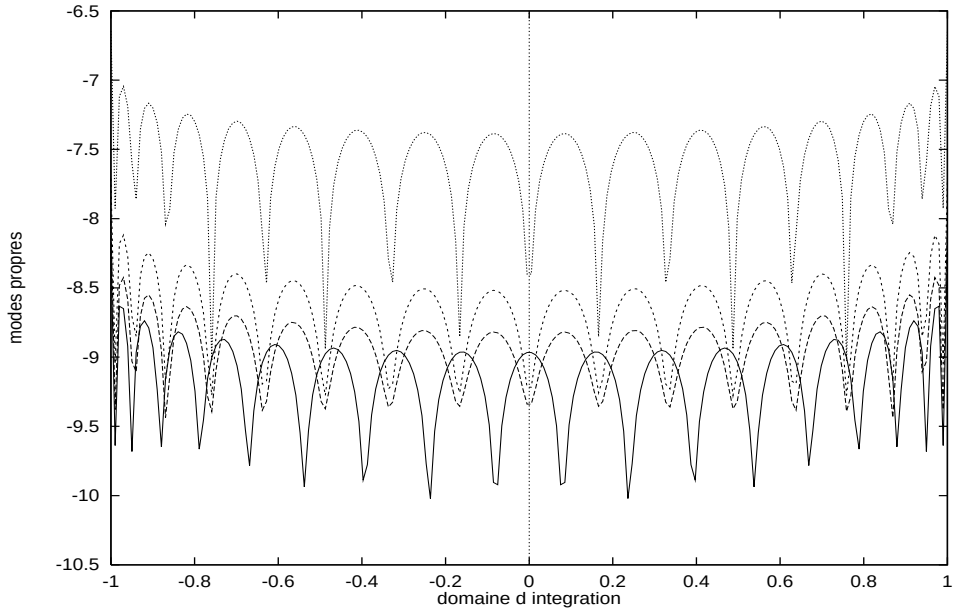


FIG. 6.11: *Modes propres associés aux petites valeurs propres.*

le même défaut que dans les équations intégrales, ce sont les traces d'ondes évanescentes qui détériorent le conditionnement.

6.3 Réduction du conditionnement

Dans cette section, nous allons chercher à la fois à réduire le nombre de données stockées dans la matrice et le conditionnement du système linéaire (6.3) qui en découle en contrôlant l'erreur faite sur la norme de la matrice. L'espoir que nous avons ici repose sur le fait que nos problèmes de conditionnement viennent justement d'un excès de données qui génère des modes évanescents. Les deux méthodes que nous allons voir consistent à *supprimer* ces données.

6.3.1 Première méthode

Puisque les très petites valeurs propres correspondent à des ondes qui ne rayonnent pas, une méthode naturelle consiste à les éliminer soit directement à partir de la matrice soit en agissant sur le second membre.
Revenons au vecteur second membre b_h donné par (6.6). Nous allons décomposer b_h dans la base formée par les vecteurs propres $(v^n)_{1\leq n\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ de la matrice $\mathcal{A}_h$ exprimée par (6.4). Nous avons:

$$b_h = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d} \beta_i v^i \tag{6.14}$$

Sur la figure 6.12, nous montrons les coefficients $(\beta_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ en fonction des valeurs

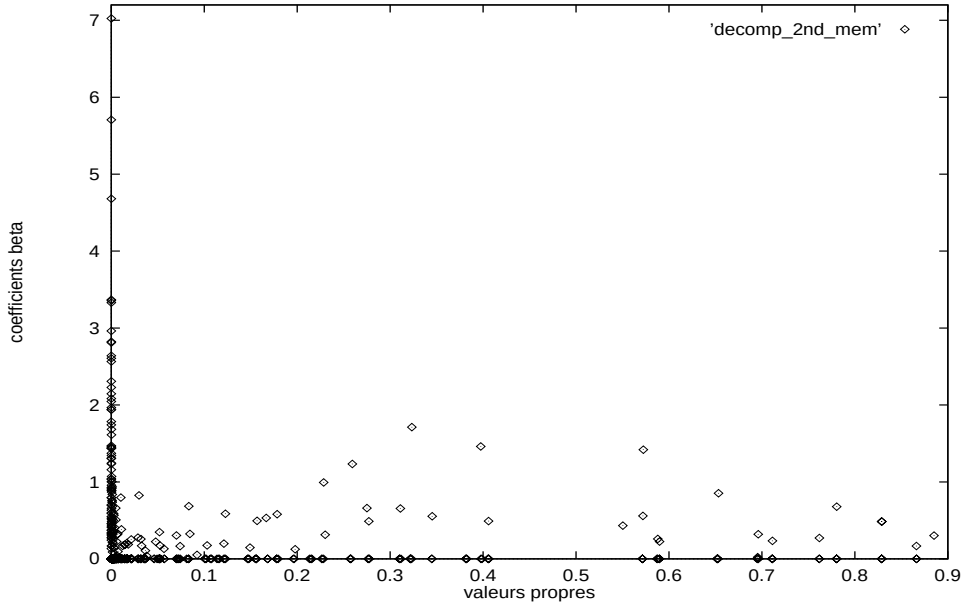


FIG. 6.12: *Représentation des coefficients* $(\beta_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ *vérifiant* (6.14) *en fonction des valeurs propres* $(\lambda_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$.

propres $(\lambda_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$. Nous avons observé que les $(\beta_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ sont bornés par 7.024. Notons que les coefficients $(\beta_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ sont importants pour des valeurs propres inférieurs à 0.1. L'objectif est d'annuler les $(\beta_i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s\times\mathcal{N}^d}$ correspondant aux petites valeurs propres en dessous d'un seuil que l'on fera varier tout en contrôlant l'erreur sur b_h. Nous obtenons ainsi un vecteur second membre filtré b_h^f. Notons e l'erreur:

$$e \;=\; \frac{||b_h - b_h^f||}{||b_h||}$$

Nous obtenons le tableau suivant:

Seuil	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$2\ 10^{-1}$
e	$3.31\ 10^{-5}$	$6.66\ 10^{-5}$	$2.08\ 10^{-4}$	$1.30\ 10^{-3}$	$3.00\ 10^{-3}$	$1.98\ 10^{-2}$	$5.19\ 10^{-2}$
β_i nuls	9.14%	21.19%	34.90%	52.07%	65.92%	77.14%	81.85%

Remarquons que lorsque l'on annule les coefficients β_i (plus de 77%) associés à des valeurs propres plus petites que 0.1, nous commettons une erreur inférieure à 2%.

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du système linéaire suivant:

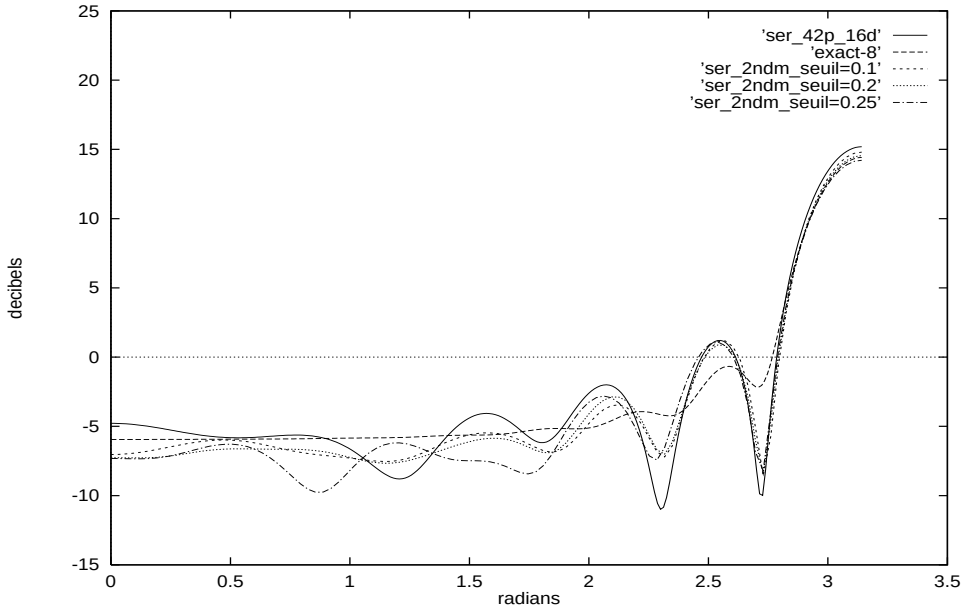


FIG. 6.13: *SER obtenues pour divers seuils sur le second membre.*

$$\mathcal{A}_h \alpha_h \;=\; b_h^f \tag{6.15}$$

où b_h^f est obtenu pour divers seuils. Sur la figure 6.13, nous avons tracé les SER des solutions de (6.15) avec quatre second membres b_h^f. Le premier est calculé sans filtre, tandis que les suivants sont calculés avec un seuil égal à 0.1, puis avec 0.2 et le dernier avec 0.25. Il est manifeste sur cette figure que les SER ne se détériorent que très peu lorsque l'on élimine les petites valeurs propres. Nous voyons qu'en annulant 77.14% et même 81.85% des coefficients β_i, nous obtenons des SER proches de la SER exacte.
Ces résultats nous assurent qu'il faut éliminer les modes correspondant aux petites valeurs propres. Bien sûr, la méthode présentée ici coûte chère puisqu'il faut calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice $\mathcal{A}_h$. Dans la section suivante, nous proposerons une méthode qui réduira non seulement le conditionnement du sytème linéaire mais aussi le nombre de degrés de liberté.

6.3.2 Utilisation d'ondelettes

Dans cette partie, nous allons montrer qu'en utilisant les ondelettes (cf. [34, 35]), comme sur le problème modèle, et en effectuant une réduction du rang du système comme avec la matrice diagonalisée, nous pouvons réduire à la fois le conditionnement et le stockage mémoire.

Nous allons utiliser la décomposition multiéchelle à l'aide de l'ondelette de Haar [20, 25], et cela pour deux raisons: d'une part pour son extrême simplicité, et d'autre part à cause du fait qu'elle se transpose assez bien sur des géométries quelconques.
Commençons par décrire comment la méthode de multirésolution s'adapte à la méthode de discrétisation microlocale. Nous savons que la théorie de l'analyse microlocale nous

permet de chercher la solution u sous la forme:

$$u(x) \;=\; \int e^{\imath k\xi.x}\chi(\xi)p(x)d\xi$$

Dans [29], A. de La Bourdonnaye a choisi d'approcher la solution u de l'équation de Helmholtz en prenant

$$\chi(\xi) = \delta_{\xi_j}$$

et $p(x) = p_i(x)$. Ici, δ_{ξ_j} représente la masse de Dirac au point ξ_j. La multirésolution utilise le même nombre de fonctions de base. La seule différence est que la fonction χ s'écrit à l'aide de somme de masses de Dirac centrées en ξ_j. Plus précisement, la première fonction de base est la somme de toutes les ondes planes et elle est obtenue par:

$$\chi_1(\xi) \;=\; \sum_{1}^{\mathcal{N}^d} \delta_{\xi_j}$$

La deuxième fonction de base s'obtient en faisant la somme sur la première moitié d'ondes planes à laquelle on retranche la somme faite sur la deuxième moitié:

$$\chi_2(\xi) \;=\; \sum_{1}^{\mathcal{N}^d/2} \delta_{\xi_j} \;-\; \sum_{\mathcal{N}^d/2+1}^{\mathcal{N}^d} \delta_{\xi_j}$$

Chaque paquet de somme d'ondes planes crée à nouveau deux paquets plus petits et ainsi de suite. La troisième fonction de base s'écrit en prenant:

$$\chi_3(\xi) \;=\; \sum_{1}^{\mathcal{N}^d/4} \delta_{\xi_j} \;-\; \sum_{\mathcal{N}^d/4+1}^{\mathcal{N}^d/2} \delta_{\xi_j}$$

Dans notre cas, la multirésolution conduit à une matrice de changement de base.
Revenons au problème unidimensionnel de la sous-section 6.2.2. Nous avons, par exemple pour $\mathcal{N}^d = 8$, la matrice suivante:

$$\mathcal{P} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

qui est par la suite renormalisée ligne par ligne de manière à ce que nous obtenions une matrice orthogonale.

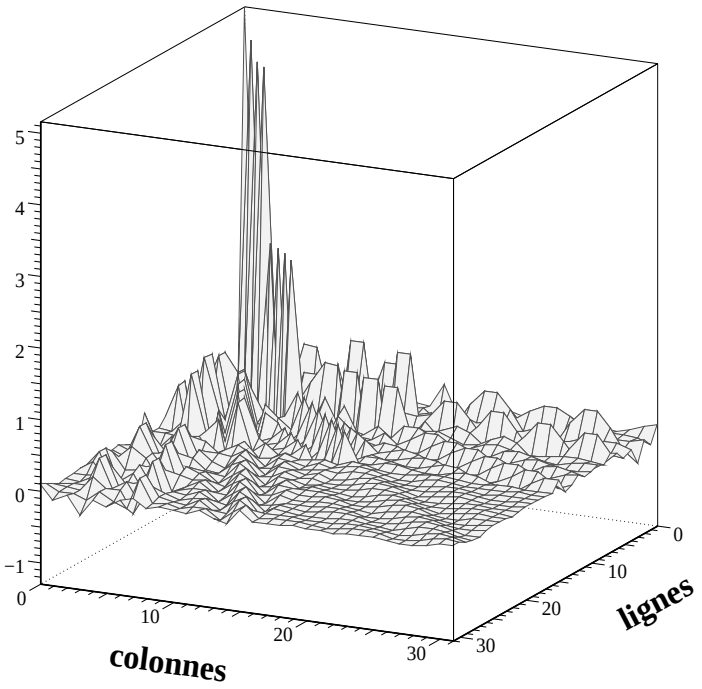


FIG. 6.14: *Profil de la matrice* $\tilde{A}$ *pour* $\mathcal{N}^d = 32$ *et* $n = 6$.

L'idée consiste à filtrer la matrice A, dont l'expression est donnée par (6.10), dans la base $\mathcal{P}$, c'est-à-dire annuler certains coefficients de:

$$\tilde{A} \;=\; \mathcal{P}^{-1} A \mathcal{P}$$

Le profil de la matrice $\tilde{A}$ est représenté sur la figure 6.14. Si nous comparons avec le profil de la matrice A représenté sur la figure 6.8, nous remarquons qu'à chaque ligne de $\tilde{A}$, nous avons l'échantillonnage d'une fonction qui oscille beaucoup moins. Le filtrage de la nouvelle matrice devient plus facile. Notons $\tilde{A}_f$, la matrice $\tilde{A}$ filtrée et exprimons le conditionnement de $\tilde{A}_f$ en fonction de l'erreur relative $E = \dfrac{||A - \mathcal{P}\tilde{A}_f\mathcal{P}^{-1}||}{||A||}$. Les calculs utilisent $\mathcal{N}^d = 32$ directions et k est fixé à 6π. Rassemblons dans un tableau les résultats

sur le conditionnement, l'erreur E et le remplissage de la matrice filtrée $\tilde{A}_f$.

$\text{Log}_{10}(Cond)$	16.9	4.2	3.8	3.09
E en%	$0.44\ 10^{-5}$	0.61	1.41	4.05
termes non nuls dans $\tilde{A}_f$	99.8%	86.13%	73.63%	49.21%

Nous constatons ici que la multirésolution à l'aide des ondelettes de Haar nous permet d'améliorer considérablement le conditionnement de la matrice A, de 10^{17} à 10^3. De plus, le conditionnement 10^3 est obtenu pour une matrice remplie à 50% environ.

6.4 Application aux équations intégrales

Nous pouvons maintenant envisager la réduction du conditionnement du système linéaire (6.3).
Nous allons appliquer la méthode décrite ci-dessus dans 6.3.2 aux équations intégrales. Plus précisement, nous allons établir la matrice de passage P en ondelettes orthogonales qui agira principalement sur les blocs diagonaux de la matrice $\mathcal{A}_h$ et ceci pour deux raisons: d'abord parce que ces blocs sont exactement les matrices utilisées dans la sous-section 6.3.2. En effet, nous avons vu au chapitre 3 que les blocs diagonaux de $\mathcal{A}_h$ correspondent à l'interaction entre les vecteurs directions et sont de la forme:

$$(A^i)_{j,n} \;=\; \int e^{\imath k(\xi_n-\xi_j).x} p_i^2(x) d\sigma(x)$$

où la taille des matrices $(A^i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s}$ est $\mathcal{N}^d \times \mathcal{N}^d$.
La deuxième raison est que les blocs $(A^i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s}$, qui correspondent au front d'onde de la matrice $\mathcal{A}_h$, comportent les éléments les plus importants.
Comme annoncé dans la sous-section 6.3.2, la méthode de multirésolution introduit une matrice $\mathcal{P}$ pour mieux filtrer les matrices $(A^i)_{1\leq i\leq \mathcal{N}^s}$. On considère donc la matrice $\mathcal{P}$ d'ordre $\mathcal{N}^d$. Ici, la difficulté vient du fait que les vecteurs $(\xi_j)_{1\leq j\leq \mathcal{N}^d}$ appartiennent à $I\!R^3$. La construction de la matrice $\mathcal{P}$ est détaillée en annexe de ce chapitre pour 16 directions. Introduisons alors la matrice de passage P:

$$P \;=\; \begin{pmatrix} \mathcal{P} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{P} \end{pmatrix}$$

Remarque 6.4.1 Il faut noter ici que la géométrie de l'obstacle et le maillage n'interviennent pas dans la définition de la matrice P contrairement aux méthodes d'ondelettes qui sont appliquées à des éléments finis classiques. En effet, la transformée en ondelettes agit sur les directions de propagation, et donc dans le domaine spectral. •

Le système linéaire (6.3) est équivalent à

$$\tilde{\mathcal{A}}_h \tilde{\alpha}_h \;=\; \tilde{b}_h \tag{6.17}$$

où $\tilde{\mathcal{A}}_h = P^{-1}\mathcal{A}_h P$, $\tilde{\alpha}_h = P^{-1}\alpha_h$ et $\tilde{b}_h = P^{-1}b_h$.

FILTRAGE

Montrons maintenant comment filtrer le nouveau système (6.17). L'idée est de se fixer un seuil s positif pour sélectionner les éléments diagonaux de la matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h$. La sélection se fait lorsque les coefficients diagonaux de $\tilde{\mathcal{A}}_h$ sont supérieurs en module au seuil s. Si un terme diagonal $(\tilde{\mathcal{A}}_h)_{I,I}$ ne satisfait pas ce critère, on supprime alors la ligne et la colonne associées. En même temps, on élimine le coefficient $(\tilde{b}_h)_I$ correspondant. A la fin, nous obtenons le système linéaire filtré suivant:

$$\tilde{\mathcal{A}}_h^f \tilde{\alpha}_h^f \;=\; \tilde{b}_h^f \tag{6.18}$$

qui est de taille inférieure au système (6.17).
C'est l'avantage de la méthode proposée ici: on baisse le conditionnement tout en réduisant la taille du système linéaire initial (6.3) .

6.4.1 Cas convexe

Nous allons présenter maintenant les résultats numériques issus de la méthode exposée ci-dessus. Nous considérons ici la sphère unité comme obstacle Γ dont le maillage est composé de 42 nœuds et 80 triangles.

Maillage directionnel composé de 16 vecteurs

Les calculs numériques utilisent un maillage de 16 rayons vecteurs de la demi-sphère unité. Pour illustrer la notion de $filtrage$, montrons tout d'abord les profils des matrices $\tilde{\mathcal{A}}_h$ et $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$. Sur la figure 6.17, nous présentons le profil de la matrice $\tilde{A}^i$ correspondant à un bloc diagonal de $\tilde{\mathcal{A}}_h$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, la taille de $\tilde{A}^i$ est égale au nombre de vecteurs directions $\mathcal{N}^d$ qui vaut 16 dans notre cas. Les valeurs des coefficients sont obtenues pour un nombre d'onde $k = 8m^{-1}$. Si nous comparons les figures 6.17 et 4.14, nous voyons la conséquence de l'utilisation de la matrice P: elle permet une meilleure sélection sur les coefficients diagonaux. En effet, nous distinguons d'avantage les termes importants. Le profil de la matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h$ est illustré sur la figure 6.15. Notons que la taille de la matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h$ est 672. Le fait remarquable de la méthode décrite plus haut est que nous aboutissons, après filtrage, à une matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$ de taille 168. Le profil est montré sur la figure 6.16 où nous avons conservé la même proportion que la matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h$ illustrée



FIG. 6.15: *Profil de la matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h$ d'ordre 672.*

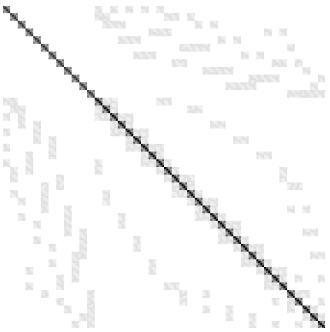


FIG. 6.16: *Profil de la matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$ d'ordre 168.*

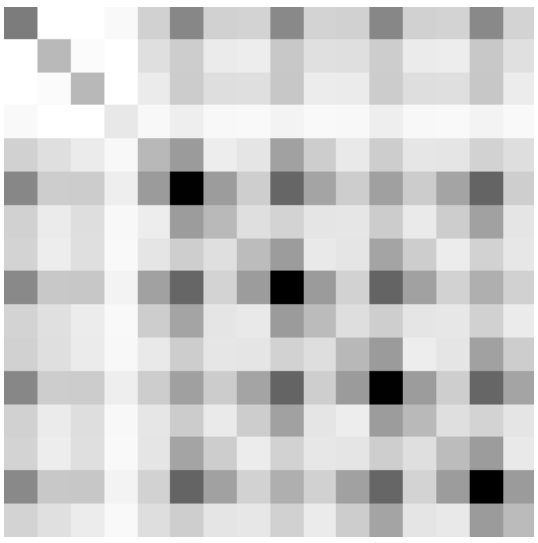


FIG. 6.17: *Bloc diagonal de $\tilde{\mathcal{A}}_h$.*

sur la figure 6.15.
Nous avons appliqué 4 *filtres* sur $\tilde{\mathcal{A}}_h$. Le conditionnement et la taille de la matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$ sont donnés par le tableau suivant:

$k = 8m^{-1}$	sans filtre	filtre1	filtre2	filtre3	filtre4
$Cond$	81 916 028.75	125 373.84	25 288.56	996.0	477.41
taille de $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$	672	336	294	210	168
termes non nuls dans $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$	15.87%	15.53%	15.69%	15.98%	15.98%
nombre de degrés de liberté par longueur d'onde	5.7	4.06	3.79	3.2	2.87

Comme attendu, nous diminuons le conditionnement des matrices.

Remarque 6.4.2 Par comparaison avec la méthode des éléments finis classique, nous pouvons dire que la matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$ d'ordre 168 remplie à moins de 16% est équivalent à une matrice pleins de taille environ 67×67. Cela correspond à résoudre numériquement l'équation intégrale (6.1) avec 1.69 points en espace par longueur d'onde ce qui n'est pas toléré d'après (6.7). •

Remarque 6.4.3 Il est intéressant de souligner le gain important en stockage et en résolution que nous obtenons lorsque l'on réduit le conditionnement. •

Utilisons maintenant la matrice $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$ pour résoudre le système linéaire (6.3) c'est-à-dire l'équation intégrale (6.1). La figure 6.18 montre les SER obtenues directement en résolvant (6.3) puis en résolvant (6.17) avec les filtres 1, 2 et 3. Par comparaison avec la première SER, les résultats obtenus pour les filtres 1, 2 et 3 ne sont pas satisfaisants malgré une diminution du conditionnement de 10^8 à 10^3. Nous observons sur la figure 6.19 un meilleur accord entre la solution numérique obtenue à partir du filtre 4 et la solution exacte et ce en gagnant un facteur 2. 10^5 sur le conditionnement de départ et en diminuant la taille par un facteur 16. Il faut constater que le dernier résultat est obtenu à $k = 8m^{-1}$ avec moins de 3 degrés de liberté par longueur d'onde et avec une matrice remplie à moins de 16%.

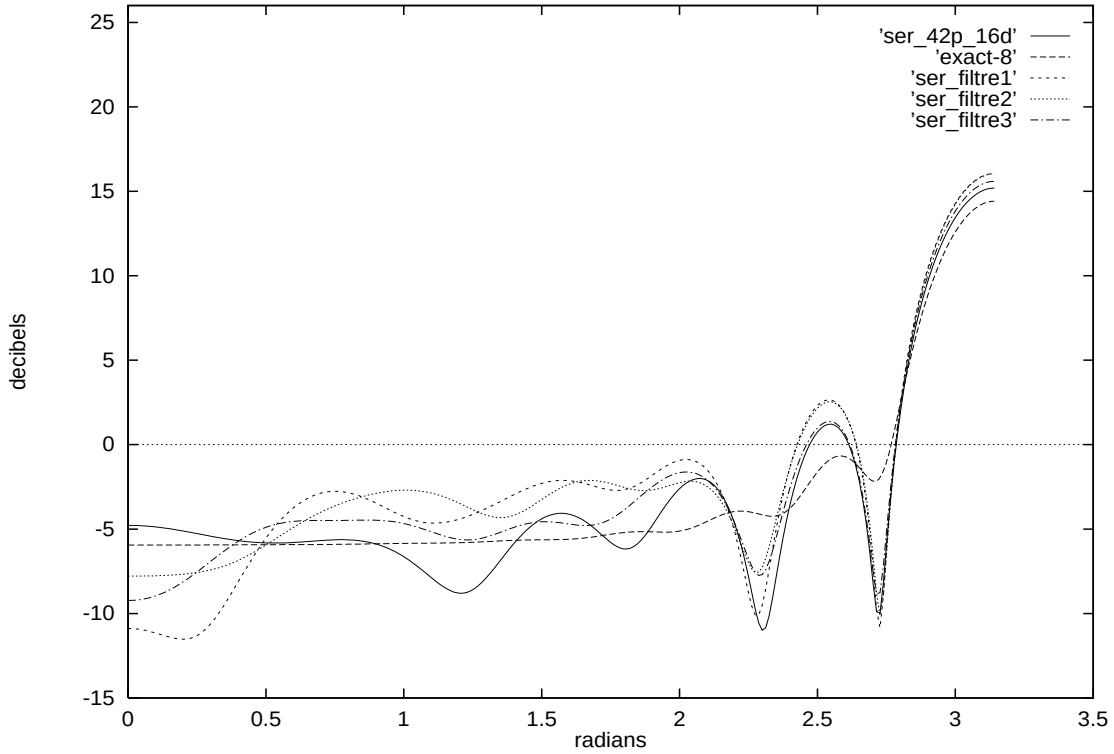


FIG. 6.18: *SER à* $k = 8m^{-1}$.

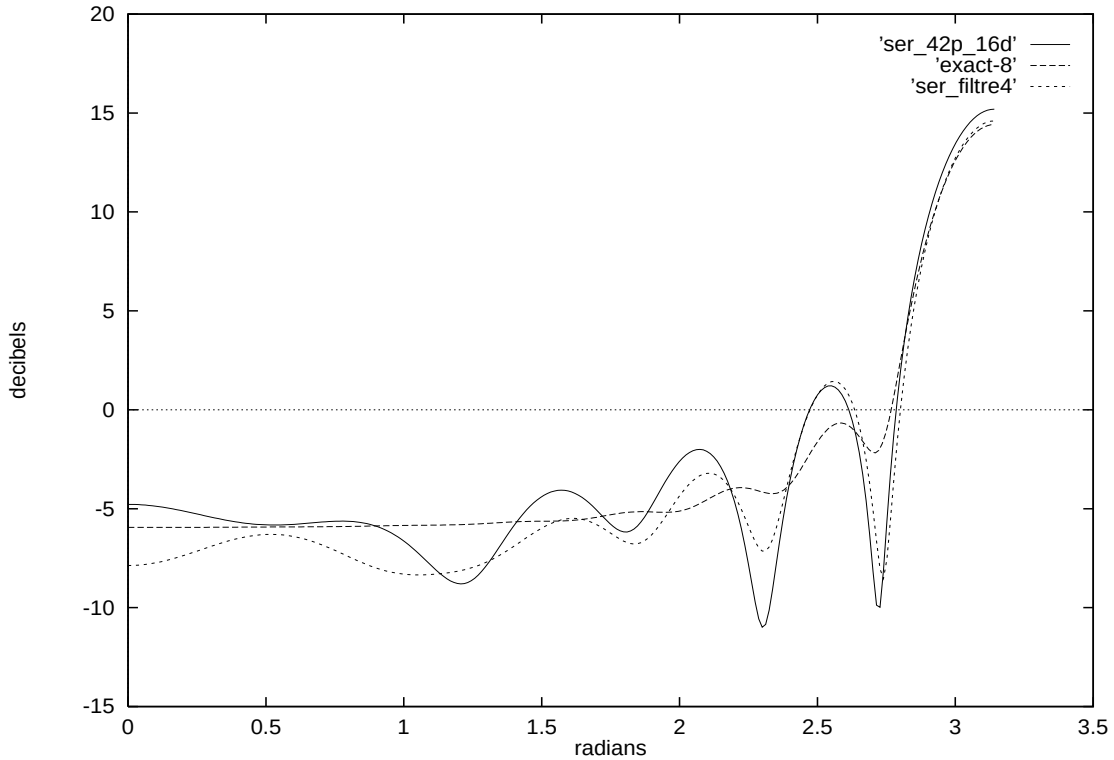


FIG. 6.19: *SER à* $k = 8m^{-1}$.

Maillage directionnel composé de 64 vecteurs

Intéressons-nous maintenant aux calculs pour un nombre d'onde fixé à $k = 16m^{-1}$. Pour cela, nous utilisons la même discrétisation spatiale mais couplée avec $\mathcal{N}^d = 64$ vecteurs directions. Nous avons effectué les calculs à l'aide de 3 matrices filtrées. Nous avons rassemblé les résultats numériques dans le tableau suivant:

$k = 16m^{-1}$	sans filtre	filtre1	filtre2	filtre3
$Cond$	5.601 10^{14}	1 336 508.11	10 808.69	484.04
taille de $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$	2 688	882	546	378
termes non nuls dans $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$	15.98%	15.98%	15.98%	15.98%
nombre de degrés de liberté par longueur d'onde	5.7	3.28	2.58	2.15

Nous voyons que la méthode nous a permis de réduire considérablement le conditionnement des matrices. En effet, nous sommes passés d'un conditionnement de 5. 10^{14} à 5. 10^2. Il est intéressant de remarquer que le résultat illustré sur la figure 6.21 est obtenu à partir d'une matrice d'ordre inférieur à 400 ce qui correspond à un peu plus de 2 degrés de liberté par longueur d'onde. De plus, elle comporte environ 16% de termes non nuls.

Remarque 6.4.4 Nous retrouvons le gros avantage de la méthode de discrétisation microlocale par rapport à la méthode de discrétisation classique qui permet d'obtenir des résultats à $k = 16m^{-1}$ avec seulement 1.26 points en espace par longueur d'onde. •

Remarque 6.4.5 Notons que nous avons augmenté la fréquence pour un maillage spatial fixe uniquement en raffinant le maillage en directions de propagation. •

Terminons cette sous-section en faisant l'expérience suivante. Sur la figure 6.22, nous avons tracé les SER obtenues à partir de nos deux maillages pour un nombre d'onde $k = 8m^{-1}$. Auparavant, nous avons appliqué notre meilleur filtrage par les ondelettes sur les deux matrices résultantes. Le résultat est que nous obtenons deux matrices $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$ de même taille et deux SER à peu près identques.

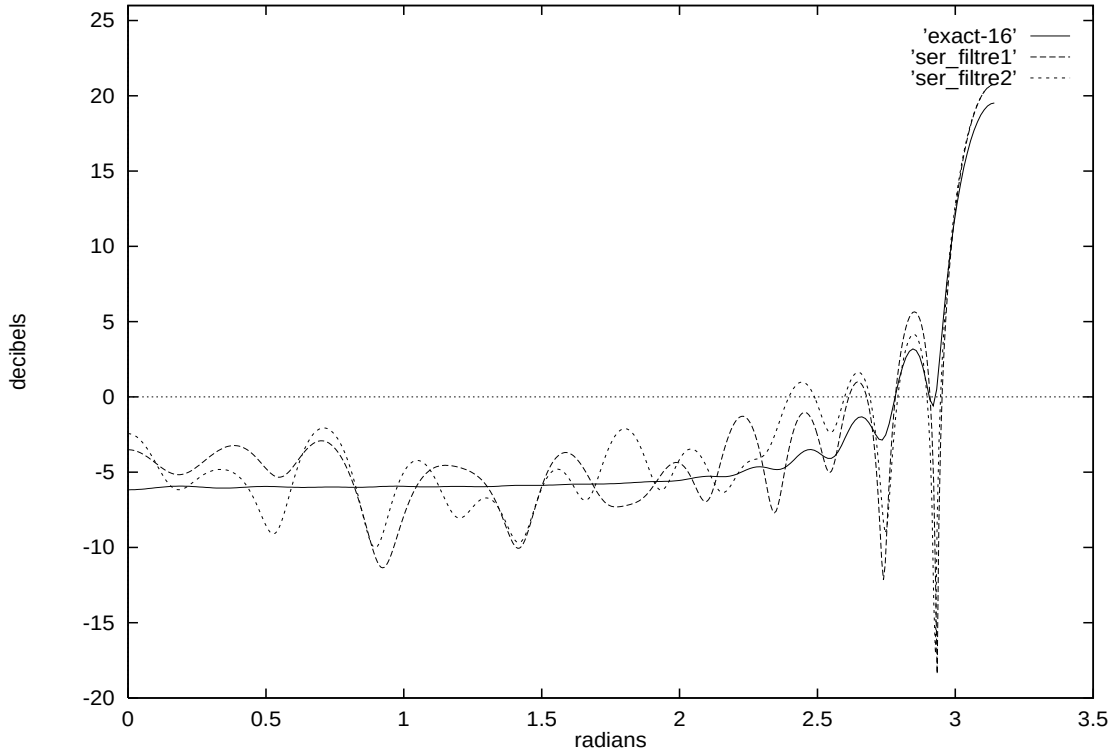


FIG. 6.20: *SER à* $k = 16m^{-1}$.

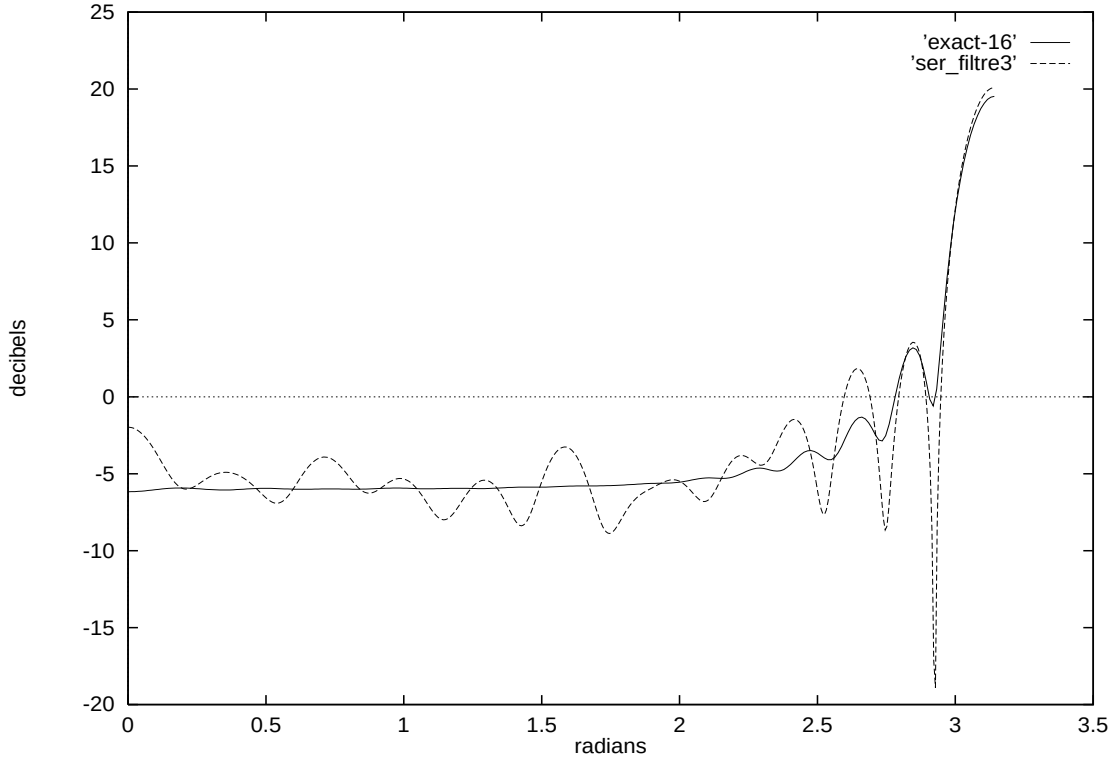


FIG. 6.21: *SER à* $k = 16m^{-1}$.

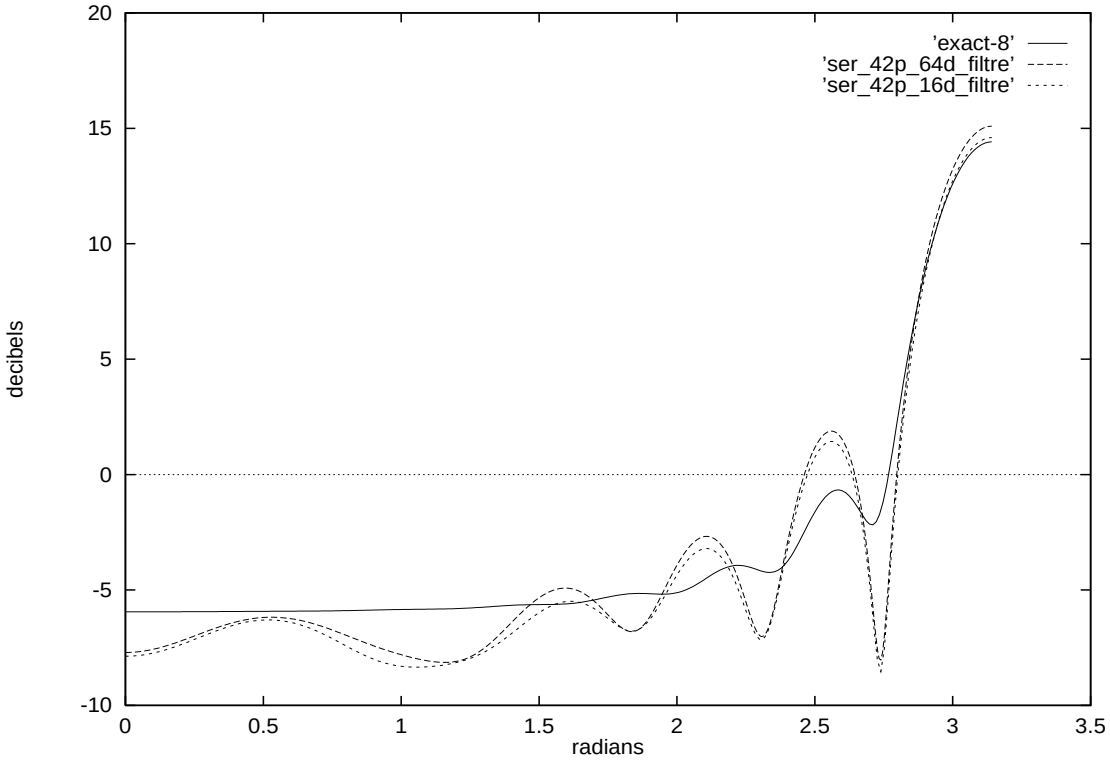


FIG. 6.22: *SER à* $k = 8m^{-1}$.

6.4.2 Cas non convexe

Reprenons l'expérience du chapitre précédent (cf. figure 5.11). L'obstacle considéré est la réunion de deux sphères unité et son maillage est composé de 84 points et 160 triangles. Ce maillage spatial est couplé avec un maillage directionnel comportant à la fois un maillage de la demi-sphère unité de 16 vecteurs et un maillage de la sphère unité de 32 vecteurs. Il résulte une matrice $\mathcal{A}_h$ de taille 1888.
Nous appliquons maintenant la méthode proposée au début de la section 6.4 sur la matrice $\mathcal{A}_h$. La première expérience est réalisée avec un nombre d'onde fixé à $k = 8m^{-1}$ et avec une distance entre les deux sphères de $L = 8m$ c'est-à-dire une dizaine de longueur d'ondes. Le conditionnement et la taille de la matrice filtrée $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$ sont rassemblés dans le tableau

suivant:

$k = 8m^{-1}$	non filtrée	filtrée
$Cond$	2.38 10^{12}	879.9
taille de $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$	1888	472
termes non nuls dans $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$	8.74%	8.74%
nombre de degrés de liberté par longueur d'onde	7.6	3.4

Remarque 6.4.6 Il est important de noter que nous aboutissons à une matrice de taille 472 dont 8.7% des coefficients sont non nuls. Pour la méthode d'éléments finis classique, ceci correspond à une matrice pleine de taille environ 140. Il en résulte un nombre de points en espace par longueur d'onde qui vaut 1.04. •

Nous représentons sur la figure 6.26 la SER calculée à partir de la solution du système (6.18) de taille 472 ainsi que la SER obtenue par la méthode des rayons. Contrairement au chapitre précédent, nous observons une bonne coïncidence entre les deux SER. En effet, le nombre d'oscillations est identique dans les deux cas. De plus, il est important de remarquer qu'aucun déphasage n'apparait avec notre méthode.
En ce qui concerne les amplitudes des oscillations, il nous est difficile de faire des commentaires puisque le calcul de la SER par la méthode des rayons néglige les réflexions multiples entre les deux sphères.
Tous les résultats numériques qui vont suivre utilisent les mêmes maillages et les matrices filtrées $\tilde{\mathcal{A}}_h^f$ sont toutes de taille 472 remplies à moins de 9%.
Nous illustrons maintenant l'influence du paramètre L sur le calcul des SER. Le nombre d'onde a été fixé à $k = 8m^{-1}$. Nous effectuons les expériences suivantes. La première, qui consiste à éloigner les deux sphères, est réalisée avec $L = 14m$ soit une distance d'environ 18 longueur d'onde. Nous avons constaté dans ce cas que les interactions lointaines n'interviennent pas dans le calcul de la matrice $\mathcal{A}_h$. Ceci peut s'expliquer par le fait que la distance L ici est trop grande pour les calculer (cf. chapitre 5). Les calculs de la SER numérique et de la SER issue de la méthode des rayons sont montrés sur la figure 6.24. Nous constatons que les deux courbes sont très proches.
L'idée de la deuxième expérience est de rapprocher les deux sphères. Nous avons choisi

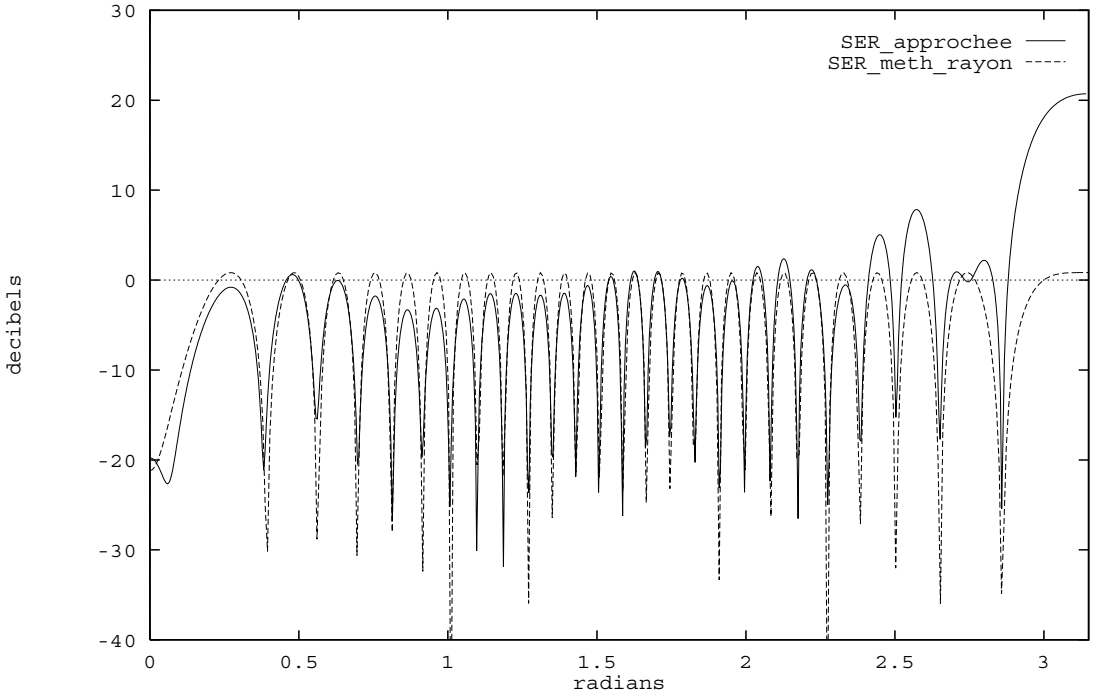


FIG. 6.23: *SER de deux sphères espacées de* $L = 8m$ *à* $k = 8m^{-1}$.

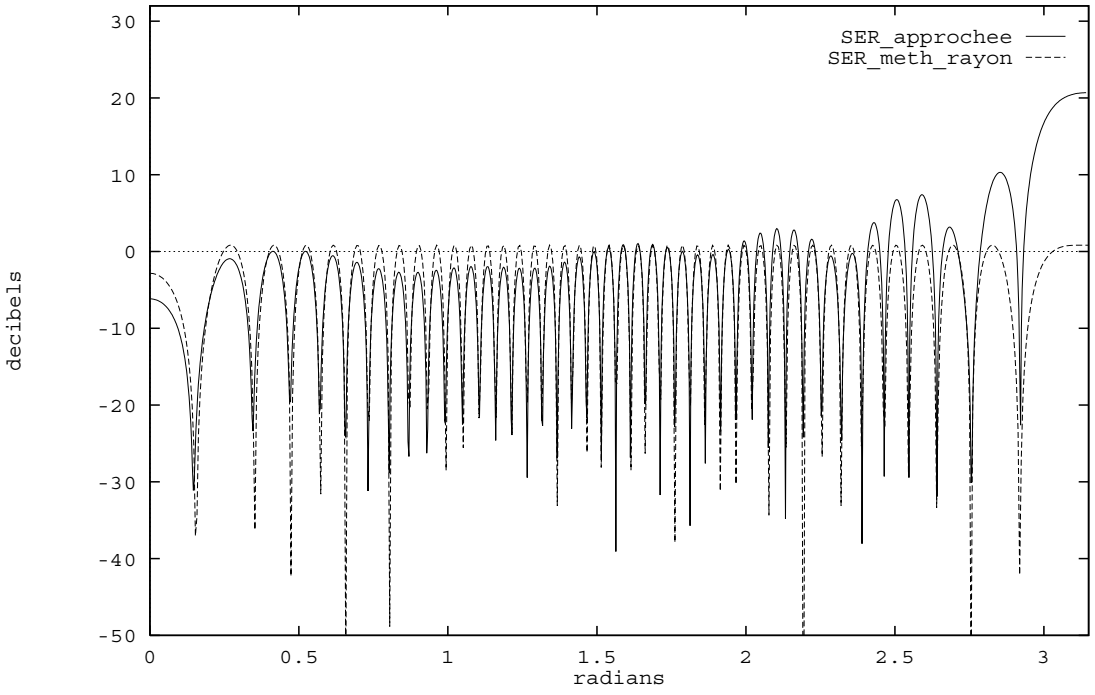


FIG. 6.24: *SER de deux sphères espacées de* $L = 14m$.

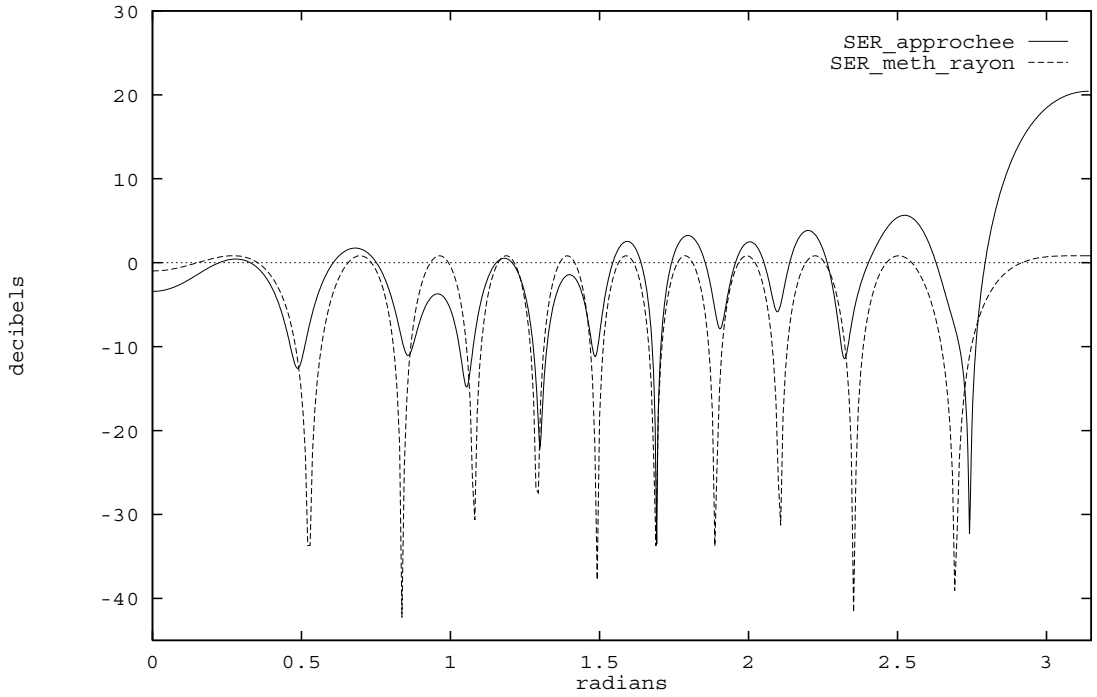


FIG. 6.25: *SER de deux sphères espacées de $L = 2m$.*

une distance $L = 2m$ entre les deux objets. Nous présentons les SER sur la figure 6.25. Même si le nombre d'oscillations est identique sur les deux courbes, nous observons que la SER numérique et la SER calculée par la méthode des rayons sont proches pour des angles autour de $\frac{\pi}{2}$. Nous mettons ainsi en évidence les réflexions multiples d'ondes entre les sphères.

6.5 Annexe

Construction de la matrice de passage $\mathcal{P}$

Soit (i, j, k) un repère orthonormé et xOy le plan engendré par les vecteurs i et j. Nous avons vu dans le chapitre précédent que le maillage de la sphère unité en directions résulte d'un maillage du disque unité $D(O, 1) \in xOy$. Considérons un pavage du disque unité de 16 triangles. Les centres de gravités des triangles représentent les vecteurs directions $(\xi_j)_{1\leq j\leq 16}$ projetés orthogonalement sur le plan xOy. La numérotation de ces points est donnée par la figure suivante.
Les fonctions de base en ondelettes orthogonales sont construites à partir de la fonction χ qui est une somme de masses de Dirac centrées en $(\xi_j)_{1\leq j\leq 16}$ multipliées par des constantes. Sur les figures suivantes, nous représentons ces constantes.

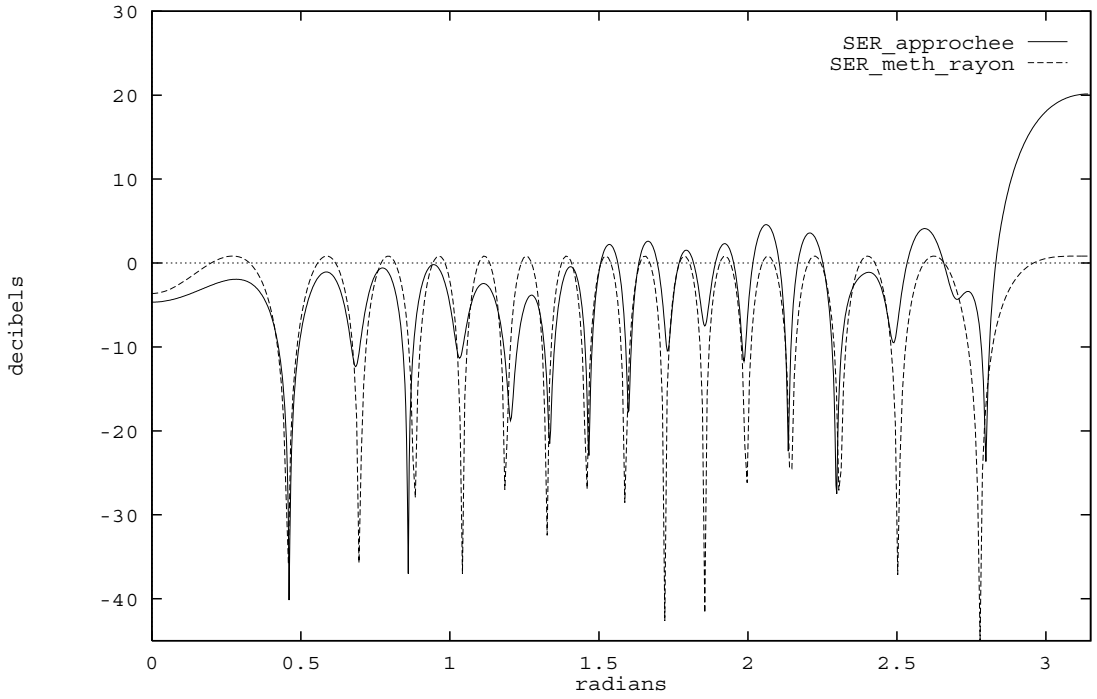
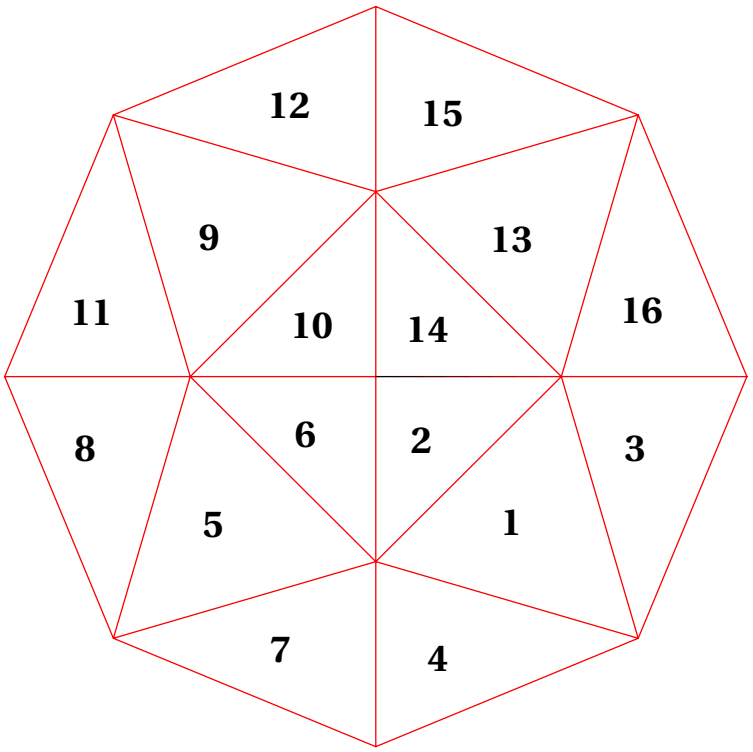


FIG. 6.26: *SER de deux sphères espacées de* $L = 4m$.



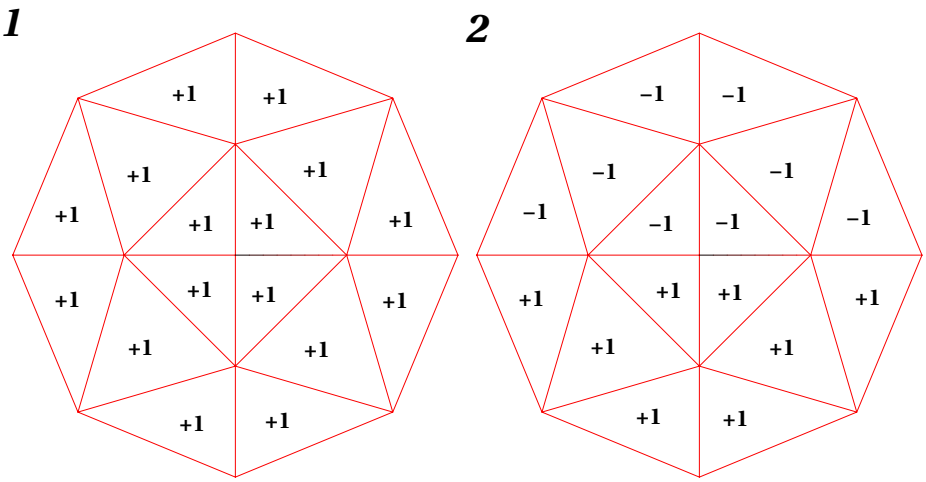


FIG. 6.27: $\chi_1 = \sum_{j=1}^{16} \delta_{\xi_j}$ et $\chi_1 = \sum_{j=1}^{8} \delta_{\xi_j} - \sum_{j=9}^{16} \delta_{\xi_j}$

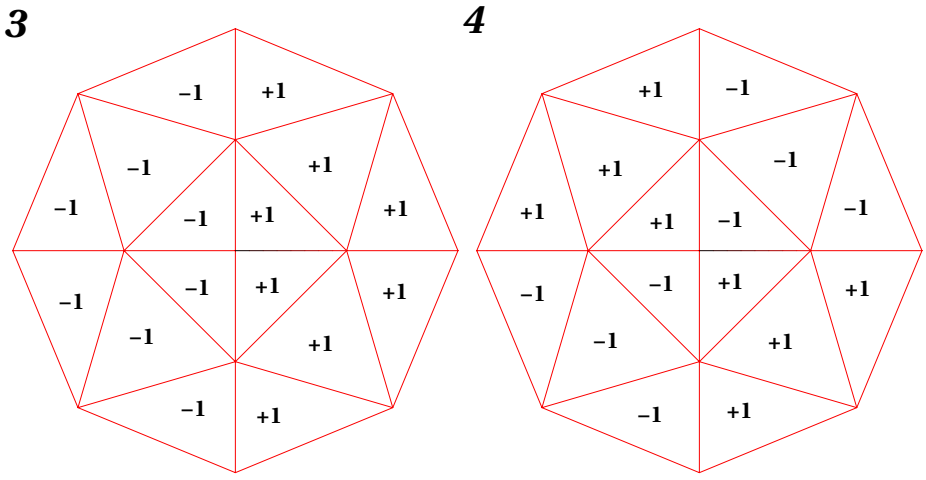


FIG. 6.28: $\chi_3 = \sum_{j=1}^{4} \delta_{\xi_j} - \sum_{j=5}^{12} \delta_{\xi_j} + \sum_{j=13}^{16} \delta_{\xi_j}$ et $\chi_4 = \sum_{j=1}^{4} \delta_{\xi_j} - \sum_{j=5}^{8} \delta_{\xi_j} + \sum_{j=9}^{12} \delta_{\xi_j} - \sum_{j=13}^{16} \delta_{\xi_j}$

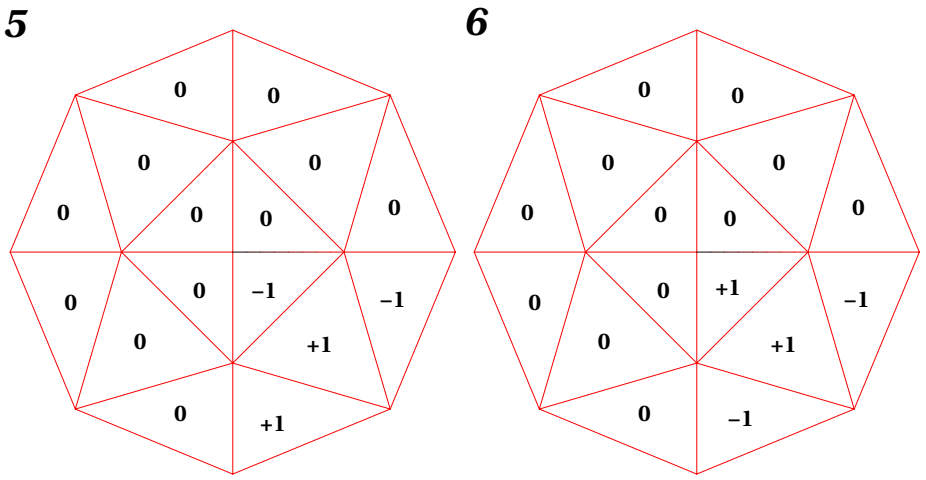


FIG. 6.29: $\chi_5 = \delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_2} - \delta_{\xi_3} + \delta_{\xi_4}$ et $\chi_6 = \delta_{\xi_1} + \delta_{\xi_2} - \delta_{\xi_3} - \delta_{\xi_4}$

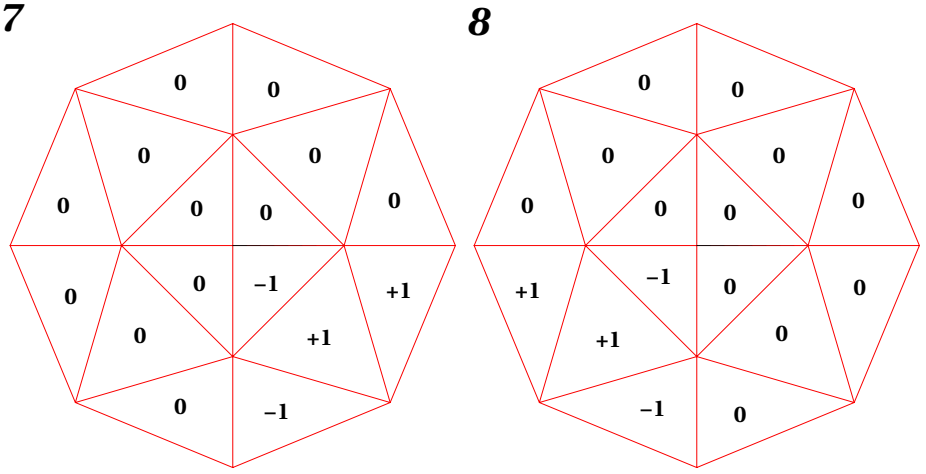


FIG. 6.30: $\chi_7 = \delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_2} + \delta_{\xi_3} - \delta_{\xi_4}$ et $\chi_8 = \delta_{\xi_5} - \delta_{\xi_6} - \delta_{\xi_7} + \delta_{\xi_8}$

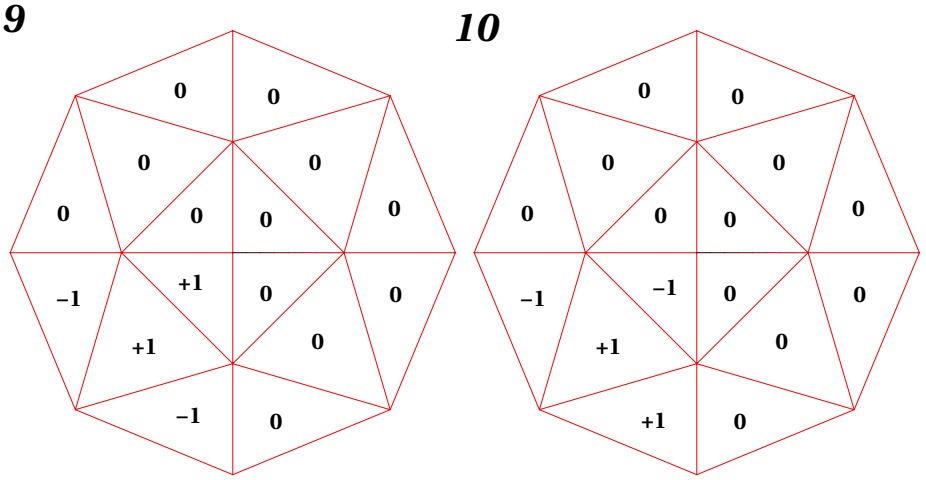


FIG. 6.31: $\chi_9 = \delta_{\xi_5} + \delta_{\xi_6} - \delta_{\xi_7} - \delta_{\xi_8}$ et $\chi_{10} = \delta_{\xi_5} - \delta_{\xi_6} + \delta_{\xi_7} - \delta_{\xi_8}$

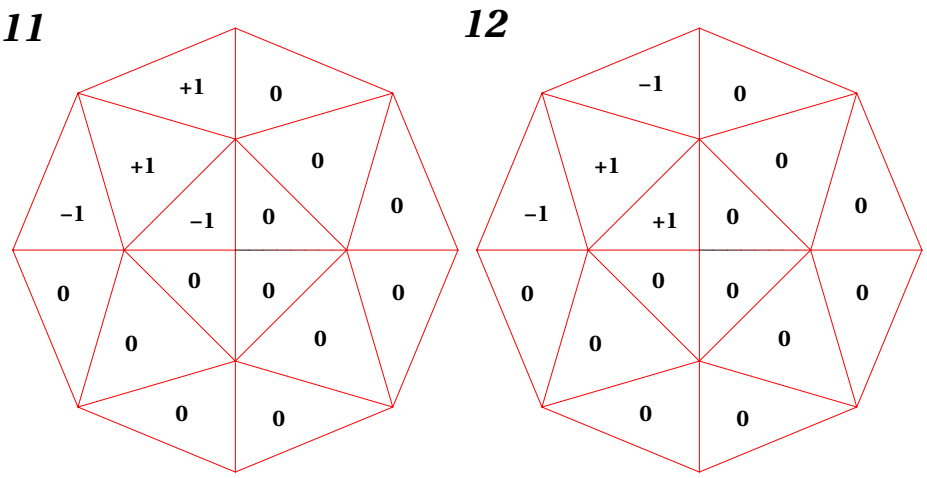


FIG. 6.32: $\chi_{11} = \delta_{\xi_9} - \delta_{\xi_{10}} - \delta_{\xi_{11}} + \delta_{\xi_{12}}$ et $\chi_{12} = \delta_{\xi_9} + \delta_{\xi_{10}} - \delta_{\xi_{11}} - \delta_{\xi_{12}}$

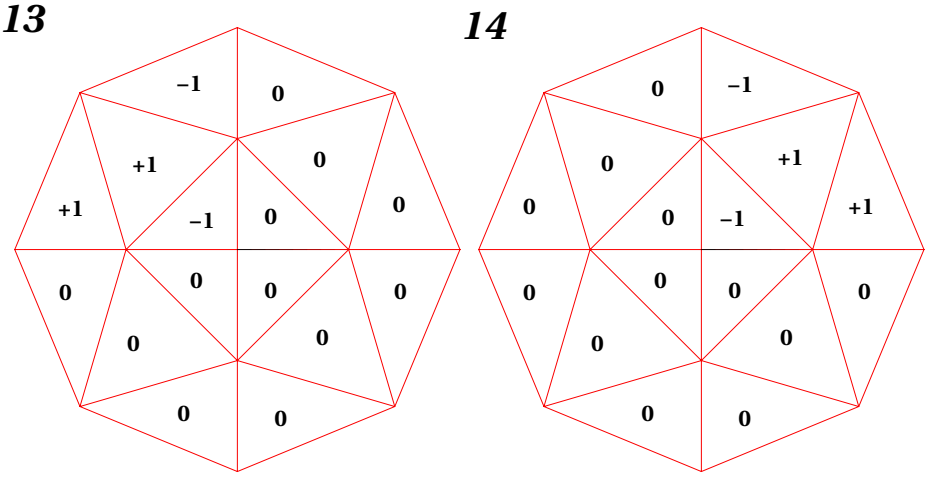


FIG. 6.33: $\chi_{13} = \delta_{\xi_9} - \delta_{\xi_{10}} + \delta_{\xi_{11}} - \delta_{\xi_{12}}$ et $\chi_{14} = \delta_{\xi_{13}} - \delta_{\xi_{14}} - \delta_{\xi_{15}} + \delta_{\xi_{16}}$

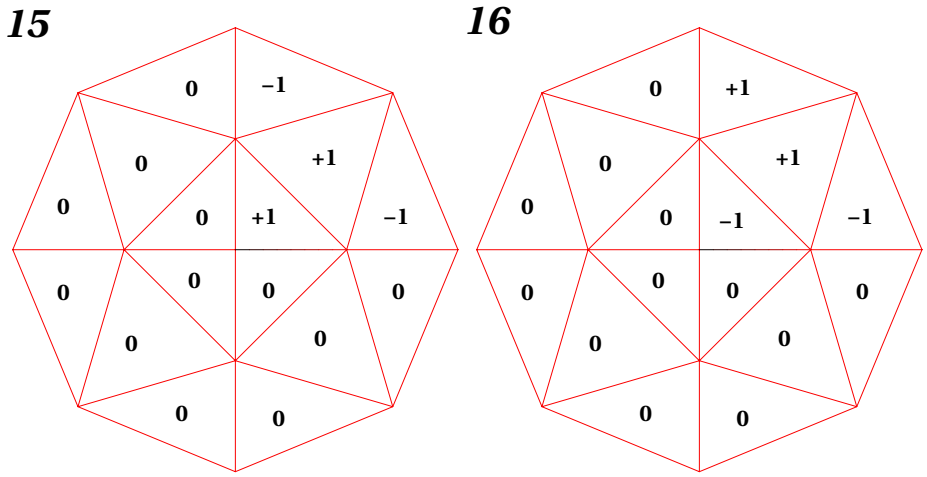


FIG. 6.34: $\chi_{15} = \delta_{\xi_{13}} + \delta_{\xi_{14}} - \delta_{\xi_{15}} - \delta_{\xi_{16}}$ et $\chi_{16} = \delta_{\xi_{13}} - \delta_{\xi_{14}} + \delta_{\xi_{15}} - \delta_{\xi_{16}}$

On en déduit la matrice $\mathcal{P}$ de taille 16×16 qui permet de passer de la base microlocale à la base en ondelettes.

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{pmatrix}$$

Par la suite, la matrice est renormalisée pour être orthogonale.

Chapitre 7

CONCLUSION

Dans le domaine de la simulation de la propagation d'ondes en régime harmonique en milieu non borné, de nombreuses tentatives ont été faites pour monter en fréquences. Les problèmes majeurs sont soit liés à la forme de l'objet diffractant soit liés à la capacité des ordinateurs.
Cette thèse a pour but de présenter une nouvelle méthode et d'en vérifier la validité. Elle constitue le lien entre la méthode de discrétisation proposée par A. de La Bourdonnaye et les premiers résultats numériques lors de son application aux équations intégrales.
La méthode utilisée repose sur l'usage systématique de la localisation en espace provenant des méthodes de discrétisation et la localisation en direction provenant des méthodes asymptotiques. Cet état d'esprit s'est avéré particulièrement efficace pour éliminer les problèmes liés à la géométrie des obstacles et pour réduire le nombre de coefficients de la matrice issue des équations intégrales. En effet, les résultats présentés pour des objets non convexes sont encourageants mais la difficulté principale a été de trouver des références en vue de la validation numérique de la méthode proposée.
En ce qui concerne la diminution de la complexité, la stratégie est répartie en trois parties. Tout d'abord, c'est le développement des idées du chapitre 3 qui permet d'obtenir un premier gain en stockage mémoire. En effet, nous avons cherché à redonner une image intuitive des phénomènes de diffraction en choisissant une équation intégrale qui permet une résolution rapide des problèmes de diffraction à hautes fréquences. Comme attendu dans [28], la matrice obtenue est très creuse. De plus, son calcul garde la simplicité des éléments finis P_1.
Le chapitre 4 présente un outil très puissant qui privilégie les sélections coniques en fréquence, visant à séparer les bonnes directions des mauvaises. L'utilisation de cet outil permet de réduire d'avantage le nombre de degrés de liberté.
Enfin, le problème ainsi posé conduit à des matrices mal conditionnées. Le chapitre 6 propose une façon de diminuer le conditionnement en utilisant une localisation plus fine encore en direction: c'est la multi-échelle par ondelettes. Le résultat est une diminution spectaculaire de la taille de la matrice.
Ces travaux constituent la première étape de la mise au point de la méthode de discrétisation microlocale. De nombreuses améliorations et perspectives sont envisageables.
Une première amélioration consiste à évaluer les coefficients de la matrice lorsque les vecteurs directions sont tangents au bord de l'obstacle. La difficulté ici provient de la dégénérescence de la phase et cette situation correspond aux ondes rampantes. Pour bien approcher ces ondes, nous pensons utiliser les fonctions d'Airy au lieu des ondes planes.
On peut également envisager d'appliquer des ondelettes plus raffinées que les ondelettes de Haar pour réduire le conditionnement et la complexité du système linéaire.
De point de vue numérique, le stockage creux de la matrice devient essentiel pour pouvoir atteindre les hautes fréquences.
Une perspective particulièrement intéressante est l'application à des objets irréguliers.
Une extension de la méthode est le passage à des milieux de propagation hétérogènes.

Bibliographie

[1] T. Abbou, J.C. Nédélec, B. Zhou, *Improvement of the integral equation method for high frequency problems*, Third international conference on mathematical aspects of wave propagation phenomena, SIAM, p. 178-187, 1995.

[2] M. Abramovitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, Washington, 1970.

[3] S. Alinhac, P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, Interéditions / Editions du CNRS, 1991.

[4] M. Balabane, C. Bardos, *Équations des ondes: solutions asymptotiques et singularités*, Support de cours à *Propagation d'ondes électromagétiques*, 2-6 octobre 1989 INRIA.

[5] M. Berger, *Géométrie*, Fernand Nathan, 1977.

[6] F. Bonnet, *Rapport bibliographique sur les conditions aux limites absorbantes pour la propagation des ondes*, rapport CERMICS No 96-52, 1996.

[7] F. Bonnet, *Résolutions efficaces pour le système de Maxwell instationnaire*, Thèse à l'Université de Nice-Sophia-Antipolis, 1997

[8] J.M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., $4^{\text{ième}}$ série, t.14 (1981), pp. 209-246.

[9] D. Bouche, M. Molinet, *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme.*- Springer Verlag, 1994.

[10] B. Bradie, R. Coifman, and A. Grossmann, *Fast numerical computations of oscillatory integrals related to acoustic scattering, I*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 1 (1993), pp. 94–99.

[11] F. X. Canning, *Sparse approximation for solving integral equations with oscillatory kernels*, Siam J. Sci. Stat. Comput., 13 (1992), pp. 71–87.

[12] O. Cessenat, *Application d'une nouvelle formulation variationnelle aux équations d'ondes harmoniques. Problèmes de Helmholtz 2D et de Maxwell 3D*, Thèse de doctorat, Université Paris IX, 1996.

[13] P.G. Ciarlet, *The finete element method for elliptic problems*, Paris, North Holland, 1979.

[14] P. Ciarlet, *Basic error estimates for elliptic problems*, in Handbook of numerical analysis, P. Ciarlet and J. Lions, eds., vol. II, North-Holland, 1991, p. 135.

[15] J.P. Cioni, *Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de volumes finis*, Thèse à l'Université de Nice-Sophia-Antipolis, 1995

[16] D. Colton, R. Kress, *Integral equations method in scattering theory*- Wiley Interscience, 1983.

[17] F. Cuvelier, *Etude théorique de l'approximation de Kirchhoff pour l'équation de Maxwell dans le complémentaire d'une réunion de convexes.*- Thèse de l'Université Paris-XII, 1994.

[18] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, 1985.

[19] J.J. Duistermaat, *Huygens' principle for linear partial differential equations*, dans *Huygens' Principle 1690-1990: Theory and Applications*, H. Blok, H.A. Ferwerda, H.K. Kuiken (editors), 1992.

[20] C. Gasquet C., P. Witomski *Analyse de Fourier et applications*, Masson, Paris, 1990.

[21] P. Gérard, *Le front d'onde et ses avatars. Une introduction élémentaire ł'analyse microlocale*, Images des mathématiques 95, CNRS, 1995.

[22] J. Giroire *Integral equations methods for exterior problems for the Helmholtz equation*, dans *Topics in diffrerential and integral equations and operator theory*, Vol. 5, Birkhäuser Verlag, Basel, 1982.

[23] V. Guillemin and D. Schaeffer, *Remarks on a paper of D. Ludwig*, Bull. of the A.M.S., 79 (1973).

[24] L. Hormander, *Fourier integral operators, 1*, Acta Math., 127 (1971), pp. 79–183.

[25] B.B. Hubbard, *Ondes et ondelettes*, Collection Sciences d'Avenir, 1995.

[26] P. Joly, B. Mercier, *Une nouvelle condition transparente d'ordre deux pour les équations de Maxwell en dimension trois*, rapport INRIA No 1047, 1989.

[27] J.B. Keller, *Geometrical theory of diffraction*, J. Opt. Soc. Amer., vol 52, pp. 116-130, 1962.

[28] A. de La Bourdonnaye, *High frequency approximation of integral equations modelizing scattering phenomena*, tech. report, CERMICS, 1993.

[29] A. de La Bourdonnaye, *High frequency approximation of integral equations modeling scattering phenomena*, Mod. Math. et Anal. Num., 28 (1994), pp. 223–241.

[30] A. de La Bourdonnaye, *Une méthode de discrétisation microlocale et son application à un problème de diffraction*, Note aux C.R.A.S., t. 318, Série I (1994), pp. 385–388.

[31] A. de La Bourdonnaye, *Convergence de l'approximation par des fonctions oscillantes d'une onde dans la limite des hautes fréquences*, Note aux C.R.A.S., t. 318, Série I (1994), pp. 765–768.

[32] A. de La Bourdonnaye, Cours de DEA, à paraitre

[33] D. Ludwig, *Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies*, Comm. Pure Appl. Math., XX (1967), pp. 103–138.

[34] Y. Meyer, *Ondelettes*, Hermann, Paris, 1990.

[35] Y. Meyer, *Les ondelettes algorithmes et applications*, Armand Colin, Paris, 1992.

[36] J.C. Nédélec, Cours de DEA.

[37] J.C. Nédélec, *L'équation de Helmholtz en dimension 3*, Support de cours à *Propagation d'ondes électromagnétiques*, 2-6 octobre 1989 INRIA.

[38] V. Rokhlin, *Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions*, Journal of Computational Physics, 86 (1990), pp. 414-439.

[39] V. Rokhlin, *Diagonal forms of translation operators for the Helmholtz equation in three dimensions*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 1 (1993), pp. 82–93.

[40] M. Taylor, *Pseudo differential operators*, vol. 34 of Princeton mathematical series, Princeton University Press, Princeton, 1981.

[41] François Treves, *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators : 2*, Plenum, London, 1980.

[42] M. Tolentino and A. de La Bourdonnaye, *Discrétisation d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 en hautes fréquences*, Note aux C.R.A.S., t. 320, Série I (1995), pp. 507–510.

[43] B. Zhou, *Méthode des équation intégrales pour la résolution des problèmes de diffraction à hautes fréquences*, Thèse à l'Université de Paris-Sud, 1995.

Annexe A

CONVERGENCE DE L'APPROXIMATION D'UNE ONDE PAR DES FONCTIONS OSCILLANTES DANS LA LIMITE DES HAUTES FRÉQUENCES

Réalisé avec Armel de La Bourdonnaye*

* CERMICS-INRIA, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France

Cette annexe a été acceptée pour publication à *Third international conference on mathematical aspects of wave propagation phenomena*, SIAM.

A.1 Introduction.

The problem of numerical simulation of high frequency phenomena is not yet solved in a correct manner. Indeed, we face either huge linear algebra problems as with integral equations methods or finite-element methods, or problems with following rays in concavities and grazing rays along geodesics as with asymptotic methods like GTD or physical optics.

In a previous paper, we presented a method for approximating integral equations modeling high frequency scattering which attempted to solve these problems. Indeed, following the idea of microlocalization, we proposed a basis of functions which where locally oscillating in one direction. On one hand we showed that the integral operator is asymptotically well approximated when the frequency grows to infinity, on the other hand, we showed that the computational and storage complexity was lowered from $\mathcal{O}(k^4)$ to $\mathcal{O}(k^2)$ where k is the wave number of the problem.

The goal we follow in this paper is to show that the way we discretize leads to a good approximation of the functions we want to approach which represent waves. In the three following cases,

- planes waves,
- waves with curved surface wave and transverse incidence,
- and grazing waves with no degeneracy of the curvature,

we want to show that in the high frequency limit, it is the ratio degrees of freedom vs. square root of the wavelength which determine the rate of convergence of the approximation. In the case of waves with curved surface, it is the error on the approximation of the geometry which is the most important.

In order to enounce our main result, we set some notations. Let us denote by k the wave number of the phenomenon we want to observe and Γ the boundary of the scatterer. As basis functions, we choose $\Phi_{i,j}(x) = e^{ik\xi_j.(x-x_i)}p_i(x)$, where the points x_i describe the surface Γ and their number in $\mathcal{O}(k)$, the vectors ξ_j describe the sphere S^2 and their number is $\mathcal{O}(k)$. At last, the functions p_i are P1 finite-element functions centered on x_i. The mesh step on Γ is denoted by h_m and the one on the sphere is denoted by h_s. We have the homogeneities :

$$h_m = \frac{1}{\sqrt{kC_m}} \tag{A.1}$$

$$h_s = \frac{1}{\sqrt{kC_s}} \tag{A.2}$$

where C_m and C_s represent the number of degrees of freedom on the surface and on the sphere times the wavelength. Thus we still have $\mathcal{O}(k^2)$ degrees of freedom as for a classical finite-element discretization.

The main result of our paper is in the following theorem.

Theorem A.1.1 *Denoting by f_k the wave function we want to approximate and by $\tilde{f}_k$ its*

projection on the basis of finte elements $\Phi_{i,j}$ *presented above,*

(i) If f_k *is a plane wave,* $\left\| f_k - \tilde{f}_k \right\|_{l^2} < \mathcal{O}\left(\frac{1}{C_m C_s}\right)$,

(ii) If f_k *is a wave with curved surfaces waves and transverse incidence,* $\left\| f_k - \tilde{f}_k \right\|_{l^2} < \mathcal{O}\left(\frac{1}{C_m}\right)$,

(iii) If f_k *is a grazing wave,* $\left\| f_k - \tilde{f}_k \right\|_{l^2} < \mathcal{O}\left(\frac{1}{C_m}\right)$.

The article is organized as follows. In the first section, we present some well-known mathematical results about wave functions. In particular, we recall eikonal equations in the cases of transverse and grazing incidences. In the second section, we establish a preliminary result which allows us to treat separately what comes from the spatial discretization and what comes from the discretization of the sphere of directions in the analysis of the approximation. In the third section, we show the theorem enounced above. At last we present numerical results which allow us to practically evaluate the constants of the methods in order to reach a given precision.

A.2 Some well-known mathematical facts.

In this section, we recall first the asymptotic expression of solutions of the Helmholtz equation for scattering problems in the high frequency limit. We will then give the corresponding eikonal equations. This section aims first to give a formal justification of the choice of the basis function, and second to enounce the pieces of mathematics needed is the proofs of section A.4.

Theory of Fourier-Integral operators (see [40]) says that outside caustics and grazing rays on the boundary Γ, the solution u of the Helmholtz equation is asymptotically equivalent to a locally finite sum of terms like :

$$A(x)e^{ik\phi(x)}$$

where A is the amplitude of the signal and ϕ is its phase. Near caustics and grazing rays, (see [40] or [23]), u has the form

$$e^{ik\theta(x)}(g(x)A(k^{2/3}\rho(x)) + \frac{h(x)}{k^{1/3}}A'(k^{2/3}\rho(x))).$$

Here, $A(z) = Ai(e^{2i\pi/3}z)$ where Ai is the Airy function, g and h are amplitudes and ρ and θ participate to the phase of the signal.

Putting these two forms into the Helmholtz equation, and looking at the term of higher degree in k we classically obtain the eikonal equations :

$$|\nabla\phi|^2 = 1$$

in the case of transverse incidence and

$$\nabla\theta.\nabla\rho = 0$$
$$|\nabla\theta|^2 + \rho|\nabla\rho|^2 = 1$$

for a grazing ray. In both cases the meaning of the eikonal equation is that the group speed of the wave is k. This intuitively justifies the fact that we choose basis functions oscillating we a phase like $k\xi.x$.

A.3 Preliminary results.

In this part, we are going to show a result that we decouple the spatial term and the directional term in the evaluation of the error of approximation. Hence, let F be the function to be projected onto the basis of the $\Phi_{i,j}$. We have $F = \sum_i p_i.F$ and we are looking for a choice of coefficients $\alpha_{i,j}$ minimizing

$$E = \left\| \sum_i p_i (F - \sum_j \alpha_{i,j} e^{ik\xi_j.(x-x_i)}) \right\|_{L^2}^2 .$$

We first show the following lemma.

Lemma A.3.1 *The approximation error E is bounded as follows:*

$$E \leq 3 \sum_i \left\| p_i.(F - \sum_j \alpha_{i,j} e^{ik\xi_j.(x-x_i)}) \right\|_{L^2}^2$$

Proof A.3.1 *Indeed, on each triangle T of the triangulation, only three basis functions p_i are not null. Thus, on each triangle we have:*

$$|\sum_i p_i G|^2 \leq 3 \sum_i |p_i G|^2, \tag{A.3}$$

for any function G. Using $F - \sum_j \alpha_{i,j} e^{ik\xi_j.(x-x_i)}$ for G in the previous equation, and integrating on all the triangles of the mesh, we obtain:

$$\int \left| \sum_i p_i \left(F - \sum_j \alpha_{i,j} e^{ik\xi_j.(x-x_i)} \right) \right|^2 \leq 3 \sum_i \int \left| p_i \left(F - \sum_j \alpha_{i,j} e^{ik\xi_j.(x-x_i)} \right) \right|^2 . \tag{A.4}$$

It is exactly what we wanted to prove. •

This result allows us to investigate only on the error done when discretizing the sphere of directions of propagation. Now, we will use homogeneity to have the support of p_i of size 1. We set

$$x = \frac{\tilde{x} - x_i}{h_m},\ \hat{p}(x) = p_i(h_m x + x_i).$$

Then,

$$\int_{Supp(p_i)} |p_i(\tilde{x})(F(\tilde{x}) - \sum_j \alpha_{i,j} e^{ik\xi_j.(x-x_i)})|^2 d\tilde{x} = \tag{A.5}$$

$$\int \hat{p}(x)^2 |F(h_m x + x_i) - \sum_j \alpha_{i,j} e^{ikh_m \xi_j.x}|^2 h_m^2 dx \tag{A.6}$$

We also set $E_1 = \max_i \min_{\alpha_{i,j}} \int \left| F(h_m x + x_i) - \sum_j \alpha_{i,j} e^{ikh_m \xi_j.x} \right|^2 dx$. Now, we can show the following lemma.

Lemma A.3.2 *With classical regularity conditions on the mesh, the error E is controlled by the error E_1. More precisely, $E = \mathcal{O}(E_1)$ when h_m goes to 0.*

Proof A.3.2 *Indeed, for a surface of a given size, the number of triangles behaves like $\mathcal{O}(h_m^{-2})$. Then, the result is a straightforward consequence of lemma B.3.1 and of the fact that for a regular triangulation, the jacobians coming from the change of variables are uniformely bounded.* •

The last lemma shows that, in order to bound the global error, we just have to control the error on the support of a generic basis function by ajusting the approximation on the directions of propagation.

A.4 Approximation of a wave.

Now, we have all the tools to study the error of approximation we do when we project the waves presented in the first section on our finte-element basis. We are first going to study plane waves, both because the result is a little better in this case than for the others and because the simplicity of the proof in this case has a pedagogical interest. Then, we will study the case of waves with curved surfaces and grazing waves. In each case, we will show that it is the number of degrees of freedom by wavelength which is the good criterion for the convergence rate.

A.4.1 Approximation of a plane wave.

So, let $F(x) = e^{ik\xi.x}$ be a plane wave. Thanks to the previous lemma, we just have to evaluate the quantity E_1 on the support of a basis function p. We have

$$E_1 \leq \int \left| e^{ikh_m \xi.x} (1 - \sum_i \alpha_i e^{ikh_m(\xi_i - \xi).x}) \right|^2 dx. \tag{A.7}$$

We choose the α_i in the following manner :

$$\sum \alpha_i = 1 \text{ and } \sum \alpha_i \xi_i - \xi = \mathcal{O}({h_s}^2)$$

where h_s is the step of discretization of the sphere of directions of propagation. This choice is always eligible. Indeed, we just have to take for the coefficients α_i the barycentric coordinates of the projection of ξ on the mesh made with the directions ξ_i. Then, applying the Taylor formula with integral rest, we have :

$$E \leq h_m^2(\mathcal{O}(kh_m h_s^2)^2 + \int |\int_0^1 (1-t)\sum_i((ikh_m(\xi-\xi_i).x)^2 e^{ikh_m(\xi-\xi_i).tx}dt)|^2 dx) \quad \text{(A.8)}$$

$$\leq \mathcal{O}(k^2(h_m h_s)^4) + \mathcal{O}(k^4 h_m^6 h_s^4) \quad \text{(A.9)}$$

With the relations

$$h_m = \frac{k^{-1/2}}{C_m^{1/2}} \text{ and } h_s = \frac{k^{-1/2}}{C_s^{1/2}}$$

we can state the theorem :

Theorem A.4.1 *With the hypotheses made in this section, taking for F a plane wave and defining the coefficients α_i as above, we have :*

$$||F - F_h||_{L^2} = \mathcal{O}(1/C_m C_s)$$

in the high frequency limit.

Here $C_m C_s$ is the number of degrees of freedom times the square of the wavelength.

A.4.2 Approximation of a wave with curved wave surfaces.

Now, we are looking at functions of the form $F(x) = A(x)e^{ikS(x)}$. As we are still looking for estimations in the high frequency limit and h_m is proportional to the square root of the wavelength, one can suppose that the amplitude $A(x)$ is a constant. Then, we can show the following

Theorem A.4.2 *In the case of waves with curved surfaces and transverse incidences, and with the same hypotheses as for the previous theorem,*

$$||F - F_h||_{L^2} = \mathcal{O}(1/C_m)$$

in the high frequency limit.

Proof A.4.1 *One can proceed as in the previous section and use a Taylor expansion with integral rest. Choosing the coefficients α_i with respect to $\nabla S(0)$ like in the case of plane waves with respect to the direction of propagation ξ (we recall that from eikonal equation, we have $|\nabla S(x)| = 1$), we still have :*

$$E = h_m^2(\mathcal{O}(k^2 h_m^2 h_s^4) + R) \quad \text{(A.10)}$$

where R comes from the integral rest and may be splitted into two parts as follows :

$$R \leq \int \hat{p}(x)^2 |\int_0^1 (1-t)\sum_i((ikh_m(\nabla S(h_m x) - \xi_i).x)^2 e^{ikh_m(\xi-\xi_i).tx}dt)|^2 dx \quad \text{(A.11)}$$

$$+ \int \hat{p}(x)^2 |\int_0^1 (1-t)\sum_i (ikh_m^2 S''(h_m x)(x,x)e^{ikh_m(\xi-\xi_i).tx}dt)|^2 dx \quad \text{(A.12)}$$

$k^4 h_m^4 max(h_m, h_s)^4$ and the second by $k^2 h_m^4$. •

A.4.3 Approximation of a grazing wave.

In this case the asymptotic is different. As recalled previously, one has to use Airy functions (see [33] or [40]). More precisely, the wave function has the form :

$$\left(g(x)A(k^{2/3}\rho(x)) + \frac{h(x)}{k^{1/3}}A'(\rho(x)) \right) e^{ik\theta(x)}. \tag{A.13}$$

Here, the functions ρ, θ satisfy the eikonal sytem :

$$\nabla\theta.\nabla\rho = 0 \text{ et } |\nabla\theta|^2 + \rho|\nabla\rho|^2 = 1. \tag{A.14}$$

We are going to show the following theorem.

Theorem A.4.3 *In the case of grazing waves, and with the same hypotheses as for the previous theorem,*

$$||F - F_h||_{L^2} = \mathcal{O}(1/C_m)$$

in the high frequency limit.

Proof A.4.2 *Now , we are going to proceed as in previous sections. We try to minimize in the high frequency limit the following quantity :*

$$E = \int |A(k^{2/3}\rho(h_m x))e^{ik\theta(h_m x)} - \sum \alpha_i e^{ikh_m \xi_i.x}|^2 dx. \tag{A.15}$$

The work for the quantity with A' is the same. We still use the same Taylor expansion.

At order 0 in k, we have :

$$A(k^{2/3}\rho(0))e^{ik\theta(0)} - \sum \alpha_i.$$

We choose the coefficients α_i so that this term is null.

At order 1, we have :

$$ikh_m(\sum \alpha_i)(\nabla\theta(0) - \sqrt{\rho(0)}\nabla\rho(0) - \frac{\sum \alpha_i\xi_i}{\sum \alpha_i}$$

using the fact that we have nullified the 0-order term. With the eikonal system, the vector

$$\nabla\theta(0) - \sqrt{\rho(0)}\nabla\rho(0)$$

is a unitary one and we can again choose the coefficients α_i so that

$$\nabla\theta(0) - \sqrt{\rho(0)}\nabla\rho(0) - \frac{\sum \alpha_i\xi_i}{\sum \alpha_i} = \mathcal{O}(h_s^2).$$

The 2-order term which comes from the integral rest is splitted into to terms, like in the case of curved waves. On one hand, we have a term behaving like $(kh_m h_s)^4$ which is the square of the 1-order term, and on the other hand, we have the term which in

$$(kh_m^2(\sqrt{\rho}\rho'' + \theta''))^2.$$

Finally, our result in the same as in the previous section :

$$||F - F_h||_{L^2} = \mathcal{O}(1/C_m)$$

in the high frequency limit. •

A.5 Numerical results.

In this section, we only treat the case of planes waves and will only check numerically the correctness of THEOREM A.4.1 and A.4.3 which is to show how good our basis functions $\Phi_{i,j}(x) = p_i(x)\, e^{ik\xi_j\cdot(x-x_i)}$ can approach these kinds of waves in high frequency limit.
We recall that points x_i describe the boundary of the scattered Γ while vectors ξ_j describe the unity sphere. Because of its simplicity, the object we are considering here is a ball with a radius of 1 m. The surface Γ is therefore a sphere with the same radius. The mesh putted on this surface has 38 nodes and 72 triangles, and the mesh of the second unity sphere for directions ξ_j also involves 38 nodes. This last choice was obviously planned and based on [29]. We immediatly have that the number of degrees of freedom is 1444. It is easy to see that the domain of frequency is not very high and high frequency will then mean, for these meshes, a wave number k belonging to $[15m^{-1}\,,\, 20m^{-1}]$.
We represent on Fig.1 the relative error e_1 of $||\,F - F_h\,||_{L^2}$ as a function of the wave number k. The same meshes, mentionned above, are used for each k. As it was expected, the error e_1 increases with the wave number k. Futhermore, one can notice the good accuracy and therefore see a good agreement with the way we discretise for a wave number k lower than $25m^{-1}$.
Let ε be the error of approximation we make on $||\,F - F_h\,||_{L^2}$. We plot on Fig.2 $Log(\,\varepsilon\,)$. On this figure, we see that the actual rate of approximation is even better then expected.

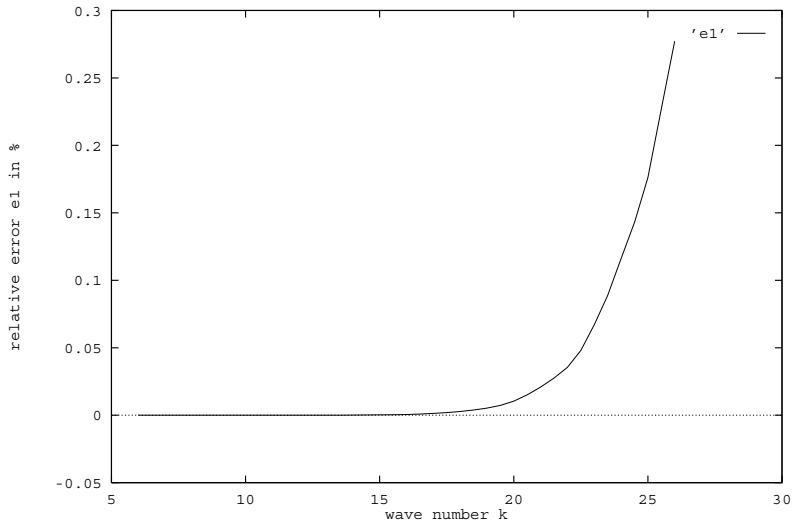


FIG. A.1: *relative error*

A.6 Conclusion.

We have shown here that the basis we proposed in [28] leads to a good L^2 approximation of the high frequency asymptotic forms of the wave equation. Indeed, these results

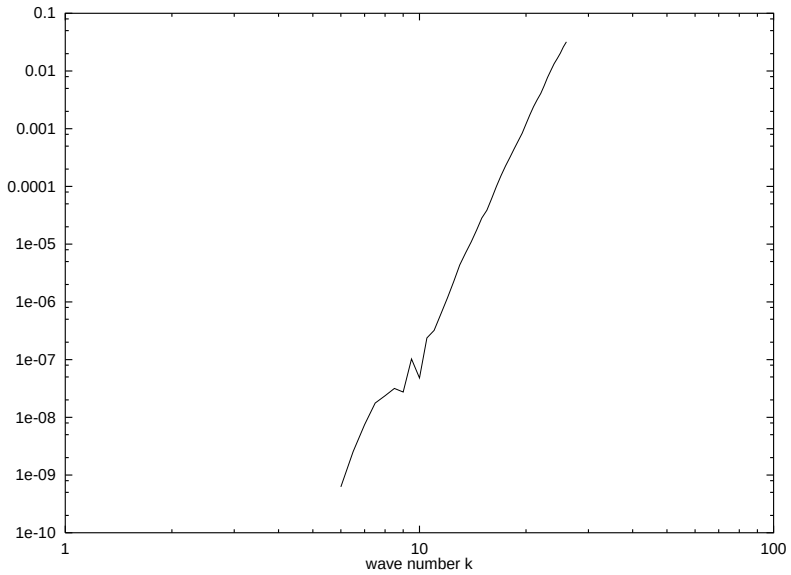


FIG. A.2: $Log(\varepsilon)$

show that, when we increase the number of degrees of freedom by wavelength, the error is decreasing. The right density is to be determined by experimental tests. Futhermore, we have shown that, for a wave, it is not necessary to use more than three coefficients for each spatial degree of freedom to have a good approximation.

Annexe B

APPROXIMATION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE DIFFRACTION INCLUANT DES OPÉRATEURS FOURIER-INTÉGRAUX

Réalisé avec Armel de La Bourdonnaye*

* CERMICS-INRIA, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France

Cette annexe est parue sous la forme d'un rapport de recherche CERMICS ($N°95-36$), acceptée pour publication à *Mathematicals Models and Methods in Applied Science*.

B.1 Introduction

High frequency scattering problems are generally hard to simulate for many reasons. In this paper, we will focus on finite element methods in frequency domain. One of these reasons is that the linear systems which are involved are very large. Indeed, the mesh step has to be a portion of the wave length λ of the simulated phenomenon. This means $\mathcal{O}(\lambda^{-n})$ degrees of freedom where n is the dimension of the ambient space. Furthermore, in the case of pseudo-differential or Fourier-integral operators, the interaction is not local and each basis function interacts with each other. Thus, the number of coefficients to be computed is $\mathcal{O}(\lambda^{-2n})$. It is also the case when one uses integral equations for acoustics of electromagnetism.

First, we are going to present a few situations where pseudo-differential or Fourier-integral operators occur. The first case is the wave equation one, when the sound speed depends both on the geometric point (the material is not homogeneous) and on the direction of propagation of the wave (the material is not isotropic). For instance, this occurs in composite material. The equation then writes :

$$\partial_t^2 u + \int e^{ix.\xi} a(x, \frac{\xi}{|\xi|})|\xi|^2 \hat{u} d\xi = f. \tag{B.1}$$

In frequency domain it becomes :

$$-\int e^{ix.\xi}(\omega^2 - a(x, \frac{\xi}{|\xi|})|\xi|^2)\hat{u} d\xi = f \tag{B.2}$$

where we have kept the same notations for the functions and their Fourier transforms with respect to time, and ω is the pulsation at which we observe the scattering. The second case comes from the same idea, but we suppose that the medium is dispersive. Hence the equation becomes :

$$-\int e^{i(x.\xi - \phi(\xi))}(\omega^2 - a(x, \frac{\xi}{|\xi|})|\xi|^2)\hat{u} d\xi = f \tag{B.3}$$

These two situations are the ones we are going to investigate in this paper. The first case corresponds to pseudo-differential operators and the second to Fourier integral operators. We could also add the case of integral equations coming from harmonic acoustics or electromagnetism, since they also involve oscillating term or the Lipmann-Schwinger equation, especially when the term modelling the material oscillates with a characteristic step which is similar to the wave length.

At least in the case of integral equations, many works have already been done. V. Rokhlin presented in [38] a method based on the decomposition into Hankel and Bessel functions and on the use of addition formulae for the 2-D case. In [39] he presented the extension of the former method to the 3-D case, but in fact it happens that this paper has an error which makes the method as costly as the classical finite element discretization and thus of no use. In [11] F.X. Canning presented for the 2-D case, a method based on the discrete Fourier transform of packets of basis functions, and thus of packets of matrix coefficients. It happened in this case that lots of transformed coefficients where small. For

the 3-D case, it seems not so easy to implement the same method since, it was based on FFT which exist for segments but not for general 2D patches. But at least this method saves memory if not CPU time. In [29], the first author of this paper presented a method which is based on a discrete microlocalization of the functions which was leading to sparse matrices. We also mention the paper of B. Bradie, R. Coifman and A. Grossmann (see [10]) which deals with the oscillatory terms of acoustic integral equations. In this paper, they use local cosine transforms following basically the same idea as F.X. Canning. Our aim is here to extend the method proposed in [29] and [42] to the case of more general oscillatory integrals such as the ones presented above.

In section B.2 we precisely set the problems we want to solve. In section B.3, we present a discretization of the space of solutions we are looking for, thanks to an eikonal equation. In section B.4, we evaluate the interaction coefficients between the basis functions, and show that most of them can be negected. In the last section, we evaluate the algorithmic and storage complexity.

B.2 Setting of the problems

Following what has been presented in the introduction, we will address two problems. The first one, which involves pseudo-differential operators is :

Let X be a regular bounded open set of $\mathbb{R}^n$. Given an elliptic pseudo-differential operator P of order one, we want to compute

$$Pu(x) = \int p(x,\xi) e^{ix.\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \tag{B.4}$$

when

$$i\partial_t u - Pu = f \tag{B.5}$$

and f is oscillating at a given pulsation ω. Here, we consider first order problems instead of second order ones in the introduction for the sake of clearness, but it is well-known that one can always transform a higher order equation into a system of order one (see for instance [40]). The ellipticity of the operator which is the positivity of the principal symbol precisely means that the speed of propagation of the signal is always strictly positive.

The second problem involves Fourier-integral operators. Let X and Y be regular bounded open sets of $\mathbb{R}^n$. Given such an operator P of order one, we want to compute

$$Pu(x) = \int p(x,y,\xi) e^{i\phi(x,y,\xi)} u(y) d\xi dy \tag{B.6}$$

when

$$i\partial_t \int e^{i\phi(x,y,\xi)} u(y) dy d\xi - Pu = f \tag{B.7}$$

and f is oscillating at a given pulsation ω. Here, p is the amplitude of the operator and ϕ its phase. We impose ϕ and p to be 1-homogeneous in ξ. This corresponds to a material

which has a dispersion varying linearly with the frequency. It is often a correct assumption when a signal has its spectrum localized in frequency. We also impose the ellipticity of the operator which has the same meaning as in the previous case. Of course, the phase ϕ satisfies to usual property of non-degeneracy (see [41]) which is :
When $\partial_\xi \phi = 0$, the differential forms $d\partial\xi_i\phi$ are lineary independent, where the ξ_j are the coordinates of ξ.

B.3 Discretization

In this section, we will see that, using an eikonal equation coming from the fact that we observe a signal oscillation at pulsation ω, we are able to present a discretization of the functions we are looking for. The first point is to use a variational principle as in all finite element methods. Then, thanks to the eikonal equation and the ellipticity, we will obtain a finite manifold to discretize. We begin with the case of pseudo-differential operators which is the simpler.

B.3.1 Pseudo-differential operators

In the case of problem (B.4-B.5), we first recall that u satisfies

$$u(x) = \int a(x,\xi) e^{i\omega\psi(x,\xi)} d\xi \tag{B.8}$$

for given amplitude a and phase ψ. Hence, it is easy to check (see for instance [40]) by expanding (B.5) in decreasing powers of the pulsation ω, that, on the support of $a(x,\xi)$, for $(x,\xi) \in T^\star X$ satisfying $\nabla_\xi \psi = 0$,

$$1 = p_1(x, \nabla_x \psi(x,\xi)) \tag{B.9}$$

where p_1 is the principal symbol of the pseudo-differential operator P. This last equation is the eikonal equation. We denote by Λ_ψ the lagrangian manifold associated with ψ :

$$\Lambda_\psi = \{(x, \nabla_x \psi(x,\xi)) \in T^\star X, \nabla_\xi \psi(x,\xi) = 0\} \tag{B.10}$$

and we define

$$T^\star X_\alpha = \{(x,\xi) \in T^\star X, \alpha = p_1(x,\xi)\} . \tag{B.11}$$

To represent the function u, we want to discretize the part of its wavefront which is in the neighborhood of $T^\star X_1$, and combine local oscillatory terms like $e^{ix.\xi}$. In order to do that, we first prove the

Theorem B.3.1 *the manifold $T^\star X_1$ is a bounded manifold if X is.*

Proof B.3.1 *Indeed, since the pseudo-differential operator P is elliptic, its principal symbol p_1 is coercive which means that there exists a strictly positive constant α such that*

$$|p_1(x,\xi)| \geq \alpha |\xi|. \tag{B.12}$$

Thus, if (x,ξ) is in $T^\star X_1$, we have

$$1 \geq \alpha|\xi| \tag{B.13}$$

and so

$$T^\star X_1 \subset X \times B(O, \frac{1}{\alpha}) \tag{B.14}$$

where $B(O,r)$ stands for the ball centered at origin with radius r. This ends the proof.

The consequence of this theorem is that we are able to discretize $T^\star X_1$ with a finite number of degrees of freedom. More precisely, we will discretize a tubular neighborhood $\mathcal{N}$ of it in $T^\star X$ with a thickness of $\mathcal{O}(\omega^{-1/2})$. Now, we precise the way to discretize this manifold.

- We discretize X with a mesh step $h_X = \mathcal{O}(\omega^{-1/2})$, creating $\mathcal{O}(\omega^{\frac{n}{2}})$ points x_i.
- We discretize each fiber with a mesh step $h_F = \mathcal{O}(\omega^{-1/2})$, creating $\mathcal{O}(\omega^{\frac{n-1}{2}})$ directions ξ_j.
- We mesh $T^\star X_1$ with the relevant couples (x_i, ξ_j), thus having $\mathcal{O}(\omega^{n-1/2})$ degrees of freedom.

The next point is to present the basis of functions we will use to approximate the functions satisfying (B.8). First, we use the P1-Lagrange (see for instance [14]) basis functions on the mesh presented above. We denote them by $p_{ij}(x,\xi)$ where $p_{ij}(x,\xi) = 1$ when $(x,\xi) = (x_i,\xi_j)$ and $p_{ij}(x,\xi) = 0$ on the other points of the mesh. Then our basis functions will be :

$$q_{ij}(x) = \int p_{ij}(x,\xi) e^{i\omega(x-x_i).\xi} d\xi \tag{B.15}$$

Intuitively, integrating a Fourier integral distribution which satisfies the eikonal equation against q_{ij} means microlocalizing the distribution around (x_i,ξ_j).

Now, we are going to prove that the basis exhibited above is sufficient to represent the asymptotic behavior of the functions we are looking for. We want to find coefficients α_{ij} which minimize

$$E = \int \left| u(x) - \sum_{i,j} \alpha_{ij} q_{ij}(x) \right|^2 dx \tag{B.16}$$

The first point is the following. We make a change of variables such that the manifold

$$\Sigma_\psi = \{(x,\xi), \nabla_\xi \psi(x,\xi) = 0\} \tag{B.17}$$

is mapped to the manifold Λ_ψ which is the wavefront of u. We call x,η the new variables, and for (x,ξ) in Σ_ψ,

$$\eta = \nabla_x \psi(x,\xi). \tag{B.18}$$

Thus, if we denote, $\tilde{\psi}(x,\eta) = \psi(x,\xi)$, we have the implication

$$\left[\nabla_\eta \tilde{\psi}(x,\eta) = 0\right] \Rightarrow \left[\eta = \nabla_x \tilde{\psi}(x,\eta)\right] \tag{B.19}$$

In the high frequency limit, due to the eikonal equation, we just have to take into account the (x,η) which are in the neighborhood of the wavefront of u which is included into the manifold $\mathcal{N}$. Since the function

$$\chi(x,\eta) = \sum_{ij} p_{ij}(x,\eta) \tag{B.20}$$

is a cut-off function around $\mathcal{N}$, in the high frequency limit, we have that

$$E \sim \int \left| \int \sum_{ij} p_{ij}(x,\eta)\tilde{a}(x,\eta)e^{ik\tilde{\psi}(x,\eta)}d\eta - \sum_{ij} \alpha_{ij}p_{ij}(x,\eta)e^{ik(x-x_i).\eta}d\eta \right|^2 dx. \tag{B.21}$$

The symbol $\tilde{a}$ comes from the symbol a after the change of variables, it includes the jacobian of the transformation. Then, we have

Proposition B.3.1

$$E \leq \int \left| \sum_{ij} p_{ij}(x,\eta) \left(\tilde{a}(x,\eta)e^{ik\tilde{\psi}(x,\eta)} - \alpha_{ij}e^{ik(x-x_i).\eta} \right) \right|^2 d\eta dx \tag{B.22}$$

since, thanks to eikonal equation η is in a bounded domain.

Next, we show the following lemma.

Lemma B.3.1 *Let $G(x,\eta)$ be a function, then,*

$$|\sum_{ij} p_{ij}G|^2 \leq (2n+1)\sum_{ij} |p_{ij}G|^2 \tag{B.23}$$

where n is the dimension of the manifold X.

Proof B.3.2 *Indeed, on each simplex of the mesh, we have exactly $2n+1$ functions p_{ij} which are not null. Thus, a simple discrete version of Cauchy-Schwartz theorem leads to the result.*

Before using this lemma, we make the following remark. Since if

$$\Lambda_\psi \cap Supp(p_{ij}) = \emptyset, \tag{B.24}$$

the integral giving u on this set is fastly decreasing, then we can take $\alpha_{ij} = 0$ for such a 2-index.

On the other case, the phase in u is stationary and thus, in $Supp(p_{ij})$,

$$\tilde{\psi}(x,\eta) = Cte + \eta.(x - x_i) + \mathcal{O}(\omega^{-1}). \tag{B.25}$$

Indeed, since the phase is stationary, we can develop it around ξ, η. The η derivative is null, the x derivative is η and the higher order terms are $\mathcal{O}(\omega^{-1})$, since the mesh step is $\mathcal{O}(\omega^{-1/2})$. Thus, we can prove

Proposition B.3.2

$$E \leq (2n+1) \sum_{(ij),\Lambda \cap Supp(p_{ij}) \neq \emptyset} \int_{supp(p_{ij})} |b(x,\eta) - \alpha_{ij}|^2 \, dx d\eta \tag{B.26}$$

The symbol b comes from $\tilde{a}$ by combination of the constant and $\mathcal{O}(\omega^{-1})$ terms in equation (B.25), since, multiplied by ω, these two terms cannot be considered as oscillatory ones.

Proof B.3.3 *Indeed, since we have thrown out the supports which do not intersect the wave front of u, we are left, for the u part of the error E, with*

$$b(x,\eta) e^{i\omega(x-x_i).\eta}. \tag{B.27}$$

Factorizing the oscillatory part, which is of module 1, and using lemma B.3.1, we have the result since the functions p_{ij} are bounded by 1.

Now we can enounce the final result of this part.

Theorem B.3.2 *For a function u satisfying (B.8) and eikonal equation (B.9), if the mesh step h satisfies*

$$h = \frac{1}{C\omega^{1/2}}, \tag{B.28}$$

then, denoting by u_h the projection of u on the basis of the functions $q_{ij}(x)$, we have

$$||u - u_h||_{L_2} = \mathcal{O}(1/C)||u||_{L_2}. \tag{B.29}$$

The constant C represents the number of degrees of freedom by wave length in the physical space X.

Proof B.3.4 *We are going to choose the coefficient α_{ij} such to minimize*

$$\int_{supp(p_{ij})} |b(x,\eta) - \alpha_{ij}|^2 \, dx d\eta \tag{B.30}$$

We proceed to the following change of variables:

$$y = x.\sqrt{\omega},\ \zeta = \eta.\sqrt{\omega}. \tag{B.31}$$

Thus, the new mesh step is $1/C$ and the jacobian is $1/\omega$. If we choose α_{ij} to be the mean value of b on the support of integration, we have that,

$$\int_{supp(p_{ij})} |b(x,\eta) - \alpha_{ij}|^2 \, dx d\eta = \mathcal{O}(1/C^2) \int_{supp(p_{ij})} |b(x,\eta)|^2 \, dx d\eta. \tag{B.32}$$

since $\tilde{b}(y,\zeta) = b(x,\eta)$ as a gradient proportional to $\tilde{b}$.

The meaning of this theorem is that, as classically done when approximating oscillatory functions, for a given requested accuracy of approximation, we only need a bounded number of degrees of freedom by wave length in the space manifold X. By this, we mean that the number of degrees of freedom is a constant times ω^n, when n is the dimension of X.

B.3.2 Fourier-integral operators

For Fourier-integral operators, as in (B.6-B.7), the situation is more complex than in previous section since these operators transform the wavefront of the functions to which they are applied. Thus we are in a "Petrov-Galerkin" situation where the searched functions are of one type and the test functions of another one. More precisely, as in previous section, we can take the function u of problem (B.6-B.7), as a locally finite sum of functions like

$$u(x) = \int a(x,\xi) e^{i\omega\psi(x,\xi)} d\xi. \tag{B.33}$$

Now, the problem is to compute Pu where P is the Fourier-integral operator. We will use a variational technique. It means that we want to compute $< Pu, v >$ where $< , >$ stands for the hermitian product, for all v in a class of functions which is similar to u. Namely, we want to compute $< Pu, v >$, taking into account the equation

$$i\partial_t < \int e^{i\phi} u, v > - < Pu, v > = < f, v > \tag{B.34}$$

at frequency ω for all u satisfying

$$u(x) = \int a(x,\xi) e^{i\omega\psi(x,\xi)} d\xi \tag{B.35}$$

and all v satisfying

$$v(x) = \int b(x,\eta) e^{i\omega\theta(x,\eta)} d\eta, \tag{B.36}$$

where I_ϕ is the Fourier integral operator of amplitude 1 and phase ϕ. The next point is to write something equivalent to the eikonal equation. In fact, the equation will involve both u and v together. It writes :

$$\omega = p_1(x, y, \nabla_x\theta(x,\eta), -\nabla_y\psi(y,\xi)) \tag{B.37}$$

for

$$\begin{cases} \nabla_\eta\theta(x,\eta) = 0 \\ \nabla_\xi\psi(y,\xi) = 0 \end{cases} \tag{B.38}$$

and

$$(x, y, \nabla_x\theta(x,\eta), -\nabla_y\psi(y,\xi)) \in \Lambda_\phi. \tag{B.39}$$

where p_1 is the principal symbol of the operator as defined in [24]. Let us recall that p_1 is defined on the neighborhood of the wavefront of the operator which is a lagrangian manifold of $T^\star(X \times Y)$ which we often replace by $T^\star X \times T^\star Y$.

As before, we define

$$(\Lambda_\phi)_\alpha = \{(x, y, \eta, \xi) \in \Lambda_\phi, p_1(x, y, \eta, \xi) = \alpha\}. \tag{B.40}$$

We have the theorem :

Theorem B.3.3 *the manifold $(\Lambda_\phi)_1$ is a bounded manifold if X and Y are.*

Proof B.3.5 *Indeed, thanks to the assumed ellipticity of the operator, the principal symbol is coercive. Thus, as in previous section,*

$$[(x,y,\eta,\xi) \in (\Lambda_\phi)_1] \Rightarrow \left[\sqrt{|\xi|^2+|\eta|^2} \leq \frac{1}{\alpha_c}\right] \tag{B.41}$$

where α_c is the constant of coercivity of the principal symbol of the operator. So,

$$(\Lambda_\phi)_1 \subset X \times B(0,\frac{1}{\alpha_c}) \times Y \times B(0,\frac{1}{\alpha_c}). \tag{B.42}$$

This ends the proof of the theorem.

As for pseudo-differential operators, this theorem implies that we can use a finite number of degrees of freedom to discretize our functions u and v.

Precisely, let $\mathcal{N}$ be a tubular neighborhood of the manifold $(\Lambda_\phi)_1$ in $T^\star X \times T^\star Y$ of thickness $\omega^{-1/2}$.

- We discretize the basis of $\mathcal{N}$ considered as a fiber bundle over $X \times Y$ with a mesh step $h_{XY} = \mathcal{O}(\omega^{-1/2})$, creating $\mathcal{O}(\omega^{\frac{n}{2}})$ couples $(x_\alpha,\ y_i)$.
- We discretize the fiber above each $(x_\alpha,\ y_i)$ with a mesh step $h_F = \mathcal{O}(\omega^{-1/2})$ by couples of directions (η_β, ξ_j), creating $\mathcal{O}(\omega^{\frac{n-1}{2}})$ directions η_β and $\mathcal{O}(\omega^{\frac{n-1}{2}})$ directions ξ_j.
- We mesh the subsets of $T^\star X$ and $T^\star Y$ with the relevant couples (x_α, η_β) and (y_i, ξ_j), thus having $\mathcal{O}(\omega^{n-1/2})$ degrees of freedom in $T^\star X$ and $\mathcal{O}(\omega^{n-1/2})$ degrees of freedom in $T^\star Y$.

Now, we define the functions $p_{\alpha\beta}(x,\eta)$ as in the previous section for $T^\star X$ and p_{ij} in the same manner. Finally we have,

$$\left\{\begin{array}{l} q_{\alpha\beta}(x) = \displaystyle\int p_{\alpha\beta}(x,\eta) e^{i\omega(x-x_\alpha).\eta} d\eta \\ q_{ij}(y) = \displaystyle\int p_{ij}(y,\xi) e^{i\omega(y-y_i).\xi} d\xi \end{array}\right. \tag{B.43}$$

The basis of functions $q_{\alpha\beta}$ will be used to approximate the functions v, and the basis of q_{ij} will be used to approximate the functions u. Since the functions u and v are not in the same class the result of approximation cannot be of the same kind as for pseudo-differential operators. For Fourier integral operators, we will try to estimate the quantity

$$E = |< I_\phi(u-u_h), v-v_h >| \tag{B.44}$$

where u_h and v_h are the projections of u and v on the bases q_{ij} and $q_{\alpha\beta}$ and I_ϕ is the Fourier integral operator of amplitude 1 and phase ϕ which is the phase of the operator P. We make two comments about this operator.

- First, in the case of pseudo-differential operators, the phase ϕ was $(x-y).\xi$. Thus the corresponding error E would have just been the modulus of the inner product $< u-u_h, v-v_h >$.

– Second, I_ϕ just transports the symbol of u from the wavefront of u to the wavefront of v, thus the error E is something like the error of approximation of the symbols.

Now, we will use the same machinery as for the pseudo-differential operators. We want to find coefficients δ_{ij} and $\delta_{\alpha\beta}$ which minimize

$$E = \left| \int e^{i\phi(x,y,\zeta)} \left[u(y) - \sum_{ij} \delta_{ij} q_{ij}(y) \right] . \left[v(x) - \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}(x) \right] dxdyd\zeta \right| \tag{B.45}$$

As previously, we make a change of variables which maps Σ_ϕ to Λ_ϕ, Σ_ψ to Λ_ψ and Σ_θ to Λ_θ. For the sake of simplicity, we keep the same notations for the new amplitudes, phases and variables. In the high frequency limit, we can limit ourselves to take into account only the variables x, y, η, ξ which are in the neighborhood of the wavefront of the operator. Since the function

$$\chi(x, y, \eta, \xi) = \sum p_{ij}(y, \xi) p_{\alpha\beta}(x, \eta) \tag{B.46}$$

is a cut-off around this wavefront, in the high frequency limit, we have that

$$\begin{aligned} E \sim \left| \int e^{i\phi(x,y,\zeta)} \left[\sum_{ij} p_{ij}(y,\xi) \left(a(y,\xi) e^{i\omega\psi(y,\xi)} - \delta_{ij} e^{i\omega(y-y_i).\xi} \right) \right] . \right. \\ \left. \left[\sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}(x,\eta) \left(a(x,\eta) e^{i\omega\theta(x,\eta)} - \delta_{\alpha\beta} e^{i\omega(x-x_\alpha).\eta} \right) \right] \right| \end{aligned} \tag{B.47}$$

Then, we remark that if the set $S_{\alpha\beta ij} = Supp(p_{\alpha\beta} \otimes p_{ij})$ satisfies

$$S_{\alpha\beta ij} \cap (\Lambda_\theta \times \Lambda_\psi) = \emptyset, \tag{B.48}$$

then, the terms coming from u and v in this microlocal set are rapidly decreasing and thus, we can choose the corresponding coefficients δ_{ij} and $\delta_{\alpha\beta}$ to be null in this case.

Now, we have the

Proposition B.3.3

$$\begin{aligned} E \leq \; C_1 \sum_{\substack{ij,\alpha\beta \\ S_{\alpha\beta ij} \cap \Lambda_\theta \times \Lambda_\psi \neq \emptyset}} \int & \left| p_{ij}(y,\xi)(a(y,\xi) - \delta_{ij}) \right| . \\ & \left| p_{\alpha\beta}(x,\eta)(b(x,\eta) - \delta_{\alpha\beta}) \right| dxdyd\eta d\xi \end{aligned} \tag{B.49}$$

where C_1 is a constant which depends only on the dimension of the manifolds X and Y.

Proof B.3.6 *Indeed, we use the same trick as in lemma B.3.1, and the Cauchy-Schwartz theorem (since, thanks to ellipticity and eikonal equation, variables ξ and η vary in a bounded domain) to obtain that*

$$\begin{aligned} E \leq \; C_1 \sum \int & \left| p_{ij}(y,\xi)(a(y,\xi) e^{i\omega\psi(y,\xi)} - \delta_{ij} e^{i\omega(y-y_j).\xi}) \right| . \\ & \left| p_{\alpha\beta}(x,\eta)(b(x,\eta) e^{-i\omega\theta(x,\eta)} - \delta_{\alpha\beta} e^{-i\omega(x-x_\alpha).\eta}) \right| dxdyd\eta d\xi. \end{aligned} \tag{B.50}$$

Now, we develop the phases around x_α and y_i. We have, in the microlocal supports,

$$\psi(y,\xi) = Cte + \xi.(y-y_i) + \mathcal{O}(\omega^{-1}), \quad (B.51)$$
$$\theta(x,\eta) = Cte + \eta.(x-x_\alpha) + \mathcal{O}(\omega^{-1}). \quad (B.52)$$

So the $\mathcal{O}(\omega^{-1})$ terms are not oscillatory in the spread of the microlocal supports and are joined to the symbols. Then we are left with oscillatory terms which we can factorize as

$$e^{i\phi}e^{-i\omega(x-x_\alpha).\eta}e^{i\omega(y-y_i).\xi} \quad (B.53)$$

and thus transformed to 1 *by taking the modulus.*

At last, we can enounce the final theorem of this part.

Theorem B.3.4 *For u and v satisfying*

$$u(y) = \int a(y,\xi)e^{i\omega\psi(y,\xi)}d\xi \quad (B.54)$$
$$v(x) = \int b(x,\eta)e^{i\omega\theta(x,\eta)}d\eta \quad (B.55)$$

and the eikonal equation (B.37) if the mesh steps on $T^\star X$, $T^\star Y$ satisfy

$$h_X = \frac{1}{C_X\omega^{1/2}} \quad (B.56)$$
$$h_Y = \frac{1}{C_Y\omega^{1/2}} \quad (B.57)$$

Then, the error is bounded in the following way.

$$E \leq \mathcal{O}(\frac{1}{C_XC_Y})||u||_{L^2(Y)}||v||_{L^2(X)}. \quad (B.58)$$

Proof B.3.7 *As for pseudo-differential operators, we have just to choose the coefficients δ as the mean values of v in the support of $p_{\alpha\beta}$ and of u in the support of p_{ij} to obtain the result.*

We can notice that this result is just the same as the result for pseudo-differential operators when we replace the Fourier integral operator by the former class.

B.4 Approximation

In the previous part we presented the way we discretize functions satisfying the pseudo-differential problem (B.4-B.5) or the Fourier integral one (B.6-B.7). Now, we are going to explain how we calculate Pu in the first case or $< Pu, v >$ in the second case. We begin with the classical variational technique for finite element which is :
Suppose $u_h = \sum \alpha_{i'j'}q_{i'j'}$, then for each q_{ij} we have to compute

$$\sum \alpha_{i'j'} < Pq_{i'j'}, q_{ij} > . \quad (B.59)$$

which leads to the linear algebra computation $\mathcal{P}\alpha$ where $\mathcal{P}$ is the matrix defined by

$$\mathcal{P}_{ij,i'j'} =< Pq_{i'j'}, q_{ij} > \tag{B.60}$$

and α is the vector formed by the coefficients $\alpha_{i'j'}$. For Fourier integral operators, we will compute

$$\sum < Pq_{ij}, q_{\alpha\beta} > \delta_{ij} \tag{B.61}$$

leading to the linear algebra computation $\mathcal{P}\delta$ where $\mathcal{P}$ is the matrix defined by

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta,ij} =< Pq_{ij}, q_{\alpha\beta} > \tag{B.62}$$

and δ is the vector formed by the coefficients δ_{ij}. The complexity of the computation is at least $\mathcal{O}(\omega^{2n-1})$ for the computation of the matrix. We will present in the following sections a way to approximate these matrices which will decrease the complexity with a controlled error.

B.4.1 Pseudo-differential operators

We begin by studying the case of pseudo-differential operators. We will compute and evaluate the coefficients

$$a_{ij,i'j'} = \int p(x,\zeta)e^{i(x-y).\zeta}p_{ij}(x,\eta)p_{i'j'}(y,\xi)e^{-i\omega(x-x_i).\eta}e^{i\omega(y-x_{i'}).\xi}dxdyd\eta d\xi d\zeta \tag{B.63}$$

which corresponds to the interaction between basis functions and which form the matrix approximating the pseudo-differential operator in our space of approximation. We enounce the following theorem which we will prove in the sequel.

Theorem B.4.1 *In the evaluation of the coefficients $a_{ij,i'j'}$ of formula (B.63), we distinguish three cases :*

(i) If $i \neq i'$, then the coefficient $a_{ij,i'j'}$ is rapidly decreasing when ω goes to infinity.

(ii) Else, if $d(Supp(p_{ij}), Supp(p_{i'j'})) = \mathcal{O}(\omega^{-1/2})$, then

$$a_{ij,i'j'} = \mathcal{O}(\frac{1}{\omega^{3n/2-1}}). \tag{B.64}$$

(iii) Else,

$$a_{ij,i'j'} = \mathcal{O}(\frac{1}{\omega^{2n-1/2}}). \tag{B.65}$$

Proof B.4.1 *We begin with the change of variables*

$$\begin{cases} \omega\tilde{\zeta} = \zeta, \\ \tilde{x} = \sqrt{\omega}(x - x_i), \\ \tilde{y} = \sqrt{\omega}(y - x_{i'}). \end{cases} \tag{B.66}$$

Thus,

$$a_{ij,i'j'} = \int p(x,\omega\tilde{\zeta}) e^{i\omega(x_i - x_{i'}).\tilde{\zeta} + i\sqrt{\omega}(\tilde{x}-\tilde{y})\tilde{\zeta} + i\sqrt{\omega}(-\tilde{x}.\eta + \tilde{y}.\xi)} \tilde{p}_{ij}(\tilde{x},\eta)\tilde{p}_{i'j'}(\tilde{y},\xi) d\tilde{x}d\tilde{y}d\eta d\xi d\tilde{\zeta} \tag{B.67}$$

For point (i), denoting by $\mathcal{L}$ the operator

$$\mathcal{L} = \frac{-i(x_i - x_{i'}).\nabla_{\tilde{\zeta}}}{|x_i - x_i'|^2}, \tag{B.68}$$

we can integrate by part with respect to $\mathcal{L}$ an infinite number of times since the operator $\mathcal{L}$ applied to the oscillatory part of the integrand is equivalent to ω times identity. Thus, $a_{ij,i'j'}$ is decreasing faster than any power of $\frac{1}{\omega}$ when $\omega \to \infty$. In the other cases, using the fact that the phase is stationary in the variables $\tilde{\zeta}$ and $\tilde{x}$ for $\tilde{x} = \tilde{y}$ and $\tilde{\zeta} = -\eta$, we have that

$$a_{ij,i'j'} \sim \left(\frac{1}{\omega^{1/2}}\right)^n \int p(x,\omega\tilde{\zeta}) e^{i\sqrt{\omega}\tilde{y}.(\xi-\eta)} \tilde{p}_{ij}(\tilde{y},\eta)\tilde{p}_{i'j'}(\tilde{y},\xi) d\tilde{y}d\eta d\xi \tag{B.69}$$

In case (ii), the phase $\sqrt{\omega}\tilde{y}.(\xi-\eta)$ is equivalent to 1, and so the integrand is not oscillatory. Thus,

$$a_{ij,i'j'} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^{n/2}}.\omega.\frac{1}{\omega^n}\right) \tag{B.70}$$

since $p(x,\omega\eta) = \mathcal{O}(\omega)$ because the symbol of the operator is of order 1, and the volume of integration in $\tilde{y}$, ξ, η is proportional to $\left(\frac{1}{\omega^{1/2}}\right)^{2n}$.

In case (iii), the phase of the right hand side of expression (B.69) can be considered as oscillatory in $\tilde{y}$. Thus, defining $\mathcal{L}_y$ by

$$\mathcal{L}_y = i\frac{(\eta - \xi).\nabla_{\tilde{y}}}{|\eta - \xi|^2}, \tag{B.71}$$

we have that $\mathcal{L}_y$ applied to $e^{i\sqrt{\omega}\tilde{y}.(\xi-\eta)}$ is $\sqrt{\omega}$ times identity. So, each time we integrate by part with respect to $\mathcal{L}_y$ we gain a factor $\omega^{-1/2}$. For counting the number of times we can integrate by part, we make the following remark: since the functions p_{ij} are $P1$, we can integrate by part once without creating boundary terms. Then, for each new integration, we create one more boundary term of dimension one less than the former term. Thus, we can integrate $n+1$ times, leading to a factor of $\left(\frac{1}{\omega^{1/2}}\right)^{n+1}$. We are finally left with integrals the variables ξ, η other a volume of $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^{1/2}}\right)^{2n}$. It leads to

$$a_{ij,i'j'} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^{n/2}}.\omega.\frac{1}{\omega^{(n+1)/2}}\frac{1}{\omega^n}\right). \tag{B.72}$$

This ends the proof of the theorem.

During the previous computation, we made the assumption that deriving the symbol in $\tilde{y}$, would not involve any perturbation in the evaluation of the magnitude of the coefficient. Let us check when this is true. For that let us recall that if the symbol p belongs to the class $S^1_{\rho,\delta}$, then

$$|\partial_x^\alpha p(x,\xi)| \leq C|\xi|^{1+\delta\alpha}. \tag{B.73}$$

Thus,

$$|\partial_{\tilde{y}}^\alpha p(x_i + \omega^{-1/2}\tilde{y}, \omega\xi)| \leq C\frac{1}{\omega^{\alpha/2}}\omega^{1+\delta\alpha} = C\omega\omega^{(\delta-1/2)\alpha}. \tag{B.74}$$

Now, each time we integrate by part in $\tilde{y}$, we create a boundary term with no derivation of the symbol and a volumic term with derivating

$$p(x,\zeta)\tilde{p}_{ij}(\tilde{y},\eta)\tilde{p}_{i'j'}(\tilde{y},\xi). \tag{B.75}$$

In the second case, either we derivate basis functions, leading to a non-continuous integrand, or we derivate the symbol without modifying the regularity of the integrand. In that case, we gain a factor $\omega^{-1/2}$, with the integration by part, and a factor $\omega^{\delta-1/2}$ with the derivation of the symbol. Thus, in order not to alter the result of point (*iii*) of previous theorem, we just have to impose that the combination of the two factors leads to something not increasing with the frequency. This is reached for $\delta \leq 1$.

Let us comment the different cases of theorem B.4.1. Case (i) just says that a pseudo-differential operator is local. Cases (ii) and (iii) mean that such an operator is microlocal, that is to say that the value of Pu in a point of the phase space depends only on the value of u in the neighborhood of this point.

Now, we are in position to give an efficient way to approximate the computation of the matrix $A = (a_{ij,i'j'})$ which discretizes the operator.

Theorem B.4.2 *If A is the matrix recalled above and $\tilde{A}$ is the submatrix of A built with the coefficients which correspond to case (ii) of theorem B.4.1, setting the others to 0, we then have:*

$$||A|| = \mathcal{O}(\omega^{1-3n/2}), \tag{B.76}$$

$$||A - \tilde{A}|| = \mathcal{O}(\omega^{-3n/2}), \tag{B.77}$$

and thus, the relative error satisfies

$$\frac{||A - \tilde{A}||}{||A||} = (\omega^{-1}). \tag{B.78}$$

Proof B.4.2 *Indeed, we take for instance,*

$$||A|| = \max_{ij} \sum_{i'j'} |a_{ij,i'j'}| \tag{B.79}$$

as an algebra norm. It is important to have an algebra norm, if we want to be able to deduce from the approximation of A something about the approximation of its inverse A^{-1}.

In each line of the matrix, there are $\mathcal{O}(1)$ coefficients corresponding to case (ii) and $\mathcal{O}(\omega^{(n-1)/2})$ coefficients corresponding to case (iii). Thus,

$$||A|| = \mathcal{O}(1.\omega^{1-3n/2}) \tag{B.80}$$

and

$$||A - \tilde{A}|| = \mathcal{O}(\omega^{(n-1)/2}.\omega^{1/2-2n}). \tag{B.81}$$

This completes the proof of the theorem.

We finally have the numerically interesting

Theorem B.4.3 *The algorithmic and storage complexity of the computation of $\tilde{A}$ is $\mathcal{O}(\omega^{n-1/2})$.*

Proof B.4.3 *Indeed, since we only retain $\mathcal{O}(1)$ coefficients by line in matrix $\tilde{A}$, we have the result for the storage complexity. For the computations, we have to recall that we keep the coefficient in the matrix only when the phase is stationary. Thus, we can numerically integrate with a finite number of Gauss integration points, this number not varying with the frequency. Hence the computation of a coefficient costs $\mathcal{O}(1)$ operations which ends the proof of the theorem.*

So, we see that the method proposed here to approximate pseudo-differential operators for propagation problems gives first a controlled error, which decreases when the frequency goes to infinity and second a gain in storage and computation complexity of at least $\mathcal{O}(\omega^{n+1/2})$.

B.4.2 Fourier-integral operators

Now, we go into the Fourier integral operator case. We want to compute the matrix $A = (a_{\alpha\beta,ij})$ where

$$a_{\alpha\beta,ij} = \int p(x,y,\zeta) e^{i\phi(x,y,\zeta)} p_{ij}(y,\xi) p_{\alpha\beta} e^{-i\omega(x-x_\alpha).\eta} e^{i\omega(y-y_i).\xi} dx dy d\xi d\eta d\zeta. \tag{B.82}$$

We will have the same kind of theorem as in the case of pseudo-differential operators.

Theorem B.4.4 *We denote by N the dimension of the space where ζ is, and by n the dimensions of X and Y.*

(i) If (x_α, y_j) is not the projection of a point of the lagrangian manifold of the operator Λ_ϕ, the coefficient $a_{\alpha\beta,ij}$ is rapidly decreasing.

(ii) Else, if $d(Supp(p_{\alpha\beta} \otimes p_{ij}),\ \Lambda_\phi)) = \mathcal{O}(\omega^{-1/2})$*, then*

$$a_{\alpha\beta,ij} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^{N+n/2-1}}\right). \tag{B.83}$$

(iii) Else,

$$a_{\alpha\beta,ij} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^{N+n-1/2}}\right). \tag{B.84}$$

We see that, applying this theorem to the pseudo-differential case would give the same kind of results as theorem B.4.1 since is this case we would take $\Lambda_\phi = diag(T^\star X \times T^\star X)$.

Proof B.4.4 *As previously, we proceed to the following change of variables :*

$$\left\{\begin{array}{l} \omega\tilde{\zeta} = \zeta, \\ \tilde{x} = \sqrt{\omega}(x - x_i), \\ \tilde{y} = \sqrt{\omega}(y - x_{i'}). \end{array}\right. \tag{B.85}$$

This leads to a factor ω^{n-N} *in front of the integral. Thus,*

$$a_{\alpha\beta,ij} = \omega^{n-N} \int \tilde{p}(\tilde{x},\tilde{y},\omega\tilde{\zeta}) e^{i\omega\tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\zeta})} e^{i\omega^{1/2}(-\tilde{x}.\eta+\tilde{y}.\xi)} \tilde{p}_{\alpha\beta}(\tilde{x},\eta)\tilde{p}_{ij}(\tilde{y},\xi) d\tilde{x}d\tilde{y}d\xi d\eta d\tilde{\zeta}, \tag{B.86}$$

where the amplitude $\tilde{p}$ *satisfies*

$$\tilde{p}(\tilde{x},\tilde{y},\omega\tilde{\zeta}) = p(x_\alpha + \omega^{-1/2}\tilde{x}, y_i + \omega^{-1/2}\tilde{y}, \omega\zeta) \tag{B.87}$$

and the phase $\tilde{\phi}$ *is given by,*

$$\begin{aligned} \omega\phi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\zeta}) &= \phi(x_\alpha + \omega^{-1/2}\tilde{x}, y_i + \omega^{-1/2}\tilde{y}, \omega\zeta) && \text{(B.88)} \\ &= \omega\phi(x_\alpha, y_i, \tilde{\zeta}) + \omega^{1/2}(\nabla_x\phi(x_\alpha, y_i, \tilde{\zeta})\tilde{x} + \nabla_y\phi(x_\alpha, y_i, \tilde{\zeta})\tilde{y}) + \mathcal{O}(1) && \text{(B.89)} \end{aligned}$$

Thus, as before, if $\nabla_{\tilde{\zeta}}\phi(x_\alpha, y_i, \tilde{\zeta})$ *cannot be null, we can integrate by part an infinite number of times with respect to* $\tilde{\zeta}$ *and that concludes the proof of point (i) of the theorem. In the other cases, we perform the change of variables from the manifold* Σ_ϕ *to* Λ_ϕ*, denoting by* ζ_x, ζ_y *the new variable. The phase is stationary in* $\zeta_x,\ \tilde{x}$ *for* $\eta = \nabla_x\phi(x_\alpha, y_i, \tilde{\zeta}) = \zeta_x$ *and* $\nabla_{x\zeta}\phi\tilde{x} + \nabla_{y\zeta}\phi\tilde{y} = 0$*. So, we have that*

$$a_{\alpha\beta,ij} \sim \omega^{n-N}\frac{1}{\omega^{n/2}} \int \tilde{p}(\tilde{x},\tilde{y},\omega\tilde{\zeta}) e^{i\omega^{1/2}(\zeta_y+\xi)\tilde{y}} \tilde{p}_{\alpha\beta}(\tilde{x},\eta)\tilde{p}_{ij}(\tilde{y},\xi) d\tilde{y}d\xi d\eta \tag{B.90}$$

In case (ii), the phase of the integrand is $\mathcal{O}(1)$ *and so we just to integrate a non oscillatory term in a volume of* $\mathcal{O}(\omega^{-n})$*. Thus, in this case,*

$$a_{\alpha\beta,ij} = \mathcal{O}(\frac{1}{\omega^{N-n/2}}\omega\frac{1}{\omega^n}) = \mathcal{O}(\frac{1}{\omega^{N+n/2-1}}) \tag{B.91}$$

since we have choosen the amplitude of the operator to be homogeneous of degree 1.

In case (iii), the phase is oscillatory in $\tilde{y}$. So, we can perform integrations by parts with respect to this variable. As before, each integration gives a factor of $\omega^{-1/2}$ and we can integrate $n+1$ times, giving a global factor of $\frac{1}{\omega^{(n+1)/2}}$. Hence, in case (iii),

$$a_{\alpha\beta,ij} = \mathcal{O}(\frac{1}{\omega^{N-n/2}}\frac{1}{\omega^{(n+1)/2}}\omega\frac{1}{\omega^n}) = \mathcal{O}(\frac{1}{\omega^{N+n-1/2}}). \tag{B.92}$$

This concludes to proof of the theorem.

Now, as for the pseudo-differential case, we can exhibit a way of approximating Fourier integral operators in the case of propagation problems at high frequency.

Theorem B.4.5 *If A is the complete matrix discretizing the operator in the basis choosed for it, and $\tilde{A}$ is the submatrix built with the coefficients of A which correspond to case (ii) of theorem B.4.4, we have that*

$$||A|| = \mathcal{O}(\omega^{1-n/2-N}), \tag{B.93}$$

$$||A - \tilde{A}|| = \mathcal{O}(\omega^{-n/2-N}), \tag{B.94}$$

and thus, the relative error satisfies

$$\frac{||A - \tilde{A}||}{||A||} = (\omega^{-1}). \tag{B.95}$$

Proof B.4.5 *Indeed, since there are only $\mathcal{O}(1)$ coefficients by line in matrix A corresponding to case (ii) of theorem B.4.4 and $\mathcal{O}(\omega^{(n-1)/2})$ corresponding to case (iii) of the same theorem, we have that*

$$||A|| = \mathcal{O}(1.\omega^{1-n/2-N}) \tag{B.96}$$

and

$$||A - \tilde{A}|| = \mathcal{O}(\omega^{(n-1)/2}\omega^{1/2-n-N}). \tag{B.97}$$

This allows to conclude the proof.

Now, for the complexity, we have the

Theorem B.4.6 *The algorithmic and storage complexity of the computation of $\tilde{A}$ is $\mathcal{O}(\omega^{n-1/2})$.*

Proof B.4.6 *Indeed, as in the case of pseudo-differential operators, since we only keep $\mathcal{O}(1)$ coefficients by line in $\tilde{A}$, we have the result for the storage complexity, and since the coefficients corresponding to case (ii) of theorem B.4.4 have non oscillatory integrands, they only need $\mathcal{O}(1)$ operations each to be computed with a given accuracy.*

B.5 Conclusion

In this paper, we have presented a technique of discrete microlocalization which is well-suited to diffraction problems using pseudo-differential or Fourier integral operators. Let us summarize our results for Fourier integral operators since it appeared in all the paper that the pseudo-differential operators could be thought of as a subcase of them.

- First, we have exhibited a space of microlocal approximation built with functions whose wave-front was in the neighborhood of the wave-front of the operator and we projected these functions on the two factors $T^\star X$ and $T^\star Y$ creating the basis of the $p_{\alpha\beta}$ and the one of the p_{ij}.
- Second, we have shown that the coefficients of interaction where important only when $Supp(p_{\alpha\beta} \otimes p_{ij})$ was in the neighborhood of the wave-front of the operator.
- Third, we have got that the relative error made on the matrix when setting to 0 all the interactions which where not important was $\mathcal{O}(\frac{1}{\omega})$.
- Fourth, the complexity of the computation and storage of the approximated matrix is $\mathcal{O}(\omega^{n-1/2})$ which has to be compared with the $\mathcal{O}(\omega^{2n})$ for a classical method.

Finally, we make a few comments and give some perspectives. As we did in [31], it is easy to take caustics and grazing rays into account, because, using Fourier-Airy operators we still obtain an eikonal equation and the basis functions presented in this paper give a correct approximation for that kind of waves. In fact, the point is that the characteristic size of our discretization is $\sqrt{\lambda}$ and caustics or degenerated waves differ from a generic wave only on a length greater than $\lambda^{1/3}$ where λ is the wavelength. So our discretization does not descriminate between generic and degenerated waves.
This method can also take into account singular geometries. For instance in the case of edges, instead of asking the gradient of the phase to be null, we would ask for its projection on the tangent space of the edge to be null, and we would be able to carry on with our technique.
If one wants a greater quality in the approximation of the operator, one has to use basis functions which are more regular than just P1. Indeed, the magnitude of what is neglected is related to the number of times that we can integrate by part in the case (iii) of theorems B.4.1 and B.4.4. This method could be extended to the time domain propagation. In that case, we would have to fix a maximum pulsation ω_{max} related to the time step. We would then have to mesh the manifold corresponding to the eikonal inequality :

$$|p_1 x, y, \eta, \xi| \leq \omega_{max} \tag{B.98}$$

and then to adapt the techniques presented in this paper. We may also use an extension of our method to compute solutions for non-linear wave equations, using paraproducts defined by Bony (see [8]).

Résumé

Ce travail a consisté en la présentation et la validation d'une nouvelle méthode ayant pour thème la simulation numérique de la propagation d'ondes. Le problème analysé est celui de la diffraction d'ondes en régime harmonique par des obstacles tridimensionnels quelconques. Pour modéliser ces phénomènes, nous nous sommes intéressés aux équations intégrales. La méthode proposée a pour objectif de les utiliser à hautes fréquences en réduisant la complexité en calcul et surtout en stockage mémoire. Son originalité réside en une approche en deux temps de la solution cherchée. Dans un premier temps, on utilise une discrétisation microlocale. Dans un second temps, on propose une transformation par ondelettes. L'approche microlocale, qui repose sur l'usage systématique d'une localisation en espace et en direction de propagation, conduit à inverser des matrices creuses mais très mal conditionnées. Pour surmonter cette difficulté, nous avons considéré la seconde approche qui consiste à opérer un filtrage par ondelettes. Ces approximations se sont avérées particulièrement efficaces pour diminuer le remplissage et la taille des matrices issues de la résolution d'équations intégrales.
Le développement et la mise au point d'un code ont été effectués au CERMICS-INRIA Sophia-Antipolis. La vérification de la validité de notre code s'appuie sur des calculs de surface équivalente radar. Des résultats numériques encourageants sont présentés pour des obstacles convexes et non-convexes.
La méthode est ensuite étendue aux opérateurs pseudo-différentiels et Fourier-intégraux. Ils interviennent dans le cas de milieux hétérogènes et anisotropes.

- **Mots-clés :** Diffraction hautes fréquences - Équation de Helmholtz - Équations intégrales - Éléments finis - Analyse microlocale - Ondelettes - Surface équivalente radar.

Abstract

This work consisted in the presentation and the validation of a new method having for theme numerical simulation of waves propagation. The analysed problem is the harmonic wave scattering one by any three dimensional obstacle. For the modelization of these phenomenas, we were interested in integral equations. The aim of the proposed method is to use them for high frequencies by reducing calculus and overall memory storage complexity. Its originality comes from an approach in two steps of the solution we're looking for. First, we use a microlocal discetization. Secondly, we propose a transformation by wavelets. The microlocal approach, which lies on both use of space and directional localizations, leads to sparse matrices but with a bad conditioning number. To get over this difficulty, we have considered the second approach which is to filter by using wavelets. We have shown that these approximations were particulary efficious in both increasing the sparsity and reducing the size of the matrices issued from the integral equations resolution.
We have studied and developped a program at CERMICS-INRIA Sophia-Antipolis. The verification of its validity is based on radar cross section calculations. Encouraging numerical results are presented for convex and non-convex obstacles.
The method has been extended to pseudo-differential and Fourier-integrals operators. The use of these operators happens for heterogeneous and anisotrop media.

- **Key-words :** High frequencies scattering - Helmholtz equation - Integral equations - Finite elements - Microlocal analysis - Wavelets - Radar cross section.