

RAPPORT DE THÈSE

Maillages homotopiques tétraédriques des tissus de la tête pour le calcul du problème direct en électro/magnéto-encéphalographie

Jérémy Pescatore

Soutenance le 17 décembre 2001

Directeurs de Thèse :

Isabelle Bloch

Line Garnero

Rapporteurs :

Gilles Bertrand

Houman Borouchaki

Examineurs :

Jean-Louis Coatrieux

Francis Schmitt

Remerciements

Cette thèse est née d'une collaboration entre le département Traitement du Signal et des Images de l'ENST et le LENA « Neurosciences Cognitives et Imagerie Cérébrale ». Je tiens donc à remercier Henri Maître et Bernard Renault, responsables de ces deux centres de recherche, pour m'avoir accueilli dans leurs services respectifs.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes deux directrices de thèse, Isabelle Bloch et Line Garnero, pour m'avoir laissé profiter librement de leur formidable valeur scientifique et personnelle.

Merci à Gilles Bertrand et Houman Bourouchaki qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteur pour ce travail de thèse.

Merci à Jean-Louis Coatrieux et Francis Schmitt d'avoir bien voulu participer au jury de thèse.

Merci aussi à Antoine Ducorps et Denis Schwartz du centre MEG qui m'ont initiés à l'administration système.

Mes remerciements vont à Ferdaous, Marie et Laurence qui ont été mes collègues de bureaux.

Merci à Popeye sans quoi ce travail n'aurait pas pu aboutir.

Merci à tous ceux qui ont participé à rendre la vie agréable au département TSI et au LENA. En particulier : Anne-Catherine, Aymeric, Bruno, Claudia, Cyril, Dominique, Dominique, Elodie, Florence, Francis, Geneviève, Gouenou, Hans, Henri, Hilmi, Igor, Isa, Jean-Marie, Jean-Pierre, Jon, Jorge, Laurent, Laurence, Ludivine, Maxim, Michel, Olivier, Marie, Patricia, Reda, Selim, Severine, Sylvain, Sophie, Valérie, Valérie, Wirawan et Yucel.

Enfin, soient ici remerciés tous ceux qui, au cours de ses trois années, m'ont donné sans compter leur science et leur temps.

A Jean Sondt

Table des matières

Introduction générale	11
1 Quelques éléments de neuroanatomie et d'électrophysiologie	15
1.1 Principes physiologiques	16
1.2 Cortex cérébral	17
1.3 Modélisation électromagnétique du cerveau	19
1.3.1 Activité électromagnétique du cortex	19
1.3.2 Conductivité des tissus de la tête	22
1.4 L'imagerie fonctionnelle E.E.G. et M.E.G.	24
1.4.1 Electroencéphalographie (E.E.G.)	24
1.4.2 Magnétoencéphalographie (M.E.G.)	27
1.5 Estimation des activités électriques cérébrales	27
1.5.1 Localisation des sources électriques en M.E.G./E.E.G..	27
1.5.2 Modélisation réaliste des phénomènes électriques . . .	30
2 Tétraèdre, triangulation et maillage	33
2.1 Du tétraèdre vers le maillage	33
2.1.1 Enveloppe convexe, polytope et simplexe	33
2.1.2 3-simplexe: le tétraèdre	34
2.1.3 Triangulation	39
2.1.4 Maillage	41
2.1.5 Ensembles particuliers	42
2.2 Génération de maillages structurés	44
2.2.1 Méthodes d'interpolation algébrique	44
2.2.2 Méthodes fondées sur des E.D.P.	45
2.2.3 Méthodes multi-blocs	46
2.2.4 Méthodes produit	48
2.3 Génération de maillages non structurés	49
2.3.1 Méthodes de décomposition spatiale	49
2.3.2 Méthodes frontales	50
2.3.3 Méthodes de Delaunay	51
2.4 Conclusion	53

3	Tétraédrisation presque régulière (<i>T.P.R.</i>) de $\mathbb{R}^3$	55
3.1	Tétraédrisation Presque Régulière de $\mathbb{R}^3$: Définition	55
3.2	Etude de la connexité d'une <i>T.P.R.</i> de $\mathbb{R}^3$	65
3.3	Qualité géométrique d'une <i>T.P.R.</i> de $\mathbb{R}^3$	66
3.4	Réseaux Cristallins et <i>T.P.R.</i> de $\mathbb{R}^3$	69
3.5	Conclusion	73
4	Caractérisation d'un tétraèdre simple dans un maillage conforme	75
4.1	Notions de topologie	76
4.1.1	Application et continuité	76
4.1.2	L'homotopie	77
4.2	Déformations homotopiques d'un maillage tétraédrique	79
4.2.1	Notations et définitions	81
4.2.2	Eléments simples	83
4.3	Groupes d'homologie d'un maillage tétraédrique	87
4.3.1	Complexe simplicial	87
4.3.2	Groupes de chaîne, de cycle et de frontière	88
4.3.3	Groupes d'homologie	93
4.3.4	Groupes d'homologie relative	98
4.3.5	Caractérisation de la simplicité d'un tétraèdre	104
4.4	Conclusion	106
5	Adaptation d'une <i>T.P.R.</i> et optimisation de maillages	109
5.1	Calcul par éléments finis avec contrôle d'erreur	110
5.1.1	Potentiel électrique et champ magnétique dans un mo- dèle sphérique	110
5.1.1.1	Potentiel électrique	111
5.1.1.2	Champ magnétique	115
5.1.2	Estimateur d'erreur en E.E.G.	117
5.2	<i>h</i> -adaptation par modifications locales d'une <i>T.P.R.</i>	119
5.3	Optimisation à connexités fixes d'un maillage	126
5.4	Conclusion	128
6	Maillage des tissus de la tête en E.E.G. et en M.E.G.	129
6.1	Recalage de données M.E.G./E.E.G. et I.R.M.	130
6.1.1	Position du problème	130
6.1.2	Formes homologues en M.E.G./E.E.G. et en I.R.M.	132
6.1.3	Recalage rigide de surfaces discrètes	134
6.1.4	Synthèse	139
6.1.5	Evaluation	139
6.1.5.1	Evaluation intrinsèque	141
6.1.5.2	Effets du bruit	142

6.1.5.3	Effets du nombre de points	142
6.1.5.4	Conclusion	143
6.1.5.5	Résultat de l'exploitation de l'algorithme . . .	143
6.2	Segmentation des tissus de la tête	144
6.3	Maillage volumique des tissus de la tête	147
6.3.1	D'un volume segmenté vers une T.P.R. des tissus de la tête	147
6.3.2	Déformation homotopique d'un maillage volumique . .	151
6.3.3	Visualisation	155
6.3.4	La résolution de la <i>T.P.R.</i> : les moments géométriques .	156
6.3.5	Régularisation, paramètres et convergence	158
6.3.5.1	Expérience 1 : étude de μ_T	160
6.3.5.2	Expérience 2 : introduction du paramètre μ_V .	161
6.3.5.3	Expérience 3 : introduction du booléen μ_{max} .	163
6.3.5.4	Expérience 4 : élimination du critère d'arrêt .	165
6.3.6	Conclusion	165
6.4	<i>T.P.R.</i> adaptées des tissus de la tête	169
6.5	Surfaces des tissus de la tête extraites d'une <i>T.P.R.</i>	175
6.6	Conclusion	179
 Discussion et perspectives		 183
 Annexes		 189
A.1 Les 24 Matrices de transformation		189
A.2 Propriété de connexité d'une T.P.R.		193
A.3 Topologie des maillages strictement conformes		201
A.4 Éléments finis et équation de Poisson		205
 Bibliographie		 211

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

L'électroencéphalographie (E.E.G.) et la magnétoencéphalographie (M.E.G.) permettent de mesurer à la surface de la tête des champs électromagnétiques résultant des activités neuronales du cerveau. Parmi les différents types d'imagerie cérébrale fonctionnelle (tomographie par émission de positons «T.E.P.» et imagerie par résonance magnétique fonctionnelle «I.R.M.f.»), toutes en pleine essor, la M.E.G. et l'E.E.G. sont les seules à fournir une résolution temporelle de l'ordre de la milliseconde, suffisante pour étudier tous les phénomènes dynamiques du cerveau. Malheureusement, les mesures effectuées à la surface du scalp souffrent d'une assez mauvaise résolution spatiale. Pour connaître la localisation des sources d'activités neuronales à partir des signaux mesurés, il est indispensable de modéliser la propagation des champs électromagnétiques à l'intérieur des tissus de la tête. Cette modélisation consiste à résoudre les équations de Maxwell pour toutes les configurations de sources neuronales possibles. Elle est effectuée à l'aide de techniques de calcul numérique (intégrales de surfaces, différences finies et éléments finis), pour lesquelles il est nécessaire de disposer d'un maillage surfacique ou volumique des tissus de la tête où chaque élément du maillage possède une conductivité électrique du tissu correspondant. Les modèles les plus simples et encore les plus souvent utilisés sont des modèles de sphères emboîtées car ils offrent une solution analytique [MUNCK-88], [SARV-87]. Les modèles surfaciques [MEIJS-89] à géométrie réaliste, où la conductivité des différents tissus est supposée isotrope commencent à être plus largement utilisés. Plus récemment, des modèles volumiques [THEV-92], [MAR-98], permettant de tenir compte d'hétérogénéités telles que l'anisotropie de la conductivité de l'os, ont commencé à voir le jour.

La plupart des approches actuelles reposent sur la définition des frontières surfaciques des objets polyédriques. Le maillage volumique consiste alors à introduire à l'intérieur de l'objet des points dits de «Steiner». Ensuite une tessellation de Delaunay est appliquée pour générer les éléments finis. Souvent, un post-traitement est nécessaire pour enlever des éléments dégénérés ou reconfigurer le maillage, de façon à ce que les éléments satisfassent un critère de qualité prédéfini. D'autres approches sont fondées sur une décomposition

réursive de l'espace dans laquelle une région 3D est subdivisée en octants. Cette subdivision est imposée par les frontières (surfiques) de l'objet et un critère lié à la résolution. Les descriptions surfiques d'objets anatomiques cérébraux pour ces types d'approches sont très difficiles à générer.

L'objectif de cette thèse est donc de construire des modèles plus réalistes des tissus de la tête sous forme de maillages volumiques tétraédriques adaptés aux méthodes d'éléments finis. Ces maillages volumiques sont construits à partir de données anatomiques individuelles obtenues en imagerie par résonance magnétique (I.R.M.) et doivent respecter des contraintes géométriques et topologiques imposées par la technique numérique. Les enjeux de cette thèse sont de faire le lien entre les méthodes de segmentation et le calcul numérique des champs électromagnétiques en proposant une méthode originale de maillage volumique des tissus de la tête.

Le premier chapitre de ce manuscrit est une description anatomique et électrique du cerveau humain. Nous donnons d'abord quelques éléments d'anatomie cérébrale puis nous décrivons la modélisation électrique des activités neuronales. Ensuite nous décrivons les principes de mesures de l'E.E.G. et de la M.E.G. Enfin nous montrons l'importance que revêt une modélisation volumique des tissus de la tête dans la localisation des sources d'activités neuronales à partir de l'E.E.G. et la M.E.G.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les notions nécessaires à la construction de maillages. Ensuite, nous faisons le point sur les différentes méthodes de maillages existantes. Une première partie de notre travail a consisté à élaborer une méthode de maillage volumique mieux adaptée au calcul numérique. Nous avons ainsi étudié les tétraédrisations presque régulières (*T.P.R.*) de l'espace (cf. chapitre 3). Une des originalités de notre méthode de maillage volumique réside dans la notion de «région homotopiquement déformable» (cf. chapitre 4) qui permet d'injecter dans une méthode de maillage volumique des connaissances *a priori* topologiques. Nous avons introduit une caractérisation originale des déformations homotopiques d'un objet discret plongé dans un maillage volumique de l'espace. Nous utilisons ces résultats pour caractériser localement les déformations homotopiques élémentaires d'une scène représentée par un maillage volumique.

De nombreux outils locaux peuvent être utilisés à des fins d'optimisation et d'adaptation de maillages tétraédriques. La convergence, la précision et les théorèmes d'estimation d'erreurs pour des calculs par éléments finis sont liés au paramètre h représentant la plus grande arête d'un tétraèdre. Cela amène à penser qu'une adaptation de maillage liée aux arêtes des éléments (appelée h -adaptation) répond bien au problème d'optimisation et d'adap-

tation d'une $T.P.R.$ Nous nous sommes donc intéressés dans le chapitre 5 à une h -adaptation fondée sur des modifications locales d'une $T.P.R.$

Enfin, nous présentons dans le dernier chapitre de ce manuscrit (cf. chapitre 6) une méthode de maillage volumique des tissus de la tête à partir d'une image I.R.M. fondée sur des critères à la fois géométriques et topologiques. Notre méthode de maillage permet d'une part d'extraire d'une image I.R.M. une représentation synthétique de la tête adaptée aux techniques de résolution des équations de Maxwell et d'autre part de confronter les résultats issus du calcul numérique avec les données réelles en E.E.G. et en M.E.G.

CHAPITRE 1

Quelques éléments de neuroanatomie et d'électrophysiologie

Il est aujourd'hui possible d'observer presque directement le fonctionnement du cerveau sans se fonder sur l'observation de phénomènes périphériques comme les temps de réponse à des stimuli ou les conséquences d'une détérioration cérébrale. L'E.E.G. et la M.E.G. permettent de suivre l'activité cérébrale d'un sujet sans dommage pour sa santé. Ces méthodes de mesure de l'activité cérébrale s'appuient toutes sur les phénomènes biologiques ou physiques qui l'accompagnent. Les précisions spatiales et temporelles de ces observations sont donc limitées pour deux raisons :

- D'une part, les phénomènes observés sont reliés indirectement à l'activité cérébrale et ne présentent pas les mêmes caractéristiques spatio-temporelles que cette dernière.
- D'autre part, l'observation de ces phénomènes est contrainte par la résolution et la sensibilité des capteurs ainsi que par les protocoles expérimentaux pouvant être utilisés.

Dans ce chapitre, nous abordons, en particulier, l'influence l'E.E.G. et la M.E.G. sur les précisions spatiales et temporelles de l'activité cérébrale et nous nous intéressons à l'utilisation de l'anatomie pour l'exploration fonctionnelle du cerveau. Nous résumons dans la section 1.1, les principes physiologiques qui régissent l'activité cérébrale. Ensuite, nous décrivons l'anatomie corticale qui est le siège de l'activité électrique (cf. section 1.2) puis nous donnons sa modélisation électromagnétique (cf. section 1.3). Dans la section 1.4, nous présentons succinctement les méthodes d'exploration fonctionnelle que sont l'E.E.G. et la M.E.G. et comparons leurs résolutions spatiale et temporelle. Enfin, dans la section 1.5, nous montrons comment l'anatomie des

tissus de la tête peut être utilisée pour améliorer l'étude électrophysiologique du fonctionnement du cerveau.

1.1 Principes physiologiques

Le cerveau contient plusieurs milliards de neurones formant un vaste réseau de communication à travers tout le corps humain. Un neurone est une cellule composée principalement de quatre parties (figure 1.1) dont le principe de fonctionnement peut être schématisé ainsi [KAHL-90] :

- une antenne réceptrice : les dendrites ;
- une source d'énergie : le corps cellulaire (ou soma) ;
- une ligne de communication : l'axone ;
- une antenne émettrice : l'extrémité synaptique de l'axone.

Les neurones forment des chaînes, des circuits ou des boucles dans lesquels l'axone de l'un s'unit aux dendrites, au soma ou à l'axone du suivant par l'intermédiaire des jonctions synaptiques. L'excitation d'un neurone se traduit par une perturbation électrique qui se propage à partir du point excité : c'est le potentiel d'action. La membrane du neurone est alors dépolarisée, c'est-à-dire que la différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur du neurone (qui est au repos d'environ -70mV) baisse de façon transitoire ; ces variations de polarité sont dues à une modification de la perméabilité de la membrane cellulaire qui entraîne des échanges d'ions (K^+ , Na^+ et Cl^-) entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule. Lors de l'excitation d'un neurone, on observe une propagation du potentiel d'action le long de son axone. Chaque neurone excité peut donc être considéré comme un générateur de courant miniature créant des différences de potentiels dans son voisinage et entraînant des déplacements de charges dans le volume du cerveau (voir section 1.3).

L'activité cérébrale induit donc une modification des densités de courant dans le volume cérébral. Les courants électriques observés sont de deux types. Des courants primaires sont générés au niveau des dendrites avec des temps caractéristiques relativement longs (plusieurs dizaines à quelques centaines de millisecondes). Ces courants se propagent le long des axones en un «Potentiel d'Action» dont les temps caractéristiques sont relativement plus courts (de l'ordre de la milliseconde). La mesure directe de la répartition des densités de courant intra-cérébral n'est pas envisageable en général mais cette activité électrique au sein du cerveau génère des différences de potentiels et des variations de champ magnétique qui peuvent être enregistrées à la surface du crâne (cf. section 1.4). Les mesures électromagnétiques effectuées sur le scalp

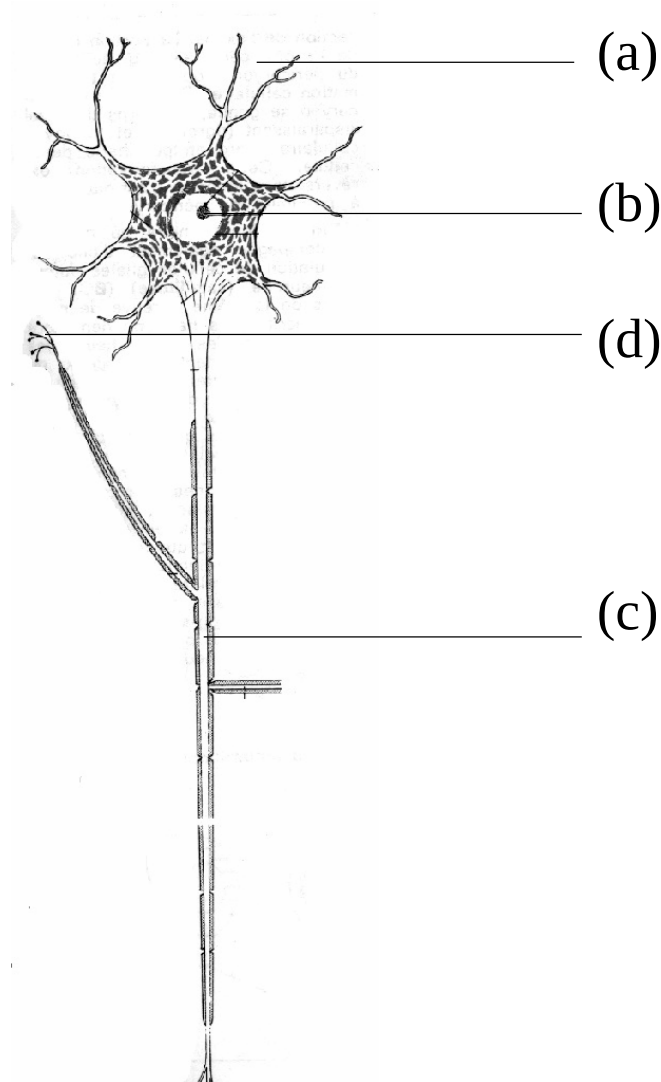


FIG. 1.1 – Schéma d'un neurone (d'après [KAHL-90]). (a) Les dendrites. (b) Le corps cellulaire. (c) L'axone. (d) Les extrémités synaptiques.

sont donc le reflet d'une partie de l'activité cérébrale, leur mesure et leur analyse sont donc susceptibles de fournir des indications sur le fonctionnement du cerveau.

1.2 Cortex cérébral

Le cerveau peut être divisé en trois parties : les deux hémisphères, le cervelet et le tronc cérébral (cf. figure 1.2). Chaque hémisphère comprend 4 faces : latérale ou externe, médiale ou interne, supérieure et inférieure. Les deux hémisphères sont reliés par des faisceaux de fibres qui traversent les commis-

sures. Parmi ces commissures se trouvent la commissure inter-hémisphérique ou corps calleux, les commissures intra-hémisphériques et les commissures inter- et intra-hémisphériques ou trigone.

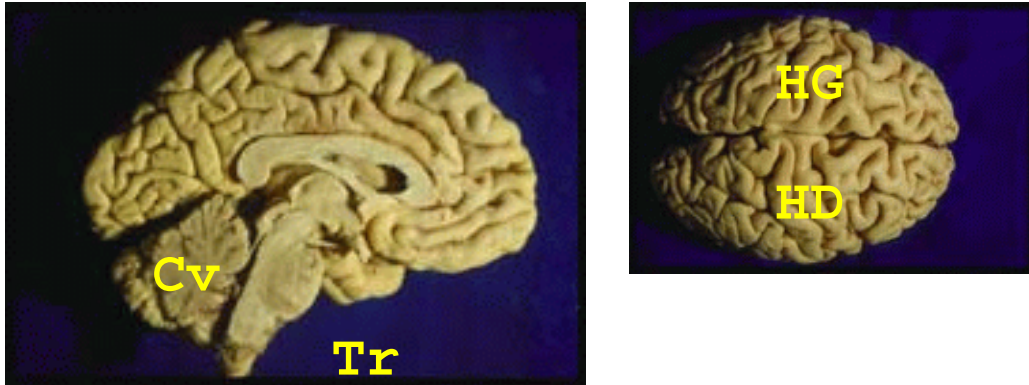


FIG. 1.2 – *Subdivision de l'encéphale (en haut) en trois parties : les hémisphères (HD et HG), le cervelet (Cv) et le tronc cérébral (Tr) (d'après [HASB-98]).*

Le néocortex cérébral, sur le plan histologique, est formé de 6 couches (cf. figure 1.3). On distingue de la plus superficielle à la plus profonde :

1. la couche moléculaire, elle contient essentiellement des fibres (axones et dendrites),
2. la couche granulaire externe, elle est constituée de neurones granulaires (couche réceptrice),
3. la couche pyramidale externe, elle contient des cellules pyramidales (couche effectrice),
4. la couche granulaire interne (couche réceptrice),
5. la couche pyramidale interne (couche effectrice) et,
6. la couche fusiforme (polymorphe).

Chaque hémisphère est plissé et forme des sillons :

- les sillons les plus profonds ou scissures délimitent les lobes,
- les sillons moins profonds délimitent des circonvolutions, gyrus ou plis dans chaque lobe.

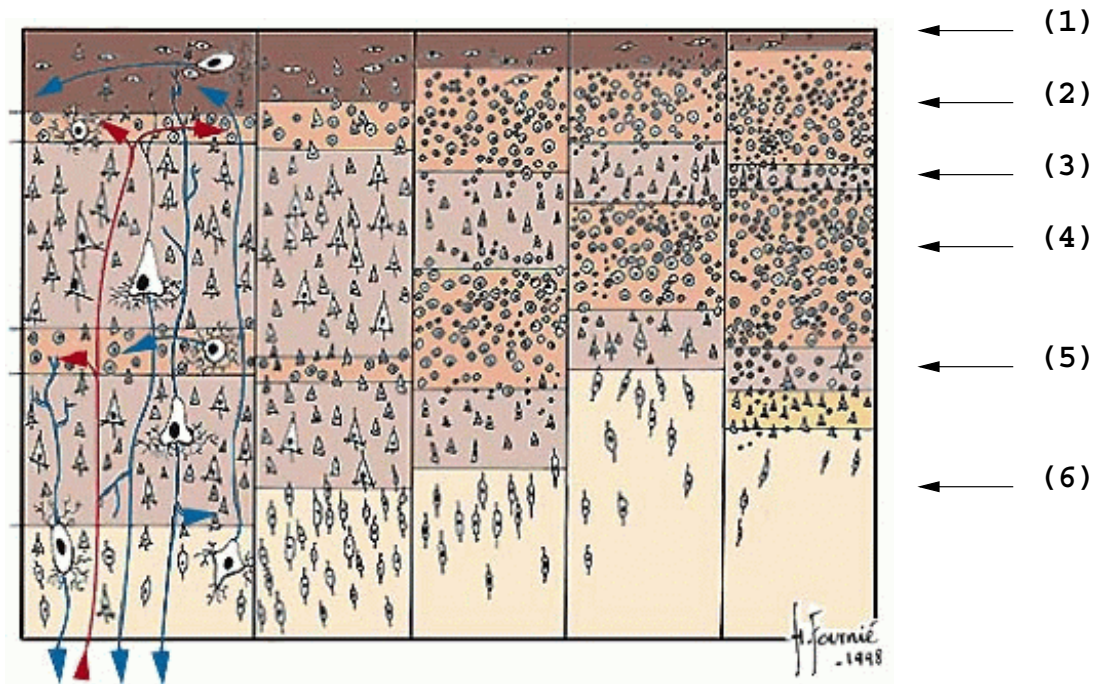


FIG. 1.3 – *Histologie du cortex (d'après [HASB-98]).*

Le sillon latéral (scissure de Sylvius), très profond, sépare le lobe temporal du reste du cerveau. Le sillon central (scissure de Rolando) sépare le lobe frontal en avant, du pariétal en arrière. Le sillon pariéto-occipital (scissure perpendiculaire externe) sépare le lobe pariétal du lobe occipital. La limite temporo-occipitale est à peine marquée par une incisure temporo-occipitale (cf. figure 1.4).

La stimulation électrique de certaines aires corticales de la région précentrale (cortex moteur) du lobe frontal entraîne des contractions musculaires dans différentes régions du corps. Il apparaît une représentation somatotopique au-dessus du sillon latéral. Les doigts et la main qui effectuent les mouvements les plus différenciés occupent la zone la plus grande, le tronc la plus petite. L'imagerie fonctionnelle, notamment la magnéto/électroencéphalographie, permet d'observer ces zones somatotopiques [GAV-01].

1.3 Modélisation électromagnétique du cerveau

1.3.1 Activité électromagnétique du cortex

Parmi toutes les activités cérébrales qui influencent les signaux E.E.G. et M.E.G., celles qui ont lieu dans le cortex ont une importance prépondérante

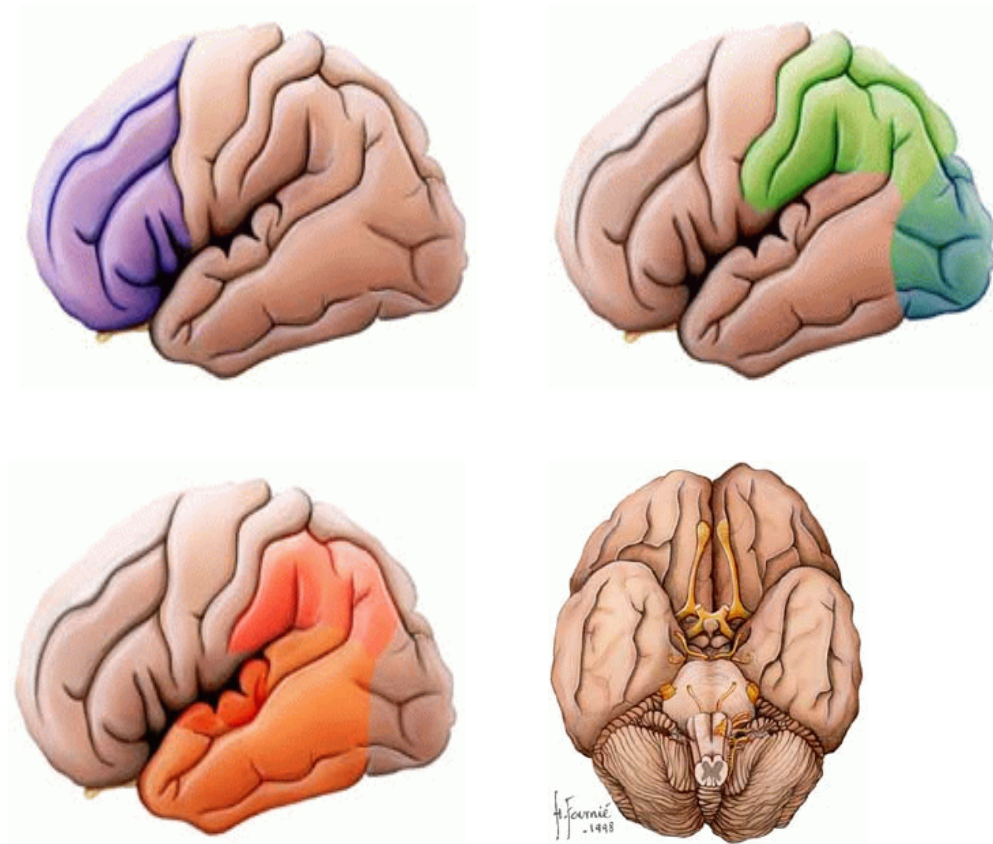


FIG. 1.4 – Les lobes cérébraux : lobe frontal (en haut à gauche), lobe pariétal (en haut à droite en vert), lobe occipital (en haut à droite en bleu), lobe temporal (en orange) (d'après [HASB-98]).

à cause de leur organisation géométrique et de leur synchronisation.

Les cellules situées dans le cortex suivent des directions localement parallèles. De plus, on n'observe pas, dans le cortex, d'activations isolées de neurones mais des activations simultanées de neurones voisins. Du fait de leur organisation topologique parallèle, les effets électromagnétiques des activations de ces groupes de neurones voisins vont se sommer et pouvoir être mesurés par des enregistrements E.E.G. et M.E.G. On ne retrouve pas cette organisation parallèle dans les parties plus profondes du cerveau comme les noyaux gris centraux¹. Une description anatomo-fonctionnelle très précise du cerveau est donnée dans [THOM-93].

L'activité électrique enregistrée provient des dendrites et des corps des

1. La définition anatomique des noyaux gris centraux comprend le corps strié (putamen, globus pallidus et noyau caudé), le claustrum (avant-mur) et l'amygdale.

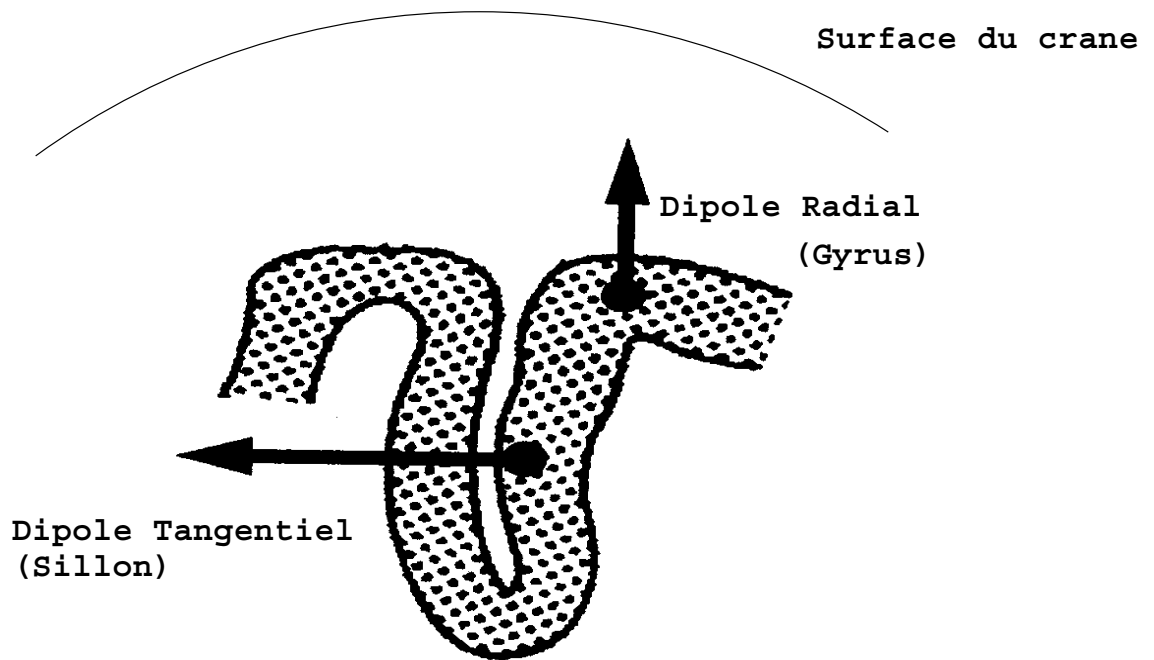


FIG. 1.5 – Définition des dipôles radiaux et tangentiels au niveau du ruban cortical.

neurones (cf. section 1.1). Cette activité principale se situe dans la bande corticale. Les neurones de cette bande corticale se regroupent en paquets de neurones parallèles de plusieurs milliers à plusieurs millions, occupant un volume du cortex d'environ 3 mm de diamètre sur 3 mm de profondeur (une macro-colonne), et travaillant simultanément (cf. figure 1.5). Ces colonnes de neurones sont toutes dirigées perpendiculairement à la surface du cortex. C'est l'activité synchronisée de ces assemblées corticales que l'on détecte car l'activité d'un seul neurone est parfaitement indécélable. L'ordre de grandeur du moment dipolaire est alors de 10 nA.m. Cette modélisation ne se prête correctement qu'aux assemblées corticales (ou macro-colonnes de neurones). Les arrangements dendritiques dans des structures plus profondes comme le noyau thalamique sont multipolaires car ils ne mettent pas en évidence de disposition régulière avec une orientation préférentielle des neurones comme le cortex. Il est alors communément admis que ces structures ont une activité électrique à champ fermé au sens où les différences de potentiel résultantes sont très faibles, à distance.

En résumé, l'activité électrique d'une colonne de neurones peut donc être décrite de façon satisfaisante par un modèle dipolaire de courant. Un dipôle de courant est la juxtaposition d'une source et d'un puits de courant. La source modélise l'arrivée des charges dans le neurone au niveau des synapses

des dendrites, et le puits modélise la sortie des charges par l'axone isolé électriquement. La justification de ce modèle dipolaire a été largement traitée dans la littérature [THEV-92],[HAMA-93].

L'orientation du dipôle est donnée par la direction de la colonne qu'il modélise. L'activité principale de l'encéphale est ainsi modélisée par des dipôles de courant répartis dans le cortex et dont la direction est perpendiculaire à la surface de celui-ci. Au final, tous les dipôles de courant modélisant l'activité électrique du cerveau seront localisés dans un même milieu : le cortex. Ces dipôles donnent également naissance à des courants secondaires (appelés courants de conduction) qui dépendent des conductivités des tissus qu'ils traversent.

Les axones de ces colonnes constituent la substance blanche et suivent également une direction plus ou moins perpendiculaire à la surface du cortex. Ils sont parfaitement conducteurs le long de la fibre et sont isolés électriquement par une gaine naturelle, la myéline, dans l'autre direction. La substance blanche possède donc des propriétés électriques fortement anisotropes mais ce n'est pas le seul tissu de la tête à présenter de telles propriétés.

Par conséquent, nous présentons, dans la section suivante, les propriétés électriques des différents tissus de la tête.

1.3.2 Conductivité des tissus de la tête

Les milieux de conductivités anisotropes de la tête sont principalement la substance blanche et l'os du crâne. Ce dernier possède une texture très poreuse et contient des cavités remplies de moelle qui favorisent fortement la conduction suivant les couches tangentielles de l'os, tandis que la conduction transversalement à la surface de l'os est fortement atténuée. Ces milieux peuvent être décrits par deux valeurs de conductivité, une dans les deux directions tangentielles aux surfaces de l'os et du cortex, et l'autre dans la direction orthogonale aux deux premières, dite radiale. Le tenseur de conductivité de ces milieux varie donc en tout point car il dépend de l'orientation de la surface délimitant les milieux. Dans le repère des directions radiales et tangentielles du milieu (correspondant aux directions principales du tenseur), le tenseur de conductivité s'exprime de façon simple en fonction des valeurs des conductivités radiale σ_r et tangentielle σ_t exprimés en $S m^{-1}$ (Siemens par mètre) ou $\Omega^{-1} m^{-1}$ par :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_t & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}$$

La principale difficulté rencontrée pour mesurer les impédances des tissus biologiques, et en particulier pour les constituants de la tête, est que la conductivité des tissus dépend fortement de l'environnement dans lequel ils sont plongés. La conductivité du crâne, par exemple, est directement proportionnelle à celle du liquide dans lequel il est plongé [RUSH-68]. Celle d'un cerveau mort est très différente de celle d'un cerveau vivant et en même temps les mesures *in vivo* sont très délicates et doivent être interprétées avec beaucoup de précautions [ROB-77].

Différentes approches ont été ainsi appliquées pour la mesure des conductivités des constituants du cerveau et de la tête. Une première approche consiste à réaliser des mesures sur des échantillons *in vitro*. Cette approche a été largement utilisée pour obtenir une conductivité «absolue» de nombreux tissus et liquides biologiques. Les principes de ces mesures et notamment la configuration des électrodes à utiliser sont décrits dans [SCHWA-63] et [SCHWA-66]. Une approche fondée sur un fantôme a été utilisée dans [RUSH-68] pour déterminer la conductivité du crâne. En effet, les auteurs ont créé un fantôme de la tête afin de reproduire les conditions réelles de conduction d'un crâne. Ce fantôme est constitué d'un demi-crâne humain disposé dans un réceptacle simulant la tête. Le crâne baigne dans un liquide simulant la peau et le cerveau. Le fantôme reste malgré tout assez éloigné de la réalité. Faire des mesures *in vivo* semble donc incontournable, en particulier lorsqu'il s'agit de mesurer la conductivité d'un cerveau vivant. Aussi ces mesures sont généralement réalisées sur des cerveaux de chat anesthésié [ROB-77] ou de lapin. Dans [ROB-77], nous trouvons une méthode détaillée de mesure à quatre électrodes spécifiques aux mesures *in vivo* des conductivités du cerveau.

Les valeurs de conductivités utilisées sont donc assez approximatives d'autant plus qu'il est probable qu'elles aient une grande variabilité d'un sujet à l'autre et même au sein de chaque tissu d'un même sujet. Une nette amélioration devra être apportée à ce niveau si l'on veut pousser encore le réalisme des modèles existants (cf. section 1.5.2). Des valeurs de conductivités normalisées par rapport à la conductivité du milieu externe, la peau, sont souvent utilisées. La conductivité de l'os est beaucoup plus faible que celle de la peau et des constituants du cerveau (cortex et substance blanche) qui sont du même ordre de grandeur. La conductivité du liquide céphalo-rachidien (LCR) est environ trois fois supérieure à celle de la peau. Le milieu extérieur est toujours considéré comme un isolant parfait (conductivité nulle).

La plupart des expérimentateurs se réfèrent aux valeurs publiées dans [GED-67]. Les deux conductivités pour celle de la peau sont alors celles déterminées par Burger ($0,43 \text{ Sm}^{-1}$ pour le scalp) et Hemingway ($0,33 \text{ Sm}^{-1}$ pour

la peau) [GED-67]. Yamoto a publié une étude très complète de l'impédance de la peau [YAM-76]. Il trouve une conductivité de $0,22 \text{ Sm}^{-1}$ pour les tissus internes et une valeur de $0,0022 \text{ Sm}^{-1}$ pour la kératine. La conductivité du LCR ($1,55 \text{ Sm}^{-1}$) a été mesurée par Radvan et Ziemnowicz [GED-67]. Deux valeurs normalisées (3 et 4,62) sont obtenues suivant la valeur utilisée pour la peau. Les valeurs utilisées pour l'os, le cortex et la matière blanche sont moins bien définies.

Le rapport 80 entre la peau et l'os est souvent admis. Il a été déterminé dans [RUSH-68]. La mesure de l'anisotropie du crâne a été également réalisée dans [RUSH-68]. Un rapport de 50 à 300 est obtenu entre la conductivité radiale du crâne et celle du milieu dans lequel il est plongé. Ce rapport n'est plus que de 5 à 40 pour la conductivité tangentielle. Cela donne approximativement un rapport de 10 entre les conductivités radiale et tangentielle du crâne.

Une valeur moyenne de la conductivité du cerveau ($0,18 \text{ Sm}^{-1}$ à $0,22 \text{ Sm}^{-1}$) a été obtenue par Friche et Curtis [SCHWA-63]. Une valeur de $0,17 \text{ Sm}^{-1}$ a été mesurée par Osswald sur des bovins et est citée dans [GED-67] tandis que Lang propose une valeur de $0,33 \text{ Sm}^{-1}$, citée dans [HOS-78]. Les seules mesures d'anisotropie de la matière blanche ont été réalisées sur des cerveaux de chats [NICH-65] où une conductivité tangentielle 9 fois plus importante que la conductivité radiale a été obtenue.

1.4 L'imagerie fonctionnelle E.E.G. et M.E.G.

L'électroencéphalographie (E.E.G.) et la magnétoencéphalographie (M.E.G.) permettent de mesurer l'activité électrique du cerveau humain de façon entièrement non invasive. Les mesures en E.E.G. et en M.E.G. permettent d'avoir une très bonne résolution temporelle (de l'ordre de la milliseconde) largement suffisante pour étudier les phénomènes de fonctionnement du cerveau qui ont des temps caractéristiques de l'ordre de la dizaine ou de la centaine de millisecondes et très en-dessous de ce que peuvent produire les autres techniques d'imagerie qui ont une résolution temporelle de l'ordre de la seconde pour l'Imagerie par Résonance Magnétique fonctionnelle (I.R.M.f.) et de la minute pour la Tomographie par émission de Positrons (T.E.P.).

1.4.1 Electroencéphalographie (E.E.G.)

Les milieux de la tête étant conducteurs, l'activité électrique neuronale induit des lignes de courant dans la tête qui se retrouvent à la surface du scalp. Ces lignes de courant engendrent des différences de potentiel à la surface de

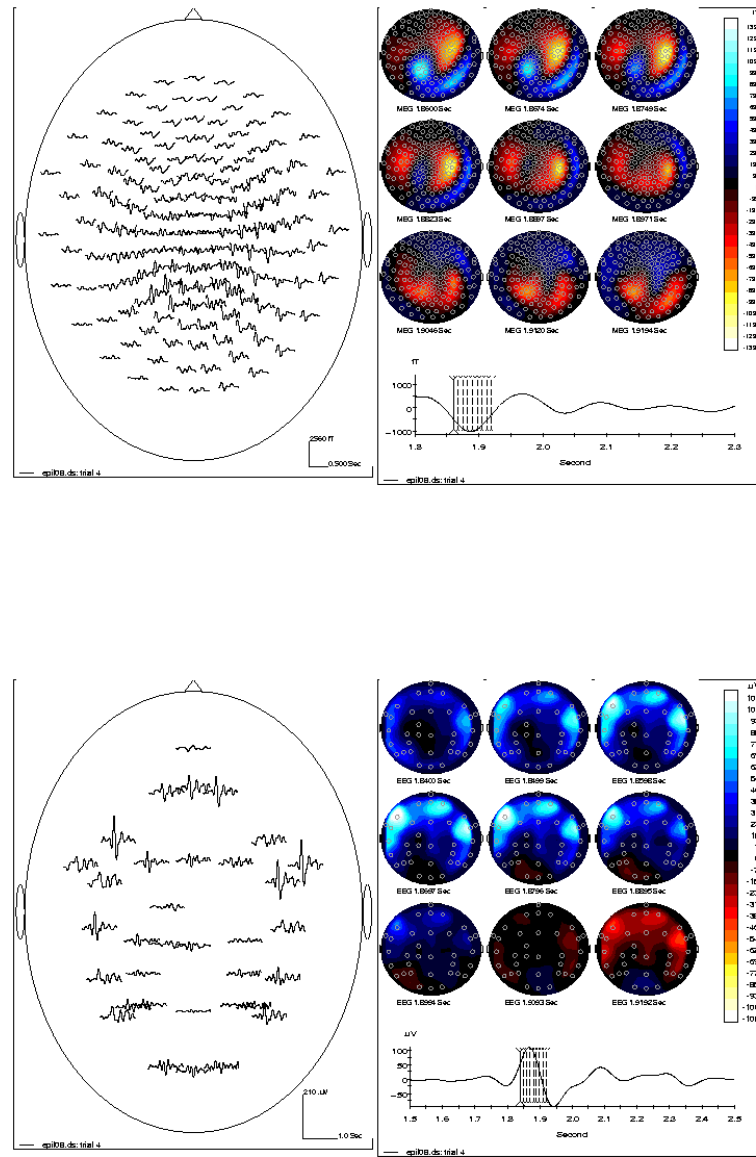


FIG. 1.6 – Images d'un enregistrement M.E.G. (en haut) et d'un enregistrement E.E.G. (en bas) réalisés simultanément sur la machine C.T.F. de la Pitié-Salpêtrière. Les cartes de droite sont interpolées à partir des mesures sur les capteurs présentées à gauche.

la tête, mesurables en E.E.G. en disposant des électrodes sur le scalp. Les électrodes sont réparties soit uniformément sur la surface du scalp avec une disposition répondant à des standards internationaux, soit avec une densité variable pour assurer une couverture sélective de certaines zones d'intérêt. Dans le premier cas, les électrodes sont disposées dans un bonnet élastique d'environ 27 à 128, voire 256 électrodes (uniquement pour les protocoles de recherche). Le contact électrique est assuré par l'introduction d'un gel conducteur entre l'électrode et le cuir chevelu. Dans le second cas, quelques électrodes peuvent être collées directement sur le scalp avec une pâte conductrice, ce qui permet une observation clinique prolongée. Un jeu d'électrodes s'appelle un montage.

Si la tension est mesurée entre des paires successives d'électrodes, on parle de montage bipolaire. Dans le cas où une seule et même électrode tient lieu de référence à tout le montage, il s'agit d'un montage unipolaire. Le choix de la référence est essentiel et constitue l'une des limitations de l'E.E.G. Les signaux mesurés sont de l'ordre de la dizaine de microvolts et consistent en des chutes de potentiels à travers les tissus parcourus par les courants volumiques générés à distance. Deux électrodes voisines auront tendance à mesurer des potentiels d'autant plus analogues que la source sous-jacente sera située en profondeur. Dans ce cas, un montage bipolaire ne révélera aucun signal significatif. De plus, les électrodes proches de la référence d'un montage unipolaire sont susceptibles de présenter un niveau de signal très faible, et ce même si la source est proche. On parlera de «référence moyenne» lorsque les tensions sont ensuite évaluées en référence à la valeur moyenne du potentiel relevé sur toutes les électrodes à chaque instant.

La difficulté majeure de l'E.E.G. consiste à faire ressortir de l'activité de fond des composantes spécifiques à la tâche demandée au sujet dans l'expérience en cours. Dès 1937, Dawson [SWA-98] démontre qu'en superposant et en sommant des tracés issus de la répétition de la même tâche, il est possible de faire émerger des composantes spécifiques (potentiels évoqués) pouvant être quantifiées (en amplitude et en temps d'arrivée par rapport au stimulus) et comparées entre divers protocoles. Les potentiels évoqués (P.E.) reposent sur l'hypothèse très forte d'une réponse fidèle et systématique à des stimulus de même nature ce qui permet un moyennage de plusieurs enregistrements (ou essais, souvent une centaine) chez un même sujet, voire à travers la population entière des sujets ayant participé à l'expérience (Grande Moyenne).

Cette hypothèse est très limitative et suppose une interprétation quasi-linéaire des phénomènes d'entrée/sortie du système «cerveau». On peut rester perplexe devant la capacité du cerveau à répéter de manière presque machi-

nale des traitements de stimulus parfois complexes, sans faire intervenir une dimension d'apprentissage, voire d'habitude au cours de l'expérience.

1.4.2 Magnétoencéphalographie (M.E.G.)

Les courants neuronaux et les courants de conduction rayonnent également un champ magnétique qu'il est possible de mesurer, mais les mesures en M.E.G. constituent un problème autrement plus compliqué qu'en E.E.G. En effet, le champ magnétique à mesurer est de l'ordre de la centaine de femtoteslas, inférieur de plusieurs ordres de grandeurs à tous les bruits environnants tels que le champ terrestre, le rayonnement des lignes et des appareils électriques ou le champ d'un appareil I.R.M. de l'ordre du tesla clinique. Même le champ dû à l'activité cardiaque peut être gênant. Les bruits extrinsèques au sujet sont réduits de façon considérable en réalisant les mesures dans une chambre blindée. Il est cependant nécessaire d'utiliser des capteurs très sensibles, les SQUIDS (Supraconductor Quantum Interference Devices). Ces capteurs refroidis à l'hélium liquide sont couplés à des bobines et permettent de mesurer un flux magnétique très faible. Il existe essentiellement trois sortes de bobine qui sont couplées aux SQUIDS : le magnétomètre, le gradiomètre axial et le gradiomètre planaire. Les gradiomètres permettent de réduire encore le bruit en fournissant des mesures différentielles. C'est alors soit la dérivée axiale, soit la dérivée tangentielle de la partie radiale du champ magnétique qui est mesurée. Une machine M.E.G. de la dernière génération comporte environ 150 à 250 capteurs répartis sur toute la surface du scalp.

La M.E.G. donne une réponse focale par rapport à l'E.E.G. car le champ magnétique n'est pas distordu par la traversée du tissu (même perméabilité magnétique que celle de l'air). Une deuxième propriété remarquable de la mesure des champs est qu'elle s'effectue de manière absolue, sans intervention de référence qui, nous l'avons vu, introduit un biais dans les mesures E.E.G.

1.5 Estimation des activités électriques cérébrales

1.5.1 Localisation des sources électriques en M.E.G./E.E.G.

L'E.E.G et la M.E.G possèdent une excellente résolution temporelle pour l'observation des phénomènes électrophysiologiques sous-jacents (cf. section 1.4). La question se pose alors de savoir s'il est possible d'estimer la répartition spatio-temporelle des activations cérébrales par la simple acquisition de séquences de champs magnétiques et de potentiels électriques sur le scalp. Des modèles de conduction des courants volumiques et de formation des champs

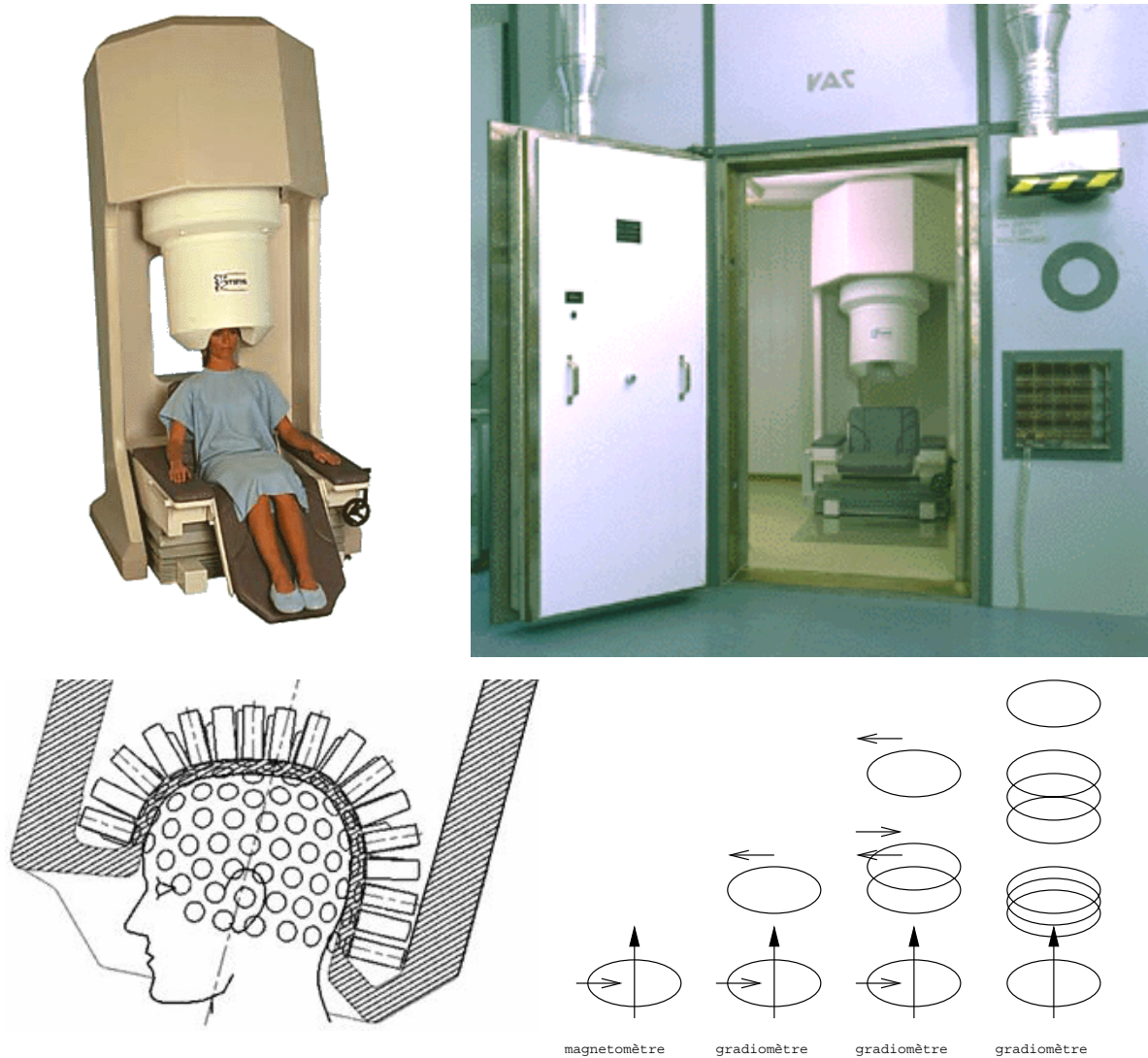


FIG. 1.7 – (1) L'appareil C.T.F. de M.E.G. à l'hôpital de la Salpêtrière.
(2) La chambre blindée assurant l'isolation électromagnétique.
(3) Un schéma du dispositif de capteurs. On y voit l'emplacement des gradiomètres et le réservoir à Hélium liquide garantissant le refroidissement des SQUIDS.
(4) Quelques types de magnétomètres utilisés aujourd'hui.

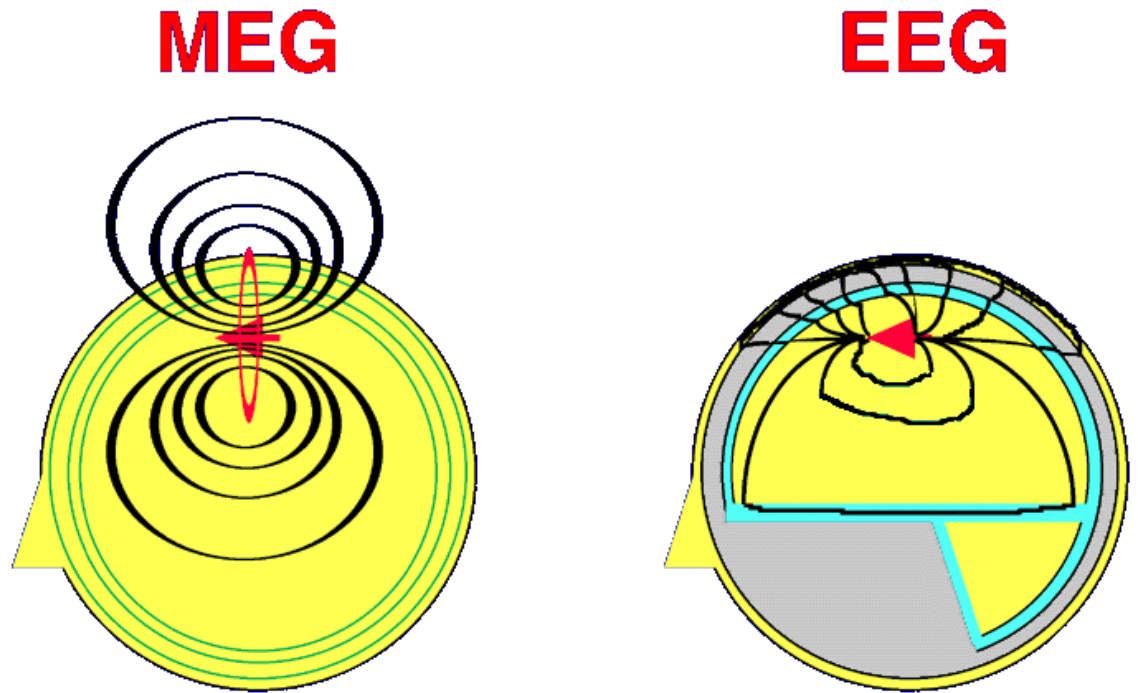


FIG. 1.8 – Une illustration d’une différence fondamentale entre M.E.G. et E.E.G.

A gauche, une source dipolaire (flèche) produit un champ magnétique dont les équipotentiels (en trait gras) ne sont pas déformées aux interfaces. A droite, les lignes de courant volumique à l’origine des chutes de potentiel mesurées en surface par l’E.E.G. sont fortement déformées aux interfaces. D’après CTF Systems Inc, Vancouver, Canada.

peuvent être accessibles (cf. section 1.5.2), il est alors possible de faire le calcul «direct» qui consiste à quantifier la contribution d’une ou de plusieurs sources aux mesures. Se pose alors le problème «inverse», c’est-à-dire [HAMA-93]: peut-on estimer la position des sources des champs et des potentiels en surface, étant donné un modèle physique de la conduction des courants?

Dès lors, il existe une distinction fondamentale entre les deux problèmes. Le problème direct possède toujours une seule et unique solution, pour une répartition donnée de sources (dipolaires ou non). À l’inverse, le problème inverse ne possède pas de solution unique.

En effet, étant donné un jeu de champs magnétiques et/ou de potentiels électriques enregistrés sur un laps de temps, résoudre le problème inverse dans

un modèle de source dipolaire consiste à estimer la position, l'orientation et les variations d'amplitude au cours du temps de chacune des sources. Dans certains modèles de sources appelés abusivement (multi)dipolaires, il s'agit d'abord d'estimer a priori le nombre de sources actives. Puis, si l'estimation a lieu à un seul instant, on parle d'ajustement instantané de paramètres. Une succession d'ajustements instantanés sur une fenêtre temporelle d'intérêt est qualifiée d'ajustements de dipôles mobiles («moving dipole fit»). Cette approche est la plus classique et regroupe les premiers algorithmes de dipôles de courant équivalents («equivalent current dipole») [SCH-86]. D'autres méthodes procèdent à l'estimation des paramètres d'orientation et d'amplitude sur une fenêtre de temps. Les sources sont alors fixes mais peuvent voir leur orientation changer au cours du temps. Il s'agit ici d'un ajustement spatio-temporel des paramètres («Spatio-temporal dipole fit») [SCHW-98].

Plus récemment sont apparus des modèles dits de sources distribuées. Il s'agit de contraindre les positions et les orientations des sources dans le volume cérébral ou sur la surface corticale. L'estimation linéaire des amplitudes fait alors appel aux techniques classiques de reconstruction d'images [BAIL-98], [DALE-93]. Dans ce cadre, la discrétisation sur un nombre fini M de capteurs s'écrit :

$$\begin{cases} B = G_B J \\ V = G_V J \end{cases}$$

où B (respectivement V) regroupe les M mesures sur les M capteurs, J rassemble les N amplitudes des sources, G_B (respectivement G_V) est une matrice de gain dont les colonnes sont les leads fields des N sources primaires discrétisés sur les M capteurs. Ces lead fields correspondent aux réponses unitaires du réseau de capteurs à chaque source primaire obtenues par la résolution du problème direct en $M.E.G.$ et $E.E.G.$ que nous allons maintenant présenter.

1.5.2 Modélisation réaliste des phénomènes électriques

Construire des modèles de conduction des courants volumiques et de formation des champs consiste à résoudre le problème «direct» en quantifiant la contribution d'une ou de plusieurs sources aux mesures M.E.G./E.E.G. Les premiers développements des calculs de champs cérébraux ont utilisé un modèle géométrique simplifié de tête sphérique à couches multiples. Grâce aux propriétés de symétrie du volume conducteur, il est possible de montrer que les courants volumiques ne contribuent pas à la composante radiale du champ magnétique. Par ailleurs, la valeur des autres composantes du champ magnétique ne dépend pas des conductivités des différentes couches. Notons aussi

que dans un modèle sphérique de tête, les potentiels électriques et les champs magnétiques conservent une expression analytique [MUNCK-88], [SARV-87]. Cette modélisation facilite les calculs des champs cérébraux. Cependant il est légitime de s'interroger sur la validité de ce modèle qui est une simplification extrême de la géométrie réelle de la tête par une sphère et qui ne considère pas finement l'hétérogénéité des tissus traversés et leurs propriétés d'anisotropie.

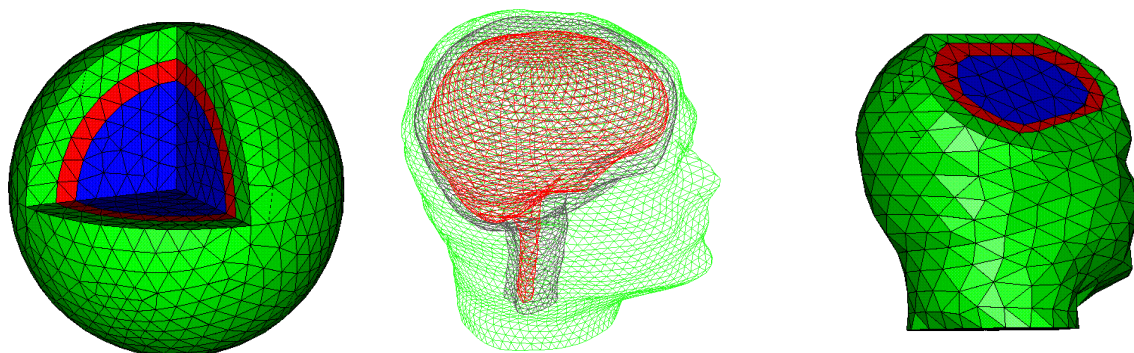


FIG. 1.9 – Quelques exemples de modèle de tête (D'après [MAR-97]).
Modèle sphérique à 3 couches (à gauche). Modèle à géométrie réaliste homogène par morceaux (au milieu). Modèle volumique à géométrie réaliste (à droite).

Un calcul des champs et des potentiels dans une géométrie complexe nécessite la mise en œuvre de méthodes numériques utilisant une discrétisation des surfaces ou des volumes des compartiments de la tête. La construction d'un modèle réaliste de la tête nécessite tout d'abord l'acquisition de l'anatomie du sujet au moyen d'un protocole I.R.M., par exemple. Ensuite, il est nécessaire de segmenter les images ainsi obtenues en étiquetant les pixels appartenant aux différentes structures (peau, os, LCR, cortex, matière blanche, ventricules ...). Un maillage surfacique ou volumique de ces structures peut alors être réalisé. La résolution numérique des équations de Maxwell s'effectue alors par une approche du type intégrale de frontière (Boundary Element Method, B.E.M.) [MEIJS-89] dans le cas des maillages surfaciques ou du type éléments finis (Finite Element Method, F.E.M.) [THEV-92], [MAR-98] dans le cas d'un maillage volumique.

Il faut souligner ici quelques points cruciaux relatifs à l'implantation pratique de ces méthodes :

- les techniques de segmentation 3D requises,
- le développement de méthodes spécifiques, notamment pour les maillages volumiques,

- l'attribution des valeurs de conductivités aux éléments du maillage.

Notre travail de thèse s'inscrit directement dans la construction de modèles plus réalistes des tissus de la tête sous forme de maillages volumiques adaptés aux méthodes d'éléments finis. Ces maillages volumiques sont construits à partir de données anatomiques individuelles obtenues en imagerie par résonance magnétique (I.R.M.) et doivent respecter des contraintes géométriques et topologiques sur l'agencement spatial des différentes structures imposées par la technique numérique.

CHAPITRE 2

Tétraèdre, triangulation et maillage

Avant d'aborder notre méthode de construction de maillage (chapitres 3 et 4), il convient de préciser la terminologie, les définitions de base et quelques notions d'intérêt général. On rappelle donc dans ce chapitre quelques définitions et notions de base ayant trait aux problèmes de triangulation et de maillage. En premier lieu, on donne les définitions des éléments (polytope et simplexe) sur lesquels nous construisons notre maillage, puis nous abordons la définition de *recouvrement* pour un domaine donné avant de donner celle d'une *triangulation* (cf. section 2.1).

Les définitions d'une triangulation et d'un maillage étant posées, les sections 2.2 et 2.3 abordent les différentes méthodes de construction de maillages. L'objectif de ces dernières sections est de proposer une synthèse des techniques actuelles de génération de maillages, structurés et non structurés, et de discuter brièvement de leurs avantages et faiblesses respectifs.

Le lecteur désirant aller plus loin dans le domaine des maillages pourra se reporter à l'ouvrage de Frey et George [FREY-99] d'où est tiré l'essentiel des définitions et des méthodes de maillages présentées ici.

2.1 Du tétraèdre vers le maillage

2.1.1 Enveloppe convexe, polytope et simplexe

Soit d la dimension de l'espace $\mathbb{R}^d$ et S un ensemble de points de cet espace que l'on note A_i , alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$ est une combinaison linéaire de points de S . Les combinaisons linéaires des n éléments de S engendrent, pour $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ appelé enveloppe affine des A_i . Si de

plus, pour tout i , $\lambda_i \geq 0$, de telles enveloppes sont dites convexes.

L'enveloppe convexe de S , notée $\text{Conv}(S)$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ formé par toutes les combinaisons linéaires convexes des éléments de S . Cette enveloppe est le plus petit ensemble convexe contenant S . L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^d$ est un *polytope* (polyèdre convexe), c'est-à-dire un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^d$. Un polytope de dimension k (dont l'enveloppe affine est de dimension k) est un k -polytope.

Propriété 2.1 [ROU-93]

Un ensemble S de points $\mathbb{R}^3$ est un polytope (polyèdre convexe) si et seulement si

1. les angles dièdres sont convexes ($\leq \pi$).
2. Les sommes des angles des faces autour de chaque sommet sont inférieures ou égales à 2π .

Un polytope régulier est un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers et dont le nombre de faces incidentes à chaque sommet est constant. En dimension trois, il existe seulement cinq polytopes réguliers (connus sous le nom de solides de Platon) : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre (cf. figure 2.1).

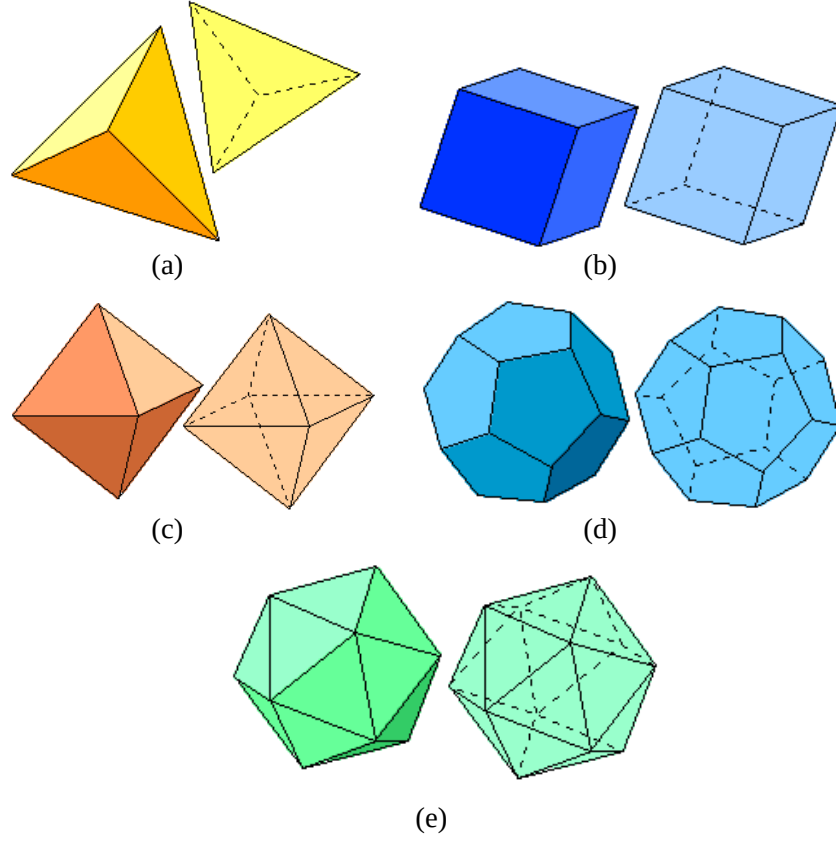
L'enveloppe convexe de $k+1$ points, $k \leq d$, non contenus dans un espace affine de dimension $k-1$ est un k -polytope particulier appelé simplexe ou plus généralement k -simplexe. Ainsi, en deux dimensions, le 2-simplexe n'est autre que le triangle alors qu'en trois dimensions, le 3-simplexe est le tétraèdre, en dimension quelconque, on parlera simplement de simplexe et, dans la suite, quand aucune ambiguïté ne sera possible, on parlera de simplexe quelle que soit la dimension de l'espace.

Les principaux résultats et formules que nous allons introduire dans la section suivante concernant le tétraèdre restent valables en dimension quelconque. Cela concerne les expressions permettant de calculer les volumes, les sphères circonscrites, les sphères inscrites et leurs rayons.

2.1.2 3-simplexe: le tétraèdre

Définition 2.2

Un tétraèdre T est un polyèdre ayant quatre faces triangulaires. Il est défini par un quadruplet, la liste orientée de ses quatre sommets est notée :


 FIG. 2.1 – *Les solides de Platon.*

(a) tétraèdre (b) hexaèdre ou cube (c) octaèdre (d) dodécaèdre (e) icosaèdre

$$T = \{A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)\} \quad (2.1)$$

Il existe douze façons (permutations) pour écrire le quadruplet définissant un tétraèdre orienté (sur les 24 permutations possibles sans orientation). Cette convention d'écriture permet d'une part de donner un sens de parcours aux sommets constituant les faces de l'élément assurant ainsi l'orientation de leurs normales, et d'autre part, de donner un signe à son volume, V_T , calculé par :

$$V_T = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

où x_i, y_i, z_i sont les coordonnées du sommet P_i de T .

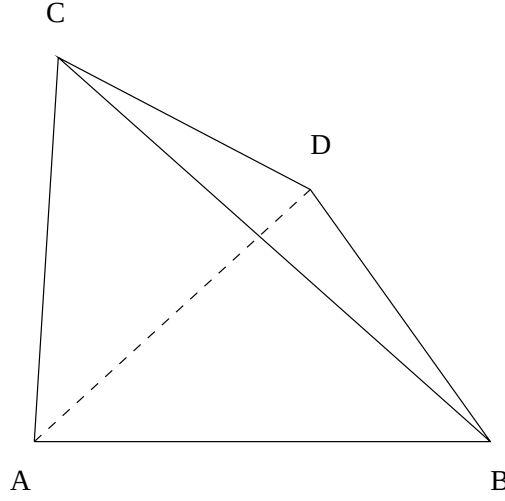


FIG. 2.2 – Un tétraèdre orienté avec les normales dirigées à l'extérieur.
 $face\ 1 = \{A, B, C\}$, $face\ 2 = \{A, D, B\}$, $face\ 3 = \{A, C, D\}$ et $face\ 4 = \{D, C, B\}$.

Cette convention d'écriture permet de définir implicitement les quatre faces de l'élément. Une face de T est alors un triplet orienté. Si on considère l'orientation des normales vers l'extérieur du tétraèdre et un parcours dans le sens trigonométrique autour de la normale, nous avons successivement (à une permutation près préservant l'orientation) :

$face\ 1 = \{A, B, C\}$, $face\ 2 = \{A, D, B\}$, $face\ 3 = \{A, C, D\}$ et $face\ 4 = \{D, C, B\}$.

De même les arêtes de T sont implicitement les doublets orientés suivants (il s'agit des arêtes considérées comme entités du tétraèdre et non comme entités des faces) :

$arête\ 1 = \overrightarrow{AB}$, $arête\ 2 = \overrightarrow{AC}$, $arête\ 3 = \overrightarrow{AD}$,
 $arête\ 4 = \overrightarrow{BC}$, $arête\ 5 = \overrightarrow{BD}$ et $arête\ 6 = \overrightarrow{CD}$.

La qualité ou la forme d'un tétraèdre est une valeur mesurant son aspect géométrique. Elle est fondée sur le calcul du volume, des longueurs d'arêtes, des sphères inscrites et circonscrites et des moments géométriques d'un tétraèdre. Notre intérêt pour cette notion provient du fait que la précision de la solution d'un calcul par une méthode d'éléments finis est directement liée à la qualité des éléments composant le maillage, support de ce calcul. Nous verrons, plus loin dans ce manuscrit (cf. section 3.3), les mesures de qualités que nous avons choisies pour nos maillages.

Ainsi, à chaque tétraèdre est associée sa **sphère circonscrite** dont le centre et le rayon s'obtiennent via l'équation :

$$\Delta_T(x, y, z) = \begin{vmatrix} l_1^2 - l^2 & l_2^2 - l_1^2 & l_3^2 - l_1^2 & l_4^2 - l_1^2 \\ x_1 - x & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_1 - y & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_1 - z & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

où $l = x^2 + y^2 + z^2$ et $l_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ ($i = 1, \dots, 4$),

ou en résolvant un système linéaire pour trouver le centre c_T . Ce système traduit que ce centre est à l'intersection des plans médiateurs des trois arêtes issues d'un sommet. En calculant la distance de ce point à l'un des sommets de T , nous obtenons le rayon r_T . Ainsi, nous avons pour le centre c_T :

$$c_T = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} l_2^2 - l_1^2 \\ l_3^2 - l_1^2 \\ l_4^2 - l_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Remarquons que cette dernière opération est moins coûteuse en nombre d'opérations que le calcul de l'équation 2.3.

Notons qu'il existe également une formule permettant d'exprimer le rayon explicitement en évitant le calcul du centre de la sphère.

$$r_T = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a-b+c)}}{24V_T} \quad (2.5)$$

où a, b, c sont les produits des longueurs de deux arêtes opposées.

La **sphère inscrite** a pour rayon $\rho_T = \frac{3V_T}{S_1+S_2+S_3+S_4}$ où S_i est l'aire de la face i du tétraèdre T .

TAB. 2.1 – Valeurs caractéristiques d'un élément unité régulier.

	S_i	S_T	V_T	r_T	ρ_T
tétraèdre	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{12}$

Les valeurs caractéristiques d'un tétraèdre unité régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux de côté unité, sont données dans la table 2.1.

Il existe également une formule explicite récente permettant de calculer les moments géométriques d'un tétraèdre.

Théorème 2.3 [SHEY-01]

Soit un tétraèdre $T(a, b, c) = T\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right)$ (cf. figure 2.3).

Le moment $m_{k_1, k_2, k_3}(T) = \int_T x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dx dy dz$ d'ordre $k = k_1 + k_2 + k_3$ s'exprime de la façon suivante :

$$m_{k_1, k_2, k_3} = \frac{|A| k_1! k_2! k_3!}{(k+3)!} \sum_{(k_{ij}) \in K} \frac{\prod_{j=1}^3 \left(\left(\sum_{i=1}^3 k_{ij} \right)! \right)}{\prod_{i,j}^3 (k_{i,j})} \prod_{i,j=1}^3 a_{ij}^{k_{ij}}$$

où $A = (a_{ij})$ est la matrice formée par les sommets a, b, c de T_i (i.e $a_{i1} = a_i$, $a_{i2} = b_i$, $a_{i3} = c_i$ pour $i = 1, 2, 3$) et K est l'ensemble de matrices (k_{ij}) de dimension 3×3 et à valeurs entières ($0 \leq k_{ij} \leq k_i$) tel que $\sum_{j=1}^3 k_{ij} = k_i$, $i = 1, 2, 3$.

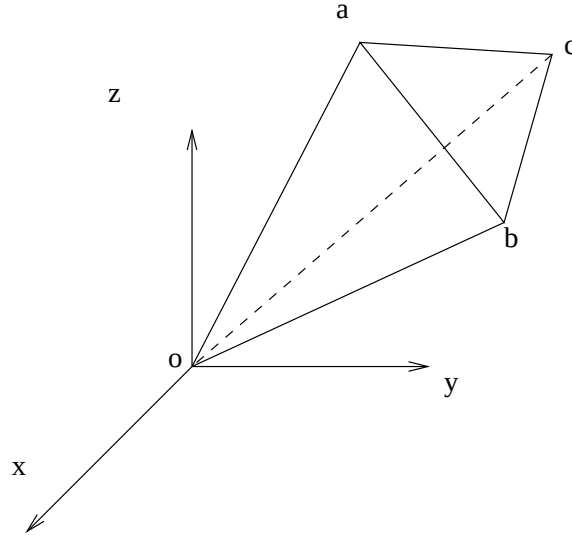


FIG. 2.3 – Définition du tétraèdre T pour le calcul du moment géométrique.

A titre d'exemple, les moments géométriques d'un tétraèdre T , jusqu'à l'ordre 2, sont donnés dans le tableau 2.2.

$m_{pqr}(T)$	$\int_T x^p y^q z^r dx dy dz$
$m_{000}(T)$	$\frac{1}{6} A $
$m_{100}(T)$	$\frac{1}{24} A (a_1 + b_1 + c_1)$
$m_{010}(T)$	$\frac{1}{24} A (a_2 + b_2 + c_2)$
$m_{001}(T)$	$\frac{1}{24} A (a_3 + b_3 + c_3)$
$m_{200}(T)$	$\frac{1}{60} A (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1)$
$m_{020}(T)$	$\frac{1}{60} A (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + b_2 c_2)$
$m_{002}(T)$	$\frac{1}{60} A (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 + b_3 c_3)$
$m_{110}(T)$	$\frac{1}{60} A (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + \frac{a_1 b_2 + a_1 c_2 + b_1 c_2 + a_2 b_1 + a_2 c_1 + b_2 c_1}{2})$
$m_{101}(T)$	$\frac{1}{60} A (a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 + \frac{a_1 b_3 + a_1 c_3 + b_1 c_3 + a_3 b_1 + a_3 c_1 + b_3 c_1}{2})$
$m_{011}(T)$	$\frac{1}{60} A (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 + \frac{a_2 b_3 + a_2 c_3 + b_2 c_3 + a_3 b_2 + a_3 c_2 + b_3 c_2}{2})$

TAB. 2.2 – Moments géométriques d'un tétraèdre $T = (a, b, c)$ jusqu'à l'ordre 2 (d'après [SHEY-01]).

2.1.3 Triangulation

Soit S un ensemble de points (en position quelconque¹) de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou $d = 3$), l'enveloppe convexe de S , notée $Conv(S)$, définit un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$. Si T désigne un simplexe (triangle ou tétraèdre selon la dimension de l'espace) alors :

Définition 2.4 [BOR-97]

T_r est un *recouvrement simplicial* de Ω si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (H_0) l'ensemble des sommets des éléments de T_r est exactement S
- (H_1) $\Omega = \overline{\bigcup_{T \in T_r} T}$ ($\overline{X}$ désigne l'adhérence de X),
- (H_2) tout élément T de T_r est d'intérieur non vide.
- (H_3) l'intersection des intérieurs de deux éléments est vide.

Il s'agit ici encore d'une définition naïve. La condition (H_2) n'est pas strictement nécessaire pour définir un recouvrement, elle est néanmoins réaliste vu notre propos, elle sera donc supposée vérifiée.

Pour la même raison, les recouvrements qui nous intéresseront seront conformes (cf. définition 2.5), on parlera alors de triangulation.

1. Le problème qui nous motive étant la réalisation de maillages de domaines quelconques, les points que nous considérons sont nécessairement en position quelconque et en aucun cas en position générale. Rappelons qu'un ensemble de points est dit en position générale s'il n'existe pas, en trois dimensions, de configurations de quatre points coplanaires ou cinq points cosphériques.

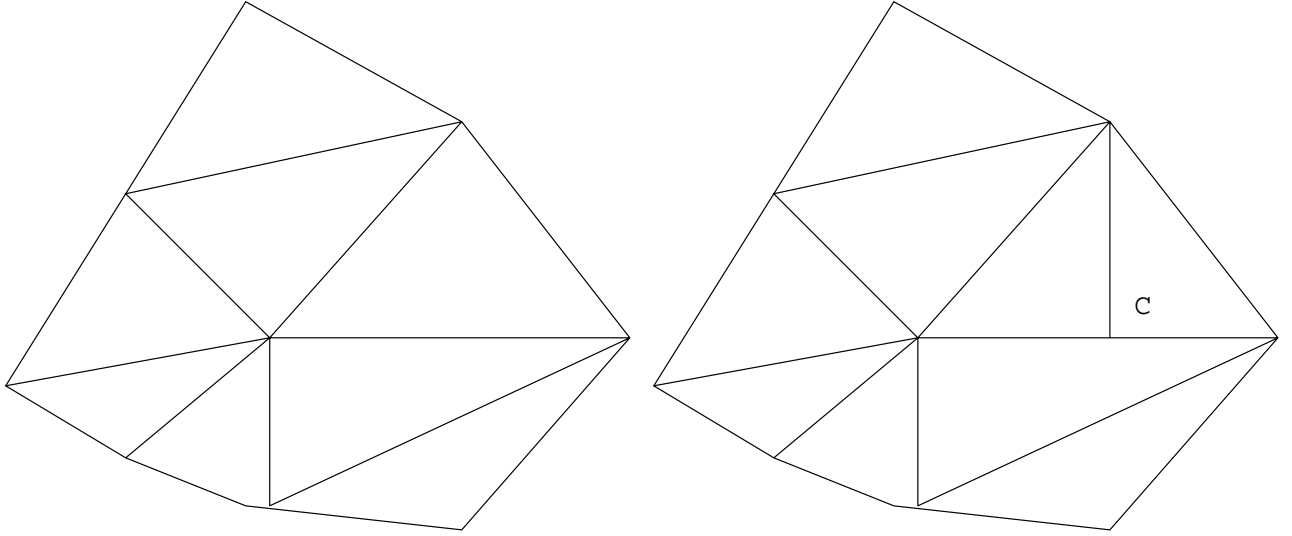


FIG. 2.4 – *Triangles conformes (à gauche) et non conformes (à droite). Remarquer le sommet C situé sur une arête dans ce dernier cas. D’après [FREY-99].*

Définition 2.5 [BOR-97]

T_r est une triangulation conforme ou simplement une triangulation de Ω si T_r est un recouvrement au sens de la définition 2.4 et si de plus la condition suivante est vérifiée :

- (H_4) l’intersection de 2 éléments de T_r est soit l’ensemble vide, soit un sommet, soit une arête ou soit une face.

Plus généralement, en d dimensions, une telle intersection doit être une k -face², pour $k = -1, \dots, d - 1$.

Il existe alors des relations liant le nombre k -faces ($k = 0, \dots, d - 1$) d’une triangulation de Ω , ce sont les formules dites d’Euler et plus généralement celles dites de Dehn-Sommerville.

Définition 2.6

On appelle caractéristique d’Euler (notée χ) d’une triangulation T_r , la somme alternée :

2. Une (-1) -face est l’ensemble vide, une 0 -face est un sommet, une 1 -face est arête, une k -face est en effet un k -simplexe avec $k < d$ (d étant la dimension de l’espace).

$$\chi = \sum_{k=0}^d (-1)^k n_k \quad (2.6)$$

où n_k , $k = 0, \dots, d$ désigne le nombre de ses k -faces.

Lorsque la triangulation est homéomorphe (cf. chapitre 4) à une boule topologique, sa caractéristique d'Euler χ est égale à 1. Si la triangulation est homéomorphe à une sphère topologique, sa caractéristique d'Euler χ est égale à $1 + (-1)^d$. En trois dimensions, la formule précédente devient :

$$n_s - n_a + n_f - n_e = 2 - 2g$$

où n_s , n_a , n_f , n_e et g désignent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes, de faces, de tétraèdres et le genre³ de la surface.

2.1.4 Maillage

On considère maintenant un problème différent. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, la question est ici de construire une triangulation conforme de ce domaine. Une telle triangulation sera appelée un **maillage** de Ω et sera notée T_r ou T_h ⁴.

Définition 2.7 [BOR-97]

T_h est un maillage de Ω si

- (H_1) $\Omega = \overline{\bigcup_{T \in T_h} T}$ (le fait de prendre l'adhérence garantit d'avoir Ω fermé),
- (H_2) l'intérieur de tout élément T de T_h est non vide
- (H_3) l'intersection de l'intérieur de deux éléments est vide.

L'hypothèse (H_2) est évidemment non vérifiée pour des éléments de types segments par exemple. La condition (H_3) interdit les chevauchements d'éléments. Par rapport à la définition d'une triangulation, on a perdu la condition (H_0) , ce qui revient à dire que les sommets ne sont pas, a priori, connus. Dans (H_1) , les T ne sont pas nécessairement des simplexes.

3. Le genre d'une surface est un entier qui est fonction du nombre de tunnels et de cavités de la surface.

4. Dans la méthode des éléments finis, les maillages sont traditionnellement notés par T_h , l'indice h de la notation faisant référence aux diamètres (arêtes maximales) des éléments du maillage, valeurs qui interviennent dans les théorèmes de majoration d'erreur.

La plupart des schémas numériques utilisant un maillage comme support spatial supposent que ce maillage soit conforme. Néanmoins cette propriété n'est pas strictement nécessaire pour certaines méthodes de résolution.

Définition 2.8 [BOR-97]

T_h est un maillage conforme de Ω si

- (H_1) , (H_2) et (H_3) sont vérifiées,
- (H_4) l'intersection de 2 éléments de T_r est soit l'ensemble vide, soit un sommet, soit une arête ou soit une face.

On retrouve donc, hormis pour (H_0) , l'ensemble des définitions relatives aux triangulations. La différence fondamentale entre une triangulation et un maillage est qu'une triangulation est un recouvrement de l'enveloppe convexe d'un nuage de points (ces derniers étant connus) composé, en général, d'éléments simpliciaux tandis qu'un maillage est un recouvrement d'un domaine donné, via une discrétisation de sa frontière, ce recouvrement pouvant comprendre des éléments non simpliciaux. On a en particulier deux problèmes nouveaux qui se posent :

- le **respect**, en un certain sens, de la frontière du domaine ce qui signifie que la triangulation est contrainte.
- la nécessité de **construire** le nuage de points sur lequel s'appuiera le maillage. Seuls les points de la frontière constituant la discrétisation de celle-ci sont généralement connus au départ.

Définition 2.9

La connexité d'un maillage définit le type de connexions entre ses éléments.

Un maillage est **structuré** si sa connexité est fixe et identique pour chaque élément du maillage.

Un maillage est **structuré** si sa connexité est quelconque.

2.1.5 Ensembles particuliers

Les algorithmes utilisés pour construire des triangulations et plus généralement des maillages utilisent un certain nombre d'ensembles particuliers d'éléments. L'objet de cette section est d'introduire ces ensembles⁵. Soient

5. On utilise à la fois, sous cette appellation, l'ensemble et la réunion des éléments. Le lecteur pourra différencier ces deux termes en fonction du contexte.

T_r une triangulation conforme, P un point de l'espace, supposé distinct de tout sommet de la triangulation. Notons par T un élément quelconque de T_r et par C_T la sphère circonscrite à T . Avec ces notations, les ensembles qui nous préoccupent sont maintenant définis.

Définition 2.10 [BOR-97]

Si P est un point inclus dans la triangulation, la **base** associée à P est l'ensemble des éléments de T_r contenant P . Dans le cas inverse où P est non inclus dans la triangulation, la **base** associée à P est l'ensemble des éléments formés en joignant P aux faces des éléments de la triangulation qui sont visibles⁶ de P . Si le point P est sur une face de la triangulation, la **base** est réduite à un élément. Si P est sur une arête de la triangulation, la **base** possède deux éléments.

Définition 2.11 [BOR-97]

Soit P un sommet d'un élément T , la **boule** associée à P est l'ensemble⁷ des éléments ayant P comme sommet.

Une boule est, en général, de cardinalité quelconque. Remarquons que la **boule** en question est un ensemble d'éléments et que cette notion sera utilisée en même temps que la notion topologique classique de boule (disque), le contexte devant permettre de lever l'éventuelle ambiguïté.

Définition 2.12 [BOR-97]

La **cavité** associée à un point P donné est l'ensemble⁸ des éléments de T_r dont la sphère circonscrite contient ce point.

Définition 2.13 [BOR-97]

Soit a une arête de T_r , la **coquille** (d'arêtes) associée à a est l'ensemble des éléments partageant cette arête.

6. Une face est dite visible d'un point extérieur d'une triangulation si aucune entité de la triangulation n'intersecte le tétraèdre formé par cette face et ce point.

7. Cet ensemble est également appelé en toute dimension ombrelle ou un éventail selon qu'il n'existe pas ou qu'il existe une (d-1)-face frontière de l'ensemble ayant P comme sommet. En fait, les boules que nous considérons sont des ombrelles au sens où P appartient à une arête de la triangulation.

8. Certains auteurs appellent tâche cet ensemble d'éléments.

L'arête a est dite arête de définition de la coquille. Cet ensemble, typique de la dimension trois, est en général de cardinalité quelconque. Il jouera un rôle majeur dans les algorithmes d'optimisation. Une coquille fermée (i.e l'arête de définition n'est pas sur une frontière) possède au moins trois éléments. Une coquille est donc associée à une arête, par abus de langage, nous appellerons également coquille l'ensemble des deux tétraèdres partageant une face, il s'agira alors d'une coquille d'une face.

Les sections suivantes vont s'efforcer à présent de mettre l'accent sur le type de maillage créé par les différentes méthodes de maillages. De ce point de vue, deux classes peuvent être identifiées, selon qu'elles conduisent à des maillages structurés ou non structurés (cf. sections 2.2 et 2.3).

2.2 Génération de maillages structurés

L'idée de base commune à toutes les méthodes de génération de maillages structurés consiste à mailler un domaine canonique (i.e une géométrie simple), et à reporter ensuite ce maillage dans l'espace physique défini à partir d'une discrétisation de sa frontière. Les principales méthodes de génération de maillages structurés reposent sur les méthodes d'interpolation algébrique (paragraphe 2.2.1), les méthodes fondées sur des E.D.P. (paragraphe 2.2.2), les méthodes multi-blocs (paragraphe 2.2.3) et les méthodes produit (paragraphe 2.2.4).

2.2.1 Méthodes d'interpolation algébrique

Une méthode algébrique pour la construction d'un maillage consiste à construire le maillage d'un domaine réel en utilisant une fonction donnée définie explicitement. Les références principales sur les méthodes algébriques, plus particulièrement pour des géométries de type quadrangle ou hexaèdre, sont [GORD-73] et [COOK-74] et, pour les méthodes de type interpolation transfinie, applicables à des formes simples, on trouvera une synthèse dans [PERR-98]. La fonction donnée est utilisée pour projeter (reporter) un maillage facile à construire dans un domaine logique $\widehat{\Omega}$ ayant une forme simple (carré unité, triangle unité, ...) sur le domaine réel Ω (voir figure 2.5). Par essence, le maillage logique ainsi créé est structuré. En général, la fonction de projection est polynomiale, les polynômes étant définis de manière à satisfaire certaines propriétés (sur les coordonnées des points et certaines dérivées).

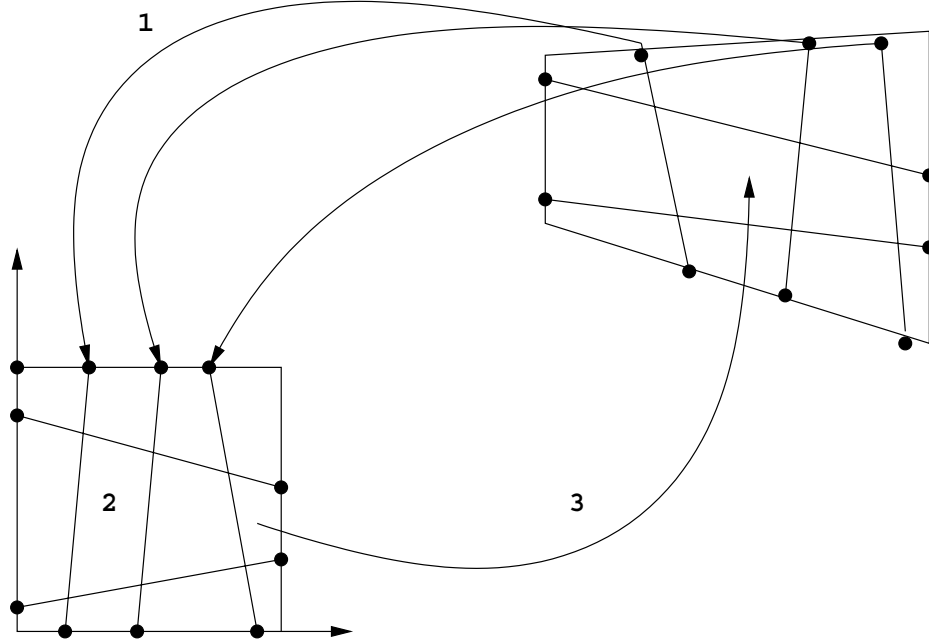


FIG. 2.5 – *Principe général d’une méthode algébrique (d’après [FREY-99]) dans le cas où le domaine Ω (à droite) est assimilé à un quadrangle. Trois étapes interviennent, le report des données sur le bord, le maillage du carré de référence ($\widehat{\Omega}$) et le report de ce maillage sur le domaine réel (étapes 1, 2 et 3 sur la figure) (d’après [FREY-99]).*

2.2.2 Méthodes fondées sur des E.D.P.

Les méthodes de génération de maillage par résolution d’équation aux dérivées partielles (E.D.P.) représentent une alternative élégante aux méthodes algébriques utilisables quand le domaine Ω peut être identifié à un cube en trois dimensions. La référence de base pour les méthodes par E.D.P. est [THOM-85]. Contrairement aux méthodes algébriques, on doit trouver une transformation du domaine vers ce cube, le domaine logique. Un système de génération est associé à une telle transformation, qui permet de construire le maillage voulu.

Dans ce qui suit, les variables x , y et z décrivent le domaine (voir figure 2.6) tandis que la région logique est décrite via les variables ξ, η, ζ . Le problème est maintenant de trouver les fonctions

$$x = x(\xi, \eta, \zeta) \quad y = y(\xi, \eta, \zeta) \quad z = z(\xi, \eta, \zeta)$$

selon la dimension de l’espace, en assurant que cette transformation envoie de façon bijective la région logique sur le domaine et que les frontières soient préservées.

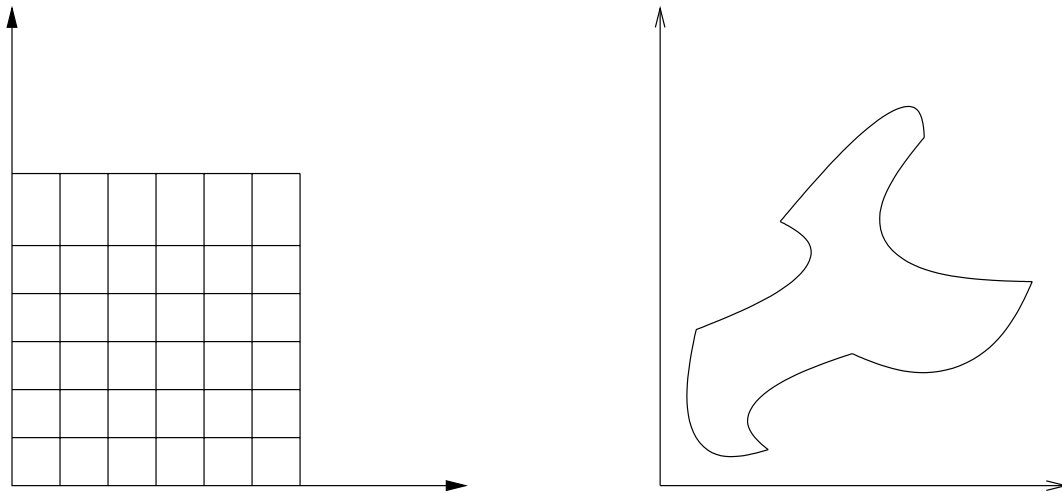


FIG. 2.6 – Exemple en 2D (d’après [FREY-99]).
Domaine logique (carré unité): coordonnées (ξ, η) à gauche. Domaine réel coordonnées (x, y) à droite.

2.2.3 Méthodes multi-blocs

Les méthodes algébriques ou par résolution d’E.D.P. sont peu adaptées aux géométries complexes. Par suite, d’autres méthodes sont à envisager si on veut pouvoir traiter de telles géométries. Les méthodes de type multi-blocs donnent une première réponse à ce problème. Dans cette approche, le domaine est décomposé en sous-domaines plus simples (i.e. les blocs). Chaque bloc est ensuite recouvert automatiquement avec un maillage structuré, résultant par exemple d’une technique algébrique ou d’une méthode fondée sur des E.D.P. Cette caractéristique rend l’approche multi-blocs adaptée aux calculs parallèles [FREY-99].

Plusieurs implantations de la méthode multiblocs sont possibles, en fonction des contraintes requises entre les blocs : les implantations avec recouvrement, par carreaux ou composites.

Dans le cas d’une implantation avec **recouvrement** (voir figure 2.7 en haut), aucune attention n’est portée sur les interfaces entre les blocs. Chaque bloc peut être maillé séparément pour chaque composante du domaine. Le maillage résultant est alors un système de sous-maillages se recouvrant partiellement. Bien que ces maillages soient faciles à générer, l’inconvénient principal de cette technique est lié au transfert de l’information entre maillages voisins (problème de conformité!) ainsi qu’à la précision de l’interpolation qui peut altérer la stabilité de la méthode.

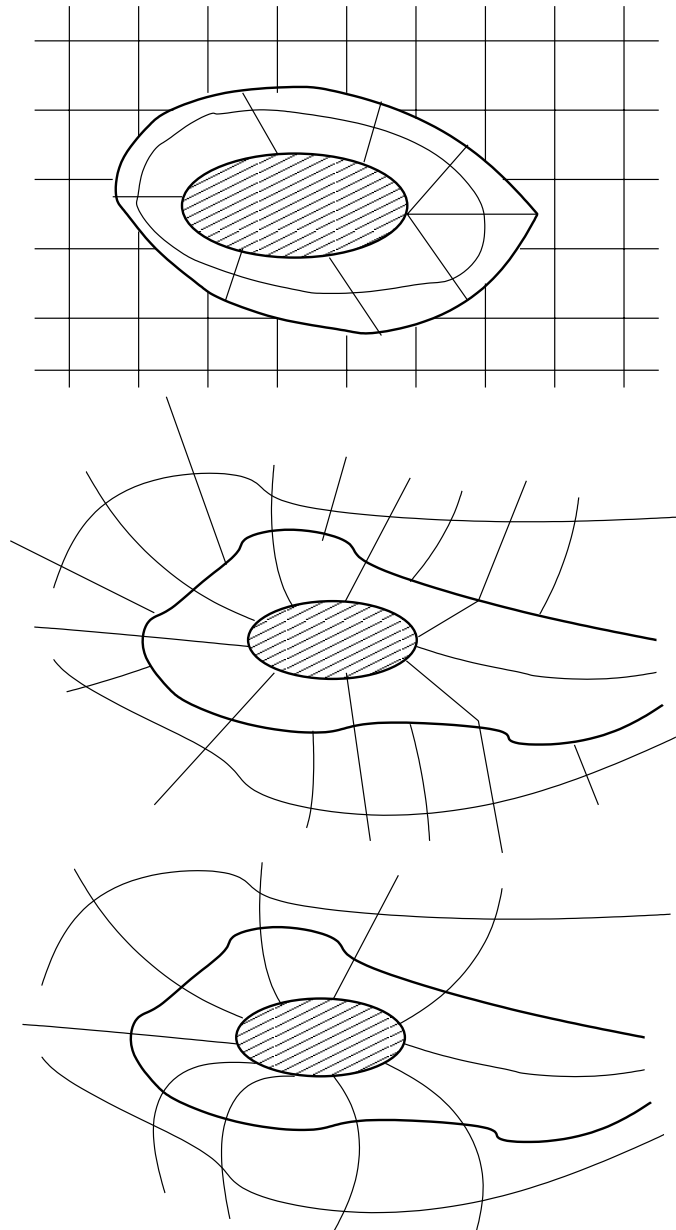


FIG. 2.7 – Plusieurs implantations de la méthode multi-blocs. Les frontières sont en trait épais (d'après [FREY-99]).

En haut, avec recouvrement.

Au centre par carreaux (les frontières ont des surfaces conformes mais des lignes de maillages sont discontinues).

En bas, composite (les lignes du maillage sont continues de part et d'autre de la frontière).

L'implantation par **carreaux** (voir figure 2.7 au centre) ajoute une contrainte supplémentaire à la méthode multi-blocs par recouvrement pour contraindre les maillages à être conformes aux surfaces de leurs frontières communes, les lignes du maillage pouvant être discontinues. Dans cette approche, la procédure d'interpolation est plus simple que celle par recouvrement et le raffinement du maillage peut varier dans certaines régions, sans toutefois affecter l'ensemble du maillage.

Enfin l'implantation **composite** (voir figure 2.7 en bas) impose que les lignes du maillage soient continues de part et d'autre des frontières, ce qui a pour effet de propager tout raffinement du maillage à l'ensemble du domaine. Cette technique requiert en outre une numérotation globale des sommets du maillage. Son principal avantage est d'améliorer la précision numérique qui en résulte.

2.2.4 Méthodes produit

Certaines géométries se prêtent à des traitements particuliers. Ainsi, le maillage d'un domaine de topologie cylindrique en dimension d peut s'obtenir facilement à partir du maillage d'une section en dimension $d-1$. Cette section est appelée la *base* ou la *source* (par exemple, en trois dimensions, un cylindre à base circulaire peut être défini au moyen d'un cercle et d'une direction). Plus précisément, un point conduit à une série de segments et un segment produit un ensemble de quadrangles. L'efficacité de la méthode est liée à la capacité de l'utilisateur à définir le maillage de référence.

En trois dimensions, le maillage bidimensionnel de base sert à fournir un motif à partir duquel le maillage final va être extrudé en suivant la direction donnée. Le nombre de couches (coupes) et leurs positions (i.e. les positions des noeuds le long de la ligne d'extrusion) peuvent être spécifiés implicitement (la discrétisation de la ligne est donnée) ou explicitement (au moyen d'une fonction d'étirement par exemple). Le maillage de référence est alors extrudé dans la direction voulue pour créer le nombre souhaité de couches d'éléments tridimensionnels entre une borne inférieure (la source) et une borne supérieure (la cible). En fonction du type d'élément bidimensionnel (triangle ou quadrangle) de la source, le maillage résultant quasi-régulier sera composé respectivement d'éléments prismatiques ou hexaédriques sauf dans des configurations particulières induisant des dégénérescences, ce qui constitue le défaut majeur de cette approche.

En général, comme le maillage de référence n'est pas nécessairement structuré, le maillage final n'est pas globalement structuré. Il ne l'est que dans la direction d'extrusion. En revanche, la connexité du maillage résultant est

déduite de celle du maillage source de façon évidente.

2.3 Génération de maillages non structurés

Une solution différente à la génération de maillages structurés consiste à utiliser des maillages composés de simplexes (i.e. des tétraèdres). Cette possibilité donne plus de souplesse lors de la construction du maillage. Elle permet ainsi de traiter toutes les géométries et donne une grande souplesse au processus de création des points et des éléments, rendant ainsi possible un contrôle de la distribution de ces points. Comme indiqué, les maillages non structurés sont principalement de nature simpliciale et les principales méthodes automatiques sont conçues à partir de tels éléments. Toutefois, il existe également des méthodes produisant des maillages non structurés formés d'hexaèdres. Néanmoins, de telles méthodes sont beaucoup plus délicates tant à concevoir qu'à mettre en oeuvre.

Trois approches rentrent principalement dans le cadre de ces méthodes automatiques : les techniques de décomposition spatiale (paragraphe 2.3.1), les méthodes par avancée de front (paragraphe 2.3.2), et les méthodes de type Delaunay (paragraphe 2.3.3).

2.3.1 Méthodes de décomposition spatiale

Les méthodes de décomposition spatiale ont été introduites dans le domaine de la génération de maillages il y a une quinzaine d'années [THA-80], [SHEP-88]. Dans ces approches, l'objet à mailler est d'abord approché sous la forme de l'union de boîtes ou cellules ayant une structure hiérarchique d'arbre (un octree en 3 dimensions) qui sert à la fois d'espace de voisinage (pour localiser un point) et d'espace de contrôle (pour trouver des informations métriques). Cet arbre est ensuite utilisé pour construire les éléments dont les tailles souhaitées sont liées aux tailles de ses cases.

Principe général. On construit en premier un recouvrement englobant le domaine. Ce recouvrement est formé de l'union de boîtes (cellules ou cases) de tailles variables qui sont disjointes et qui constituent une partition d'une boîte englobant le domaine. Les cellules sont récursivement subdivisées jusqu'à ce que la taille de chaque cellule terminale corresponde localement à la taille d'élément souhaitée. On obtient alors un recouvrement de la boîte englobante du domaine formé de cases dont la taille est liée aux tailles voulues. Les cellules terminales sont ensuite décomposées en éléments, généralement des simplexes (tétraèdres) de manière à obtenir un maillage conforme de type éléments finis. Le critère d'arrêt de la subdivision peut être soit fondé sur

la courbure des entités géométriques présentes dans les cases intersectant la frontière du domaine, soit fourni par un estimateur d'erreurs dans le cas d'un processus d'adaptation de maillages.

Caractéristiques principales. La technique de décomposition spatiale génère un ensemble de cellules de tailles compatibles avec la géométrie de la frontière et la fonction de distribution de tailles (si l'on dispose de cette information). De cette façon, comme la taille des cellules de l'arbre est directement liée à la taille locale voulue, on obtiendra pour les éléments une taille voisine de celle souhaitée. A la différence d'autres méthodes de génération de maillages, il n'y a pas de problème particulier lors de la création de points internes. En effet, les points internes sont choisis comme le coin des octants. De la sorte, la création des points internes est simple et permet d'éviter certains traitements (tel que le filtrage pour écarter des points trop proches). En revanche, ce choix de positionnement donne une certaine rigidité au maillage créé. En d'autres termes, la distribution des points peut être conforme par rapport aux contraintes de tailles des éléments, mais la position de ces points n'est pas nécessairement optimale. Par suite, le niveau d'optimisation requis après la création du maillage est généralement assez important.

2.3.2 Méthodes frontales

Introduite par [GEO-71] en deux dimensions, cette méthode a connu des développements significatifs depuis, proposés notamment dans [LO-85], plus récemment dans [RAS-95], [LOH-96] et [PER-97]. L'idée de base de cette méthode consiste à construire le maillage élément par élément, à partir d'un front initial (i.e. une discrétisation de la frontière du domaine sous forme d'une liste d'arêtes et de faces). Cette technique procède par création et insertion de points (ou en s'appuyant sur des points déjà créés) et par connexion de ces points à des entités du front pour former des éléments. La partie du domaine encore non maillée est donc progressivement réduite et le front se déplace dans le domaine. Le front peut être simplement défini comme la frontière, c'est-à-dire l'ensemble des entités du maillage (de dimension $d - 1$ si d est la dimension de l'espace), séparant la partie du domaine déjà maillée de la partie encore non maillée. L'algorithme procède itérativement. A chaque étape, une entité du front est choisie et un nouveau point (adéquat) est calculé et, éventuellement, inséré dans le maillage courant s'il permet de construire un nouveau tétraèdre de bonne qualité. A chaque création d'un tétraèdre, le front est mis à jour et évolue donc dynamiquement. Ce procédé itératif se termine lorsque le front est vide, le domaine étant alors entièrement maillé.

Points délicats. Parmi les problèmes récurrents de la méthode frontale, on peut citer la sélection d'une entité du front, l'identification des points (op-

timaux) candidats et la validation des éléments à partir de ces points. Toutes ces tâches doivent être assurées par des algorithmes robustes et efficaces, la convergence de la méthode dépendant étroitement de ceux-ci. En deux dimensions, un résultat théorique relatif à la triangulation de polygones simples sans points internes permet de garantir la convergence de la méthode frontale. Ce résultat ne s'étend pas à trois dimensions et le polyèdre de Schönhart constitue le contre-exemple de référence (voir figure 2.8).

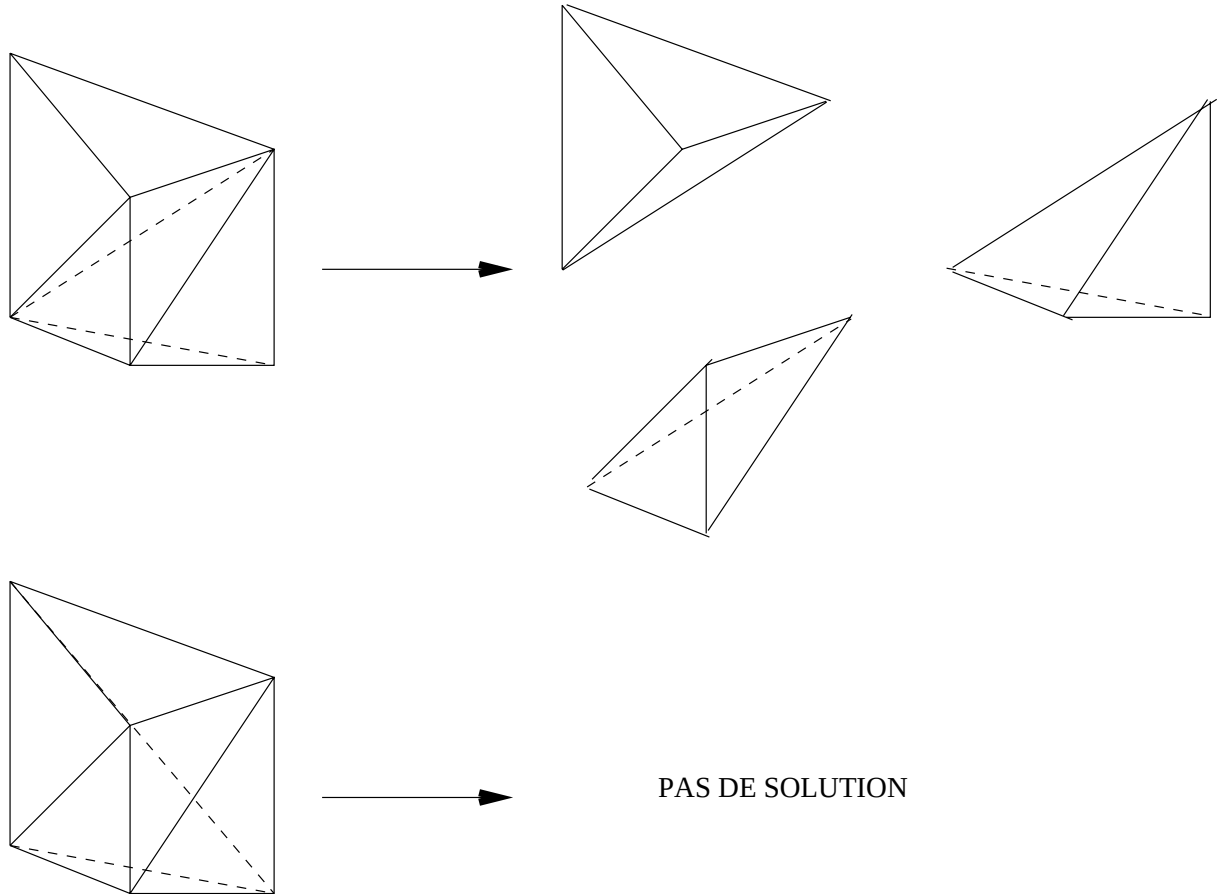


FIG. 2.8 – Le polyèdre de Schönhart : triangulation contrainte d'un prisme régulier conduisant à une décomposition valide sans ajout de point interne (en haut) ou donnant une configuration impossible à décomposer (en bas).

2.3.3 Méthodes de Delaunay

Les propriétés géométriques des triangulations de Delaunay ont été étudiées de longue date [DELA-34]. En 1850, Dirichlet a proposé une méthode de décomposition d'un domaine en un ensemble de polyèdres convexes [DIRI-1850]. Néanmoins, l'application de ces approches à la génération de maillages n'a

été explorée que beaucoup plus récemment dans [GREE-78], [HERME-80], [BOW-81], [WAT-81], [CEND-85] et également dans [CAV-85], [WEA-85]. Les stratégies ont eu pour but, dans un premier temps, de relier un ensemble de points prédéterminés par un maillage conforme sans pour autant optimiser la position de ces points. En outre, la triangulation de Delaunay d'un domaine ne préserve par l'intégrité de sa frontière, ce qui est l'un des prérequis des méthodes de génération de maillages et nécessite une attention particulière. La plupart des techniques actuelles d'insertion des points internes est fondée sur l'algorithme de Bowyer-Watson [BOW-81] ou sur celui de Green-Sibson [GREE-78].

La triangulation de Delaunay peut être introduite de différentes manières (en fonction du contexte d'application). Parmi celles-ci, il est commode d'utiliser son dual, le diagramme de Voronoï.

Définition 2.14 Soit $S = \{P_k\}$, $k = 1, \dots, N$ un ensemble fini de points. Le diagramme de Voronoï⁹ de S est l'ensemble des cellules V_i définies par :

$$V_i = \{P : d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \forall j \neq i\}$$

où $d(,)$ est la distance euclidienne entre deux points. Une cellule V_i est donc le lieu des points les plus proches géométriquement de P_i que de tout autre point de S . Les cellules de Voronoï ainsi construites sont des polyèdres convexes.

La *Triangulation de Delaunay* est construite en joignant toutes les paires de points $P_i P_j$ appartenant à deux régions de Voronoï adjacentes et est précisément le dual du diagramme de Voronoï associé à S . On obtient alors la triangulation ou tétraédrisation (en 3 dimensions) de l'enveloppe convexe des points P_i de S telle que les sommets des simplexes sont ces points.

L'ensemble des éléments de cette triangulation ou tétraédrisation (en 3 dimensions) satisfait la propriété ou *critère de Delaunay* suivante :

Propriété 2.15 [DELA-34]

Soit le domaine $\Omega = \text{Conv}(S)$, l'enveloppe convexe du nuage de points S .

Une triangulation T_r est la triangulation de Delaunay de Ω si les boules circonscrites aux éléments de T_r ne contiennent aucun sommet de S .

La propriété 2.15, aussi appelé critère de Delaunay, signifie que les boules ouvertes associées aux éléments de T_r ne contiennent aucun sommet (tandis

9. Connu également sous le nom de pavage de Dirichlet ou cellules de Voronoï.

que les boules fermées contiennent uniquement les sommets de l'élément en question). On a là une autre caractérisation de la triangulation de Delaunay.

D'un point de vue synthétique, la technique de Delaunay classique est une procédure itérative qui, à partir de la discrétisation de la frontière de l'objet à mailler, construit la triangulation contrainte de la boîte englobante du domaine puis s'assure de l'intégrité de la frontière avant d'insérer des points internes au moyen du critère de Delaunay. Notons que la triangulation et les maillages de type Delaunay appliqués aux méthodes d'éléments finis sont l'objet d'un livre entièrement consacré à ce sujet [BOR-97].

2.4 Conclusion

Une tâche difficile consiste à identifier clairement la méthode capable de fournir un maillage adapté aux besoins, en fonction du type d'application envisagée. Généralement, la géométrie du domaine et le problème physique à résoudre conditionnent le choix de la méthode de génération de maillages. Dans notre cas, nous cherchons à mailler les différents tissus de la tête afin de résoudre les équations de propagation des champs électromagnétiques engendrés par les courants neuronaux par une méthode aux éléments finis (F.E.M.). Les maillages structurés pour des géométries complexes telles que celles des tissus de la tête sont difficiles à obtenir de manière automatique. Dès lors, une génération de maillages non-structurés offre plus de souplesse pour notre problématique lors de la construction de maillage. Elle permet ainsi de traiter toute géométrie et donne une grande souplesse de création des points des éléments, rendant ainsi possible un certain contrôle de la distribution de ces points. La modélisation aux éléments finis pour le calcul du problème direct que nous utilisons est également de nature simpliciale; cela nous a donc conduit à étudier une méthode automatique conçue à partir de tels éléments [MAR-98]. La plupart des méthodes actuelles de génération de maillages non-structurés (octree, frontale et Delaunay) nécessitent d'avoir une description surfacique (triangulation) des objets.

Des descriptions surfaciques d'objets anatomiques cérébraux pour ces types d'approches sont très difficiles à générer. En fait, l'utilisation de ces générateurs de maillages pose un certain nombre de problèmes :

- Les approches surfaciques nécessitent une représentation polyédrique d'un objet. Etant donné que nous trouvons plusieurs composantes connexes dans le cas des tissus de la tête, la procédure de maillage devient beaucoup plus complexe car elle doit satisfaire des contraintes surfaciques importantes entre les interfaces.

- Etant donné la complexité géométrique des structures de la tête (notamment le cerveau), les représentations surfaciques des objets à mailler présentent un nombre important de sommets (entre 10^4 et 10^5) et sont non convexes. Cela complique alors les algorithmes fondés sur la géométrie et génère un nombre trop important d'éléments.

De telles contraintes ont donc orienté notre choix vers une approche volumique de maillage permettant d'avoir un seul maillage des tissus de la tête pour la résolution du problème direct et cela pour toutes les configurations de sources neuronales possibles. Notre approche, que nous allons décrire dans les chapitres suivants, est fondée sur une décomposition spatiale du domaine d'intérêt (voir chapitre 3) suivie de transformations préservant la topologie du maillage (voir chapitre 4).

CHAPITRE 3

Tétraédrisation presque régulière (*T.P.R.*) de $\mathbb{R}^3$

Les tétraèdres ayant un mauvais rapport de forme provoquent des instabilités numériques dans les méthodes aux éléments finis. Idéalement, un maillage tétraédrique devrait être constitué d'éléments ayant une forme proche du tétraèdre régulier (toutes les faces sont des triangles équilatéraux). D'autre part, le nombre de tétraèdres doit être compatible en termes de coût de calcul avec la résolution du problème direct en E.E.G. et M.E.G. Ainsi, la génération de maillage que nous proposons est fondée sur une décomposition récursive de l'espace en des tétraèdres ayant des arêtes presque égales, appelée tétraédrisation presque régulière de $\mathbb{R}^3$ (*T.P.R.*) dans laquelle la résolution (donc le nombre d'éléments) et la qualité des éléments sont contrôlées.

Après avoir défini mathématiquement une *T.P.R.* (cf. section 3.1) de $\mathbb{R}^3$, nous démontrons les propriétés de connexité (cf. section 3.2) et de qualité géométrique (cf. section 3.3) d'une telle tétraédrisation.

3.1 Tétraédrisation Presque Régulière de $\mathbb{R}^3$: Définition

Contrairement à la dimension deux, il n'existe pas de partition régulière tétraédrique de $\mathbb{R}^3$. Afin d'obtenir une partition aussi régulière que possible de $\mathbb{R}^3$, nous introduisons la notion d'invariance en subdivision d'un tétraèdre et la notion de tétraédrisation presque régulière.

Définition 3.1

Une tétraédrisation de $\mathbb{R}^3$ est **presque régulière** s'il est possible de paver $\mathbb{R}^3$ avec des tétraèdres dont la connexité est fixe pour tout tétraèdre.

Définition 3.2

Une transformation M telle que pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $M(x) = B.x + b$ avec $B \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $b \in \mathbb{R}^3$ s'appelle un **mouvement euclidien** si et seulement si $B \cdot B^t = Id$ et M est une bijection de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.3

Deux tétraèdres T_1 et T_2 sont **congruents** ($T_1 \sim T_2$) si et seulement si il existe un mouvement euclidien $M(x)$ tel que :

$$\{q \mid q \text{ Sommet de } T_1\} = \{M(p) \mid p \text{ Sommet de } T_2\}$$

La congruence n'impose aucune hypothèse sur la préservation d'orientation entre deux tétraèdres. Nous verrons d'ailleurs (démonstration du théorème 3.6) que l'orientation change lors de la subdivision d'un tétraèdre invariant par subdivision. Ainsi la conservation de l'orientation constitue un traitement distinct de la construction géométrique du maillage.

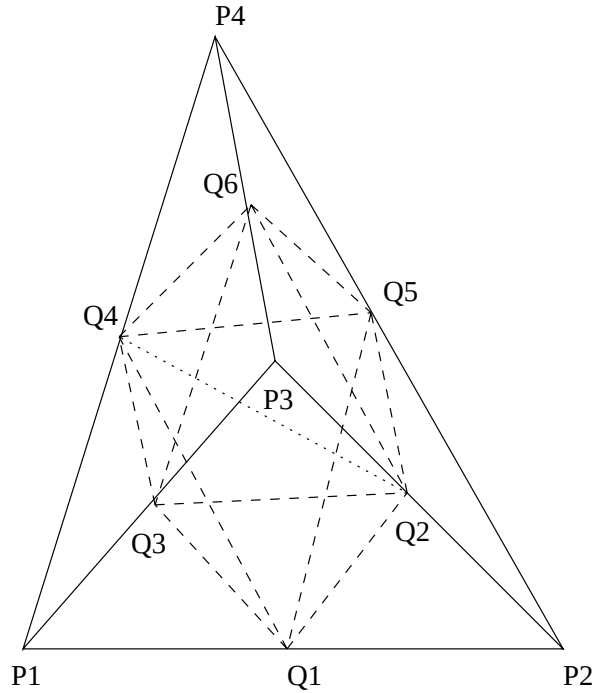


FIG. 3.1 – Un tétraèdre T *invariant par subdivision*.

Propriété 3.4 [PES-01]

Si $T_1 \sim T_2$ et $T_2 \sim T_3$ alors $T_1 \sim T_3$. La relation de congruence étant de plus réflexive et symétrique, c'est une relation d'équivalence.

preuve :

Soit p_i un sommet quelconque de T_1 , soit q_i un sommet quelconque de T_2 , soit r_i un sommet quelconque de T_3 alors :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow \forall p_i \in T_1 \exists! q_i \in T_2 \mid q_i = B_1.p_i + b_1 \\ T_2 \sim T_3 \Leftrightarrow \forall q_i \in T_2 \exists! r_i \in T_3 \mid r_i = B_2.q_i + b_2 \end{array} \right. \\ \Rightarrow r_i = B_2.(B_1.p_i + b_1) + b_2 \\ \Rightarrow r_i = B_2.B_1.p_i + B_2.b_1 + b_2 \\ \Rightarrow r_i = B_3.p_i + b_3 \\ \Rightarrow T_1 \sim T_3 \text{ car } B_3.B_3^t = B_2.B_1.B_1^t.B_2^t = Id \end{aligned}$$

et B_3 et b_3 définissent une bijection.

c.q.f.d.

Définition 3.5

Un tétraèdre T est **invariant par subdivision** (voir figure 3.1) s'il est possible de découper T en huit tétraèdres T_i tous congruents entre eux, chaque T_i étant construit en prenant le milieu des arêtes de T .

Théorème 3.6 [FUCH-96]

Un tétraèdre T ayant pour sommets $p_1, p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $p_4 = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2y_2 \\ 2z \end{pmatrix}$ avec $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_2 \geq 0$ et $y_1 > 0, z > 0$ est invariant par subdivision si et seulement s'il remplit une des quatre conditions suivantes :

<i>Condition 1</i>		
$0 \leq x_1 < \frac{1}{2}$	$x_2 = 2x_1$	$y_1^2 = 1 - x_1^2$
	$y_2^2 = \frac{(1+x_1)(1-2x_1)^2}{(1-x_1)}$	$z^2 = \frac{(1+x_1)(1-2x_1)}{(1-x_1)}$
<i>Condition 2</i>		
$y_2 > 0$	$x_1 = \frac{1}{3}$	$x_2 = \frac{2}{3}$
	$y_1 = 2y_2$	$z = \sqrt{3}y_2$
<i>Condition 3</i>		
$0 \leq x_1 < \frac{1}{2}$	$x_2 = 1 - x_1$	$y_1^2 = 1 - x_1^2$
	$y_2^2 = \frac{x_1^2(1+x_1)}{1-x_1}$	$z^2 = \frac{(1+x_1)(1-2x_1)}{(1-x_1)}$
<i>Condition 4</i>		
$0 < x_1 < 3$	$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 1)$	$y_1^2 = x_1(3 - x_1)$
	$y_2^2 = \frac{1}{4}x_1(3 - x_1)$	$z^2 = \frac{1}{4}(3 - x_1)$

preuve [FUCH-96] :

Hypothèse :

Soit $T = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un tétraèdre ayant pour sommets¹ :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } p_4 = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2y_2 \\ 2z \end{pmatrix} \text{ avec } x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0, y_2 \geq 0 \text{ et } y_1 > 0, z > 0.$$

Alors la subdivision de T fournit 8 tétraèdres notés (voir figure 3.1) :

$$\begin{array}{l|l} T_1 : p_1, q_1, q_3, q_4 & T_5 : q_1, q_2, q_4, q_5 \\ T_2 : q_1, p_2, q_2, q_5 & T_6 : q_2, q_3, q_1, q_4 \\ T_3 : q_3, q_2, p_3, q_6 & T_7 : q_6, q_4, q_2, q_5 \\ T_4 : q_4, q_5, q_6, p_4 & T_8 : q_3, q_4, q_2, q_6 \end{array}$$

où :

1. Le facteur 2 est introduit pour des raisons de simplicité de calcul.

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ milieu de } p_1p_2 & q_2 &= \begin{pmatrix} 1+x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ milieu de } p_2p_3 \\
 q_3 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ milieu de } p_1p_3 & q_4 &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix} \text{ milieu de } p_1p_4 \\
 q_5 &= \begin{pmatrix} 1+x_2 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix} \text{ milieu de } p_2p_4 & q_6 &= \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z \end{pmatrix} \text{ milieu de } p_3p_4
 \end{aligned}$$

A présent, nous allons montrer quelles conditions nécessaires et suffisantes les sommets des tétraèdres T_i ($i = 1, \dots, 8$) doivent remplir pour qu'ils soient congruents. En exprimant ces conditions, nous montrons alors par définition l'invariance par subdivision du tétraèdre T (définition 3.5). Pour cela, il faut et il suffit que l'on montre que chaque tétraèdre T_i est congruent à T_1 (propriété 3.4). Pour les tétraèdres T_1 à T_4 , la congruence est immédiate :

Mouvement Euclidien ($M(x) = B(x) + b$)		Congruence
$B(x) = Id$ et $b = (0, 0, 0)$	$\Rightarrow$	$T_1 \sim T_1$
$B(x) = Id$ et $b = (-1, 0, 0)$	$\Rightarrow$	$T_2 \sim T_1$
$B(x) = Id$ et $b = (-x_1, -y_1, 0)$	$\Rightarrow$	$T_3 \sim T_1$
$B(x) = Id$ et $b = (-x_2, -y_2, -z)$	$\Rightarrow$	$T_4 \sim T_1$

Pour les tétraèdres T_i ($i = 5, 6, 7$, et 8), la congruence ne se résume pas à une simple translation. Mais d'abord, montrons que, d'une part, T_5 et T_8 sont congruents entre eux et d'autre part T_6 et T_7 sont congruents entre eux.

T_5 et T_8 sont congruents par transitivité (cf. propriété 3.4) entre eux par le tétraèdre

$$T_{58} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix} \right\} \text{ car :}$$

Mouvement Euclidien ($M(x) = B(x) + b$)		Congruence
$B(x) = -Id$ et $b = ((1+x_2), y_2, z)$	$\Rightarrow$	$T_5 \sim T_{58}$
$B(x) = Id$ et $b = (x_1, y_1, 0)$	$\Rightarrow$	$T_{58} \sim T_8$

T_6 et T_7 sont congruents par transitivité (cf. propriété 3.4) entre eux par le tétraèdre

$$T_{67} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-x_1 \\ -y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z \end{pmatrix} \right\} \text{ car :}$$

Mouvement Euclidien ($M(x) = B(x) + b$)		Congruence
$B(x) = Id$ et $b = (-x_1, -y_1, 0)$	$\Rightarrow$	$T_6 \sim T_{67}$
$B(x) = -Id$ et $b = ((1 + x_2), y_2, z)$	$\Rightarrow$	$T_{67} \sim T_7$

Maintenant, il suffit de montrer quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur T_1 pour que $T_{58} \sim T_1$ et $T_{67} \sim T_1$. Pour cela, nous devons déterminer les 24 transformations $M(x)$ possibles pour que 2 tétraèdres soient congruents entre eux. Ces transformations s'obtiennent de la façon suivante :

Soient $T_A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et $T_C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ 2 tétraèdres. Il existe a priori 24 transformations $M(x)$ possibles pour que les 2 tétraèdres soient congruents entre eux ($T_C \sim T_A$). Ces transformations s'obtiennent par le système d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} M(c_1) = a_i \ (i = 1, 2, 3, 4) & \Rightarrow & b = a_i - B \cdot c_1 \\ M(c_2) = [a_1, a_2, a_3, a_4]f_1 & \Rightarrow & B(c_2 - c_1) + a_i = [a_1, a_2, a_3, a_4]f_1 \\ M(c_3) = [a_1, a_2, a_3, a_4]f_2 & \Rightarrow & B(c_3 - c_1) + a_i = [a_1, a_2, a_3, a_4]f_2 \\ M(c_4) = [a_1, a_2, a_3, a_4]f_3 & \Rightarrow & B(c_4 - c_1) + a_i = [a_1, a_2, a_3, a_4]f_3 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où $(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3, e_4) \setminus e_i$ avec e_1, e_2, e_3, e_4 les vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^4$. L'ensemble $C = (f_1, f_2, f_3)$ des triplets correspond en fait à tous les arrangements de trois vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^4$ parmi les 4 vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^4$; sa cardinalité est donc de 24 ! Nous noterons $F = (f_1, f_2, f_3)$ la matrice 4×3 formée d'un représentant de l'ensemble C .

Par exemple si $F = (e_2, e_3, e_4)$ alors $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi le système 3.1 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} B \cdot [c_2 - c_1, c_3 - c_1, c_4 - c_1] + [a_i, a_i, a_i] &= [a_1, a_2, a_3, a_4] \cdot [f_1, f_2, f_3] \\ &\Leftrightarrow \\ B \cdot [c_2 - c_1, c_3 - c_1, c_4 - c_1] &= [a_1, a_2, a_3, a_4] \cdot [f_1, f_2, f_3] - [a_i, a_i, a_i] \\ &\Leftrightarrow \\ B \cdot [c_2 - c_1, c_3 - c_1, c_4 - c_1] &= [a_1, a_2, a_3, a_4] \cdot [f_1, f_2, f_3] - [a_i, a_i, a_i] \cdot [f_1, f_2, f_3] \\ &\Leftrightarrow \\ B \cdot [c_2 - c_1, c_3 - c_1, c_4 - c_1] &= [a_1 - a_i, a_2 - a_i, a_3 - a_i, a_4 - a_i] \cdot [f_1, f_2, f_3] \\ &\Leftrightarrow \\ B \cdot Q &= PF \\ \Rightarrow B &= (PF)Q^{-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où B est une matrice 3×3 , P est 3×4 , F est 4×3 et Q est une matrice 3×3 .

Or par hypothèse, M est un mouvement euclidien donc $BB^T = Id$ (définition 3.2). En remplaçant B par sa valeur dans l'équation 3.2, on obtient :

$$\begin{aligned} (PF) \cdot Q^{-1}[(PF)Q^{-1}]^T &= Id \\ \Leftrightarrow (PF) \cdot Q^{-1}Q^{T^{-1}}(PF)^T &= Id \\ \Leftrightarrow (Q^T Q)^{-1} &= (PF)^{-1}(PF)^{T^{-1}} \\ \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$Q^T Q = F^T P^T P F \quad (3.3)$$

L'équation 3.3 permet de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées des sommets d'un tétraèdre T_A pour qu'il soit congruent à T_C . Vous trouverez en Annexe A.1, les 24 matrices symétriques du terme de droite ($F^T P^T P F$) de l'équation 3.3 pour qu'un tétraèdre T_C soit congruent au tétraèdre $T_A = T_1$.

Montrons à présent quelles sont les conditions sur les coordonnées de T_1 pour que $T_{58} \sim T_1$ (ainsi que $T_5 \sim T_1$ et $T_8 \sim T_1$ car $T_8 \sim T_{58} \sim T_5$)

$$\text{avec } T_{58} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Soit } Q(T_{58}) = [c_2 - c_1, c_3 - c_1, c_4 - c_1] = \begin{bmatrix} 1 & x_2 - x_1 & x_2 \\ 0 & y_2 - y_1 & y_2 \\ 0 & z & z \end{bmatrix}.$$

$$\text{Si } a_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \{e_2, e_3, e_4\} \text{ l'équation 3.3 devient :}$$

$$\begin{aligned} Q^T Q &= F^T P^T P F \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 &= x_1 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2 &= x_1^2 + y_1^2 \\ x_2(x_2 - x_1) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 &= x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 &= 2x_1 \\ y_2^2 - 2y_1 y_2 + z^2 &= 0 \\ 2x_1^2 + y_2^2 - y_1 y_2 + z^2 &= 2x_1^2 + y_1 y_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$L_1 : x_2 = 2x_1 \text{ et } y_2^2 - 2y_1 y_2 + z^2 = 0 \quad (3.4)$$

Si $a_i = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix}$ et $F = \{e_2, e_3, e_1\}$ l'équation 3.3 devient :

$$\begin{aligned}
 Q^T Q &= F^T P^T P F \\
 &\Leftrightarrow \\
 \begin{cases} 1 &= (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 \\ x_2 - x_1 &= (1 - x_2)(x_1 - x_2) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 \\ x_2 &= x_2(x_2 - 1) + y_2^2 + z^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \\
 \begin{cases} 2x_2 &= x_2^2 + y_2^2 + z^2 \\ x_2 - x_1 &= 2x_2 + x_1 - x_2 - x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_2 &= 2x_2 - x_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \\
 \begin{cases} x_2^2 + y_2^2 + z^2 &= 2x_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2 &= 2x_1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$L_2 : (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 = 1 \text{ et } x_1x_2 + y_1y_2 = 2x_1 \quad (3.5)$$

Les 22 autres équations 3.3 ne donnent pas d'autres conditions sur les coordonnées des sommets de T_1 pour que $T_{58} \sim T_1$. Ainsi, il faut et il suffit que les sommets de T_1 suivent soit la condition 3.4, soit la condition 3.5 afin que $T_5 \sim T_1$ et $T_8 \sim T_1$.

Etudions à présent quelles sont les conditions sur les coordonnées de T_1 pour que $T_6 \sim T_1$ (ainsi que $T_7 \sim T_1$ car $T_6 \sim T_{67} \sim T_7$)

$$\text{avec } T_6 = \{c_2, c_3, c_1, c_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Soit } Q(T_6) = [c_2 - c_1, c_3 - c_1, c_4 - c_1] = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 - 1 & x_2 - 1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}.$$

Si $a_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{e_1, e_3, e_4\}$, l'équation 3.3 devient alors :

$$\begin{aligned}
 Q^T Q &= F^T P^T P F \\
 &\Leftrightarrow \\
 \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 &= 1 \\ x_1(x_1 - 1) + y_1^2 &= (1 - x_1) \\ x_1(x_2 - 1) + y_1y_2 &= (1 - x_2) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$L_3 : x_1^2 + y_1^2 = 1 \text{ et } x_1x_2 + y_1y_2 = 1 - x_2 + x_1 \quad (3.6)$$

Si $a_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{e_1, e_2, e_4\}$, l'équation 3.3 devient alors :

$$\begin{aligned}
 Q^T Q &= F^T P^T P F \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(x_2 - 1) + y_1 y_2 &= x_1(x_1 - x_2) - y_1(y_2 - y_1) \\ (1 - x_1)(1 - x_2) + y_1 y_2 &= (1 - x_1)(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1) \\ (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2^2 - y_1^2) + z^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 x_2 + 2y_1 y_2 &= x_1^2 + y_1^2 + x_1 \\ 2x_1 x_2 + 2y_1 y_2 &= x_1^2 + y_1^2 + 2x_2 - 1 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (x_2 - 1)^2 + y_2^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 2x_2 - 1 \\ 2(2x_2 - 1)x_2 + 2y_1 y_2 &= (2x_2 - 1)^2 + y_1^2 + 2x_2 - 1 \\ (1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (x_2 - 1)^2 + y_2^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 2x_2 - 1 \\ y_1 &= 2y_2 \text{ car } y_1 > 0 \\ (-y_2)^2 &= y_2^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow L_4 : x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 1) \text{ et } y_1 = 2y_2 \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Les 22 autres équations 3.3 ne donnent pas d'autres conditions sur les coordonnées des sommets de T_1 pour que $T_6 \sim T_1$. Ainsi, il suffit que les sommets de T_1 suivent la condition 3.6 ou la condition 3.7 pour que $T_6 \sim T_1$ et $T_7 \sim T_1$.

En conclusion, les conditions L_i donnent **indépendamment** les contraintes nécessaires et suffisantes sur les sommets de T_1 pour que T_5 et T_6 soient congruents à T_1 . Maintenant si nous regroupons l'ensemble des contraintes L_i pour que T_5 et T_6 soient congruents de façon non indépendante à T_1 , cela revient à dire que si un tétraèdre T_1 est invariant en subdivision alors ses sommets doivent vérifier l'une des quatre conditions suivantes :

- $C_1 = L_1$ et L_3 ,
- $C_2 = L_1$ et L_4 ,
- $C_3 = L_2$ et L_3 ,
- $C_4 = L_2$ et L_4 .

Soit :

$C_1 = L_1 \text{ et } L_3$
$\begin{array}{ll} x_2 = 2x_1 & y_2^2 - 2y_1y_2 + z^2 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = 1 & x_1x_2 + y_1y_2 = 1 - x_2 + x_1 \end{array}$
$C_2 = L_1 \text{ et } L_4$
$\begin{array}{ll} x_2 = 2x_1 & y_2^2 - 2y_1y_2 + z^2 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 1) & y_1 = 2y_2 \end{array}$
$C_3 = L_2 \text{ et } L_3$
$\begin{array}{ll} x_1x_2 + y_1y_2 = 2x_1 & (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 = 1 \\ x_1^2 + y_1^2 = 1 & x_1x_2 + y_1y_2 = 1 - x_2 + x_1 \end{array}$
$C_4 = L_2 \text{ et } L_4$
$\begin{array}{ll} x_1x_2 + y_1y_2 = 2x_1 & (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 1) & y_1 = 2y_2 \end{array}$

$\Longleftrightarrow$

Condition 1	$C_1 = L_1 \text{ et } L_3$
$\begin{array}{l} x_2 = 2x_1 \\ y_2^2 = \frac{(1+x_1)(1-2x_1)^2}{(1-x_1)} \\ \text{or } y_2^2 > 0 \text{ si } x_1 < 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} y_1^2 = 1 - x_1^2 \\ z^2 = \frac{(1+x_1)(1-2x_1)}{(1-x_1)} \\ \text{or } z^2 > 0 \text{ si } x_1 < \frac{1}{2} \end{array} \quad \text{donc } 0 \leq x_1 < \frac{1}{2}$
Condition 2	$C_2 = L_1 \text{ et } L_4$
$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} \\ y_1 = 2y_2 \\ \text{or } y_1 > 0 \text{ donc } y_2 > 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} x_2 = \frac{2}{3} \\ z = \sqrt{3}y_2 \end{array}$
Condition 3	$C_3 = L_2 \text{ et } L_3$
$\begin{array}{l} x_2 = 1 - x_1 \\ y_2^2 = \frac{x_1^2(1+x_1)}{1-x_1} \\ \text{or } y_2^2 > 0 \text{ si } x_1 < 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} y_1^2 = 1 - x_1^2 \\ z^2 = \frac{(1+x_1)(1-2x_1)}{(1-x_1)} \\ \text{or } z^2 > 0 \text{ si } x_1 < \frac{1}{2} \end{array} \quad \text{donc } 0 \leq x_1 < \frac{1}{2}$
Condition 4	$C_4 = L_2 \text{ et } L_4$
$\begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + 1) \\ y_2^2 = \frac{1}{4}x_1(3 - x_1) \\ \text{or } y_2^2 > 0 \text{ si } x_1 < 3 \text{ et si } x_1 > 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} y_1^2 = x_1(3 - x_1) \\ z^2 = \frac{1}{4}(3 - x_1) \\ \text{donc } 0 < x_1 < 3 \end{array}$

c.q.f.d

3.2 Etude de la connexité d'une T.P.R. de $\mathbb{R}^3$

Lemme 3.7 [FUCH-96]

Six tétraèdres invariants par subdivision forment un parallélépipède P ayant pour sommets :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$s_5 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix}, s_6 = \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix}, s_7 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$s_8 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 \\ z \end{pmatrix}$$

avec x_1, y_1, x_2, y_2 et z satisfaisant une des condition C_i du Théorème 3.6.

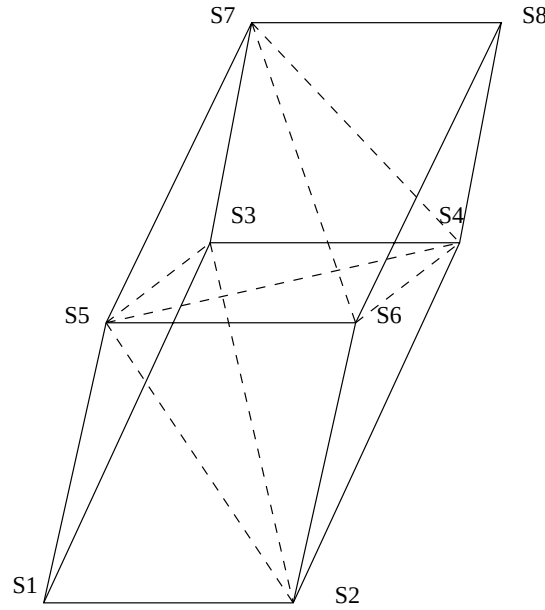


FIG. 3.2 – Parallélépipède P formé de six tétraèdres invariants par subdivision.

preuve :

Soit P un parallélépipède.

Nous construisons 3 tétraèdres invariants par subdivision dans le parallélépipède P qui sont :

$$\begin{aligned} T_{P1} = T_1 &= \{s_1, s_3, s_2, s_5\}, T_{P2} = T_6 = \{s_4, s_2, s_3, s_5\}, \\ T_{P3} = T_5 &= \{s_2, s_5, s_4, s_6\} \end{aligned}$$

Dans la démonstration du Théorème 3.6, nous avons montré que T_1, T_5 , et T_6 étaient invariants par subdivision. Ensuite, nous remarquons que $T_{P4} = \{s_3, s_4, s_5, s_7\}$, $T_{P5} = \{s_6, s_5, s_4, s_7\}$ et $T_{P6} = \{s_6, s_4, s_8, s_7\}$ sont les tétraèdres symétriques de T_{P2} , T_{P3} et T_{P1} par rapport au plan formé par les sommets s_5, s_6, s_3 et s_4 .

c.q.f.d.

Propriété 3.8 [PES-01]

Une triangulation de $\mathbb{R}^3$ construite à partir d'un tétraèdre invariant par subdivision possède les propriétés de connexité suivantes :

1. elle possède les connexités 4 pour les faces, 18 pour les arêtes et 70 pour les sommets,
2. chaque sommet est commun à 24 tétraèdres.

Preuve. cf. Annexe A.2

3.3 Qualité géométrique d'une *T.P.R.* de $\mathbb{R}^3$

Le but, quand on construit un maillage n'est pas simplement de créer un maillage du domaine considéré mais d'obtenir un maillage de bonne qualité. La question immédiate est alors : «Qu'est ce qu'un maillage de bonne qualité?». Dans le cas d'une simulation numérique par éléments finis, c'est l'estimateur d'erreurs qui permet de trancher. Dans d'autre cas, par exemple si le problème est de visualiser une surface via son maillage, la qualité doit être évaluée en considérant la qualité d'approximation ou du rendu de la vraie surface par son maillage. Dans notre cas, nous nous intéresserons uniquement au cas d'une simulation numérique par éléments finis, c'est pourquoi nous soulignons le fait que le rendu de la vraie surface n'est pas notre but.

En l'absence d'estimateurs d'erreurs, on ne peut que préjuger de ce que doit être la qualité du maillage et traduire ce point en termes de fonction de qualité **géométrique** des éléments du maillage. D'où la définition suivante :

Définition 3.9 [FREY-99]

La **Qualité** Q_M d'un maillage T_h est liée à la qualité **géométrique** de ses éléments.

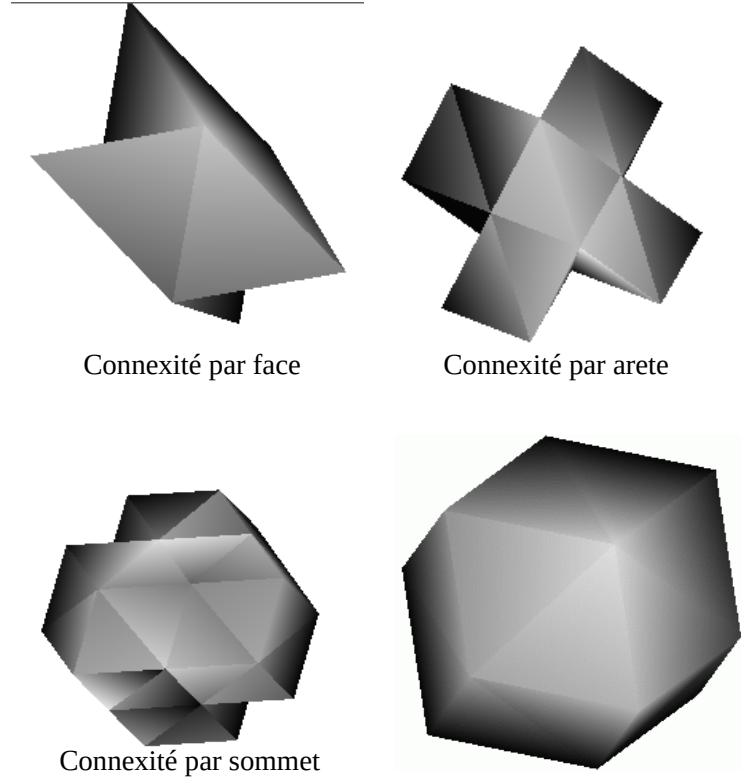


FIG. 3.3 – *Connexité par face, arête et sommet et le polyèdre commun à 24 tétraèdres d'une T.P.R.T.*

Il existe de nombreuses mesures possibles. Parmi celles-ci, nous en retiendrons deux. La première mesure de qualité Q_{T_α} d'un élément T est donnée par :

$$Q_{T_\alpha} = \alpha \frac{h_{max}}{\rho_T} = \alpha \frac{h_{max} S_T}{3V_T} \quad (3.8)$$

où :

- α est un coefficient de normalisation assurant une qualité **unité** pour un tétraèdre ayant toutes ses faces équilatérales ($\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$),
- h_{max} est la longueur du plus grand côté (appelé également **diamètre** de l'élément),
- ρ_T est le rayon de cercle inscrit,
- S_T est la somme des S_i (S_i étant l'aire de la face i).

Cette qualité Q_{T_α} mesure parfaitement la forme ou l'aspect d'un élément. On notera qu'elle varie de 1 à l' ∞ ; pour obtenir une variation de 0 à 1, il suffit de considérer l'inverse de Q_{T_α} .

Une autre mesure possible Q_{T_β} de qualité géométrique d'un élément T est également souvent utilisée. Elle est donnée par :

$$Q_{T_\beta} = \beta \frac{h_s^3}{V_T} \quad (3.9)$$

où :

- β un coefficient de normalisation ($\beta = \frac{\sqrt{3}}{216}$),
- $h_s = \sqrt{\sum_{i=1}^6 L_i^2}$, L_i étant la longueur du coté i du tétraèdre.

Cette qualité Q_{T_β} mesure également l'aspect d'un élément mais semble moins sensible que la première en particulier pour discriminer les «mauvais» éléments en fonction de leur aspect géométrique. Nous noterons que cette qualité Q_{T_β} est différentiable. Cette propriété est nécessaire pour certaines procédures d'optimisation de maillages [BOR-97].

On trouvera dans [PAR-93] un catalogue de mesures de qualité différentes ainsi que l'analyse de sensibilité correspondante.

En résumé, la qualité d'un maillage s'apprécie au travers de plusieurs aspects :

1. une qualité globale définie comme $Q_M = \max_{T \in T_h} Q_T$,
2. la répartition des éléments en fonction de leur qualité,
3. et la comparaison entre Q_M et une valeur cible.

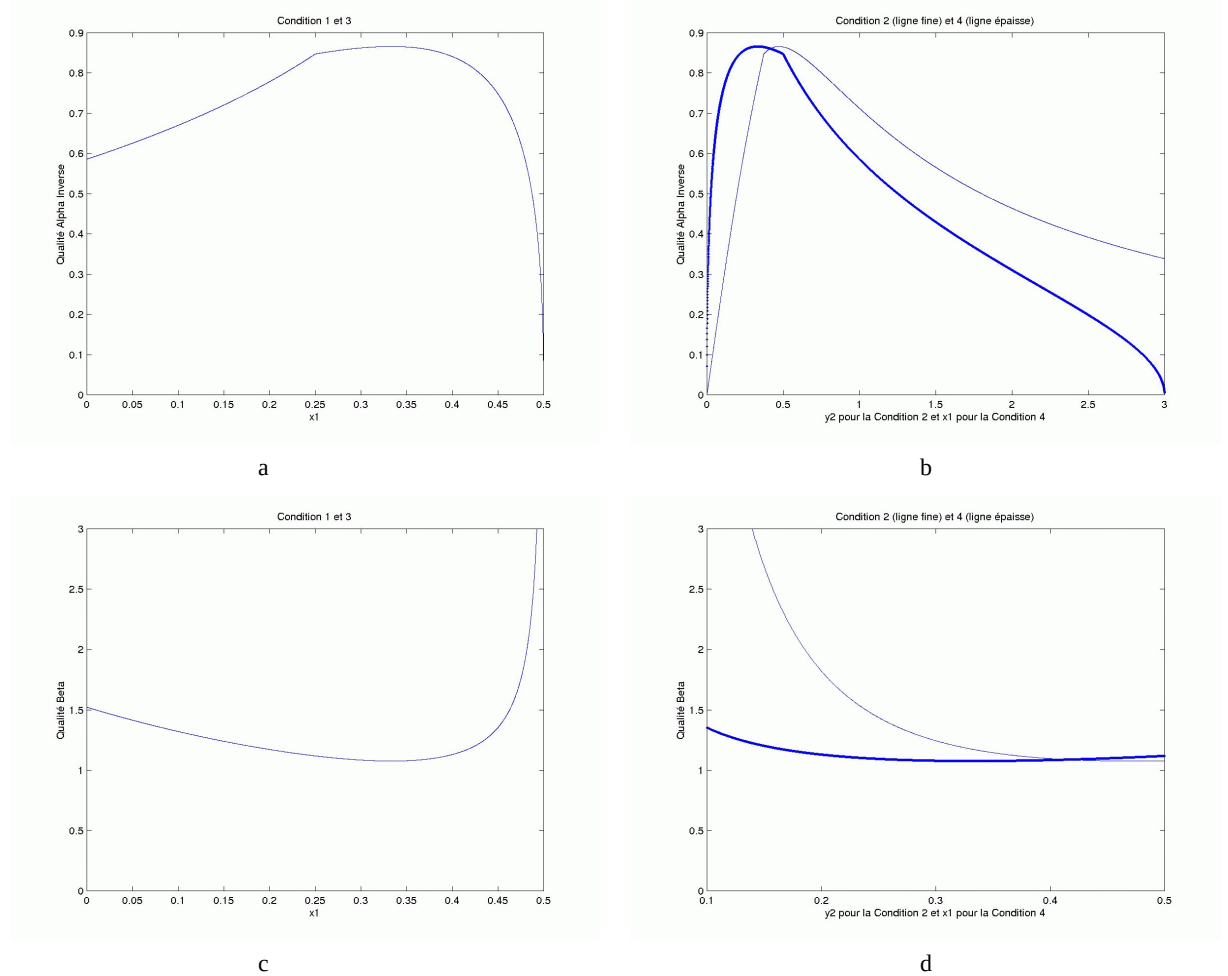
Dans le cas d'une T.P.R. de $\mathbb{R}^3$, tous les tétraèdres ont les mêmes qualités $Q_\alpha^{-1} = \left(\alpha \frac{h_{max} S_T}{3V_T}\right)^{-1}$ et $Q_\beta = \beta \frac{h_s^3}{V_T}$. Nous avons effectué une analyse numérique des qualités Q_α^{-1} et Q_β (cf. figure 3.4). Les tableaux 3.1 et 3.2 donnent les meilleures qualités Q_α^{-1} et Q_β qui sont obtenus pour les tétraèdres remplissant respectivement les conditions C_1 , C_2, C_3 et C_4 du théorème 3.6.

	$C_1(x_1 = 1/3)$	$C_2(y_2 = \frac{\sqrt{2}}{3})$	$C_3(x_1 = 1/3)$	$C_4(x_1 = 1/3)$
Q_α^{-1}	0,866	0,866	0,866	0,866

TAB. 3.1 – La qualité Q_α^{-1} maximale d'une T.P.R. de $\mathbb{R}^3$

En conclusion, nous avons construit nos T.P.R. de $\mathbb{R}^3$ avec le tétraèdre $T^*(C_1 \ x_1 = 1/3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$ car celui-ci offre une qualité géométrique maximale.

	$C_1(x_1 = 1/3)$	$C_2(y_2 = \frac{\sqrt{2}}{3})$	$C_3(y_2 = 1/3)$	$C_4(x_1 = 1/3)$
Q_β	1,08	1,08	1,08	1,08

 TAB. 3.2 – La qualité Q_β maximale d'une $T.P.R.$ de $\mathbb{R}^3$

 FIG. 3.4 – Analyse numérique des qualités Q_α^{-1} et Q_β pour les tétraèdres remplissant respectivement les conditions C_1 , C_2, C_3 et C_4 du théorème 3.6.

3.4 Réseaux Cristallins et $T.P.R.$ de $\mathbb{R}^3$

Dans cette section, nous établissons un lien entre la maille d'une $T.P.R.$ et des structures cristallines. Un réseau cristallin est un ensemble de points, ou «nœuds», en 3 dimensions, qui présente la propriété suivante: lorsque l'on se translate dans l'espace selon certains vecteurs, on retrouve le même environnement. Il y donc périodicité spatiale. Dans une certaine mesure, une $T.P.R.$ de $\mathbb{R}^3$ offre également une certaine périodicité spatiale (cf. sections

3.1 et 3.2).

Définition 3.10 Un **réseau cristallin** est défini par un espace à trois dimensions déterminés par les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

Un **motif** se répète par une translation d'un multiple entier de chacun des vecteurs ou d'une combinaison linéaire des trois $\vec{T} = n\vec{a} + m\vec{b} + p\vec{c}$.

La **maille** est le volume le plus simple qui représente l'ensemble du cristal. C'est généralement le volume déterminé par $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

Les types de réseaux à trois dimensions ont été décrits par Auguste Bravais en 1848 [BRAV-1866]. Il a trouvé qu'il existe 7 mailles élémentaires cristallines. Les paramètres $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ (cf. figure 3.5) des 7 mailles sont donnés dans le tableau 3.3.

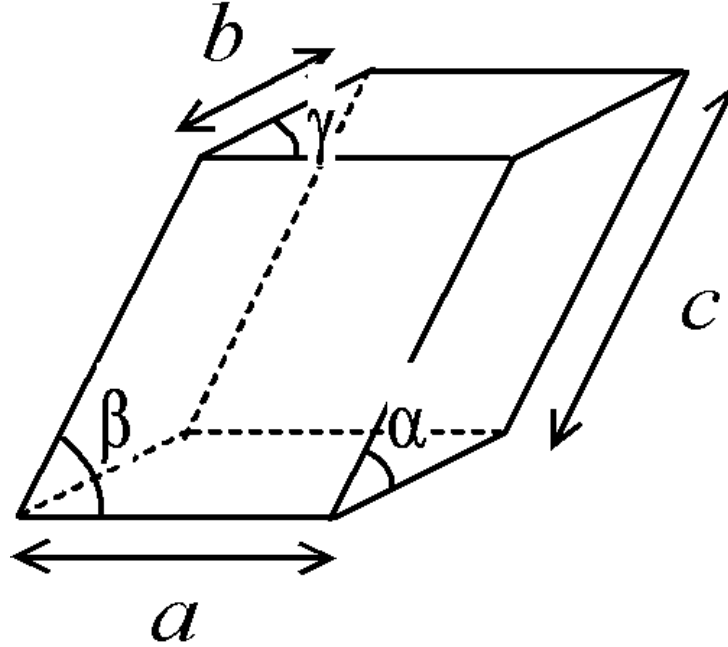


FIG. 3.5 – Paramètres $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ d'une maille cristalline.

D'après le lemme 3.7, une T.P.R. de $\mathbb{R}^3$ peut se construire à partir d'un parallélépipède ayant 6 tétraèdres invariants par subdivision.

En se référant à la figure 3.2, nous avons $\vec{a} = s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = s_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = s_5 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Maille Cristalline parallélépipèdes rectangles	Paramètres $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$
cubique	$a = b \quad \alpha = 90^\circ$ $a = c \quad \beta = 90^\circ$ $b = c \quad \gamma = 90^\circ$
tétragonale ou quadratique (base carrée)	$a = b \quad \alpha = 90^\circ$ $a \neq c \quad \beta = 90^\circ$ $b \neq c \quad \gamma = 90^\circ$
orthorhombique (base rectangulaire)	$a \neq b \quad \alpha = 90^\circ$ $a \neq c \quad \beta = 90^\circ$ $b \neq c \quad \gamma = 90^\circ$
prismes droits	
hexagonale (base losange à 120 degrés)	$a = b \quad \alpha = 90^\circ$ $a \neq c \quad \beta = 90^\circ$ $b \neq c \quad \gamma = 120^\circ$
monoclinique (base parallélogramme quelconque)	$a \neq b \quad \alpha = 90^\circ$ $a \neq c \quad \beta \neq 90^\circ$ $b \neq c \quad \gamma = 90^\circ$
prismes obliques	
rhomboédrique ou trigonale	$a = b \quad \alpha = \beta$ $a = c \quad \alpha = \gamma \text{ et } \gamma \neq 90^\circ$ $b = c \quad \beta = \gamma$
triclinique (prisme quelconque)	$a \neq b \quad \alpha = \beta$ $a \neq c \quad \alpha = \gamma \text{ et } \gamma \neq 90^\circ$ $b \neq c \quad \beta = \gamma$

TAB. 3.3 – Les 7 mailles cristallines.

Nous calculons alors les paramètres $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ pour les parallélépipèdes construits à partir des tétraèdres remplissant respectivement les conditions C_1 , C_2 , C_3 et C_4 du théorème 3.6 (cf. tableaux 3.4 et 3.5).

En comparant les paramètres des mailles cristallines (cf. tableau 3.3) aux paramètres d'un parallélépipède d'une $T.P.R.$ (cf. tableaux 3.4 et 3.5), nous pouvons en conclure que la maille d'une $T.P.R.$ correspond à la maille triclinique d'un réseau cristallin. La maille cristalline d'une $T.P.R.$ correspond donc à la maille la plus générale possible puisque toutes les arêtes et les angles de cette maille sont différentes.

C_1 $0 \leq x_1 < \frac{1}{2}$	$a = 1$	$b = 1$	$c = 2(1 - x_1)$	$a = b$ $a \neq c$ $b \neq c$
C_2 $y_2 > 0$	$a = 1$	$b = \frac{1}{9} + 4y_2^2$	$c = \frac{4}{9} + 4y_2^2$	$a \neq b$ $a \neq c$ $b \neq c$
C_3 $0 \leq x_1 < \frac{1}{2}$	$a = 1$	$b = 1$	$c = 2(1 - x_1)$	$a = b$ $a \neq c$ $b \neq c$
C_4 $0 < x_1 < 3$	$a = 1$	$b = 3x_1$	$c = 1 + x_1$	$a \neq b$ $a \neq c$ $b \neq c$

TAB. 3.4 – Paramètres (a, b, c) pour les parallélépipèdes construits à partir des tétraèdres remplissant respectivement les conditions C_1, C_2, C_3 et C_4 du théorème 3.6.

C_i	α	β	γ	(α, β, γ)
C_1	$\arccos \frac{1}{2}$	$\arccos \frac{x_1}{1-x_1}$	$\arccos x_1$	$0 \leq x_1 < \frac{1}{2}$ $\Downarrow$ $\alpha = 45^\circ$ $0 \leq \beta < 90^\circ$ $45^\circ < \gamma \leq 90^\circ$
C_2	$\arccos \frac{1}{2(\frac{1}{9}+4y_2^2)}$	$\arccos \frac{1}{(\frac{2}{9}+2y_2^2)}$	$\arccos \frac{1}{3(\frac{1}{9}+4y_2^2)}$	$y_2 > 0$ $\Downarrow$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$
C_3	$\arccos \frac{x_1}{1-x_1}$	$\arccos \frac{1}{2}$	$\arccos x_1$	$0 \leq x_1 < \frac{1}{2}$ $\Downarrow$ $0 \leq \alpha < 90^\circ$ $\beta = 45^\circ$ $45^\circ < \gamma \leq 90^\circ$
C_4	$\arccos \frac{2}{3(1+x_1)}$	$\arccos \frac{1}{2}$	$\arccos \frac{1}{3}$	$0 < x_1 < 3$ $\Downarrow$ $48,2^\circ < \alpha < 80,4^\circ$ $\beta = 60^\circ$ $\gamma = 70,4^\circ$

TAB. 3.5 – Paramètres (α, β, γ) pour les parallélépipèdes construits à partir des tétraèdres remplissant respectivement les conditions C_1, C_2, C_3 et C_4 du théorème 3.6.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit un modèle discret tétraédrique ($T.P.R.$) de l'espace s'appuyant sur une décomposition récursive à partir de tétraèdres invariants par subdivision. Nous avons alors étudié certaines propriétés concernant les tétraèdres invariants par subdivision. En premier lieu, nous avons explicité les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tétraèdre soit invariant par subdivision (cf. section 3.1). Ensuite, nous avons montré qu'il était possible de définir des connexités analogues à celles que l'on peut définir sur une grille cubique (cf. section 3.2). Outre les avantages de modélisation qu'offre une $T.P.R.$, une telle tétraédrisation présente des qualités géométriques adaptées aux éléments finis (cf. section 3.3). Nous allons voir dans le chapitre suivant qu'en couplant des $T.P.R.$ à des critères topologiques, nous pouvons déformer une scène représentée par une $T.P.R.$ tout en préservant sa topologie initiale.

CHAPITRE 4

Caractérisation d'un tétraèdre simple dans un maillage conforme

Dans ce chapitre, nous décrivons les principales idées théoriques à partir desquelles est construite notre méthode de maillage volumique. Cette méthode repose sur des déformations préservant la topologie (déformations homotopiques). La notion de déformation est pour nous le changement d'étiquette (ou d'attribution) d'un tétraèdre à un objet d'une scène représenté sous forme de maillage tétraédrique. La topologie souhaitée est imposée au maillage initial qui est ensuite déformé de manière à atteindre l'objet segmenté en conservant cette topologie. Ce chapitre est consacré à cet aspect et vise à caractériser les tétraèdres simples qui peuvent changer d'étiquette sans changer la topologie de l'objet et de son complémentaire. Intuitivement, nos besoins sont liés à la classique analogie suivante : nous souhaitons déformer un morceau d'élastique 3D noir (objet O_1) et blanc (complémentaire de O_1), sans aucune possibilité de déchirement ou de collage, jusqu'à ce que la partie noire de l'élastique corresponde à un objet O_2 (et la partie blanche au complémentaire de O_2).

La topologie a pour but d'étudier les propriétés des espaces et des fonctions. Il est donc légitime, dans le domaine des maillages, de vouloir utiliser la topologie pour connaître les propriétés complexes des espaces dans lesquels sont représentés des objets. Etudier des propriétés géométriques ou topologiques et les appliquer dans le domaine des maillages tétraédriques pose deux difficultés majeures. La première difficulté vient du cadre théorique. En effet, une grande partie des résultats mathématiques est fournie pour des espaces ayant des propriétés qui ne sont pas partagées par les espaces utilisés dans le cadre des maillages. La continuité en est un exemple typique : de nombreuses propriétés qui sont valides dans des espaces continus ne le sont plus dans des espaces discrets. Or, la plupart des maillages tétraédriques sont des représentations discrètes d'une réalité continue. Pour adapter une propriété d'un

espace *réel* vers un espace tétraédrique, il est donc nécessaire soit d'adapter, quand c'est possible, les définitions utilisées sur l'espace réel pour les rendre compatibles avec l'espace tétraédrique, soit de se référer à l'espace réel sous-jacent à l'espace tétraédrique pour retrouver cette propriété. La seconde difficulté que l'on rencontre est d'ordre pratique. Certaines notions qui sont définies de manière très concise peuvent être difficiles, voire impossibles, à implanter de façon informatique. Il est par exemple facile de définir l'ensemble des chemins joignant un point A à un point B , mais il sera impossible, en général, de manipuler un tel ensemble tant sa cardinalité est importante.

Nous allons présenter, dans ce chapitre, les fondements topologiques qui nous permettront de proposer, plus loin dans ce manuscrit (cf. section 6.3), une méthode permettant de déformer une scène représentée par un maillage tétraédrique tout en préservant sa topologie.

4.1 Notions de topologie

Le but de cette partie topologique n'est pas de fournir l'ensemble des outils mathématiques que nous allons utiliser, car cela sortirait du cadre de ce travail, mais plutôt de donner les définitions les plus importantes. Le lecteur désirant aller plus loin dans le domaine de la topologie pourra se reporter à l'ouvrage de Hocking et Young [HOCK-88] d'où est tiré l'essentiel des définitions que nous allons utiliser ainsi qu'aux références suivantes: [KONG-95],[GODB-71],[SAHA-98a],[SAHA-98b] et [SAHA-00].

4.1.1 Application et continuité

La première notion que nous avons besoin de définir concerne le fondement même de la topologie. Si nous voulons être capables de transférer des notions topologiques d'un espace à un autre, il est nécessaire de savoir ce qu'est un espace muni d'une topologie.

Définition 4.1 Un ensemble S a une *topologie* si pour tout point p de S et pour tout ensemble X de S , la question « p est-il un point limite de X ? » a une réponse.

Cette définition très générale peut paraître inutile car elle n'impose aucune condition sur les points limites. Cependant, en étudiant cette relation de point limite, il est possible de «comparer» entre eux différents ensembles comme, en particulier, des ensembles continus et des ensembles discrets. Pour

ce faire, il est nécessaire de mettre en correspondance les éléments des ensembles. C'est ce que fait une application.

Définition 4.2 Soient deux ensembles X et Y , une application (appelée aussi transformation) $f : X \rightarrow Y$ de X vers Y est un triplet (X, Y, G) où G est une collection de paires ordonnées (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$ et telle que chaque élément de X est le premier élément d'une et une seule paire de G . On notera $f(x) = y$ l'image de x par f et pour tout Z sous-ensemble de X , $f(Z)$ est l'ensemble des y tels que $(z, y) \in G$ avec $z \in Z$.

La notion d'application est très importante pour deux raisons. La première est qu'elle nous donne une définition formelle précise sur laquelle nous appuyer pour construire ce que nous appellerons une déformation. La seconde raison est qu'une application peut avoir une interprétation géométrique qui permet d'étudier les propriétés des déformations. Par exemple, une courbe dans $\mathbb{R}^2$ peut être vue comme une application f de l'intervalle unité I^1 vers $\mathbb{R}^2$. L'application f est une paramétrisation de la courbe.

Dans la suite, sauf indications contraires, nous allons uniquement nous intéresser à une classe très importante d'applications : les applications continues. Nous en donnons ici une définition qui est une généralisation de celle utilisée en analyse et qui peut, là aussi, s'appliquer aux différents espaces manipulés en traitement des images.

Définition 4.3 Une application $f : S \rightarrow T$ est *continue* si pour tout élément p de S et X sous-ensemble de S tel que p est un point limite de X , alors $f(p)$ est un point limite de $f(X)$ ou $f(p)$ appartient à $f(X)$.

4.1.2 L'homotopie

La notion d'homotopie est étroitement liée à la continuité et à l'interprétation géométrique des applications. Intuitivement, deux applications f et g sont homotopiques si l'une peut être continuellement déformée vers l'autre. Pour formaliser cette notion, on utilise une paramétrisation dans l'ensemble des transformations similaire à celle utilisée dans la figure 4.1. Il en résulte la définition suivante :

Définition 4.4 Deux applications f et g d'un espace X vers un espace Y sont homotopiques (que l'on note $f \sim g$) s'il existe une application continue $h : X \times I^1 \rightarrow Y$ telle que, pour tout point x de X , $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$.

Pour illustrer ce que représente géométriquement l'homotopie, prenons l'exemple d'une application h de $S^1 \times I^1$ vers $\mathbb{R}^2$, où S^1 est le cercle unité. Dans ce cas, $h(x, 0)$ et $h(x, 1)$, qui sont respectivement égales à $f(x)$ et $g(x)$, sont des courbes fermées sur $\mathbb{R}^2$ car f et g sont continues en x . La continuité de h sur I^1 montre que ces deux courbes peuvent être continuellement déformées l'une vers l'autre (voir figure 4.1).

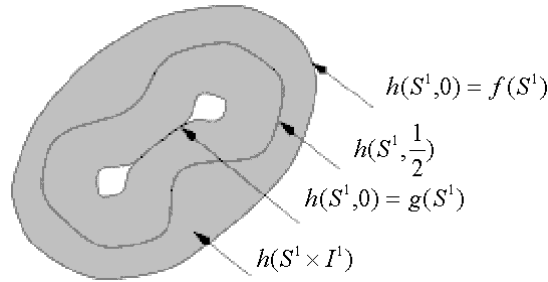


FIG. 4.1 – Déformation homotopique (d'après [HOCK-88]).

L'existence de h ne dépend pas seulement de f et g , elle dépend aussi de la structure des espaces X et Y . Si l'on considère Y comme étant le plan privé de son origine $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$, une boucle passant autour de l'origine manquante ne pourra pas être continuellement déformée dans Y vers une boucle ne passant pas autour de l'origine. L'homotopie peut donc être utilisée pour définir une équivalence entre deux espaces qui prend en compte la structure même des espaces à comparer mais aussi celle de l'espace à l'intérieur duquel ils se déforment. C'est cette notion qui est utilisée, en traitement des images, pour définir les déformations homotopiques, c'est-à-dire les déformations préservant la topologie. Ainsi, pour des espaces topologiques X et Y , l'homotopie est définie de la façon suivante.

Définition 4.5 Soient X et Y deux espaces topologiques. X et Y sont du même **type d'homotopie** (ou homéotopes), noté $X \simeq Y$, s'il existe des applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que les applications composées $fg : Y \rightarrow Y$ et $gf : X \rightarrow X$ sont respectivement homotopiques aux applications identités $id_Y : Y \rightarrow Y$ et $id_X : X \rightarrow X$. L'application f est appelée une **équivalence homotopique** et g l'**équivalence homotopique inverse**.

Nous pouvons remarquer que si X est homéomorphe¹ à Y , X et Y sont homéotopes mais le contraire n'est pas vrai. Par exemple, un point $\{p\}$

1. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est un **homéomorphisme** si elle est continue et son application inverse $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est également continue. Si il existe un homéomorphisme entre X et Y , X est **homéomorphe** à Y et vice versa.

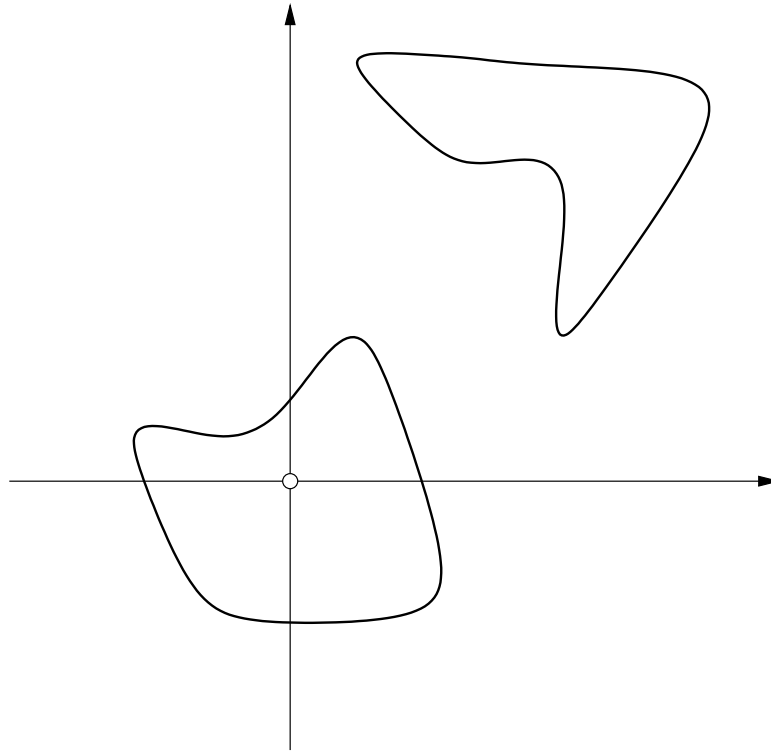


FIG. 4.2 – Les deux boucles ne peuvent pas être continuellement déformées l'une vers l'autre sur $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ (d'après [HOCK-88]).

et la droite $\mathbb{R}$ sont homéotopes mais le point $\{p\}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$. D'autre part, la relation «homéotope» est une relation d'équivalence [NAK-90].

4.2 Déformations homotopiques d'un maillage tétraédrique

L'apparition de la notion de déformation préservant la topologie dans le domaine du traitement des images est en grande partie due aux algorithmes de squelettisation [SAHA-91], [KONG-95] et de segmentation [MANG-95]. Pour avoir un squelette ayant la même topologie que l'objet initial, la notion de *point simple* a été introduite. Un point simple est un point pouvant être retiré d'un objet sans modifier sa topologie. Plusieurs auteurs ont proposé des caractéristiques des points simples [BERT-94a], [BERT-94b], [KONG-89], [MORG-81], [TORI-82], [TSAO-81], [SAHA-91]. Ces notions sont axées sur la conservation des *composantes connexes* et des *tunnels*. Les composantes connexes identifient les parties disjointes d'un objet et dépendent de la relation de connexité liant les points de l'image. La notion de tunnel est plus

complexe à définir car elle fait appel à des notions évoluées comme la continuité. Intuitivement, on détecte la présence d'un tunnel dans un objet lorsque l'on peut trouver une courbe fermée dans cet objet qui ne peut pas être continuellement déformée en un point tout en restant à l'intérieur de l'objet. Par exemple dans une sphère, n'importe quelle boucle peut être continuellement déformée en un point tandis que dans un tore, certaines boucles peuvent être déformées en un point et d'autres ne le peuvent pas à cause du tunnel qui perce le centre du tore (voir figure 4.3). Pour comparer deux maillages tétraédriques, leur structure propre est importante mais la façon dont ils sont inclus dans l'espace est aussi importante. On dira donc que deux maillages tétraédriques O' et O'' se trouvant dans un espace E ont la même topologie s'ils ont le même nombre de composantes connexes et le même nombre de tunnels, et si leurs complémentaires $\overline{O'} = E - O'$ et $\overline{O''} = E - O''$ ont également le même nombre de composantes connexes et le même nombre de tunnels.

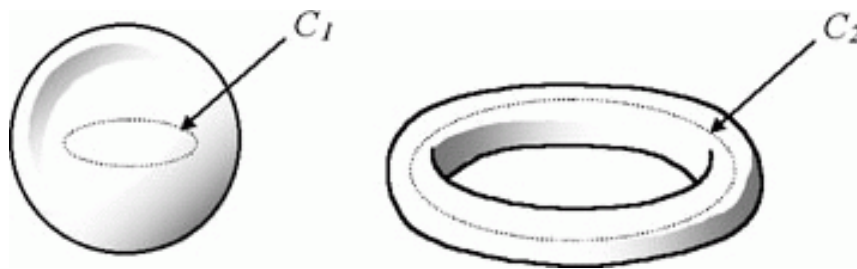


FIG. 4.3 – La courbe C_1 peut être déformée en un point mais pas la courbe C_2 car le tore possède un tunnel.

Ainsi, lorsqu'on cherche à définir dans le monde des espaces discrets des relations du type de celles définies dans la section précédente (application, continuité et déformation), on se heurte inévitablement à la difficile transposition des notions de déformation continue ou d'homéomorphisme. Dans le domaine des images discrètes (pixels et voxels), plusieurs auteurs ont tenté d'établir une théorie de topologie discrète. Une première solution consiste à utiliser des analogues continus des objets décrits par les images discrètes, mais il semble plutôt difficile d'inférer de cette manière des résultats utiles pour les algorithmes 3D en raison de problèmes combinatoires [LEE-93]. En outre, cette démarche soulève la question du choix de l'algorithme générant les analogues continus. Une autre solution est proposée par le cadre des complexes cellulaires, considéré dans [KOVA-89], [HERM-90] et [COIN-99].

Un article de Kong [KONG-95] nous semble apporter une solution intéressante pour formaliser la notion d'homotopie sur un maillage tétraédrique. Nous avons donc étendu la notion d'homotopie sur les maillages tétraédriques

à partir des résultats de Kong fondés sur les voxels.

Nous allons préciser les définitions de base sur lesquelles repose l'équivalence topologique au niveau d'un maillage tétraédrique. Dans un premier temps, nous resterons le plus général possible et définirons les tétraèdres et le maillage tétraédrique du point de vue topologique. Puis nous proposerons une définition des tétraèdres simples qui est l'équivalent de celle des points simples dans une image numérique.

4.2.1 Notations et définitions

Nous nous plaçons dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$. Dans cette section sont rappelées les définitions classiques sur lesquelles reposent les relations de topologie discrète appliquées sur les maillages tétraédriques.

Définition 4.6 Un tétraèdre T est défini par un quadruplet non-ordonné (v_1, v_2, v_3, v_4) de sommets non-coplanaires. Une arête e de T est définie par une paire non-ordonnée (v_i, v_j) de sommets distincts. Une face f de T est définie par un triplet non-ordonné (v_i, v_j, v_k) de sommets distincts.

Nous remarquons que la définition 4.6 d'un tétraèdre au sens de la topologie est beaucoup moins contraignante que la définition géométrique 2.2 car elle n'impose aucune condition sur l'orientation du tétraèdre considéré.

Les maillages tétraédriques sur lesquels va reposer la notion d'homotopie seront conformes au sens de la définition 2.5 : l'intersection de deux faces d'un tétraèdre T est une arête de T tandis que l'intersection de trois faces d'un tétraèdre T est un sommet de T . Nous définissons alors l'intérieur $int()$ des différents éléments de T :

Définition 4.7 Soit T un tétraèdre au sens de la définition 4.6, f une de ses faces, e une de ces arêtes et v un de ses sommets. Alors :

- $int(T)$ correspond à T privé de ses faces,
- $int(f)$ correspond à f privée de ses arêtes,
- $int(e)$ correspond à e privée de ses sommets.

Nous considérons donc qu'une arête d'un tétraèdre T contient ses deux extrémités et qu'une face de T contient ses trois arêtes.

Nous allons à présent plus formellement traduire les notions de connexité dans le cadre des maillages tétraédriques. Nous notons O un ensemble fini de tétraèdres conformes.

Définition 4.8 Un k -simplexe ($k < 3$) s de O est **partagé** s'il existe deux tétraèdres $T_i, T_j \in O$ tel que $s \subset T_i \cap T_j$. Dans le cas contraire, s est **non-partagé**.

La définition 4.8 exprime le fait que si un k -simplexe s est partagé alors les k -simplexes s_i inclus dans s le sont également. Par exemple, si une face est partagée, ses arêtes le sont également.

Définition 4.9 Soit $T \in O$, alors :

- le voisinage $V(T)$ de T est défini comme l'union de tous les tétraèdres $T_i \in O$ tels que $T_i \cap T \neq \emptyset$,
- le voisinage **strict** $V^*(T)$ de T est égal à $V(T)$ privé de T ,
- la **frontière** de T , notée $Bd\ T$, est l'union de toutes les faces de T ,
- l'union de tous les k -simplexes ($k < 3$) **partagés** de T , noté $Bd_p T$, est appelé l'**ensemble d'attache** de T ,
- l'union des intérieurs des k -simplexes ($k < 3$) **non partagés** de T , notée $Bd_{np}\ T$ est la frontière **non partagée** de T , et correspond au complément de l'ensemble d'attache de T dans $Bd\ T$.

Nous illustrons la définition 4.9 sur la figure 4.4. Le tétraèdre (a, b, c, d) a deux faces non partagées, (a, b, c) et (a, c, d) , et deux faces partagées, (a, b, d) et (b, c, d) . Ce tétraèdre a également une arête partagée (a, c) en plus de celles incluses dans les faces partagées. D'autre part $V((a, b, c, d)) = (a, b, d, e) \cup (b, c, d, f) \cup (a, c, g, h) \cup (a, g, h, i) \cup (a, b, c, d)$. En plus, $Bd_{np}\ (a, b, c, d) = \text{int}((a, b, c)) \cup \text{int}((a, c, d))$ et $Bd_p\ (a, b, c, d) = (a, b, d) \cup (b, c, d) \cup (a, c)$. Nous pouvons remarquer que Bd_{np} peut aussi comprendre l'intérieur d'une arête ; par exemple, dans la figure 4.4 $Bd_{np}((a, c, g, h)) = \text{int}((a, c, g)) \cup \text{int}((c, g, h)) \cup \text{int}((c, g)) \cup \text{int}((c, h))$.

Les notions de connexité et de composante connexe sont équivalentes à celles définies en topologie dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.10 Deux simplexes s_1 et s_2 sont dits **adjacents** dans O si et seulement si $s_1 \cap s_2 \neq \emptyset$

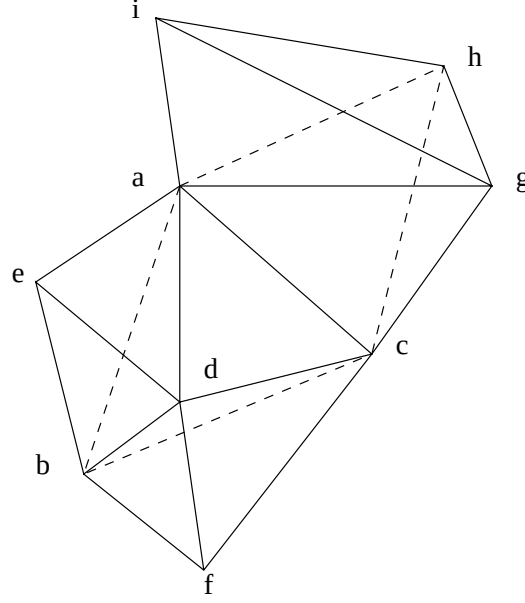


FIG. 4.4 – Illustration d'un voisinage d'un tétraèdre.

Nous pouvons remarquer que cette définition entraîne que tout simplexe est adjacent à lui même.

Définition 4.11 Un ensemble $s_1, s_2, \dots, s_k$ de simplexes dans lequel chaque s_i est adjacent à s_{i+1} pour $1 \leq i < k$ s'appelle un **chemin** de s_1 à s_k .

Définition 4.12 Un ensemble O de tétraèdres est **connexe** si pour toute paire de tétraèdres s et s' de O , il existe un chemin de simplexes $s = s_0, s_1, \dots, s_n = s'$ dans O tel que s_i et s_{i+1} sont adjacents pour $0 \leq i < n$.

Définition 4.13 Un sous-ensemble maximal connexe d'un ensemble O de tétraèdres s'appelle une **composante connexe** de O .

4.2.2 Eléments simples

En nous appuyant sur les travaux de Kong et Rosenfeld [KONG-95], nous proposons la caractérisation locale suivante d'un tétraèdre *simple* :

Définition 4.14 Soit T un tétraèdre et O une composante connexe.

T est *simple* s'il existe une homotopie (application homotope) de O vers $O \cup T$ ou de O vers $O - \{T\}$.

Cette définition est difficilement utilisable directement. Le théorème 4.15 que nous démontrons à présent donne une condition locale suffisante pour

qu'un tétraèdre soit un élément simple qui a l'avantage d'être très visuelle. Celle-ci utilise le concept d'ensemble d'attache vu précédemment (cf. définition 4.9).

Théorème 4.15 [PES-00]

Soit T un tétraèdre et soit O l'union d'un ensemble de tétraèdres formant une composante connexe qui ne contient pas T (resp. qui contient T).

- Si (1) $O \cup T$ est connexe et $Bd_p T$ et $Bd_{np} T$ sont non-vides et connexes,
- alors (2) les ensembles $O \cup T$ et O (resp. O et $O - \{T\}$) sont homéotopes (T est **simple**).

preuve : dans le cas où $T \notin O$

Hypothèse : supposons que la condition (1) soit respectée.

Ainsi, étant donné que $Bd_{np} T$ est non-vide, au moins une des quatre faces de T n'est pas dans $Bd_p T$. Soit X l'union des trois autres faces de T . Le tétraèdre T peut être continuellement déformé² dans X .

Maintenant, $Bd_p T \subseteq X$ et $Bd_p T$ et X sont des sous-ensembles connexes de $Bd T$ qui ont des compléments non vides et connexes dans la frontière ($Bd T$). Il s'ensuit donc que X peut être continuellement déformé dans la triangulation de $Bd_p T$. Ainsi le tétraèdre T se déforme continuellement dans $Bd_p T$. Nous pouvons en déduire des déformations élémentaires de T vers $O \cup T$ en déformant T vers $Bd_p T$. **c.q.f.d.**

La figure 4.5 montre trois cas de figure possibles :

- (a) $Bd_p T = \{(a, b, c) \cup (c, d)\}$. T est simple, car l'ensemble d'attache de T et son complémentaire dans la frontière de T sont non-vides et connexes.
- (b) $Bd_p T = \{(a) \cup (c, d)\}$. T est non-simple et son ensemble d'attache n'est pas connexe.
- (c) $Bd_p T = \{(a, b) \cup (a, c) \cup (b, c, d)\}$. T est non-simple et bien que son ensemble d'attache soit connexe, le complément de cet ensemble dans la frontière de T n'est pas connexe.

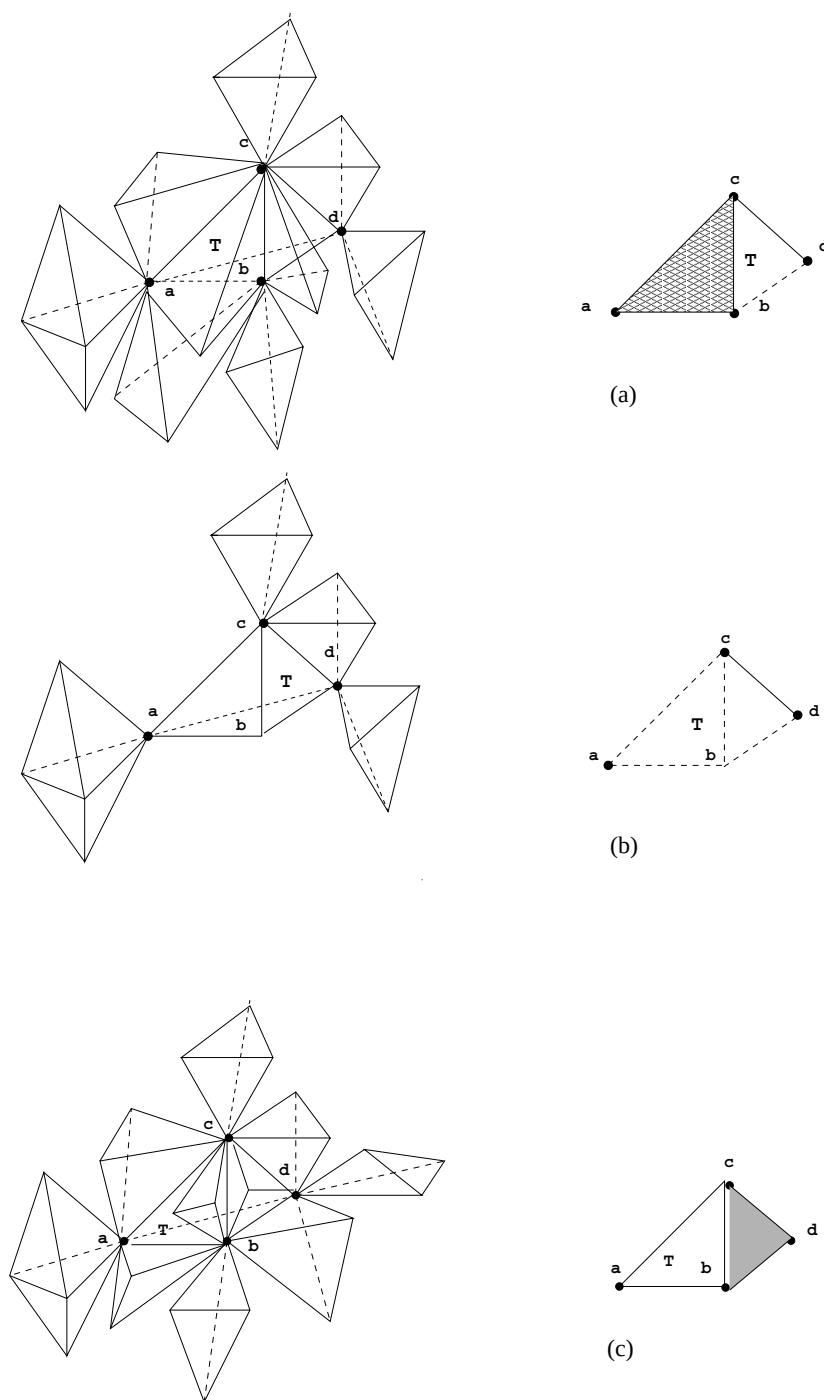


FIG. 4.5 – T est un tétraèdre de sommets (a, b, c, d) dont le voisinage $V(T)$ de T est représenté à gauche et l'ensemble d'attache $Bd_p T$ de T est représenté à droite (les arêtes sont en traits pleins et les faces sont hachurées).

A présent, nous analysons les conditions pour que l'ensemble d'attache de T (noté $Bd_p T$) soit connexe. Dans le cas des voxels, Kong et al. [KONG-95] montrent que si $V(T)$ est connexe alors $Bd_p T$ est également connexe. Saha et al. [SAHA-98a] démontrent que cette condition est insuffisante dans le cas des tétraèdres. En effet, la figure 4.6 montre un contre-exemple dans lequel $V(T)$ est connexe et $Bd_p T$ ne l'est pas.

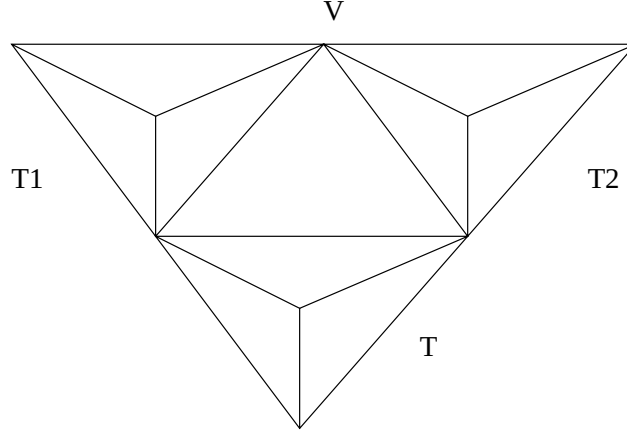


FIG. 4.6 – $V(T) = \{T, T_1, T_2\}$ est connexe mais $Bd_p T$, qui ne contient que les deux sommets communs à T et à T_1 et T_2 respectivement, n'est pas connexe (d'après [SAHA-98a]).

Saha et al. [SAHA-98a] démontrent, dans le cadre d'un maillage appelé **strictement conforme**³, que pour tout tétraèdre T de O , $V(T)$ ne contient ni tunnel et cavité (cf. Annexe 3). Saha et al. [SAHA-98a] donnent également, pour ce type de maillage, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le complément de l'ensemble d'attache de T , $Bd_{np} T$, soit non vide et connexe (cf. Annexe 3).

Cependant, les maillages strictement conformes modélisent des formes trop restrictives pour l'application envisagée. En effet la frontière partagée d'un tétraèdre $Bd_p T$ se limite, dans le cas de maillages strictement conformes, à une face, une arête ou un sommet. C'est pourquoi, de tels maillages ont une structure tentaculaire et ne permettent donc pas de décrire des objets relativement compacts que sont les tissus de la tête. Néanmoins, il existe un lien entre notre proposition de tétraèdre simple (cf. théorème 4.15) et celle proposée par Saha et al [SAHA-98a] (cf. Annexe 3).

2. traduction de collapse en anglais

3. Soit O un ensemble connexe de tétraèdres conformes. Si $\forall T \in O, V^*(T) = \{T_1 \dots T_n\}$ et $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n$ est un k -simplexe ($k < 3$) qui intersecte T , alors O est un **maillage strictement conforme**.

A présent, nous présentons, au moyen d'outils de topologie algébrique (voir section 4.3), une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tétraèdre soit simple (voir section 4.3.5).

4.3 Groupes d'homologie d'un maillage tétraédrique

Dans la section 4.2, nous avons introduit une condition locale suffisante pour que des déformations d'un maillage tétraédrique préservent la topologie. Cette condition (théorème 4.15) permet d'identifier les éléments simples d'une structure tétraédrique vérifiant certaines propriétés locales.

Afin d'établir une caractérisation nécessaire et suffisante d'un tétraèdre simple, nous allons passer par la théorie de l'homologie [HOCK-88], [NAK-90]. L'homologie repose sur l'orientation d'un ensemble de k -simplexes appelé complexe simplicial orienté (cf. section 4.3.1). Il est alors possible de formaliser sur cette structure simpliciale les notions de chaîne, de cycle et de frontière (cf. section 4.3.2). Les ensembles des chaînes, des cycles et des frontières ont chacun des structures de groupe sur lesquelles se construisent les groupes d'homologie (cf. section 4.3.3).

Les propriétés des groupes d'homologie relative (cf. section 4.3.4) permettent alors de donner complètement les propriétés locales d'un maillage tétraédrique afin de conserver la topologie (cf. section 4.3.5).

4.3.1 Complexe simplicial

En géométrie analytique, l'orientation d'un segment permet d'introduire des méthodes algébriques dans la géométrie. De façon analogue, nous allons voir comment l'orientation d'un simplexe permet d'introduire des outils algébriques en topologie.

Définition 4.16 [HOCK-88]

Soit $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ l'ensemble des sommets d'un k -simplexe s_k . Un k -simplexe s_k est **orienté** à condition de choisir une séquence fixe arbitraire des sommets $(p_0, p_1, \dots, p_k)$ de s_k . On considère les permutations de cette séquence. Deux permutations sont dites équivalentes si elles ont même signe. Ainsi, la classe d'équivalence des permutations paires de cette séquence fixe est le simplexe orienté positivement (noté $+s_k$), tandis que la classe d'équivalence des permutations impaires de cette séquence est le simplexe orienté négativement (noté $-s_k$).

Dans le cas particulier du 0-simplexe, $s_0 = -s_0 = \{p_0\}$.

Définition 4.17 [NAK-90]

Soit O un ensemble fini de simplexes orientés de dimension inférieure ou égale à k .

O est appelé un **complexe simplicial orienté**⁴ de dimension k si :

- pour tout simplexe $s \in O$ et tout simplexe s' , si $s' \subset s$ alors $s' \in O$,
- $\forall (s, s') \in O^2$ alors la frontière partagée entre s et s' est soit vide, soit un simplexe partagé de s et s' .

Tous les maillages tétraédriques conformes, que nous considérons, sont des complexes simpliciaux de dimension 3.

4.3.2 Groupes de chaîne, de cycle et de frontière

Nous présentons, dans cette section, les outils topologiques (chaînes, frontières et cycles) permettant de formaliser la notion d'homologie. Nous considérons l'opération de groupe par le signe $+$ et tous les groupes sont abéliens (commutatifs). L'élément neutre est noté par 0.

Pour tout élément s_i d'un groupe O , nous notons ns_i ($\forall n \in \mathbb{Z}$) la somme $\underbrace{s_i + s_i + \dots + s_i}_n$ si $n > 0$ et nous notons $-ns_i$ l'inverse de ns_i par la loi $+$. Si $n = 0$, nous avons $0s_i = 0$.

Les groupes d'homologie se construisent à partir des groupes abéliens libres finis. C'est pourquoi, nous définissons et donnons, à présent, les propriétés de ce type de structure.

Définition 4.18 [NAK-90]

Soient I éléments $s_1, s_2, \dots, s_I$ d'un groupe O . Les éléments de O qui ont pour expression :

$$c_1s_1 + \dots + c_Is_I \quad (c_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq I)$$

forment un sous-groupe de O , que nous notons $C(O)$.

$C(O)$ est un sous-groupe de O **engendré** par les **générateurs** $s_1, \dots, s_I$.

Si $C(O)$ est engendré par un ensemble fini d'éléments $s_1, \dots, s_I$ qui sont linéairement indépendants (i.e: $c_1s_1 + \dots + c_Is_I = 0$ ssi $c_1 = \dots = c_I = 0$) alors $C(O)$ est un **groupe libre abélien de rang I** .

4. La dimension d'un complexe simplicial O correspond à la dimension du simplexe de plus grande dimension de O .

Par exemple, le groupe des entiers $\mathbb{Z}$ est un groupe libre abélien de rang 1. Quant à l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ des paires $\{(i, j) \mid i, j, \in \mathbb{Z}\}$, c'est un groupe libre abélien de rang 2 engendré par les générateurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Plus généralement, on a $\mathbb{Z}^I$ est un groupe abélien libre de rang I [NAK-90].

Définition 4.19 Soit O un complexe simplicial de dimension k .

Soit G_{I_r} l'ensemble des simplexes orientés $s_{r,i}$ de dimension r de O dans lequel un simplexe n'apparaît qu'avec une seule orientation ($s_{r,i} \in G_{I_r} \Rightarrow -s_{r,i} \notin G_{I_r}$).

On pose $I_r = \text{card}(G_{I_r})$.

Nous construisons un groupe $C_r(O)$ engendré par G_{I_r} en définissant simultanément la loi du groupe $+$ et un isomorphisme⁵ c_r de $C_r(O)$ vers $\mathbb{Z}^{I_r}$, par :

$$\begin{cases} c_r(s_{r,i}) = (0 \cdots 1_i \cdots \cdots 0) \\ c_r(-s_{r,i}) = -c_r(s_{r,i}) \\ c_r(s_{r,i} + s_{r,j}) = c_r(s_{r,i}) + c_r(s_{r,j}) \\ c_r(0) = (0 \cdots 0 \cdots \cdots 0) \end{cases}$$

où le 1_i correspond au 1 à la position i .

Si $r > k$, nous posons $C_r(O) = \{0\}$.

Cette construction est possible puisque les $c_r(s_{r,i})$ forment une famille libre et génératrice de $\mathbb{Z}^{I_r}$.

Tout élément de $C_r(O)$, qui s'écrit comme la somme formelle $\sum_{i=1}^{I_r} n_i s_{r,i}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, est associé de manière bijective à un élément de $\mathbb{Z}^{I_r}$ par $c_r(\sum_{i=1}^{I_r} n_i s_{r,i}) = (n_1 \cdots n_{I_r})$.

La loi $+$ sur $C_r(O)$, induite par la loi $+$ de $\mathbb{Z}^{I_r}$ via c_r , est bien une loi de groupe.

$C_r(O)$ s'appelle le groupe des r -chaînes et tout élément c_r de $C_r(O)$ est appelé une r -chaîne.

Par exemple, le complexe simplicial

$$Bd T = \left\{ \begin{array}{c} p_0, p_1, p_2, p_3, \\ (p_0 p_1), (p_0 p_2), (p_0 p_3), (p_1 p_2), (p_1 p_3), (p_2, p_3) \\ (p_0 p_1 p_2), (p_0 p_1 p_3), (p_0 p_2 p_3), (p_1 p_2 p_3) \end{array} \right\}$$

5. Soient G_1 et G_2 deux groupes abéliens. Une application $f : G_1 \rightarrow G_2$ est un **homomorphisme** si $f(x + y) = f(x) + f(y) \forall (x, y) \in G_1$. L'opérateur $+$ est l'addition dans G_1 pour le terme de gauche (resp. l'addition dans G_2 pour le terme de droite). Si f est également une application bijective, f est un **isomorphisme** et G_1 est **isomorphe** à G_2 (noté $G_1 \cong G_2$).

de la surface d'un tétraèdre T a les groupes de r -chaînes suivants :

$$\begin{aligned} C_0(Bd T) &= \{n_0 p_0 + n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 | \forall n_i, n_i \in \mathbb{Z}\} \\ C_1(Bd T) &= \{n_0(p_0 p_1) + n_1(p_0 p_2) + n_2(p_0 p_3) + n_3(p_1 p_2) + n_4(p_1 p_3) + n_5(p_2 p_3) | \forall n_i, n_i \in \mathbb{Z}\} \\ C_2(Bd T) &= \{n_0(p_0 p_1 p_2) + n_1(p_0 p_1 p_3) + n_2(p_0 p_2 p_3) + n_3(p_1 p_2 p_3) | \forall n_i, n_i \in \mathbb{Z}\} \\ C_r(Bd T) &= \{0\} \text{ si } r \geq 3 \end{aligned}$$

A partir d'une r -chaîne, nous allons définir la notion de frontière $\partial_r s_r$ d'un simplexe s_r .

Définition 4.20 [NAK-90]

Soit s_r un r -simplexe orienté. La **frontière** $\partial_r s_r$ de s_r est une $(r - 1)$ chaîne définie par :

$$\partial_r s_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i \dots p_r)$$

où $\hat{p}_i$ signifie que le point p_i est omis et $\partial_r s_r$ s'appelle l'opérateur **frontière** de s_r .

Si $r = 0$, nous définissons $\partial_0 s_0 = 0$.

L'opérateur ∂_r agit linéairement vis-à-vis d'un élément $c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i s_{r,i}$ de $C_r(O)$ et on définit :

$$\partial_r \left(\sum_{i=1}^{I_r} c_i s_{r,i} \right) = \sum_{i=1}^{I_r} \partial_r (c_i s_{r,i}) = \sum_{i=1}^{I_r} c_i \partial_r (s_{r,i})$$

L'opérateur ∂_r de frontière définit un homomorphisme de $C_r(O)$ vers $C_{r-1}(O)$ [NAK-90].

Pour un 1-simplexe $s_1 = (p_0 p_1)$, nous avons $\partial_1 s_1 = p_1 - p_0$. Nous pouvons se poser la question du choix d'un signe moins devant p_0 pour exprimer la frontière de ce simplexe. Cela est dû à l'orientation d'un r -simplexe.

En effet, prenons le 1-simplexe $(p_0 p_2)$ de la figure 4.7 (a). Ce simplexe se compose des deux simplexes $(p_0 p_1)$ et $(p_1 p_2)$.

Intuitivement, la frontière de $(p_0 p_2)$ regroupe les sommets p_0 et p_2 et c'est également la frontière de $p_0 p_1 + p_1 p_2$. Si $\partial_1(p_0 p_2)$ était défini par $p_0 + p_2$, nous aurions $\partial_1(p_0 p_1) + \partial_1(p_1 p_2) = p_0 + p_1 + p_1 + p_2$. Cette définition n'est pas souhaitable étant donné que p_1 est une frontière fictive. En revanche, si nous prenons la définition 4.20 pour la frontière, nous avons $\partial_1(p_0 p_2) = \partial_1(p_0 p_1) + \partial_1(p_1 p_2) = p_1 - p_0 + p_2 - p_1 = p_2 - p_0$.

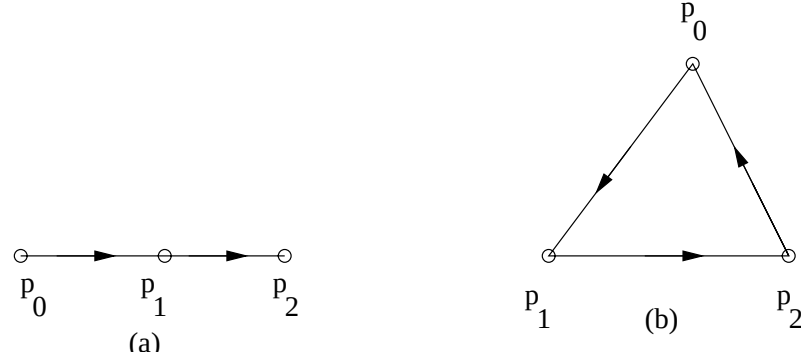


FIG. 4.7 – (a) Un 1-simplexe avec une frontière fictive p_1 et (b) un complexe simplicial O où l'élément $c = (p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0) \in C_1(O)$ est un 1-cycle.

Dans le cas d'un tétraèdre $T = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, nous pouvons remarquer que :

$$\partial_3 T = (p_1p_2p_3) - (p_0p_2p_3) + (p_0p_1p_3) - (p_0p_1p_2)$$

Le noyau $\ker \partial_r$ d'un homomorphisme ∂_r forme un groupe sur lequel repose la notion d'homologie.

Définition 4.21 [NAK-90]

Soit O un complexe simplicial de dimension k et soit $c \in C_r(O)$.

Si $\partial_r c = 0$ alors c est un **r -cycle**.

L'ensemble $Z_r(O)$ des **r -cycles** est un sous-groupe de $C_r(O)$ et s'appelle le groupe des **r -cycles** ($Z_r(O) = \ker \partial_r$).

Dans cette définition, nous pouvons remarquer que $\partial_0 c = 0$ pour tout $c \in C_0(O)$. Et donc, nous avons $Z_0(O) = C_0(O)$.

Considérons le complexe simplicial $O = \{p_0, p_1, p_2, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_0)\}$ (cf. figure 4.7 (b)).

L'élément $c = (p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0)$ de $C_1(O)$ est un 1-cycle car :

$$\partial_1 c = \partial_1(p_0p_1) + \partial_1(p_1p_2) + \partial_1(p_2p_0) = p_1 - p_0 + p_2 - p_1 + p_0 - p_2 = 0$$

Un autre groupe sur lequel repose la notion d'homologie est le groupe $B_r(O)$ des r -frontières d'un complexe simplicial O . Ce groupe correspond à l'image de l'opérateur ∂_{r+1} , c'est-à-dire $B_r(O) = \text{im } \partial_{r+1}$.

Définition 4.22 [NAK-90]

Soit O un complexe simplicial de dimension k et soit $c \in C_r(O)$.

S'il existe un élément $d \in C_{r+1}(O)$ tel que $c = \partial_{r+1}d$ alors c est une **r -frontière**.

L'ensemble des **r -frontières** $B_r(O)$ est un sous-groupe de $C_r(O)$ et s'appelle le groupe des **r -frontières** ($B_r(O) = \text{im } \partial_{r+1}$).

Lemme 4.23 Soit O un complexe simplicial.

Soit l'application $\partial_r \cdot \partial_{r+1} : C_{r+1}(O) \rightarrow C_{r-1}(O)$.

$$\forall c \in C_{r+1}(O), \partial_r \cdot \partial_{r+1} = 0$$

preuve :

Etant donné que l'opérateur ∂_r agit linéairement vis-à-vis d'un élément de $C_r(O)$, il suffit de démontrer l'identité pour les générateurs de $C_{r+1}(O)$.

Si $r = 0$, $\partial_0 \cdot \partial_1 = 0$ car ∂_0 est un opérateur nul.

Soit $r > 0$ et soit un $r + 1$ simplexe $s = \{p_0 \dots p_r, p_{r+1}\} \in C_{r+1}(O)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_r(\partial_{r+1}s) &= \partial_r \left(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0, p_1, \dots, \widehat{p}_i \dots p_{r+1}) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \partial_r(p_0, p_1, \dots, \widehat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0, p_1, \dots, \widehat{p}_j \dots \widehat{p}_i \dots p_{r+1}) + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0, p_1, \dots, \widehat{p}_i \dots \widehat{p}_j \dots p_{r+1}) \right) \\ &= \left(\sum_{j < i} (-1)^{i+j} (p_0, p_1, \dots, \widehat{p}_j \dots \widehat{p}_i \dots p_{r+1}) - \sum_{j > i} (-1)^{j+i} (p_0, p_1, \dots, \widehat{p}_i \dots \widehat{p}_j \dots p_{r+1}) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c.q.f.d

Il existe une relation fondamentale entre les groupes $C_r(O)$, $Z_r(O)$ et $B_r(O)$. Il est possible de montrer [NAK-90] que :

Théorème 4.24

$$B_r(O) \subset Z_r(O) \subset C_r(O)$$

preuve :

A tout élément $c \in B_r(O)$ est associé un élément $d \in C_{r+1}(O)$ tel que $c = \partial_{r+1}d$. Or d'après le lemme 4.23, $\partial_r c = \partial_r(\partial_{r+1}d) = 0 \Rightarrow c \in Z_r(O) \Rightarrow B_r(O) \subset Z_r(O)$. Par construction $Z_r(O)$ est un sous-groupe de $C_r(O)$. Donc $Z_r(O) \subset C_r(O)$.

c.q.f.d.

Nous allons voir, dans la section suivante, que grâce à cette relation d'inclusion entre $B_r(O)$, $Z_r(O)$ et $C_r(O)$, il est possible définir les groupes d'homologie.

4.3.3 Groupes d'homologie

Dans la section 4.3.2, nous avons défini les groupes $C_r(O)$, $Z_r(O)$ et $B_r(O)$ associés à un complexe simplicial O . Est-ce que le groupe $C_r(O)$ de chaînes permet d'exprimer une propriété qui est conservée par homéomorphisme? Nous savons qu'un triangle est homéomorphe à un carré. Mais qu'en est-il de leurs groupes de chaînes?

Si nous prenons le groupe des 1-chaînes associé à un triangle $O_T = (p_0, p_1, p_2)$, $C_1(O_T) = \{i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^3$ tandis que le groupe $C_1(O_C) = \{i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_3) + l(p_3p_0) \mid i, j, k, l \in \mathbb{Z}\}$ des 1-chaînes associé à un carré O_C est isomorphe à $\mathbb{Z}^4$. Ainsi le groupe $C_r(O)$ n'est pas un candidat permettant d'exprimer une invariance topologique. La même chose est vraie pour $Z_r(O)$ et $B_r(O)$. En revanche, nous allons voir que les groupes **d'homologie**, définis plus bas, associés à $C_r(O)$, $Z_r(O)$ et $B_r(O)$ sont des invariants topologiques du complexe simplicial O .

Définition 4.25 [NAK-90]

Soit O un complexe simplicial de dimension k .

Le groupe d'**homologie** $H_r(O)$, $0 \leq r \leq k$, associé à O est défini par le groupe quotient :

$$H_r(O) = Z_r(O) / B_r(O) = \{[z] \mid z \in Z_r(O)\}$$

où chaque classe d'équivalence $[z]$ s'appelle une **classe d'homologie** et deux r -cycles z et z' sont dans la même classe d'équivalence $[z]$ si et seulement si $z - z' \in B_r(O)$. Dans ce cas, z est dit **homologue** à z' et se note par $z \sim z'$ ou $[z] = [z']$.

Géométriquement, $z - z'$ est la frontière d'un certain espace. Ainsi, le groupe d'homologie $H_0(O)$ permet, par exemple, de déterminer si le complexe simplicial O est connexe.

Théorème 4.26 [NAK-90]

O est un complexe simplicial **connexe** de dimension k si et seulement si $H_0(O)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Illustrons le théorème 4.26. Si O est connexe, pour toute paire p_i et p_j de 0-simplexes, il existe un chemin de 1-simplexes dans $O(p_i p_k), (p_k p_l), \dots (p_m p_j)$ tel que $\partial_1((p_i p_k) + (p_k p_l) + \dots (p_m p_j)) = p_j - p_i$. Il s'ensuit donc que chaque p_i est homologue à chaque p_j , $[p_i] = [p_j]$. Ainsi chaque 0-simplexe est homologue à p_1 . Nous allons montrer à présent que $\forall z \in Z_0(O), \exists \lambda \in \mathbb{Z} / z - \lambda p_1 \in B_0(O)$.

Tout z de $Z_0(O)$ s'écrit sous la forme $z = \sum_{i=1}^{I_0} n_i p_i$ où I_0 est le nombre de 0-simplexes dans O . Alors $z - \sum_{i=1}^{I_0} n_i p_1 = \sum_{i=1}^{I_0} n_i (p_i - p_1) \in B_0(O)$ car $\forall i, p_i - p_1 \in B_0(O)$. Donc z est homologue à λp_1 avec $\lambda = \sum_{i=1}^{I_0} n_i$. Cela implique que la classe d'homologie $[z] = [\sum_{i=1}^{I_0} n_i p_1]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (quand les n_i prennent des valeurs quelconques dans $\mathbb{Z}$, $\lambda = \sum n_i$ décrit $\mathbb{Z}$). La réciproque du théorème 4.26 peut être trouvée dans [NAK-90].

Le groupe d'homologie $H_1(O)$ «représente» l'ensemble des courbes fermées dans O et le groupe $H_2(O)$ «représente» l'ensemble des surfaces fermées dans O . Ainsi, les groupes d'homologie permettent, d'une certaine manière, de «compter» des «cavités» dans des dimensions supérieures. Par exemple, $H_1(S^2) = \{0\}$ car toute courbe fermée de la 2-sphère unité⁶ S^2 borde un élément de dimension 2 dans S^2 . D'autre part, $H_2(S^2) \neq \{0\}$ car toute surface fermée S^2 de dimension 2 ne borde aucun élément de dimension trois puisque S^2 est au plus de dimension 2.

De façon générale, les groupes d'homologie sont des **invariants topologiques** comme le montre le théorème suivant.

Théorème 4.27 [HOCK-88]

Soit O_X et O_Y deux complexes simpliciaux correspondant chacun à une union de simplexes qui représente une tétraédrisation d'un objet X et d'un objet Y respectivement.

Supposons que X soit homéomorphe à Y .

Alors les groupes d'homologie $H_r(O_X)$ et $H_r(O_Y)$ sont isomorphes entre eux pour tout r , c'est-à-dire :

$$H_r(O_X) \cong H_r(O_Y) \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Nous avons déjà ce genre de résultats pour l'homotopie (cf. page 78). Néanmoins, bien que l'homotopie soit une notion géométrique assez intuitive, il est difficile de la calculer même pour des espaces relativement simples.

6. La n -sphère unité S^n est l'ensemble des points $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ de l'espace E^n satisfaisant $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$.

L'homologie simpliciale, développée dans cette section, permet de répondre plus facilement, aux questions de connexité similaires à celles posées par l'homotopie. En effet, nous verrons (cf. page 99) qu'il existe un lien entre l'homotopie et les isomorphismes entre groupes d'homologie.

Calculons, à présent, les groupe d'homologie du complexe simplicial correspondant à la surface d'un tétraèdre T , soit :

$$Bd\ T = \left\{ \begin{array}{c} p_0, p_1, p_2, p_3, \\ (p_0p_1), (p_0p_2), (p_0p_3), (p_1p_2), (p_1p_3), (p_2, p_3) \\ (p_0p_1p_2), (p_0p_1p_3), (p_0p_2p_3), (p_1p_2p_3) \end{array} \right\}$$

Calcul de $H_0(Bd\ T)$

Montrons que $H_0(Bd\ T)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (sans utiliser le théorème 4.26, à titre d'exemple). Nous avons $Z_0(Bd\ T) = C_0(Bd\ T)$ et :

$$\begin{aligned} B_0(Bd\ T) &= \{ \partial_1[n_0(p_0p_1) + n_1(p_0p_2) + n_2(p_0p_3) + n_3(p_1p_2) + n_4(p_1p_3) + \\ &\quad n_5(p_2p_3)] \mid \forall n_i, n_i \in \mathbb{Z} \} \\ B_0(Bd\ T) &= \{ n_0(p_1 - p_0) + n_1(p_2 - p_0) + n_2(p_3 - p_0) + n_3(p_2 - p_1) + n_4(p_3 - \\ &\quad p_1) + n_5(p_3 - p_2) \mid \forall n_i, n_i \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$b = \sum_{j=0}^3 a_j p_j \in B_0(Bd\ T) \Leftrightarrow \exists n_i / \begin{cases} a_0 = -n_0 - n_1 - n_2 \\ a_1 = n_0 - n_3 - n_4 \\ a_2 = n_1 + n_3 - n_5 \\ a_3 = n_2 + n_4 + n_5 \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^3 a_j = 0$$

Définissons un homomorphisme surjectif $f : Z_0(Bd\ T) \rightarrow \mathbb{Z}$ par :

$$f(a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) = \sum_{j=0}^3 a_j$$

Nous avons alors $\ker f = f^{-1}(0) = B_0(Bd\ T)$.

A partir du **théorème fondamental de l'homomorphisme**⁷, il s'ensuit que :

$$Z_0(Bd\ T)/\ker f \cong \operatorname{im} f$$

Or $\operatorname{im} f = \mathbb{Z}$, donc $H_0(Bd\ T) \cong \mathbb{Z}$.

7. Soit $f : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorphisme alors $G_1/\ker f \cong \operatorname{im} f$

Calcul de $H_1(Bd T)$

Soit $c = i(p_0p_1p_2) + j(p_0p_1p_3) + k(p_0p_2p_3) + l(p_1p_2p_3) \in C_2(Bd T)$ ($(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4$). Si $b = \partial_2 c$ ($b \in B_1(Bd T)$), b s'écrit sous la forme :

$$b = i((p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)) + j((p_1p_3) - (p_0p_3) + (p_0p_1)) + k((p_2p_3) - (p_0p_3) + (p_0p_2)) + l((p_2p_3) - (p_1p_3) + (p_1p_2)) \quad (4.1)$$

Tout élément z de $C_1(Bd T)$ s'écrit sous la forme

$z = n_0(p_0p_1) + n_1(p_0p_2) + n_2(p_0p_3) + n_3(p_1p_2) + n_4(p_1p_3) + n_5(p_2p_3)$, avec

$(n_0 \dots n_5) \in \mathbb{Z}^6$. $z \in Z_1(Bd T) \Leftrightarrow \partial_1 z = 0 \Leftrightarrow$

$$n_0(p_1 - p_0) + n_1(p_2 - p_0) + n_2(p_3 - p_0) + n_3(p_2 - p_1) + n_4(p_3 - p_1) + n_5(p_3 - p_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -n_0 - n_1 - n_2 = 0 \\ n_0 - n_3 - n_4 = 0 \\ n_1 + n_3 - n_5 = 0 \\ n_2 + n_4 + n_5 = 0 \end{cases} \quad \text{car } (p_0 \dots p_3) \text{ forment une famille libre.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_5 = n_1 + n_3 \\ n_4 = n_0 - n_3 \\ n_2 = -n_0 - n_1 \end{cases}$$

Donc

$$z = n_0(p_0p_1 + p_1p_3 + p_3p_0) + n_1(p_0p_2 + p_2p_3 + p_3p_0) + n_3(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1).$$

En résumé, $Z_1(Bd T)$ est engendré par les 3 cycles :

$$\begin{vmatrix} p_0p_1 + p_1p_3 + p_3p_0 \\ p_0p_2 + p_2p_3 + p_3p_0 \\ p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 \end{vmatrix}$$

Soit

$$z = n_0(p_0p_1 + p_1p_3 + p_3p_0) + n_1(p_0p_2 + p_2p_3 + p_3p_0) + n_3(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1)$$

appartenant à $Z_1(Bd T)$. D'après l'équation 4.1, on a :

$$z \in B_1(Bd T) \Leftrightarrow \exists i, j, k, l / \begin{matrix} (1) i + j = n_0 \\ (2) j - l = n_0 - n_3 \\ (3) j + k = n_0 + n_1 \\ (4) -i + k = n_1 \\ (5) k + l = n_1 + n_3 \\ (6) i + l = n_3 \end{matrix} \quad \text{Or } \begin{matrix} (5) = (4) + (6) \\ (3) = (2) + (5) \\ (2) = (3) - (5) \end{matrix} .$$

Le système se réduit à trois équations indépendantes et nous avons donc :

$$z \in B_1(Bd T) \Leftrightarrow \exists i, j, k, l / \begin{matrix} j = n_0 - i \\ k = n_1 + i \\ l = n_3 - i \end{matrix} .$$

Ce système admet une infinité de solutions. Ainsi, tout élément de $Z_1(Bd T)$ appartient à $B_1(Bd T)$ et réciproquement. Nous avons donc

$Z_1(Bd T) = B_1(Bd T)$. Ainsi $H_1(Bd T) = Z_1(Bd T)/B_1(Bd T)$ et donc $H_1(Bd T)$ est isomorphe à $\{0\}$.

Calcul de $H_2(Bd T)$

Etant donné qu'il n'y a aucun 3-simplexe dans BdT , nous avons $C_3(BdT) = \{0\}$, $B_2(Bd T) = \{0\}$ et $H_2(Bd T) = Z_2(Bd T)/B_2(Bd T) = Z_2(Bd T)$. Soit $z = i(p_0p_1p_2) + j(p_0p_1p_3) + k(p_0p_2p_3) + l(p_1p_2p_3) \in C_2(Bd T)$ avec $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$. Pour que $z \in Z_2(Bd T)$, nous devons avoir :

$$\partial_2 z = i((p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)) + j((p_1p_3) - (p_0p_3) + (p_0p_1)) + k((p_2p_3) - (p_0p_3) + (p_0p_2)) + l((p_2p_3) - (p_1p_3) + (p_1p_2)) = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\partial_2 z = (i + l)(p_1p_2) + (k - i)(p_0p_2) + (i + j)(p_0p_1) + (j - l)(p_1p_3) - (j + k)(p_0p_3) + (k + l)(p_2p_3) = 0$$

Cette équation est satisfaite si et seulement si $i = k$, $l = j$ et $i = -j$. Donc $Z_2(Bd T) = \{i(p_0p_1p_2) - i(p_0p_1p_3) + i(p_0p_2p_3) - i(p_1p_2p_3) / i \in \mathbb{Z}\}$. Cela montre que $Z_2(Bd T)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et $H_2(Bd T) \cong \mathbb{Z}$.

Calculons, à présent, les groupe d'homologie du complexe simplicial correspondant à un tétraèdre T , soit :

$$T = \left\{ \begin{array}{c} p_0, p_1, p_2, p_3, \\ (p_0p_1), (p_0p_2), (p_0p_3), (p_1p_2), (p_1p_3), (p_2, p_3) \\ (p_0p_1p_2), (p_0p_1p_3), (p_0p_2p_3), (p_1p_2p_3) \\ (p_0p_1p_2p_3) \end{array} \right\}$$

Calcul de $H_0(T)$ et de $H_1(T)$

Nous pouvons remarquer que le calcul des groupes d'homologie $H_0(T)$ et $H_1(T)$ est tout à fait identique aux calculs $H_0(BdT)$ et $H_1(BdT)$ puisque tous les simplexes de BdT sont contenus dans T . Ainsi $H_0(T) \cong \mathbb{Z}$ et $H_1(T) \cong \{0\}$.

Calcul de $H_2(T)$

Etant donné que T possède un 3-simplexe, le calcul de $H_2(T)$ est différent de celui de $H_2(BdT)$ car $C_3(T) \neq \{0\}$.

Soit $c = m(p_0p_1p_2p_3) \in C_3(T)$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Soit $b = \partial_3 c$ ($b \in B_2(T)$). b s'écrit sous la forme :

$$b = m(p_1 p_2 p_3) - m(p_0 p_2 p_3) + m(p_0 p_1 p_3) - m(p_0 p_1 p_2)$$

Tout élément $z \in Z_2(T)$ (calcul identique au calcul de $Z_2(Bd T)$) s'exprime par :

$$z = i(p_0 p_1 p_2) - i(p_0 p_1 p_3) + i(p_0 p_2 p_3) - i(p_1 p_2 p_3), \text{ avec } i \in \mathbb{Z}.$$

Cela montre que $Z_2(T) \cong B_2(T)$. Ainsi $H_2(T) \cong \{0\}$.

En résumé, le tableau 4.1 regroupe le calcul des groupes d'homologie pour un tétraèdre T et sa frontière $Bd T$.

Tétraèdre	Groupe d'homologie
$Bd T$	$H_0(Bd T) \cong \mathbb{Z}$ $H_1(Bd T) \cong \{0\}$ $H_2(Bd T) \cong \mathbb{Z}$ $H_r(Bd T) = \{0\} \ r > 2$
T	$H_0(T) \cong \mathbb{Z}$ $H_1(T) \cong \{0\}$ $H_2(T) \cong \{0\}$ $H_r(T) = \{0\} \ r > 3$

TAB. 4.1 – Les groupes d'homologie $H_r(T)$ et $H_r(Bd T)$.

4.3.4 Groupes d'homologie relative

Dans cette section, nous présentons des outils topologiques plus sophistiqués permettant de construire des groupes d'homologie d'une paire de complexes simpliciaux O_1 et O_2 . Nous allons voir qu'il est possible de définir des **groupes relatifs** de chaîne $C_r(O_2/O_1)$ (la notation O_2/O_1 sera définie dans la suite), de cycle $Z_r(O_2/O_1)$, de frontière $B_r(O_2/O_1)$ et d'homologie $H_r(O_2/O_1)$ lorsqu'un complexe simplicial O_1 est inclus dans un complexe simplicial O_2 .

Définition 4.28 [NAK-90]

Soit O_1 un complexe simplicial inclus dans un complexe simplicial O_2 ($O_1 \subset O_2$).

L'application $i : O_1 \rightarrow O_2$ définie par $i(v) = v \ \forall v \in O_1$ s'appelle une **application d'inclusion** de O_1 vers O_2 .

L'**identité** $id_{O_2} : O_2 \rightarrow O_2$ est un cas particulier d'une application d'inclusion où $O_1 = O_2$. Les applications d'inclusion présentent des propriétés topologiques intéressantes, décrites par les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.29 [NAK-90]

Soit O_1 un complexe simplicial inclus dans un complexe simplicial O_2 ($O_1 \subset O_2$).

Une application d'inclusion $i : O_1 \rightarrow O_2$ induit des homomorphismes $i_{r*} : H_r(O_1) \rightarrow H_r(O_2)$.

Théorème 4.30 [KONG-95]

Soit O_1 un complexe simplicial inclus dans un complexe simplicial O_2 ($O_1 \subset O_2$).

Si l'application d'inclusion $i : O_1 \rightarrow O_2$ est une **équivalence homotopique**⁸ alors l'application i induit des isomorphismes i_{r*} entre les groupes d'homologie $H_r(O_1)$ et $H_r(O_2)$ pour tout $r = 0, 1, 2, \dots$

Les théorèmes 4.29 et 4.30 montrent le lien qui existe entre l'homotopie et les groupes d'homologie lorsqu'un complexe simplicial O_1 est inclus dans un autre complexe simplicial O_2 . Ce résultat est fondamental, car il permet l'utilisation des outils de la topologie algébrique pour déterminer complètement la simplicité dans le cas des maillages tétraédriques (voir section 4.3.5).

Définition 4.31 [WAR-01]

Soit O_1 un complexe simplicial inclus dans un complexe simplicial O_2 ($O_1 \subset O_2$).

Le groupe $C_r(O_2/O_1)$ de chaîne **relative** est défini par le groupe quotient suivant :

$$C_r(O_2/O_1) = C_r(O_2)/C_r(O_1)$$

où une classe d'équivalence $[c_r]$, notée $\overline{c_r}$, comprend toutes les r -chaînes de O_2 de la forme $c_r + k_r$ (avec k_r une r -chaîne de O_1).

On notera, de manière générale, $c + C_r(O_1)$ un élément de $C_r(O_2/O_1)$.

A présent, nous allons définir les homomorphismes $\overline{\partial}_r : C_r(O_2/O_1) \rightarrow C_{r-1}(O_2/O_1)$ à partir des homomorphismes $\partial_r : C_r(O_2) \rightarrow C_{r-1}(O_2)$.

Définition 4.32 [HOCK-88]

Soit O_1 un complexe simplicial inclus dans un complexe simplicial O_2 ($O_1 \subset O_2$).

8. Etant donné que l'application i est une application d'inclusion, il est possible de construire une application $i' : O_2 \rightarrow O_1$ telle que $ii' : O_2 \rightarrow O_2$ et $i'i : O_1 \rightarrow O_1$ soient homotopiques aux applications identités id_{O_2} et id_{O_1} . Pour cela, l'application i' est définie de la manière suivante : pour tout k -simplexe s de O_1 inclus dans O_2 , nous avons $i'(s) = s$ et à tout k -simplexe de O_2 non inclus dans O_1 correspond un k -simplexe appartenant à l'union des frontières partagées entre O_1 et O_2 .

Les homomorphismes $\overline{\partial}_r : C_r(O_2/O_1) \rightarrow C_{r-1}(O_2/O_1)$ sont définis par :

$$\overline{\partial}_r(c + C_r(O_1)) = \partial_r(c) + C_{r-1}(O_1), \forall c \in C_r(O_2)$$

L'opérateur $\overline{\partial}_r$ est bien défini. En effet, si $c_1 \in c + C_r(O_1)$ alors $c_1 - c \in C_r(O_1)$, donc $\partial_r(c_1 - c) \in C_{r-1}(O_1)$. Ainsi, $\partial_r(c_1) \in \partial_r(c) + C_{r-1}(O_1)$.

On peut également montrer que $\overline{\partial}_r \overline{\partial}_{r+1} = 0$:

$$\overline{\partial}_r \overline{\partial}_{r+1}(c + C_{r+1}(O_1)) = \overline{\partial}_r[\partial_{r+1}(c) + C_r(O_1)] = \partial_r \partial_{r+1}(c) + C_{r-1}(O_1) = 0 + C_{r-1}(O_1) \text{ car } \partial_r \partial_{r+1} = 0.$$

avec $0 + C_{r-1}(O_1)$ qui correspond au 0 de $C_{r-1}(O_2/O_1)$.

Etant donné que $\overline{\partial}_r \overline{\partial}_{r+1} = 0$, nous avons $\text{im } \overline{\partial}_{r+1} \subset \ker \overline{\partial}_r$ (la preuve est analogue à celle du théorème 4.24). Ainsi, il est possible de construire des groupes d'homologie relative à partir des homomorphismes $\overline{\partial}_r$.

Définition 4.33 [HOCK-88]

Soit O_1 un complexe simplicial inclus dans un complexe simplicial O_2 ($O_1 \subset O_2$).

Les groupes d'homologie relative $H_r(O_2/O_1)$ sont définis par :

$$H_r(O_2/O_1) = Z_r(O_2/O_1)/B_r(O_2/O_1) = \{[\overline{z}] \mid \overline{z} \in Z_r(O_2/O_1)\}$$

où :

- $Z_r(O_2/O_1) = \ker \overline{\partial}_r$ sont les groupes des cycles **relatifs** (où une chaîne $\overline{z}$ est un cycle relatif si et seulement si $\overline{\partial}_r \overline{z} = 0$),
- $B_r(O_2/O_1) = \text{im } \overline{\partial}_{r+1}$ sont les groupes des frontières **relatives**.

D'après la définition 4.33, une chaîne relative $\overline{z}_r = z_r + C_r(O_1)$ représente un cycle relatif si et seulement $\overline{\partial}_r \overline{z}_r = 0$, donc si et seulement si $\partial_r z_r$ appartient à $C_{r-1}(O_1)$ ou est nulle. De façon analogue, une frontière $\overline{b}_r = b_r + C_r(O_1)$ est une frontière relative si et seulement s'il existe une chaîne d_{r+1} appartenant à $C_{r+1}(O_2)$ telle que $b_r - \partial_{r+1} d_{r+1}$ appartienne à $C_r(O_1)$.

Il existe également des homomorphismes particuliers entre les groupes d'homologies $H_r(O_2)$, $H_r(O_1)$ et $H_r(O_2/O_1)$.

Lemme 4.34 [WAR-01]

Soit O_1 un complexe simplicial inclus dans un complexe simplicial O_2 ($O_1 \subset O_2$).

Soit $j_r : C_r(O_2) \rightarrow C_r(O_2/O_1)$ une suite d'homomorphismes canoniques tels que pour tout $c_r \in C_r(O_2)$, $j_r(c_r) = c_r + C_r(O_1)$.

On a : $\forall r, j_{r-1}\partial_r = \bar{\partial}_r j_r$.

Théorème 4.35 [WAR-01]

Les homomorphismes j_r induisent des homomorphismes $j_{r*} : H_r(O_2) \rightarrow H_r(O_2/O_1) : j_{r*}([z_r]) = [j_r(z_r)]$.

Lemme 4.36 [WAR-01]

Soit O_1 un complexe simplicial inclus dans un complexe simplicial O_2 ($O_1 \subset O_2$).

Soit $h \in H_r(O_2/O_1)$ tel que $h = z + B_r(O_2/O_1)$ pour $z \in Z_r(O_2/O_1)$ avec $z = c + C_r(O_1)$, $c \in C_r(O_2)$ et $\partial_r(c) \in C_{r-1}(O_1)$ ou $\partial_r(c) = 0$.

L'application $\partial_{r*} : H_r(O_2/O_1) \rightarrow H_{r-1}(O_1)$ avec $\partial_{r*}(h) = \partial_r(c) + B_{r-1}(O_1)$ est un homomorphisme.

A partir des homomorphismes i_{r*} , j_{r*} et ∂_{r*} , il existe des constructions algébriques connues sous le nom de séquences d'homologie exacte (cf. théorème 4.38).

Définition 4.37 [HOCK-88]

Une séquence de groupes G_i et d'homomorphismes $\psi_i : G_i \rightarrow G_{i-1}$ avec $i = 2, \dots$ est une **séquence exacte** si pour tout i , $\psi_i(G_i) = \psi_{i-1}^{-1}(0)$, où 0 est l'élément neutre de G_{i-1} , c'est-à-dire $\text{im } \psi_i = \ker \psi_{i-1}$.

Notons qu'en général pour ∂_r , on avait seulement montré que $\text{im } \partial_r \subset \ker \partial_{r-1}$.

Théorème 4.38 [HOCK-88]

Soit O_1 un complexe simplicial inclus dans un complexe simplicial O_2 .
Considérons :

- les homomorphismes $i_{r*} : H_r(O_1) \rightarrow H_r(O_2)$ induits par l'application d'inclusion $i(v) = v$ pour tout $v \in O_1$,

- les homomorphismes $j_{r*} : H_r(O_2) \rightarrow H_r(O_2/O_1)$ induits par les homomorphismes $j_r : C_r(O_2) \rightarrow C_r(O_2/O_1)$,
- les homomorphismes $\partial_{r*} : H_r(O_2/O_1) \rightarrow H_{r-1}(O_1)$.

La séquence de groupes et d'homomorphismes (appelée séquence d'homologie)

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow i_{r*} H_r(O_2) \rightarrow j_{r*} H_r(O_2/O_1) \rightarrow \partial_{r*} H_{r-1}(O_1) \rightarrow i_{r-1*} H_{r-1}(O_2) \rightarrow j_{r-1*} \\ \dots \rightarrow i_{0*} H_0(O_2) \end{aligned}$$

est **exacte**.

preuve :

Il y a six propriétés à vérifier pour tout r :

- $im(i_{r*}) \subset ker(j_{r*})$. Supposons qu'un élément $[z_r]$ de $H_r(O_2)$ soit l'image par i_{r*} d'un élément $[x_r]$ de $H_r(O_1)$. Ceci signifie que z_r est homologue à $i(x_r) = x_r$ ou qu'il existe une chaîne d appartenant à $C_{r+1}(O_2)$ telle que $z_r - x_r = \partial_{r+1}d$. Cela implique que z_r est homologue à $\partial_{r+1}d$. Or $\partial_{r+1}d$ appartient également à $C_r(O_1)$, $x_r + \partial_{r+1}d \in C_r(O_1)$ et z_r est donc homologue à $0 + C_r(O_1)$. Ainsi, $j_r(z_r) = z_r + C_r(O_1)$ est homologue à $0 + C_r(O_1)$, et ceci implique que $ker(j_{r*})$ contient $im(i_{r*})$.
- $ker(j_{r*}) \subset im(i_{r*})$. Soit z_r un cycle de O_2 tel que $j_r(z_r) = z_r + C_r(O_1)$ est homologue à 0. Cela signifie que le cycle relatif $z_r + C_r(O_1) \in B_r(O_2/O_1)$. Ainsi, il existe une chaîne d de $C_{r+1}(O_2)$ telle que $z_r - \partial_{r+1}d = x_r$, où x_r est une chaîne de $C_r(O_1)$. Cela implique que $j_r(z_r) = z_r + C_r(O_1)$ contient un élément x_r de $C_r(O_1)$. Ainsi, $z_r - x_r = \partial_{r+1}d$ ou z_r est homologue à x_r (i.e: $[z_r] = [x_r]$). Etant donné que l'application i est une application d'inclusion, nous avons $i_{r*}([x_r]) = [x_r] = [z_r]$. Ainsi, si $j_{r*}([z_r]) = 0$, alors $[z_r]$ est l'image d'un élément de $H_r(O_1)$. Par conséquent, $ker(j_{r*})$ est contenu dans $im(i_{r*})$.
- $im(j_{r*}) \subset ker(\partial_{r*})$. Soit $\overline{z_r} = j_r(z_r)$ pour un cycle z_r de $Z_r(O_2)$. Alors $\overline{z_r} = z_r + C_r(O_1)$ et $\partial_r \overline{z_r} = \partial_r z_r + C_{r-1}(O_1) = 0 + C_{r-1}(O_1)$. Ainsi, $\partial_{r*}([\overline{z_r}]) = [\partial_r z_r]$, ce qui correspond au zéro de $H_{r-1}(O_1)$. Cela implique que $ker(\partial_{r*})$ contient $im(j_{r*})$.
- $ker(\partial_{r*}) \subset im(j_{r*})$. Soit $\overline{z_r} = z_r + C_r(O_1)$ un r -cycle relatif représentant une classe d'homologie $[\overline{z_r}]$ telle que $\partial_{r*}([\overline{z_r}]) = 0$ (ie. $[z_r]$ appartient à

$\ker(\partial_{r*})$). Par définition de l'opérateur ∂_{r*} , cela implique que $\overline{\partial_{r*}z_r}$ est homologue à $0 + C_{r-1}(O_1)$ ou que $\partial_r z_r$ appartient à $C_{r-1}(O_1)$. Si $\partial_r z_r$ est homologue à $0 + C_{r-1}(O_1)$, alors il existe une chaîne d dans $C_r(O_1)$ telle que $\partial_r d = \partial_r z_r$. Considérons la chaîne $z_r - d_r$. Etant donné que z_r et d_r ont la même frontière, cette chaîne est un cycle. Ainsi $z_r - d_r$ est un élément de $\overline{z_r}$ et $z_r - d_r$ est un cycle sur O_2 . Il s'ensuit que $j_r(z_r - d_r) = \overline{z_r}$. Par conséquent, $\ker(\partial_{r*})$ est contenu dans $\text{im}(j_{r*})$.

- $\text{im}(\partial_{r*}) \subset \ker(i_{r-1*})$. Considérons un élément $[z_{r-1}]$ de $H_{r-1}(O_1)$ pour lequel il existe un cycle relatif $\overline{d}$ tel que $\partial_{r*}[\overline{d}] = [z_{r-1}]$, alors nous montrons que $i_{r-1*}([z_{r-1}]) = 0$. Par définition, $\partial_{r*}([\overline{d}]) = [\partial_r d]$ avec d une chaîne de $C_r(O_2)$. Par hypothèse, $[z_{r-1}] = [\partial_r d]$ alors z_{r-1} est homologue à $\partial_r d$ sur O_2 . Par conséquent, $i_{r-1*}([z_{r-1}]) = [z_{r-1}]$ est le zéro de $H_{r-1}(O_2)$. En conclusion, $\ker(i_{r-1*})$ contient $\text{im}(\partial_{r*})$.
- $\ker(i_{r-1*}) \subset \text{im}(\partial_{r*})$. Supposons que $i_{r-1*}([z_{r-1}]) = 0$ dans $H_{r-1}(O_2)$. Cela signifie que $i_{r-1}(z_{r-1}) = z_{r-1}$ est homologue à zéro dans O_2 ou qu'il existe une chaîne d dans O_2 telle que $z_{r-1} = \partial_r d$. D'une part, nous avons $j_r(d) = d + C_r(O_1) = \overline{d}$ est une chaîne relative dans $C_r(O_2/O_1)$. D'autre part, $\overline{\partial_r d} = \partial_r d + C_{r-1}(O_1) = z_{r-1} + C_{r-1}(O_1)$, avec z_{r-1} une chaîne dans $C_{r-1}(O_1)$. Ainsi, $\overline{\partial_r d} = C_{r-1}(O_1)$, l'élément zéro de $C_r(O_2/O_1)$. $\partial_{r*}([\overline{d}]) = [\partial_r d] = [z_{r-1}]$ ou $[z_{r-1}]$ est l'image par ∂_{r*} d'un élément de $H_r(O_2/O_1)$. Par conséquent, $\ker(i_{r-1*})$ est contenu dans $\text{im}(\partial_{r*})$.

c.q.f.d.

Le théorème d'excision (cf. théorème 4.39) est également un résultat important de topologie pour des complexes simpliciaux inclus les uns dans les autres. Nous utiliserons ce résultat, dans la section suivante, pour expliciter notre caractéristique locale d'un tétraèdre simple.

Théorème 4.39 [HOCK-88]

Soit O_K un complexe simplicial.

Soit O_L un sous-complexe simplicial de O_K .

Soit O_{K_1} un sous-complexe simplicial de O_K telle que O_{K_1} contienne $O_K - O_L$.

Soit O_{L_1} un sous-complexe simplicial correspondant à l'union des frontières partagées entre tout simplexe de O_{K_1} et tout simplexe de O_L .

Les groupes d'homologie relative $H_r(O_{K_1}/O_{L_1})$ sont isomorphes aux groupes d'homologie relative $H_r(O_K/O_L)$ pour tout r .

éléments de preuve :

Considérons l'application d'inclusion i de O_{K_1} vers O_K . L'application i/O_{L_1} (i restreint à O_{L_1}) est alors une application d'inclusion de O_{L_1} vers O_L . Les applications i et i/O_{L_1} induisent respectivement des isomorphismes $i_r : C_r(O_{K_1}) \rightarrow C_r(O_K)$ et $i_r/O_{L_1} : C_r(O_{L_1}) \rightarrow C_r(O_L)$. On peut montrer [HOCK-88] alors que l'application $\bar{i}_r : C_r(O_{K_1}/O_{L_1}) \rightarrow C_r(O_K/O_L)$ est un isomorphisme car O_{K_1} contient $O_K - O_L$. Par conséquent, $\bar{i}_r$ induit un isomorphisme entre les groupes d'homologie relative $H_r(O_{K_1}/O_{L_1})$ et les groupes d'homologie relative $H_r(O_K/O_L)$.

4.3.5 Caractérisation de la simplicité d'un tétraèdre

A partir de l'homologie, nous allons à présent donner la réciproque du théorème 4.15.

Soit T un tétraèdre et soit O l'union d'un ensemble de tétraèdres formant une composante connexe qui ne contient pas T (resp. qui contient T) et supposons que les ensembles $O \cup T$ et O (resp. O et $O - \{T\}$) soient homéotopes. Que peut-on en déduire sur la frontière partagée $Bd_p T$ et le complément de la frontière partagée $Bd_{np} T$ de T ?

Dans le cadre des complexes simpliciaux, le fait que $O \cup T$ et O soient homéotopes induit des isomorphismes entre les groupes d'homologie $H_r(O)$ et $H_r(O \cup T)$ pour tout $r = 0, 1, 2, \dots$ (cf. théorème 4.30).

Il est alors possible d'utiliser les résultats concernant les groupes d'homologie (cf. sections 4.3.3 et 4.3.4) pour démontrer la réciproque du théorème 4.15.

Théorème 4.40 Soit T un tétraèdre et soit O l'union d'un ensemble de tétraèdres formant une composante connexe qui ne contient pas T (resp. qui contient T) tel que $O \cup T$ est connexe.

Si l'application d'inclusion $i : O \rightarrow O \cup T$ (resp. $O \rightarrow O - \{T\}$) est une équivalence homotopique alors $Bd_p T$ et $Bd_{np} T$ sont non-vides et connexes.

preuve :

D'après le théorème 4.30, i induit un isomorphisme i_{r*} entre les groupes d'homologie $H_r(O)$ et $H_r(O \cup T)$ pour tout $r = 0, 1, 2, \dots$

Etant donné que l'ensemble $O \cup T$ est connexe, nous avons $H_0(O \cup T) \cong \mathbb{Z}$ (cf. théorème 4.26).

D'autre part, nous savons que la séquence d'homologie de $O \cup T$ et O est exacte (cf. théorème 4.38). Plus précisément nous avons,

$$\dots \rightarrow_{i_r*} H_r(O \cup T) \rightarrow_{j_r*} H_r(O \cup T/O) \rightarrow_{\partial_r*} H_{r-1}(O) \rightarrow_{i_{r-1}*} H_{r-1}(O \cup T) \rightarrow_{j_{r-1}*} \dots \rightarrow_{i_0*} H_0(O \cup T) \text{ est exacte.}$$

Etant donné que $i_{r*} : H_r(O) \rightarrow H_r(O \cup T)$ sont des isomorphismes (cf. théorème 4.30), nous avons $\ker i_{r*} = \{0\}$.

Comme $\text{im } \partial_{r*} = \ker i_{r-1*}$ (séquence d'homologie exacte), nous avons $H_r(O \cup T/O) = \{0\}$ pour tout r .

Appliquons maintenant le théorème 4.39 en posant $O_K = O \cup T$ et $O_L = O$.

Etant donné que $O \cup T$ est connexe, le complexe simplicial $O_{K_1} = T$ contient le complexe simplicial $O \cup T - O$. On a alors $O_{L_1} = Bd_p T$. Ainsi, en appliquant le théorème d'excision 4.39, nous pouvons donc affirmer que les groupes $H_r(O \cup T/O)$ et $H_r(T/Bd_p T)$ sont également isomorphes pour tout r . Il s'ensuit que $H_r(T/Bd_p T) = \{0\}$ pour tout r .

Considérons, à présent, les homomorphismes d'homologie $i_{r*} : H_r(Bd_p T) \rightarrow H_r(T)$ pour tout $r = 0, 1, 2, \dots$ induits par l'application d'inclusion $i : Bd_p T \rightarrow T$.

Etant donné que $Bd_p T \subset T$, la séquence d'homologie

$$\dots \rightarrow_{i_r*} H_r(T) \rightarrow_{j_r*} H_r(T/Bd_p T) \rightarrow_{\partial_r*} H_{r-1}(Bd_p T) \rightarrow_{i_{r-1}*} H_{r-1}(T) \rightarrow_{j_{r-1}*} \dots \rightarrow_{i_0*} H_0(T) \text{ est exacte.}$$

Comme $H_r(T/Bd_p T) = \{0\}$, on a $\text{im } \partial_{r*} = \{0\}$ et $\ker j_{r*} = H_r(T)$. Comme la séquence est exacte, on a donc $\text{im } \partial_{r*} = \ker i_{r-1*} = \{0\}$. Nous pouvons donc en déduire que les homomorphismes i_{r*} sont également des isomorphismes pour tout r .

Etant donné que :

- $H_r(T) = \{0\}$ pour tout $r \neq 0$ (cf. tableau 4.1),
- $H_0(T)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (cf. tableau 4.1),
- i_{r*} est un isomorphisme pour tout r ,

nous avons donc $H_r(Bd_p T)$ est isomorphe à $\{0\}$ pour tout $r \neq 0$ et $H_0(Bd_p T)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

En conclusion :

Etant donné que $O \cup T$ est connexe, $Bd_p T$ est non-vide.

Etant donné que $H_0(Bd_p T)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, $Bd_p T$ est connexe (cf. théorème 4.26).

Etant donné que $H_2(Bd_p T) = Z_2(Bd_p T)$ est isomorphe à $\{0\}$, il n'existe pas de combinaison linéaire de faces de $Bd_p T$ telle que leur frontière soit nulle. En revanche, il est possible de construire, pour BdT (qui comprend toutes les faces du tétraèdre T), une combinaison linéaire de ses faces telle que sa frontière soit nulle puisque $H_2(BdT) = Z_2(BdT)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (cf. tableau 4.1). Or $Bd_p T \subset BdT$ et BdT comprend toutes les faces du tétraèdre T , il existe donc au moins une face de BdT dans $Bd_{np} T$. Ainsi, $Bd_{np} T$ est non-vide.

Etant donné que $Bd_p T$ forme un polyèdre dans BdT (car $Bd_p T$ est connexe) et que toute courbe fermée de $Bd_p T$ borde un élément de dimension 2 dans $Bd_p T$ (ie: $H_1(Bd_p T) = \{0\}$), $Bd_{np} T$ est connexe⁹.

La démonstration dans le cas où O contient T est similaire.

c.q.f.d.

Le théorème 4.40 couplé au théorème 4.15 permet de décrire complètement la caractérisation nécessaire et suffisante de la simplicité d'un tétraèdre.

Théorème 4.41 Soit T un tétraèdre et soit O l'union d'un ensemble de tétraèdres formant une composante connexe qui ne contient pas T (resp. qui contient T) telle que $O \cup T$ soit connexe.

L'application d'inclusion $i : O \rightarrow O \cup T$ (resp. $i : O - T \rightarrow O$) est une équivalence homotopique si et seulement si $Bd_p T$ et $Bd_{np} T$ sont non-vides et connexes.

4.4 Conclusion

Pour définir les déformations homotopiques d'un maillage tétraédrique, nous avons introduit une nouvelle caractérisation locale des déformations préservant la topologie. Notre caractérisation permet d'identifier les éléments simples de toute structure tétraédrique connexe vérifiant certaines propriétés locales. Nous avons ainsi étendu la notion d'éléments simples par rapport aux trames discrètes classiques (pixels et voxels) des images numériques en appliquant des résultats issus de la théorie de l'homologie au cas des maillages tétraédriques.

9. Cette propriété correspond à la dualité d'Alexander.

Il ne nous a pas été possible de déterminer des propriétés particulières de simplicité dans le cadre d'une *T.P.R.* Nous avons déterminé une caractérisation locale nécessaire et suffisante de tétraèdres simples dans le cas d'un objet connexe. Il serait également très intéressant de caractériser les tétraèdres simples dans le cas de plusieurs objets, afin de pouvoir réellement mailler des structures emboîtées telles que ceux des tissus de la tête.

La construction d'une *T.P.R.* (cf. chapitre 3) et la simplicité du critère de détection des déformations homotopiques rendent possible l'implantation informatique d'un algorithme de maillage homotopique tétraédrique des tissus de la tête adapté à la *F.E.M.* Cela fait partie de la section 6.3 du chapitre 6.

CHAPITRE 5

Adaptation d'une *T.P.R.* et optimisation de maillages

L'objectif est ici d'introduire d'une part des méthodes d'adaptation d'une *T.P.R.* (cf. chapitre 3) permettant d'obtenir des maillages obéissant à des prérequis de tailles et d'autre part des méthodes d'optimisation à connexités fixes d'un maillage (volumiques ou surfaciques).

La convergence, la précision et les théorèmes d'erreurs pour des calculs par éléments finis sont liés au paramètre h représentant la taille des éléments du maillage servant de support spatial au calcul ([CIAR-91] et Annexe 4). A partir des travaux de Frey *et al* concernant le calcul par éléments finis avec contrôle d'erreur, nous présentons un estimateur d'erreur pour le calcul du potentiel électrique. Cet estimateur, lié au paramètre h , permet de déterminer, sur un maillage tétraédrique et de manière homogène, l'erreur liée à une connaissance *a priori* de la solution du problème direct en E.E.G. (cf. section 5.1). La h -adaptation¹ d'une *T.P.R.* (cf. section 5.2) répond bien au problème d'effectuer un calcul aux éléments finis avec un contrôle d'erreur, bien qu'il n'y ait, à ce jour, aucune démonstration théorique [FREY-99].

Enfin, optimiser un maillage (surfacique ou volumique) par rapport à un certain critère est une opération fréquemment pratiquée avec différents objectifs. L'optimisation en tant que telle est intéressante car la qualité des solutions numériques associées aux sommets d'un maillage dépend, à l'évidence, de la qualité de celui-ci. Dans le cadre de l'optimisation de maillage, nous nous sommes plutôt intéressés à lisser des maillages surfaciques extraits d'une *T.P.R.* des tissus de la tête (cf. section 6.5). A ce titre, nous avons choisi d'étudier une méthode d'optimisation à connexités fixes (cf. section 5.3).

1. adaptation liée à la taille de la plus grande arête h d'un tétraèdre.

5.1 Calcul par éléments finis avec contrôle d'erreur

La construction d'un maillage est gouvernée par le paramètre h représentant le diamètre des éléments (Annexe 4). C'est pourquoi les longueurs, les distances et les autres relations de type métrique jouent un rôle très important. La plupart des métriques sont liées aux propriétés intrinsèques des surfaces, donc à leur géométrie. Toutefois, il est possible de déterminer des estimateurs d'erreur qui sont liés aux propriétés physiques d'un problème modélisé par éléments finis et qui influent sur des propriétés géométriques d'un maillage.

Le but est donc de construire un estimateur d'erreur qui permette de répartir sur un maillage tétraédrique de manière homogène l'erreur en connaissant *a priori* la solution du problème direct. Pour cela, nous supposons qu'une solution du problème direct en E.E.G. et M.E.G. a été calculée à partir d'un modèle sphérique.

Dans ce modèle, nous montrons qu'il est possible de trouver une solution analytique du problème direct pour l'E.E.G. en tout point de l'espace. En revanche, en M.E.G., la solution ne semble être analytique qu'à l'extérieur de la tête (cf. section 5.1.1). Par ailleurs, les erreurs du calcul par éléments finis sont plus importantes en E.E.G. car le champ et le potentiel électriques dépendent fortement des valeurs des conductivités des tissus de la tête [MAR-97]. C'est pourquoi, nous construisons un estimateur d'erreur² pour l'E.E.G. en étudiant l'écart entre le potentiel électrique u du modèle sphérique et son potentiel électrique interpolé $\Pi_T u$ au point X (i.e. $|(u - \Pi_T u)(X)|$) à l'intérieur de chaque tétraèdre T (cf. section 5.1.2). Cet estimateur d'erreur nous permet de connaître approximativement la distribution électromagnétique d'une configuration de sources neuronales. Il est possible alors de savoir quels tétraèdres d'un modèle tétraédrique des tissus de la tête doivent être affinés ou adaptés (cf. section 5.1.2).

5.1.1 Potentiel électrique et champ magnétique dans un modèle sphérique

Dans le cas d'un modèle sphérique en E.E.G. et M.E.G., nous avons vu que la tête pouvait être représentée par une série de sphères concentriques (généralement trois ou quatre couches) : une couche pour la peau, une couche pour l'os, une couche ayant les propriétés moyennes du cerveau et une quatrième couche pour le liquide céphalo-rachidien situé entre le cerveau et l'os

2. Ainsi que la convergence de l'approximation numérique.

(cf. section 1.5.2). Nous allons donner à présent les expressions du potentiel électrique et du champ magnétique dans le cas d'un modèle sphérique de conduction.

5.1.1.1 Potentiel électrique

Dans un milieu conducteur, les courants primaires ou «courants imposés» par les sources, représentés par le vecteur de densité de courant $\mathbf{J}_s$, donnent naissance à des courants induits. Ces courants induits, représentés par le vecteur de densité de courant $\mathbf{J}_i$, sont la réponse du milieu au champ électrique $\mathbf{E}$ provoqué par les courants primaires. La densité de courant totale $\mathbf{J}$ est donc la somme de deux termes :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_i$$

La fréquence des champs engendrés par l'activité électrique du cerveau est de l'ordre de quelques dizaines de Hertz. L'évolution du champ $\mathbf{E}$ est très lente par rapport aux temps caractéristiques d'évolution du milieu et la transmission des phénomènes électriques peut être considérée comme instantanée à l'intérieur de la tête. L'approximation quasi-statique est donc tout à fait justifiée dans ce cas [HAMA-93]. Dans un milieu conducteur passif caractérisé par un tenseur de conductivité $[\sigma]$, les courants induits sont reliés au champ électrique par la loi d'Ohm qui s'écrit :

$$\mathbf{J}_i = [\sigma] \mathbf{E}$$

Etant donné qu'il n'y a pas de création de charges dans les milieux considérés, et puisque l'on est en régime quasi-statique, on peut écrire la loi de conservation de la charge en régime permanent, c'est-à-dire :

$$\text{div } \mathbf{J} = 0$$

D'autre part, l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell permet de découpler le champ électrique du champ magnétique :

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

Le champ électrique peut donc être dérivé d'un potentiel scalaire V , c'est-à-dire :

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Il en résulte l'équation donnant le potentiel électrique, appelée équation de Poisson généralisée :

$$\text{div}([\sigma] \nabla V) = \text{div}(\mathbf{J}_s) \quad (5.1)$$

À cette équation sont associées des conditions de continuité et aux limites :

- sur la composante normale de la densité de courant totale $\mathbf{J}$. En particulier, les courants sont nuls à l'extérieur de la tête, la composante normale de la densité de courant doit s'annuler sur la surface extérieure du conducteur. Cette condition s'appelle «la condition aux limites de Neumann».
- sur la composante tangentielle du champ électrique $\mathbf{E}$,
- sur le potentiel V , dans tout le conducteur, et notamment aux interfaces entre les différents milieux. En particulier, le potentiel étant défini à une constante près, il est nécessaire de fixer sa valeur en un point donné. Cette contrainte est appliquée dans la résolution de l'équation 5.1 par une «condition de Dirichlet» sur le potentiel.

Dans l'équation de Poisson généralisée, $\text{div}(\mathbf{J}_s)$ est le terme source. Ce terme montre que dans le cas d'une source ponctuelle de courant telle qu'une boucle de courant, il apparaît une singularité au niveau de la source, la densité de courant étant alors ponctuelle. Pour lever cette singularité, on décompose le potentiel V en deux termes ($V = U + V_s$) où V_s est le potentiel dû au sources dans un milieu homogène infini de conductivité égale à la conductivité du milieu contenant les sources. V_s est une solution particulière, appelée aussi «solution singulière», de l'équation. U est appelé «solution régulière» ou «potentiel réduit» et est la solution de l'équation sans second membre dans le milieu contenant les sources. Cette décomposition permet de supprimer les singularités qui apparaissent au niveau des sources. En effet, U étant solution de l'équation sans second membre, celui-ci ne contient plus la singularité. La singularité elle même est reportée sur le potentiel V_s , que l'on calcule analytiquement.

Dans le cas d'un modèle de tête à géométrie sphérique, le calcul du potentiel électrique peut être résolu de façon analytique [MUNCK-88]. Pour que les résultats soient valables, les différentes couches sphériques doivent être concentriques et sans trous (cf. figure 5.1). La conductivité des milieux peut présenter une anisotropie avec des conductivités différentes dans les directions radiales et tangentielles de la sphère. Les valeurs des conductivités ne sont fonction que du rayon r , le nombre de couches n'étant pas limité. Les sources sont contenues dans la couche N , la plus interne, dont la conductivité est nécessairement isotrope.

L'équation 5.1 s'écrit, dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , de la façon suivante :

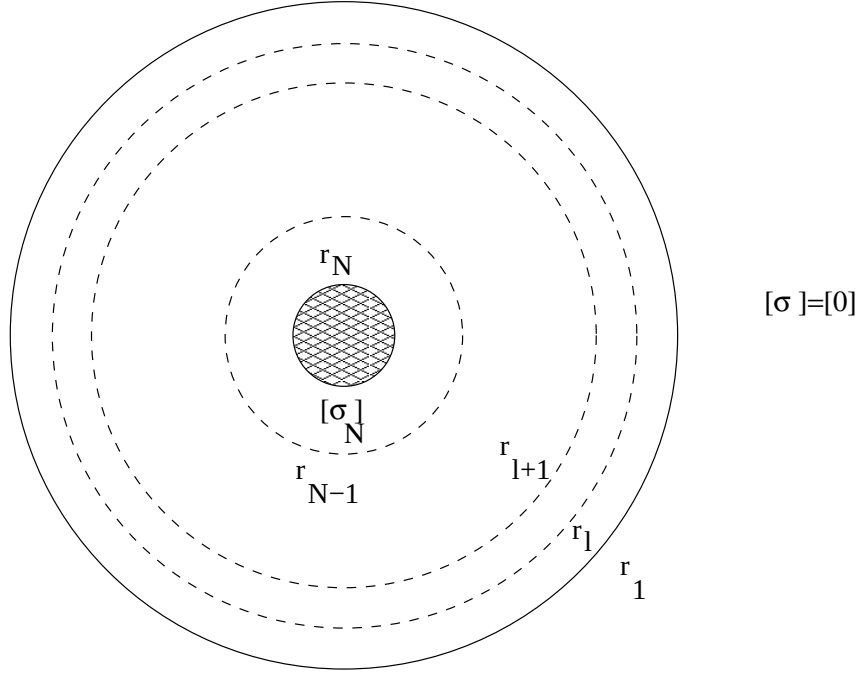


FIG. 5.1 – *Conducteur sphérique multi-couches. La couche N, la plus interne, contient les sources de courant.*

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sigma_r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \frac{r^2}{\sigma_t} S \quad (5.2)$$

où :

- V est le potentiel électrique,
- S est le terme associé aux sources ($\text{div} \mathbf{J}_s$); dans le cas d'un monopôle (source localisée au point $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ et d'intensité I) le terme de source s'exprime par $S = \frac{I}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \cdot \delta(\theta - \theta_0) \cdot \delta(\varphi - \varphi_0)$ (où $\delta()$ est la fonction de Dirac),
- σ_r et σ_t sont les conductivités radiales et tangentielles qui ne dépendent que de r .

A l'équation 5.2 s'ajoutent des conditions aux limites et de continuité vues précédemment.

Pour une source d'intensité I localisée en $(r_o, \theta_o, \varphi_o)$, la solution du potentiel électrique V se décompose en une série d'harmoniques sphériques [MUNCK-88] :

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\alpha=0}^1 I.R_n(r_0, r) \bar{Y}_{nm\alpha}(\theta_0, \varphi_0) \bar{Y}_{nm\alpha}(\theta, \varphi) \quad (5.3)$$

où :

- R_n sont des fonctions à déterminer,
- $\bar{Y}_{nm\alpha}$ sont les fonctions harmoniques sphériques normalisées d'ordre n et de degré m :

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{nm0} &= \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1} (1 + \delta_{0m}) \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \times P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\varphi) \\ \bar{Y}_{nm1} &= \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1} (1 + \delta_{0m}) \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \times P_{nm}(\cos\theta) \sin(m\varphi) \end{aligned}$$

où $P_{nm}(\cos\theta)$ sont les polynômes de Legendre associés aux harmoniques sphériques et δ_{0m} est le symbole de Kronecker ($\delta_{0m} = 1$ si $m = 0$ sinon $\delta_{0m} = 0$).

Dans le cas d'une source dipolaire de moment dipolaire $\mathbf{Q}$, la solution V recherchée est de la forme [MUNCK-88] :

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\alpha=0}^1 \bar{Y}_{nm\alpha}(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{Q} \cdot \nabla_0 \left[R_n(r_0, r) \bar{Y}_{nm\alpha}(\theta_0, \varphi_0) \right] \quad (5.4)$$

où :

- ∇_0 symbolise le gradient au point où se trouve la source dipolaire $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$,
- les fonctions R_n s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R_n(r_0, r) &= \frac{1}{r_0^2 \sigma_r(r_0) W(R_n^{(1)}, R_n^{(2)})|_{r=r_0}} R_n^{(1)}(r) R_n^{(2)}(r_0) \text{ si } r \leq r_0 \\ R_n(r_0, r) &= \frac{1}{r_0^2 \sigma_r(r_0) W(R_n^{(1)}, R_n^{(2)})|_{r=r_0}} R_n^{(1)}(r_0) R_n^{(2)}(r) \text{ si } r_0 \leq r \end{aligned}$$

où $W(R_n^{(1)}, R_n^{(2)})$ est le Wronskien défini comme suit :

$$W(R_n^{(1)}, R_n^{(2)}) = R_n^{(1)}(r) \frac{d}{dr} R_n^{(2)}(r) - R_n^{(2)}(r) \frac{d}{dr} R_n^{(1)}(r)$$

Les fonctions $R_n^{(1)}$ et $R_n^{(2)}$ peuvent être exprimées dans le cas d'un modèle sphérique à N couches dont les rayons sont $r_1, \dots, r_N$ avec $r_1 > \dots > r_N$, dans lequel la conductivité est constante dans chaque tranche l , et la distribution

correspondante est constante par morceaux. Les fonctions $R_n^{(1)}$ et $R_n^{(2)}$ sont alors de la forme [MUNCK-88] :

$$R_n^{(i)} = A_l^{(i)} r^{v_l} + B_l^{(i)} \frac{1}{r^{v_l+1}} \text{ pour } r_l \geq r \geq r_{l+1}$$

où $v_l = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4n(n+1) \frac{\sigma_{lt}}{\sigma_{lr}}} \right)$.

Les constantes A_l et B_l sont des fonctions des propriétés de la tranche l du conducteur et sont choisies de manière à ce que les conditions soient respectées à chaque interface. A_l et B_l s'obtiennent alors de façon récursive [MUNCK-88] :

$$\begin{pmatrix} A_l^{(i)} \\ B_l^{(i)} \end{pmatrix} = M_l(r_l) \bullet \begin{pmatrix} A_{l-1}^{(i)} \\ B_{l-1}^{(i)} \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} - M_l(r_l) &= \begin{pmatrix} r_l^{v_l} & \frac{1}{r_l^{v_l+1}} \\ \sigma_r^l \cdot v_l \cdot r_l^{v_l-1} & \sigma_r^l \cdot \frac{1}{(v_l+1)r_l^{v_l}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_l^{v_{l-1}} & r_l^{v_{l-1}} \\ \sigma_r^{l-1} \cdot (v_{l-1}) \cdot r_l^{v_{l-1}-2} & \sigma_r^{l-1} \cdot \frac{1}{(v_{l-1}+1)r_l^{v_{l-1}-1}} \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} A_N^{(1)} \\ B_N^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A_N^{(2)} \\ B_N^{(2)} \end{pmatrix} = \prod_{l=2}^N M_l \begin{pmatrix} A_l^{(2)} \\ B_l^{(2)} \end{pmatrix}, \\ - \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ B_1^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{(v_1+1)r_1^{v_1}} \\ \frac{1}{v_1 \cdot r_1^{v_1-1}} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous pouvons décomposer le moment dipolaire en deux parties, l'une radiale Q_r , et l'autre tangentielle Q_t . En utilisant cette décomposition et l'expression des harmoniques sphériques, nous obtenons l'expression du potentiel V suivante pour $r_0 \leq r$ [MUNCK-88] :

$$V = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n^{(2)}(r)}{\sigma_r^N B_N^{(2)}} \left[Q_r R_n^{(1)'}(r_0) P_{n0}(\cos \theta) + \frac{Q_t}{r_0} R_n^{(1)}(r_0) P_{n1}(\cos \theta) \cos \varphi \right] \quad (5.5)$$

Une expression équivalente est obtenue en intervertissant le rôle de $R_n^{(1)}$ et $R_n^{(2)}$ pour $r_0 \geq r$.

5.1.1.2 Champ magnétique

Le milieu conducteur Ω considéré (la tête) est amagnétique. Cela implique que l'excitation magnétique $\mathbf{H}$ et le champ magnétique $\mathbf{B}$ ne diffèrent que d'un facteur constant, la perméabilité magnétique du vide ($\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$). Les

champs électrique et magnétique sont totalement découplés en régime permanent, c'est-à-dire que le champ magnétique ne modifie pas la répartition des charges dans le conducteur. Le champ magnétique se déduit alors de la densité de courant totale présente dans le milieu par application de la loi de Biot et Savart.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d\mathbf{r}'$$

où $\mathbf{r}$ est la position du capteur.

Étant donné que $\mathbf{J}$ dépend du potentiel électrique par l'intermédiaire des courants induits, il est nécessaire de calculer V pour obtenir le champ magnétique.

Puisque les courants sont nuls à l'extérieur du conducteur, l'intégration ne se fait que sur le volume du conducteur, la tête, même lorsque l'on calcule le champ à l'extérieur.

Dans un modèle sphérique, le conducteur G est constitué de plusieurs couches homogènes G_l de conductivité constante σ_l , et est limité par une surface S_l . En appliquant la décomposition de la densité de courant totale $\mathbf{J}$ à la loi de Biot et Savart, nous obtenons :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d\mathbf{r}' - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_l \sigma_l \int_{G_l} \nabla V(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d\mathbf{r}' \quad (5.6)$$

Nous reconnaissons dans le premier terme l'expression de $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d\mathbf{r}'$ du champ dans un milieu homogène infini isotrope.

Pour un milieu à symétrie sphérique, la contribution des courants de conduction à la partie radiale B_r du champ magnétique est nulle, l'équation 5.6 se simplifie [SARV-87] et devient :

$$B_r(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot \mathbf{e}_r d\mathbf{r}' \quad (5.7)$$

avec $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$.

On peut montrer que les autres composantes du champ magnétique sont dépendantes des courants de conduction mais que leurs expressions ne dépendent pas des conductivités. On montre que le calcul du champ magnétique peut être résolu de façon analytique à l'extérieur du milieu conducteur [SARV-87]. À notre connaissance, il n'existe pas de calcul analytique du

champ magnétique en tout point de l'espace pour un modèle sphérique de conduction.

Ainsi, à l'extérieur du conducteur, les courants sont nuls et nous avons donc :

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = 0$$

Le champ B peut donc être alors dérivé d'un potentiel scalaire magnétique ψ :

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \psi$$

Ainsi, dans le cas d'un dipôle de moment $\mathbf{Q}$ situé en $\mathbf{r}_0$, l'expression du potentiel magnétique pour un modèle sphérique devient [SARV-87] :

$$\psi = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{F}$$

et le champ $\mathbf{B}$ dérivé du potentiel scalaire magnétique ψ est égal à :

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{F \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 - (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}) \nabla F}{F^2}$$

où :

$$\begin{aligned} - F &= a(ar + r^2 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}) \text{ et} \\ - \nabla F &= \left[\frac{a^2}{r} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{a} + 2a + 2r \right] \cdot \mathbf{r} - \left[a + 2r + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{a} \right] \cdot \mathbf{r}_0 \end{aligned}$$

avec $\mathbf{a} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ et $a = \|\mathbf{a}\|$, $r = \|\mathbf{r}\|$.

Contrairement au champ magnétique $\mathbf{B}$, l'expression du potentiel électrique V s'exprime, dans un modèle sphérique, de façon analytique en tout point de l'espace. Ainsi, nous allons tenter de construire dans la section suivante un estimateur d'erreur pour l'E.E.G.

5.1.2 Estimateur d'erreur en E.E.G.

Afin de construire un estimateur d'erreur sur le calcul du potentiel en E.E.G., nous allons supposer que la solution $u = V$ (potentiel électrique) calculée analytiquement dans la modélisation sphérique est relativement proche de la solution réelle. Ensuite nous supposons que pour tout point à l'intérieur d'un tétraèdre d'une $T.P.R.$ le potentiel électrique s'obtient par interpolation linéaire $\Pi_T u$ du potentiel $u = V$ du modèle sphérique calculé aux sommets du tétraèdre considéré. Nous regardons alors l'écart entre u et $\Pi_T u$

(i.e. $|(u - \Pi_T u)(X)|$) sur chaque tétraèdre en effectuant une analyse locale [FREY-99].

Cette évaluation repose alors sur différentes formules de Taylor que nous appliquons à la fonction $f = (u - \Pi_T u)$ de T dans $\mathbb{R}$, où T représente l'intérieur du tétraèdre $T = \{A, B, C, D\}$. Pour une telle fonction f , nous faisons varier X sur le tétraèdre T . L'analyse locale par un développement de Taylor autour de A donne [FREY-99] :

$$f(X) - f(A) = \overrightarrow{AX} \cdot \nabla f(A) + \frac{1}{2} \overrightarrow{AX}^t \cdot H_f(A) \cdot \overrightarrow{AX} + O(\|\overrightarrow{AX}\|^3)$$

avec :

- $\overrightarrow{AX}$ le déplacement autour de A dans le tétraèdre T ,
- $\overrightarrow{AX}^t$ le transposé du vecteur $\overrightarrow{AX}$,
- $\nabla f(X)$ désigne le gradient,
- H_f est la matrice hessienne de f .

En premier lieu, notons que $H_f = H_u$ (à cause de l'interpolation linéaire). Regardons ensuite le terme $\nabla f(A)$. Tout point X de T peut s'écrire comme une combinaison linéaire de A, B, C, D :

$$X = \lambda_a \cdot A + \lambda_b \cdot B + \lambda_c \cdot C + \lambda_d \cdot D$$

avec $\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \lambda_d = 1$.

On alors $\overrightarrow{AX} = \lambda_b \overrightarrow{AB} + \lambda_c \overrightarrow{AC} + \lambda_d \overrightarrow{AD}$.

Comme nous supposons que pour tout point à l'intérieur de T le potentiel électrique u est estimé par interpolation linéaire de u du modèle sphérique calculé aux sommets de T , l'expression $\overrightarrow{AX} \cdot \nabla f(A)$ (cf. Annexe 4) devient :

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda_b}{2} \overrightarrow{AB}^t \cdot H_u(A) \overrightarrow{AB} - \frac{\lambda_c}{2} \overrightarrow{AC}^t \cdot H_u(A) \overrightarrow{AC} \\ & -\frac{\lambda_d}{2} \overrightarrow{AD}^t \cdot H_u(A) \overrightarrow{AD} + O(\max(\|\overrightarrow{AB}\|, \|\overrightarrow{AC}\|, \|\overrightarrow{AD}\|)^3) \end{aligned}$$

Dans [FREY-99], la majoration suivante pour l'écart $|(u - \Pi_T u)(X)|$ est alors suggérée :

$$\begin{aligned} |(u - \Pi_T u)(X)| & \leq \frac{1}{2} \max_{X \in T} (\overrightarrow{AX}^t \cdot H_u(A) \overrightarrow{AX}) \\ & -\frac{\lambda_b}{2} \overrightarrow{AB}^t \cdot H_u(A) \overrightarrow{AB} - \frac{\lambda_c}{2} \overrightarrow{AC}^t \cdot H_u(A) \overrightarrow{AC} - \frac{\lambda_d}{2} \overrightarrow{AD}^t \cdot H_u(A) \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Si h désigne la longueur de la plus grande arête du tétraèdre, Frey propose à partir de l'équation précédente la majoration suivante [FREY-99] :

$$\left| \left(u - \prod_T u \right)(X) \right| \leq h^2 \cdot (H_{11} + H_{22} + H_{33} + 2H_{12} + 2H_{13} + 2H_{23}) = \varepsilon \quad (5.8)$$

où H_{ij} est le maximum sur T de la valeur absolue du coefficient H_{ij} de la matrice hessienne H_u .

Le majorant que nous présentons ci-dessus n'est certainement pas optimal. D'après H. Borouchaki, il existe une constante multiplicative permettant d'affiner la majoration.

Evaluer les coefficients H_{ij} sur T correspond à évaluer la matrice hessienne sur T du potentiel électrique V (cf. équation 5.5) dans le cas du modèle sphérique. Cette évaluation peut se faire en calculant numériquement la matrice hessienne à partir du potentiel électrique V ou en dérivant analytiquement la matrice hessienne à partir de la formule du potentiel V (cf. équation 5.5).

Ainsi pour une erreur ε que nous imposons (cf. équation 5.8), nous pouvons connaître alors la longueur d'arête h maximale aux sommets du tétraèdre T considéré. A partir de cette estimation, nous prenons la décision de découper les arêtes partageant les sommets du tétraèdre T si elles ont une longueur supérieure à h . Cet estimateur d'erreur pour l' $E.E.G.$ nous engage, donc, à étudier une méthode d'adaptation par modifications locales d'une $T.P.R.$ (cf. section suivante).

5.2 h -adaptation par modifications locales d'une $T.P.R.$

Le contrôle d'erreur pour la résolution par éléments finis du problème direct en $E.E.G.$ (cf. section 5.1) est fonction du paramètre h représentant la taille des éléments (Annexe 4). Cela nous amène donc à penser que la h -adaptation répond bien au problème. Dans une telle stratégie d'adaptation, le maillage courant est modifié localement afin de construire un maillage adapté. Le maillage courant est tout naturellement dans notre cas une $T.P.R.$ de $\mathbb{R}^3$. Les requêtes d'affinement peuvent être exprimées au niveau des sommets ou au niveau des éléments du maillage.

Dans le cas où la demande d'affinement est formulée aux sommets des éléments, les procédures de subdivision sont moins triviales en trois dimensions qu'en deux dimensions. Les partitions utilisées pour affiner une $T.P.R.$ de $\mathbb{R}^3$ sont montrées sur la figure 5.2. Si i et j sont les deux indices de deux

sommets d'un tétraèdre, on note par ij l'indice du point milieu entre i et j . Avec cette notation, pour un élément donné $[1, 2, 3, 4]$ les quatre séries d'affinement par rapport à 1, 2, 3 et 4 sommets représentés sur la figure 5.2 correspondent aux énumérations suivantes :

- $[1, 2, 3, 4]$ donne $[12, 2, 23, 24]$, $[1, 12, 3, 4]$, $[12, 23, 3, 4]$ et $[12, 23, 24, 4]$ si on affine autour du sommet 2.
- $[1, 2, 3, 4]$ donne $[1, 12, 14, 13]$, $[12, 2, 24, 23]$, $[12, 14, 4, 13]$, $[12, 4, 13, 3]$, $[12, 4, 3, 24]$ et $[12, 24, 3, 23]$ quand la requête de subdivision est demandée autour des sommets 1 et 2.
- $[1, 2, 3, 4]$ donne $[13, 1, 12, 14]$, $[12, 2, 23, 24]$, $[23, 3, 13, 34]$ trois «petits» tétraèdres autour des sommets 1, 2, 3, et $[12, 23, 13, 4]$, $[12, 13, 14, 4]$, $[12, 24, 23, 4]$ et enfin $[23, 34, 13, 4]$ quand on affine autour des sommets 1, 2, 3.
- $[1, 2, 3, 4]$ donne $[13, 1, 12, 14]$, $[12, 2, 23, 24]$, $[23, 3, 13, 34]$, $[34, 4, 14, 24]$, quatre «petits» tétraèdres aux coins et $[13, 23, 14, 12]$, $[12, 14, 24, 23]$, $[23, 14, 34, 13]$ et enfin $[34, 23, 24, 14]$.

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que lorsque les demandes d'affinement sont formulées autour de trois ou quatre sommets, le motif de subdivision est unique. Lorsque l'on subdivise autour d'un ou deux sommets, cette décomposition n'est plus unique. En fait, on peut voir que l'affinement autour d'un sommet possède six décompositions différentes (voir figure 5.3) et celui autour de deux sommets possède quatre affinements possibles (voir figure 5.4).

Cette non-unicité de la décomposition nécessite de prendre des précautions quant à la conformité du maillage engendré. Par conséquent, chaque schéma de subdivision est prioritaire de façon décroissante (4, 3, 2 puis 1 sommet(s)) par rapport aux autres schémas de subdivision. Ainsi, une fois toutes les requêtes de subdivision connues aux sommets de la *T.P.R.*, on gère en premier lieu les schémas de subdivision autour de trois sommets et quatre sommets car ces décompositions sont uniques. Ensuite on effectue le schéma de subdivision autour de deux sommets en imposant les contraintes de schémas provenant de la subdivision autour de trois et quatre sommets. Cette étape consiste à d'abord imposer une configuration donnée aux voisins par face des configurations à trois sommets, puis à construire les requêtes restantes autour de deux sommets en ne modifiant pas les requêtes déjà construites. Enfin, on construit les affinements autour d'un sommet en ne modifiant pas les affinements obtenus au préalable autour de deux, trois et quatre sommets. Les affinements autour d'un sommet se déroulent en deux étapes. Premièrement nous analysons les configurations à deux sommets ayant des voisins par

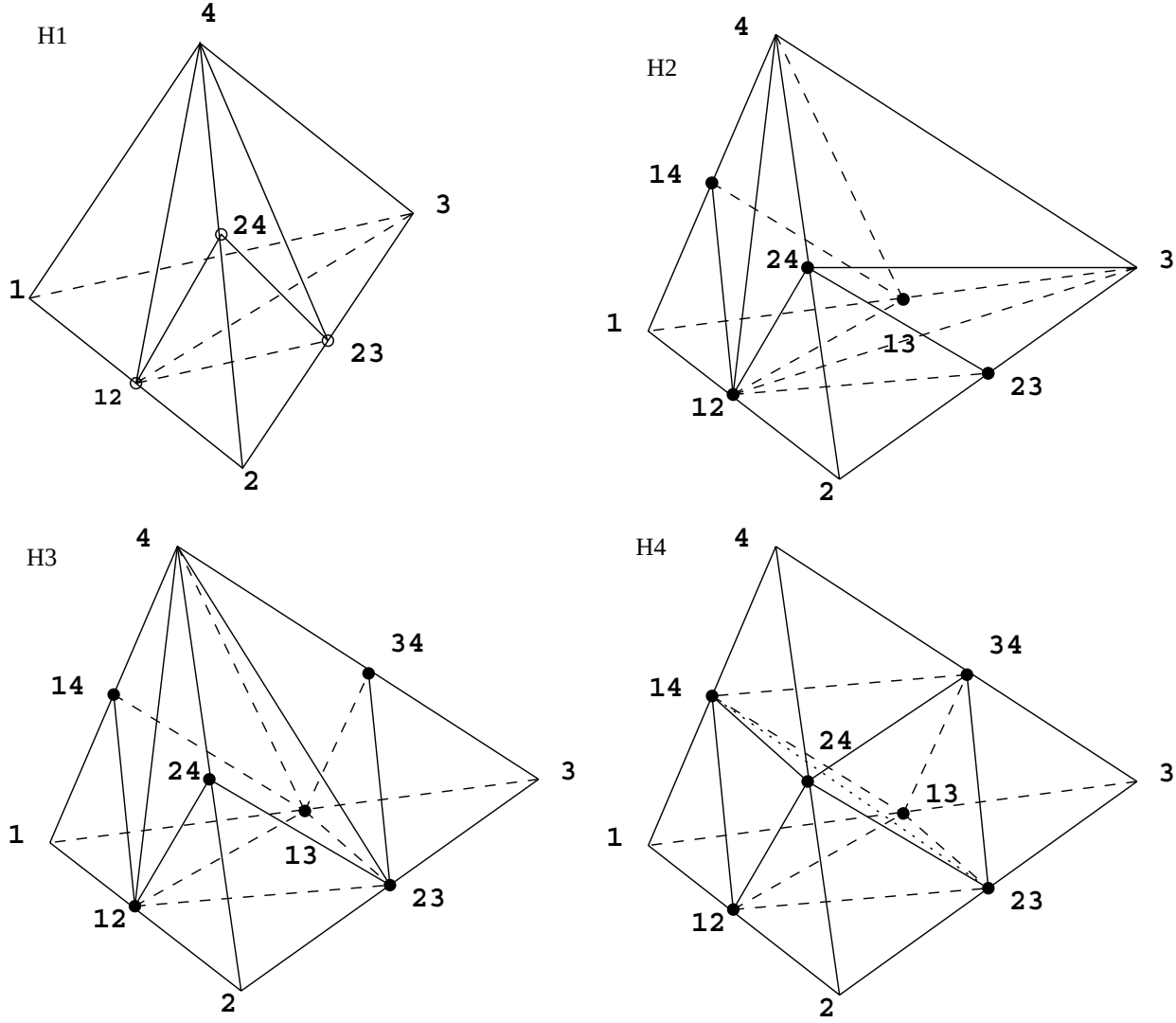


FIG. 5.2 – Affinement tétraédrique autour de 1, 2, 3, et 4 sommets (resp. les configurations $H11$, $H21$, $H3$, $H4$).

face avec un schéma de subdivision autour d'un sommet. Puis nous gérons les requêtes restantes autour d'un sommet.

La qualité géométrique des éléments créés est directement liée au maillage de fond initial, c'est-à-dire la $T.P.R.$ Le tableau 5.1 regroupe pour chaque schéma de subdivision (voir figure 5.2), les qualités géométriques Q_α^{-1} et Q_β (définies à la section 3.3) des éléments créés à partir d'une $T.P.R.$ de $\mathbb{R}^3$

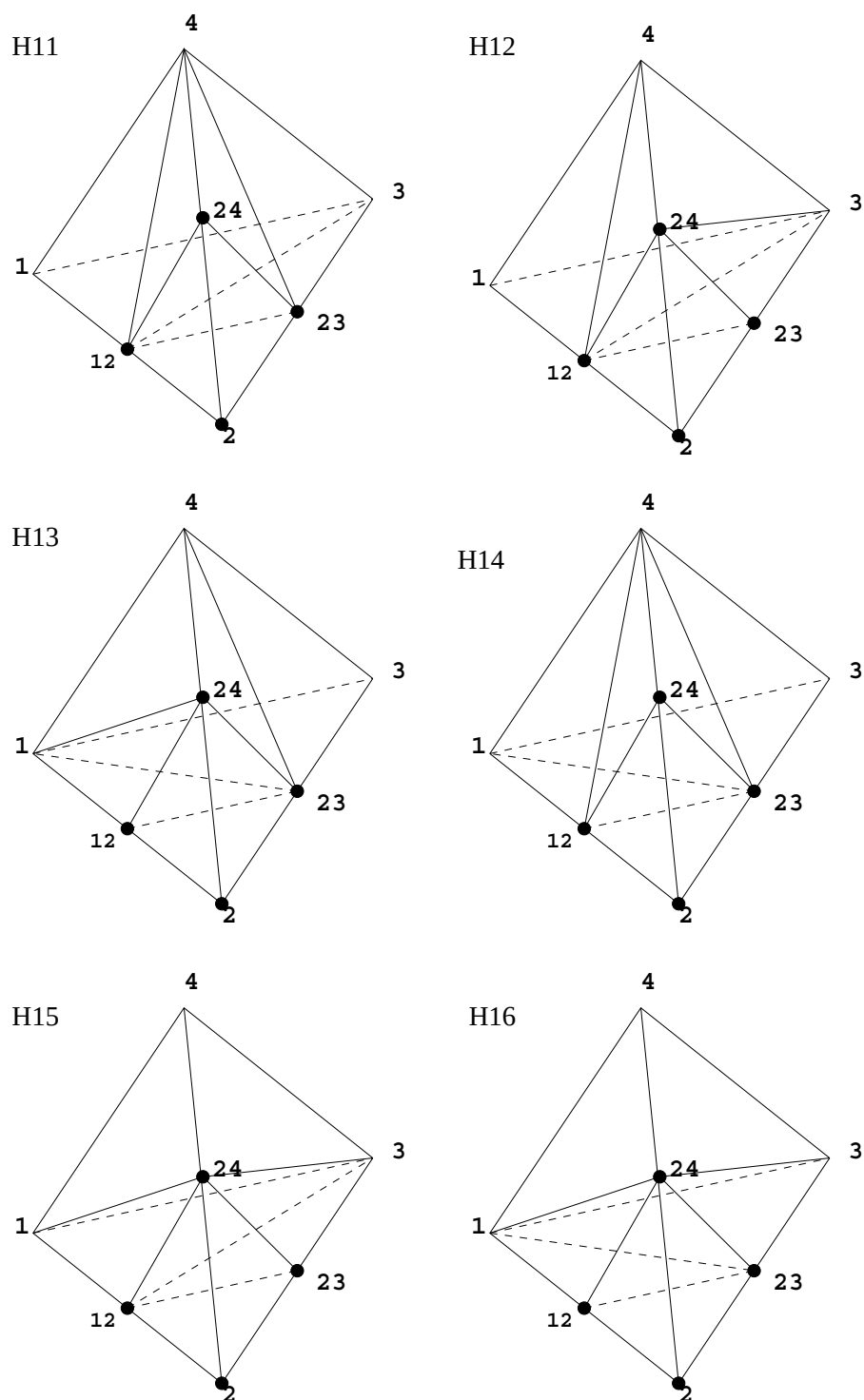


FIG. 5.3 – Les différents schémas (*H11* à *H16*) de subdivision autour d'un sommet.

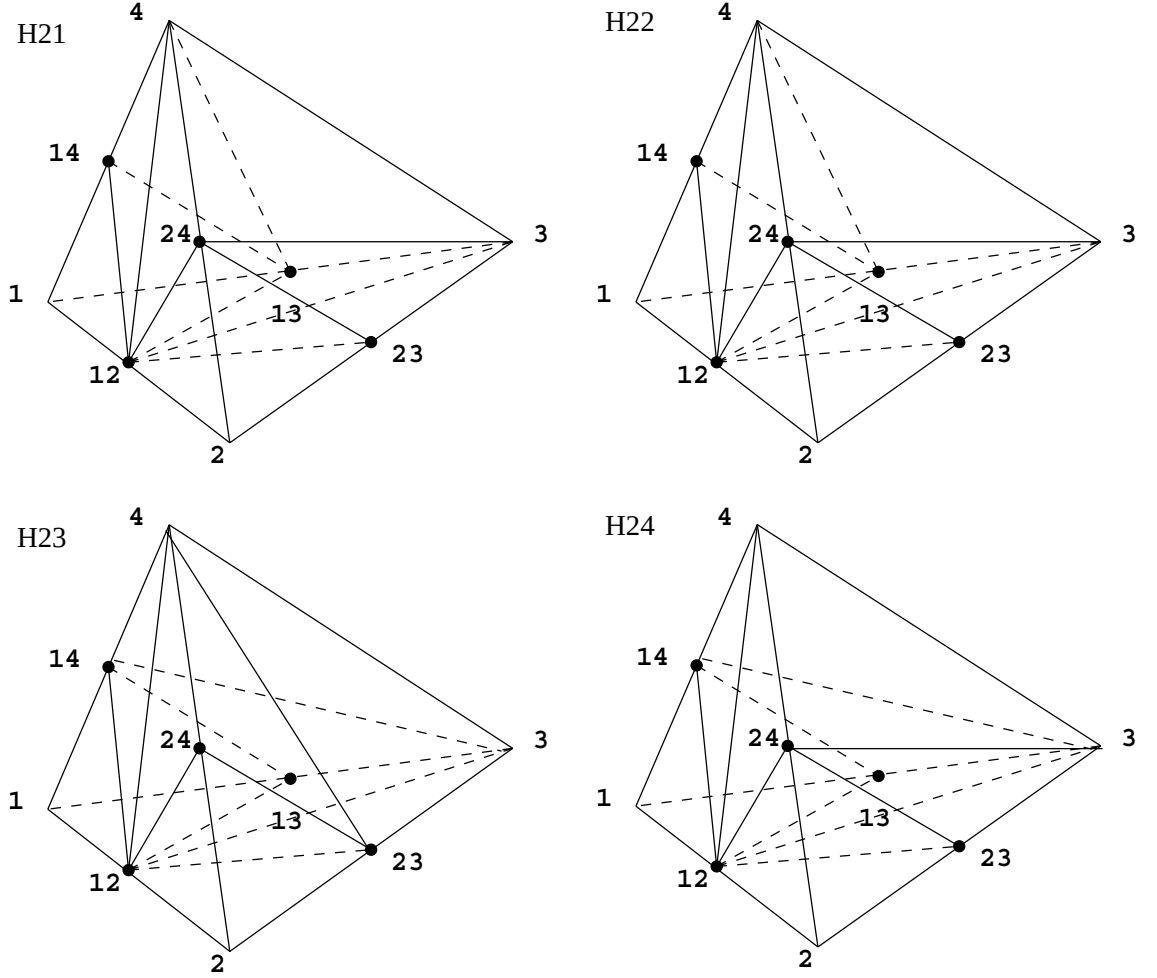


FIG. 5.4 – les différents schémas (H21 à H24) de subdivision autour de deux sommets.

construite avec le tétraèdre invariant par subdivision suivant :

$$T^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

Dans le cas d'une $T.P.R.$, les différentes décompositions autour d'un sommet et deux sommets donnent sensiblement les mêmes qualités (cf. tableau 5.1) puisque tout tétraèdre d'une $T.P.R.$ a des arêtes presque égales. Pour toutes les configurations autour d'un ou deux sommets, les meilleures qualités Q_α^{-1} et Q_β obtenues sont respectivement 0,86 et 1,08 et les moins bonnes qualités Q_α^{-1} et Q_β obtenues sont respectivement 0,44 et 2,18. Par conséquent, il n'existe pas de configuration autour d'un sommet ou de deux sommets qui soit la meilleure possible. En ce qui concerne les schémas de division autour

de trois sommets, les meilleures qualités Q_α^{-1} et Q_β obtenues sont également 0,86 et 1,08 et les moins bonnes qualités Q_α^{-1} et Q_β obtenues sont 0,40 et 2,6. Nous remarquons que la qualité des éléments créés, pour les différentes configurations, est, au pire, divisée par deux. En revanche, si nous répétons l'affinement, les qualités changent pour les différentes configurations autour d'un sommet ou de deux sommets.

Dans le cas des tissus de la tête, nous avons construit des *T.P.R.* adaptées en n'appliquant qu'un seul affinement autour des sommets à une *T.P.R.* de résolution $n = 4$ (environ 100000 tétraèdres). Nous verrons, dans la section 6.4, que ces *T.P.R.* adaptées présentent un bon compromis entre la finesse de la représentation et la qualité du maillage car un nombre relativement faible d'éléments de moins bonnes qualités ($Q_\alpha^{-1} < 0,86$ et $Q_\beta > 1,08$) est engendré.

La h -adaptation d'une *T.P.R.* modifie sensiblement sa topologie. En effet, elle ne garantit plus les propriétés de connexités de la *T.P.R.* (cf. section 3.2). Par conséquent, deux choix interviennent dans l'étiquetage homotopique d'une *T.P.R.* La première possibilité consiste à étiqueter homotopiquement d'abord une *T.P.R.* puis à modifier le maillage adapté de façon à lui imposer une cohérence topologique. La deuxième façon de procéder est d'effectuer directement un étiquetage homotopique sur la *T.P.R.* adaptée. Cet étiquetage homotopique doit permettre de créer un maillage de qualité globale satisfaisante pour la résolution du problème direct par éléments finis. Cette approche d'adaptation de maillage, que nous n'avons fait que survoler pour l'instant, nous semble prometteuse. Néanmoins, la dimension locale variable des tétraèdres d'une *T.P.R.* adaptée rend la procédure d'étiquetage homotopique des tissus de la tête complexe.

Dans le cas où la demande d'affinement est formulée au niveau des tétraèdres, la conformité doit être maintenue explicitement. De fait, lorsqu'un élément est affiné, cet affinement doit se propager aux éléments adjacents par l'entité (arête ou face) affectée par la procédure d'affinement.

En pratique, on retrouve les motifs de découpage d'éléments déjà vus. Cependant, d'autres possibilités existent qui conduisent à des variantes. Ainsi, un élément tétraédrique peut être subdivisé via la méthode dite de sa plus grande arête ou l'une de ces déclinaisons. Décrite dans [RIV-92] et [RIV-97], l'idée de base de cette méthode est de découper le tétraèdre en question en introduisant le milieu de sa plus grande arête, puis de propager la subdivision, le cas échéant pour garantir la conformité, à certains de ses voisins. Des résultats théoriques indiquent que le chemin de propagation correspondant aux éléments à modifier est fini et qu'ainsi la conformité du maillage est maintenue, le nombre d'éléments restant raisonnable. De plus, cette stratégie

schéma de subdivision	Q_α^{-1}	Q_β
1 sommet		
[12, 2, 23, 24]	0,86	1,08
[1, 12, 3, 4]	0,64	1,40
[12, 23, 3, 4]	0,46	2,06
[12, 23, 24, 4]	0,44	2,18
2 sommets		
[1, 12, 14, 13]	0,86	1,08
[12, 2, 24, 23]	0,86	1,08
[12, 14, 4, 13]	0,44	2,18
[12, 4, 13, 3]	0,46	2,06
[12, 4, 3, 24]	0,46	2,06
[12, 24, 3, 23]	0,44	2,18
3 sommets		
[13, 1, 12, 14]	0,86	1,08
[12, 2, 23, 24]	0,86	1,08
[23, 3, 13, 34]	0,86	1,08
[12, 23, 13, 4]	0,62	1,52
[12, 13, 14, 4]	0,44	2,18
[12, 24, 23, 4]	0,44	2,18
[23, 34, 13, 4]	0,40	2,6
4 sommets		
[13, 1, 12, 14]	0,86	1,08
[12, 2, 23, 24]	0,86	1,08
[23, 3, 13, 34]	0,86	1,08
[34, 4, 14, 24]	0,86	1,08
[13, 23, 14, 12]	0,86	1,08
[12, 14, 24, 23]	0,86	1,08
[23, 14, 34, 13]	0,86	1,08
[34, 23, 24, 14]	0,86	1,08

TAB. 5.1 – Qualités Q_α^{-1} et Q_β pour chaque élément des différents types de subdivision pour le tétraèdre T^* .

donne un maillage dont les angles sont bornés. De nombreuses variantes de ce type de méthode ont été étudiées. L'une d'elles, en particulier, utilise le critère de Delaunay [FREY-99]. Dans le cas d'une $T.P.R.$, l'idée de découper le tétraèdre en introduisant le milieu de sa plus grande arête change la qualité de façon quasiment identique pour les tétraèdres créés puisque tout tétraèdre d'une $T.P.R.$ a ses arêtes presque égales. Ainsi les qualités des tétraèdres découpées sont respectivement $Q_\alpha^{-1} = 0,64$ et $Q_\beta = 1,40$. Nous pensons qu'une requête de modification d'une $T.P.R.$ au niveau des sommets pour les tis-

sus de la tête engendre peu de tétraèdres avec des qualités Q_α^{-1} (resp. Q_β) inférieures à 0,64 (resp. supérieures à 1,40) par rapport à un découpage au niveau de la plus grande arête. C'est pourquoi nous n'avons pas envisagé d'implanter l'approche décrite dans [RIV-92] et [RIV-97].

5.3 Optimisation à connexités fixes d'un maillage

Optimiser un maillage au regard d'un certain critère est une opération pratiquée avec différents objectifs. L'optimisation peut servir des objectifs tel que l'adaptation du maillage. Dans le cas des tissus de la tête, nous avons utilisé l'optimisation dans le but d'avoir des maillages proches de la géométrie des tissus de la tête.

De nombreux outils locaux peuvent être utilisés à des fins d'optimisation. Parmi les outils d'optimisation, nous trouvons le bougé de points, la réduction d'une arête (pour supprimer un sommet), la bascule d'arête, la bascule de face, et la relaxation du degré des sommets [FREY-99]. Les outils d'optimisation de maillages sont classés en deux catégories : ceux qui maintiennent la connexité du maillage et ceux qui changent la connexité du maillage. Dans le chapitre 6, nous nous intéresserons à une optimisation à connexités fixes afin de lisser des isosurfaces (maillages triangulaires) extraites d'une *T.P.R.* des tissus de la tête. C'est pourquoi, nous détaillons à présent ce type d'optimisation.

Pour cette catégorie d'outils locaux, on trouve essentiellement les méthodes de bougé de sommets d'éléments. Typiquement, un processus bougeant la position des sommets agit sur les boules³ de ceux-ci. Ainsi la méthode de bougé de points la plus simple consiste à déplacer un point P vers un point P' défini par :

$$P' = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_j \quad (5.9)$$

où les P_j sont les sommets de la boule autres que P .

On remplace souvent ce schéma par une méthode de relaxation. On fait cela pour des raisons d'efficacité et pour prendre en compte le fait que le point P ci-dessus peut tomber en dehors de la boule dans le cas où cet ensemble est non convexe et par conséquent mettre un point donné à sa position «optimale» peut conduire à un maillage non valide (présentant des

3. Soit P un sommet d'un élément T , la **boule** associée à P est l'ensemble des éléments ayant P comme sommet (cf. définition 2.11).

intersections de tétraèdres). En revanche, s'approcher du point optimal peut améliorer la qualité dans une certaine mesure. On introduit alors un point auxiliaire P^* . Un schéma relaxé est alors défini comme :

$$P' = (1 - w)P + wP^* \quad (5.10)$$

où w est le paramètre de relaxation.

En suivant cette méthode, nous donnons maintenant différentes méthodes de bougé de points. Ainsi le **lissage par Laplacien** dans sa version relaxée consiste à utiliser comme point auxiliaire P^* celui défini à la relation 5.9.

Dans le cas du **lissage pondéré**, un poids est associé à chaque point permettant ainsi de construire comme point auxiliaire le point :

$$P^* = \frac{1}{n} \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j P_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_j} \quad (5.11)$$

où un choix approprié des α_j doit être fait (voir plus bas).

Dans le cas d'un **lissage fondé sur la qualité des éléments**, on note f_j les faces externes de la boule de P . Alors, les éléments de la boule ne sont autres que les combinaisons (P, f_j) (avec $j = 1$ à n , n étant le nombre d'éléments dans la boule). Alors, un point idéal I_j est associé à chaque f_j de telle sorte qu'il assure une qualité optimale⁴ (rapport de forme) à l'élément virtuel (I_j, f_j) . En se fondant sur ces points, on définit comme processus de lissage le schéma suivant :

$$P^* = \frac{1}{n} \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j I_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_j} \quad (5.12)$$

où les α_j peuvent être choisis comme suit :

- $\alpha_j = 1$, les poids sont constants et on retrouve la méthode classique,
- $\alpha_j = 0$ pour tous les éléments sauf pour le plus mauvais (en termes de qualité) pour lequel on fixe $\alpha_j = 1$,
- $\alpha_j = Q_K$, les poids sont reliés à la qualité des éléments,
- $\alpha_j = Q_K^2$, les poids sont reliés au carré de la qualité des éléments,
- ou plus généralement $\alpha_j = g(Q_{K_j})$, signifiant que les poids sont reliés à une certaine fonction g de la qualité des éléments de la boule [FREY-99].

4. par exemple Q_α ou Q_β (cf. section 3.3)

Le lissage par Laplacien dans sa version relaxée n'a pas été directement utilisé sur des *T.P.R.* mais sur des surfaces (maillages triangulaires) extraites d'une *T.P.R.* de $\mathbb{R}^3$. Ce lissage a permis d'approcher des isosurfaces extraites des tissus de la tête d'une *T.P.R.* de $\mathbb{R}^3$ vers les vraies surfaces (cf. chapitre 6).

5.4 Conclusion

Afin d'étendre des techniques d'adaptation de maillage à des *T.P.R.* des tissus de la tête (cf. chapitre 6), nous avons présenté un estimateur d'erreur qui permet de déterminer, sur un maillage tétraédrique, l'erreur liée à une connaissance *a priori* de la solution du problème direct en E.E.G. Pour cela, nous avons supposé qu'une solution du problème direct a été calculée à partir d'un modèle sphérique de la tête (cf. section 5.1.2). Nous avons alors construit un estimateur de l'erreur de calcul du problème direct en E.E.G. qui est fonction de l'arête d'un tétraèdre et de la matrice hessienne de la modélisation sphérique. Pour aller plus loin, il serait nécessaire d'appliquer une *h*-adaptation locale à une *T.P.R.* en utilisant un tel estimateur (cf. section 5.2). Cela permettrait d'étudier le comportement de cet estimateur sur des *T.P.R.* des tissus de la tête et de vérifier si celui-ci permet d'améliorer la modélisation de la propagation électromagnétique des neurones à travers les tissus de la tête. Il serait également intéressant de trouver la solution analytique de la matrice hessienne dans la modélisation sphérique en E.E.G. Ce calcul permettrait d'éviter de la déterminer numériquement à partir de la formule du potentiel électrique (cf. équation 5.5).

Nous avons vu que les méthodes adaptatives fondées sur des modifications locales d'une *T.P.R.* offrent une solution au problème d'adaptation de maillages pour le contrôle d'erreur du calcul aux éléments finis. Cependant, un examen précis des différents points discutés au long de la section 5.2 appelle quelques commentaires. Ainsi, il n'est pas aisé d'obtenir une variation continue dans les tailles. On passe pour les longueurs d'arête de h à $h/2$ le plus souvent, et obtenir un autre type de gradation n'est pas évident. À l'opposé, les méthodes locales présentent de nombreux avantages : les problèmes du choix des nouveaux sommets n'en sont pas vraiment puisque le maillage de fond est déjà défini (i.e. une *T.P.R.*) et l'utilisation de motifs prédéfinis dans les procédures de raffinement conduit à une implantation relativement facile. Ces motifs prédéfinis permettent également de réduire l'effort en termes de coût de calcul.

Dans la section 5.3, nous avons étudié un outil d'optimisation à connexités fixes. Nous verrons (cf. section 6.5) l'utilisation d'un tel outil pour le lissage de surfaces extraites d'une *T.P.R.* des tissus de la tête.

CHAPITRE 6

Maillage des tissus de la tête en E.E.G. et en M.E.G.

Nous présentons dans ce chapitre la méthode que nous avons mise au point pour modéliser et mailler les tissus de la tête à partir d'une image I.R.M. de la tête. L'application complète se décompose en quatre étapes:

- **Recalage des électrodes M.E.G./E.E.G. sur l'image I.R.M. :** cette étape de recalage consiste à déterminer une transformation géométrique permettant de passer du référentiel de la position des capteurs M.E.G./E.E.G. au référentiel anatomique I.R.M. Elle est indispensable pour vérifier la qualité des résultats fournis par les algorithmes de résolution numérique des équations de Maxwell par rapport aux champs électromagnétiques réels obtenus sur les capteurs E.E.G. et M.E.G. De plus, certains algorithmes de localisation nécessitent l'apport de contraintes issues des données anatomiques [BAIL-98]. C'est pourquoi, nous présentons dans la partie 6.1 une méthode de recalage entre les électrodes E.E.G./M.E.G. et l'I.R.M.
- **Segmentation des tissus de la tête :** nous souhaitons obtenir une modélisation volumique des tissus de la tête en prenant en compte les spécificités anatomiques de chaque individu étudié afin d'attribuer pour chaque tissu de la tête (scalp, crâne et cerveau) segmenté des propriétés électromagnétiques spécifiques (par exemple la conductivité). Pour obtenir un tel modèle de façon automatique, nous avons mis en place une méthodologie utilisant des techniques de segmentation déjà existantes (partie 6.2).
- **Maillage volumique des structures :** nous présentons, dans la section 6.3, l'application de la méthode de maillage volumique décrite dans les chapitres 3 et 4 ainsi que les choix que nous avons faits pour traiter

les difficultés posées par le maillage volumique des tissus de la tête et pour atteindre nos objectifs.

- **Résolution numérique des équations de Maxwell.**

6.1 Recalage de données M.E.G./E.E.G. et I.R.M.

6.1.1 Position du problème

Le recalage entre des données électrophysiologiques issues de signaux M.E.G./E.E.G. et des images anatomiques par résonance magnétique (I.R.M.) consiste à déterminer une transformation géométrique qui permet de passer du référentiel de la position des capteurs M.E.G./E.E.G. au référentiel I.R.M. utilisé pour l'acquisition des images anatomiques. Le recalage M.E.G./E.E.G. avec l'IRM permet ainsi d'une part de vérifier la qualité des résultats fournis par les algorithmes de reconstruction en les confrontant au contexte anatomique, et d'autre part d'interpréter sur le plan spatial et temporel les phénomènes physiologiques étudiés. Par conséquent, ce recalage est indispensable pour la résolution du problème direct car il permet de positionner les électrodes M.E.G./E.E.G. dans le repère des maillages volumiques des tissus de la tête. De plus, certaines méthodes de reconstruction nécessitent l'apport de contraintes issues de données anatomiques [BAIL-98].

Une méthode de recalage doit :

1. avoir une bonne précision spatiale (de l'ordre de 2 ou 3 mm),
2. être robuste, c'est-à-dire que sa précision ne doit pas être affectée par les artefacts détériorant les acquisitions à mettre en correspondance, et sa précision ne doit pas dépendre de l'utilisateur,
3. être d'une utilisation clinique aisée minimisant le stress du patient et les interactions humaines,
4. pouvoir sur le plan anatomique se satisfaire des acquisitions I.R.M. standard actuelles de type 3D coupes fines.

La littérature concernant spécifiquement le recalage entre la M.E.G./E.E.G et des données anatomiques est assez pauvre. Nous présentons ici les principales approches.

[SINGH-97] propose une méthode semi-automatique fondée sur l'emploi d'un mors dentaire sur lequel sont placés 4 marqueurs que l'on numérise lors de l'examen M.E.G. et que l'on peut détecter sur un examen I.R.M. La

précision de la méthode a été évaluée grâce à une analyse de Monte-Carlo portant sur les incertitudes de numérisation des marqueurs sur le mors. On note que les erreurs de détection de points du mors sur l'I.R.M. n'ont pas été introduites dans la simulation de Monte-Carlo. D'autre part l'utilisation d'un tel mors est envisageable chez des volontaires, mais plus difficile en routine clinique, chez des patients ! Cette méthode ne satisfait donc pas la condition d'une utilisation clinique aisée que nous avons soulignée précédemment.

Dans [ELS-91] est proposée une méthode semi-automatique fondée sur la détection de marqueurs extrinsèques sur des examens I.R.M. Ces marqueurs permettent de recalculer la position de points anatomiques intrinsèques utilisés pour la définition du référentiel M.E.G./E.E.G. La précision de cette méthode est intimement liée à la bonne position des marqueurs I.R.M. et donc à une intervention humaine ce qui est en contradiction avec les critères d'une bonne méthode de recalage. Si les marqueurs sont parfaitement placés on obtiendra une précision de l'ordre de la taille du voxel de l'examen I.R.M.

Dans [GEV-89] est proposée une approche semi-automatique visant à minimiser la distance entre un ensemble d'électrodes E.E.G. posées sur la peau pendant l'acquisition et la surface de la peau détectée sur des images I.R.M. Les électrodes sont localisées grâce à un numériseur 3D. Les électrodes et la surface de la tête sont mises en correspondance manuellement. Un algorithme de minimisation optimise au sens des moindres carrés le recalage. La distance moyenne entre les électrodes et la peau en fin de recalage est de l'ordre de 2 mm. Cependant la relative symétrie de la tête et le nombre limité d'électrodes peuvent générer une bonne convergence numérique alors que le recalage n'est pas optimal du point de vue anatomique. Cette méthode est donc instable.

Dans [SCHW-98] est proposée une méthode automatique fondée sur la mise en correspondance automatique de points décrivant la surface du scalp et numérisés lors de l'examen M.E.G./E.E.G (voir section 6.1.2) avec la surface de la peau détectée sur un examen I.R.M. Le critère utilisé afin de déterminer les paramètres de recalage est la moyenne des distances au carré entre les deux surfaces. La méthode de minimisation (algorithme de Powell) nécessite une contrainte forte. En effet, la minimisation sur chacune des directions est réalisée par le parcours d'intervalles prédéterminés avec un pas d'échantillonnage lié à la résolution. Cela suppose que le minimum existe dans l'intervalle considéré. Cette condition est remplie par un repositionnement du **headshape**¹.

Parmi les algorithmes de recalage existants, l'algorithme de recalage de

1. Terminologie utilisée dans la littérature et en clinique pour le massif cranial numérisé

[SCHW-98] est le plus adapté à une utilisation en routine sur une plateforme médicale. Nous nous sommes donc fortement inspirés de la méthodologie de recalage décrite dans [SCHW-98] en utilisant une méthode de minimisation différente (algorithme I.C.P. [BESL-92]) ce qui évite de définir des intervalles prédéterminés avec un pas d'échantillonnage lié à la résolution.

Notre algorithme de recalage 3D entre la position des capteurs M.E.G./E.E.G. et l'I.R.M. se décompose donc en trois parties distinctes :

- l'extraction des formes homologues à recaler dans les deux modalités (voir section 6.1.2),
- la définition d'une fonction de proximité entre les deux formes à recaler (voir section 6.1.3),
- la minimisation de la fonction de proximité (voir section 6.1.3).

6.1.2 Formes homologues en M.E.G./E.E.G. et en I.R.M.

Nous allons à présent décrire les formes homologues extraites lors de l'acquisition M.E.G./E.E.G. et sur l'I.R.M.

L'extraction de la forme de la tête ou **headshape** (voir figure 6.1) pendant l'examen M.E.G./E.E.G. est réalisée par une numérisation du crâne et du massif facial dans un repère lié au patient et défini par les points anatomiques PAG (pré-auriculaire gauche), PAD (pré-auriculaire droit) et Nasion. A partir de ces points, nous pouvons alors définir un référentiel de la manière suivante (appelé repère de la *tête*):

- origine $O = \frac{PAG+PAD}{2}$
- axe $\vec{X} = \frac{Nasion-O}{\|Nasion-O\|}$
- axe $\vec{Z} = \frac{\vec{X} \wedge (PAG-O)}{\|\vec{X} \wedge (PAG-O)\|}$
- axe $\vec{Y} = \frac{\vec{Z} \wedge \vec{X}}{\|\vec{Z} \wedge \vec{X}\|}$

Avant chaque acquisition E.E.G./M.E.G., la position de ce référentiel patient par rapport au référentiel des électrodes M.E.G./E.E.G. est enregistrée à l'aide d'un numériseur 3D (stylo magnétique) [POLH-91]. Nous pouvons donc connaître avec précision et pour chaque position des électrodes la position relative de la tête du patient ; d'autre part, nous décrivons en utilisant

ce numériseur 3D une surface qui est la plus proche possible de celle détectée sur l'I.R.M. et qui se trouve dans ce repère patient. La connaissance des points anatomiques PAG, PAD et Nasion dans l'IRM nous permet également d'obtenir un pré-recalage satisfaisant pour notre algorithme de recalage automatique (cf. section 6.1.3).

En ce qui concerne l'acquisition du **headshape**, les principales déformations pouvant se produire sont liées à l'épaisseur de peau et à l'assise osseuse la soutenant. En ce qui concerne le crâne lui-même, le scalp est relativement fin et en contact direct avec l'os. Le stylo ne s'enfonce pas de manière significative et les mouvements de glissement du scalp sur le crâne ne provoquent pas de déformations locales. Le point le plus important concerne le massif facial. Il faut fournir à l'algorithme de recalage des éléments spécifiques aux deux surfaces du point de vue morphologique pour éviter des confusions liées à la forme sphérique de la tête. Le nez et le contour des yeux donnent cette information de manière fiable aussi bien en I.R.M. que lors de la numérisation. Pour cette dernière, il faut noter que l'épaisseur de la peau et sa mobilité par rapport au substrat osseux augmentent dans les régions faciales. Cela générera un bruit sur les points numérisés. En clair, il est exclu de numériser les pommettes, le contour de la bouche ou les mâchoires. La dernière contrainte concernant la numérisation tient au nombre de points échantillonnés et à leur répartition spatiale.

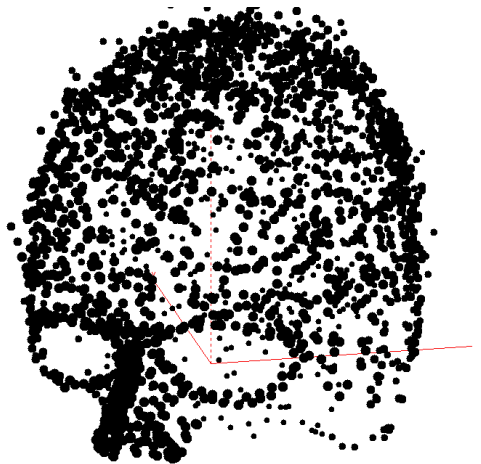


FIG. 6.1 – Numérisation du crâne et du massif facial ou **headshape**.

L'extraction de la surface de la tête sur l'examen I.R.M. 3D est réalisée sur des acquisitions pondérées en T1 de résolution 0,9 par 0,9 par 1,3 mm. Notre méthode de segmentation de la surface de la tête consiste à appliquer des opérateurs de morphologie mathématique [SCHM-93] suivis d'une détection

de la surface du volume binaire obtenu. Ainsi elle se résume à quatre étapes :

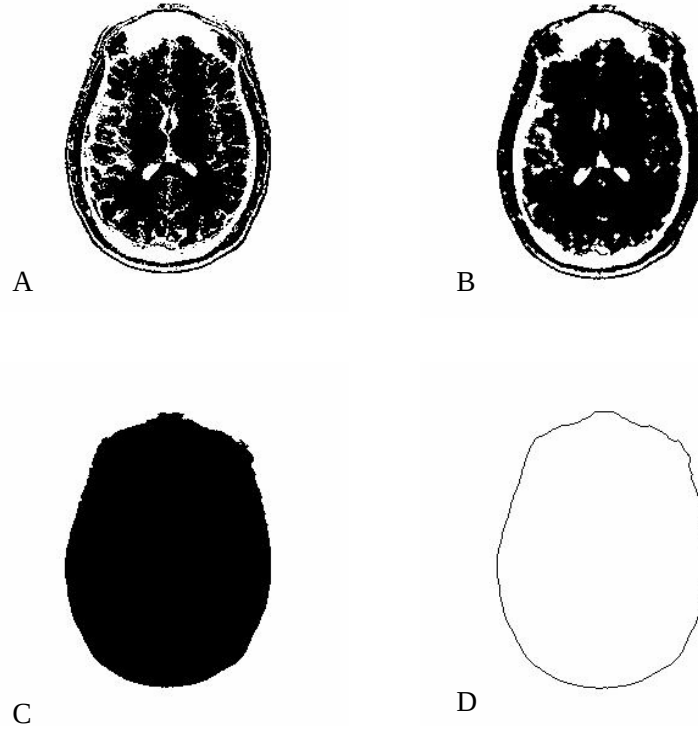
- Seuillage : cette étape élimine une grande partie du bruit non significatif, généralement le seuil est fixé entre 30 et 40 pour une séquence en T1 codée sur un octet (figure 6.2 (A)).
- Analyse en composantes connexes suivie d’une fermeture : l’extraction de la plus grande composante connexe avec un 18-voisinage suivie d’une fermeture avec un élément structurant 18-voisinage permet d’extraire la forme de la tête (figure 6.2 (B)).
- Analyse en composantes connexes de l’inverse de l’image suivie d’une réunion : cette étape permet de détecter les trous de l’objet extrait à l’étape précédente en récupérant toutes les composantes 6-connexes de l’inverse de l’image sauf la plus grande qui est le «fond» de l’image. Ensuite les trous détectés sont ajoutés à la forme de la tête (figure 6.2 (C)).
- Lissage morphologique et détection de la surface : le lissage de la forme de la tête est obtenu en appliquant une ouverture, une fermeture. Une fois que la segmentation est terminée, un test sur le voisinage de chaque voxel permet de détecter la surface de la peau (figure 6.2 (D)).

Une mauvaise segmentation de l’I.R.M. influence directement le recalage puisque c’est du volume binarisé que l’on extrait la surface à recaler. La valeur de seuillage de la première étape doit être un compromis assurant l’élimination du plus de bruit possible sans pour autant altérer les données significatives. Si le seuillage est trop faible, les étapes suivantes sont altérées par le bruit résiduel qui empêche une bonne déconnexion des artéfacts. Si le seuillage est trop fort, des voxels appartenant effectivement à la surface sont éliminés. Ces différents problèmes se traduisent pour le recalage par le fait qu’il peut subsister des déformations locales de la surface.

6.1.3 Recalage rigide de surfaces discrètes

On dispose de deux ensembles de points représentant deux parties éventuellement distinctes de la surface d’un même objet, qui correspondent chacun à l’intersection de la surface de cet objet avec un pavé de $\mathbb{R}^3$. La méthode que nous allons développer suppose un recouvrement partiel important entre ces deux parties de la surface de l’objet. Le recalage optimal correspondra alors à la transformation rigide de $\mathbb{R}^3$ (translation sur les 3 axes et rotation définie par 3 angles), qui, appliquée à une des deux représentations dite «mobile»², minimise un critère de proximité (fonction de coût) à la seconde

2. Terminologie utilisée dans [MANG-95]

FIG. 6.2 – *segmentation du scalp I.R.M.*

représentation dite de «référence». Cette approche implique que la forme du recouvrement soit suffisamment discriminante pour éviter toute ambiguïté sur la surface. On peut en particulier remarquer que les objets invariants par certaines rotations nécessitent de lever l'ambiguïté lors de l'initialisation de la minimisation.

Lorsqu'on cherche à construire un critère de proximité entre une surface de référence et une surface mobile (représentée par un ensemble de points) qui ne dépende pas de la forme et de l'orientation de la surface de référence, une idée naturelle consiste à utiliser, pour une position donnée de la surface mobile, une moyenne des distances euclidiennes à la surface de référence de chacun des points de cette surface mobile. Dès lors se pose la question du choix de la moyenne à employer. Nous avons pour notre part opté de façon classique pour la moyenne quadratique (équivalent de la distance euclidienne carrée) dont les qualités ne sont plus à démontrer [MANG-95], [BORG-84]. On notera que la présence du carré dans la moyenne quadratique conduit à une expression différentiable par rapport aux paramètres d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ et d'une translation [MIN-83], [BLO-93].

Définition 6.1 Soit $P = \{p_i\}$ l'ensemble des points de la surface mobile et

$Y = \{y_i\}$ un ensemble de points de la surface de référence ayant même cardinalité que P ($N_p = N_Y$) tel que chaque point $\vec{p}_i$ corresponde au point $\vec{y}_i$ avec le même indice. La fonction de proximité à minimiser suivant les paramètres de rotation R et translation T s'exprime comme:

$$d(R, T) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left\| \vec{Y}_i - R\vec{p}_i - T \right\|^2$$

Cette définition nécessite la connaissance de la correspondance entre les points de P et de Y . Ici, elle n'est pas connue et sera estimée à chaque étape du recalage à partir d'une carte de distances.

Notre besoin de disposer d'une part d'un moyen de calcul efficace d'une bonne approximation de la distance euclidienne d'un point à une surface représentée par un ensemble de points, et d'autre part d'établir la correspondance entre les points de P et de Y , nous a donc amenés à utiliser des «transformations de distances». Pour cela, nous avons utilisé la distance de chanfrein qui consiste à approcher les distances globales de l'image en propageant des distances locales, c'est-à-dire les distances entre voxels voisins [BORG-86].

Dans [GERA-98], l'algorithme est modifié afin de calculer également une carte du plus proche voisin nécessaire à notre méthode de minimisation de la fonction de proximité. La carte de distance obtenue ne donne qu'une approximation de la distance euclidienne. En particulier, elle ne garantit pas que l'ordre des distances soit respecté [VERW-91]: il se peut qu'un voxel, dont la distance donnée par la carte est supérieure à celle d'un autre voxel, soit en fait, au sens de la distance euclidienne, à plus faible distance de la surface. Toutefois, nous pouvons raffiner le calcul en prenant un masque de chanfrein plus précis à proximité de la surface.

Une fois la carte de distance obtenue, la fonction de proximité à minimiser suivant les paramètres de rotation R et translation T nécessite d'avoir des outils mathématiques permettant d'estimer une transformation rigide (R et T). Une première estimation d'une transformation rigide à partir de la minimisation de la moyenne quadratique a été d'utiliser une décomposition en valeurs singulières (S.V.D.) [ARUN-87]. Dans cette méthode, la rotation, représentée par une matrice orthogonale est découplée de celle de la translation. L'estimation de la rotation repose alors sur une décomposition en valeurs singulières de la matrice de covariance des coordonnées barycentriques. Cette approche entraîne dans certains cas des cas dégénérés. En plaçant la rotation dans l'espace des quaternions unitaires, Horn démontre que le quaternion

unitaire correspondant à la rotation minimisant la moyenne quadratique correspond au vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice [HORN-87] :

$$Q(\Sigma_{PY}) = \begin{bmatrix} \text{tr}(\Sigma_{PY}) & \Delta^T \\ \Delta & \Sigma_{PY} + \Sigma_{PY}^T - \text{tr}(\Sigma_{PY})I_3 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

où $\Delta = [A_{23}A_{31}A_{12}]^T$ et $A_{ij} = (\Sigma_{PY} - \Sigma_{PY}^T)_{ij}$ sachant que P représente l'ensemble des points de la surface mobile et Y représente un ensemble de points de la surface de référence tel que $N_P = N_Y$ et

$$\Sigma_{PY} = \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} [(\vec{p}_i - \vec{\mu}_P)(\vec{y}_i - \mu_Y)^t] \quad (6.2)$$

$$\vec{\mu}_P = \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} \vec{p}_i \quad \vec{\mu}_Y = \frac{1}{N_Y} \sum_{i=1}^{N_Y} \vec{y}_i \quad (6.3)$$

L'algorithme qui permet de minimiser la fonction de proximité est construit sur la méthode du plus proche voisin itéré, ou I.C.P (Iterative Closest Point) [BESL-92]. Cet algorithme est composé de deux étapes qui consistent d'une part à détecter les points les plus proches de la surface mobile à la surface de référence et d'autre part en l'optimisation au sens des moindres carrés de la transformation rigide. Le critère d'arrêt est établi sur un seuil de distance entre les deux surfaces à recaler. Nous présentons maintenant une description de l'algorithme I.C.P.

Algorithme 6.2 Algorithme I.C.P.[BESL-92]

Soit P l'ensemble des points de la surface mobile avec N_p le nombre de points de cet ensemble.

Soit X l'ensemble des points de la surface de référence avec N_x le nombre de points de cet ensemble.

Soit $\vec{q}_R = [q_0 q_1 q_2 q_3]^t$ le quaternion unitaire représentant la rotation et soit $\vec{q}_T = [q_4 q_5 q_6]^t$ le vecteur de translation,

le vecteur de paramètres de recalage est alors noté $\vec{q} = [\vec{q}_R | \vec{q}_T]^t$.

La distance d entre un point $\vec{p} \in P$ et X est notée :

$$d(\vec{p}, X) = \min_{\vec{x} \in X} \|\vec{x} - \vec{p}\|^2$$

Un point y de X pour lequel le minimum est atteint ($d(\vec{p}, \vec{y}) = d(\vec{p}, X)$) est un plus proche voisin d'un point $\vec{p}$.

On note alors Y l'ensemble des points dans X les plus proches de P :

$$Y = PPV(P, X) = \{ \vec{y} \in X, \exists \vec{p} \in P, d(\vec{p}, \vec{y}) = d(\vec{p}, X) \}$$

L'algorithme I.C.P. peut alors être décrit comme suit :

Initialisation :

$$P_k = P_0,$$

$$\vec{q}_k = [\vec{q}_{R_k} | \vec{q}_{T_k}]^t = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^t$$

et $k = 0$.

tant que $d_k - d_{k+1} < \tau$ avec $\tau > 0$ **faire**

Etape 1. Calculer l'ensemble des plus proches voisins: $Y_k = PPV(P_k, X)$.

Etape 2. Estimer la transformation rigide en plaçant la rotation dans l'espace des quaternions unitaires:

$$(\vec{q}_{R_k}, d_k) = Q(P_0, Y_k) \text{ et } \vec{q}_{T_k} = \vec{\mu}_{Y_k} - R_k(\vec{q}_{R_k})\vec{\mu}_{P_k}$$

Etape 3. Appliquer la transformation: $P_{k+1} = \vec{q}_k(P_0)$.

Etape 4. $k \leftarrow k + 1$

fin tant que

Il est facile de montrer que l'erreur de l'algorithme 6.2 diminue d'une façon monotone [BESL-92][FAU-93]. D'après l'expérience, il a été observé que l'algorithme converge rapidement dans les premières itérations, puis lentement ensuite. Une méthode qui repose sur l'analyse de la courbe des variations de l'erreur résiduelle de recalage en fonction des variations de la transformation rigide a été proposée pour accélérer la convergence [BESL-92].

Nous observons l'existence de parties non recalables dans les surfaces extraites. Concrètement cela se traduit par des artéfacts résiduels sur l'I.R.M. (par exemple des artefacts dentaires), et des points très éloignés du nuage principal sur le headshape. Comme aucune de ces parties n'a de correspondance dans l'autre modalité, il faut absolument les prendre en compte pour éviter la création d'ambiguïtés qui conduirait l'algorithme 6.2 à converger de façon correcte du point de vue mathématique mais erronée du point de vue anatomique. Une procédure d'extraction des points aberrants du headshape [SCHW-98] est donc mise en place. Les points sont extraits grâce à un seuil sur leur valeur dans la transformée en distance. Le point est conservé s'il vérifie la condition suivante

$$v_{DT}(i, j, k) \leq \overline{MD} + \alpha \cdot Var(MD)$$

avec $v_{DT}(i, j, k)$ la valeur dans la transformée en distance d'un point du headshape, $\overline{MD}$ la moyenne des $v_{DT}(i, j, k)$ et $Var(MD)$ la variance des $v_{DT}(i, j, k)$

Le paramètre α est adaptable en fonction de la qualité du headshape. Cette opération permet d'éliminer les points numérisés non significatifs et les points correctement numérisés mais n'ayant pas de correspondance sur la surface I.R.M. Cette étape se fait avant la minimisation de la fonction de proximité. Notons qu'il existe également une classe d'estimateurs, les M -estimateurs, qui permettent d'injecter dans la fonction de proximité de l'information qui permet de diminuer l'influence des points aberrants des surfaces à recalcr [NIKO-98].

6.1.4 Synthèse

La figure 6.3 représente l'algorithme de recalage dans son intégralité. Cette version est utilisée dans toutes les évaluations qui vont suivre. L'algorithme débute par les pré-traitements du volume I.R.M. (segmentation du scalp et carte de distances). Un pré-recalage est construit à partir des informations suivantes :

- les paramètres d'acquisition I.R.M. (taille et résolution) permettant de convertir les données voxel en données millimétriques,
- la connaissance de l'orientation de la tête dans le référentiel lié à la tête défini en M.E.G./E.E.G. (cf. section 6.1.2),
- la connaissance de l'orientation de la tête dans le référentiel I.R.M. et notamment les points anatomiques PAG, PAD et Nasion.

En fait, ce pré-recalage consiste à mettre de façon grossière l'I.R.M. dans le repère lié à la tête. La suite de l'algorithme s'articule ensuite autour de la minimisation par I.C.P. de la fonction de proximité en utilisant un modèle de transformation rigide (3 translations et 3 rotations).

6.1.5 Evaluation

Le but de l'évaluation de l'algorithme de recalage est de démontrer les performances de la méthode sur le plan algorithmique et sur le plan clinique en incluant toutes les particularités liées à l'environnement M.E.G./E.E.G. Il est nécessaire de définir précisément les erreurs intervenant dans le processus, et de construire si possible des simulations permettant une analyse de leur influence sur l'incertitude globale de l'algorithme. Si les simulations sont impossibles, la seule évaluation réalisable est une évaluation en conditions réelles. La difficulté dans ce cas est de définir les procédures les plus objectives possibles pour juger de la qualité du recalage bien que l'on ne connaisse pas le résultat réel. Aussi, nous nous sommes concentrés sur l'évaluation de notre algorithme à partir de simulations.

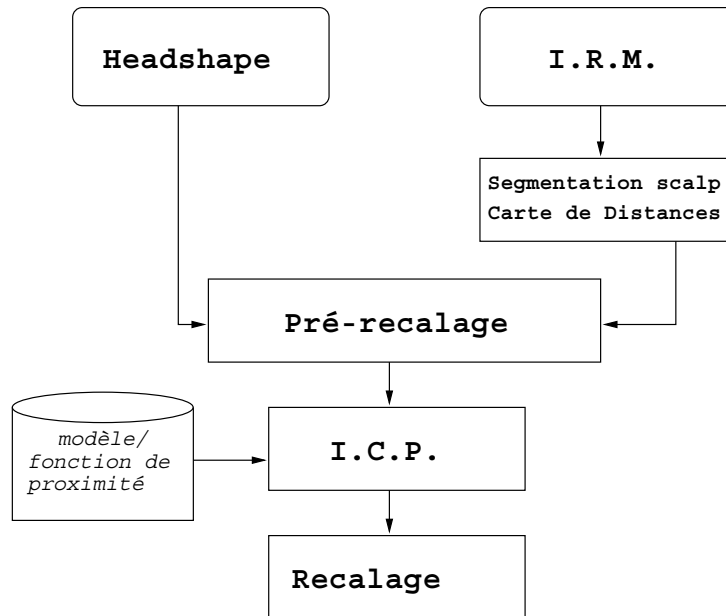


FIG. 6.3 – *Algorithme de recalage E.E.G./I.R.M.*

Nous pouvons séparer les erreurs selon leur origine. Elles proviennent soit de la numérisation du headshape, soit de l'examen I.R.M. et des pré-traitements associés. Pour les deux modalités, il existe deux ensembles d'erreurs : les déformations locales et les déformations globales.

Pour l'I.R.M. et les traitements associés, les différentes erreurs possibles peuvent se résumer sous la forme d'un effet d'échelle, d'artéfacts locaux et de bruit. Les effets d'échelle sont liés à l'acquisition; en effet l'hétérogénéité du champ magnétique statique en I.R.M. provoque un effet d'échelle suivant une direction privilégiée. Les artéfacts locaux sont dus dans la plupart des cas aux prothèses dentaires. Les artéfacts dentaires importants sont impossibles à retirer car ils affectent le volume en déformant une région interne à la tête. Ces artéfacts provoquent généralement un hyposignal dans la région mandibulaire provoquant un trou à bords accidentés. Nous pouvons également citer les artéfacts causés par le mouvement des yeux et la respiration.

Concernant la numérisation du headshape, les erreurs peuvent être décrites selon le même schéma. L'effet d'échelle est uniquement dû aux propriétés de la peau et on le considère négligeable devant les autres erreurs. On peut observer des déformations locales importantes si des pièces métalliques sont proches de la tête lors de la numérisation (instrument de contention). En fait les déformations les plus fréquentes sont dues à des erreurs de manipula-

tions aboutissant à un «dérapage» du stylo numériseur lors de l'acquisition. On a alors un ensemble de points s'éloignant de la tête très rapidement. Le bruit dû à l'appareil (environ 1/10 mm) est négligeable devant celui généré par la structure et l'épaisseur de l'épiderme (compris entre 2 et 3 mm).

Connaissant les différentes erreurs auxquelles nous sommes confrontés, il est possible de construire des simulations. Dans un premier temps, il est nécessaire de construire un headshape «théorique» parfaitement recalé sur l'I.R.M. Le plus simple est d'utiliser la surface du scalp de l'I.R.M. Pour obtenir un headshape théorique, il suffit donc d'échantillonner de façon uniforme la surface du scalp. Ensuite nous appliquons à cet ensemble de points une transformation connue et différents opérateurs simulant les erreurs décrites ci-dessous pour en quantifier l'influence sur notre algorithme.

Nous avons choisi un ensemble de paramètres statistiques adaptés à l'évaluation des recalages. Les paramètres les plus évidents sont l'erreur moyenne (E.M.), sa variance, son minimum, et son maximum. On enregistre également la valeur finale de la fonction de proximité pour vérifier qu'elle représente une bonne approximation de la qualité du recalage.

6.1.5.1 Evaluation intrinsèque

Le test évaluant la précision intrinsèque de l'algorithme est très simple. Il suffit en effet d'appliquer au headshape théorique des transformations contenant des rotations et translations sans ajouter d'effets perturbateurs extérieurs (par exemple du bruit). Pour cela, nous effectuons une série de 300 recalages dont les matrices de décalages sont construites aléatoirement (distribution uniforme) dans les intervalles suivants $[-19, +19]$ degrés pour les rotations et $[-30, +30]$ mm pour les translations et dont le headshape théorique est constitué de 3000 points environ par rapport à une surface totale de 150000 points sur l'I.R.M. segmentée.

nombre de recalage	<i>E.M.</i> ($\pm$ écart-type) en mm	<i>E.M.</i> Maximum (mm)
300	1,7($\pm 0,3$)	2,3

Ce test donne des indications sur le comportement général de l'algorithme avec des combinaisons aléatoires de translations et de rotations. Aucun recalage n'a échoué et l' $E.M. = 1,7 \pm 0,3 \text{ mm}$ reste de l'ordre de deux voxels environ. Ce test montre qu'il n'existe pas de combinaisons translations/rotations provoquant des échecs de l'algorithme.

6.1.5.2 Effets du bruit

L'effet du bruit est testé en appliquant une translation aux coordonnées de chaque point du headshape théorique à l'aide d'une fonction aléatoire à répartition uniforme. Nous pouvons ainsi vérifier la robustesse de l'algorithme aux erreurs provenant de la numérisation et dans une moindre mesure de l'acquisition I.R.M. Le bruit est normalement éliminé lors de la binarisation mais les erreurs de détection de la surface peuvent subsister. L'effet du bruit est testé en choisissant les matrices de décalage dans les intervalles suivants $[-19, +19]$ degrés pour les rotations et $[-30, +30]$ mm pour les translations et en augmentant le niveau de bruit sur les points du headshape de 0 mm à 3 mm (sans extraction de points aberrants). L'élimination de points aberrants n'a pas été testée. Nous avons effectué 100 recalages par niveau de bruit. Les

Bruit (mm)	<i>E.M.</i> moyenne ($\pm$ écart-type) en mm
0	1,71($\pm 0,34$)
1	1,78($\pm 0,41$)
2	1,89($\pm 0,45$)
3	2,04($\pm 0,51$)

TAB. 6.1 – *Effet du bruit sur le recalage.*

résultats (cf. tableau 6.1) montrent que la procédure de recalage automatique est relativement sensible au bruit d'acquisition du headshape. En effet, un bruit compris entre 2 et 3 mm généré par la structure et l'épaisseur de l'épiderme modifie sensiblement la précision de recalage puisque l'*E.M.* peut atteindre un peu plus de 2 mm.

6.1.5.3 Effets du nombre de points

La simulation consiste en une série de 100 recalages pour lesquels le nombre de points du headshape théorique est choisi entre 500 et 4000 points. La matrice de décalage initiale est constante et on ajoute un bruit de 2 mm sur les points du headshape. Le but est de vérifier le comportement de l'algorithme en fonction du nombre de points, ceux-ci étant échantillonnés de façon uniforme.

On remarque une croissance de la précision du recalage lorsque le nombre de points varie de 500 à 2500. Au-dessus de 2500 points la précision se stabilise (Tableau 6.2). Il existe donc un nombre de points minimum pour apporter toute l'information nécessaire à la procédure de minimisation. L'apport de points supplémentaires sur le headshape permet de lever les ambiguïtés générées par le bruit présent sur les deux modalités. On limite donc le nombre

Nombre de points	<i>E.M.</i> moyenne ($\pm$ écart-type) en mm
500	9,32($\pm$ 2,41)
1000	5,87($\pm$ 1,92)
1500	6,21($\pm$ 1,23)
2000	3,54($\pm$ 0,86)
2500	1,84($\pm$ 0,41)
3000	1,89($\pm$ 0,45)
3500	1,73($\pm$ 0,36)
4000	1,71($\pm$ 0,33)

TAB. 6.2 – *Effet du nombre de points du headshape sur la précision du recalage*

et l'importance des minima locaux, et ainsi on accroît la robustesse de l'algorithme.

6.1.5.4 Conclusion

L'évaluation de la précision de la méthode automatique présentée dans cette partie a montré une excellente reproductibilité des résultats ainsi qu'une erreur de recalage moyenne (2 mm) inférieure aux incertitudes de localisation généralement rapportées. La précision et la reproductibilité des résultats obtenus autorise une fusion de données anatomo-fonctionnelle très précise. Cette fusion permet une représentation optimale des propriétés spatio-temporelles des résultats de localisation et donc une interprétation plus efficace. Enfin la précision obtenue autorise l'emploi de contraintes anatomiques complexes dans les algorithmes de localisation sans pour autant introduire des erreurs importantes.

6.1.5.5 Résultat de l'exploitation de l'algorithme

L'algorithme de recalage automatique est actuellement utilisé sur la plateforme M.E.G. de la Pitié-Salpêtrière. Les résultats de deux recalages de patients sont représentés sur la figure 6.4.

Lorsque il n'existe pas de pastilles (M.R.I. visible landmarks) de recalage sur l'I.R.M., l'intervention manuelle qui consiste à repérer le référentiel patient pendant l'examen M.E.G./E.E.G. entraîne une initialisation approximative (en haut à gauche). Néanmoins le recalage automatique s'effectue bien car le headshape (en bleu) se superpose sur l'I.R.M (en haut à droite) de façon convenable. Dans le cas d'une bonne initialisation, le recalage s'effectue de façon tout a fait satisfaisante (en bas) et la valeur finale de la fonction de proximité après convergence de l'algorithme I.C.P. diminue. A ce jour, une dizaine de recalages ont été effectués, dans la moitié des cas il n'a malheureu-

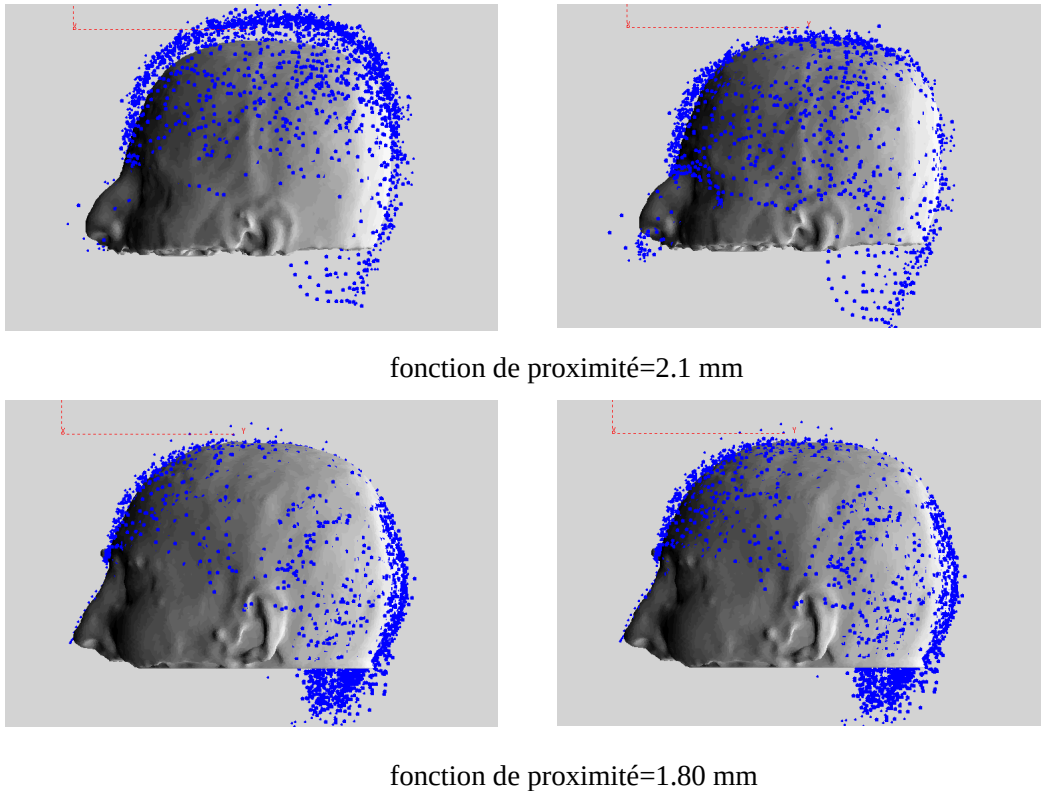


FIG. 6.4 – Résultats de recalage automatique

sement pas été possible d'obtenir un recalage à cause d'un nombre insuffisant de points (environ 1500) sur le headshape et/ou d'une déformation trop importante du headshape acquis.

6.2 Segmentation des tissus de la tête

L'anatomie précise de la tête de chaque individu est donnée à l'aide d'un volume I.R.M. Ce type d'acquisition constitue actuellement le moyen le plus répandu et le plus précis de décrire l'anatomie interne de façon non invasive. Une résolution millimétrique est classiquement obtenue dans les trois directions de l'espace.

Ainsi pour obtenir un modèle des tissus de la tête de façon automatique, nous avons mis en place une méthodologie utilisant des techniques de segmentation³ déjà existantes. Cette modélisation comporte trois étapes :

3. Nous utilisons d'une part les routines du projet TIVOLI développé à l'E.N.S.T. et d'autre part les routines développées par le SHFJ-CEA à Orsay pour le traitement d'images volumiques par morphologie mathématique.

une étape de segmentation du scalp (déjà décrite dans la section 6.1.2), une étape de segmentation du cerveau qui utilise la méthode proposée par Mangin [MANG-95] et une estimation de la surface du crâne.

La segmentation du cerveau consiste à séparer, dans une image I.R.M., le volume des hémisphères, du cervelet et du tronc cérébral du reste des structures de la tête comme la peau, les yeux, etc. L'algorithme suivant utilise des opérations de morphologie mathématique pour segmenter les volumes cérébraux à partir d'un volume I.R.M. I :

- $C_1 \leftarrow$ seuillage de I pour récupérer les voxels dont la valeur se trouve entre s_{C_1} (matière grise) et s_{C_2} (matière blanche). Le seuil bas élimine le liquide céphalo-rachidien et le crâne, le seuil haut supprime la graisse et le système vasculaire. Les seuils sont déterminés automatiquement en observant, à travers les échelles d'un scale-space, les singularités d'ordre zéro à n de l'histogramme [MANG-98].
- $C_2 \leftarrow$ érosion de C_1 pour séparer le cerveau de la peau et des yeux. L'érosion se fait avec un élément structurant en forme de boule de rayon $r_c = 2,5$ mm [MANG-94].
- $C_3 \leftarrow$ plus grande composante connexe de C_2 . Cette composante correspond au cerveau érodé
- $C \leftarrow$ dilatation de C_3 de $r_c = 3$ mm conditionnellement à C_1 pour compenser l'érosion (voir figure 6.5).

Nous pouvons remarquer que cette méthode de segmentation du cerveau ne permet pas d'assurer la topologie du résultat ; le volume segmenté peut présenter des trous ou des tunnels. Il existe toutefois des algorithmes rigoureux permettant de boucher en 3D les trous et les tunnels [AKT-96]. Le cerveau segmenté présente également trop de sillons ce qui donne une contrainte surfacique beaucoup trop complexe pour un maillage volumique adapté aux besoins d'une F.E.M. C'est pourquoi nous introduisons l'étape de lissage suivante :

- $C_{final} \leftarrow$ fermeture de C avec un élément structurant en forme de boule de rayon $r_{final} = 10$ mm pour lisser la surface des sillons du cerveau (voir figure 6.5).

Le problème majeur des I.R.M. est qu'elles ne permettent pas d'observer l'os du crâne car celui-ci est relativement sec, comparé aux autres tissus de

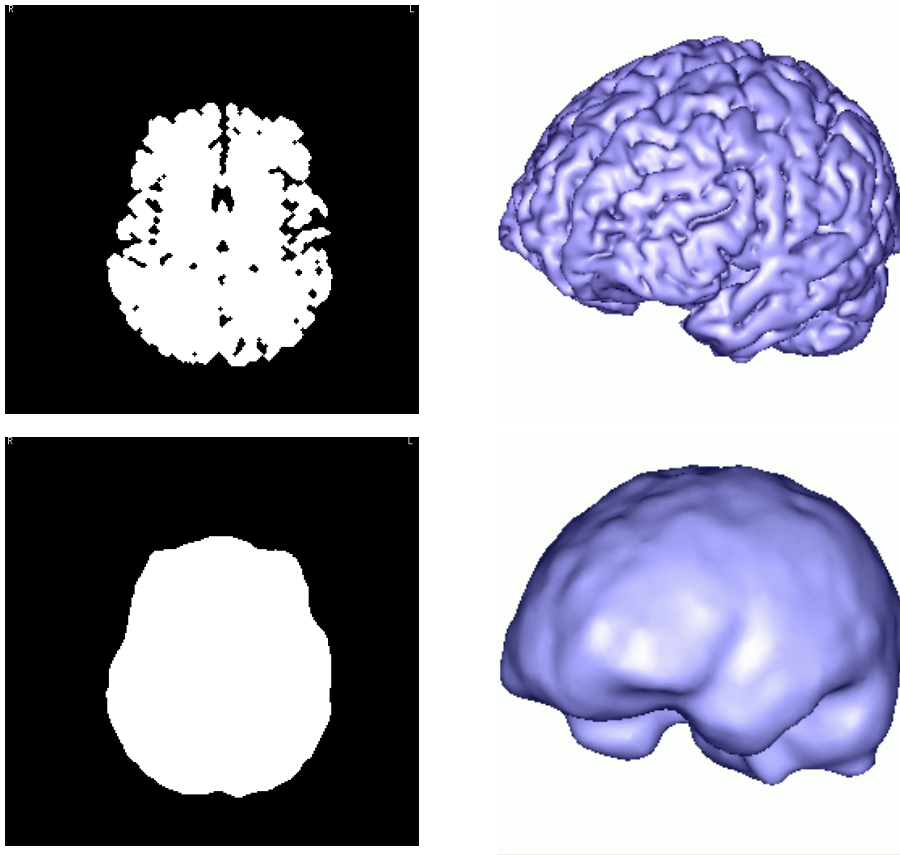


FIG. 6.5 – *Segmentation du cerveau par morphologie mathématique 3D. Sans fermeture (en haut) et avec fermeture (en bas).*

la tête. L'os ne donne aucun signal en I.R.M. ce qui fait qu'il se confond avec l'air (sinus, cavités nasales et buccales), voire avec le liquide céphalo-rachidien (L.C.R.) dans certains types d'I.R.M. Or la modélisation de l'os est nécessaire car il joue un rôle important dans la diffusion des courants électriques du fait de sa faible conductivité (environ 80 fois moins que les autres tissus). Des techniques de segmentation de l'os à partir d'I.R.M. ont été proposées en utilisant des contours déformables [RIFA-00] ou des champs de Markov [WEL-96] mais elles n'ont pas encore abouti à un algorithme automatique fiable. C'est pourquoi, afin d'estimer approximativement la surface du crâne, nous avons choisi d'inclure deux étapes supplémentaires à la fermeture de la segmentation du cerveau qui sont les suivantes:

- $Cr_{ouvert} \leftarrow$ ouverture de C_{final} avec un élément structurant en forme de boule de rayon $r_{ouvert} = 7$ mm.
- $Crâne \leftarrow$ dilatation de Cr_{ouvert} avec un élément structurant en forme de boule de rayon $r_{crâne} = 6,5$ mm afin d'obtenir la surface externe du

crâne (voir figure 6.6).

Les paramètres utilisés pour l'estimation du crâne sont fondés sur des connaissances anatomiques. Nous éliminons intentionnellement les parties osseuses topologiquement complexes telles que les sinus et les tissus mous afin de simplifier d'une part la procédure de maillage volumique et d'autre part de faciliter la convergence de la résolution du problème direct par la F.E.M. [THEV-92], [HAUE-97].

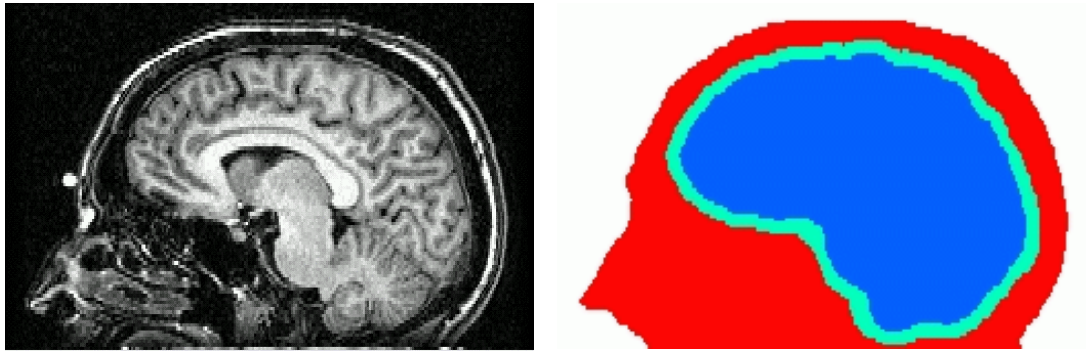


FIG. 6.6 – *IRM pondérée en T1 (hôpital de la Pitié Salpêtrière) à gauche et segmentation des tissus de la tête (scalp, crâne et encéphale) à droite, illustrée sur une coupe.*

À partir de la segmentation des tissus de la tête, nous allons à présent nous intéresser au maillage volumique de cette segmentation. Cela fait l'objet de la section suivante.

6.3 Maillage volumique des tissus de la tête

Afin d'avoir des maillages volumiques permettant de modéliser la conductivité anisotrope des tissus pour le calcul du problème direct en E.E.G., nous construisons d'abord une *T.P.R.* à partir d'une I.R.M. segmentée des tissus de la tête (cf. section 6.3.1) dont le nombre d'éléments est compatible avec le coût de calcul d'une F.E.M. puis nous effectuons un étiquetage homotopique du maillage (cf. 6.3.2) où nous attribuons à chaque tétraèdre une étiquette indiquant le type de tissus.

6.3.1 D'un volume segmenté vers une *T.P.R.* des tissus de la tête

L'implantation informatique d'un maillage des tissus de la tête à partir d'une *T.P.R.* ne pose pas de problèmes fondamentaux mais nécessite la prise

en considération d'un volume important de données. La structure de données que nous utiliserons doit donc représenter un maillage volumique de façon compacte et non redondante et aussi permettre une utilisation efficace des données en termes de temps de calcul.

Un maillage volumique $T_h = (T, V, M)$ peut être séparé en au moins deux parties distinctes. La première partie représente la structure géométrique du maillage T_h . Elle est constituée de l'ensemble des tétraèdres T et de leurs relations d'adjacence V . La seconde partie contient la proportion de chaque objet o_i dans chaque tétraèdre T (vecteur M) d'un maillage T_h d'une scène comprenant v objets. Ainsi, nous obtenons une décomposition comparable à celle des images discrètes.

La génération d'une *T.P.R.* à partir d'une segmentation des tissus de la tête (cf. section 6.2) se fait donc en deux étapes :

1. Nous choisissons le centre C du domaine segmenté et nous construisons le polyèdre formé de 24 tétraèdres invariants par subdivision partageant C , à partir du tétraèdre invariant par subdivision

$$T^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

en le mettant à l'échelle afin qu'il englobe tous les tissus de la tête (cf. figure 6.7). Ensuite nous subdivisons tous les tétraèdres de façon récursive jusqu'à obtenir un nombre de tétraèdres suffisant pour avoir une bonne représentation tout en satisfaisant la contrainte de coût de calcul imposée par la méthode aux éléments finis (cf. algorithme 6.3). Nous pouvons remarquer que le nombre N_{T_h} de tétraèdres d'une *T.P.R.* évolue suivant la loi $N_{T_h} = 24 * 8^n$ où n correspond à la résolution (cf. tableau 6.3). La résolution $n = 4$ ($N_{T_h} = 98304$) est un bon com-

n	N_{T_h}	$\%e_1$	$\%e_2$
0	24	74	26
1	192	60	40
2	1536	59	41
3	12888	58	42
4	98304	57	43
5	786432	57	43

TAB. 6.3 – Nombre N_{T_h} de tétraèdres et le pourcentage des longueurs d'arêtes e_1 et e_2 pour chaque résolution n .

promis entre la finesse de la représentation et le coût de calcul de la méthode (cf. section 6.3.4). D'autre part une *T.P.R.* possède des tétraèdres dont les arêtes ont deux longueurs presque identiques (elles ne peuvent prendre que les valeurs $e_1 = 1$ et $e_2 = \frac{\sqrt{10}}{3}$ pour T^*). A partir de $n = 1$, les pourcentages des deux types d'arêtes ont d'ailleurs tendance à devenir identiques d'une résolution à l'autre (cf. tableau 6.3). Cette régularité en longueur d'arête est également synonyme de stabilité numérique dans la méthode aux éléments finis. Nous remarquons que ces deux arêtes e_1 et e_2 sont de l'ordre du centimètre lorsque le polyèdre formé des 24 tétraèdres invariant par subdivision englobe complètement la segmentation et que la résolution de la *T.P.R.* vaut $n = 4$. La construction d'une *T.P.R.* (cf. algorithme 6.3) s'effectue en deux parties. Une première boucle permet de créer les tétraèdres enfants à partir d'une tétraédrisation parent. Dans notre algorithme, chaque enfant possède la connaissance du tétraèdre père et vice versa. C'est pourquoi, la construction du voisinage total, qui constitue la deuxième boucle de notre algorithme, ne nécessite pas de parcourir pour chaque tétraèdre toute la tétraédrisation. En effet, pour un tétraèdre enfant E ayant un père P , il suffit de parcourir les tétraèdres enfants dans le voisinage du tétraèdre P pour connaître le voisinage de l'enfant E . Cette façon de calculer le voisinage réduit considérablement le temps de calcul.

2. Ensuite, nous calculons la proportion de chaque tissu de la tête (vecteur M) dans chaque tétraèdre de la *T.P.R.* générée à l'étape précédente en s'appuyant sur l'I.R.M. segmentée (cf. algorithme 6.4). La construction de cet ensemble M est calculable si la *T.P.R.* est à une résolution plus grossière que la résolution de la scène segmentée. Dans ce cas, nous sommes sûrs qu'un tétraèdre intersecte plusieurs voxels. Cette condition est toujours remplie car le maillage des tissus de la tête est toujours à des résolutions inférieures ($N_{T_h} = 98304$) à la résolution voxelique.

Algorithme 6.3 pseudo-code de la construction d'une T.P.R.

initialisation :

Soit T_h le polyèdre formé par 24 tétraèdres invariants par subdivision étant tous voisins entre eux par le même sommet avec:

$T_h.Sommets$ le tableau des sommets de T_h

$T_h.Facettes$ le tableau des tétraèdres de T_h

pour $resolution = 1$ à n

$T_{h_{ancien}} \leftarrow T_h$

étape de construction géométrique

pour tétraèdre $i = 1$ à N_{T_h} nombre total de tétraèdres de T_h

1. **subdiviser** i en huit tétraèdres invariants par subdivision.
2. **insérer** $Enfant.Sommets$ le tableau des dix sommets créés à partir du tétraèdre i dans $T_h.Sommets$.
3. **insérer** $Enfant.Facette$ le tableau des facettes des huit tétraèdres de i créés. Les tétraèdres enfants ont leurs faces orientées de telle façon que les normales pointent à l'extérieur du tétraèdre.
4. **insérer** $Enfant.Voisinage$ les relations d'adjacence locale entre les huit tétraèdres enfants du tétraèdre i

fin pour $resolution$

étape de construction du voisinage total

pour tétraèdre $i = 1$ de T à N_{T_h} nombre total de tétraèdres de T_h

pour voisin $v = 1$ à nombre total de voisins du père dans $T_{h_{ancien}}$ du tétraèdre i

pour $ch = 1$ à nombre de voisins de v

si v est adjacent à i **alors** $i.Voisinage \leftarrow v$ **fin si**

fin pour ch

fin pour v

fin pour i

Algorithme 6.4 pseudo-code de la construction de l'ensemble M

Cet algorithme est fondé sur la propriété qu'un point X_i est à l'intérieur d'un tétraèdre $T = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ si :

$$X_i = \lambda_{i_{T_{p_1}}} p_1 + \lambda_{i_{T_{p_2}}} p_2 + \lambda_{i_{T_{p_3}}} p_3 + \lambda_{i_{T_{p_4}}} p_4$$

avec $0 \leq \lambda_{i_{T_{p_j}}} \leq 1$ pour $j = 1, \dots, 4$ et $\lambda_{i_{T_{p_1}}} + \lambda_{i_{T_{p_2}}} + \lambda_{i_{T_{p_3}}} + \lambda_{i_{T_{p_4}}} = 1$.

Soit $I(o_1, \dots, o_v)$ une image classique segmentée comprenant v objets.

Soit N_{T_h} le nombre total de tétraèdres de T_h

Soit o_l l'objet segmenté l de $\{o_1, \dots, o_v\}$.

Soit $M_{T_h}(T)$ le vecteur de taille v représentant la proportion de chaque objet dans un tétraèdre T de T_h . On note $M_{T_h}(T)(o_l)$ la l ième composante de $M_{T_h}(T)$ (proportion de o_l dans T).

initialisation :

pour $k = 1$ à N_{T_h}

$\forall l M_{T_h}(o_l) = 0$

fin pour k

pour $k = 1$ à N_T

Soit n_{λ_T} le nombre total de X_i dans T .

pour $i = 1$ to n_{λ_T}

si $I(X_i) = I(o_l)$ **alors** $M_T(T)(o_l) = M_{T_h}(T)(o_l) + (1/n_{\lambda_T})$ **fin si**

fin pour i

fin pour k

La figure 6.7 représente les différents niveaux de subdivision d'une $T.P.R.$ ($T_h = \{T, V, M\}$) des tissus de la tête à partir d'une segmentation des tissus de la tête. La table de couleur correspond au type de tissus présents dans un tétraèdre. Ainsi, nous observons qu'à partir de la résolution $n = 3$, le nombre de tétraèdres ayant un mélange des tissus scalp, os et cerveau diminue.

Notre procédure de maillage doit affecter un seul tissu par tétraèdre afin de répondre aux contraintes requises par la méthode aux éléments finis. Pour cela, nous allons à présent construire un modèle topologique permettant d'attribuer à chaque tétraèdre un seul tissu sans changer la topologie des objets maillés (cf. section 6.3.2).

6.3.2 Déformation homotopique d'un maillage volumique

A partir de la caractérisation locale d'un tétraèdre simple (cf. chapitre 4), nous avons développé un algorithme d'étiquetage permettant de créer un modèle volumique des tissus de la tête conservant certaines propriétés topologiques. Cette technique de maillage tétraédrique est fondée sur l'utilisation d'un algorithme d'étiquetage homotopique d'une $T.P.R.$ des tissus de la tête.

L'algorithme général d'étiquetage homotopique utilise trois fonctions principales :

- **modèle initial :** cette fonction est chargée de construire le modèle initial devant être déformé par la suite. La topologie de ce modèle initial sera conservée tout au long du processus de déformation.

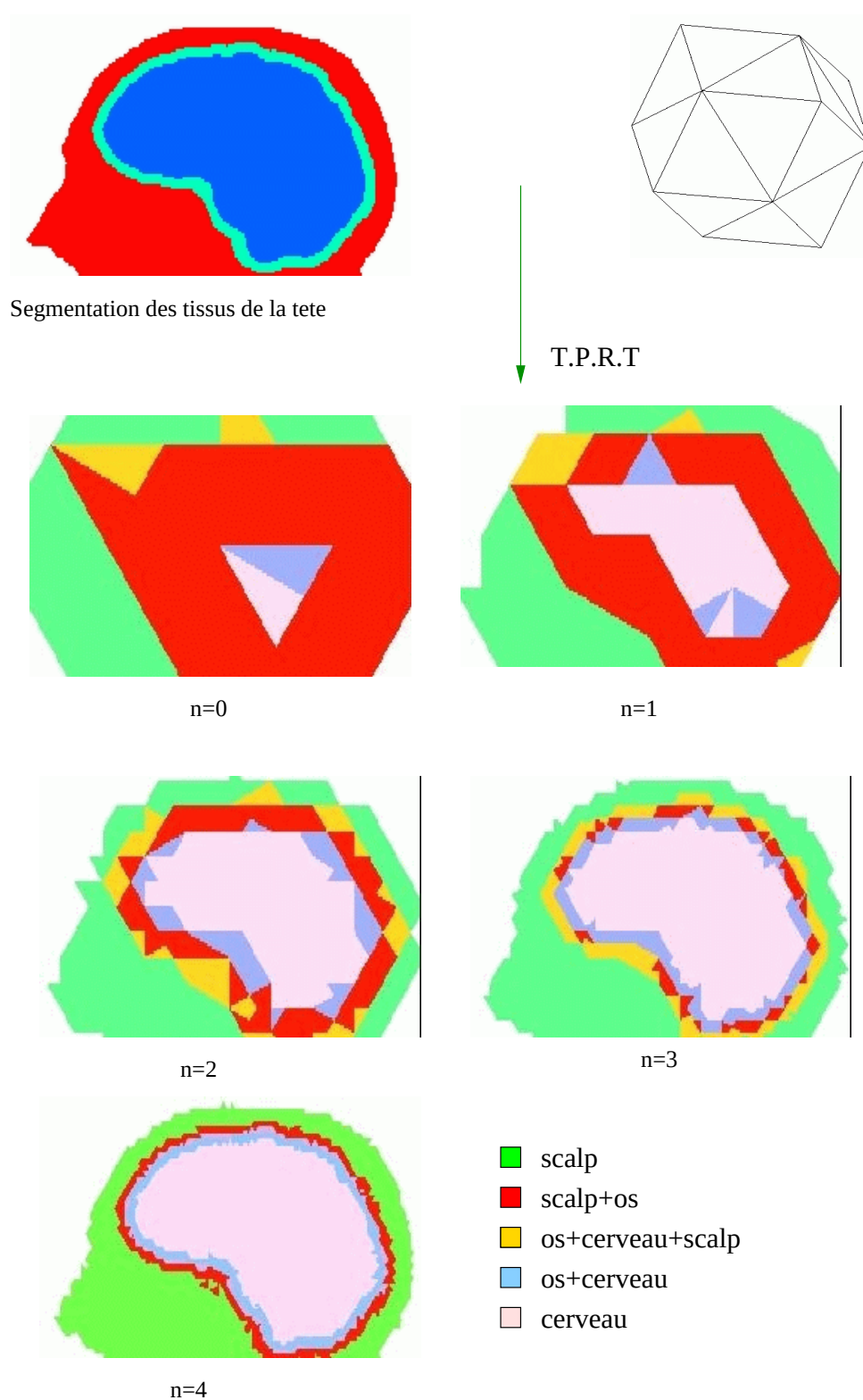


FIG. 6.7 – Les différentes niveaux de subdivision d'une T.P.R. des tissus de la tête.

- **critère de sélection :** la sélection des tétraèdres devant être modifiés est faite par l'intermédiaire de cette fonction. C'est elle qui est chargée de guider la déformation vers le modèle final.

En premier lieu, le critère de sélection sélectionne uniquement les tétraèdres simples. Cette sélection assure la topologie du modèle en cours d'étiquetage. Le nombre de détections des tétraèdres simples a donc une grande influence sur la rapidité de l'algorithme général. Afin d'optimiser la rapidité de l'algorithme, il faut remarquer que les tétraèdres simples se trouvent toujours à la frontière entre un objet et le fond. Il y a donc dans beaucoup de cas peu de tétraèdres simples par rapport au nombre total de tétraèdres. De plus, au cours du processus de déformation nous n'examinons que les tétraèdres dans le voisinage par face des tétraèdres simples car cela restreint l'ensemble des tétraèdres simples à tester par rapport à ceux satisfaisant les conditions du théorème 4.41 et permet d'éviter l'apparition de structures arborescentes irrégulières. En effet, en l'absence de critère de régularisation adéquat pour guider leur évolution, les volumes ne suivent pas une trajectoire régulière. Ils apparaissent donc sur les images sous forme de ruban tétraédrique. Par ailleurs, le critère de sélection est fondé sur deux seuils (μ_T et μ_V) et un booléen μ_{max} .

Le seuil μ_T autorise l'évolution du modèle par rapport à la proportion de chaque tissu de la tête dans chaque tétraèdre.

Le seuil μ_V autorise l'évolution du modèle par rapport à la proportion de chaque tissu de la tête d'au moins la moitié des voisins par face d'un tétraèdre donné.

Le booléen μ_{max} autorise l'évolution du modèle en fonction de la proportion du tissu en cours d'étiquetage. Ce booléen est vrai si le tissu, en cours d'analyse, est le plus présent dans le tétraèdre T .

- **critère de fin :** ce critère d'arrêt de l'algorithme doit déterminer si le modèle courant de la déformation est une solution au problème que l'on souhaite résoudre.

Nous avons défini ce critère en déterminant, à partir d'une *T.P.R.* des tissus de la tête, le nombre n de tétraèdres ayant une proportion de tissu μ_T . Ainsi, l'étiquetage pour un tissu donné s'arrête lorsque le nombre n de tétraèdres est atteint. Ce critère a pour but de déterminer le nombre de tétraèdres nécessaires pour retrouver un maillage du tissu satisfaisant une proportion de tissu au plus égale à μ_T . Nous verrons que ce critère d'arrêt n'est pas judicieux puisque il ne laisse pas assez de flexibilité à l'étiquetage (section 6.3.5). C'est pourquoi, nous avons décidé, ensuite, d'éliminer tout critère de fin dans notre procédure d'étiquetage. En l'absence de critère de fin, il est alors important d'étudier la convergence de l'algorithme et de vérifier qu'il évolue toujours vers une

solution. Théoriquement, la convergence de l'algorithme est assurée car l'algorithme ajoute des tétraèdres simples et il y a un nombre fini de tétraèdres. Pour illustrer la convergence, nous avons choisi de représenter, pour chaque tissu, le nombre total de tétraèdres du maillage à chaque itération du modèle par rapport au nombre de tétraèdres ayant une proportion de tissu μ_T (cf. section 6.3.5).

L'algorithme d'étiquetage homotopique est appliqué de façon séquentielle au tissu cerveau, os puis scalp. En premier lieu, l'algorithme de déformation est initialisé sur un objet connexe de l'intérieur du cerveau. Cet objet connexe est tout simplement un tétraèdre à l'intérieur du cerveau. La sélection des tétraèdres du fond de l'objet devant être modifiés est faite en analysant les tétraèdres simples par rapport à l'objet ainsi que leurs voisins par face qui ont une proportion de tissu cerveau supérieure à un certain seuil μ_T . Le modèle n'évolue plus quand le nombre total de tétraèdres ayant une proportion de tissu cerveau supérieure au seuil μ_T défini dans la sélection des tétraèdres est atteint, ou quand il n'y a plus de tétraèdres simples. A la fin de cet étiquetage, nous obtenons un objet connexe représentant le cerveau (voir figure 6.8). Cette objet ne présente ni cavité ni tunnel et il est homéorphe à une sphère (cf. chapitre 4). Nous noterons que ni le seuil μ_V et ni le booléen μ_{max} n'interviennent dans l'étiquetage du cerveau. Ce choix permet d'avoir un nombre suffisant de tétraèdres pour l'étiquetage homotopique du tissu os.

Afin d'obtenir l'interface correspondant à l'os, nous considérons l'union du cerveau avec l'os comme un seul objet connexe. Ainsi, l'objet connexe représentant le cerveau obtenu précédemment constitue le modèle initial pour l'étiquetage de l'os. L'algorithme de déformation pour l'os sélectionne alors les tétraèdres simples du fond en fonction d'un seuil μ_T correspondant à la proportion d'os dans les tétraèdres simples, en fonction du booléen μ_{max} de l'os et en fonction du seuil μ_V qui correspond à la proportion d'os des voisins par face. L'introduction du paramètre μ_V assouplit la procédure d'étiquetage en facilitant la création d'une interface os (cf. section 6.3.5.2). L'introduction du booléen μ_{max} permet d'adapter finalement le modèle d'étiquetage sur les contraintes de frontières imposées par la segmentation des tissus de la tête. Nous verrons, dans la section 6.3.5, l'influence des différents paramètres (μ_T , μ_V et μ_{max}) et du critère d'arrêt sur la qualité des résultats obtenus. Nous pouvons, d'ores et déjà, indiquer que nous avons donné une priorité aux paramètres (μ_T , μ_V et μ_{max}) en prenant en compte d'abord le paramètre μ_T , puis le paramètre μ_V et enfin le paramètre μ_{max} .

De façon analogue, nous considérons l'union cerveau, os et tête comme un seul objet connexe représentant la tête. L'algorithme de déformation pour la tête est alors initialisé sur l'objet connexe représentant l'union de l'os et

du cerveau. L'étiquetage homotopique de la tête sélectionne les tétraèdres simples en utilisant les mêmes critères que pour l'os. Le choix des seuils μ_T est identique pour les trois tissus étudiés tandis que le choix du seuil μ_V est identique pour les tissus os et tête.

6.3.3 Visualisation

La visualisation bidimensionnelle et tridimensionnelle de l'étiquetage homotopique d'un maillage tétraédrique peut permettre d'évaluer qualitativement les résultats et de les comparer visuellement à la segmentation des tissus de la tête. Néanmoins, la visualisation de l'évolution du modèle homotopique est un problème délicat en raison de la structure même du maillage volumique qui nécessite la visualisation d'éléments tétraédriques. Nous avons donc mis au point une technique de visualisation permettant d'observer les éléments tétraédriques.

Afin de pouvoir localiser la position du modèle homotopique tétraédrique dans la segmentation de l'image, nous nous sommes orientés vers une approche permettant de visualiser les résultats par coupes tridimensionnelles orthogonales (i.e. axiale, coronale et sagittale). Ainsi, il est possible de superposer les tétraèdres simples du modèle homotopique d'un tissu sur la segmentation des tissus de la tête. La figure 6.8 présente une vue d'ensemble du modèle homotopique lorsque la segmentation est limitée à seul objet (le cerveau), on peut y voir trois coupes perpendiculaires de l'image de segmentation, le modèle d'initial et les tétraèdres simples du modèle homotopique ainsi que l'évolution du modèle 3D homotopique du cerveau. Ce type de vue permet de visualiser l'évolution de la « surface du modèle » (tétraèdres simples) au cours de son évolution.

D'autre part, l'extraction d'une surface triangulée (maillage surfacique) à partir d'une *T.P.R.* homotopique consiste à parcourir la liste des tétraèdres simples d'une composante connexe tétraédrique O du maillage et détecter les faces des tétraèdres simples qui sont voisins à l'objet $\overline{O}$ qui constitue le complémentaire de O dans la *T.P.R.* (cf. figure 6.8 à gauche). Nous n'avons pas démontré que les surfaces, obtenues à partir d'une *T.P.R.* homotopique, étaient homéomorphes à une sphère creuse. Néanmoins, le calcul de la caractéristique d'Euler sur ces surfaces a montré que celles-ci étaient homéomorphes à une sphère creuse dans tous les exemples traités.

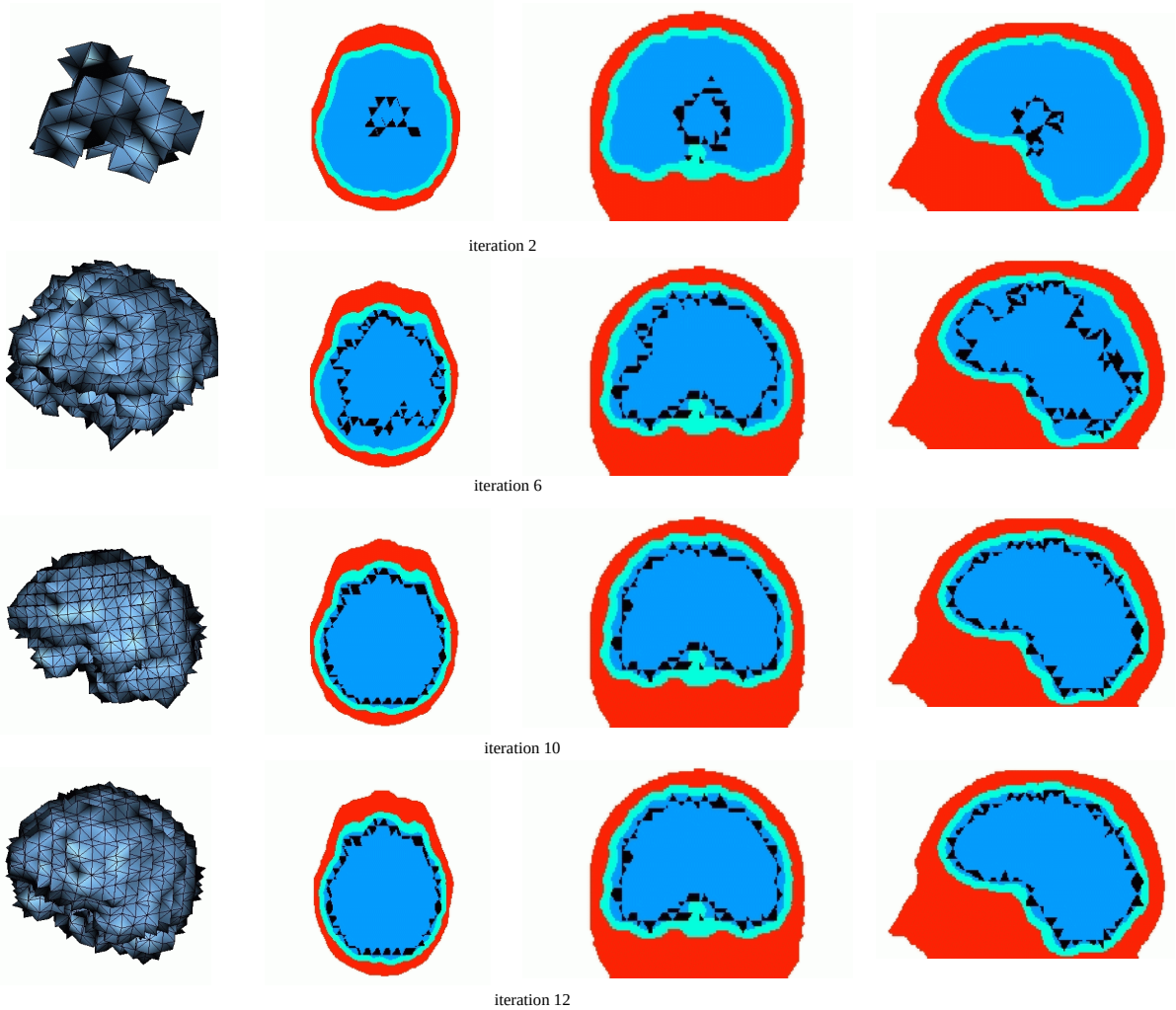


FIG. 6.8 – *Etiquetage homotopique limité à l'objet cerveau avec $\mu_T = 0,8$. Tétraèdres simples de l'étiquetage homotopique (en noir) superposés à la segmentation des tissus de la tête .*

6.3.4 La résolution de la *T.P.R.* : les moments géométriques

Nous avons vu dans la section 6.3.1 que nous fixons une résolution d'une *T.P.R.* des tissus de la tête à partir d'une *IRM* segmentée. Cette résolution doit être un bon compromis entre la finesse de la représentation et le coût de calcul de la méthode aux éléments finis. Nous allons voir que cette résolution peut être déterminée en calculant les moments géométriques de nos *T.P.R.*

Les moments géométriques sont couramment utilisés en analyse d'image et en reconnaissance de formes [REISS-93], [POUP-98]. Dans le cas d'objets

représentés sous une forme polyédrique, il existe une formule explicite pour calculer les moments géométriques de n'importe quel ordre en les calculant sur des éléments tétraédriques [SHEY-01].

Si on considère un maillage tétraédrique O formé de tétraèdres T_O , le moment géométrique d'ordre $k = k_1 + k_2 + k_3$ est donné en décomposant chaque T_O en ses faces puis en calculant le moment géométrique pour chaque face $F_O = (a, b, c)$ du tétraèdre T_O . Le moment engendré par une face F_O se détermine alors en calculant le moment géométrique créé par le tétraèdre $T_{F_O}(o, a, b, c) = T_i(a, b, c)$ qui est l'union de la face F_O avec une origine o (cf. figure 6.9).

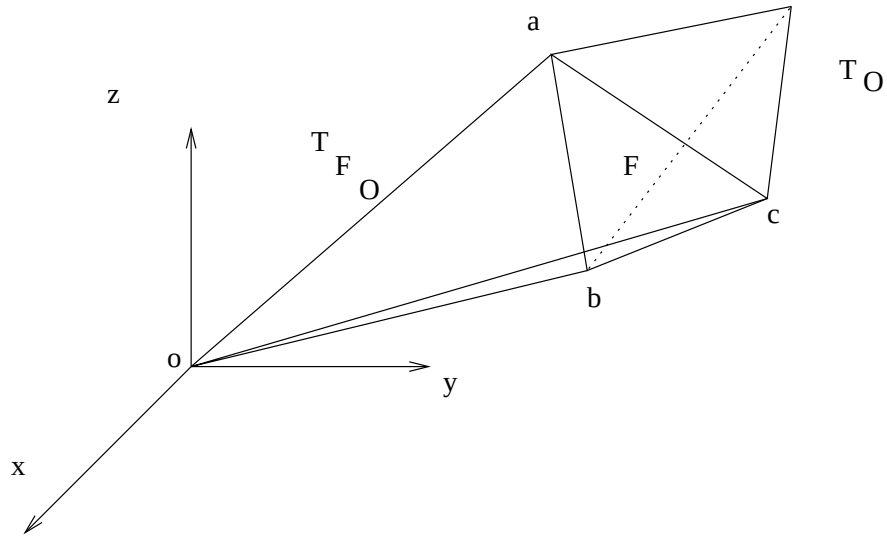


FIG. 6.9 – Tétraèdre T_O et $T_{F_O} = T_i$ pour le calcul d'un moment géométrique.

A partir de cette décomposition en éléments tétraédriques T_i , le moment $m_{k_1 k_2 k_3}(O)$ d'ordre $k = k_1 + k_2 + k_3$ d'un maillage tétraédrique se détermine alors de la façon suivante :

$$m_{k_1 k_2 k_3}(O) = \int_O x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dx dy dz = \sum_i \int_{T_i} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dx dy dz = \sum_i m_{k_1 k_2 k_3}(T_i)$$

Nous rappelons que le tableau 2.2 de la page 39 regroupe la formulation explicite des moments géométriques d'un tétraèdre T_i jusqu'à l'ordre 2.

A partir du théorème 2.3, nous avons calculé d'une part les moments jusqu'à l'ordre 2 des *T.P.R.* des tissus de la tête après étiquetage avec *a priori* topologique, c'est-à-dire, en prenant une procédure d'étiquetage homotopique pour deux résolutions différentes ($n = 3$ et $n = 4$). D'autre part, le calcul des moments géométriques sur la segmentation a été effectué sur les voxels

de la segmentation. Nous représentons, dans les tableaux 6.4, 6.5 et 6.6, les erreurs relatives $\Delta M/M_v = |M_{T.P.R.} - M_{voxels}|/M_{voxels}$ et des moments, jusqu'à l'ordre 2, pour les tissus cerveau, os et tête respectivement.

Nous remarquons qu'en passant d'une échelle à l'autre, l'erreur relative des moments géométriques calculés par rapport à la segmentation chute de 1/10 environ. En conclusion, il semblerait que l'échelle de la *T.P.R.* à la résolution $n = 4$ est une approximation tétraédrique satisfaisante par rapport à la segmentation (cf. section 6.3.1). Les figures 6.10 et 6.11 montrent une superposition⁴ des *T.P.R.* homotopiques (tête et cerveau) pour les résolutions $n = 3$ et $n = 4$. Dans la section suivante, nous allons montrer l'influence des paramètres de l'étiquetage homotopique à partir d'une *T.P.R.* des tissus de la tête à la résolution $n = 4$.

Cerveau	<i>T.P.R.</i> ($n = 3$)	<i>T.P.R.</i> ($n = 4$)
$\Delta M_{000}/M_{000_v}$	0,026	0,011
$\Delta M_{100}/M_{100_v}$	0,022	0,008
$\Delta M_{010}/M_{010_v}$	0,017	0,007
$\Delta M_{001}/M_{001_v}$	0,018	0,005
$\Delta M_{200}/M_{200_v}$	0,018	0,005
$\Delta M_{020}/M_{020_v}$	0,011	0,004
$\Delta M_{002}/M_{002_v}$	0,011	0,002
$\Delta M_{110}/M_{110_v}$	0,014	0,004
$\Delta M_{101}/M_{101_v}$	0,016	0,002
$\Delta M_{011}/M_{011_v}$	0,011	0,001

TAB. 6.4 – Erreur relative $\Delta M/M_v = |M_{T.P.R.} - M_{voxels}|/M_{voxels}$ des moments d'ordre 2 pour des *T.P.R.* de résolution 3 et 4 par rapport à la segmentation du cerveau.

6.3.5 Régularisation, paramètres et convergence

Pour faire évoluer le modèle initial, l'algorithme de déformation nécessite également la selection de trois paramètres (μ_T , μ_V et μ_{max}) et d'un critère d'arrêt (cf. section 6.3.2). Dans cette section, nous allons étudier le comportement de notre algorithme d'étiquetage homotopique par rapport aux paramètres et au critère d'arrêt.

4. Les vues tridimensionnelles de la segmentation voxélique d'un tissu sont obtenues par un logiciel de triangulation développé par Cyril Poupon sur la base du travail d'Olivier Pizzato et de Marie-Elena Algorri [PIZZ-97], [ALGO-95]

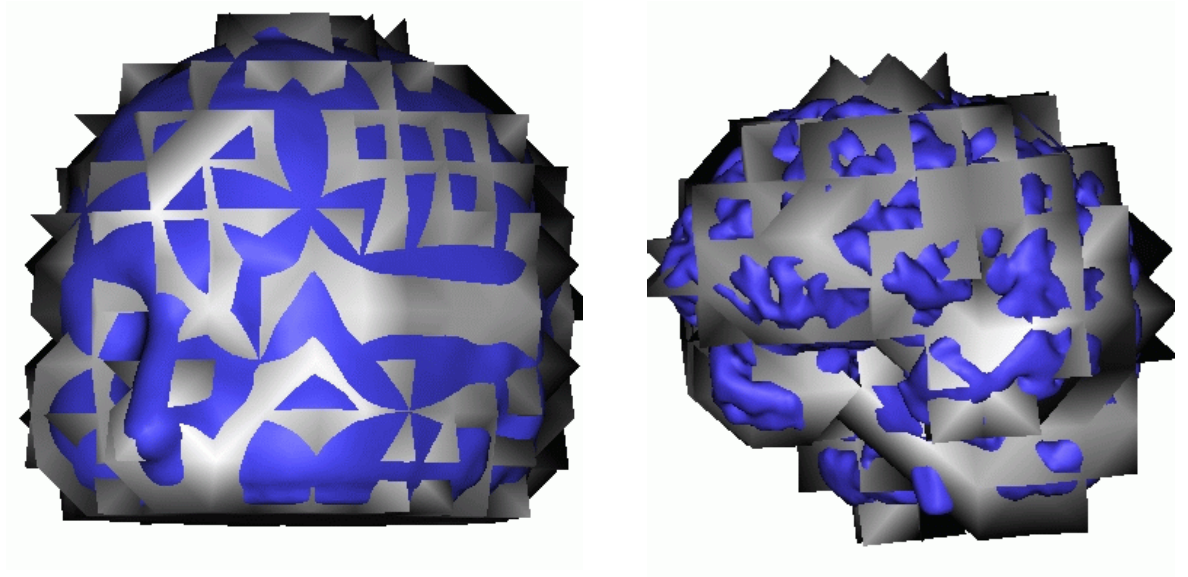


FIG. 6.10 – *scalp et cerveau : superposition de la segmentation (en foncé) et du maillage homotopique tétraédrique (en clair) pour la résolution ($n = 3$) de la T.P.R.*

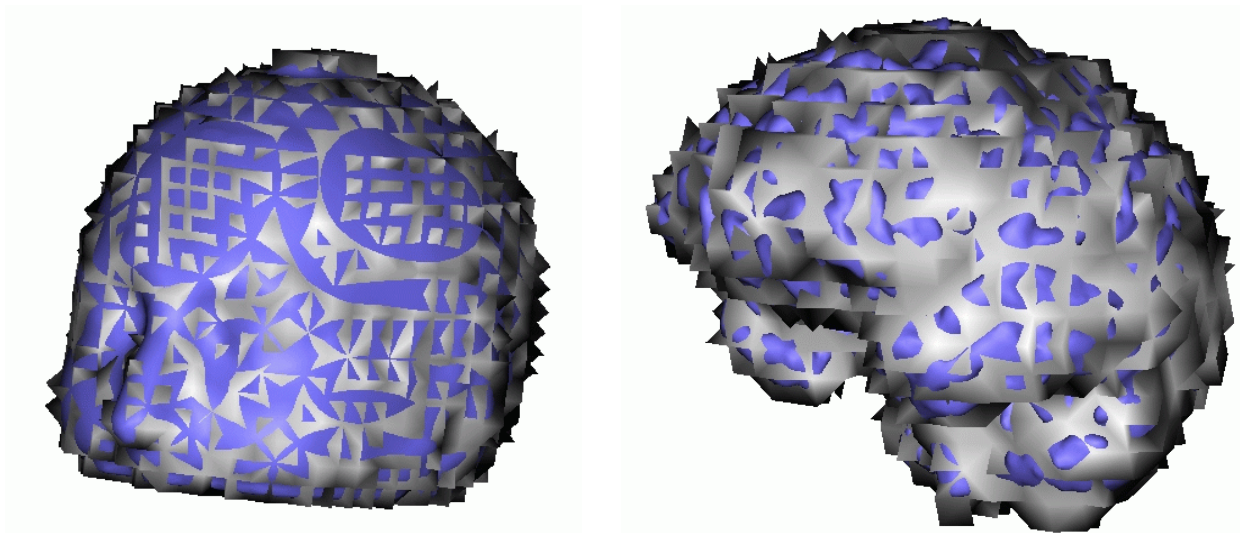


FIG. 6.11 – *scalp et cerveau : superposition de la segmentation (en foncé) et du maillage homotopique tétraédrique (en clair) pour la résolution ($n = 4$) de la T.P.R.*

Crâne	$T.P.R.(n = 3)$	$T.P.R.(n = 4)$
$\Delta M_{000}/M_{000_v}$	0,008	0,003
$\Delta M_{100}/M_{100_v}$	0,008	0,007
$\Delta M_{010}/M_{010_v}$	0,006	0,005
$\Delta M_{001}/M_{001_v}$	0,012	0,000
$\Delta M_{200}/M_{200_v}$	0,011	0,008
$\Delta M_{020}/M_{020_v}$	0,008	0,002
$\Delta M_{002}/M_{002_v}$	0,020	0,006
$\Delta M_{110}/M_{110_v}$	0,010	0,005
$\Delta M_{101}/M_{101_v}$	0,016	0,000
$\Delta M_{011}/M_{011_v}$	0,015	0,000

TAB. 6.5 – *Erreur relative $\Delta M/M_v = |M_{T.P.R} - M_{voxels}|/M_{voxels}$ des moments jusqu'à l'ordre 2 des T.P.R. de résolution 3 et 4 par rapport à la segmentation du crâne.*

Tête	$T.P.R.(n = 3)$	$T.P.R.(n = 4)$
$\Delta M_{000}/M_{000_v}$	0,007	0,001
$\Delta M_{100}/M_{100_v}$	0,004	0,005
$\Delta M_{010}/M_{010_v}$	0,006	0,005
$\Delta M_{001}/M_{001_v}$	0,008	0,002
$\Delta M_{200}/M_{200_v}$	0,009	0,000
$\Delta M_{020}/M_{020_v}$	0,010	0,002
$\Delta M_{002}/M_{002_v}$	0,012	0,002
$\Delta M_{110}/M_{110_v}$	0,010	0,001
$\Delta M_{101}/M_{101_v}$	0,012	0,002
$\Delta M_{011}/M_{011_v}$	0,013	0,001

TAB. 6.6 – *Erreur relative $\Delta M/M_v = |M_{T.P.R} - M_{voxels}|/M_{voxels}$ des moments jusqu'à l'ordre 2 pour des T.P.R. de résolution 3 et 4 par rapport à la segmentation de la tête.*

6.3.5.1 Expérience 1 : étude de μ_T

Dans cette expérience, nous avons simplement étudié le seuil μ_T de proportion de tissu sans faire d'autres hypothèses. Afin d'étudier le paramètre μ_T , nous représentons (cf. figure 6.12), pour chaque tissu, le nombre total de tétraèdres du maillage à chaque itération du modèle par rapport au nombre tétraèdres ayant une proportion de tissu μ_T . Nous faisons varier le seuil μ_T de 0,2 à 0,8.

Dans cette étude, nous observons que le critère d'arrêt n'est jamais atteint . Si le critère d'arrêt était atteint, le rapport entre le nombre total de

tétraèdres du maillage à la fin de l'étiquetage et le nombre de tétraèdres ayant une proportion de tissu μ_T devrait être égal à 1. Or nous observons, pour tous les tissus, un rapport inférieur à un (cf. figure 6.12). Dans le cas de l'étiquetage du cerveau, nous observons que l'algorithme converge entre 12 et 17 itérations pour le seuil μ_T variant de 0,2 à 0,8. Pour l'os, l'algorithme d'étiquetage converge en 14 itérations lorsque μ_T vaut 0,8 et en 2 itérations lorsque μ_T vaut 0,2 (cf. figure 6.12 (a) et (d)).

Les courbes montent assez lentement pour l'étiquetage du cerveau et plus rapidement pour les autres tissus. Nous remarquons que si le seuil μ_T est trop fort (cf. figure 6.12 (c) et (d)), l'algorithme d'étiquetage ne parviendra pas à étiqueter un nombre important de tétraèdres pour le crâne (cf. figures 6.13 (c) et (d)). D'ailleurs, lorsque $\mu_T = 0,8$, l'algorithme ne parvient pas à étiqueter des tétraèdres contenant du tissu tête (cf. figure 6.13 (d)).

A l'inverse, si μ_T est trop faible (figure 6.12 (c) et (d)), l'algorithme sera capable d'étiqueter le crâne et le scalp mais ces seuils ne permettent pas de conserver de bonnes frontières entre les tissus et donc nous nous éloignons des contraintes anatomiques imposées par la segmentation. Notre objectif est de conserver des seuils μ_T et d'avoir des stratégies d'étiquetage permettant de créer une frontière avec une certaine épaisseur. C'est pourquoi, dans la deuxième expérience, nous avons introduit le paramètre μ_V pour l'étiquetage des tissus os et tête.

6.3.5.2 Expérience 2 : introduction du paramètre μ_V

Dans cette expérience, nous avons introduit le paramètre μ_V dans notre modèle tout en conservant le critère d'arrêt défini précédemment et en fixant le seuil μ_T à 0,8 et à 0,6. Nous rappelons que le paramètre μ_V permet d'étiqueter un tétraèdre T simple si au moins la moitié des tétraèdres voisins par face de T ont une proportion de tissu μ_V .

Dans un premier temps, nous avons donné à ce seuil une valeur très faible ($\mu_V = 0,1$) afin de faciliter au maximum la procédure d'étiquetage. Dans ce cas, l'algorithme d'étiquetage a toujours du mal à suivre la segmentation des tissus de la tête (cf. figure 6.14). Certes, nous observons l'apparition d'une frontière pour le tissu du crâne mais celle-ci n'entoure pas complètement le cerveau (cf. figure 6.14 (b)). Avec notre critère de simplicité d'un tétraèdre, l'union du cerveau avec l'os forme une composante connexe mais il existe des pseudo-tunnels qui ne sont pas de véritables tunnels au sens topologique, mais qu'il serait souhaitable de remplir pour favoriser la régularité de l'étiquetage. Ce phénomène s'apparente à la graine qui se transforme en arbre :

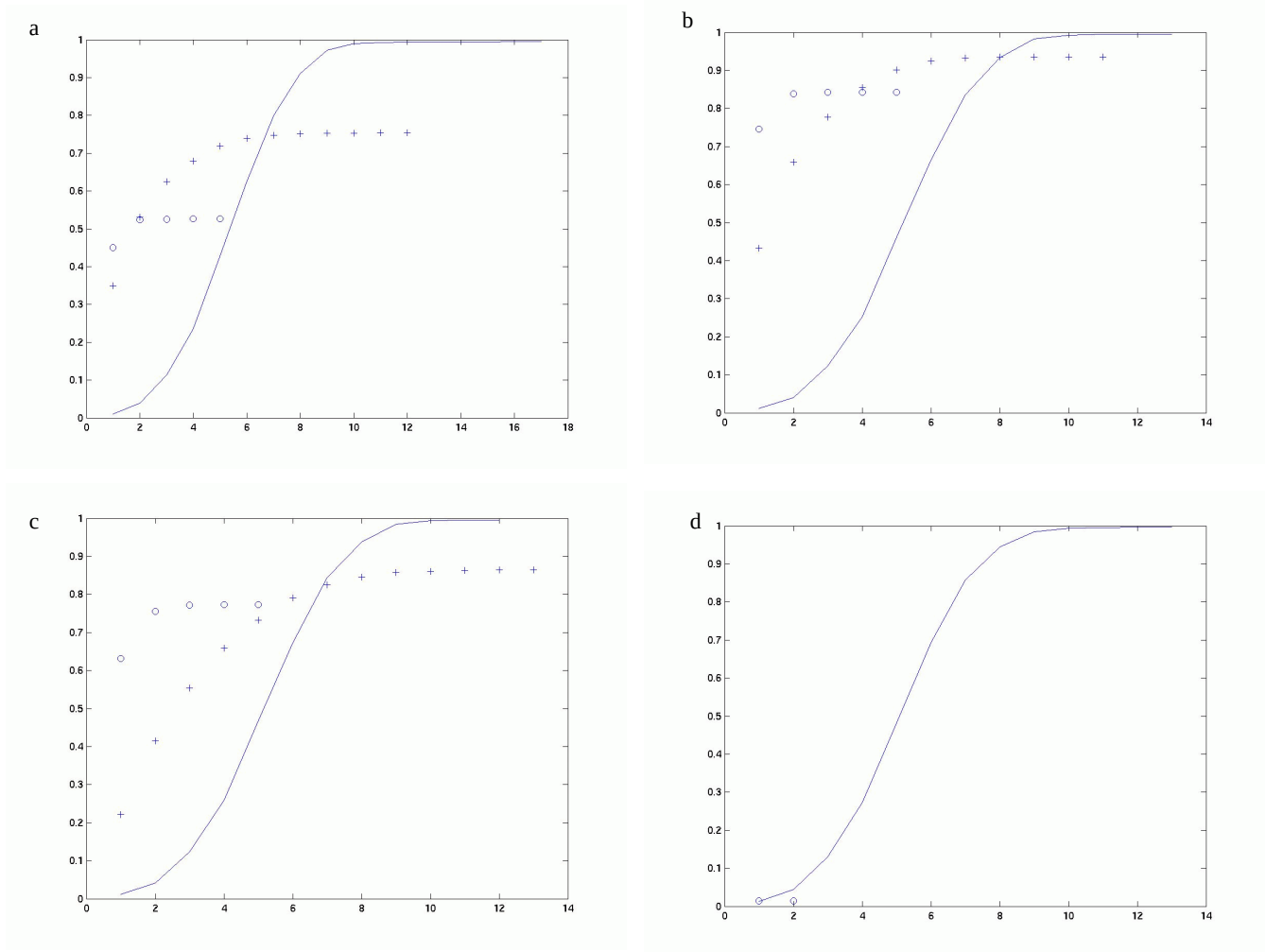


FIG. 6.12 – *Convergence de l'étiquetage homotopique des tissus de la tête. Rapport (en ordonnées) entre le nombre de tétraèdres étiquetés par itération (en abscisses) et le nombre de tétraèdres ayant un seuil μ_T . Chaque courbe représente un tissu étiqueté (- pour le cerveau, o pour le crâne et + pour le scalp).*

(a) $\mu_T = 0,2$ (b) $\mu_T = 0,4$ (c) $\mu_T = 0,6$ (d) $\mu_T = 0,8$.

sa géométrie change considérablement mais sa topologie est préservée.

En conclusion, l'utilisation uniquement des deux seuils μ_V et μ_T est insuffisante pour l'étiquetage. Il est nécessaire d'introduire le booléen μ_V correspondant au tissu le plus présent dans un tétraèdre afin de suivre les contraintes anatomiques imposées par la segmentation des tissus.

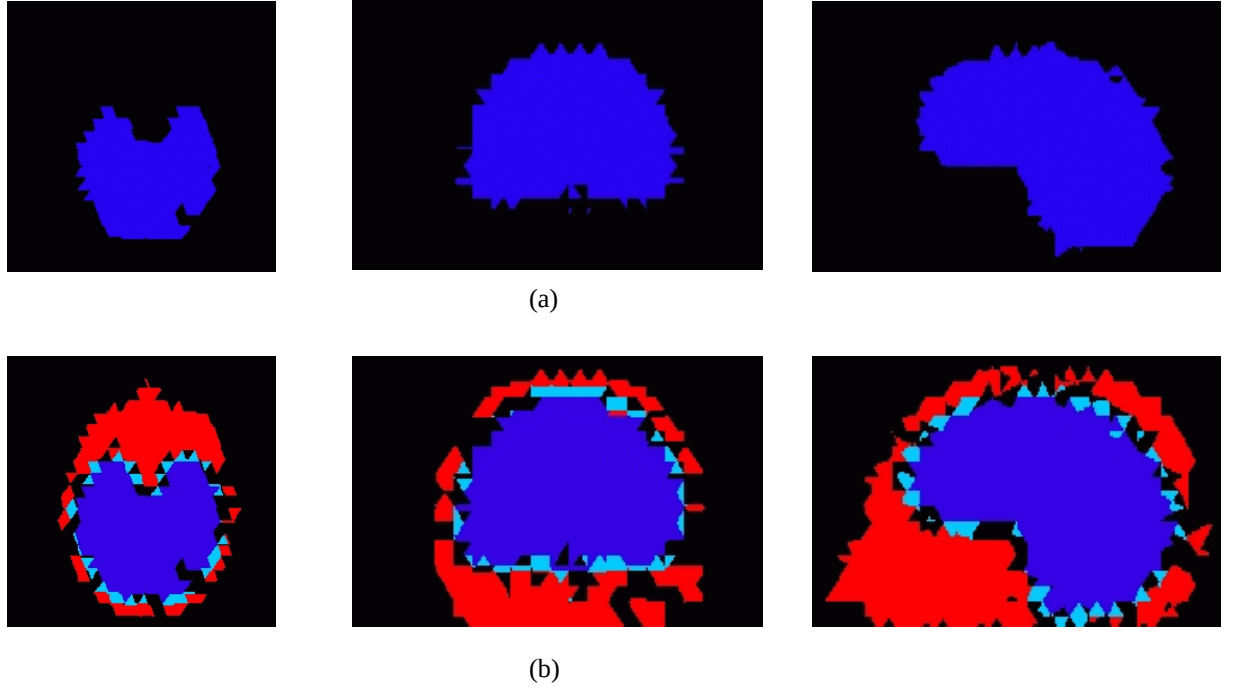


FIG. 6.13 – *Expérience 1 : Etude du paramètre μ_T dans le modèle homotopique d'étiquetage pour la résolution de la T.P.R. $n = 4$.*

(a) $\mu_T = 0,8$ sans μ_V et sans μ_{max} (b) $\mu_T = 0,6$ sans μ_V et sans μ_{max} .

6.3.5.3 Expérience 3 : introduction du booléen μ_{max}

L'introduction du booléen μ_{max} de tissu dans un tétraèdre couplée aux paramètres μ_T et μ_V permet d'adapter le modèle d'étiquetage homotopique sur les contraintes de frontières imposées par la segmentation des tissus de la tête. Le critère d'arrêt a, d'autre part, changé car nous comptons, pour chaque tissu le nombre *a priori* de tétraèdres ayant une proportion de tissu μ_T ou ayant une composition maximale de tissu considéré. Cette modification du critère d'arrêt augmente le nombre de tétraèdres candidats à l'étiquetage.

Nous observons une légère amélioration de l'étiquetage homotopique (cf. figure 6.15). En effet, l'étiquetage du crâne est amélioré et suit le pourtour du cerveau mais cela reste toutefois insuffisant par rapport à la segmentation des tissus. C'est pourquoi, dans une dernière expérience, nous envisageons de supprimer le critère d'arrêt.

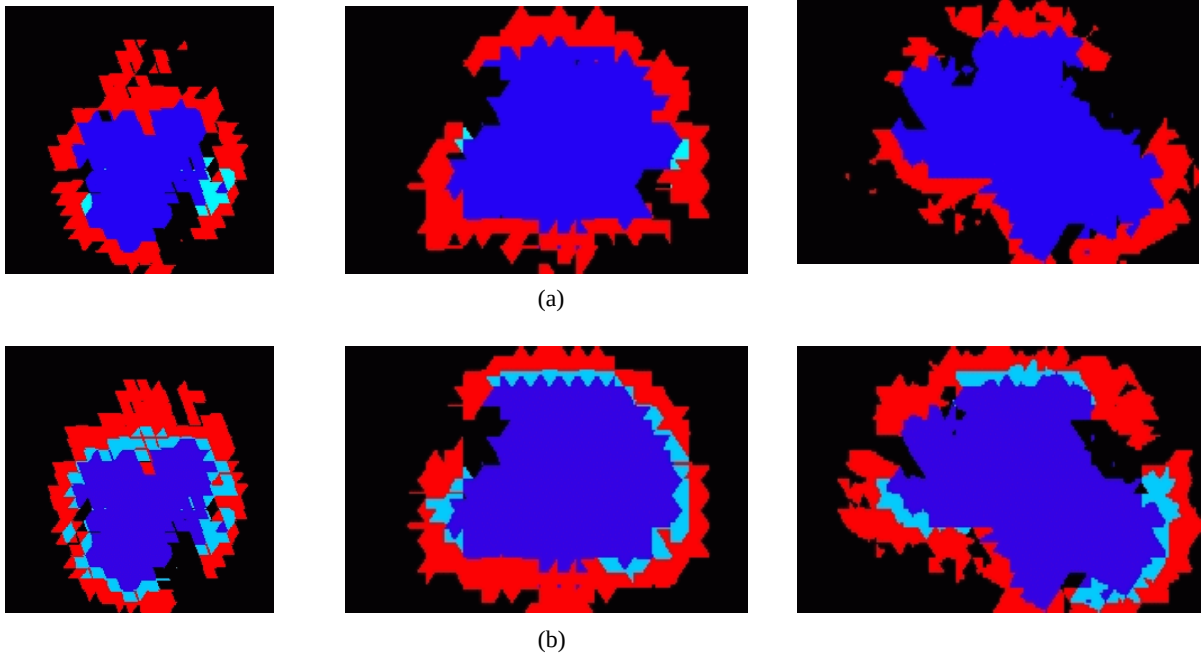


FIG. 6.14 – *Expérience 2: introduction du paramètre μ_V dans le modèle homotopique d'étiquetage.*

(a) $\mu_T = 0,8$ et $\mu_V = 0,1$ (b) $\mu_T = 0,6$ et $\mu_V = 0,1$.

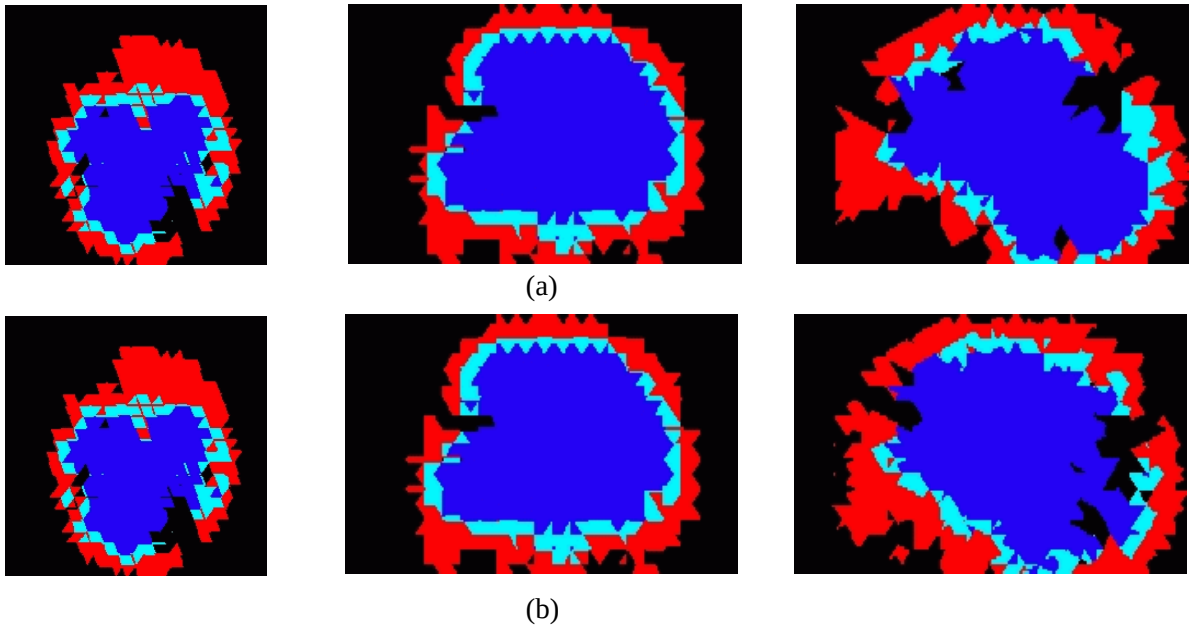


FIG. 6.15 – *Expérience 3: introduction de la proportion maximale de tissu dans un tétraèdre.*

(a) $\mu_T = 0,8, \mu_V = 0,1$ et μ_{max} (b) $\mu_T = 0,6, \mu_V = 0,1$ et μ_{max} .

6.3.5.4 Expérience 4 : élimination du critère d'arrêt

L'élimination du critère d'arrêt permet d'étiqueter de façon convenable et de suivre la segmentation des tissus de la tête (cf. figure 6.16). L'algorithme s'arrête donc lorsqu'il n'existe plus de tétraèdres simples satisfaisant les critères de proportion μ_T , μ_V et μ_{max} pour le tissu considéré.

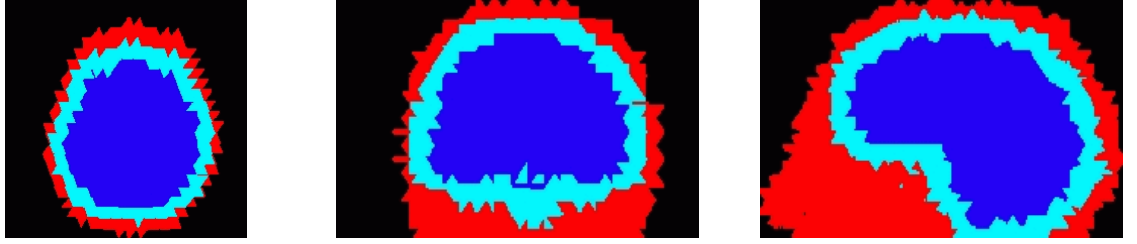


FIG. 6.16 – *Elimination du critère d'arrêt* ($\mu_T = 0,8, \mu_V = 0,1$ et μ_{max}).

Dans ce cas de figure, l'influence du paramètre μ_V est relativement importante. En effet, si μ_V est faible, l'épaisseur de la couche tétraédrique est assez importante (cf. figure 6.16), ce qui entraîne d'une part un déplacement des frontières par rapport à la vraie segmentation du crâne (cf. figure 6.17 (a)) et d'autre part surévalue fortement le nombre de tétraèdres satisfaisant les critères μ_T , μ_V et μ_{max} par rapport au nombre de tétraèdres calculé à partir du critère d'arrêt (cf. figure 6.19 (a)). En ce qui concerne l'étiquetage homotopique de la tête, celui-ci est également sensible au paramètre μ_V (cf. figure 6.18). Néanmoins, cet étiquetage n'est pas trop surévalué par rapport au nombre de tétraèdres calculé à partir du critère d'arrêt (cf. figure 6.19 (b)).

En conclusion, lorsque nous fixons $\mu_V = 0,6$ lorsque $\mu_T = 0,8$, l'étiquetage est tout à fait convenable (cf. figure 6.20) et se rapproche de la segmentation des tissus. Nous représentons, dans la figure 6.21, les coupes obliques superposant les *T.P.R.* homotopiques du cerveau et de l'os sur la segmentation des tissus. La figure 6.22 est une représentation 3D des *T.P.R.* homotopiques des tissus de la tête obtenus pour l'étiquetage optimal.

6.3.6 Conclusion

Nous avons décrit une méthode de génération de maillages tétraédriques à partir d'un volume I.R.M. segmenté. En appliquant un étiquetage et des déformations homotopiques, nous avons pu générer de façon robuste et rapide des maillages des tissus de la tête. Notre approche ne nécessite pas la formation de la frontière surfacique des objets contrairement aux approches

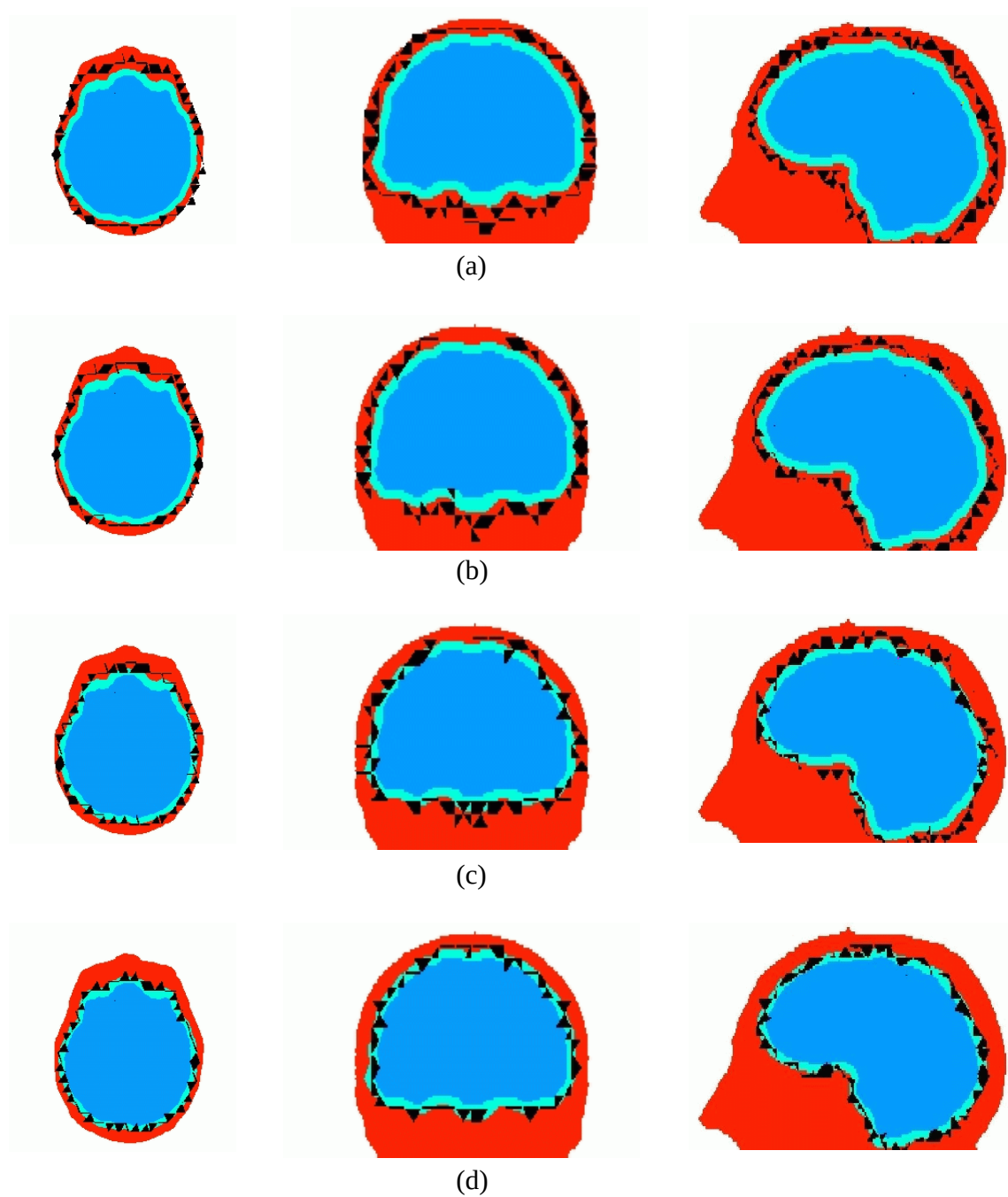


FIG. 6.17 – *Etude du paramètre μ_V pour $\mu_T = 0,8$. Superposition des tétraèdres simples du crâne (en noir) avec la segmentation.*
 (a) $\mu_V = 0,8$ (b) $\mu_V = 0,6$ (c) $\mu_V = 0,4$ (d) $\mu_V = 0,2$.

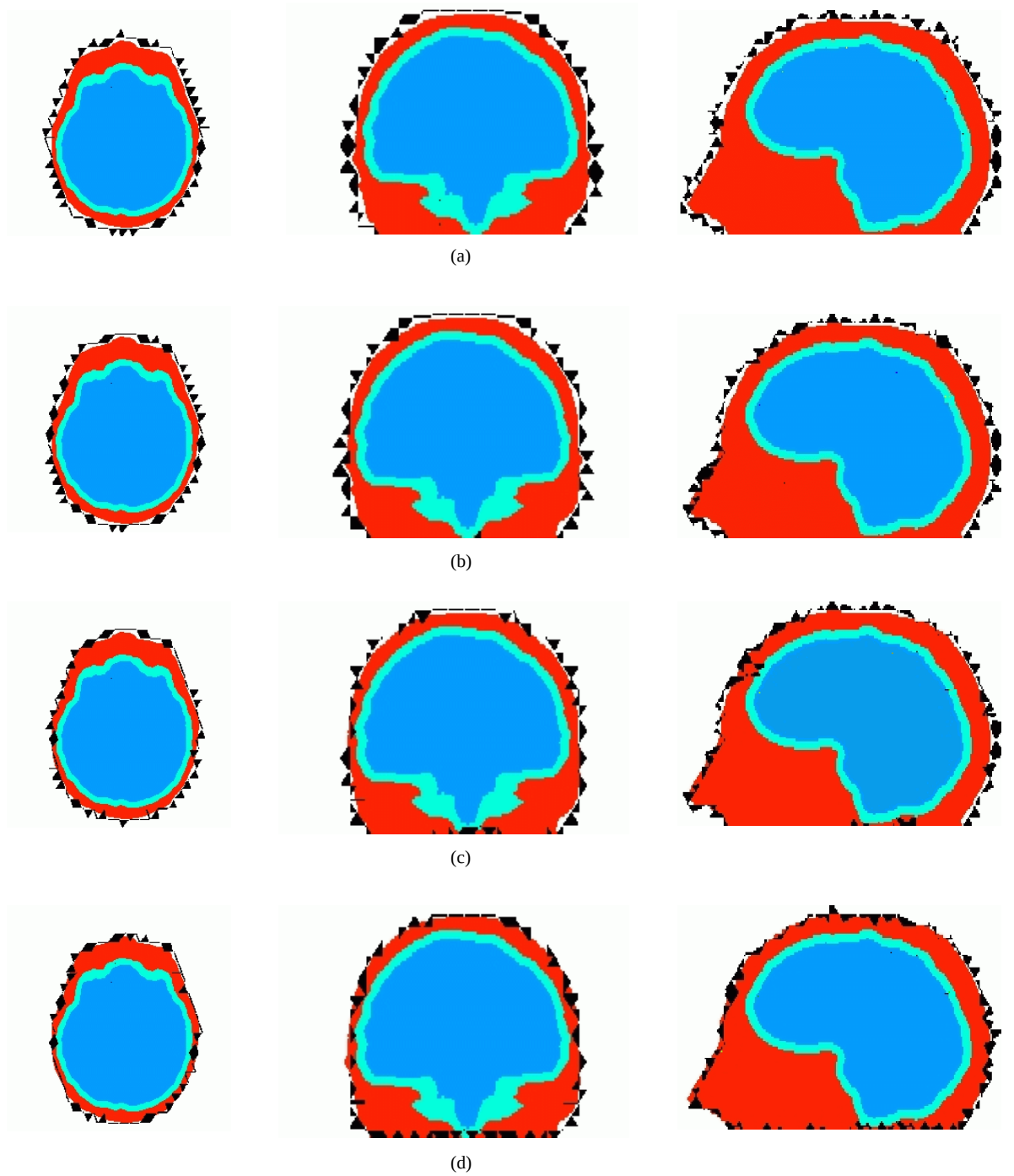


FIG. 6.18 – *Etude du paramètre μ_V pour $\mu_T = 0,8$. Superposition des tétraèdres simples de la tête (en noir) avec la segmentation.*
 (a) $\mu_V = 0,8$ (b) $\mu_V = 0,6$ (c) $\mu_V = 0,4$ (d) $\mu_V = 0,2$.

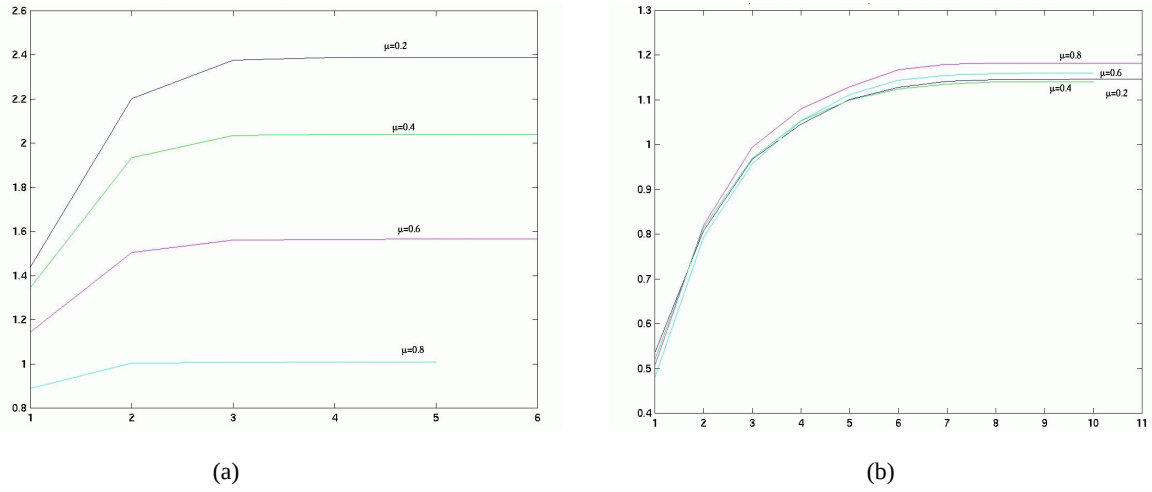


FIG. 6.19 – Etude de la proportion des tissus crâne et tête pour différentes valeurs de μ_V avec $\mu_T = 0,8$. Rapport entre le nombre de tétraèdres étiquetés par itération (en abscisses) et le nombre de tétraèdres satisfaisant la composition de tissu maximal μ_{max} (en ordonnées) . (a) Proportion du crâne (b) Proportion de la tête.

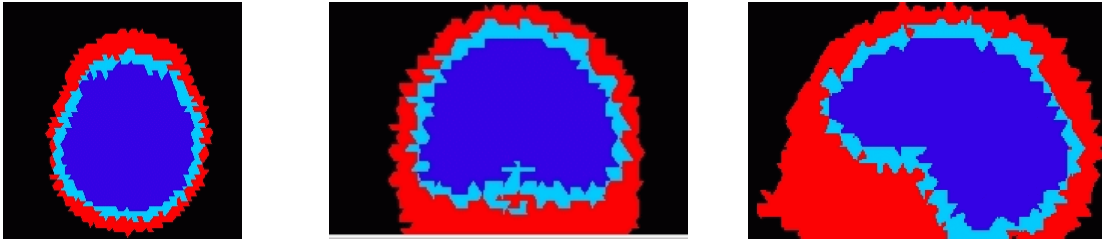


FIG. 6.20 – Etiquetage optimal ($\mu_T = 0,8$, $\mu_V = 0,6$ et μ_{max}).

actuelles [FREY-99] et évite de recalculer systématiquement la structure géométrique de la *T.P.R.* puisque celle-ci est identique à un facteur d'échelle près pour chaque I.R.M. segmentée.

Nous avons mis au point un algorithme de maillage volumique des tissus de la tête s'appuyant sur la déformation d'un objet à l'intérieur du cerveau. Notre modélisation permet d'une part de préserver la topologie sphérique du modèle initial et ainsi d'être en accord avec la topologie du cerveau et, d'autre part, assure une qualité géométrique des éléments tétraédriques. Les maillages correspondants aux autres tissus de la tête s'appuient topologiquement sur le modèle homotopique du cerveau. C'est pourquoi notre modélisation ne permet pas d'exprimer complètement la topologie de sphères imbriquées des tissus de la tête qui est celle qui est utile pour la F.E.M. Il serait donc intéressant de pouvoir établir des critères topologiques dans le

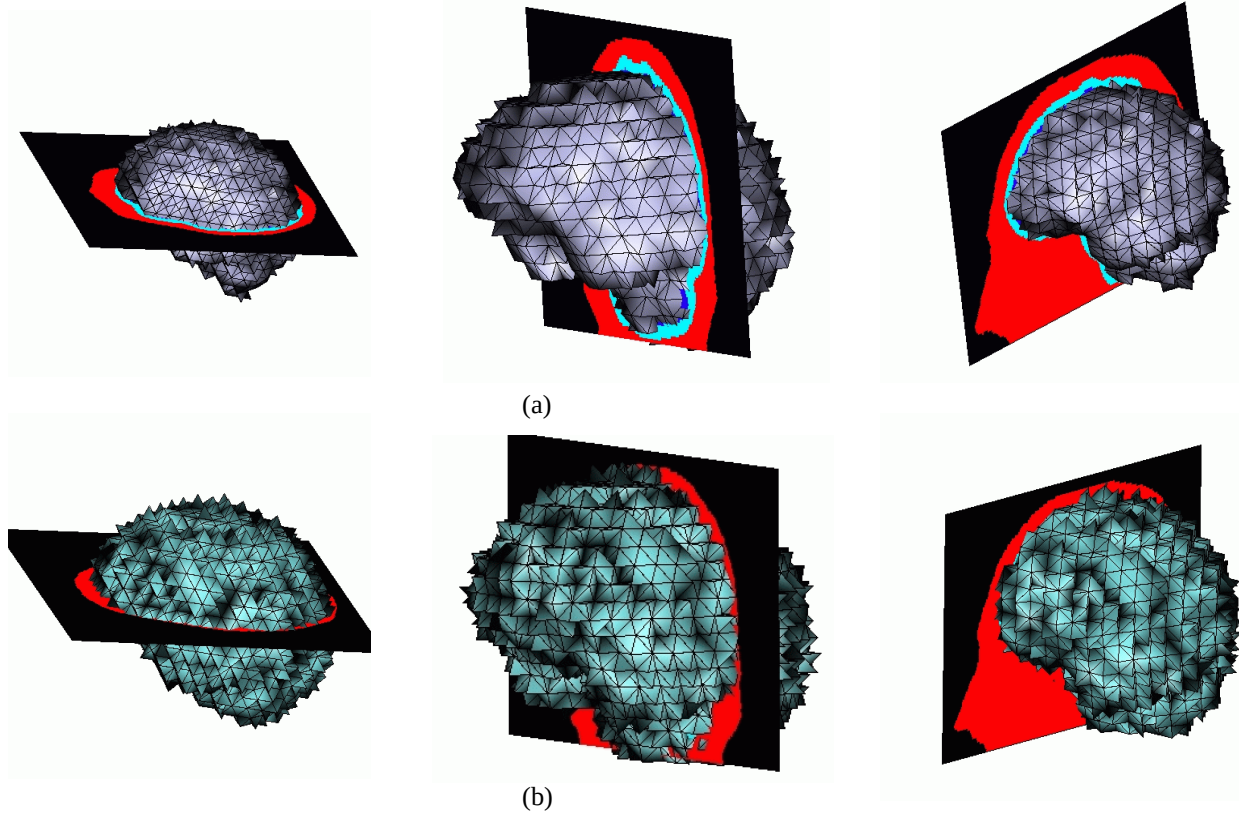


FIG. 6.21 – *Etiquetage optimal avec segmentation en coupe oblique.*
 (a) cerveau (b) crâne

cas de plusieurs objets. Ces critères multi-objets permettrait d'éviter tous paradoxes topologiques et d'exprimer totalement la topologie des tissus de la tête.

6.4 *T.P.R.* adaptées des tissus de la tête

Les différentes contraintes qui interviennent dans la réalisation d'un maillage tétraédrique adapté aux calcul des éléments finis sont de prendre d'une part en compte les épaisseurs des différentes interfaces délimitant les structures anatomiques et d'autre part d'avoir des tétraèdres assez réguliers pour assurer la convergence des méthodes de résolution. Les *T.P.R.* homotopiques des tissus de la tête décrites précédemment répondent à ces contraintes.

Néanmoins, d'autres contraintes interviennent dans la résolution du problème direct en M.E.G. et E.E.G. Premièrement nous pouvons envisager d'avoir un pas de maillage adapté en volume aux gradients du potentiel électrique ou du champ magnétique. Pour cette contrainte, il est nécessaire de

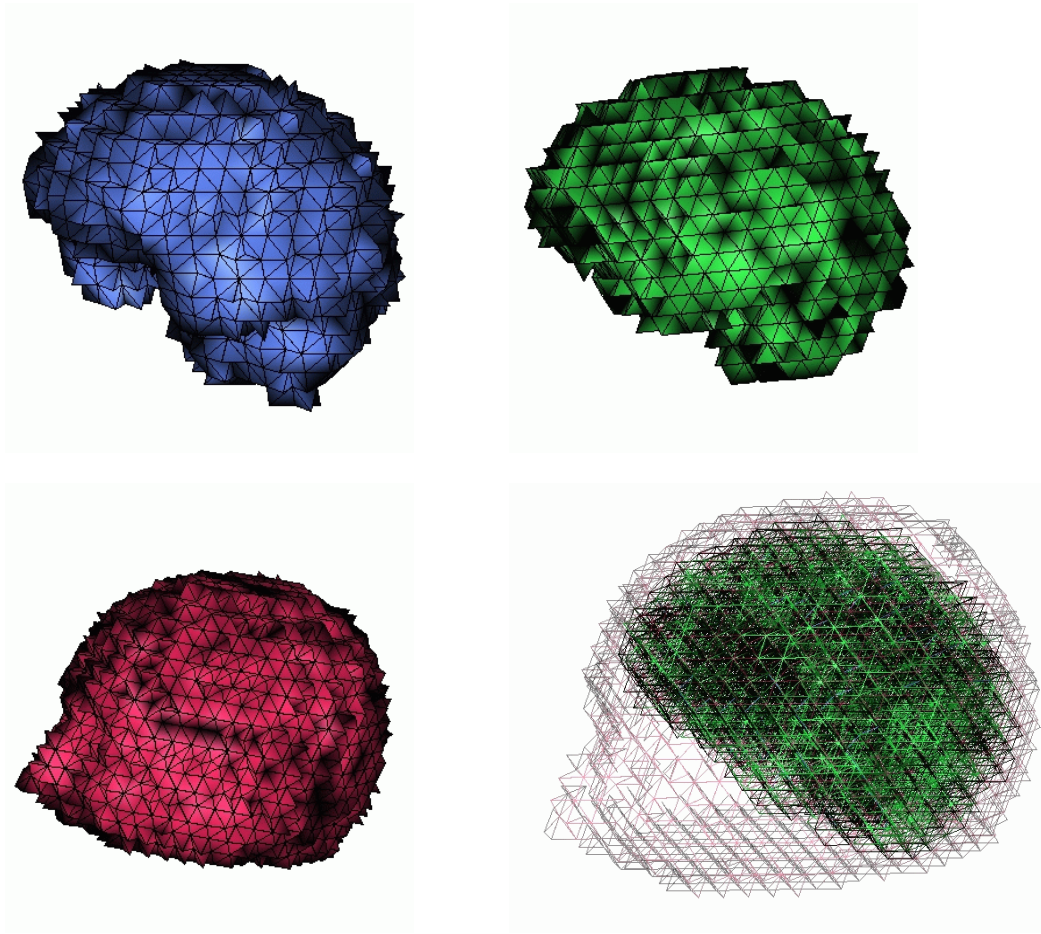


FIG. 6.22 – Une représentation en 3D d'un étiquetage homotopique ($\mu_V = 0,6$ et $\mu_T = 0,8$) d'une T.P.R. des tissus de la tête à la résolution $N_{T_h} = 98304$.

connaître la position du dipôle *a priori* et d'utiliser par exemple un estimateur d'erreur lié à l'arête d'un tétraèdre (cf. section 5.1.2) afin de déterminer les tétraèdres où l'adaptation est nécessaire. En pratique, il n'est pas envisageable d'effectuer cette adaptation de maillage pour toutes les positions de dipôles tant leur nombre est important (de l'ordre de 40000 sommets pour une représentation précise du cortex cérébral). En fait, ce genre d'adaptation peut être envisagé après une première passe de la résolution du problème inverse, ce qui permet d'avoir une première estimation de la position des dipôles actifs.

Dans notre travail, nous nous sommes plutôt intéressés à créer un maillage globalement de bonne qualité pour toutes les positions de dipôles possibles. Aussi, dans ce cadre, il existe une contrainte qui peut s'insérer dans notre démarche. Cette contrainte se traduit par la nécessité de disposer d'un maillage

suffisamment fin au niveau des interfaces afin de permettre une discrétisation correcte des contraintes physiques surfaciques du potentiel électrique (cf. Annexe 4). Pour cela, nous avons mis en œuvre notre méthode de h -adaptation par modifications locales d'une $T.P.R.$ décrite dans la section 5.2.

Dans ce type d'adaptation, la requête d'affinement est formulée aux sommets des éléments. Nous avons donc construit une requête d'affinement aux sommets en calculant la proportion de tissu d'un tétraèdre de la $T.P.R.$ et en le comparant à la proportion de tissu du tétraèdre construit avec le sommet et le milieu des arêtes du tétraèdre de la $T.P.R.$ considérée. Si la proportion maximale de tissu est différente entre les deux tétraèdres, le sommet doit subir un affinement. A partir de cette requête, nous avons étudié l'adaptation des $T.P.R.$ en prenant d'une part les tissus séparément puis ensuite regroupés. La figure 6.23 représente les $T.P.R.$ adaptés pour les tissus de la tête pris séparément. En comparant les $T.P.R.$ adaptés à la $T.P.R.$ homotopique des tissus de la tête (cf. figure 6.16), nous remarquons que les maillages adaptés suivent, plus précisément, les frontières de la segmentation des tissus (cf. figure 6.6).

Le tableau 6.7 montre que le nombre de tétraèdres créés reste raisonnable (environ 180000 tétraèdres engendrés). En effet, le nombre de tétraèdre créés est à comparer à celui obtenu lors du passage de la résolution $n = 4$ (ie. environ 100000 tétraèdres) à la résolution $n = 5$ d'une $T.P.R.$ (ie. environ 700000 tétraèdres).

objet	N_{Tetra}	N_A
cerveau	151993	309330
crâne	149174	305984
scalp	173785	333996
tissus de la tête	213179	372734

TAB. 6.7 – *Nombre de tétraèdres N_{Tetra} et d'arêtes N_A des $T.P.R.$ adaptées pour les différents objets maillés.*

Etant donné qu'une h -adaptation par modifications locales d'une $T.P.R.$ influe directement sur la distribution des longueurs d'arêtes (cf. Annexe 4), nous avons mis au point un algorithme d'énumération des arêtes (cf. algorithme 6.5) d'un maillage tétraédrique. Cet algorithme correspond, à l'extension en 3D, de celui proposé par Frey [FREY-99].

Algorithme 6.5 pseudo-code de l'énumération des arêtes d'un maillage tétraédrique

Soit $T_h = \{T, V\}$ un maillage tétraédrique avec T l'ensemble des tétraèdres de T_h et V leurs relations d'adjacence.

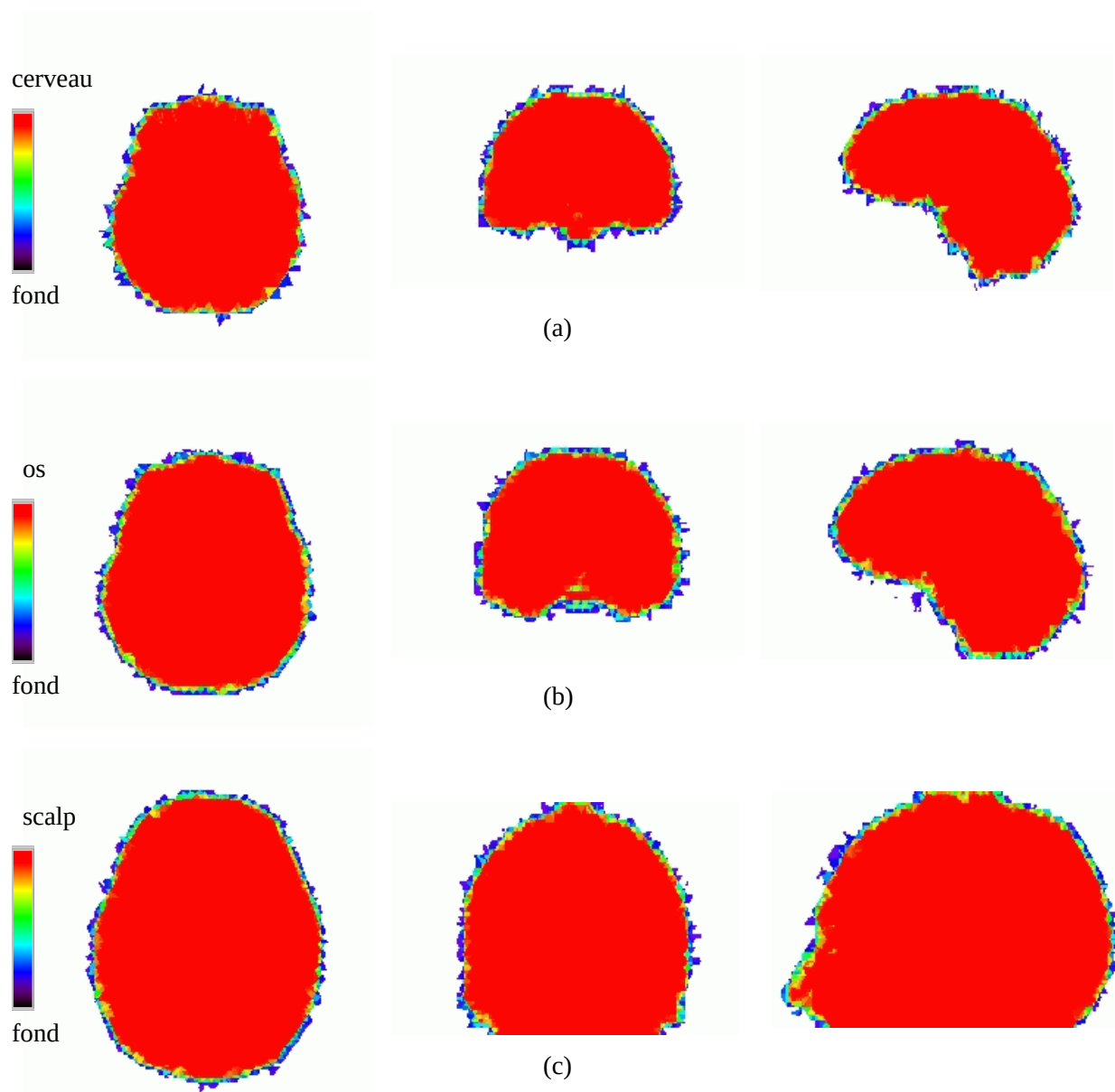


FIG. 6.23 – T.P.R ($n = 4$) adaptés d'un seul tissu. L'échelle de couleurs correspond à la proportion d'un seul tissu dans chaque tétraèdre.
(a) cerveau (b) os (c) scalp.

Soit N_{T_h} le nombre de tétraèdres de T_h

Soit $Edges$ la liste des arêtes de T_h .

Soit $Edges.Communs[j]$ la liste des tétraèdres partageant l'arête j dans T_h

Soit N_j le nombre de tétraèdres partageant l'arête j dans T_h

Soit $Edges.Processed[i][6]$ un tableau de booléen indiquant si l'une des six arêtes du tétraèdre i de T_h a déjà été traitée

initialisation:

Tous les éléments de $Edges.Processed[N_{T_h}][6]$ sont initialisés à **faux**

pour $K = 1$ à N_T

pour $j = 1$ à 6

si $Edge.Processed[K][j]$ est faux **alors**

insérer l'arête j du tétraèdre K dans la liste des arêtes $Edge$

ajouter les tétraèdres partageant l'arête j dans $Edge.Communs[j]$

pour $n = 0$ à N_j

pour $l = 1$ à 6

$Edge.Processed[Edge.Communs[j][n]][l] = \text{vrai}$

fin pour l

fin pour n

fin si

fin pour j

fin pour K

Nous pouvons remarquer que la longueur e des arêtes d'une *T.P.R.* adaptée tend, en moyenne, vers la dizaine de millimètres (cf. tableau 6.8 ainsi que les figures 6.24 et 6.25). Etant donné que l'ordre de grandeur des erreurs de localisation des sources neuronales du problème inverse en E.E.G. et M.E.G. se situe également autour du centimètre, nous pouvons donc en conclure que le niveau de résolution d'une *T.P.R.* adaptée est suffisant.

Nous noterons également que la h -adaptation par modifications locales d'une *T.P.R.* ne modifie pas excessivement la qualité globale du maillage puisque celle-ci reste de l'ordre de $0,8 \pm 0,2$ pour la qualité Q_α^{-1} (cf. tableau 6.9) et $1,3 \pm 0,5$ pour la qualité Q_β (cf. tableau 6.10). Nous observons également (cf. les histogrammes de qualité des figures 6.24 et 6.25)

en mm	$\mu(e)$	$\sigma(e)$	$\min(e)$	$\max(e)$
cerveau	9,42	2,24	5,00	11,54
crâne	10,66	2,49	5,62	12,99
scalp	10,18	2,72	5,62	12,99
tissus de la tête	9,53	2,92	5,62	12,99

TAB. 6.8 – Longueur e d'arête d'une *T.P.R.* adaptée pour les différents tissus maillés.

que la proportion d'éléments de mauvaises qualités ($\min(Q_\alpha^{-1}) = 0,40$ et $\max(Q_\beta) = 2,59$) reste relativement faible par rapport aux éléments de bonnes qualités ($\max(Q_\alpha^{-1}) = 0,86$ et $\min(Q_\beta) = 1,07$).

	$\mu(Q_\alpha^{-1})$	$\sigma(Q_\alpha^{-1})$	$\max(Q_\alpha^{-1})$	$\min(Q_\alpha^{-1})$
cerveau	0,77	0,17	0,86	0,40
crâne	0,78	0,16	0,86	0,40
scalp	0,76	0,19	0,86	0,40
tissus de la tête	0,78	0,17	0,86	0,40

TAB. 6.9 – Qualité Q_α^{-1} d'une *T.P.R.* adaptée pour les différents tissus maillés.

	$\mu(Q_\beta)$	$\sigma(Q_\beta)$	$\max(Q_\beta)$	$\min(Q_\beta)$
cerveau	1,31	0,47	2,59	1,07
crâne	1,29	0,45	2,59	1,07
scalp	1,35	0,49	2,59	1,07
tissus de la tête	1,31	0,47	2,59	1,07

TAB. 6.10 – Qualité Q_β d'une *T.P.R.* adaptée pour les différents tissus maillés.

Nous pensons que l'étiquetage homotopique d'une *T.P.R.* adaptée doit permettre de créer un maillage de qualité globale satisfaisante pour la résolution du problème direct par éléments finis. C'est pourquoi nous avons choisi d'évoquer cette approche possible de maillage adaptatif que nous n'avons fait que survoler pour l'instant, mais qui nous semble prometteuse. Il reste encore beaucoup de travail à accomplir pour étudier les différentes manières de fusionner les contraintes topologiques d'étiquetage avec les contraintes anatomiques. En effet, dans une *T.P.R.* adaptée, la dimension locale variable des tétraèdres entraîne une complexité dans la procédure d'étiquetage homotopique.

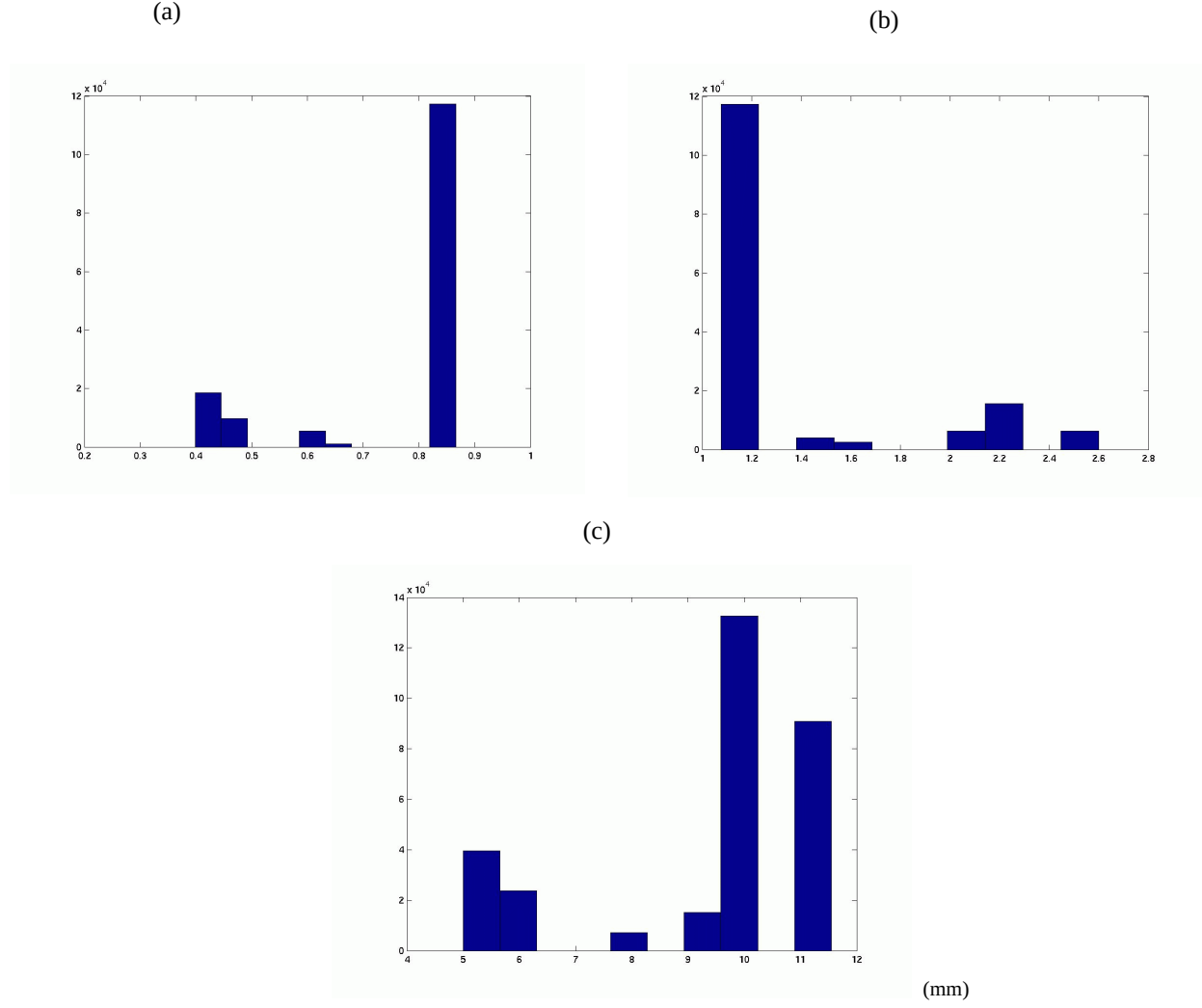


FIG. 6.24 – *Histogrammes d'une T.P.R adaptée du tissu cerveau.*
 (a) qualité Q_α^{-1} , (b) qualité Q_β , (c) longueurs d'arêtes e .

6.5 Surfaces des tissus de la tête extraites d'une *T.P.R.*

Bien que notre travail consiste principalement à mettre au point une méthode volumique de maillage des tissus de la tête, nous avons vu qu'il existe différentes techniques de calcul numérique pour la résolution du problème direct en E.E.G./M.E.G. (cf. section 1.5.2). Une d'entre elle consiste notamment à résoudre le problème direct en M.E.G. et E.E.G. par la méthode des intégrales de frontières (cf. section 1.5.2) et nécessite de disposer des triangulations des différentes couches de la tête. C'est pourquoi, nous avons tenté d'extraire des triangulations à partir de nos maillages tétraédriques des tis-

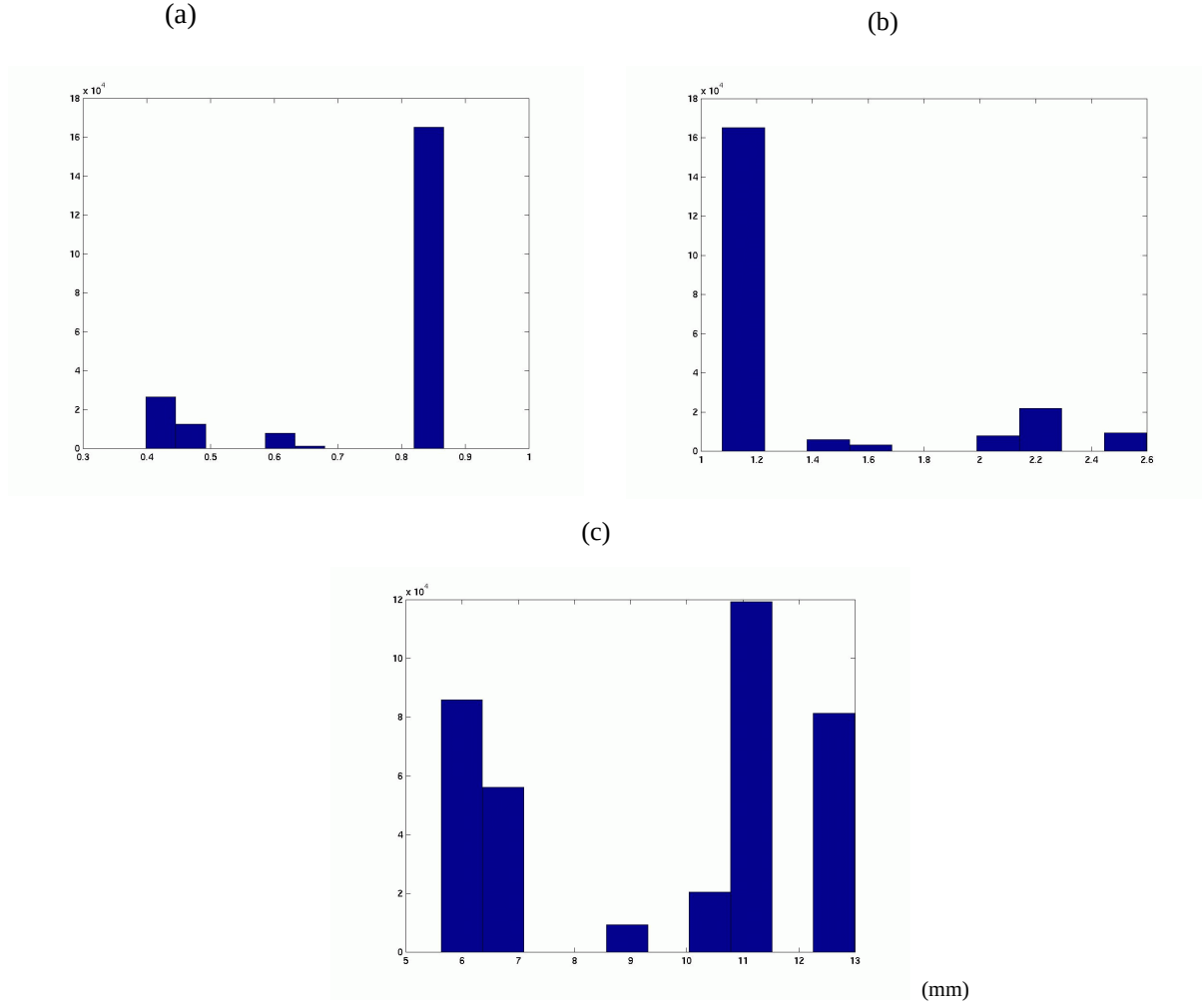


FIG. 6.25 – Histogrammes d'une T.P.R. adaptée correspondant à l'union des tissus de la tête.

(a) qualité Q_α^{-1} , (b) qualité Q_β , (c) longueurs d'arêtes e .

sus de la tête. Nous espérons ainsi confronter ultérieurement les résultats du problème direct obtenus respectivement par la méthode des éléments finis et des intégrales de frontières.

La plupart des approches actuelles gèrent les surfaces de façon indépendante en utilisant une méthode du type «marching cube» suivie d'opérateurs de simplification de maillages où la densité des éléments est liée à la courbure locale de la surface [FREY-99] considérée. Dans le cas des tissus de la tête, les surfaces sont très proches les unes des autres et l'utilisation des approches actuelles de simplification entraîne en pratique l'intersection de la surface de l'os avec celle du cerveau. Dans le cas des tissus de la tête, une méthode

de type «marching cube» engendre également des triangulations ayant plusieurs dizaines de milliers d'éléments. Or la résolution du problème direct en M.E.G./E.E.G. par la méthode des intégrales de frontières (B.E.M.) nécessite d'avoir une représentation surfacique de moins d'un millier de triangles afin d'avoir des temps de calculs raisonnables. C'est pourquoi, nous proposons dans cette section d'extraire les surfaces du scalp, de l'os et du cerveau à partir d'une $T.P.R.$ homotopique des tissus de la tête (cf. section 6.3) en évitant l'intersection des surfaces.

L'extraction d'une surface à partir d'une $T.P.R.$ homotopique consiste à parcourir la liste des tétraèdres simples d'une composante connexe tétraédrique O du maillage et détecter les faces des tétraèdres simples qui sont voisins au complémentaire $\overline{O}$ de la $T.P.R.$ (cf. section 6.3.3).

Afin de s'approcher de la vraie surface, nous procédons alors à un **Lissage par Laplacien** dans sa version relaxée (cf. section 5.3) en ne modifiant que les points P de la surface qui s'approche de la vraie surface (résolution voxélique) de O . Cela se traduit par :

$$D(((1 - w)P + wP^*)) < D(P)$$

où :

- D est une carte de distances par rapport à la vraie surface,
- w^5 est un paramètre de relaxation et,
- $P^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_j$ où les P_j sont les sommets de la boule autres que P .

La figure 6.26 à gauche présente l'extraction de surfaces non lissée des tissus de la tête à partir d'une $T.P.R.$ de résolution $n = 3$. Et la même figure à droite montre la version lissée des tissus de la tête.

Nous rappelons que pour l'os (resp. pour le scalp) la composante connexe O est égale à $O_{\text{cerveau}} \cup O_{\text{os}}$ (resp. $O_{\text{cerveau}} \cup O_{\text{os}} \cup O_{\text{scalp}}$). Un étiquetage homotopique des tissus de la tête à partir d'une $T.P.R.$ de faible résolution ($N_{T_h} = 12888$ tétraèdres) permet d'éviter topologiquement les intersections de surfaces si les différents objets O_{cerveau} , O_{os} et O_{scalp} sont considérées comme trois composantes connexes indépendantes. Malheureusement, nous considérons, dans notre procédure d'étiquetage homotopique des tissus de la tête, la réunion des composantes homotopiques déjà obtenues pour contruire l'objet suivant. C'est pourquoi, l'étiquetage d'un tétraèdre simple est également effectué en fonction de la proportion de tissu du voisinage par face du

5. [FREY-99] suggère de prendre w plus petit que 1 en 3D

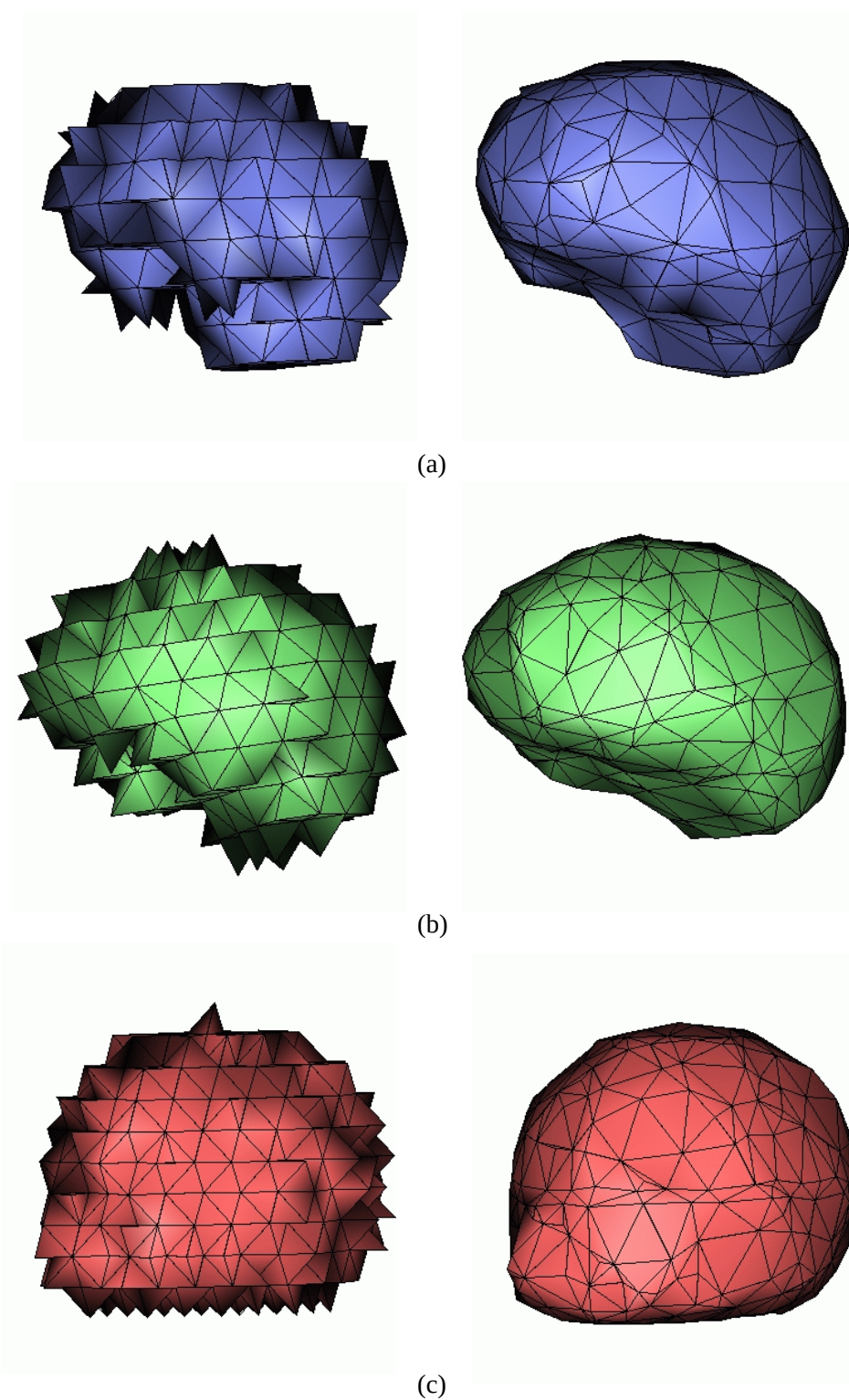


FIG. 6.26 – *Extraction des surfaces lissées et non lissées des tissus de la tête à partir d'une T.P.R. de faible résolution ($n = 3$).*
(a) cerveau (b) crâne (c) tête.

tétraèdre simple considéré. Cette procédure crée artificiellement une « épaisseur tétraédrique » pour chaque tissu de la tête (cf. section précédente). Cela évite, en pratique, d’avoir des endroits où on ne rajoute jamais de tétraèdre ce qui aurait pour conséquence de créer des trous dans les surfaces extraites. Une mise en place de critères topologiques dans le cas de plusieurs d’objets permettrait de s’affranchir de cette ruse car la création d’une « épaisseur tétraédrique » serait topologiquement acquise par un modèle topologique multi-objets.

Nous évitons ainsi les intersections de surfaces lors de l’extraction des iso-surfaces des différents tissus de la tête à partir d’une $T.P.R.$ homotopique des tissus de la tête. En théorie, nous ne conservons pas cette propriété de non-intersection lorsque nous appliquons un lissage par Laplacien. Néanmoins, nous n’avons pas observé d’intersections sur la dizaine de maillages traités à ce jour.

La figure 6.27 représente l’extraction des surfaces des tissus de la tête non lissée et lissée suivant la méthode du Laplacien précédemment décrite. Le nombre de triangles obtenu pour chaque tissu à la résolution de la $T.P.R.$ $n = 3$ est donné dans le tableau 6.11. A partir des surfaces extraites d’une $T.P.R.$ lissées, il a alors été possible de calculer le potentiel électrique par la méthode $B.E.M.$ (cf. figure 6.28). Ce résultat montre que les surfaces extraites d’une $T.P.R.$ après lissage laplacien constitue un support de calcul adapté pour la résolution du problème direct par la $B.E.M.$ Des études supplémentaires, concernant le potentiel électrique ainsi que le conditionnement de la matrice de gain obtenus (cf. section 1.5), sont nécessaires afin de valider nos résultats.

structure:	$N_{triangles}$
cerveau	506
os	590
tête	820

TAB. 6.11 – *Nombre de triangles obtenus pour chaque tissu de la tête à la résolution tétraédrique $N_{T_h} = 12888$.*

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une méthode originale pour modéliser et mailler les tissus de la tête à partir d’une I.R.M. La construction de notre modèle volumique se décompose en trois parties : le recalage des électrodes $M.E.G./E.E.G.$ sur l’image $I.R.M.$, la segmentation des tissus de la tête et le maillage volumique de ces structures.

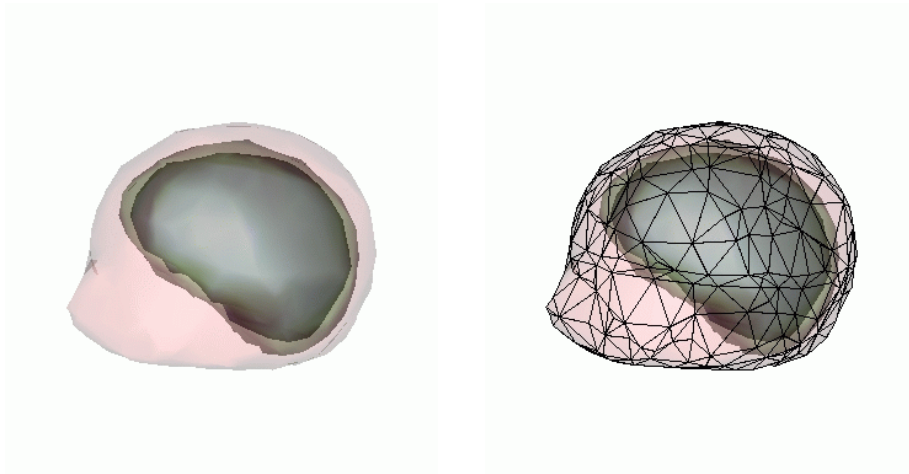


FIG. 6.27 – Surfaces des tissus de la tête extraites d’une T.P.R. ($n = 3$) après lissage laplacien.

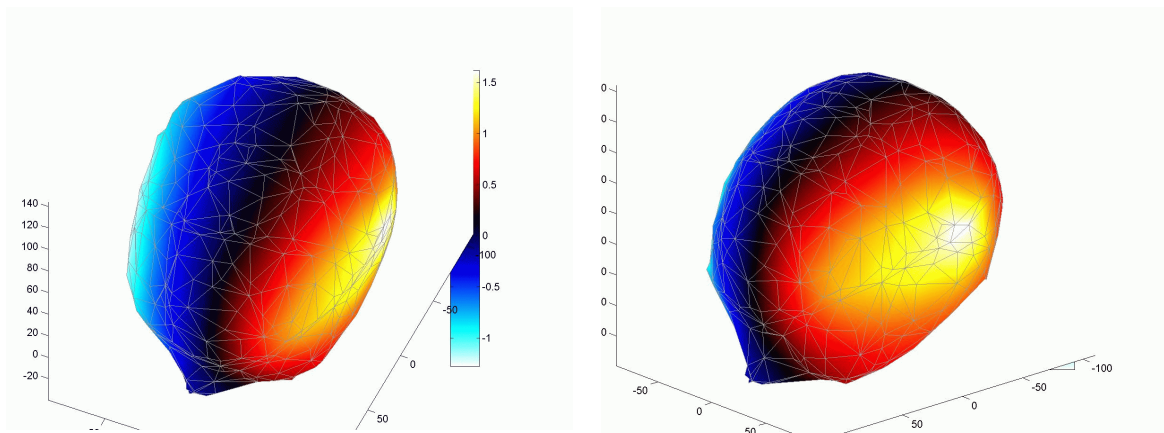


FIG. 6.28 – Calcul du potentiel électrique V par la méthode B.E.M.[HAMA-89]

La précision de notre méthode de recalage a montré une excellente reproductibilité des résultats ainsi qu’une erreur de recalage moyenne de 2 mm, inférieure aux incertitudes de localisations généralement rapportées dans la résolution du problème inverse en M.E.G./E.E.G.

Notre méthode de maillage volumique s’appuie sur une décomposition tétraédrique presque régulière (T.P.R.) à partir d’une segmentation des tissus de la tête. Nous avons proposé une méthodologie utilisant des techniques existantes de segmentation par morphologie mathématique.

L'algorithme d'étiquetage volumique d'une *T.P.R.* que nous avons introduit utilise deux critères de guidage pour contraindre l'étiquetage à suivre la segmentation des tissus de la tête. Ces déformations reposent sur un critère topologique ainsi que sur des paramètres liés à la composition de tissu d'un tétraèdre. Une étude détaillée de ces paramètres (cf. section 6.3) a permis de déterminer leurs valeurs optimales et leurs comportements par rapport à la convergence de l'algorithme.

L'amélioration de la régularité géométrique des surfaces doit permettre de faciliter l'analyse qualitative et quantitative des résultats ainsi que la comparaison entre les conditionnements des matrices de gain (du potentiel et du champ magnétique) obtenus, par la méthode *B.E.M.* et *F.E.M.* respectivement sur des maillages surfaciques et volumiques. Nous avons exploré plusieurs pistes pour adapter les surfaces des tissus de la tête : une méthode volumique (cf. section 6.4) et une méthode surfacique (cf. section 6.5). Dans le cas de l'adaptation volumique, nous avons montré qu'il était possible, en utilisant notre méthode d'adaptation volumique, d'obtenir un maillage volumique de l'ordre de la dizaine de millimètres ce qui est en accord avec la résolution spatiale du problème inverse en *M.E.G.* et *E.E.G.*

L'utilisation d'un modèle tétraédrique homotopiquement déformable pour mailler les tissus de la tête nous a permis d'atteindre deux objectifs que nous étions fixés : la création d'un modèle volumique et surfacique des tissus de la tête pour le calcul du problème direct en *M.E.G.* et *E.E.G.* L'irrégularité des surfaces obtenues nécessite l'emploi d'une méthode de lissage volumique ou surfacique (cf. section 6.5) couplée à une méthode d'adaptation volumique par modifications locales (cf. section 6.4).

Discussion et perspectives

Dans ce travail de thèse, nous avons construit une méthode de maillage des tissus de la tête pour la résolution du problème direct en *E.E.G.* et *M.E.G.* s'appuyant sur un modèle permettant de représenter et de déformer homotopiquement des objets composés de tétraèdres conformes. L'utilisation d'un modèle homotopique tétraédrique pour mailler les tissus de la tête est motivée par le besoin de prendre en compte la topologie et la géométrie des tissus de la tête pour la résolution par la *F.E.M.* du problème direct.

Dans les méthodes aux éléments finis, la qualité des tétraèdres influence la précision du calcul numérique. Des tétraèdres avec un mauvais rapport de forme produisent des matrices mal conditionnées. Nous avons alors décidé d'étudier les propriétés géométriques des tétraédrisations presque régulières (*T.P.R.*) de l'espace et nous avons ainsi montré qu'il était possible de construire des maillages tétraédriques où tous les tétraèdres ont les mêmes connexités et ont des arêtes presque égales proches de celles du tétraèdre régulier.

Pour construire un modèle homotopiquement déformable, nous avons fourni une nouvelle caractérisation des déformations élémentaires d'une scène représentée par un maillage tétraédrique. Pour cela, nous avons choisi de construire notre raisonnement théorique en nous appuyant principalement sur la notion d'élément *simple* d'un maillage. Ainsi, nous avons introduit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tétraèdre d'un maillage conforme quelconque soit simple. Nous avons ainsi étendu la notion d'éléments simples par rapport aux trames discrètes classiques (pixels et voxels) en appliquant des résultats issus de la théorie de l'homologie au cas des maillages tétraédriques conformes. Notre modèle tétraédrique homotopique peut être utilisé pour représenter un objet géométriquement et topologiquement complexe et il serait intéressant de l'étendre afin qu'il puisse permettre de modéliser topologiquement des scènes composées d'un nombre quelconque d'objets sans être limité par des paradoxes topologiques [BERT-99], [COIN-01].

Nous avons mis au point un algorithme de maillage volumique des tissus

de la tête. Cet algorithme s'appuie sur une décomposition récursive tétraédrique presque régulière (*T.P.R.*) à partir d'une segmentation automatique des principaux tissus dans une *I.R.M.* Puis, nous appliquons un étiquetage volumique de la *T.P.R.* guidé par un critère topologique ainsi que sur des paramètres liés à la composition de tissu d'un tétraèdre. Notre algorithme repose sur la déformation d'un objet à l'intérieur du cerveau. Notre modélisation permet d'une part de préserver la topologie sphérique du modèle initial et ainsi d'être en accord avec la topologie du cerveau et, d'autre part, elle assure une qualité géométrique des éléments tétraédriques. Les maillages correspondant aux autres tissus de la tête s'appuient alors topologiquement sur le modèle homotopique du cerveau. Par conséquent, notre modélisation ne permet pas d'exprimer complètement la topologie de sphères imbriquées qui est la vraie topologie des tissus de la tête.

A partir de nos *T.P.R.* étiquetées, nous sommes capables d'extraire les surfaces des tissus de la tête en évitant l'intersection des surfaces. De plus, les surfaces extraites d'une *T.P.R.* après lissage laplacien constituent un support de calcul adapté pour la résolution du problème direct par la *B.E.M.* Néanmoins, des études supplémentaires sont nécessaires afin de valider nos résultats. Notamment, il serait intéressant de quantifier l'approximation surfacique entre nos maillages et la segmentation, et d'étudier le conditionnement des matrices de gain obtenues par la méthode *B.E.M.*

Dans le cadre des problèmes direct et inverse en *E.E.G.* et en *M.E.G.*, la méthode de maillage volumique que nous avons présentée possède un double avantage. Elle permet, d'une part, de construire facilement une tétraédrisation des tissus de la tête et, d'autre part, une triangulation des différentes interfaces. Ces modélisations polyédriques peuvent être utilisées pour la résolution du problème direct en permettant d'obtenir une tétraédrisation plus régulière et moins dense que les approches actuelles. D'autre part, elles permettent d'injecter dans la régularisation du problème inverse des connaissances concernant la physique de la propagation électromagnétique des neurones en adaptant géométriquement une *T.P.R.* homotopique des tissus de la tête.

Afin de vérifier la qualité des résultats fournis par les algorithmes de reconstruction en les confrontant au contexte anatomique et d'interpréter sur le plan spatial et temporel les phénomènes étudiés dans la résolution du problème direct, nous avons mis au point une méthode de recalage des électrodes *M.E.G./E.E.G.* sur l'image *I.R.M.* Notre méthode de recalage a montré une erreur de recalage moyenne de l'ordre de 2 mm inférieure aux incertitudes de localisation généralement rapportées. La précision et la reproductibilité des résultats autorise une fusion des données anatomo-fonctionnelle très précise.

Cette fusion permet une représentation des propriétés spatio-temporelles des résultats de localisation et donc une interprétation efficace. Enfin, la précision obtenue autorise l'emploi de contraintes anatomiques dans les algorithmes de localisation sans pour autant introduire des erreurs importantes.

Afin d'étendre des techniques d'adaptation de maillages à des *T.P.R.*, nous avons présenté un estimateur d'erreur qui permet de répartir sur un maillage tétraédrique de manière homogène l'erreur liée à une connaissance a priori de la solution du problème direct en *E.E.G.* A partir d'un modèle sphérique de la tête, nous avons montré que l'erreur de calcul était liée à l'arête d'un tétraèdre. Pour aller plus loin, il serait nécessaire d'étudier le comportement de cet estimateur sur des *T.P.R.* des tissus de la tête et de vérifier si cet estimateur permet d'améliorer la modélisation de la propagation électromagnétique des neurones à travers les tissus de la tête. Nous avons mis en œuvre une méthode de *h*-adaptation par modifications locales d'une *T.P.R.* Nous avons montré qu'il était possible, en utilisant notre méthode d'adaptation volumique, d'obtenir un maillage volumique de l'ordre de la dizaine de millimètres ce qui est en accord avec la résolution spatiale du problème inverse en *M.E.G.* et *E.E.G.* L'approche de maillage adaptatif que nous avons ébauchée nous semble donc prometteuse.

En conclusion, nous espérons que l'approche que nous utilisons aura contribué au rapprochement entre le domaine de la géométrie discrète et celui du calcul numérique par éléments finis. Nous souhaitons que ce travail servira dans les méthodes de localisation de sources neuronales et puisse aider à la détection et à la localisation des foyers épileptiques à partir de l'*E.E.G.* de surface ou de l'enregistrement *M.E.G.*

Annexes

A.1 Les 24 matrices de transformation:

Soit $T_1 = \left\{ p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_4 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix} \right\}$ alors les 24 matrices symétriques⁶ du terme de droite ($F^T P^T P F$) de l'équation 3.3 pour le tétraèdre T_1 sont :

$$p_1 = (0, 0, 0) \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$$1. F = \{e_2, e_3, e_4\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_2^2 + y_2^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \{e_2, e_4, e_3\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_1^2 + y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$3. F = \{e_3, e_2, e_4\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 + y_2^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$4. F = \{e_4, e_2, e_3\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} x_2^2 + y_2^2 + z^2 & x_2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 + y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$5. F = \{e_4, e_3, e_2\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} x_2^2 + y_2^2 + z^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_2 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 + y_2^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$6. F = \{e_3, e_4, e_2\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z^2 & x_2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ 1 & x_1 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{bmatrix}$$

6. seule la partie triangulaire supérieure est représentée, l'autre étant symétrique

$$p_2 = (1, 0, 0) \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & x_1 - 1 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$$1. F = \{e_1, e_3, e_4\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} 1 & 1 - x_1 & 1 - x_2 \\ (1 - x_1)^2 + y_1^2 & (1 - x_2)(1 - x_1) + y_1 y_2 & (1 - x_2)^2 + y_2^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \{e_1, e_4, e_3\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} 1 & 1 - x_2 & 1 - x_1 \\ (1 - x_2)^2 + y_2^2 + z^2 & (1 - x_2)(1 - x_1) + y_1 y_2 & (1 - x_1)^2 + y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$3. F = \{e_3, e_1, e_4\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (1 - x_1)^2 + y_1^2 & 1 - x_1 & (1 - x_1)(1 - x_2) + y_1 y_2 \\ 1 & 1 - x_2 & (1 - x_2)^2 + y_2^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$4. F = \{e_4, e_1, e_3\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (1 - x_2)^2 + y_2^2 + z^2 & 1 - x_2 & (1 - x_1)(1 - x_2) + y_1 y_2 \\ 1 & 1 - x_1 & (1 - x_1)^2 + y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$5. F = \{e_4, e_3, e_1\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (1 - x_2)^2 + y_2^2 + z^2 & (1 - x_1)(1 - x_2) + y_1 y_2 & 1 - x_2 \\ (1 - x_1)^2 + y_1^2 & 1 - x_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6. F = \{e_3, e_4, e_1\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (1 - x_1)^2 + y_1^2 & (1 - x_1)(1 - x_2) + y_1 y_2 & 1 - x_1 \\ (1 - x_2)^2 + y_2^2 + z^2 & 1 - x_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = (x_1, y_1, 0) \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -x_1 & 1 - x_1 & 0 & x_2 - x_1 \\ -y_1 & -y_1 & 0 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1. F = \{e_1, e_2, e_4\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1(x_1 - 1) + y_1^2 & x_1(x_1 - x_2) - y_1(y_2 - y_1) \\ (x_1 - 1)^2 + y_1^2 & (1 - x_1)(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \{e_1, e_4, e_2\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1(x_1 - x_2) - y_1(y_2 - y_1) & x_1(x_1 - 1) + y_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2 & (1 - x_1)(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1) & (x_1 - 1)^2 + y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$3. F = \{e_2, e_1, e_4\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (x_1 - 1)^2 + y_1^2 & x_1(x_1 - 1) + y_1^2 & (1 - x_1)(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1) \\ & x_1^2 + y_1^2 & x_1(x_1 - x_2) - y_1(y_2 - y_1) \\ & & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$4. F = \{e_4, e_1, e_2\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2 & x_1(x_1 - x_2) - y_1(y_2 - y_1) & (1 - x_1)(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1) \\ & x_1^2 + y_1^2 & x_1(x_1 - 1) + y_1^2 \\ & & (x_1 - 1)^2 + y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$5. F = \{e_4, e_2, e_1\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2 & (1 - x_1)(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1) & x_1(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1) \\ & (x_1 - 1)^2 + y_1^2 & x_1(x_1 - 1) + y_1^2 \\ & & x_1^2 + y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$6. F = \{e_2, e_4, e_1\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (x_1 - 1)^2 + y_1^2 & (1 - x_1)(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1) & x_1(x_1 - 1) + y_1^2 \\ & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2 & x_1(x_1 - x_2) - y_1(y_2 - y_1) \\ & & x_1^2 + y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$p_4 = (x_2, y_2, z) \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -x_2 & 1 - x_2 & x_1 - x_2 & 0 \\ -y_2 & -y_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ -z & -z & -z & 0 \end{bmatrix}$$

$$1. F = \{e_1, e_2, e_3\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} x_2^2 + y_2^2 + z^2 & x_2(x_2 - 1) + y_2^2 + z^2 & x_2(x_2 - x_1) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 \\ & (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 & (1 - x_2)(x_1 - x_2) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 \\ & & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \{e_1, e_3, e_2\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} x_2^2 + y_2^2 + z^2 & x_2(x_2 - 1) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 & x_2(x_2 - 1) + y_2^2 + z^2 \\ & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z^2 & (1 - x_2)(x_1 - x_2) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 \\ & & (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

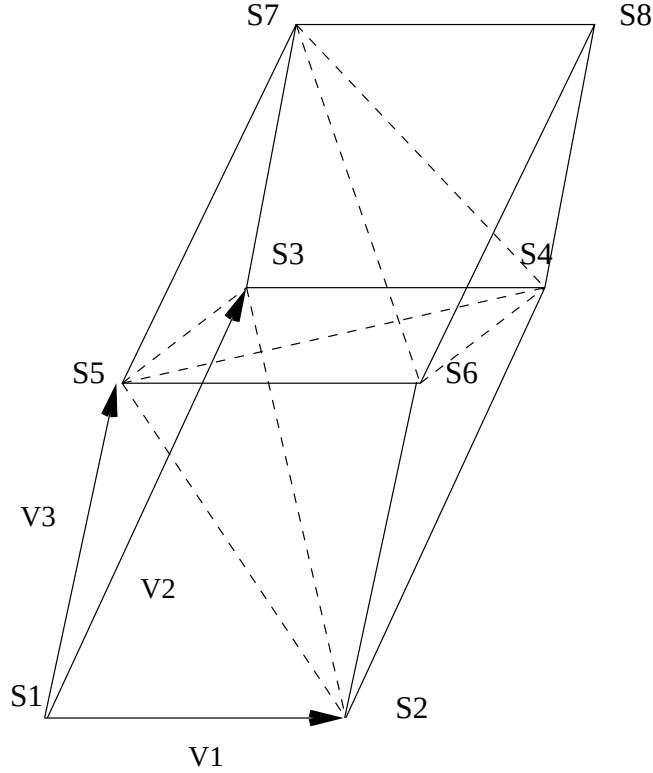
$$3. F = \{e_2, e_1, e_3\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 & x_2(x_2 - 1) + y_2^2 + z^2 & (1 - x_2)(x_1 - x_2) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 \\ & x_2^2 + y_2^2 + z^2 & x_2(x_2 - x_1) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 \\ & & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$4. F = \{e_3, e_1, e_2\} \Rightarrow F^T P^T P F = \begin{bmatrix} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z^2 & x_2(x_2 - 1) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 & (1 - x_2)(x_1 - x_2) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 \\ & x_2^2 + y_2^2 + z^2 & x_2(x_2 - x_1) + y_2^2 + z^2 \\ & & (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad F = \{e_3, e_2, e_1\} &\Rightarrow F^T P^T P F = \\
 &\begin{bmatrix} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z^2 & (1 - x_2)(x_1 - x_2) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 & x_2(x_2 - x_1) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 \\ & (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 & x_2(x_2 - x_1) + y_2^2 + z^2 \\ & & x_2^2 + y_2^2 + z^2 \end{bmatrix} \\
 6. \quad F = \{e_2, e_3, e_1\} &\Rightarrow F^T P^T P F = \\
 &\begin{bmatrix} (x_2 - 1)^2 + y_2^2 + z^2 & (1 - x_2)(x_1 - x_2) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 & x_2(x_2 - 1) + y_2^2 + z^2 \\ & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2) + z^2 & x_2(x_2 - x_1) + y_2(y_2 - y_1) + z^2 \\ & & x_2^2 + y_2^2 + z^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A.2 Propriété de connexité d'une $T.P.R.$

Partons du parallélépipède P formé de six tétraèdres invariants par subdivision nous avons alors :



Tétraèdre (orienté)	Sommet
T_0	$[\vec{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$
T_1	$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)]$
T_2	$[\vec{v}_1, \vec{v}_3, (\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)]$
T_3	$[\vec{v}_2, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), \vec{v}_3]$
T_4	$[(\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), \vec{v}_3]$
T_5	$[(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$

En étudiant le 26-voisinage classique défini sur une trame parallélépipé-

dique de P , nous comptons alors le nombre de tétraèdres à l'intérieur de chaque parallépipède voisin de P ayant un sommet (connexité par sommet), deux sommets (connexité par arête), ou trois sommets (connexité par face) commun(s) à T_0 . De façon analogue, nous comptons le nombre de tétraèdres commun au sommet $\vec{0}$ de T_0 .

Soit T_0 le tétraèdre orienté ayant les sommets $(0, v_1, v_2, v_3)$. Nous notons $T_i \vec{x}$ le tétraèdre T_i translaté du vecteur $\vec{x}$ et considérons le 26-voisinage construit sur les vecteurs (v_1, v_2, v_3) .

Nous effectuons pour chaque tétraèdre T_i appartenant à P , une translation de $\vec{x}$ correspondant au 26-voisinage de P . A l'issue nous obtenons un tétraèdre $T_i \vec{x}$ appartenant au parallépipède P translaté du vecteur $\vec{x}$. Par conséquent, chaque tétraèdre $T_i \vec{x}$ peut être voisin à T_0 par aucun sommet, le sommet 0 de T_0 , un sommet, deux sommets ou trois sommets. Ainsi, les tableaux de cette Annexe A.2 énumèrent, pour chaque déplacement $\vec{x}$, les tétraèdres $T_i \vec{x}$ du parallépipède P translaté du vecteur $\vec{x}$ qui sont connexes (noté avec un o dans les colonnes des tableaux) à T_0 par le sommet O (connexité de l'origine notée 0), un sommet (connexité par sommet notée S), deux sommets (connexité par arête notée A) ou trois sommets (connexité par face notée F).

En résumé, lorsque nous effectuons la somme de tous les connexités par :

1. sommet, nous obtenons 70 tétraèdres adjacents à T_0
2. arête, nous obtenons 18 tétraèdres adjacents à T_0
3. face, nous obtenons 4 tétraèdres adjacents à T_0
4. à l'origine, nous obtenons 24 tétraèdres adjacents au sommet 0 de T_0

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$\vec{0}$	$T_0 \vec{0} = T_0$	<i>o</i>			
	$T_1 \vec{0} = T_1$		<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
	$T_2 \vec{0} = T_2$		<i>o</i>	<i>o</i>	
	$T_3 \vec{0} = T_3$		<i>o</i>	<i>o</i>	
	$T_4 \vec{0} = T_4$		<i>o</i>		
	$T_5 \vec{0} = T_5$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$\vec{v}_1$	$[\vec{v}_1, 2\vec{v}_1, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[2\vec{v}_1, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				
	$[2\vec{v}_1, (\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (2\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2)]$				
	$[(\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3)]$				
	$[(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (2\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3)]$				
	$[(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (2\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$\vec{v}_2$	$[\vec{v}_2, (\vec{v}_2 + \vec{v}_1), 2\vec{v}_2, (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_2 + \vec{v}_1), 2\vec{v}_2, (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_3)]$				
	$[(\vec{v}_2 + \vec{v}_1), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2)]$				
	$[(2\vec{v}_2), (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2), (2\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				
	$[(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2), (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_3), (2\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				
	$[(2\vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2), (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_3), (2\vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$\vec{v}_3$	$[\vec{v}_3, (\vec{v}_3 + \vec{v}_1), (\vec{v}_3 + \vec{v}_2), 2\vec{v}_3]$		<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_3 + \vec{v}_1), (\vec{v}_3 + \vec{v}_2), 2\vec{v}_3, (\vec{v}_3 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2)]$				
	$[(\vec{v}_3 + \vec{v}_1), 2\vec{v}_3, (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_3 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2)]$				
	$[(\vec{v}_3 + \vec{v}_2), (\vec{v}_3 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), 2\vec{v}_3]$				
	$[(\vec{v}_3 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), 2\vec{v}_3]$				
	$[(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_3 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)]$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_1$	$[-\vec{v}_1, \vec{0}, (\vec{v}_2 - \vec{v}_1), (\vec{v}_3 - \vec{v}_1)]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[\vec{0}, (\vec{v}_2 - \vec{v}_1), (\vec{v}_3 - \vec{v}_1), \vec{v}_2]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	
	$[\vec{0}, (\vec{v}_3 - \vec{v}_1), \vec{v}_3, \vec{v}_2]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
	$[(\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \vec{v}_2, (\vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_1), (\vec{v}_3 - \vec{v}_1)]$		<i>o</i>		
	$[\vec{v}_2, \vec{v}_3, (\vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_1), (\vec{v}_3 - \vec{v}_1)]$		<i>o</i>	<i>o</i>	
	$[(\vec{v}_2 + \vec{v}_3), \vec{v}_2, \vec{v}_3, (\vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_1)]$		<i>o</i>	<i>o</i>	

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_2$	$[-\vec{v}_2, (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \vec{0}, (\vec{v}_3 - \vec{v}_2)]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \vec{0}, (\vec{v}_3 - \vec{v}_2), \vec{v}_1]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	
	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2), (\vec{v}_3 - \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3 - \vec{v}_2), \vec{v}_1]$		<i>o</i>		
	$[\vec{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_3, (\vec{v}_3 - \vec{v}_2)]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
	$[\vec{v}_1, (\vec{v}_1 + \vec{v}_3 - \vec{v}_2), \vec{v}_3, (\vec{v}_3 - \vec{v}_2)]$		<i>o</i>	<i>o</i>	
	$[(\vec{v}_1 + \vec{v}_3), \vec{v}_1, (\vec{v}_1 + \vec{v}_3 - \vec{v}_2), \vec{v}_3]$		<i>o</i>	<i>o</i>	

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_3$	$[-\vec{v}_3, (\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (\vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{0}]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (\vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{0}, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_3), \vec{0}, \vec{v}_1, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	
	$[(\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{v}_2, \vec{0}]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	
	$[(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{0}]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
	$[(\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{v}_1, \vec{v}_2]$		<i>o</i>	<i>o</i>	

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$\vec{v}_1 - \vec{v}_2$	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \vec{v}_1, (\vec{v}_3 + \vec{v}_1 - \vec{v}_2)]$		<i>o</i>		
	$[(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \vec{v}_1, (\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_1]$		<i>o</i>		
	$[(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_1]$				
	$[\vec{v}_1, 2\vec{v}_1, (\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[2\vec{v}_1, (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				
	$[(2\vec{v}_1 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_1, (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3)]$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_1 + \vec{v}_2$	$[(-\vec{v}_1 + \vec{v}_2), \vec{v}_2, (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[\vec{v}_2, (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_2]$		<i>o</i>		
	$[\vec{v}_2, (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_2]$		<i>o</i>		
	$[(-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2), 2\vec{v}_2, (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				
	$[2\vec{v}_2, (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				
	$[(2\vec{v}_2 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_2, (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_1 - \vec{v}_2$	$[(-\vec{v}_1 - \vec{v}_2), -\vec{v}_2, -\vec{v}_1, (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$				
	$[-\vec{v}_2, -\vec{v}_1, (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3), \vec{0}]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[-\vec{v}_2, (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_2 + \vec{v}_3), \vec{0}]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[-\vec{v}_1, \vec{0}, (-\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[\vec{0}, (-\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[\vec{v}_3, \vec{0}, (-\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_3)]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	

A.2 Propriété de connexité d'une T.P.R.

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$\vec{v}_1 - \vec{v}_3$	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_3), -\vec{v}_3, (\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_2), \vec{v}_1]$		<i>o</i>		
	$[-\vec{v}_3, (\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_2), \vec{v}_1, (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(2\vec{v}_1 - \vec{v}_3), \vec{v}_1, 2\vec{v}_1, (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_2), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2), \vec{v}_1]$		<i>o</i>		
	$[(2\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_2), 2\vec{v}_1, (\vec{v}_1 + \vec{v}_3), \vec{v}_1]$		<i>o</i>		
	$[(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3), -\vec{v}_1, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)]$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_1 + \vec{v}_3$	$[(-\vec{v}_1 + \vec{v}_3), \vec{v}_3, (-\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_2), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[\vec{v}_1, (-\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_2), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[\vec{v}_3, (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3), 2\vec{v}_3, (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(-\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_2), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3 + \vec{v}_2), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3)]$				
	$[(\vec{v}_2 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_3, (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3)]$				
	$[(\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_3, (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)]$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_1 - \vec{v}_3$	$[(-\vec{v}_1 - \vec{v}_3), -\vec{v}_3, (-\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_2), -\vec{v}_1]$				
	$[-\vec{v}_3, (-\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_2), -\vec{v}_1, (-\vec{v}_3 + \vec{v}_2)]$				
	$[-2\vec{v}_1, -\vec{v}_3, \vec{0}, (-\vec{v}_3 + \vec{v}_2)]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[(-\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_2), (-\vec{v}_3 + \vec{v}_2), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2), -\vec{v}_1]$				
	$[(\vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{0}, (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2), -\vec{v}_1]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[\vec{v}_2, (-\vec{v}_3 + \vec{v}_2), \vec{0}, (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2)]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$\vec{v}_2 - \vec{v}_3$	$[(\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_1), (2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{v}_2]$		<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_1), (2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{v}_2, (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_1), \vec{v}_2, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), 2\vec{v}_2, \vec{v}_2]$		<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_2 + \vec{v}_1), 2\vec{v}_2, \vec{v}_2]$		<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2), (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_2), 2\vec{v}_2]$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_2 + \vec{v}_3$	$[(-\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_1), \vec{v}_3, (-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(-\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_1), \vec{v}_3, (-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(-\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_1), (-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3)]$				
	$[\vec{v}_3, (\vec{v}_3 + \vec{v}_1), 2\vec{v}_3, (-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 + \vec{v}_1), 2\vec{v}_3, (-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)]$				
	$[(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3), (\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), 2\vec{v}_3]$				

Voisinage ($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_2 - \vec{v}_3$	$[(-\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_1), -\vec{v}_3, -\vec{v}_2]$				
	$[(-\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_1), -\vec{v}_3, -\vec{v}_2, (\vec{v}_1 - \vec{v}_3)]$				
	$[(-\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_1), -\vec{v}_2, (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), (\vec{v}_1 - \vec{v}_3)]$				
	$[-\vec{v}_3, (\vec{v}_1 - \vec{v}_3), \vec{0}, -\vec{v}_2]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \vec{0}, -\vec{v}_2]$	<i>o</i>	<i>o</i>		
	$[\vec{v}_1, (-\vec{v}_3 + \vec{v}_1), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \vec{0}]$	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	

A.2 Propriété de connexité d'une T.P.R.

Voisinage($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$	$[(-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)]$				
	$[(-\vec{v}_2 + \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_3, \vec{v}_3]$		<i>o</i>		
	$[(-\vec{v}_2 + \vec{v}_3), 2\vec{v}_3, (-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), \vec{v}_3]$		<i>o</i>		
	$[(-\vec{v}_1 + \vec{v}_3), \vec{v}_3, (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[\vec{v}_3, (-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[2\vec{v}_3, \vec{v}_3, (-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3)]$		<i>o</i>		

Voisinage($\vec{x}$)	$T_i \vec{x}$	0	S	A	F
$-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$	$[(-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2)]$				
	$[(\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2), (2\vec{v}_2 - \vec{v}_3)]$				
	$[(\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \vec{v}_2, (2\vec{v}_2 - \vec{v}_3)]$		<i>o</i>		
	$[(\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (2\vec{v}_2 - \vec{v}_1), (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]$				
	$[(2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{v}_2, (2\vec{v}_2 - \vec{v}_1), (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2)]$		<i>o</i>		
	$[2\vec{v}_2, (2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{v}_2, (-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2)]$		<i>o</i>		
$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)]$				
	$[(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_3)]$				
	$[(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3), (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_3)]$				
	$[(\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_3), \vec{v}_1, (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)]$		<i>o</i>		
	$[(2\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \vec{v}_1, (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)]$		<i>o</i>		
	$[2\vec{v}_1, (2\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \vec{v}_1]$		<i>o</i>		
$-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$	$[(-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2)]$				
	$[(-\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2), -\vec{v}_3]$				
	$[(-\vec{v}_2 - \vec{v}_3), (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2), -\vec{v}_2, -\vec{v}_3]$				
	$[(-\vec{v}_1 - \vec{v}_3), -\vec{v}_3, -\vec{v}_1, (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2)]$				
	$[-\vec{v}_3, -\vec{v}_2, -\vec{v}_1, (-\vec{v}_1 - \vec{v}_2)]$				
	$[\vec{0}, -\vec{v}_3, -\vec{v}_2, -\vec{v}_1]$	<i>o</i>	<i>o</i>		

A.3 Topologie des maillages strictement conformes

Proposition [PES-00]

Soit T un tétraèdre d'un ensemble O de tétraèdres.

Soit $V^*(T) = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_n\}$.

Si $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n$ est un k -simplexe ($k < 3$) qui intersecte T alors $Bd_p T$ est connexe.

preuve :

Supposons que $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n$ soit un k -simplexe ($k < 3$) qui intersecte T .

Soit $a = (T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n) \cap T$ le k -simplexe qui est l'intersection de T avec $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n$ (donc $\neq \emptyset$).

La frontière partagée de T est $Bd_p T = \cup(T_i \cap T)$.

Or $\forall i \ a \subset T_i \cap T$. Donc $\cup(T_i \cap T)$ est une réunion de k -simplexes qui contiennent tous a ce qui entraîne que $Bd_p T = \cup(T_i \cap T)$ est connexe.

c.q.f.d.

Cette proposition nous conduit à introduire la définition suivante :

Définition

Soit O un ensemble connexe de tétraèdres conformes.

Si pour tout tétraèdre $T \in O$, $V^*(T) = \{T_1, \dots T_n\}$ et $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n$ est un k -simplexe ($k < 3$) qui intersecte T alors O est **strictement conforme**.

Théorème [SAHA-98a]

Si O est un maillage strictement conforme, et T est un tétraèdre de O , alors le voisinage $V(T)$ de T ne contient pas de tunnel et de cavité.

Lemme [SAHA-98a]

Chaque composante de $Bd_{np} T$ contient l'intérieur de f , $int(f)$, pour au moins une face non-partagée f de T .

Lemme [SAHA-98a]

Pour tout tétraèdre T , $Bd_{np} T$ est non vide si et seulement si T a au moins une face non-partagée.

Lemme [SAHA-98a]

Pour tout couple f et f' de faces non partagées de T , $int(f)$ et $int(f')$ sont connectés dans $Bd_{np} T$ si et seulement si il existe un chemin $f = f_0, e_0, f_1, \dots, f_i, e_i, f_{i+1}, \dots, e_{n-1}, f_n = f'$ de faces et d'arêtes non partagées de T tel que $e_i = f_i \cap f_{i+1}$ pour $0 \leq i < n$. f et f' sont alors face-connectées.

On peut alors montrer une condition suffisante pour qu'un tétraèdre soit simple :

Théorème [PES-00]

Soit T un tétraèdre et O une composante connexe tel que $T \notin O$.

Si :

1. T est connexe à O ,
2. T a au moins une face non partagée,
3. pour tout $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n \in V^*(T)$ $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n$ est un k -simplexe ($k < 3$) qui intersecte T ,
4. chaque couple de faces non-partagées de T est face-connecté.

alors T est **simple**.

preuve :

La condition 1 est équivalente à $Bd_p T$ est non vide.

La condition 2 est équivalente à $Bd_{np} T$ est non vide [SAHA-98a].

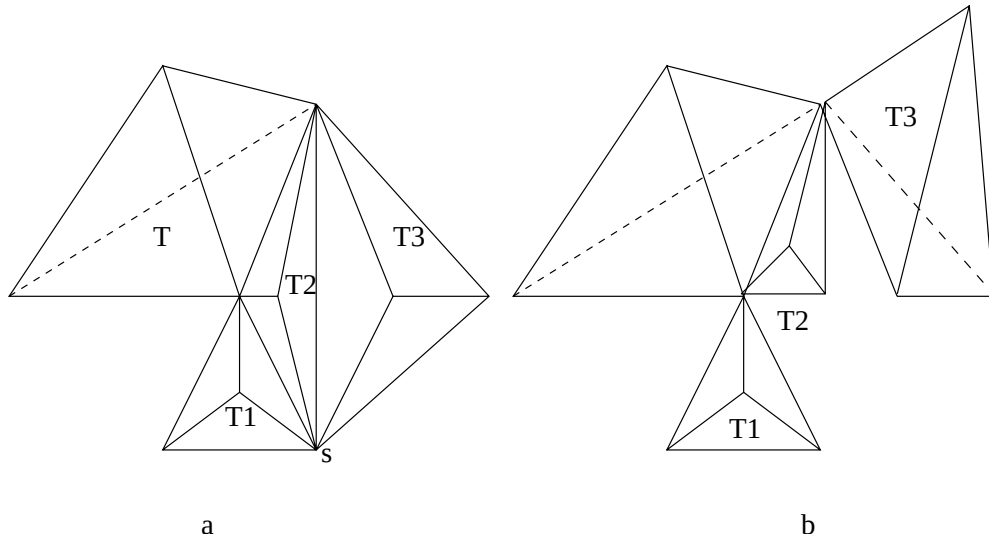
La condition 3 implique que $Bd_p T$ est connexe d'après la première proposition de cette annexe.

La condition 4 est équivalente à $Bd_{np} T$ est connexe [SAHA-98a].

Donc d'après le théorème 4.15, T est simple.

c.q.f.d.

Malheureusement la condition 3 est stricte et ne permet pas de montrer la réciproque. En effet, nous pouvons trouver des contre-exemples dans lesquels $Bd_p T$ est connexe et $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n$ est un k -simplexe ($k < 3$) qui n'intersecte pas T (cf. figure (a)) ou $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n$ est vide (cf. figure (b)).



$Bd_p T$ est connexe mais $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n$ n'est pas un k -simplexe ($k < 3$) qui intersecte T .

- (a) $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n = s$ avec s qui n'intersecte pas T .
- (b) $T_1 \cap T_2 \cap \dots T_n = \emptyset$.

A.4 Éléments finis et équation de Poisson.

A.4.1. Approximation d'une *E.D.P.* par éléments finis

Afin d'introduire la terminologie et les principales notations qui sont utilisés dans cette annexe, nous considérons maintenant un problème exprimé sous forme d'équations aux dérivées partielles (E.D.P.) et nous expliquons les principales étapes de son approximation par les éléments finis. En ce qui concerne l'aspect théorique des méthodes, nous nous fondons essentiellement sur [CIAR-91], ouvrage auquel nous renvoyons le lecteur intéressé par une étude plus avancée.

Considérons un problème exprimé sous forme d'E.D.P. en vue de son approximation par des éléments finis. Cette analyse comprend plusieurs étapes. Tout d'abord, une formulation *faible* du problème est établie. Ensuite, des solutions approchées sont construites.

Cette formulation faible s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver} & u \in V & \text{tel que} \\ a(u, v) = f(v) & , \forall v \in V \end{cases}$$

où V est un espace de fonctions admissibles et l'opérateur a et la forme f correspondent aux opérateurs du problème considéré exprimé sous forme d'E.D.P.

L'expression, en E.E.G., des opérateurs a et f se trouve en annexe A.4.2.

De fait, le calcul explicite de la solution du problème continu n'est généralement pas possible. Le problème *continu* est alors remplacé par un problème *approché*. Cela conduit à chercher des solutions approchées en utilisant, dans notre contexte, la méthode des éléments finis. En bref, cette méthode consiste

à construire un *espace de dimension finie* V_h , sous-espace de l'espace V , puis à définir u_h , la solution approchée de u , comme solution du problème⁷ :

$$\begin{cases} \text{Trouver} & u_h \in V_h & \text{tel que} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h) & , \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Sous les hypothèses appropriées (voir plus bas), on montre que ce problème admet une solution unique u_h , et que la convergence de u_h vers la solution exacte est directement liée à la façon dont les fonctions v_h de l'espace V_h approchent les fonctions v de l'espace V et par suite, à la manière dont l'espace V_h est défini.

Ainsi la méthode des éléments finis consiste à construire un espace V_h de dimension finie tel qu'une approximation u_h adéquate soit obtenue. Cette construction s'appuie sur trois idées de base :

1. la création d'un maillage, noté T_h ⁸, du domaine Ω de telle sorte que le domaine s'exprime comme la réunion finie d'éléments T (les membres de T_h),
2. la définition de l'espace V_h comme un ensemble de fonctions v_h dont la restriction à chaque élément T de T_h est, en général, un polynôme,
3. le choix d'une base pour cet espace V_h dont les fonctions ne sont non-nulles que sur une petite région du maillage; ces fonctions sont donc à *support petit*.

D'un point de vue mathématique, la notion de convergence est liée non pas à une approximation (discrète) mais à une famille d'approximations (discrètes) définies par un paramètre h qui tend vers zéro. À chaque valeur de h est associée un espace V_h et à chaque V_h est associée une approximation u_h du problème approché. Cette famille est dite convergente si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0 \quad (.4)$$

où $\|a\| = (\int_{\Omega} a^2(x) dx)^{\frac{1}{2}}$.

Dans le cadre d'un problème elliptique tel que le potentiel électrique en *E.E.G.*, estimer l'erreur entre u et u_h se résume à regarder ce que valent les erreurs d'interpolation locales [CIAR-91] :

7. l'indice h de V_h est lié au fait que V_h dépend du maillage. Cette valeur h doit être vue comme un paramètre de taille (l'arête maximale des éléments) qui, de fait, définit une famille de maillages et donc une famille d'approximations et qui, pour établir les résultats théoriques de convergence et de précision, tend vers 0.

8. Par convention d'écriture T_h désigne une triangulation de Ω telle que $h = \max_{T \in T_h} h_T$

$$\left\| u - \prod_T u \right\|$$

où $\prod_T u$ correspond à la restriction d'une interpolation de u sur T ; le cas le plus simple d'interpolation pour des maillages tétraédriques est de considérer des fonctions linéaires par morceaux qui, par interpolation des valeurs aux sommets du maillage, permettent de reconstruire en tout point la solution $u_h = \prod_T u$ recherchée (Problème P^1).

On montre alors (sous certaines hypothèses relatives à l'interpolation) que [CIAR-91] :

$$\left| u - \prod_T u \right|_{1,T} \leq C \left(\frac{h_T^{k+1}}{\rho_T} \right) |u|_{k+1,T}$$

où $|u|_{k+1,T} = \left(\sum_{i_1+\dots+i_n=m} \left\| \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_{k+1}^{i_n}} \right\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ et $\|u\|_{0,T} = (\int_T u^2(x) dx)^{\frac{1}{2}}$.

Cette relation fait intervenir le degré k des polynômes d'interpolation de u sur T , une constante C et deux quantités déjà maintes fois évoquées :

- la plus grande arête h_T de l'élément T et
- le rayon ρ_T de la sphère inscrite dans T .

La majoration $|u - \prod_T u|_{1,T} \leq C \left(\frac{h_T^{k+1}}{\rho_T} \right) |u|_{k+1,T}$ justifie donc d'une part l'utilisation d'un critère géométrique de qualité fondé sur le rapport $\frac{h}{\rho}$ (cf. section 3.3) et d'autre part des méthodes de remaillage d'une $T.P.R.$ optimisant le diamètre d'un tétraèdre (cf section 5.2).

A.4.2 Formulation faible de l'équation de Poisson

Nous avons vu dans la section 5.1.1, que la résolution du problème direct en E.E.G. consiste à résoudre l'équation de Poisson (cf. équation 5.1) avec des conditions de Neumann sur les différentes surfaces des tissus. Dans le cas d'un dipôle de courant, la solution V représente une singularité à la position du dipôle ce qui complique numériquement l'algorithme aux éléments finis. Pour lever cette difficulté, le potentiel V est découpé en deux termes (cf. section 5.1.1) :

$$V = U + V_s$$

L'équation 5.1 de Poisson devient en exprimant les conditions aux limites :

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{li,j} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} = h_l = \begin{cases} 0 & \text{dans le volume contenant la source.} \\ - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{li,j} \frac{\partial V_s}{\partial x_j} & \text{dans les autres milieux} \end{cases}$$

$$\frac{\partial U_l}{\partial n_{\sigma l}} \big|_{S_l} - \frac{\partial U_{l+1}}{\partial n_{\sigma l+1}} \big|_{S_l} = g_l = \left\{ \frac{\partial V_s}{\partial n_{\sigma l}} \big|_{S_l} - \frac{\partial V_s}{\partial n_{\sigma l+1}} \big|_{S_l} \right\}$$

$$U_l \big|_{S_l} = U_{l+1} \big|_{S_l}$$

En multipliant les deux premières équations par une fonction test v , en les intégrant sur les sous-volumes Ω_l et S_l correspondant respectivement aux volumes et surfaces des tissus de la tête et en les additionnant, nous obtenons :

$$\sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{li,j} \frac{\partial U_l}{\partial x_j} \right) v \cdot d\tau + \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} \frac{\partial U_l}{\partial n_{\sigma l}} \big|_{S_l} v \cdot ds = \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} h_l \cdot v \cdot d\tau + \sum_{l=1}^N \int_{S_l} g_l v \cdot ds$$

En appliquant la formule généralisée de Green [CIAR-91] qui est :

$$\int_{R_+^n} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{R_+^n} \varphi \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$\int_{R_+^n} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx = - \int_{R_+^n} \varphi \frac{\partial v}{\partial x_n} dx - \int_{R_+^{n-1}} v(x', 0) \varphi(x', 0) dx'$$

avec v et φ sont des fonctions de $H^1(R_+^n)$ ($H^1(R_+^n)$ est un espace de Sobolev d'ordre 1 sur R_+^n .)

nous obtenons :

$$\sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{li,j} \frac{\partial U_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot d\tau = \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} h_l \cdot v \cdot d\tau + \sum_{l=1}^N \int_{S_l} g_l \cdot v \cdot ds$$

Le problème s'exprime dans sa formulation faible (cf. A.5.1) par :

$$\begin{cases} \text{Trouver} & u \in V & \text{tel que} \\ a(u, v) = f(v) & , \forall v \in V \end{cases}$$

où :

$$- a(u_l, v) = \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{li,j} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot d\tau \text{ et}$$

$$- f(v) = \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} h_l \cdot v \cdot d\tau + \sum_{l=1}^N \int_{S_l} g_l \cdot v \cdot ds$$

A.4.3 Erreur d'interpolation pour un problème P^1 en dimension trois⁹

Soit $f = (u - \Pi_T u)$ de T dans R , où T est l'intérieur du tétraèdre $T = \{A, B, C, D\}$. L'analyse locale de f par un développement de Taylor autour de A donne :

9. P^1 = interpolation linéaire.

$$f(X) - f(A) = \overrightarrow{AX} \cdot \nabla f(A) + \frac{1}{2} {}^t \overrightarrow{AX} \cdot (H_f(A) \cdot \overrightarrow{AX}) + O(\|\overrightarrow{AX}\|^3)$$

avec :

- $\overrightarrow{AX}$ le déplacement autour de A dans le tétraèdre T ,
- $\nabla f'(A)$ désigne le gradient,
- H_f est la matrice hessienne de f .

En premier lieu, notons que $H_f = H_u$ (à cause de l'interpolation linéaire). Regardons ensuite le terme $\nabla f(A)$. Tout point X de T peut s'écrire comme une combinaison linéaire de A, B, C, D :

$$X = \lambda_a.A + \lambda_b.B + \lambda_c.C + \lambda_d.D$$

avec $\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \lambda_d = 1$ et donc $\overrightarrow{AX} = \lambda_b \overrightarrow{AB} + \lambda_c \overrightarrow{AC} + \lambda_d \overrightarrow{AD}$.

Comme nous supposons que pour tout point à l'intérieur de T u est estimé par interpolation linéaire de u (problème dit P^1) calculée aux sommets de T , nous avons :

$$\begin{aligned} \prod_T u(X) &= (x - A) \cdot \frac{(u(B) - u(A))}{(B - A)} + (y - A) \cdot \frac{(u(C) - u(A))}{(C - A)} \\ &+ (z - A) \cdot \frac{(u(D) - u(A))}{(D - A)} + u(A) \left(1 - \frac{A}{B - A} - \frac{A}{C - A} - \frac{A}{D - A}\right) \end{aligned}$$

Et nous obtenons :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \nabla \prod_T u(X) = u(B) - u(A)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \nabla \prod_T u(X) = u(C) - u(A)$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \nabla \prod_T u(X) = u(D) - u(A)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \nabla \prod_T u(X) = \lambda_b(u(B) - u(A)) + \lambda_c(u(C) - u(A)) + \lambda_d(u(D) - u(A))$$

D'autre part, nous avons :

$$u(B) - u(A) = \overrightarrow{AB} \cdot \nabla u(A) + \frac{1}{2} {}^t \overrightarrow{AB} \cdot H_u(A) \cdot \overrightarrow{AB} + O(\|\overrightarrow{AB}\|^3)$$

$$u(C) - u(A) = \overrightarrow{AC} \cdot \nabla u(A) + \frac{1}{2} {}^t \overrightarrow{AC} \cdot H_u(A) \cdot \overrightarrow{AC} + O(\|\overrightarrow{AC}\|^3)$$

$$u(D) - u(A) = \overrightarrow{AD} \cdot \nabla u(A) + \frac{1}{2} {}^t \overrightarrow{AD} \cdot H_u(A) \cdot \overrightarrow{AD} + O(\|\overrightarrow{AD}\|^3)$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AB} \nabla (u - \prod_T u)(A) = \overrightarrow{AB} \cdot \nabla u(A) - (\overrightarrow{AB} \cdot \nabla u(A) + \frac{1}{2} {}^t \overrightarrow{AB} \cdot H_u(A) \cdot \overrightarrow{AB} + O(\|\overrightarrow{AB}\|^3))$$

$$\overrightarrow{AC} \nabla (u - \prod_T u)(A) = \overrightarrow{AC} \cdot \nabla u(A) - (\overrightarrow{AC} \cdot \nabla u(A) + \frac{1}{2} {}^t \overrightarrow{AC} \cdot H_u(A) \cdot \overrightarrow{AC} + O(\|\overrightarrow{AC}\|^3))$$

$$\overrightarrow{AD} \nabla (u - \prod_T u)(A) = \overrightarrow{AD} \cdot \nabla u(A) - (\overrightarrow{AD} \cdot \nabla u(A) + \frac{1}{2} {}^t \overrightarrow{AD} \cdot H_u(A) \cdot \overrightarrow{AD} + O(\|\overrightarrow{AD}\|^3))$$

Nous obtenons pour $\overrightarrow{AX} \cdot \nabla (u - \prod_T u)(A)$ alors l'expression suivante [FREY-99] :

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda_b}{2} {}^t \overrightarrow{AB} \cdot H_u(A) \overrightarrow{AB} - \frac{\lambda_c}{2} {}^t \overrightarrow{AC} \cdot H_u(A) \overrightarrow{AC} \\ & -\frac{\lambda_d}{2} {}^t \overrightarrow{AD} \cdot H_u(A) \overrightarrow{AD} + O(\max(\|\overrightarrow{AB}\|, \|\overrightarrow{AC}\|, \|\overrightarrow{AD}\|)^3) \end{aligned}$$

Bibliographie

- [AKT-96] Z. AKTOUF, G. BERTRAND, ET L. PERROTON, *A 3D Hole Closing Algorithm*, in Proceedings of DGCI'96, vol. 1176 of Lecture Notes in Computer Science, Lyob, France, Nov. 1996, pp. 36–48.
- [ALGO-95] M.-E. ALGORRI, *Génération et simplification de maillages pour la reconstruction de surfaces à partir de points non structurés*, Thèse de doctorat, Télécom-Paris ENST 95E024, Sept. 1995.
- [ARUN-87] K. ARUN, T. HUANG, ET S. BLODSTEIN, *Least-square Fitting of two 3D points*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 9 (1987), pp. 207–209.
- [BAIL-98] S. BAILLET, *Vers une imagerie fonctionnelle de l'électrophysiologie corticale. Modélisation markovienne pour l'estimation des sources de l'électro/magnétoencéphalographie et évaluations expérimentales*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI Orsay, Juil. 1998. (ORSAY 5353).
- [BERT-94a] G. BERTRAND ET G. MALANDAIN, *A New Characterization of Three-dimensional Simple Points*, Pattern Recognition Letters, 15 (1994), pp. 169–175.
- [BERT-94b] G. BERTRAND, *Simple points, topological numbers and geodesic neighbourhoods in cubic grids*, Pattern Recognition Letters, 15 (1994), pp. 1003–1011.
- [BERT-99] ———, *New Notions for Discrete Topology*, in Proceedings of DGCI'99, vol. 1568 of Lecture Notes in Computer Science, Marne-la-vallée, France, Mars 1999, pp. 218–228.
- [BESL-92] P. BESL ET N. M. KAY, *A method for registration of 3D-shapes*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 14 (1992), pp. 239–256.

- [BLO-93] I. BLOCH, H. MAÎTRE, ET M. MINOUX, *Optimal Matching of 3-D Convex Polyhedra with Applications to Pattern Recognition*, Pattern Recognition and Image Analysis, 3 (1993), pp. 137–149.
- [BOR-97] P. GEORGE ET H. BOROUCAKI, *Triangulation de Delaunay : Application aux éléments finis*, Hermes, Paris, France, 1999.
- [BORG-84] G. BORGEFORS, *An improved version of the chamfer matching algorithm*, in 7th International Conference on Pattern Recognition, Montreal, Canada, 1984, pp. 1175–1177.
- [BORG-86] ———, *Distance transformations in digital images*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 34 (1986), pp. 344–371.
- [BOW-81] A. BOWYER, *Computing Dirichlet tessellations*, The Computer Journal, 24 (1981), pp. 162–167.
- [BRAV-1866] A. BRAVAIS, *Etudes cristallographiques ; Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués sur un plan ou dans l'espace*, Gauthiers-Villars, Paris, France, 1866.
- [CAV-85] J. CAVENDISH, D. FIELD, ET W. FREY, *An approach to automatic three-dimensional finite element mesh generation*, International Journal of Numerical Methods Engineering, 21 (1985), pp. 329–347.
- [CEND-85] Z. CENDES, D. SHENTON, ET H. SHANHASER, *Magnetic field computations using Delaunay triangulations and complementary finite element methods*, I.E.E.E. Transactions Magnetics, 21 (1985).
- [CIAR-91] P. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in *Handbook of Numerical Analysis, vol II, Finite Element methods (Part 1)*, P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds, North Holland, 1991.
- [COIN-01] Y. COINTEPAS, I. BLOCH, ET L. GARNERO, *Cellular Model for Multi-Objects Multi-Dimensional Homotopic Deformations*, Pattern Recognition, 34 (2001), pp. 1785–1798.
- [COIN-99] Y. COINTEPAS, *Modélisation homotopique et segmentation 3D du cortex cérébral à partir d'I.R.M. pour la résolution des problèmes direct et inverse en E.E.G. et M.E.G.*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Oct. 1999. (ENST 99 E 025).

- [COOK-74] W. COOK, *Body oriented coordinates for generating 3-dimensional meshes*, International journal of numerical methods in engineering, 8 (1974), pp. 27–43.
- [DALE-93] A. DALE ET M. SERENO, *Improved localization of cortical activity by combining EEG and MEG with MRI cortical surface reconstruction: a linear approach*, Journal of Cognitive Sciences, 5 (1993), pp. 162–176.
- [DELA-34] B. DELAUNAY, *Sur la sphère vide*, Bulletin de l'Académie des Sciences, (1934), pp. 793–800.
- [DIRI-1850] G. DIRICHLET, *Über die Reduction Der positiven quadratischen Formen mit drei understimmten ganzen Zahlen*, Z. Angew Math. Mech., 40 (1850), pp. 209–227.
- [ELS-91] P. VAN DEN ELSEN, M. VIERGEVER, A. VAN HUFFELEN, W. VAN DER MEU, ET G. WEINEKE, *Accurate matching of electromagnetics dipoles data with CT and MR images*, Brain Topography, 3 (1991), pp. 425–432.
- [FAU-93] O.FAUGERAS, *Three-Dimensional Computer Vision*, MIT Press, Masachussets, USA, 1993.
- [FREY-99] P. FREY ET P. GEORGE, *Maillages : Application aux méthodes d'éléments finis*, Hermes, Paris, France, 1999.
- [FUCH-96] A. FUCHS, *Optimierung von Delaunay-Triangulierungen*, Thèse de doctorat, Fakultät Mathematik Universität Stuttgart, 1996.
- [GAV-01] L.GAVIT, S. BAILLET, J.PESCATORE, ET L.GARNERO, *Méthode multirésolution en tomographie électrique cérébrale: application à la reconstruction de la représentation corticale de la main en magnétoencéphalographie*, ITBM-RBM, 22 (2001).
- [GED-67] L. GEDDES ET L. BECKER, *The specific resistance of biological material- a compendium of data for the biomedical engineer and physiologist*, Medical and Biology in Engineering, 5 (1967), pp. 271–293.
- [GEO-71] J. GEORGE, *Computer implementation of the finite element method*, Thèse de doctorat, Dept. of Computer Science Stanford University, 1971.

- [GERA-98] T. GÉRAUD, *Segmentation des structures internes du cerveau en imagerie par résonance magnétique tridimensionnelle*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Juin 1998. (ENST 98 E 012).
- [GEV-89] A. GEVINS, *Dynamic functional topography of cognitive tasks*, Brain Topography, 2 (1989), pp. 37–56.
- [GODB-71] C. GODBILLON, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, 1971.
- [GORD-73] W. GORDON ET C. HALL, *Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation*, International Journal of Numerical Methods In Engineering, 7 (1973), pp. 461–477.
- [GREE-78] P. GREEN ET R. SIBSON, *Computing Dirichlet tessellations in the plane*, Computer Journal, 21 (1978), pp. 168–173.
- [HAMA-89] M. HÄMÄLÄINEN ET J. SARVAS, *Realistic conductivity geometry model of the human head for interpretation of neuromagnetic data*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 36 (1989), pp. 165–171.
- [HAMA-93] M. HÄMÄLÄINEN, R. HARI, R. J. ILMONIEMI, J. KNUUTILA, ET O. V. LOUNASMAA, *Magnetoencephalography Theory, Instrumentation and Applications to Non-invasive Studies of the Working Human Brain*, Reviews of Modern Physics, 65 (1993), pp. 413–497.
- [HASB-98] D. HASBOUN, *Neuranat web*. <http://www.magbio.ens.fr/neuranatpro/index.html>, 1998.
- [HAUE-97] J. HAUEISEN, M. EISELT, C. RAMON, . BRAUER, ET H. NOWAK, *Influence of tissue resistivities on neuromagnetic fields and electric potentials studied with a finite element model of the head*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 44 (1997), pp. 727–735.
- [HERM-90] G. T. HERMAN, *On topology as applied to image analysis*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 52 (1990), pp. 409–415.
- [HERME-80] F. HERMELINE, *Une méthode de maillage en dimension n*, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1980.

- [HOCK-88] J. G. HOCKING ET G. S. YOUNG, *Topology*, Dover, New York, USA, 1988.
- [HORN-87] B. HORN, *Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions*, Journal of Optical Society of America, 4 (1987), pp. 321–331.
- [HOS-78] R. HOSEK, A. SANCES, R. JODAT, ET S. LARSON, *The contributions of intracerebral currents to the E.E.G. and evoked potentials*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 25 (1978), pp. 728–739.
- [KAHL-90] W. KAHLE, H. LEONHARDT, ET W. PLATZER, *Anatomie 3 - Système nerveux*, Flammarion-Médecine-Sciences, 1990.
- [KONG-89] T. Y. KONG ET A. ROZENFELD, *Digital Topology: Introduction and Survey*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 48 (1989), pp. 357–393.
- [KONG-95] T. Y. KONG, *On topology preservation in 2d and 3d thinning*, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 9 (1995), pp. 813–844.
- [KOVA-89] V. A. KOVALEVSKY, *Finite Topology as Applied to Image Analysis*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 46 (1989), pp. 141–146.
- [LEE-93] C.-N. LEE, T. POSTON, ET A. ROZENFELD, *Holes and Genus of 2D and 3D Digital Images*, Computer Vision, Graphics and Image Processing: Graphical Models and Image Processing, 55 (1993), pp. 20–47.
- [LO-85] S. LO, *A new mesh generation scheme for arbitrary planar domain*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 63 (1985), pp. 141–154.
- [LOH-96] R. LÖHNER, *Extensions and improvements of the advancing front grid generation technique*, Communication of Numerical Methods in Engineering, 12 (1996), pp. 683–702.
- [MANG-94] J. MANGIN, I. BLOCH, J. LOPEZ-KRAHE, ET V. FROUIN, *Chamfer distances in anisotropic 3D images*, in EUSIPCO 94, Edinburgh, UK, 1994, pp. 975–978.
- [MANG-95] J.-F. MANGIN, *Mise en correspondance d'images médicales 3D multi-modalités multi-individus pour la corrélation*

- anatomo-fonctionnelle cérébrale*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Mars 1995. (ENST 95 E 010).
- [MANG-98] J.-F. MANGIN, O. COULON, ET V. FROUIN, *Robust brain segmentation using histogram scale-space analysis and mathematical morphology*, in Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention (MICCAI'98), Lecture Notes in Computer Science, Cambridge, USA, Oct. 1998, Springer-Verlag, pp. 1230–1241.
- [MAR-97] G. MARIN, *Utilisation de la méthode des éléments finis pour le calcul des champs électromagnétiques à l'aide d'un modèle réaliste de tête en MEG et EEG*, Thèse de doctorat, Université Paris Sud Orsay, 1997.
- [MAR-98] G. MARIN, C. GUÉRIN, S. BAILLET, ET L. GARNERO, *Influence of skull anisotropy for the forward and inverse problem in E.E.G.: simulation studies using F.E.M. on realistic head models*, Human Brain Mapping Journal, 6 (1998), pp. 250–269.
- [MEIJS-89] M. P. J. MEIJS, O. WEIER ET A. OOSTERON, *On the numerical accuracy of the boundary element method*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 36 (1989), pp. 1038–1049.
- [MIN-83] M. MINOUX, *Programmation Mathématiques : théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, FRANCE, 1983.
- [MORG-81] D. G. MORGENTHALER, *Three dimensional simple points : serial erosion, parallel thinning, and skeletonization*, Rapp. Tech. TR-1005, Computer Vision Laboratory, Computer Science Center, University of Maryland, College Park, 1981.
- [MUNCK-88] J. D. MUNCK, *The Potential Distribution in a Layered Anisotropic Spheroidal Volume Conductor*, Journal of Applied Physics, 64 (1988), pp. 464–470.
- [NAK-90] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, New York. USA, 1990.
- [NICH-65] P. NICHOLSON, *Specific impedance of cerebral white matter*, Experimental Neurophysiology, 13 (1965), pp. 386–396.
- [NIKO-98] C. NIKOU, J. ARMSPACH, F. HEITZ, I. NAMER, ET D. GRUCKER, *MR/MR and MR/SPECT registration of brain images by fast stochastic optimization of robust voxel similarity measures*, NeuroImage, 8 (1998), pp. 30–43.

- [PAR-93] V. PARTHASARATHY, C. GRAICHEN, ET A. HATHAWAY, *A comparison of tetrahedron quality measures*, Finite Elements in Analysis and Design, 15 (1993), pp. 255–261.
- [PER-97] J. PERAIRE ET K. MORGAN, *Unstructured mesh generation including directional refinement for aerodynamics flow simulation*, Finite Elements in Analysis and Design, 25 (1997), pp. 343–355.
- [PERR-98] A. PERRONET, *Interpolation transfinie sur le triangle, le tétraèdre et le pentaèdre. Application à la création de maillage et à la condition de Dirichlet*, C.R. Académie des sciences, Paris, 1 (1998), pp. 117–122.
- [PES-00] J. PESCATORE, I. BLOCH, ET L. GARNERO, *Homotopic Tetrahedra Meshes Labeling of Head Tissues*, in Winterschool Digital and Image Geometry, Dagstuhl, Germany, 2000, pp. 21–22.
- [PES-01] J. PESCATORE, L. GARNERO, ET I. BLOCH, *Tetrahedral Finite Element Meshes of Head Tissues from MRI for the MEG/EEG forward problem*, in 12th Scandinavian Conference on Image Analysis, Bergen, Norway, 2001, pp. 71–80.
- [PIZZ-97] O. PIZZATO, *Création d'un outil de visualisation tridimensionnelle pour l'imagerie cérébrale*, rapp. tech., CEA SHFJ - ENST, 1997.
- [POLH-91] POLHEMUS, *Space User's manual. Kaiser aerospace and electronics company*, 1991.
- [POUP-98] F. POUPON, J.-F. MANGIN, D. HASBOUN, I. MAGNIN, ET V. FROUIN, *Multi-object deformable templates dedicated to segmentation of brain deep structures*, in 1st International Conference on Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention, Boston, USA, 1998, pp. 1134–1143.
- [RAS-95] A. RASSINEUX, *Maillage automatique tridimensionnel par une méthode frontale pour la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat, Université de Nancy I, 1995.
- [REISS-93] T. REISS, *Recognizing Planar Objects Using Invariant Features*, vol. 676, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 1993.

- [RIFA-00] H. RIFAI, I. BLOCH, S. HUTCHINSON, J. WIART, ET L. GARNERO, *Segmentation of the skull in MRI Volumes Using Deformable Model and Taking the Partial Volume Effect into Account*, Medical Image Analysis, 4 (2000), pp. 219–233.
- [RIV-92] M. RIVARA ET C. LEVIN, *A 3d refinement algorithm suitable for adaptive and multigrid techniques*, Journal of Computing and applied Mathematics, 8 (1992), pp. 281–290.
- [RIV-97] M. RIVARA, *New longest-edge algorithms for the refinement and/or improvement of unstructured triangulations*, International journal on numerical methods in engineering, 40 (1997), pp. 3313–3324.
- [ROB-77] P. ROBILLARD ET Y. POUSSART, *Specific impedance measurements of brain tissues*, Medicine and Bioengineering, 15 (1977), pp. 438–445.
- [ROU-93] J. O’ROURKE, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.
- [RUSH-68] S. RUSH ET D. DRISCOLL, *Current distribution in the brain from surface electrodes*, Anesthesia and analgesia, current researches, 47 (1968), pp. 717–723.
- [SAHA-00] P. SAHA ET A. ROSENFELD, *Determining simplicity and computing topological change in strongly normal partial tilings of R^2 or R^3* , Pattern Recognition, 32 (2000), pp. 105–118.
- [SAHA-91] P. K. SAHA, B. CHANDA, ET D. D. MAJUMDER, *Principles and algorithms for 2-D and 3-D shrinking*, Rapp. Tech. TR/KBCS/2/91, Indian Statistical Institute, Calcutta, India, 1991.
- [SAHA-98a] P. SAHA ET D. D. MAJUMBER, *Local Topological Parameters in a Tetrahedral Representations*, Graphical Models and Image Processing, 60 (1998), pp. 423–436.
- [SAHA-98b] P. SAHA ET A. ROSENFELD, *Strongly normal sets of convex polygons or polyhedra*, Pattern Recognition Letters, 19 (1998), pp. 1119–1124.
- [SARV-87] J. SARVAS, *Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem*, Physics in Medical Biology, 32 (1987), pp. 11–22.

-
- [SCH-86] M. SCHERG. ET D. V. CRAMON, *Evoked dipole sources of the human auditory cortex*, Electroencephalography Clinical Neurophysiology, 65 (1986), pp. 344–360.
- [SCHM-93] M. SCHMITT ET J. MATTIOLI, *Morphologie mathématique*, Masson, Paris, France, 1993.
- [SCHW-98] D. SCHWARTZ, *Localisation des générateurs intra-cérébraux de l'activité M.E.G. et E.E.G.*, Thèse de doctorat, université de Rennes, 1998.
- [SCHWA-63] H. SCHWANN, *Physical techniques in biomedical research*, vol. 6, Masson, New York, 1963.
- [SCHWA-66] —, *Alternating current electrode polarization*, Biophysik, 3 (1966), pp. 181–201.
- [SHEP-88] M. SHEPHARD, F. GUERINONI, J. FLAHERTY, R. LUDWIG, ET P. BAEHMAN, *Adaptive solutions of the Euler equations using finite quatree and octree grids*, Computers and Structures, 30 (1988), pp. 327–336.
- [SHEY-01] S. SHEYNIN ET A. TUZIKOV, *Explicit formulae for polyhedra moments*, Pattern Recognition Letters, 22 (2001), pp. 1103–1109.
- [SINGH-97] K. SINGH, I. HOLLIDAY, P. FURLONG, ET G. HARDING, *Evaluation of MRI-MEG/EEG co-registration strategies using Monte-Carlo simulation*, Electroencephalography clinical neurophysiology, 102 (1997), pp. 81–85.
- [SWA-98] B. SWARTZ ET E. GOLDENSOHN, *Timeline of the history of EEG and associated fields*, Electroencephalography Clinical Neurophysiology, 34 (1998), pp. 173–176.
- [THA-80] W. THACKER, *A brief review of techniques for computational grids*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 15 (1980), pp. 1335–1341.
- [THEV-92] M. THEVENET, *Modélisation de l'activité électrique cérébrale par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1992. (No 92 ISAL 0036).
- [THOM-85] J. THOMPSON, Z. WARSI, ET C. MASTIN, *Numerical grids generation, foundation and applications*, North Holland, 1985.
-

- [THOM-93] R. THOMPSON, *The brain - A Neuroscience primer*, Freeman and Co (second edition), 1985.
- [TORI-82] J. I. TORIWAKI, S. YOKOI, T. YONEKURA, ET T. FUKUMURA, *Topological properties and topology-preserving transformation of a three-dimensional binary picture*, in 6th International Conference on Pattern Recognition, 1989, pp. 414–419.
- [TSAO-81] Y. F. TSAO ET K. S. FU, *A Parallel Thinning Algorithm for 3-D Pictures*, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 17 (1981), pp. 315–331.
- [VERW-91] B. VERWER, *Local distances for distance transformation in two or three dimensions*, Pattern Recognition Letters, 12 (1991), pp. 671–682.
- [WAR-01] T. WARD, *Topology lecture notes*, rapp. tech., Computer Vision Laboratory, Computer Science Center, University of East Anglia, School of Mathematics, 2001.
- [WAT-81] D. F. WATSON, *Computing the n-dimensional Delaunay Tessellation with applications to Voronoi polytopes*, Computer Journal, 24 (1981), pp. 167–172.
- [WEA-85] N. WEATHERHILL, *The generation of unstructured grids using Dirichlet Tessellation*, Rapp. Tech. MAE 1715, Princeton University, USA, 1985.
- [WEL-96] W. WELLS, R. KIKINIS, ET F. JOLESZ, *Adaptive segmentation of MRI data*, IEEE Transactions on Medical Imaging, 15 (1996), pp. 429–442.
- [YAM-76] T. YAMAMOTO ET Y. YAMAMOTO, *Electrical properties of the epidermal stratum corneum*, Medicine and Biology in Engineering, (1976).

Liste des figures

1.1	Schéma d'un neurone (d'après [KAHL-90]). (a) Les dendrites. (b) Le corps cellulaire. (c) L'axone. (d) Les extrémités synaptiques.	17
1.2	Subdivision de l'encéphale (en haut) en trois parties : les hémisphères (HD et HG), le cervelet (Cv) et le tronc cérébral (Tr) (d'après [HASB-98]).	18
1.3	Histologie du cortex (d'après [HASB-98]).	19
1.4	Les lobes cérébraux : lobe frontal (en haut à gauche), lobe pariétal (en haut à droite en vert), lobe occipital (en haut à droite en bleu), lobe temporal (en orange) (d'après [HASB-98]).	20
1.5	Définition des dipôles radiaux et tangentiels au niveau du ruban cortical.	21
1.6	Images d'un enregistrement M.E.G. (en haut) et d'un enregistrement E.E.G. (en bas) réalisés simultanément sur la machine C.T.F. de la Pitié-Salpêtrière. Les cartes à droite sont interpolées à partir des mesures sur les capteurs présentées à gauche.	25
1.7	(1) L'appareil C.T.F. de M.E.G. à l'hôpital de la Salpêtrière. (2) La chambre blindée assurant l'isolation électromagnétique. (3) Un schéma du dispositif de capteurs. On y voit l'emplacement des gradiomètres et le réservoir à Hélium liquide garantissant le refroidissement des SQUIDS. (4) Quelques types de magnétomètres utilisés aujourd'hui. . .	28
1.8	Une illustration d'une différence fondamentale entre M.E.G. et E.E.G. A gauche, une source dipolaire (flèche) produit un champ magnétique dont les équipotentiels (en trait gras) ne sont pas déformées aux interfaces. A droite, les lignes de courant volumique à l'origine des chutes de potentiel mesurées en surface par l'E.E.G. sont fortement déformées aux interfaces. D'après CTF Systems Inc, Vancouver, Canada.	29

LISTE DES FIGURES

1.9	Quelques exemples de modèle de tête (D'après [MAR-97]). Modèle sphérique à 3 couches (à gauche). Modèle à géométrie réaliste homogène par morceaux (au milieu). Modèle volumique à géométrie réaliste (à droite).	31
2.1	Les solides de Platon. (a) tétraèdre (b) hexaèdre ou cube (c) octaèdre (d) dodécaèdre (e) icosaèdre	35
2.2	Un tétraèdre orienté avec les normales dirigées à l'extérieur. $face\ 1 = \{A, B, C\}$, $face\ 2 = \{A, D, B\}$, $face\ 3 = \{A, C, D\}$ et $face\ 4 = \{D, C, B\}$	36
2.3	Définition du tétraèdre T pour le calcul du moment géométrique.	38
2.4	Triangles conformes (à gauche) et non conformes (à droite). Remarquer le sommet C situé sur une arête dans ce dernier cas. D'après [FREY-99].	40
2.5	Principe général d'une méthode algébrique (d'après [FREY-99]) dans le cas où le domaine Ω (à droite) est assimilé à un quadrangle. Trois étapes interviennent, le report des données sur le bord, le maillage du carré de référence $\widehat{\Omega}$ et le report de ce maillage sur le domaine réel (étapes 1,2 et 3 sur la figure)(d'après [FREY-99]).	45
2.6	Exemple en 2D (d'après [FREY-99]). Domaine logique (carré unité): coordonnées (ξ, η) à gauche. Domaine réel coordonnées (x, y) à droite.	46
2.7	Plusieurs implantations de la méthode multi-blocs. Les frontières sont en trait épais (d'après [FREY-99]). En haut, avec recouvrement. Au centre par carreaux (les frontières ont des surfaces conformes mais des lignes de maillages sont discontinues). En bas, composite (les lignes du maillage sont continues de part et d'autre de la frontière).	47
2.8	Le polyèdre de Schönhart : triangulation contrainte d'un prisme régulier conduisant à une décomposition valide sans ajout de point interne (en haut) ou donnant une configuration impossible à décomposer (en bas).	51
3.1	Un tétraèdre T invariant par subdivision	56
3.2	Parallélépipède P formé de six tétraèdres invariants par subdivision.	65
3.3	Connexité par face, arête et sommet et le polyèdre commun à 24 tétraèdres d'une T.P.R.T.	67

3.4	Analyse numérique des qualités Q_α^{-1} et Q_β pour les tétraèdres remplissant respectivement les conditions C_1, C_2, C_3 et C_4 du théorème 3.6.	69
3.5	Paramètres $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ d'une maille cristalline.	70
4.1	Déformation homotopique (d'après [HOCK-88]).	78
4.2	Les deux boucles ne peuvent pas être continuellement déformées l'une vers l'autre sur $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$ (d'après [HOCK-88]).	79
4.3	La courbe C_1 peut être déformée en un point mais pas la courbe C_2 car le tore possède un tunnel.	80
4.4	Illustration d'un voisinage d'un tétraèdre.	83
4.5	T est un tétraèdre de sommets (a, b, c, d) dont le voisinage $V(T)$ de T est représenté à gauche et l'ensemble d'attache $Bd_p T$ de T est représenté à droite (les arêtes sont en traits pleins et les faces sont hachurées).	85
4.6	$V(T) = \{T, T_1, T_2\}$ est connexe mais $Bd_p T$, qui ne contient que les deux sommets communs à T et à T_1 et T_2 respectivement, n'est pas connexe (d'après [SAHA-98a]).	86
4.7	(a) Un 1-simplexe avec une frontière fictive p_1 et (b) un complexe simplicial O où l'élément $c = (p_0 p_1) + (p_1 p_2) + (p_2 p_0) \in C_1(O)$ est un 1-cycle.	91
5.1	Conducteur sphérique multi-couches. La couche N , la plus interne, contient les sources de courant.	113
5.2	Affinement tétraédrique autour de 1, 2, 3, et 4 sommets (resp. les configurations H11, H21, H3, H4).	121
5.3	Les différents schémas ($H11$ à $H16$) de subdivision autour d'un sommet.	122
5.4	les différents schémas ($H21$ à $H24$) de subdivision autour de deux sommets.	123
6.1	Numérisation du crâne et du massif facial ou headshape . . .	133
6.2	segmentation du scalp I.R.M.	135
6.3	Algorithme de recalage E.E.G./I.R.M.	140
6.4	Résultats de recalage automatique	144
6.5	Segmentation du cerveau par morphologie mathématique 3D. Sans fermeture (en haut) et avec fermeture (en bas).	146
6.6	IRM pondérée en T1 (hôpital de la Pitié Salpétrière) à gauche et segmentation des tissus de la tête (scalp, crâne et encéphale) à droite, illustrée sur une coupe.	147
6.7	Les différentes niveaux de subdivision d'une $T.P.R.$ des tissus de la tête.	152

6.8	Etiquetage homotopique limité à l'objet cerveau avec $\mu_T = 0,8$. Tétraèdres simples de l'étiquetage homotopique (en noir) superposés à la segmentation des tissus de la tête	156
6.9	Tétraèdre T_O et $T_{Fo} = T_i$ pour le calcul d'un moment géométrique.	157
6.10	scalp et cerveau : superposition de la segmentation (en foncé) et du maillage homotopique tétraédrique (en clair) pour la résolution ($n = 3$) de la T.P.R.	159
6.11	scalp et cerveau : superposition de la segmentation (en foncé) et du maillage homotopique tétraédrique (en clair) pour la résolution ($n = 4$) de la T.P.R.	159
6.12	Convergence de l'étiquetage homotopique des tissus de la tête. Rapport (en ordonnées) entre le nombre de tétraèdres étiquetés par itération (en abscisses) et le nombre de tétraèdres ayant un seuil μ_T . Chaque courbe représente un tissu étiqueté (- pour le cerveau, o pour le crâne et + pour le scalp). (a) $\mu_T = 0,2$ (b) $\mu_T = 0,4$ (c) $\mu_T = 0,6$ (d) $\mu_T = 0,8$	162
6.13	Expérience 1 : Etude du paramètre μ_T dans le modèle homotopique d'étiquetage pour la résolution de la T.P.R. $n = 4$. (a) $\mu_T = 0,8$ sans μ_V et sans μ_{max} (b) $\mu_T = 0,6$ sans μ_V et sans μ_{max}	163
6.14	Expérience 2 : introduction du paramètre μ_V dans le modèle homotopique d'étiquetage. (a) $\mu_T = 0,8$ et $\mu_V = 0,1$ (b) $\mu_T = 0,6$ et $\mu_V = 0,1$	164
6.15	Expérience 3 : introduction de la proportion maximale de tissu dans un tétraèdre. (a) $\mu_T = 0,8, \mu_V = 0,1$ et μ_{max} (b) $\mu_T = 0,6, \mu_V = 0,1$ et μ_{max}	164
6.16	Elimination du critère d'arrêt ($\mu_T = 0,8, \mu_V = 0,1$ et μ_{max}).	165
6.17	Etude du paramètre μ_V pour $\mu_T = 0,8$. Superposition des tétraèdres simples du crâne (en noir) avec la segmentation. (a) $\mu_V = 0,8$ (b) $\mu_V = 0,6$ (c) $\mu_V = 0,4$ (d) $\mu_V = 0,2$	166
6.18	Etude du paramètre μ_V pour $\mu_T = 0,8$. Superposition des tétraèdres simples de la tête (en noir) avec la segmentation. (a) $\mu_V = 0,8$ (b) $\mu_V = 0,6$ (c) $\mu_V = 0,4$ (d) $\mu_V = 0,2$	167
6.19	Etude de la proportion des tissus crâne et tête pour différentes valeurs de μ_V avec $\mu_T = 0,8$. Rapport entre le nombre de tétraèdres étiquetés par itération (en abscisses) et le nombre de tétraèdres satisfaisant la composition de tissu maximal μ_{max} (en ordonnées) . (a) Proportion du crâne (b) Proportion de la tête.	168
6.20	Etiquetage optimal ($\mu_T = 0,8, \mu_V = 0,6$ et μ_{max}).	168

6.21	Etiquetage optimal avec segmentation en coupe oblique. (a) cerveau (b) crâne	169
6.22	Une représentation en 3D d'un étiquetage homotopique ($\mu_V = 0,6$ et $\mu_T = 0,8$) d'une T.P.R. des tissus de la tête à la résolution $N_{T_h} = 98304$	170
6.23	T.P.R. ($n = 4$) adaptés d'un seul tissu. L'échelle de couleurs correspond à la proportion d'un seul tissu dans chaque tétraèdre. (a) cerveau (b) os (c) scalp.	172
6.24	Histogrammes d'une T.P.R. adaptée du tissu cerveau. (a) qualité Q_α^{-1} , (b) qualité Q_β , (c) longueurs d'arêtes e	175
6.25	Histogrammes d'une T.P.R. adaptée correspondant à l'union des tissus de la tête. (a) qualité Q_α^{-1} , (b) qualité Q_β , (c) longueurs d'arêtes e	176
6.26	Extraction des surfaces lissées et non lissées des tissus de la tête à partir d'une T.P.R. de faible résolution ($n = 3$). (a) cerveau (b) crâne (c) tête.	178
6.27	Surfaces des tissus de la tête extraites d'une T.P.R. ($n = 3$) après lissage laplacien.	180
6.28	Calcul du potentiel électrique V par la méthode B.E.M.[HAMA-89]	180

Liste des tableaux

2.1	Valeurs caractéristiques d'un élément unité régulier.	37
2.2	Moments géométriques d'un tétraèdre $T = (a, b, c)$ jusqu'à l'ordre 2 (d'après [SHEY-01]).	39
3.1	La qualité Q_α^{-1} maximale d'une T.P.R. de R^3	68
3.2	La qualité Q_β maximale d'une T.P.R. de R^3	69
3.3	Les 7 mailles cristallines.	71
3.4	Paramètres (a, b, c) pour les parallélépipèdes construits à partir des tétraèdres remplissant respectivement les conditions C_1 , C_2, C_3 et C_4 du théorème 3.6.	72
3.5	Paramètres (α, β, γ) pour les parallélépipèdes construits à partir des tétraèdres remplissant respectivement les conditions C_1 , C_2, C_3 et C_4 du théorème 3.6.	72
4.1	Les groupes d'homologie $H_r(T)$ et $H_r(Bd T)$	98
5.1	Qualités Q_α^{-1} et Q_β pour chaque élément des différents types de subdivision pour le tétraèdre T^*	125
6.1	Effet du bruit sur le recalage.	142
6.2	Effet du nombre de points du headshape sur la précision du recalage	143
6.3	Nombre N_{T_h} de tétraèdres et le pourcentage des longueurs d'arêtes e_1 et e_2 pour chaque résolution n	148
6.4	Erreur relative $\Delta M/M_v = M_{T.P.R} - M_{voxels} /M_{voxels}$ des moments d'ordre 2 pour des T.P.R. de résolution 3 et 4 par rapport à la segmentation du cerveau.	158
6.5	Erreur relative $\Delta M/M_v = M_{T.P.R} - M_{voxels} /M_{voxels}$ des moments jusqu'à l'ordre 2 des T.P.R. de résolution 3 et 4 par rapport à la segmentation du crâne.	160
6.6	Erreur relative $\Delta M/M_v = M_{T.P.R} - M_{voxels} /M_{voxels}$ des moments jusqu'à l'ordre 2 pour des T.P.R. de résolution 3 et 4 par rapport à la segmentation de la tête.	160
6.7	Nombre de tétraèdres N_{Tetra} et d'arêtes N_A des T.P.R. adaptées pour les différents objets maillés.	171

LISTE DES TABLEAUX

6.8	Longueur e d'arête d'une $T.P.R.$ adaptée pour les différents tissus maillés.	174
6.9	Qualité Q_α^{-1} d'une $T.P.R.$ adaptée pour les différents tissus maillés.	174
6.10	Qualité Q_β d'une $T.P.R.$ adaptée pour les différents tissus maillés.	174
6.11	Nombre de triangles obtenus pour chaque tissu de la tête à la résolution tétraédrique $N_{T_h} = 12888$	179