

ECOLE DES MINES
DE PARIS

Collège Doctoral

N° attribué par la bibliothèque
/__/__/__/__/__/__/__/__/__/__/

THESE

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
Spécialité Sciences et Génie des Matériaux

Présentée et soutenue publiquement par

Jean–Sébastien BLAZY

le 25 avril 2003

Comportement mécanique des mousses d'aluminium : caractérisations expérimentales sous sollicitations complexes et simulations numériques dans le cadre de l'élasto-plasticité compressible

Directeurs de thèse : ***Yvan CHASTEL***
Samuel FOREST

Jury

M. Y. BRECHET	Rapporteur	INPG–Grenoble, France
M. H. ZHAO	Rapporteur	ENS–Cachan, France
M. E. MAIRE	Examinateur	INSA–Lyon, France
M. F. MOUSSY	Examinateur	Renault–Guyancourt, France
M. A. AWADE	Examinateur	Renault–Guyancourt, France
M. M. LANGSETH	Invité	SIMLab–Trondheim, Norvège
M. A. PINEAU	Invité	Ecole des Mines de Paris, France
M. Y. CHASTEL	Examinateur	Ecole des Mines de Paris, France
M. S. FOREST	Examinateur	Ecole des Mines de Paris, France

Centre des Matériaux P.M. FOURT de l'Ecole des Mines de Paris
Centre de Mise en Forme des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris

Résumé

Les impératifs croissants en terme de sécurité passive, mais également en terme de consommation et d'émissions polluantes, imposent aux constructeurs automobiles de trouver de nouvelles voies pour rendre leurs véhicules plus sobres et plus sûrs. Une solution structure à ce problème peut être envisagée : accroître la présence d'aluminium dans les véhicules. Mais l'aluminium peut également, par des techniques adaptées, être moussé. Il constitue alors un matériau cellulaire aux propriétés spécifiques très intéressantes notamment en terme de dissipation d'énergie lors d'impacts. En combinaison avec d'autres structures, comme des profilés par exemple, la mousse d'aluminium peut former des composites rigides et légers qui constituent une solution nouvelle pour la conception d'absorbeurs de chocs. Cependant, le coût de revient des mousses d'aluminium, la difficulté à contrôler son processus de fabrication, les méthodes d'intégration, encore peu définies et validées, ainsi que l'absence d'outil informatique d'aide à la conception de structures comprenant ces mousses, sont autant d'obstacles à leur utilisation effective dans les véhicules de grandes séries. Ces dernières années, les mousses d'aluminium ont donc suscité un intérêt considérable à la fois auprès de la communauté scientifique mais également auprès des industriels toujours à la recherche de solutions en rupture. Ainsi elles ont été très souvent étudiées du point de vue de leur microstruture et de leur comportement en compression. Les études sous chargements multi-axiaux sont plus rares. Pourtant la compréhension du comportement sous chargement multiaxial de ce matériau reste indispensable dans le but d'obtenir un dimensionnement optimisé de structures comprenant ces mousses. Afin d'être fiable, ce dimensionnement doit également tenir compte de la grande variabilité du comportement des mousses due à la présence de fortes hétérogénéités microstructurales, mesostructurales voire, dans certains cas, macrostructurales. L'objectif de cette thèse est de comprendre ces deux aspects et de proposer des modèles aussi simples que possible afin de réaliser un dimensionnement fiable et optimisé. Ainsi, la compression, la traction, le cisaillement, la torsion et des chargements proportionnels ou non proportionnels de traction - compression / torsion ont été étudiés. Pour chaque type de chargement la dispersion a été caractérisée. Si une distribution de Weibull permet de décrire la dispersion en traction, l'utilisation d'une contrainte équivalente couplée à une statistique de Weibull permet de prédire la dispersion pour d'autres types de chargements. L'observation des essais de compression grâce à l'utilisation de méthodes de mesure de champs par correlation d'images ou de tomographie à rayon X indique sans ambiguïté que la déformation de la mousse d'aluminium s'effectue avec une forte localisation sous forme de bandes. La prise en compte de la localisation de la déformation dans la modélisation du comportement est réalisée en utilisant la méthodes des éléments finis dans le cadre de la plasticité des matériaux compressibles. L'erreur commise lorsque ces phénomènes de localisation sont ignorés est quantifiée. Un plus grand réalisme peut être atteint encore en considérant l'hétérogénéité initiale de la mousse dans la simulation. Enfin une tentative de prise en compte de la connaissance tri-dimenssionnelle réelle de la structure de la mousse par tomographie dans la modélisation continue est présentée.

Abstract

An extensive experimental program and detailed mechanical analysis were performed to test and model the statistical response of metallic foams under complex loading conditions. Tensile tests were performed on more than eighty specimens of closed–cell aluminium foams with four different specimen sizes. These test results show a large scatter and a significant size effect especially on standard deviation. The average fracture stress and, more significantly, the corresponding scatter decrease for increasing volume sizes. A Weibull statistical analysis is performed and gives a Weibull modulus close to 8. Compression tests were also carried out. Both mean fracture stress in tension and mean peak stress in compression and the corresponding dispersions are correctly described by a single set of Weibull parameters. The statistical model is extended to multi–axial loading conditions by introducing an effective stress measure involving both the deviatoric part of the stress tensor and its trace. One additional parameter is identified using the average shear yield stress obtained from pure shear tests and torsion tests on solid bars. The model is then able to predict the dispersion found for the shear strength. Two types of combined tension/compression–torsion loading conditions were then tested experimentally. The non–proportional loading path consists of a tension test followed by torsion, keeping the axial stress constant. In the proportional loading path, shear and axial stress follow a straight line in the stress space. The corresponding surface of average yield/fracture stress is found to be symmetric. The experimental results are in good agreement with the predictions of the statistical model. The model predicts a bell–shaped surface for the first loading path and a quasi–elliptic one for the proportional one. The scatter found in the description of this surface is also accounted for accurately by the model. A brief discussion of an extension of Beremin's micromechanical model to the statistical failure of brittle foams is presented.

Aluminium foams cannot deform homogeneously under compression or multiaxial loading. Strain localization bands form in compression, that are approximately normal to the load axis. The plateau observed on the overall load displacement curve is due to the formation and propagation of such bands. Densification starts when all cell rows are crushed. These strain localisation phenomena must be taken into account for the identification of a constitutive model. This requires structural computations of the compressed sample. For that purpose, the softening behaviour observed after the initial peak stress on all compression curves is explicitely incorporated into the constitutive modelling. The proposed continuum compressible plasticity was implemented into a finite element program to simulate the band formation and propagation. The initial softening effect triggers strain localization in narrow bands. The densification taking place inside the band after a critical strain is responsible for the formation of new bands near or far from the first one. A good agreement is obtained with experimental results when the heterogeneous density field, deduced from tomographical analyses, is included in the simulation. In particular this heterogeneity induces a slight hardening instead of the theoretical plateau as observed experimentally.

A mon père.

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier Samuel Forest qui, non seulement a co–encadré cette thèse mais m'a aidé à la porter à bout de bras par moments. Samuel, ton enthousiasme, ta rigueur scientifique, ta persévérance, ta totale disponibilité sont pour moi des exemples. Sans toi ce travail n'aurait jamais pu aboutir, je ne l'oublierai jamais. Je suis fier d'avoir été un de tes thésards. Je quitte un Directeur de thèse mais je gagne un ami. Merci.

Un grand merci à Yvan Chastel, mon autre Directeur de thèse. Tu m'as fait confiance en me proposant ce sujet passionnant. Merci pour tes conseils et tes encouragements.

J'adresse mes remerciements les plus vifs à Monsieur Yves Brechet qui a accepté de rapporter et de présider le jury de ma thèse. Ces réflexions sur mon travail m'ont beaucoup touché et ont confirmé que ce matériau incroyable qu'est la mousse d'aluminium n'a pas encore livré tout ces secrets.

Merci à Han Zhao qui a rapporté rapidement mon travail. Merci également à Eric Maire, membre du jury, véritable spéléologue des mousses, qui a initié l'aspect tomographie de ce travail.

I also want to thank Pr Magnus Langseth. We had very interesting discussions during this three years not only concerning foam but also "old grape fruit juice" !

Un immense merci à toute l'équipe Renault de ce projet. A Claude Peytour qui a monté ce projet de thèse et qui a eu la bonne idée de me recruter ! A François Moussy et Achille Awadé qui ont su encadrer mon travail dans l'intérêt de l'entreprise tout en me laissant la liberté nécessaire à un travail de thèse. A toute l'UET Mécanique et Matériaux de la DIMAT, avec une mention spéciale pour Christophe Grolleron, son expérience des mousses d'aluminium m'a permis de gagner beaucoup de temps.

Un grand merci à André Pineau, le plus formidable stagiaire de l'école des Mines de Paris. Merci de m'avoir accueilli au « bocal », de m'avoir permis d'utiliser cette fabuleuse mais caractérielle machine de traction torsion Jacottet ! Votre aide sur l'aspect statistique de mon travail a été déterminante. Je n'oublierai pas nos discussions scientifiques, historiques et automobiles. Merci.

Ce travail de thèse a pu se dérouler dans de bonnes conditions grâce à tous les chercheurs thésards, techniciens et administratifs du centre des matériaux P-M. Fourt. Que tout ceux qui suivent soient remerciés : Jacques Besson, Anne-Françoise Gourgues, Michel Boussuge, Messire Michel Rousselot, Grégory Sainte Luce, Véronique Diamentino, Frédéric Bron, Sylvain Flouriot, Franck Alexandre, Alexandra Asserin–Lebert, Thierry Dillard, Bruno Barlat, Julie Heurtel, Jérôme Labrousse. Mention speciale pour René Locicero, le dompteur de Jacotet, et Alexandra Marie-Louise dont l'aide sur la caracterisation statistique a été plus que précieuse.

Merci également à tous les chercheurs, thésards, techniciens et administratifs du centre de mise en forme des matériaux à Sophia Antipolis, avec une mention très spéciale pour Emmanuelle de Castro, Matthieu Koscher et même pour Gerard Steinmetz dit Gérard Free parti chez PSA.

Merci aux Antibois : les Leo, la Gradoskaya, les Bianchini et tous les autres. Merci aux Montpelliérains, Greg, Pascale et Yves. Merci aux Ardéchois, Malsert, Audigier, Feugier et merci aussi à la caillette ! Merci à tous pour votre soutien.

Certains amis sont plus que des amis, merci JiCi.

Merci à mon Frère, Florian, pour tout ce que nous avons partagé « en frère ! » et partagerons encore. Une partie de cette thèse te revient !

Merci à ma « douce » Maman, Merci tout simplement d'être ma maman.

Ce qui revient à Nath, ma Bichonne, va bien au delà des remerciements ou même de la gratitude. Comment exprimer ton importance dans ce travail et dans ma vie. Même si souvent je ne parle pas assez j'espère que tu sais.

Le grand Saint Exupéry épinglait la mémoire en disant qu'elle ne servait qu'à oublier. Alors merci à tous les oublié(e)s de ces remerciements.

Enfin merci à toi Lecteur de te pencher sur mon travail. Même si le génial L. Boltzmann conseillait de laisser le souci d'élégance aux tailleurs et aux cordonniers, j'ai écris ce manuscrit en tentant de le rendre le plus agréable à lire, en espérant que toi, Lecteur, tu lises un peu plus loin que les remerciements.

Table des matières

Partie I Introduction générale

1 Méthode d'obtention 2
1.1 Voie fonderie 2
1.2 Voie métallurgie des poudres 4
1.3 Voie hybride 4
2 Intérêt industriel 5
2.1 Le renforcement structural 8
2.2 Interaction passager/véhicule ou piéton/véhicule 11
3 Quelques éléments de mécanique des mousses 12
4 Objectifs et plan de la thèse 14
4.1 Objectifs de la thèse 14
4.2 Plan de la thèse 14

Partie II Structure de la mousse d'aluminium

Introduction **24**

Chapitre 1 Echelle microscopique **25**
1.1 Préparation des échantillons 25
1.2 Observation au microscope optique 25
1.3 Observation au microscope électronique à balayage 27
1.4 Analyse chimique 28
1.4.1 Méthode EDS globale 28
1.4.2 Méthode chimique 28
1.4.3 Conclusion sur la microstructure 29

Chapitre 2 Echelle mésoscopique **33**
2.1 Approche descriptive 33
2.2 Approche analytique 34

Chapitre 3 Echelle macroscopique **40**

Partie III Approche expérimentale et statistique du comportement mécanique de la mousse d'aluminium

Chapitre 1 Multiaxial behaviour of aluminium foams **44**
1.1 Abstract 44
1.2 Introduction 45
1.3 Experimental procedures 46
1.3.1 Material : composition and microstructure 46
1.3.2 Mechanical testing 48
1.4 Experimental results 51
1.4.1 Uni-axial tests 51
1.4.2 Multi–axial tests 56
1.5 Discussion and modelling 59
1.5.1 Statistical analysis and size effect for uni–axial loading conditions 60
1.5.2 Extension of the Weibull's analysis to torsion tests 62
1.5.3 Extension of the statistical analysis to multi-axial loading conditions 63
1.5.4 A tentative micromechanical model 67
1.6 Conclusions 69

Chapitre 2 Compléments sur les essais sur mousse d'aluminium **72**
2.1 Essai de compression 72
2.1.1 Effet de l'oxydation 72
2.1.2 Effet de la présence de peau 72
2.1.3 Effet de la vitesse de sollicitation 73
2.1.4 Effet de la forme de l'éprouvette 75
2.1.5 Effet des conditions aux limites 76
2.1.6 Etude expérimentale de la localisation de la déformation 81
2.2 Essai de traction 85
2.3 Essai de cisaillement 87

Partie IV Modélisation et simulation du comportement mécanique de la mousse d'aluminium

Introduction aux modèles adaptés aux mousses **92**

Chapitre 1 Théorie de la plasticité compressible **93**
1.1 Critères de plasticité 93
1.1.1 Critère de von Mises 93
1.1.2 Critère de Green 94
1.1.3 Loi d'écoulement associée au critère de Green 97
1.2 Autres modèles pour mousse d'aluminium 98
1.2.1 Modèles 26 et 126 issus de LS-DYNA 98
1.2.2 Loi n° 63 de LS-DYNA 99
1.2.3 Modèle CRUSHABLE FOAM d'ABAQUS 99
1.3 Comparaison et choix du modèle 100

Chapitre 2 Simulation du comportement de la mousse d'aluminium : approche globale **102**
2.1 Identification sur l'essai de compression 102
2.2 Validation de l'approche globale 103

Chapitre 3 Simulation de la localisation de la déformation **110**

3.1 Modélisation de la localisation de la déformation en compression 110
3.2 Modélisation de la localisation de la déformation en traction 113
3.3 Modes de localisation et bifurcation en élastoplasticité compressible 113
3.4 Dépendance vis à vis du maillage 118
3.5 Prise en compte des grandes déformations 118
3.6 Validation de l'approche prenant en compte la localisation de la déformation 121
3.7 Prise en compte des hétérogénéités initiales 121

Chapitre 4 Prise en compte de l'hétérogénéité initiale réelle de la mousse dans la simulation **132**

4.1 Mesure des hétérogénéités initiales 132
4.2 Simulation sur des hétérogénéités réelles 134
4.2.1 Carte des porosités initiales 134
4.2.2 Loi de comportement dépendant de la porosité initiale et simulation 135

Partie V Conclusions et perspectives

Partie VI Annexes

Annexe A La statistique et la rupture des matériaux **146**

A.1 Théorie de Weibull 147
A.1.1 Distribution statistique de Weibull 147
A.1.2 Effet de volume 148
A.2 Estimation des paramètres de Weibull 149

Annexe B La méthode des éléments finis **150**
B.1 Résolution d'un problème général de mécanique 150
B.2 Discrétisation spatiale 152
B.2.1 Démarche générale 152
B.2.2 Choix des éléments et problèmes associés : 155
B.2.3 Le contrôle de l'effet sablier 158
B.3 Discrétisation temporelle 159
B.3.1 Cas des codes explicites 159
B.3.2 Cas des codes implicites 161

Annexe C Analyse de bifurcation en multi-axial **163**

Annexe D Dépendance des résultats vis–à–vis du maillage et méthode de régularisation **165**
D.1 Mise en évidence de la dépendance vis–à–vis du maillage 165
D.2 Exemple de méthode de régularisation : le milieu micromorphe 166
D.3 Implémentation dans un code par éléments finis 168
D.4 Validation de l'élément fini micromorphe : extension simple en élasticité 170
D.5 Elastoplasticité micromorphe 172
D.6 Première application à la localisation de la déformation 174
D.7 Deuxième application à la localisation de la déformation 175
D.8 Troisième application à la localisation de la déformation 176

Bibliographie **189**

Table des figures

1 Schéma de principe d'une installation de production de mousse d'aluminium par voie fonderie (procédé Cymat). 3
2 Photographie d'un bloc de mousse Hydro Aluminium de 10 cm de large et de densité 0.06 4
3 Photographie d'un bloc de mousse Hydro Alumminium de 10 cm de large et de densité 0.25 4
4 Schéma de principe du procédé de production de mousse d'aluminium par voie métallurgie des poudres 5
5 Photographie d'un sandwich aluminium / mousse d'aluminium obtenu par métallurgie des poudres 5
6 Schéma de principe du procédé de production de mousse d'aluminium par voie hybride . 6
7 Courbe contrainte / déformation caractéristique d'une mousse d'aluminium. [Blazy98] . 6
8 Courbe effort / déplacement caractéristique d'un absorbeur de choc idéal [Blazy98] . . . 7
9 Energie spécifique absorbée jusqu'à densification en fonction de la contrainte plateau à 25 % de déformation pour différents types de mousse (d'après [Ashby et al.00]) 7
10 Energie absorbée par unité monétaire en fonction de la contrainte plateau à 25 % de déformation pour différents types de mousse (d'après [Ashby et al.00]) 8
11 Schéma d'une caisse de RENAULT Laguna 2 Estate et périmètre d'utilisation éventuelle des mousses d'aluminium pour renforcement structural. Les pièces rouges indiquent l'utilisation d'acier à haute limite d'élasticité 9
12 Position du crash box dans l'architecture de la face avant du véhicule 16
13 Comparaison des modes de flambement pour un profilé vide (à gauche) de section carrée de 50 mm de côté et pour ce même profilé rempli de mousse d'aluminium (à droite). La mousse d'aluminium change la longueur d'onde des plis et permet au profilé de dissiper intrinsèquement plus d'énergie. Il y a interaction entre la mousse et le profilé. 16
14 Effet d'interaction entre la mousse d'aluminium et le profilé extrudé 17
15 Comparaison de l'effort spécifique pour un profilé vide et un profilé rempli de mousse d'aluminium. Le gain en énergie spécifique est représenté par l'aire délimitée entre les deux courbes 17
16 Vues de face d'une Laguna 2 avant (gauche) et après (droite) un choc frontal de type EuroNcap a 64 km/h et 40 % de recouvrement délimité par la ligne blanche sur la vue de gauche 18
17 Exemple de remplisage de cœurs creux de formes complexes par de la mousse d'aluminium voie fonderie 18
18 Renforcement de pied milieu par une solution métallurgie des poudres 18
19 Zones d'utilisation éventuelle pour la protection du passager. (A) et (B) chocs tête et thorax sur volant. (D) zone de choc entre genou et planche de bord et pieds et plancher. (E), (F) et (G) chocs entre tête, épaule et bassin et portière ou pied milieu. 19

20 Préparation d'une planche de bord pour un choc frontal type EuroNCAP à 64 km/h et à 40 % de recouvrement. Les blocs de mousses indiquées sur la photos sont des marqueurs de choc afin de localiser la zone sous la planche sur laquelle les genoux du mannequins vont impacter 19
21 Bloc de mousses marqueurs après un choc frontal type EuroNCAP à 64 km/h et à 40 % de recouvrement. Les marques de couleurs indiquent les impacts des genoux du mannequin 20
22 Cellule cubique à porosité ouverte 20
23 Cellule cubique à porosité fermée 20
24 Evolution du module d'Young en fonction de la densité 21
25 Evolution de la limite élastique en fonction de la densité relative 21

1 Les 3 échelles d'observations (de gauche à droite) : microscopique, mésoscopique et macroscopique 24

1.1 Observation au microscope optique. Vue globale distinguant les différentes structures rencontrées dans les parois et les points triples. 26
1.2 Observation au microscope optique. Vue globale détaillant la structure principalement rencontrée dans les arêtes. 26
1.3 Observation au microscope optique. Vue détaillant la structure principalement rencontrée dans les points triples. 27
1.4 Détails des microstructures au MEB. On distingue parfaitement les particules noires de carbure de silicium sur la micrographie du bas 30
1.5 Zone étudiée à la microsonde 31
1.6 Cartographie de la répartition de l'aluminium 31
1.7 Cartographie de la répartition du Silicium 31
1.8 Cartographie de la répartition du cuivre 31
1.9 Cartographie de la répartition du nickel 32
1.10 Cartographie de la répartition du magnésium 32
1.11 Présence d'alumine sous forme de batonnets à la surface de certaines cellules 32

2.1 Schéma de principe d'un dispositif de tomographie à rayons X 35
2.2 Scans réalisés sur un cube de mousse d'aluminium de 50 mm de côté pour différents angles d'incidence 35
2.3 Section 2D dans le plan (y ;z) reconstruite à partir des scans 36
2.4 Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : vue extérieure 36
2.5 Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle parrallèle aux coupes 2D reconstruites à partir des scans 36
2.6 Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle parrallèle aux coupes 2D reconstruites à partir des scans 37
2.7 Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle parrallèle aux coupes 2D reconstruites à partir des scans 37
2.8 Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle perpendiculaire aux coupes 2D reconstruites à partir des scans 37
2.9 Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle perpendiculaire aux coupes 2D reconstruites à partir des scans 37
2.10 Analyse d'image sur une coupe reconstruites à partir de scans issus de tomographie à rayons X 38

2.11 Traitement par analyse d'image d'une coupe tomographique rayon X. Répartition de la surface des cellules. 39

3.1 Coupe virtuelle 2D obtenue par tomographie 3D : image en niveau de gris 41
3.2 Coupe virtuelle 2D obtenue par tomographie 3D : image seuillée 41
3.3 Variation de la densité en fonction de l'échantillon 41

1.1 (a) Cell wall microstructure (SEM micrograph), (b) Zoom on SiC particle (labelled 1) and the three main phases using microprobe analysis : Matrix (labelled 2), Al-Si phase (labelled 3), Intermetallic phase (labelled 4). 47
1.2 Density variation of all tested specimens as a function of specimen diameter. 48
1.3 Specimen assembly and tensile setup. 49
1.4 Simple shear test setup. 50
1.5 Modification of the tensile setup to perform tension-compression/torsion tests. 51
1.6 Investigated loading paths for tension/torsion tests : Non proportional loading (number 1, tension followed by torsion), proportional loading (number 2). 52
1.7 Compression stress-strain curves (cube specimen geometry). 53
1.8 Stress-strain curve of a tensile test on aluminium foam. 54
1.9 Tensile fracture stress for all investigated specimens as a function of specimen volume : Mean value and standard deviation. 55
1.10 SEM fracture surface observations : (a) Fractography of a cell-wall ; (b) Longitudinal section of a nickel coated and polished cell wall showing preferential crack propagation along SiC particules 55
1.11 Shear stress/strain curve for a shear test. 56
1.12 (a) Stress-Strain curve for a specimen in torsion. (b) Corresponding fracture surface of the specimen (specimen diameter : 65 mm). 57
1.13 (a) Stress-Strain curve for a non–proportional compression–torsion test. (b) Corresponding fracture surface of the specimen (specimen diameter : 65 mm) after separation. . . . 58
1.14 (a) Stress-strain curve for a non–proportional tension–torsion test. (b) Corresponding fracture surface of the specimen (specimen diameter : 65 mm). 59
1.15 Fracture probability distributions in tension for the specimen sizes T1 to T4 (figures (a) to (d) respectively) : Experimental results and prediction according to Weibull's model. . 61
1.16 Statistical yield criterion for non proportional loading path 1 : Axial tension followed by torsion. Mean yield shear stress for prescribed axial stress and corresponding interval of confidence. 65
1.17 Statistical yield criterion for proportional loading path. Experimental data versus model prediction. 67

2.1 Effet de la préparation des éprouvettes sur le comportement mécanique en compression. . 73
2.2 Effet de la présence de peau sur l'échantillon au cours d'un essai de compression. 73
2.3 Effet de la vitesse de sollicitation en compression. Essai réalisé au cours du Projet EAMLIFe sur des blocs de mousse d'aluminium de densité 0.17. L'essai dynamique est réalisé à l'aide d'un puits de chute et d'une masse de 580 kg. La vitesse de déformation initiale pour l'essai dynamique est de l'ordre de 100 s^{-1} 74
2.4 Effet de la vitesse de sollicitation en compression sur mousse ALPORAS. Source [Mukai et al.99] 74
2.5 Effet du rapport d'élancement de l'éprouvette sur la déformation à densification 75

2.6 Visualisation des mouvements de blocs rigides lors de la compression d'une éprouvette à fort rapport d'élancement . . . 76
2.7 (A) Schéma de la forme de l'éprouvette à section variable de [Wierzbicki et al.01]. (B) Schéma de la déformée après compression . . . 77
2.8 Photographie d'une éprouvette trapézoïdale de mousse avant et après compression . . . 77
2.9 Courbe effort/déplacement lors de la compression de deux éprouvettes trapézoïdale en mousse d'aluminium . . . 78
2.10 Schéma de l'essai de compression coin de [Hanssen00] . . . 78
2.11 Schéma de principe de la compression d'un bloc de mousse d'aluminium entre deux tas plats rigides (A) et entre un tas plat rigide et une rotule (B) . . . 79
2.12 Comparaison entre deux essais de compression réalisés entre deux tas plats rigides et entre un tas plat rigide et un autre monté sur rotule. Zoom sur le premier pic d'effort. . . . 79
2.13 Compression d'un bloc de mousse à l'aide d'un impacteur cylindrique. Toute la déformation est localisée sous l'impacteur . . . 80
2.14 Essai de compression réalisé entre un tas plat et un impacteur cylindrique de 100 mm de diamètre. L'échantillon est un cube de 100 mm de côté et de 95 mm d'épaisseur. . . . 80
2.15 Image d'un cube de mousse de 50 mm de coté obtenue à l 'aide d'une caméra rapide avant compression (à gauche) et après compression (à droite). La zone indiquée en pointillés blancs montre une forte localisation de la déformation. La ligne centrale grise présente sur les deux images correspond à la limite entre les deux ccd de la caméra et n'affecte pas la corrélation. . . . 82
2.16 Vue de l'éprouvette avant compression à gauche et maillage initial utilisé pour la corrélation de mesure de champs. $\varepsilon_{total} = 0$ . . . 82
2.17 Vue de l'éprouvette après apparition de la première bande de localisation, les cellules sont refermées à moitié (à gauche). Maillage après corrélation de mesure de champs (à droite), on constate la localisation de la déformation sous forme de bandes quasi horizontales. $\varepsilon_{total} = 2\%$ . . . 83
2.18 Vue de l'éprouvette après fermeture totale de la première bande de localisation, les cellules sont refermées totalement (à gauche). Maillage après corrélation de mesure de champs (à droite), on constate une forte localisation de la déformation sous forme de bandes quasi horizontales. $\varepsilon_{total} = 5\%$ . . . 83
2.19 Courbes de compression raboutées. Cette courbe comprend les 4 essais de compression successifs du même bloc afin d'atteindre différents niveaux de déformation totale entre chaque tomographie . . . 84
2.20 Trois coupes obtenues par tomographie 3D à rayon X pour différents niveaux de déformation totale. A gauche 0 % de déformation. Au centre 3.5 % de déformation totale. A droite 6 % déformation totale. . . . 84
2.21 Eprouvette os de chien vue de dessus utilisée par [Cullough et al.99]. . . . 85
2.22 Courbe contrainte / déformation d'un essai de traction sur mousse ALPORAS. Source [Paul et al.99]. . . . 85
2.23 Courbe contrainte / déformation de deux essais de traction sur bloc de mousse parallélépipédique. La déformation à rupture est également dispersée. . . . 86
2.24 Montage de traction sur bloc de mousse parallélépipédique. Source projet EAMLIFe. . . . 86
2.25 Simulation de l'essai de cisaillement : maillage initial et maillage déformé avec déplacements multipliés par 5. Visualisation de σ_{12} . . . 87
2.26 Evolution de σ_{12} le long de l'axe 2 en fonction du type de fixation . . . 88
2.27 Evolution de σ_{11} le long de l'axe 2 en fonction du type de fixation . . . 88
2.28 Evolution de σ_{22} le long de l'axe 2 en fonction du type de fixation . . . 89

2.29 Evolution de l'état de contrainte normalisé avec (de gauche à droite) des fixations en aluminium, des fixations en acier et des fixations en un matériau virtuel infiniment rigide 89

1.1 Zone d'exploration du plan (p,q) pour l'essai de compression 95
1.2 Zone du plan (p,q) explorée par l'essai de traction 95
1.3 Zone du plan (p,q) couverte par l'essai de traction - torsion. 96
1.4 Evolution de la surface de plasticité du modèle CRUSHABLE FOAM d'ABAQUS dans le plan p,q 100
1.5 Evolution de la surface de plasticité du modèle CRUSHABLE FOAM d'ABAQUS en fonction de K dans le plan déviatorique 101

2.1 Evolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression, on remarquera le coefficient d'expansion latérale plastique $\nu_p = 0$ 104
2.2 Evolution de C en fonction de f pour une mousse de porosité initiale 90.4%. L'évolution de C en fonction de f est obtenue par identification sur la courbe de compression entre 0 % et 70 % de déformation totale 104
2.3 Evolution de la surface de la surface de rupture pour C croissant avec le porosité 105
2.4 Comparaison essai de compression/simulation 106
2.5 Evolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression sur la pyramide de [Wierzbicki et al.01] 107
2.6 $\overline{\varepsilon}$ en fin de compaction de l'essai de compression latérale. On remarque le décollement du maillage de l'impacteur qui ne se produit pas lors de l'essai. La zone plastique est plus étendue que dans l'expérience. 108
2.7 ε_{22} en fin de compaction de l'essai de compression latérale. La déformation des bords du maillage du bloc de mousse ne se produit pas dans l'expérience. La zone plastique est beaucoup plus étendue que dans l'expérience 108
2.8 Comparaison calcul-essai lors de la simulation d'un test de compression à l'aide d'un impacteur cylindrique. 109

3.1 Zoom sur le pic lors d'un essai de compression. Définition de ε_1, ε_2 et σ_{min} 111
3.2 Courbe de compression d'un point de Gauss pour tenir compte de la localisation de la déformation dans la simulation 111
3.3 Courbe d'évolution en forme de crochet de C en fonction de f afin d'obtenir un comportement adoucissant puis durcissant au cours d'une compression d'un point de Gauss . . . 112
3.4 Maillage initial et position des deux défauts afin de précipiter la localisation de la déformation 113
3.5 Evolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression, on remarquera le coefficient d'expansion latérale plastique $\nu_p = 0$, la propagation de la localisation de la déformation s'effectue sous forme de bandes horizontales successives jusqu'à remplissage complet de l'éprouvette. 114
3.6 Comparaison calcul-essai sur un essai de compression avec prise en compte de la localisation de la déformation 115
3.7 Evolution de C en fonction de f comprenant le crochet qui provoque la propagation de la localisation de la déformation en compression et la croissance de C en fonction f qui provoque la rupture en traction 116
3.8 Evolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de traction, on remarquera le coefficient d'expension latérale plastique $\nu = 0$, la propagation de la localisation de la déformation s'effectue sous la forme d'une bande horizontale 116

3.9 Courbe contrainte déformation lors de la simulation d'un essai de traction avec prise en compte de la rupture . . . 117
3.10 Schéma de principe d'une bande de localisation dans un matériau élastoplastique dans le plan et dans l'épaisseur. . . . 118
3.11 Courbes de comportement intrinsèque sur élément de volume calculées en petites perturbations (HPP) et en transformations finies (TF) : cas d'un comportement conduisant à de la localisation dans un calcul de structure. . . . 120
3.12 Courbes de charge de compression sur un bloc de mousse de porosité initiale 0.934 (comportement avec crochet initial (cf. figure 3.11) et deux défauts initiaux), dans le cas HPP et grandes déformations. . . . 120
3.13 Champ de porosité f après 40% de compression sur un massif de mousse de porosité initiale 0.934 (comportement avec crochet initial (cf figure 3.11) et deux défauts initiaux) : simulation HPP à gauche et en grandes transformations à droite. . . . 121
3.14 Comparaison de l'évolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression d'une pyramide de mousse, à gauche simulation de la compression sans prise en compte de la localisation, à droite simulation de la compression avec prise en compte de la localisation. La propagation de la localisation de la déformation s'effectue alors sous forme de bandes horizontales . . . 123
3.15 Comparaison de l'évolution de ε_{22} au cours de la simulation avec prise en compte de la localisation de la déformation lors de l'essai de compression coin d'un bloc de mousse. La propagation de la localisation de la déformation s'effectue alors sous forme de bandes horizontales et reste confinée sous l'impacteur . . . 124
3.16 Comparaison de l'évolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression d'un bloc de mousse à l'aide d'un impacteur cylindrique, à gauche simulation de la compression sans prise en compte de la localisation, à droite simulation de la compression avec prise en compte de la localisation. La localisation de la déformation s'effectue juste sous l'impacteur comme constaté pendant d'essai. . . . 125
3.17 Comparaison essai / calcul avec et sans prise en compte de la localisation de la déformation lors de la compression d'un bloc de mousse à l'aide d'un impacteur cylindrique . . . 126
3.18 Initialisation d'un maillage 3D sur une distribution de porosités intiales aléatoires centrée sur une porosité moyenne . . . 127
3.19 Histogramme de la distribution de porosités initiales aléatoires centrée sur une porosité moyenne de 90.7 % . . . 128
3.20 Evolution de C en fonction de f pour différentes porosités initiales. Chaque groupe d'éléments initialisé à une porosité f_{ini} suit une loi d'évolution de C en fonction de f de type crochet initialisée à $C_{ini}(f_{ini})$ . . . 129
3.21 Compression d'un bloc de mousse 3D initialisé sur une distribution de porosité intiale aléatoire centrée sur une porosité moyenne. La localisation de la déformation est plus diffuse mais tend également à former des strates . . . 130
3.22 Comparaison essai / calcul avec prise en compte de la localisation de la déformation et initialisation du maillage sur des porosités aléatoires centrées sur 90.7 % . . . 131

4.1 Principe de calcul de la porosité locale à l'aide d'une boite de 10 pixel de côté et stockage des données sur une image résultat . . . 133
4.2 Coupe virtuelle 2D obtenue par tomographie 3D : image avec 256 niveaux de gris . . . 134
4.3 Coupe virtuelle idéalement seuillée, la porosité apprarente correspond à la porosité réelle du bloc de mousse . . . 134
4.4 Coupe virtuelle sur seuillée, la porosité apparente est inférieure à la porosité réelle . . . 134

4.5 Coupe virtuelle sous seuillée, la porosité apparente est supérieure à la porosité réelle . . 134
4.6 Image seuillée de 358 pixels de côté 136
4.7 Image retravaillée avec une boîte de 10 pixels de côté 136
4.8 Histogramme des niveaux de gris sur l'image analysée avec une boîte de 10 pixels de côté : l'ambitus des porosités est alors maximale et varie de 0 à 1 136
4.9 Image seuillée de 358 pixels de côté 137
4.10 Image retravaillée avec une boîte de 90 pixels de côté 137
4.11 Histogramme des niveaux de gris sur l'image analysée avec une boîte de 90 pixels de côté : l'ambitus des porosités est alors plus réduit et varie de 63% à 95% 137
4.12 Image résultat obtenue avec une boîte de 90 pixels de côté et maillage correspondant. Chaque point de gauss du maillage est associé à un pixel de l'image résultat et est initialisé à une porosité correspondant au niveau de gris du pixel auquel il est associé 138
4.13 Evolution de ε_{22} lors de la simulation d'une compression sur un maillage dont la cartographie des porosités est donnée en figure 4.2.1. La déformation se localise initialement dans les points de Gauss dont les porosités initiales sont les plus grandes puis se propage sous forme de bandes. 139
4.14 Coupes 2D reconstruites à partir de scans issus de tomographie à rayon X et réalisée sur le même bloc de mousse pour différents niveaux de déformation totale. 140

A.1 Evolution de P_R en fonction de σ pour differente valeur de m 147

B.1 La brique à 8 noeuds 156
B.2 Les 4 modes d'hourglass de la brique à 1 point d'intégration 158

C.1 Simulation d'un essai de glissement simple avec une mousse élastoplastique compressible avec pic : cas classique à gauche, cas régularisé avec un milieu micromorphe à droite (composante ε_{12}). 163

D.1 Conditions de calcul d'une plaque élastoplastique en traction verticale. 177
D.2 Courbes de charge lors de la traction d'une plaque élastoplastique adoucissante, obtenues pour différents maillages. 178
D.3 Profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical en fin de calcul pour différents maillages. 179
D.4 Solution $(u_2, \chi_{11}, \chi_{22})$ du problème d'extension simple pour un milieu micromorphe élastique linéaire. Les paramètres utilisés sont les suivants : $E = 52000$MPa, $\nu = 0.3$, $b_1 = \lambda = 30000$MPa, $b_2 = b_3 = \mu = 20000$MPa, $A_{1,\dots,8} = 10000$ MPa.mm^2, $A_{10,\dots,15} = 20000$ MPa.mm^2, $L = 100$ mm, $\chi_0 = 0.01$. Les lignes correspondent à la solution analytique tandis que les symboles donnent les résultats de la simulation par éléments finis. 180
D.5 Solution (u_2, χ_{22}) du problème d'extension simple pour un milieu micromorphe élastique linéaire. Les paramètres utilisés sont les suivants : $E = 72000$MPa, $\nu = 0.2$, $b_1 = \lambda = 20000$MPa, $b_2 = b_3 = \mu = 30000$MPa, $A_{1,\dots,8} = 20000$ MPa.mm^2,$A_{10,\dots,15} = 10000$ MPa.mm^2, $L = 100$ mm, $\chi_0 = 0.01$. Les lignes correspondent à la solution analytique tandis que les symboles donnent les résultats de la simulation par éléments finis. 181
D.6 Courbes de charge lors de la traction d'une plaque élastoplastique adoucissante, obtenues pour différents maillages et un milieu micromorphe sans critère de plasticité généralisé. . 182
D.7 Profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical en fin de calcul pour différents maillages, dans le cas d'un milieu micromorphe sans critère de plasticité généralisé. 183

D.8 Courbes de charge lors de la traction d'une plaque élastoplastique adoucissante, obtenues pour un milieu micromorphe sans critère de plasticité généralisé avec différentes longueurs caractéristiques (maillage avec 20x2 éléments). 184
D.9 Superposition du profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical calculé par éléments finis pour un milieu micromorphe, et d'une fonction sinusoïdale ayant la longueur d'onde prévue analytiquement. 185
D.10 Superposition du profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical calculée par éléments finis pour un milieu micromorphe, et d'une fonction sinusoïdale ayant la longueur d'onde prévue analytiquement (cas de la plasticité micromorphe multicritères). 186
D.11 Courbes de charge lors de la traction d'une plaque élastoplastique adoucissante, obtenues pour un milieu micromorphe avec un critère unique de plasticité généralisée pour différentes valeurs du paramètre b. L'unité de b est MPa.mm^{-2}. Le maillage utilisé comporte 100x2 éléments (sauf pour l'une des courbes). 187
D.12 Profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical en fin de calcul pour différentes valeurs de b. L'unité de b est MPa.mm^{-2}. Le maillage comporte 100x2 éléments. Les courbes sont tronquées selon X et Y pour mieux distinguer les bandes. 188

Première partie

Introduction générale

Les impératifs croissants en terme de sécurité passive, mais également en terme de consommation et d'émissions polluantes, imposent aux constructeurs automobiles de trouver de nouvelles voies pour rendre leurs véhicules plus sobres et plus sûrs. Même si l'utilisation des accessoires de sécurité - comme les coussins gonflables - n'est pas à remettre en question, ils alourdissent le véhicule et pénalisent de ce fait la consommation et les émissions polluantes. Une solution structure à ce problème peut être envisagée : accroître la présence d'aluminium dans les véhicules. En effet, ce matériau possède une masse volumique près de trois fois inférieure à celle de l'acier (soit $2,7 kg/dm^3$ contre $7,9 kg/dm^3$) alors que les limites élastiques conventionelles à 0,2 % de certains de ses alliages sont comparables. En revanche un module d'Young inférieur (70 GPa contre 210 GPa) impose des modifications dans le dessin des pièces. Mais l'aluminium peut également, par des techniques spécifiques, être moussé. Il constitue alors un matériau cellulaire aux propriétés spécifiques très intéressantes notamment en terme de dissipation d'énergie lors d'impacts. En combinaison avec d'autres structures, comme des profilés par exemple, la mousse d'aluminium peut former des composites rigides et légers qui constituent une solution nouvelle pour la conception d'absorbeurs de chocs. Cependant, le coût de revient des mousses d'aluminium, la difficulté à contrôler son processus de fabrication, les méthodes d'intégration, encore peu définies et validées, ainsi que l'absence d'outil informatique d'aide à la conception de structures comprenant des mousses d'aluminium, sont autant d'obstacles à leur utilisation effective dans les véhicules de grandes séries.

1 Méthode d'obtention

Pratiquement tous les matériaux peuvent être moussés, les polymères en sont les exemples les plus fréquents. La méthode générale pour obtenir de la mousse avec un matériau solide est de provoquer la croissance de porosités internes par l'effet de surpressions localisées dans un matériau, sinon liquéfié, du moins à l'état pâteux. Le problème est donc d'appliquer ces surpressions locales de manière suffisamment uniforme afin d'obtenir une taille de porosité relativement homogène. La première expérience réussie de moussage d'aluminium remonte à 1951 [Banhart99] et depuis, plusieurs méthodes ont été proposées, le principal obstacle étant l'industrialisation à grande échelle de ces procédés afin de produire des bruts avec un coût raisonnable et ce, pour amorcer la demande qui reste, à ce jour, relativement confidentielle. Aujourd'hui, plusieurs méthodes sont explorées, voire utilisées pré-industriellement, afin de produire, avec une relative homogénéité, différents produits : de la brame aux prototypes de pièces industrielles opérationnelles.

1.1 Voie fonderie

La mousse choisie par RENAULT pour cette étude est issue de la voie fonderie [1]. Cette méthode de production est développée par Cymat Corporation au Canada. Cymat est une petite compagnie canadienne dont Alcan et Norsk Hydro aluminium sont les actionnaires majoritaires. Ceci permet à Cymat d'exploiter et de commercialiser dans le monde de la mousse d'aluminium stabilisée traduction littérale de "stabilised aluminium foam", la dénomination utilisée par Cymat pour décrire son produit. La méthode consiste à former de la mousse par bouillonnement (voir figure 1) en injectant un gaz inerte au-dessous de la surface d'un mélange d'aluminium liquide et de particules de SiC afin d'augmenter les tensions superficielles. Les bulles remontent alors vers la surface mais n'éclatent pas. Une écume stable se forme et il suffit de venir ramasser cette écume à la surface, de la mettre en forme de brame avant de la refroidir sur un convoyeur pour obtenir des semi-produits de mousse. La taille des cellules, et donc la densité de la mousse, est contrôlée en ajustant le débit de gaz injecté. Le principal avantage de cette

[1] Encore appelée voie continue

technique est, d'un point de vue du coût, son caractère continu. Cependant elle présente l'inconvénient de ne produire que des semi-produits qu'il faudra ensuite usiner puis assembler avec tous les problèmes de montage, de résistance des fixations et d'adhésion que cela peut poser[2]. Bien que ce principe d'obtention soit relativement simple, son contrôle est difficile et conduit souvent à des produits peu homogènes et peu épais. Les densités absolues usuellement proposées sont comprises entre 0,05 g/cm^3 et 0,45 g/cm^3. Le produit obtenu présente des porosités fermées. Les mousses utilisées pour cette étude proviennent d'une production Hydro Aluminium de l'année 1999. Les caractéristiques des brames livrées chez RENAULT sont présentées dans le tableau 1.1. Il faut noter que les faces supérieure et inférieure ne sont ni vraiment parallèles ni régulières. Les produits fabriqués par Cymat aujourd'hui présentent un aspect plus régulier et maitrisé.

Référence	largeur (mm)	longueur (mm)	épaisseur (mm)	masse (g)	densité (g/cm^3)
HAL-JSB-1	700	1430	90	27130	0,30
HAL-JSB-2	710	1650	90	31780	0,30
HAL-JSB-3	700	1650	90	32400	0,31
HAL-JSB-3.1	700	500	90	9750	0,31
HAL-JSB-3.2	700	1150	90	22650	0,31
HAL-JSB-4	700	1670	90	31930	0,30
HAL-JSB-5	700	2010	90	34780	0,27
HAL-JSB-5.1	700	500	90	8780	0,28
HAL-JSB-5.2	700	1510	90	26000	0,27
HAL-JSB-6	700	2090	90	36300	0,28
HAL-JSB-6.1	700	500	90	8800	0,28
HAL-JSB-6.2	700	1590	90	27500	0,27
HAL-JSB-7	700	1940	90	35370	0,29
HAL-JSB-7.1	700	500	90	8830	0,28
HAL-JSB-7.2	700	1440	90	26540	0,29

TAB. 1 – Dimensions et masses des différentes brames Hydro Aluminium réceptionnées chez RENAULT

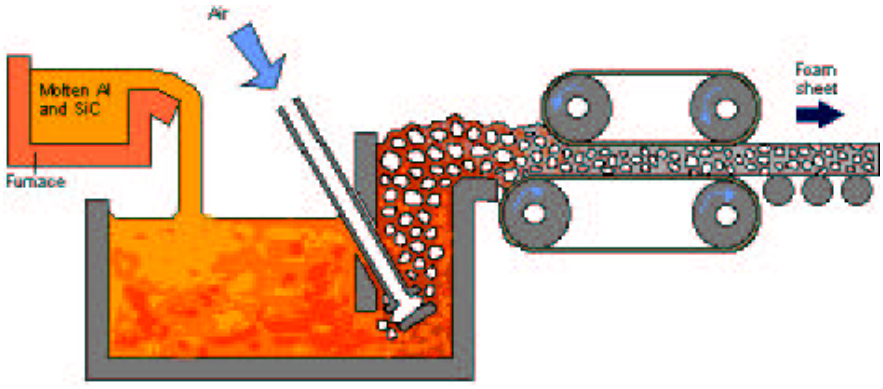


FIG. 1 – Schéma de principe d'une installation de production de mousse d'aluminium par voie fonderie (procédé Cymat).

[2]On doit noter cependant que CYMAT développe un procédé de fabrication permettant d'obtenir directement des demi-produits de mousse d'aluminium.

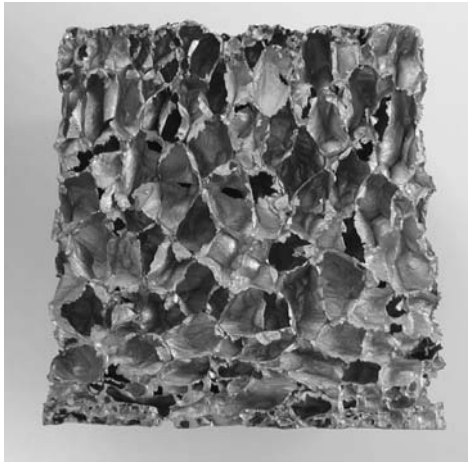


FIG. 2 – Photographie d'un bloc de mousse Hydro Aluminium de 10 cm de large et de densité 0.06

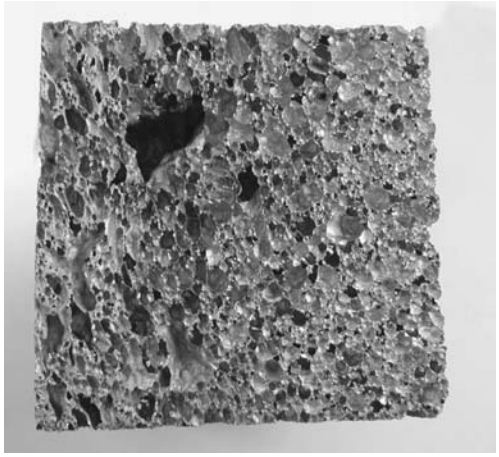


FIG. 3 – Photographie d'un bloc de mousse Hydro Alumminium de 10 cm de large et de densité 0.25

Il existe d'autres procédés d'obtention de mousse d'aluminium mais ils n'ont pas été retenus par RENAULT car ils ne permettent pas d'obtenir des produits homogènes à des coûts raisonnables dans le cas d'une production en grande série.

1.2 Voie métallurgie des poudres

La métallurgie des poudres est une voie essentiellement explorée par l'IFAM (l'Institut Fraunhofer pour la Recherche Appliquée en Matériaux) [Banhart99] et par l'Université de Bratislava en collaboration avec la société Karmann. Le principe (voir figure 4) consiste à mélanger tout d'abord un agent moussant (en général du TiH_2) avec de l'aluminium sous forme pulvérulente puis de consolider l'ensemble en produit semi-fini en lui faisant subir une compaction ou une coextrusion à froid. Ce produit semi-fini peut être mis en forme en le faisant passer à travers les procédés classiques de mise en forme à froid. Le processus de moussage s'active en chauffant l'ensemble au dessus du solidus (au dessus de 500 °C) de l'aluminium, par décomposition de l'agent moussant à haute température et dégagement gazeux. Cette réaction produit une mousse liée au moule qui est en général constitué d'une feuille d'aluminium. Le principal avantage de ce procédé est de pouvoir produire des produits quasi finis avec une liberté de forme assez large et surtout une bonne adhérence de la mousse à son enveloppe. Le composite ainsi formé possède de très bonnes propriétés spécifiques. Toutefois la forme de la pièce doit être particulièrement étudiée afin d'homogénéiser le refroidissement, en effet, une vitesse de solidification plus lente dans une partie de la pièce conduit à une porosité plus importante. C'est le paradoxe de ce procédé car, en conception, une partie massive correspond, en genéral, à une partie plus fortement sollicitée de la pièce. Ce procédé conduit donc à produire des pièces fragilisées aux endroits les plus solicités. Cette méthode semble donc plus adaptée à la production de tôles sandwich (voir figure 5) et non de pièces massives. Enfin le coût élevé de ce procédé ne permet pas aujourd'hui d'envisager des applications en grande série.

1.3 Voie hybride

Cette direction semble essentiellement développée par les universitaires ainsi que par la firme Shinko Wire (Japon) pour la fabrication de leur produit Alporas. La méthode (voir figure 6) consiste à mélanger de la poudre de TiH_2 avec de l'aluminium proche de l'eutectique et sous forme solide / liquide. Sous l'action de la chaleur, l'agent moussant se dissocie et provoque la croissance des porosités. Afin de

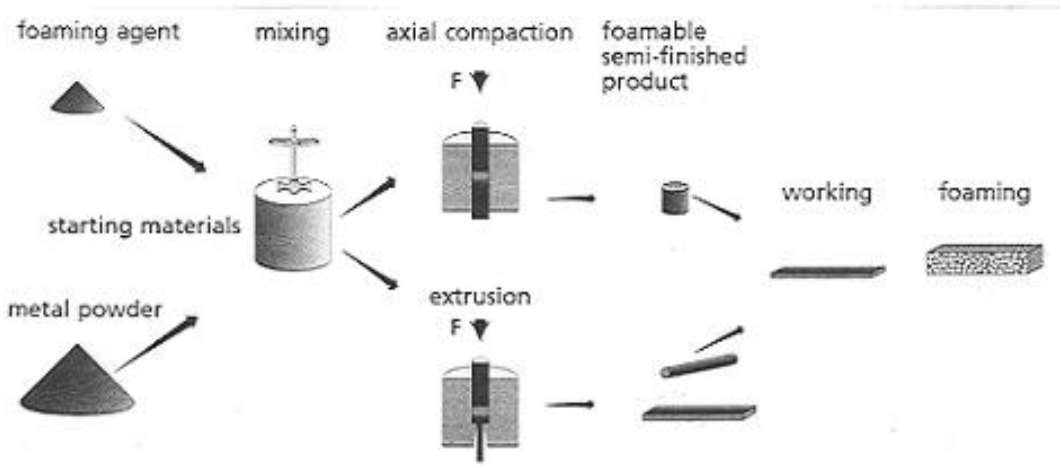


FIG. 4 – Schéma de principe du procédé de production de mousse d'aluminium par voie métallurgie des poudres

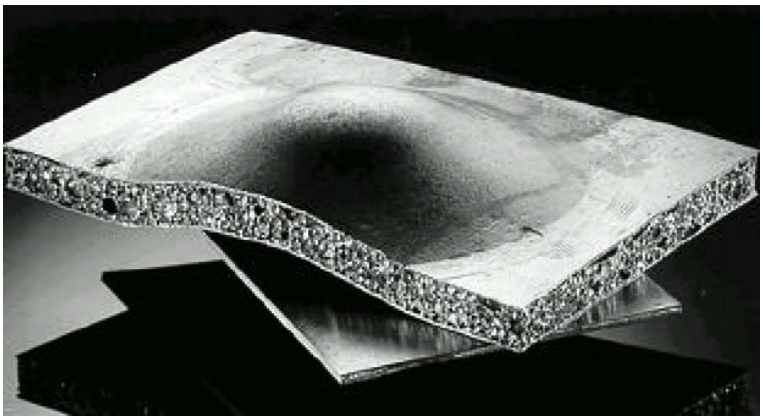


FIG. 5 – Photographie d'un sandwich aluminium / mousse d'aluminium obtenu par métallurgie des poudres

contrôler la croissance des cellules, une surpression d'hydrogène est appliquée au dessus du mélange. Cette méthode permet d'obtenir des structures assez performantes car il est possible de bien contrôler la sphéricité et la taille des cellules ([Ma et al.94], [Yang et al.95], [Ma et al.98]). D'autre part le produit obtenu prend la forme du récipient dans lequel il est préparé : aujourd'hui les seules formes obtenues sont des cubes d'environ un mètre de coté. On peut noter que le titane, issu de l'agent moussant, ainsi que le calcium, se retrouvent dans l'aluminium constituant les parois à l'issue du processus de moussage. En outre son utilisation grève le prix de revient de ce type de produit.

2 Intérêt industriel

L'absorption d'un choc consiste à dissiper une certaine quantité d'énergie cinétique en opposant une force à la direction du mouvement sur une certaine distance. Le choc est absorbé lorsque le travail de cette force est égal à l'énergie cinétique initiale du système avant le choc. La forme caractéristique de la courbe de l'essai de compression d'une mousse d'aluminium comporte trois zones principales :

1. Une première phase élastique linéaire, limitée aux faibles déformations,

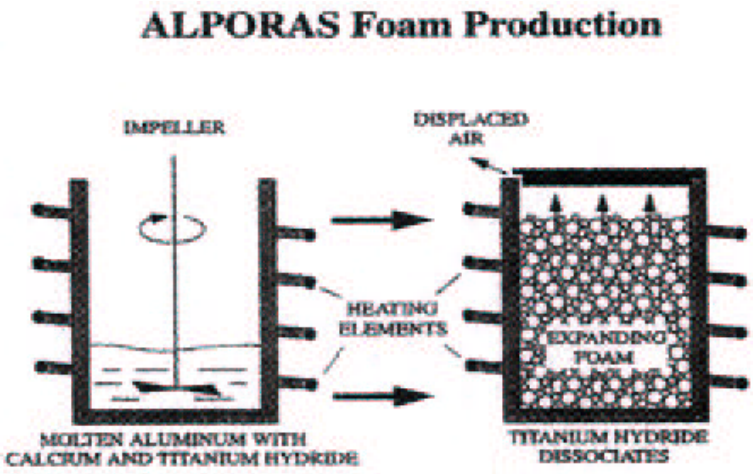


FIG. 6 – Schéma de principe du procédé de production de mousse d'aluminium par voie hybride

2. Une deuxième phase de plateau zone d'absorption d'énergie,
3. Une troisième de phase de densification caractérisée par une forte hausse de l'effort

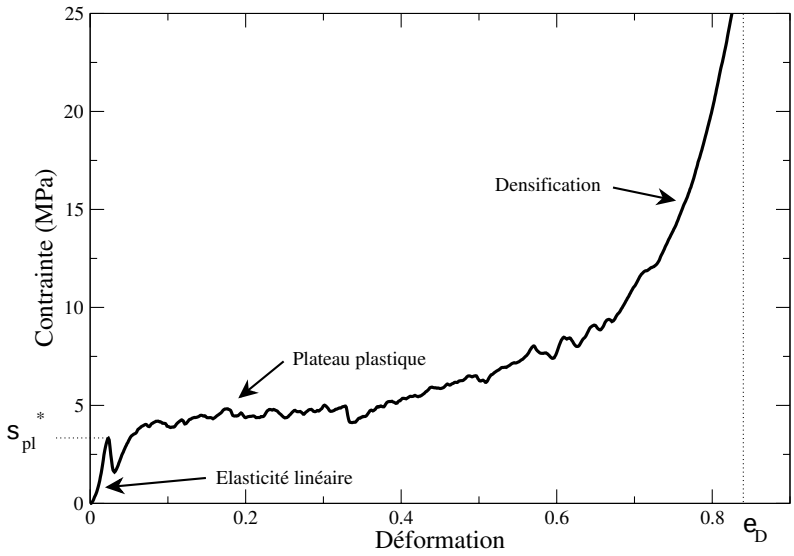


FIG. 7 – Courbe contrainte / déformation caractéristique d'une mousse d'aluminium. [Blazy98]

Si l'on considère les deux première phases, cette courbe se rapproche de celle de l'absorbeur de choc ideal (voir figure 8) qui consiste en un plateau parfaitement plastique. On voit alors tout l'intérêt de l'utilisation des mousses d'aluminium pour des applications en tant qu'absorbeur d'énergie mécanique : la mousse d'aluminium est donc un matériau efficace qui propose une courbe de compression plus régulière que des structures à base de profilé pour dissiper l'énergie mécanique lors de chocs. Comme pour la plupart des mousses le niveau du plateau est essentiellement piloté par la densité : une densité plus forte

augmente le niveau du plateau. Par rapport aux autres mousses métalliques, la mousse d'aluminium de type Hydro est celle qui possède le meilleur potentiel d'absorption d'énergie spécifique (voir figure 9) tout en étant la plus intéressante d'un point de vue du coût (voir figure 10).

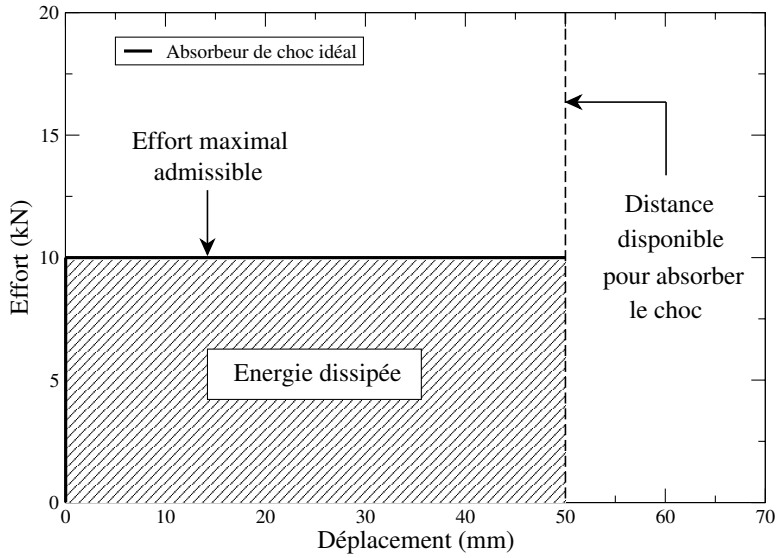


FIG. 8 – Courbe effort / déplacement caractéristique d'un absorbeur de choc idéal [Blazy98]

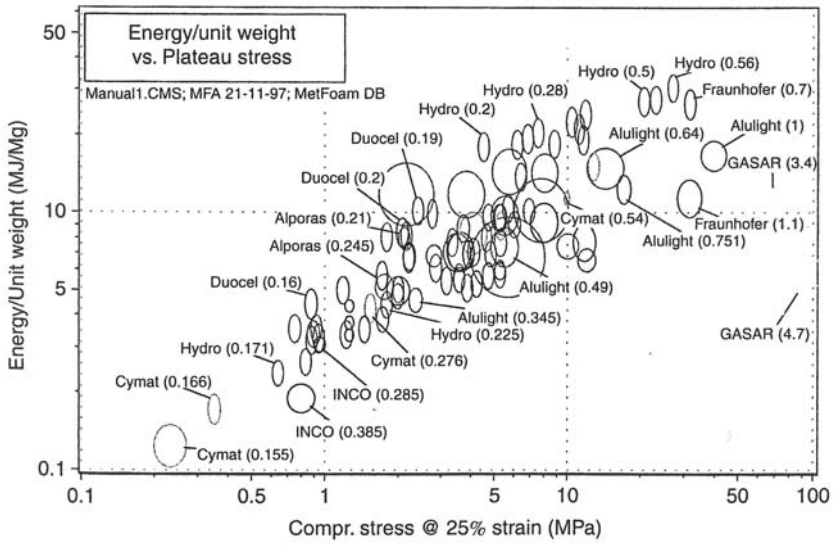


FIG. 9 – Energie spécifique absorbée jusqu'à densification en fonction de la contrainte plateau à 25 % de déformation pour différents types de mousse (d'après [Ashby et al.00])

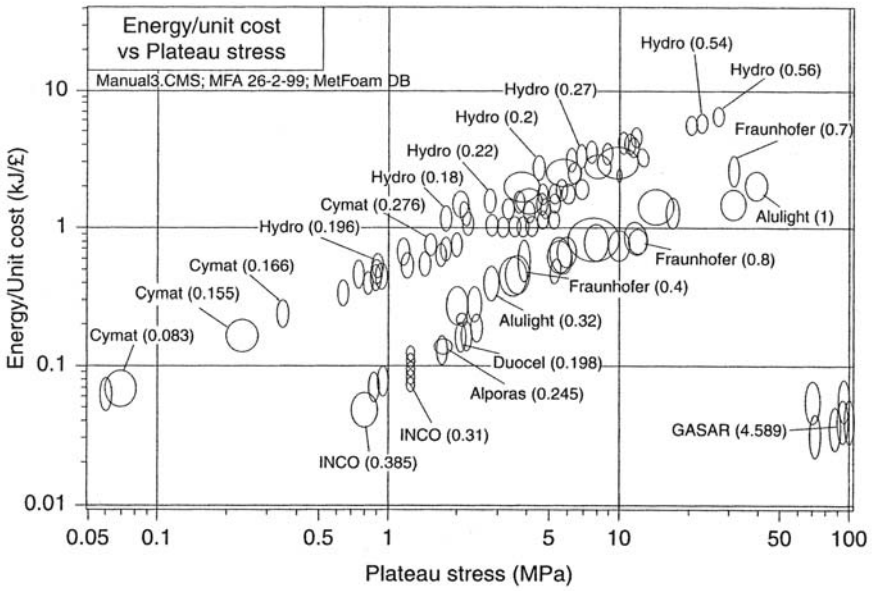


FIG. 10 – Energie absorbée par unité monétaire en fonction de la contrainte plateau à 25 % de déformation pour différents types de mousse (d'après [Ashby et al.00])

Grâce à ces propriétés, l'utilisation des mousses d'aluminium peut être envisagée essentiellement afin d'améliorer la sécurité passive des véhicules. Elle s'articule suivant deux axes (voir figure 11) :

- Le renforcement structural du véhicule (rigidification de la caisse ou augmentation de prestation sécurité au cours de crash) pour des mousses de forte densité de 0.4 g/cm^3 ou plus.
- La protection de l'humain dans l'interface passager / véhicule ou piéton / véhicule au cours d'un crash pour les mousses de faible densité de 0.1 g/cm^3 ou moins.

2.1 Le renforcement structural

L'augmentation des prestations de sécurité nécessite la réalisation de caisses toujours plus rigides mais présentant un poids limité. De plus la politique de plate-forme commune à plusieurs types de véhicule nécessite la conception d'éléments modulaires facilement adaptables qui permettent de répondre à des cahiers des charges chocs différents pour des véhicules de masses différentes. Dans cette optique, la possibilité d'ajuster le niveau du plateau d'absorption d'énergie en sélectionnant des mousses d'aluminium de densités différentes est un atout important.

Le cas du crash box

L'utilisation de mousse d'aluminium la plus promettrice à moyen terme semble être le crash box (voir figure 12). Les crash boxes sont des pièces jouant le rôle de fusibles mécaniques en permettant de préserver les longerons principaux en cas de chocs inférieurs à 15 km/h. Leur remplacement après un choc dit "Danner" permet de minimiser les coûts de réparabilité et donc de diminuer les primes d'assurance [3]. Dans le cas le plus critique - choc à 15 km/h et à 40 % de recouvrement - un seul crash box doit dissiper toute l'énergie cinétique du véhicule. Il est alors possible de calculer facilement l'ordre

[3] Cet aspect est particulièrement important sur le marché allemand

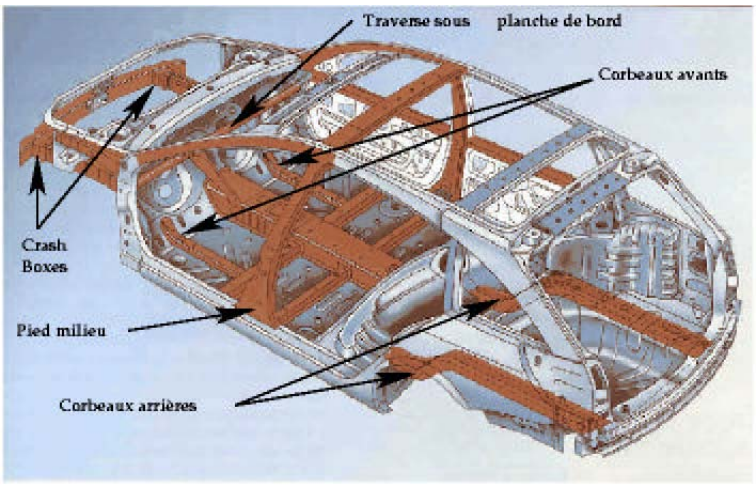


FIG. 11 – Schéma d'une caisse de RENAULT Laguna 2 Estate et périmètre d'utilisation éventuelle des mousses d'aluminium pour renforcement structural. Les pièces rouges indiquent l'utilisation d'acier à haute limite d'élasticité

de grandeur du volume d'un crash box en mousse d'aluminium. Calculons d'abord la quantité d'énergie cinétique à dissiper lors du choc :

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 \tag{1}$$

avec m la masse du véhicule et V sa vitesse.

L'énergie cinétique à dissiper lors d'un choc "Danner" pour un véhicule du segment M2 pesant environ 1500 kg et lancé à 15 km/h est donnée par

$$E_c = \frac{1}{2}(1500)\left(\frac{15000}{3600}\right)^2 = 13020J \tag{2}$$

En supposant que le comportement mécanique en compression d'une mousse d'aluminium est assimilable à un comportement parfaitement plastique jusqu'à 60 % de déformation (voir figure 7). Le travail effectué par une force F sur une distance Δl est donné

$$W = F.\Delta l \tag{3}$$

Etant donnée la longueur maximale disponible[4] pour l'écrasement du crash box, la force moyenne nécessaire que doit fournir le crash box pour arrêter le véhicule est obtenue par

$$F = \frac{E_c}{\Delta l} \tag{4}$$

soit pour un encombrement maximal de 125 mm, nous obtenons la force moyenne que doit fournir le crash box par

$$F = \frac{13000}{0.6 * 125} = 173kN \tag{5}$$

En choisissant la mousse d'aluminium qui possède aujourd'hui la meilleure capacité d'absorption d'énergie spécifique soit la Cymat A35620SC 040 SS d'une densité de 0.4 g/cm^3 et d'une contrainte plateau

[4] Appelé parfois masque

σ_{pl} de 5 MPa, nous obtenons la section S du crash box par

$$S = \frac{F}{\sigma_{pl}} = 243\,cm^2 \tag{6}$$

Si la forme choisie pour le crash box obtenu est le parallélépipède, la pièce sera d'une longueur de 125 mm (dans le sens du choc) et d'une largeur de section carrée de 156 mm environ. Le crash box est donc plus large que long ce qui peut poser des problèmes d'encombrement au niveau de la face avant du véhicule. De plus le poids de cette pièce serait de 1,2 kg environ ce qui est très supérieur aux poids de solutions techniques utilisées aujourd'hui dans les véhicules. Ainsi, même si l'énergie spécifique d'absorption de la mousse d'aluminium est élevée, les niveaux de contrainte demandés pour la gestion de ce crash sont trop importants et nécessitent l'emploi d'une section trop élevée. La solution crash box en mousse d'aluminium seule n'est donc pas adaptée. Le principe consiste alors à utiliser la mousse d'aluminium en combinaison avec d'autres structures, comme des profilés extrudés par exemple, afin d'améliorer leurs performances, de réduire la section et donc le poids.

Les caisses des véhicules étant composées essentiellement de tôles embouties formant des corps creux, l'insertion de mousse d'aluminium à l'intérieur de ces corps creux semble être une solution astucieuse afin d'adapter à moindre coût une plate-forme commune aux différentes déclinaisons véhicules.

Sur un profilé d'aluminium à section carrée, le remplissage permet d'augmenter l'énergie spécifique absorbée par le profilé en jouant sur l'interaction entre la mousse et le profilé [Blazy98] [Hanssen et al.98] [Hanssen00]. En effet l'ajout de la courbe de compression de la mousse d'aluminium seule et de la courbe de compression du profilé vide est inférieure à la courbe de compression du profilé rempli de mousse d'aluminium (voir figure 14). Il y a interaction entre la mousse et le profilé. La mousse change les modes de flambement du profilé en diminuant la longueur d'onde des plis (voir figure 13) et fait dissiper au profilé intrinsèquement plus d'énergie (voir figure 15). Les chutes d'effort dues à l'apparition des plis sont attenuées. Le comportement du profilé rempli de mousse se rapproche ainsi du comportement parfaitement plastique de l'absorbeur de choc idéal. Le gain en énergie spécifique se situe autour de 25 % par rapport à la solution du profilé seul (voir figure 15). Un modèle analytique a été développé par [Hanssen00] afin de prendre en compte cet effet d'intéraction dans l'optimisation d'un crash box sollicité en compression axiale. L'optimisation n'est en revanche realisée que sur un profilé à section carrée ou circulaire remplie de mousse.

L'utilisation de la mousse d'aluminium en remplissage de corps creux peut être envisagée également afin de gérer d'autres types de chocs. Pour le grand choc frontal type EuroNCAP par exemple (voir figure 16) le recours à des aciers à très haute limite élastique est nécessaire étant donnés les niveaux d'énergie mis en jeu. L'utilisation de mousse d'aluminium permettra alors de retarder l'apparition de flambement globaux sur les longerons et donc de préserver leur niveau d'absorption d'énergie sur toute la durée du choc.

Solutions techniques pour le remplissage de corps creux

Toute la difficulté consiste à faire pénétrer la mousse dans un corps creux de forme complexe. L'utilisation dans ce cas de mousses obtenues par métallurgie des poudres (type Alulight) semble adaptée. Ce procédé permet de faire mousser l'aluminium directement à l'intérieur du corps creux et donc d'obtenir des formes complexes comme le renforcement de pied milieu (voir figure 18) pour le choc latéral. Cependant Cymat (voie fonderie) a présenté des prototypes de pièces où la mousse est directement coulée à l'intérieur d'un profilé (voir figure 17) . Si l'avantage du coût reste à la solution Cymat, il semble qu'Alulight soit en mesure de remplir des formes plus complexes (voir figure 18). Ces procédés sont encore en développement et il n'existe pas aujourd'hui de solution technique en grande série les utilisant.

2.2 Interaction passager/véhicule ou piéton/véhicule

La protection du passager est un défi permanent dans l'automobile. La plupart des chocs les plus violents sont aujourd'hui gérés par l'utilisation conjointe de prétensionneurs sur les ceintures de sécurité et de coussins gonflables. Cependant la morphologie de chacun étant unique, des chocs entre le corps du passager et l'intérieur du véhicule restent possibles. Les constructeurs se doivent donc de sécuriser l'ensemble de l'environnement passager. La mousse d'aluminium peut alors être utilisée comme *padding* pour dissiper l'énergie lors du contact entre le corps du passager et l'intérieur de l'habitacle (voir figure 19) comme par exemple lors d'un choc frontal entre le genou et la partie inférieure de la planche de bord (voir figures 20 et 21), entre les pieds et le plancher ou encore, lors d'un choc latéral, entre le bassin et le panneau de porte ou la tête et le montant de baie. Le cas du choc tête / montant de baie peut se produire lors d'un tonneau avec le véhicule.

Afin d'éviter qu'au moins un adulte sur six ne subisse des dommages irréversibles sur son cerveau, le critère biomécanique de choc tête (HIC[5]) doit être inférieur à 1000 quel que soit le type de choc. Il est défini par

$$HIC = (t_2 - t_1) * \left[\frac{\int_{t_1}^{t2} a(t)dt}{(t_2 - t_1)} \right]^2 .5 < 1000 \tag{7}$$

Ce qui donne pour une choc d'une durée moyenne de 15 ms [Bellora et al.01, Hui et al.02] une accelération moyenne de 85 g. Sachant qu'en moyenne une tête d'adulte pèse 4,5 kg environ la force maximale que peut supporter la tête est obtenue par

$$F_{head} = masse_{head} * \Gamma_{head} = 4,5 * 85 * 9.81 = 3.7kN \tag{8}$$

Si la surface S_{head} de contact entre la tête et le montant de baie est d'environ 125 mm sur 100 mm [6], la contrainte plateau maximale que doit exercer la mousse d'aluminium sur la tête est de

$$\sigma_{plateau} = \frac{F_{head}}{S_{head}} = 0,3MPa \tag{9}$$

Une mousse d'aluminium de densité 0.1 g/cm^3 absorbera l'énergie nécessaire et permettra d'éviter des dommages irreversibles sur le cerveau de l'occupant du véhicule. De la même façon que pour le crash box, le volume de mousse à utiliser peut être obtenu en calculant la quantité d'énergie cinétique à absorber lors de ce choc. Pour un choc poteau EuroNCAP la vitesse latérale est de 30 $km.h^{-1}$ ce qui donne

$$E_{chead} = \frac{1}{2} m_{head} V_{head}^2 = \frac{1}{2}(4.5)(8.33)^2 = 156J \tag{10}$$

L'épaisseur e du bloc de mousse d'aluminium à utiliser est donc de

$$e = \frac{E_{chead}}{\sigma_{plateau} * 0.65 * S_{head}} = 64mm \tag{11}$$

Dans ce dernier cas et sans utilisation de coussins gonflables latéraux seule la mousse d'aluminium peut répondre au cahier des charges fixé par les critères biomécaniques pour ce type de choc. Cependant l'aspect légèrement coupant du matériau lié à la fragilité du matériau de base reste un problème et nécessite l'application d'un revêtement sur le padding ce qui en pénalise le coût qui restera toutefois inférieur à un *airbag* rideau. Pour information la Laguna 2 ayant obtenue la note maximale de 5 étoiles au crash test EuroNCAP impose au conducteur un HIC de l'ordre de 300 en choc latéral [Blazy02b].

[5] Head impact criterion

[6] Valeur moyenne obtenue à partir d'une distribution statistique de tailles de crânes humains

3 Quelques éléments de mécanique des mousses

Les mousses possèdent donc des propriétés mécaniques remarquables. Elles résultent de leur structure cellulaire et des propriétés du matériau de base les constituant. La première approche de la mécanique des mousses consiste donc à relier les propriétés de la mousse avec sa structure et les propiétés de son matériau de base : c'est l'approche introduite par [Ashby et al.97].

Dans le cas des mousses d'aluminium le coefficient matériau qui permet une caractérisation la plus large possible est sans aucun doute sa densité relative ρ_r. Elle est définie par le rapport de la densité ρ^* de la mousse par celle du solide, ρ_s dont elle est constituée.

$$\rho_r = \frac{\rho^*}{\rho_s} \tag{12}$$

La fraction de vide f de la mousse, appelée porosité, est définie par

$$f = 1 - \rho_r = 1 - \frac{\rho^*}{\rho_s} \tag{13}$$

De façon générale dans tout ce document les propriétés de la mousse elle-même seront repérées à l'aide de l'exposant * tandis que celles du matériau de base par l'indice s. En première approche (cf. [Ashby et al.97]) une mousse à porosité ouverte peut être assimilée comme une juxtaposition de cellules élémentaires de forme cubique de longueur l et de section t (voir figure 22). L'empilement de ces cellules élémentaires s'effectue en connectant les arêtes par leur milieu. La densité relative de la cellule élémentaire est reliée aux dimensions l et t par

$$\frac{\rho^*}{\rho_s} \propto \left(\frac{t}{l}\right)^2 \tag{14}$$

Dans la cas des mousses à porosités fermées une cellule élémentaire (voir figure 23) a été contruite en considérant qu'une fraction ϕ de matériau solide est contenue dans les arêtes d'épaisseur t_e tandis que la fraction restante $1-\phi$ est contenue dans les parois d'épaisseur t_f.

A partir de ce modèle de cellule l'identification des mécanismes de déformation des mousses dans la zone élastique peut se décomposer en trois composantes :

1. La flexion des arêtes est le mécanisme prépondérant et le seul dans le cas des mousses à porosités ouvertes
2. La déflexion des parois qui participent à la déformation dans une moindre mesure
3. Enfin le gaz emprisonné dans les cellules contribue également à la résistance à la déformation mais il est généralement négligé pour des mousses métalliques, nous n'y ferons donc plus référence

Dans les applications crash envisagées les mousses sont principalement sollicitées en compression. La courbe de compression typique d'une mousse d'aluminium (voir figure 7) a été décomposée précédemment en trois phases : élastique, plateau plastique et densification. Ces trois étapes ont été réliées par [Ashby et al.97] à différents modes de déformations des arêtes et des parois et donc au comportement mécanique du matériaux de base.

1. Zone élastique :

   Le comportement des mousses d'aluminium en compression dans la zone élastique peut être décrit par le choix classique de trois modules : le module d'Young E^*, le module de Poisson ν et le module de cisaillement G^* si la déformation est isotrope. L'étude menée par [Ashby et al.97] sur les géométries de cellule précédemment présentées propose des formules pour ces trois modules à

partir des propriétés du matériau constitutif, de la densité relative de la mousse et en considérant que le mécanisme principal de déformation est la flexion des arêtes. Ainsi le module élastique s'écrit (cf. équation 15) en tenant compte de la résistance des membranes :

$$\frac{E^*}{E_s} = \phi^2 \left(\frac{\rho^*}{\rho_s}\right)^2 + (1-\phi)\frac{\rho^*}{\rho_s} \tag{15}$$

Beaucoup d'articles parus ([Beals et al.97] et [Fusnheng et al.99] entre autres) se bornent à étudier ce modèle et à en montrer les limites quant à la modélisation d'une mousse réelle. Nous avons également tenté de vérifier ce modèle de comportement à partir des essais de compression réalisés au Cemef et de la base de données du projet européen EAMLIFe (voir figure 24). Cependant, ces essais de compression avaient pour objectif de caractériser la mousse en tant qu'absorbeur de choc donc leur but était d'obtenir une courbe complète jusqu'à des niveaux de déformation de l'ordre de 80%. Ainsi les zones élastiques comportaient peu de points, ce qui a conduit à une grande dispersion sur la détermination du module d'Young pour des échantillons de même densité. D'autre part, la planéité des deux faces prises entre les deux tas plats n'était pas controlée ce qui pouvait perturber le calcul de la déformation. Pour s'affranchir de ce type de problème la mesure du module d'young des mousses s'effectue donc principalement en déchargement. Nous n'avons donc pas pu valider l'équation(15).

2. Plastique :

   Lorsque la contrainte dépasse un certain seuil (la résistance mécanique σ_0), les cellules de la mousse s'effondrent plastiquement ce qui résulte en un long plateau quasi horizontal sur la courbe contrainte / déplacement d'où la déformation n'est plus recouvrable. La déformation se localise sous forme de strates tandis que le reste de la mousse est pratiquement intact. La contrainte d'écoulement plastique σ_0, calculée par [Ashby et al.97], est donnée par l'équation (16), en considérant la rupture des arêtes comme mécanisme de déformation principal :

$$\frac{\sigma_0^*}{\sigma_{ys}} = 0.3\left(\phi\frac{\rho^*}{\rho_s}\right)^{3/2} + (1-\phi)\frac{\rho^*}{\rho_s} \tag{16}$$

   avec σ_{ys} la contrainte d'écoulement plastique du matériau de base constituant la mousse. La vérification de ce modèle est plus aisée car, sollicitant l'éprouvette avec une plus grande déformation, on s'affranchit des accidents de fabrication et de géométrie d'éprouvette (voir figure 25). Ainsi, on obtient bien une évolution en loi puissance mais l'exposant diffère, nous trouvons $1,99$. Cet écart peut être en partie expliqué par le choix des mousses retenues. En effet, afin d'obtenir la plus grande dynamique possible sur les densités, les mousses ont été sélectionnées sans considérer la métallurgie du matériau de base mais uniquement sur les valeurs de densité globale. Or pour atteindre certaines densités les fabricants de mousses ne jouent pas uniquement sur le débit de gaz et la vitesse d'extraction mais également sur les métallurgies de base ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle de [Ashby et al.97]. Aujourd'hui il est difficile voire impossible d'obtenir de la part des fabricants des mousses d'aluminium de différentes densités issues de la voie fonderie et possédant la même métallurgie de base.

3. Densification :

   Une déformation plastique importante en compression produit une densification des cellules effondrées ce qui conduit à une augmentation de la contrainte qui tend alors vers l'infini [7] pour un certain niveau de déformation ε_d. On peut supposer que cette déformation peut être égale à la porosité initiale de la mousse car elle correspond alors à la déformation pour laquelle tous les pores

[7] la courbe contrainte /déformation est quasi verticale

ont disparu. En réalité l'enchevrètrement des parois devient limite avant cette valeur théorique et [Ashby et al.97] propose une formule empirique pour ε_d explicitée dans l'équation 17.

$$\varepsilon_d = 1 - 1.4\left(\frac{\rho^*}{\rho_s}\right) \tag{17}$$

Cette déformation correspond donc à la déformation limite que peut accepter la mousse. Toutefois ce sont des niveaux de déformation qui ne devront pas être atteints lors de l'utilisation de mousse dans des pièces automobiles réelles. Le dimenssionnement au crash en tient compte en ne considérant qu'une fraction de cette déformation limite disponible pour l'absorbtion d'énergie. Ainsi la vérification de cette équation n'a pas été jugée prioritaire.

4 Objectifs et plan de la thèse

4.1 Objectifs de la thèse

L'utilisation de la mousse d'aluminium semble intéressante pour des applications d'absorption d'énergie. Toutefois les calculs réalisés précédemment ne donnent que des ordres de grandeur. En effet l'estimation du comportement mécanique de la mousse d'aluminium nécessite une approche plus fine que celle réalisée précédemment. L'objectif de ce travail est de donc caractériser le comportement mécanique des mousses d'aluminium sous des chargements complexes et d'en proposer une modélisation dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

Les sollicitations mécaniques doivent se rapprocher des conditions que pourra rencontrer la mousse en service. Pour les applications biomécaniques précédemment citées par exemple, il est nécéssaire de pouvoir prédire précisemment le comportement mécanique suivant des solicitations multi-axiales. En particulier, on ne pourra pas se contenter des traditionnels essais de compression. Le composant en service pourra en effet être soumis à de la flexion, voire à des cisaillements locaux. C'est pourquoi les trajets de déformation de type traction, compression, cisaillement et torsion sont considérés dans ce travail. La combinaison de ces chargements est également envisagée pour aboutir à des sollicitations multiaxiales.

La modélisation proposée doit rendre compte de la réponse globale du matériau pour les différentes sollicitations considérées. Elle doit rester suffisamment simple pour permettre une implantation dans les codes de calculs industriels de crash automobile. C'est pourquoi nous avons choisi de développer notre modélisation dans le cadre de la théorie continue de la plasticité, à l'aide de critères le plus souvent disponibles dans les codes.

La connaissance des mécanismes locaux de déformation liés à la microstructure de la mousse doit permettre de mieux cibler le domaine d'application du modèle retenu et de juger de sa pertinence. Nous tirerons donc le plus grand parti des observations microstructurales des mécanismes de déformation et de ruine du matériau cellulaire étudié.

Nous avons vu que la mousse peut être utilisée au sein de profilés métalliques afin d'en améliorer les propriétés de ruine par flambage. Les résultats obtenus dans ce travail peuvent être directement appliqués à cette configuration grâce au calcul de structures composites. Les configurations spécifiques et les particularités de comportement liées à ces assemblages n'ont pas été abordées dans ce travail mais en constituent un prolongement logique et nécessaire.

4.2 Plan de la thèse

Ce travail s'ouvre sur une description succinte de la microstructure de la mousse d'aluminium étudiée, en s'attardant sur les caractéristiques macroscopiques, à l'échelle des cellules, et enfin à l'échelle de

la microstructure des parois des cellules. Pour cela, nous mettrons à contribution des techniques d'analyse chimique mais aussi la tomographie aux rayons X pour la visualisation 3D des cellules. Ces observations fournissent les premiers indices de la fragilité relative du matériau et de la forte variabilité attendue sur les propriétés d'un échantillon à l'autre. Cette partie illustre l'extrême hétérogénéité du matériau aux trois échelles considérées.

Le second chapitre est consacré à la description de la réalisation et aux resultats d'essais mécaniques de compression, traction, cisaillement, mais aussi torsion et traction-compression/torsion combinées. L'objectif est d'établir dans l'espace des contraintes concernées la forme de la surface de charge initiale du matériau, donnée essentielle pour le dimensionnement d'un composant en mousse. Nous insistons sur le fait que cette surface délimite le domaine de rupture (en traction par exemple) et de déformation plastique (compression essentiellement) de la mousse. Nous verrons en effet que plasticité et rupture locale des cellules sont les mécanismes essentiels et toujours coexistants du comportement de la mousse d'aluminium étudiée.

Les essais ont pu être réalisés sur un grand nombre d'éprouvettes afin de caractériser la dispersion des résultats. Une grande variabilité des limites de plasticité/rupture initiales est observée. Elle rend incontournable une modélisation statistique du comportement proposée dans la troisième partie. Nous présenterons un modèle statistique capable de décrire la frontière du domaine d'élasticité et la dispersion associée pour l'ensemble des modes de sollicitations explorés expérimentalement. Ces résultats expérimentaux et de modélisation sont consignés dans un article soumis pour publication dans *International Journal of Mechanical Sciences* et présentés dans le chapitre un de la troisième partie. Le chapitre 2 rassemble des compléments non fournis dans l'article sur quelques spécificités des essais mécaniques réalisés et du comportement de la mousse.

L'observation des essais de compression, grâce en particulier à l'application de méthodes de mesures de champs par corrélation d'images, indique sans ambiguité que la mousse d'aluminium est incapable, nous le verrons, de se déformer de manière homogène. Au contraire, nous montrerons que la localisation de la déformation et la propagation des bandes est le mode principal de dissipation d'énergie de la mousse d'aluminium. La partie 4 est consacrée à la prise en compte de ces phénomènes de localisation dans la modélisation du comportement de la mousse. Nous quantifierons en particulier l'erreur commise lorsque ces phénomènes ne sont pas pris en compte, comme c'est généralement le cas. La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre ce problème de localisation dans le cadre de la plasticité des matériaux compressibles.

Plusieurs applications sont proposées enfin pour valider l'approche numérique : essai d'impact genou, essai sur éprouvette tronconique et essai coin. Un plus grand réalisme dans les résultats peut être atteint encore en prenant plus directement en compte l'hétérogénéité de distribution des cellules de la mousse dans la modélisation. Une tentative de prise en compte de la connaissance tri–dimensionnelle réelle de la structure de la mousse par tomographie dans la modélisation continue est présentée en fin de partie 4.

On trouvera entre autre dans les annexes quelques rappels et compléments sur la statistique de rupture des matériaux fragiles et sur la méthode des éléments finis utilisée dans ce travail.

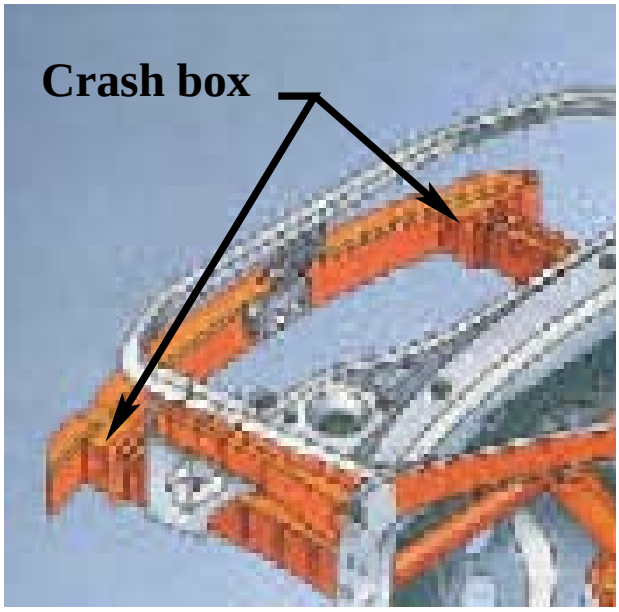


FIG. 12 – Position du crash box dans l'architecture de la face avant du véhicule

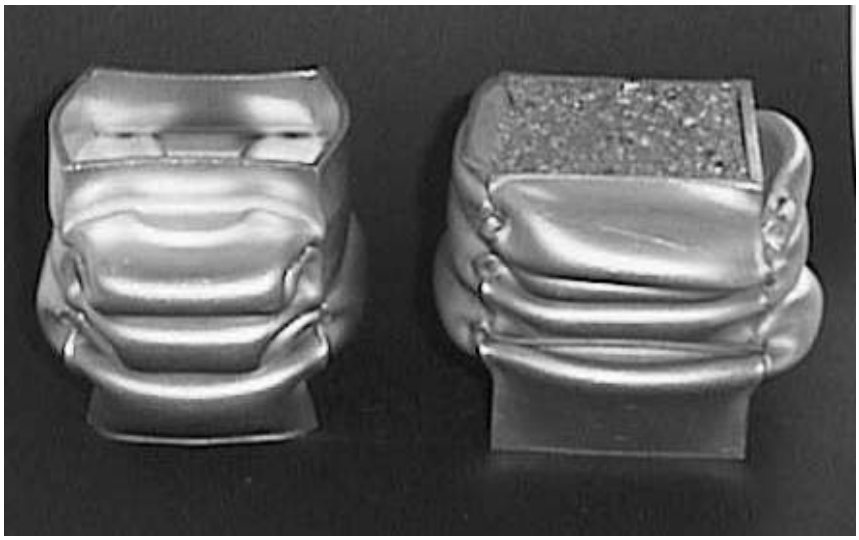


FIG. 13 – Comparaison des modes de flambement pour un profilé vide (à gauche) de section carrée de 50 mm de côté et pour ce même profilé rempli de mousse d'aluminium (à droite). La mousse d'aluminium change la longueur d'onde des plis et permet au profilé de dissiper intrinsèquement plus d'énergie. Il y a interaction entre la mousse et le profilé.

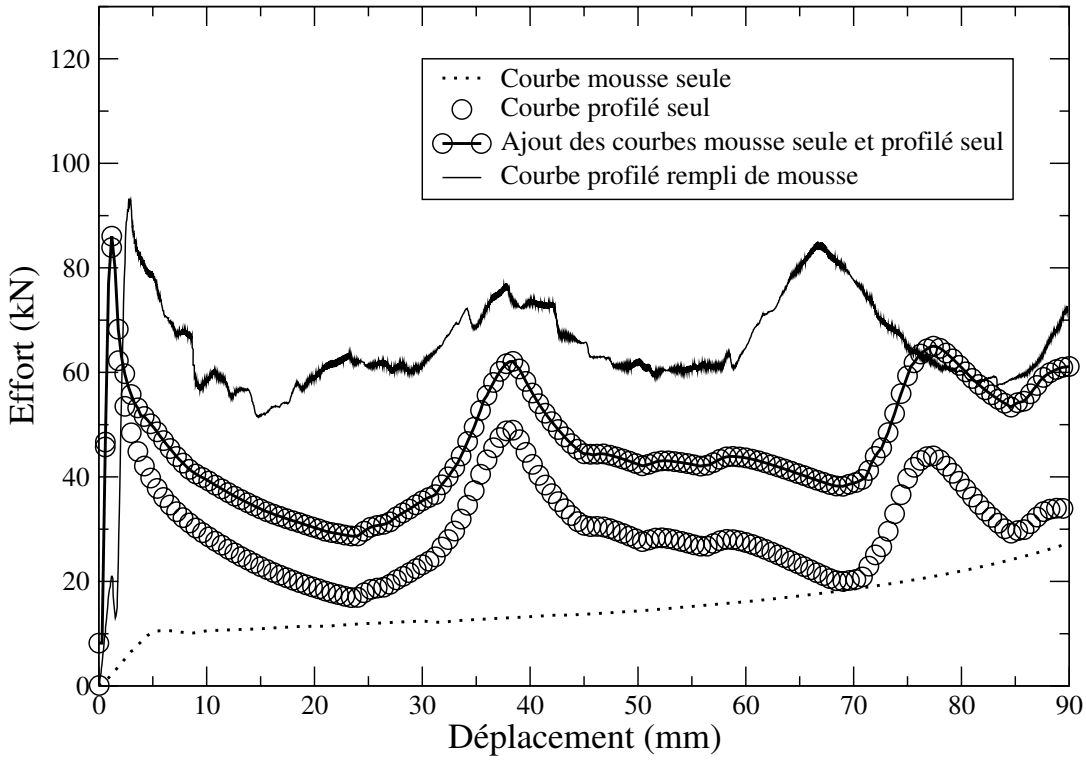


FIG. 14 – Effet d'interaction entre la mousse d'aluminium et le profilé extrudé .

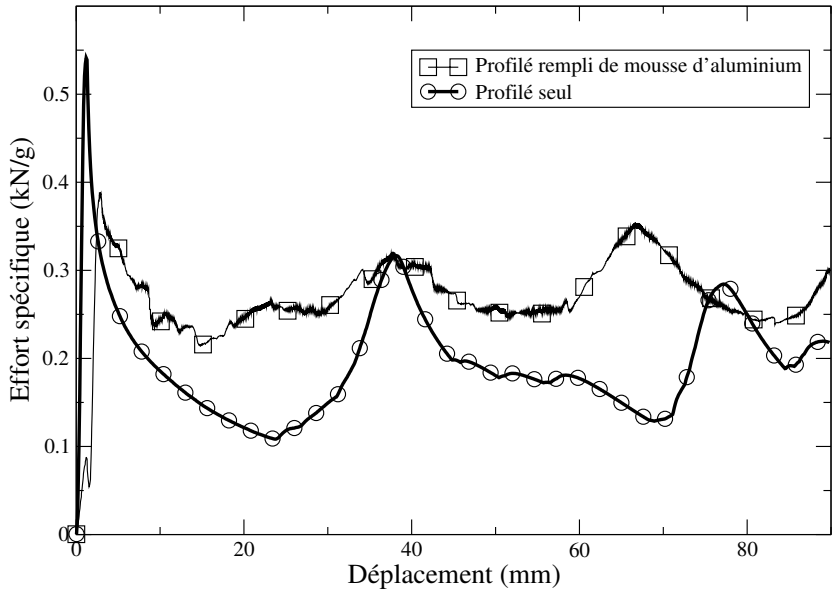


FIG. 15 – Comparaison de l'effort spécifique pour un profilé vide et un profilé rempli de mousse d'aluminium. Le gain en énergie spécifique est représenté par l'aire délimitée entre les deux courbes



FIG. 16 – Vues de face d'une Laguna 2 avant (gauche) et après (droite) un choc frontal de type EuroNcap a 64 km/h et 40 % de recouvrement délimité par la ligne blanche sur la vue de gauche



FIG. 17 – Exemple de remplisage de cœurs creux de formes complexes par de la mousse d'aluminium voie fonderie



FIG. 18 – Renforcement de pied milieu par une solution métallurgie des poudres

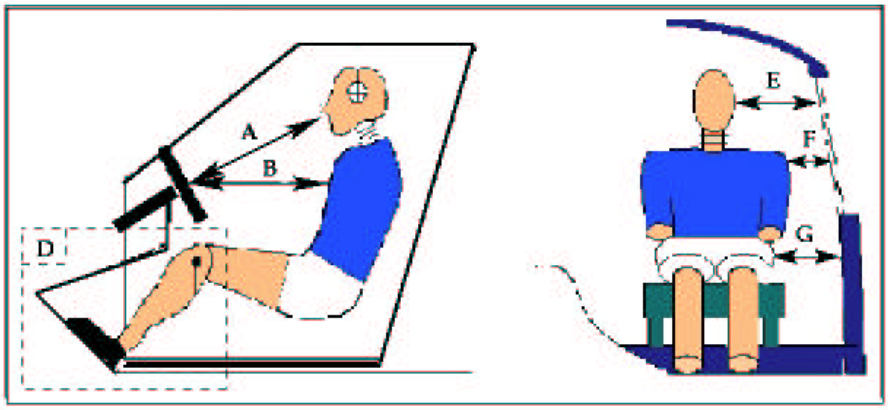


FIG. 19 – Zones d'utilisation éventuelle pour la protection du passager. (A) et (B) chocs tête et thorax sur volant. (D) zone de choc entre genou et planche de bord et pieds et plancher. (E), (F) et (G) chocs entre tête, épaule et bassin et portière ou pied milieu.



FIG. 20 – Préparation d'une planche de bord pour un choc frontal type EuroNCAP à 64 km/h et à 40 % de recouvrement. Les blocs de mousses indiquées sur la photos sont des marqueurs de choc afin de localiser la zone sous la planche sur laquelle les genoux du mannequins vont impacter



FIG. 21 – Bloc de mousses marqueurs après un choc frontal type EuroNCAP à 64 km/h et à 40 % de recouvrement. Les marques de couleurs indiquent les impacts des genoux du mannequin

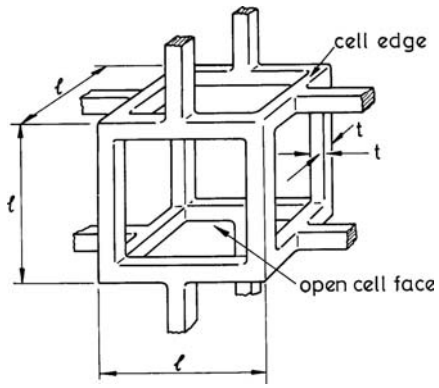


FIG. 22 – Cellule cubique à porosité ouverte

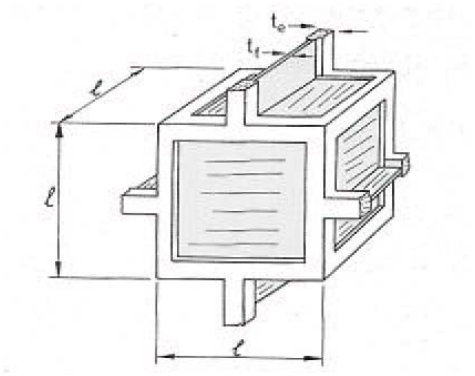


FIG. 23 – Cellule cubique à porosité fermée

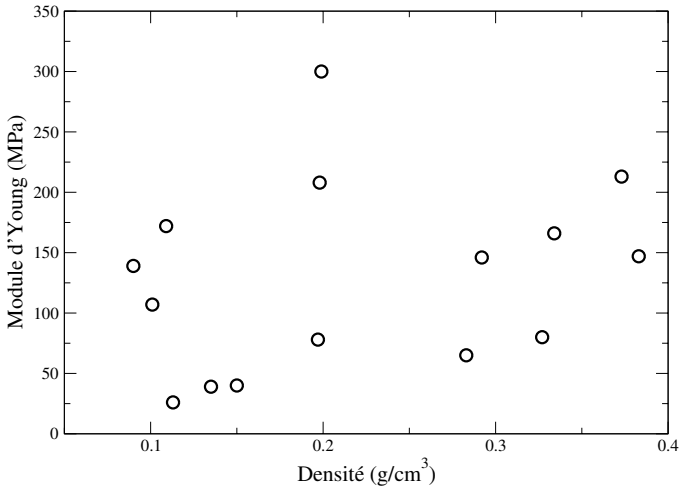


FIG. 24 – Evolution du module d'Young en fonction de la densité

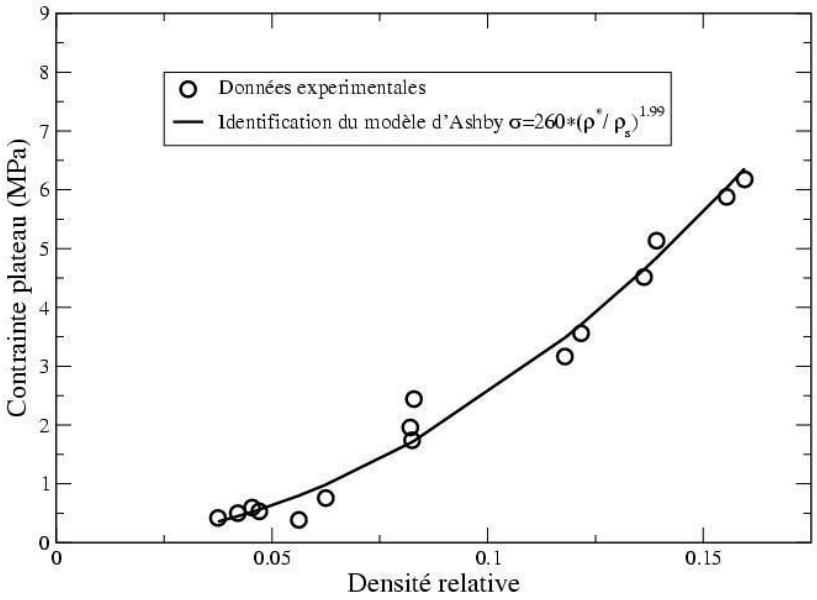


FIG. 25 – Evolution de la limite élastique en fonction de la densité relative

Deuxième partie

Structure de la mousse d’aluminium

Introduction

La mousse d'aluminium est un matériau cellulaire. Si les propriétés de ces solides [Ashby et al.97] dépendent essentiellement de cette structure cellulaire, il convient de distinguer plusieurs échelles d'observation et de description.

1. Une première échelle microscopique concerne la microstructure du matériau constituant les parois des cellules,
2. Une deuxième échelle mésoscopique concerne la cellule,
3. Une troisième échelle macroscopique décrit les grandeurs globales caractéristiques de la mousse (densité, anisotropie, etc.).

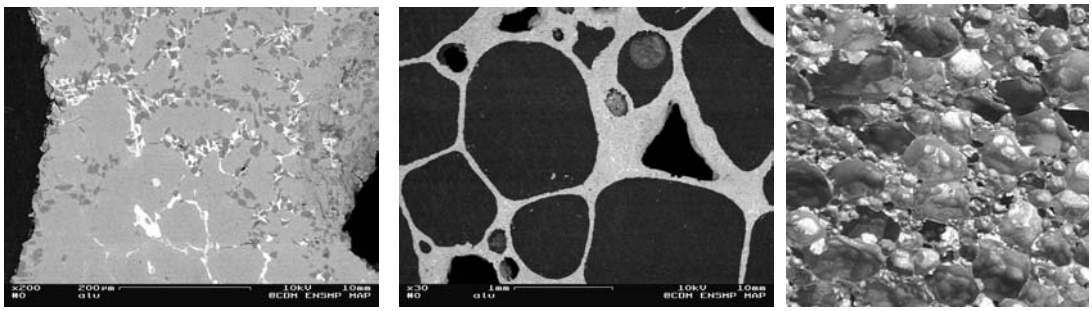
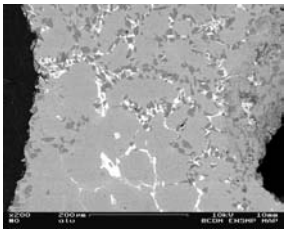


FIG. 1 – Les 3 échelles d'observations (de gauche à droite) : microscopique, mésoscopique et macroscopique

Dans cette partie nous traiterons donc des différentes échelles d'observation afin de distinguer leur particularités et nous tenterons d'expliquer l'effet des spécificités remarquées à chaque échelle sur le comportement global du matériaux. L'observation visuelle de la mousse d'aluminium permet de dégager plusieurs pistes. Tout d'abord, suivant les zones, on distingue deux aspects à la surface de la mousse : un aspect métal brillant et un aspect gris sombre mat. Ensuite, à l'issue de l'observation manuelle, la table ou les mains de l'observateur sont remplie de fines particules de mousse, signe d'une ductilité très faible. L'observation visuelle des cellules montre également une grande dispersion de taille et de forme. Enfin, la légèreté de ce matériau est véritablement étonnante.

Chapitre 1

Echelle microscopique



L'observation à l'échelle microscopique concerne l'étude de la microstructure du matériau de base constituant les parois des cellules de la mousse. La zone d'observation est donc importante on verra que le matériau ne possède pas la même microstructure sur une paroi ou au milieu d'un point triple. Tous les constituants mis en oeuvre au cours de l'élaboration devraient se retrouver dans les parois, mais sous quelles formes et quelle répartitions ?

L'objectif de ce chapitre est d'apporter des éléments de réponse à ces questions. Toutes les micrographies présentées dans ce chapitre ont été réalisées sur des échantillons issus de la brame HAL-JSB-6.2 de densité globale 0.25 g/cm^3.

1.1 Préparation des échantillons

L'observation d'un échantillon de mousse d'aluminium sans préparation sous un microscope électronique à balayage environnemental n'ayant pas donné des résultats intéressants il est nécessaire de préparer correctement les échantillons. Après avoir découpé un morceau de mousse de 3 cm de coté, l'échantillon est nettoyé à l'alcool puis imbibé de résine. Le passage sous une pompe à vide est nécessaire afin de bien remplir toutes les cavités comme indiqué par [Markaki et al.01]. Ensuite le mélange mousse résine est mis à l'étuve pendant trois heures afin de permettre la polymérisation de la résine. L'ensemble est ensuite poli jusqu'au papier diamant 1μm.

1.2 Observation au microscope optique

Les observations au microscope optique AXIOVERT et au grossisement 200 ont permit d'identifier une microstructure en dendrites déjà décrite par [Prakash et al.95]. La figure 1.1 distingue des différences de microstructure entre les points triples et les arêtes. L'observation semble montrer un plus grande densité de particules de SiC dans les parois que dans les points triples. Les différences de vitesse de solidification ainsi que les phénomènes de drainage (voir [Weaire et al.00]) sont sans doute à l'origine de

cette répartition. Les épaisseurs des parois varient de $50\,\mu m$ à $1\,mm$ entre les parois les plus fines et les points triples de jonction entre plusieurs cellules.

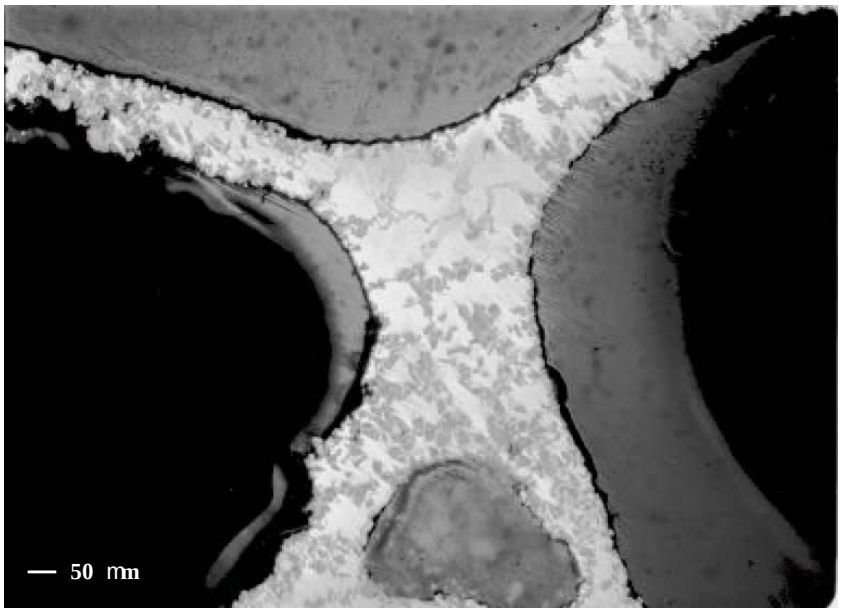


FIG. 1.1 – Observation au microscope optique. Vue globale distinguant les différentes structures rencontrées dans les parois et les points triples.

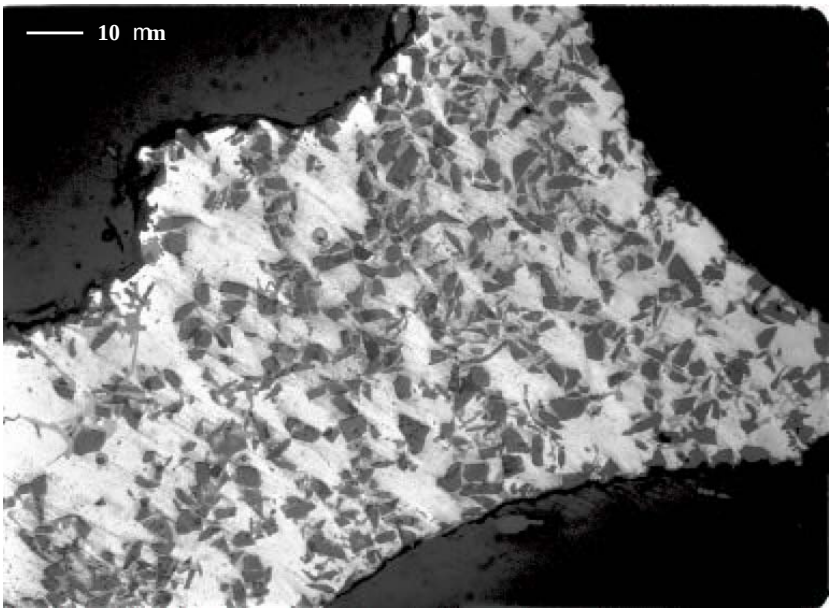


FIG. 1.2 – Observation au microscope optique. Vue globale détaillant la structure principalement rencontrée dans les arêtes.

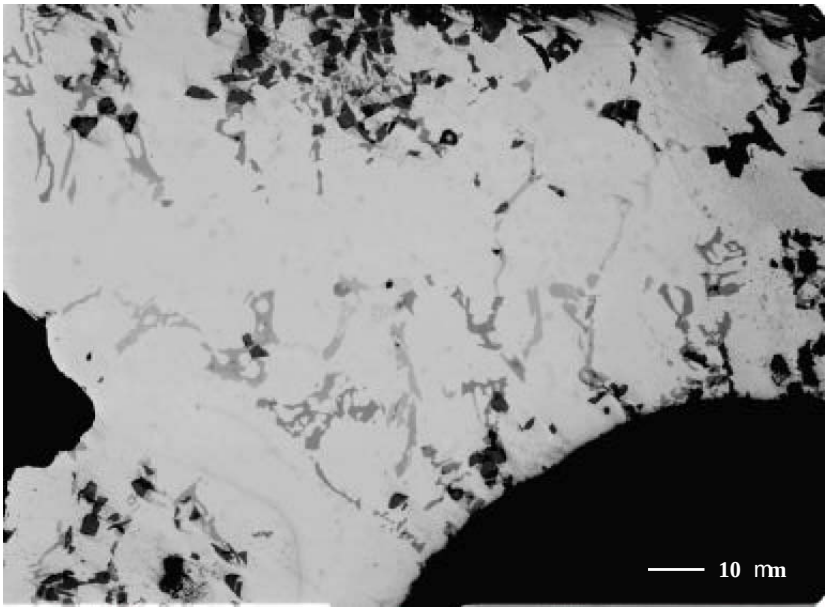


FIG. 1.3 – Observation au microscope optique. Vue détaillant la structure principalement rencontrée dans les points triples.

1.3 Observation au microscope électronique à balayage

L'observation au MEB nécessite la dépose d'un film fin d'or-paladium à la surface de l'échantillon pour rendre la résine conductrice. L'utilisation de ce moyen permet d'atteindre des grandissements plus importants et donc d'obtenir des images d'une meilleure définition pour la localisation des Carbures de Silicium (voir figure 1.4). Le MEB permet également grâce à l'utilisation d'une microsonde d'obtenir des informations sur la constitution des phases en présence.

La zone étudiée est présentée en figure 1.5, elle a été choisie car elle semblait présenter la plus grande diversité de phases en présence. Six phases différentes ont été repérées dans le matériau constituant les cellules.

1. La matrice à base d'aluminium, de magnésium, de cuivre, de silicium et de fer dont la composition massique est donnée dans le tableau 1.3 et la répartition spatiale sur la figure 1.6
2. Les particules de carbure de silicium SiC dont la taille est comprise entre $10\mu m$ et $30\mu m$ (voir figure 1.4). Elles sont particulièrement présentes dans les parois et plus rares au points triples (voir figure 1.2 et 1.3)
3. Une phase intermétallique aluminium, nickel, fer et silicium. Cette phase présente une microstructure sous forme de brins dendritiques secondaires. Elle apparait en blanc sur les micrographies obtenues au MEB (voir figure 1.4), elle est essentiellement présente aux points triples.
4. Une phase riche en silicium.
5. Une phase d'oxyde à base de magnésium, de silicium et d'oxygène. Elle apparait en foncé sur la micrographie et reste peu présente.
6. Une dernière phase très rare également, riche en aluminium et carbone et seulement détectée à l'EDS.

La présence d'oxygène n'est pas négligeable dans les différentes phases. L'observation visuelle laisse apparaitre des zones mates grises foncées. Sur la figure 1.11 on relèle la présence d'une mince couche

	matrice	phase riche en *Si*	phase blanche
Aluminium	95,49	28,74	35,77
Silicium	0,66	61,99	19,98
Cuivre	2,09	5,89	10,89
Magnésium	0,41	0,64	3,28
Fer	0,43	0,25	18,29
Nickel	0,03	0,02	0,81
Carbone	0	0,96	0
Oxygène	0,92	1,49	1,06

TAB. 1.1 – Composition massique % des principales phases présentes dans la mousse

d'alumine Al_2O_3 d'épaisseur moyenne $10\mu m$ caractérisée par les formes en batonnets à la surface de la cellule. La présence de cette couche, extrêmement fragile, est plus importante dans le cas d'éprouvette soumise à une mode d'usinage lubrifié à l'eau.

1.4 Analyse chimique

1.4.1 Méthode EDS globale

L'appareil utilisé est un microscope électronique à balayage environnemental Philips (utilisé ici en mode conventionnel) de la dernière génération et muni d'un détecteur d'ions secondaires. La procédure consiste, après avoir fait le vide dans la chambre (aux alentours de 10^{-5} mbar) dans laquelle est placé l'échantillon sans précautions particulières, à focaliser le faisceau d'électron sur une portion de surface à peu près plane de l'échantillon (soit par exemple aux noeuds de jonctions entre les parois) et à lancer l'analyse EDS à partir du logiciel INCA. Les concentrations déterminées alors sur un échantillon extrait de la brame HAL-JSB-5 (voir tableau 1.2) correspondent bien à celle annoncées par Hydro Aluminium en ce qui concerne le silicium, principalement issu de l'ajout de carbure de silicium nécessaire au procédé de fabrication de la mousse (cf. Introduction). La présence de fer et de cuivre en quantités non négligeable peut cependant inquiéter en terme de résistance à la corrosion : c'est un point qu'il faudra sans doute valider par un essai représentatif des conditions d'utilisation rencontrées par les futurs clients pour les pièces automobiles comportant des mousses d'aluminium.

Eléments	Al	Si	Fe	Ni	Cu
Concentration moyenne sur 9 spectres	79,52 %	14,88 %	2,82 %	0,60 %	2,16 %

TAB. 1.2 – Concentrations massiques moyennes relevées par analyse EDS

1.4.2 Méthode chimique

Une analyse par décomposition chimique a également été menée à la Direction de l'ingéniérie des Matériaux de RENAULT afin de confirmer les tendances annoncées par l'analyse EDS. Trois lots différents de mousse fournis par Hydro Aluminium ont été testés. L'échantillon 1 de densité 0.05 g/cm^3 est issu du projet européen EAMLIFe. L'échantillon 2 de densité 0.26 g/cm^3 est issu de la brame HAL-JSB-3 et l'échantillon 3 de densité 0.27 g/cm^3 est issu de la même brame, HAL-JSB-5, que l'échantillon utilisé pour l'analyse EDS précédente. Les résultats sont consignés dans le tableau 1.3.

Eléments	Si	Cu	Mg	Fe
Concentration massique échantillon 1 densité 0.05 g/cm^3	6,47 %	0,006 %	0,37 %	0,087 %
Concentration massique échantillon 2 densité 0.26 g/cm^3	6,63 %	0,026 %	0,39 %	0,096 %
Concentration massique échantillon 3 densité 0.27 g/cm^3	6,60 %	2,18 %	0,42 %	0,110 %

TAB. 1.3 – Concentrations massiques relevées sur trois lots différents par analyse chimique

Contrairement à ce que nous imaginions à l'issue de l'analyse EDS, la présence de cuivre n'est pas indispensable à la fabrication de la mousse d'aluminium (cf. échantillon 1 et 2), même pour atteindre certaines plages de densité élevée (cf. échantillon 2). Cette information est plutôt encourageante dans l'éventualité d'une utilisation de mousse d'aluminium dans les véhicules futurs. En effet, pour des raisons de corrosion, les normes de qualité RENAULT ne tolèrent pas une forte présence de cuivre dans les alliages d'aluminium. Concernant l'échantillon 3, il apparait un écart sur les concentration massique de silicium et de fer mesurées par analyse chimique ou par EDS. Cet écart peut s'expliquer par la faible quantité de matière analysée dans les deux cas et la forte hétérogénéité rencontré dans ce matériau. Cela confirme la nécessité pour Renault d'établir avec ses fournisseurs de mousse un cahier des charges précis concernant la composition moyenne de ce matériau.

1.4.3 Conclusion sur la microstructure

La microstrucuture de ce matériau est extrêmement dispersée. Toutefois la forte présence de particules de carbure de silicium dans les parois laisse augurer un comportement mécanique fragile. Cette hypothèse sera validée dans la partie 3 par l'analyse de différentes fractographies.

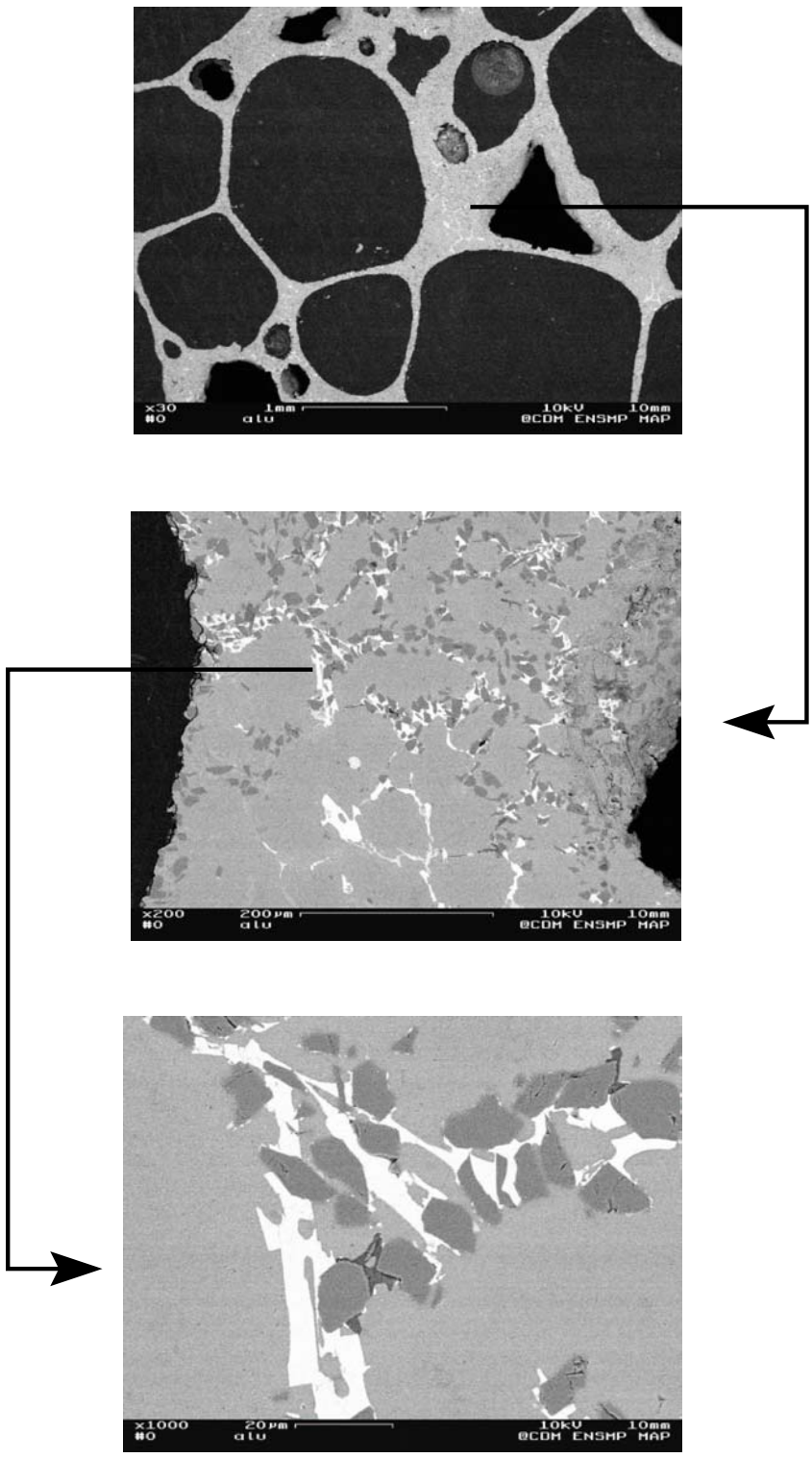


FIG. 1.4 – Détails des microstructures au MEB. On distingue parfaitement les particules noires de carbure de silicium sur la micrographie du bas

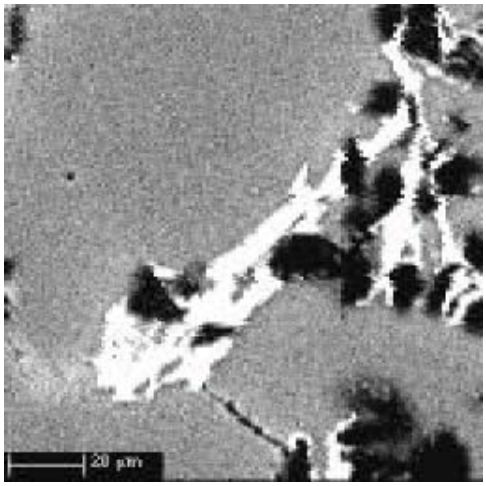


FIG. 1.5 – Zone étudiée à la microsonde

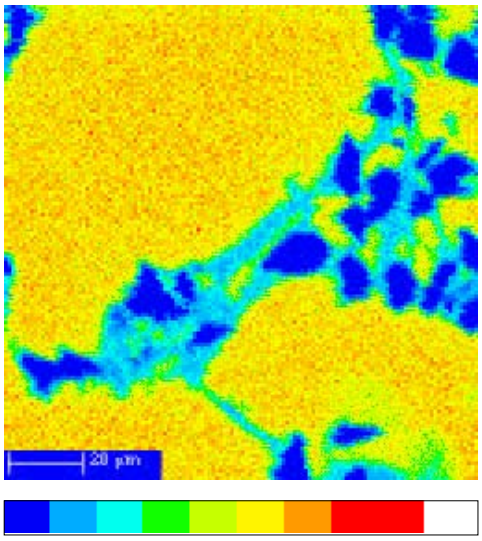


FIG. 1.6 – Cartographie de la répartition de l'aluminium

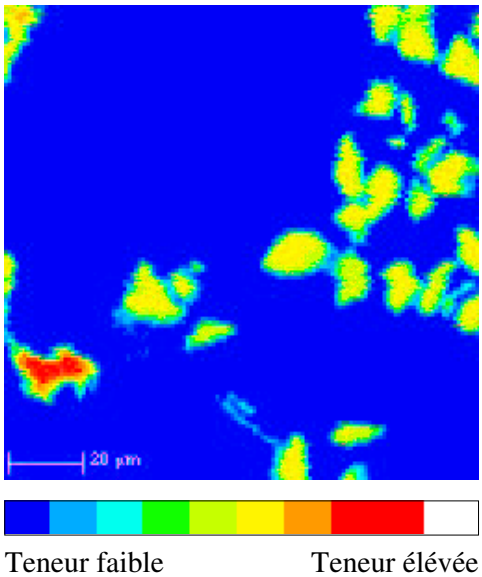


FIG. 1.7 – Cartographie de la répartition du Silicium

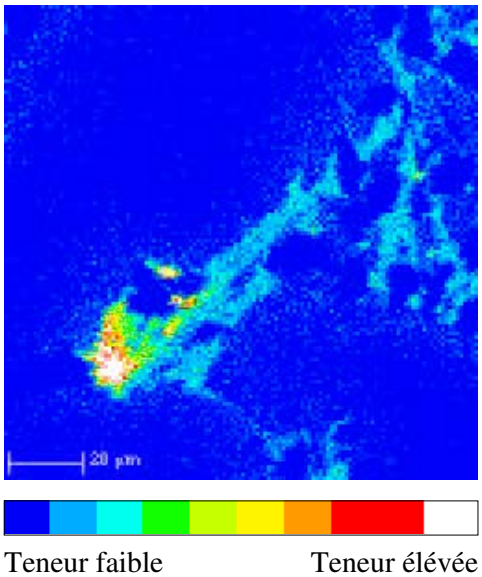


FIG. 1.8 – Cartographie de la répartition du cuivre

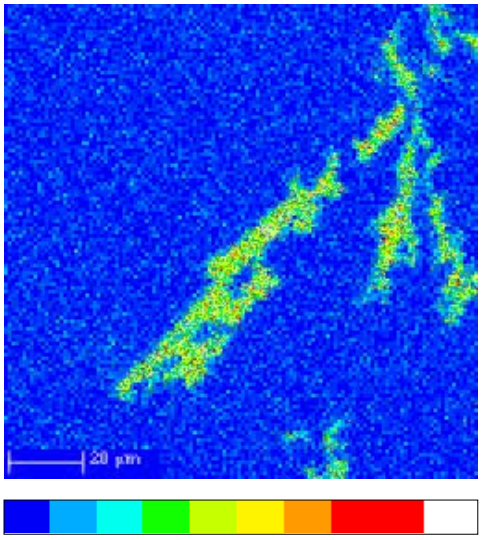


FIG. 1.9 – Cartographie de la répartition du nickel

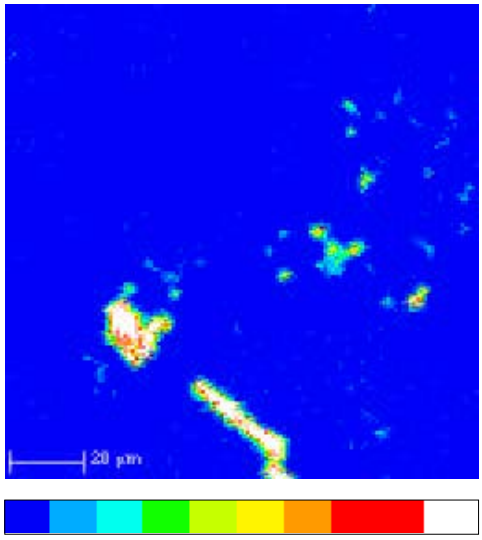


FIG. 1.10 – Cartographie de la répartition du magnésium

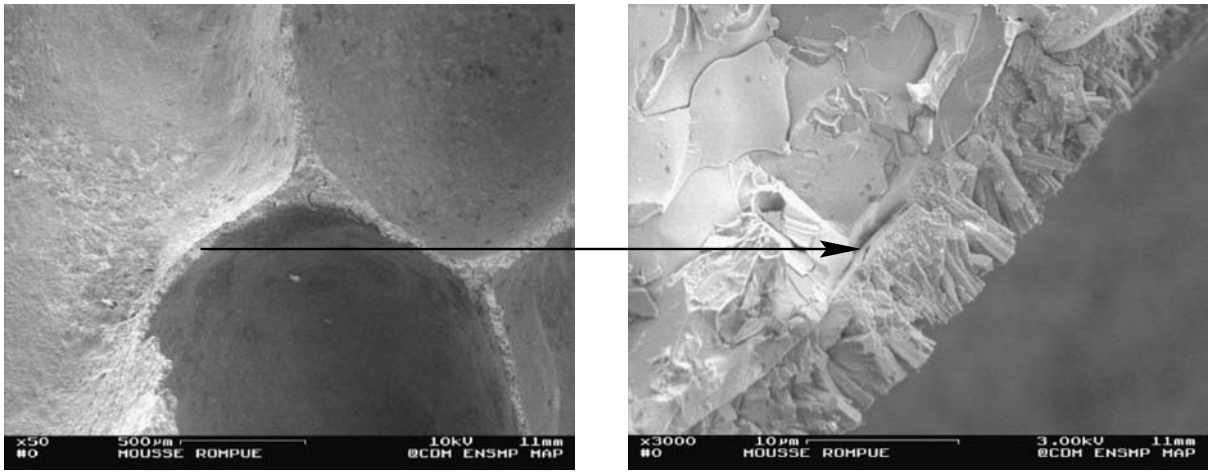
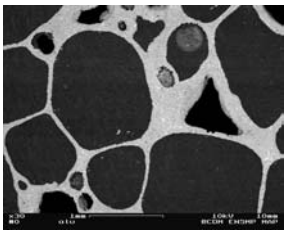


FIG. 1.11 – Présence d'alumine sous forme de batonnets à la surface de certaines cellules

Chapitre 2

Echelle mésoscopique



Notre objectif est de caractériser les cellules : leurs formes, leurs tailles, leurs topologies. On peut distinguer deux approches :

1. L'approche descriptive ne s'intéresse qu'à la topologie seule des cellules [Ashby et al.97], [Nieh et al.98] et [Weaire et al.00].
2. L'approche analytique tente de relier la forme des cellules, vers l'amont avec le procédé de fabrication et vers l'aval avec le comportement mécanique [Beals et al.97], [Gradinger et al.97], [Fusnheng et al.98], [Fusnheng et al.99], [Kenny98], [Grenestedt00] et [Sugimura et al.97].

2.1 Approche descriptive

Dans la littérature, les études topologiques descriptives seules sont rares [Nieh et al.98], [Ashby et al.97], [Gibson et al.] et [Weaire et al.00]. L'étude expérimentale de la morphologie des cellules des mousses d'aluminium peut être réalisée à l'aide de différents dispositifs d'observation : du plus simple (œil humain), aux plus complexes à mettre en œuvre (tomographie X, scan) [Elmoutaouakkail et al.01, Benouali et al.01b], et ce pour des observations aussi bien statiques que dynamiques.

Une simple observation visuelle suffit pour la plupart des auteurs à souligner le caractère cellulaire de la mousse et à répondre à une question fondamentale, le caractère fermé ou ouvert des porosités. Cependant, pour ce dernier point, une étude plus fine peut être menée en étudiant la perméabilité de la mousse à un gaz ou un liquide [Ashby et al.97]. Nous avons réalisé un test de perméabilité sur une éprouvette cylindrique de longueur $150\,mm$ et de diamètre $\phi = 65\,mm$. Cette éprouvette est disposée dans un réservoir rempli d'eau, vue sa densité absolue elle flotte. Cependant, après quelques heures, elle coule. Ainsi les porosités ne sont pas totalement fermées. Le gain en masse de l'éprouvette est de plus de 8,5 %. Après une mise à l'étuve pendant 17 heures à 50° C l'éprouvette retrouve son poids initial. Ainsi après usinage, toutes les éprouvettes de cette étude sont passées à l'étuve afin de ne pas fausser l'information sur leur densité réelle. La comparaison des courbes de compression réalisées sur deux éprouvettes étuvée

et non étuvée n'ayant pas montré de différences significatives cette mise à l'étuve sera considérée comme sans influence sur le comportement mécanique.

Lorsque la densité des produits augmente, la taille des cellules diminue, ce qui rend difficile l'observation de la structure à œil nu. Des observations au microscope optique ont été conduites ; elles permettent d'apprécier les principaux défauts morphologiques avec plus de facilité. Mais, le caractère cellulaire du matériau et la nécessité d'observer avec de plus grands grossissements ont vite montré les limites du microscope optique en terme de profondeur de champ. L'apport dans ce domaine du microscope électronique à balayage est significatif ; les différents défauts mésoscopiques rencontrés dans les mousses d'aluminium peuvent être résumés ainsi (voir [Sugimura et al.97]) :

– des parois peuvent être courbées,
– quelques parois peuvent être entortillées et vrillées.
– des amas de matière dans certains endroits peuvent être accolés à des manques dans d'autres.

La tomographie aux rayons X assistée par ordinateur permet d'obtenir des informations sur la topologie des cellules à l'intérieur du volume. Elle consiste à focaliser un faisceau de rayons X au travers de l'échantillon sur un détecteur placé sur le côté opposé du spécimen. L'échantillon est ensuite mis en rotation autour d'un axe vertical (voir figure 2.1). Chaque scan résulte en une projection différente qui dépend d'un coefficient d'atténuation fonction de l'angle de rotation de l'échantillon par rapport au détecteur (voir figure 2.2). La reconstruction des sections s'effectue à l'aide d'un programme d'interpolation. Nous avons effectué un séjour à la Katolieke Universiteit Leuven afin de scanner deux échantillons cubique de mousse de 50 mm de coté. Pour ces échantillons, la reconstruction des sections prend à peu près trois heures sur un pentium 600. Les sections obtenues sont en fait des tranches virtuelles dans le bloc de mousse (voir figure 2.3). Il est alors possible de reconstuire à l'aide d'un programme adapté le bloc de mousse en 3D (voir figure 2.4, 2.5, 2.6 et 2.7) ce qui permet d'effectuer des coupes perpendiculairement aux sections reconstruites (voir figure 2.8 et 2.9).

Dans le cas d'une étude sur les mécanismes de déformation des mousses cette méthode permet de saisir des images de la déformation d'une cellule totalement contrainte par les cellules environnantes [Maire et al.01], [Krist et al.98]. Une exploitation 2D de ces résultats permet de connaitre la répartition de taille de cellule par analyse d'image (voir figure 2.10 et 2.11).

A l'aide de ces moyens d'exploration et de reconstruction, il est possible, d'un point de vue géométrique, d'imaginer une structure cellulaire comme des sommets reliés entre eux par des arêtes, qui, délimitant des faces, forment des cellules. Les arêtes, les faces et les cellules sont les ensembles topologiques contituant une mousse. Les coefficients de topologie cellulaire ont été définis par [Ashby et al.97]. Par exemple la connectivité des arêtes représente le nombre d'arêtes qui se rencontrent à un sommet (elle est en général égale à 4 dans le cas des mousses mais peut prendre d'autres valeurs). Cette connectivité des arêtes est plus difficile à établir pour une mousse à porosités fermées que pour une mousse à porosités ouvertes. Le nombre de faces qui se rencontrent à chaque arête s'appelle la connectivité des faces (elle est en général égale à 3 dans le cas des mousses mais peut prendre d'autres valeurs également). On peut définir également le nombre de sommet V, d'arêtes E, de faces F et de cellules C qui sont reliées par la loi d'Euler soit -C+F-E+V=1. Ces coefficients sont faciles à déterminer lors de la modélisation d'une mousse par des structures régulières comme des cubes ou des hexaèdres. Expérimentalement il est plus difficile de les déterminer mais la tomographie peut permettre de les évaluer statistiquement [Elmoutaouakkail et al.01].

2.2 Approche analytique

Après avoir observé ces mésostructures, l'objectif est ici de comprendre comment elles ont pu se former et quel vont être les conséquences sur le comportement mécanique des mousses.

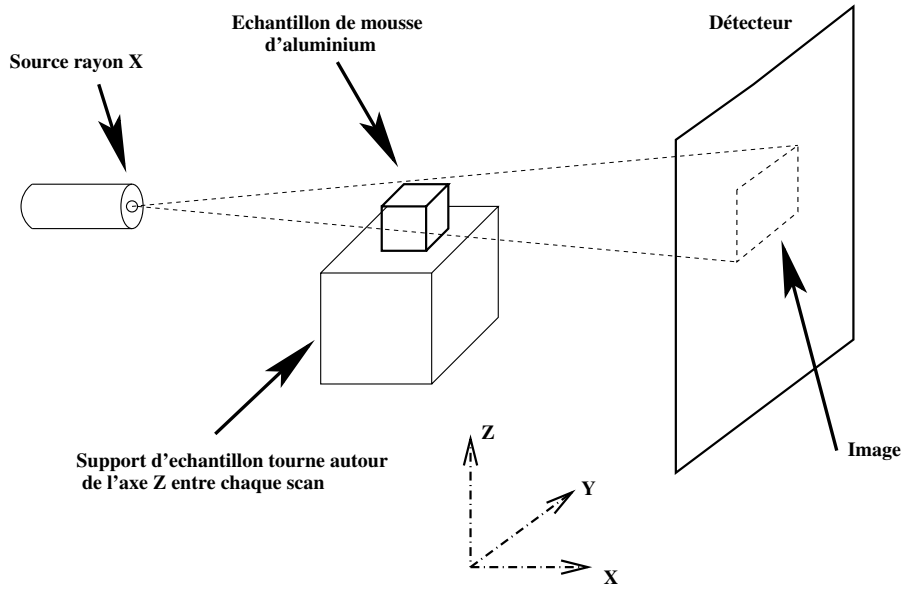
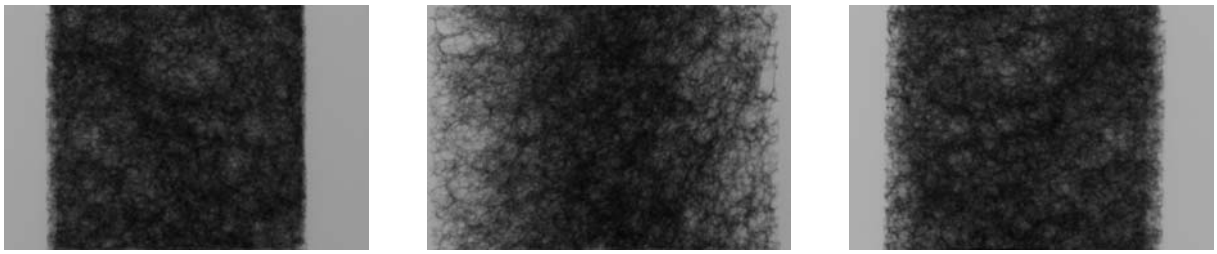


FIG. 2.1 – Schéma de principe d'un dispositif de tomographie à rayons X



angle d'incidence de 0° angle d'incidence de 45° angle d'incidence de 90°

FIG. 2.2 – Scans réalisés sur un cube de mousse d'aluminium de 50 mm de côté pour différents angles d'incidence

D'après [Ashby et al.97] [Weaire et al.00], la morphologie des cellules peut en partie s'expliquer par les tensions superficielles qui, au cours du processus de moussage, drainent la matière vers les arêtes au détriment des parois, ce qui conduit, à la fin du processus de moussage, à observer des cellules comportant de fines parois bordées par des arêtes épaisses. La fraction volumique ϕ de matière dans les arêtes est donc un facteur déterminant de la description morphologique des cellules et a des conséquences sur les modèles d'analyse dimensionelle développés par [Ashby et al.97]. La dispersion de taille des cellules observées dans une mousse d'aluminium peut s'expliquer par la nature du processus de moussage. Il peut être comparé, dans ce cas, à la cristallisation de polymères. Si, au temps t = 0, tous les germes (soit par exemple les particules de TiH_2 dans le cas des mousses obtenues par métallurgie des poudres), répartis aléatoirement au sein de la matrice, commencent à mousser en même temps et croissent, alors la topologie des cellules sera celle de Voronoi, soit un polyèdre centré au point de germination et qui contient tous les points les plus proches de lui par rapport à un autre point de germination. La mousse de Voronoi

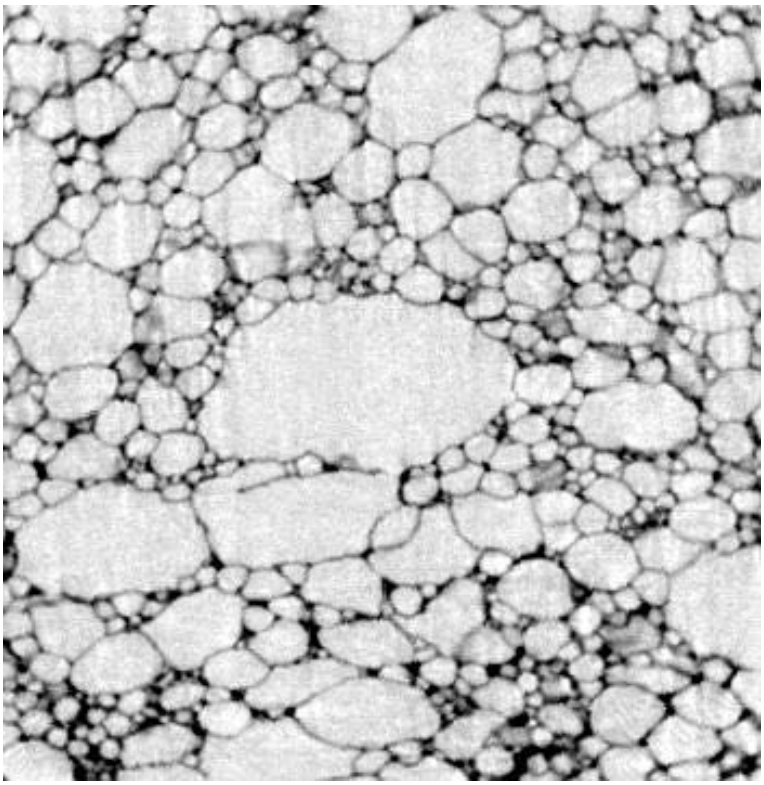


FIG. 2.3 – Section 2D dans le plan (y ;z) reconstruite à partir des scans

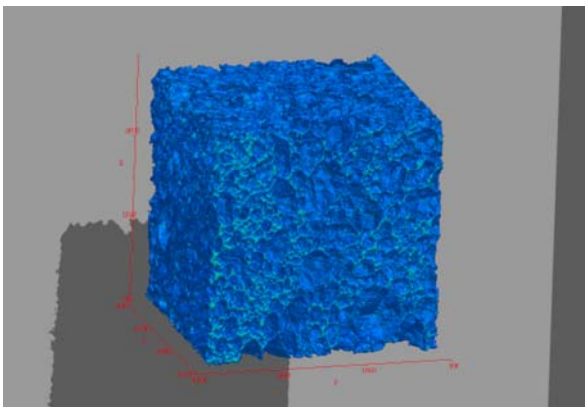


FIG. 2.4 – Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : vue extérieure

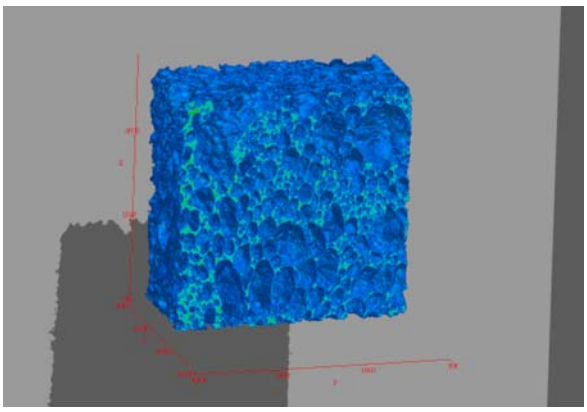


FIG. 2.5 – Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle parrallèle aux coupes 2D reconstruites à partir des scans

est formée alors de cellules possédant en moyenne 15.56 faces (ce qui justifie théoriquement l'emploi de tétrakaïdecaèdre - 14 faces - pour simuler le comportement de ces structures [Grenestedt99]). Cependant, il est aisé d'imaginer que si les germes ne démarrent pas tous en même temps mais sporadiquement, ce qui se produit dans le cas des processus industriels, alors la croissance des cellules ne sera pas homogène et la taille des cellules présentera une plus grande dispersion. Pourtant, la croissance compétitive des cellules ne saurait être tenue pour seule responsable des dispersions de taille de cellules. D'autres fac-

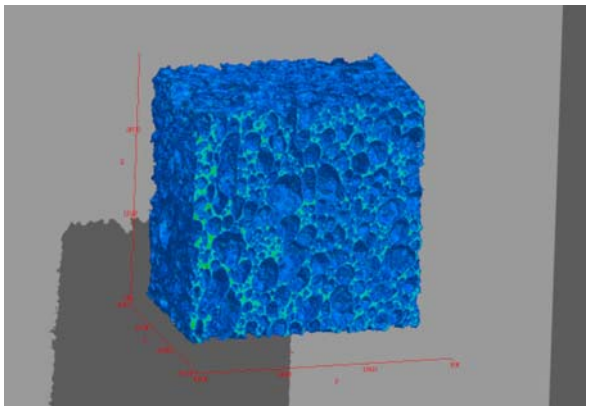


FIG. 2.6 – Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle parrallèle aux coupes 2D reconstruites à partir des scans

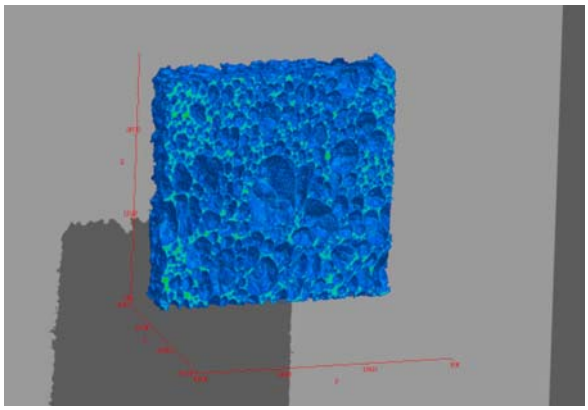


FIG. 2.7 – Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle parrallèle aux coupes 2D reconstruites à partir des scans

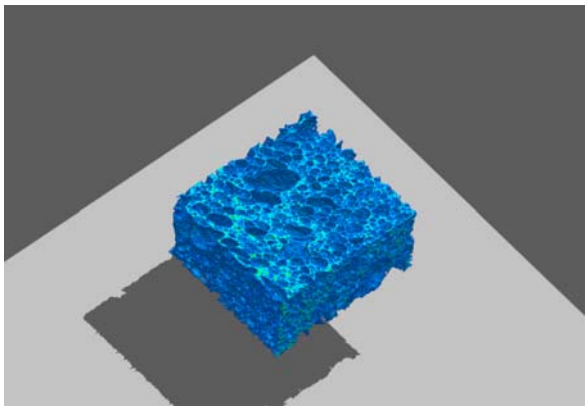


FIG. 2.8 – Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle perpendiculaire aux coupes 2D reconstruites à partir des scans

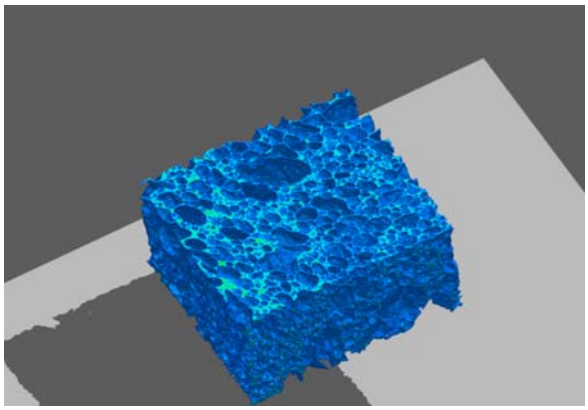


FIG. 2.9 – Reconstruction 3D du bloc de 50 mm de côté : coupe virtuelle perpendiculaire aux coupes 2D reconstruites à partir des scans

teurs influencent la forme des cellules. On peut imaginer également que les différences de pression entre les cellules imposent des surfaces de jonctions différentes des simples plans mais qui ressembleraient plutôt à des portions de calottes sphériques. Lorsque les parois sont trop fines elles ne peuvent contenir la pression de gaz à l'intérieur de la cellule, ce qui peut conduire parfois à l'éclatement de celles-ci ; il en résulte des cellules où il manque une face, la matière se trouvant entraînée par tension superficielle vers les arêtes. Il y a donc des amas de matière dans certaines parties et des manques dans d'autres. Ainsi, il y a des variations locales de densité et les modèles de mousses théoriques obtenues en tenant compte de ce phénomène (voir [Elmoutaouakkail et al.01]) sont radicalement différentes des modèles de mousses de Voronoi ou des modèles de mousses façonnées par les tensions superficielles seules. Le façonnage des cellules est donc toujours gouverné à la fois par la croissance différentielle, les tensions superficielles et les « accidents » que sont les éclatements de parois.

Il est évidemment primordial de bien comprendre certains aspects géométriques de la forme des cellules afin de pouvoir comprendre ensuite les mécanismes de déformation. Par ordre d'importance, la taille des cellule ainsi que l'épaisseur des parois et donc la densité relative semblent être les grandeurs les plus remarquables dans l'étude du comportement mécanique des mousses d'aluminium. Mais l'ani-

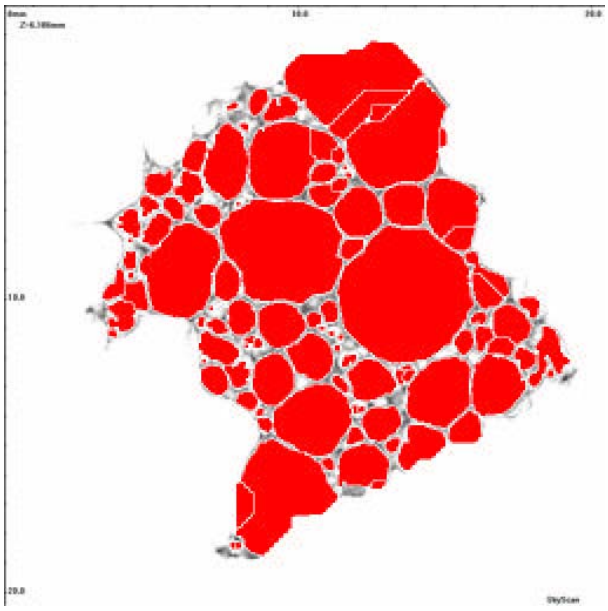


FIG. 2.10 – Analyse d'image sur une coupe reconstruites à partir de scans issus de tomographie à rayons X

sotropie des cellules ne doit pas être ignorée ; la tendance des cellules à être allongées ou aplaties dans une direction va nécessairement orienter les propriétés mécaniques de la mousse et des fluctuations de densité locale vont perturber la déformation. Enfin, les aspects topologiques de formes de cellules jouent également un rôle sur les modes de déformation.

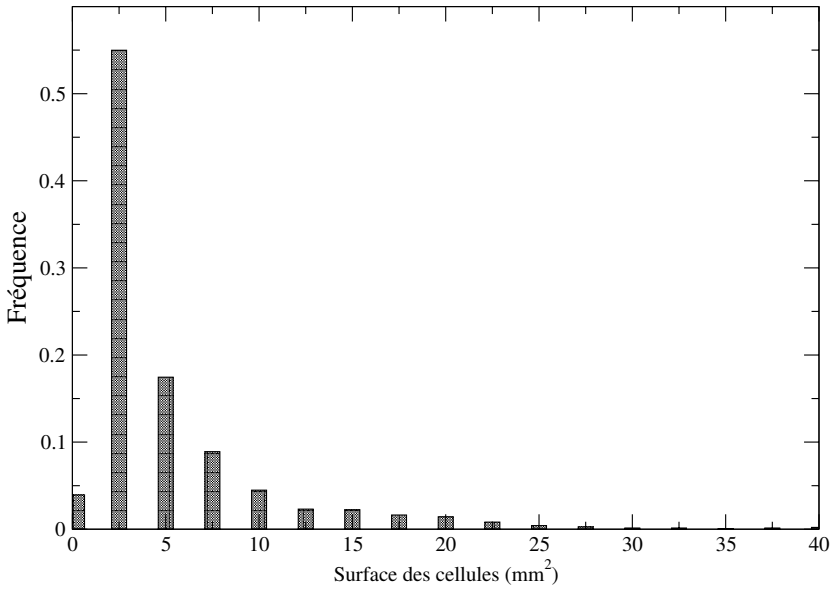
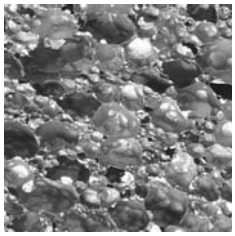


FIG. 2.11 – Traitement par analyse d'image d'une coupe tomographique rayon X. Répartition de la surface des cellules.

Chapitre 3

Echelle macroscopique



Dans ce chapitre nous définissons quelles sont les grandeurs macroscopiques caractéristiques d'une mousse d'aluminium.

La densité relative et la porosité distinguent la mousse du matériau de base dont elle est issue. Les mousses d'aluminium obtenues par voie fonderie possèdent une densité relative comprise entre 5 % et 14 %. Toutefois lorsque un fabricant vend une mousse il indique une densité relative globale c'est à dire obtenue en divisant la masse de la brame par son volume apparent. Or, dans l'introduction nous avons constaté que les brames possèdent une peau inférieure et une peau supérieure qui perturbent l'évaluation de la densité. En effet la densité relative locale à cœur sera bien inférieure. Une éprouvette sans peau aura une densité inférieure à celle de la brame dont elle est issue. Ainsi, dans cet étude, chaque échantillon a été mesuré et pesé afin d'en déterminer la densité exacte. Toutefois, hormis cet effet de peau, la densité locale mesurée à cœur n'est pas toujours un paramètre fiable de description d'une mousse. Pour le vérifier nous avons usiné avec une carroteuse géologique du Laboratoire de géologie et d'étude du sol de l'ecole des Mines de Paris près de 100 éprouvettes. Cette technique d'usinage permet une meilleure précision dimensionnelle et, comme elle utilise un outil de forme, une meilleure précision d'enveloppe. Nous avons ensuite mesuré et pesé chaque échantillon afin en obtenir la densité. Les résultats sont consignés en annexe. La densité moyenne est de 0.254 l'écart-type est de 0,365 avec des extrèmes compris entre 0,220 et 0,293.

La densité relative peut également être retrouvée par analyse d'image. En effet une coupe obtenue par tomographie X peut être seuillée (voir le chapitre 4 de la partie 4 pour une description de cette technique). Le détermination du nombre de pixels blancs par rapport au nombre total de pixels de l'image donnera la densité relative de la coupe. Toutefois, étant donné que le niveau de seuillage doit être ajusté par l'opérateur, il est impossible d'avoir une mesure absolue de la densité. Cependant, après calibrage d'une chaîne d'analyse d'image sur une mesure obtenue par pesage, il est possible de suivre l'evolution de la densité relative sur plusieurs coupes obtenues par la même chaîne d'analyse d'images.

Au cours de la solidification de la brame un phénomène de drainage entraine la matière vers la base de la brame créant ainsi un gradient de densité dans l'épaisseur de la brame [Beals et al.97]. Cela peut se vérifier facilement en usinant une éprouvette cylindrique dans le sens longitudinal ou travers de la brame

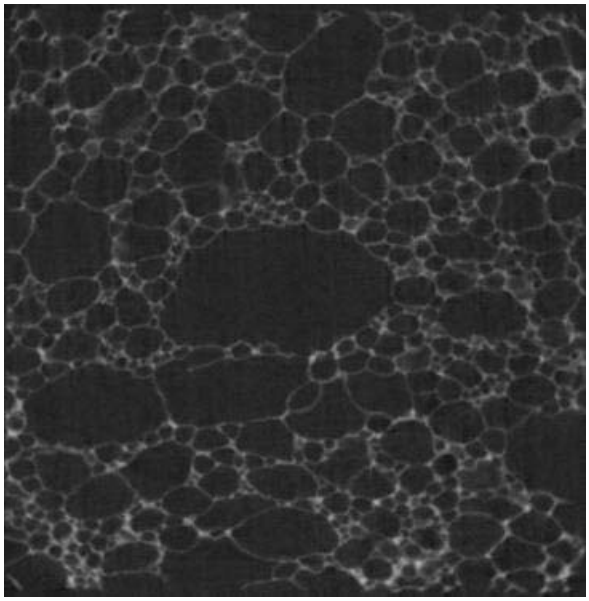


FIG. 3.1 – Coupe virtuelle 2D obtenue par tomographie 3D : image en niveau de gris

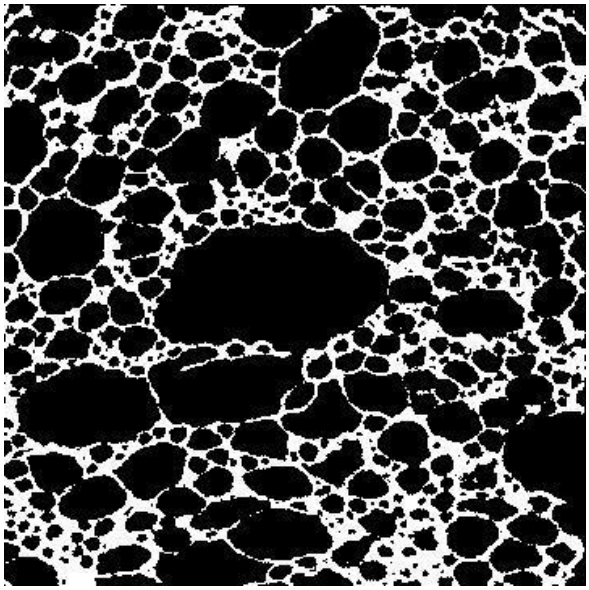


FIG. 3.2 – Coupe virtuelle 2D obtenue par tomographie 3D : image seuillée

et en la posant horizontalement sur une surface plane : après quelques oscillations l'éprouvette trouve une position d'équilibre qui correspond à la zone la plus dense en contact avec la table.

Toutes les disparités et les fluctuations constatées sur la structure confèrent à la mousse un comportement mécanique particulier. C'est ce comportement que nous allons détailler dans la troisième partie de ce document.

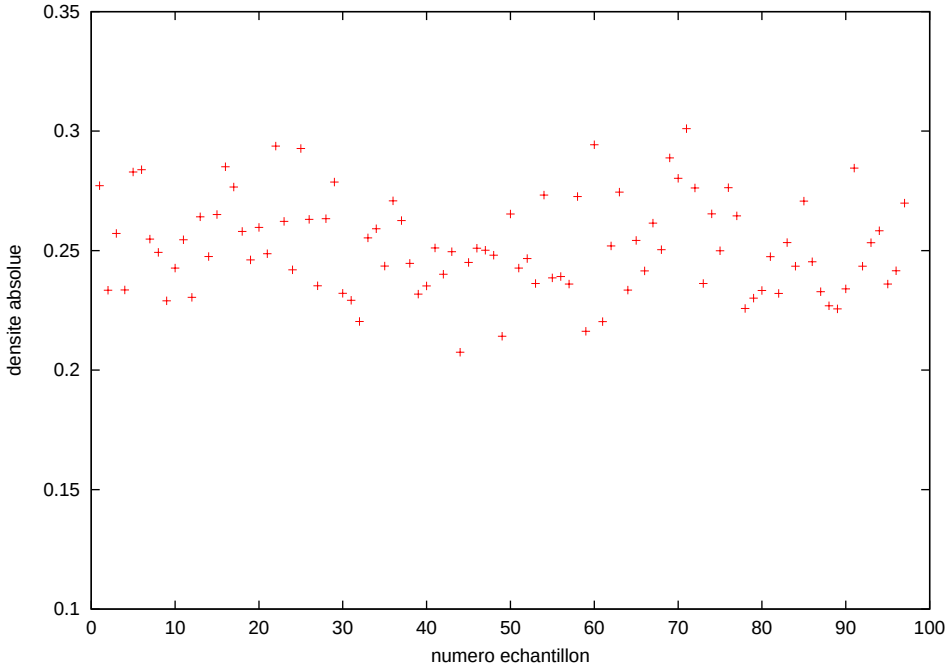


FIG. 3.3 – Variation de la densité en fonction de l'échantillon

Troisième partie

Approche expérimentale et statistique du comportement mécanique de la mousse d’aluminium

Chapitre 1

Deformation and fracture of aluminium foams under proportional and non proportional multi-axial loading : Statistical analysis and size effect

Auteurs : J-S. Blazy, A. Marie-Louise, S. Forest, Y. Chastel, A. Pineau, A. Awade, C. Grolleron, F. Moussy.

1.1 Abstract

An extensive experimental program and detailed mechanical analysis were performed to test and model the statistical response of metallic foams under complex loading conditions. Tensile tests were performed on more than eighty specimens of closed–cell aluminium foams with four different specimen sizes. These test results show a large scatter and a significant size effect especially on standard deviation. The average fracture stress and, more significantly, the corresponding scatter decrease for increasing volume sizes. A Weibull statistical analysis is performed and gives a Weibull modulus close to 8. Compression tests were also carried out. Both mean fracture stress in tension and mean peak stress in compression and the corresponding dispersions are correctly described by a single set of Weibull parameters. The statistical model is extended to multi–axial loading conditions by introducing an effective stress measure involving both the deviatoric part of the stress tensor and its trace. One additional parameter is identified using the average shear yield stress obtained from pure shear tests and torsion tests on solid bars. The model is then able to predict the dispersion found for the shear strength. Two types of combined tension/compression–torsion loading conditions were then tested experimentally. The non–proportional loading path consists of a tension test followed by torsion, keeping the axial stress constant. In the proportional loading path, shear and axial stress follow a straight line in the stress space. The corresponding surface of average yield/fracture stress is found to be symmetric. The experimental results are in good agreement with the predictions of the statistical model. The model predicts a bell–shaped surface for the first loading path and a quasi–elliptic one for the proportional one. The scatter found in the description of this surface is also accounted for accurately by the model. A brief discussion of an extension of Beremin's micromechanical model to the statistical failure of brittle foams is presented.

1.2 Introduction

Recently, processing techniques for aluminium foams have been improved. These materials are more widely available for use in applications such as lightweight energy absorption devices for automotive industry (see, e.g. [Ma et al.98, Gibson et al.98]). The mechanical properties of these foams are now well–understood and design tools are available to include these materials in structural components [Ashby et al.97, Ashby et al.00]. However successful industrial applications require not only a precise assessment of their average properties under complex loading conditions, but also of the corresponding scatter usually associated with these properties. The experimental determination and the modelling of mean material response and its dispersion under uni–axial and multi–axial loading are the main objectives of the present work.

The compressive behaviour of aluminium foams has been the subject of thorough investigations because of their encouraging energy dissipation capability [Cullough et al.99]. Foam crushing proceeds through the formation, multiplication and propagation of strain localisation bands throughout the specimen [BS et al.98, Chastel et al.99, Bastawros et al.00]. In tension, aluminium foams usually exhibit a brittle behaviour. Tensile loading is also important in practice because structures may be submitted to bending and the resulting brittle tensile behaviour is a severe limitation for further energy absorption. However studies of the tensile behaviour of metal foams remain scarce (see e.g. [Cullough et al.99, Andrews et al.99]). They are usually limited to a small number of samples, which does not allow a precise statistical analysis of the brittle behaviour. Note also that the compressive deformation of aluminium foam is not a purely ductile process but, instead, fracture takes place very early inside localised bands [BS et al.98, Bastawros et al.00]. In the present work it is confirmed that the deformation and fracture behaviour of metallic foams is a combination of local brittle behaviour and plastic yielding effects. In the paper the distinction between yielding and fracture will not be made except otherwise stated.

Experimental data for the multi-axial yielding of metallic foams are also very limited. The main contributions can be found in [Triantafillou et al.89, Gioux et al.00, Deshpande et al.00]. Typically axisymmetric tests are performed on open-cell and closed–cell aluminium foams under combined axial and radial compression, on the one hand, and for a variety of biaxial, shear and axisymmetric loadings, on the other hand. Because of experimental scatter, these studies show that it remains difficult to establish the shape of the yield surfaces, at least concerning the initial yield surface. These data were obtained mainly with a compressive regime (except in [Deshpande et al.01] for polymeric foam) and results for multi–axial situations with superimposed tensile axial stress are still scarce. In the present work, the case of combined tension/compression–torsion loading is addressed, which makes it possible to study the symmetry properties of the initial yield/fracture surface. In the tensile mode, linear fracture mechanical concepts have been applied to notched specimens or other foams structures [Chen et al.01].

The scatter in most of the measured properties can be associated with the inevitable presence of defects in aluminium foams due to the material processing itself, e.g. the strongly non–homogeneous distribution of cell sizes. The effect of geometrical defects on the elastic and plastic properties of foams has been described by several authors [Silva et al.95, Chen et al.99, Andrews et al.99, Grenestedt00, Benouali et al.01a]. These authors report that the localized yielding is believed to result from local inhomogeneities like variations in density, cell shape, cell orientation and cell wall curvature. However these authors did not relate the statistical distribution of defect size to the dispersion of the measured properties nor to a possible size effect which can be evidenced using specimens of different sizes. The size effects reported in literature are rather related to edge effects [Onck et al.01, Andrews et al.01b], to the notch sensitivity or to the influence of hole size in foam structures [Andrews et al.01a, Onck01]. In [Huang et al.91b, Huang et al.91a] Huang and Gibson related the fracture thoughness of brittle open cell foam with the cell size and the Weibull modulus of cell wall material. In [Cullough et al.99] McCullough

and al. performed a Weibull analysis of their tensile and compression tests but did not investigate the corresponding expected size effects. In the present work, the problem of the yield strength in compression and failure strength in tension of foam specimens as a function of specimen volume is investigated.

It is clear that widespread applications for aluminium foams require a precise modelling of the scatter for both uni–axial and multi–axial loading conditions in order to design components with a given level of confidence. Constitutive models for aluminium foams valid for multi–axial loading are now available for the initial yield surface but also in some cases for the post–yield behaviour [Gibson et al.89, Ashby et al.97, Chastel et al.99, Miller00, Deshpande et al.00, Badiche et al.00, Hanssen et al.02]. They are based on the mechanics of porous materials developed for instance for powder metallurgy applications [Besson et al.89]. However these models are purely deterministic and cannot account for the systematic scatter observed for aluminium foams in spite of continuing process and metallurgy improvement. The statistical aspect must also be incorporated in the multi–axial model to allow reliability assessments for structural applications.

The paper is organized as follows. After this first introductory section, the second section describes the microstructure of the investigated foams and the experimental mechanical testing procedures. The results of tensile tests for more than eighty specimens of four different specimen sizes are reported in the third section. Compression, shear, torsion and combined tension/compression–torsion tests have been performed and are described also in the third section. The fourth section provides a statistical model of the tensile and compression tests accounting for the observed size effects. The model is then extended to shear/torsion loading conditions, and finally used to predict the mean response and dispersion under multi–axial loading. The predictions are then compared with experimental results for two types of loading conditions. The non–proportional loading path corresponds to an initial tension or compression loading followed by a torsion loading, keeping the axial load constant. For the proportional loading path, torque and axial force are applied simultaneously and follow a straight line in the torque/force space. Finally a simple micromechanical model providing the fracture statistics of brittle foams from the knowledge of the cell size distribution is presented.

Regarding notations throughout this work, the statistical mean value of a physical property Z is denoted by $\overline{Z}$ and its variance by D_Z^2. The standard deviation is then D_Z. In all figures, the chosen convention is that the plotted intervals of confidence are the interval $[\overline{Z}-D,\overline{Z}+D]$ for the investigated property Z. Regarding the Weibull statistics used in this work, the reader is referred to a number of studies [Weibull51, Evans et al.78, Beremin83].

1.3 Experimental procedures

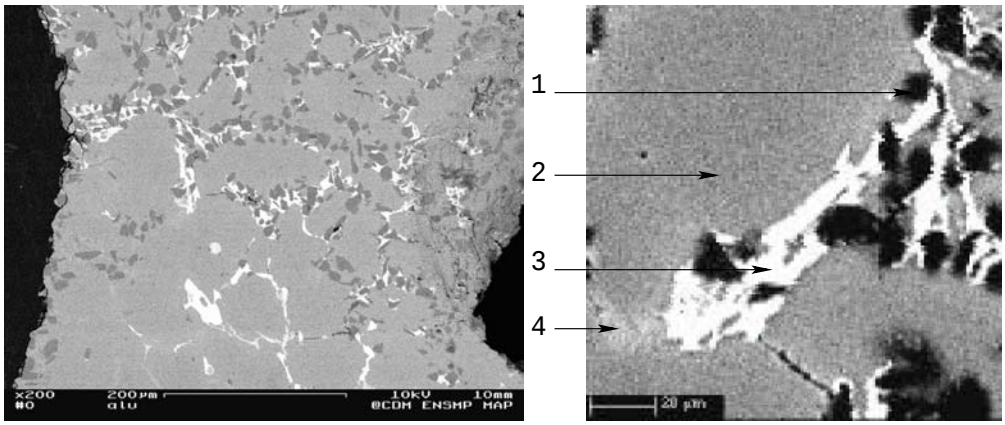
1.3.1 Material : composition and microstructure

Flat plates of stabilised aluminium foam of nominal density 0.26 g/cm^3 were supplied by Hydro Aluminium. The plates were of dimensions 2500 mm by 700 mm by 90 mm. They consisted of two skins with a foam core. As a result of the manufacturing process the upper skin was thinner (0.5 mm approximately) than the lower one (1 mm). The global composition was determined using chemical composition analysis (see table 1.1).

Element	Al	Si	Fe	Ni	Cu
Mean concentration	79.52	14.88	2.82	0.60	2.16

TAB. 1.1 – Chemical composition of the foamed aluminium alloy (weight %).

In order to limit cell wall damage, each sample for microstructural observations was cut using electro-discharge machining. The specimens were infiltrated in vacuum by a low viscosity resin, as described in [Markaki et al.01]. After being polished and nickel coated, the specimens were observed using a scanning electron microscope (SEM). The local composition was determined using energy dispersive X-ray spectroscopy (EDS). The SiC particules used in the process are retrieved and are labelled 1 in figure 1.1. The size of these particules is between 10 μm and 30 μm. They are preferently found in the cell walls and more seldom at the triple junctions. In addition to this network of SiC inclusions, three main phases were identified as shown in figure 1.1. The cell wall is made of an Al-Cu-Si-Mg phase (labelled 2 in figure 1.1), and an intermetallic phase Al-Ni-Fe-Si (labelled 3 in figure 1.1) and a Al-Si phase (labelled 4 in figure 1.1). The intermetallic phase is present in a secondary dendritic form, mainly at the triple junctions. The compositions of the three main phases are given in table 1.2.



(a) (b)

FIG. 1.1 – (a) Cell wall microstructure (SEM micrograph), (b) Zoom on SiC particle (labelled 1) and the three main phases using microprobe analysis : Matrix (labelled 2), Al-Si phase (labelled 3), Intermetallic phase (labelled 4).

	Matrix	Al-Si phase	Intermetallic phase
Al	95.49	28.74	35.77
Si	0.66	61.99	19.98
Cu	2.09	5.89	10.89
Mg	0.41	0.64	3.28
Fe	0.43	0.25	18.29
Ni	0.03	0.02	0.81
C	0	0.96	0
O	0.92	1.49	1.06

TAB. 1.2 – Chemical composition of the three main phases of the aluminium alloy (weight %).

Three dimensional X-ray tomography has been used to measure among others the distribution of cell size of aluminium foams (see e.g. [Benouali et al.01b, Elmoutaouakkail et al.01]) . This technique was applied by Benouali and Froyen to our foam. The mean cell size was found to be 1.5 mm. The size of the biggest cells is about 9 mm. The size of the cell is defined as the diameter of a disk of the same area.

1.3.2 Mechanical testing

All foam specimens intended to be mechanically tested were characterised in terms of their density and visible cell morphology. Cube and cylinder specimens of different sizes were used. The density was measured using an electronic balance and measurement of dimensions using electronic calipers. The density varies from 0.245 g/cm^3 to 0.26 g/cm^3 (figure 1.2). The density of the samples extracted from the same foam plate exhibits a slight scatter. The dispersion depends on the location in the foam plate from which each specimen was extracted. Thus, for cylindrical specimens, the samples with the largest diameter (65 mm) display the highest density. This effect can be related to the density gradient from the skin to the core of the foam plate, as described in [Beals et al.97]. The largest cylindrical specimens called T1 and T2 in table 1.3 (ϕ 65 mm) are extracted closer to the skin region. This explains the slightly higher mean density of the larger specimens.

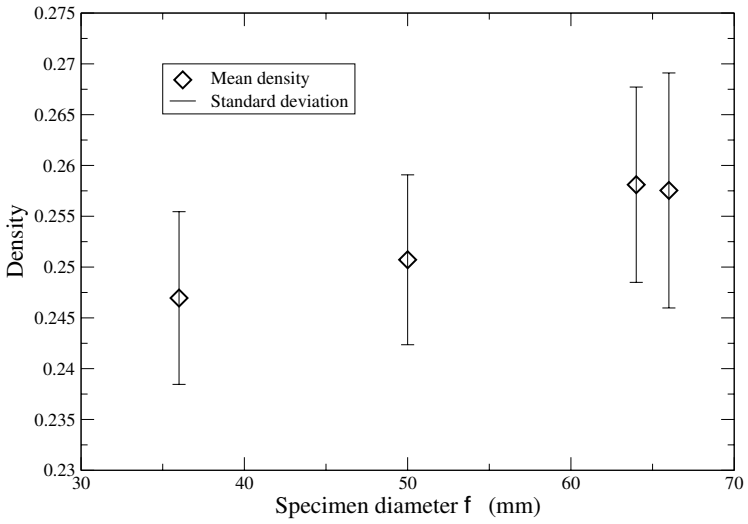


FIG. 1.2 – Density variation of all tested specimens as a function of specimen diameter.

Compression tests

Cube specimens of dimensions 80 mm by 80 mm by 80 mm were sawed from the core of the foam plate in order to reduce the skin effect. The specimen were manufactured with special care in order to obtain the two opposite face as parallel as possible. The specimens were inserted between two parallel steel platens of a servo-hydraulic testing machine. The platens were lubricated with boron nitride based spray. The tensile machine was equipped with a 100 kN load cell. The tests were carried out using displacement control with a cross-head speed of 0.5 mm.s^{-1}. Three different directions with respect to the foam plate were tested in order to characterise the anisotropy.

Tensile tests

Tensile specimens were extracted from the flat plates along the longitudinal direction using a drilling machine. This machining device avoids geometrical fluctuations and gives a reference revolution surface. Then, each specimen is turned to machine both opposite faces. The result is a cylindrical specimen without major geometrical defect. Afterwards the specimen is glued to a fixing part which is then connected to the testing machine. The tensile apparatus consists in one ball-and-socket joint attached to a universal joint on each side of the fixing part (see figure 1.3). Four specimen sizes, labelled T1 to T4, were tested (cf. table 1.3). The different volume sizes were determined in order to maximise the gap between the biggest one T1 and the smallest one T4. For the biggest specimen the diameter of the cylinder is limited by the thickness of the foam plate. For the smallest specimen the volume was chosen in order to keep statistical representativity (see [Sugimura et al.97]). Uniaxial tension tests were carried out using an electro–mechanical tensile machine equipped with a load–cell of 50 kN. The tests were performed under displacement control with a cross-head speed of 0.1 mm.s^{-1}.

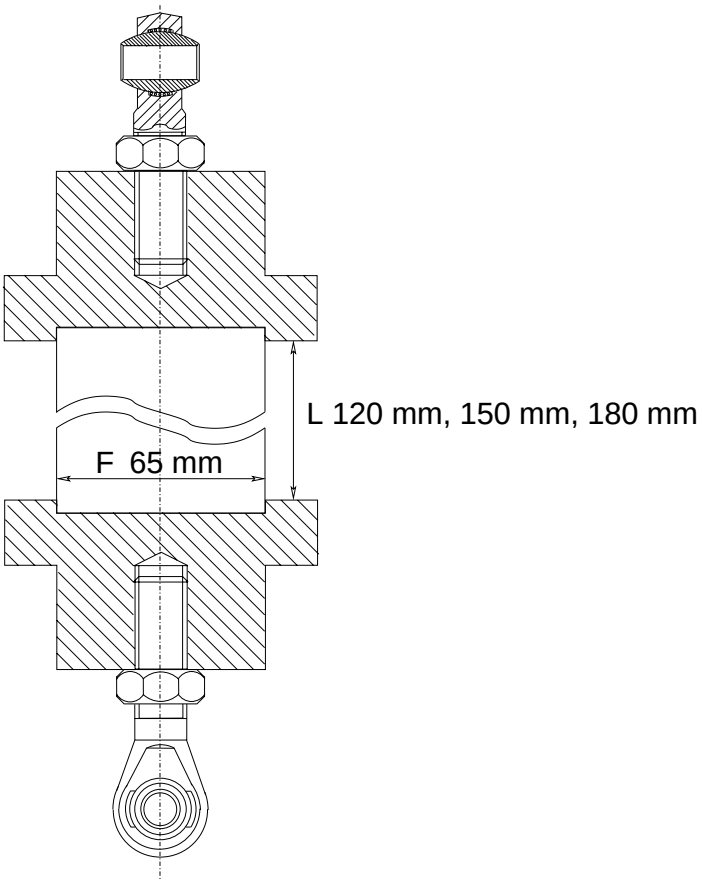


FIG. 1.3 – Specimen assembly and tensile setup.

Shear and torsion tests

Specimens of dimensions 250 mm by 25 mm by 50 mm for the shear tests were cut from the foam plate in the longitudinal direction. The test is based on the European standard number ISO 1922-1981 (F) for organic materials. This test is comparable to the ASTM C-273 test method recommended in

Sample	Number of samples	Length (mm)	Diameter (mm)	Volume (cm^3)
T1	27	180	65	$V_1 = 597$
T2	24	150	65	$V_2 = 497 \simeq V_1/1.2$
T3	21	150	50	$V_3 = 294 \simeq V_1/2$
T4	16	150	36	$V_4 = 152 \simeq V_1/4$

TAB. 1.3 – List of the different types of cylindrical tensile specimens investigated in this work.

[Ashby et al.00]. The sample was glued to two fixing devices attached to a tensile machine (see fig. 1.4). The shear load is applied by the longitudinal displacement of two stainless steel plates. Because of the low force level, we assume that the two plates remain parallel during the test. This hypothesis is supported by FE computations [Blazy00].

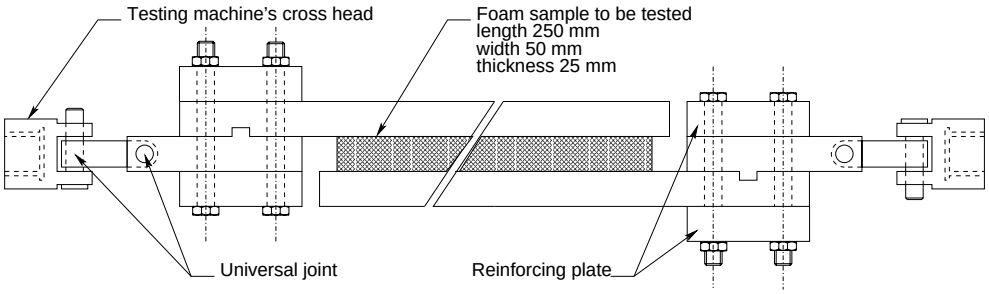


FIG. 1.4 – Simple shear test setup.

In addition to these shear tests, torsion tests were carried out on cylindrical T2 specimens identical to those used for tensile tests. The fixing device is different since it must provide alignment between the sample and the tension-torsion machine axis and allow torque and axial force transmission (see fig. 1.5). The alignment between the sample and the machine's axis is checked using two dial gauges with a tolerance of 0.1 mm. The torsion tests were performed using a tension–torsion machine equipped with a 50 kN load-cell and a 1200 m.N torque-cell. The tests were conducted using angle control with an angular speed of 0.1 degree.s^{-1}.

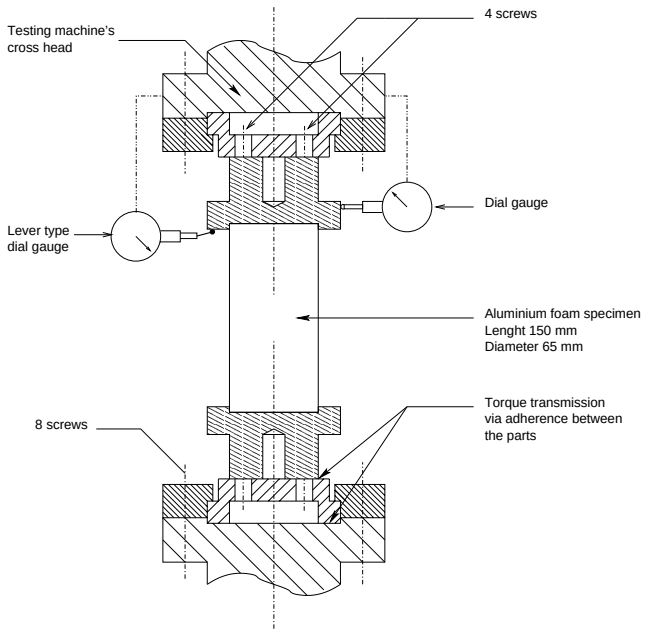


FIG. 1.5 – Modification of the tensile setup to perform tension-compression/torsion tests.

Combined tension/compression–torsion tests

For these bi–axial tests, the same T2 type specimens as those used for the tensile and torsion tests were tested. The fixing device and the tension–torsion machine were the same as those used for the torsion test. According to the type of loading path, the test can be performed using axial force control, torque control or both. In our case two types of loading paths were investigated (see figure 1.6) : The non-proportional loading path (labelled 1 in figure 1.6) with axial force control and the proportional loading path (labelled 2 in figure 1.6) with axial force control and torque control. For the non–proportional loading tests, axial force is prescribed first up to a given force and then an increasing torsion angle is applied, keeping the axial force constant. For the proportional tests, tension or compression and torsion are applied simultaneously and follow a straight line with a given slope in the torque/force space.

1.4 Experimental results

The detailed results for all tests are reported in table 1.8. The main features for each type of test are described below.

1.4.1 Uni-axial tests

Compression

Typical compressive stress-strain curves using cube specimen geometry are shown for three loading directions (see figure 1.7). The curves display an initial peak stress followed by a plateau with

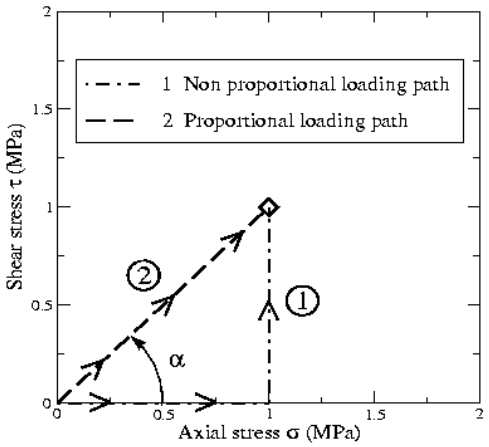


FIG. 1.6 – Investigated loading paths for tension/torsion tests : Non proportional loading (number 1, tension followed by torsion), proportional loading (number 2).

slight apparent hardening. The final stage of the curve corresponds to material densification. The observed anisotropy effect of the compressive behaviour is rather small. This is consistent with other results published in the literature (see e.g. [Beals et al.97, Andrews et al.99]). The plateau region shows minor oscillations which are typically associated with local failure of cell rows. The plateau region corresponds to the formation of localisation bands that multiply or propagate over the entire sample [BS et al.98, Chastel et al.99, Bastawros et al.00]. The fact that the deformation bands are associated with local brittle failure has been checked with an interrupted compressive test. After a compressive strain of 6%, the specimen is unloaded and loaded again in tension. It is found that the material does not oppose measurable resistance in tension any more. This is the reason why in this paper no distinction is made between "yielding" effects observed under predominantly compressive conditions and brittle fracture effects observed under predominantly tensile loading condition.

On the curves shown in figure 1.7, the stress is the force divided by the initial section, and the strain is the thickness variation of the specimen divided by the initial thickness. The denominations stress and strain do not take into account the heterogeneity of deformation of the specimen. The yield/fracture stress in compression is defined at the first peak observed on the stress-strain curves for the cube specimens compressed between two flat plates. The results of yield strength measured in compression are given in table 1.8. These results give a mean yield strength of 2.6 MPa.

Tension

A typical tensile stress-strain curve is presented in figure 1.8. The initial horizontal tangent is associated with the alignment and the gap of the tensile apparatus. It is followed by a linear elastic regime. The final stage of the curve corresponds to brittle fracture. Fracture occurs generally far from the grips and the orientation of the fracture surface is perpendicular to the tensile axis. The fracture strength in tension was taken as the maximum stress sustained by the specimen. Fracture strengths in tension show a significant scatter which is reported in table 1.4. The results are also plotted in figure 1.9. The average and dispersion are found to depend on the volume of the tested specimens : They decrease with

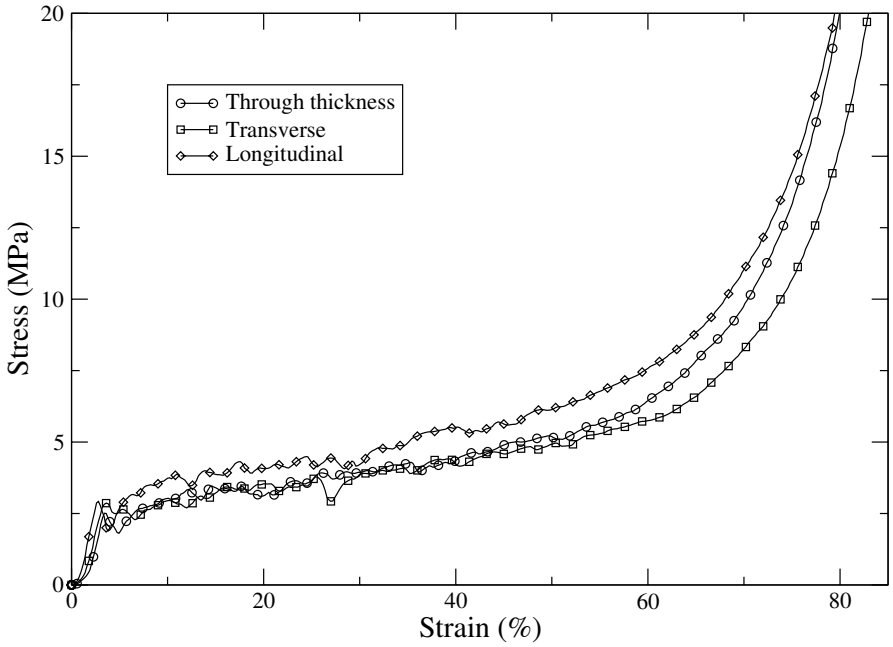


FIG. 1.7 – Compression stress-strain curves (cube specimen geometry).

increasing specimen size. The size effect is less significant on the mean fracture strength than on the standard deviation but does exist. For, the precision c of the estimation of mean fracture strength is given by $c = \frac{D_\sigma}{\sqrt{n}}$ where n is the number of samples tested for a given volume. It can be checked from table 1.4 that this precision is sufficient to ensure that the mean fracture strength actually decreases from T4 to T1. For an increase of volume size by a factor of 4 the mean fracture strength is reduced by about 15 % whereas the dispersion is almost divided by 2.

It should be also noted that the mean tensile strength is close to the yield strength measured in compression.

Observations of the fracture surface show that brittle fracture initiates mainly around big cells. SiC particles are present along the crack path of the cell walls (figure 1.10, see also [Markaki et al.01]).

Shear and torsion

A typical shear stress-strain curve is presented in figure 1.11 where a mainly brittle behaviour is observed. In these tests a crack initiates in the core of the sample and propagates parallel to the load axis along one third of the sample length and then deviates to the joint between the foam and the shear grips. Only four tests were carried out leading to the following values for the maximum shear stress : 1.7 MPa, 1.75 MPa, 1.9 MPa, 2.0 MPa.

Typical torsion torque/angle curves are given in figure 1.12. The plotted shear stress is $2M/\pi R^3$ where M is the prescribed torque and R the radius of the specimen. The plotted shear strain is $\gamma = R\theta/L$ where L is the length of the specimen and θ is the measured angle. The plot shows a short

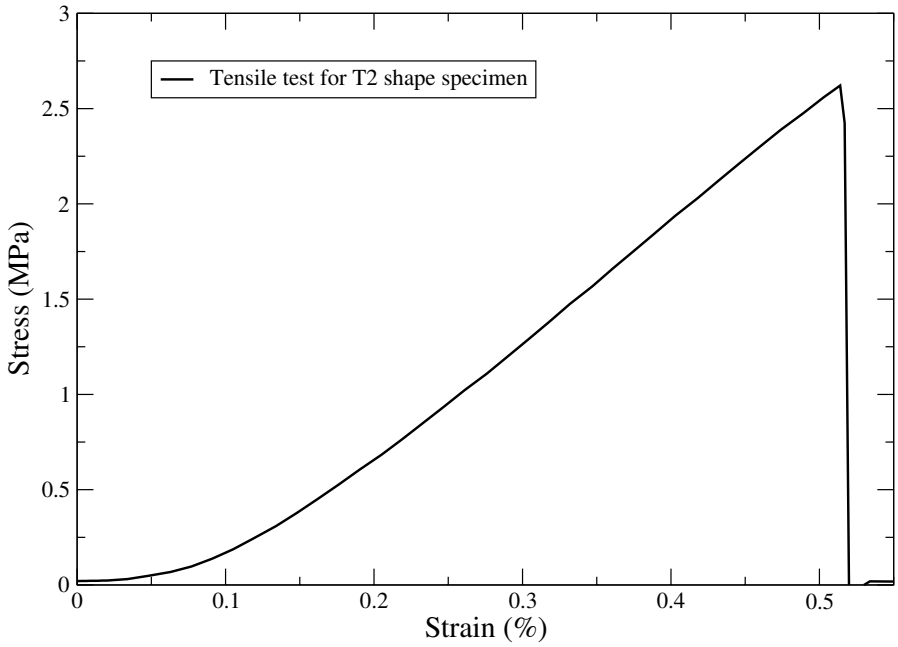


FIG. 1.8 – Stress-strain curve of a tensile test on aluminium foam.

Specimen	Tensile tests			
	Mean stress (MPa)		Standard deviation (MPa)	
	Experi--mental	Weibull's prediction	Experi--mental	Weibull's prediction
T1	2.56	2.41	0.33	0.35
T2	2.43	2.47	0.35	0.36
T3	2.56	2.63	0.40	0.38
T4	2.84	2.85	0.57	0.41

TAB. 1.4 – Experimental and predicted mean tensile strength and corresponding dispersion for all tensile tests.

elastic domain and then two regions of apparent hardening. The shear strength is defined as the limit of the linear elastic regime and is indicated by an arrow in figures 1.11 and 1.12. Because of the full cylindrical shape of the specimens, torsion loading results in non–homogeneous deformation from the center to the outer surface. A crack initiates at the outer surface within the gauge length. Once a cell wall fails, a stress redistribution causes the stress to reach the failure level for neighbouring cell walls. This process is repeated until final fracture takes place. Cracks initiate at several sites but only one of them propagates to cause final failure. The two hardening stages are difficult to explain but may be associated with different cell size populations. The obtained mean value for the shear stress and its variance are

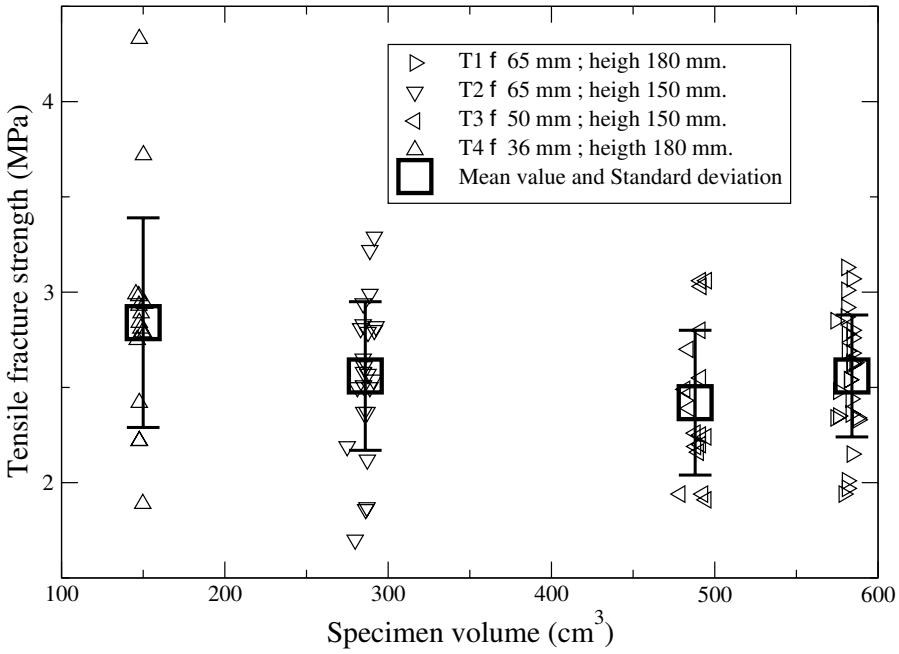
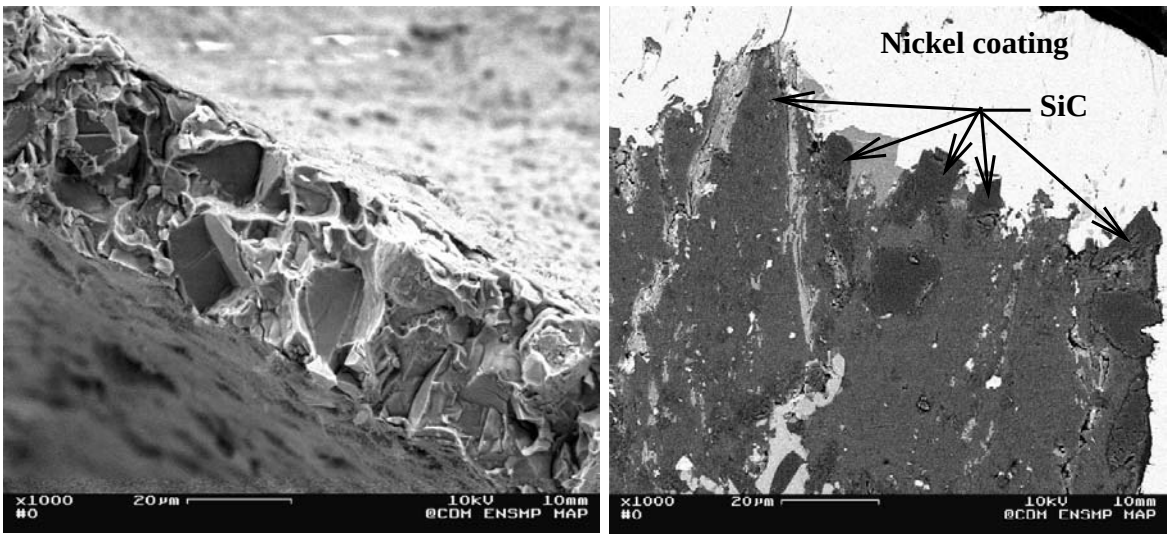


FIG. 1.9 – Tensile fracture stress for all investigated specimens as a function of specimen volume : Mean value and standard deviation.



(a) (b)

FIG. 1.10 – SEM fracture surface observations : (a) Fractography of a cell-wall ; (b) Longitudinal section of a nickel coated and polished cell wall showing preferential crack propagation along SiC particules

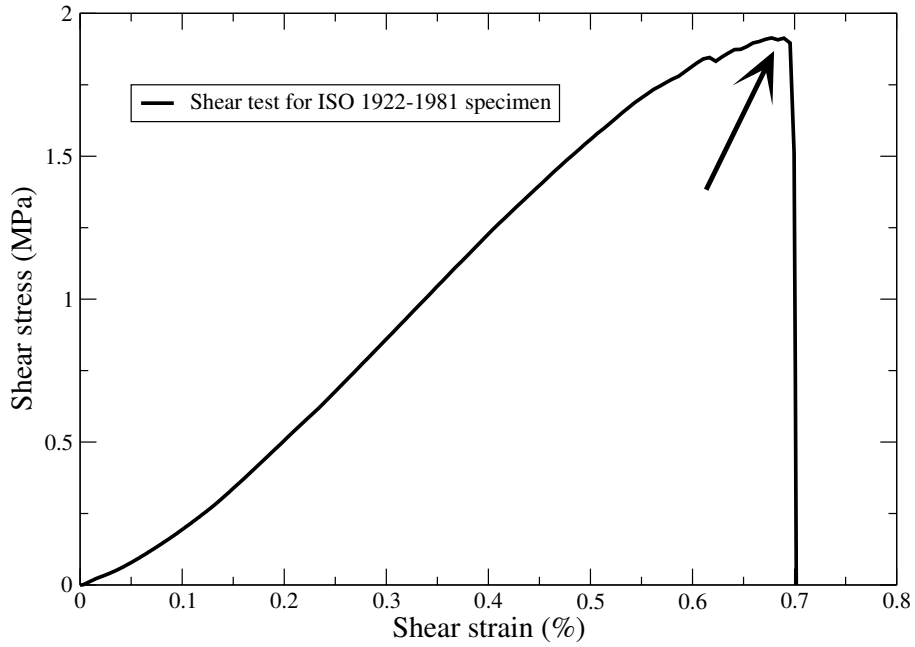


FIG. 1.11 – Shear stress/strain curve for a shear test.

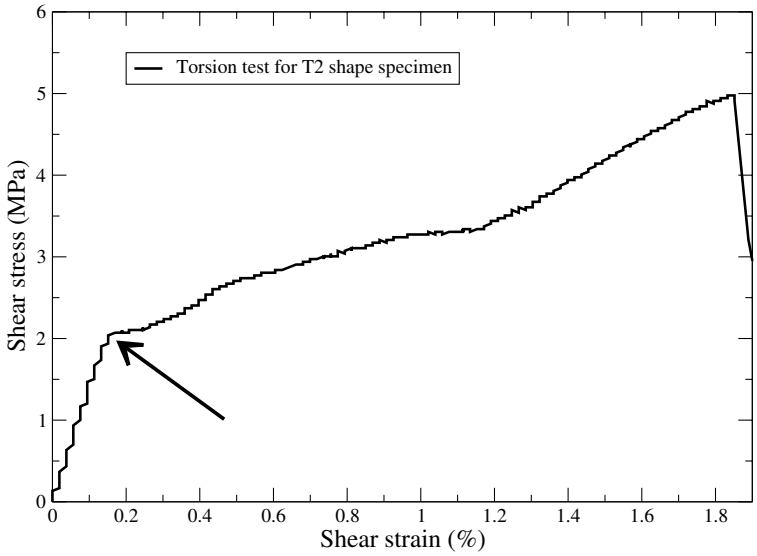
reported in table 1.5. Note that the shear strengths obtained for these torsion tests are consistent with those obtained for shear tests. The fracture surface is generally a spiral at an angle of about 45° with respect to the specimen axis. Note that in the shear and torsion curves the initial elastic slope includes the elastic stiffness of the mechanical apparatus.

Specimen	Torsion tests			
	Mean stress (MPa)		Standard deviation (MPa)	
	Experi--mental	Weibull's prediction	Experi--mental	Weibull's prediction
T2	1.85	1.85	0.24	0.27

TAB. 1.5 – Experimental and predicted mean shear strength and corresponding dispersion for torsion tests.

1.4.2 Multi–axial tests

The results for the multi–axial tests are given in table 1.8, 1.6 and 1.7. Typical tension/compression–torsion tests are presented in figures 1.13 and 1.14 in the case of non proportional loading. In this case, the axial load is applied and maintained constant during subsequent torsion. Both cases of positive and negative axial forces have been tested. In these tests the critical shear strength τ_0 is defined as in the



(a)

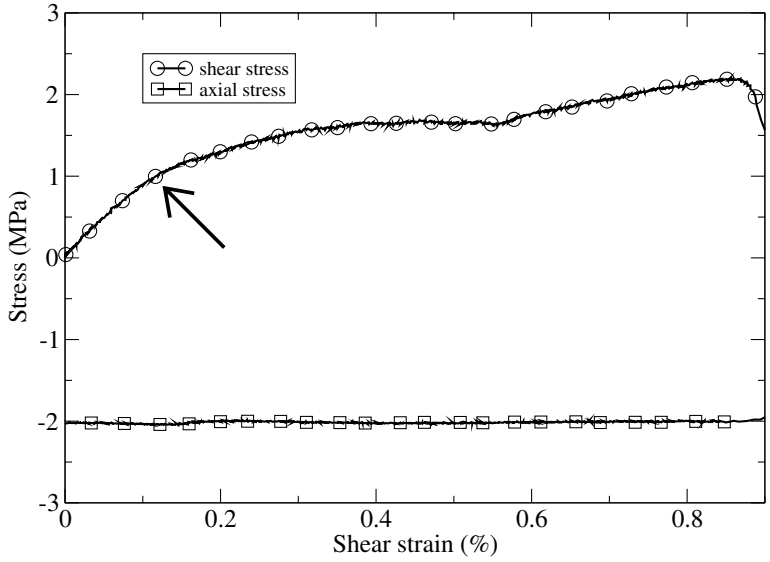


(b)

FIG. 1.12 – (a) Stress-Strain curve for a specimen in torsion. (b) Corresponding fracture surface of the specimen (specimen diameter : 65 mm).

torsion case. In figures 1.13 and 1.14, the position on the shear stress–strain curve where the critical shear stress was determined is also indicated by an arrow. The fracture surfaces of the samples are also shown in figures 1.13 and 1.14. For low positive values of the axial stress, the shape of the shear stress vs. torsion angle curve is similar to the torsion curve with the elastic phase followed by two hardening zones

(figure 1.12). However, as the axial stress increases, the two hardening zones become less important and the fracture surface becomes more and more horizontal as in the pure tension case.



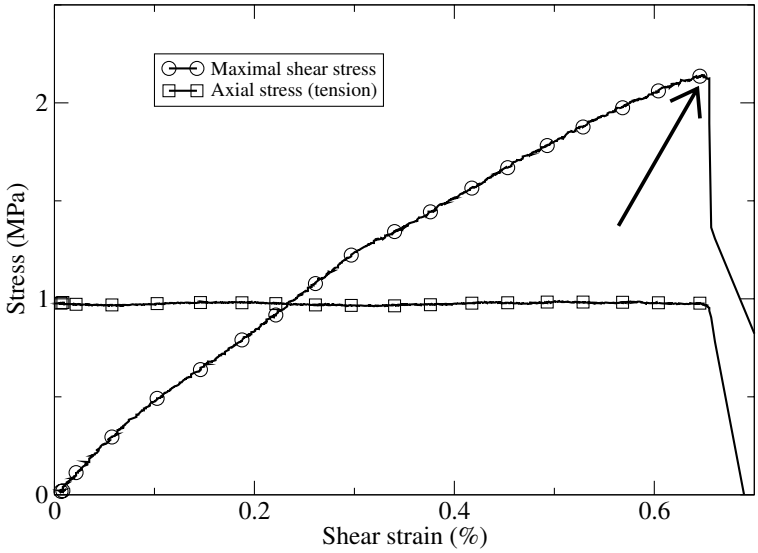
(a)



(b)

FIG. 1.13 – (a) Stress-Strain curve for a non–proportional compression–torsion test. (b) Corresponding fracture surface of the specimen (specimen diameter : 65 mm) after separation.

For the proportional loading path the axial force and torque are applied simultaneously and follow a straight line with a given slope in the torque/force space. The results show also a significant scatter but, for a given slope of 45° or -45°, the mean fracture/yield stresses are comparable. At this stage the



(a)



(b)

FIG. 1.14 – (a) Stress-strain curve for a non–proportional tension–torsion test. (b) Corresponding fracture surface of the specimen (specimen diameter : 65 mm).

comparison between the two different paths cannot be done without introducing an equivalent stress.

1.5 Discussion and modelling

The discussion of the previous results is focused on the interpretation and modelling of the response of the aluminium foam under uni–axial and multi–axial loading. A model is introduced to account for the size effect and the scatter observed in test results. This model must be able to predict the mean response and the dispersion for each loading condition. Accordingly, a statistical model is developed in the first

subsection to account for the size effect observed in tension tests. Then it is shown that the model can be extended to shear/torsion and even multiaxial loading, thus providing an interpretation of the scatter observed for all loading conditions. Finally a tentative micromechanical modelling taking into account brittle fracture of larger cells in foams is proposed.

1.5.1 Statistical analysis and size effect for uni–axial loading conditions

The fracture stress of the 88 tested tensile specimens are ranked in increasing stress order (see table 1.8). The cumulative probability of failure for a given applied stress corresponding to the rank i can then be estimated as :

$$P_{Ri} = \frac{i}{N+1} \tag{1.1}$$

where N is the total number of samples tested. Two laws of probability have been tested to describe the experimental results : normal and Weibull distributions. According to the least square method, the distribution that provides the best fit is the Weibull distribution. But, above all, the Weibull distribution is able to account for the observed size effect, as shown in the following. The cumulative probability of failure at a tensile stress σ for a Weibull distribution is given by

$$P_R = 1 - \mathcal{F}(\sigma) = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m\right] \tag{1.2}$$

where V is the volume of the sample, V_0 is a reference volume, σ_u is the scale factor and m is Weibull's modulus [Weibull51, Beremin83, Ashby et al.86]. $\mathcal{F}$ is the probability distribution function. The parameters σ_u and m were identified taking all tensile data into account, i.e. the results obtained for the four considered volumes. The reference volume V_0 can be regarded as the typical size of a statistically representative volume element of material. Image analysis shows that the volume of the biggest cell is of the order of 1 cm^3. Several cell size analyses show that a volume of 100 cm^3 contains at least 10 such big cells. This volume of 100 $cm^3$is taken as equal to V_0. It should be noted that all the tested specimens have a volume larger than V_0. It is also worth emphasizing that the choice of V_0 does not affect the following results since the couple (V_0, σ_u) is linked by the equation $V_0\sigma_u^m = K$ where K is a constant. The values obtained for the Weibull parameters from the tensile tests are :

$$m = 8 \quad \text{and} \quad \sigma_u = 3.21 \text{ MPa} \tag{1.3}$$

In figure 1.9 the experimental mean fracture stress seems to saturate at about 2.5 MPa. A threshold parameter could be introduced in equation 1.2 to represent this saturation effect. However in the absence of tests on specimens with larger sizes no threshold parameter was introduced.

The value of the Weibull modulus is in the range of those found for engineering ceramics and far from that corresponding to dense metallic materials which are usually found to be of the order of 15 to 20 (see e.g. [Beremin83]). A value of $m = 10$ has been found by McCullough and al. in [Cullough et al.99] for a powder–route aluminium foam. With these parameters, the predicted cumulative failure probabilities are plotted in figure 1.15 and compared to experimental results for the four specimen volumes. This comparison can also be made from the results reported in table 1.4. In figure 1.15 it is observed that the experimental distributions are well described. It is worth noting that the same set of Weibull's parameters is used to account for all tested volumes. Very often the parameters are identified for a single volume, which is not sufficient to prove that Weibull's law is a well–suited model. Using Weibull analysis, the expected mean tensile stress $\overline{\sigma}$ and standard deviation D_σ^2 depend on the specimen size as follows :

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma_u}{\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{1}{m}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right) \tag{1.4}$$

$$D_\sigma^2 = \frac{\sigma_u^2}{\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{2}{m}}} \left[\Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) - \Gamma^2\left(\frac{m+1}{m}\right)\right] \tag{1.5}$$

where Γ is the Gamma function. Table 1.4 displays for each specimen type the experimental and predicted mean stress and standard deviation. The size effect appears clearly since the dispersion and mean stress to fracture decrease when the specimen volume increases. This predicted behaviour is in good agreement with the results shown in figure 1.9.

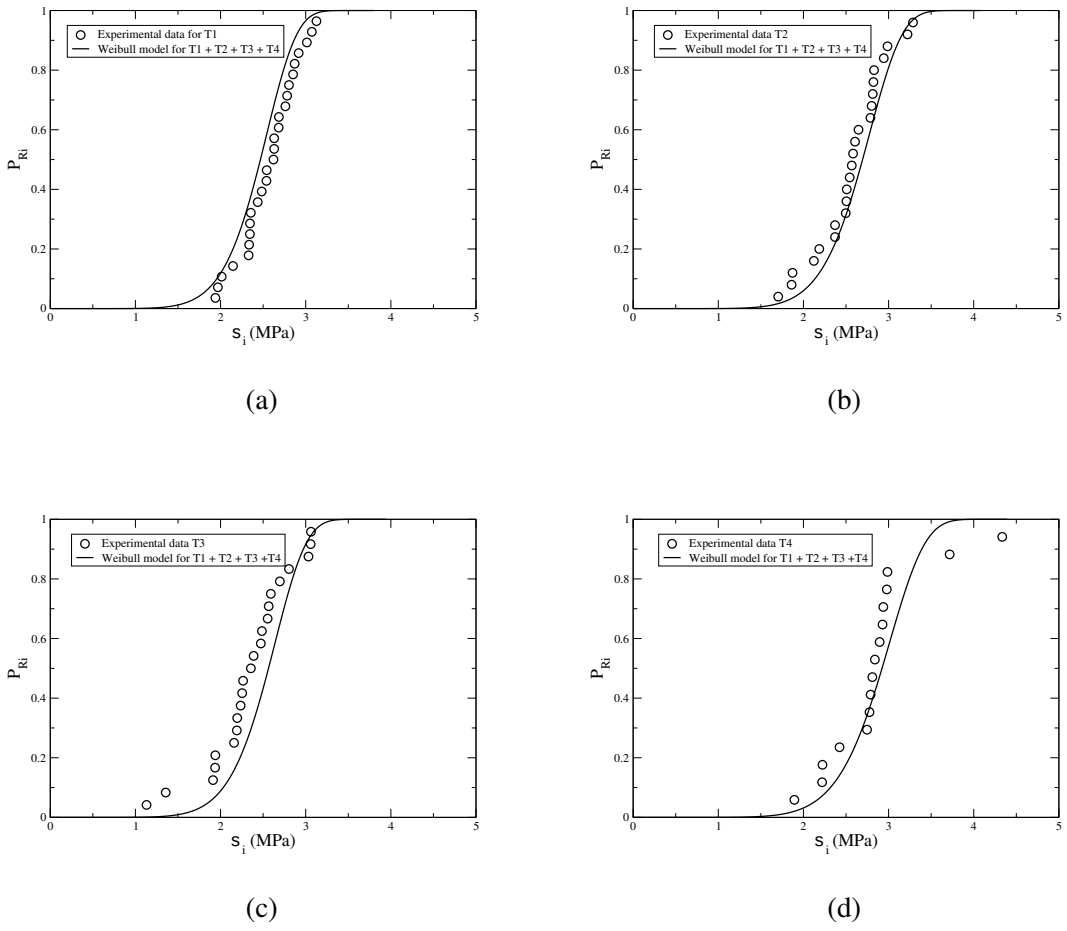


FIG. 1.15 – Fracture probability distributions in tension for the specimen sizes T1 to T4 (figures (a) to (d) respectively) : Experimental results and prediction according to Weibull's model.

In compression, the peak stress also displays a significant scatter and an attempt was made to apply the Weibull analysis to these compression results. For that purpose, the tensile stress in equation (1.2) is replaced by the absolute value of the peak stress. For the cube specimens, the mean first peak stress of the tested samples is equal to 2.6 MPa which is slightly higher that the mean tensile strength for equivalent volume sizes (597 cm^3). The identification of a Weibull distribution for the compressive peak stress leads to the following values :

$$m = 8.9 \quad \text{and} \quad \sigma_u = 3.27 \text{ MPa}. \tag{1.6}$$

These values are close to those found for tensile loading. It shows that the failure statistics in tension and compression are not significantly different. In [Cullough et al.99] McCullough and al. found $m = 12$ for a powder–route aluminium foam in compression. This strongly suggests that it is possible to use a unified statistical model valid for both tension and compression and also for other loading conditions.

1.5.2 Extension of the Weibull's analysis to torsion tests

The torsion tests also show a significant scatter (see table 1.5). For fixed Weibull parameters identified from tensile loading, the aim is to check whether the model can be used to predict the dispersion for other types of loading. In this section the case of torsion tests is investigated. The first step is to decide which stress should be used in equation (1.2) in the case of torsion test. An invariant effective stress function $\hat{\sigma}$ has to be defined. This effective stress should coincide with the absolute value of axial stress component in tension and compression. Rankine's criterion (maximum normal stress criterion) is a good candidate. However this criterion is not suitable since it predicts that the yield stress for torsion test must be equal to the tensile yield stress, which is not the situation observed here. The mean yield strength in torsion and shear is 1.85 MPa instead of 2.43 MPa in tension, see table 1.5. A von Mises equivalent stress can also be considered. This criterion sets the yield shear stress τ_0 to $\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = 1.42$ MPa, which is too low compared to the mean experimental value. Several authors have shown that an elliptical yield function involving both the stress deviator and the trace of the stress tensor, can be used to describe the mechanical behaviour of metal and polymer foams for several types of load ranging from axial compression to hydrostatic compression [Ashby et al.97, Chastel et al.99, Deshpande et al.00, Badiche et al.00, Deshpande et al.01]. The effective stress $\hat{\sigma}$ is then defined as

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} C \underset{\sim}{s} : \underset{\sim}{s} + F\,(Trace\ \underset{\sim}{\sigma})^2} \tag{1.7}$$

where $\underset{\sim}{s}$ is the deviatoric part of the stress tensor $\underset{\sim}{\sigma}$. C and F are material parameters that may depend on the current porosity. In tension and compression, this effective stress is equal to $\sqrt{C+F}|\sigma|$ where σ is the uni–axial stress component. Accordingly, the effective stress coincides with σ in tension if

$$C + F = 1 \tag{1.8}$$

This relation is assumed to hold in the sequel. This allows to rewrite equation (1.2) as :

$$P_R = 1 - \mathcal{F}(\hat{\sigma}) = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_u}\right)^m\right] \tag{1.9}$$

Another difficulty arises in the case of torsion tests performed on solid bars, since the stress field is not uniform through the sample section any more. The stress field $\tau(r)$ is supposed to be linear in the elastic regime, maximal at the circumference and zero at the center of the section :

$$\tau(r) = \frac{\tau_0}{R} r \tag{1.10}$$

where R is the radius of the specimen and τ_0 the maximal shear stress at the circumference. As the stress is not uniform anymore through the sample volume, an integral form of Weibull's repartition function has to be used in the fracture probability distribution [Evans et al.78, Lamon et al.83] :

$$\mathcal{F}(\hat{\sigma}) = \exp\left[-\int_V \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_u}\right)^m \frac{dV}{V_0}\right] = \exp\left[-\int_V \left(\frac{\sqrt{3C}\,\tau(r)}{\sigma_u}\right)^m \frac{dV}{V_0}\right] \tag{1.11}$$

The mean shear stress is then computed as

$$\overline{\tau} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{3C}\left(\frac{2}{m+2}\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{1}{m}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right) \tag{1.12}$$

In the literature devoted to brittle fracture (see e.g. [Evans et al.78, Lamon et al.83]) an effective volume, V_{eff}, is usually defined such that :

$$P_R = 1 - exp\left[-\frac{V_{eff}}{V_0}\left(\frac{\sqrt{3C}\,\tau_0}{\sigma_u}\right)^m\right] \tag{1.13}$$

$$V_{eff} = \int_V \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{3C}\,\tau_0}\right)^m dV \tag{1.14}$$

In the case of torsion of a cylindrical solid bar, it can be shown that the effective volume is

$$V_{eff} = \frac{2}{m+2}V \tag{1.15}$$

The effective volume, for T2 specimen is found to be equal to 99 cm^3. In the following the concept of effective volume is no longer used.

In the equation (1.12), the coefficient C can be identified from the experimental value of the mean shear strength keeping the Weibull parameters identified in the tension case. The shear strength of a torsion test is taken as the maximum stress τ_0 at the outer surface in the elastic regime. The obtained mean value is given in table 1.5. The experimental mean shear strength is directly used to identify the parameter C. Then equation (1.8) gives the parameter F. Parameter identification gives $C = 0.89$ and $F = 0.11$. In [Deshpande et al.00], Deshpande and Fleck found $C = 0.7$ and $F = 0.3$ for their elliptical yield surface but in the case of axisymmetric compression. After the identification, as for the tension case, the prediction capability of the model can be tested by computing the expected variance of the results :

$$D_\tau^2 = \frac{\sigma_u^2}{3C\left(\frac{2}{m+2}\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{2}{m}}}\left[\Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) - \Gamma^2\left(\frac{m+1}{m}\right)\right] \tag{1.16}$$

This prediction is compared to the experimental scatter in table 1.5. A very good agreement is found, which confirms the ability of the model to account for tension, compression and torsion tests.

1.5.3 Extension of the statistical analysis to multi-axial loading conditions

The applicability of the above statistical model characterised by a Weibull probability distribution and the introduction of the effective stress $\hat{\sigma}$ is now assessed in the more complex case of multi–axial loading. The Weibull parameters are still unchanged (see equation (1.3)) and the coefficients C and F keep the values found in the previous section. Both types of multi–axial stress paths 1 and 2 shown in figure 1.6 are successively analysed.

Non proportional loading conditions

In the experimental procedure the tension/torsion test is carried out by applying the axial stress first, using tension control mode, followed by the shear stress using angle control mode. Thus, for a given axial stress σ_0 applied during the first part of the test, the aim is to predict the mean shear stress and standard deviation using the statistical model. Note that the specimen can break during the tension

loading path. In this case these weakest specimens cannot be used in the analysis. This means that a conditional probability must be considered : It is the probability that the specimen breaks for a shear component τ_0 provided that it was able to sustain the pre–load σ_0. The probability distribution takes now the form :

$$\mathcal{F}_{|\sigma_0}(\tau_0) = exp\left[-\int_V \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_u}\right)^m \frac{dV}{V_0}\right] = exp\left[-\int_V \left(\frac{\sqrt{3C\left(\frac{\tau_0 r}{R}\right)^2 + F\sigma_0^2}}{\sigma_u}\right)^m \frac{dV}{V_0}\right] \tag{1.17}$$

The density of conditional probability for a fixed prescribed axial component σ_0 is then given by the partial derivative with respect to τ_0 :

$$f_{|\sigma_0}(\tau_0) = \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left[\mathcal{F}_{|\sigma_0}(\tau_0)\right] \tag{1.18}$$

Thus, for a fixed amount of axial stress σ_0, the mean shear stress $\overline{\tau}$ is given by

$$\overline{\tau_0}_{|\sigma_0} = \int_0^\infty \tau_0 f_{|\sigma_0}(\tau_0) d\tau_0 \tag{1.19}$$

The corresponding shear stress standard deviation is given by

$$D^2_{\tau|\sigma_0} = \int_0^\infty \tau_0^2 f_{|\sigma_0}(\tau_0) d\tau_0 - \left[\int_0^\infty \tau_0 f_{|\sigma_0}(\tau_0) d\tau_0\right]^2 \tag{1.20}$$

The values of $\overline{\tau_0}_{|\sigma_0}$ and $D^2_{\tau|\sigma_0}$ are computed numerically since no closed–form expression could be worked out. Table 1.6 gives the mean shear stress and the shear stress standard deviation for several values of prescribed axial stress. The predicted curve of mean shear strength and the corresponding intervals of confidence are shown in figure 1.16. It is interesting to note that this curve is not elliptical but is rather bell–shaped. This is due to the fact that it represents a conditional probability distribution for the specific considered non–proportional loading path. For the given example of a tensile loading of 2 MPa which is around the mean yield strength in tension, several specimens broke during the first phase of loading. Thus the first part of the loading path acts as a filter on the quality of the specimen. After this first loading phase two extreme cases can be encountered. The first one is the case of specimens which were about to fail during the tensile loading and then will not oppose a great resistance to torsion. The second one is the case of specimens that were also able to pass through the first tensile loading phase but are among those with low defect density and then will be able to oppose a great resistance to torsion. This filtering effect on the quality of the specimens explains the evolution of the mean standard deviation versus the axial stress and in particular the existence of the largest dispersion when the applied axial stress is close to the mean axial strength. It can be noticed that a very good agreement is reached between experiment and modelling in the tension/torsion domain as well as in the compression/torsion one.

Proportional loading conditions

It is also possible to calculate the mean stress and the standard dispersion along a proportional loading path. This path is described by

$$\begin{cases} \sigma = k\cos\alpha \\ \tau = k\sin\alpha \\ \hat{\sigma} = k\sqrt{3C\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \end{cases} \tag{1.21}$$

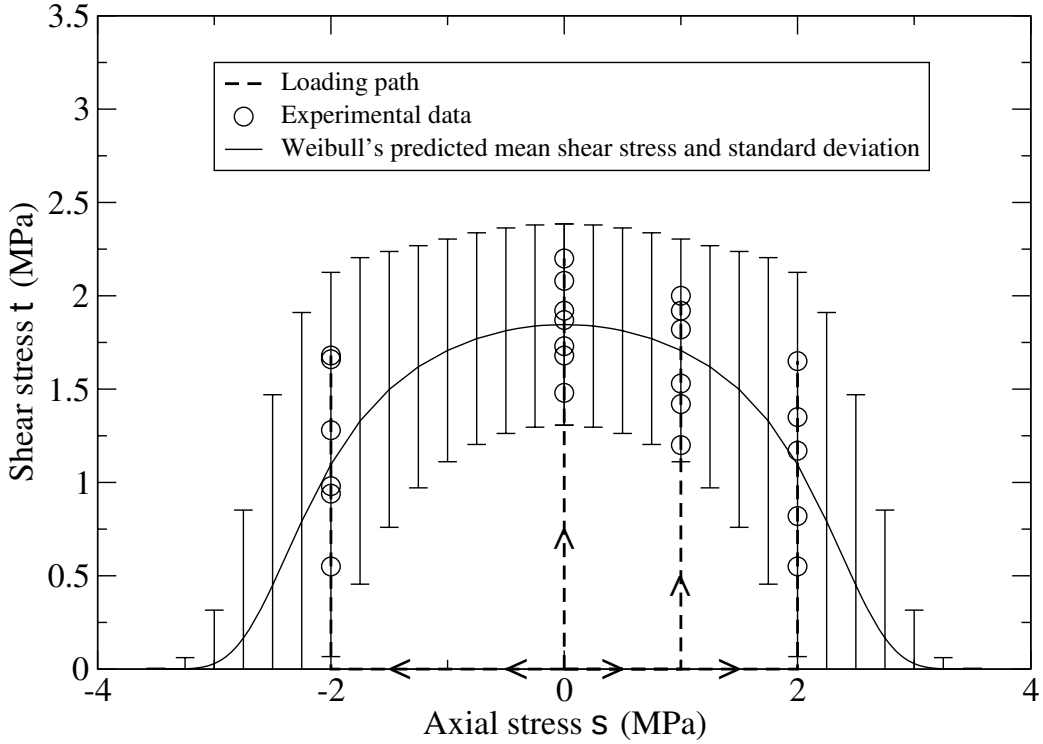


FIG. 1.16 – Statistical yield criterion for non proportional loading path 1 : Axial tension followed by torsion. Mean yield shear stress for prescribed axial stress and corresponding interval of confidence.

where α is an angle characterising the linear loading path in the (σ,τ) plane, and k varies from 0 to the fracture stress. The probability distribution takes then the form :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(k) &= \exp\left[-\int_V \left(\frac{\sqrt{3C\tau^2+\sigma^2}}{\sigma_u}\right)^m \frac{dV}{V_0}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{V}{V_0\sigma_u^m\, 3C(\frac{m}{2}+1)\sin^2\alpha} k^m \left(\left(3C\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^{\frac{m}{2}+1} - (\sin\alpha)^{m+2}\right)\right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

Note that F does not appear in equations (1.21) and (1.22) because equation (1.8) has been taken into account. The probability density becomes

$$f(k) = \frac{d}{dk}\left[\mathcal{F}(k)\right] \quad (1.23)$$

For a proportional loading test, the mean effective stress is given by the mean value of k :

$$\overline{k} = \int_0^\infty k f(k) dk \quad (1.24)$$

Non proportional loading				
Axial stress σ_0	Mean shear stress $\overline{\tau_0}_{\|\sigma_0}$ (MPa)		Shear stress standard deviation $D_{\tau\|\sigma_0}$ (MPa)	
	Experi-mental	Weibull's prediction	Experi-mental	Weibull's prediction
-2	1.18	1.19	0.44	0.51
0	1.85	1.85	0.24	0.27
1	1.65	1.71	0.31	0.30
2	1.11	1.19	0.43	0.51

TAB. 1.6 – Experimental and predicted mean shear strength and corresponding dispersion for non–proportional multi–axial loading conditions.

$$\overline{k} = \frac{\sigma_u}{\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{1}{m}}} \left(\frac{3C\left(\frac{m}{2}+1\right)\sin^2\alpha}{\left(3C\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^{\frac{m}{2}+1} - (\cos\alpha)^{m+2}} \right)^{\frac{1}{m}} \Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right) \tag{1.25}$$

The corresponding standard deviation is calculated as :

$$D_k^2 = \int_0^\infty \tau_0^2 f(k)dk - \left[\int_0^\infty k f(k)dk\right]^2 \tag{1.26}$$

$$D_k^2 = \frac{\sigma_u^2}{\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{2}{m}}} \left(\frac{3C\left(\frac{m}{2}+1\right)\sin^2\alpha}{\left(3C\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^{\frac{m}{2}+1} - (\cos\alpha)^{m+2}} \right)^{\frac{2}{m}} \left[\Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) - \Gamma^2\left(\frac{m+1}{m}\right)\right] \tag{1.27}$$

It can be checked that for $\alpha = 90°$ or $\alpha = 0$ the mean stress and standard deviation for a torsion test or tensile test respectively are retrieved. Here there is no conditional probability since the shear and axial stresses are applied simultaneously. Figure 1.17 gives the curve corresponding to the mean yield effective stress in (σ, τ) space. This curve shows a quasi elliptical shape. The experimental results in two directions $(\alpha = -45°, \alpha = 45°)$ are compared with the obtained predictions on figure 1.17 and in table 1.7. A good agreement is obtained for both mean value and variance. It is worth emphasizing that these results are pure predictions of the model since the parameters have been identified in tension and torsion only.

Proportional loading				
α	Mean yield stress $\overline{k}$ (MPa)		Yield stress standard deviation D_k (MPa)	
	Experi-mental	Weibull's prediction	Experi-mental	Weibull's prediction
45°	1.53	1.51	0.26	0.22
−45°	-1.55	-1.51	0.22	0.22

TAB. 1.7 – Experimental and predicted mean yield effective stress and corresponding dispersion for proportional multi–axial loading conditions.

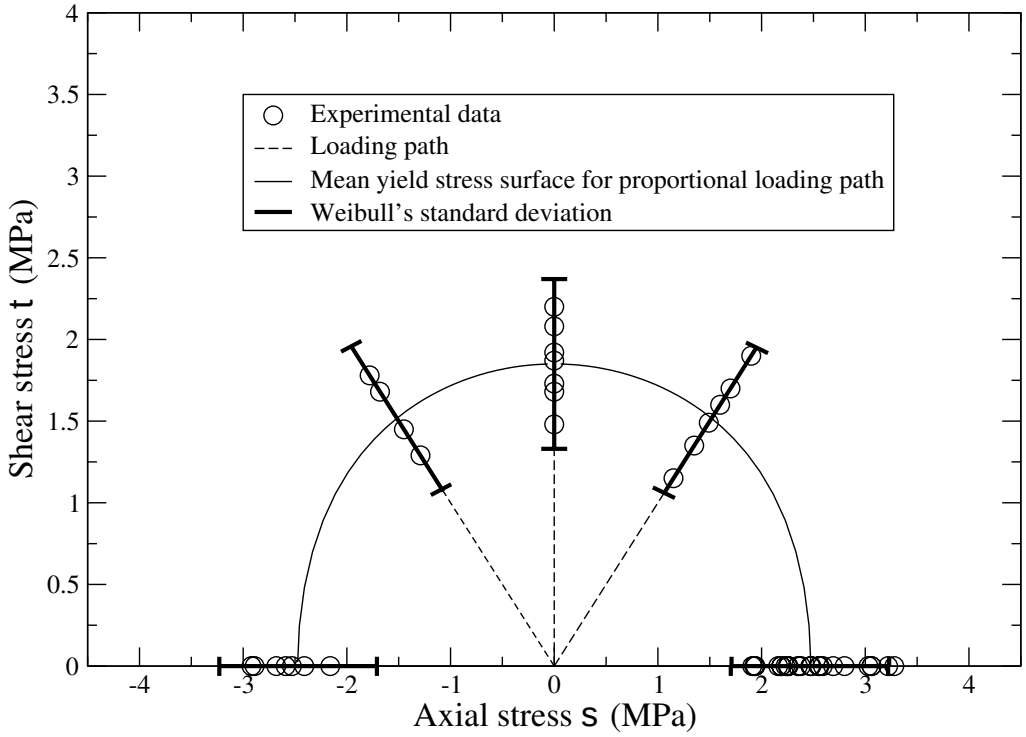


FIG. 1.17 – Statistical yield criterion for proportional loading path. Experimental data versus model prediction.

1.5.4 A tentative micromechanical model

The Weibull statistics used in this work corresponds to a weakest link model in which the fracture/yield of one defect leads to the fracture/yield of the whole stressed volume. In [Beremin83], a similar assumption was made to interpret brittle fracture in a ferritic steel. In this material, it was assumed that fracture was initiated form preexisting cleavage cracks. The Weibull distribution was derived analytically from the statistics of distribution of cleavage crack lengths combined with linear fracture mechanics concepts. What are the corresponding defects in aluminium foams and can the Weibull statistics be derived ? In [Huang et al.91b, Huang et al.91a] Huang and Gibson consider for an open cell foam that the failure in bending of a cell strut made of brittle material is the weakest link. They applied the Weibull's theory to this strut in bending and found a dependence of the fracture thoughness of the foam on the cell size and the Weibull modulus of the cell wall material. Here, a different point of view is adopted. It is postulated that the defects are the largest cells in the heterogeneous distribution of cell sizes. A simple model is then proposed based on Gibson and Ashby's cell model for foam [Ashby et al.97] and the knowledge of the statistical distribution of cell size.

For an open–cell brittle foam, Gibson and Ashby [Ashby et al.97] have shown that a cell edge will

fail when the moment acting on it exceeds

$$M_f = \frac{1}{6}\sigma_w t^3 \tag{1.28}$$

where σ_w is the fracture stress of the cell edge material and t is the thickness of the edge, assumed to be identical for all cell sizes. The corresponding fracture stress of the foam can then be evaluated as in [Ashby et al.97] :

$$\sigma \propto \frac{M_f}{l^3} \tag{1.29}$$

where l is the edge length. This equation combined with equation (1.28) can also be used to compute the smallest critical cell size l_c responsible for fracture of the foam at stress σ :

$$l_c \propto t \left(\frac{\sigma_w}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1.30}$$

The probability of finding a cell of a given size is a function of the volume of material involved. It is assumed that the stressed volume can be divided in smaller volumes V_0. V_0 must be large enough for the probability of finding a cell of sufficient size not to be vanishingly small. Statistical independence of neighboring volumes V_0 is also assumed. Thus V_0 must include a sufficient number of cells. In each volume V_0, the probability of finding a cell of edge length between l and $l + dl$ is taken as :

$$p(l)dl = \frac{\alpha}{l^\beta} dl \tag{1.31}$$

where a simple power law is assumed for the probability distribution. α and β are material parameters once V_0 is known. Thus, in a given volume V_0, where the stress level is σ, the probability of failure is

$$p(\sigma) = \int_{l_c}^{\infty} p(l)dl \tag{1.32}$$

where the critical length l_c is given by equation (1.30). It follows that

$$p(\sigma) \propto \frac{\alpha}{1-\beta}\left(\frac{\sigma_w t}{6}\right)^{\frac{1-\beta}{3}} \sigma_c^{\frac{\beta-1}{3}} = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_u}\right)^m \tag{1.33}$$

with $m = (\beta - 1)/3$ and σ_u depends on t, α, β and σ_w.

In the case of closed–cell foams, membrane stresses can be predominant and as in [Ashby et al.97], equation (1.30) should be replaced by

$$l_c \propto t \left(\frac{\sigma_w}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.34}$$

This leads to a different value of the Weibull modulus :

$$m = \frac{\beta - 1}{2} \tag{1.35}$$

Each volume $V_i = V_0$ among the N ones paving the entire specimen volume V, is subjected to the stress state σ_i. The cumulative probability of failure for the entire specimen is then

$$P_R = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1 - p(\sigma_i)) \tag{1.36}$$

For small enough probabilities $p(\sigma_i)$, one obtains :

$$\ln(1-P_R) = -\sum_{i=1}^{N} p(\sigma_i) \simeq -\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m \tag{1.37}$$

if σ is almost constant in the sample. For a varying stress field, the last term can be replaced by $\int_V p(\sigma)\, dV/V_0$. As a result, the material is shown to follow the Weibull's statistics [Beremin83] and the distributions used in this work are retrieved (equations (1.2) and (1.11)).

Image analysis of several sections of an aluminium foam sample from optical microscopy and X–ray tomography provides the distribution of cell sizes [Benouali et al.01b]. The power law model in equation (1.31) for cell size distribution is calibrated on the last part of the distribution concerning large sizes only. The found parameter β is close to 5. This leads to a Weibull modulus of $m = 1.7$ for open–cell foams and $m = 2$ for closed–cell foams. This values are much smaller than the parameter m close to 8 found in this work. This indicates that a micromechanical model taking only brittle failure into account underestimates the actual Weibull modulus for metallic foams. A more realistic model should include the plastic yielding of the cell walls in addition to the subsequent brittle response as described in [Andrews et al.99]. The model proposed in this subsection is clearly better–suited for purely brittle foams (see [Ashby et al.97]). For instance, overall values of Weibull modulus for ceramic foams range from 1.5 to 6 [Huang et al.91a, Tuliani et al.99, Colombo et al.01].

1.6 Conclusions

Five main conclusions are drawn from this work :

1. A size effect has been evidenced in tension for four different cylindrical specimen sizes : The mean failure stress and especially the dispersion decrease for increasing volumes. A classical Weibull model is able to account for both effects with a Weibull modulus close to $m = 8$. This statistics is found to hold also for the first peak stress in compression. This brittle behaviour is related to the presence of several brittle phases in the aluminium alloy.
2. A model of statistical yield/failure surface is proposed based on the use of an effective stress. The effective stress is an elliptical combination of first and second invariants of the stress tensor. The model can predict the mean initial yield/failure stress and its expected dispersion for multi–axial loading conditions.
3. The additional parameter entering the definition of the effective stress measure has been identified from the measured mean shear strength. The model predicts accurately the scatter in the observed shear strength. Good accordance between homogeneous shear tests and torsion tests is found regarding the initial yield/failure strength. Note however, that the shear test is associated with pure brittle behaviour of the foam. In torsion, two hardening regimes are observed. In the case of torsion, the stress field is not homogeneous and elementary volumes of size V_0 inside the tested sample are not subjected to a homogeneous stress but rather to a stress gradient. The yield shear stress was taken as the maximum stress evaluated at the outer surface. Even in these conditions, the Weibull analysis is found to work well.
4. The statistical yield/fracture surface is validated along complex proportional and non–proportional multi–axial tests. A bell–shaped mean yield/fracture strength curve is found in the case of torsion with constant applied axial stress. A quasi–elliptical surface is found in the case of proportional tension/compression–torsion loading. A good agreement between the mean values and dispersion obtained experimentally and the predicted ones, is reached. Note that the experimental results

confirm the symmetry of the yield/fracture surfaces vs. tension/compression. This has been noticed previously for other loading conditions by [Deshpande et al.00, Deshpande et al.01].

5. The Weibull statistics has been derived from a statistical power–law distribution of cell sizes assuming determinist brittle failure of cell struts or walls in closed or open–cell foams, as an extension of Beremin's model [Beremin83]. The model, mainly applicable to ceramic foams, underestimates the Weibull modulus of the investigated aluminium foam, which confirms that local brittle failure as well as plastic yielding are two competing deformation mechanisms.

The combined tension–compression/torsion tests have shown how the response of the material evolves from the well–known compression curve with a plateau, through the torsion curves with two hardening regimes, up to the brittle failure tensile curves. In compression, deformation takes place mainly in horizontal bands. The fracture surface of tensile specimens is also perpendicular to the sample axis. In torsion, typical spiral fracture surfaces are observed. Photographs provided in this work show the transitions between these extreme cases. It can be noted that the orientation of the fracture surfaces is compatible with a maximum normal stress criterion. However such a criterion does not work to predict the fracture stress level. This suggests that a non–associated failure criterion may be necessary to predict both strength level and fracture surface orientation. The present work only provides an answer to the first point.

Currently, deterministic compressible plasticity models involving the effective stress used in this work are the main ingredient of finite element simulations of structural components [Hanssen et al.01]. The computation of structures containing aluminium foams using such a statistical multi–axial model is the next step for a reliable assessment of component behaviour.

Acknowledgements

The authors would like to thank Mr. D. Gordine from CGES-Ecole des Mines de Paris for machining of specimens and Mr. H. Benouali and Pr. L. Froyen for providing some results of X-ray tomography and image analysis. The authors also thank Hydro Aluminium for providing the aluminium foam.

Tensile tests				Compression tests	Torsion tests	Tension–Compression / Torsion tests				
T1	T2	T3	T4	Cuboid specimens	T2	T2				
						Non proportional			Proportional	
						Axial stress (MPa)			Slope (degree)	
						-2	1	2	45°	-45°
1.93	1.91	1.70	2.22	-2.16	1.48	0.55	1.2	0.55	1.15	1.29
1.96	1.93	1.86	2.93	-2.41	1.68	0.94	1.42	0.82	1.35	1.45
2.01	1.94	1.87	2.75	-2.53	1.73	0.98	1.53	1.17	1.49	1.68
2.14	2.16	2.12	3.72	-2.59	1.87	1.28	1.82	1.35	1.6	1.78
2.32	2.19	2.18	2.89	-2.68	1.92	1.66	1.92	1.65	1.7	
2.33	2.19	2.37	2.42	-2.89	2.08	1.68	2		1.9	
2.34	2.23	2.37	1.89	-2.92	2.2					
2.34	2.25	2.49	2.79							
2.35	2.26	2.50	2.22							
2.43	2.35	2.51	4.33							
2.48	2.38	2.5	2.77							
2.54	2.47	2.56	2.80							
2.54	2.48	2.58	2.84							
2.62	2.55	2.60	2.98							
2.63	2.56	2.64	2.99							
2.63	2.59	2.78	2.93							
2.68	2.69	2.80								
2.68	2.80	2.81								
2.76	3.03	2.82								
2.78	3.06	2.82								
2.80	3.06	2.94								
2.85	2.98									
2.87	3.22									
2.91	3.28									
3.01										
3.07										
3.12										

TAB. 1.8 – Experimental values for the initial (fracture/yield) stress measured in tension, compression, torsion and combined tension–compression / torsion tests. All values are given in MPa.

Chapitre 2

Compléments sur les essais sur mousse d'aluminium

2.1 Essai de compression

L'essai de compression sur une mousse d'aluminium est l'essai le plus simple à réaliser et donc le plus répendu et étudié. Toutefois comme il n'est pour l'instant pas normalisé il convient de prendre un certain nombre de précaution afin d'obtenir des résultats les plus reproductibles et comparables entre eux. En effet, il existe de multiples paramètres qui peuvent influencer la forme de la courbe effort / déplacement ou contrainte / déformation.

2.1.1 Effet de l'oxydation

La méthode d'usinage des éprouvettes cylindriques par carroteuse géologique impose un refroidissement de l'outil à l'eau. Après usinage, les cellules n'étant pas complètement fermées, de l'eau est absorbée par la mousse. Un passage de 12 heures à 50 degrès à l'étuve permet d'éliminer ces résidus d'eau. Ce traitement des éprouvettes peut favoriser l'oxydation du matériau. Des essais de compression ont été réalisés sur des blocs de 70 mm de côté extrait de la brame à la scie à ruban. Des blocs cubiques ont suivi le même processus de traitement que les épouvettes cylindriques : aspersion d'eau puis étuvage. La comparaison des courbes contrainte / déformation en compression de blocs oxydés et non oxydés (voir figure 2.1) ne montre pas un effet significatif de la méthode d'usinage sur le comportement mécanique. Cette comparaison entre éprouvettes oxydées et non oxydées n'a pas été réalisée sur des éprouvettes cylindriques car il est impossible d'obtenir des cylindres sans aspersion d'eau [8]. L'influence du traitement par étuve a donc été considéré comme négligeable sur le comportement mécanique à court terme du matériau. Toutefois l'influence de cette oxydation à cœur et à long terme devra être vérifiée dans l'optique d'une utilisation comme pièce de sécurité dans une automobile soumise tout au long de sa vie à un environnement agressif.

2.1.2 Effet de la présence de peau

Quel que soit le type de mousse utilisée (voie fonderie ou voie métallurgie des poudres) la présence de peau sur le spécimen influence la réponse mécanique de l'ensemble. Elle permet de stabiliser la déformation et de distribuer la contrainte en maintenant la cohésion de l'ensemble et en évitant les

[8] Même l'électroérosion impose une imersion dans un liquide diélectrique et le tournage peut provoquer un endommagement à cœur de l'éprouvette

mouvements de blocs rigides. Un essai de compression sur une mousse d'aluminium avec peau est donc particulierement difficile à interpréter. Le matériau doit être plutôt considéré comme un sandwich épais. En effet, comme indiqué dans la partie 2, la présence de peau influence la mesure de la densité de la mousse. Ainsi il est très difficile de pouvoir comparer deux échantillons ayant la même densité apparente mais l'un dépourvu de peau. Cela se traduit par une densité à cœur supérieure pour le spécimen sans peau. Les niveaux de contrainte plateau rapportés à la densité étant difficilement comparables nous nous sommes contentés de tester la même mousse avec et sans peau. Toutefois lors d'une utilisation industrielle le coût d'extraction de la peau peut inciter à la conserver. Il est important d'intégrer ce paramètre dans un cahier des charges à fournir au fabricant de mousse.

2.1.3 Effet de la vitesse de sollicitation

L'application principale des mousses d'aluminium étant les absorbeurs de choc pour les véhicules il est nécessaire de connaître le comportement des mousses sous différentes vitesses de sollicitation. Cependant pour les mousses dite fragiles obtenues par voie fonderie, il est communemment admis que l'effet de la vitesse de sollicitation est négligeable (voir figure 2.3) pour des vitesses de déformation

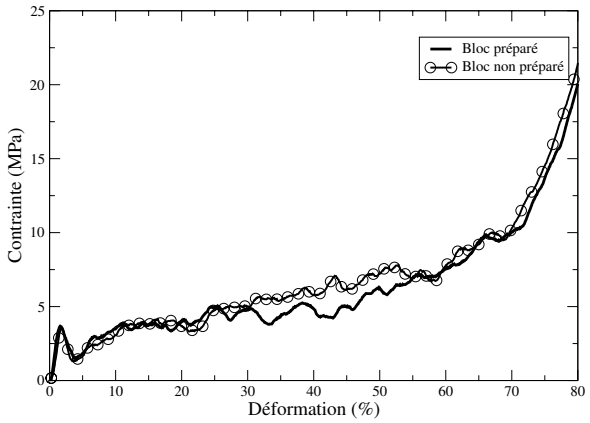


FIG. 2.1 – Effet de la préparation des éprouvettes sur le comportement mécanique en compression.

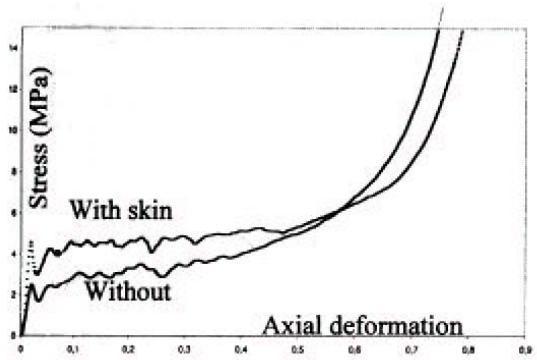


FIG. 2.2 – Effet de la présence de peau sur l'échantillon au cours d'un essai de compression.

inférieures à $50s^{-1}$ (voir [Zhao01]). Cependant pour des sollicitations à des vitesses de déformation plus importantes (de l'ordre de $10^3 s^{-1}$) on ne peut plus affirmer que la réponse mécanique de la mousse d'aluminium reste indépendante de la vitesse de déformation (voir figure 2.4). Ainsi, étant données les applications envisagées pour le crash automobile (voir Introduction) les vitesses de déformation atteintes seront inférieures à $50\ s^{-1}$. Ainsi, dans toute cette étude, l'effet de la vitesse de solicitation a été considéré comme négligeable sur la réponse mécanique de la mousse d'aluminium obtenue par voie fonderie.

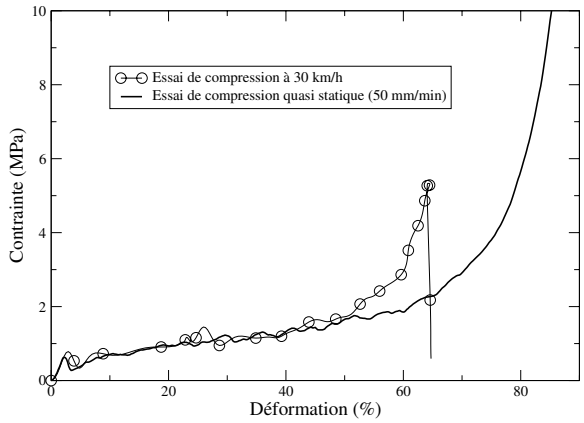


FIG. 2.3 – Effet de la vitesse de sollicitation en compression. Essai réalisé au cours du Projet EAMLIFe sur des blocs de mousse d'aluminium de densité 0.17. L'essai dynamique est réalisé à l'aide d'un puits de chute et d'une masse de 580 kg. La vitesse de déformation initiale pour l'essai dynamique est de l'ordre de $100\ s^{-1}$

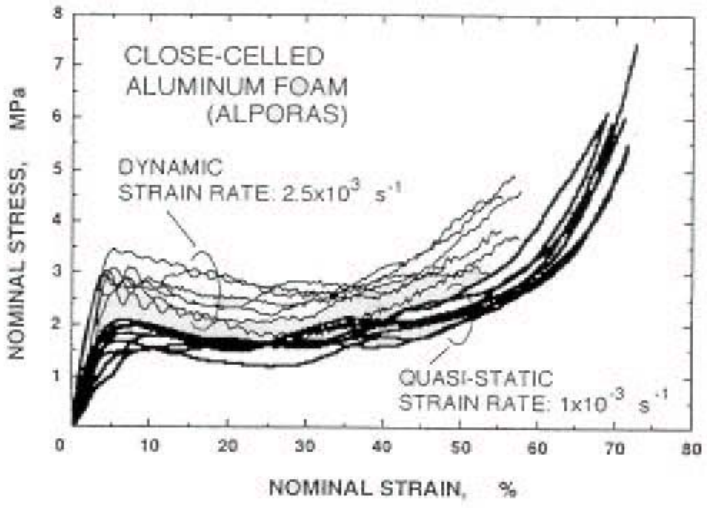


FIG. 2.4 – Effet de la vitesse de sollicitation en compression sur mousse ALPORAS. Source [Mukai et al.99]

2.1.4 Effet de la forme de l'éprouvette

Effet du rapport d'élancement

Les essais de compression sur mousse d'aluminium sont traditionellement effectués sur des éprouvettes cubiques. On constate cependant un retard à la densification au niveau de la courbe contraite / déformation (voir figure 2.5) lorsque l'essai est réalisé sur des éprouvettes dont le rapport d'élancement est plus important. Des mouvements de blocs rigides (voir figure 2.6) ainsi que des détachements de blocs de matière plus nombreux et plus importants sur l'éprouvette la plus élancée peut expliquer ce retard à la densification. La mousse s'étale alors un peu plus sur le tas plat inférieur. En outre, ce détachement de matière provoque une réduction de la section effective, le calcul de la contrainte $\sigma = F/S_0$ est donc incorrect. Ainsi certains auteurs decident alors de travailler sur des courbes efforts / déplacement plutôt que sur des courbes contraintes / déformations (cf. [Chastel et al.99]).

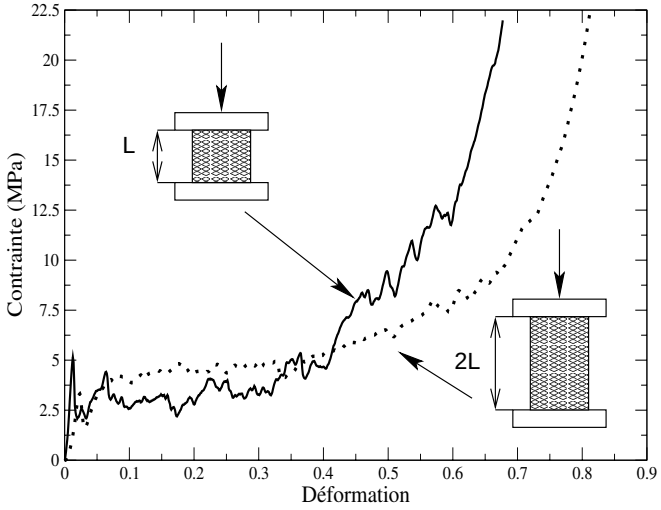


FIG. 2.5 – Effet du rapport d'élancement de l'éprouvette sur la déformation à densification

Compression d'éprouvette trapézoïdale

La forme de l'éprouvette peut également varier. C'est le cas pour [Wierzbicki et al.01] qui effectuent des essais de compression sur des éprouvettes à section variable (voir figure 2.7 et 2.8) de forme trapézoïdale. Les courbes effort/déplacement varient en fonction de l'angle θ (voir figure 2.9). L'effet structure rencontré ici sera analysé par simulation numérique dans la partie 4.

Compression en coin

Le test de l'essai coin a été décrit par [Hanssen00]. Il consiste à comprimer avec un tas plat un cube de mousse d'aluminium, mis en place dans un vé, suivant une de ces diagonales (voir figure 2.10). Il se produit alors une forte localisation de la déformation sous l'impacteur plat. L'essai correspond à une réduction de volume de l'ordre de 50 %.

2.1.5 Effet des conditions aux limites

Compression entre deux tas plats rigides ou entre un tas plat rigide et un autre monté sur rotule

La forme de la courbe de compression peut également varier suivant l'application des conditions aux limites. En effet, le niveau du premier pic d'effort est différent suivant le type de montage utilisé (voir figure 2.11). Le premier pic d'effort est inférieur lors de la compression d'un bloc de mousse entre deux tas plats rigides que lors de la compression d'un bloc de mousse de même densité comprimé entre un tas plat et une rotule (voir figure 2.12). Cette différence au niveau du pic se comprend facilement par la plus forte contrainte exercée par les tas plats rigides sur le bloc. En effet, en empêchant toute rotation des sections droites, les tas plats rigides induisent des couples à l'intérieur du bloc qui peuvent provoquer la rupture de certaines cellules. Ces ruptures locales précipitent alors l'apparition de la première bande de localisation. Le pic d'effort est donc moins élevé.

Compression à l'aide d'un impacteur cylindrique

Afin de simuler l'impact d'un genou sur une planche de bord, des essais de compression à l'aide d'impacteurs cylindriques ou hémisphériques peuvent être réalisés. La déformation est alors localisée sous l'impacteur le reste de l'éprouvette n'étant pratiquement pas affecté (voir figure 2.13 et la courbe



FIG. 2.6 – Visualisation des mouvements de blocs rigides lors de la compression d'une éprouvette à fort rapport d'élancement

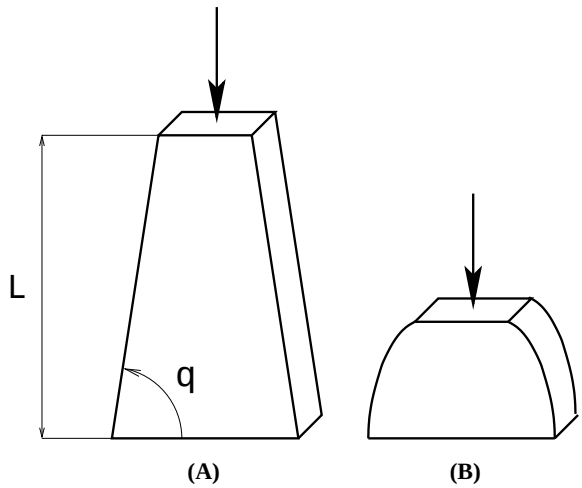


FIG. 2.7 – (A) Schéma de la forme de l'éprouvette à section variable de [Wierzbicki et al.01]. (B) Schéma de la déformée après compression

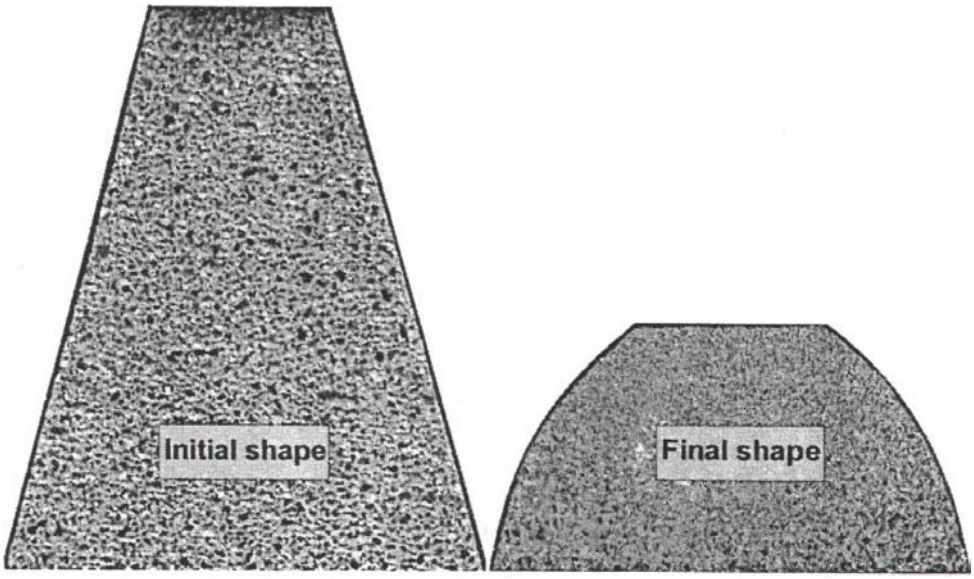


FIG. 2.8 – Photographie d'une éprouvette trapézoïdale de mousse avant et après compression

effort/déformation 2.14 correspondante). Toutefois ces essais ne sont plus vraiment des essais de compression pure. En effet, de part la forme de l'impacteur, le champ de contraintes n'étant plus uniforme,

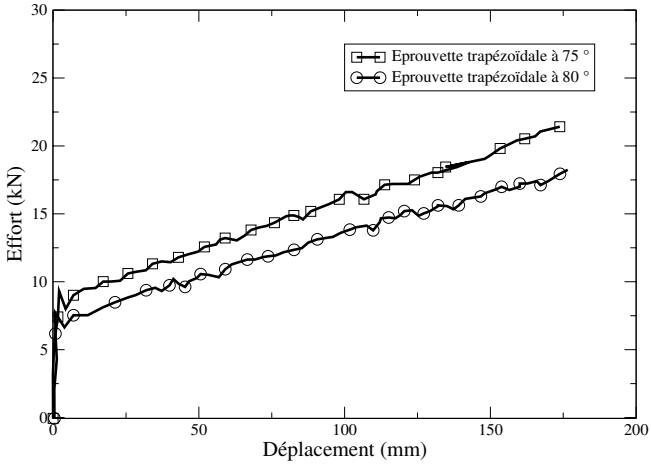


FIG. 2.9 – Courbe effort/déplacement lors de la compression de deux éprouvettes trapézoïdale en mousse d'aluminium

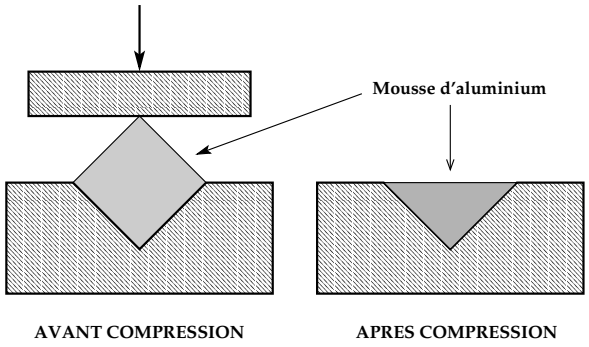


FIG. 2.10 – Schéma de l'essai de compression coin de [Hanssen00]

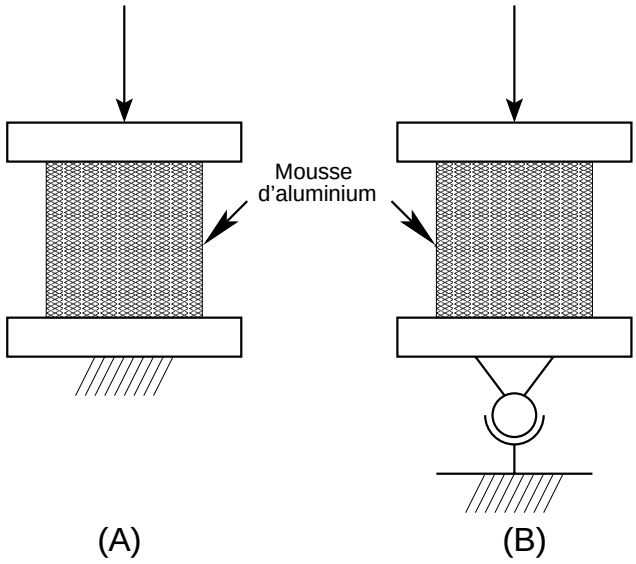


FIG. 2.11 – Schéma de principe de la compression d'un bloc de mousse d'aluminium entre deux tas plats rigides (A) et entre un tas plat rigide et une rotule (B)

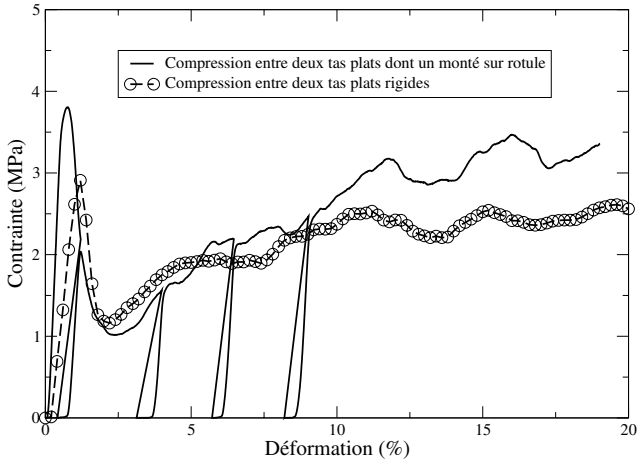


FIG. 2.12 – Comparaison entre deux essais de compression réalisés entre deux tas plats rigides et entre un tas plat rigide et un autre monté sur rotule. Zoom sur le premier pic d'effort.

il est impossible d'identifier un critère de rupture à partir de ce type d'essai. En revanche ce type d'essai peut parfaitement convenir à la validation de critères multiaxiaux. Cet essai a été donc choisi par RENAULT pour valider les modèles de comportement utilisés et développés par ailleurs dans ce travail.

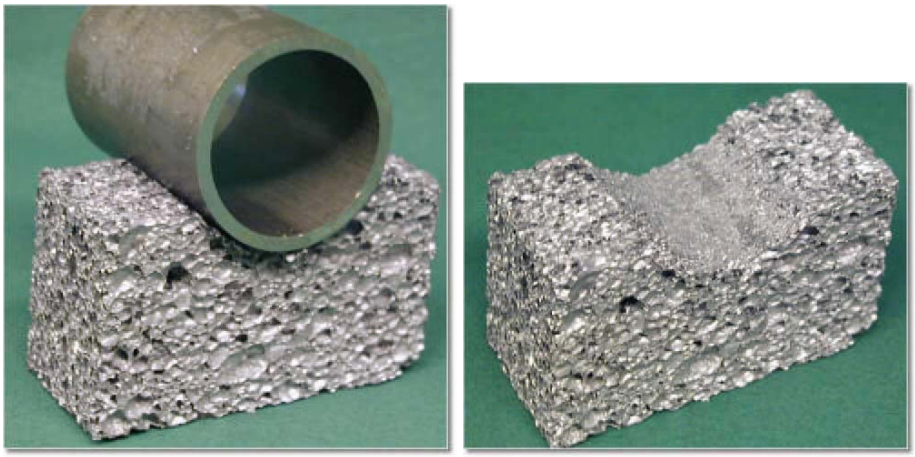


FIG. 2.13 – Compression d'un bloc de mousse à l'aide d'un impacteur cylindrique. Toute la déformation est localisée sous l'impacteur

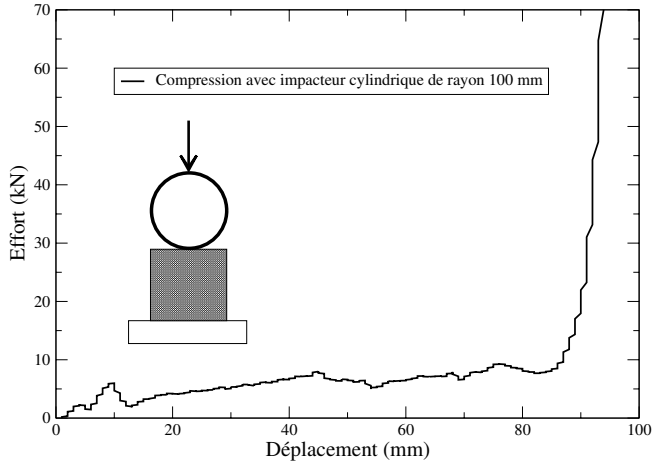


FIG. 2.14 – Essai de compression réalisé entre un tas plat et un impacteur cylindrique de 100 mm de diamètre. L'échantillon est un cube de 100 mm de côté et de 95 mm d'épaisseur.

2.1.6 Etude expérimentale de la localisation de la déformation

Par mesure de champs

Lorsque la contrainte dépasse un certain seuil, les cellules de la mousse s'effondrent plastiquement ce qui résulte en un long plateau quasi horizontal sur la courbe contrainte / déplacement. La déformation n'est alors plus recouvrable, elle est localisée sous forme de strates tandis que le reste de la mousse est pratiquement intact. Afin de vérifier expérimentalement cette constatation visuelle il est possible de mesurer les déformations en utilisant le système optique de mesure de champs par corrélation d'image ARAMIS©. [Bastawros et al.00] ont étudié la localisation de la déformation en utilisant une technique similaire mais en ne s'intéressant qu'à la zone élastique et à l'apparition de la première bande. Le dispositif expérimental utilisé au Cemef se compose d'une caméra d'acquisition et d'un micro-ordinateur pour le traitement des images. Le principe consiste à acquerir deux images de la même éprouvette : l'une dans l'état non déformée, l'autre dans l'état déformé. Le logiciel tente alors une corrélation entre ces deux images en repérant des motifs communs sur ces deux images. Il calcule ensuite la déformation en comparant le déplacement relatif entre les deux motifs communs. La principale difficulté lors de l'utilisation de cette technique est d'obtenir des images peu différentes entre elles afin de permettre au logiciel de retrouver des motifs communs. Ceci impose que la position de l'éprouvette varie faiblement par rapport à la caméra d'acquisition entre les deux prises de vue successives. Dans le cas d'une mesure de champ sur un bloc de mousse en compression, la difficulté consiste donc à acquérir des images suffisament proches les unes des autres pour identifier l'instant où les cellules s'effondrent. Pour cela, il est possible de jouer sur deux paramètres : la vitesse de traverse du vérin pour comprimer le bloc doit être faible et la fréquence d'acquisition des images doit être élevée. Dans le cas présenté ici nous avons utilisé une vitesse de traverse de 1 mm/min et une caméra rapide capable d'acquérir jusqu'à 3000 images par secondes. Toutefois la mémoire vidéo du système étant limitée à 2500 images de 256 pixel de coté, il n'est pas possible d'acquérir l'ensemble de l'essai. Afin de déclencher l'acquisition video juste avant que les cellules ne s'effondrent et qu'apparaisse la première bande de localisation de la déformation, le logiciel de pilotage de la caméra rapide a donc été couplé avec la mesure de l'effort de compression délivré par la cellule d'effort de la machine de traction. Le déclenchement de l'acquisition s'effectue lorsque l'effort dépasse une valeur seuil calibrée sur d'autre blocs similaires. Afin d'obtenir des images plus faciles à corréler les blocs de mousse testés ont été enduits de nitrure de bore en spray. En effet ce revêtement blanc mat permet d'obtenir des images avec une grande dispersion de niveaux de gris et moins de reflets pouvant perturber la corrélation. S'il est difficile de se rendre compte de la localisation de la déformation sur les images obtenues (voir figure 2.15) les mesures de champs obtenues permettent de bien montrer une forte localisation de la déformation sous forme de bande (voir figures 2.16, 2.17 et 2.18). La mesure donne des déformations locales de l'ordre de 50 %. On peut s'interroger sur la valeur de cette déformation. L'observation visuelle de l'essai semble montrer que la fermeture des cellules est totale ainsi, localement, la déformation atteindrait plutôt 80-90 %.

Par tomographie 3D à rayon X

La tomographie 3D à rayon X permet de réaliser des coupes virtuelles dans le matériau afin d'observer de manière non destructrive la structure interne. Des tomographies ont été réalisées à la KUL pour différents niveaux de déformation totale. L'objectif étant de visualiser à cœur le processus de localisation de la déformation, la première tomographie est réalisée sur le bloc avant compression afin d'obtenir une image à cœur de la mésostructure non déformée. Ensuite le bloc est comprimé jusqu'à l'apparition du premier pic d'effort (voir figure 2.19). Une deuxième tomographie est alors réalisée pour visualiser les déformations subies à cœur par le matériau. Le matériau est alors comprimé de nouveau et tomographié plusieurs fois afin de suivre la localisation de la déformation à cœur. Grâce à ces observations, il est

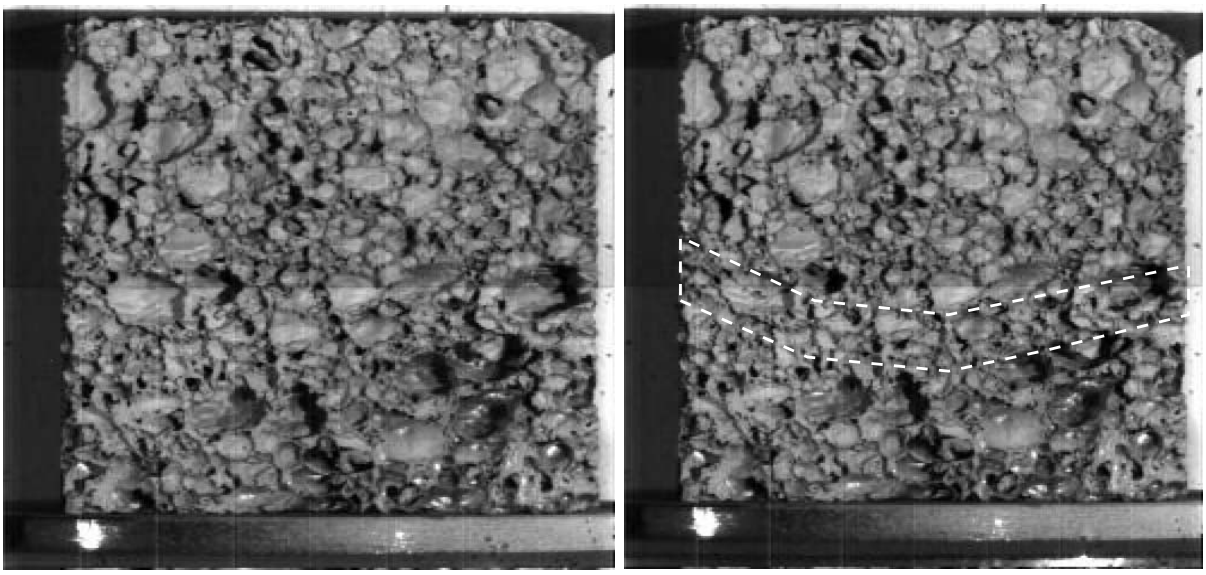


FIG. 2.15 – Image d'un cube de mousse de 50 mm de coté obtenue à l 'aide d'une caméra rapide avant compression (à gauche) et après compression (à droite). La zone indiquée en pointillés blancs montre une forte localisation de la déformation. La ligne centrale grise présente sur les deux images correspond à la limite entre les deux ccd de la caméra et n'affecte pas la corrélation.

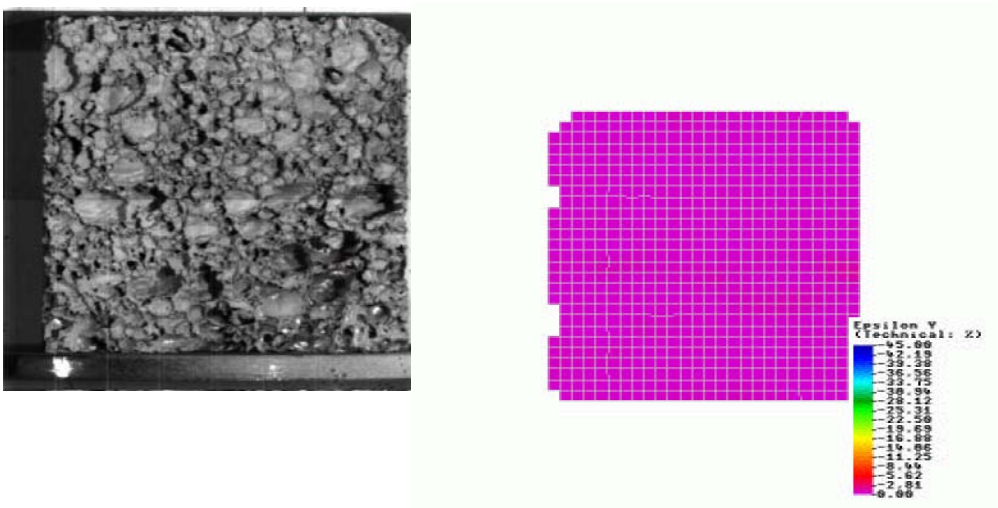


FIG. 2.16 – Vue de l'éprouvette avant compression à gauche et maillage initial utilisé pour la corrélation de mesure de champs. $\varepsilon_{total} = 0$

confirmé que les cellules s'effondrent totalement localement. Il y a donc bien localement des valeurs de déformation très élevées (de l'ordre de 80 %). L'observation de ces différentes coupes (voir figure 2.20) suggère que la localisation de la déformation intervient dans les zones où les cellules sont les plus grosses initalement, c'est à dire les zones où les porosités locales sont les plus élevées. Il est toutefois difficile d'affirmer que la localisation de la déformation n'intervient que dans ces zones. En effet, sur une coupe de tomographie dans le plan (x,y), nous ne disposons pas de l'information en z alors que le phénomène d'apparition de la localisation semble également dépendant de la localisation tridimensionnelle de la matière. Toutefois, en première approche, il ne semble pas erroné de considérer que l'apparition de

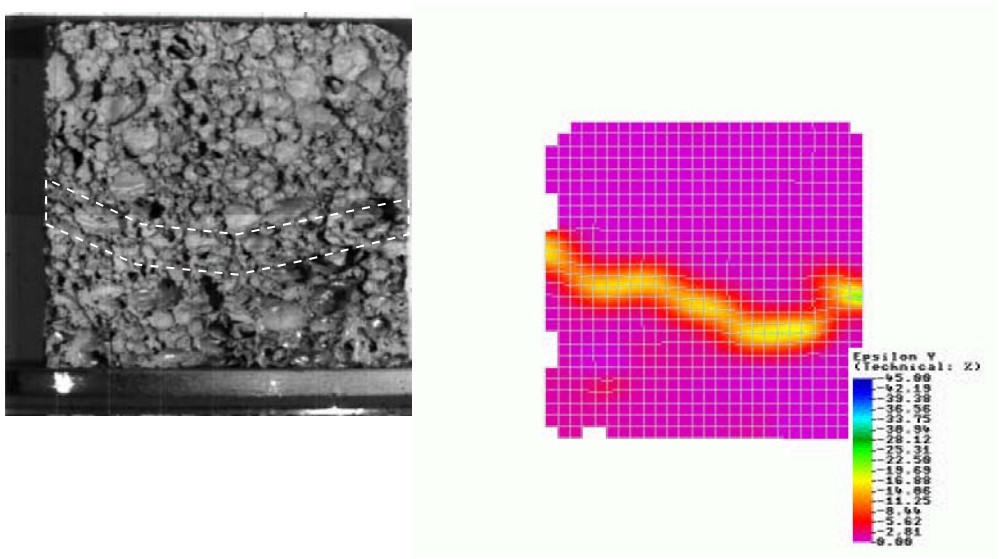


FIG. 2.17 – Vue de l'éprouvette après apparition de la première bande de localisation, les cellules sont refermées à moitié (à gauche). Maillage après corrélation de mesure de champs (à droite), on constate la localisation de la déformation sous forme de bandes quasi horizontales. $\varepsilon_{total} = 2\%$

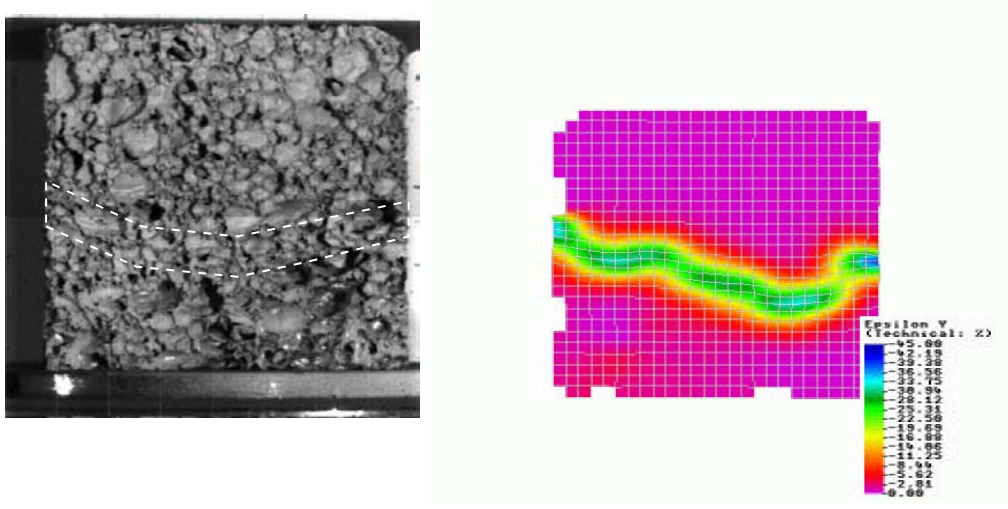


FIG. 2.18 – Vue de l'éprouvette après fermeture totale de la première bande de localisation, les cellules sont refermées totalement (à gauche). Maillage après corrélation de mesure de champs (à droite), on constate une forte localisation de la déformation sous forme de bandes quasi horizontales. $\varepsilon_{total} = 5\%$

la première bande de localisation se fera principalement dans les zones de grande porosité. C'est à partir de cette constatation que les simulations du comportement mécanique de la mousse seront construites dans la partie suivante. En outre, la propagation de cette localisation de la déformation s'effectue pratiquement toujours à partir de la première bande ce qui permet de penser, au vu des observations, que l'apparition de la localisation est directement provoquée par une rupture locale des parois des cellules suivie d'un écrouissage lorsqu'elles sont totalement refermées ce qui provoque la propagation de cette localisation. Il est malheureusement difficile de se rendre compte sur les tomographies de la rupture fragile des parois des cellules. Cependant un essai de compression / traction permet de bien montrer qu'après

l'apparition de la première bande de localisation en compression il y a bien eu rupture des parois car la mousse n'oppose plus aucune résistance à la traction. Ce phénomène de localisation de la déformation par propagation de rupture fragile des parois des cellules est donc le principal mécanisme physique de la déformation des mousses en compression.

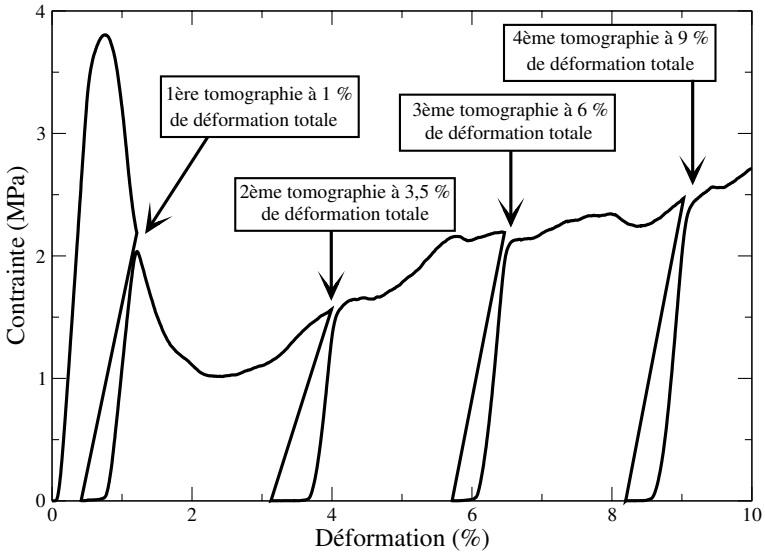


FIG. 2.19 – Courbes de compression raboutées. Cette courbe comprend les 4 essais de compression successifs du même bloc afin d'atteindre différents niveaux de déformation totale entre chaque tomographie

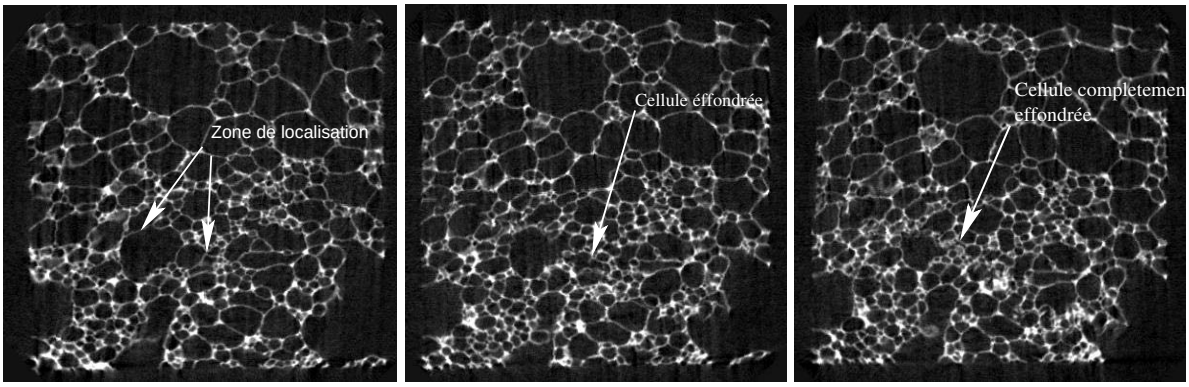


FIG. 2.20 – Trois coupes obtenues par tomographie 3D à rayon X pour différents niveaux de déformation totale. A gauche 0 % de déformation. Au centre 3.5 % de déformation totale. A droite 6 % déformation totale.

2.2 Essai de traction

Montage et mesure de la déformation

L'essai de traction est un essai assez difficile à réaliser sur de la mousse d'aluminium. En premier lieu, vu les difficultés d'usinage, il n'est pas commode de donner une forme adéquate à l'éprouvette pour la fixer aux parties mobiles de la machine. D'autre part, la sollicitation résultant de ce montage n'est jamais véritablement homogène. La fixation de la mousse aux parties mobiles de la machine d'essai est réalisée la plupart du temps par de la colle époxy [Paul et al.99] dont l'inconvénient principal est de ne pas se retirer facilement des liaisons échantillons / parties mobiles de la machine de traction. Pour beaucoup d'auteurs dont [Cullough et al.99], la forme de l'éprouvette choisie est l'os de chien dont un schéma est donné figure 2.21. Toutefois cette forme d'éprouvette est difficile à réaliser et nécessite la mise en œuvre d'un usinage par électro-érosion.

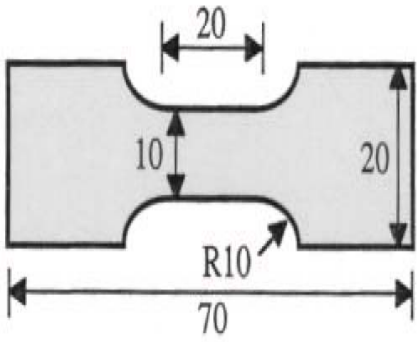


FIG. 2.21 – Eprouvette os de chien vue de dessus utilisée par [Cullough et al.99].

Le type de courbe obtenue pour des essais de traction simple sur de la mousse de type ALPORAS ©[9] est visible sur la figure 2.22. Cette catégorie de mousse présente une zone d'adoucissement après une portion élastique linéaire. Une résistance mécanique à la traction de 1,95 MPa pour une densité de 0,21.

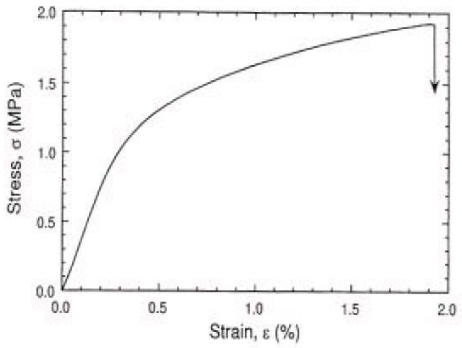


FIG. 2.22 – Courbe contrainte / déformation d'un essai de traction sur mousse ALPORAS. Source [Paul et al.99].

D'après [Cullough et al.99], en traction, la géométrie d'éprouvette en forme d'os de chien est supérieure au simple bloc de mousse parallélépipédique car elle donne une meilleure précision pour les ré-

[9] C'est une mousse obtenue par voie hybride (voir Introduction)

sistances mécaniques en traction et en compression, qui sont alors, toujours d'après [Cullough et al.99], quasi égales. Pourtant des essais de traction sur de la mousse Hydro Aluminium effectués par [Siebels98] au cours du projet EAMLIFe ont montré que des échantillons parallélépipédique (voir figure 2.24), bien plus faciles à usiner, donnent des résultats comparables (voir figure 2.23). Toutefois le montage utilisé alors à base de cables (voir figure 2.23) nécessite l'utilisation d'un extensomètre pour connaitre la déformation de la mousse. D'après [Siebels98], la mise en place de ce dernier est particulièrement difficile étant donnée l'hétérogénéité de la mousse. Le signal délivré par ce dernier est fortement dépendant de l'éprouvette et ne permet pas de comparer plusieurs échantillons entre eux. C'est pourquoi l'utilisation du LVDT de la machine, qui présente l'avantage d'un signal comparable d'une éprouvette à l'autre, a été préféré à celle d'un extensomètre dans la campagne d'essai présentée dans le chapitre 1 de la partie 3. Par ailleurs le montage a été dimensionné afin d'être le plus rigide possible. Cela permet de considérer que le déplacement du vérin, après la mise en tension du montage, est entièrement subit par la mousse.

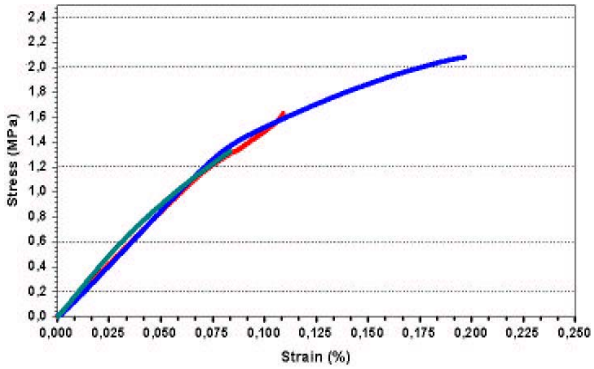


FIG. 2.23 – Courbe contrainte / déformation de deux essais de traction sur bloc de mousse parallélépipédique. La déformation à rupture est également dispersée.



FIG. 2.24 – Montage de traction sur bloc de mousse parallélépipédique. Source projet EAMLIFe.

Des essais de traction menés par [Hanssen00] au NTNU sur de la mousse Hydro Aluminium montrent également une rupture fragile de la mousse. Il faut donc bien distinguer plusieurs types de comportement en traction suivant le type de mousse considéré. Une mousse issue de la voie fonderie optimisée pour le crash aura un comportement fragile tandis qu'une mousse issue de la voie métallurgie des poudres présentera un comportement plus ductile en traction. Ces différences de comportement sont sans doute dues aux additifs fragilisants (SiC) introduits lors de la fabrication des mousses par la voie fonderie.

2.3 Essai de cisaillement

Vérification de l'homogénéité du chargement lors d'un essai de cisaillement

La procédure d'essai de cisaillement décrite dans le chapitre précédent ne permet pas de solliciter la lame de mousse d'aluminium en cisaillement pur. Afin de vérifier la validité de cet essai pour identifier un critère de rupture une simulation éléments finis de l'ensemble du montage d'essai a été réalisée. Cette simulation permet de connaître l'état de contrainte appliqué à la lame de mousse. Le simulation réalisée est purement élastique. Pour des raisons d'adhérence de la mousse aux fixations du montage d'essai, ces dernières ont d'abord été réalisées en aluminium (avec $E_{alu} = 70$ GPa). Les résultats de la simulation montrent que l'état de contrainte appliqué à la mousse n'est pas seulement du cisaillement, on note aussi de la traction/compression dans les deux directions du plan. La visualisation de cet état de compression est possible lorsque la déformée de l'essai est multipliée par 5 (voir figure 2.25). Il y a flexion des fixations au cours de l'essai ce qui conduit à un état de contrainte hétérogène dans la mousse.

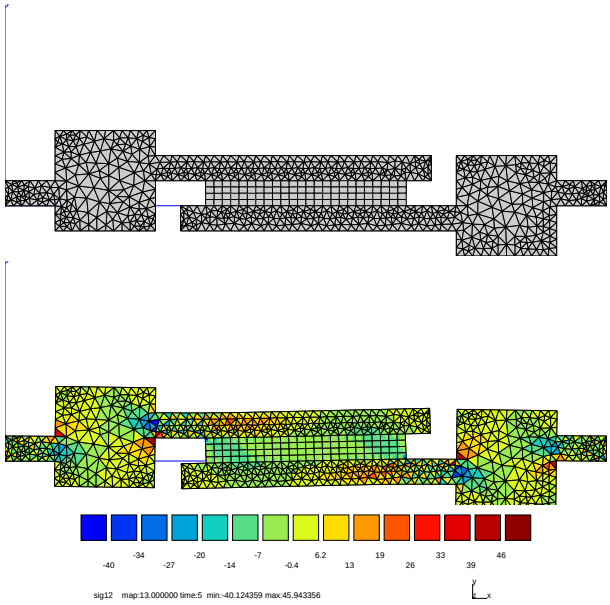


FIG. 2.25 – Simulation de l'essai de cisaillement : maillage initial et maillage déformé avec déplacements multipliés par 5. Visualisation de σ_{12}

Plusieurs simulations ont donc été réalisées en considérant tour à tour des fixations en aluminium, en acier (avec $E_{acier} = 210$ GPa) et en un matériau virtuel infiniment rigide (avec $E_{virtual} = 1000\,GPa$). L'évolution de l'état de contrainte le long de l'axe de symétrie horizontal pour la mousse (axe 1 ou X) pour les trois contraintes σ_{12}, σ_{11} et σ_{22} et dans le cas des trois matériaux différents pour les fixations est tracée dans les courbes 2.26, 2.27 et 2.28.

La représentation de l'état de contrainte normalisé dans la mousse pour chaque type de matériaux pour les fixations (voir figure 2.29) montre que pour réaliser un essai de cisaillement il est important que le montage soit le plus rigide possible.

A partir de ces résultats et malgré les difficultés pour réaliser un bon collage de la mousse aux fixations, le montage d'essai a été réalisé en acier. Le collage fixation/mousse a donc été optimisé grâce à l'utilisation d'adhésifs performants et de techniques de collage spécifiques.

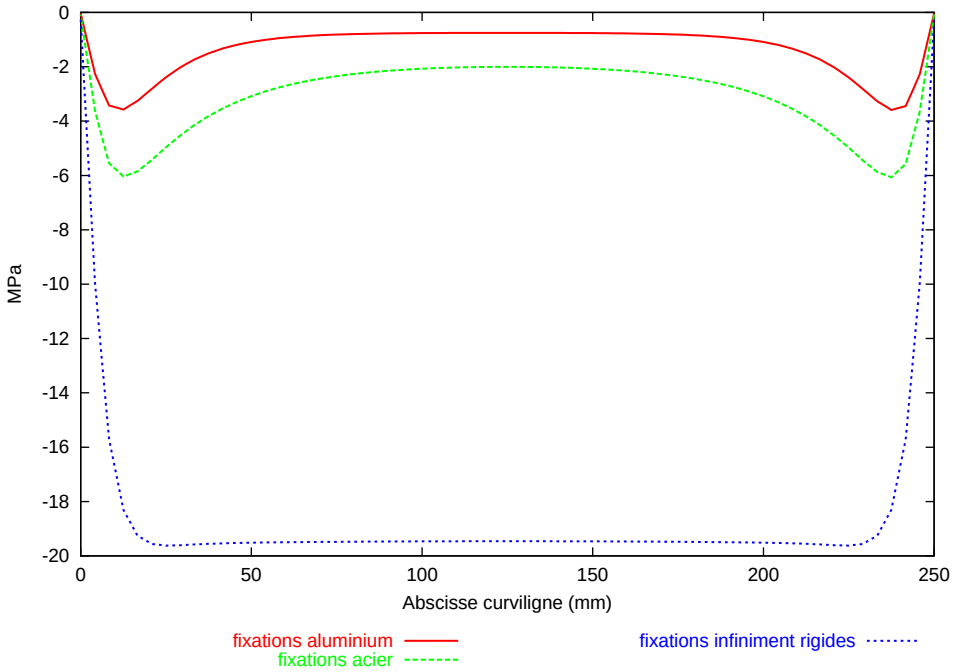


FIG. 2.26 – Evolution de σ_{12} le long de l'axe 2 en fonction du type de fixation

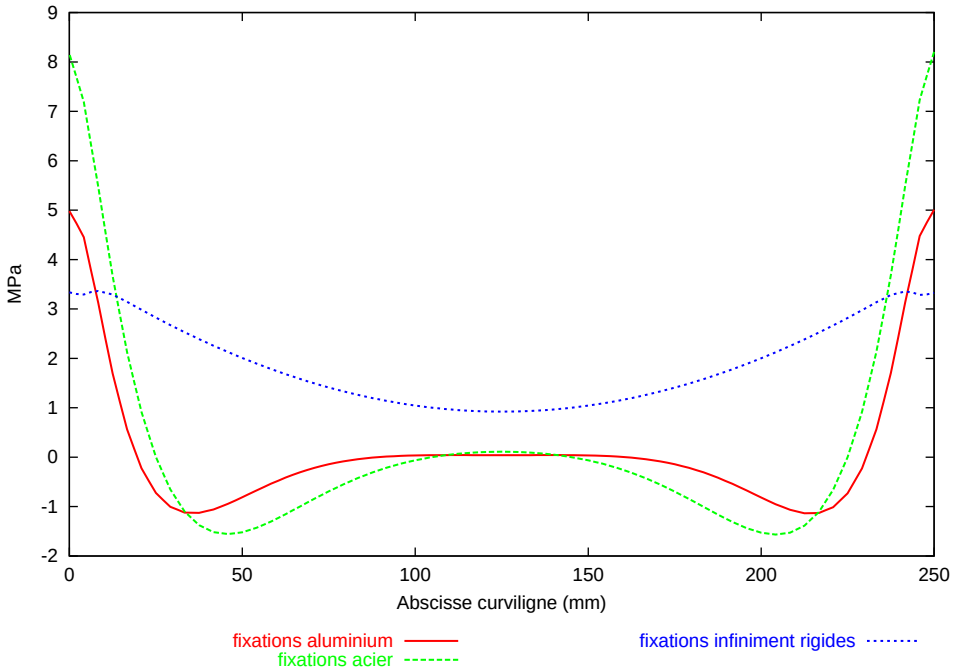


FIG. 2.27 – Evolution de σ_{11} le long de l'axe 2 en fonction du type de fixation

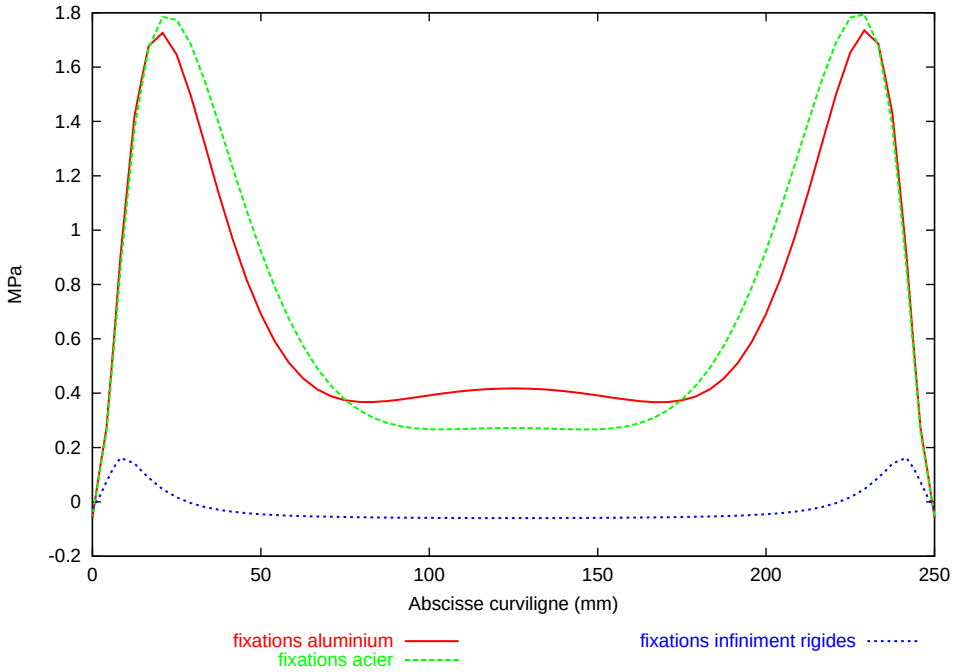


FIG. 2.28 – Evolution de σ_{22} le long de l'axe 2 en fonction du type de fixation

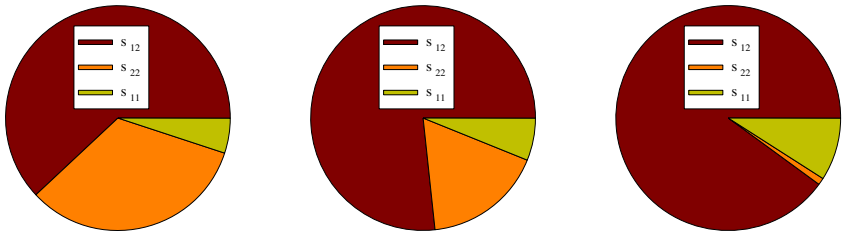


FIG. 2.29 – Evolution de l'état de contrainte normalisé avec (de gauche à droite) des fixations en aluminium, des fixations en acier et des fixations en un matériau virtuel infiniment rigide

Quatrième partie

Modélisation et simulation du comportement mécanique de la mousse d’aluminium

Introduction aux modèles adaptés aux mousses

Le but d'un modèle de comportement est de fournir aux bureaux d'études des moyens permettant de choisir et de dimensionner des structures soumises à des chargements complexes. Un outil d'aide à la conception de structures comprenant des mousses d'aluminium doit être capable de simuler le comportement mécanique décrit dans la partie 3. Le type de loi utilisée dans cet outil de simulation doit en premier lieu rendre compte du caractère compressible de la déformation des mousses d'aluminium. Cette quatrième partie se place dans le cadre de la mécanique des milieux continus, ce qui signifie qu'un point matériel correspond, non pas à une cellule de mousse, mais à un petit volume de matière contenant un nombre de cellules suffisant pour que l'on puisse caractériser ce volume élémentaire par sa densité relative. Ce domaine, appelé par abus de langage point macroscopique, est donc traité mathématiquement comme un infiniment petit, mais se voit associé à une grandeur macroscopique telle que la porosité par exemple. Toutefois, il est souvent difficile de satisfaire tous les besoins d'un bureau d'étude à l'aide d'un seul type de modèle. Dans cette partie, trois approches ou plutôt trois niveaux de modélisation du comportement mécanique des mousses d'aluminium sont présentés.

Un premier niveau, purement phénoménologique, basé sur les hypothèses de la mécanique des milieux continus et utilisant la méthode des éléments finis permet de simuler le comportement en compression simple de la mousse sans avoir une information fine sur les modes de déformation. Cette méthode permet, en théorie, de calculer le comportement mécanique d'une pièce en mousse d'aluminium soumise à des chargements complexes. Toutefois cette modélisation, suffisante dans le cas d'un prédimensionnement par exemple, ne permet pas d'obtenir un niveau de précision compatible avec le degré d'optimisation nécessaire dans la conception d'un véhicule moderne lors de la simulation de pièces soumises à des chargements complexes.

Un deuxième niveau, également basé sur les hypothèses de la mécanique des milieux continus et utilisant la méthode des éléments finis, permet d'affiner la modélisation en tenant compte des modes de déformation, et notamment de la localisation de la déformation. Cette approche plus fine du modèle précédent permet, au prix d'un temps de calcul plus élevé, d'obtenir un meilleur niveau de corrélation calcul / essai lors de la simulation du comportement mécanique d'une pièce en mousse d'aluminium soumise à des chargements complexes.

Un troisième niveau de modélisation, en combinant simulation par éléments finis et tomographie à rayons X d'un bloc de mousse, permet de valider l'approche précédente mais, à cause de coûts de calculs trop importants, ne peut servir directement en dimensionnement de structures.

Chapitre 1

Théorie de la plasticité compressible

Dans la partie 3 nous avons constaté que la déformation plastique des mousses d'aluminium s'effectue avec changement de volume. La propriété d'incompressibilité des métaux n'est donc plus conservée pour ce matériau. La porosité f du matériau, représentant le degré de compressibilité du matériau, intervient comme un paramètre supplémentaire.

1.1 Critères de plasticité

On notera Φ la fonction seuil du critère de plasticité. Il y a écoulement plastique lorsque l'égalité (1.1) est vérifiée

$$\Phi(\sigma, R) = \hat{\sigma} - R = 0 \tag{1.1}$$

avec $\hat{\sigma}$ définissant une contrainte équivalente, $R = R_0 + R_{ecrouissage}$ où R_0 est la contrainte seuil initiale du critère et $R_{ecrouissage}$ un terme d'écrouissage.

1.1.1 Critère de von Mises

La mousse d'aluminium étant considérée comme isotrope la démarche la plus simple afin de rendre le caractère compressible de la déformation est de généraliser l'expression du critère de von Mises. Dans le cas de ce critère, la contrainte équivalente $\hat{\sigma}$ est définie par

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}\sum_{i,j=1}^{3} s_{ij}s_{ij}} = J_2(\sigma) \tag{1.2}$$

avec s le déviateur des contraintes, σ le tenseur des contraintes et p la pression. Ces grandeurs sont reliées entre elles par les relations suivantes (1.3).

$$s = \sigma + pI \qquad p = -\frac{1}{3}Trace(\sigma) \tag{1.3}$$

Une des principales propriétés de ce critère est l'absence d'influence de la pression hydrostatique. En effet, si un milieu continu obéissant au critère de Von Mises est soumis à une pression hydrostatique p_0 le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p_0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Le déviateur des contraintes **s** étant nul, le critère 1.1 n'est jamais atteint, il n'y a jamais apparition de plasticité. Ce type de critère convient particulièrement bien aux matériaux métalliques denses. Il permet d'expliquer aussi pourquoi il fut possible de renflouer des pièces intactes du Titanic alors qu'elles ont été soumises à une pression hydrostatique considérable. Cela n'aurait pas été possible si le Titanic avait été composé de matériaux compressibles.

1.1.2 Critère de Green

La forme la plus simple d'une contrainte équivalente faisant intervenir la pression hydrostatique a été introduite par [Green72]. Elle s'écrit

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} C\,\mathbf{s} : \mathbf{s} + F\,trace(\sigma)^2} \tag{1.5}$$

avec C et F deux coefficients pouvant dépendre de la porosité f. Ainsi la pression hydrostatique apparait dans l'expression de la contrainte équivalente sous la forme de $trace(\sigma)$. Lorsque C=1 et F=0 l'expression de la contrainte équivalente de von Mises est retrouvée. Ce type de contrainte équivalente est principalement utilisée pour la simulation du comportement de la compaction de poudres métalliques [Besson et al.89]. Après avoir redéfini la contrainte équivalente la notation usuelle q sera utilisée pour désigner la contribution des effets déviatoriques seuls. Elle est définie par

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}\,\mathbf{s} : \mathbf{s}} = J_2(\sigma) \tag{1.6}$$

Comme précédemment si nous appliquons une pression hydrostatique à ce milieu continu, la contrainte équivalente de Green vaut

$$\hat{\sigma} = \sqrt{9 F\, p_0^2} \tag{1.7}$$

Cette contrainte équivalente est non nulle et croît avec la pression hydrostatique donc en augmentant la pression il est possible d'atteindre un seuil de plasticité.

Une représentation classique des critères de plasticité compressible s'effectue dans le plan (p,q). Dans le cas du critère de Green la forme de la surface de plasticité est elliptique centrée sur l'axe des pressions hydrostatiques nulles. Il est possible de représenter les trajets suivis dans ce plan lors d'essais de caractérisation mécanique.

Essai de compression

Lorsque l'on effectue un essai de compression le tenseur des contraintes associé à cette sollicitation prend la forme suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

avec $\sigma = -\dfrac{F}{S}$, F étant l'effort appliqué au bloc de mousse et S la section du bloc de mousse. En développant le déviateur des contraintes s on obtient

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s : s} = J_2(\sigma) = |\sigma| = 3p \tag{1.9}$$

L'essai de compression permet donc d'explorer la droite d'équation $q = 3p$ du plan (p,q) (voir figure 1.1). Lorsque la mousse quitte le domaine élastique, c'est-à-dire lorsque la pression atteint le plateau de zone d'absorption d'énergie, la pression s'obtient avec $p = -\frac{1}{3}\frac{F}{S}$ puis q par l'équation 1.9.

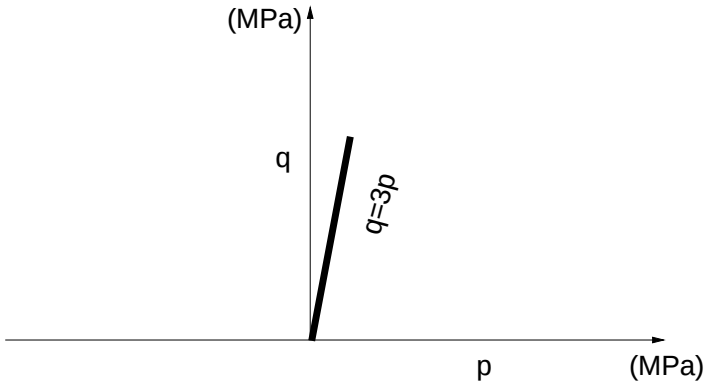


FIG. 1.1 – Zone d'exploration du plan (p,q) pour l'essai de compression

Essai de traction

De même que pour l'essai de compression, la forme du tenseur des contraintes est donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

avec $\sigma = \frac{F}{S}$. Ainsi la zone explorée sur le plan (p,q) par l'essai de traction est la droite d'équation $q = -3p$ mais pour une pression négative (cf. équation 1.3). L'essai de traction explore donc la portion de droite située dans le troisième quadrant (cf. figure 1.2).

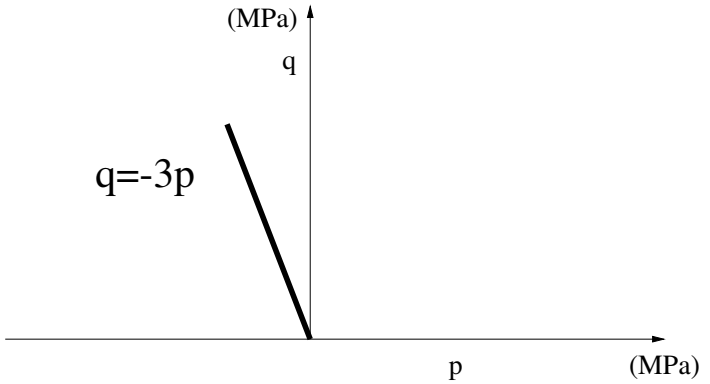


FIG. 1.2 – Zone du plan (p,q) explorée par l'essai de traction

Essai de cisaillement et de torsion

Lorsque l'on effectue un essai de cisaillement ou un essai de torsion le tenseur des contraintes associé à cette sollicitation est donné par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Dans ce cas $Trace(\sigma) = 0$ donc $p = 0$. La zone explorée sur le plan (p,q) est l'axe des ordonnées.

Essai de traction - compression / torsion

Au cours d'un essai de traction - compression / torsion la forme du tenseur des contraintes est la suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Ce qui conduit à atteindre dans le plan (p,q) le point de coordonnées :

$$p = -\frac{1}{3}\sigma \qquad q = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{9p^2 + 3\tau^2} \tag{1.13}$$

Dans ce cas ce n'est plus une droite du plan (p,q) qui est atteignable lors de l'essai mais une zone du plan (p,q) (repérée 1 dans la figure 1.3) délimitée par les droites $q = -3p$ et $q = 3p$ représentant les trajets pour des essais de compression et traction pure.

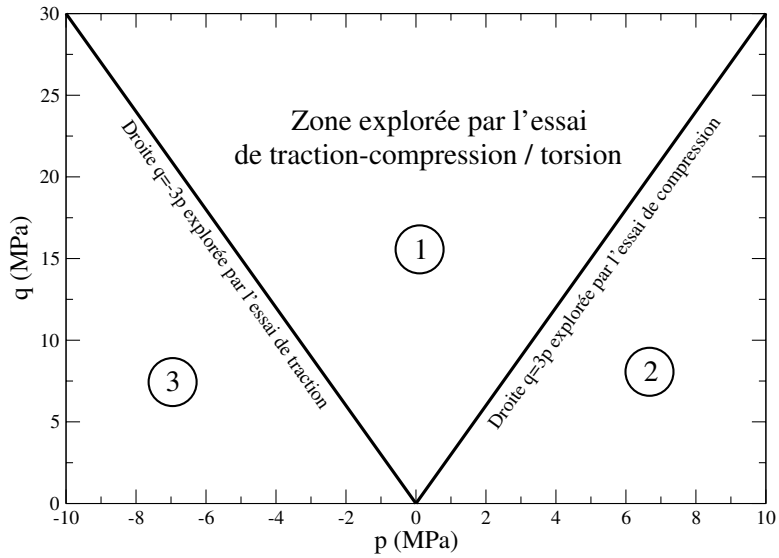


FIG. 1.3 – Zone du plan (p,q) couverte par l'essai de traction - torsion.

Cet essai présente l'avantage de couvrir une grande partie du plan (p,q) en jouant sur σ et τ. Toutefois afin d'atteindre des points proches de l'axe p il faut se rapprocher d'une sollicitation hydrostatique pure. Dans le cas des mousses d'aluminium, seule la zone 2 (cf. figure (1.3)) a été explorée par

[Deshpande et al.00] à l'aide d'essais de compression triaxiale. La zone 3 a été seulement explorée dans le cas de mousses de polymère par [Deshpande et al.01].

1.1.3 Loi d'écoulement associée au critère de Green

Dans cette étude le principe du travail maximal est supposé applicable ce qui conduit à choisir le critère de plasticité comme potentiel plastique. L'expression de la loi d'écoulement dite associée ou normale au critère s'obtient par

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \sigma} \tag{1.14}$$

En développant l'équation (1.14) compte tenu de l'équation (1.5) la loi d'écoulement s'écrit

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \frac{3\dot{\lambda}^{pl}}{2\hat{\sigma}} (C\mathbf{s} - 2F\,p\mathbf{I}) \tag{1.15}$$

La vitesse de déformation plastique se compose donc d'une partie déviatorique proportionnelle au déviateur des contraintes **s** et au coefficient C et d'une partie sphérique proportionnelle à la pression p et au coefficient F qui correspond à une vitesse de compaction ou d'expansion volumique.

Comme en plasticité classique il est commode d'utiliser une vitesse de déformation plastique généralisée ou équivalente $\dot{\bar{\varepsilon}}$. Nous la définissons en postulant que la puissance de déformation plastique par unité de volume est égale au produit de la contrainte équivalente par la vitesse de déformation équivalente. Or cette puissance de déformation n'est dissipée que dans le volume réellement occupé par le métal constituant les parois et non dans les pores, il faut donc la multiplier par la fraction volumique de métal ce qui n'est autre que la densité relative ρ_r. On obtient alors

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^{pl} = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \rho_r \hat{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} \tag{1.16}$$

En remplacant $\dot{\varepsilon}^{pl}$ dans l'équation précédente 1.16 on obtient par identification que $\dot{\lambda}^{pl} = \rho_r \dot{\bar{\varepsilon}}$. En posant

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\mathbf{e}}^{pl} - \frac{1}{3} trace(\dot{\varepsilon}^{pl})\mathbf{I} \tag{1.17}$$

avec $\dot{\mathbf{e}}^{pl}$, partie déviatorique, et $trace(\dot{\varepsilon}^{pl})\mathbf{I}$, partie sphérique de $\dot{\varepsilon}^{pl}$ on obtient pour la loi de comportement

$$\dot{\mathbf{e}}^{pl} = \frac{3C\rho_r \dot{\bar{\varepsilon}}}{2\bar{\sigma}}\mathbf{s} \qquad \text{et} \qquad trace(\dot{\varepsilon}^{pl}) = \frac{9F\rho_r \dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}} p \tag{1.18}$$

En utilisant cette notation on peut visualiser facilement la loi de normalité dans le plan (p,q). Dans cette représentation la normale au critère de plasticité $\Phi(\hat{\sigma}, R) = 0$ est colinéaire au vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}\right)$. La composante horizontale $\frac{\partial f}{\partial p}$ représente la compressibilité du milieu : une composante positive représente une densification tandis qu'une composante négative représente une dilatance. Pour le critère de Green, dit centré, nous avons une densification pour p>0 et une dilatance pour p<0.

En inversant les deux termes de l'équation (1.18) pour écrire σ et la puissance de déformation écrite dans l'équation (1.16) on obtient la vitesse de déformation plastique équivalente $\dot{\bar{\varepsilon}}$ par

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{\rho_r} \sqrt{\frac{2}{3C} \dot{\mathbf{e}}^{pl} : \dot{\mathbf{e}}^{pl} + \frac{1}{9F} trace(\dot{\varepsilon}^{pl})^2} \tag{1.19}$$

Cette vitesse de déformation équivalente dépend non seulement du déviateur des taux de déformation mais également de la trace du taux de déformation. Pratiquement, la déformation plastique subie par le milieu tient compte à la fois du cisaillement mais également des effets hydrostatiques. Comme en plasticité classique on définit la déformation plastique cumulée $\overline{\varepsilon}_{pl}$ par

$$\overline{\varepsilon}_{pl}(t) = \int_0^t \dot{\overline{\varepsilon}}(u)du \tag{1.20}$$

Il faut noter cependant que le paramètre qui gouverne le plus directement l'evolution de la surface de plasticité est la porosité. En effet les coefficients C et F dépendent explicitement de la porosité. Par exemple une augmentation de la densité relative ρ_r peut se traduire par un gonflement homothétique de la surface de plasticité. L'évolution de la densité relative au cours du temps est donnée par la relation exprimant la conservation de la masse :

$$\frac{d\rho_r}{dt} + \rho_r trace(\dot{\varepsilon}) = 0 \tag{1.21}$$

L'intégration de cette dernière équation permet de connaître l'évolution de la densité relative en fonction de la déformation et de la densité relative initiale.

1.2 Autres modèles pour mousse d'aluminium

Il existe d'autres modèles pour matériaux compressibles. Afin de valider notre choix du critère de Green pour la simulation du comportement des mousses d'aluminium, nous en avons retenus quatre autres susceptibles de convenir. Les modèles présentés ont l'avantage d'être disponibles dans des codes industriels par éléments finis. Le modèle CRUSHABLE FOAM est disponible dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS. Les trois autres sont disponibles dans le code par éléments finis LS-DYNA et certains également dans le code par éléments finis RADIOSS utilisé par Renault. Nous utiliserons donc les dénominations associées à ces codes pour les repérer.

1.2.1 Modèles 26 et 126 issus de LS-DYNA

Les modèles 26[10] et 126 de LS-DYNA sont très proches. Ces modèles calculent les contraintes dans le repère local matériau. Le comportement avant compaction est orthotrope avec découplage des composantes du tenseur des contraintes c'est à dire qu'une composante de déformation dans une direction du repère local va générer de la raideur dans cette direction seulement. Ces deux lois nécessitent en entrée d'une part les courbes de compression dans les trois directions et d'autre part les trois courbes de cisaillement dans les trois directions associées. Le critère de plasticité n'est alors qu'un ensemble de six critères de plasticité uniaxiaux reliant chaque composante du tenseur des contraintes σ_{ij} à sa contrainte de plasticité définie dans chaque courbe. Il conviendrait de vérifier alors l'objectivité du modèle programmé, c'est-à-dire l'invariance de la loi de comportement par changement de repère, qui n'est pas garantie lorsqu'on ne travaille pas avec des invariants σ. Le volume relatif V est défini comme étant le volume courant sur le volume initial, au début du calcul $V = 1$. Le module d'Young courant est calculé comme suit

$$E_{ii} = E_{ii}^{non\ comp} + \beta(E - E_{ii}^{non\ comp}) \tag{1.22}$$

avec E le module d'Young du matériau entièrement compacté, $E_{ii}^{noncomp}$ le module d'Young du matériau mousse non compacté et

[10] Ce modèle correspond à la loi 28 dans RADIOSS !

$$\beta = max\left[min\left(\frac{1-V_{min}}{1-V_{final}},1\right),\quad 0\right] \tag{1.23}$$

avec V_{final} le volume relatif lorsque la mousse est entièrement compactée et V_{min} la valeur minimale du volume atteint pendant le calcul.

Avant de calculer un incrément pour les grandeurs mécaniques, le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sont transportés dans le repère local. La contrainte de test est mise à jour en utilisant le module élastique interpôlé

$$\sigma_{ij}^{t+1^*} = \sigma_{ij}^{t} + E_{ij}\Delta\varepsilon_{ij} \tag{1.24}$$

Ensuite, chaque composante du tenseur des contraintes est testée pour vérifier qu'elle n'excède pas les valeurs déterminées à partir des courbes renseignées.

$$\text{Si}\quad |\sigma_{ij}^{t+1^*}| > \lambda\sigma_{ij}(V_{min})\quad \text{alors}\quad \sigma_{ij}^{t+1} = \sigma_{ij}(V_{min})\frac{\lambda\sigma_{ij}^{t+1^*}}{|\sigma_{ij}^{t+1^*}|} \tag{1.25}$$

Le paramètre λ étant soit égal à 1 ou prenant une valeur tenant compte de la sensibilité à la vitesse du matériau considéré. Les différences entre la loi 26 et 126 portent sur la gestion de l'écrouissage. Dans la loi 26, l'écrouissage dépend de la déformation volumique seulement alors que, pour la loi 126 l'écrouissage dépend de la déformation associée à chaque direction. Le modèle 26 a été employé avec succés par [Hanssen et al.98] pour simuler la compression axiale d'un bloc de mousse. Toutefois ces lois semblent peu adaptées à la simulation de sollicitations fortement multi-axiales. En effet, la résistance suivant une direction de sollicitation d'une mousse modélisée par ce type de loi[11] est donc totalement indépendante des autres directions de sollicitations.

1.2.2 Loi n° 63 de LS-DYNA

Contrairement aux loi 26 et 126 qui calculent les contraintes dans un repère pré-défini, la loi 63 de LS-DYNA transporte le tenseur des contraintes dans le repère des contraintes principales où le critère de plasticité est évalué. Le module d'Young E est supposé constant et la contrainte est calculée élastiquement

$$\sigma_{ij}^{*} = \sigma_{ij}^{t} + E\dot{\varepsilon}_{ij}^{t+\frac{1}{2}}\Delta t^{t+\frac{1}{2}} \tag{1.26}$$

Les valeurs propres du tenseur des contraintes sont calculées. Si la valeur propre est en compression, elle est comparée à une limite d'écoulement définie par l'utilisateur et dépendant de la déformation volumique. Si la valeur propre est en traction, elle est comparée à une valeur fixe renseignée par l'utilisateur. Ensuite chaque valeur propre est mise à jour et le tenseur des contraintes est recalculé dans le repère local.

1.2.3 Modèle CRUSHABLE FOAM d'ABAQUS

Ce modèle de comportement utilise un critère de plasticité avec une dépendance elliptique entre la contrainte déviatorique et la pression hydrostatique. La forme de ce critère dépend, dans le plan déviatorique, du troisième invariant r du déviateur des contraintes s défini par

$$r = \left(\frac{9}{2}(s.s) : s\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1.27}$$

[11] non basée sur la notion de contrainte équivalente

La façon dont évolue la surface de plasticité est contrôlée par la déformation volumique plastique : contractante, elle induit de l'écrouissage, dilatante, elle induit de l'adoucissement. Le critère de plasticité est ainsi défini par

$$\Phi = \sqrt{\left(\frac{p_t - p_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{M}\right)^2} - \frac{p_t - p_c}{2} \tag{1.28}$$

Avec p_t la résistance de la mousse en traction hydrostatique, p_c la résistance de la mousse en compression hydrostatique, M le rapport entre le grand et le petit axe de l'ellipse dans le plan (p,t) (voir figure 1.4) et t un nouvel état de contrainte définie par

$$t = \frac{1}{2} \quad q\left[1 + \frac{1}{K} - \left(1 - \frac{1}{K}\right)\left(\frac{r}{q}\right)^3\right] \tag{1.29}$$

On peut donc représenter la surface de charge dans le plan pression/déviateur par

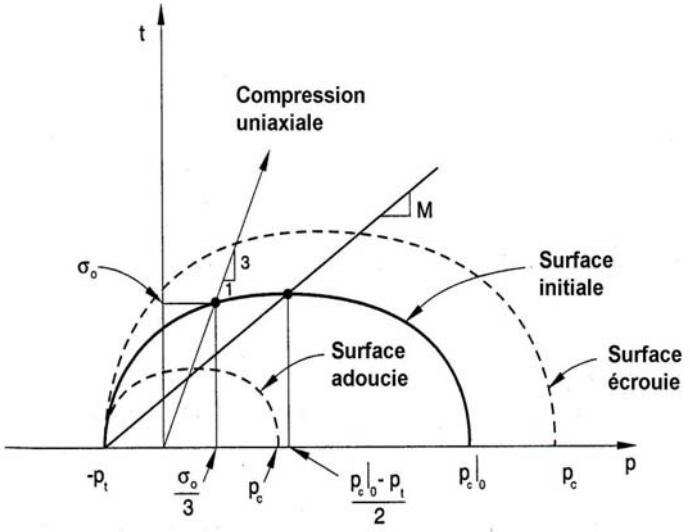


FIG. 1.4 – Evolution de la surface de plasticité du modèle CRUSHABLE FOAM d'ABAQUS dans le plan p,q

On remarque que le choix de $K = 1$ annule la dépendance de la surface de plasticité au troisième invariant du deviateur des contraintes. Pour des raisons de convexité on peut choisir $0,778 < K < 1$. La représentation du critère dans le plan déviatorique est donnée en figure (1.5).

1.3 Comparaison et choix du modèle

Le choix d'un modèle de comportement est un compromis. Il doit être suffisament simple pour être facile à mettre en œuvre mais suffisament fin pour être prédictif sur les paramètres clefs du dimensionnement. Les modèles 26, 63 et 126 sont très différents du modèle de Green et du modèle CRUSHABLE FOAM d'ABAQUS. Associés à un repère matériau pré-défini pour les modèles 26 et 63 ou principal pour le modèle 126, ils ne sont pas basés sur la notion d'invariant des contraintes. Ils donnent donc des résultats peu pertinents lors de la simulation de sollicitations fortement multi-axiales. Pour cette raison et malgrè leur simplicité tentante ils ont été écartés dès le début de ce travail. Beaucoup plus complexe, le modèle CRUSHABLE FOAM d'ABAQUS permet de prendre en compte les chargements multi-axiaux

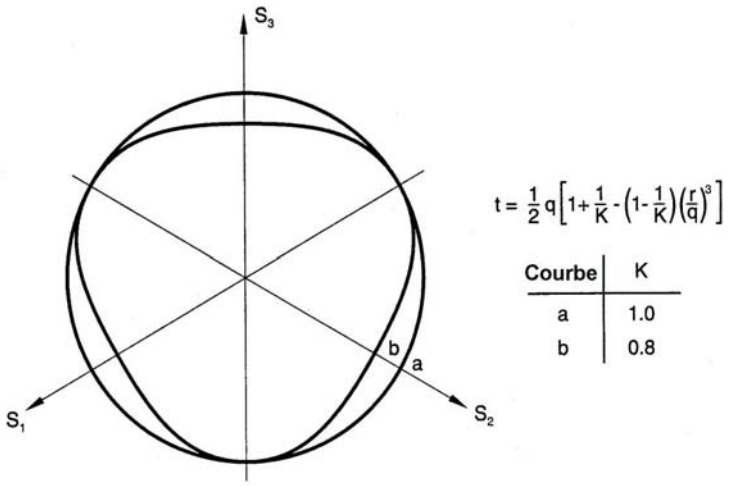


FIG. 1.5 – Evolution de la surface de plasticité du modèle CRUSHABLE FOAM d'ABAQUS en fonction de K dans le plan déviatorique

ainsi que des seuils différents en traction et en compression hydrostatique. Toutefois, il est difficile de solliciter une mousse d'aluminium en compression hydrostatique pure et sans doute impossible en traction hydrostatique pure. Cette différence de seuil entre traction et compression n'a pas été constatée sur les essais de compression et traction simples réalisés (voir partie 3) et la dépendance vis à vis du troisième invariant du déviateur des contraintes, difficile à identifier, a été jugée inutile. Le modèle de Green nous est apparu comme un bon compromis entre simplicité théorique, numérique et possibilités d'ajustage afin d'obtenir la finesse de description du comportement désirée par l'utilisateur. De plus, les essais réalisés précédemment montrent que l'identification avec un bon niveau de corrélation est réalisable. Le chapitre suivant va maintenant se consacrer à l'utilisation de ce modèle dans un code de calcul utilisant la méthode des éléments finis afin de simuler le comportement mécanique des mousses d'aluminium.

Référence du modèle	Surface de plasticité
LS-DYNA n°26	$\Phi(\hat{\sigma}, R) = \lvert\sigma_{ij}\rvert - R_{ij} = 0$
LS-DYNA n°126	$\Phi(\hat{\sigma}, R) = \lvert\sigma_{ij}\rvert - R_{ij} = 0$
LS-DYNA n°63	$\Phi(\hat{\sigma}, R) = \lvert\sigma_i\rvert - R = 0$
ABAQUS	$\Phi = \sqrt{\left(\frac{p_t - p_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{M}\right)^2} - \frac{p_t - p_c}{2}$

TAB. 1.1 – Synthèse des différents modèles pour mousses

Chapitre 2

Simulation du comportement de la mousse d'aluminium : approche globale

2.1 Identification sur l'essai de compression

Pour identifier le modèle de Green il suffit de fixer σ_0 puis de calculer les deux paramètres C et F à partir d'une base expérimentale. En théorie le modèle comportant deux paramètres il faut donc deux équations pour les déterminer complètement. L'essai de compresssion étant l'essai le plus simple à réaliser sur une mousse d'aluminium, il est généralement utilisé pour identifier les modèles de comportement. Dans le cas de la compression, la vérification du critère de Green conduit à une contrainte courante σ égale à

$$\sigma = \frac{R}{\sqrt{C+F}} \tag{2.1}$$

avec $R = R_0$ ($\sigma = \sigma_0$) dans le cas du premier seuil de plasticité. La première équation est déterminée. Or, pour chaque type de sollicitation, il est possible de définir un coefficient d'expansion latéral par

$$\nu_p = -\frac{\dot{\varepsilon}^p_{11}}{\dot{\varepsilon}^p_{22}} \tag{2.2}$$

dans le cas d'une compression suivant la direction 1 par exemple. Ce qui donne dans le cas de la loi d'écoulement associée au critère de Green

$$\nu_p = \frac{C/2 - F}{C+F} \tag{2.3}$$

L'observation d'un essai de compression sur une mousse d'aluminium montre que le coefficient d'expansion latéral plastique ν_p est proche de zéro. Si l'on considère que ν_p est égal à zéro, les paramètres C et F sont donc reliés par la condition

$$F = \frac{C}{2} \tag{2.4}$$

L'identification complète du modèle de Green se fait alors simplement à partir d'un seul essai de compression. Traditionnellement, R décrit l'écrouissage du matériau de base de la mousse. Dans ce travail nous avons choisi $R_0 = 200$ MPa ce qui correspond à la limite d'écoulement d'un alliage d'aluminium contenant 15 % de SiC (cf. [GP97]). Les paramètres C et F sont alors calculés à partir des équations (2.4) et (2.1). Ensuite, il suffit d'ajuster l'écrouissage afin de reproduire le léger durcissement constaté sur la courbe effort / déplacement. Le modèle permet cet ajustement suivant deux stratégies :

1. l'intervention sur un terme d'écrouissage indépendant du critère, $\overline{\varepsilon}_{pl}$ étant la déformation plastique cumulée.

$$R = R_0 + H(\overline{\varepsilon}_{pl}) \tag{2.5}$$

2. la dépendance des paramètres C et F en fonction de la porosité locale f

Dans ce dernier cas, par rapport à un calcul éléments finis simulant le comportement mécanique d'un matériau plastiquement incompressible, le maillage doit contenir l'information de la porosité. Chaque élément du maillage est donc initialisé sur la porosité initiale moyenne de la mousse à simuler. Par exemple si une mousse d'aluminium a une densité moyenne de 0.25 g/cm^3 elle a donc une porosité initiale moyenne de 90.7 %. Cette porosité initiale sera attribuée à chaque point d'intégration du maillage. Lors de la simulation, la mousse va se déformer, sa densité relative et donc sa porosité vont évoluer. Dans le cas d'un essai de compression la mousse va se compacter : sa densité relative ρ_r va augmenter tandis que sa porosité f va diminuer. A partir de l'équation (1.21) l'évolution de densité relative - et donc de la porosité - est donnée par

$$\rho_r(t+\delta t) = \rho_r(t) e^{-tr(\dot{\varepsilon})\delta t} \tag{2.6}$$

en fonction du temps t et de la vitesse de déformation. A chaque instant il est donc possible de calculer l'évolution de la densité relative locale en chaque point de Gauss d'un élément. En intégrant l'équation précédente, la porosité f à chaque instant du calcul s'exprime en fonction de la porosité initiale f_0 et de la déformation plastique par

$$f = 1 - (1 - f_0)\exp(-tr(\varepsilon_{pl})) \tag{2.7}$$

Par exemple, une mousse d'une porosité initiale de 95 % atteindra une porosité de 93.2 % à la suite d'une déformation de 30 % en compression et en supposant que ν_p est nul.

Lorsque C et F dépendent de la porosité f, l'ellipse du critère de Green va évoluer à chaque instant du calcul. Ainsi, lors de la simulation d'un essai de compression sur une mousse de porosité initiale de 95 % (cf. figure 2.1), la surface de charge initiale sera déterminée (cf. figure 2.3) pour $f = f_0 = 0.95$. Lors de la compression la porosité va diminuer, la loi d'évolution de C en fonction de f étant croissante (cf. figure 2.2) le paramètre C va diminuer également, ce qui conduit à une augmentation de la contrainte de rupture moyenne (cf. equation 2.1 et figure 2.3). Cela est équivalent à l'utilisation d'un écrouissage isotrope.

En ajustant correctement les deux paramètres C et F, une bonne corrélation (voir figure 2.2) entre la simulation et les essais (voir figure 2.4) est obtenue. Il faut remarquer que les oscillations sur le plateau de contrainte, constatées expérimentalement sur la courbe de compression et souvent associées à la rupture fragile locale des cellules, ne sont pas reproduites ici par la simulation.

A partir de cette identification, on peut fournir une base de données définissant les paramètres du modèle en fonction de la densité relative initiale de la mousse.

2.2 Validation de l'approche globale

Un modèle de comportement doit être capable de simuler le comportement mécanique du matériau dans de nombreuses configurations. Afin de vérifier la validité de cette modélisation, nous pouvons tester le modèle suivant différentes configurations reconnues pour leur comportement singulier dans le cas des mousses d'aluminium. Trois tests ont été choisis dans ce travail pour qualifier le modèle de comportement : le test de la compression d'éprouvettes trapézoïdale, le test de la compression coin et le test de l'impact genou.

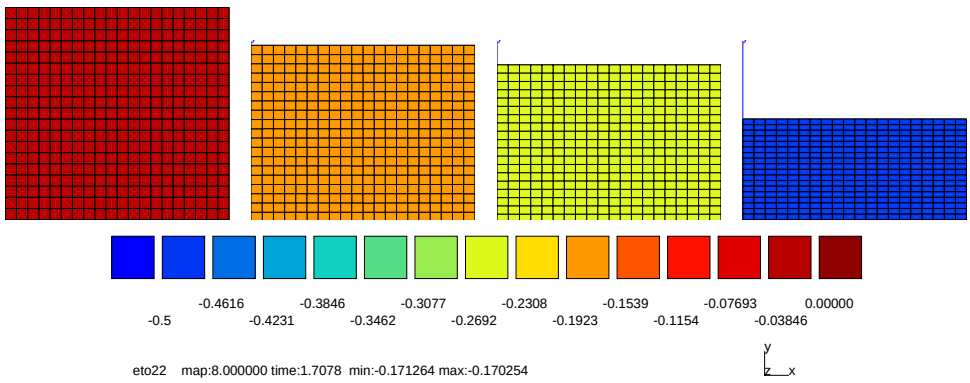


FIG. 2.1 – Evolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression, on remarquera le coefficient d'expansion latérale plastique $\nu_p = 0$

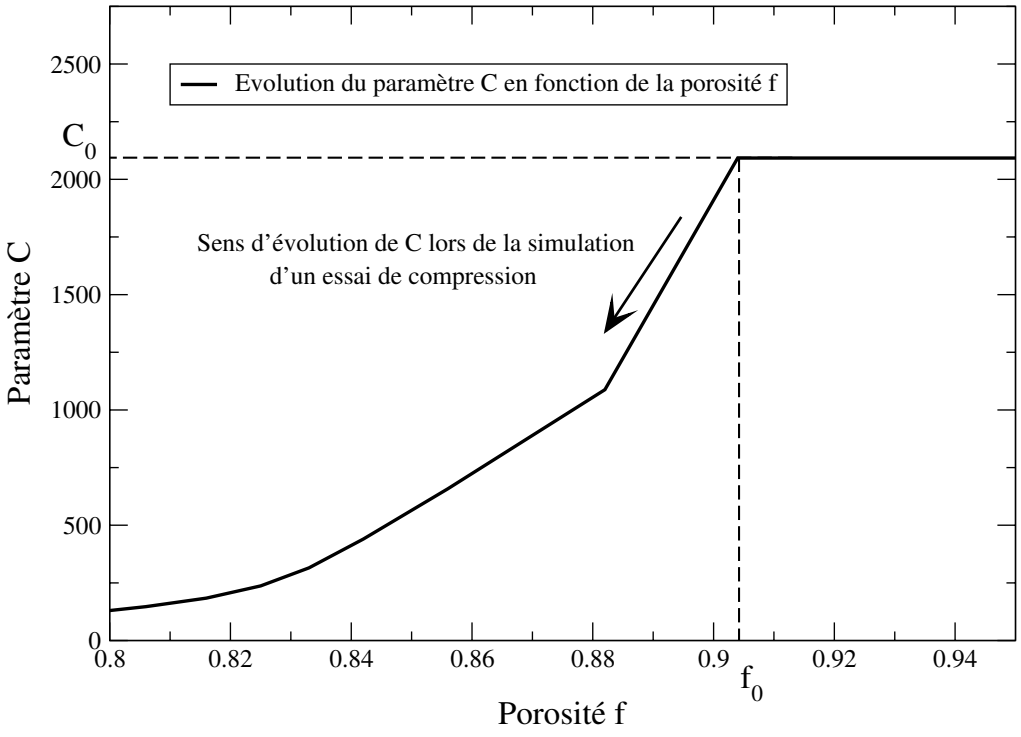


FIG. 2.2 – Evolution de C en fonction de f pour une mousse de porosité initiale 90.4%. L'évolution de C en fonction de f est obtenue par identification sur la courbe de compression entre 0 % et 70 % de déformation totale

– Le test de la compression d'éprouvettes trapézoïdale, décrit par [Wierzbicki et al.01], consiste à comprimer un bloc de mousse de section trapézoïdale. La déformation est progressive et localisée

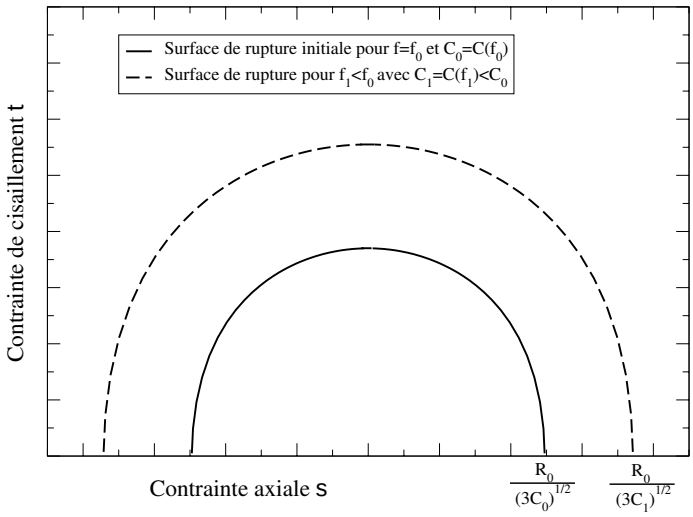


FIG. 2.3 – Evolution de la surface de la surface de rupture pour C croissant avec le porosité

sous le tas plat supérieur. Lors de la simulation de ce test par le modèle de Green calé sur l'essai de compression entre deux tas plats la déformée simulée (voir figure 2.5) n'est pas conforme à l'expérience (voir figure 2.8 du chapitre 2 de la partie 3). La déformation simulée ε_{22} est répartie sur toute la hauteur de l'échantillon ce qui n'est pas le cas expérimentalement.

– Le test de la compression coin utilisé par [Hanssen00] pour valider les lois de comportement consiste à écraser un cube de mousse d'aluminium suivant sa diagonale et parallèlement à une arête. Le modèle de Green ne permet pas de décrire finement le comportement mécanique observé pendant l'essai. En effet la déformée simulée (voir figure 2.6) obtenue en fin de compression ne correspond pas à la déformée expérimentale (voir figure 2.10 du chapitre 2 de la partie 3). Dans la simulation, il y a une contraction du cube lorsque le front de déformation plastique atteint le support du cube. On notera dans cette simulation que le coefficient de frottement entre le cube de mousse et l'impacteur ou entre le cube de mousse et le support en vé est égal à zéro.
– Le test de l'impacteur cylindrique a été choisit par RENAULT pour simuler l'impact d'un genou ou d'un crâne sur un bloc de mousse. La simulation de ce test à l'aide du modèle de Green présente également des écarts par rapport à la déformée réelle. La zone plastique est beaucoup plus étendue dans la simulation que dans l'expérience. En particulier les bords du bloc changent de forme (voir figure 2.7) alors qu'ils restent droits dans l'expérience (voir figure 2.13 du chapitre 2 de la partie 3). De plus un écart important est constaté sur la courbe d'effort extérieur subi par l'impacteur entre la simulation et le modèle (voir figure 2.8). Les oscillations rencontrées sur la courbe expérimentale ne sont pas reproduites par la simulation.

L'utilisation en première approche du modèle de Green peut donner une idée du comportement mécanique de la mousse d'aluminium. Toutefois une mise au point par essai sera nécessaire afin d'affiner les dimensionnements réalisés avec ce modèle. En effet le mécanisme principal de la déformation des mousses d'aluminium n'est pas pris en compte dans ce modèle : la localisation de la déformation.

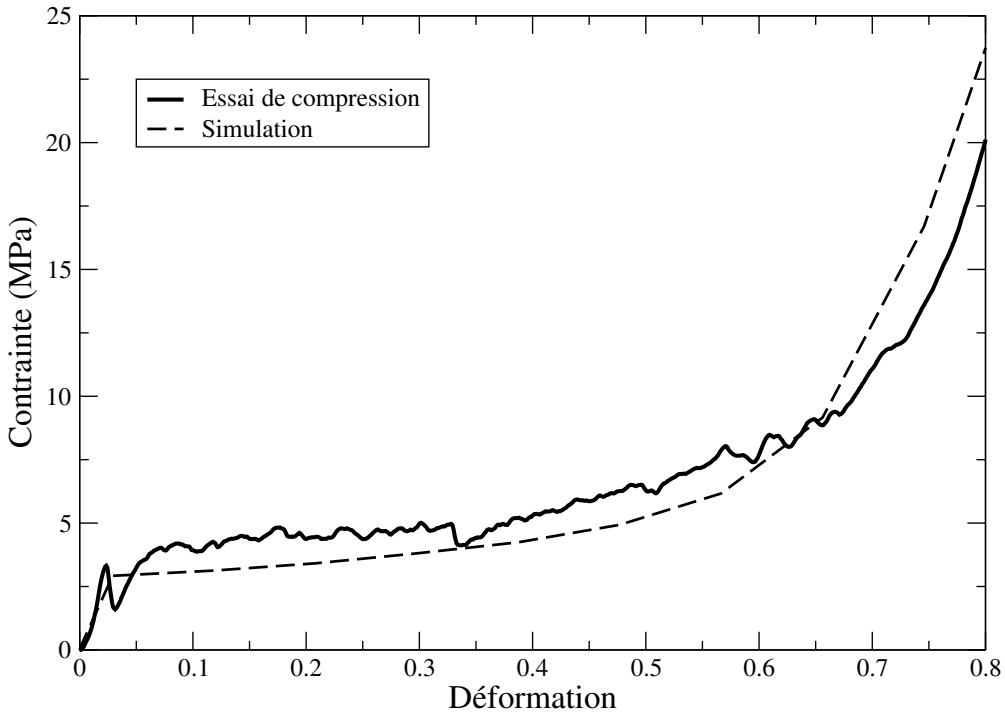


FIG. 2.4 – Comparaison essai de compression/simulation

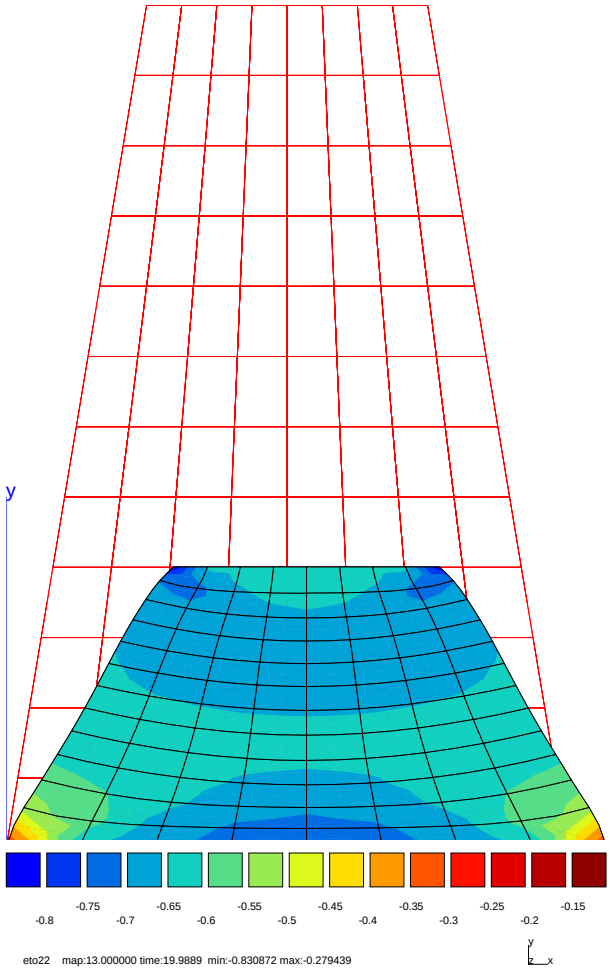


FIG. 2.5 – Evolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression sur la pyramide de [Wierzbicki et al.01]

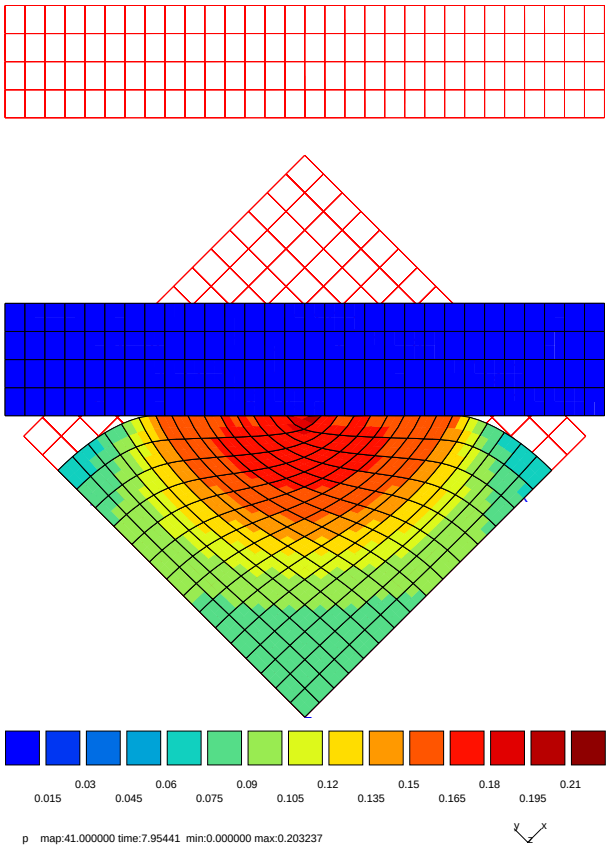


FIG. 2.6 – $\overline{\varepsilon}$ en fin de compaction de l'essai de compression latérale. On remarque le décollement du maillage de l'impacteur qui ne se produit pas lors de l'essai. La zone plastique est plus étendue que dans l'expérience.

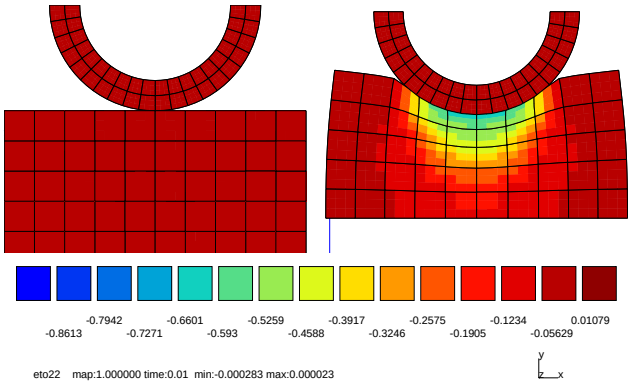


FIG. 2.7 – ε_{22} en fin de compaction de l'essai de compression latérale. La déformation des bords du maillage du bloc de mousse ne se produit pas dans l'expérience. La zone plastique est beaucoup plus étendue que dans l'expérience

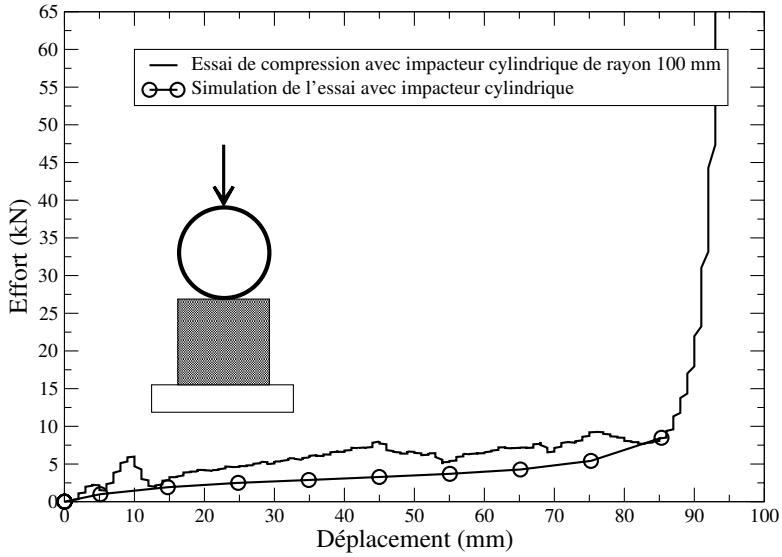


FIG. 2.8 – Comparaison calcul-essai lors de la simulation d'un test de compression à l'aide d'un impacteur cylindrique.

Chapitre 3

Simulation de la localisation de la déformation

3.1 Modélisation de la localisation de la déformation en compression

Il est possible à partir du modèle de Green précédemment utilisé d'introduire dans la simulation la localisation de la déformation constatée expérimentalement en traction et en compression. En compression, la localisation de la déformation est due à un affaissement de cellules ce qui se traduit par un adoucissement local dans le matériau : cet adoucissement doit être pris en compte dans la modélisation. Il est parfaitement visible en zoomant sur la zone du premier pic d'une courbe contrainte / déformation d'un essai de compression (voir figure 3.1), après une contrainte pic maximale σ_0 la contrainte chute pour atteindre une contrainte minimale σ_{min} pour une déformation notée ε_1^{total}. Ensuite les cellules se referment progressivement ce qui provoque une réaugmentation de la contrainte. ε_2^{total} est définit lorsque la contrainte reprend la valeur σ_0 initiale. Nous considérons alors que les cellules affaissées sont complètement refermées. Il se produit alors un durcissement local dans le matériau qui conduit à la propagation de la localisation car d'autres cellules vont alors s'affaisser. Ce durcissement doit également être pris en compte dans la modélisation. Chaque point de Gauss doit donc avoir un comportement intrinsèque comme indiqué en figure (3.2) : une phase élastique, une phase plastique d'adoucissement pour simuler l'effondrement de la cellule jusqu'à une déformation de ε_1 et une phase plastique de durcissement pour simuler la fermeture de la cellule. Lorsque la contrainte reprend la valeur du seuil initial nous définissons une déformation ε_2 qui correspond à la déformation finale dans la bande de localisation avant propagation.

Comme indiqué précédemment, il est possible de faire dépendre la taille de l'ellipse du critère de Green avec la porosité. Or, localement, la porosité n'est autre que le degré de fermeture de la cellule. Au cours d'une compression, la porosité locale ne fait que diminuer[12] la stratégie consiste donc à contracter l'ellipse du critère de Green au début du calcul, ce qui correspond à la phase plastique d'adoucissement, puis à la dilater, ce qui correspond à la phase plastique d'écrouissage. Nous avons montré que l'évolution de C et F permet de jouer sur la taille de l'ellipse du critère. Pour obtenir le comportement intrinsèque du point de Gauss décrit en figure (3.2) permettant l'apparition et la propagation de la localisation, la loi d'évolution de C en fonction de la porosité f doit être similaire à celle présentée en figure (3.3). Tour à tour décroissante pour simuler l'adoucissement et croissante pour simuler l'écrouissage, elle prend alors la forme d'un crochet.

La simulation d'un essai de compression avec prise en compte de la localisation est alors possible. La valeur initiale de la porosité f_0 attribuée aux points d'intégrations du maillage est la porosité moyenne

[12] On se rapproche du matériau dense

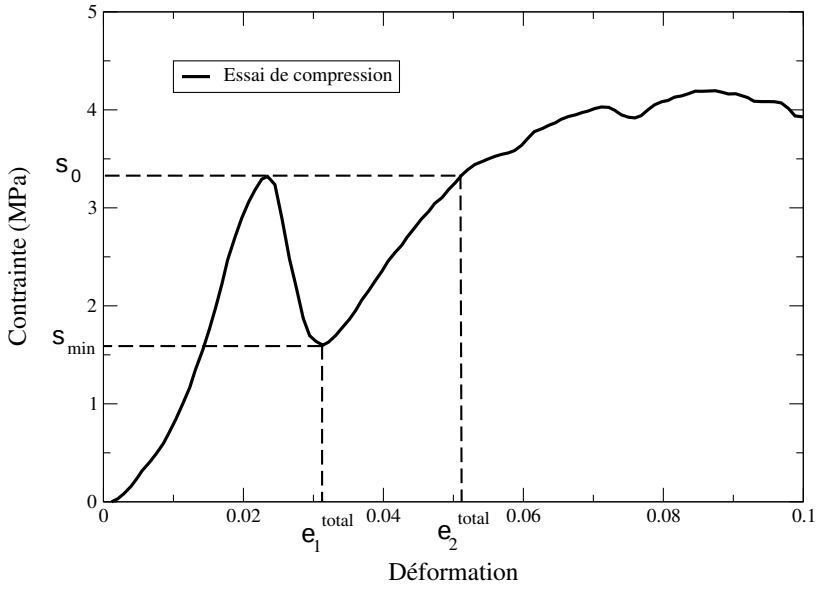


FIG. 3.1 – Zoom sur le pic lors d'un essai de compression. Définition de ε_1, ε_2 et σ_{min}

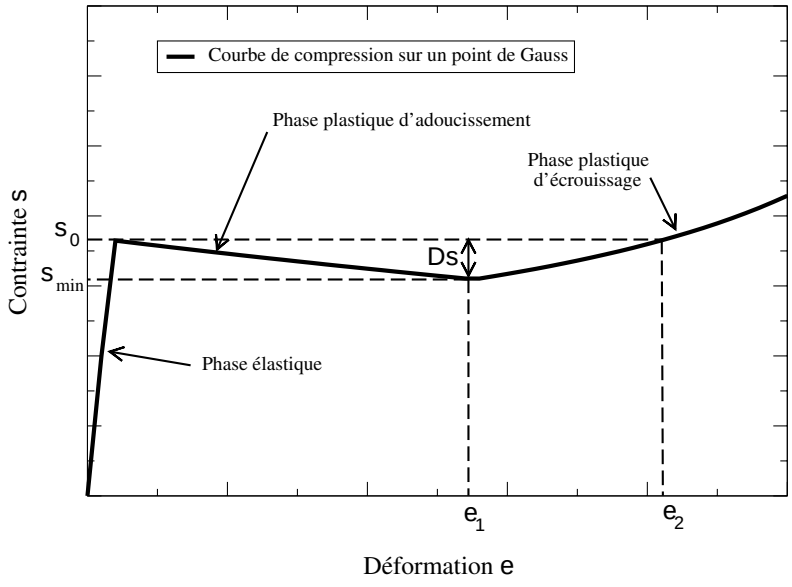


FIG. 3.2 – Courbe de compression d'un point de Gauss pour tenir compte de la localisation de la déformation dans la simulation

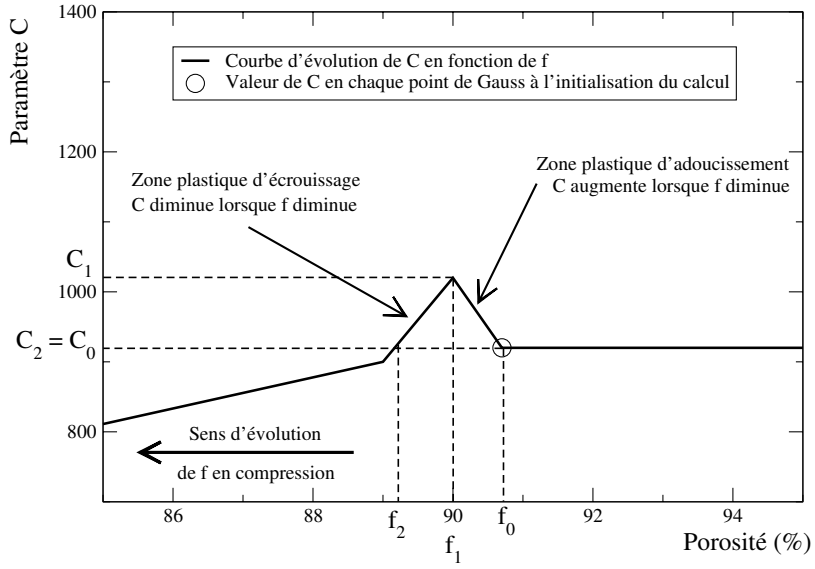


FIG. 3.3 – Courbe d'évolution en forme de crochet de C en fonction de f afin d'obtenir un comportement adoucissant puis durcissant au cours d'une compression d'un point de Gauss

initiale de la mousse à simuler. Afin de visualiser la formation de bandes de localisation de la déformation, deux défauts sont insérés dans le maillage pour déclencher la localisation au milieu du bloc de mousse (voir figure 3.4). L'absence de ces défauts conduit généralement à l'initialisation de la bande de localisation au niveau de la zone d'application des conditions aux limites. Lors de la phase élastique la déformation est homogène. Dès que la contrainte dépasse σ_0, la localisation de la déformation apparait dans un élément. La contrainte diminue alors localement jusqu'à la valeur σ_{min} qui correspond à une déformation de ε_1 dans l'élément puis réaugmente jusqu'à atteindre et dépasser légèrement la valeur σ_0. La valeur de la déformation dans cet élément est légèrement supérieure à ε_2. L'élément voisin localise alors à son tour la déformation et suit exactement le même cycle. La déformation se propage perpendiculairement à la direction de la sollicitation jusqu'à former une bande (voir figure 3.5). Lorsque la bande est complétement localisée, la contrainte dans cette bande repasse alors au dessus de σ_0 et il y a initialisation d'une nouvelle bande de localisation, généralement voisine de la première.

Du point de vue des efforts extérieurs, les oscillations constatées expérimentalement sur la courbe contrainte - déformation sont bien reproduites (voir figure 3.6). Elles sont toutefois moins marquées que dans l'expérience. En effet la taille des oscillations dépend directement de la valeur de l'adoucissement $\Delta\sigma$ introduit dans la simulation donc de la différence entre σ_0 et σ_{min}. Le degré de nonlinéarité de la simulation dépend malheureusement également de la valeur de l'adoucissement. Nous n'avons pas aujourd'hui reussi à reproduire des oscillations aussi fortes que dans l'expérience. Remarquons cependant, qu'en prenant en compte la localisation de la déformation, il n'est alors plus possible de simuler l'écrouissage du plateau de contrainte. En effet la contrainte de compression globale est donnée ici par celle de l'élément le plus faible. Or, au cours du calcul, la déformation et donc la porosité ne sont plus homogènes sur l'ensemble du maillage. Ainsi, avant d'obtenir un écrouissage sur le plateau de contrainte, il faut que tous les éléments aient été déformés jusqu'à ε_2. Le maillage se trouve alors dans la situation de

l'image (i) de la figure (3.5). Nous nous retrouvons alors dans la même configuration que la simulation de la compression sans prise en compte de la localisation avec une loi d'évolution de C en fonction f strictement croissante et une déformation homogène du maillage.

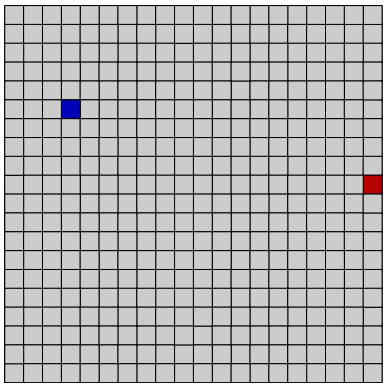


FIG. 3.4 – Maillage initial et position des deux défauts afin de précipiter la localisation de la déformation

3.2 Modélisation de la localisation de la déformation en traction

Au contraire de la compression, une sollicitation en traction conduit à une augmentation de la porosité. En suivant la même démarche, l'augmentation de C en fonction de f (voir figure 3.7) provoque une contraction de l'ellipse du critère donc un adoucissement. En toute rigueur, pour une porosité de 100 %, le matériau devrait avoir une résistance quasi nulle donc le paramètre C du modèle devrait tendre vers l'infini. Pour des questions de non linéarité du calcul, il n'est malheureusement pas possible de faire tendre C vers l'infini pour les très fortes porosités. Lors de la simulation sur un maillage comportant un défaut cette modélisation permet de simuler la croissance d'une fissure qui conduit à la rupture totale de la mousse (voir figure 3.8). Le léger plateau constaté sur la courbe contrainte déformation en traction (voir figure 3.9) est nécessaire afin de préserver la stabilité du calcul.

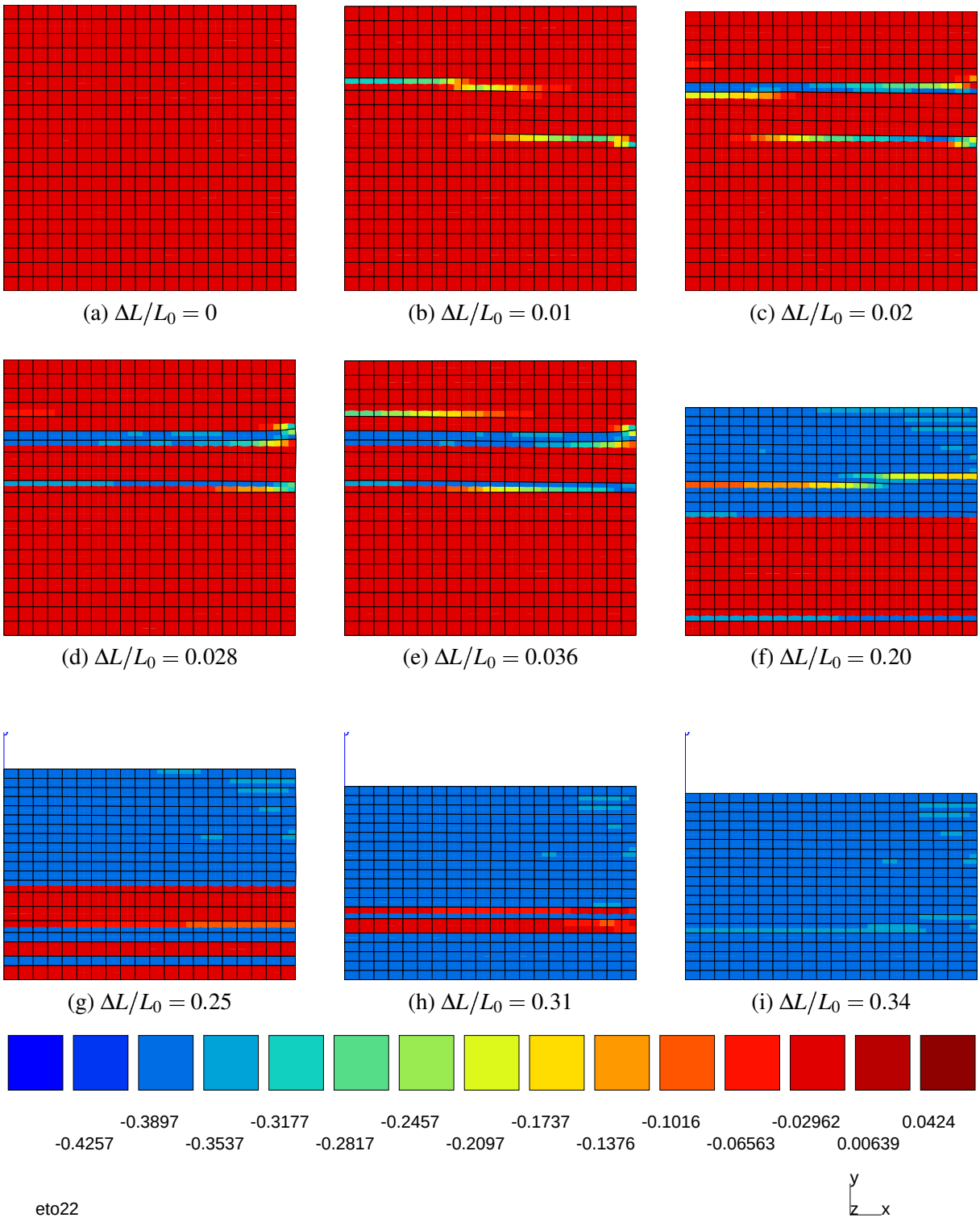
3.3 Modes de localisation et bifurcation en élastoplasticité compressible

Lorsqu'on introduit un comportement présentant un adoucissement, il faut se poser le problème de perte éventuelle d'unicité des solutions, voire de perte d'ellipticité du système d'équations aux dérivées partielles considérées [Besson et al.01]. Dans ce dernier cas, des surfaces de discontinuité des déformations peuvent apparaître de part et d'autre de bandes de localisation de la déformation. Les conditions de compatibilité impliquent que la discontinuité doit prendre la forme suivante (dite condition de Hadamard) :

$$\exists g / \; [\![\dot{u} \otimes \nabla]\!] \; = \; g \otimes n \tag{3.1}$$

où n est la normale à la surface de discontinuité (voir figure 3.10). L'orientation de la bande de localisation est donc décrite par n. Lorsque le vecteur g est normal à n, on parle de bande de cisaillement (i.e. $g = m$ sur la figure 3.10). Le signe $[\![x]\!]$ désigne la différence $x^+ - x^-$ de part et d'autre de la surface de discontinuité.

Lorsque g et n sont colinéaires, il s'agit d'un mode d'ouverture. Il est possible par une analyse de bifurcation de déterminer pour un modèle de plasticité donnée l'orientation de la première bande de



(a) $\Delta L/L_0 = 0$ (b) $\Delta L/L_0 = 0.01$ (c) $\Delta L/L_0 = 0.02$

(d) $\Delta L/L_0 = 0.028$ (e) $\Delta L/L_0 = 0.036$ (f) $\Delta L/L_0 = 0.20$

(g) $\Delta L/L_0 = 0.25$ (h) $\Delta L/L_0 = 0.31$ (i) $\Delta L/L_0 = 0.34$

FIG. 3.5 – Evolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression, on remarquera le coefficient d'expansion latérale plastique $\nu_p = 0$, la propagation de la localisation de la déformation s'effectue sous forme de bandes horizontales successives jusqu'à remplissage complet de l'éprouvette.

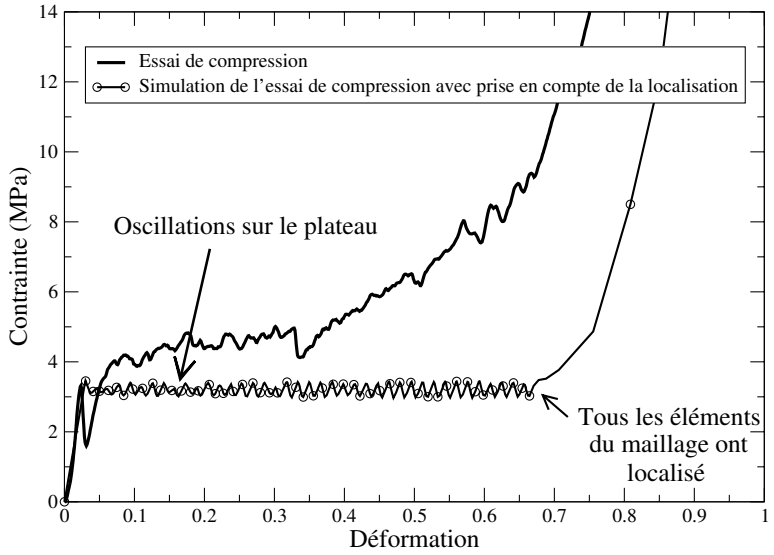


FIG. 3.6 – Comparaison calcul-essai sur un essai de compression avec prise en compte de la localisation de la déformation

localisation possible ainsi que le module d'écrouissage correspondant à l'apparition de la première bande possible. On trouvera dans [Bigoni et al.91a, Besson et al.01] la description d'une telle analyse. On se contente ici d'énoncer les résultats dans le cas de la plasticité associée.

Dans le cas bidimensionnel en contraintes planes, l'orientation n de la première bande de localisation possible, l'intensité de discontinuité g, le module critique d'apparition H^{cr} et la valeur des sauts de déformation sont donnés par :

$$n_1^2 = \frac{P_1}{P_1 - P_2} \tag{3.2}$$

$$g_1 = (P_1 - P_2)n_1 \tag{3.3}$$

$$g_2 = -(P_1 - P_2)n_2 \tag{3.4}$$

$$H^{cr} = 0 \tag{3.5}$$

$$[\![\dot{\varepsilon}_1]\!] = P_1 \tag{3.6}$$

$$[\![\dot{\varepsilon}_2]\!] = P_2 \tag{3.7}$$

Les composantes P_i désignent les valeurs propres du tenseur indiquant la direction d'écoulement, normale à la surface de charge Φ :

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \tag{3.8}$$

Les composantes des vecteurs et tenseurs sont données dans le repère principal de P. Dans le cas tridimensionnel, les résultats sont un peu différents. On s'intéresse à un vecteur n contenu dans le plan (i, j), i.e. tel que $n_k = 0$. On trouve, dans le cas de l'élasticité isotrope :

$$n_i^2 = \frac{P_i + \nu P_k}{P_i - P_j} \tag{3.9}$$

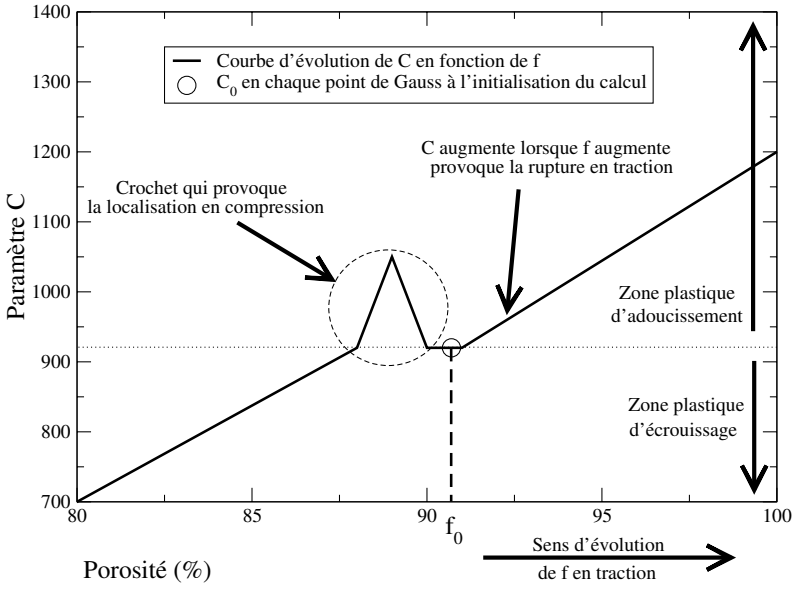


FIG. 3.7 – Evolution de C en fonction de f comprenant le crochet qui provoque la propagation de la localisation de la déformation en compression et la croissance de C en fonction f qui provoque la rupture en traction

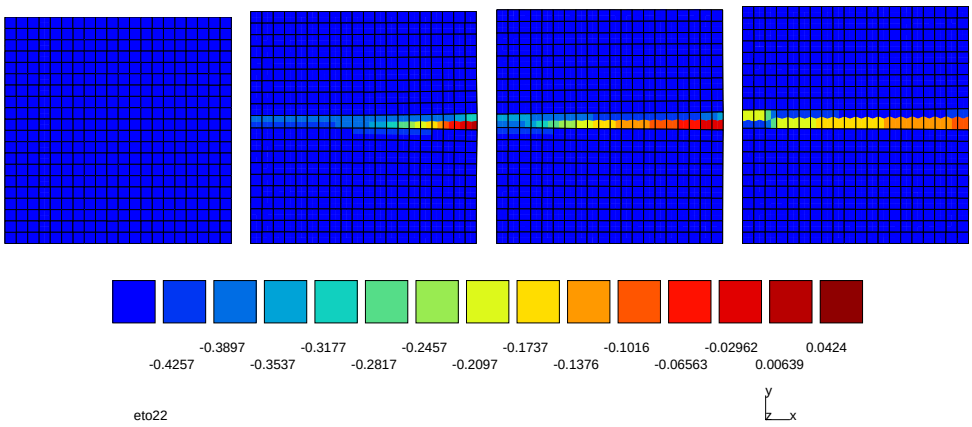


FIG. 3.8 – Evolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de traction, on remarquera le coefficient d'expension latérale plastique $\nu = 0$, la propagation de la localisation de la déformation s'effectue sous la forme d'une bande horizontale

$$g_1 = (P_i - P_j)n_i \tag{3.10}$$
$$g_2 = -(P_i - P_j)n_j \tag{3.11}$$
$$H^{cr} = -2\mu(1+\nu)P_k^2 \tag{3.12}$$
$$[\![\dot{\varepsilon}_1]\!] = P_i + \nu P_k, \tag{3.13}$$
$$[\![\dot{\varepsilon}_2]\!] = P_i + \nu P_k, \tag{3.14}$$

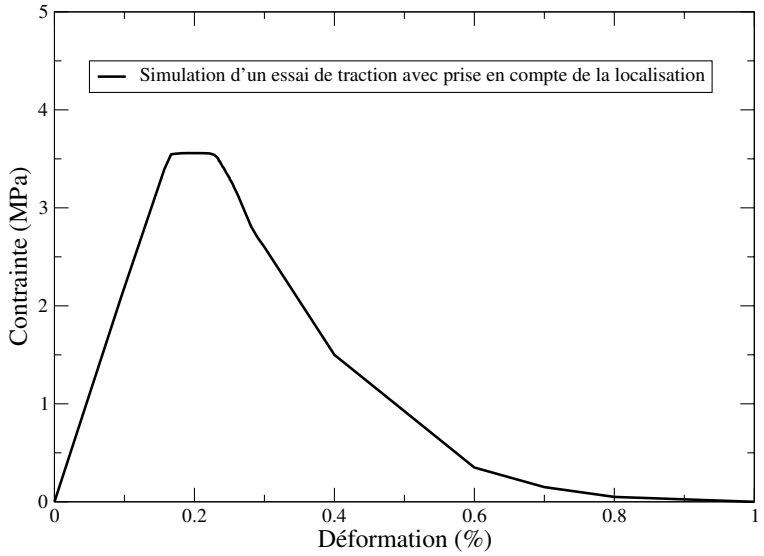


FIG. 3.9 – Courbe contrainte déformation lors de la simulation d'un essai de traction avec prise en compte de la rupture

$$[\![\dot{\varepsilon}_3]\!] = 0 \tag{3.15}$$

Application à la traction/compression

Dans le cas de la traction selon l'axe 2, la direction d'écoulement est donnée par

$$[P] = \frac{\text{signe}\,\sigma_{22}}{\sqrt{C+F}} \begin{bmatrix} F-\frac{C}{2} & 0 & 0 \\ 0 & C+F & 0 \\ 0 & 0 & F-\frac{C}{2} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

L'orientation de la bande pour un cas bidimensionnel est donc donnée par :

$$n_1^2 = \frac{2}{3C}\left(\frac{C}{2}-F\right) \tag{3.17}$$

Le résultat est identique en 3D pour $\nu = 0$.

Si $F = C/2$, on voit que n et g sont selon l'axe 2. Cela correspond à une bande horizontale avec un mode d'ouverture/fermeture. Ce résultat est en accord avec la formation de bandes de localisation horizontales en compression et de rupture en traction. Il explique la formation de ces bandes lors des simulations numériques. On remarquera que pour un matériau incompressible de type von Mises, les bandes sont inclinées à 54° (prendre $F = 0$ dans la formule précédente, [Besson et al.01]). On trouvera en annexe C le développement des cas multi-axiaux.

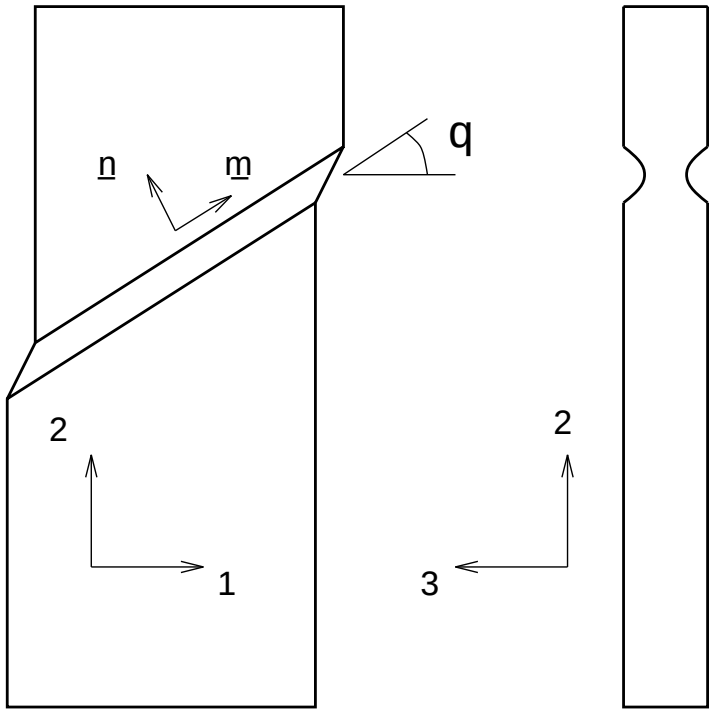


FIG. 3.10 – Schéma de principe d'une bande de localisation dans un matériau élastoplastique dans le plan et dans l'épaisseur.

3.4 Dépendance vis à vis du maillage

La prise en compte la localisation de la déformation dans la simulation nous conduit à poser la question de l'indépendance des résultats vis à vis de la taille de maille. On montre dans l'annexe D que la largeur des bandes de localisation initialement toujours égale à celle d'un point d'intégration. De plus, la chute de charge post–pic est d'autant plus brutale que le maillage est fin. Dans nos simulations, nous avons choisi de fixer la taille d'élément égale à la taille moyenne d'une cellule, pour que tous les calculs soient comparables entre eux et soient cohérents d'un point de vue physique. Il existe toutefois des méthodes plus rigoureuses pour se débarrasser de la dépendance des résultats vis–à–vis de la taille de maille : ce sont les méthodes dites de régularisation. Elles consistent à introduire dans la modélisation une longueur caractéristique physique. Le lecteur trouvera dans l'annexe D l'exemple d'une méthode de régularisation utilisant le milieu micromorphe qui, appliquée à la simulation du critère de Green, permet de s'affranchir de la dépendance vis-à-vis du maillage lors de la simulation de phénomènes de localisation.

3.5 Prise en compte des grandes déformations

Pour limiter la non–linéarité des calculs de structures de ce travail, en particulier les calculs de localisation, on a choisi de travailler dans le formalisme des petites déformations (HPP) alors que les déformations locales atteignent 60% environ. Il est donc nécessaire de préciser les corrections à apporter pour interpréter quantitativement les résultats trouvés. Le choix est aussi motivé par le fait que les configurations étudiées sont majoritairement uniaxiales. Comme les contractions latérales en compression simple ont été négligées dans la plupart des calculs, la surface de l'échantillon sur laquelle s'exercent

les forces n'évolue quasiment pas. C'est pourquoi les contraintes présentées dans les calculs s'identifient aux contraintes de Cauchy qu'on aurait obtenues en grandes déformations. En revanche, le modèle introduit une dépendance des paramètres matériaux en fonction de la porosité. Or l'équation d'évolution de la porosité n'est pas la même en petites ou grandes transformations. Dans le cadre des petites perturbations, on intègre l'équation suivante :

$$\dot{f} = (1-f)\,\mathrm{trace}\,(\dot{\varepsilon}^p) \tag{3.18}$$

Tandis qu'en grandes transformations, la loi d'évolution est :

$$\dot{f} = (1-f)\,\mathrm{trace}\,(\dot{F}^p.F^{p-1}) \tag{3.19}$$

On désigne par F le gradient de la transformation et F^p désigne la part plastique dont la définition sera précisée. Dans le cas uniaxial sans contraction latérale et sous chargement monotone, ces relations s'intègrent respectivement sous la forme :

$$f = 1-(1-f_0)\exp(-\varepsilon_{22}^{pl}), \quad f = 1-\frac{1-f_0}{F_{22}^{pl}} \tag{3.20}$$

Il est donc nécessaire de modifier la dépendance des paramètres C et F en fonction de la porosité pour obtenir une équivalence entre un calcul en petites déformations et un calcul en grandes transformations. Pour illustrer cette équivalence, nous avons formulé le modèle d'élastoplasticité compressible en grandes transformations. Nous avons choisi de recourir au référentiel dit corotationnel pour exprimer les lois de comportement et assurer ainsi l'objectivité du modèle [Besson et al.01].

Le référentiel corotationnel est défini à chaque instant et en chaque point matériel par la rotation Q dont l'évolution est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{Q}^T.Q = \Omega \tag{3.21}$$

où Ω est le taux rotation du milieu, i.e. la partie antisymétrique du gradient des vitesses $\dot{F}.F^{-1}$. Le taux de déformation D et les contraintes de Cauchy T sont transportés dans le référentiel corotationnel :

$$\dot{e} = Q^T.D.Q, \quad S = Q^T.T.Q \tag{3.22}$$

On écrit alors dans le référentiel corotationnel les mêmes lois que dans le cas HPP sous la forme :

$$\dot{e} = \dot{e}^e + \dot{e}^p \tag{3.23}$$

$$S = c : e^e \tag{3.24}$$

$$\dot{e}^p = \dot{p}\frac{\partial \Phi}{\partial S} \tag{3.25}$$

Le critère $\Phi(S,R)$ s'obtient en remplaçant les contraintes par S dans la formulation HPP du modèle. La figure 3.11 montre les courbes de comportement sur un élément de volume pour les modèles en petites et grandes transformations. La dépendance des paramètres C et F en fonction de la porosité a été ajustée de sorte que l'on puisse avoir l'équivalence suivante entre les deux calculs : la contrainte de Cauchy s'identifie aux contraintes évaluées en HPP et la déformation totale ε_{22} s'identifie à $F_{22}-1$.

Des simulations en petites et grandes transformations ont été réalisées dans le cas d'un massif de mousse en compression présentant le comportement avec crochet initial précédent, ce qui conduit à des phénomènes de localisation (affaissement d'une rangée d'éléments suivi de propagation ou initiation à un autre endroit). Les figures 3.12 et 3.13 donnent une comparaison des résultats pour la courbe de charge globale et pour le champ de porosité. On constate que la formation et la propagation des bandes de localisation ne s'effectuent pas de manière identique dans les deux cas. Les courbes de charge et la déformation dans chaque bande sont toutefois très semblables.

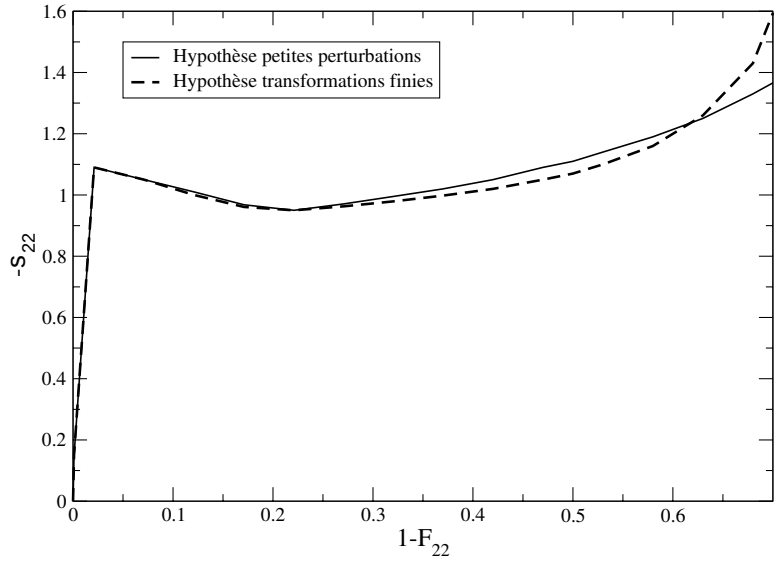


FIG. 3.11 – Courbes de comportement intrinsèque sur élément de volume calculées en petites perturbations (HPP) et en transformations finies (TF) : cas d'un comportement conduisant à de la localisation dans un calcul de structure.

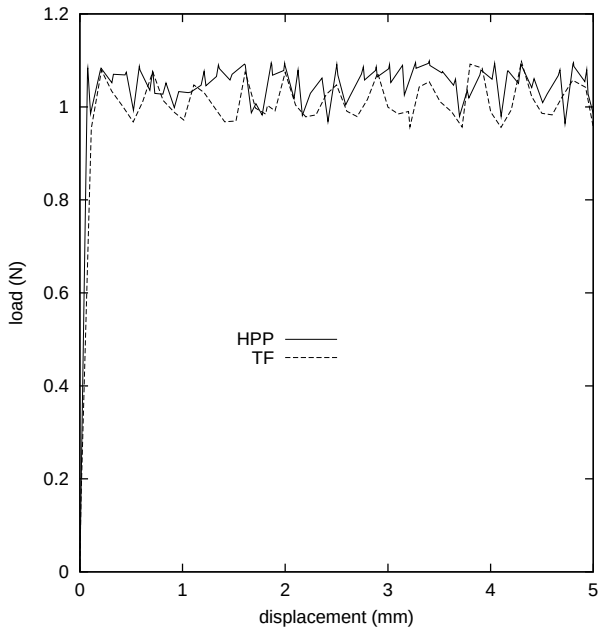


FIG. 3.12 – Courbes de charge de compression sur un bloc de mousse de porosité initiale 0.934 (comportement avec crochet initial (cf. figure 3.11) et deux défauts initiaux), dans le cas HPP et grandes déformations.

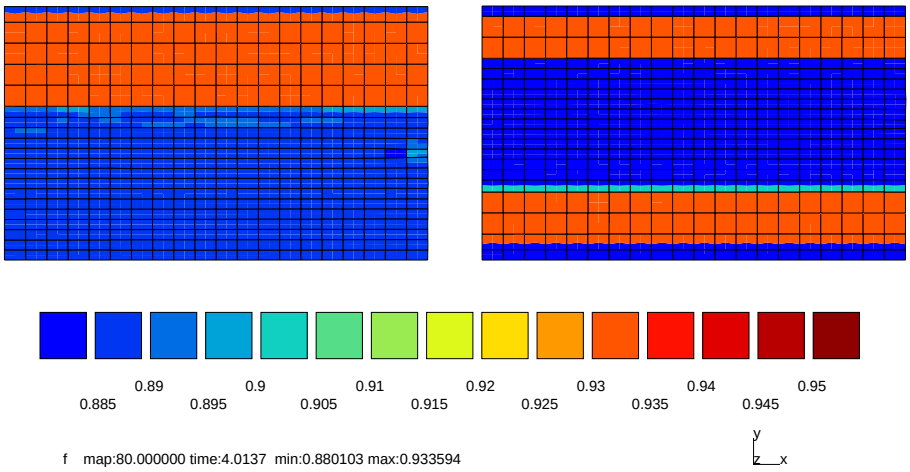


FIG. 3.13 – Champ de porosité f après 40% de compression sur un massif de mousse de porosité initiale 0.934 (comportement avec crochet initial (cf figure 3.11) et deux défauts initiaux) : simulation HPP à gauche et en grandes transformations à droite.

3.6 Validation de l'approche prenant en compte la localisation de la déformation

La simulation d'un essai de compression avec prise en compte de la localisation de la déformation permet de bien retrouver les oscillations constatées sur la courbe expérimentale sans toutefois reproduire l'écrouissage du plateau.

Le modèle permet maintenant de simuler correctement le test de la compression d'éprouvettes trapézoïdales (voir figure 3.14). La déformation est alors localisée juste sous le tas plat supérieur et la déformée finale est conforme à l'expérience. L'étalement du maillage constaté dans le cas de la simulation sans prise en compte de la localisation a disparu.

Le test de la compression coin (voir 3.15) est également mieux simulé. La déformation se localise juste sous le tas plat et il n'y a plus décollement du maillage comme dans le cas de la simulation sans prise en compte de la localisation (voir figure 2.6 du chapitre 2 de la partie 3).

Dans le cas du test de l'impact avec un impacteur cylindrique [13] (voir figure 3.16), la déformation se localise également sous l'impacteur. Les bords du maillage restent droits comme dans l'expérience (voir figure 2.13 du chapitre 2 de la partie 3). Dans ce dernier cas on obtient un meilleure prédiction (voir figure 3.17) sur les efforts extérieurs que lors de la simulation sans prise en compte de la localisation de la déformation..

3.7 Prise en compte des hétérogénéités initiales

La simulation de la compression avec prise en compte de la localisation de la déformation ne permet pas d'obtenir l'écrouissage du plateau de contrainte constaté expérimentalement. Cependant l'initialisation de l'ensemble des éléments du maillage à une porosité initiale correspondant à la porosité initiale moyenne du bloc de mousse d'aluminium à simuler peut être discutable. Les cellules n'étant pas toutes de taille constante sur l'ensemble du bloc la porosité locale n'est plus constante et égale à la porosité initiale

[13] Test de l'impact genou

moyenne du bloc. En effet les grosses cellules présentes dans le matériau provoquent une augmentation de la porosité initiale locale du matériau. De même, les amas de matière provoquent une diminution de la porosité initiale locale du matériau. Si nous assimilons un élément du maillage à un volume élémentaire de matière il est possible de déterminer sa densité et donc sa porosité. Lors d'un calcul sur un bloc de mousse, chaque élément du maillage peut être alors initialisé à une porosité initiale différente (voir figure 3.18). La moyenne des porosités initiales affectées aux éléments du maillage doit correspondre à la porosité initiale du bloc de mousse à simuler. La distribution de ce spectre de porosités affectés a été générée à l'aide de la fonction *randn* du logiciel de calcul MatLab de Mathworks. Elle suit donc une gaussienne (voir figure 3.19). Chaque élément initialisé à une porosité donnée possède donc un comportement propre. Il faut donc définir le comportement de chaque groupe d'éléments initialisés sur une porosité. Nous avons déterminé dans l'introduction, à l'aide de la base de données du projet EAMLIFe, les contraintes plateau σ_0 pour des mousses de différentes porosités initiales. Nous considérons donc que les limites élastiques suivent la relation déterminée dans le chapitre 3 de l'Introduction.

$$\sigma_0 = 285 \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^{1.99} \tag{3.26}$$

Nous supposerons alors qu'un élément initialisé à une porosité f_{ini} possède la même limite d'écoulement qu'un bloc de mousse de porosité initiale f_{ini}. Le paramètre C_{ini} est donc déterminé pour chaque porosité initiale à partir de l'équation (3.26) et de l'équation (2.1). En supposant que $C = 2F$ on définit la valeur initiale C_{ini} pour chaque porosité locale initiale f_{ini}

$$C_{ini}(f_{ini}) = \frac{2}{3} \left(\frac{R_0}{\sigma_0(f_{ini})} \right)^2 \tag{3.27}$$

Ensuite l'évolution de C en fonction de la porosité f en forme de crochet est reconduite comme précédemment afin de donner à chaque point d'intégration un comportement élémentaire similaire à la figure (3.2) permettant la propagation de la localisation de la déformation. La courbe (3.20) représente l'évolution de C_{ini} identifiée sur les essais ainsi que différentes évolutions en crochet de C en fonction de f pour différentes porosités locales initiales. On remarquera que l'amplitude du crochet dépends de la porosité initiale, elle conditionne directement l'amplitude des oscillations sur la courbe contrainte / déformation mais également le degré de non linéarité du calcul. Afin d'améliorer la convergence des simulations, nous avons donc choisi de reduire la phase d'adoucissement (donc l'amplitude du crochet) pour les mousses de plus faible porosités ce qui a pour conséquence de limiter l'amplitude des oscillations sur la courbe contrainte / déformation. Cette diminution de l'amplitude des oscillations avec l'augmentation de la densité relative est de plus constatée expérimentalement (voir chapitre 2 de la partie 3). La simulation d'un essai de compression sur le maillage d'un cube (voir figure 3.21) montre l'apparition de la localisation dans plusieurs éléments simultanément. Ce sont les éléments dont la porosité initiale est la plus élevée, ce qui correspond aux éléments les plus faibles, qui localisent la déformation en premier. La propagation s'éffectue alors sous forme de strates épousant les variations de résistance des éléments du maillage.

Le principal bénéfice de la prise en compte de ces hétérogénéités initiales dans la simulation est l'obtention d'un écrouissage sur le plateau des contraintes lors de la simulation de l'essai de compression (voir figure 3.22). Un bureau d'étude peut donc facilement générer des distributions de porosités aléatoires centrées sur les valeurs moyennes des mousses à simuler afin d'initialiser les maillages. Cette technique lui permettra d'obtenir une bonne corrélation calcul / essai lors de la simulation de sollicitations multi-axiales, à condition, bien entendu, de prendre en compte la localisation de la déformation dans la simulation (voir [Moussy02]).

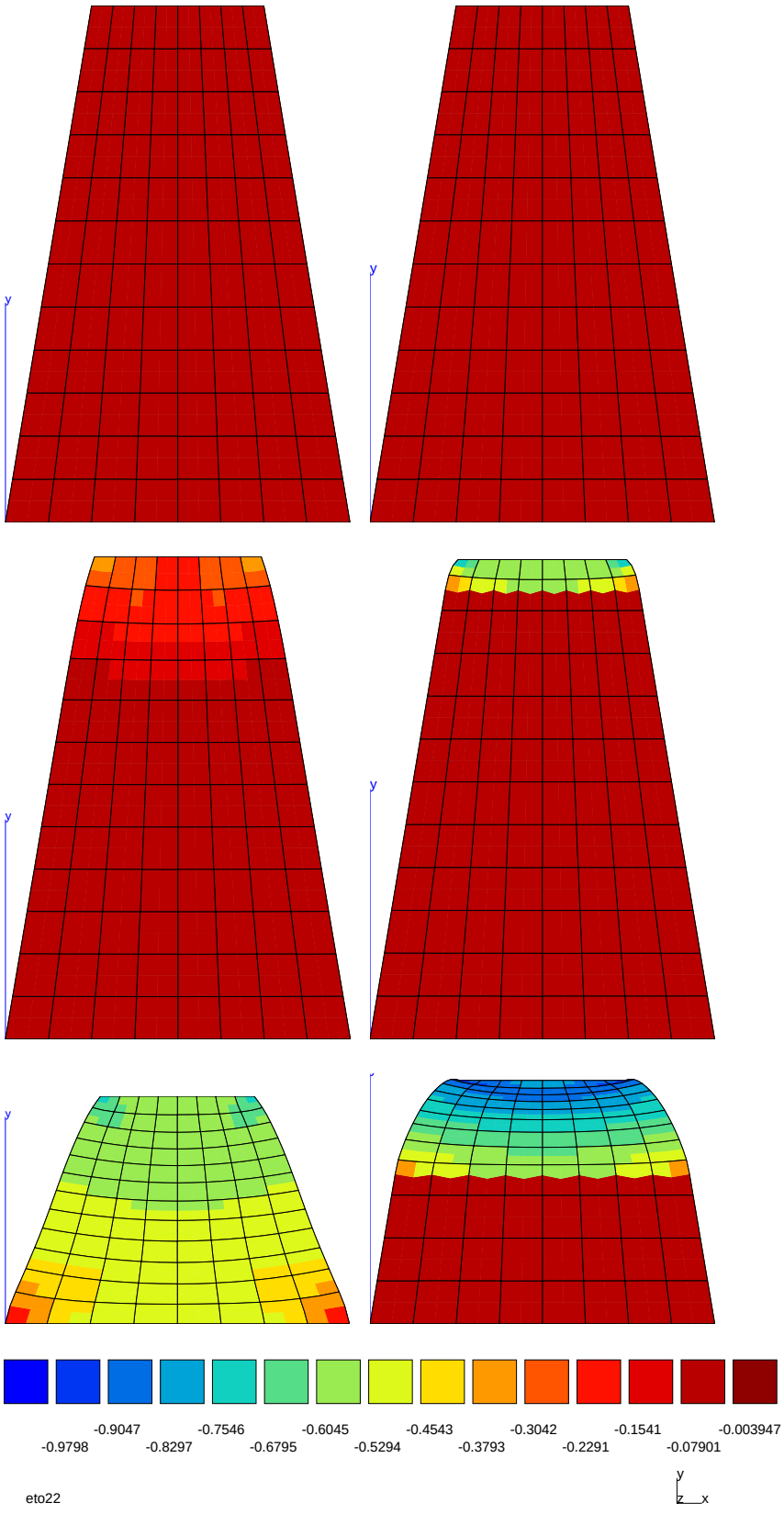


FIG. 3.14 – Comparaison de l'évolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression d'une pyramide de mousse, à gauche simulation de la compression sans prise en compte de la localisation, à droite simulation de la compression avec prise en compte de la localisation. La propagation de la localisation de la déformation s'effectue alors sous forme de bandes horizontales

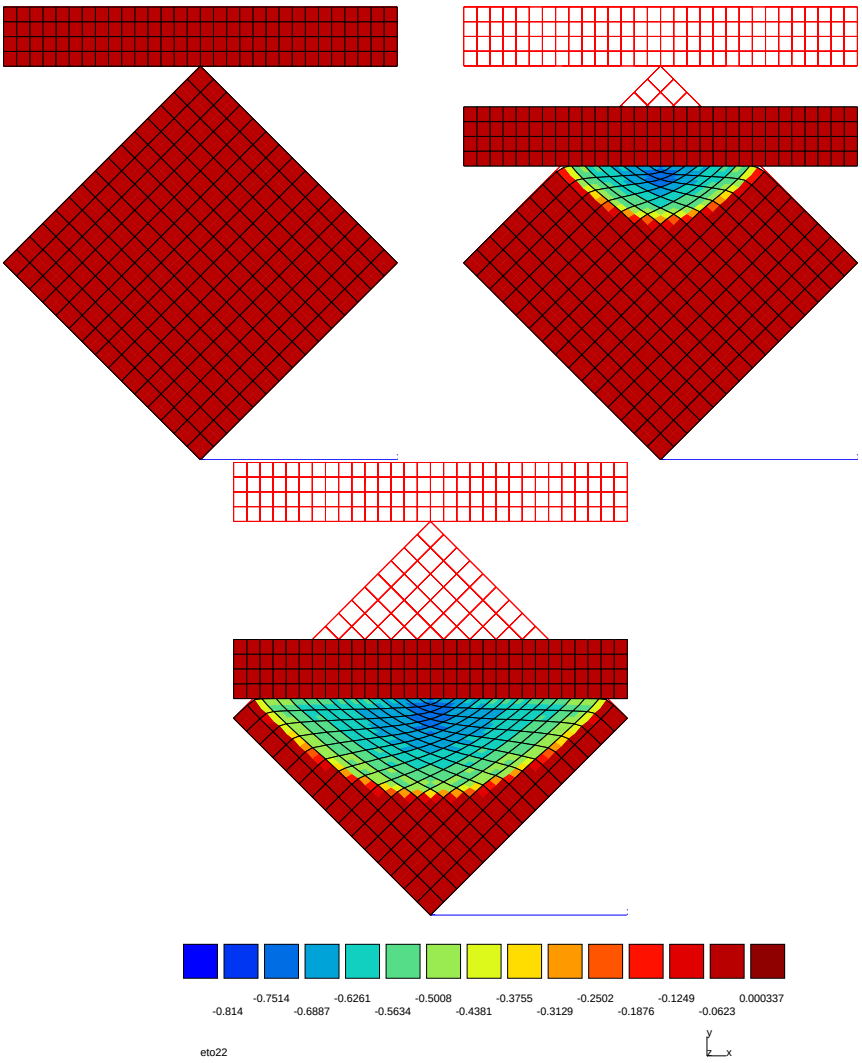


FIG. 3.15 – Comparaison de l'évolution de ε_{22} au cours de la simulation avec prise en compte de la localisation de la déformation lors de l'essai de compression coin d'un bloc de mousse. La propagation de la localisation de la déformation s'effectue alors sous forme de bandes horizontales et reste confinée sous l'impacteur

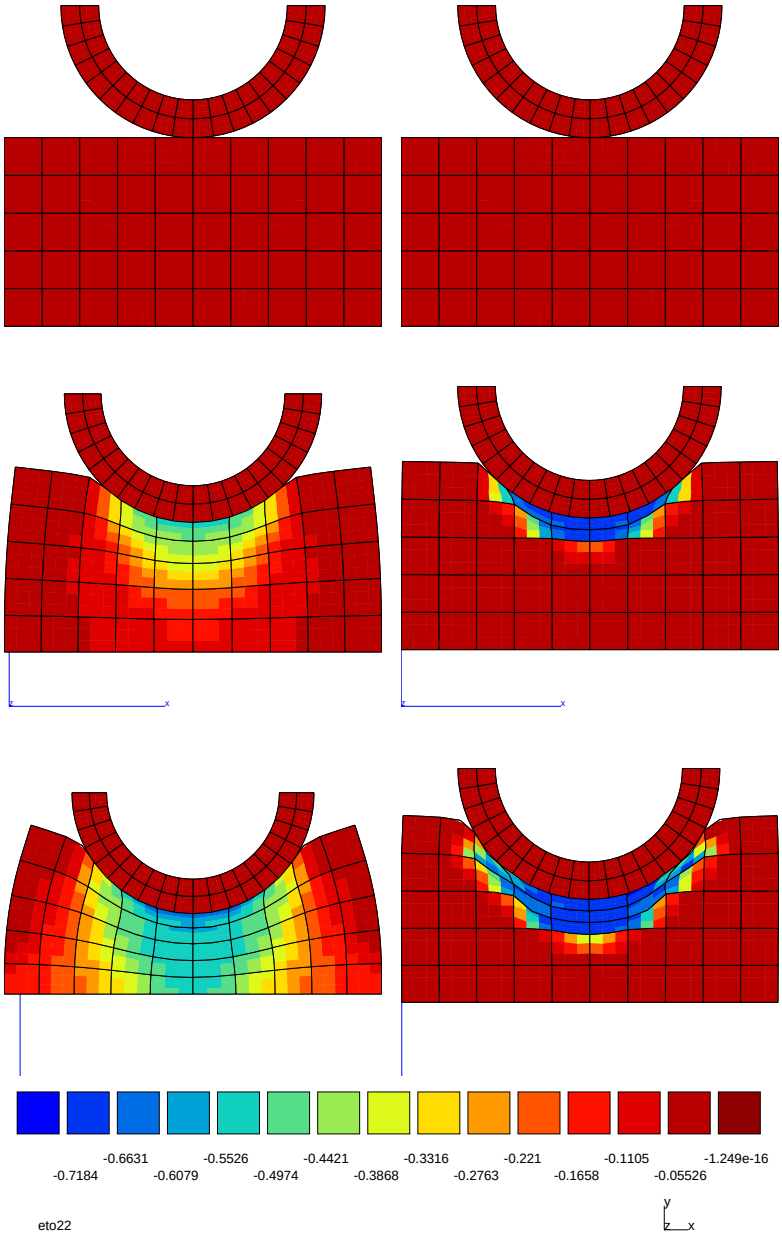


FIG. 3.16 – Comparaison de l'évolution de ε_{22} au cours de la simulation de l'essai de compression d'un bloc de mousse à l'aide d'un impacteur cylindrique, à gauche simulation de la compression sans prise en compte de la localisation, à droite simulation de la compression avec prise en compte de la localisation. La localisation de la déformation s'effectue juste sous l'impacteur comme constaté pendant d'essai.

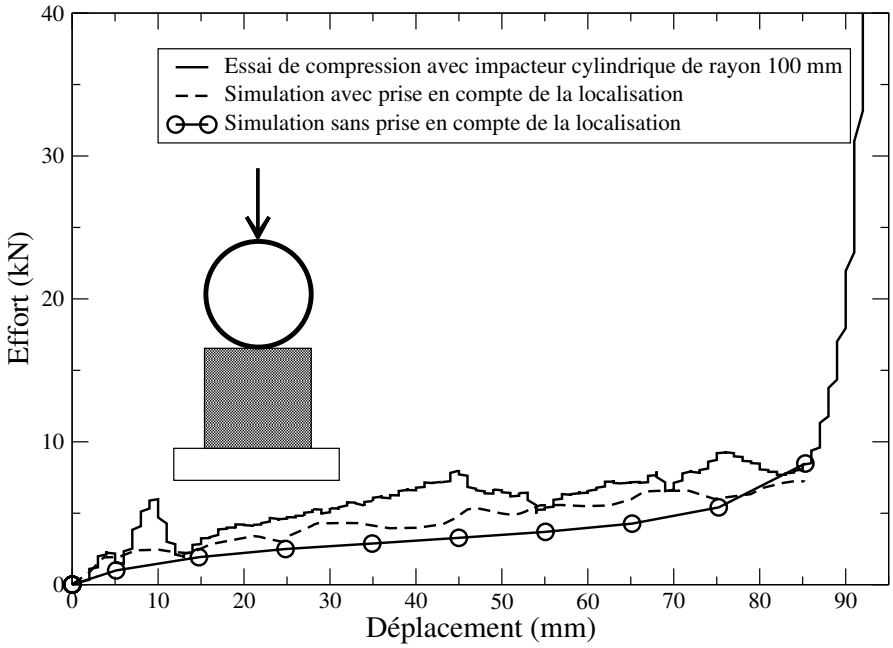


FIG. 3.17 – Comparaison essai / calcul avec et sans prise en compte de la localisation de la déformation lors de la compression d'un bloc de mousse à l'aide d'un impacteur cylindrique

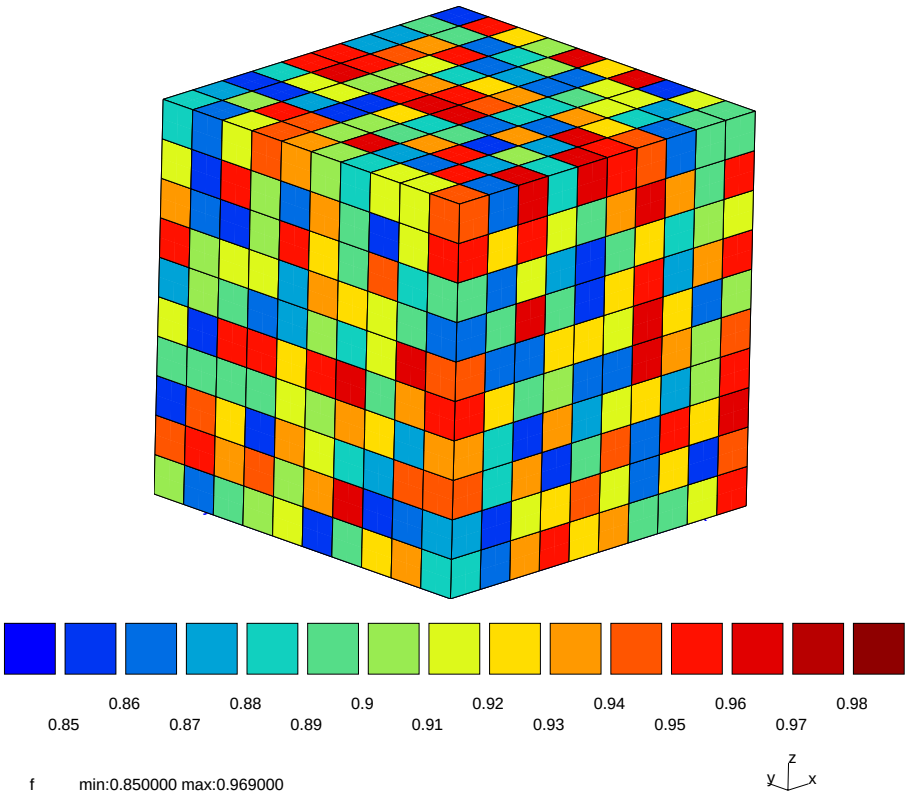


FIG. 3.18 – Initialisation d'un maillage 3D sur une distribution de porosités intiales aléatoires centrée sur une porosité moyenne

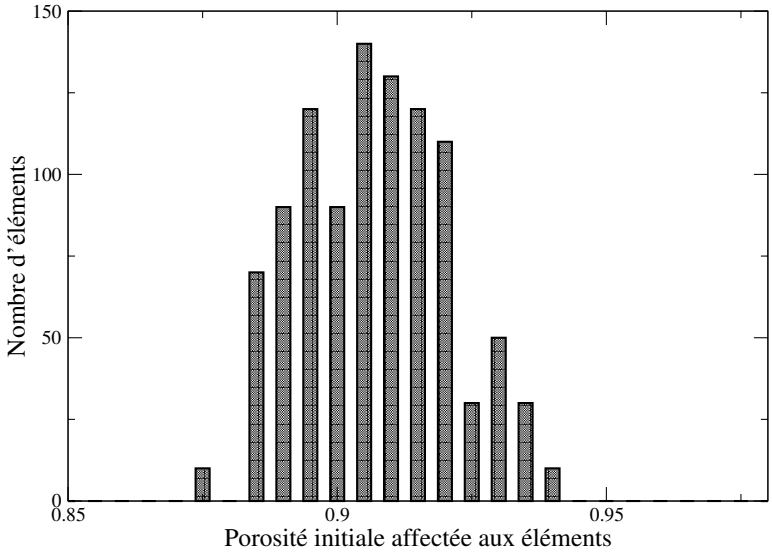


FIG. 3.19 – Histogramme de la distribution de porosités initiales aléatoires centrée sur une porosité moyenne de 90.7 %

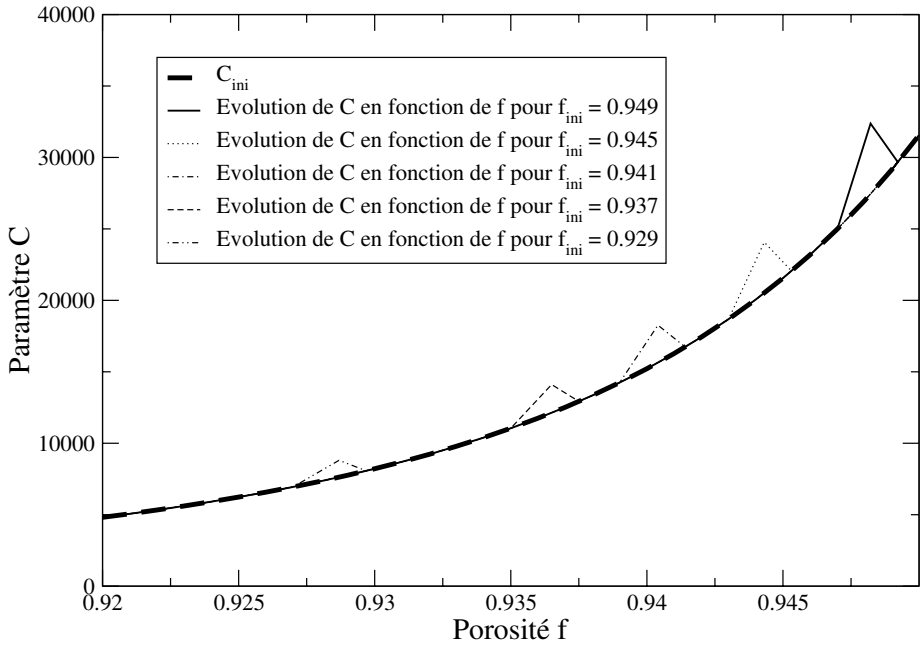


FIG. 3.20 – Evolution de C en fonction de f pour différentes porosités initiales. Chaque groupe d'éléments initialisé à une porosité f_{ini} suit une loi d'évolution de C en fonction de f de type crochet initialisée à $C_{ini}(f_{ini})$

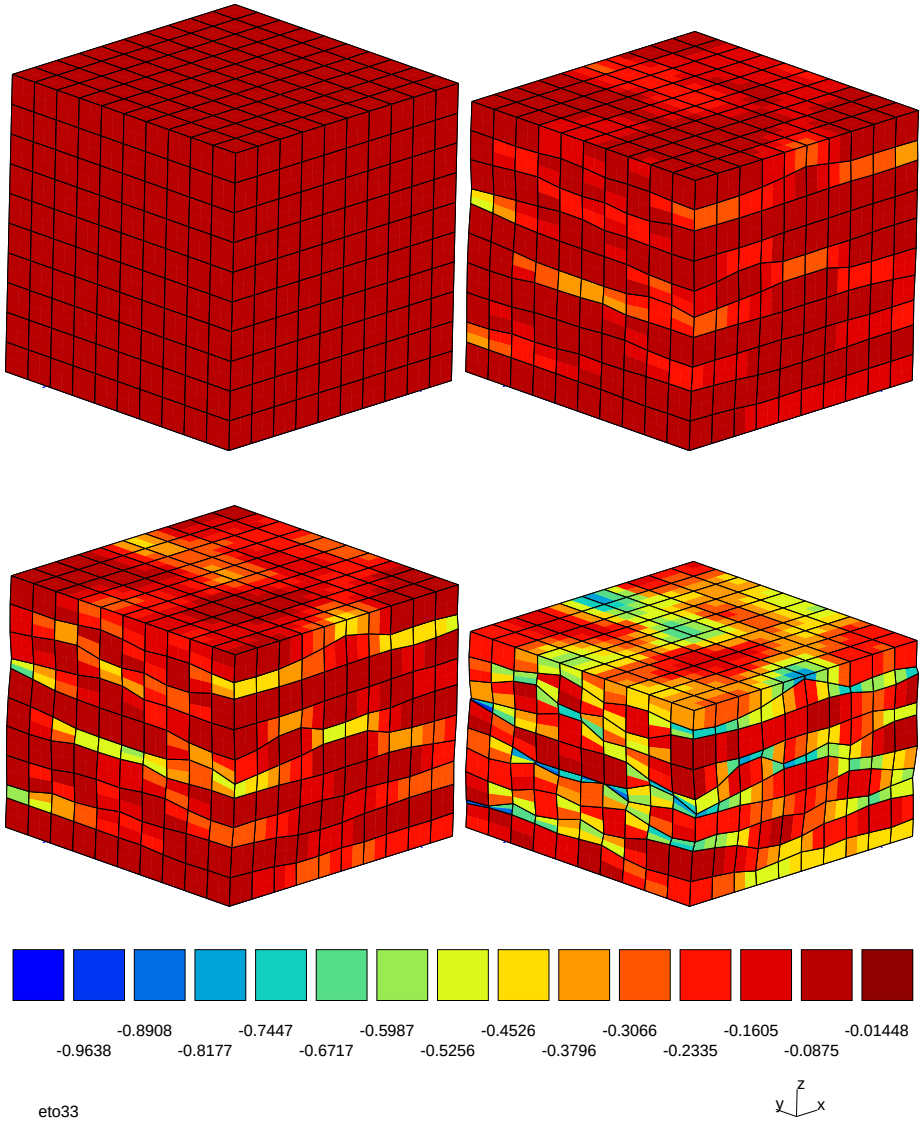


FIG. 3.21 – Compression d'un bloc de mousse 3D initialisé sur une distribution de porosité intiale aléatoire centrée sur une porosité moyenne. La localisation de la déformation est plus diffuse mais tend également à former des strates

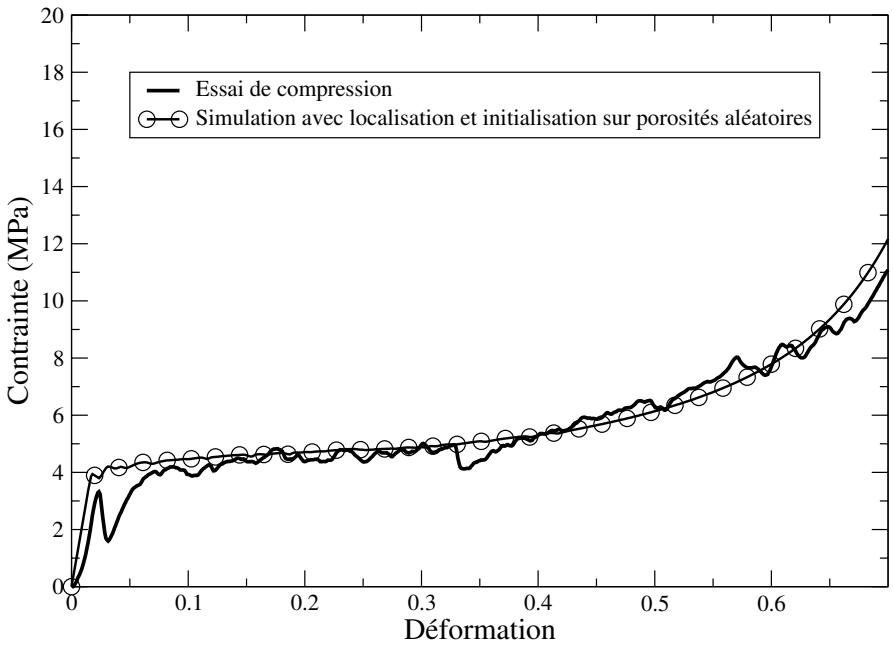


FIG. 3.22 – Comparaison essai / calcul avec prise en compte de la localisation de la déformation et initialisation du maillage sur des porosités aléatoires centrées sur 90.7 %

Chapitre 4

Prise en compte de l'hétérogénéité initiale réelle de la mousse dans la simulation

L'apparition de la localisation de la déformation dans les zones de fortes porosités est l'hypothèse principale retenue dans ce travail pour la simulation du comportement mécanique des mousses d'aluminium. Nous allons maintenant tenter de démontrer que cette hypothèse peut être justifiée par des simulations couplées sur des hétérogénéités réelles relevées sur mousse d'aluminium.

4.1 Mesure des hétérogénéités initiales

Dans le chapitre précédent, les hétérogénéités initiales représentées par l'initialisation de la porosité pour chaque élément du maillage ont été choisies aléatoirement sur des distributions gaussiennes. La tomographie 3D à rayon X sur mousse d'aluminium fournit des images qui permettent de reconstruire virtuellement le bloc de mousse en 3D. Les coupes 2D, reconstruites à partir des scans (cf. chapitre 3 de la partie 2) , permettent d'obtenir une cartographie de la présence ou non de matière dans le bloc analysé et donc d'avoir une évaluation de la porosité. La reconstruction logicielle des coupes 2D à partir des scans délivrés par l'appareil de tomographie produit des images définies sur 256 niveaux de gris comme sur la figure (4.2). Ce type d'image peut être seuillé c'est-à-dire qu'un test est appliqué à chaque pixel de l'image : si le niveau de gris du pixel est inférieur à un seuil choisi par l'utilisateur le pixel devient noir sinon il devient blanc. Cela revient à utiliser des filtres passe-bas ou passe-haut. Dans les images seuillées présentées ici, les pixels noirs représentent l'aluminium constituant les parois des cellules. Sur une image seuillée, la porosité peut être évaluée en comptant le nombre de pixels de couleur blanche N_{blanc}, nous avons alors

$$f = \frac{N_{blanc}}{N_{total}} \tag{4.1}$$

N_{total} étant le nombre total de pixels que comporte l'image.

De la même façon il est possible de déterminer une porosité locale en comptant le nombre de pixels blancs sur une portion d'image. Afin de déterminer l'évolution de la porosité sur une image, nous avons utilisé un filtre qui permet de compter le nombre de pixels blancs dans une boîte d'exploration de forme carrée centrée sur chaque pixel. Il est possible alors de calculer la porosité locale f_{locale} sur la surface de la boîte en utilisant la formule précédente et en comptant le nombre de pixels blancs n_{blanc} dans la boîte d'exploration, nous obtenons alors

$$f_{local} = \frac{n_{blanc}}{N_{total}} \tag{4.2}$$

avec N_{total} le nombre total de pixels dans la boîte d'exploration. L'ensemble de l'image étant parcouru par la boîte d'exploration nous obtenons pour chaque position de la boîte la valeur de la porosité locale. Le résultat peut être stocké dans une matrice dont le nombre d'éléments est égal au nombre de pixels de l'image mesurée. Mais ce résultat peut également être stocké dans une image. En effet le niveau de gris d'un pixel d'une image, codé sur 8 bit soit 256 valeurs, peut contenir une information. Dans le cas présenté ici, la porosité est ainsi codée sur 8 bit ce qui lui donne une résolution de $256^{-1} = 0.0039$. On attribue à chaque pixel de l'image résultat la valeur de la porosité locale [14] calculée dans une boîte centrée en ce même pixel sur l'image mesurée. L'image résultat obtenue alors est la cartographie de la porosité locale (voir figure 4.1). Un pixel noir sur l'image résultat correspond à une zone de l'image mesurée de la taille de la boîte d'exploration dont la porosité locale est nulle. De la même façon, un pixel blanc sur l'image résultat correspond à une zone de l'image mesurée de la taille de la boîte d'exploration dont la porosité locale est égale à 100%.

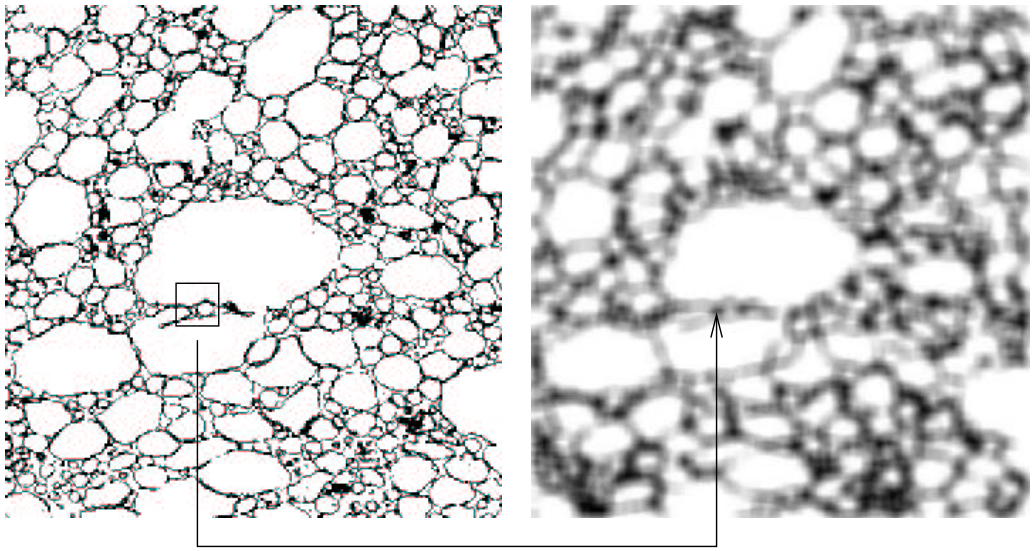


FIG. 4.1 – Principe de calcul de la porosité locale à l'aide d'une boite de 10 pixel de côté et stockage des données sur une image résultat

Le choix de la taille de la boîte d'exploration est donc crucial : à partir d'une même image à mesurer c'est elle qui fixe l'ambitus des niveaux de gris et donc des porosités sur l'image résultat. La figure 4.7 représente l'image résultat obtenue par calcul à l'aide d'une boîte d'exploration de 10 pixels. Nous constatons que l'ambitus des porosités, codé en niveaux de gris de 1 à 255, est maximal. La boîte est trop petite pour reduire l'ambitus, lors du parcours de l'image à mesurer (cf. 4.6), la boîte se trouve tour à tour sur des zones entièrement blanches correspondant à l'intérieur de grosses cellules et sur des zones entièrement noires correspondant à des amas de matière. La qualité du seuillage est également déterminante. En effet, un seuillage trop important (voir figure 4.4) conduira à une image plus chargée en pixels noirs donc à une sous-évaluation de la porosité. De la même façon, une image sous seuillée (voir figure 4.5) conduira à une image plus chargée en pixels blancs donc à une sur-évaluation de la porosité.

[14] Codée sur 256 niveaux de gris

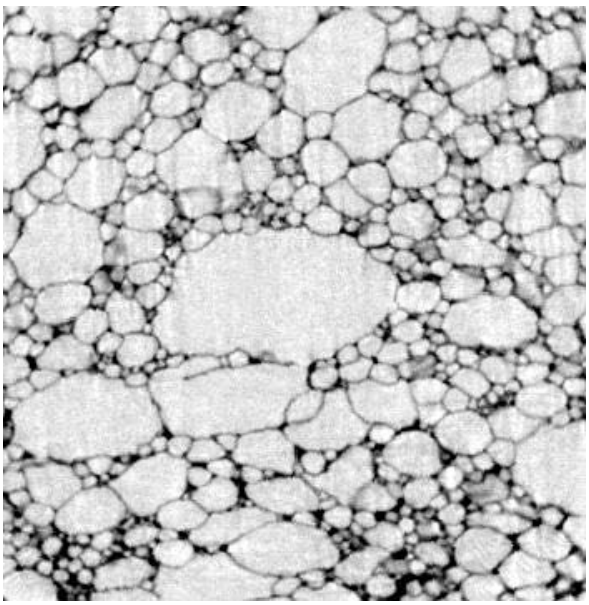


FIG. 4.2 – Coupe virtuelle 2D obtenue par tomographie 3D : image avec 256 niveaux de gris

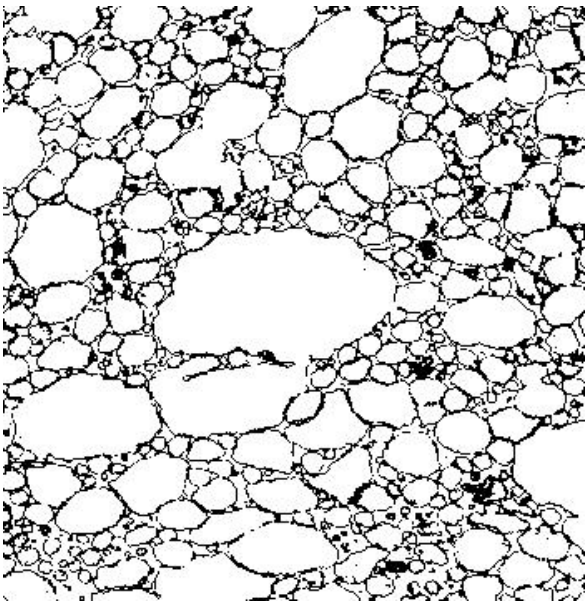


FIG. 4.3 – Coupe virtuelle idéalement seuillée, la porosité apprarente correspond à la porosité réelle du bloc de mousse

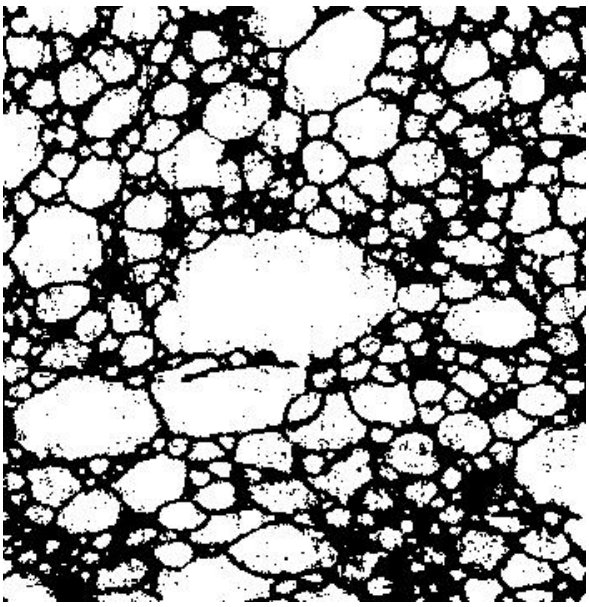


FIG. 4.4 – Coupe virtuelle sur seuillée, la porosité apparente est inférieure à la porosité réelle

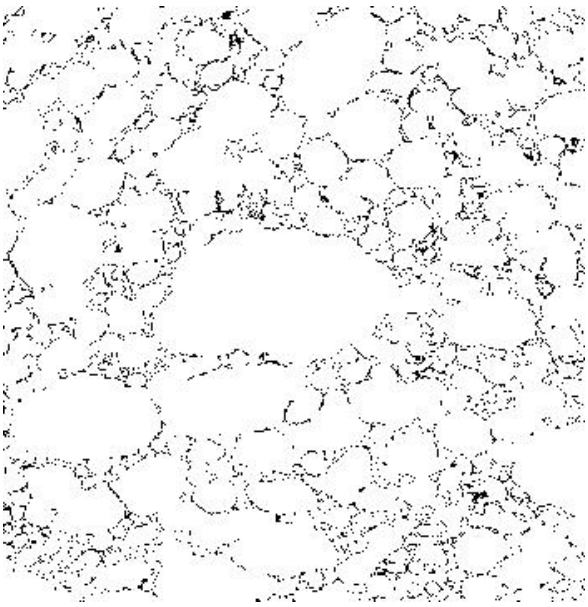


FIG. 4.5 – Coupe virtuelle sous seuillée, la porosité apparente est supérieure à la porosité réelle

4.2 Simulation sur des hétérogénéités réelles

4.2.1 Carte des porosités initiales

Le traitement précédemment réalisé nous permet de posséder maintenant une image contenant la distribution de porosités locales, codée sur 8 bit, et mesurée à partir d'une coupe 2D reconstruite à partir

de scans issus de tomographie à rayons X. Pour réaliser un calcul sur un maillage contenant cette distribution de porosités il est nécéssaire d'affecter cette information à chaque élément ou mieux à chaque point d'intégration du maillage. Une fonction du code éléments finis ZeBuLoN permet d'affecter, à partir d'une image, une phase à chaque point d'intégration d'un maillage. Un ensemble de points d'intégration affectés à la même phase est appelé un ipset. Initialement utilisée pour réaliser des calculs sur des matériaux biphasés, cette fonction permet également d'affecter jusqu'à 256 ipsets soit 256 phases différentes. On comprend alors pourquoi nous avons choisi de stocker le calcul des porosités locales sur une image en 256 niveaux de gris. Chaque ipset correspondant à une phase peut suivre une loi de comportement spécifique. En utilisant cette fonction à partir des images résultats, il est donc possible d'obtenir un maillage contenant plusieurs ipsets suivant, chacun, une loi de comportement spécifique. Dans les images résultats, les niveaux de gris représentent la porosité codée sur 8 bit, il y aura donc, au maximum 256 phases différentes identifiées donc 256 ipsets différents sur le maillage. Par exemple, le maillage obtenu à partir d'une image résultat calculée à l'aide d'une boite de 90 pixels de côté est présenté en figure (4.2.1).

4.2.2 Loi de comportement dépendant de la porosité initiale et simulation

Pour se retrouver dans le cas du chapitre précédent[15] chaque ipset doit suivre le comportement d'un matériau dont la porosité initiale a été déterminée par l'analyse d'image. L'ambitus des porosités est donc un paramètre clef. C'est l'ambitus des porosités qui fixe le nombre d'ipset et donc le nombre de lois crochets d'évolution de C en fonction de f à renseigner pour réaliser le calcul. Par exemple, une boîte d'exploration trop petite comme sur la figure 4.7, donne des porosités locales variant de 0 à 100 % sur l'image résultat et conduit à l'identification de 256 ipsets. Cela impose la construction de 256 lois crochets pour des porosités f_{ini} variant de 0 % [16] à 100% [17]. Si l'on conserve un contraste aussi élevé il est préférable de faire un calcul avec deux phases aluminium / vide sans étape d'homogénéisation. On ne retient pas cette approche pour l'instant car elle conduit à des maillages trop raffinés. Un contraste trop élevé sur les porosités et donc sur les lois crochets impose d'autre part un degré de non linéarité trop important sur la simulation. Il est donc important de bien choisir la taille de la boîte, comme sur la figure (4.10), elle permet d'obtenir des porosités variant de 63 % à 98 % sur l'image résultat. Cette plage correspond au domaine de porosité pour lequel la loi de comportement avec localisation a pu être identifiée à partir d'une base expérimentale disponible chez Renault. En utilisant, les mêmes lois crochets d'évolution de C en fonction de f que dans le chapitre précédent (voir figure 3.20), nous constatons bien l'apparition de la localisation de la déformation dans les zones de porositéz les plus élevées. La comparaison avec les coupes 2D reconstruites à partir des scans de tomographie réalisés sur le même échantillon pour différents niveaux de déformation totale (voir figure 4.14) semble indiquer que la localisation ne s'initialise pas tout à fait au niveau des porosités les plus faibles. On notera cependant que le calcul réalisé en 2D ne tient pas compte de la composante en z. Ainsi, afin de valider totalement l'hypothèse d'initiation de la localisation de la déformation dans les zone de plus fortes porosités, il sera nécéssaire d'effectuer un calcul complet 3D en suivant la même méthode.

[15] Chaque groupe d'élément suit un comportement définit pour chaque porosité initiale
[16] Ce qui correspond à la loi de comportement de l'aluminium solide
[17] Ce qui correspond à la loi de comportement de l'air !

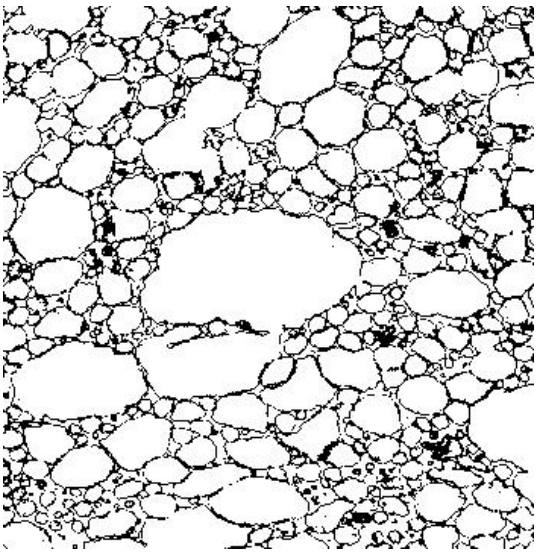


FIG. 4.6 – Image seuillée de 358 pixels de côté

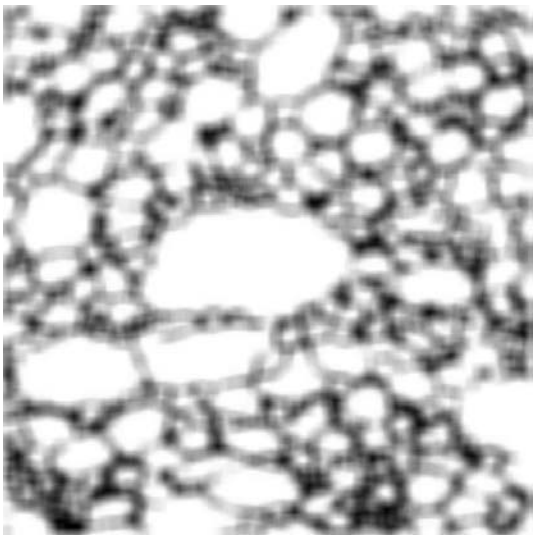


FIG. 4.7 – Image retravaillée avec une boîte de 10 pixels de côté

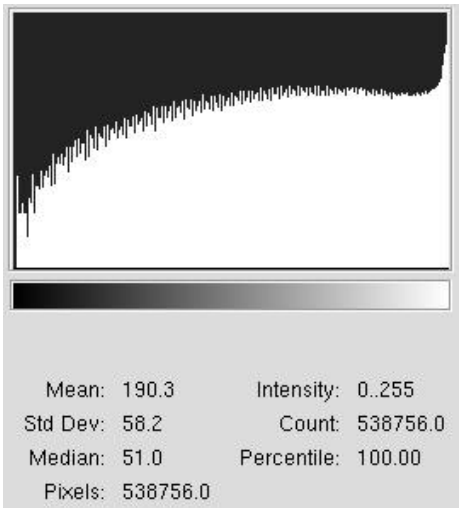


FIG. 4.8 – Histogramme des niveaux de gris sur l'image analysée avec une boîte de 10 pixels de côté : l'ambitus des porosités est alors maximale et varie de 0 à 1

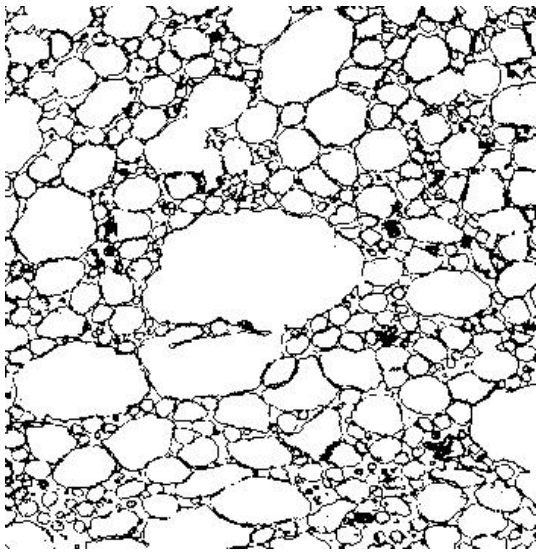


FIG. 4.9 – Image seuillée de 358 pixels de côté

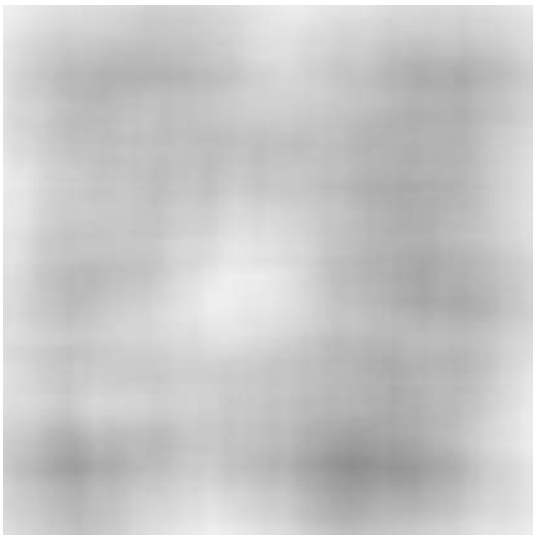


FIG. 4.10 – Image retravaillée avec une boîte de 90 pixels de côté

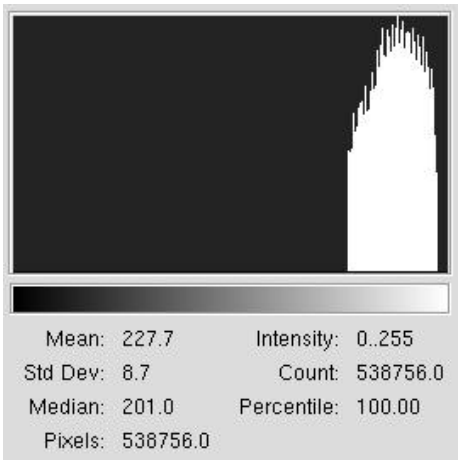


FIG. 4.11 – Histogramme des niveaux de gris sur l'image analysée avec une boîte de 90 pixels de côté : l'ambitus des porosités est alors plus réduit et varie de 63% à 95%

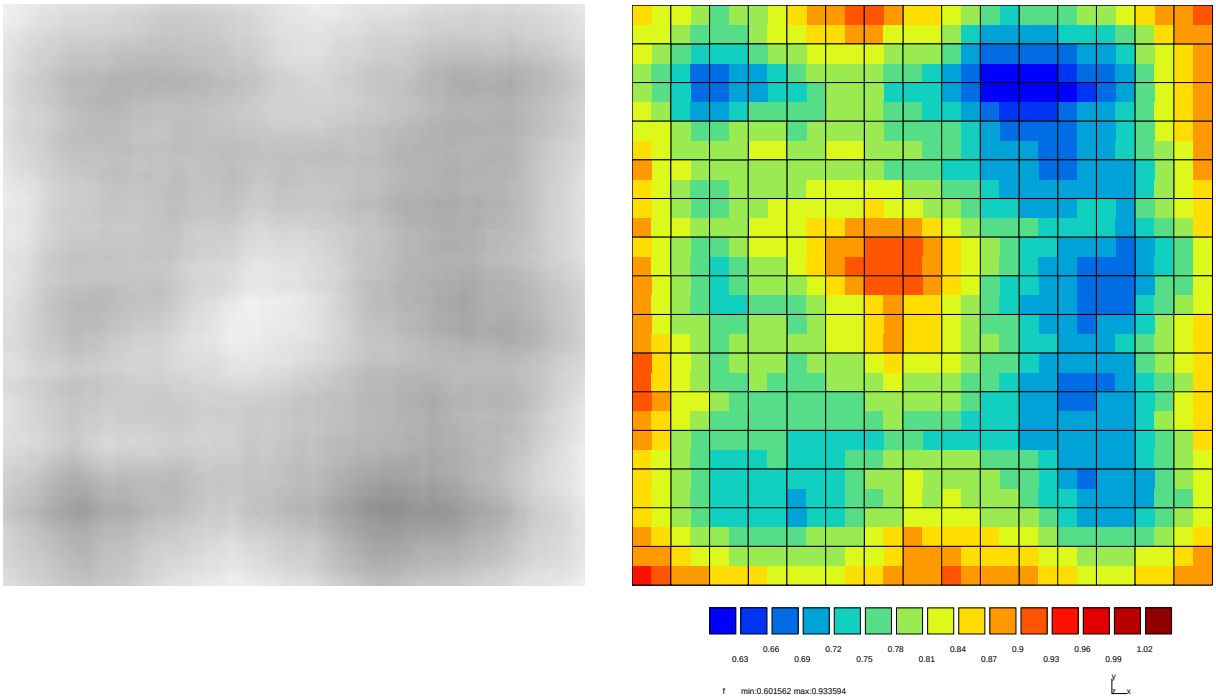


FIG. 4.12 – Image résultat obtenue avec une boîte de 90 pixels de côté et maillage correspondant. Chaque point de gauss du maillage est associé à un pixel de l'image résultat et est initialisé à une porosité correspondant au niveau de gris du pixel auquel il est associé

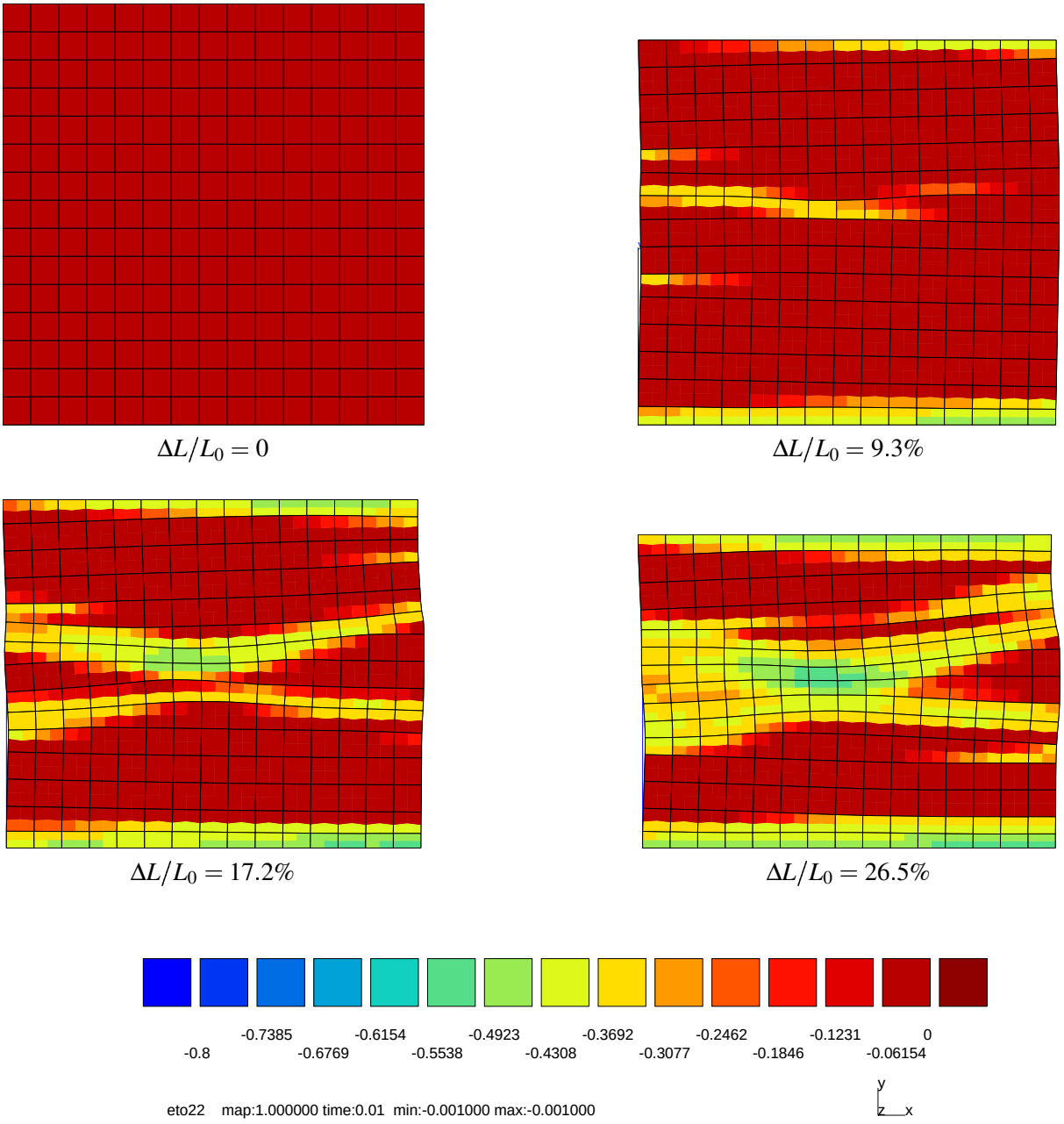
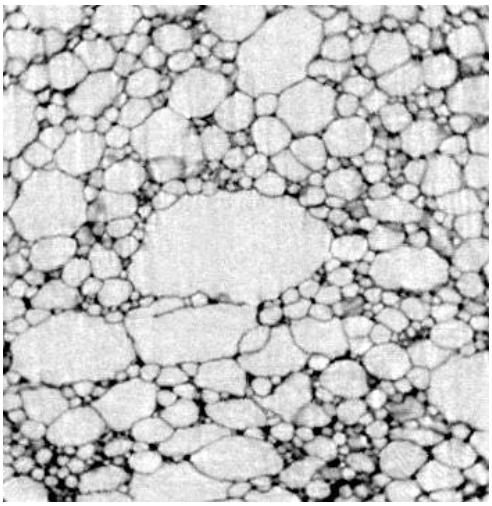
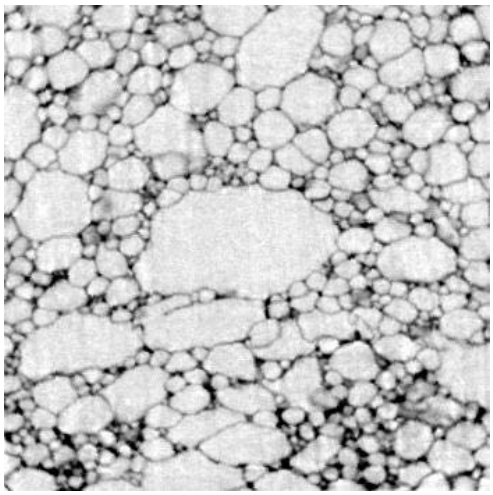


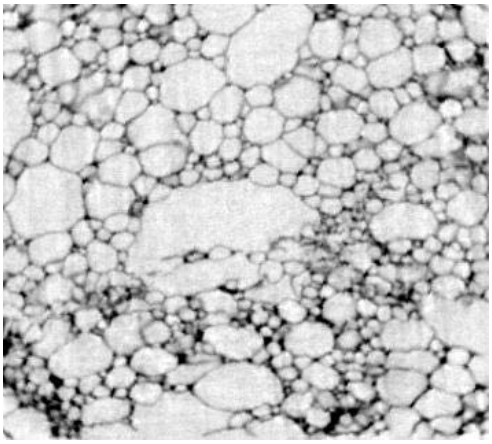
FIG. 4.13 – Evolution de ε_{22} lors de la simulation d'une compression sur un maillage dont la cartographie des porosités est donnée en figure 4.2.1. La déformation se localise initialement dans les points de Gauss dont les porosités initiales sont les plus grandes puis se propage sous forme de bandes.



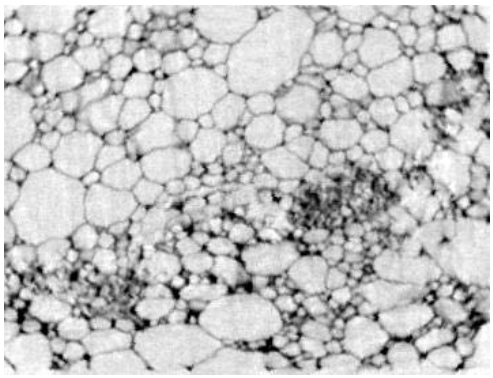
$\Delta L/L_0 = 0\%$



$\Delta L/L_0 = 5\%$



$\Delta L/L_0 = 10\%$



$\Delta L/L_0 = 15\%$

FIG. 4.14 – Coupes 2D reconstruites à partir de scans issus de tomographie à rayon X et réalisée sur le même bloc de mousse pour différents niveaux de déformation totale.

Cinquième partie

Conclusions et perspectives

Les matériaux cellulaires métallique ont suscité un engouement extraordinaire dans la communauté scientifique durant les vingt dernières années en raison de leurs propriétés exceptionnelles et de la variété de leurs microstructures. L'ensemble des méthodes expérimentales, théoriques et numériques de la mécanique des matériaux hétérogènes a pu être mise en œuvre pour relier les propriétés macroscopiques des mousses aux caractéristiques des constituants. Les modèles sont soumis à rude épreuve en raison du contraste extrême des propriétés des constituants, à savoir le vide et le métal. Une telle démarche a été entreprise dans ce travail de thèse afin d'évaluer le potentiel des mousses métalliques pour des applications structurales et d'absorption d'énergie dans des composants industriels de l'automobile.

L'étude systématique du comportement mécanique d'une mousse d'aluminium de densité 0.25 g/cm^3 a eu pour objectif d'envisager les différents modes de sollicitation que le matériau peut rencontrer dans un composant en service. Le comportement en traction, peu étudié jusqu'ici dans la littérature, a révélé la fragilité intrinsèque des mousses d'aluminium obtenues par voie fonderie. Même si la traction n'est pas le mode de déformation privilégié pour les applications envisagées dans ce travail, elle peut se présenter localement dans des composants en flexion par exemple. C'est pourquoi il est essentiel, du point de vue de l'ingénieur, de rendre compte de la statistique de rupture fragile du matériau dans ces conditions. Le modèle statistique de Weibull identifié sur une large base expérimentale comprenant quatre volumes d'éprouvettes différents, rend compte de manière correcte des effets d'échelle observés sur la contrainte à rupture moyenne des éprouvettes et surtout sur la dispersion correspondante. Les paramètres de Weibull trouvés sont de l'ordre de grandeur de ceux obtenus pour des céramiques industrielles. L'approche statistique s'avère ensuite remarquablement adaptée à la description de la contrainte limite d'élasticité en compression simple. Cette contrainte présente, elle aussi, une importante dispersion correctement prévue par le modèle proposé (cf. [Blazy02a]). La fragilité du matériau est due clairement aux nombreuses phases présentes dans l'alliage d'aluminium constituant les parois. De nombreuses phases fragilisantes ainsi que les particules de SiC ont pu être identifiées. La dispersion des contraintes à rupture a aussi été attribuée au deuxième facteur qu'est la grande hétérogénéité de distribution de taille des cellules. La fragilité du matériau est un obstacle important au développement d'applications industrielles des mousses métalliques. Ce handicap sera réduit à condition de retravailler la métallurgie de base des alliages utilisés en liaison avec le procédé d'élaboration de la mousse.

Le comportement multiaxial des mousses d'aluminium était connu essentiellement sous des chargements de compression+pression hydrostatique (essais triaxiaux de mécanique des roches). Nous avons exploré le domaine du cisaillement et de la torsion combinée à la compression et à la traction. Une surface de charge initiale quasi–elliptique symétrique a été mise en évidence. A nouveau, la surface de charge est définie ici dans un contexte statistique capable de rendre compte de la dispersion des résultats obtenus sous chargements complexes. Le modèle statistique de Weibull multiaxial a pu être validé sous chargements proportionnels et non proportionnels.

La rupture fragile des parois de cellule n'est pas le seul mécanisme de déformation et de ruine de la mousse. En effet, le modèle micromécanique simplifié de mousse purement fragile développé à l'issue de l'analyse des essais surestime largement la fragilité observée. Le modèle micromécanique en question est en fait plutôt adapté aux mousses céramiques. Ceci indique que la déformation plastique des cellules est un phénomène essentiel à prendre en compte dans une meilleure modélisation. La déformation des mousses combine donc rupture et déformation plastique locale des cellules, même si la part de chacun des phénomènes n'a pas pu être déterminée précisément. Ce fait explique sans doute aussi pourquoi le critère de rupture/plasticité proposé basé sur le modèle de Green ne permet pas, par analyse de bifucation, de prédire correctement l'orientation des surfaces de rupture en traction–torsion combinées. On touche aux limites de l'hypothèse de normalité admise dans ce travail et dans la littérature pour la loi d'écoulement plastique associée au critère. Des lois non associées seront sans doute nécessaires pour décrire la rupture des mousses sous chargement multiaxiaux.

Les mousses d'aluminium sont incapables de se déformer de manière homogène. En compression

simple, les techniques de mesures de champ ont permis d'identifier clairement l'apparition de bandes de localisation quasiment perpendiculaires à l'axe de sollicitation et leur propagation jusqu'à la phase finale de densification. L'existence du plateau sur la courbe de compression n'est pas une propriété intrinsèque de la loi de comportement de la mousse, mais le résultat de la propagation des bandes de déformation intense. Ce fait, reconnu du point de vue expérimental, est souvent ignoré dans les modélisations proposées dans la littérature. Nous avons montré qu'un tel oubli conduit à une très large surestimation de la taille des zones plastiques lors d'essais sur des structures simples (pyramides, impact genou, etc.) et des contraintes correspondantes. La simulation de ces phénomènes de localisation reste un défi au calcul numérique par éléments finis puisqu'elle est associée à des instabilités et à des chutes brutales de charge. C'est ainsi que l'on interprête le pic initial des courbes de compression et les oscillations consécutives. Une modélisation par éléments finis de ces phénomènes a été proposée. Elle préconise l'introduction explicite du pic de contrainte initial dans la loi de comportement intrinsèque du matériau. On est alors en mesure de rendre compte de la réponse de structures simples sous chargement multiaxial. La modélisation proposée est basée sur la mécanique des milieux continus et sur la théorie de la plasticité compressible largement utilisée dans d'autres domaines (mécanique des roches, métallurgie des poudres). Elle fait abstraction de l'extraordinaire hétérogénéité apparente du matériau liée à la taille macroscopique des cellules. Les simulations présentéees restent des calculs de référence prenant en compte les instabilités locales. Pour le pré–dimensionnement courant de pièces on pourra utiliser en connaissance de cause un modèle simplifié ignorant le pic.

La stratégie de modélisation développée dans ce travail va clairement du macro vers le micro. Plusieurs niveaux de modélisations ont été décrits avec une complexité et un réalisme croissants :

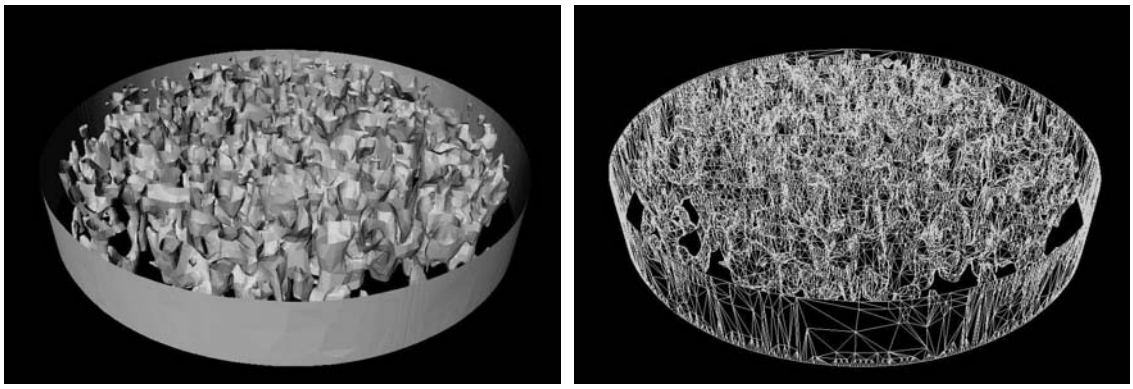
- Un modèle de plasticité compressible simple basé sur le critère de Green a été identifié et utilisé pour le calcul de structures bidimensionnelles. Il présente l'avantage d'être disponible dans de nombreux codes de calculs industriels utilisés notamment chez Renault.
- Une modélisation basée sur les même formes de lois de comportement mais intégrant explicitement la propension du matériau à se déformer de manière très hétérogène permet de décrire de manière plus réaliste les champs de déformation et de contrainte dans une structure. La réponse de la structure est sensible alors à la présence de défauts qui provoquent la localisation lors d'une déformation initialement homogène. On a montré que les résultats présentent dans ce cas–là une dépendance vis–à–vis du maillage. On a proposé des moyens pour y remédier.
- Les fluctuations locales de densité par rapport à la densité nominale de l'échantillon peuvent être prises explicitement en compte à partir d'informations obtenues par exemple par microtomographie X. On a montré que ces fluctuations sont responsables du durcissement apparent observé souvent sur les courbes de compression avant la phase de densification. Une description fidèle des évènements de déformation observés par tomographie au sein du volume de mousse nécessitent des calculs tridimensionnels par éléments finis. On a dû se contenter pour l'instant de calculs bidimensionnels de principe dans ce travail.

Il reste alors une dernière étape, la plus lourde et aussi la plus ambitieuse qui consiste à reconstituer le comportement global de la mousse à partir de la connaissance exhaustive d'un volume élémentaire représentatif de matériau. On supprime donc le passage par la définition du champ de porosité défini précédemment et on ne garde que deux constituants, l'alliage d'aluminium et le vide. On entre dans le domaine du *calcul de microstructures*, nouvelle discipline au confluent de la mécanique des structures et de la micromécanique, qui a pour but le design et l'optimisation de microstructures [Forest et al.02]. Ce travail a permis d'ores–et–déjà de mettre en place la plupart des outils nécessaires à une telle approche. Nous avons même abordé le problème de maillage de telles microstructures à partir des images tridimensionnelles obtenues par tomographie. On voit sur la figure ci–dessous un premier maillage des interfaces aluminium/vide permettant la construction ultérieure du maillage 3D du volume considéré, maillage réalisé au sein des laboratoires Renault. Il s'agit d'une perspective essentielle en vue de la pré-

diction des propriétés macroscopiques en fonction de la morphologie détaillée des cellules. On propose donc à terme une *chaîne de modélisations* permettant de passer de la connaissance de la microstructure au dimensionnement du composant final, avec à chaque étape les outils théoriques et numériques adaptés. Dans ce passage micro–macro, les phénomènes de localisation jouent un rôle–clef. L'identification successive des modèles à partir de l'information venant de l'échelle inférieure est possible de la manière suivante : calcul de microstructures 3D, identification du modèle de plasticité continue avec localisation et fluctuations de densités locales, identification d'un modèle simplifié pour le prédimensionnement.

A l'issue de cette thèse, la question des débouchés industriels des mousses d'aluminium reste largement ouverte. En effet plusieurs propositions concrètes ont été avancées dans le cas de l'industrie automobile (voir l'introduction et la référence [Blazy02b]). Elles exigent d'une part une amélioration significative de la ductilité des mousses, tout à fait envisageable dans les années à venir. D'autre part, les applications entrevues sont nécessairement en association avec un autre composant : profilé, structure sandwich. L'étude des profilés remplis de mousses, tout à fait prometteuse d'après les références citées en introduction et nos propres essais non reportés ici, n'a pas pu être entreprise de manière systématique dans ce travail et reste sans nul doute l'étape suivante du travail à réaliser en direction des applications. C'est une étape indispensable à prévoir dès à présent, au moment même où les efforts d'amélioration de la ductilité du matériau de base s'intensifient, notamment chez Cymat. On aura soin alors d'optimiser la structure mousse/matériau massif et de veiller en particulier à sa résistance en fatigue, aspect essentiel du comportement de la mousse non évalué dans ce travail.

La clef de l'utilisation des mousses d'aluminium ne semble pas résider uniquement dans leurs capacités d'absorption d'énergie où la concurrence de profilés optimisés est sévère. C'est l'utilisation combinée lors de la conception de plusieurs propriétés spécifiques aux mousses métalliques qui peut garantir un débouché réel à ces matériaux : rigidité, absorption d'énergie, isolation thermique et acoustique. C'est dans ce sens que doivent s'orienter certaines applications envisagées en automobile, aéronautique et aérospatiale. Gageons donc que dans les cinq années à venir, l'utilisation industrielle de ce matériau étonnant devienne réalité.



Maillage 3D de la structure réelle de mousse d'aluminium

Sixième partie

Annexes

Annexe A

La statistique et la rupture des matériaux

Il existe des matériaux dont le comportement mécanique est très dispersé. Par exemple, pour une géométrie d'éprouvette donnée et des conditions aux limites fixées, une caractéristique mécanique, la résistance mécanique par exemple, peut être difficile à déterminer car chaque essai sera différent. Ces différences sont imputées la plupart du temps aux défauts présents dans le matériau. La distribution de ces défauts est supposée aleatoire. Comment faire alors pour dimensioner des pièces avec ce type de matériaux ? Une approche statistique doit être mis en oeuvre. Elle permettra de connaitre avec quel degrés de sécurité une pièce élaboré avec ce matériau va supporter un chargement connu. Ainsi à chaque chargement connu - ou contrainte de rupture - nous allons associer une fréquence de rupture f_r ou une densité de probabilité de rupture p_r.

Il existe plusieurs approches statistiques, la plus connue concernant les matériaux est sans doute celle du maillon le plus faible. Elles reposent sur quelques hypothèses fondamentales. Le solide peut être considéré comme une juxtaposition d'éléments parfaitement indépendants du point de vue de la rupture, et c'est l'élément le plus faible qui entraine la rupture du solide entier. Lorsque l'hypothèse du maillon le plus faible est réalisée, on attribut à chaque élément une probabilité de rupture sous une contrainte donnée (ou une déformation donnée).Cette probabilité cumulée est $P_o(\sigma)$. Ainsi la probalité de survie est égale à $1-P_o(\sigma)$. Celle des N éléments est donc égale selon l'hypothèse d'indépendance à $[1-P_o(\sigma)]^N$. Donc la probabilité de rupture de l'ensemble des éléments est donnée par

$$P_R(\sigma) = 1 - [1 - P_o(\sigma)]^N \tag{A.1}$$

Ceci peut aussi s'écrire

$$P_R(\sigma) = 1 - exp\left[-NLn\left[\frac{1}{1-P_o(\sigma)}\right]\right] \tag{A.2}$$

On doit remarquer que la fonction $P_o(\sigma)$ est inconnue. Diverses hypothèses peuvent être introduites pour en donner une représentation mathématique simple.

Si le volume de chaque élément est V_0 et V le volume total on a alors $N = V/V_0$ En posant $f(\sigma) = Ln\left[\frac{1}{1-P_o(\sigma)}\right]$ on obtient

$$P_R(\sigma) = 1 - exp\left[-\frac{V}{V_0}Ln[f(\sigma)]\right] \tag{A.3}$$

A.1 Théorie de Weibull

A.1.1 Distribution statistique de Weibull

Weibull a proposé pour la fonction $f(\sigma)$ la forme suivante

$$f(\sigma) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_u}\right)^m pour \sigma > \sigma_0 \\ \\ 0 pour \sigma \leq \sigma_0 \end{cases}$$

Ici, σ_0 représente le seuil de contrainte en dessous duquel la probabilité de rupture est nulle. Dans la plupart des cas on suppose que $\sigma_0 = 0$ Donc la fonction de distribution de Weibull est

$$P_R = \begin{cases} 1 - exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_u}\right)^m\right] pour \sigma > \sigma_0 \\ \\ 0 pour \sigma \leq \sigma_0 \end{cases}$$

Le module de Weibull , m, estime la dispersion. Sa valeur est fixée pour un matériau donné. C'est lui qui conditionne la forme de la courbe de répartition soit la probabilité de rupture P_R en fonction de la contrainte σ. Si nous tracons P_R en fonction de la contrainte σ pour différentes valeurs de m (voir figure A.1) alors on constate que plus m est faible, plus cette dispersion est élevée. Le tableau A.1.1 donne des valeurs courantes de module de Weibul pour des matériaux courants.

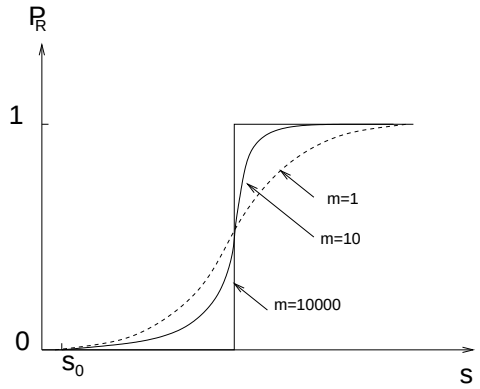


FIG. A.1 – Evolution de P_R en fonction de σ pour differente valeur de m

Matériaux	Module de Weibull
Fibre de verre	1
Verre	2-3
SiC	4-10
Graphite	12
Céramique	7-18
Acier	40

TAB. A.1 – Module de Weibull pour différent matériaux

Le module de Weibull est adimensionnel, cependant certains auteurs ont montré que m peut être lié à la taille des défauts dans un matériaux fragile (voir [Beremin83]), ou plus précisement à la distribution

des défauts dans ce matériaux. En supposant que cette distribution a une allure de type gaussienne avec une décroissance en a^{-n} on obtient

$$m = 2(n-1) \tag{A.4}$$

Le problème reste alors de déterminer cette distribution de défaut dans le matériaux.

Dans la loi de Weibull les paramètres V_0 et σ_u ne sont pas indépendants. En fait c'est le produit $V_0\sigma_u$ qui intervient. Certains estiment que σ_u représente à peu près la contrainte de rupture moyenne d'un échantillon de volume élémentaire V_0 pour une probabilité de rupture de $1-e^{-1} = 0,632$. Comme m, σ_u dépend du matériau. σ_0 est encore appelée contrainte seuil en dessous de laquelle la rupture ne se produit pas, elle est la plupart du temps égale à 0.

A.1.2 Effet de volume

Le volume V des éprouvettes testées intervient dans l'expression de la distribution statisque de Weibull A.1.1. Pour un matériau donné, donc avec m V_0 et σ_u fixés, une augmentation du volume de l'éprouvette testée conduit à une augmentation de la probabilité de rupture. Cela signifie que si nous sollicitons deux éprouvettes de volume V_1 et V_2 avec $V_1 > V_2$, l'eprouvette de plus gros volume V_1 aura plus de chance de casser. L'explication physique de ce phénomène est la plus forte probabilité de trouver alors un gros défaut dans l'éprouvette de plus fort volume. Dans le cas d'une sollicitation uniaxiale nous pouvons, à partir des paramètres du modèle de Weibull, exprimer la contrainte moyenne de rupture $\overline{\sigma}$ et l'écart-type Δ

$$\overline{\sigma} = \sigma_0 + \frac{\sigma_u}{V^{\frac{1}{m}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right) \tag{A.5}$$

$$\Delta^2 = \frac{\sigma_u^2}{V^{\frac{1}{m}}}\left(\Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) - \Gamma^2\left(\frac{m+1}{m}\right)\right) \tag{A.6}$$

Avec

$$\Gamma(n) = (n-1) \quad \text{pour n entier} \tag{A.7}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty (n-1)e^{-s}s^{x-1}ds \quad \text{pour x réel} \tag{A.8}$$

Ainsi une augmentation du volume de l'éprouvette conduit à une chute de la contrainte moyenne. Cette relation sur les contraintes moyennes permet d'effectuer des changements d'échelle sur la contrainte moyenne. Connaissant la contraite moyenne de rupture d'un lot de laboratoire de volume V_2 nous pouvons en déduire la contraite moyenne de rupture d'une eprouvette d'un volume V_1 par

$$\frac{\overline{\sigma_1}}{\overline{\sigma_2}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{A.9}$$

De la même façon lorsque le volume augmente l'écart-type augmente donc la dispersion des contraintes de rupture devient plus importante.

A.2 Estimation des paramètres de Weibull

Pour chaque type d'essai de N éprouvettes on classe par ordre i croissant [18] les contraintes de rupture σ_{Ri}. Pour chaque σ_{Ri} la probabilité de rupture P_{Ri} est calculé à partir de l'estimateur standard A.10. Il existe d'autres formes d'estimateurs. Afin de choisir le plus adapté, il convient de sélectionner une méthode de détermination des paramètres de la loi statistique, comme la méthode linéaire ou du maximum de vraisemblance par exemple, et un critère comme le coefficient de corrélation par exemple pour la méthode linéraire. Ainsi il faut déterminer le couple idéal estimateur / méthode de détermination des paramètres. Dans le cas d'une détermination linéaire des paramètres de la loi statistique c'est l'estimateur standard A.10, dont la formule est donnée ci-dessous, qui donne les coefficients de corrélation les plus élevés pour les mousses d'aluminium.

$$P_{Ri} = \frac{i}{N+1} \tag{A.10}$$

Ensuite, il faut choisir quelle loi statistique convient le mieux à la description de chaque essai. Le critère de détermination peut être la minimisation de la somme du carré des écarts entre l'expérience et la loi statistique théorique. Ainsi, pour chaque distribution, on évalue les paramètres de la loi statistique et ensuite à l 'aide du critère nous déterminons quelle est la statistique la plus adaptées.

Pour la statistique de Weibull, on peut déterminer les coefficients de la loi en utilisant la méthode linéaire. Pour cela, grâce à l'estimateur A.10 on trace pour chaque essai la courbe $Ln[Ln(\frac{1}{1-P_R})]$ en fonction de $Ln(\sigma)$ (voir figure 1.15 du chapitre 1 de la partie 3). La loi de Weibull est vérifiée si les points s'alignent sur une droite dont la pente est égale au module de Weibull m. Une simple régression linéaire permet alors de déterminer les paramètres de la loi statistique de Weibull.

[18] i étant le rang de l'essai

Annexe B

La méthode des éléments finis

B.1 Résolution d'un problème général de mécanique

Le problème que nous allons devoir résoudre est celui d'un milieu continu [19] occupant à l'instant t, dans un repère fixe, un domaine $\Omega(t)$ de frontière $\delta\Omega(t)$. Sous l'action de contraintes surfaciques $\vec{T}$ ou de vitesses imposées $\vec{V}$ sur l'ensemble ou seulement une partie de sa frontière, ce milieu va se déformer. Il est alors caractérisé par la position des points matériels, son état de contrainte et ses paramètres internes (comme sa densité locale dans le cas d'une mousse). Résoudre le problème aux limites de l'évolution de ce corps au cours du temps revient à calculer à chaque instant ces grandeurs caractéristiques en fonction des vitesses et des efforts surfaciques imposés sur la frontière. La position, l'état de contrainte et les valeurs des paramètres internes sont supposés connus à l'instant initial. Si on considère un domaine Ω alors on doit résoudre l'équilibre du problème de dynamique suivant :

$$div(\sigma) = \rho(\Gamma - g) \qquad \text{sur le domaine } \Omega \tag{B.1}$$

où Ω est le domaine considéré, ρ est la densité du matériau, g l'accelération de la pesanteur et Γ l'accelération.

La condition d'incompressibilité [20] s'écrit :

$$div(v) = 0 \tag{B.2}$$

A chaque instant t, le système est en équilibre sous l'effet des forces décrites ci-dessus. Imaginons maintenant un mouvement virtuel du système. La puissance fournie au cours de ce mouvement va permettre de calculer la valeur des forces qui maintiennent le système en équilibre, et qui opposent leur résistance au mouvement virtuel. Cela relève du même concept qui consiste à soulever une masse pour en déterminer le poids. Le principe des puissances virtuelles stipule alors que pour un solide déformable soumis à un champ de vitesse virtuel $\vec{V}^*$ que la puissance des quantités d'accelération est égale à la puissance virtuelle de toutes les forces appliquées au système, tant extérieures qu'intérieures (équation B.3).

$$\mathcal{P}^*_{accelration} = \mathcal{P}^*_{intrieure} + \mathcal{P}^*_{extrieure} \tag{B.3}$$

Explicitons maintenant cet énoncé en considérant la puissance d'une grandeur comme étant le produit scalaire entre la grandeur vectorielle considérée et la vitesse associée au mouvement :

[19] Même si cela est criticable d'un point de vue de la cellule

[20] Cependant, les mousses étant des matériaux compressibles, on aura $div(v) \neq 0$

– Puissance virtuelles des quantités d'accelération

$$\mathcal{P}^*_{accelration} = \int_\Omega \rho\vec{\gamma}.\vec{v}^* d\Omega \tag{B.4}$$

– Puissance virtuelles des efforts extérieurs
Les efforts extérieurs étant constitués des forces volumiques à distance (telle que l'action de la pesanteur) et des forces de surfaces, représentées ici respectivement par $\vec{F}$ et $\vec{T}$, nous avons donc :

$$\mathcal{P}^*_{extrieures} = \int_\Omega \rho\vec{F}.\vec{v}^* d\Omega + \int_{\delta\Omega} \vec{T}.\vec{v}^* d(\delta\Omega) \tag{B.5}$$

– Puissance virtuelles des efforts intérieurs
Le principe des puissances virtuelles nous permet d'expliciter cette dernière quantité à l'aide de l'équation B.3.

$$\mathcal{P}^*_{intrieure} = \mathcal{P}^*_{accelration} - \mathcal{P}^*_{extrieure}$$

$$\mathcal{P}^*_{intrieure} = \int_\Omega \rho\vec{\gamma}.\vec{v^*} d\Omega - \int_\Omega \rho\vec{F}.\vec{v^*} d\Omega + \int_{\delta\Omega} \vec{T}.\vec{v^*} d(\delta\Omega)$$

$$\mathcal{P}^*_{intrieure} = \int_\Omega \rho(\vec{\gamma} - \vec{F}).\vec{v^*} d\Omega - \int_{\delta\Omega} (\sigma\vec{n}).\vec{v^*} d(\delta\Omega) \tag{B.6}$$

On introduit maintenant $\dot{\varepsilon}^*$ le tenseur eulerien des vitesses de déformation virtuelles associé à $\vec{v}^*$. Par définition $\dot{\varepsilon}^*$ est égal à la partie symétrique du gradient de $\vec{v}^*$ soit :

$$\dot{\varepsilon}^* = \frac{1}{2}\left[grad\vec{v}^* + (grad\vec{v}^*)^T\right] \tag{B.7}$$

En appliquant le théorème de la divergence au dernier terme de l'équalité B.6 puis en utilisant l'équation d'équilibre B.1, on obtient la puissance des efforts intérieurs par :

$$\mathcal{P}^*_{intrieure} = -\int_\Omega \sigma : \dot{\varepsilon}^* d\Omega \tag{B.8}$$

Nous pouvons maintenant écrire le principe des puissances virtuelles par :

$$\underbrace{\int_\Omega \rho\vec{\gamma}.\vec{v^*} d\Omega}_{\mathcal{P}^*_{accelration}} = \underbrace{\int_\Omega \rho\vec{F}.\vec{v^*} d\Omega + \int_{\delta\Omega} \vec{T}.\vec{v}^* d(\delta\Omega)}_{\mathcal{P}^*_{exterieure}} + \underbrace{\int_\Omega \sigma : \dot{\varepsilon}^* d\Omega}_{\mathcal{P}^*_{intrieure}} \tag{B.9}$$

Dans le cas de LS-DYNA 3D, et comme dans tous les codes dit explicites, le terme d'inertie n'est jamais négligé. Résoudre l'équilibre de la pièce consiste donc à déterminer le champ de vitesses virtuelles satisfaisant le PPV, ce qui suppose la connaissance de chaque terme qui le compose. Le terme relatif à la pesanteur est déterminé facilement en considérant que g, l'accelération de la pesanteur, est constante à la fois dans le temps et dans l'espace. Nous devons donc connaître également les relations liant le tenseur des contraintes σ au tenseur des déformations ε. Ces relations constitutives sont également appelées lois de comportement ou lois matériaux dans les codes éléments finis. Dans le cas de codes dit implicite le terme d'inertie peut être négligé ou non, il appartient à l'utilisateur de connaitre les hypothèses retenus par le code de calcul et d'orienter son choix en fonction de l'application visée. La résolution de cette équation d'équilibre continue nécessite à la fois une discrétisation temporelle et une discrétisation spatiale.

B.2 Discrétisation spatiale

B.2.1 Démarche générale

Les équations différentielles décrites précédemment sont des équations continues le plus souvent impossibles à résoudre de manière analytique. Il est donc nécessaire de discrétiser spatialement notre domaine Ω afin de faire apparaître un nombre fini de points matériels et de passer de la formulation continue à une formulation discrète.

Cette discrétisation spatiale peut s'effectuer en utilisant la méthode des éléments finis. Le principe de cette méthode est d'approximer le volume Ω de la pièce par un assemblage de volumes élémentaires appelés éléments (comme des tétrahèdres par exemple). Il apparaît d'emblée que la solution du problème continu sera approchée dans l'espace par un nombre fini de valeurs dépendant de la qualité de la discrétisation géométrique donc, en d'autres termes, de la finesse du maillage.

Le volume Ω est donc discrétisé en $Nelt$ éléments, eux-même composés d'un nombre Nel de noeuds. Ainsi le volume Ω comporte $Nbnoe$ noeuds, chacun ayant un numéro local (compris entre 1 et Nel) dans l'élément et un numéro global compris entre 1 et $Nbnoe$ à l'échelle du maillage. La position de chaque noeud est représentée par le vecteur $\vec{x_i}$, la position de l'ensemble des noeuds du maillage est définie par un vecteur $\vec{X}$ dont les composantes sont au nombre de $Nbnoe * dim$, dim étant la dimension de l'espace cartésien considéré (1, 2 ou 3). Le domaine Ω devient alors le domaine $\Omega(\vec{X})$.

En chaque noeud du maillage, on choisit des variables intéressantes qui sont appélées variables nodales. On définit alors des fonctions d'interpolation permettant de connaître les valeurs de ces variables en tout point à l'intérieur de l'élément à partir des valeurs nodales de cet élément. La fonction d'interpolation de l'élément elt associée au noeud N est notée Ψ_N^{elt}. Par définition, elle est égale à 1 au noeud N et nulle sur les autres noeuds de l'élément.

$$\forall N, M \in elt, \quad \Psi_N^{elt}(\vec{x_M}) = \delta_{NM} \tag{B.10}$$

Le choix des fonctions d'interpolation est important car ce sont elles qui assurent la continuité des variables nodales d'un élément à l'autre. Chaque élément du maillage étant amené à se déformer, on peut alors le considérer comme l'image, par une bijection, de l'élément de référence non déformé. Cette bijection de l'espace de référence $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ vers l'espace réel $X(x, y, z)$ est appelée fonction de forme. Lorsqu'on connaît les fonctions d'interpolation de l'élément de référence, on peut trouver les fonctions d'interpolation de l'élément par l'intermédiaire de la matrice Jacobienne J de passage du repère ξ de référence au repère X courant avec

$$J_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} \tag{B.11}$$

L'élément est dit isoparamétrique lorsque les coordonnées spatiales sont interpolées comme les variables nodales soit

$$\vec{X} = \sum_{N=1}^{Nel} \vec{X_N} \Psi_N^{elt}(\xi, \eta, \zeta) \tag{B.12}$$

Ainsi on peut discrétiser par exemple le champ de déplacement $\vec{\Delta X}$ en tout point du maillage, repéré par le vecteur $\vec{x}$, et cela en utilisant les fonctions d'interpolation étendues à l'ensemble du domaine (i.d. Ψ_n est nulle à l'extérieur du domaine formé par les éléments qui contiennent le noeud N). On a alors

$$\vec{\Delta X}(\vec{x}) = \sum_{N=1}^{Nbnoe} \Psi_N(\vec{x}) \vec{\Delta X_N}(\vec{x}) \tag{B.13}$$

Soit en notation indicielle :

$$\Delta X_i = \Psi_N \Delta X_{Ni} \tag{B.14}$$

De même pour le champ de vitesse :

$$v_i = \Psi_N V_{Ni} \tag{B.15}$$

Et pour le champ des accelérations :

$$\gamma_i = \Psi_N \Gamma_{Ni} \tag{B.16}$$

D'après l'équation B.7 le tenseur des vitesses de déformation s'écrit donc

$$\dot{\varepsilon}^* = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Psi_N}{\partial x_j} V_{Ni} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial x_i} V_{Nj}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Psi_N}{\partial x_j}\delta_{ki} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial x_i}\delta_{kj}\right] V_{Nk} \tag{B.17}$$

On peut donc introduire l'opérateur de B de dérivation symétrique en écrivant $\dot{\varepsilon}^* = B_{ijkN} V_{Nk}$ avec

$$B_{ijkN} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Psi_N}{\partial x_j}\delta_{ki} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial x_i}\delta_{kj}\right] \tag{B.18}$$

A partir du principe des puissances virtuelles B.3, définissons le résidu $\delta\pi$ en regroupant tous les termes d'un seul coté de l'égalité

$$\delta\pi = \underbrace{\int_\Omega \rho \vec{\gamma}.\vec{v^*} d\Omega}_{\mathcal{P}^*_{accelration}} - \underbrace{\int_\Omega \rho \vec{F}.\vec{v^*} d\Omega - \int_{\delta\Omega} \vec{T}.\vec{v^*} d(\delta\Omega)}_{\mathcal{P}^*_{extrieure}} - \underbrace{\int_\Omega \sigma : \dot{\varepsilon}^* d\Omega}_{\mathcal{P}^*_{intrieure}} = 0 \tag{B.19}$$

Cette équation est une équation scalaire qui va être résolue en chaque noeud du maillage, on peut adopter deux stratégies d'écriture pour la forme discrétisée :

- Une écriture matricielle détaillée en chaque noeud, on construit donc un vecteur comportant les trois composantes de chaque noeud soit $3 * Nbnoeu$ composantes et raisonner donc en numéro de noeud global, cependant, dans les faits, il est impossible de procéder de la sorte car cela demanderait un espace mémoire beaucoup trop important pour stocker les matrices ainsi on lui préfère :
- Une écriture matricielle conservant une somme sur les éléments donc avec des vecteurs comportant $3 * Nel$ et raisonner alors en numéro de noeud local par élément.

A l'aide de la discrétisation spatiale des champs $\vec{v^*}$ et $\dot{\varepsilon}^*$ on peut expliciter le premier terme de cette dernière équation :

$$\int_\Omega \rho \vec{\gamma}.\vec{v^*} d\Omega = \underbrace{\sum_{m=1}^{Nelt}}_{\text{Sommation sur les éléments}} \left\{ \underbrace{\int_\Omega \rho \sum_{N=1}^{Nel} \Psi_N \Gamma_{Ni} \left(\sum_{M=1}^{Nel} \Psi_M V^*_{Mi} \right) d\Omega}_{\text{Sommation sur les noeuds de l'élément}} \right\} \tag{B.20}$$

De plus comme toutes les expressions sont écrites $\forall V^*$ on peut le simplifier dans chaque expression et on obtient alors une écriture vectorielle de ce terme

$$\int_\Omega \rho \vec{\gamma}.\vec{v^*} d\Omega \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=1}^{Nelt} \left\{ \int_\Omega \rho \sum_{N=1}^{Nel} \Psi_N \left(\sum_{M=1}^{Nel} \Psi_M \right) \Gamma_{Ni} \quad d\Omega \right\} \tag{B.21}$$

Si on introduit alors la matrice d'interpolation locale[21] Ψ^k en la définissant comme suit

$$\Psi_{loc} = \begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_{Nel} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Psi_{Nel} \end{pmatrix} \tag{B.22}$$

Et le vecteur [22]$\vec{A}$ des accelérations nodales par

$$\vec{A} = A^t = \vec{\Gamma} = \Gamma^t = \begin{pmatrix} \Gamma_{1x} \\ \Gamma_{1y} \\ \Gamma_{1z} \\ \Gamma_{2x} \\ \Gamma_{2y} \\ \vdots \\ \Gamma_{Nely} \\ \Gamma_{Nelz} \end{pmatrix} \tag{B.23}$$

On a donc alors pour le terme d'accelération

$$\int_\Omega \rho \vec{\gamma}.\vec{v^*} d\Omega \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=1}^{Nelt} \left\{ \underbrace{\int_\Omega \rho \Psi_{loc}^T \Psi_{loc} d\Omega \quad \vec{A}}_{\text{Ecriture matricielle sur un élément}} \right\} \tag{B.24}$$

en définissant la matrice de masse locale [23]M par

$$M = \int_\Omega \rho \Psi_{loc}^T \Psi_{loc} d\Omega \tag{B.25}$$

On obtient la forme matricielle du terme d'inertie par $M\vec{A}$. Cependant, afin de faciliter la résolution numérique, il est commode de diagonaliser la matrice de masse, cela est effectué en additionnant les termes d'une ligne et en placant le résultat sur la diagonale. La matrice de masse M devient la matrice de masse condensée C. Ceci a pour effet de changer le vecteur issu de ce calcul donc il faut adapter l'écriture des autres termes de cette équation d'équilibre.

Par exemple pour le terme d'énergie interne on a

$$\int_\Omega \sigma : \dot{\varepsilon}^* d\Omega \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \sigma_{ij} B_{ijkN} V_{Nk}^* d\Omega \tag{B.26}$$

En posant le vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ par

$$\vec{\sigma}(x;y;z) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x;y;z) \\ \sigma_{yy}(x;y;z) \\ \sigma_{zz}(x;y;z) \\ \sigma_{xy}(x;y;z) \\ \sigma_{yz}(x;y;z) \\ \sigma_{xz}(x;y;z) \end{pmatrix} \tag{B.27}$$

Puis en introduisant la forme matricielle de l'opérateur de dérivation symétrique ainsi

[23] C'est à dire sur un élément donné

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \Psi_{loc} \tag{B.28}$$

On obtient donc pour le terme d'énergie interne en notation matricielle

$$\int_\Omega \sigma : \dot{\varepsilon}^* d\Omega \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=1}^{Nelt} \left\{ \int_\Omega B^T \vec{\sigma}(x;y;z) d\Omega \right\} \tag{B.29}$$

De la même facon, pour les forces de masse on pose

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} f_x(x;y;z) \\ f_y(x;y;z) \\ f_z(x;y;z) \end{pmatrix} \tag{B.30}$$

et pour les forces extérieures appliquées aux bornes du domaine

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} t_x(x;y;z) \\ t_y(x;y;z) \\ t_z(x;y;z) \end{pmatrix} \tag{B.31}$$

En faisant de même pour les autres termes, on obtient la forme discrète et matricielle de l'équation d'équilibre

$$\sum_{N=1}^{Nelt} \left\{ \underbrace{\int_\Omega \rho \Psi_{loc}^T \Psi^T \quad \vec{A} d\Omega}_{\mathcal{P}^*_{accelration}} - \underbrace{\int_\Omega \rho \Psi^T \vec{b} d\Omega + \int_{\delta\Omega} \Psi^T \vec{t} d(\delta\Omega)}_{\mathcal{P}^*_{extrieure}} - \underbrace{\int_\Omega B^T \vec{\sigma} d\Omega}_{\mathcal{P}^*_{intrieure}} \right\} = 0 \tag{B.32}$$

Ainsi, en notation matricielle réduite, on peut considérer que le problème revient à résoudre l'équation classique de la dynamique

$$M\vec{A} = F_{ext} - F_{int} \tag{B.33}$$

B.2.2 Choix des éléments et problèmes associés :

Les bureaux d'études industriels sont les principaux débouchés commerciaux des codes éléments finis. En effet, de part leur conception, il permettent aux utilisateurs de simuler des systèmes complexes en un temps de calcul raisonnable. C'est pour parvenir à ces performances sur les temps de calcul que la plupart des éléments disponibles dans ces codes sont dits sous intégrés, c'est à dire qu'ils possèdent bien moins de points de Gauss que de noeuds. Pour bien fixer les idées, prenons l'exemple d'un élément présent à la fois dans RADIOSS et LS-DYNA 3D : La brique à huit noeuds et à un point d'intégration (voir figure B.1)

Ainsi l'équation B.12 devient

$$\vec{X} = \sum_{N=1}^{8} \vec{X_N} \Psi_N^{elt}(\xi, \eta, \zeta) \tag{B.34}$$

Les fonctions de forme Ψ sont définies pour la brique à huit noeuds de la façon suivante

$$\Psi_N = \frac{1}{8}(1-\xi\xi_N)(1-\eta\eta_N)(1-\zeta\zeta_N) \tag{B.35}$$

où (ξ_N, η_N, ζ_N) sont les coordonées (ξ, η, ζ) des noeuds qui prennent $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ comme valeurs dans le repère local (ξ, η, ζ) attaché à l'élément.

Noeuds	ξ	η	ζ
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

TAB. B.1 – Coordonnées nodales sur l'élément non déformé

Les derivées locales s'expriment en fonction coordonnées absolues par

$$\frac{\partial \Psi_N}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi_N}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{B.36}$$

$$\frac{\partial \Psi_N}{\partial \eta} = \frac{\partial \Psi_N}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} \tag{B.37}$$

$$\frac{\partial \Psi_N}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Psi_N}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta} \tag{B.38}$$

Cela peut être réécrit avec J le jacobien du changement de repére global / local par

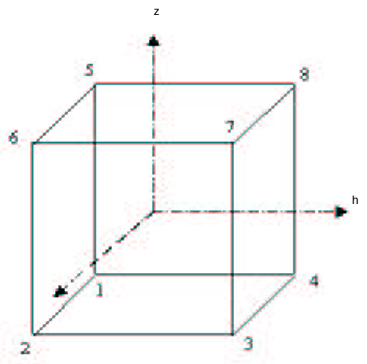


FIG. B.1 – La brique à 8 noeuds

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Psi_N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Psi_N}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_N}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_N}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_N}{\partial z} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_N}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_N}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_N}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{B.39}$$

On résout alors les intégrales de volumes à l'aide d'une méthode de Gauss. Pour une fonction f définie sur le volume Ω et n le nombre de points d'intégration [24] on a alors

$$\int_\Omega f d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\ |J|\ d\xi d\eta d\zeta \tag{B.40}$$

qui est approximé par

$$\int_\Omega f d\Omega \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f(\xi_j, \eta_k, \zeta_l)\ |J_{jkl}|\ w_j w_k w_l \tag{B.41}$$

où $w_j w_k w_l$ sont les poids des points d'intégration et $|J_{jkl}|$ est le déterminant de la matrice jacobienne. Dans le cas de notre brique à 8 noeuds et un point d'intégration nous avons

$$n = 1 \qquad w_j = w_k = w_l = 2 \qquad \xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0 \tag{B.42}$$

Ainsi l'intégrale volumique devient

$$\int_\Omega f d\Omega \approx 8 f(0,0,0)\ |J_{0,0,0}| \tag{B.43}$$

Le principal avantage des éléments sous intégrés est une économie substantielle en temps de calcul. Par exemple, le temps pour calculer le tenseur des déformations est à peu près 25 fois moindre que lorsque l'on choisit des éléments intégrés totalement (brique à huit noeuds d'intégration). En effet, si on explicite cette matrice on se rend compte qu'elle est anti-symétrique car

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_j} = -\frac{\partial \Psi_7}{\partial x_j} \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_j} = -\frac{\partial \Psi_5}{\partial x_j} \tag{B.44}$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_j} = -\frac{\partial \Psi_8}{\partial x_j} \quad \frac{\partial \Psi_4}{\partial x_j} = -\frac{\partial \Psi_6}{\partial x_j} \tag{B.45}$$

De plus cette économie se propage pour le calcul des déplacements et des forces appliquées aux noeuds, le nombre de multiplication est alors réduit d'un facteur 16. Et comme nous avons besoin d'une évaluation du terme d'énergie interne où la loi de comportement intervient, le temps de calcul pour évaluer le tenseur des contraintes est réduit par un facteur 8. Cependant le fait d'utiliser des éléments sous-intégrés ne présente pas que des avantages. Le plus gros inconvénient de ce genre d'éléments est de provoquer parfois des modes de déformation à énergie nulle ou *effet sablier* [25] constatation graphique d'oscillations sur la déformée.

[24] Appelés aussi point de Gauss

[25] Plus connu sous leur dénomination anglaise : hourglassing mode

Vecteurs aux noeuds	Modes d'Hourglass			
	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$
$\Gamma_{\alpha 1}$	1	1	1	1
$\Gamma_{\alpha 2}$	-1	1	-1	-1
$\Gamma_{\alpha 3}$	1	-1	-1	1
$\Gamma_{\alpha 4}$	-1	-1	1	-1
$\Gamma_{\alpha 5}$	1	-1	-1	-1
$\Gamma_{\alpha 6}$	-1	-1	1	1
$\Gamma_{\alpha 7}$	1	1	1	-1
$\Gamma_{\alpha 8}$	-1	1	-1	1

TAB. B.2 – Coordonnées nodales des différents vecteurs de bases pour les 4 modes d'hourglass d'une brique à huit noeuds

B.2.3 Le contrôle de l'effet sablier

Des modes sabliers non désirés tendent à avoir des périodes qui sont typiquement plus petites que les périodes de réponses structurales. Une technique pour contrer ces modes indésirables est l'utilisation de viscosité artificielle ou encore l'utilisation d'un écrouissage élastique capable de stopper la formation de ces modes déformation mais ayant un effet négligeable sur les modes globaux de déformations stables. Lorsque les modes sabliers sont orthogonaux à la déformation réelle le travail réalisé par les forces d'hourglass résistante est négligeable dans l'écriture du PPV. Il est aisé de comprendre les raisons de la formation des modes d'hourglass. Prenons l'exemple de la brique à huit noeuds et un point d'intégration et calculons le tenseur des taux de déformation.

$$\dot{\varepsilon}^* = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{8}\left[\frac{\partial \Psi_N}{\partial x_j}V_{Ni} + \frac{\partial \Psi_N}{\partial x_i}V_{Nj}\right] \tag{B.46}$$

Lorsque les noeuds diagonalement opposés ont des vitesses identiques soit

$$V_1 = V_7 \quad V_2 = V_8 \quad V_3 = V_5 \quad V_4 = V_6 \tag{B.47}$$

Le tenseur des vitesses de déformation est égal à zéro $\dot{\varepsilon}^* = 0$ à cause des anti-symétrie présentes sur les dérivées des fonctions de formes.

Les vecteurs de bases d'hourglass sont en fait définis à chaque noeud (il en a donc huit) pour chaque mode d'hourglass (4 dans le cas de la brique à huit noeuds et un point d'intégration voir figure B.2)

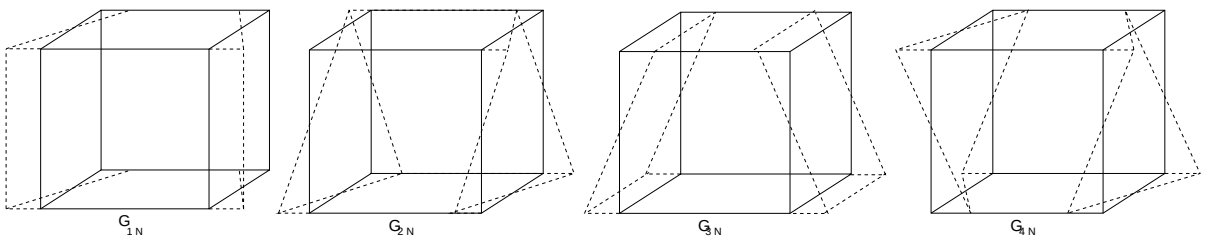


FIG. B.2 – Les 4 modes d'hourglass de la brique à 1 point d'intégration

On peut alors prouver l'orthogonalité des vecteurs de bases d'hourglass présentés dans le tableau B.2 et détaillés en figure B.2 avec les dérivées des fonctions de formes.

$$\sum_{N=1}^{8} \frac{\partial \Psi_N}{\partial x_i} \Gamma_{\alpha N} = 0 \qquad i = 1,2,3 \qquad \alpha = 1,2,3,4 \tag{B.48}$$

De plus le produit $h_{\alpha i}$ des vecteurs d'hourglass et des vitesses nodales est differents de zéro lorsque le mode d'hourglass est présent ainsi :

$$h_{\alpha i} = \sum_{N=1}^{8} V_{Ni} \Gamma_{\alpha N} \neq 0 \qquad \text{si un mode d'hourglass est présent} \tag{B.49}$$

On définit alors 12 vecteurs forces qui vont contrer ces modes par

$$f_{N\alpha i} = a_h h_{\alpha i} \Gamma_{\alpha N} \tag{B.50}$$

avec

$$a_h = Q_h g \rho d\Omega^{\frac{2}{3}} \frac{c}{4} \tag{B.51}$$

dans laquelle[26] $d\Omega$ est l'élément de volume, c la vitesse du son dans le matériau considéré et $Q_h g$ est une constante définie par l'utilisateur qui prend usuellement des valeurs comprises entre 0.05 et 0.15.

B.3 Discrétisation temporelle

C'est au niveau de la discrétisation temporelle que les différences entre les codes implicites et explicites sont les plus marquées.

B.3.1 Cas des codes explicites

Pour la résolution de problèmes non linéaires, seules les méthodes numériques conviennent. Les codes dit explicites utilisent un schéma d'intégration en difference finies centrales. Au temps t nous devons résoudre l'équation d'équilibre spatiale

$$M\vec{A}^t = F^t_{ext} - F^t_{int} + H^t \tag{B.52}$$

où H^t represente les effets des vecteurs de correction d'hourglass.

Pour passer du temps t au temps $t+1$ nous utilisons le schéma de discrétisation suivant :

$$\Gamma^t = M^t \left(F^t_{ext} - F^t_{int} + H^t \right) \tag{B.53}$$

$$V^{t+\frac{1}{2}} = V^{n-\frac{1}{2}} + \Gamma^t \Delta t^t \tag{B.54}$$

$$U^{t+1} = U^t + V^{t+\frac{1}{2}} \Delta t^{t+\frac{1}{2}} \tag{B.55}$$

$$\Delta^{t+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t^t + \Delta t^{t+1}}{2} \tag{B.56}$$

Où V et U sont respectivement les vitesses nodales globales et les déplacements.

La géométrie courante est mise à jours en ajoutant l'incrément de déplacement à la géométrie initiale.

[26] Il existe d'autres méthodes de prise en compte des modes d'hourglass dans DYNA 3D et RADIOSS mais le but de ce document est de présenter globalement les équations et non de détailler explicitement toutes les options disponibles dans les codes

Calcul du pas de temps

Une des caractéristique du schéma d'intégration temporelle en différences finies centrale est sa stabilité conditionelle. En effet le pas de temps ne peut pas être supérieure au temps que met une onde élastique pour parcourir un élément cela se traduit donc par une condition dépendant du type d'élément utilisé, ainsi pour une brique à huit noeuds et un point d'intégration on a l'incrément de temps critique Δt_e est donné par

$$\Delta t_e < \frac{L_e}{c} \tag{B.57}$$

avec L_e la longueur caractéristique de l'élément et c la vitesse du son à l'intérieur du matériau. Dans le cas de la brique à huit noeuds et un point d'intégration on a

$$L_e = \frac{\nu_e}{A_{emax}} \tag{B.58}$$

ou ν_e est le volume de l'élément considéré et A_{emax} est l'aire de la face la plus grande.

Ainsi, au cours d'un calcul sur un maillage déformé, le pas de temps de l'incrément suivant est le minimum des pas de temps admissibles sur chaque éléments minoré par un coefficient de sécurité ainsi

$$\Delta t^{t+1} = \alpha \quad min(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \cdots, \Delta t_N) \tag{B.59}$$

Pour des raisons de stabilité α est choisit le plus souvent égal à $0,9$. On doit toutefois remarquer que l'utilisation d'un critère compressible avec ce type de schéma peut conduire à des difficultés lors de la résolution. En effet, imaginons un élément de type brique à huit noeud subissant une compression avec un module de Poisson plastique nul. Il va donc y avoir une diminution du volume de l'élément alors que sa surface maximale va rester globalement constante. Ainsi, d'après les formules détaillées ci-dessus, le pas de temps va chuter fortement ce qui pénalisera le temps de calcul et peut même conduire à une instabilité puisqu'on peut atteindre alors les limites de la précision numérique du calculateur.

Calcul de la contrainte

La contrainte pour les matériaux qui présentent un comportement élasto-plastique est intégrée de facon incrémentale en temps

$$\sigma_{ij}^{t+dt} = \sigma_{ij}^{t} + \dot{\sigma}_{ij} dt \tag{B.60}$$

où $\dot{\sigma}_{ij}$ désigne une dérivée par rapport au temps objective. En effet celle-ci doit être indépendante du référentiel d'observation (c'est à dire tenir compte du mouvement de celui-ci par rapport à un repère absolu) ce qui n'est point le cas de la dérivée particulaire utilisée habituellement. C'est pourquoi LS-DYNA 3D et RADIOSS utilisent la dérivée de Jaumann donnée par

$$\widehat{\dot{\sigma}}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}\Omega_{kj} - \sigma_{jk}\Omega_{ki} \tag{B.61}$$

dans laquelle Ω_{ij} représente le tenseur des rotations matérielles

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial X_j} - \frac{\partial V_j}{\partial X_i}\right) \tag{B.62}$$

On a donc

$$\dot{\sigma}_{ij} = \widehat{\dot{\sigma}}_{ij} + \sigma_{ij}\Omega_{kj} + \sigma_{jk}\Omega_{ki} \tag{B.63}$$

D'autre part on pose

$$\widehat{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{B.64}$$

où C_{ijkl} est le module tangent élastique continu [27] dépendant de la loi de comportement choisie.

L'implémentation de l'équation B.61 est réalisée comme suit : ajout de la partie rotation matérielle des contraintes puis de la contrainte de Jaumann de facon incrémentale.

$$\sigma_{ij}^{t+1} = \sigma_{ij}^{t} + \omega_{ij}^{t} + \widehat{\sigma}_{ij}^{t+\frac{1}{2}}\Delta t^{t+\frac{1}{2}}$$

où on a

$$\widehat{\sigma}_{ij}^{t+\frac{1}{2}}\Delta t^{t+\frac{1}{2}} = C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^{t+\frac{1}{2}}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{t+\frac{1}{2}} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{t+\frac{1}{2}}\Delta t^{t+\frac{1}{2}} \tag{B.65}$$

Et ω_{ij}^{t} donne les rotations matérielles de la contrainte du temps t au temps $t+1$

$$\omega_{ij}^{t} = \left(\sigma_{ip}^{t}\Omega_{pj}^{t+\frac{1}{2}} + \sigma_{jp}^{t}\Omega_{pi}^{t+\frac{1}{2}}\right)\Delta t^{t+\frac{1}{2}} \tag{B.66}$$

On peut noter ici des différences avec les codes dit implicites. Dans la plupart des cas, ces codes effectuent une demi rotation, appliquent la loi de comportement et complètent la deuxième partie de la rotation sur la contrainte déja modifiée. Ainsi une rotation exacte est effectuée à comparer à celle, approximative, décrite par l'équation B.62 qui n'est valide que pour les petites rotations car elle néglige les termes de second degrés. On doit toutefois noter que le pas de temps caractéristique de la résolution d'un problème de structure à l'aide d'un code implicite est environ 100 à 1000 fois plus important que celui d'un code explicite alors l'utilisation de la méthode décrite dans les équations B.65 dans un code implicite pourrait conduire à faire des erreurs très importantes.

B.3.2 Cas des codes implicites

Les codes implicites n'utilisent pas un schéma d'intégration en différence finie centrale mais tout simplement un schéma qualifié d'implicite. Le schéma peut être décrit de la sorte

$$\Gamma^{t} = M^{t}\left(F_{ext}^{t} - F_{int}^{t} + H^{t}\right) \tag{B.67}$$

$$V^{t+1} = V^{t} + \frac{1}{2}\Delta t\left[\Gamma^{t} + \Gamma^{t+1}\right] \tag{B.68}$$

$$U^{t+1} = U^{t} + \frac{1}{2}\Delta t\left[V^{t} + V^{t+1}\right] \tag{B.69}$$

Ainsi le calcul de variables au temps $t+1$ dépend non seulement de la connaissance de variables au temps t mais également de la connaissance de variable au temps $t+1$. La résolution d'un tel shéma

[27] C'est ici que l'on peut constater une différence avec les codes dit implicites par l'utilisation d'un module tangent consistant

d'intégration nécessite donc l'utilisation d'un solveur incrémental [28]. Ce sont les itérations du solveur utilisé qui sont pénalisantes au niveau du temps de calcul surtout si le critère de convergence choisit à chaque incrément est difficile à atteindre. De plus, lors de l analyse d'un problème oú un traitement précis des conditions de contact est nécessaire, une boucle supplémentaire vient s'ajouter afin d'assurer une condition de non pénétration par exemple. En conséquence, de petits incréments de temps doivent être utilisés afin de minimiser le nombre d'itérations induites par un changement des conditions de contact au cours de l'incrément. En conclusion, l'optimisation du temps de calcul lors de l'utilisation d'un code implicite pour simuler un problème comportant des conditions de contact nécessite de réaliser un compromis entre le choix d'un petit pas de temps et les itérations suplémentaires nécessaire à la convergence lors de l'utilisation d'un pas de temps plus important.

[28] A l'aide d'une méthode de Runge-Kunta par exemple

Annexe C

Analyse de bifurcation en multi-axial

Nous développons ici le calcul de l'orientation de la première bande de localisation dans les cas multi-axiaux. Le cas de la traction / compression ayant été traité dans le chapitre 3 de la partie 4.

Application au cisaillement/torsion

Dans le cas du cisaillement simple dans le plan 1-2,

$$[P] = \frac{\sqrt{3C}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{C.1}$$

On obtient,

$$n_1^2 = \frac{1}{2} \tag{C.2}$$

i.e. des bandes à 45° des axes principaux de déformation, ce qui correspond à nouveau à des bandes horizontales dans la direction de cisaillement. Une simulation par éléments finis donne effectivement ce résultat (figure C.1).

Les essais de cisaillement réalisés sur mousse semblent indiquer une rupture parallèlement à la direction de cisaillement dans un premier stade. En revanche, en torsion on observe plutôt un faciès en spirale indiquant une rupture selon la direction principale positive de traction.

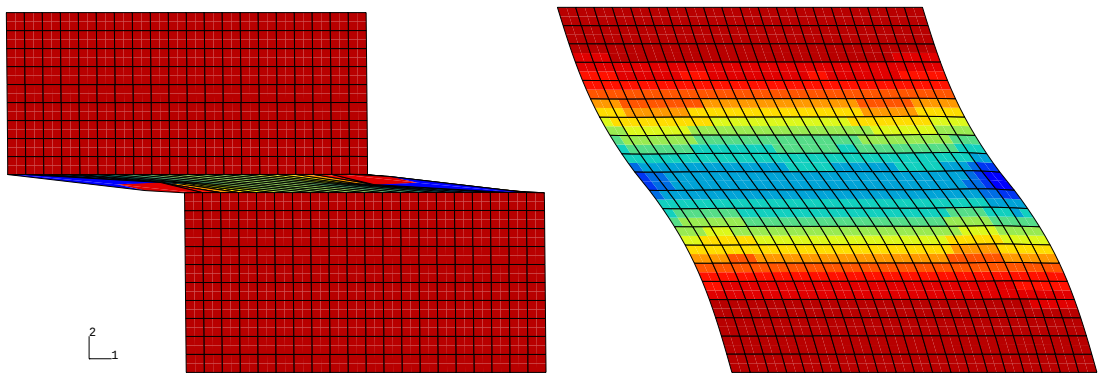


FIG. C.1 – Simulation d'un essai de glissement simple avec une mousse élastoplastique compressible avec pic : cas classique à gauche, cas régularisé avec un milieu micromorphe à droite (composante ε_{12}).

Application au traction/compression/torsion combinées

Lorsqu'un chargement biaxial de traction/torsion est imposé,

$$[P] = \frac{1}{\hat{\sigma}} \begin{bmatrix} (F-\frac{C}{2})\sigma & \frac{3}{2}C\tau & 0 \\ \frac{3}{2}C\tau & (C+F)\sigma & 0 \\ 0 & 0 & (F-\frac{C}{2})\sigma \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{(C+F)\sigma^2 + 3C\tau^2} \tag{C.3}$$

Le cas particulier $F = C/2$ est simple à étudier. La direction d'écoulement et ses directions principales sont :

$$[P] = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{C.4}$$

$$P_1 = \frac{3}{4}C(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad P_2 = \frac{3}{4}C(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \tag{C.5}$$

En introduisant un chargement proportionnel

$$\frac{\tau}{\sigma} = \tan\alpha \tag{C.6}$$

on trouve alors

$$n_1^2 = \cos^2\alpha_n = \frac{\sqrt{1+4\tan^2\alpha} - 1}{2\sqrt{1+4\tan^2\alpha}} \tag{C.7}$$

La première direction principale a pour coordonnées :

$$\cos^2\alpha_1 = \frac{4\tan^2\alpha}{(1-\sqrt{1+4\tan^2\alpha})^2}(1 + \frac{4\tan^2\alpha}{(1-\sqrt{1+4\tan^2\alpha})^2})^{-1} \tag{C.8}$$

$$\sin^2\alpha_1 = (1 + \frac{4\tan^2\alpha}{(1-\sqrt{1+4\tan^2\alpha})^2})^{-1} \tag{C.9}$$

On s'aperçoit alors que la somme des deux angles $\alpha_n + \alpha_1$ vaut toujours 90° quel que soit α (en calculant $\cos(\alpha_n + \alpha_1)$ par exemple). Cela signifie que les bandes de localisation sont toujours horizontales.

La rupture en spirale observée en torsion et pour les chargements dominés par la torsion n'est pas compatible avec la prévision de l'analyse de bifurcation. Cela semble indiquer que le mode de rupture n'est pas dicté par le critère de rupture/plasticité retenu. Cela plaide en faveur d'un modèle de plasticité non associé, modélisation qui n'a pas été entreprise dans ce travail.

Des modes de localisation différents et peut–être plus proches des observations expérimentales peuvent aussi être obtenus en couplant plasticité (i.e. ici endommagement) et élasticité. En effet, dans le modèle utilisé dans ce travail, nous avons choisi par simplicité de ne pas dégrader l'élasticité pendant la déformation, ce qui bien sûr n'est pas très réaliste. Il faudrait donc conduire l'analyse de bifurcation proposée dans [Bigoni et al.91b] pour des modèles d'endommagement couplé.

Annexe D

Dépendance des résultats vis–à–vis du maillage et méthode de régularisation

D.1 Mise en évidence de la dépendance vis–à–vis du maillage

On montre ici que la simulation des phénomènes de localisation dans un matériau élastoplastique adoucissant dans les conditions précédentes conduit à des résultats fortement dépendant de la taille d'élément fini choisie. On a préconisé dans les sections précédentes de choisir une taille d'élément de l'ordre de grandeur de la taille moyenne des cellules de la mousse considérée.

On illustre ce phénomène dans le cas d'un exemple simple quasi–uniaxial. On considère une plaque de largeur 10 et de hauteur 100. Des maillages comportant 20, 30, 40, 50, 60, 100 et 200 éléments quadratiques à intégration réduite sont utilisés successivement. Le comportement du matériau est décrit par une loi élastoplastique isotrope avec un critère elliptique. On choisit :

$$\nu = 0 \quad \text{et} \quad F = \frac{C}{2} \tag{D.1}$$

de sorte qu'aucune déformation ni écoulement latéral n'est observé en traction selon la longueur de la plaque (axe 2, voir figure D.1). On considère un écrouissage linéaire avec adoucissement de la forme :

$$R = R_0 + Hp \tag{D.2}$$

Les paramètres matériau choisis sont :

$$E = 146\text{MPa}, C = 1, F = 0.5, R_0 = 1\text{MPa}, H = -1\text{MPa}. \tag{D.3}$$

Un défaut (une variation de 0.01% de la limite d'élasticité) est introduit dans un élément central.

La figure D.2 montre la réponse globale force/déplacement en fonction du raffinement du maillage utilisé. On constate une chute de la charge à partir d'un certain point correspondant à la localisation de la déformation dans un seul élément. Plus le maillage est fin, plus la chute est brutale et précoce. La figure D.3 donne le profil de déformation le long d'une ligne verticale obtenu en fin de calcul, i.e. pour une charge quasi–nulle pour les maillages à 20x2 et 40x2 éléments et pour la dernière carte de calcul obtenue pour le maillage à 60 éléments. On constate que la déformation est localisée en une rangée de points d'intégration dans chaque cas.

Cette dépendance s'explique classiquement par la perte d'ellipticité du système d'équations aux dérivées partielles du problème aux limites considéré [Besson et al.01]. Il existe alors une infinité de solutions au problème ne dépendant pas d'une manière continue des conditions aux limites.

D.2 Exemple de méthode de régularisation : le milieu micromorphe

On appelle méthode de régularisation un enrichissement du modèle élastoplastique considéré ou de la technique numérique de résolution utilisée permettant de s'affranchir de la dépendance des résultats vis–à–vis du maillage lors de la simulation des phénomènes de localisation. La méthode de régularisation restaure en général le caractère elliptique / bien posé du problème aux limites. On s'intéresse ici aux méthodes de régularisation faisant appel à la mécanique des milieux continus généralisés [Besson et al.01, dB91, dB93, Borst et al.93]. On en distingue trois classes principales :

- Les milieux continus d'ordre supérieur introduisent des degrés de liberté supplémentaires en plus du déplacement (microrotation pour le milieu de Cosserat, microdéformation pour le milieu micromorphe).
- Les milieux de degré supérieur incorporent des gradients du déplacement d'ordre plus élevé que dans le cas classique (comme le milieu du second gradient). On peut aussi se contenter d'introduire des gradients de variables internes telles que la déformation plastique cumulée.
- Les milieux non locaux les plus généraux font appel à une formulation intégrale de la loi de comportement. On choisit alors une fonction noyau traduisant les interactions non locales.

Ces modèles ont en commun l'introduction d'une ou plusieurs longueurs caractéristiques [Forest et al.03].

Pour des raisons de généralité et de simplicité d'implémentation numérique, on choisit de tester les capacités du milieu micromorphe à régulariser les calculs élastoplastiques compressibles adoucissants présentés précédemment. Il s'agit par conséquent d'une extension de la méthodologie proposée pour un milieu de Cosserat dans [dB91], au cas micromorphe. Dans le cas des matériaux, le choix d'un milieu de Cosserat est insuffisant car il ne prend en compte que des gradients de rotation alors que les gradients de déformation (symétriques) peuvent a priori jouer un rôle tout aussi important dans un milieu poreux.

Le milieu micromorphe est caractérisé par les deux champs indépendants que sont le déplacement u et la microdéformation χ, i.e. par 3+9 degrés de liberté dans le cas tridimensionnel. La microdéformation χ est représentée par un tenseur du second ordre sans symétrie particulière et décrit donc aussi bien des rotations que des déformations pures. Le champ de microdéformation n'est pas nécessairement compatible et, en particulier, n'est pas nécessairement égal au gradient du déplacement. Les mesures de déformation associées sont la déformation classique ε, la déformation relative e et le gradient de la microdéformation K :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{D.4}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \chi_{ij} \tag{D.5}$$

$$K_{ijk} = \chi_{ij,k} \tag{D.6}$$

où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport à la composante indiquée dans un système de coordonnées cartésiennes. A ces mesures de déformation sont associées dans le principe des travaux virtuels des tenseurs de contraintes correspondants, à savoir le tenseur des contraintes de Cauchy σ symétrique associé à ε, le tenseur non nécessairement symétrique s associé à e et un tenseur d'ordre trois dits d'hypercontraintes M [Germain73]. Ces tenseurs de contraintes obéissent à deux jeux d'équations d'équilibre, écrites ici en l'absence d'efforts volumiques :

$$(\sigma_{ij} + s_{ij})_{,j} = 0 \tag{D.7}$$

$$M_{ijk,k} + s_{ij} = 0 \tag{D.8}$$

Des lois de comportement sont nécessaires liant les tenseurs de déformations aux tenseurs de contraintes. Le cas de l'élasticité linéaire a été explicité par Mindlin [Mindlin64]. Les lois d'élasticité

prennent la forme suivante :

$$\sigma = c : \varepsilon + g : e \tag{D.9}$$

$$s = g : \varepsilon + b : e \tag{D.10}$$

$$M = A \vdots K \tag{D.11}$$

où les tenseurs des modules d'élasticité b, c, g sont d'ordre 4 tandis que A est d'ordre 6. Dans le cas isotrope ces relations deviennent :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + g_1 e_{pp} \delta_{ij} + g_2 (e_{ij} + e_{ji}) \tag{D.12}$$

$$s_{ij} = g_1 \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2 g_2 \varepsilon_{ij} + b_1 e_{pp} \delta_{ij} + b_2 e_{ij} + b_3 e_{ji} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned} M_{pqr} &= A_1 (K_{rii} \delta_{pq} + K_{iip} \delta_{qr}) + A_2 (K_{iiq} \delta_{pr} + K_{iri} \delta_{pq}) + A_3 K_{jjr} \delta_{pq} \\ &+ A_4 K_{pii} \delta_{qr} + A_5 (K_{ipi} \delta_{qr} + K_{qii} \delta_{pr}) + A_8 K_{iqi} \delta_{pr} \\ &+ A_{10} K_{pqr} + A_{11} (K_{qrp} + K_{rpq}) + A_{13} K_{prq} + A_{14} K_{qpr} + A_{15} K_{rqp} \end{aligned} \tag{D.14}$$

où $7 + 11 = 18$ modules d'élasticité apparaissent :
$\lambda, \mu, g_1, g_2, b_1, b_2, b_3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_8$ et $A_{10}, A_{11}, A_{13}, A_{14}, A_{15}$. On notera que les coefficients A_i ont pour unité MPa . m^2. La densité d'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_1 e_{ii} e_{jj} + \frac{1}{2} b_2 e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} b_3 e_{ij} e_{ji} + g_1 \varepsilon_{ii} e_{jj} + g_2 \varepsilon_{ij} (e_{ij} + e_{ji}) \\ &+ A_1 K_{iik} K_{kkj} + A_2 K_{iik} K_{jkj} + \frac{1}{2} A_3 K_{iik} K_{jkk} + \frac{1}{2} A_4 K_{ijj} K_{ikk} \\ &+ A_5 K_{ijj} K_{kik} + \frac{1}{2} A_8 K_{iji} K_{kjk} + \frac{1}{2} A_{10} K_{ijk} K_{ijk} \\ &+ A_{11} K_{ijk} K_{jki} + \frac{1}{2} A_{13} K_{ijk} K_{ikj} + \frac{1}{2} A_{14} K_{ijk} K_{jik} + \frac{1}{2} A_{15} K_{ijk} K_{kji} \end{aligned} \tag{D.15}$$

On ne considère dans la suite que le cas où les termes de couplages associés aux constantes g_i sont nuls. La théorie du second gradient fait, elle–aussi, intervenir un tenseur d'élasticité d'ordre 6 qui dans le cas isotrope est caractérisé par 5 constantes au lieu des 11 précédentes :

$$A_1 = A_2, A_3, A_4 = A_5 = A_8, A_{10} = A_{14}, A_{11} = A_{13} = A_{15}$$

Dans le cas simplifié proposé dans [Shu et al.99], la troisième relation d'élasticité est écrite :

$$M_{ijk} = l_e^2 c_{ijpq} u_{pq,k} \tag{D.16}$$

ce qui peut être supposé aussi dans le cas micromorphe :

$$A_1 = A_3 = A_4 = l_e^2 \lambda, A_{10} = A_{11} = l_e^2 \mu$$

ce qui réduit le nombre de constantes A_i à une seule longueur caractéristique l_e.

D.3 Implémentation dans un code par éléments finis

On montre ici le cas de la programmation de l'élément micromorphe et du comportement élastique dans le cas bidimensionnel (déformation et contraintes planes). Le vecteur des degrés de liberté en chaque nœud s'écrit :

$$[d.o.f] = [U_1\ U_2\ X_{11}\ X_{22}\ X_{12}\ X_{21}]^T \tag{D.17}$$

Le vecteur des déformations s'écrit :

$$[grad] = [\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{22}\ \varepsilon_{33}\ \varepsilon_{12}\ e_{11}\ e_{22}\ e_{33}\ e_{12}\ e_{21}\ K_{111}\ K_{112}\ K_{121}\ K_{122}\ K_{211}\ K_{212}\ K_{221}\ K_{222}]^T \tag{D.18}$$

La matrice $[B]$ liant les déformations aux degrés de liberté s'écrit dans le cas des déformations planes :

$$[grad] = [B]\ [d.o.f] \tag{D.19}$$

$$[B] = \begin{bmatrix}
\partial_{x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \partial_{x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\partial_{x_2} & \frac{1}{2}\partial_{x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\partial_{x_1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \partial_{x_2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\partial_{x_2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & \partial_{x_1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & \partial_{x_1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \partial_{x_2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{x_1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{x_2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \partial_{x_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \partial_{x_2} & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{D.20}$$

où $\partial_{x_i} = \partial \cdot / \partial x_i$. Les déformations planes exigent $\varepsilon_{33} = e_{33} = 0$. Dans le cas des contraintes planes, on adopte la technique consistant à introduire ε_{33} et e_{33} comme degrés de liberté supplémentaires partagés par chaque élément. Les réactions associées correspondent aux contraintes σ_{33} et s_{33}. En imposant la nullité de ces réactions, on obtient les contraintes planes mais d'autres conditions peuvent aussi être considérées.

Le vecteur des contraintes correspondant s'écrit :

$$[flux] = [\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{33}\ \sigma_{12}\ s_{11}\ s_{22}\ s_{33}\ s_{12}\ s_{21}\ M_{111}\ M_{112}\ M_{121}\ M_{122}\ M_{211}\ M_{212}\ M_{221}\ M_{222}]^T \tag{D.21}$$

La matrice d'élasticité isotrope liant les déformations et contraintres d'ordre 3 prend la forme :

$$
\left[\begin{array}{c} M_{111} \\ M_{112} \\ M_{121} \\ M_{122} \\ M_{211} \\ M_{212} \\ M_{221} \\ M_{222} \end{array}\right] =
\left[\begin{array}{cccccccc}
A & 0 & 0 & (A_1+A_4+A_5) & 0 & (A_2+A_5+A_8) & (A_1+A_2+A_3) & 0 \\
0 & (A_3+A_{10}+A_{14}) & (A_2+A_{11}+A_{13}) & 0 & (A_1+A_{11}+A_{15}) & 0 & 0 & (A_1+A_2+A_3) \\
0 & (A_2+A_{11}+A_{13}) & (A_8+A_{10}+A_{15}) & 0 & (A_5+A_{11}+A_{14}) & 0 & 0 & (A_2+A_5+A_8) \\
(A_1+A_4+A_5) & 0 & 0 & (A_4+A_{10}+A_{13}) & 0 & (A_5+A_{11}+A_{14}) & (A_1+A_{11}+A_{15}) & 0 \\
0 & (A_1+A_{11}+A_{15}) & (A_5+A_{11}+A_{14}) & 0 & (A_4+A_{10}+A_{13}) & 0 & 0 & (A_1+A_4+A_5) \\
(A_2+A_5+A_8) & 0 & 0 & (A_5+A_{11}+A_{14}) & 0 & (A_8+A_{10}+A_{15}) & (A_2+A_{11}+A_{13}) & 0 \\
(A_1+A_2+A_3) & 0 & 0 & (A_1+A_{11}+A_{15}) & 0 & (A_2+A_{11}+A_{13}) & (A_3+A_{10}+A_{14}) & 0 \\
0 & (A_1+A_2+A_3) & (A_2+A_5+A_8) & 0 & (A_1+A_4+A_5) & 0 & 0 & A
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} K_{111} \\ K_{112} \\ K_{121} \\ K_{122} \\ K_{211} \\ K_{212} \\ K_{221} \\ K_{222} \end{array}\right]
$$

avec $A = 2A_1 + 2A_2 + A_3 + A_4 + 2A_5 + A_8 + A_{10} + 2A_{11} + A_{13} + A_{14} + A_{15}$.

La formulation variationnelle est une extension immédiate du cas classique sous la forme :

$$\int_\Omega (\sigma : \dot{\varepsilon} + s : \dot{e} + M \vdots \dot{K})\, dV = \int_{\partial\Omega} (t.\dot{u} + T.\dot{\chi})\, dS \tag{D.22}$$

avec les conditions aux limites :

$$t = (\sigma + s).n, \quad T = M.n \tag{D.23}$$

où n désigne le vecteur normal en un point de la frontière $\partial\Omega$. La formulation éléments finis du problème consiste alors à discrétiser le principe précédent [Besson et al.01].

D.4 Validation de l'élément fini micromorphe : extension simple en élasticité

On considère la cinématique suivante unidimensionnelle :

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi = \begin{bmatrix} \chi_{11}(x_2) & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22}(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{D.24}$$

de sorte que les déformations ont la forme simple suivante :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} -\chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{2,2} - \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_{11,2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \chi_{22,2} \end{bmatrix} \tag{D.25}$$

où $\cdot_{,2}$ signifie la dérivée partielle par rapport à x_2. Les tenseurs des contraintes s'écrivent :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \lambda u_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) u_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda u_{2,2} \end{bmatrix} \tag{D.26}$$

$$s = \begin{bmatrix} b_1(u_{2,2} - \chi_{11} - \chi_{22}) - (b_2 + b_3)\chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_1(u_{2,2} - \chi_{11} - \chi_{22}) + (b_2 + b_3)(u_{2,2} - \chi_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & b_1(u_{2,2} - \chi_{11} - \chi_{22}) - (b_2 + b_3)\chi_{11} \end{bmatrix} \tag{D.27}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ (A_3 + A_{10} + A_{14})\chi_{11,2} + (A_1 + A_2 + A_3)\chi_{22,2} \\ (A_2 + A_{11} + A_{13})\chi_{11,2} + (A_2 + A_5 + A_8)\chi_{22,2} \\ 0 \\ (A_1 + A_{11} + A_{15})\chi_{11,2} + (A_1 + A_4 + A_5)\chi_{22,2} \\ 0 \\ 0 \\ (A_1 + A_2 + A_3)\chi_{11,2} + A\chi_{22,2} \end{bmatrix} \tag{D.28}$$

Les équations d'équilibre se simplifient pour donner :

$$\begin{cases} (\sigma_{22} + s_{22})_{,2} = 0 \\ M_{112,2} + s_{11} = 0 \\ M_{222,2} + s_{22} = 0 \end{cases} \tag{D.29}$$

Il en résulte le système différentiel suivant dont les inconnues sont $(u_2, \chi_{11}, \chi_{22})$:

$$\begin{cases} \bar{\lambda} u_{2,22} - b_1 \chi_{11,2} - b_2 \chi_{22,2} = 0 \\ A'' \chi_{11,22} + A' \chi_{22,22} + b_1 (u_{2,2} - \chi_{22}) - b \chi_{11} = 0 \\ A' \chi_{11,22} + A \chi_{22,22} + b (u_{2,2} - \chi_{22}) - b_1 \chi_{11} = 0 \end{cases} \tag{D.30}$$

où les notations abrégées suivantes ont été introduites :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \lambda + 2\mu + b \\ b = b_1 + b_2 + b_3 \\ A' = A_1 + A_2 + A_3 \\ A" = A_{10} + A_{11} + A_{14} \end{cases} \tag{D.31}$$

On s'intéresse à des conditions aux limites du type suivant :

$$\begin{cases} u_2(0) = u_2(x_2 = L) = 0 \\ \chi_{11}(0) = \chi_{11}(L) = 0 \\ \chi_{22}(0) = 0, \quad \chi_{22}(L) = \chi_0 \end{cases} \tag{D.32}$$

où χ_0 est donné et imposé. La solution du problème est alors unique. Nous l'avons déterminée de manière numérique et utilisée pour valider le calcul par élément fini (test `microb3.inp`). La figure D.4 donne les profils trouvés pour un jeu de paramètres.

Une solution particulièrement simple existe lorsque les constantes élastiques supplémentaires sont liées par la relation suivante :

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} = \frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3} \tag{D.33}$$

En effet, la composante χ_{11} est alors identiquement nulle et le système à résoudre se réduit à deux équations :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} u_{2,22} - b \chi_{22,2} = 0 \\ a \chi_{22} + b (u_{2,2} - \chi_{22}) = 0 \end{cases} \tag{D.34}$$

On en déduit l'équation régissant la distribution de χ_{22} :

$$\chi_{22,222} - \omega^2 \chi_{22,2} = 0 \tag{D.35}$$

où intervient l'inverse d'une longueur :

$$\omega = \sqrt{\frac{b(\lambda + 2\mu)}{A\bar{\lambda}}} \tag{D.36}$$

La solution est donc de la forme :

$$\begin{cases} \chi_{22} = A \cosh(\omega x_2) + B \sinh(\omega x_2) \\ u_2 = \frac{b}{\omega \bar{\lambda}} (A \sinh(\omega x_2) + B \cosh(\omega x_2)) + D x_2 + E \end{cases} \tag{D.37}$$

Les constantes d'intégration A, B, C, D et E sont déterminées grâce aux conditions aux limites (D.32). La deuxième équation du système (D.34) implique la relation :

$$C = D$$

Les 4 conditions aux limites conduisent alors aux relations :

$$A + C = 0$$

$$A\cosh(\omega L) + B\sinh(\omega L) + C = \chi_0$$

$$\frac{bB}{\omega\bar{\lambda}} + E = 0$$

$$\frac{b}{\omega\bar{\lambda}}(A\sinh(\omega L) + B\cosh(\omega L)) + DL + E = 0$$

On donne l'expression finale de A, les autres constantes s'en déduisant :

$$A\left(\cosh(\omega L) - 1 - \sinh(\omega L)\frac{\frac{b\sinh(\omega L)}{\omega\bar{\lambda}} - L}{\frac{b}{\omega\bar{\lambda}}(\cosh(\omega L) - 1)}\right) = \chi_0 \tag{D.38}$$

Dans les tests `microb1.inp` et `microb2.inp`, la solution analytique obtenue est comparée avec succès à la solution numérique par éléments finis (cf. figure D.5).

D.5 Elastoplasticité micromorphe

On propose deux extensions au cas micromorphe du modèle élastoplastique compressible basé sur le critère elliptique, dans l'esprit de [dB93, Forest et al.03]. Les mesures de déformation sont divisées en contributions élastiques et plastiques :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad e = e^e + e^p, \quad K = K^e + K^p \tag{D.39}$$

Les relations d'élasticité (D.9) à (D.11) sont toujours valables à condition de remplacer dans ces équations chaque mesure de déformation par sa partie élastique.

Plasticité avec un seul critère

On introduit un critère de plasticité $F(\sigma, s, M)$ fonction des trois tenseurs de contraintes. La contrainte équivalent fait intervenir des invariants des trois tenseurs :

$$F(\sigma, s, M) = \sigma_{eq} - R(p) \tag{D.40}$$

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2}C\sigma^{dev} : \sigma^{dev} + F(\operatorname{trace}\sigma)^2 + a_1 s^{dev} : s^{dev} + a_2 s^{dev} : s^{devT} + a_3(\operatorname{trace} s)^2 + bM{:}M \tag{D.41}$$

On n'a retenu que l'invariant $M_{ijk}M_{ijk}$ parmi les 5 possibles par simplicité. Les lois d'écoulement résultent de la loi de normalité généralisée :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{p}\frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad \dot{e}^p = \dot{p}\frac{\partial F}{\partial s}, \quad \dot{K}^p = \dot{p}\frac{\partial F}{\partial M} \tag{D.42}$$

L'unique multiplicateur $\dot{p}$ s'obtient en écrivant la condition de cohérence généralisée, lorsque $F = 0$:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial s} : \dot{s} + \frac{\partial F}{\partial M} \vdots \dot{M} = 0 \tag{D.43}$$

Le multiplicateur plastique s'exprime finalement par :

$$\dot{p} = \frac{H_1}{H_2 + H_3 - H_4} \tag{D.44}$$

avec

$$H_1 = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : c : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial s} : b : \dot{e} + \frac{\partial F}{\partial M} \vdots A \vdots \dot{K} \tag{D.45}$$

$$H_2 = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : c : \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial s} : b : \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial M} \vdots A \vdots \frac{\partial F}{\partial M} \tag{D.46}$$

$$H_3 = \frac{dR}{dp}, \quad H_4 = \frac{\partial F}{\partial f}(1-f)\mathrm{trace}\,(\frac{\partial F}{\partial \sigma}) \tag{D.47}$$

La contribution H_4 est due à une possible dépendance des paramètres en fonction de la porosité f, variable dont l'évolution est donnée par

$$\dot{f} = (1-f)\mathrm{trace}\,\dot{\varepsilon}^p \tag{D.48}$$

comme dans le cas classique.

Plasticité multi–critères

On introduit trois contraintes équivalentes et trois critères de plasticité distincts :

$$F_1(\sigma) = \sigma_{eq} - R(p), \quad F_2(s) = s_{eq} - R_s(p_s), \quad F_3(M) = M_{eq} - R_k(\kappa), \tag{D.49}$$

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} C\sigma^{dev} : \sigma^{dev} + F(\mathrm{trace}\,\sigma)^2 \tag{D.50}$$

$$s_{eq}^2 = \frac{3}{2} a_1 s^{dev} : s^{dev} + \frac{3}{2} a_2 s^{dev} : s^{devT} + a_3(\mathrm{trace}\,s)^2, \quad M_{eq}^2 = M \vdots M \tag{D.51}$$

Les lois d'écoulement font intervenir trois multiplicateurs plastiques distincts associés à chaque mécanisme :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{p}\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}, \quad \dot{e}^p = \dot{p}_s \frac{\partial F_2}{\partial s}, \quad \dot{K}^p = \dot{\kappa}\frac{\partial F_3}{\partial M}, \tag{D.52}$$

$$\dot{p} = \frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial \sigma} : c : \dot{\varepsilon}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial \sigma} : c : \dfrac{\partial F_1}{\partial \sigma} + \dfrac{dR}{dp} - H_4} \tag{D.53}$$

$$\dot{p}_s = \frac{\dfrac{\partial F_2}{\partial s} : b : \dot{e}}{\dfrac{\partial F_2}{\partial s} : b : \dfrac{\partial F_2}{\partial s} + \dfrac{dR_s}{dp_s}} \tag{D.54}$$

$$\dot{\kappa} = \frac{\dfrac{\partial F_3}{\partial M} \vdots A \vdots \dot{K}}{\dfrac{\partial F_3}{\partial M} \vdots A \vdots \dfrac{\partial F_3}{\partial M} + \dfrac{dR_k}{d\kappa}} \tag{D.55}$$

On pourrait aussi introduire des couplages entre les mécanismes par l'intermédiaire des fonctions d'écrouissage R, R_s et R_k. Pour simplifier, on s'en tient ici à la version non couplée.

D.6 Première application à la localisation de la déformation

On reprend le problème de la traction d'une plaque élastoplastique compressible adoucissante traité dans le cas classique au paragraphe D.1. La géométrie et les paramètres matériaux du modèle classique sont identiques (figure D.1 et équation (D.3).

On s'intéresse dans ce paragraphe au cas où les déformations plastiques e^p et K^p restent nulles pendant toute la simulation. Seule la déformation plastique classique ε^p est active. Dans ce cas les deux formulations de la plasticité micromorphe sont équivalentes. Il suffit de prendre $a_1 = a_2 = a_3 = b = 0$ dans la formulation à un seul critère (équation (D.41)), ou de prendre de seuils initiaux R_s et R_k très élevés dans la formulation multicritères (équation (D.49)). Les seuls paramètres pertinents à préciser sont alors les modules d'élasticité supplémentaires. On fait le choix suivant :

$$b_1 = \lambda, \quad b_2 = \mu, \quad b_3 = 1000\text{MPa}, \quad A_{1,\dots,15} = a \tag{D.56}$$

Les coefficients A_i sont donc pris tous égaux à une même valeur a que l'on va faire varier dans l'étude paramétrique de ce paragraphe.

La figure D.6 donne les résultats de simulations avec quatre maillages différents pour une même valeur $a = 1\text{MPa.mm}^2$. Elle doit être comparée à la figure D.2 obtenue dans le cas classique. On constate que la courbe de charge ne présente plus de chute brutale et est indépendante du maillage utilisé. Toutefois le phénomène de localisation de la déformation a toujours lieu comme l'indique la figure D.7. Les largeurs de bandes obtenues sont quasiment indépendantes du maillage utilisé et convergent en tout cas vers une valeur finie, contrairement au cas classique (cf. figure D.3). On remarque en outre qu'une simulation grossière avec 10 éléments est suffisante pour obtenir une bonne estimation de la solution.

La figure D.8 donne la courbe de charge obtenue pour d'autres valeurs de a. On constate qu'elle ne semble plus évoluer pour des valeurs de plus en plus faibles de a. Toutefois les résultats obtenus pour de très faibles valeurs de a dépendent quant à eux du maillage et on se retrouve pratiquement dans la situation classique.

La forme de la bande de localisation obtenue par éléments finis peut en fait être calculée analytiquement car la configuration considérée est très simple. Pour le montrer, on explicite le modèle de plasticité micromorphe dans le cas de la traction simple, en tenant compte des valeurs particulières des paramètres ν, C, F qui n'autorisent aucun écoulement ni déformation latérale :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{C+F}\,|\sigma_{22}| \tag{D.57}$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{22} = \dot{p}\sqrt{C+F} \tag{D.58}$$

$$\dot{p} = \frac{2\mu\sqrt{C+F}\dot{\varepsilon}_{22}}{2\mu(C+F)+H} \tag{D.59}$$

Pour le trajet monotone, on obtient donc :

$$p = \frac{2\mu\sqrt{C+F}}{2\mu(C+F)+H}\left(\varepsilon_{22} - \frac{R_0}{2\mu\sqrt{C+F}}\right) \tag{D.60}$$

On tient compte des équations d'équilibre et des relations d'élasticité :

$$\left\{\begin{array}{c} (\sigma_{22}+s_{22})_{,2} = 0 \\ M_{222,2} + s_{22} = 0 \\ \sigma_{22} = 2\mu(\varepsilon_{22}-\varepsilon^p_{22}) = \frac{2\mu}{2\mu(C+F)+H}(H\varepsilon_{22} + R_0\sqrt{C+F})s_{22} = 2\mu(\varepsilon_{22}-\chi_{22}) \\ M_{222} = A\chi_{22,2} \end{array}\right. \tag{D.61}$$

On obtient finalement un système de deux équations à deux inconnues $(\varepsilon_{22}, \chi_{22})$:

$$\begin{cases} \bar{H}\varepsilon_{22,2} + 2\mu(\varepsilon_{22,2} - \chi_{22,2}) = 0 \\ A\chi_{22,22} + 2\mu(\varepsilon_{22} - \chi_{22}) = 0 \end{cases} \tag{D.62}$$

avec

$$\bar{H} = \frac{2\mu H}{2\mu(C+F)+H} \tag{D.63}$$

La microdéformation χ_{22} est alors solution de l'équation

$$\chi_{22,222} - \frac{2\mu\bar{H}}{A(\bar{H}+2\mu)}\chi_{22,2} = 0 \tag{D.64}$$

On voit que lorsque H est négatif, la solution est sinusoïdale et la longueur d'onde s'exprime à l'aide de l'inverse de :

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu|\bar{H}|}{A(\bar{H}+2\mu)}} \tag{D.65}$$

On n'observe en fait qu'un seul arc de sinusoïde car la solution précédente n'est valable que si la condition de plasticité est remplie. En dehors de la bande, le matériau se décharge élastiquement. La figure D.9 montre que la largeur de bande obtenue par éléments finis est conforme à la prédiction théorique (D.65).

D.7 Deuxième application à la localisation de la déformation

On utilise ici le modèle de plasticité micromorphe multi–critères avec les lois d'écrouissage suivantes :

$$R = R_0 + Hp, \quad R_s = R_{0s} + H_s p_s, \quad R_\kappa = R_{0\kappa} + H_\kappa l_p^2 \kappa \tag{D.66}$$

Le module H est supposé négatif comme dans les exemples précédents tandis que les modules H_s et $H_\kappa l_p^2$ sont pris positifs. En plus des paramètres (D.3) et (D.56) on introduit donc les valeurs suivantes :

$$\begin{gathered} b_3 = \mu, \quad a = 25\text{MPa.mm}^2, \quad a_1 = C = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = F = 0.5 \\ H_s = 2\text{MPa}, \quad H_\kappa = 50\text{MPa}, \quad l_p = 1\text{mm} \\ R_0 = 1\text{MPa}, \quad R_{0s} = 0.0001\text{MPa}, \quad R_{0\kappa} = 0.0001\text{MPa.mm}^2 \end{gathered} \tag{D.67}$$

A nouveau, il est possible de prévoir analytiquement la forme des bandes de localisation. L'analyse est tout à fait similaire au calcul du paragraphe précédent, lorsqu'on prend en compte les relations d'élasticité :

$$\sigma_{22} = \frac{2\mu}{2\mu(C+F)+H}(H\varepsilon_{22} + R_0\sqrt{C+F}) \tag{D.68}$$

$$s_{22} = \frac{2\mu}{2\mu(a_1+a_3)+H_s}(H_s e_{22} + R_{s0}\sqrt{a_1+a_3}) \tag{D.69}$$

$$M_{222} = \frac{A}{A+H_\kappa l_p^2}(H_\kappa l_p^2 K_{222} + R_{0\kappa}) \tag{D.70}$$

On définit ensuite les modules suivants :

$$\bar{H} = \frac{2\mu H}{2\mu(C+F)+H}, \quad \bar{H}_s = \frac{2\mu H_s}{2\mu(a_1+a_3)+H_s}, \quad \bar{H}_\kappa = \frac{AH_\kappa}{A+H_\kappa l_p^2} \tag{D.71}$$

L'équation régissant χ_{22} a alors la même forme que (D.64). Pour un module H négatif, le profil de localisation est sinusoïdal de longueur d'onde liée à :

$$\omega = \sqrt{\frac{|\bar{H}|\bar{H}_s}{\bar{H}_\kappa l_p^2(\bar{H}+\bar{H}')}} \tag{D.72}$$

La figure D.10 montre que le profil de localisation trouvé par éléments finis est en accord avec la prédiction analytique.

D.8 Troisième application à la localisation de la déformation

On utilise ici le modèle élastoplastique micromorphe mono–critère avec différentes valeurs du paramètre b autorisant des valeurs non nulles de la contribution plastique K^p_{222}. Tous les autres paramètres gardent les valeurs utilisées dans le paragraphe précédent. En particulier, on garde $A_i = 1, \forall i$.

La figure D.11 montre les courbes de charge pour des valeurs croissantes de b. Lorsque b est nul, cela nous ramène au premier exemple de régularisation (paragraphe D.6). Plus b est grand, plus la chute de charge devient brutale. Pour un maillage donné, la courbe de charge ne varie plus pour des valeurs plus grandes de b. La figure D.12 donne les profils de localisation correspondants. Lorsque b diminue, la largeur de bande tend vers celle d'un élément environ. Pour des valeurs de b inférieures à 50 MPa.mm^{-2}, le maillage de 100 éléments est suffisant pour décrire la bande. Un raffinement supplémentaire ne modifie pas la solution. Aucune solution analytique n'est encore disponible pour ce modèle.

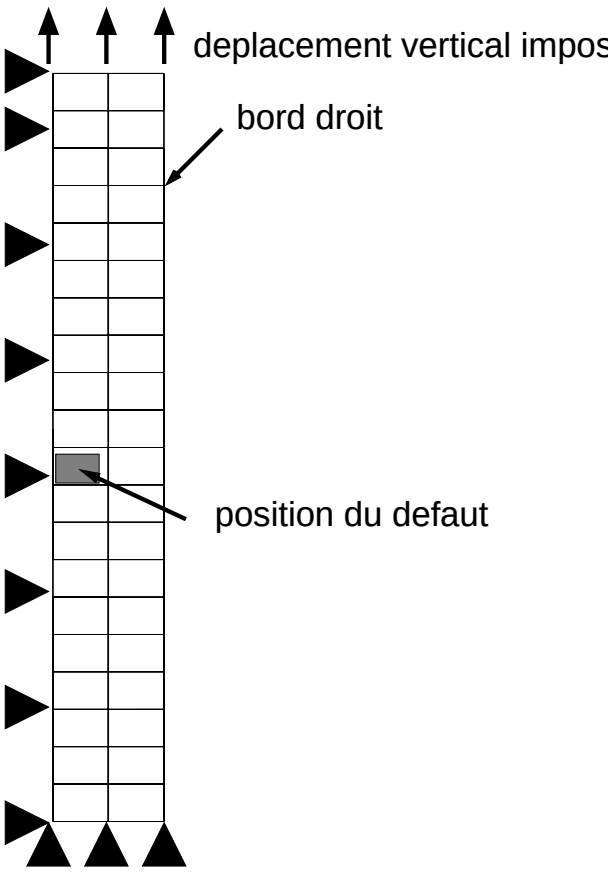


FIG. D.1 – Conditions de calcul d'une plaque élastoplastique en traction verticale.

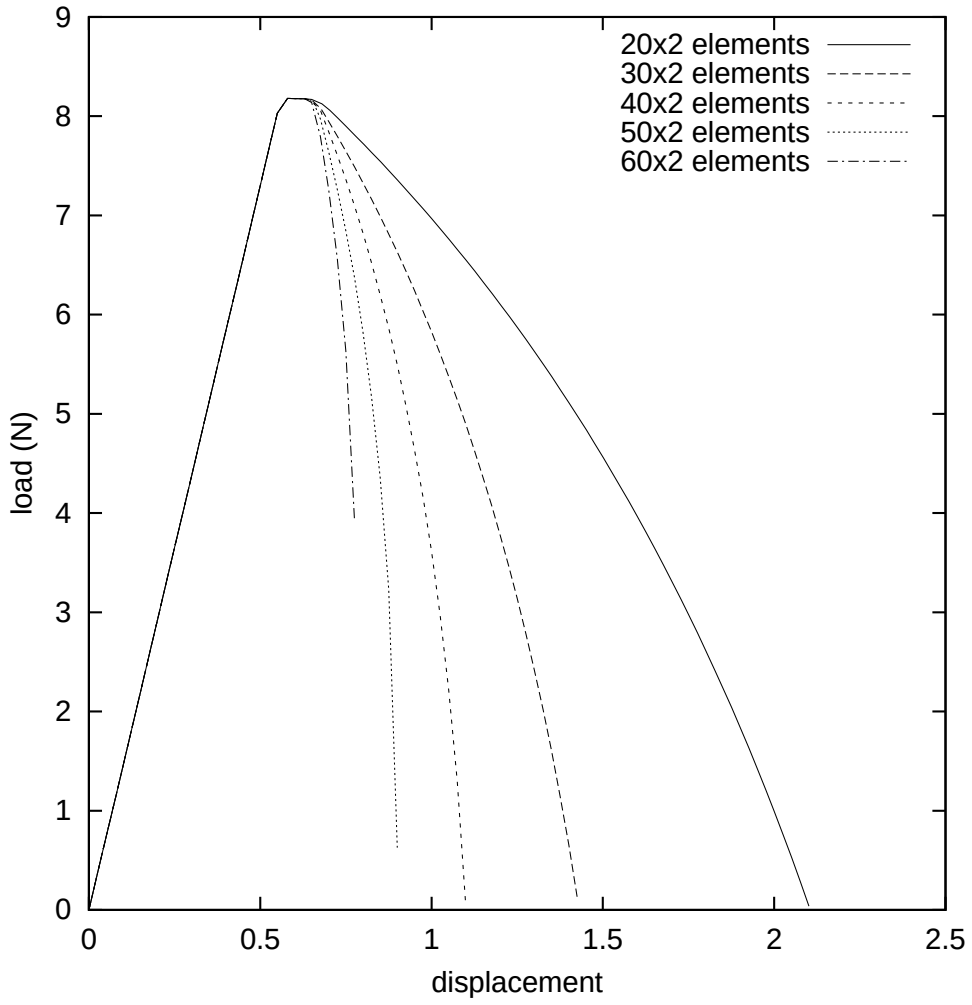


FIG. D.2 – Courbes de charge lors de la traction d'une plaque élastoplastique adoucissante, obtenues pour différents maillages.

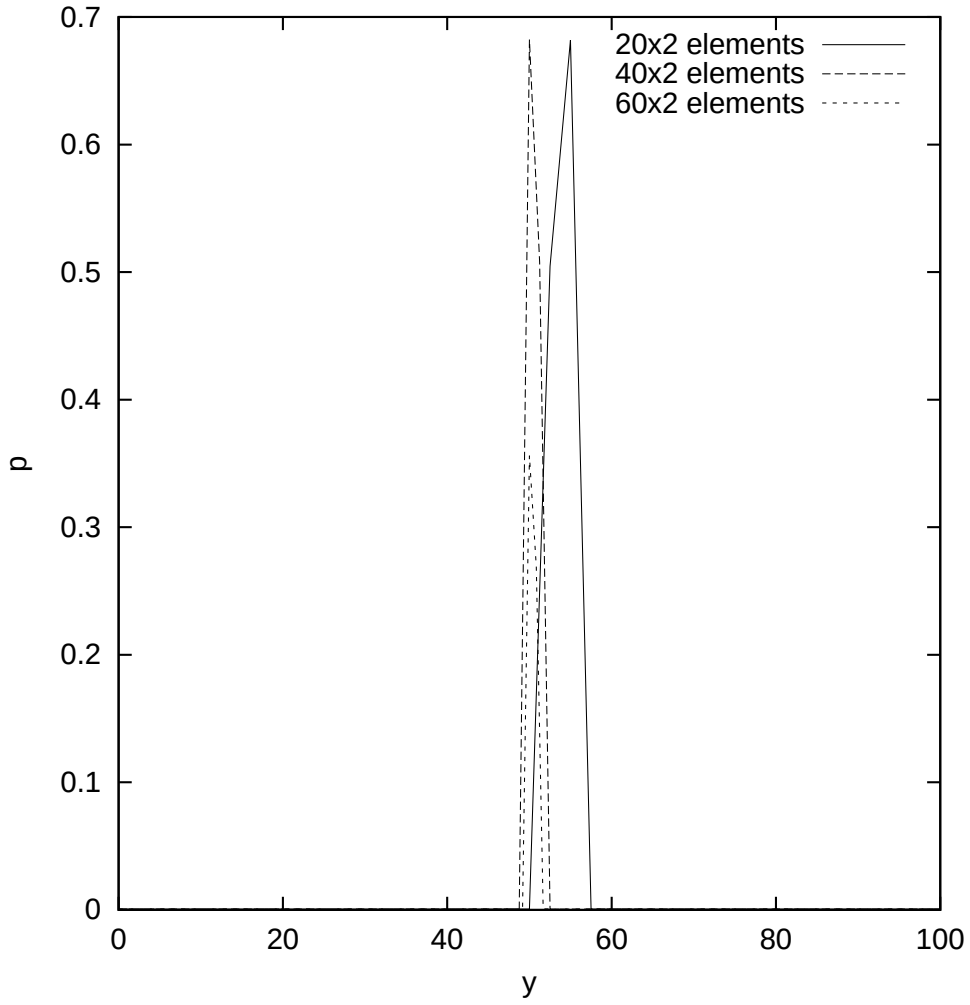


FIG. D.3 – Profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical en fin de calcul pour différents maillages.

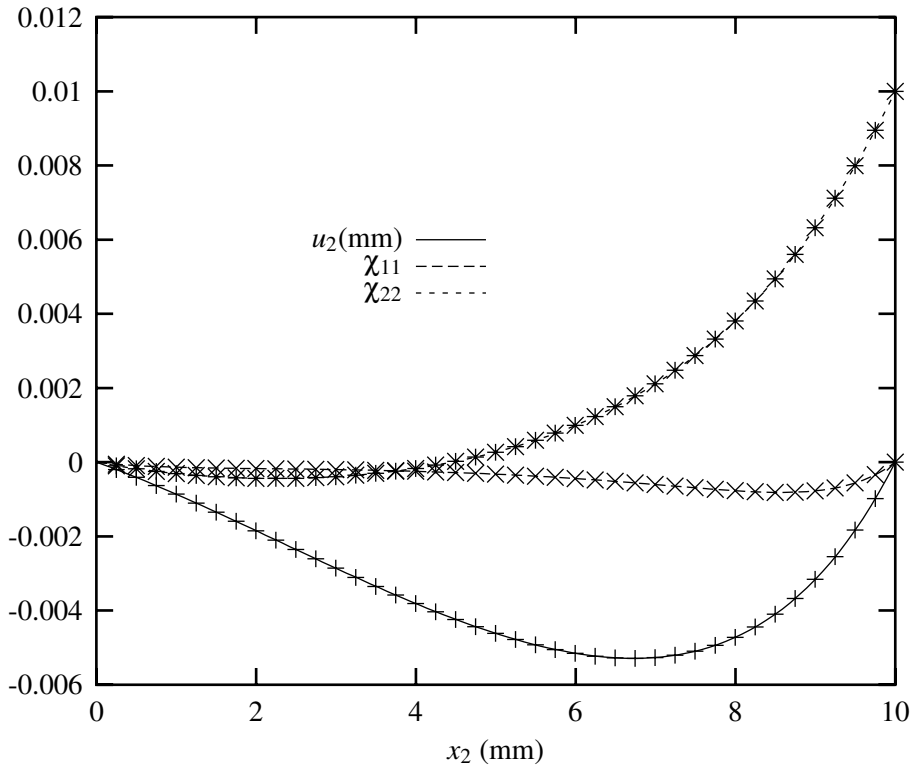


FIG. D.4 – Solution $(u_2, \chi_{11}, \chi_{22})$ du problème d'extension simple pour un milieu micromorphe élastique linéaire. Les paramètres utilisés sont les suivants : $E = 52000$MPa, $\nu = 0.3$, $b_1 = \lambda = 30000$MPa, $b_2 = b_3 = \mu = 20000$MPa, $A_{1,\dots,8} = 10000$ MPa.mm^2, $A_{10,\dots,15} = 20000$ MPa.mm^2, $L = 100$ mm, $\chi_0 = 0.01$. Les lignes correspondent à la solution analytique tandis que les symboles donnent les résultats de la simulation par éléments finis.

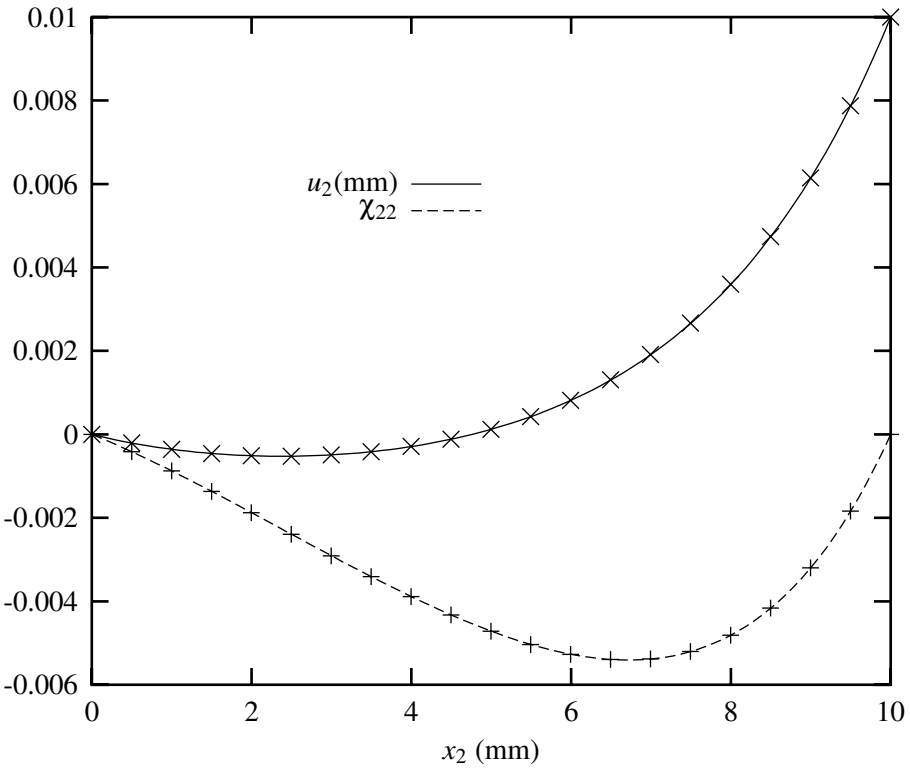


FIG. D.5 – Solution (u_2, χ_{22}) du problème d'extension simple pour un milieu micromorphe élastique linéaire. Les paramètres utilisés sont les suivants : $E = 72000$MPa, $\nu = 0.2$, $b_1 = \lambda = 20000$MPa, $b_2 = b_3 = \mu = 30000$MPa, $A_{1,\dots,8} = 20000$ MPa.mm^2,$A_{10,\dots,15} = 10000$ MPa.mm^2, $L = 100$ mm, $\chi_0 = 0.01$. Les lignes correspondent à la solution analytique tandis que les symboles donnent les résultats de la simulation par éléments finis.

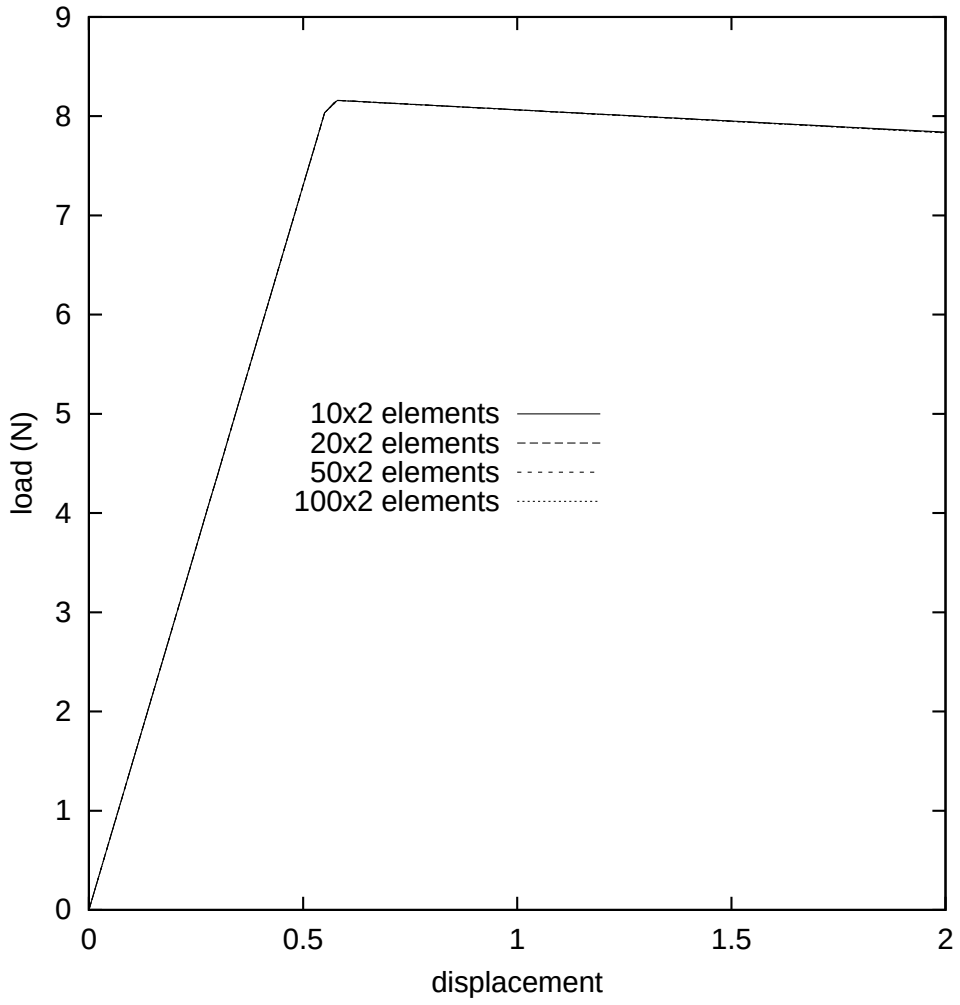


FIG. D.6 – Courbes de charge lors de la traction d'une plaque élastoplastique adoucissante, obtenues pour différents maillages et un milieu micromorphe sans critère de plasticité généralisé.

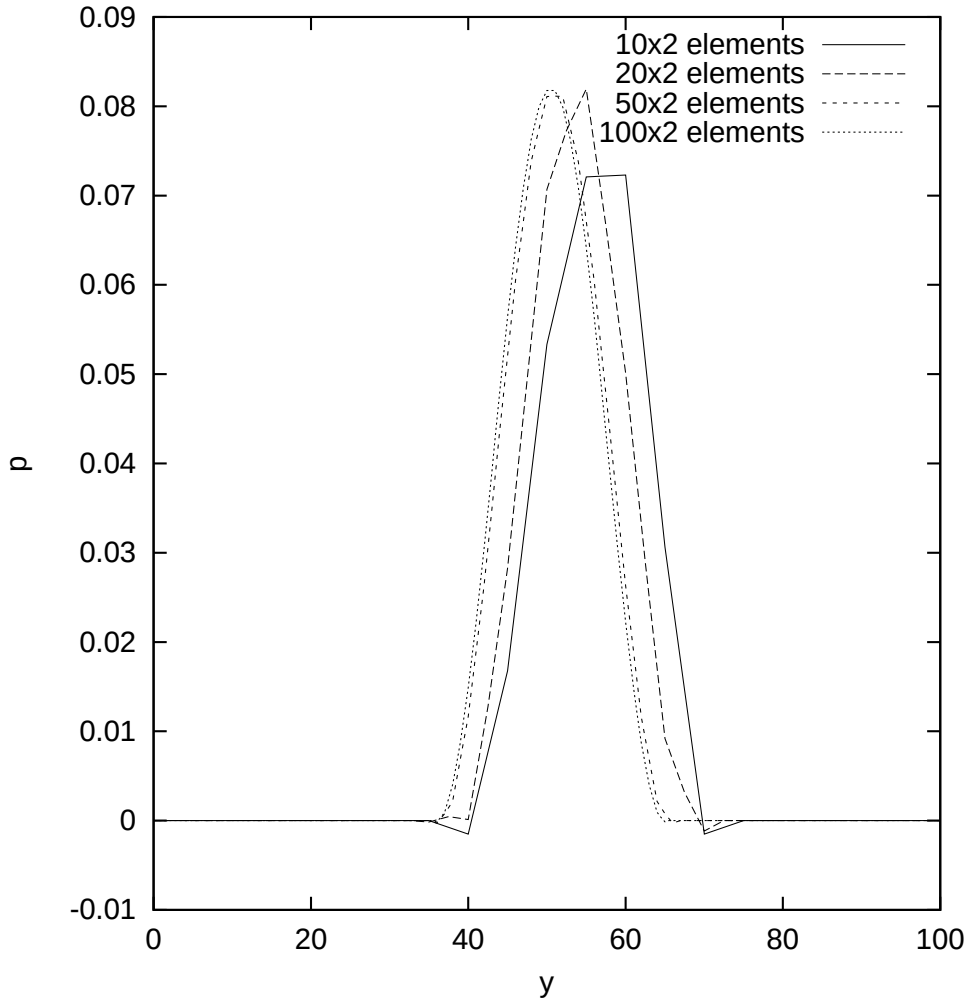


FIG. D.7 – Profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical en fin de calcul pour différents maillages, dans le cas d'un milieu micromorphe sans critère de plasticité généralisé.

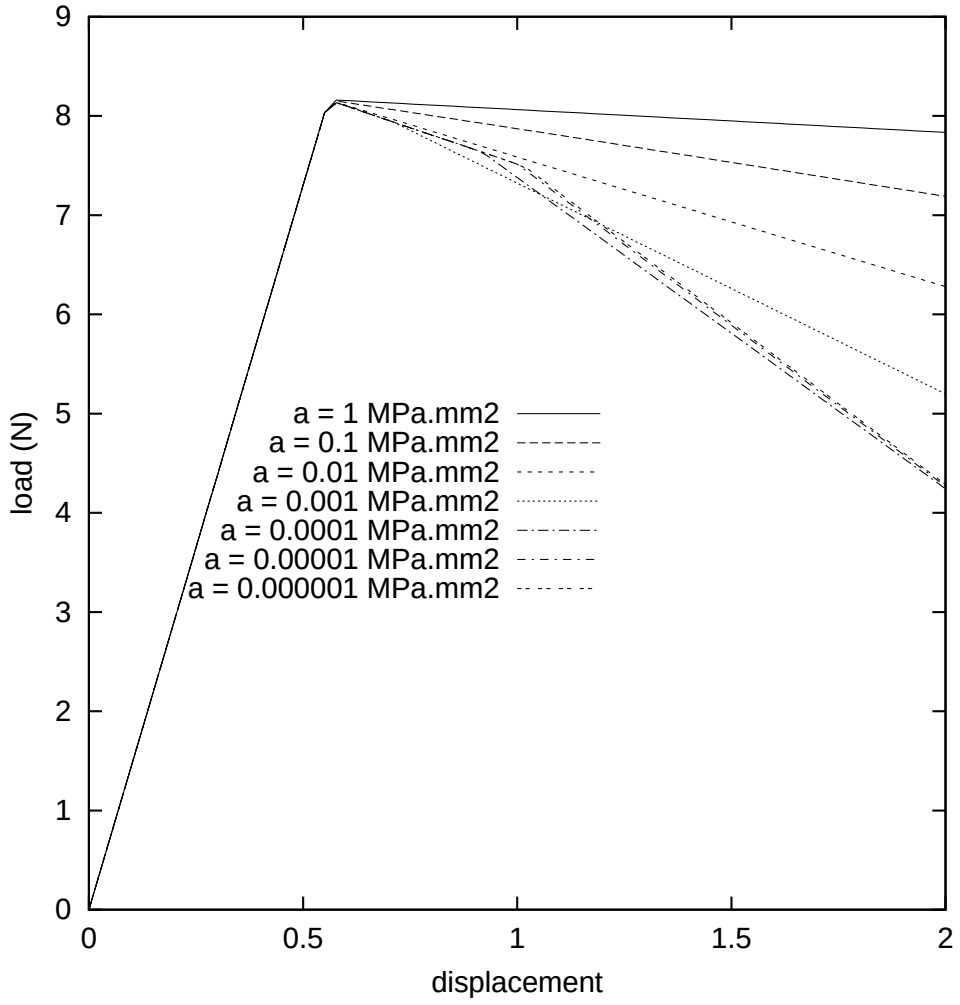


FIG. D.8 – Courbes de charge lors de la traction d'une plaque élastoplastique adoucissante, obtenues pour un milieu micromorphe sans critère de plasticité généralisé avec différentes longueurs caractéristiques (maillage avec 20x2 éléments).

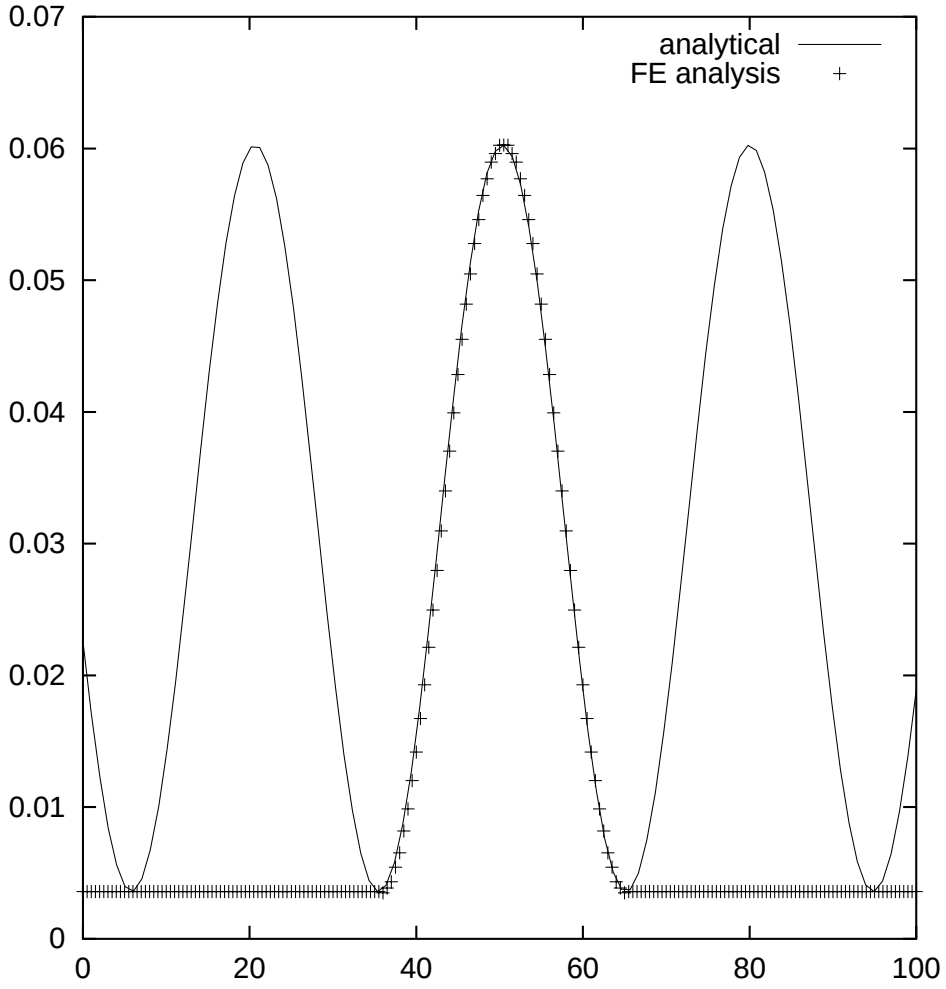


FIG. D.9 – Superposition du profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical calculé par éléments finis pour un milieu micromorphe, et d'une fonction sinusoïdale ayant la longueur d'onde prévue analytiquement.

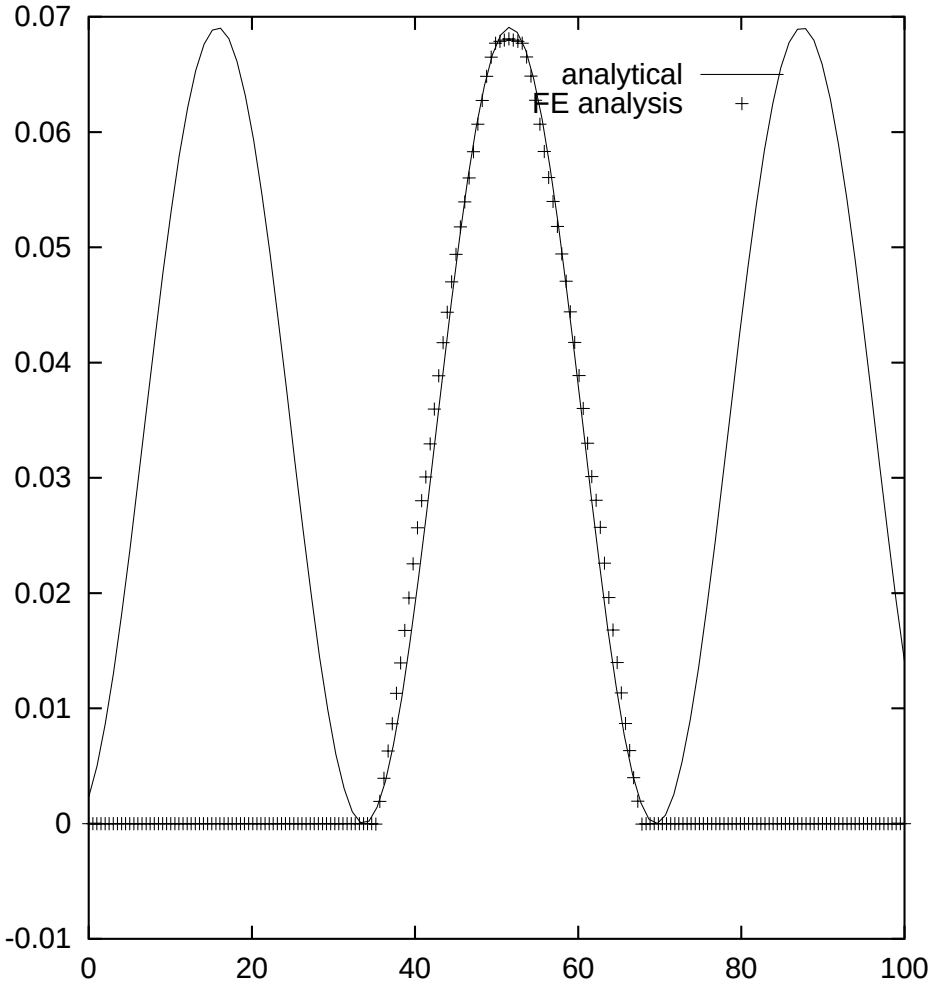


FIG. D.10 – Superposition du profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical calculée par éléments finis pour un milieu micromorphe, et d'une fonction sinusoïdale ayant la longueur d'onde prévue analytiquement (cas de la plasticité micromorphe multicritères).

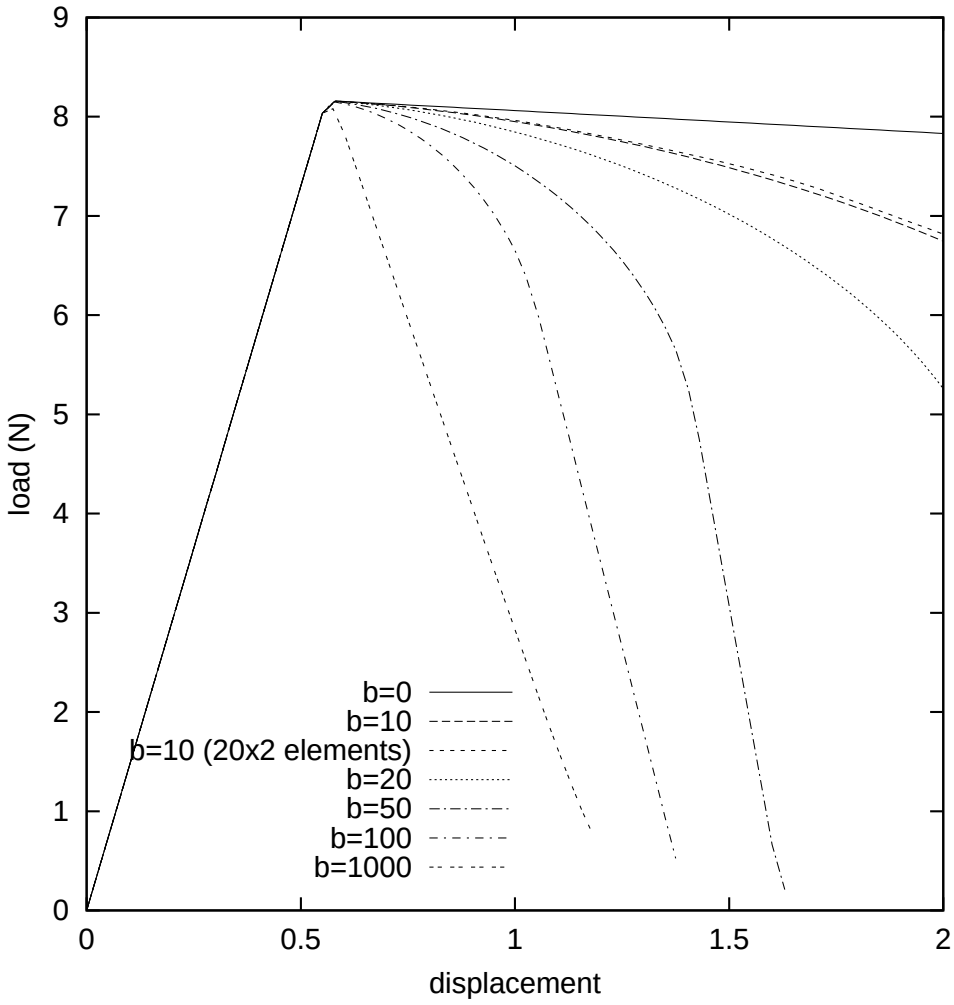


FIG. D.11 – Courbes de charge lors de la traction d'une plaque élastoplastique adoucissante, obtenues pour un milieu micromorphe avec un critère unique de plasticité généralisée pour différentes valeurs du paramètre b. L'unité de b est MPa.mm^{-2}. Le maillage utilisé comporte 100x2 éléments (sauf pour l'une des courbes).

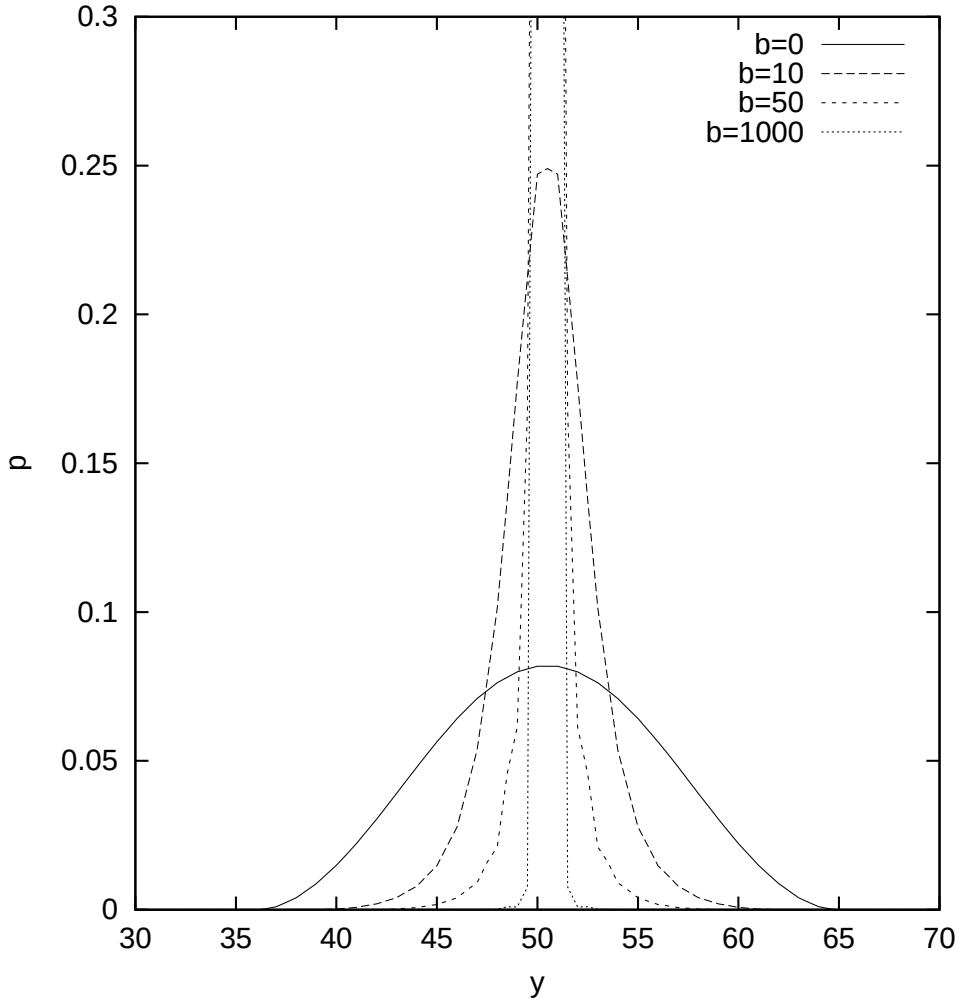


FIG. D.12 – Profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical en fin de calcul pour différentes valeurs de b. L'unité de b est MPa.mm^{-2}. Le maillage comporte 100x2 éléments. Les courbes sont tronquées selon X et Y pour mieux distinguer les bandes.

Bibliographie

[Andrews et al.99] Andrews (E.), Sanders (W.) et Gibson (L. J.). – Compressive and tensile behaviour of aluminum foams. *Material Science and Engineering A*, vol. 270, 1999, pp. 113–124.

[Andrews et al.01a] Andrews (E. W.) et Gibson (L. J.). – The influence of cracks, notches and holes on the tensile strength of cellular solids. *Acta Materialia*, vol. 49, 2001, pp. 2975–2979.

[Andrews et al.01b] Andrews (E. W.), Gioux (G.), Onck (P.) et Gibson (L. J.). – Size effects in ductile cellular solids : Part II, experimental results. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 43, 2001, pp. 701–713.

[Ashby et al.86] Ashby (M. F.) et Jones (D. R. H.). – *Engineering Materials*. – Pergamon Press, Oxford, 1986.

[Ashby et al.97] Ashby (Michael F.) et Gibson (Lorna J.). – *Cellular solids*. – Cambridge University press, 1997, second édition.

[Ashby et al.00] Ashby (M. F.), Evans (A.), Fleck (N. A.), Gibson (L. J.), Hutchinson (J. W.) et Wadley (H. N. G.). – *Metal foam : a design guide*. – Butterworth Heinemann, 2000.

[Badiche et al.00] Badiche (X.), Forest (S.), Guibert (T.), Bienvenu (Y.), Bartout (J.-D.), Ienny (P.), Croset (M.) et Bernet (H.). – Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams : application of the mechanics of cellular solids and of porous materials. *Materials Science and Engineering A*, vol. 289, 2000, pp. 276–288.

[Banhart99] Banhart (J.). – Foam metal : the recipe. *Europhysics news*, Jan/Feb 1999.

[Bastawros et al.00] Bastawros (A F.), Bart-Smith (H.) et Evans (A. G.). – Experimental analysis of deformation mechanisms in a closed-cell aluminum alloy foam. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, 2000, pp. 301–322.

[Beals et al.97] Beals (J. T.) et Thompson (M. S.). – Density gradient effects on aluminium foam compression behaviour. *Journal of Materials Science*, vol. 47, n 13, 1997, pp. 3595 – 3600.

[Bellora et al.01] Bellora (V.A.), Krauss (R.) et Poolen (L. Van). – Meeting interior head impact requirements : a basic scientific approach. *SAE paper*, n2001-01-0469, 2001.

[Benouali et al.01a] Benouali (A.), Dendievel (R.), L. (Salvo) et Bréchet (Y.). – Influence of microstructural dispersions on the effective properties of cellular solids. *Cellular Metals and Metal Foaming Technology*, éd. par J. Banhart, M. F. Ashby (N. A. Fleck). pp. 259–264. – Verlag MIT Publishing, 2001.

[Benouali et al.01b] Benouali (A-H.) et Froyen (L.). – On the mechanical and microstructural characterisation of aluminium foams. *Cellular Metals and Metal Foaming Technology*, éd. par J. Banhart, M. F. Ashby (N. A. Fleck). pp. 269–272. – Verlag MIT Publishing, 2001.

[Beremin83] Beremin (F. M.). – A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel. *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 14, 1983, pp. 2277–2287.

[Besson et al.89] Besson (J.) et Abouaf (M.). – Microstructural changes in alumina during HIP. *Material Science and Engineering A*, vol. 109, 1989, pp. 37–43.

[Besson et al.01] Besson (J.), Cailletaud (G.), Chaboche (J.-L.) et Forest (S.). – *Mécanique non linéaire des matériaux*. – 445 p., Hermès, France, 2001.

[Bigoni et al.91a] Bigoni (D.) et Hueckel (T.). – Uniqueness and localization : I Associative and nonassociative elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, vol. 28, 1991, pp. 197–214.

[Bigoni et al.91b] Bigoni (D.) et Hueckel (T.). – Uniqueness and localization : II Coupled elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, vol. 28, 1991, pp. 215–224.

[Blazy98] Blazy (J-S.). – *Comportement mecanique de profilés remplis de mousse d'aluminium*. – Rapport de DEA, Ecole des Mines de Paris, 1998.

[Blazy00] Blazy (J-S.). – *Mechanical testing of aluminium foams*. – Rapport technique n64130–00–0352, RENAULT S.A., 2000.

[Blazy02a] Blazy (J-S.). – Aspects statistiques de la défomation des mousse d'aluminium. *Matériaux 2002*. – Octobre 2002. Colloque n°2 : Modélisation et comportement des matériaux hétérogènes et aléatoires.

[Blazy02b] Blazy (J-S). – La mousse d'aluminium et ses applications dans l'automobiles. *Trans Al 2002*, éd. par CTIF. – Juin 2002.

[Borst et al.93] Borst (R. de), Sluys (L.J.), Mühlhaus (H.B.) et Pamin (J.). – Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, vol. 10, 1993, pp. 99–121.

[BS et al.98] Bart-Smith (H.), Bastawros (A. F.), Mumm (D. R.), Evans (A. G.), Sypeck (D. J.) et Wadley (H. N. G.). – Compressive deformation and yielding mechanisms in cellular Al alloys determined using X-ray tomography and surface strain mapping. *Acta materialia*, vol. 46, 1998, pp. 3583–3592.

[Chastel et al.99] Chastel (Y.), Hudry (E.), Forest (S.) et Peytour-Chansac (C.). – Mechanical behaviour of aluminium foams for various deformation paths : Experiments and modelling. *Metal Foam and Porous Metal Structures*, éd. par J. Banhart, M.F. Ashby (N.A. Fleck). pp. 263–268. – Verlag MIT Publishing, 1999.

[Chen et al.99] Chen (C.), Lu (T. J.) et Fleck (N. A.). – Effect of imperfection on the yielding of two-dimensional foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 47, 1999, pp. 2235–2272.

[Chen et al.01] Chen (C.), Fleck (N. A.) et Lu (T. J.). – The mode I crack growth resistance of metallic foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, 2001, pp. 231–259.

[Colombo et al.01] Colombo (P.), Heilmann (J. R.) et Shelleman (D. L.). – Mechanical properties of silicon oxycarbide ceramic foam. *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 84, n10, october 2001, pp. 2245–2251.

[Cullough et al.99] Cullough (K.Y.G. Mc), Fleck (N.A.) et Ashby (M.F.). – Uniaxial stress-strain behaviuor of aluminium alloy foams. *Acta Metallurgica*, vol. 47, n8, 1999, pp. 2323–2330.

[dB91] de Borst (R.). – Simulation of strain localization : a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering Computations*, vol. 8, 1991, pp. 317–332.

[dB93] de Borst (R.). – A generalization of j_2-flow theory for polar continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 103, 1993, pp. 347–362.

[Deshpande et al.00] Deshpande (V.S.) et Fleck (N.A.). – Isotropic constitutive models for metallic foams. *Journal of Mechanics and Physics of solids*, vol. 48, 2000, pp. 1253 – 1283.

[Deshpande et al.01] Deshpande (V. S.) et Fleck (N. A.). – Multi–axial yield behaviour of polymer foams. *Acta materialia*, vol. 49, 2001, pp. 1859–1866.

[Elmoutaouakkail et al.01] Elmoutaouakkail (A.), Salvo (L.), Maire (E.) et Peix (G.). – 2d and 3d characterisation of metal foams using X-ray tomography. *Cellular Metals and Metal Foaming Technology*, éd. par J. Banhart, M. F. Ashby (N. A. Fleck). pp. 245–250. – Verlag MIT Publishing, 2001.

[Evans et al.78] Evans (A. G.) et Jones (R. L.). – Evaluation of a fundamental approach for the statistical analysis of fracture. *Journal of American Ceramic Society*, vol. 61, 1978, pp. 156–160.

[Forest et al.02] Forest (S.), Cailletaud (G.), Jeulin (D.), Feyel (F.), Galliet (I.), Mounoury (V.) et Quilici (S.). – Introduction au calcul de microstructures. *Mécanique et Industries*, vol. 3, 2002, pp. 439–456.

[Forest et al.03] Forest (S.) et Sievert (R.). – Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua. *Acta Mechanica*, vol. 160, 2003, pp. pp. 71–111.

[Fusnheng et al.98] Fusnheng (H.), Zhengang (Z.) et Junchang (G.). – Mechanical behaviour - compressive deformation and energie absorbing characteristic of foamed aluminium. *Metallurgical and Material Trancsaction*, vol. 30, n3 A, Mars 1998, pp. 771–776.

[Fusnheng et al.99] Fusnheng (H.) et Zhengang (Z.). – The mechanical behaviour of foamed aluminium. *Journal of Material Science*, vol. 34, n2, Mars 1999, pp. 291–300.

[Germain73] Germain (P.). – The method of virtual power in continuum mechanics. part 2 : Microstructure. *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 25, 1973, pp. 556–575.

[Gibson et al.] Gibson (L.J.) et Simone (A.E.). – Aluminium foam : structure and properties. *Ultralight metal structure Conference*. MIT, Cambridge, MA, USA.

[Gibson et al.89] Gibson (L. J.), Ashby (M. F.), Zhang (J.) et Triantafillou (T. C.). – Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads. i : Modelling. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 31, 1989, pp. 635–664.

[Gibson et al.98] Gibson (L.J.) et Simone (A.E.). – Aluminium foams produced by liquid state processes. *Acta Materialia*, vol. 46, n10, May 1998, pp. 3109–3123.

[Gioux et al.00] Gioux (G.), McCormack (T.M.) et Gibson (L.J.). – Failure of aluminium foams under multiaxial loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 42, 2000, pp. 1097–1117.

[GP97] Gonia-Peron (E.). – *Comportement et endommagement de composités 6061-SiCp soumi à des colliciation uniaxiales monotones ou cycliques*. – Thèse de PhD, Centre des Matériaux - Ecole Nationale spuérieures des Mines de Paris, 1997.

[Gradinger et al.97] Gradinger (R.) et Rammerstorfer (F.G.). – On the influence of meso-inhomogeneities on the crush worthiness of metal foams. *Acta Materialia*, vol. 47, n1, feb. 1997, pp. 143–148.

[Green72] Green (R.J.). – A plasticity theory for pourous solids. *international Journal of Mechanical Science*, vol. 14, 1972, pp. 215–224.

[Grenestedt99] Grenestedt (J.L.). – Effective elastic behavior of some models for perfec cellular solids. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, pp. 1471–1501.

[Grenestedt00] Grenestedt (J. L.). – Influence of wavy imperfections in cell walls on elastic stiffness of cellular solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46, 2000, pp. 29–50.

[Hanssen et al.98] Hanssen (A. G.), Langseth (M.) et Hopperstad (O. S.). – Crushing of square aluminium extrusions with aluminium foam filler - numerical analyses. *Structures under shock and impact 5*, pp. 143–152. – 1998.

[Hanssen et al.01] Hanssen (A. G.), Langseth (M.) et Hopperstad (O. S.). – Crash behaviour of foam–based components : validation of numerical simulations. *Cellular Metals and Metal Foaming Technology*, éd. par J. Banhart, M. F. Ashby (N. A. Fleck). pp. 329–338. – Verlag MIT Publishing, 2001.

[Hanssen et al.02] Hanssen (A. G.), Hopperstad (O. S.), Langseth (M.) et Ilstad (H.). – Validation of constitutive models applicable to aluminium foams. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, 2002, pp. 359–406.

[Hanssen00] Hanssen (A.G.). – *Structural crashworthiness of aluminium foam-based components*. – Thèse de PhD, University of Trondheim, June 2000. ISBN 82-7984-102-4.

[Huang et al.91a] Huang (J. S.) et Gibson (L. J.). – Fracture toughness of brittle foams. *Acta metallurgica and materiala*, vol. 39, n7, 1991, pp. 1627 – 1636.

[Huang et al.91b] Huang (J. S.) et Gibson (L. J.). – Fracture toughness of brittle honeycombs. *Acta metallurgica and materiala*, vol. 39, n7, 1991, pp. 1617 – 1626.

[Hui et al.02] Hui (S. K.) et Yu (T. X.). – Modelling of the effectiveness of bicycle helmets under impact. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, n 6, 2002, pp. 1081 – 1100.

[Kenny98] Kenny (L.D.). – *Machanical properties of particule stabilized aluminium foam*. – Rapport technique, Kingston research and development centre, Ontario, Canada, Alcan International Limited, 1998.

[Krist et al.98] Krist (B.), Faure (K.), Kottar (A.), Foroughi (B.) et Deggisher (H.P.). – Study of deformation behaviour of al-foam under compressive loading. *Journees d'automne*. – 1998.

[Lamon et al.83] Lamon (J.) et Evans (A. G.). – Statistical analysis of bending strengths for brittle solids. *Journal of American Ceramic Society*, vol. 66, 1983, pp. 177–182.

[Ma et al.94] Ma (L.) et Deping (H.). – Fabrication and pore structure control of a new type of aluminium foam. *Chinese journal of material research*, vol. 8, n1, 1994, pp. 11–17.

[Ma et al.98] Ma (L.) et Song (Z.). – Cellular structure control of aluminium foam during foaming process of aluminium melt. *Scripta Materialia*, vol. 39, n11, Nov. 1998, pp. 1523–1528.

[Maire et al.01] Maire (E.), Bufiere (J.Y.), and. J.J. Blandin (L. Salvo), Ludwig (W.) et Letang (J.M.). – On the application of x-ray microtomography in the field of materials science. *Advanced Engineering materials*, vol. 3, n8, Aout 2001, pp. 539–546.

[Markaki et al.01] Markaki (A. E.) et Clyne (T.W.). – The effect of cell wall microstructure on the deformation and fracture of aluminium-based foams. *Acta Materialia*, vol. 49, 2001, pp. 1677 – 1686.

[Miller00] Miller (R. E.). – A continuum plasticity model for the constitutive and indentation behaviour of foamed metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 42, 2000, pp. 729–754.

[Mindlin64] Mindlin (R.D.). – Micro–structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 16, 1964, pp. 51–78.

[Moussy02] Moussy (F.). – Two examples of localisation occurence : deformation mechanism and fracture criterion. *Mécanique et Industries*, vol. 3, 2002, pp. 483–487.

[Mukai et al.99] Mukai (T.), Kanahashi (H.), Miyoshi (T.), Mabuchi (M.), Nieh (T.G.) et Higashi (K.). – Experimental study of energy absorption in a closed-cellef aluminum foam under dynamic loading. *Scripta MAterialia*, vol. 40, n8, 1999, pp. 921–927.

[Nieh et al.98] Nieh (T.G.), Kinney (J.H.), Wadsworth (J.) et Ladd (A.J.C.). – Morphology and elastic properties of aluminium foams produced by a casting technique. *Scripta Materialia*, vol. 38, n10, May 1998, pp. 1487–1494.

[Onck et al.01] Onck (P. R.), Andrews (E. W.) et Gibson (L. J.). – Size effects in ductile cellular solids : Part I, modelling. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 43, 2001, pp. 681–699.

[Onck01] Onck (P. R.). – Application of a continuum constitutive model to metallic foam den-specimens in compression. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 43, 2001, pp. 2947–2959.

[Paul et al.99] Paul (A.), Seshcharyulu (T.) et Ramamurty (U.). – Tensile strength of a closed-cell al foam in the presence of notches and holes. *Scripta Materialia*, vol. 40, n7, 1999, pp. 809–814.

[Prakash et al.95] Prakash (O.), Sang (H.) et Embury (J.D.). – Structure and properties of Al-SiC foam. *Material Science Engineering A*, vol. 199, 1995.

[Shu et al.99] Shu (J.Y.) et Fleck (N.A.). – Strain gradient crystal plasticity :size–dependent deformation of bicrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 47, 1999, pp. 297–324.

[Siebels98] Siebels. – *Project EAMLIFe* 1^{st} *annual report*. – Rapport technique, Volskwagen, 1998.

[Silva et al.95] Silva (M. J.), Hayes (W. C.) et Gibson (L. J.). – The effect of non periodic microstructure on the elastic properties of two dimensional cellular solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 37, 1995, pp. 1161–1177.

[Sugimura et al.97] Sugimura (Y.), Meyer (J.), He (M.Y.), Bart-Smith (H.), Grenestedt (J.) et Evans (A.G.). – On the mechanical performance of closed cell al alloy foams. *Acta Materialia*, vol. 45, n12, 1997, pp. 5245–5259.

[Triantafillou et al.89] Triantafillou (T. C.), Zhang (J.), Shercliff (T. L.), Gibson (L. J.) et Ashby (M. F.). – Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads. ii : Comparison of models with experiments. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 31, 1989, pp. 665–678.

[Tuliani et al.99] Tuliani (J-M.), Montanaro (L.), Bell (T. J.) et Swain (M. V.). – Semiclosed-cell mullite foams : preparation and macro and micromechanical characterization. *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 82, n4, 1999, pp. 961–968.

[Weaire et al.00] Weaire (D.) et Hutzler (S.). – *The physics of foam*. – Oxford University press, 2000.

[Weibull51] Weibull (W.). – A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 9, 1951, pp. 293–297.

[Wierzbicki et al.01] Wierzbicki (T.), Doyoyo (M.) et MArkaki (A.). – Redefining the concept of stress-strain curve fot foams. *Cellular Metals and Metal Foaming Technology*, éd. par J. Banhart, M. F. Ashby (N. A. Fleck). pp. 449–454. – Verlag MIT Publishing, 2001.

[Yang et al.95] Yang (Chin Chen), Kawng (Chin Tong) et Su (Kao Chang). – Effect of phenomenon of solid liquid interface on proe size of foame al-7 si-0.45 mg alloy. *IMONO*, 1995.

[Zhao01] Zhao (H.). – Impact testing if metallic honeycomb and foam. *Cellular metal and foaming technology*, éd. par Banhart (J.), Ashby (M.) et Fleck (N.). pp. 339–345. – Verlag MIT publishing, Juin 2001.