

Dynamique des tourbillons pancake en milieu stratifie : diffusion et interaction ondes-tourbillons

Ramiro Godoy Diana

▶ **To cite this version:**

Ramiro Godoy Diana. Dynamique des tourbillons pancake en milieu stratifie : diffusion et interaction ondes-tourbillons. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Polytechnique X, 2004. Français. NNT : . tel-00007046

HAL Id: tel-00007046

https://pastel.hal.science/tel-00007046

Submitted on 7 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





École Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Dynamique des fluides

par

Ramiro GODOY DIANA

Dynamique des tourbillons pancake en milieu stratifié : diffusion et interaction ondes-tourbillons

soutenue le 19 mars 2004 devant le jury composé de :

Claude CAMBON	Président du jury	LMFA, École Centrale de Lyon
Jean-Marc CHOMAZ	Directeur de thèse	LadHyX, École Polytechnique
Olivier EIFF	Examinateur	IMFT, Toulouse
GertJan van HEIJST	Rapporteur	FDL, TU/Eindhoven
Emil HOPFINGER	Rapporteur	LEGI, Grenoble
Yoshi KIMURA	Membre invité	Grad. Sch. of Math., Nagoya
Vladimir ZEITLIN	Examinateur	LMD-ENS, Paris

A Manuela

Remerciements, agradecimientos, etc.

Je suis sur le point de finir avec ces lignes pour dire merci et je me rends compte que elles n'expriment pas tout à fait pleinement tous les mercis que je veux dire... En fin, voici quelques mots pour tous ceux qui ont été là pendant ces quatre années (sans censure et avec mes excuses pour les fautes de français...)
Le premier et plus grand merci est pour Jean-Marc Chomaz, qui m'a fait découvrir et explorer un sujet passionnant en jouant impeccablement son rôle de directeur de thèse, tant du côté scientifique que du côté humain. Du début à la fin, j'ai plusieurs fois été impressionné par sa capacité d'éclairer en quelques mots les plus diverses questions grâce à un sens physique formidable. Cet éclairage m'a permis de regarder au bon endroit et de retrouver les choses importantes parmi les résultats (souvent pas limpides) de mes expériences de laboratoire. J'espère avoir pu m'approprier d'un tout petit peu de ce sens physique ainsi que de son optimisme et sa bonne humeur à tout preuve. Une chose que je parfois reussis a faire comme Jean-Marc c'est le double dessert à la cantine... par contre pour l'aviron je ne suis pas encore très motivé...

Je veux aussi remercier les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer à la soutenance, Emil Hopfinger et GertJan van Heijst en particulier pour avoir accepté la tache d'être rapporteurs, ainsi que Claude Cambon, Olivier Eiff, Yoshi Kimura et Vladimir Zeitlin pour leurs nombreuses questions qui m'ont beaucoup aidé à réfléchir sur mon travail et à mieux définir des perspectives pour l'avenir.

Pour la communauté du LadHyX va aussi toute ma gratitude et mes meilleurs sentiments. Pour nommer les gens que j'ai croisés au cours des dernières années dans ce beau labo je vais bien sûr commencer par "El Jefe". Patrick dirige le local avec toute la dexterité des grands et on y gagne tous. Il paraît que le secret est d'être psycho-géographiquement localisé entre la Californie et le Marais... et ça marche même à Palaiseau ! Muchas gracias caballero !

Et ce LadHyX qui est très sympa serait peut être infernal sans Thérèse et Christiane qui le font marcher comme il faut. Merci beaucoup pour votre temps et votre sourire de tous les jours. Après mon premier entretien avec Jean-Marc, nous faisions le tour du labo et Thérèse m'a commencé à montrer les bureaux qui étaient libres. Alors Jean-Marc m'as dit quelque chose comme : "Tu vois, tu ne sais même pas si tu vas choisir de venir ici, mais Thérèse, elle le sait déjà et elle t'a trouvé un bureau !"

Une mention spéciale doit être fait pour Tonio, le chef de la salle manips et de son atelier magique. Merci beaucoup pour m'avoir appris tant d'astuces au labo, pour avoir monté et démonté mille fois des morceaux de manips où des manips entières et pour être disponible tout le temps pour bricoler un truc au dernier moment ou pour organiser un bon barbeq (ici ou à Perpignan !)

Et dans le même bureau de Tonio vous pouvez trouver aussi Dani, ce qui fait que si jamais un jour une catastrophe quelconque vous surprend au LadHyX c'est bien celui-là le bon bureau pour essayer de se sauver. Merci beaucoup Dani pour avoir toujours résolu mes problèmes informatiques avec ce style formidable qui irradie sérénité. Le secret de Dani pour rester cool au labo est peut-être de partir de temps en temps pour se jeter en chute libre...

Le remerciement pour Paul Billant est aussi très spéciale. Il m'a appris au début les know-how de la manip stratifiée et il a continué tout le long de la thèse à collaborer et participer à des discussions toujours très enrichissantes. (Je veux dire aussi que je déconseille aux débutants de sortir faire du jogging avec Paul et François.)

Si j'avais choisi l'ordre chronologique pour ces remerciements Paul Manneville aurait été le premier de la liste. Merci Paul pour avoir décodé mes premiers signaux qui venaient du Mexique quand je cherchais un labo pour aterrir.

Un grand merci pour Sabine. Merci pour m'avoir invité à faire des enseignements à l'ENSTA et surtout merci pour la joie que tu apportes au labo.

Et bien sur une pensée de gratitude et fraternité pour les thésard(e)s et stagiaires que j'ai eu la chance de rencontrer pendant ces années (le "LadHyX d'en bas" !), Stephanie, Olivier, François, Matteo, Leonardo, Charlotte, Pantxika, Anne-Virginie, Cecile, Lutz, Maher, Alan, Claire, Romain, Dominique, Ahmad, Joachim, ...

Merci à l'equipe piscine du LadHyX, Carlo, Matteo (qui nous a déjà quitte pour explorer d'autres eaux), Charlotte, Emmanuel (et bonne chance pour ton séjour au Canada) et Pantxi (qui ne vient plus car elle va au gym avec Maher !)

Encore merci à Carlo pour avoir fait l'"animal testing" de ses cours d'instabilités sur ses fans inconditionnels (nous voulons la version final du poly !) ainsi que pour ses leçons personnalisées de gnuplot !

Quand Pascal est arrivé au labo on n'a plus eu le droit de laisser trainer des clés Allen ni des tournevis n'importe où, et cela s'est avéré bon pour tout le monde ! Merci aussi pour la parole d'expert dans la salle manip. Et dans le même bureau que Pascal, merci Antoine pour tes interventions sporadiques mais toujours justes et sans censure.

Merci au bon ami Charles qui serait le premier sur une liste par ordre alphabétique et c'est pour cela que j'ai décidé de ne pas en faire une... c'est une blague, Charles, mais ne te plaignes pas que tu as déjà eu la Barcelona connection...

Je finis la liste de ladhyxiens avec un mot pour Peter et Lionel ainsi qu'un encore merci aux prémiers lecteurs qui ont corrigé les pages qui suivent : Anne-Virginie, Cécile, Charlotte, François, Jean-Marc (of course !), Pantxi et Paul B. Et un grand merci pour Claire qui a pris en main la tache de continuer le travail dans la cuve stratifié.

Des sincères remerciements aussi à : Dominique Gresillon pour ses conseils au tout debut, transmis via Catalina Stern à qui je remercie aussi vivement.

William et Ali pour leur aide lors des modex.

Philippe Petitjeans et Eduardo Wesfreid pour leur bon accueuil lors des journées de formation pour la PIV.

Nico pour venir faire sa couche limite atmosphérique au labo.

Alex Stegner pour avoir organisé les reunions "stratifiés-tournantes" de Palaiseau ainsi qu'à tous ceux qui y ont participé.

Pascale Bouruet-Aubertot pour m'avoir accepté pour un post-doc un peu trop court et en plus bousculé par le lent processus de candidater aux postes pour l'an prochain...

Y también...

Un abrazo eterno con todo mi amor para Manuela, mi compañera de aventuras, sin quien todo esto no habría sido posible. Gracias por estar conmigo siempre y por ser lo mejor de mi vida. Y junto a ti gracias a nuestro Sebastián, que se unió al equipo en el mejor momento.

Muchos besos y abrazos a la familia, Papá, Mamá (y su Pelao también), Emi, Jime, Antonia, Pelusa y Julio, que han sido un apoyo incondicional e irremplazable para estar bien en este período que nos ha llevado a vivir en distintos puntos del globo... Un pensamiento especial para Godoy papá a quien le hubiera gustado sopesar estas páginas y sonreir al canto de "Qué lo parió !"

Y asi como a la familia, muchas gracias a los amigos y amigas de acá y de allá que han estado cerca en cuerpo o en alma a lo largo de estos años... En una lista incompleta, besos y abrazos para Ricardo, Rochi, Pablo, Ania, Martin, Myriam, Jérôme, Benjamin, Anne, Daniel, Laurence, François, Séverine, Vladimir, Flor, Leonardo...

Y en la última linea (que también es la primera...) un sincero agradecimiento al CONACyT que financió este proyecto.

Résumé

Les fluides stratifiés présentent deux types principaux de mouvement : les ondes de gravité internes et des mouvements tourbillonnaires quasi-bidimensionnels (ou modes de vorticité potentielle). Les ondes évoluent sur une échelle de temps rapide $T_N = 1/N$, où N est la fréquence de Brunt-Väisälä, une fréquence naturelle déterminée par la force de la stratification, tandis que les mouvements tourbillonnaires sont régis par une échelle lente $T_A = L/U$, où U et L sont des échelles horizontales de vitesse et longueur caractéristiques des structures tourbillonnaires. La différence entre ces deux modes peut être illustrée par la décroissance d'une zone turbulente en présence d'une stratification de fond stable : pendant l'effondrement de la turbulence initiale, l'énergie est soit rayonnée sous la forme d'ondes internes qui se propagent loin de la région turbulente initiale, soit transmise aux mouvements d'advection quasi-horizontaux qui s'organisent comme patches de vorticité potentielle. Cette thèse aborde d'un point de vue expérimental et théorique le problème de l'interaction des ondes de gravité internes et tourbillons pancake dans un fluide fortement stratifié ainsi que l'étude des mécanismes diffusifs des tourbillons pancake.

Abstract

Stably stratified fluids give rise to distinct internal wave modes and potential vorticity modes (PV). The timescales relevant to these two types of motion separate when the stratification is strong : Internal waves propagate on a fast timescale based on the buoyancy frequency ($T_N = 1/N$) while a slower timescale in terms of the horizontal advection —$T_A = L/U$, where L and U are the horizontal length scale and mean velocity of the horizontal motions— characterizes the evolution of vortices. An illustration of the difference between these two modes can be observed in turbulent regions decaying in presence of background stable stratification : As vertical motions are suppressed, energy is either radiated as internal waves, which propagate away from the initially turbulent region, or transferred to horizontal advective motions which are finally organized as patches of potential vorticity. This thesis presents a theoretical and experimental study of the interaction between pancake vortices (representing the PV mode) and internal gravity waves in a strongly stratified fluid, and of the diffusive mechanisms of pancake vortices.

Resumen

Los fluidos estratificados de manera estable presentan dos tipos de estructuras de flujo distintas : las ondas de gravedad internas y los modos de vorticidad potencial (modos PV). Las escalas temporales características pertinentes a estos dos tipos de movimiento se separan cuando la estratificación es intensa : las ondas internas se propagan en una escala de tiempo rápida basada en la frecuencia de Brunt-Väisälä ($T_N = 1/N$), mientras un tiempo más lento en términos de la advección horizontal —$T_A = L/U$, donde L y U son las escalas de magnitud de los movimientos horizontales— caracteriza la evolución de los vórtices. Una ilustración de la diferencia entre estos dos modos se puede observar en regiones turbulentas que decaen en presencia de una estratificación de fondo : los movimientos verticales se van suprimiendo y la energía es ya sea irradiada como ondas internas, que se propagan lejos de la región inicialmente turbulenta, o transferidos a movimientos horizontales de advección que se organizan finalmente como concentraciones de vorticidad potencial. Esta tesis presenta un estudio experimental y teórico de la interacción entre vórtices tipo pancake (representando el modo PV) y ondas internas de gravedad en un fluido fuertemente estratificado, así como de los mecanismos difusivos de los vórtices tipo pancake.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Théorie **9**
2.1 Équations du mouvement 9
2.2 Approximation de Boussinesq 10
2.3 Vorticité potentielle : théorème d'Ertel. 11
2.4 Ondes de gravité internes 11
2.4.1 Fréquence de Brunt-Väisälä 11
2.4.2 Équations linéarisées 14
2.4.3 Relation de dispersion 15
2.4.4 Vitesse de phase et vitesse de groupe 15
2.4.5 Flux d'energie dû aux ondes 16
2.4.6 Ondes dans une stratification nonlinéaire 17
2.4.7 Ondes dans un écoulement moyen 18
2.5 Analyse dimensionelle de Riley 20
2.5.1 Étape initiale de la turbulence ($F_h \gg 1$) 21
2.5.2 Régime d'ondes de gravité internes 22
2.5.3 Régime des écoulements quasi-2D (Q2D) 22

3 Effet du nombre de Schmidt dans la diffusion des tourbillons pancake **25**
3.1 Introduction 26
3.2 Q2D equations 26
3.3 Asymptotic analysis 29
3.4 Schmidt number effects on the vortex decay 33
3.5 Comparison with the results of BVCH 37
3.6 Conclusions 38

4 Montage expérimental et protocole **41**
4.1 Méthode de stratification 41
4.2 Ondes internes et tourbillons pancake 42
4.3 Vélocimétrie par Images de Particules : PIV 48

4.4 Protocole 52

5 Sélection visqueuse d'échelle verticale dans un fluide stratifié 55
5.1 Introduction 56
5.2 Experimental setup 56
5.3 Observations 58
5.4 Decay models : viscous peel-off 60
5.5 Discussion and conclusions 66

6 Ondes de gravité internes dans un écoulement dipolaire 69
6.1 Introduction 70
6.2 Linear theory for internal waves 73
6.2.1 Critical levels for two-dimensional waves 75
6.3 Experimental setup 77
6.4 Basic states 81
6.5 Interactions 83
6.5.1 Waves in the dipole field 83
6.5.2 Two-dimensional rays 85
6.5.3 Dipole evolution in presence of waves 90
6.5.4 3D effects : ray focusing and refraction 93
6.6 Conclusions 96

7 Conclusion et perspectives 99

Bibliographie 103

Chapitre 1

Introduction

Les fluides stratifiés

On dit qu'un fluide est stratifié lorsque sa masse volumique n'est pas constante, mais varie avec une ou plusieurs coordonnées spatiales. En général, à cause du rapport avec les fluides géophysiques, on pense aux milieux dont la densité est une fonction de la hauteur comme dans l'atmosphère et les océans de notre planète. Le rayonnement solaire est absorbé le long de sa traversée par l'atmosphère, puis par les océans et y induit des gradients thermiques qui déterminent la forme des profils de densité. Par exemple, les océans deviennent plus froids et par conséquent plus denses avec la profondeur tandis que dans la stratosphère la température augmente avec la hauteur (et donc la densité diminue), à cause de l'absorption des radiations ultraviolettes par l'ozone (voir e.g Pedlosky, 1987). La stratification d'un milieu peut être due aussi à des différences de concentration d'une substance donnée, c'est le cas des océans terrestres, où le profil de densité n'est pas gouverné seulement par les gradients de température mais aussi par la *salinité*. Un profil de densité stratifié peut être stable où instable suivant que les couches légères se trouvent au dessus ou en dessous des couches plus lourdes. Pour un profil de densité $\bar{\rho}(z)$ —où z est la coordonnée spatiale verticale avec la gravité dans la direction négative de z—, en négligeant les effets de compressibilité on peut dire que le profil est stable si $d\bar{\rho}/dz < 0$ et instable si $d\bar{\rho}/dz > 0$ (en réalité pour observer l'instabilité il faut généralement dépasser une valeur critique du gradient de densité). La dynamique observée est très différente dans les deux cas : un exemple où la stabilité du profil de stratification est cruciale pour des raisons environnementales est celui de l'atmosphère hivernale des villes entourées des montagnes. Un phénomène dit d'*inversion thermique* se manifeste le matin des jours froids. Dans ce cas, les polluants restent piégés près du sol car l'air dans les couches basses est plus froid que dans les couches intermediaires. La concentration de polluants ne peut donc diminuer que lorsque le soleil réchauffe suffisamment le sol pour dépasser le seuil d'instabilité de la stratification, engendrant le brassage de l'air par des mouvements de convection. Outre son rôle dans la description des fluides géophysiques

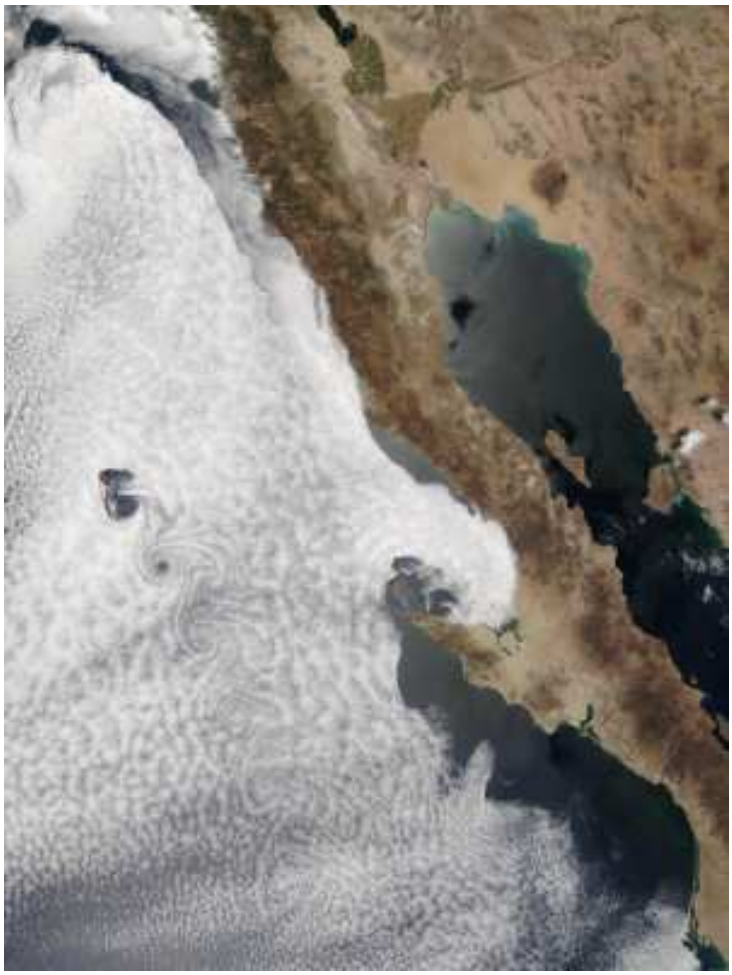


FIG. 1.1 – Allée tourbillonnaire dans le sillage de Isla Guadalupe, en face de Baja California, México. Les tourbillons sont visibles sur la couche de stratocumulus marins. Au centre de chaque tourbillon, la composante verticale de vent induite arrive parfois à casser la couche de nuages (Image prise le 16 mai 2002 par Jacques Descloitres, MODIS Land Rapid Response Team, NASA/GSFC).

et environnementaux, la dynamique des fluides stratifiés a une importance fondamentale dans de nombreuses applications industrielles telles que le transport et le stockage de liquides de densité variable ou les systèmes de ventilation passive.

Stratification dans les fluides géophysiques

La plupart des traits distinctifs des écoulements atmosphériques et océaniques tirent leur origine des contraintes dynamiques imposées par la stratification des profils de densité, combinées avec celles qui resultent de la rotation de la terre. Un de ces traits est l'omniprésence des structures tourbillonnaires dont les échelles caractéristiques horizontales sont beaucoup plus grandes que l'échelle verticale. Parmi ces structures de

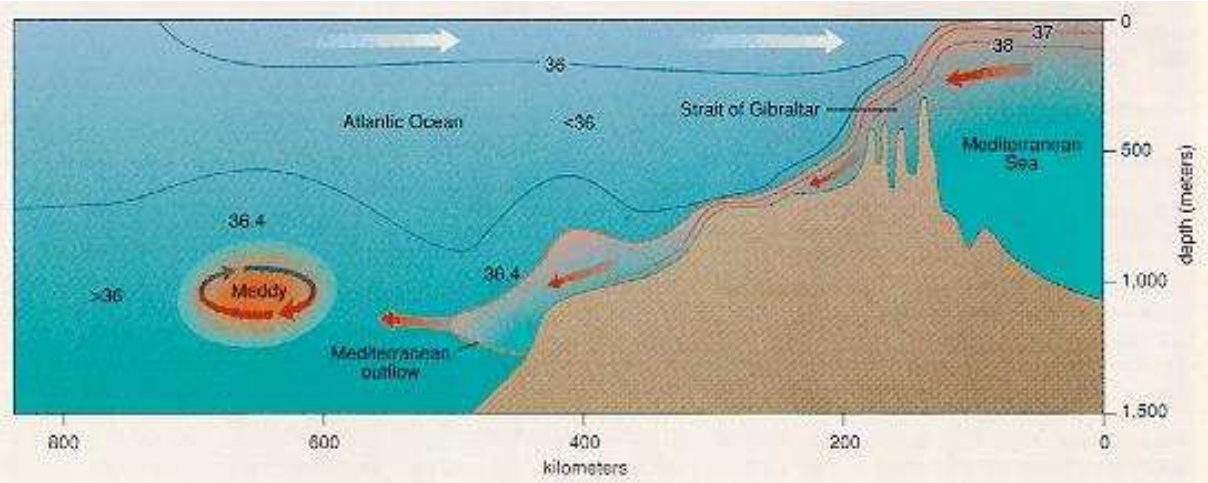


FIG. 1.2 – Formation des "meddies" (D'après Richardson, 1993).

rapport d'aspect aplati, dites quasibidimensionnelles (Q2D), on trouve dans le contexte météorologique les cellules de haute et basse pression dans l'atmosphère, ainsi que les allées tourbillonnaires dans le sillage de certaines îles (e.g. figure 1.1). Dans le cas de l'océan, un exemple typique parmi les structures tourbillonnaires dites de sous-méso-échelle (voir McWilliams, 1985) est celui des "meddies". Il s'agit de tourbillons anticycloniques d'eau de la Méditérrannée, avec une forme de lentille, qui sont éjectés vers l'Atlantique près de Gibraltar à environ 1000m de profondeur et qui peuvent "vivre" plusieurs années (voir figure 1.2). La découverte des meddies (McDowell & Rossby, 1978) a défié l'interprétation traditionnelle du rôle de la langue d'eau de la Méditerrannée dans les budgets de sel et chaleur de l'Atlantique du Nord comme un processus purement advectif/diffusif (Armi *et al.*, 1988; Bower *et al.*, 1997).

Les structures tourbillonnaires Q2D impliquent une organisation des écoulements en couches qui résulte de l'inhibition des mouvements verticaux dus à la stratification du profil de densité. En parallèle, une stratification stable, comme celle que l'on trouve dans la thermocline océanique ou dans la stratosphère, permet la propagation des ondes de gravité internes. Ces ondes existent grâce à la force de rappel qui agit sur une particule déplacée de sa position d'équilibre et qui tend à maintenir les isodensités plates. Elles sont responsables d'une grande partie des transferts énergétiques à grande distance dans l'atmosphère et les océans où leurs périodes peuvent être d'environ plusieurs minutes jusqu'à une journée (Staquet & Sommeria, 2002). Une des sources les plus importantes d'ondes internes dans le contexte géophysique est l'interaction des écoulements (les marées dans l'océan et le vent dans l'atmosphère) avec la topographie. Toutefois, plusieurs mécanismes qui perturbent l'équilibre des isodensités engendrent des ondes internes. Parmi d'autres exemples, l'ajustement des tourbillons instationnaires ou l'effondrement des régions tur-

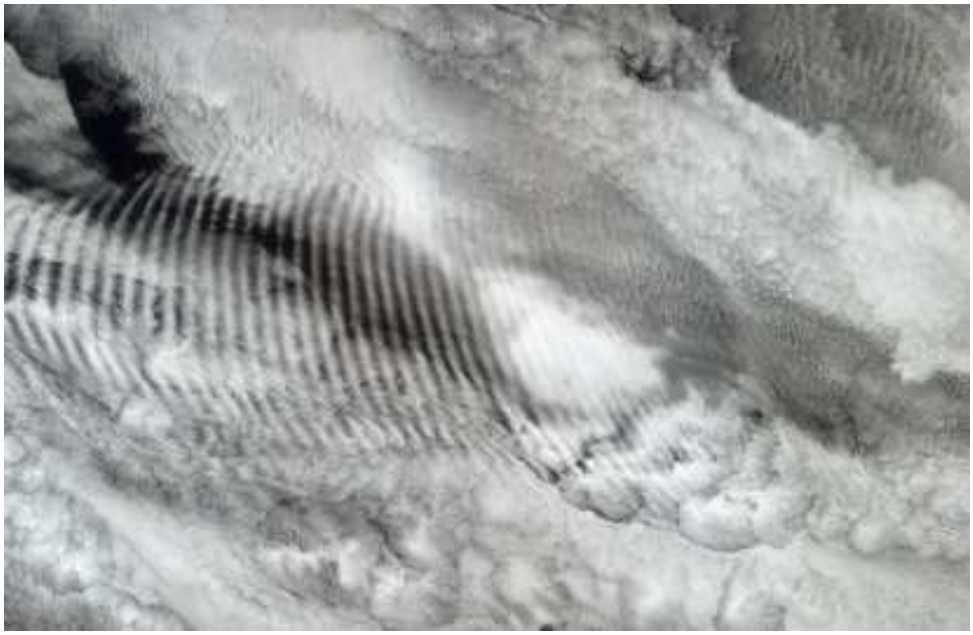


FIG. 1.3 – Ondes de gravité visibles sur une couche de stratocumulus marins sur l'Océan Indien le 29 octobre 2003 (Source : NASA/GSFC/LaRC/JPL, MISR Team).

bulentes. Dans le cas de l'océan, le forçage du vent à la surface est néanmoins souvent reconnu comme la source principale d'ondes internes (Garrett, 2000). Dans l'atmosphère, une autre source primaire sont les nuages convectifs de type cumulus qui frappent des couches dont la stratification est stable. La perturbation produite par les ondes de gravité peut être parfois observée sur des couches de stratocumulus associées à la stratification stable (e.g. figure 1.3).

Tourbillons pancake et ondes de gravité internes

Les tourbillons Q2D et les ondes de gravité internes coexistent donc dans les environnements stratifiés mais, bien que tous les deux témoignent de l'anisotropie imposée par l'inhibition des mouvements verticaux, ils représentent deux modes dynamiques très différents. Les échelles de temps rélatives aux deux types de mouvement s'écartent lorsque la stratification est forte : les ondes évoluent sur une échelle de temps rapide $T_N = 1/N$, où N est la fréquence de Brunt-Väisälä, une fréquence naturelle déterminée par l'intensité de la stratification, tandis que les mouvements tourbillonnaires sont régis par une échelle lente $T_A = L_h/U$, où U et L_h sont des échelles horizontales de vitesse et de longueur caractéristiques des structures tourbillonnaires. Une autre distinction entre ces deux modes est que les ondes ne possèdent pas de vorticité potentielle, celle-ci étant complètement contenue dans les mouvements tourbillonnaires qui représentent la composante non-propagative de l'écoulement, et qui sont souvent appelés modes de vorticité po-

tentielle (ou modes PV dans la terminologie de Riley & Lelong, 2000). La séparation entre ces deux modes est évidente lors de l'effondrement d'une région turbulente en présence de stratification. L'énergie turbulente est transmise d'une part à des ondes internes qui se propagent loin de l'espace initialement occupé par la turbulence tandis que des mouvements advectifs lents, constituant des tourbillons Q2D, s'organisent sur place. La création de tourbillons Q2D à partir d'un écoulement turbulent initialement tridimensionnel a été observée dans de nombreuses expériences en laboratoire : dans le sillage d'une sphère (e.g Pao & Kao, 1977; Bonneton *et al.*, 1993; Spedding *et al.*, 1996*b*), après l'effondrement d'un jet d'impulsion (e.g. van Heijst & Flór, 1989) ou de la turbulence engendrée par une grille (e.g. Fincham *et al.*, 1996). Le rapport d'aspect aplatit des ces tourbillons leur a valu l'appellation de "pancakes" et plusieurs travaux étudiant leurs caractéristiques ont été reportés dans la littérature (e.g Flor & van Heijst, 1996; Spedding *et al.*, 1996*a*; Bonnier *et al.*, 2000; Beckers *et al.*, 2001).

La structure verticale des écoulements en couches constitués par des structures de type "pancake" est déterminante pour la nature des échanges d'énergie et de quantité de mouvement dans les écoulements géophysiques. Les mécanismes de sélection d'échelle verticale régissent par exemple les spectres observés dans la turbulence atmosphérique, où une dépendance en N, la fréquence de Brunt-Väisälä, à été constatée (Lindborg, 1999, 2002). Cette dépendance en N a été observée aussi en laboratoire dans plusieurs configurations, par exemple, l'expérience de Taylor-Couette stratifiée (Boubnov *et al.*, 1995), des sillages stratifiés (Spedding, 2002) et l'instabilité zigzag d'une paire de tourbillons en colonne (Billant & Chomaz, 2000*a*), ainsi que dans des simulations numériques de la décroissance de la turbulence stratifiée (Godeferd & Staquet, 2003). Des cas contraires, où l'échelle verticale est indépendante de l'intensité de stratification et dépend seulement du nombre de Reynolds ont été aussi observés dans des simulations numériques (e.g. Riley & deBruynKops, 2003) et dans des expériences de décroissance de turbulence de grille (e.g Fincham *et al.*, 1996; Bonnier *et al.*, 2000; Praud, 2003).

Les ondes de gravité internes et les tourbillons pancake étant les briques élémentaires des écoulements qui se manifestent dans les fluides stratifiés, leur interaction est un sujet crucial pour la compréhension de la dynamique des écoulements géophysiques. Les problèmes d'interaction ont été abordés de plusieurs façons. D'un point de vue théorique, la séparation des temps caractéristiques des ondes et des tourbillons a conduit à des traitements mettant en œuvre des méthodes d'échelles multiples (voir e.g. Riley & Lelong, 2000). L'émission d'ondes internes peut être observée dans des phases d'ajustement cyclostrophique d'un tourbillon (e.g Beckers *et al.*, 2001) mais aussi à cause de la non-stationnarité d'un tourbillon en équilibre (e.g. Plougonven & Zeitlin, 2002). Le déferlement d'ondes internes peut engendrer de la turbulence (e.g. Bouruet-Aubertot *et al.*, 1996) et un transfert indirect d'énergie des ondes vers des modes tourbillonnaires peut se produire après l'effondrement de cette turbulence. L'effet des tourbillons sur les ondes est souvent

analysé en termes de théorie des ondes se propageant dans un écoulement moyen où la fréquence des ondes dans le référentiel du fluide subit un décalage Doppler (e.g. Lighthill, 1978). Le cas où la fréquence de l'onde relative au fluide est décalée vers zero détermine l'apparition d'une "couche critique" où l'énergie de l'onde est transferée à l'écoulement moyen.

Sommaire de la thèse

Cette thèse considère, dans une approche expérimentale et théorique, différents aspects de la dynamique diffusive des tourbillons pancake ainsi que son interaction avec des ondes de gravité internes.

Dans une première partie, les bases théoriques pour la description des écoulements stratifiés sont établies et une analyse asymptotique des équations de Boussinesq pour un fluide stratifié permet d'obtenir le premier résultat : l'effet du rapport du coefficient de diffusivité de quantité de mouvement (i.e. la viscosité cinématique ν) à celui de l'agent stratifiant (κ) —le nombre de Schmidt $Sc = \nu/\kappa$ où de Prandtl, suivant qu'on considère la salinité ou la température comme agent stratifiant— dans la diffusion d'un tourbillon pancake axisymétrique. On montre que la valeur de Sc détermine l'apparition de différents effets dynamiques dans la difusion des tourbillons pancake. Quand Sc est grand, comme dans le cas des écoulements dans l'eau stratifiée en salinité, la diffusion de l'agent stratifiant ralentit la diffusion visqueuse de la quantité de mouvement. Au contraire, pour des valeurs de Sc plus petits que 1, comme pour l'air stratifié en température, un régime superdiffusif est prédit.

Le chapitre suivant décrit le montage expérimental qui servira de base pour l'ensemble des travaux. Le chapitre 5 est consacré à la sélection d'échelles verticales des tourbillons pancake. Un nouveau mécanisme visqueux de sélection est mis en évidence à partir des observations expérimentales sur un dipôle et un modèle physique est proposé. Trois paramètres de contrôle adimensionnels peuvent être définis pour le dipôle expérimental : le nombre de Reynolds $Re = UL_h/\nu$, le nombre de Froude horizontal $F_h = U/NL_h$ et le rapport d'aspect $\alpha = L_v/L_h$, où U, L_h, L_v et N sont, respectivement, la vitesse initiale de translation horizontale du dipôle, les échelles de longueur caractéristiques horizontale et verticale et la fréquence de Brunt-Väisälä. Quand le produit du nombre de Reynolds avec le rapport d'aspect αRe est assez grand, une diminution de la taille verticale du dipôle est observée, tandis que sa circulation horizontale est conservée. Cet effet est dû à la création de deux couches limites, au dessus et au dessous du dipôle où le fluide est ralenti par viscosité. La taille verticale des couches limites constitue une échelle visqueuse et l'amincissement du dipôle s'arrête quand les deux couches limites en haut et en bas se rejoignent. La viscosité est donc responsable d'une décorrélation verticale rapide de l'écoulement, ce qui détermine son échelle verticale. Ce nouveau mécanisme de sélection visqueuse de l'échelle verticale pourrait expliquer le comportement des écoulements tur-

bulents observés en laboratoire qui, aux temps longs, ne dépendent pas de la stratification.

Le dernier chapitre traite de l'interaction entre les ondes de gravité internes et les tourbillons pancake. Des niveaux critiques dans la propagation des ondes sont observés lorsque la fréquence de l'onde dans le référentiel du fluide tend vers 0 ou N. Ces valeurs correspondent, respectivement, aux prévisions de la théorie WKB pour une couche critique et un point tournant dans la propagation de l'onde. De plus, les résultats présentés mettent en évidence de nouveaux effets tridimensionnels avec focalisation et réfraction des ondes dus à la nature tridimensionnelle de l'écoulement dipolaire.

Ce document est organisé de la façon suivante : le chapitre d'introduction est suivi par une brève synthèse de la théorie des écoulements fortement stratifiés (chapitre 2). L'étude asymptotique de la diffusion d'un tourbillon pancake axisymétrique est présentée au chapitre 3. Le chapitre 4 décrit le montage et les méthodes expérimentales et dans les chapitres 5 et 6 sont présentés, respectivement, les résultats concernant la sélection visqueuse d'échelle verticale dans les fluides stratifiés et l'interaction onde-tourbillon lorsque des ondes de gravité internes se propagent dans l'écoulement produit par un dipôle pancake. Les conclusions et perspectives closent ce document.

Les chapitres 3, 5 et 6 écrits en anglais constituent des articles publiés ou en préparation et peuvent être lus séparément.

Chapitre 2

Théorie

Ce chapitre est consacré à la présentation des bases théoriques qui serviront à développer les modèles présentés dans les chapitres suivants. Après avoir posé les équations du mouvement pour un fluide stratifié dans l'approximation de Boussinesq, je recense son application à la description des ondes de gravité internes (basée principalement sur les livres de Lighthill (1978) et Gill (1982)) ainsi que de la théorie proposée par Riley, Metcalfe & Weissman (1981) pour décrire les écoulements fortement stratifiés.

2.1 Équations du mouvement

On considère un fluide dont la densité varie avec la hauteur dans un système de coordonnées cartésiennes $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ avec $\mathbf{e_3}$ opposé à la gravité. Si l'on appelle $\mathbf{x} = (x, y, z)$ les coordonnées d'espace et t le temps, les équations du mouvement pour un fluide incompressible s'écrivent :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla} p - \rho g \mathbf{e_3} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \,, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0 \,, \tag{2.2}$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$, $p(\mathbf{x}, t)$ et $\rho(\mathbf{x}, t)$ sont les champs de vitesse, pression et densité, respectivement, μ la viscosité dynamique et $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ la dérivée lagrangienne. La diffusion de l'agent stratifiant permet d'écrire une autre équation pour l'évolution de $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \kappa \nabla^2 \rho \,. \tag{2.3}$$

où κ est la diffusivité de l'agent stratifiant.

2.2 Approximation de Boussinesq

Les équations (2.1), (2.2) et (2.3) peuvent être simplifiées si l'on ne considère les variations de la densité que dans le terme de pesanteur de l'équation (2.1). Cette approximation, due à Boussinesq, est utile lorsque les fluctuations de densité dans l'écoulement restent petites par rapport au gradient du profil de densité moyen (plus de détails sur les restrictions imposées par cette approximation peuvent être trouvés dans Phillips (1966) ou Pedlosky (1987)). On commence par séparer la densité et la pression en deux parties, un état de base homogène et indépendant du temps (ρ_0, p_0) et une fluctuation (ρ', p') :

$$\rho(\mathbf{x},t) = \rho_0 + \rho'(\mathbf{x},t)\ , \tag{2.4}$$

$$p(\mathbf{x},t) = p_0(z) + p'(\mathbf{x},t)\ , \tag{2.5}$$

où $p_0(z)$ est la pression hydrostatique correspondante à la densité de référence ρ_0 vérifiant

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g\ . \tag{2.6}$$

Les variables p' et ρ' représentent l'écart de la pression et la densité du fluide stratifié avec leurs valeurs dans le cas d'un fluide homogène de densité ρ_0 en équilibre hydrostatique. En remplaçant ρ et p dans l'équation (2.1) par les expressions (2.4) et (2.5), respectivement, et en divisant par ρ_0, on peut écrire, à l'aide de l'équation (2.6) pour l'équilibre hydrostatique :

$$\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p' - \frac{\rho'}{\rho_0} g\mathbf{e_3} + \nu\nabla^2\mathbf{u}\ , \tag{2.7}$$

où l'on a introduit la viscosité cinématique définie comme $\nu = \mu/\rho_0$. Maintenant on utilise le fait que $\rho'/\rho_0 \ll 1$ pour le négliger dans le terme d'inertie. On trouve ainsi, à partir des équations (2.1), (2.2) et (2.3), les équations du mouvement pour un fluide stratifié dans le cadre de l'*approximation de Boussinesq* :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p' - \frac{\rho'}{\rho_0} g\mathbf{e_3} + \nu\nabla^2\mathbf{u}\ , \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0\ , \tag{2.9}$$

$$\frac{D\rho'}{Dt} = \kappa\nabla^2\rho'\ . \tag{2.10}$$

Le système obtenu, couplé avec différentes conditions initiales et différentes conditions aux limites, peut être utilisé pour décrire un grand nombre d'écoulements en milieu stratifié. Il est en particulière très utile à l'interprétation physique des phénomènes grâce au terme de flottabilité qui s'y trouve bien identifié —voir e.g. Tritton (1988) et Kundu

(1990).

2.3 Vorticité potentielle : théorème d'Ertel.

Une propriété importante des fluides stratifiés est que les variations de la densité ont un effet sur la vorticité. On considère ici le cas non visqueux. Dans les écoulements homogènes, le flux de vorticité à travers une surface matérielle est conservé (théorème de Kelvin), et les tubes de vorticité sont advectés (théorème d'Helmholtz). En revanche, le flux de vorticité n'est pas conservé dans les fluides stratifiés car le couple barocline induit par les variations de densité peut créer de la vorticité (voir e.g. Kundu, 1990). La relation entre les changements de densité et ceux de vorticité est donnée par le *théorème d'Ertel* , qui établit la conservation du flux de vorticité normal aux surfaces de densité constante, c'est à dire la conservation du scalaire $\omega \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho$ connu sous le nom de *vorticité potentielle* :

$$\frac{D}{Dt}\left(\omega \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho\right) = 0 \; . \tag{2.11}$$

Cette équation est l'équation de la vorticité obtenue en prenant le rotationnel de l'équation (2.1), mais où l'on a négligé les effets visqueux et utilisé le fait que $D\rho/Dt = 0$ (Pedlosky, 1987).

2.4 Ondes de gravité internes

2.4.1 Fréquence de Brunt-Väisälä

Dans une stratification stable, lorsque l'on déplace une particule fluide verticalement par rapport à sa position d'équilibre, elle ressent une force de rappel due à la poussée d'Archimède qui agit pour la ramener à sa position d'origine. Pour un déplacement ζ, et dans l'hypothèse d'un fluide incompressible de profil de densité $\bar{\rho}(z)$, une force volumique de flottabilité s'exprimant

$$g\zeta d\bar{\rho}/dz \; , \tag{2.12}$$

va essayer de repousser la particule vers sa position d'équilibre. Autrement dit, la stratification tend à empêcher les mouvements suivant la verticale. En négligeant la viscosité, on peut écrire l'équation du mouvement pour cette particule fluide (Turner, 1973) :

$$\rho_0 \frac{d^2\zeta}{dt^2} = g\zeta \frac{d\bar{\rho}}{dz} \; , \tag{2.13}$$

avec ρ_0 la densité au niveau d'équilibre. Pour $d\bar{\rho}/dz < 0$, cette équation est celle d'un oscillateur simple de fréquence :

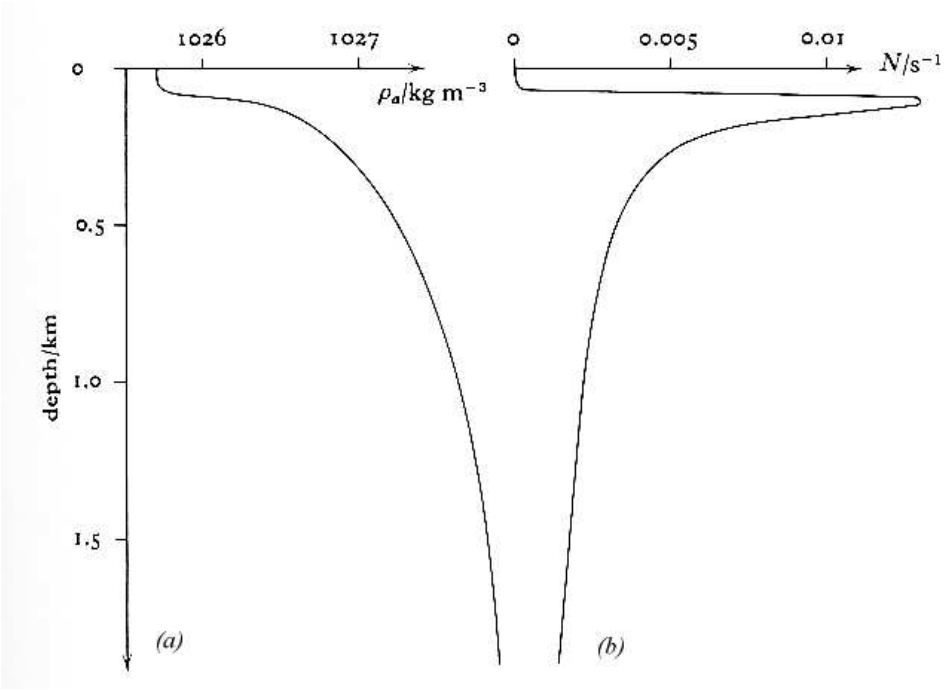


FIG. 2.1 – Profil typique de (a) densité et (b) fréquence de Brunt-Väisälä dans l'océan. Pour enlever la partie hydrostatique, le profil de densité est tracé pour les valeurs à pression atmosphérique (D'après Lighthill, 1978).

$$N = \left(-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.14}$$

L'expression pour la force volumique de rappel (2.12) due à une stratification stable peut s'écrire à l'aide de (2.14) comme

$$\bar{\rho} N^2 \zeta . \tag{2.15}$$

L'énergie potentielle volumique que possède la particule fluide est donc

$$\frac{1}{2} \bar{\rho} N^2 \zeta^2 . \tag{2.16}$$

Cette pulsation, dite *fréquence de Brunt-Väisälä* ou fréquence de flottabilité, est une mesure de l'intensité de la stratification. On constate qu'elle est proportionnelle au changement de densité avec la coordonnée verticale et, au regard de l'expression (2.13), on peut aussi remarquer qu'une configuration avec $d\bar{\rho}/dz > 0$ est gravitationnellement *instable*. Les profils de densité dans l'océan et l'atmosphère présentent des caractéristiques différentes qui se traduisent dans les profils respectifs de $N(z)$. Dans le cas de l'océan le profil de densité est stratifié à cause de la température (l'eau est plus chaude près de la

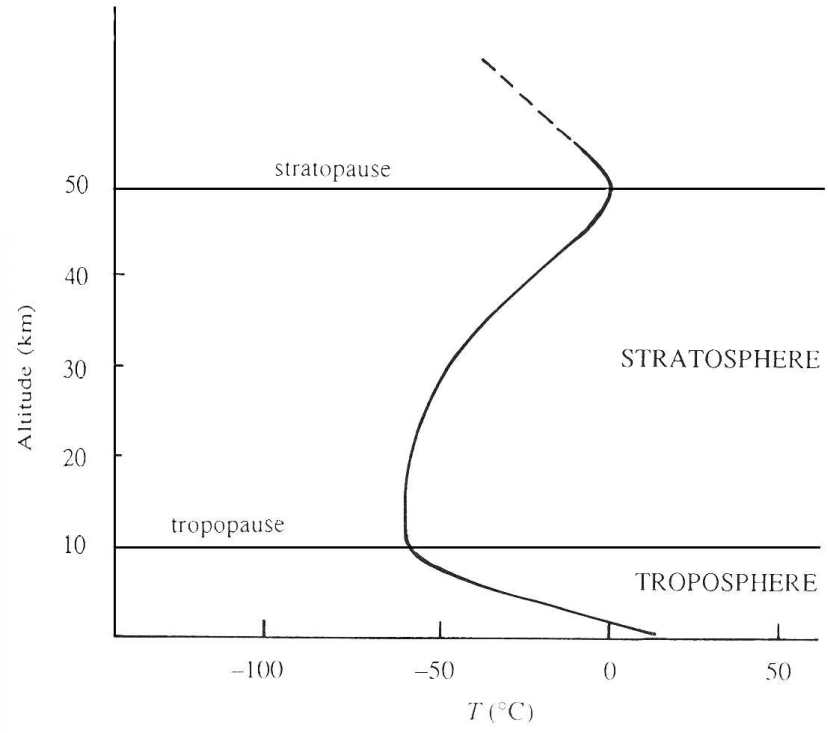


FIG. 2.2 – Profil typique de temperature dans les 50km plus bas de l'atmosphère. (D'après Kundu, 1990)

surface) et de la salinité (en général plus importante quand on s'éloigne de la surface vers l'intérieur de l'océan). Ces deux effets causent une augmentation de la masse volumique avec la profondeur. Comme on peut voir dans la figure 2.1, près de la surface on trouve une zone bien mélangée qui s'étend dans une épaisseur d'ordre 10^2m et où N est pratiquement nulle. Au dessous de cette première couche il y a une zone de transition appellé la thermocline, où la densité augmente rapidement (due principalement à une diminution rapide de la température) et où N présente un maximum (d'ordre $10^{-2}\mathrm{s}^{-1}$). Plus loin vers le fond la densité augmente toujours mais beaucoup plus lentement et N diminue en conséquence.

Le profil de densité de l'atmosphère présente plusieurs traits qui le distinguent de celui de l'ocean. D'abord, la densité diminue de façon importante et presque indéfiniment avec l'altitude. En contraste avec la distribution de $N(z)$ pour l'océan qui présente un seul pic assez étroit correspondant à la thermocline, dans le cas de l'atmosphère (voir figure 2.2) on trouve des zones assez étendues où la température augmente doucement avec l'altitude (e.g. la stratosphère), déterminant un profil de $N(z)$ qui varie lentement. Comme on le verra, les caractéristiques du profil de $N(z)$ ont un rôle primordial dans l'analyse des ondes de gravité internes, en particulier en ce qui concerne les approximations qu'on peut y faire dans certains cas (e.g. pour un milieu lentement variable).

2.4.2 Équations linéarisées

L'oscillation des particules fluides due à la force de rappel d'Archimède est à la base de la propagation des ondes de gravité internes dès qu'un gradient stable de densité existe. On peut trouver les propriétés principales de ces ondes à partir d'une version linéarisée et non visqueuse des équations de Boussinesq (2.8)-(2.10). On commence par séparer les fluctuations de pression et de densité, p' et ρ', en une partie indépendante du temps et en équilibre hydrostatique correspondant à un profil de densité linéaire ($\bar{p}$ et $\bar{\rho}$), et en une perturbation par rapport à ce profil ($\tilde{p}$ et $\tilde{\rho}$) :

$$\rho'(\mathbf{x},t) = \bar{\rho}(z) + \tilde{\rho}(\mathbf{x},t) \,, \tag{2.17}$$

$$p'(\mathbf{x},t) = \bar{p}(z) + \tilde{p}(\mathbf{x},t) \,. \tag{2.18}$$

On réécrit alors les équations (2.8)-(2.10), en utilisant aussi la définition de la fréquence de Brunt-Väisälä (2.14) ainsi que l'équation pour l'équilibre hydrostatique $d\bar{p}/dz = -\bar{\rho}g$, et en négligeant les termes non linéaires et les effets de diffusion visqueuse et de l'agent stratifiant :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\tilde{p} - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} g \mathbf{e_3} \,, \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0 \,, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = u_z \frac{\rho_0 N^2}{g} \,. \tag{2.21}$$

On remarque dans (2.21), où l'on a écrit $-d\bar{\rho}/dz$ comme $\rho_0 N^2/g$, que la perturbation de densité en un point est engendrée exclusivement par l'advection verticale du profil de densité de base $\bar{\rho}(z)$.

Le système (2.19)-(2.21) admet des solutions ondulatoires. Ceci est plus facilement observé à l'aide d'une équation pour la composante verticale de la vitesse u_z qui peut être trouvée après une courte manipulation des équations (2.19)-(2.21). À partir de la dérivée temporelle de l'équation de continuité (2.20) et des composantes horizontales de l'équation (2.19) on trouve l'équation

$$\frac{1}{\rho_0}\,\nabla_H^2 \tilde{p} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial t} \,, \tag{2.22}$$

en terme du Laplacien horizontal $\nabla_H^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Une deuxième relation entre $\tilde{p}$ et u_z est obtenue après élimination de $\tilde{\rho}$ en utilisant (2.21) et la composante verticale de (2.19),

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial z\partial t} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - N^2 u_z \ . \tag{2.23}$$

En appliquant l'operateur ∇_H^2 à (2.23) et y substituant l'équation (2.22) on trouve, après regroupement des termes, l'équation suivante pour la vitesse verticale

$$\frac{\partial^2\nabla^2 u_z}{\partial t^2} + N^2\nabla_H^2 u_z = 0 \ . \tag{2.24}$$

Pour procéder à l'analyse de cette équation il est utile de faire la distinction entre différents types de profils de N (N étant, dans le cas général, une fonction quelconque de z). Le cas le plus simple, où N est constant, que l'on traite le plus souvent permet non seulement d'étudier les propriétés principales des ondes internes mais aussi d'effectuer l'analyse locale de cas réels où N varie lentement.

2.4.3 Relation de dispersion

Le caractère anisotrope de l'équation (2.24), mis en évidence par la présence simultanée des operateurs Laplaciens ∇^2 et ∇_H^2, apparaît dans la relation de dispersion des ondes internes valable lorsque N est constant :

$$\omega^2 = N^2\cos^2\theta = N^2\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \ . \tag{2.25}$$

On l'obtient en cherchant des solutions sous la forme d'ondes planes de fréquence ω et vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. θ est l'angle que fait le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ avec l'horizontale et tous les champs sont alors proportionnels à $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)]$. On remarque que la dispersion décrite par (2.25) est indépendente de $k = |\mathbf{k}|$ et elle ne depend que de l'orientation de $\mathbf{k}$. En outre, l'équation (2.25) montre aussi que les fréquences admises pour les ondes internes sont bornées par la fréquence de Brunt-Väisälä. Pour $\omega \to N$ on aura un vecteur d'onde $\mathbf{k}$ presque horizontal et des plans de phase alignés verticalement, tandis que la situation inverse ($\mathbf{k}$ presque vertical et des fronts d'onde horizontaux) sera observée pour $\omega \to 0$.

2.4.4 Vitesse de phase et vitesse de groupe

Les fronts d'onde se déplacent à la vitesse de phase $\mathbf{c}$, qui est colinéaire au vecteur d'onde. Elle est donnée par

$$\mathbf{c} = (\omega/k^2)\mathbf{k} \ . \tag{2.26}$$

Par contre, la vitesse de groupe

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega = \frac{Nk_z}{k^3(k_x^2+k_y^2)^{1/2}}\left(k_xk_z,\ k_yk_z,\ -k^2+k_z^2\right)\ , \tag{2.27}$$

qui indique la direction de propagation de l'énergie de l'onde, est perpendiculaire à $\mathbf{k}$. Le mouvement des particules dû aux ondes se fait aussi dans cette direction, comme on peut le voir dans l'équation de continuité (2.20) qui se traduit pour les ondes par $\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}$=0. Les propriétés des ondes internes son résumées dans la figure 2.3 pour un cas où la projection horizontale du vecteur d'onde —i.e. $\mathbf{k}_H = (k_x, k_y)$— est alignée avec l'axe x (et donc $k_y = 0$). On ne perd pas de généralité avec une telle représentation car la dispersion dans le plan horizontal est isotrope et il est donc toujours possible d'aligner l'axe x d'un referentiel cartesien avec $\mathbf{k}_H$.

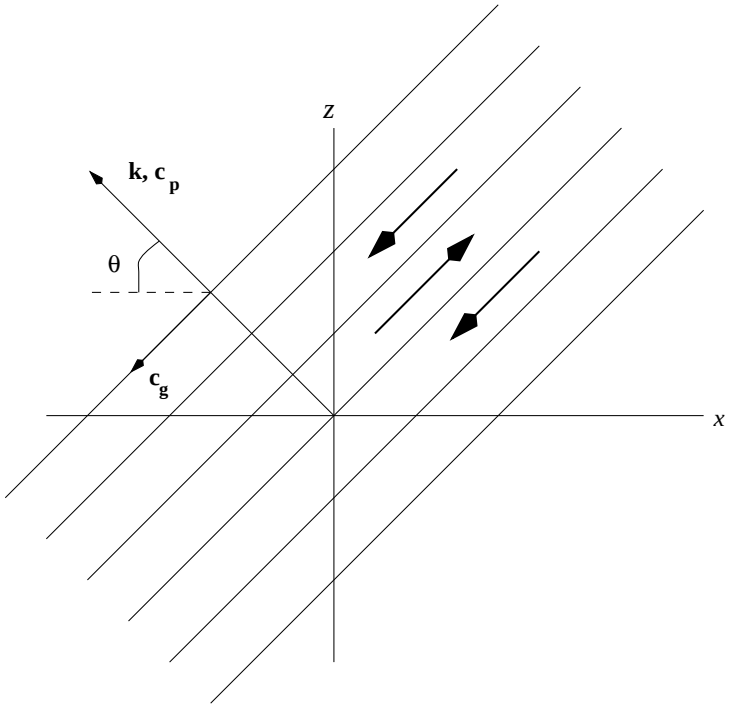


FIG. 2.3 – Bilan des propriétés des ondes internes dans un plan xz. Les lignes droites représentent des isophases, perpendiculaires au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et à la vitesse de phase $\mathbf{c}$ et parallèles à la vitesse de groupe $\mathbf{c}_g$. Les fléches indiquent l'orientation du mouvement des particules fluides.

2.4.5 Flux d'energie dû aux ondes

L'énergie des ondes internes par unité de volume peut s'écrire comme

$$E = \frac{1}{2}\bar{\rho}(z)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\bar{\rho}(z)N^2\zeta^2\ , \tag{2.28}$$

c'est-à-dire comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, cette dernière étant exprimée comme dans l'équation (2.16). La dérivée temporelle de cette expression peut toujours s'exprimer comme l'opposé de la divergence du *flux d'énergie*

$$\mathbf{I} = \tilde{p}\mathbf{u} \ , \tag{2.29}$$

toujours non-nul du fait que $\tilde{p}$ et $\mathbf{u}$ sont en phase. Pour les ondes planes on peut aussi exprimer ce flux comme

$$\mathbf{I} = E\mathbf{c}_g \ , \tag{2.30}$$

ce qui illustre le fait que la propagation de l'énergie se fait dans la direction de la vitesse de groupe.

2.4.6 Ondes dans une stratification nonlinéaire

On considère maintenant deux cas où N n'est pas constant mais varie avec la verticale.

Ondes piégées

Quand le profil de $N(z)$ présente un pic très localisé (e.g. le cas de la thermocline dans l'ocean), un forçage de 'haute' fréquence ω peut conduire à la génération des ondes internes pouvant se propager uniquement dans la zone étroite où $N(z) \geq \omega$. On parle alors d'ondes *piégées* qui se propagent horizontalement et qui peuvent être décrites en cherchant des solutions de l'équation (2.24) sous la forme

$$u_z = W(z) \exp[i(k_x x - \omega t)] \ . \tag{2.31}$$

pour des ondes qui se propagent dans la direction x avec vitesse de phase ω/k_x. L'amplitude $W(z)$ obéit à l'équation

$$\omega^2 W''(z) + k_x^2 \left([N(z)]^2 - \omega^2 \right) W(z) = 0 \ , \tag{2.32}$$

qui décrit un oscillateur dans la bande où $\omega < N(z)$ et une décroissance exponentielle lorsque $\omega > N(z)$. Le raccordement entre la solution oscillante et les queues exponentielles où $\omega = N(z)$ ne permet que l'existence de certains modes $k_x = k_x^n$ [1]. Quand le pic dans la distribution de $N(z)$ est extrêmement étroit les ondes qui apparaissent deviennent très semblables à celles que l'on voit en présence d'une discontinuité dans le profil de densité.

[1] L'équation (2.32) est similaire à l'équation de Schrödinger en mécanique quantique $(\hbar^2/2M)\psi''(z) + [E - V(z)]\psi(z) = 0$ pour la fonction d'onde $\psi(z)$ d'une particule de masse M et énergie E dans un puit de potentiel $V(z)$ pour laquelle la procédure habituelle est de chercher les niveaux d'énergie pour une masse donnée tels que des ondes piégées existent.

Ondes dans un milieu lentement variable : théorie des rayons

On analyse maintenant la situation qui s'établit lorsque des ondes se propagent dans un milieu dont les propriétés varient lentement en espace. Dans le cas où le profil de fréquence de Brunt-Väisälä est une fonction de la coordonnée verticale, cela signifie qu'il faut plusieurs longueurs d'onde pour que la variation de $N(z)$ soit significative. Ceci trouve des applications principalement dans la description des ondes internes atmosphériques dans les regions où $N(z)$ change doucement avec l'altitude (voir figure 2.2), mais aussi dans celle des ondes internes de plus basse fréquence dans l'océan qui ne sont pas piégées dans la thermocline et qui se propagent vers de plus grandes profondeurs. Le vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ varie donc seulement d'une petite partie de son amplitude $2\pi/\lambda$ au cours d'une longueur d'onde λ, de telle sorte que $N(z)$ peut être considerée *localement* comme étant constante et les solutions de l'équation (2.24) peuvent toujours s'écrire sous la forme

$$u_z = W(x, y, z, t) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \ , \tag{2.33}$$

où $W(x, y, z, t)$ est une amplitude lentement variable (cette approche est connue sous le nom d'approximation WKB). Les ondes obéissent donc localement à la relation de dispersion (2.25), où θ indique la direction de propagation de l'énergie. Cette direction, qui est constante dans une stratification linéaire, varie à cause de l'inhomogénéité et suit une trajectoire (un *rayon*) dont le vecteur de position se déplace à la vitesse de groupe, c'est à dire

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{c}_g \ . \tag{2.34}$$

Le changement du vecteur d'onde le long des rayons est donné par (voir Lighthill, 1978)

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\nabla\omega \ , \tag{2.35}$$

où la dérivée temporelle doit être considerée le long d'un rayon, c'est à dire suivant une position qui se déplace à la vitesse de groupe (i.e. $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{c}_g \cdot \nabla)$). Une des conséquences des équations (2.34) et (2.35) est que la fréquence ω est constante sur un rayon. L'énergie se propageant le long des rayons, on peut prédire à partir des équations (2.34) et (2.35) non seulement la distribution spatiale de $\mathbf{k}$ mais aussi de l'amplitude des ondes.

2.4.7 Ondes dans un écoulement moyen

Quand une onde interne se propage dans un écoulement verticalement cisaillé $\mathbf{U}(z)$ on constate que sa fréquence dans le référentiel absolu ω_a subit un décalage Doppler par rapport à la fréquence intrinsèque (relative au fluide) ω_r

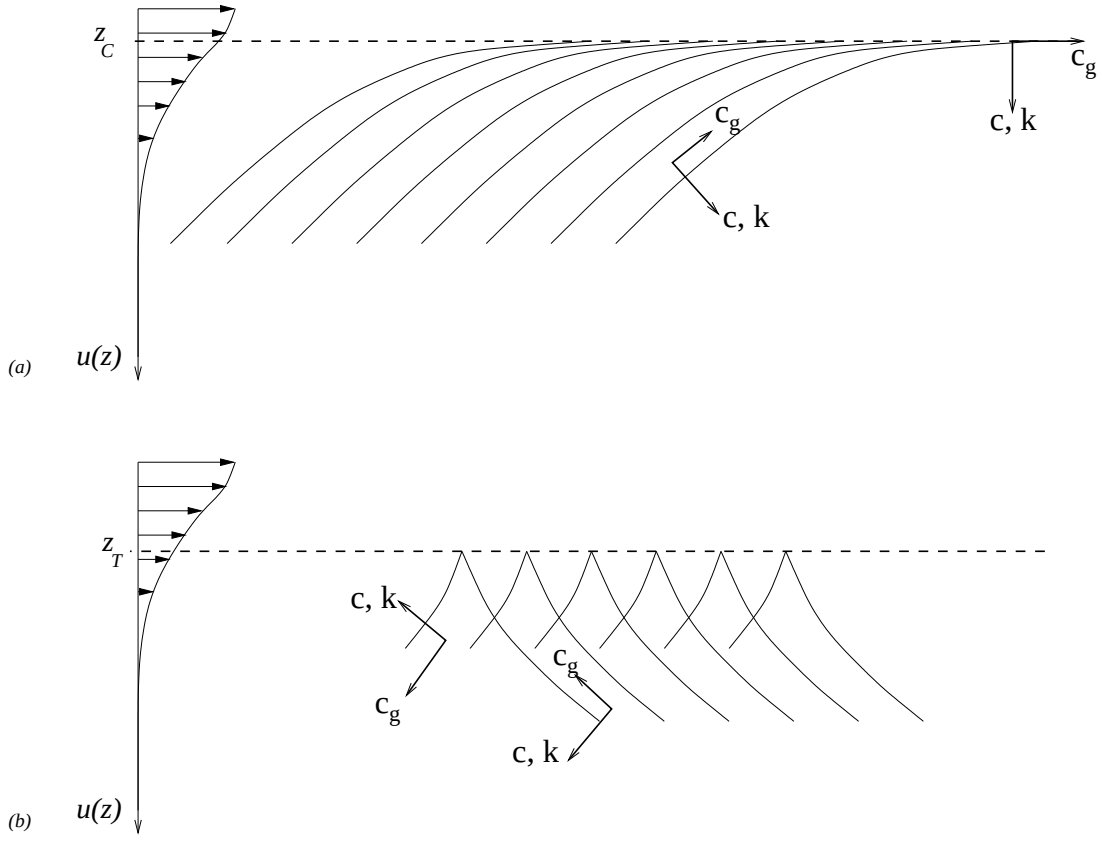


FIG. 2.4 – Schéma de la propagation des ondes internes (a) vers une couche critique et (b) vers un point de retour.

$$\omega_a = \omega_r + \mathbf{U}(z) \cdot \mathbf{k} \; . \tag{2.36}$$

De la même façon que dans la section précédente, si le profil $U(z)$ est lentement variable on peut considérer que localement les ondes obéissent à la relation de dispersion (2.25), de telle sorte que $\omega_r = N\cos(\theta)$. Ainsi, l'effet de l'écoulement sur les ondes se traduit par un changement de la direction des rayons, tout comme dans le cas où N varie avec la verticale. En considérant le même système bidimensionnel xz qu'avant, le cisaillement vertical peut conduire non seulement au niveau critique où $\omega_a = N$ et où l'onde est réféchie, mais aussi au cas limite où le décalage se fait dans l'autre sens (i.e. quand l'écoulement de fond est dirigé dans le même sens que la projection horizontale du vecteur d'onde) et $\omega_a \to 0$. Dans cette situation il n'y a pas d'onde qui traverse la *couche critique* mais il n'y a pas non plus d'onde réfléchie car la vitesse de groupe s'aligne avec l'écoulement de fond (voir figure 2.4). L'analyse linéaire et non visqueuse qui est à l'origine de la théorie des rayons est singulière dans la couche critique car, le vecteur d'onde qui s'alignant verticalement, l'énergie de l'onde diverge et la longueur d'onde verticale devient infiniment petite. Néanmoins, en relaxant l'approximation WKB, on peut confirmer une atténuation

de l'onde dans la couche critique qui exclut l'existence de composantes transmise ou réfléchie (Booker & Bretherton, 1967) et qui implique que toute l'énergie de l'onde est absorbée par l'écoulement de fond. Des effets visqueux ou nonlinéaires ainsi que la nature tridimensionnelle d'un écoulement de fond réel peuvent modifier cette conclusion, limitant en règle générale le transfert d'énergie ondes-écoulement moyen au niveau critique (voir e.g. Staquet & Sommeria, 2002, pour une revue).

2.5 Analyse dimensionelle de Riley

Riley *et al.* (1981) ont étudié numériquement la décroîssance turbulente dans un fluide stratifié et ils ont proposé un modèle théorique dans la limite des petits nombres de Froude, $F = V/NL$, avec V et L échelles de vitesse et longueur, respectivement. Ce modèle a été modifié par Lilly (1983) pour permettre de décrire la partie initiale du développement de la turbulence ainsi que l'effet d'un référentiel tournant. On présente ici leur analyse par laquelle on retrouve differents régimes possibles pour un écoulement stratifié, notamment, le régime des ondes de gravité internes et un autre décrivant des écoulements quasi-bidimensionnel —ou modes de vorticité potentielle (PV) selon la terminologie de Riley & Lelong (2000)— auquel apartiennent les tourbillons *pancake*.

On commence cette fois par écrire les équations de Boussinesq avec la même separation des champs de densité et pression qu'on à utilisé dans la section précedente —(2.17) et (2.18)— mais en gardant les termes non-linéaires :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\tilde{p} - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}g\mathbf{e_3} \,, \tag{2.37}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0 \,, \tag{2.38}$$

$$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} = \frac{\rho_0 N^2}{g}u_z \,. \tag{2.39}$$

Ensuite, on définit les grandeurs U, W, L_h et L_v pour les vitesses et longueurs horizontales et verticales (u, v), w, (x, y) et z, respectivement. On considère deux échelles de temps qui peuvent intervenir : une qui correspond aux mouvements d'advection horizontaux $T_A = L_h/U$, et l'autre qui caractérise les ondes de gravité internes $T_N = N^{-1}$. Le rapport entre ces deux échelles de temps définit un nombre de Froude horizontal :

$$F_h = \frac{U}{L_h N} \,, \tag{2.40}$$

qui compare les forces d'inertie aux forces de flottabilité. On peut aussi définir un nombre de Froude vertical :

$$F_v = \frac{U}{L_v N} \,, \tag{2.41}$$

qui est le rapport de l'échelle verticale L_v avec une *longueur de flottabilité* $L_b = U/N$. L_b peut être interprétée comme le déplacement vertical d'une particule fluide (en agissant contre la poussée d'Archimède) qui convertit toute son énergie cinétique en énergie potentielle. On note la relation évidente entre les deux nombres de Froude : $F_h = \alpha F_v$, où $\alpha = L_v/L_h$ est le rapport d'aspect (en pensant aux tourbillons pancakes). Suivant l'importance respective de F_h et F_v considérée, on arrive à *filtrer* différents régimes possibles. Dans la suite on notera Π et Υ les ordres de grandeur des perturbations de pression et de densité, $\tilde{p}$ et $\tilde{\rho}$, respectivement.

2.5.1 Étape initiale de la turbulence ($F_h \gg 1$)

Dans ce premier régime, on pense à des écoulements très semblables à ceux qu'on trouve dans un milieu homogène (dans le cas de la décroissance d'un patch turbulent ce régime correspond aux instants initiaux). Il est donc naturel de dire que les grandeurs de vitesse et de longueur doivent être du même ordre dans toutes les directions de l'espace (c'est à dire $U \sim W$ et $L_h \sim L_v$). Quant à l'échelle temporelle, on utilise le temps d'advection $T_A = L_h/U$. On trouve à partir de l'équation de la densité (2.39) que $U\Upsilon/L_h \sim \rho_0 U N^2/g$. On en déduit que l'échelle pour les perturbations de densité est $\rho_0 L_h N^2/g$. L'échelle pour la pression $\Pi \sim \rho_0 U^2$ est obtenue à partir de l'équilibre des termes de l'équation de quantité de mouvement (2.37) selon l'horizontale. En utilisant les équations (2.37)-(2.39) on obtient le système d'équations adimensionnelles suivant, où on a gardé les mêmes symboles pour les quantités sans dimensions :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}\tilde{p} - \frac{1}{F_h^2}\tilde{\rho}\mathbf{e_3} \,, \tag{2.42}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0 \,, \tag{2.43}$$

$$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} = u_z \,. \tag{2.44}$$

Le coefficient $1/F_h^2$ dans le terme de flottabilité de l'équation (2.42) nous indique que pour $F_h \gg 1$ on revient à l'équation de quantité de mouvement pour un milieu homogène. $F_h \gg 1$ veut dire que les effets de la poussée d'Archimède sont relativement faibles (i.e. on a soit des vitesses grandes dans la direction du gradient de densité, soit une stratification faible). Avec l'analyse précédente on arrive à décrire l'état initial de la décroissance turbulente dans un milieu stratifié qui est identique à la turbulence isotrope dans un milieu homogène (Lilly, 1983).

2.5.2 Régime d'ondes de gravité internes

Dans les deux cas suivants (qui correspondent aux deux régimes expliqués originellement par Riley *et.al*), on pense aux écoulements où l'effet de la stratification est fort, i.e. $F_h \ll 1$. Dans le cadre de l'évolution de la turbulence en milieu stratifié, ces régimes apparaîssent après l'effondrement gravitationnel de la turbulence tridimensionnelle initiale.

Pour traiter le cas où on observe des ondes de gravité internes, on utilise toujours la même échelle U pour toutes les vitesses, ainsi que L_h pour les longueurs. Ce qui change par rapport au cas précédent est l'utilisation de l'échelle de temps de flottabilité $T_N = N^{-1}$. Maintenant, pour obtenir l'échelle des perturbations de densité on compare les grandeurs des termes $\partial\tilde{\rho}/\partial t$ et $\rho_0 N^2 w/g$ dans l'équation (2.39), ce qui donne $\Upsilon \sim U\rho_0 N/g$. L'échelle de pression est obtenue à partir de la composante verticale de l'équation de quantité de mouvement (2.42). On considère que le terme du gradient de pression est équilibré par le terme de poussée d'Archimède (ce qui donne $\Pi/\rho_0 L_h \sim \Upsilon g/\rho_0$). On trouve ainsi que $\Pi \sim \rho_0 U^2/F_h$. Les équations adimensionnelles s'écrivent pour ce cas comme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + F_h(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}\tilde{p} - \tilde{\rho}\mathbf{e_3}\ , \tag{2.45}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0\ , \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + F_h(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tilde{\rho} = u_z\ . \tag{2.47}$$

On retrouve bien les équations de la théorie linéaire des ondes internes étudiées dans la section précédente dans la limite $F_h \ll 1$. Dans ce cas, F_h petit peut être interprété comme le rapport entre le déplacement des particules de fluide de l'ordre de U/N et la longueur d'onde L_h. Dans ce contexte $F_h \ll 1$ revient simplement à considérer l'amplitude de l'onde petite.

2.5.3 Régime des écoulements quasi-2D (Q2D)

L'autre situation décrite par l'analyse des échelles de Riley *et al.* (1981) est celle qui explique l'apparition des grands tourbillons dont l'échelle verticale est petite par rapport aux dimensions horizontales (régime des écoulements Q2D). Dans ce cas, on n'impose aucune identité entre les échelles de vitesse et de longueur horizontales et verticales U, W, L_h et L_v. En outre, on utilise le temps d'advection horizontale $T_A = L_h/U$ pour l'adimensionnement. On trouve l'échelle pour la pression $\Pi = \rho_0 U^2$ en imposant l'équilibre du gradient de pression avec le terme convectif dans les composantes horizontales de l'équation de quantité de mouvement (2.37). En imposant toujours l'équilibre du gradient de pression et de la poussée d'Archimède dans la composante verticale de la même équation (2.37), on obtient que $\Pi/\rho_0 L_v \sim \Upsilon g/\rho_0$, d'où il vient la grandeur des perturbations de densité $\Upsilon \sim \rho_0 U^2/gL_v$. Pour obtenir l'échelle des vitesses verticales, on impose alors

l'équilibre entre les termes $\partial\tilde{\rho}/\partial t$ et $\rho_0 N^2 w/g$ dans l'équation (2.39), ce qui revient à supposer que les variations de densité sont produites grâce au déplacement vertical des particules de fluide, et donne $W \sim F_h F_v U$. Les équations adimensionnelles s'écrivent dans ce cas :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + (\mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h)\mathbf{u}_h + F_v^2 u_z \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} = -\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{p} \,, \tag{2.48}$$

$$F_h^2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h) u_z + F_v^2 u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \tilde{\rho} \,, \tag{2.49}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u}_h + F_v^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \,, \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h)\tilde{\rho} + F_v^2 u_z \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = u_z \,, \tag{2.51}$$

où on a introduit les composantes horizontales de la vitesse $\mathbf{u}_h = (u, v)$ et du gradient $\boldsymbol{\nabla}_h = (\partial_x, \partial_y)$. On peut dès alors utiliser l'importance respective des nombres de Froude horizontal et vertical pour en déduire des propriétés des régimes modélisés.

Cas de $F_h \ll 1$ et $F_v \ll 1$: C'est le cas proposé originalement par Riley *et.al* (1981), où les forces de flottabilité dominent sur celles de l'inertie ($F_h \ll 1$) et de plus l'échelle verticale L_v est grande par rapport à la longueur de flottabilité L_B ($F_v \ll 1$). Il est approprié d'introduire des développements en puissances de F_v. À l'ordre le plus bas, les mouvements horizontaux et verticaux sont découplés. On arrive à des équations d'Euler bidimensionnelles incompressibles avec une dépendance verticale indéterminée et une vitesse verticale négligeable par rapport à la vitesse horizontale. Avec l'hypothèse $L_v \gg L_B$, les surfaces de densité constante sont horizontales à l'ordre dominant. En conséquence, le théorème d'Ertel implique la conservation de la vorticité verticale. Simultanément, la conservation de la masse impose une vitesse horizontale de divergence nulle. Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + (\mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h)\mathbf{u}_h = -\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{p} \,, \tag{2.52}$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \tilde{\rho} \,, \tag{2.53}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u}_h = 0 \,, \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h)\tilde{\rho} = u_z \,, \tag{2.55}$$

Cette analyse modélise les mouvements Q2D dont l'évolution est indépendante entre chaque couche et est régie par les équations d'Euler bidimensionnelles.

Cas de $F_h \ll 1$ et $F_v \sim O(1)$: Pour expliquer les phénomènes de couplage entre les différentes couches des écoulements Q2D, Billant & Chomaz (2001) ont proposé de modifier les échelles de Riley *et al.* (1981) et Lilly (1983) en gardant le nombre de Froude vertical d'ordre 1. Les équations à l'ordre le plus bas s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + (\mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h)\mathbf{u}_h + u_z \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} = -\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{p} \,, \tag{2.56}$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \tilde{\rho} \,, \tag{2.57}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u}_h + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \,, \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h)\tilde{\rho} + u_z \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = u_z \,, \tag{2.59}$$

et on observe que la seule approximation impliquée par $F_h \ll 1$ est l'équilibre hydrostatique dans l'équation pour la quantité de mouvement verticale (2.57). La vitesse verticale est toujours petite, sa taille caractéristique étant $F_h U$, mais elle est exactement compensée par la grandeur de l'échelle des gradients verticaux ($\partial/\partial z \sim 1/F_h L_h$) (Billant & Chomaz, 2001). Le couplage vertical qui se manifeste aux différents ordres des perturbations en F_v peut expliquer les processus de transport de masse et d'étirement de la vorticité potentielle observés dans les écoulements fortement stratifiés.

Chapitre 3

Effet du nombre de Schmidt dans la diffusion des tourbillons pancake axisymmetriques

Ce chapitre reprend l'article : Godoy-Diana R. and Chomaz J.M. (2003) Effect of the Schmidt number on the diffusion of axisymmetric pancake vortices in a stratified fluid *Phys. Fluids* **15** (4) 1058-1064.

Abstract

An asymptotic analysis of the equations for quasi two-dimensional (Q2D) flow in stratified fluids is conducted, leading to a model for the diffusion of pancake-like vortices in cyclostrophic balance. This analysis permits to derive formally the model for the diffusion of an axisymmetric monopole proposed by Beckers *et al.* (2001), and to extend their results. The appropriate parameter for the perturbation analysis is identified as the square of the vertical Froude number $F_v = U/L_v N$, where U is the horizontal velocity scale, N the Brunt-Väisälä frequency and L_v the vertical lengthscale. The physical mechanisms involved in the vortex decay are examined under the light of the asymptotic analysis results. In particular we discuss the effects of the Schmidt number, Sc, which measures the balance between the diffusion of momentum and the diffusion of the stratifying agent. Remarkably, the vertical transport due to the slow cyclostrophic adjustment is shown to slowdown the velocity decay when Sc is larger than unity whereas it accelerates it when Sc is smaller than unity.

3.1 Introduction

Vortices in strongly stratified fluids exhibit some unique features due especially to the inhibition of vertical motions. One of the situations that has been identified, both in theory and experiments, is quasi two-dimensional (Q2D) flow for which the main motions are given in horizontal planes (see e.g. Lin & Pao, 1979; Riley *et al.*, 1981)). A particular type of vortical structures with a clearly larger lengthscale in the horizontal direction than in the vertical one, the so-called *pancake vortices,* evolves in this regime (e.g. Spedding, Browand & Fincham, 1996*b*; Bonnier, Eiff & Bonneton, 2000; Billant & Chomaz, 2000*a*). The dynamical evolution of these vortices is in part determined by *cyclostrophic balance*, which is characterized by the equilibrium between the centrifugal force and the pressure gradient resulting from a deformation of the isopycnals inside the vortex.

An interesting model for the decay of a cyclostrophically balanced axisymmetric monopole has been proposed by Beckers, Verzicco, Clercx & van Heijst (2001, denoted as BVCH henceforth) which provided a reference to be compared with experiments and numerical simulations. Although their model does well in representing the main behavior of the vortex, its heuristic character makes it difficult to explain the cases where it fails to reproduce all the features found in their numerical experiments. In this paper we make an asymptotic analysis of the equations for Q2D stratified flow assuming the vertical Froude number (F_v) small. At the lowest order of the expansion we get the model equations proposed by BVCH plus an equation for the evolution of the density perturbation. As we will discuss below, the advantage of obtaining it as a result of an asymptotic analysis relies on the proper estimations of the higher-order effects neglected in the model. Also, features depending on the ratio of momentum to stratifying agent diffusivities (Schmidt or Prandtl number for salt or temperature stratification, respectively) are analyzed, which allow us to gain insight into the processes governing the evolution of cyclostrophically balanced pancake vortices in real flows. In particular, we show that the secondary motion inside the vortex is reversed depending on whether Sc is smaller or larger than one. For $Sc > 1$ the secondary motion is dominated by the diffusion of momentum. Its observable effect is to slowdown the decay of the horizontal velocity by transport and stretching of potential vorticity. On the contrary, when $Sc < 1$, the secondary motion is primarily driven by the density diffusion and it accelerates the damping of the velocity.

3.2 Q2D equations

Following Riley, *et al.* and Lilly (1983), we describe the stably stratified system in terms of the density ($\tilde{\rho}$) and pressure ($\tilde{p}$) perturbation fields with respect to a linear density profile ($\bar{\rho}$) and its corresponding hydrostatically balanced pressure field ($\bar{p}$). Thus, in a Cartesian system $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ with $\mathbf{e}_3$ opposing gravity and $\mathbf{x} = (x, y, z)$, the density

and pressure fields can be written as

$$\rho(\mathbf{x},t) = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \tilde{\rho}(\mathbf{x},t)\ , \tag{3.1}$$
$$p(\mathbf{x},t) = p_0 + \bar{p}(z) + \tilde{p}(\mathbf{x},t)\ . \tag{3.2}$$

Defining the velocity field as $\mathbf{u}(x,t)$, we can write the equations of motion for a stratified fluid in the Boussinesq approximation as

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\tilde{p} - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}g\mathbf{e}_3 + \nu\nabla^2\mathbf{u}\ , \tag{3.3}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0\ , \tag{3.4}$$
$$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} = \frac{\rho_0 N^2}{g}u_z + \kappa\nabla^2\tilde{\rho}\ . \tag{3.5}$$

where $\nu = \mu/\rho$ is the mean kinematic viscosity, $N = (-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\bar{\rho}}{dz})^{1/2}$ is the Brunt-Väisälä frequency and κ is the diffusivity of the stratifying agent (e.g. salt or temperature). Equation (3.5) for the evolution of the density perturbation was obtained from the transport equation of the stratifying agent (i.e. the temperature or the salinity) assuming that the density varies linearly with temperature or salinity. We define the scales U, W, L_h and L_v for the horizontal and vertical components of velocity $\mathbf{u}_h = (u_x, u_y)$, u_z, and position (x,y) and z, respectively. In addition, we note the existence of two relevant time scales : $T_A = L_h/U$, characterizing the evolution of horizontal advective motion, and $T_N = N^{-1}$, a "buoyancy" time scale which is related to the internal gravity waves regime. The ratio of these two time scales defines a Froude number measuring the strength of inertial forces with respect to buoyancy forces, which we define as the *horizontal Froude number* :

$$F_h = \frac{U}{L_h N}\ . \tag{3.6}$$

Similarly we can define the *vertical Froude number* :

$$F_v = \frac{U}{L_v N}\ , \tag{3.7}$$

which measures the ratio between the vertical lengthscale L_v and the *buoyancy lengthscale* $L_N = U/N$. The later can be interpreted as the maximum vertical displacement of a fluid parcel that converts all of its kinetic energy into potential energy (see e.g. Tritton, 1988). We note the evident relationship between these two Froude numbers $F_h = \alpha F_v$, which defines the aspect ratio $\alpha = L_v/L_h$.

Following Riley *et al.*, we now proceed to a scaling analysis making some hypotheses on the dominant balances in the equations of motion (3.3)-(3.5) which aim at the description of the Q2D regime and the pancake vortices. To begin with, as we are interested in

motions that are far more important horizontally than vertically, we use the horizontal advection time scale $T_A = L_h/U$ to write the time derivatives in nondimensional form. We find the pressure scaling $\Pi \sim \rho_0 U^2$ by imposing the equilibrium of the pressure gradient and the advection term in the horizontal components of the momentum equation (3.3). Furthermore, from the balance between the pressure gradient and the buoyancy term in the vertical component of (3.3), the scale for the density perturbations can be written as $R \sim \rho_0 U^2/gL_v$. Finally, to find the scale of the vertical velocity, we state that the partial time derivative of the density perturbation in equation (3.5) is balanced by the vertical velocity term, which renders $W \sim UF_vF_h$. This is equivalent to say that variations in density are due to vertical displacement of fluid parcels. Using the previous scales and introducing the index h to denote a vector in the horizontal plane (giving for example $D_h/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h$ for the horizontal material derivative), we obtain the following set of nondimensional equations :

$$\frac{D_h \mathbf{u}_h}{Dt} + F_v^2 u_z \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} = -\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{p} + \frac{1}{Re}\left(\nabla_h^2 \mathbf{u}_h + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial z^2}\right) \tag{3.8}$$

$$\alpha^2 F_v^2 \left(\frac{D_h u_z}{Dt} + F_v^2 u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \tilde{\rho} + \alpha^2 \frac{F_v^2}{Re}\left(\nabla_h^2 u_z + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u}_h + F_v^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{3.10}$$

$$\frac{D_h \tilde{\rho}}{Dt} + F_v^2 u_z \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = u_z + \frac{1}{ReSc}\left(\nabla_h^2 \tilde{\rho} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial z^2}\right) \tag{3.11}$$

where we have used the definitions of the Reynolds $Re = UL_h/\nu$ and Schmidt (or Prandtl if temperature is the stratifying agent) $Sc = \nu/\kappa$ numbers. Furthermore, if the vorticity vector is scaled by U/L_h, we obtain (using Cartesian coordinates to express the horizontal components) :

$$\omega_z = \boldsymbol{\nabla}_h \times \mathbf{u}_h = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\ , \tag{3.12}$$

$$\omega_x = \alpha F_v^2 \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u_y}{\partial z}\ , \tag{3.13}$$

$$\omega_y = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u_x}{\partial z} - \alpha F_v^2 \frac{\partial u_z}{\partial y}\ . \tag{3.14}$$

The original Q2D approximation proposed by Riley *et al.* considers both Froude numbers small ($F_h \ll 1$ and $F_v \ll 1$), allowing to develop all fields in powers of F_v and obtaining at leading order the two-dimensional Euler equations for the horizontal components of the momentum equation with no vertical dependence.

3.3 Asymptotic analysis

In this section we develop an asymptotic analysis for the case of an axisymmetric monopole in order to formally derive a model for its decay. We consider the Q2D approximation, where the horizontal fluid motions evolve under the advective time gauge T_A. Both Froude numbers are small ($F_h \ll 1$ and $F_v \ll 1$) and we let the Reynolds number Re be of order α^{-2}. This second hypothesis lets us find the terms associated to viscous diffusion at the lowest order of a perturbation analysis. When the condition on the vertical Froude number $F_v \ll 1$ is imposed, the condition on the horizontal Froude number $F_h \ll 1$ is satisfied even for $\alpha \leq 1$. In many cases involving slender vortices, however, the condition on the aspect ratio can be considered as $\alpha \ll 1$ and the diffusive terms in equations (3.8)-(3.11) can be simplified by keeping only the vertical diffusion. In the present analysis we use the less restrictive hypothesis $\alpha \leq 1$ so that the full diffusion term appears at leading order. With the assumptions of both horizontal and vertical Froude numbers small, we are entitled to develop all fields in powers of F_v. Actually, as may be guessed from the quadratic dependence in F_v of equations (3.8)-(3.11), it is convenient to consider powers of F_v^2, such that $(\mathbf{u}_h, u_z, \tilde{p}, \tilde{\rho}) = (\mathbf{u}_{h0}, u_{z0}, \tilde{p}_0, \tilde{\rho}_0) + F_v^2(\mathbf{u}_{h2}, u_{z2}, \tilde{p}_2, \tilde{\rho}_2) + \cdots$. Using polar coordinates for the position $\mathbf{x}_h = (r, \theta)$ and the velocity $\mathbf{u}_h = (u_r, u_\theta)$, and assuming axisymmetric flow (i.e. independence of $\mathbf{u}$, p and ρ on θ), the conservation of mass (3.10) implies at zeroth order that :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_{r0})}{\partial r} = 0 \, , \tag{3.15}$$

which gives

$$u_{r0} = 0 \, , \tag{3.16}$$

since u_{r0} vanishes at $r = 0$ (i.e. there is no mass source at the vortex center). Moreover, from equations (3.8), (3.9) and (3.11) the zeroth order equations are simplified leading to the following system :

$$-\frac{u_{\theta 0}^2}{r} = -\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial r} \, , \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial t} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial r} - \frac{u_{\theta 0}}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial z^2} \right) \, , \tag{3.18}$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial z} - \tilde{\rho}_0 \, , \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial t} = u_{z0} + \frac{1}{ScRe}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial r} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_0}{\partial z^2} \right) \, . \tag{3.20}$$

The radial (3.17) and vertical (3.19) momentum equations represent, respectively,

cyclostrophic and hydrostatic balances. Together with equation (3.18), the asymptotic expansion recovers the heuristic diffusion model analyzed by BVCH. The model is extended since diffusion of density is now explicitly taken into account by equation (3.20) which relates density fluctuations and vertical velocity. Equation (3.18) is a closed equation and may be solved for any initial azimuthal velocity distribution $u_{\theta 0}(z,r)$. We will consider the self-similar solution used by BVCH in order to allow direct comparison of our results with their numerical simulations. It reads :

$$u_{\theta 0} = \frac{r}{2\pi^{1/2}(2\alpha^2 + \frac{4}{Re}t)^{1/2}(1+\frac{4}{Re}t)^2} \times \exp\left(-\frac{\alpha^2 z^2}{2\alpha^2+\frac{4}{Re}t}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{1+\frac{4}{Re}t}\right) . \quad (3.21)$$

Now, from the equations for cyclostrophic and hydrostatic balances —equations (3.17) and (3.19), respectively— the density field at leading order $\tilde{\rho}_0$ can be calculated, leading to the expression :

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{-\alpha^2\, z}{4\pi(2\alpha^2 + \frac{4}{Re}t)^2(1+\frac{4}{Re}t)^3} \times \exp\left(-\frac{2\alpha^2 z^2}{2\alpha^2+\frac{4}{Re}t}\right)\exp\left(-\frac{2r^2}{1+\frac{4}{Re}t}\right) , \quad (3.22)$$

which in turn lets us calculate the leading order vertical velocity u_{z0}, using equation (3.20). Contour plots on the (r,z)-plane of these solutions are shown in figures 3.1.a-e for $\alpha = 0.3$, $F_v = 0.3$, $Re = 100$ and $Sc = 100$. The vertical and radial components of the nondimensional vorticity $\boldsymbol{\omega}$ also shown have been obtained in terms of the azimuthal velocity (3.21) as $\omega_{z0} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_{\theta 0})}{\partial r}$ and $\omega_{r0} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial z}$, whereas the azimuthal vorticity vanishes at leading order.

In order to find the radial velocity which appears to compensate the mass transported by u_{z0} we need to calculate the next order of the expansion since u_{r0} is zero. At order F_v^2 the conservation of mass gives :

$$\frac{\partial(ru_{r2})}{\partial r} + r\frac{\partial u_{z0}}{\partial z} = 0 , \quad (3.23)$$

which lets us calculate u_{r2}. In figure 3.1.f the contour plot of the initial distribution of u_{r2} corresponding to the case of figures 3.1.a-e is shown. The important radial extension of the u_{r2} field is a result of mass conservation. In the core of the vortex, equation (3.23) expresses that a converging (or diverging) vertical velocity plays the role of a source (or a sink) for the second order radial flow. Outside of the vortex core the vertical velocity vanishes and the radial flow extends to infinity, decreasing only like r^{-1} since $\frac{\partial(ru_{r2})}{\partial r}$ should be zero. In a real case the extent of the radial flow will be limited to a distance $r \sim F_v^2$ at which the next order dominates, and a matched asymptotic expansion would be required to find the far field. This is, however, out of the scope of the present work.

With the expressions for the vertical and radial velocities, we can calculate also the

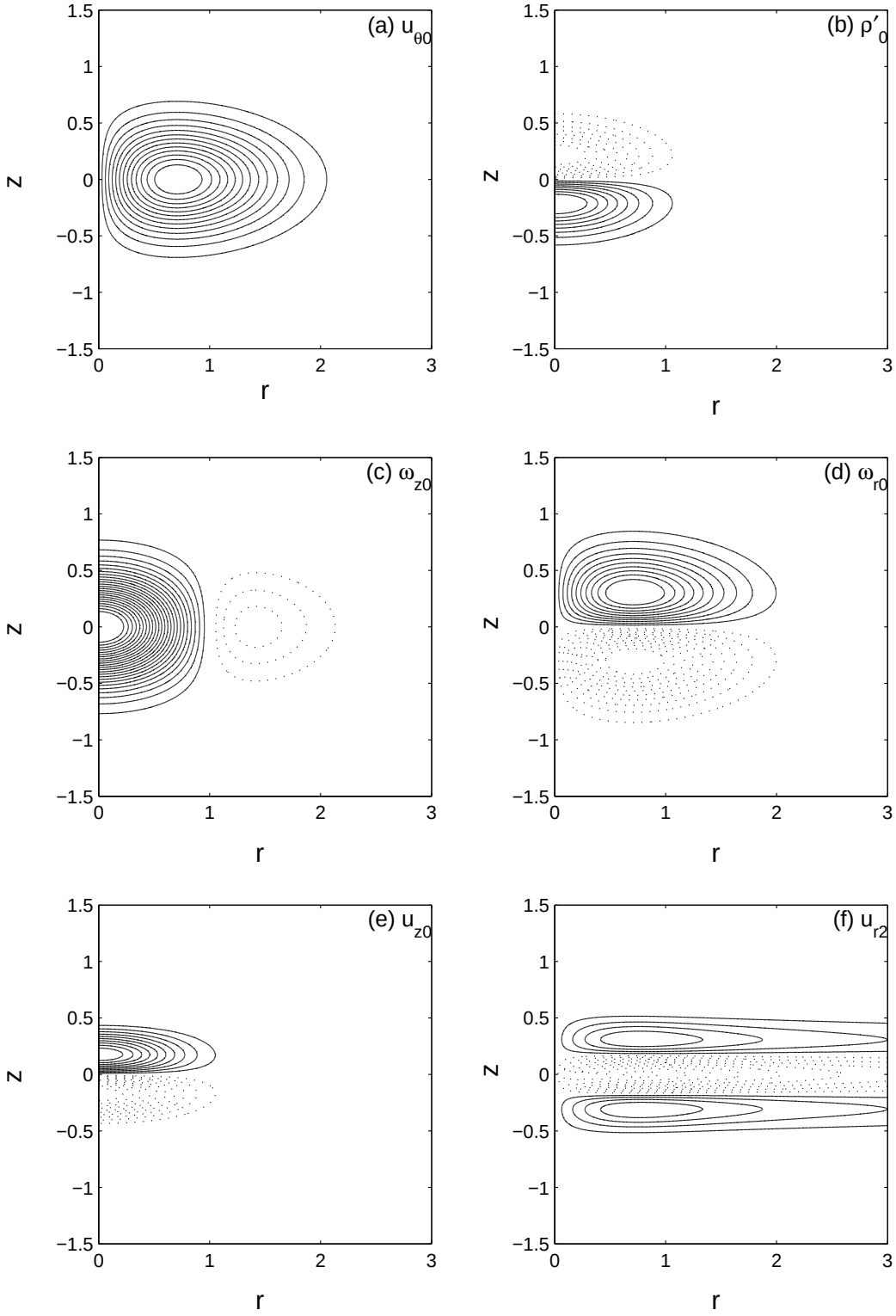


FIG. 3.1 – Plots of (a) $u_{\theta 0}$, (b) $\tilde{\rho}_0$, (c) ω_{z0}, (d) ω_{r0}, (e) u_{z0} and (f) u_{r2} obtained from the diffusion model with $\alpha = 0.3$, $F_v = 0.3$, $Re = 100$ and $Sc = 100$. The dotted contours represent negative values of the solid contours positive values. The positive contour intervals and increments are $(u_{\theta 0min} : \Delta u_{\theta 0} : u_{\theta 0max}) = (0.02 : 0.02 : 0.26)$, $(\tilde{\rho}_{0min} : \Delta\tilde{\rho}_0 : \tilde{\rho}_{0max}) = (0.01 : 0.01 : 0.08)$, $(\omega_{z0min} : \Delta\omega_{z0} : \omega_{z0max}) = (0.05 : 0.05 : 1.2)$, $(\omega_{r0min} : \Delta\omega_{r0} : \omega_{r0max}) = (0.015 : 0.015 : 0.15)$, $(u_{z0min} : \Delta u_{z0} : u_{z0max}) = (0.004 : 0.004 : 0.04)$ and $(u_{r2min} : \Delta u_{r2} : u_{r2max}) = (0.002 : 0.003 : 0.029)$.

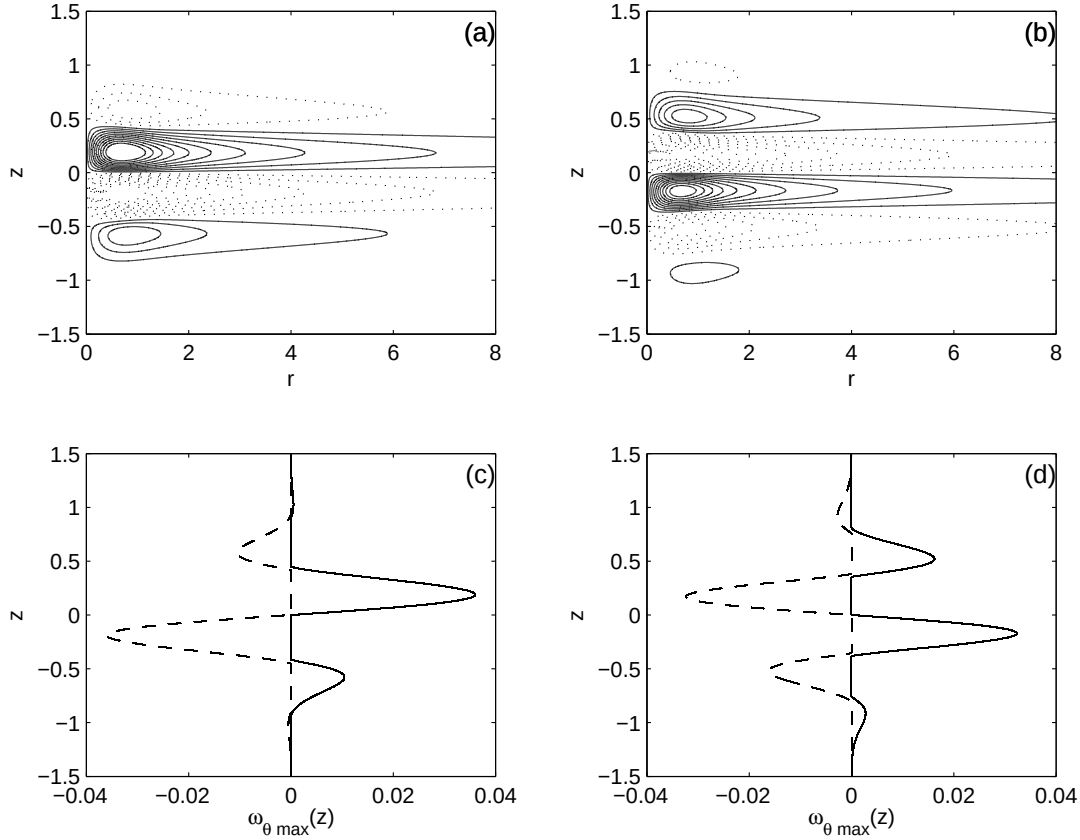


FIG. 3.2 – Contour and extreme-value plots of ω_θ at t=0 for $\alpha = 0.4$, $F_v = 0.75$, $Re = 100$, (a), (c) $Sc = 700$ and (b), (d) $Sc = 0.7$. The dotted contours represent negative values of the solid contours positive values. The positive contour intervals and increments in (a) and (b) are $(\omega_{\theta min} : \Delta\omega_\theta : \omega_{\theta max}) = (0.002 : 0.003 : 0.029)$.

azimuthal vorticity up to order F_v^2 as follows :

$$\omega_\theta = F_v^2 \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u_{r2}}{\partial z} - \alpha \frac{\partial u_{z0}}{\partial r} \right) . \tag{3.24}$$

Azimuthal vorticity is an interesting quantity since it gives a snapshot of the secondary circulation in the (r, z)-plane, positive (negative) values of ω_θ indicating clockwise (counter-clockwise) motion. Azimuthal vorticity is represented in figure 3.2 for two cases. From the shape of the contours it can be inferred that the major contribution to its total value comes from the $\frac{\partial u_{r2}}{\partial z}$ term in equation (3.24).

The effect of the secondary circulation advection on the mean azimuthal flow can be discussed using the F_v^2 order azimuthal momentum equation

$$\frac{\partial u_{\theta 2}}{\partial t} + u_{r2} \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial r} + \frac{u_{\theta 0} u_{r2}}{r} + u_{z0} \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_{\theta 2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta 2}}{\partial r} - \frac{u_{\theta 2}}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u_{\theta 2}}{\partial z^2} \right) . \tag{3.25}$$

The term $u_{r2}\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial r} + \frac{u_{\theta 0}u_{r2}}{r} + u_{z0}\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial z}$ forces the $u_{\theta 2}$ field to depart from zero, while the right-hand-side of (3.25), representing the action of viscosity, acts the opposite way making $u_{\theta 2}$ relax back.

3.4 Schmidt number effects on the vortex decay

We have used the evolution equation for the density perturbation (3.20) to calculate the vertical velocity at zeroth order u_{z0}. The dominant balance of terms in this equation, depends on the value of the Schmidt number Sc. For large Sc, the diffusion of density is negligible and u_{z0} will be dominated by the $\frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial t}$ contribution, which is driven only by the diffusion of horizontal momentum, i.e.,

$$u_{z0} \sim \frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \int \frac{u_{\theta 0}^2}{r} dr \ . \tag{3.26}$$

The diffusion of momentum decreases the centrifugal force and the deflection of the isopycnals inside the vortex relaxes back to the horizontal. Since this relaxation may occur only by vertical transport, the induced vertical velocity should be positive above the vortex symmetry plane and negative below (figure 3.3.a). On the contrary, if Sc is small, the diffusion of density will represent the largest contribution to u_{z0}, in the limit case eliminating the effect of $\frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial t}$, i.e.,

$$u_{z0} \sim -\frac{1}{ScRe}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial r} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \tilde{\rho}_0}{\partial z^2}\right) \ . \tag{3.27}$$

In this case the momentum diffusion has no or little role in determining the vertical velocity since its contribution is masked by the stratification diffusion, which acts on a faster timescale. Thus, the vertical transport should compensate the diffusion of density in order to maintain the cyclostrophic equilibrium. The induced vertical velocity is therefore negative above the vortex and positive below (figure 3.3.b).

The resulting dynamics is opposite in each of these cases since, as mentioned above, the secondary circulation accompanying the vortex decay is driven by the vertical velocity u_{z0}. An illustration of the two situations can be obtained from the expression (3.24) for ω_θ. In figure 3.4, plots of the maximum values of azimuthal vorticity (referred to as $\omega_{\theta max}(t)$) are shown for various values of Sc[1], negative values of $\omega_{\theta max}$ correspond to the cases turning counter-clockwise on the upper (r, z)-plane. Contour plots of the initial values of ω_θ for $Sc = 700$ and $Sc = 0.7$ were shown in figure 3.2. The main feature observed in figures 3.2 and 3.4 is the inversion on the rotation sense for the curves corresponding to Sc smaller than 1. We explain this behavior as follows : for large Sc, the circulation

[1]We have kept the notation Sc of the Schmidt number for the whole range of values, even when for values smaller than 1 only the Prandtl number Pr could be realistic.

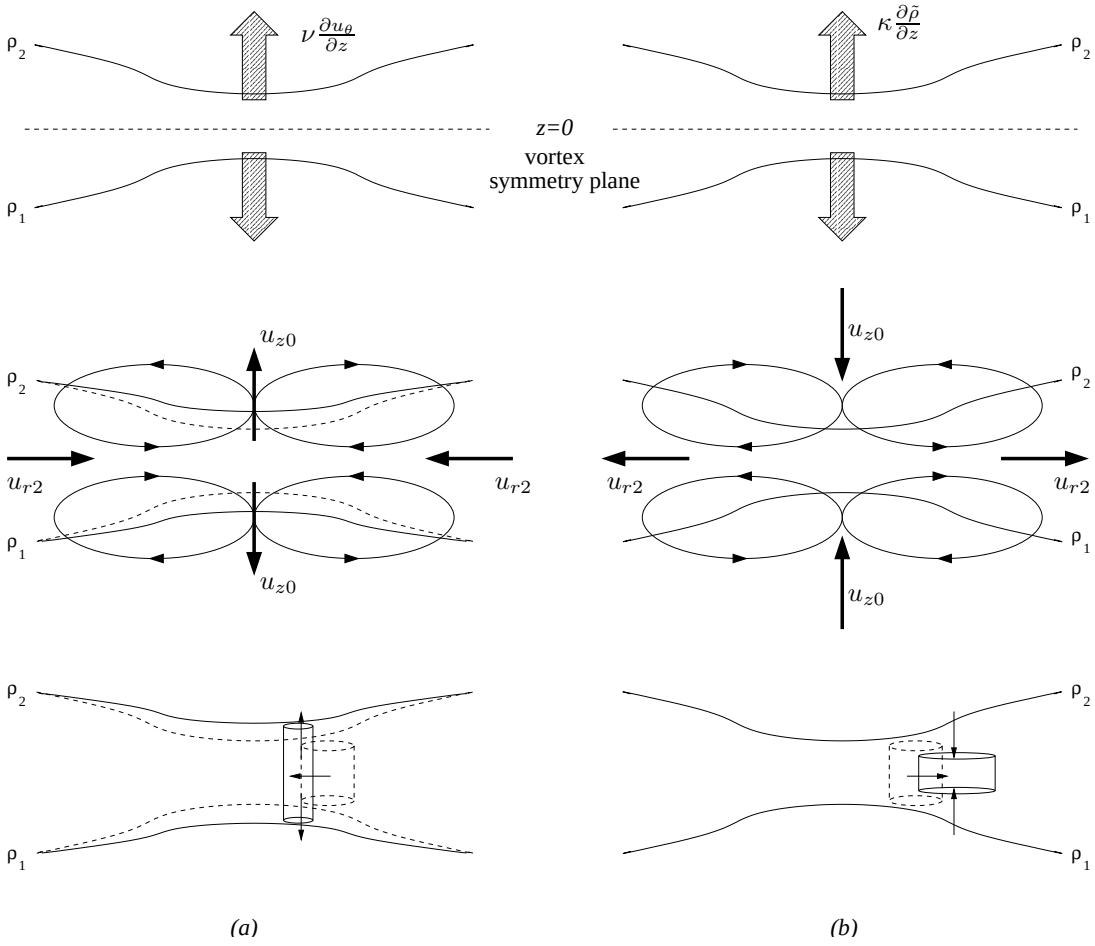


FIG. 3.3 – Schematic diagrams of the secondary circulation during the vortex decay for (a) $Sc >> 1$ and (b) $Sc << 1$. Isopycnals deflected towards the vortex symmetry plane are represented as solid lines. In the middle and bottom figures for case (a) an initial time is shown in dashed lines. The direction of the radial and vertical velocities is shown in the middle figures for both cases. Stretching (a) and squeezing (b) of vorticity is pictured schematically in the bottom figures (see text for discussion).

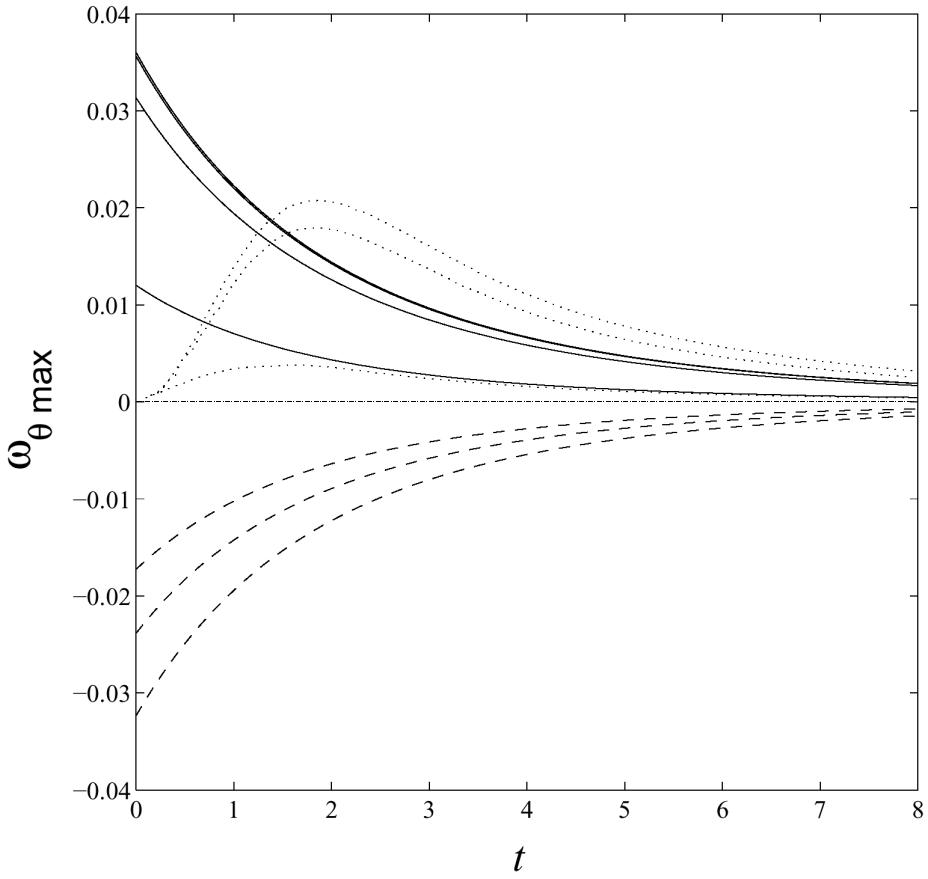


FIG. 3.4 – Plots of $\omega_{\theta max}(t)$ for $\alpha = 0.4$, $F_v = 0.75$, $Re = 100$. Asymptotic model results are shown in dashed and solid lines for (from bottom to top curve) $Sc = 0.7$, 0.8, 0.9, 1, 10, 100 and 700. In dotted curves the results of the BVCH numerical simulations (see text) for $Sc = 1$, 10 and 100 (from bottom to top curve)

pattern depicted by the ω_θ contours represents a radial flow towards the vortex center and a vertical outward flow near the vortex axis. Following the idea from the previous paragraph, we remark that the vertical velocity u_{z0} driving this secondary circulation is only determined by the density distribution $\tilde{\rho}_0$ adjusting itself to the decaying $u_{\theta 0}$. For $Sc < 1$ the situation is reversed, since the stratifying agent diffuses faster than momentum and therefore the vertical velocity induced to preserve cyclostrophic balance, restoring the deformation of the isopycnals, points towards the vortex symmetry plane. Anticipating on the second order $u_{\theta 2}$ computation we may predict that the effect of the secondary circulation during the vortex decay when $Sc >> 1$ should retard the damping, since it will oppose the radial growth and the decay of vertical vorticity by the radial transport and the stretching effect of vertical velocity, respectively. On the other hand, for $Sc < 1$ the situation is reversed, the outward flow being radial and the vertical inflow compressing the vortex. We expect this effect to enhance damping since the secondary circulation due to density diffusion will transport the vorticity radially outwards and produce a vortex compression effect. These features can be readily observed looking at the time evolution of the vertical vorticity ω_z and the vortex radius (defined as the value of $r = r'$ which renders $\omega_z(r') = 0$). In order to do so, we need to calculate the Fv^2-order effect on the azimuthal velocity $u_{\theta 2}$, which requires solving equation (3.25). Since the transport terms in equation (3.25) are given in terms of the known quantities $u_{\theta 0}$, u_{z0} and u_{r2}, the $u_{\theta 2}$ field can be computed numerically by solving a forced diffusion equation. However, in order to gain a better physical understanding of the role of the secondary circulation on the vortex evolution, we may estimate $u_{\theta 2}$ by neglecting the diffusion at this order and formally solving the simplified equation :

$$\frac{\partial u_{\theta 2}}{\partial t} = -u_{r2}\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial r} - \frac{u_{\theta 0}u_{r2}}{r} - u_{z0}\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial z} \,. \tag{3.28}$$

This approximation is fully justified in the small Sc number limit. In other cases the $u_{\theta 2}$ thus computed is slightly overestimated but shows the proper trend. In figures 3.5 and 3.6 plots of the decaying maximum value of ω_z up to second order in F_v^2 and of the vortex radial growth are shown, respectively, for two different values of Sc. The radius r' is defined as the value of r for which ω_z changes sign. Dashed lines in both figures represent the zeroth order evolution ; it is important to remember that at zeroth order azimuthal vorticity is almost zero, so the vortex decays exclusively as a result of diffusion of u_θ —governed by equation (3.18). Over- and under-damped behaviors with respect to the zeroth order values are clearly identified depending on the value of Sc. That is, for the case of $Sc = 10$, the F_v^2-order vortex damping, represented by the diminishing vertical vorticity and the growing radius, is slower than the zeroth-order prediction, while for the case of $Sc = 0.7$ the vortex decays faster due to the diffusion of the stratifying agent. For even smaller Sc, the diffusion is faster and occurs not on the viscous timescale $T_{\nu v} = L_v^2/\nu$ but on $T_{\nu v}Sc$. This super-damping effect may be relevant in astrophysical

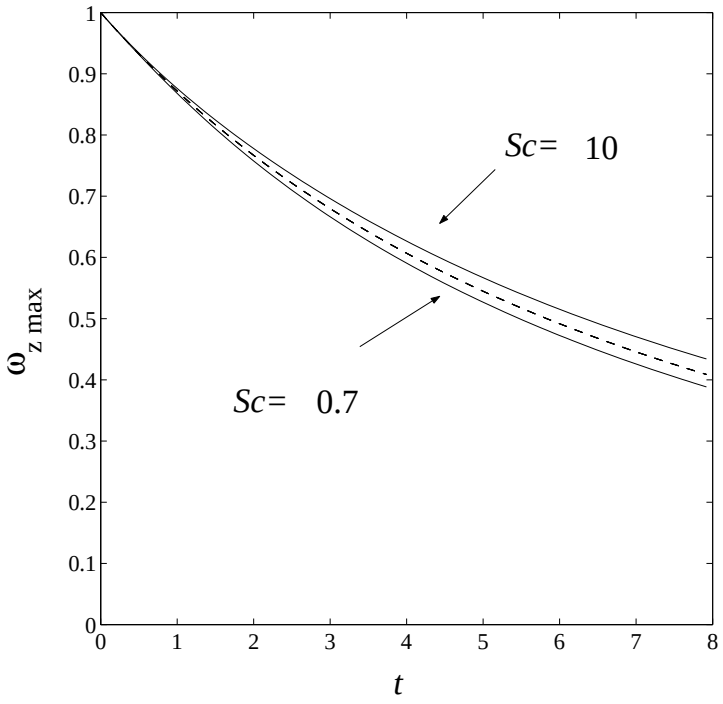


FIG. 3.5 – Decay of $\omega_{zmax}(t)$. Zeroth order in dashed line and two cases of F_v^2-order in solid lines.

situations where, for example, a metallic liquid is thermally stratified (as eventually in the Jovian core).

3.5 Comparison with the results of BVCH

In this section we compare the results of the asymptotic model with the numerical simulations of BVCH. We address again the decay of the secondary circulation on the (r, z)-plane represented by $\omega_{\theta max}$ (figure 3.4). The numerical results of BVCH are plotted in dotted lines for $\alpha = 0.4$, $F_v = 0.75$, $Re = 100$ and (from bottom to top) $Sc = 1, 10, 100$. The reason for the difference in the initial values is that, as detailed by BVCH, their numerical simulations start with cyclostrophically balanced azimuthal velocity and density distribution, but with zero azimuthal vorticity. The first stage of the evolution shown is thus the increase of azimuthal vorticity to achieve the cyclostrophically balanced value. This stage corresponds to what has been referred to as cyclostrophic adjustment (see Beckers *et al.*, 2001) and, as we can see in figure 3.4, it is superposed to the vortex decay for $t \leq 2$. The picture is rather different for the results of our asymptotic model : since the internal circulation corresponding to cyclostrophic balance is intrinsically included on the initial conditions, a non-zero initial value for $\omega_{\theta max}$ is observed and there is no need for adjustment. In the later stages of the vortex evolution, the results of the asymptotic

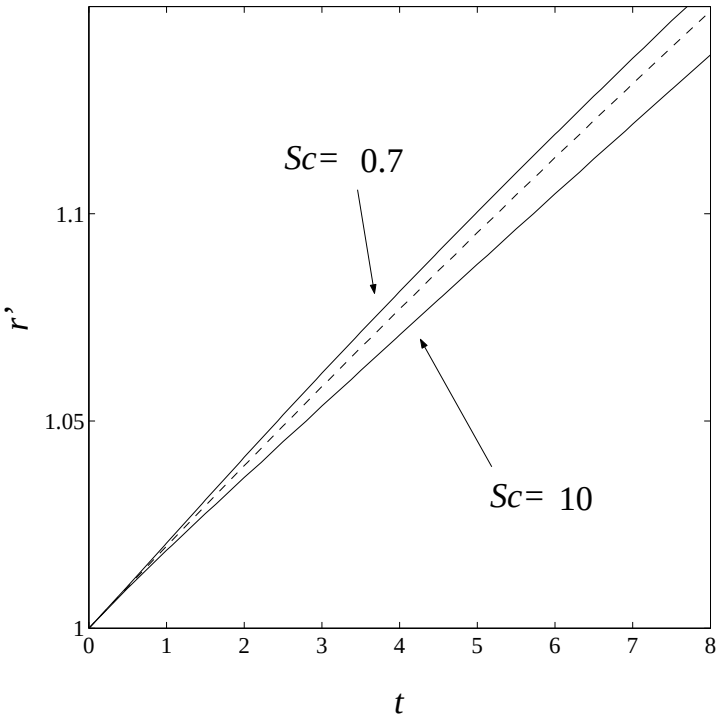


FIG. 3.6 – Growth of $r'(t)$. Zeroth order in dashed line and two cases of F_v^2-order in solid lines.

model are qualitatively consistent with the numerical simulations of BVCH, and even in rather good quantitative agreement for the case of $Sc = 1$. It is noteworthy that the vertical Froude number value in the numerical simulations of BVCH reported here is 0.75, which is out of the scope of the present asymptotic analysis valid for $F_v \ll 1$. It is striking, however, that the asymptotic calculus succeeds in capturing the order of magnitude and the main trend of the vortex evolution, validating the physical interpretations about the diffusion process.

3.6 Conclusions

The diffusion of vortices in a stratified fluid has been discussed using an asymptotic expansion of the Q2D equations of motion. The appropriate parameter for the expansion has first been identified as the squared vertical Froude number F_v^2. The zeroth-order equations yield an extended version of the diffusion model proposed by BVCH in Beckers *et al.* (2001) and at first order in F_v^2 the terms governing the departure from this model have been calculated. Of particular interest are two opposite effects associated to cyclostrophic balance which depend on the ratio of the diffusivities of momentum and stratifying agent, the Schmidt or Prandtl number, which has been referred to univocally as Sc. For high

values of Sc, the stretching process resulting from cyclostrophic balance has been shown to slow down the vortex decay, acting against diffusive damping. A process of this kind may be invoked to explain the existence of long-lived vortical structures in nature —e.g. the *meddies*, see Armi *et al.* (1988)—. Also, pancake vortices in laboratory experiments (where the usual setups are based on salt-stratified water tanks and $Sc \simeq 700$) certainly evolve under these effects. The opposite picture is found for Sc smaller than 1 (and in particular for $Sc = 0.7$), where the density diffuses faster than momentum and the secondary circulation driven by cyclostrophic balance induces a compression of the vortex, enhancing its diffusion. This over-damped situation occurs in atmospheric flows where $Sc = 0.7$ and it may explain why pancake turbulence is difficult to observe in thermally stratified gas experiments. The predictions of the asymptotic model are compared with the numerical simulations of BVCH and, even when the cases suitable for comparison are well beyond the $F_v \ll 1$ limit imposed by the asymptotic expansion, the main behavior of the vortex is successfully described.

Acknowledgements

This work has benefited from useful discussions with Paul Billant. RGD gratefully acknowledges support from CONACyT-México.

Chapitre 4

Montage expérimental et protocole

Je décris dans ce chapitre les outils de la démarche expérimentale. La description de la méthode de stratification est suivie par celle des dispositifs utilisés pour créer des ondes internes et générer des tourbillons. Ensuite je discute le choix de la méthode de mesure ainsi que le système de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) mis en oeuvre pour avoir accès aux champs de vitesse dans les écoulements expérimentaux. Je conclue par la présentation du protocole expérimental utilisé dans les chapitres 5 et 6.

4.1 Méthode de stratification

Les expériences ont été menées dans une cuve de verre de 2m de longueur par 1m de largeur et 0.70m de hauteur remplie d'eau stratifiée en salinité (voir figure 4.1). La stratification est réalisée lors du remplissage de la cuve en utilisant une méthode classique à deux réservoirs (décrit dans Oster & Yamamoto, 1963). La figure 4.2 montre un schéma du système de réservoirs et de pompes utilisé pour établir le gradient de densité dans la cuve. La méthode consiste à pomper de l'eau salée (1) dans un réservoir contenant initialement de l'eau claire (2) et qui sert de source pour le remplissage de la cuve expérimentale (3) à travers un tuyau diffuseur. On utilise deux pompes volumétriques à débit contrôlé, branchées comme indiqué sur la figure 4.2. Ce système permet de réaliser n'importe quel profil de densité stable en utilisant différentes fonctions pour les débits $q_1(t)$ et $q_2(t)$ (voir Hill, 2002).

Afin d'obtenir une stratification linéaire, le remplissage est effectué à débits tels que $q_2 = 2q_1$. On a travaillé à débits constants afin de diminuer le niveau dans les deux réservoirs au même rythme pendant tout le remplissage. Pour toutes les expériences, on a utilisé des stratifications linéaires dont la fréquence de Brunt-Väisälä N était comprise entre 1.4 et 1.7 rad s^{-1}. D'un point de vue pratique, l'avantage de travailler avec un profil de densité linéaire est qu'il n'est pas affecté par la diffusion saline, celle-ci étant pilotée par les dérivées spatiales de second ordre dans l'operateur Laplacien ∇^2. Un profil $\bar{\rho}(z)$

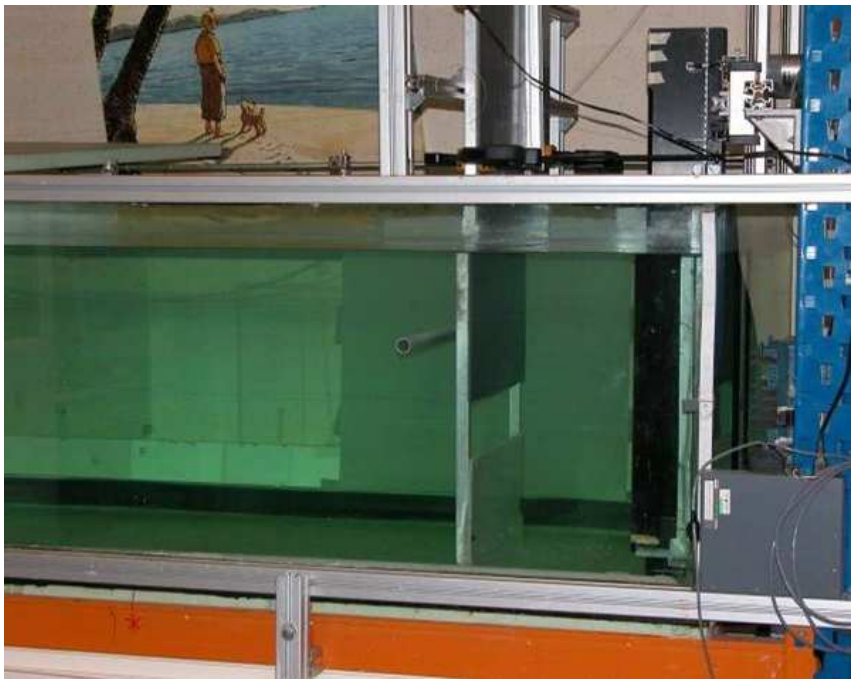


FIG. 4.1 – Photographie de la cuve dans la salle expérimentale du LadHyX (septembre 2003). On voit a droite le dispositif pour générer le dipôle décrit dans la section suivante.

initialement linéaire est donc uniquement érodé par les extremités, au fond de la cuve et à la surface de l'eau, où $d\bar{\rho}/dz = 0$ puisqu'il ne peut y avoir de flux vertical de sel et donc de densité. Deux méthodes ont été exploitées pour mesurer la fréquence de Brunt-Väisälä N : une mesure directe du profil de densité $\bar{\rho}(z)$ à partir de prélèvements d'eau à differents niveaux permet de calculer N avec l'équation (2.14), $N = [(-g/\rho)d\rho/dz]^{1/2}$; une méthode alternative consiste à mesurer l'angle de propagation des ondes internes engendrées par un cylindre oscillant à une fréquence connue (voir figure 4.5 plus loin) et d'utiliser la relation de dispersion (2.25) pour en déduire N. La deuxième méthode a l'avantage de permettre une vérification instantanée de la linéarité du profil de densité, étant donné que les rayons tracés par les ondes monochromatiques produites par le cylindre se courbent dès que N n'est pas constant.

4.2 Ondes internes et tourbillons pancake

Plusieurs montages ont été réalisés pour étudier expérimentalement les interactions entre ondes et tourbillons. Pour créer les tourbillons, je suis parti du dispositif utilisé par Billant (1999) dans l'étude de la dynamique d'une paire de tourbillons verticaux (voir figure 4.3). Le dipôle en colonne créé par le mouvement des volets est sujet à l'instabilité zigzag et il finit par être découpé en couches qui évoluent indépendemment (figure

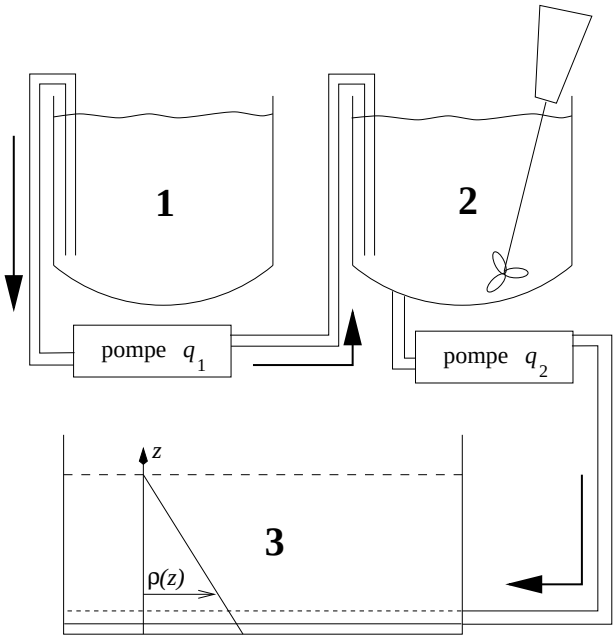


FIG. 4.2 – Schéma du système utilisé pour établir un gradient de densité. (1) Réservoir d'eau salée, (2) réservoir où on mélange progressivement l'eau initialement claire avec l'eau salée et (3) cuve expérimentale stratifiée dont le profil de densité est $\bar{\rho}(z)$.

4.4.a). Le morceau de dipôle dans chaque couche, qui constitue un dipôle "pancake" (figure 4.4.b), suit une trajectoire déviée par rapport à la direction de translation du dipôle original. L'idée de départ était de perturber l'évolution de ces dipôles avec un champ d'ondes de gravité internes bien contrôlé et d'essayer ainsi de mettre en évidence des éventuelles interactions. Pour cela j'ai fabriqué divers montages avec des cylindres oscillants, dans l'esprit des expériences classiques de Mowbray & Rarity (1967). La figure 4.5 montre un schéma des ondes produites dans un plan xz par un cylindre aligné avec l'axe y oscillant verticalement, et une visualisation par *ombroscopie*[1] d'une telle situation obtenue expérimentalement. On y voit des franges claires et sombres qui temoignent de la déformation des isodensités due aux ondes et qui coïncident avec les fronts d'onde. Quatre rayons partent du cylindre (formant une croix dite de *St. André*) dans des directions qui dependent de la fréquence d'oscillation du cylindre et de la fréquence de Brunt-Väisälä sui-

[1]L'ombroscopie utilise la refraction inhomogène de la lumière qui traverse un milieu d'indice de refraction variable (voir e.g. Settles, 2001, pour des détails sur la méthode). En pratique on a besoin d'une source de lumière "ponctuelle placée à l'infini" (ici un projecteur de diapositives placé le plus loin possible de la cuve) et d'un écran de l'autre coté de la cuve ou se projette une image de zones claires et zones ombres dues à la focalisation et défocalisation des rayons lumineux qui sont déviés différemment. L'image recueillie est fonction de la dérivée seconde du profil de densité car lorsque le profil de densité est linéaire l'éclairage reste uniforme et seul des variations par rapport à la linéarité provoquent la focalisation ou défocalistaion des rayons. Le profil de densité dans notre cas étant linéaire, on observe un motif uniquement lorsqu'on perturbe les surfaces de densité constante.

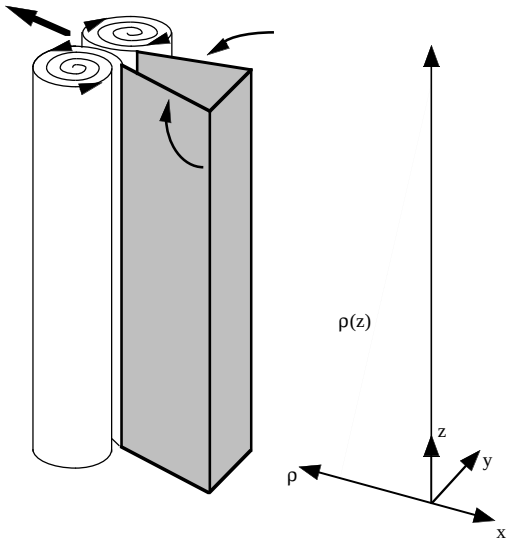


FIG. 4.3 – Schéma du mécanisme de flaps pour produire une paire de tourbillons en colonne. Une paire d'ailerons verticaux parallèles est brusquement fermée éjectant le fluide à l'intérieur pour former un écoulement dipolaire (figure d'après Billant & Chomaz, 2000a).

vant la relation de dispersion (2.25), $\cos\theta = \omega/N$, où θ est l'angle du vecteur d'onde avec l'horizontale, i.e. l'angle de chaque rayon avec la verticale. Dans l'image expérimentale on voit aussi les reflexions des rayons supérieurs sur la surface ainsi que l'ombre du cylindre générateur (qui temoigne de l'angle d'inclinaison entre l'axe de la caméra et l'axe du cylindre). La longueur d'onde forcée ainsi que l'amplitude d'oscillation des ondes rayonnées dépend du diamètre du cylindre et de l'amplitude du battement. Par effet visqueux, l'amplitude d'oscillation décroît avec la distance au cylindre et les faisceaux s'élargissent (voir e.g. Sutherland *et al.*, 2000).

Initialement, dans le but d'obtenir un champ d'ondes homogène et intense le batteur était composé de plusieurs cylindres parallèles. Une première grille avec 12 cylindres de 5mm de diamètre écartés de 4 diamètres entre leurs axes (i.e. avec une solidité, définie comme le rapport de l'aire occupé par les cylindres à l'aire total, de 25%) produisait rapidement trop de mélange. De plus, même pour des basses fréquences d'oscillation, elle se comportait comme une plaque oscillante rayonnant des ondes seulement aux bords. Après plusieurs essais, la configuration retenue a été construite avec seulement 3 cylindres de 2cm de diamètre séparés par une distance intercylindre de 7 diamètres. D'autres configurations avec un seul cylindre utilisant les réflexions des ondes à la surface de l'eau et au contact d'une plaque ont été mis en oeuvre pour certaines expériences qui sont détaillées dans le chapitre 6. L'oscillation des cylindres est forcée par un moteur à courant continu et

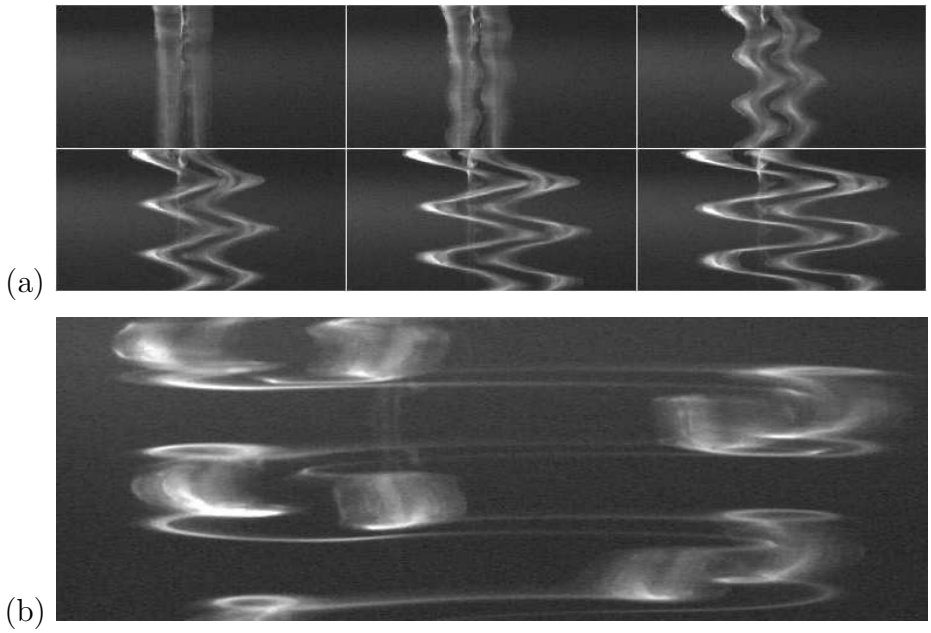


FIG. 4.4 – Visualisations avec fluoresceine éclairée par UV de (a) six instants dans l'évolution du dipole en colonne où l'on observe le développement de l'instabilité zigzag (de gauche à droite et du haut en bas les images dans (a) ont été prises à 25, 40, 55, 70, 85 et 100 secondes après la fermeture des flaps) et (b) les dipoles pancake dans une étape tardive de l'évolution (3 minutes après la fermeture des flaps) (d'après Billant & Chomaz, 2000a). Toutes les images sont des vues de face par rapport aux flaps. La périodicité réguliere du zigzag observé dans (a) est obtenue en utilisant un forçage avec des petits éléments de rugosité placés le long des flaps et écartés de la longueur d'onde naturelle de l'instabilité.

une came excentrée qui pilotent la grille comme indiqué sur la figure 4.6 pour un cas avec 5 cylindres. La came pousse vers le bas pendant la moitié du parcours et un ressort maintient le barre verticale collé à la came pendant la montée. Un roulement à billes fait le contact entre la barre verticale et la came pour éviter le frottement.

Dans les premières expériences d'interaction, j'ai perturbé l'évolution des dipôles avec les ondes internes engendrées par les trois cylindres oscillants (placés horizontalement dans la direction orthogonale à la propagation du dipôle en colonne et couvrant toute la largeur de la cuve). Sur la figure 4.7 on peut voir des séquences d'images d'ombroscopie pour l'évolution du dipôle (a) dans un milieu initialement au repos et (b) en présence d'un champ d'ondes internes. Dans le premier cadre de la figure (a), on distingue bien les lignes verticales qui signalent la position du dipôle en colonne à la sortie du flap. L'effet de l'instabilité zigzag est observé par la décorrelation des différents couches dans les cadres suivants. D'une façon qualitative la séquence (b) montre que l'évolution moyenne du dipôle n'est pas significativement modifiée par la présence du champ d'ondes. Cette observation s'est reproduite indépendemment de la fréquence des ondes et de la vitesse initiale du

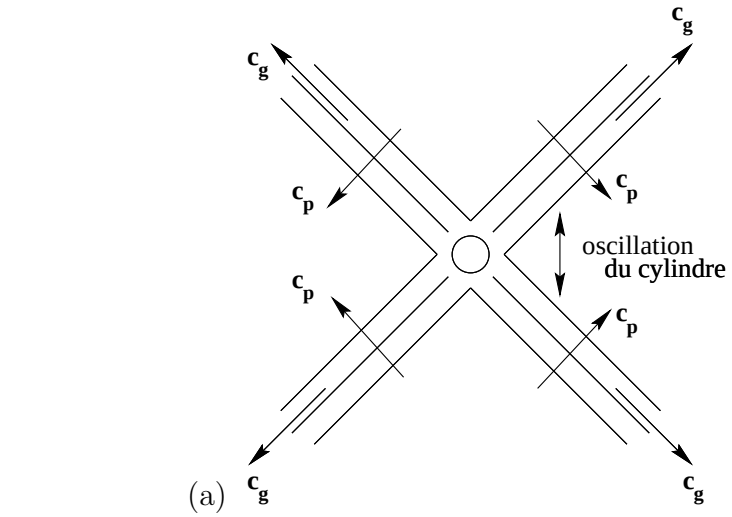


FIG. 4.5 – Ondes internes engendrées par un cylindre oscillant. (a) Schéma et (b) image expérimentale obtenue par ombroscopie.

dipôle. Une analyse plus détaillée de la positon du dipole dans chaque couche au cours du temps pour des cas sans ondes et avec ondes de différentes fréquences a confirmé que l'effet des ondes sur les tourbillons allait être difficile à mesurer et a indiqué principalement deux problèmes avec ce premier montage : tout d'abord, la variabilité naturelle du phénomene d'instabilité subit par le dipôle initial empêche de mesurer s'il existe un transfert de quantité de mouvement onde-tourbillon. Ensuite, la faiblesse de l'interaction que l'on cherche à identifier nécessite une précision dans les mesures de déplacement des tourbillons inaccessible avec le système d'ombroscopie utilisé jusqu'à présent. Pour résoudre ce dernier problème, on a décidé d'utiliser la vélocimétrie par images de particules (PIV, de *Particle Image Velocimetry*) qui permet d'avoir accès au champ de vitesse dans un plan (mais qui ajoute d'autres difficultés...) et qui sera décrite dans la section suivante. Pour s'affranchir des incertitudes liées au processus de création des dipôles pancake, qui dépendent du développement des instabilités, et afin de créer, à partir de la colonne initiale, un dipole pancake plus énergétique et donc moins sensible aux effets dissipatifs, j'ai conçu une

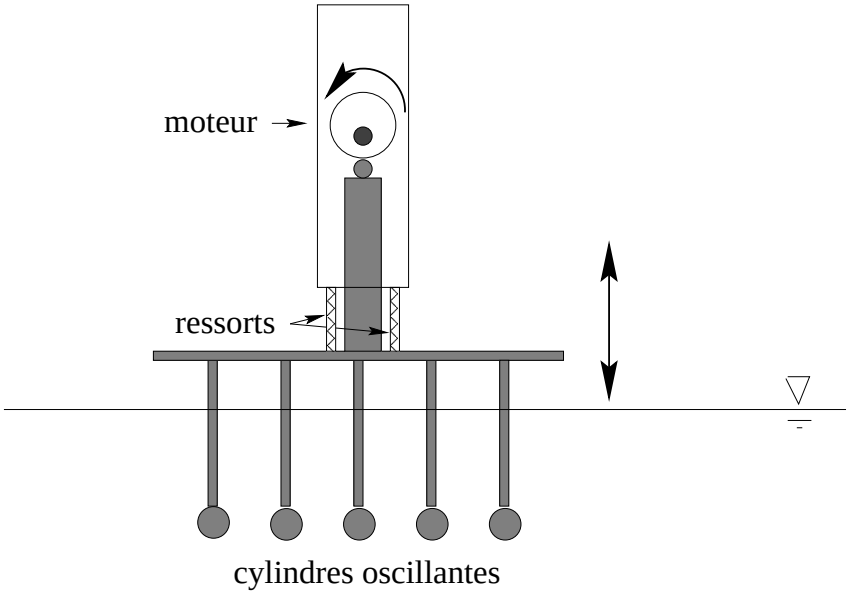


FIG. 4.6 – Mécanisme utilisé pour faire osciller une structure de plusieurs cylindres.

méthode nouvelle qui consiste à couper une tranche du dipôle avant que l'instabilité zigzag ne se manifeste. On fait ceci à l'aide d'un diaphragme (figure 4.8) qui peut être réglé en ouverture pour choisir la taille verticale voulue. Plus la stratification est forte, moins les perturbations dues à cette coupe assez brutale sont intenses. En effet, les parties du dipôle original bloquées par la plaque restent piégées derrière celle-ci (à cause de l'inhibition des mouvements verticaux). La recirculation derrière la plaque a un autre effet pratique : les mouvements horizontaux dans la cuve le long de toute sa longueur sont reduits aux couches correspondantes à la fenêtre du diaphragme et donc le temps de retour au repos est plus court qu'en absence de la plaque, réduisant significativement le temps d'attente entre deux expériences. Cette méthode permet alors de générer des dipôles pancake d'intensité et de taille controlées dont le rapport d'aspect peut être modifié à volonté. Cela représente un avantage par rapport à d'autres techniques, telles que le collapse d'un jet impulsionnel, où le dipole pancake formé à partir d'un état initial turbulent est par conséquent moins controlable.

Trois paramètres de contrôle adimensionnels peuvent être définis pour le dipôle sortant de l'écran : le nombre de Reynolds $Re = UL_h/\nu$, le nombre de Froude horizontal $F_h = U/NL_h$ et le rapport d'aspect $\alpha = L_v/L_h$, où U, L_h et L_v sont, respectivement, la vitesse initiale de translation horizontale du dipôle et les échelles de longueur caractéristiques horizontale et verticale et ν est la viscosité cinématique. Le rapport d'aspect varie avec l'ouverture du diaphragme non seulement par le fait évident que sa taille verticale change mais aussi parce que la taille horizontale est simultanément affectée par le passage à travers la plaque. On observe, par exemple, que la taille horizontale du dipole pancake

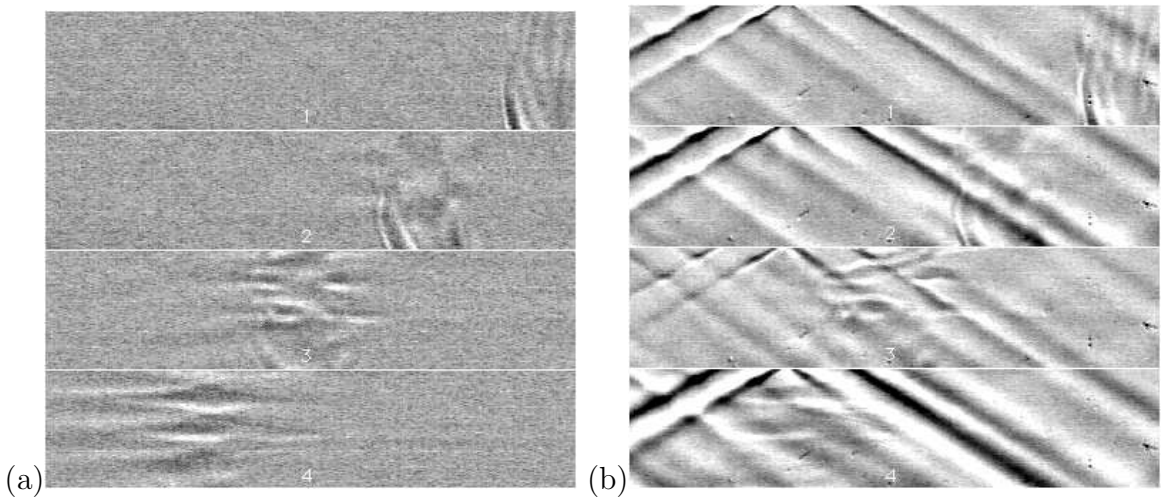


FIG. 4.7 – Séquence d'images d'ombroscopie de l'évolution du dipôle (a) sans ondes et (b) avec les ondes produites par les trois cylindres oscillants. Pour chaque série les quatre cadres correspondent à 25, 50, 75 et 100 secondes après la génération du dipôle, qui se déplace de droite à gauche. Il faut remarquer que les différences observées dans l'amplitude des ondes dans (b) résultent du fait qu'on soustrait une image de base pour améliorer le contraste, ce qui a un effet plus ou moins fort suivant la phase des ondes à un instant donné.

est plus importante pour une petite fenêtre que pour une fenêtre plus grande, ce qui fait diminuer d'avantage le rapport d'aspect. Les expériences avec dipôles de rapport d'aspect plus grand ($\alpha \geq 1$) présentent des traits distincts par rapport aux observations qui ont été reportées dans la littérature sur la dynamique des dipôles pancake (e.g. Flor *et al.*, 1995) et ont motivé l'étude de la sélection d'échelle verticale présentée dans le chapitre 5.

4.3 Vélocimétrie par Images de Particules : PIV

Des mesures du champ de vitesse ont été obtenues par la méthode de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV). Le principe général de cette méthode consiste à prendre deux photos des particules qui tracent l'évolution d'un écoulement et, connaissant l'écart temporel qui les sépare (Δt), obtenir un champ de vecteurs vitesse en recherchant les pics de correlation (voir e.g. Raffel *et al.*, 1998). J'ai utilisé un système commercial de PIV (FlowMaster 3S de marque La Vision [2]) avec lequel est réalisé d'une part l'acquisiton des images avec une camera CCD et d'autre part le calcul des corrélations permettant d'obtenir les champs de vitesse ainsi que le post-traitment des champs de vecteurs. Le logiciel de calcul et post-traitement des vecteurs permet un contrôle complet des différents paramètres du calcul (e.g. la forme de la fonction de correlation à utiliser), ainsi que

[2]Site web `http ://www.lavision.de`

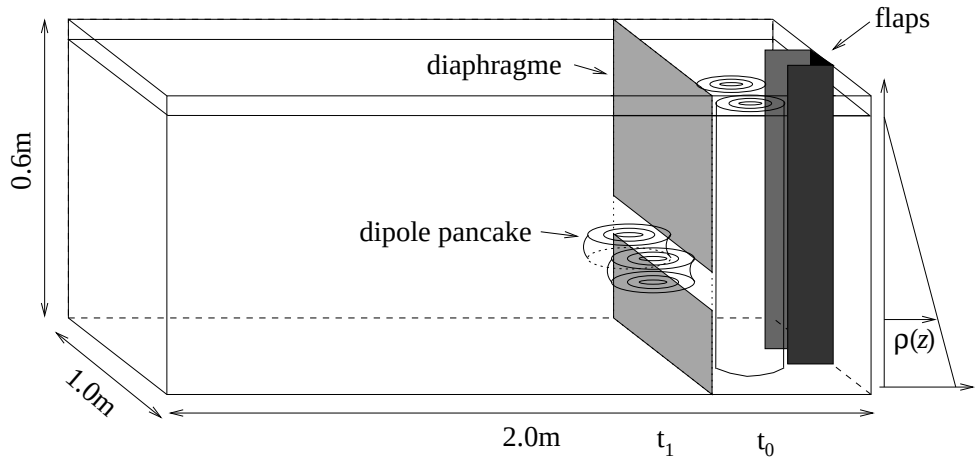


FIG. 4.8 – Schéma du montage expérimental utilisé pour produire un dipôle pancake en coupant une tranche de la colonne dipolaire.

plusieurs choix dans les algorithmes de subdivision des images en *fenêtres d'interrogation*. On a utilisé notamment le calcul de vecteurs avec une méthode itérative avec réduction de la taille des fenêtres d'interrogation à chaque itération (une description détaillée des particularités de ces algorithmes est faite par Gallaire, 2002).

L'acquisition des images est faite par une caméra CCD à double capteur de résolution 1280×1024 pixels et de gamme dynamique de 12-bits. Cette caméra peut faire des acquisitions à une fréquence jusqu'à 8Hz mais dans les configurations utilisées, à cause des caractéristiques de la synchronisation entre la caméra et le système d'éclairage, on ne pouvait atteindre que 2Hz en mode "double-cadre" et 5Hz en mode "cadre-simple". En mode cadre-simple, le flux d'images est continu et la corrélation est calculée entre deux images consécutives (i.e. on a une valeur minimum de Δt de 0.2s qui correspond à l'acquisition à 5Hz). Le mode en double-cadre signifie qu'à 2Hz on prend 2 *paires d'images* par seconde. Le Δt entre les deux images constituant chaque paire d'images peut être défini indépendamment de la fréquence de 2Hz et peut en particulier être beaucoup plus petit (jusqu'à environ 10ms). Les écoulements dans la cuve stratifiée étant relativement lents, il ne s'est pas avéré néanmoins nécessaire d'utiliser des Δt inférieurs à environ 100ms. Avant d'analyser plus en détail l'importance du choix de Δt dans les expériences sur les ondes internes et les tourbillons, on discute le système d'éclairage et l'ensemencement de l'écoulement.

L'éclairage du plan d'observation

La nappe laser pulsée nécessaire pour éclairer l'écoulement est produite à partir d'un laser d'argon de 7W. Le faisceau continu de ce laser est haché en flashes par un déflecteur acousto-optique placé avant la fibre optique servant à guider le laser. Le faisceau pulsé

est ensuite diffusé en nappe par un jeu de lentilles cylindriques à l'extrémité de la fibre. L'épaisseur de la nappe laser dans la region d'intérêt peut être ajustée en modifiant la position des lentilles par rapport au bout de la fibre et sa valeur est un des paramètres à choisir avec soin car l'intensité de l'éclairage et la densité de particules dans chaque image en dépendent de façon inverse (i.e. plus la nappe est fine plus elle est lumineuse mais moins elle contient de particules). Même si on a beaucoup de particules, une nappe trop fine conduit à des erreurs supplementaires dans les corrélations car il est plus fréquent de trouver des particules qui entrent ou sortent du plan éclairé pendant le lapse de temps séparant les deux images en raison de la tridimensionnalité de l'écoulement. L'épaisseur de la nappe laser pour les expériences présentées ici a été fixée à 5mm environ dans la région d'intérêt. La nappe a été placée sur les plans de symétrie de l'écoulement dipolaire horizontaux ou verticaux en donnant accès, respectivement, aux champs horizontaux et verticaux de vitesse.

Particules pour ensemencer la cuve stratifiée

Un des problèmes délicats pour utiliser la PIV dans un environnement stratifié est de réussir à avoir une distribution uniforme des particules car, le bassin étant au repos, il n'est pas possible d'homogénéiser la distribution de particules par un brassage qui détruirait la stratification. La solution adoptée a été d'utiliser des particules de TiO_2. Ces particules sont légèrement plus lourdes que l'eau salée au fond du réservoir mais, très petites, elles se déposent très lentement (plusieurs heures) de sorte qu'elles peuvent être raisonnablement considérées comme étant au repos dans toute la hauteur du réservoir expérimental, ceci en raison des échelles de temps beaucoup plus rapides utilisées pour les prises d'image de la PIV. En fait, la distribution de taille dans la poudre commerciale de TiO_2 produit une dispersion assez grand dans la vitesse de sédimentation. Les particules les plus grosses parcourent les 70cm de hauteur d'eau en quelques minutes tandis que les plus fines peuvent tarder plus de 3 heures ce qui permet d'ensemencer à plusieurs reprises dans une journée d'expériences et d'avoir toujours des particules dans la zone de visualisation. En outre, il faut veiller à ne pas faire de prise de vue immédiatement après un ensemencement mais attendre que les particules trop rapides aient atteint le fond. L'ensemencement pour faire des mesures dans un plan vertical peut se faire par la surface, en mélangeant les particules avant avec un peu d'eau claire (à la même température que l'eau de la cuve... et surtout pas plus froide !). Il faut alors verser le mélange eau-particules très doucement (e.g. à l'aide d'une plaque de polystyrène flottant dans la surface) afin d'éviter le plus possible les perturbations au profil de densité. La procédure est plus compliquée quand on prépare le montage pour mesurer dans un plan horizontal. Dans ce cas, la caméra regarde à travers la surface de l'eau et à travers tout le volume d'eau précédant le plan éclairé. On a donc besoin d'éviter d'ensemencer les couches de la stratification au dessus de la position de la nappe laser. Pour cela, il faut mélanger les particules avec de l'eau qu'on

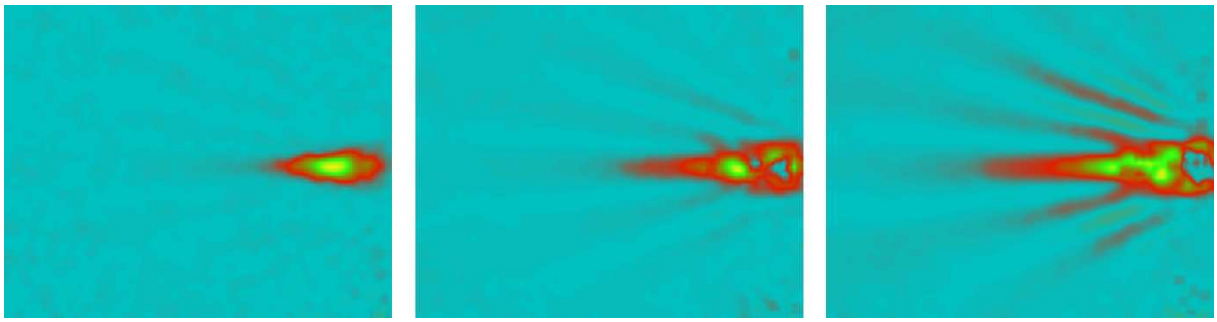


FIG. 4.9 – Calcul de vitesse horizontale dans le plan vertical de symétrie du dipole avec Δt de (a) 50ms, (b) 250ms et (c) 500ms. Le diaphragme est a droite de l'image et le dipole se déplace vers la gauche.

a prélévée au préalable au niveau désiré et réinjecter ensuite le mélange eau-particules. Le prélèvement et la réinjection dans ce cas ont été menés à l'aide d'une sonde avec sorties latérales pour éviter au maximum, au moment de la réinjection, la perturbation du profil de densité par des petits jets verticaux. L'inconvénient de la méthode d'ensemencement pour cette deuxième configuration de mesure est qu'elle se fait de façon plus intrusive et qu'il faut donc plus de temps pour retrouver un état de repos convenable avant de pouvoir commencer une expérience.

Choix de Δt

Le choix de Δt est un paramètre très important dans ces expériences car les vitesses caractéristiques associées aux ondes internes et aux tourbillons pancake ne sont pas toujours du même ordre de grandeur et évoluent pendant toute la durée d'une manipulation. Pour un forçage continu, le maximum de vitesse des oscillations des particules dues aux ondes à un endroit donné reste constant tandis que celui de l'écoulement dipolaire diminue au cours du temps au fur et à mesure que les tourbillons diffusent par effet visqueux. Le plus grand écart entre les vitesses caractéristiques des deux modes se manifeste alors aux instants initiaux de l'évolution du dipôle. Juste après le diaphragme, en fonction de la vitesse de fermeture des flaps et de la hauteur de la fenêtre, la vitesse maximale du dipôle peut atteindre 3 cm s^{-1}, tandis que la vitesse maximale associée aux ondes ne dépasse jamais les $\approx$0.2 cm s^{-1}. Il faut alors choisir le paramètre Δt en fonction de l'ordre de grandeur des vitesses de l'écoulement que l'on désire quantifier précisement. Il faut d'une part qu'il soit suffisamment long pour que les particules aient le temps de bouger de façon appréciable, mais raisonable de sorte qu'elles ne s'échappent pas du plan laser ni de la fenêtre d'interrogation pendant l'intervalle de temps qui sépare les deux images. Il ne faut pas non plus que la "constellation" formée par les particules n'aie eu le temps d'être trop déformée. Un exemple de l'effet du choix de Δt peut être mis en évidence en regardant le

champ de vitesse dans un plan vertical lorsque le dipôle est à peine sorti du diaphragme (figure 4.9). Le dipôle sortant subit un ajustement cyclostrophique après le traumatisme infligé par la coupe. Bien que cette phase d'ajustement a une durée assez courte, on peut observer un rayonnement d'ondes internes qui est du à la déflexion des surfaces d'iso-densité pour arriver à l'équilibre cyclostrophique (voir chapitre 3) et qui est causé aussi par l'éffondrement des petits tourbillons horizontaux produits par la recirculation après la plaque. Sur la figure 4.9, on montre le calcul de la vitesse horizontale dans le plan vertical de symétrie du dipôle aligné avec la direction de translation pour trois valeurs de Δt. Pour $\Delta t = 50$ms, on voit que le champ de vitesse du dipole est bien résolu mais on distingue à peine les ondes rayonnées. Avec $\Delta t = 250$ms et encore plus avec $\Delta t = 500$ms on met en évidence les ondes rayonnées (formant un "demi soleil" autour du dipôle) mais le coeur du dipôle n'est pas bien résolu. Dans le coeur des tourbillons où la vitesse est grande, le logiciel ne peut pas trouver un pic de corrélation valable car les arrangements de particules de la première image ne correspondent pas du tout à ceux de la seconde image à cause d'une valeur trop grande de Δt.

4.4 Protocole

On présente ici le protocole expérimental utilisé pour les expériences présentées dans les chapitres 5 et 6. Dans toutes les séries d'expériences, on définit l'origine de l'axe temporel au moment de la fermeture de flaps (t_0 dans la figure 4.8) et on synchronise en général le début de l'acquisition d'images avec la sortie du dipôle pancake du diaphragme (t_1 dans la même figure). Dans les expériences avec ondes, le démarrage de l'oscillation des cylindres (à un temps t_{ondes}) se fait avant ou après t_0 selon que l'on souhaite analyser l'évolution du dipôle dans un champ d'ondes déjà établi ou bien observer la rencontre du dipôle avec les ondes incidentes. En pratique, la fermeture des flaps est réalisée par un moteur pas-à-pas contrôlé par un PC, le système de PIV qui synchronise la caméra et les pulses lumineux pour l'acquisition d'images est commandé sur un autre PC (à un temps t_{acq}). Enfin, le moteur qui fait osciller les cylindres est alimenté directement par une alimentation à courant continu. La synchronisation entre ces trois élements se fait manuellement. Avant de réaliser chaque manipulation, il y a plusieurs paramètres et dispositifs à régler qu'on peut diviser en trois catégories :

1. Caractéristiques générales de l'expérience
   (a) Profil de la stratification.
   (b) Montage de mesure pour réaliser la PIV sur un plan vertical ou horizontal.
   (c) Position du générateur d'ondes par rapport à la plaque du diaphragme.
   (d) Hauteur de l'ouverture du diaphragme.

2. Calibration du système de mesure et ensemencement

   (a) Mise au point de l'objectif sur le plan de mesure.

   (b) Réglage de l'épaisseur de la nappe laser et positionnement aligné dans le plan choisi du parcours du dipôle.

   (c) Calibration du logiciel pour avoir la conversion des distances en pixels en distances métriques. Celle-ci nécessite une grille de calibration avec un quadrillage de dimensions connues plongée dans la cuve au niveau du plan de mesure. Cette procédure doit être faite avec extrême précaution pour ne pas trop perturber le profil de densité dans la cuve stratifiée.

   (d) Ensemencement de la cuve avec les particules de TiO_2.

3. Paramètres de la manipulation

   (a) Vitesse de fermeture du flap. Concernant l'angle de fermeture, j'ai utilisé la valeur optimale de 14 degrés qui empêche la formation d'une deuxième paire de petits tourbillons produite par l'arrêt du mouvement des flaps (Billant & Chomaz, 2000*a*).

   (b) Fréquence d'oscillation des cylindres.

   (c) Choix des temps t_{acq} et t_{ondes} par rapport à t_0.

   (d) Choix de mode d'acquisition (cadre double ou simple), fréquence, Δt, ainsi que des éventuels cycles d'acquisition plus particuliers (un example couramment utilisé consiste à prendre des séquences de 5 secondes de durée à 4 images/sec avec une pause de 10 secondes entre chaque séquence).

Après la manipulation il faut attendre au moins 45 minutes environ pour retrouver les conditions de repos dans la cuve. En général ce temps permet de faire un premier calcul des vecteurs et valider les données recueillies.

Chapitre 5

Sélection visqueuse d'échelle verticale dans un fluide stratifié

Ce chapitre reprend l'article : Godoy-Diana R., Chomaz J.M. and Billant P. (2004) Vertical length scale selection for pancake vortices in strongly stratified viscous fluids *Journal of Fluid Mechanics* **504**, 229-238.

Abstract

The evolution of pancake dipoles of different aspect ratios is studied in a stratified tank experiment. Two cases are reported here for values of the dipole initial aspect ratio $\alpha_0 = L_v/L_h$ (where L_v and L_h are vertical and horizontal length scales, respectively) of $\alpha_0 = 0.4$ (case I) and $\alpha_0 = 1.2$ (case II). In the first case, the usual decay scenario is observed where the dipole diffuses slowly with a growing thickness and a decaying circulation. In case II, we observed a regime where the thickness of the dipole decreases and the circulation in the horizontal mid-plane of the vortices remains constant. We show that this regime where the vertical length scale decreases can be explained by the shedding of two boundary layers at the top and bottom of the dipole that literally peel off vorticity layers. Horizontal advection and vertical diffusion cooperate in this regime and the decrease towards the viscous vertical length scale $\delta = L_h Re^{-1/2}$ occurs on a time scale $\alpha_0 Re^{1/2} T_A$, T_A being the advection time L_h/U. From a scaling analysis of the equations for a stratified viscous fluid in the Boussinesq approximation, two dominant balances depending on the parameter $R = ReF_h^2$ are discussed, where $F_h = U/NL_h$ is the horizontal Froude number and $Re = UL_h/\nu$ is the Reynolds number, U, N and ν being, respectively, the translation speed of the dipole, the Brunt-Väisälä frequency and the kinematic viscosity. When $R \gg 1$ the vertical length scale is determined by buoyancy effects to be of order $L_b = U/N$. The experiments presented in this paper pertain to the case of small R, where viscous effects govern the selection of the vertical length scale. We

show that if initially $L_v \leq \delta$, the flow diffuses on the vertical (case I), while if $L_v \gg \delta$ (case II), vertically sheared horizontal advection decreases the vertical length scale down to δ. This viscous regime may explain results from experiments or numerical simulations on the late evolution of stratified flows where the decay is observed to be independent of the buoyancy frequency N.

5.1 Introduction

The emergence and evolution of pancake vortices in strongly stratified fluids have been studied intensely (see Spedding, Browand & Fincham, 1996*b*; Riley & Lelong, 2000; Billant & Chomaz, 2000*a*; Bonnier, Eiff & Bonneton, 2000; Beckers, Verzicco, Clercx & van Heijst, 2001; Praud, 2003) because of their role in the dynamics of geophysical flows. Of particular interest is the vertical length scale selection that constrains the energy and momentum exchanges —which determine for instance the observed horizontal and vertical turbulence spectra observed in the atmosphere (Lindborg, 2002) and in the ocean. The vertical length scale naturally emerging in stratified turbulence has been sometimes observed in numerical simulations (e.g. Herring & Métais, 1989; Kimura & Herring, 1996; Riley & deBruynKops, 2003) and laboratory experiments (e.g. Fincham, Maxworthy & Spedding, 1996; Bonnier, Eiff & Bonneton, 2000) to be independent of the strength of the stratification, depending only on the Reynolds number. On the contrary, a dependence on N of the vertical length scale has been observed in the stratified Taylor-Couette experiment (Boubnov, Gledzer & Hopfinger, 1995), in stratified wakes (Park, Whitehead & Gnanadeskian, 1994; Holford & Linden, 1999; Spedding, 2002), in the zigzag instability of a columnar dipole (Billant & Chomaz, 2000*a*), in numerical simulations of decaying stratified turbulence (Godeferd & Staquet, 2003) and in the vertical wave number spectra in the tropopause and lower stratosphere (Lindborg, 2002).

In the present paper we study experimentally the dynamics of a pancake dipole in a linearly stratified fluid. The dipole is observed to evolve differently depending on its initial aspect ratio. For thin dipoles the vertical length scale grows very slowly while its circulation decays, and the evolution is well described by the constant-thickness model proposed by Flor, van Heijst & Delfos (1995). When the initial dipole is thicker, a new regime is observed where the top and bottom layers of the dipole are "peeled off" forming a wake so that the dipole slims down on the vertical. From these observations we propose different regimes for the evolution of the vertical length scale in stratified flows.

5.2 Experimental setup

The experiments are carried out in a tank of 1m x 2m base and 0.6m height filled with salt-stratified water. The stratification is made using a two-tank method as explained in

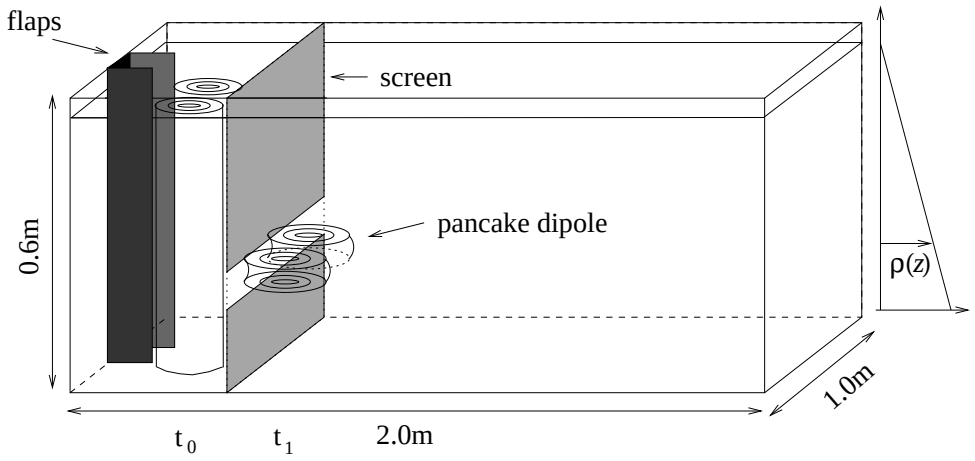


FIG. 5.1 – Experimental setup.

Billant & Chomaz (2000*a*) (referred to hereafter as BC). All experiments are conducted with linear stratifications of Brunt-Väisälä frequencies in the range 1.4-1.6 rad s^{-1}. The dipole is generated by a pair of parallel vertical flaps as described in BC. The experimental setup differs from BC by the fact that the initial dipole is partially blocked by a vertical screen perpendicular to the moving direction of the dipole (figure 5.1). A single horizontal slice of the vortex column goes through the screen and forms a pancake dipole. This method permits to vary at will the initial aspect ratio and propagation velocity of the pancake dipole, contrary to other generation techniques such as impulsive jets (e.g. Flor *et al.*, 1995) where the vertical scale is determined by the collapse of an initially turbulent patch and not externally controlled. The screen is placed 0.25m away from the edge of the flaps. Three nondimensional control parameters can be defined for the dipole coming out of the screen : the Reynolds number $Re_0 = U_0 L_{h0}/\nu$, the horizontal Froude number $F_{h0} = U_0/NL_{h0}$ and the aspect ratio $\alpha_0 = L_{v0}/L_{h0}$, where U_0, L_{h0} and L_{v0} are, respectively, the initial translation speed and the horizontal and vertical length scales of the dipole, ν is the kinematic viscosity and N the Brunt-Väisälä frequency. In practice, we define the horizontal length scale as the dipole radius. It is mainly determined by the size of the flaps, which is fixed in this experimental setup. The dipole translation speed is controlled by the closing speed and initial and final angles of the flaps. For the present experiments these were kept constant. The initial vertical length scale L_{v0} is varied by modifying the height of the aperture in the screen (H) and is defined from PIV measurements in the vertical plane of symmetry of the dipole as the vertical distance between the point where the velocity is maximum and the point where it is half the maximum.

Measurements of the velocity field were obtained by Particle Image Velocimetry (PIV) with a FlowMaster 3S system manufactured by La Vision. The image acquisition is made by a double-frame camera with resolution of 1280 x 1024 pixels and a 12-bit dynamic

range. The pulsed laser sheet was generated with a continuous beam 7W Argon laser chopped with an optoacoustic device and spread into a sheet by an array of cylindrical lens at the end of an optic fiber. The thickness of the light sheet was adjusted to 5mm at the region of interest. The laser sheet was either on the vertical or on the horizontal symmetry planes and gave access, respectively, to vertical and horizontal velocity fields. In both cases, TiO_2 particles are used as flow seeding. These particles are slightly heavier than the salt-water at the bottom of the tank, but they sediment very slowly (less than 10^{-2} mm s^{-1}) so that, for the timescales used for the PIV shots, they can be reasonably regarded as neutrally buoyant throughout the whole height of the experimental tank. All observations are made after the dipole has crossed the diaphragm, so $t = 0$ is defined when the maximum velocity region at the core of the dipole is out of the screen (t_1 in figure 5.1). This time origin corresponds for all experiments to 30s after the flaps are closed.

5.3 Observations

Two sets of experiments are reported here that correspond to two distinct initial aspect ratios. In the first series (Case I) the window height was set to $H = 5.3$cm, which resulted on an initial vertical length scale of $L_v = 1.5$cm. The initial control parameters were $F_{h0} = 0.06$, $Re_0 = 131$ and $\alpha_0 = 0.4$. PIV measurements on the horizontal midplane (not shown here) demonstrated that the horizontal structure of the dipole can be reasonably described using the Lamb-Chaplygin model —as in the absence of the screen (BC)— and were used to determine the horizontal length scale L_h. Figure 5.2.a shows the modulus of the velocity field $|V|$ in the vertical symmetry plane (x, z) of the dipole, at times $t = 5, 50$ and 112s. The screen position is out of view about one centimeter away from the left edge of the region captured in the images. The corresponding fields of horizontal vorticity ω_h (pointing out of the image plane) are shown in figure 5.2.b. The two shear layers produced by the moving dipole appear as two stripes of opposite-signed horizontal-vorticity regions on top and bottom of the core region. At the later stages these sheared regions are inclined forward surrounding an arrow-shaped region of high velocity (figure 5.2.a). Vertical profiles of the velocity modulus $|V|(z)$ at the x-position of the maximum velocity (figure 5.3.a) show that the vertical width slightly increases whereas the velocity fades out.

In the second set of experiments (Case II) the window height was approximately doubled ($H = 10.5$cm), determining an initial vertical length scale of $L_v = 3.3$cm. The dipole came out of the screen with a larger initial speed, because a smaller fraction of the energy is lost in the initial adjustment, and the overall evolution was faster. The initial control parameters were $F_{h0} = 0.18$, $Re_0 = 182$ and $\alpha_0 = 1.27$. For the same observation window as in the previous case, the fields of $|V|$ and ω_h shown in figures 5.2.c and 5.2.d were taken at $t = 0, 35$ and 90s. The analogue profiles of $|V|(z)$ are shown in figure 5.3.b.

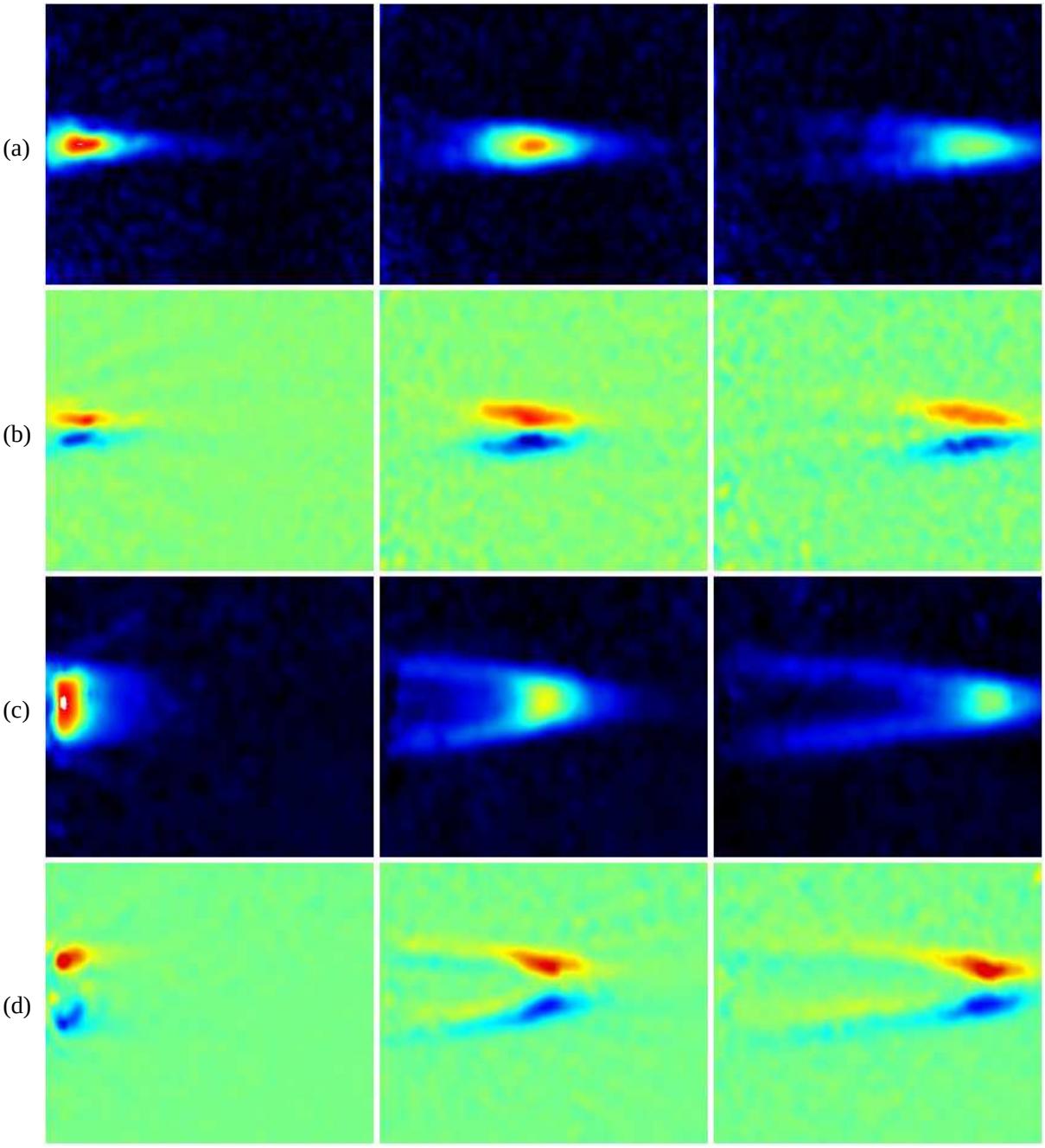


FIG. 5.2 – Time series of PIV measurements on a vertical cross-section through the dipole symmetry axis. (a) and (b) are, respectively, velocity modulus $|V|$ and horizontal vorticity ω_h for a dipole of case I at times $t = 5, 50$ and 112s (from left to right). (c) and (d) are analogue fields taken for a dipole of case II at times $t = 0, 35$ and 90s. Each frame shows an area of 43cm in the horizontal (x) direction times 34cm in the vertical (z). In (a) and (c) the colorbar of the first frame is used throughout the subsequent frames while in (b) and (d) the colorbar is normalized within each frame.

Contrary to what was observed in the previous case, the vertical width of the dipole diminishes significantly. The velocity fields in figures 5.2.c exhibit a horizontal V shape, the layers on top and bottom of the dipole being swept away generating two "wakes" in the upper and lower layers where the velocity is horizontal and the vorticity changes sign (see figure 5.4). The decrease on the vertical length scale is thus caused by the top and bottom layers that are slowed down and left behind.

We summarize the observations in figures 5.5.a and 5.5.b where the time evolution of the vertical length scale L_v and the circulation for one vortex in the dipole Γ are shown. The time axis is rendered non-dimensional using the advective time gauge $T_A = L_{h0}/U_0$. L_v and Γ are normalized by their initial values. In case I the vertical length scale grows slowly while the circulation decreases, a regime previously observed (see e.g. Flor *et al.*, 1995). On the contrary, in case II the vertical length scale decreases while the circulation on the mid-plane remains almost constant, to our knowledge, a novel observation.

5.4 Decay models : viscous peel-off

In case I (thin dipole), if we neglect the slight growth of the thickness, the evolution is well described by the model proposed by Flor *et al.* (1995) in which circulation decreases through vertical diffusion on a time scale $\tau_{ct} \sim \nu^{-1} L_v^2$, whereas the vertical and horizontal structures are assumed frozen with a constant vertical thickness. This constant thickness diffusion model (solid lines in figure 5.5) does not contain any adjustable parameter and it predicts remarkably well the circulation decrease observed in case I. This model, however, is not appropriate to describe our second experimental observation where the thickness of the dipole decreases (figure 5.5.a).

In order to give a physical interpretation of this second regime, we reconsider the theoretical framework defined by Riley *et al.* (1981) (RMW) and developed in Godoy-Diana & Chomaz (2003), where a scaling analysis of the equations for a stratified viscous fluid in the Boussinesq approximation is conducted : the horizontal velocity is nondimensionalized by U, the vertical velocity by UF_vF_h, the horizontal and vertical length scales by L_h and L_v, respectively, the density perturbation by $\rho_0 U^2/gL_v$ and the time scale by L_h/U the horizontal turn-over time. Using the notation $D_h/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h$ for the horizontal lagrangian derivative, the equations read

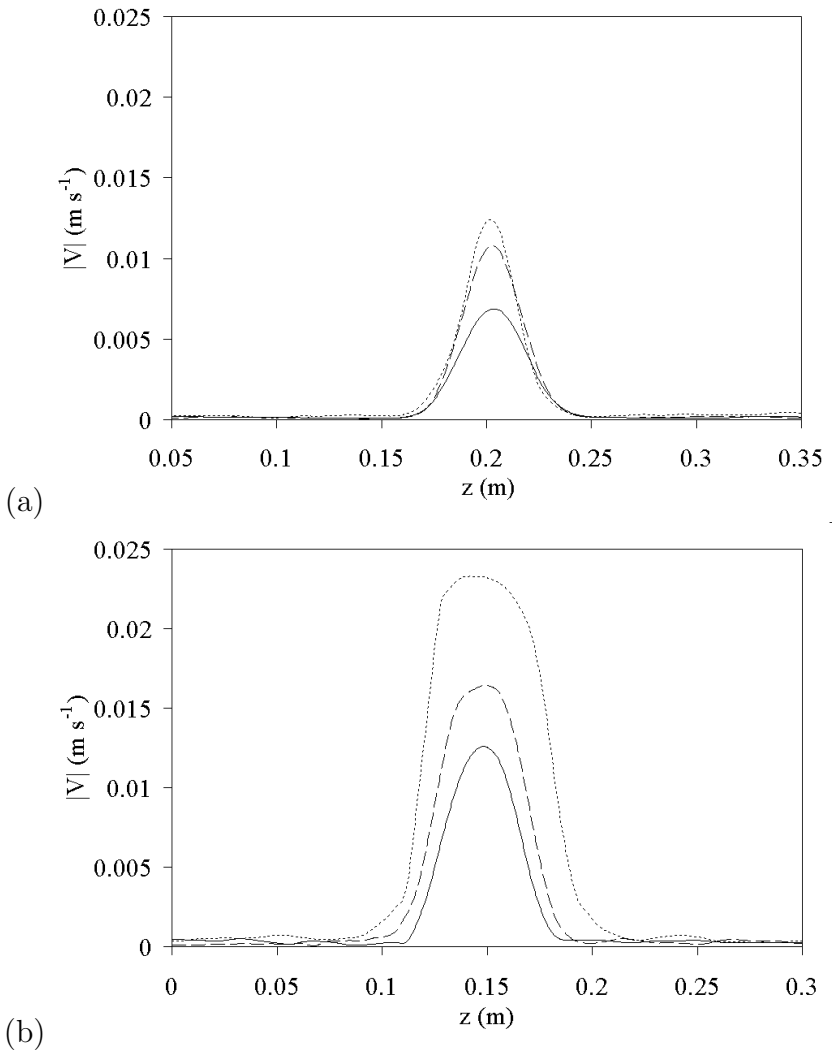


FIG. 5.3 – Profiles of $|V|$(z) for : (a) case I at times t = 5, 50 and 112s and (b) case II at times t = 0, 35 and 90s. In each case the profile with highest maximum velocity corresponds to the earliest time. Each profile is obtained averaging on a 5mm wide region.

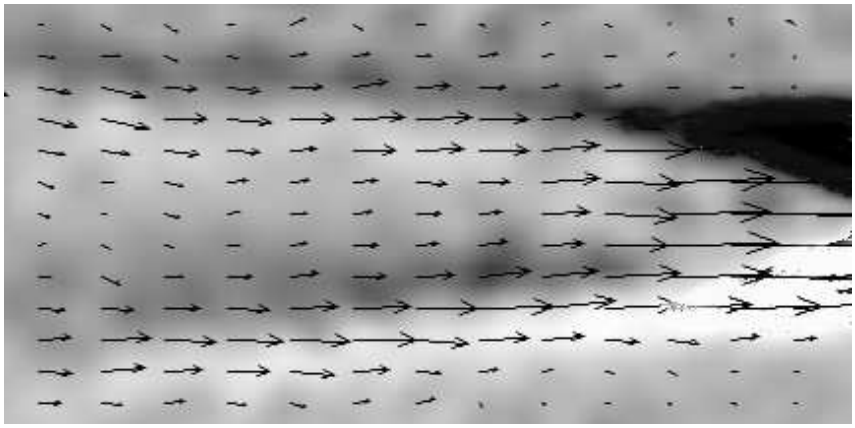


FIG. 5.4 – Detail of the last frame in figure 5.2.d rendered with a contrast-enhancing greyscale. Velocity vectors are also shown. The two layers peeled from the dipole are clearly visible as two quasi-horizontal stripes where vorticity changes sign.

$$\frac{D_h \mathbf{u}_h}{Dt} + \frac{F_h^2}{\alpha^2} u_z \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} = -\boldsymbol{\nabla}_h p + \frac{1}{Re}\left(\nabla_h^2 \mathbf{u}_h + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial z^2}\right) \tag{5.1}$$

$$F_h^2\left(\frac{D_h u_z}{Dt} + \frac{F_h^2}{\alpha^2} u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho + \frac{F_h^2}{Re}\left(\nabla_h^2 u_z + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u}_h + \frac{F_h^2}{\alpha^2}\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{D_h \rho}{Dt} + \frac{F_h^2}{\alpha^2} u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = u_z + \frac{1}{ReSc}\left(\nabla_h^2 \rho + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\right) \tag{5.4}$$

where we have used the definitions of the Reynolds $Re = UL_h/\nu$ and Schmidt $Sc = \nu/\kappa$ numbers, the aspect ratio $\alpha = L_v/L_h = F_h/F_v$ and the horizontal $F_h = U/L_h N$ and vertical $F_v = U/L_v N = F_h/\alpha$ Froude numbers. For simplicity in the discussion α will be assumed small so that horizontal diffusion can be neglected compared to vertical diffusion, the extension to the case where this assumption may be relaxed being left to the sagacity of the reader.

Assuming F_h also small, two dominant balances of the horizontal momentum equation (5.1) can be achieved depending on the parameter $R = ReF_h^2$. If $R \gg 1$, vertical transport (second term on the left hand side of equation 5.1) dominates over vertical diffusion. Then the equations are self-similar with respect to N and the vertical length scale imposed by the leading order dynamics is such that $F_v = O(1)$, i.e. $L_v = L_b \equiv U/N$ (Billant & Chomaz, 2001). This limit will be used in the final discussion. The present experiments illustrate the other limit $R \ll 1$. In this case, vertical transport terms can be neglected compared to vertical diffusion terms. Thus, the vertical derivative in the horizontal momentum equations appears only in the viscous vertical diffusion and therefore

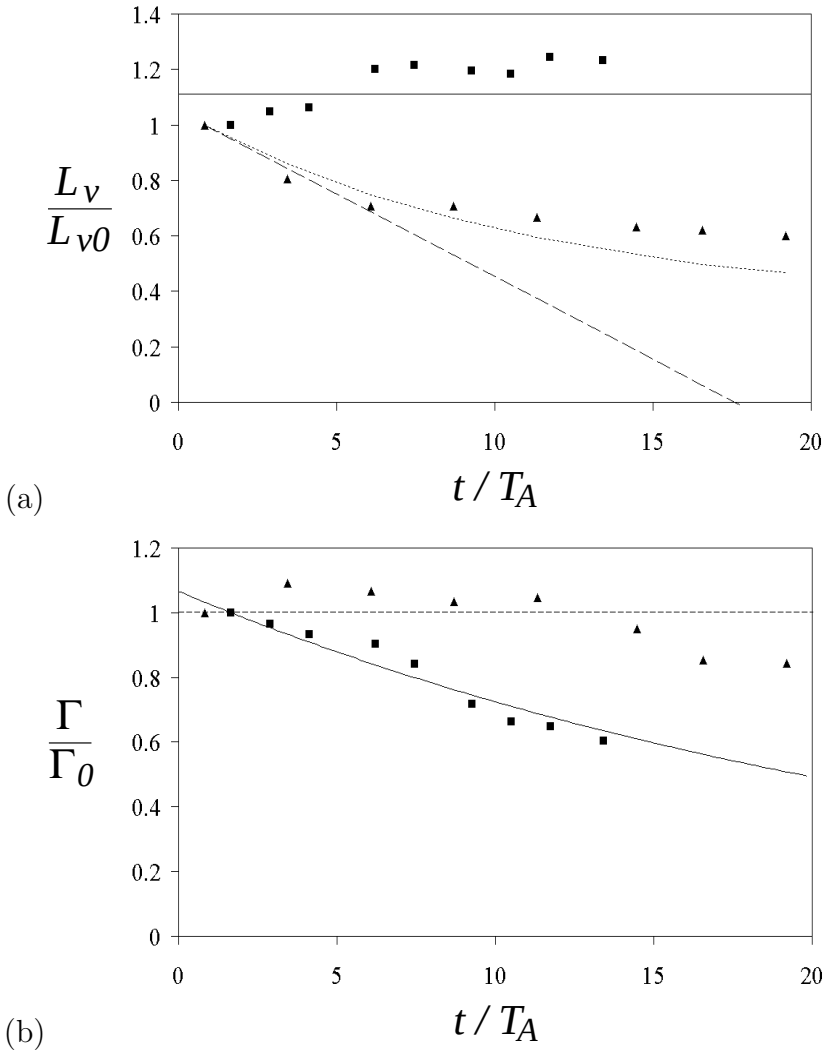


FIG. 5.5 – Time evolution of (a) the vertical length scale L_v and (b) the circulation of a dipole half Γ for both experiments. All curves are normalized to initial values. Time is scaled by the advective time $T_A = L_h/U$. ■ : case I. ▲ : case II. The constant thickness model is shown in solid lines. The viscous peel-off model is shown in dashed lines and the dotted line in (a) shows an improvement of this model (see text).

the dominant balance that fixes the vertical length scale is $\alpha^2 Re = 1$. The vertical scale

$$L_v = \delta \equiv L_h Re^{-1/2} \tag{5.5}$$

that should appear is then independent of N. The nondimensional equations in this viscous regime are at leading order :

$$\frac{D_h \mathbf{u}_h}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}_h p + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial z^2} \tag{5.6}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u}_h = 0 \tag{5.8}$$

$$\frac{D_h \rho}{Dt} = u_z + \frac{1}{Sc}\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \tag{5.9}$$

These equations have already been introduced by many authors (Riley *et al.*, 1981; Lilly, 1983; Praud, 2003). The difference here is that the only hypotheses are $F_h \ll 1$ and $R = ReF_h^2 \ll 1$, the vertical length scale being then imposed by the similarity corresponding to the dominant balance in equation (5.1) and not by initial or boundary conditions. The determination of the vertical length scale in this viscous stratified regime is to our knowledge a novel result. Under this assumption the horizontal motion is ruled only by equations (5.6) and (5.8). This equations resemble the Prandtl equation for the boundary layer over a horizontal plate except that p is not fixed by the external field but should insure the incompressibility of the horizontal field and that the vertical transport of momentum and the vertical divergence are here negligible.

From the observations of our second set of experiments (figures 5.2.c,d and figure 5.3.b) we can see that the action of vertical diffusion will be especially important in the horizontal layers that act as boundaries between the moving dipole core and the quiescent fluid over and under it (the high shear regions appearing as dark and light zones in figure 5.4). In order to model the observed behavior we consider two regimes in time : At the early stages of the evolution, the dipole is sufficiently tall and straight to assume that $\partial \mathbf{u}_h / \partial z = 0$ close to the mid-plane. Thus, the horizontal circulation at the mid-plane should be conserved, a feature that corresponds to the experimental observations of case II for times up to $15T_A$ (see figure 5.5.b). The height of the core region around the mid-plane diminishes as the outer layers are slowed down —diffusing momentum to the still regions on top and bottom of the dipole— until a viscous vertical length scale is reached. This is shown schematically in figure 5.6. The two "boundary" layers of thickness δ (as defined in equation 5.5) on each side of the pancake dipole are left behind as the dipole moves [1]. They peel off vorticity from the pancake dipole and a simple momentum balance

[1] A similar scaling for Ekman layers was invoked by Chomaz, Bonneton, Butet & Hopfinger (1993) to

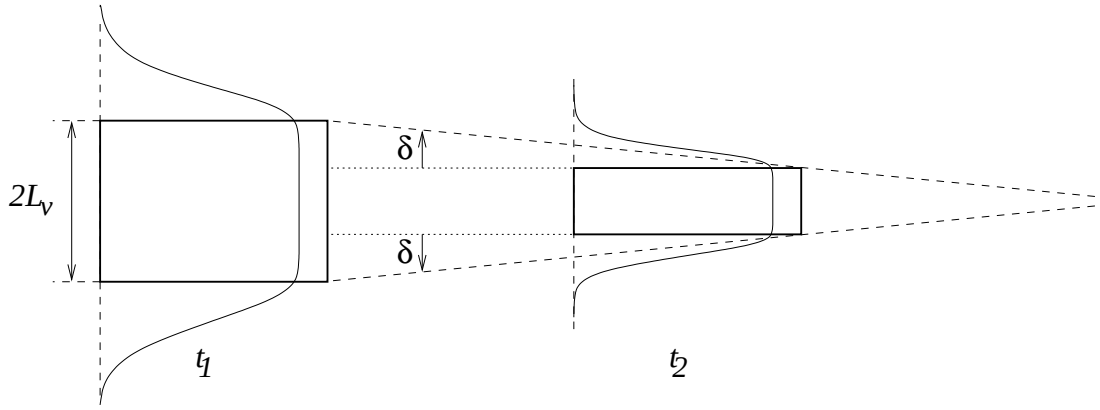


FIG. 5.6 – Schematic diagram of the two boundary layers during the slimdown regime (See text).

predicts that the dimensional vertical scale of the dipole should decrease with time as $L_{v0} - \delta t U/L_h$ until it reaches δ, where L_{v0} is the initial value of L_v. This happens on a time

$$T \sim \frac{L_h}{U}\left(\frac{L_{v0}}{L_h}Re^{1/2} - 1\right) . \tag{5.10}$$

At that time where $\delta \sim L_v$, the evolution becomes purely diffusive as in case I and the thickness of the dipole stays of order δ. The prediction of this *viscous peel-off model* is shown in dashed lines in figure 5.5 : the vertical length scale decreases linearly while the horizontal circulation stays constant. The slope predicted by the model is in good agreement with the initial decrease of L_v in the experiment for case II but it quickly overestimates the evolution at later times. This happens because the model with constant circulation considers inviscid dynamics within the dipole core, which is strictly valid only if L_v/δ is infinitely large and if horizontal viscous dissipation is neglected. In the present experiment, the ratio L_v/δ is about 3 and viscous diffusion affects the evolution of the core layer. Its effect can be simply accounted for using in the model the experimental data for L_h and Re as functions of time instead of the initial values. This quasi-steady model is in good agreement even for later times as shown by the dotted line in figure 5.5.a.

In summary, when the parameter R is small two evolutions are possible depending on the initial aspect ratio α_0 : either, as in case I of the experiment, the vertical size of the vortex is initially comparable to (or smaller than) δ and it stays so following adiabatically the evolution of δ ; or, as in case II, the vertical scale is initially larger than δ and the peel off of viscous layers of thickness δ is observed until $L_v \sim \delta$. In this case the time predicted by equation (5.10) for the duration of the first regime $T \sim Re^{1/2}L_{v0}/U \sim$

explain the vertical diffusion in a stratified far wake.

$\alpha_0 Re^{1/2} T_A$ ($\sim 17 T_A$), where T_A is the advection time L_h/U and α_0 is the initial aspect ratio, compares well with the observed time $T_{exp} \sim 15 T_A$ (estimated from figure 5.5), in which the vertical scale decreases to the viscous scale $\delta \sim L_h Re^{-1/2}$ and then starts increasing slowly. Accordingly, the horizontal circulation in the mid-plane is first constant and then starts slowly decreasing by diffusion.

5.5 Discussion and conclusions

A new mechanism responsible for the formation of small-scale vertical structure in strongly stratified fluids has been identified in the present study. This mechanism co-operates with the zigzag instability (Billant & Chomaz, 2000*a*) and with the kinematic decorrelation described by Lilly (1983) due to the independent advection of different horizontal layers and it allows us to propose two scenarii for the evolution of strongly stratified pancake turbulence based on the parameter $R = ReF_h^2$. This parameter can also be seen as the squared ratio of the buoyancy length scale $L_b = U/N$ to viscous length scale $\delta = L_h Re^{-1/2}$.

If we consider a strongly stratified flow with R smaller or equal to order unity (i.e. $\delta \gg L_b$) and initially L_v larger than δ, then the mechanism described here with creation of free "boundary" layers of thickness δ should occur because there are no forces that counteract the viscous strain force. Through this mechanism the vertical thickness should rapidly decrease to δ on a time scale $\alpha_0 Re^{1/2} T_A$ and then follow viscous evolution. The flow dynamics follows the Riley, Metcalfe & Weissman (1981) leading order equations :

$$\frac{D_h \mathbf{u}_h}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}_h p + \frac{1}{\alpha^2 Re} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial z^2} , \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \mathbf{u}_h = 0 . \tag{5.12}$$

equivalent to the rescaled equations (5.6) and (5.8). Differentiating versus z we get

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} + \mathbf{u}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}_h \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} \cdot \boldsymbol{\nabla}_h \mathbf{u}_h = -\boldsymbol{\nabla}_h \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\alpha^2 Re}\frac{\partial^3 \mathbf{u}_h}{\partial z^3} \tag{5.13}$$

The term $\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} \cdot \boldsymbol{\nabla}_h \mathbf{u}_h$ bears some resemblance to the stretching term of the usual unstratified vorticity dynamics —it is analogous to the gradient enhancing term for the advection of a passive scalar (see e.g. Batchelor, 1967). This straightforward consideration similar to the ideas of Lilly (1983) and Majda & Grote (1997) explains the increase of the vertical shear on a time scale T_A, the turn-over time of the vortices, due to the evolution of each layer independently, if $L_v \gg \delta$. However, these layers no longer evolve independently when the vertical length scale reaches the viscous scale $L_v \sim \delta$ such that $\alpha^2 Re \sim 1$. At this time viscous effects come into play and limit the decrease of the layer thickness.

In contrast, when $R \gg 1$, i.e. $\delta \ll L_b$, viscous effects are negligible and, even if the initial vertical scale is large, the buoyancy length scale L_b is imposed on a time scale T_A, either through the kinematic mechanism invoked above or through three-dimensional (3D) instabilities such as the zigzag instability. In this inviscid regime, once the vertical scale is down to the buoyancy length scale, equations (5.11) and (5.12) (with $Re \to \infty$) should be replaced by the continuous shallow-water equations proposed by Billant & Chomaz (2000*b*, 2001). The dynamics may escape this attractor if the assumption of large horizontal scale compared to buoyancy length scale (i.e. small horizontal Froude number) is relaxed. Indeed, when the vertical scale is close to L_b the vertical shear may dominate over the stratification and the flow may become unstable to Kelvin-Helmholtz modes that generate small horizontal scales as observed in recent numerical simulations of Riley & deBruynKops (2003). The turbulence so generated would induce a decrease of the R parameter as a result of the decreasing buoyancy length scale L_b and the increasing viscous length scale δ until, eventually, $R \sim 1$ ($L_b \sim \delta$) and the viscous regime described above would take over. Thus, the final vertical scale is solely determined by viscosity and equals δ.

The late time evolution of strongly stratified flows often observed in laboratory experiments pertains to this final small R regime. This may explain experimental observations where the vertical length scale has been reported independent of the Froude number (or the Brunt-Väisälä frequency) (e.g. Fincham *et al.*, 1996; Bonnier *et al.*, 2000). We propose that strongly stratified decaying turbulence should ultimately obey a unique scaling law defined by viscosity and independent of the stratification. However, the route to reach this dynamical attractor will vary depending on the initial values of R and the aspect ratio. If now the turbulence were forced and not freely decaying, we may further conjecture that the energy distribution in scale should witness not only the final viscous attractor, but also the different routes to reach it. A cascade model involving the kinematic effect, the zigzag and Kelvin-Helmholtz instabilities and the viscous decorrelation of layers remains to be invented.

RGD gratefully acknowledges support from CONACyT-México.

Chapitre 6

Ondes de gravité internes dans un écoulement dipolaire

Ce chapitre reprend l'article : Godoy-Diana R., Chomaz J.M. and Donnadieu C. (2004) Internal gravity waves in a dipolar pancake wind. Soumis au *Journal of Fluid Mechanics.*

Abstract

An experimental study on the interaction of the internal wave field generated by oscillating cylinders in a stratified fluid and a pancake dipole is presented. The experiments are carried out in a salt-stratified water tank with constant Brunt-Väisälä frequency (N). The dipolar field through which the waves propagate induces a varying Doppler shift on an incoming wavepacket. As predicted by classical wave theory and despite the horizontal inhomogeneity of the flow and the strong vertical variation of the velocity profiles, singular levels appear when the wave frequency ω_r measured in the frame of reference moving with the fluid approaches 0 or N. These values correspond, respectively, to the ray theory predictions for a critical layer and a turning point in the wave propagation. Experimental observations of the deformation of the wave beams due to the interaction with the dipole are presented. A turning point was observed in some cases where the horizontal projection of the wave vector points in the opposite direction to the translation velocity of the dipole (counter-propagating case). In the opposite situation of a horizontal wavevector and a translation velocity of the dipole pointing in the same direction (co-propagating case), a critical layer was observed. The observations are in good agreement with a two-dimensional ray-theoretical model even if the hypothesis of slow variation assumed in the WKB approximation is not verified by the vertical shear of the dipolar mean flow. Three-dimensional effects of the dipolar velocity field on the propagating internal waves are also discussed. In particular focusing and refraction of a wave beam occurring due

to the horizontal structure of the background dipolar flow allow to explain some of the observed features that cannot be accounted for through the two-dimensional ray theory. The defocusing effect due to 3D ray propagation may explain why the measured energy transfer from the waves to the dipole stays weak, even when the waves encounter a critical layer.

6.1 Introduction

Stably stratified fluids are often encountered in the atmosphere and ocean. Due to the inhibition of vertical motions, they give rise to layered flows supporting distinct internal wave modes and potential vorticity modes (Riley, Metcalfe & Weissman, 1981; Lilly, 1983; Riley & Lelong, 2000). The time scales relevant to these two types of motion separate when the stratification is strong : internal waves propagate on a fast time scale based on the buoyancy frequency ($T_N = N^{-1}$) and are associated with zero potential vorticity while a slower time scale in terms of the horizontal advection ($T_A = L_h/U$, where L_h and U are the horizontal length and velocity scales) characterizes the evolution of the quasi-horizontal motions that possess potential vorticity (PV modes, using the terminology of Riley & Lelong, 2000). An illustration of the difference between these two modes can be observed when the motion is initially confined to a particular region of space : as vertical motions are suppressed, energy is either radiated as internal waves, which propagate away from the initially turbulent region, or transferred to horizontal advective motions, which are finally organized as quasi-two-dimensional vortices. The creation of these patches of potential vorticity has been widely observed in laboratory experiments (e.g Lin & Pao, 1979; Bonneton, Chomaz & Hopfinger, 1993; Fincham, Maxworthy & Spedding, 1996) and numerical simulations (e.g. Métais & Herring, 1989; Majda & Grote, 1997). The so-called *pancake* vortices appearing late in the evolution of stratified flows have also been intensively studied (Flor & van Heijst, 1996; Spedding, Browand & Fincham, 1996*a*; Bonnier, Eiff & Bonneton, 2000; Beckers, Verzicco, Clercx & van Heijst, 2001; Godoy-Diana & Chomaz, 2003).

The horizontal Froude number $F_h = U/NL_h$ compares the horizontal advection time scale L_h/U to the Brunt-Väisälä frequency. When F_h is small, the theory first proposed by Riley *et al.* (1981) predicts no interaction at leading order between the wave modes and the PV modes. Because of the time scale separation, the interaction between internal gravity waves and PV modes has been usually studied as a multiple scale problem (the wave phase varies on a fast time scale while its amplitude and the PV mode depend only on a slow time scale) and weakly nonlinear interactions have been predicted theoretically (see e.g. Riley & Lelong, 2000). These are resonant triad interactions as those first studied by Phillips (1966) for internal waves but involving one or two PV modes in the triad. In the case of a single PV mode and two wave modes, no wave-PV transfer is predicted

and the PV mode only provides a way for the energy exchange between the two wave modes (Lelong & Riley, 1991; Godeferd & Cambon, 1994). On the contrary, when the triad is formed by one wave mode and two PV modes, a near-resonant PV-wave transfer can be expected (Bartello, 1995). Additionally, PV modes can act as a source of internal waves through adjustment of unbalanced isopycnal surfaces to an equilibrium state (see e.g. Beckers *et al.* (2001) for numerical simulations of the wave emission by an unbalanced monopole and Afanasyev (2003) for experimental results of the emission by an adjusting dipole). An unbalanced vortex can be treated as an initial disturbance to the stratified fluid and the internal wave emission described as in Lighthill (1996). The permanent internal wave emission by a balanced but nonstationary vortex has been analyzed as a radiation problem by Plougonven & Zeitlin (2002) allowing for changes in the source vortex induced by wave radiation.

Internal waves are known to have a fundamental role in the momentum transfers in the atmospheres and, through wave breaking, in the diapycnal mixing in the oceans (see the recent review by Staquet & Sommeria, 2002). The internal wave energy transfer to PV modes has been invoked thinking of breaking internal waves, which may cause strong mixing and result in a three-dimensional turbulent region from which a PV component can emerge (Staquet, Bouruet-Aubertot & Koudella, 2001). These dissipative mechanisms are generally the only wave-mean flow interaction considered in the gravity wave parametrizations used in global atmospheric circulation models, assuming that other interactions occurring without wave breaking (or other dissipative mechanism allowing a suitable representation as a mean force) are not significant. Bühler & McIntyre (1998, 2003) put a question mark on these assumptions through the analysis of model examples showing that cumulative deformation of PV components (the mean flow) due to non-dissipative gravity waves may occur and name this effect of wave refraction a remote recoil.

The effect of the mean flow on the waves is usually understood by referring to the Doppler shifting of the wave frequency. The Doppler shift of waves due to a shear flow has been subject to many theoretical studies (e.g. Bretherton, 1966; Booker & Bretherton, 1967), laboratory experiments (e.g. Koop, 1981; Thorpe, 1981) and numerical simulations (e.g. Winters & D'Asaro, 1994; Javam, Imberger & Armfield, 2000; Sutherland, 2000). The case where the background shear is a vortical flow has also been studied (see e.g. Moulin, 2003, for experiments and a WKB model of wave-vortex interactions in a stratified rotating fluid). According to linear theory, critical levels exist where the shifted frequency reaches one of the cut-off values imposed by the stratification (0 and N in the absence of rotation) and the waves are either absorbed by the mean flow in a *critical layer* or reflected at a *turning point* (figure 6.1). In the linear analysis of Booker & Bretherton (1967), plane internal waves of small amplitude are completely absorbed by the mean flow in the vicinity of a critical layer. They showed an exponential attenuation of the waves across the critical layer of order $\exp[-2\pi(Ri - 1/4)^{1/2}]$ in terms of the local Richardson

number $Ri = N^2/|d\mathbf{u}/dz|^2$, meaning that for $Ri > 1/4$ no part of the incoming wave is transmitted through the critical layer and all the wave energy is lost to the mean flow. The linear inviscid prediction of complete absorption at the critical level may not be fully accomplished in real flows because finite amplitude effects may lead to a partial reflection (e.g. Winters & D'Asaro, 1994) or to wave breaking (McIntyre, 2000). In reality spatially-localized wave packets should be considered instead of plane waves. As a result, the dispersion of the different components in a wave packet induces a spreading of the critical levels (see e.g. McIntyre, 2000) and some waves are transmitted carrying a significant fraction of the incoming wave energy through the critical layer (Javam & Redekopp, 1998). A three-dimensional background shear may also reduce the magnitude of critical-level effects with respect to the predictions of the usual models that consider unidirectional parallel shear (Staquet & Sommeria, 2002). Additionally, as pointed out by Broutman, Macaskill, McIntyre & Rottman (1997), the time-dependence of the background shear may change significantly the Doppler spreading of internal waves observed in a stationary shear.

In this paper we study experimentally the interaction between the internal wave field produced by an oscillating cylinder in a strongly stratified fluid and a pancake dipole, representing a prototypical PV mode. The observations are first interpreted in terms of ray theory for waves in a shear flow (e.g. Bretherton, 1966). The internal wave beams are refracted by the dipole (which constitutes the background flow) and the existence of critical levels for the wave propagation is verified by the experiments. A Particle Image Velocimetry (PIV) measurement setup gives access to the velocity vector fields in vertical (xz) and horizontal (xy) planes and permits the calculation of the theoretical predictions for the critical levels using experimental data. The linear inviscid WKB approximation at the base of ray theory assumes waves propagating in a slowly varying background flow (meaning that variations occur on much larger length and time scales than the wavelength and wave period). This scale separation assumption implies that, at leading order, the dispersion relation for internal waves in a steady medium is locally valid. Although the assumption of weak variation cannot be really verified for the vertically sheared flow produced by the pancake dipole of the present experiments, especially regarding the ratio of wavelength to vertical length scale of the vortical flow, which are of comparable order, the location of a critical layer and a turning point observed in the experiments are predicted surprisingly accurately by a two-dimensional (2D) ray-theoretical model. The 2D model considered is strictly valid only in the vertical symmetry plane (xz) of the dipolar field, where the dipole moves in the x direction and gravity is directed in the $-z$ direction. Because of the three-dimensional nature of the dipole field, additional features are observed in the wave propagation which cannot be explained by the 2D model. The initially straight phase planes of the waves (which are generated by a cylinder with axis in the y direction, i.e. orthogonal to the 2D plane used for the ray model) are deformed in the

horizontal planes by the dipole. Refraction and focusing effects occur on an internal wave beam, which are inherently three-dimensional (3D). A defocusing effect occurs when the wave and the dipole propagate horizontally in the same direction and may explain why the flux of momentum from the wave to the vortex is negligible in the present experiment.

The present paper is organized as follows : A brief review of the linear theory of internal gravity waves is presented in section 2. The experimental setup is described in section 3 followed by the presentation of the basic states for the experimental waves and dipoles in section 4. Section 5 is devoted to the observations and discussion. Concluding remarks appear in section 6.

6.2 Linear theory for internal waves

In this section we review briefly some standard results of the linear theory for internal gravity waves in a continuously stratified fluid with a background sheared flow as discussed by Lighthill (1978) and Gill (1982). Consider sinusoidal waves of frequency ω and wavevector $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ such that all fields associated with their motion can be written as $\propto \exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)]$. The well-known dispersion relation for internal waves in a medium at rest of constant buoyancy frequency N,

$$\omega^2 = N^2 \cos^2\theta = N^2 \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \ , \tag{6.1}$$

where θ is the angle of the wavevector $\mathbf{k}$ with respect to the horizontal and $k = |\mathbf{k}|$, is obtained from the Boussinesq equations linearized about a background hydrostatic equilibrium. We remark that the phase velocity

$$\mathbf{c} = (\omega/k^2)\mathbf{k} \tag{6.2}$$

is orthogonal to the group velocity

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega = \frac{N k_z}{k^3 (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}} \left(k_x k_z,\ k_y k_z,\ -k^2 + k_z^2\right) \ , \tag{6.3}$$

and energy therefore propagates perpendicularly to the wavevector, i.e. in the phase plane. An energy flux vector can be written as

$$\mathbf{I} = E\mathbf{c}_g \ , \tag{6.4}$$

in terms of the wave energy density E and the group velocity.

When N is not constant or a background shear $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ is considered, the WKB approximation can be used if $N(\mathbf{x}, t)$ and $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ vary in time and length scales respectively much larger than the wave period and wavelength. In such case, the waves obey locally

the dispersion relation (6.1) in the reference frame moving with the fluid. If we now think of waves propagating through a mean flow $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, we can write an expression for the *absolute* wave frequency ω_a (measured in the fixed frame of reference) which is Doppler-shifted with respect to the *relative* frequency ω_r (measured in the frame moving with the background velocity) according to

$$\omega_a = \omega_r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} \ , \tag{6.5}$$

where ω_r is given by equation (6.1) substituting ω by ω_r, pointing out the fact that in the frame of reference moving with the fluid the waves are dispersed in the same manner as in a fluid at rest. Similarly, the absolute group velocity $\mathbf{c}_{ga}$ in the fixed frame is

$$\mathbf{c}_{ga} = \mathbf{c}_{gr} + \mathbf{U} \ , \tag{6.6}$$

where $\mathbf{c}_{gr}$ is the group velocity in the frame moving with the mean flow given by (6.3) with $\mathbf{c}_{gr}$ in place of $\mathbf{c}_g$. It should be noted that the absolute phase velocity $\mathbf{c}_a$ given by

$$\mathbf{c}_a = \mathbf{c}_r + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}}{k^2} \mathbf{k} \ , \tag{6.7}$$

where $\mathbf{c}_r$ is given by (6.2), is no more orthogonal to the absolute group velocity. The phase velocity does not transform as a usual vector in a change of reference frame because it characterizes only the apparent displacement of isophase surfaces and should therefore keep being normal to the isophases in any frame.

Due to the nonhomogeneity, the wave energy that propagates at the group velocity $\mathbf{c}_g$ is refracted following paths usually known as rays. These rays can be traced in the absolute frame of reference by a position vector $\mathbf{x}$ that moves with the absolute group velocity, i.e. obeying

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{c}_{ga} \ , \tag{6.8}$$

while the changes in the wavevector along these rays are given by (see Lighthill, 1978, for details)

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\nabla \omega_a \ . \tag{6.9}$$

In this equation, the time derivative should be considered along a ray and is equivalent to the rate of change with time at a position that moves with the group velocity, i.e.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{c}_{ga} \cdot \nabla) \ . \tag{6.10}$$

Using these *ray tracing* equations (6.8) and (6.9) one may show that the time derivative of $\omega_a = \omega_a(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ is zero, i.e. that the frequency is constant along a ray. Because ω_a remains

constant, any change in $\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}$ is accompanied according to equation (6.5) by a change in ω_r, which in turn modifies the wave vector direction according to equation (6.1). Equations (6.8) and (6.9) can be rewritten to account for the background wind using (6.5) as :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U} + \mathbf{c}_{gr} \ , \tag{6.11}$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\nabla(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}) - \nabla\omega_r \ . \tag{6.12}$$

Equation (6.11) states that the wave propagates with the absolute group velocity equal to the sum of the mean flow velocity vector and the relative group velocity. In addition, to the evolution of the wavevector due to changes in the local dispersion relation (i.e. changes in N), second term in equation (6.12), one must add the changes due to the background shear, first term in equation (6.12).

In contrast to the absolute frequency, the frequency in the moving frame ω_r is not conserved, nor is the mean wave energy along a ray E_r (because energy can be exchanged between the waves and the mean flow). A useful conserved quantity along rays is the *wave action* $\mathcal{A}_r = E_r/\omega_r$, which obeys :

$$\frac{\partial\mathcal{A}_r}{\partial t} + \nabla\cdot[(\mathbf{U}+\mathbf{c}_g)\mathcal{A}_r] = 0 \ . \tag{6.13}$$

The conservation of wave action determines a synchronized behaviour of the relative frequency and wave energy density : E_r increases (decreases) when the ray passes through a region of higher (lower) ω_r. The change in wave energy is provided (absorbed) by the mean flow. Equation (6.13) is simplified for waves of fixed frequency and for steady base state, as those that we will consider throughout this paper, giving

$$\nabla\cdot[(\mathbf{U}+\mathbf{c}_g)\mathcal{A}_r] = 0 \ . \tag{6.14}$$

This means that the flow of wave action along a *ray tube* is constant, i.e. that the magnitude of the *wave action flux* $(\mathbf{U}+\mathbf{c}_g)\mathcal{A}_r$ changes along a ray tube in inverse proportion to the area of its cross section.

6.2.1 Critical levels for two-dimensional waves

Two limit cases of particular interest can be illustrated considering the simple case of waves in a vertically sheared horizontal background flow $\mathbf{U} = \mathbf{U}(z)$ and linear background stratification, that is, of constant N. Together with ω_a, in such configuration k_x and k_y are also constant along a ray since the flow is invariant by translation in time and in the x and y directions. In that case, the Doppler shift of ω_r can be determined solely by equation (6.5) which can be rewritten as $\omega_r = \omega_a - \mathbf{k}_h\cdot\mathbf{U}$, where $\mathbf{k}_h \equiv (k_x, k_y, 0)$ is the horizontal

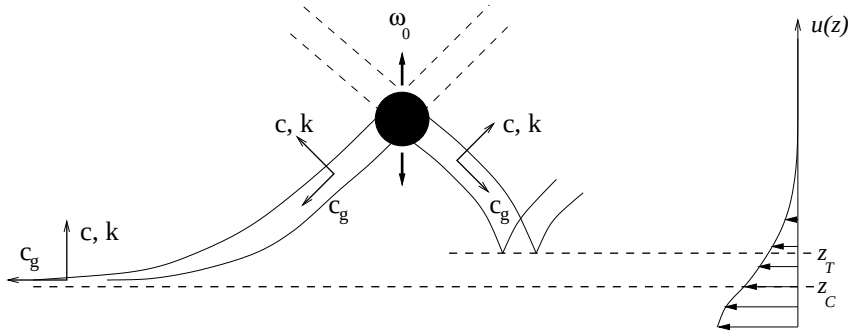


FIG. 6.1 – Schematic diagram of the internal waves generated by an oscillating cylinder in a sheared flow. Critical points are reached at z_C and z_T.

wavevector. If $\mathbf{k}_h$ and $\mathbf{U}$ point in opposite directions, equation (6.5) determines that an increase in $\mathbf{k}_h \cdot \mathbf{U}$ increases the intrinsic frequency ω_r. Using the relative dispersion relation (6.1), this results in a decrease of θ, i.e. a tilt towards the horizontal of the wavevector $\mathbf{k}$. A *turning point* exists at $z = z_T$ where

$$\omega_r = \omega + |\mathbf{k}_h \cdot \mathbf{U}(z_T)| = N \tag{6.15}$$

(and $k_z = 0$) since waves are not allowed by the stratification beyond that point and the wave beam is reflected. The other limit case appears when $\mathbf{k}_h$ points in the same direction as $\mathbf{U}$. A *critical layer* exists at $z = z_C$ where ω_r vanishes :

$$\omega_r = \omega - |\mathbf{k}_h \cdot \mathbf{U}(z_C)| \to 0 \tag{6.16}$$

and, $\mathbf{k}_h$ being constant, $k_z \to \infty$ as $\theta \to \pi/2$. The linear inviscid analysis is singular at this point, but relaxing the WKB approximation the wave energy at the critical level is found to be attenuated and an energy transfer from the wave to the mean flow is predicted (Booker & Bretherton, 1967). This is actually a consequence of the conservation of the wave action, which implies that where $\omega_r \to 0$ all the wave energy is lost to the mean flow.

Both cases are illustrated schematically in figure 6.1, where the beams emanating from an oscillating horizontal cylinder in a vertically sheared background flow are represented (see also Koop, 1981). The time evolution of the vertical component of the wavevector is obtained from equation (6.12), it reads :

$$\frac{dk_z}{dt} = -\mathbf{k}_h \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \ . \tag{6.17}$$

This equation shows that changes in k_z are linear with time, which means that the turning point (where $k_z = 0$) can be reached in a finite time, whereas the time to reach the critical layer (where $k_z \to \infty$) is infinite. The latter means that rays are asymptotic to the critical

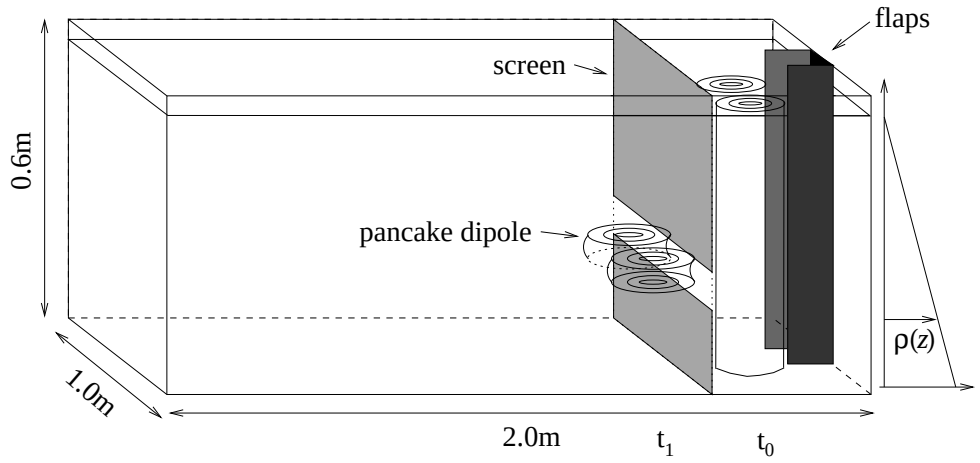


FIG. 6.2 – Experimental setup used to produce a pancake dipole. At time t_0 a columnar vortex pair is created by closing the vertical flaps on the right. At time t_1 the pancake dipole emerges from the open region of the screen. Dimensions of the tank and a qualitative plot of the linear density gradient are also shown. (From Godoy-Diana *et al.* (2004))

layer. The amplitude variations can be inferred from equation (6.14) for the wave action flux. Together with the fact that sections of a ray tube by each horizontal plan have the same area —because $\mathbf{k}_h$ is constant along a ray, Lighthill (1978),— this equation implies that the vertical component of the wave action flux is also constant along a ray. For the internal waves of the present case, using (6.1) and the third component of (6.3) (i.e. $\partial\omega_r/\partial k_z$), this vertical component of the wave action flux $\mathcal{A}_r\partial\omega_r/\partial k_z$ is found to be proportional to $W^2\tan\theta$, where W is the amplitude of the vertical velocity (and hence $E_r \propto W^2$). This result implies that wave amplitudes diminish when the rays approach the critical layer, whereas they are increased when the rays bend towards the vertical prior to reaching the turning point.

6.3 Experimental setup

The experiments are conducted in a salt water tank of 1m x 2m base and 0.6m height prepared with a linear stratification. Internal waves are generated by means of either one or an array of oscillating horizontal cylinders, which can be placed at different heights and horizontal positions. For frequency below N each cylinder generates the well-known St. Andrew's cross pattern of wave beams (see e.g. Mowbray & Rarity, 1967) with direction of propagation depending on the oscillation frequency of the cylinders ω according to the dispersion relation (6.1), $\cos\theta = \omega/N$. The width of each wave beam is comparable to the source size (i.e. the cylinder diameter) and grows very slowly with distance from the source, whereas the amplitude of the wave motions is determined by the amplitude of the

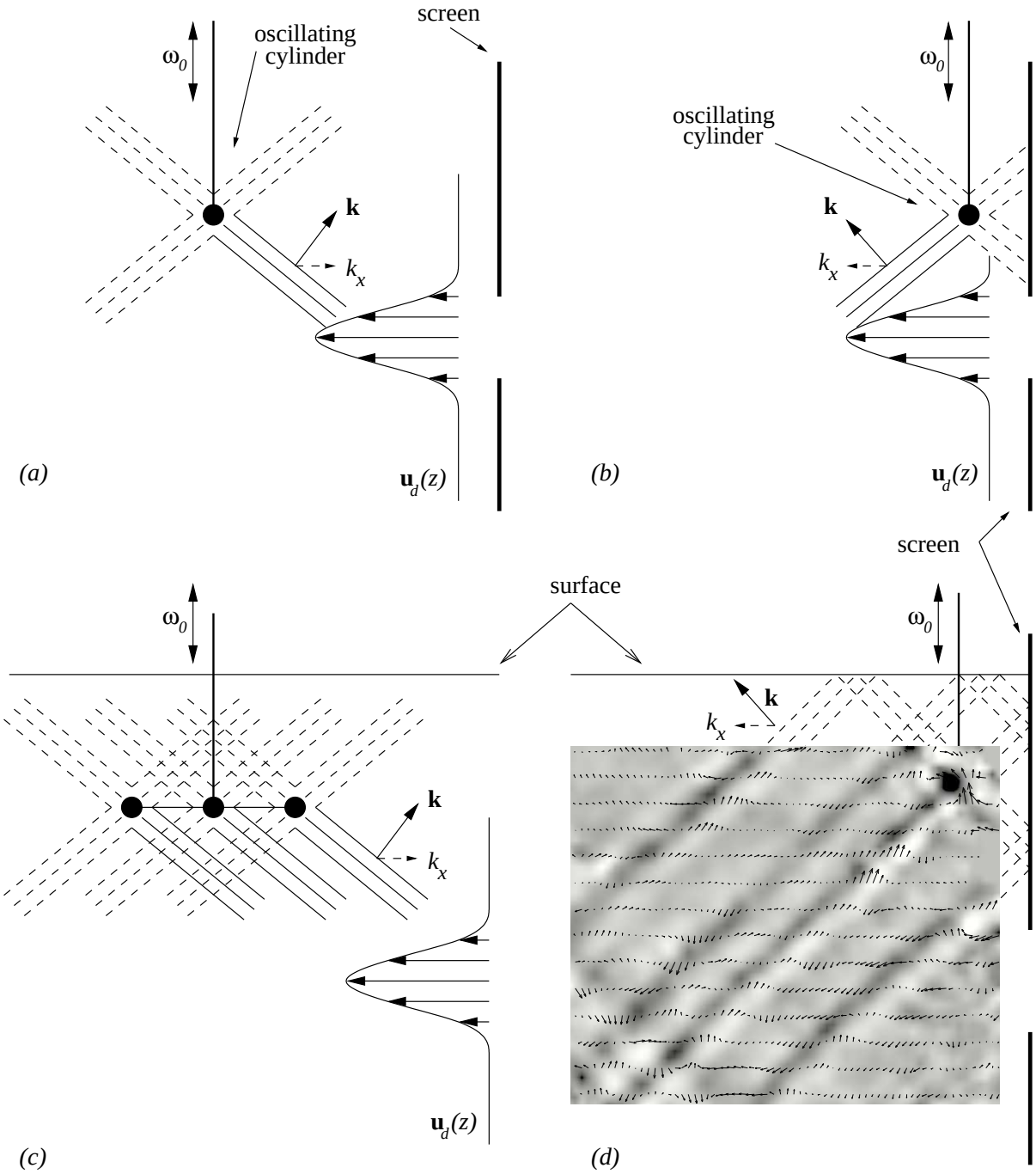


FIG. 6.3 – (a) and (b) Schematic diagrams of the position of the oscillating cylinder with respect to the path of the dipole. Two cases are shown where the horizontal projection of the wavevector k_x of the relevant ray and the translation direction of the dipole $\mathbf{u}_d$ are (a) antiparallel and (b) parallel. (A side view of the vertical simmetry plane of the dipole is shown where $\mathbf{u}_d$ represents a profile of the dipole velocity). (c) Diagram of the actual setup used with an array of three identical cylinders. (d) PIV measurements showing the horizontal vorticity field in grey scale and the velocity vectors as arrows on a vertical plane of the internal wave pattern after reflection of the direct beams of a single cylinder on the screen and the free surface. The paths followed by the reflected beams are drawn schematically.

cylinder oscillations (see e.g. Sutherland, Dalziel, Hughes & Linden, 1999, for a detailed study of the structure of the internal wave beams generated by a vertically oscillating cylinder).

A pancake dipole is generated in two steps as shown schematically in figure 6.2 (Godoy-Diana, Chomaz & Billant, 2004) : first, a pair of vertical flaps placed on one side of the tank and spanning its whole height close to form a columnar dipole (Billant & Chomaz, 2000*a*). The upper and lower layers of the initial dipole are blocked by a vertical screen placed perpendicularly to its moving path. The screen acts as a diaphragm which allows the evolution of only a horizontal slice of the original dipole. This method renders repeatable structures and ensures a unique propagation direction of the dipole, an advantage over the usual setups where the path followed by dipoles generated after the collapse of an initially turbulent jet is less predictable. Three nondimensional control parameters can be defined for the dipole coming out of the screen : the Reynolds number $Re_0 = U_0 L_{h0}/\nu$, the horizontal Froude number $F_{h0} = U_0/NL_{h0}$ and the aspect ratio $\alpha_0 = L_{v0}/L_{h0}$, where U_0, L_{h0} and L_{v0} are, respectively, the initial translation speed and the horizontal and vertical length scales, and where ν is the kinematic viscosity. In practice, we define the horizontal length scale L_{h0} as the dipole radius, which is initially determined by the size of the flaps. The dipole translation speed U_0 can be controlled by the closing speed and final angle of the flaps while the initial vertical length scale L_{v0} is determined by the height of the gap on the screen. For the present experiments these parameters have been kept within the ranges of $F_{h0} = 0.06 - 0.18$, $Re_0 = 131 - 182$ and $\alpha_0 = 0.4 - 1.2$. All the observations are made after the dipole has crossed the diaphragm, so $t = 0$ is defined when the maximum velocity region at the core of the dipole is out of the screen (t_1 in figure 6.2, defined as 30s after the closing the flaps).

Two different configurations were used in order to allow for interaction of the dipole with : (a) waves with horizontal component of the wave vector k_x pointing in the opposite direction to the translation velocity of the dipole (*counter-propagating* case, figure 6.3.a) and (b) with k_x pointing in the same direction (*co-propagating* case, figure 6.3.b). Only one cylinder is depicted in these schematic diagrams for clarity. In the actual setup of case (a), an array of three identical cylinders separated horizontally of each other by a distance of six times their diameter was used to create a more extended wave field (figure 6.3.c). In case (b), a single cylinder was used because of the lack of space due to the presence of the screen. Several beams are nonetheless present in the test section due to the multiple reflections on the screen and the free surface (figure 6.3.d).

A 2D Particle Image Velocimetry (PIV) system —FlowMaster 3S manufactured by La Vision— was used to measure the velocity field. The image acquisition in this system is made by a double-frame camera with resolution of 1280 x 1024 pixels and a 12-bit dynamic range. The light flashes were generated by chopping a continuous beam 5W Argon laser with an optoacoustic switch. The laser beam was spread into a sheet by an

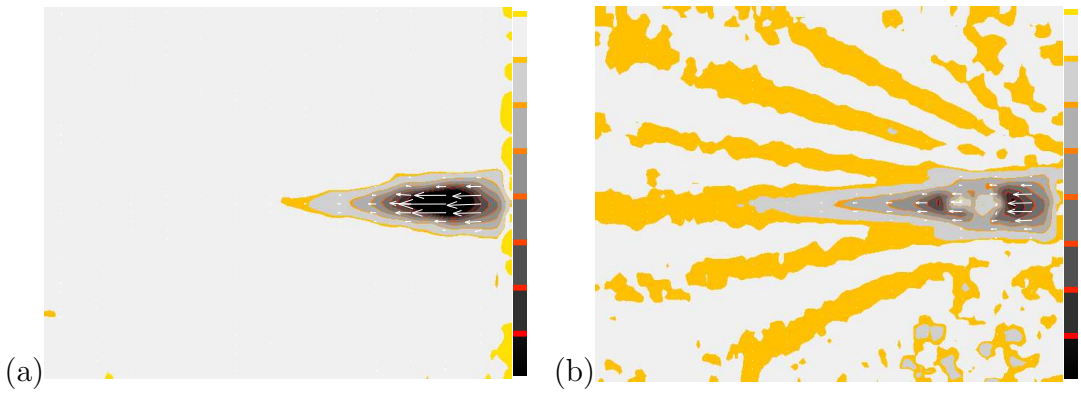


FIG. 6.4 – Horizontal velocity field at the vertical symmetry plane of the dipole at $t = 0$ calculated from PIV images with (a) $\Delta t = 50$ms and (b) $\Delta t = 250$ms.

array of cylindrical lens at the end of an optic fiber. The thickness of the light sheet was approximately 5mm at the region of interest. Two measurement setups were used in order to look at vertical and horizontal planes. The vertical plane was aligned with the propagation direction of the dipole, passing through the velocity maximum and cutting symmetrically the dipole in two halves. The horizontal plane was placed at the position of maximum velocity, i.e. at the midplane. In both cases, TiO_2 particles were used as flow seeding. These particles are slightly heavier than the salt-water at the bottom of the stratification, but they sediment very slowly (in several hours) so that, for the timescales used for the PIV shots, they can be reasonably regarded as neutrally buoyant throughout the whole height of the experimental tank. The choice of the optimal time (Δt) between each pair of images used to calculate the correlation and therefrom the velocity field had to be done carefully since the characteristic velocities associated with the waves and the vortex differ considerably (from $\sim 10^{-3}$m s^{-1} for the wave motions to $\sim 10^{-2}$m s^{-1} for the initial dipole). Two acquisition schemes were used in order to have an appropriate resolution for both velocity scales. Most image series were taken using a single-frame mode and $\Delta t = 200$ and 250ms, allowing for the identification of the internal wave velocity field. Additionally, double-frame sequences with $\Delta t = 50$ and 100ms were used in order to measure the dipole velocity field at the initial stages which could not be resolved with the former acquisition scheme. The need for such different schemes is illustrated in figure 6.4, where the velocity field of the dipole at $t = 0$ on the vertical symmetry plane is shown as measured with acquisitions where $\Delta t = 50$ms (figure 6.4.a) and $\Delta t = 500$ms (figure 6.4.b). In the former, the dipole field is fully recovered but no waves can be seen, whereas in the latter no valid correlation peak could be calculated at the center of the dipole but the internal wave pattern produced by the adjustment of the initial dipole is clearly retrieved.

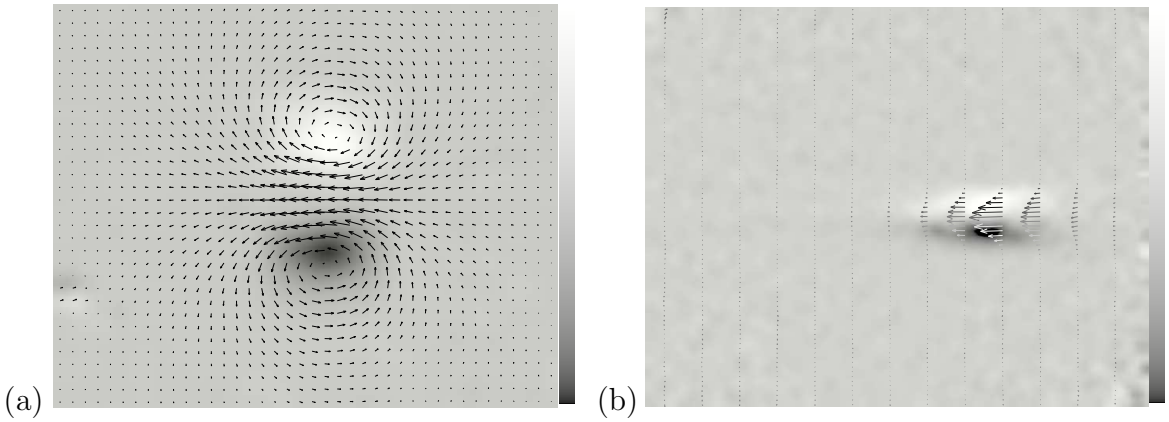


FIG. 6.5 – Velocity vector fields calculated from PIV measurements in the horizontal midplane (a) and the vertical symmetry plane passing through the moving direction of the dipole (b). Vertical (a) and horizontal (b) vorticity fields are shown as background images.

6.4 Basic states

The initial state for the pancake dipole at the exit of the diaphragm is presented in figure 6.5. Velocity vector fields calculated from the PIV measurements in the horizontal midplane and in the vertical symmetry plane passing through the moving direction of the dipole are shown. The calculated vorticity fields are also shown as background images. The horizontal structure of the dipole closely resembles a Lamb-Chaplygin dipole (as in Billant & Chomaz, 2000*a*), while the vertical structure can be accurately fitted by a gaussian variation. The vertical and horizontal characteristic length scales that can be defined from these images (e.g. the dipole radius for the horizontal and the gaussian half-width for the vertical) grow slowly as the dipole decays by the action of viscosity (see Godoy-Diana *et al.*, 2004), but the structure form is maintained. Their initial values L_{h0} and L_{v0} together with the initial translation velocity U_0 are used to calculate the control parameters F_{h0}, Re_0 and α_0 defined in the previous section.

The basic internal wave field in the present experiments follows the well known St Andrews cross pattern emitted by an oscillating cylinder. The control parameters for each wave beam (figure 6.6.a) are the cylinder oscillation frequency ω and the wavenumber. In practice, the wavenumber can be characterized by the horizontal wavenumber and measured in different manners. As a first calculation, one can use the horizontal projection of the phase velocity (6.2) as $k_x = \omega/c_x$. The horizontal phase velocity c_x can be measured as the slope of the stripes that appear in a spatio-temporal diagram (figure 6.6.b). This calculation gives the most accurate measure of the dominant wavenumber, however, the beam cannot be appropriately represented by a single wavenumber, because it is quite narrow. The continuous wavenumber spectrum contained in a wave beam can be estimated

using Fourier Transforms in space of time series of measurements on a horizontal line (figures 6.6.c and 6.6.d). The vertical dashed line in figure 6.6.d corresponds to the value of k_x calculated with the phase velocity from the spatio-temporal diagram.

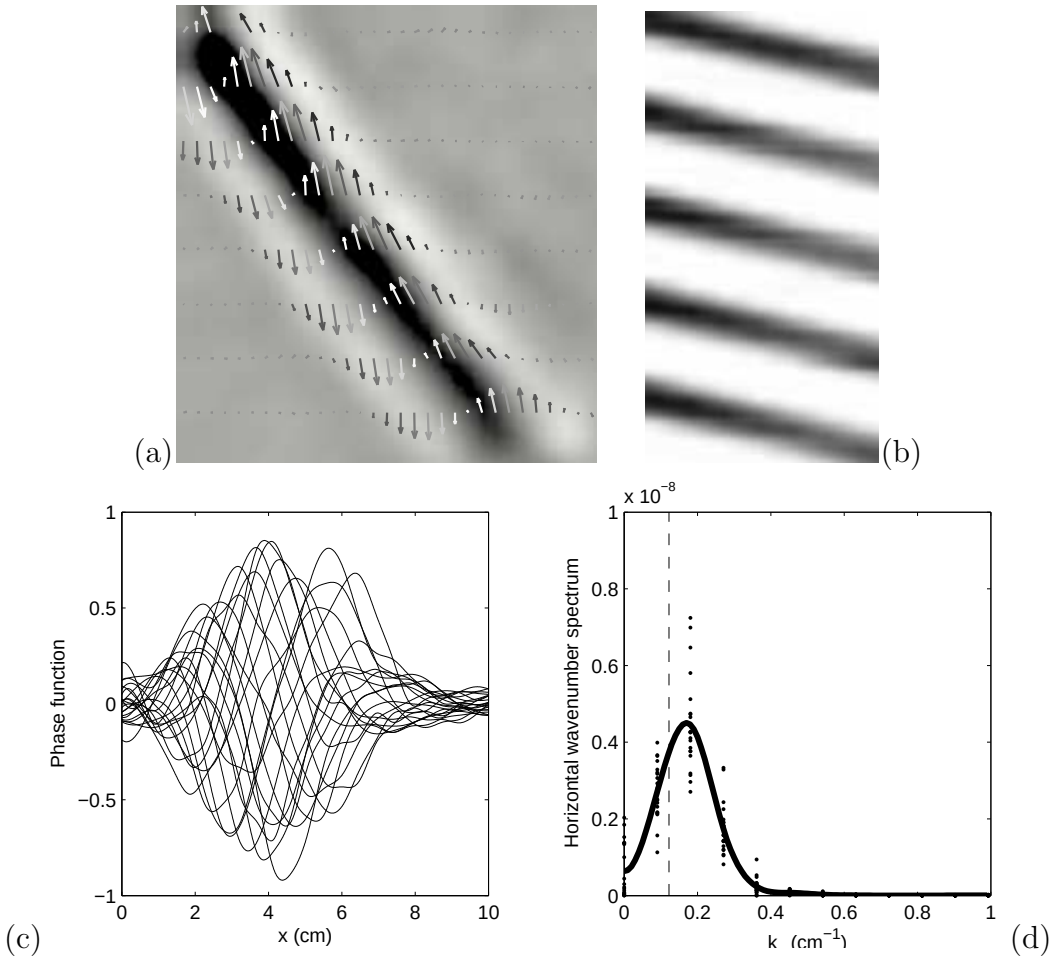


FIG. 6.6 – (a) PIV measurements on a vertical plane for one of the wave beams produced by an oscillating cylinder. Sets of vectors are shown with horizontal vorticity as background image. (b) Spatio-temporal diagram of a single horizontal line of (a) plotted in the abscissas versus time in the ordinates. The horizontal phase velocity is the slope of the dark and light stripes. (c) Plots of the phase function sampled on a horizontal line at a fixed height and different times throughout the wave cycle permit to visualize the wave packet. (d) Spatial frequency content of the phase functions in (c). The mean curve is plotted in solid line.

Various wave fields were used to observe different configurations of wave-vortex interaction. As hinted in the previous section, the basic design parameter was the choice of the direction of the horizontal wavevector of interest with respect to the translation velocity of the dipole, in practice determined by the position of the oscillating cylinder with respect to the screen that cuts the dipole. Co-propagating and counter-propagating situations permitted the study of regions where the wave frequency relative to the frame

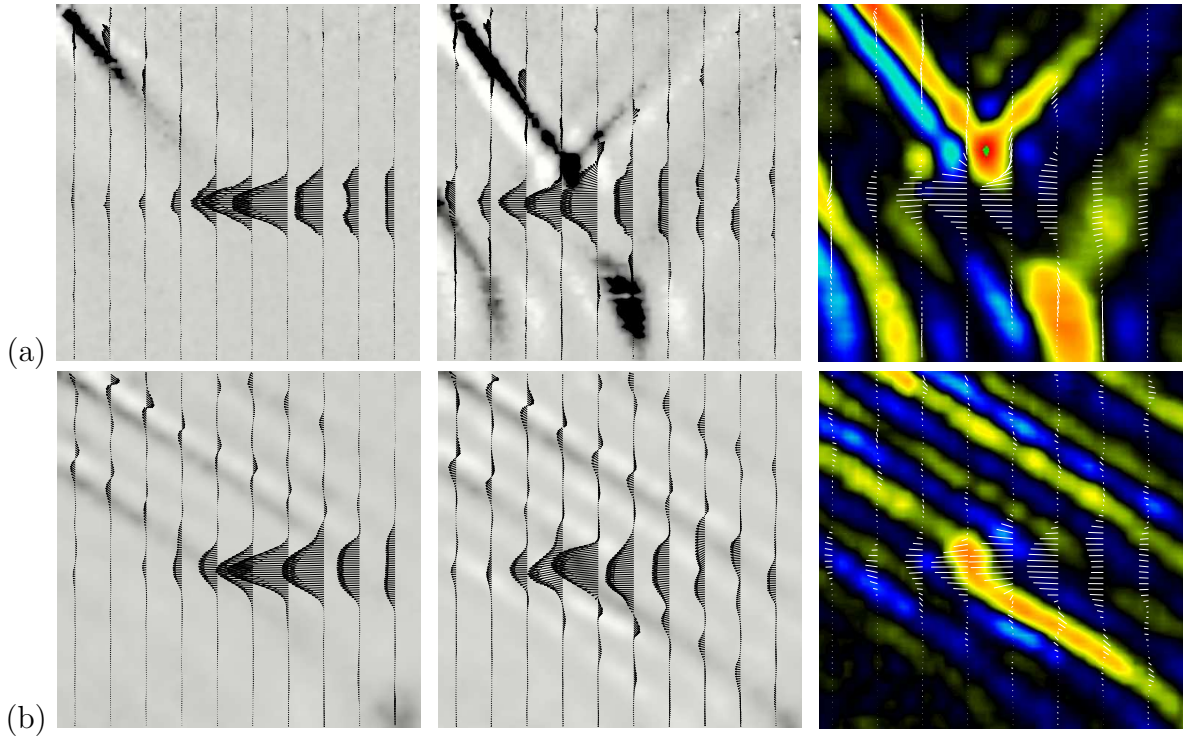


FIG. 6.7 – Velocity vectors and vertical velocity field obtained from PIV measurements on the vertical symmetry plane of the dipole. The cylinder generating the waves is out of the viewing field at the top-left corner and the oscillation has been started at $t = 30$s after the dipole was formed. The wave frequency is (a) $\omega = 0.2$ s^{-1} and (b) $\omega = 0.13$ s^{-1}. In both cases the first frame was taken at $t = 80$s and the second at $t = 115$s. The third frame is the same as the second with the vertical velocity drawn in color.

of reference moving with the dipole was, respectively, shifted towards 0 and N, searching for the corresponding critical level effects by tuning the wave frequency.

6.5 Interactions

6.5.1 Waves in the dipole field

In figure 6.7 we examine measurements on the vertical symmetry plane of the dipole for two cases with the setup described in figure 6.3.c, that is, with waves counter-propagating with respect to the dipole. All parameters are the same except for the internal wave frequencies of (a) $\omega = 0.2$ s^{-1} and (b) $\omega = 0.13$ s^{-1}, which determine the different angles of propagation with respect to the horizontal. The initial dipole parameters are $F_{h0} = 0.06$, $Re_0 = 131$ and $\alpha_0 = 0.4$. In both cases the vertical velocity u_z field and the velocity vectors are shown for times $t = 80$s (before the interaction) and $t = 115$s (after the waves have encountered the dipole). The second time is reproduced in a third frame

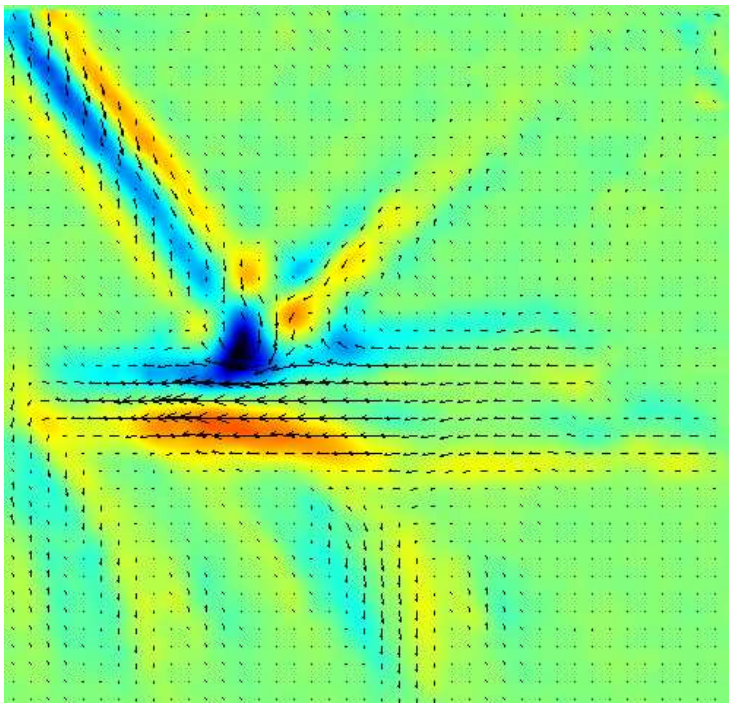


FIG. 6.8 – Velocity vectors and horizontal vorticity field for $t = 115$s and the same view as figure 6.7.

without the vectors to allow for a clearer picture of the u_z field. The vertical velocity field u_z is particularly appropriate to reveal the internal wave pattern because, for so small Froude numbers, the dipole has a vanishing contribution. In contrast, the dipole produces maximum values of the horizontal velocity up to an order of magnitude greater than the velocity maxima associated with the wave motion. In (a), at time $t = 80$s, the wave field emitted by the cylinder farthest on the right can be seen on the top-left corner (we will refer to it hereafter as the first beam), while the vector field reveals the core of the dipole at the center of the image. At time $t = 115$s, the first beam has encountered the dipole core and, remarkably, a reflection of the wave is observed. The wave beam produced by the middle cylinder (the second beam) is also visible on the bottom-left of the frame and is barely starting to be affected by the dipole. The absence of waves from the first beam in the layers where the dipole core is passing indicates an episode of total reflection. The wave train reappears below the dipole but it is distorted compared to the original wave. It exhibits a wider beam and a larger amplitude when compared to the waves of the second beam to its left, which did not interact with the dipole field. (A slight bending of both beams can be observed near the bottom of the image. This is due to a distortion of the linear background stratification caused by the proximity of the tank floor.) The reflected wave is best seen on the horizontal vorticity field (figure 6.8), where it can be seen that the reflected beam width (i.e. the dominant wavelength) is smaller than that of the direct

beam.

A radically different situation is observed in the case of lower frequency (figure 6.7.b). The waves are not reflected but a strong bending of the beam towards the vertical occurs when the beam passes through the dipole field. The beam under the dipole recovers the same direction it had before interacting with the dipole field but it should be noted that the wave amplitude is intensified (as shown in the third frame of figure 6.7.b, where the contrast between negative and positive vertical velocity which is higher on the beam under the dipole than above it).

We now examine the case of waves for which the horizontal component of the wave vector is in the same direction as the dipole velocity field, i.e. the co-propagating configuration of figures 6.3.b and d. In figure 6.9, the sequence presents both the velocity vector field as arrows and the vertical velocity in grey scale on the vertical symmetry plane of the dipole. The initial control parameters are $F_{h0} = 0.18$, $Re_0 = 182$ and $\alpha_0 = 1.27$ which describe a taller and faster dipole than the case described above. The experimental protocol is also different since the wave field was first established to give time for the reflected waves to reach the test section. This has the disadvantage of producing residual wavy motions in the background due to the multiple reflections, which results in noisier measurements. The wave field prior to the launching of the dipole is shown in figure 6.9.a. The frequency of the waves in this case is $\omega = 0.2$ s^{-1}. The two main beams in figure 6.9.a, appearing as slanted stripes, are : the direct beam, emanating from the upper right corner of the image (the cylinder was placed out of view on the frames shown near the top-right corner), and the reflection on the surface of the beam going up and to the left of the cylinder, which enters the field of view nearly at the middle and from the top. The dark and light pattern on the two parallel stripes is inverted (the central region is light on the direct beam whereas it is dark on the reflected beam) because of the quadrature phase shift due to reflection. Black and white in the grey scale represent, respectively, negative and positive vertical velocities associated with the wave motion. The evolution of the dipole can be monitored throughout the sequence by the sets of velocity vectors drawn over each image. We may point out that the effect of the vertically sheared motion produced by the dipole induces first a deformation of the wave beams, which bend slightly following the advective background motion. Subsequently, the beam under the dipole is "erased" (see for instance the reflected beam in the third frame).

6.5.2 Two-dimensional rays

The experimental observations of figures 6.7 and 6.9 show the deformation of internal wave beams that propagate through a background flow and lead to the interpretation in terms of ray theory. Particularly interesting is the confrontation of a theoretical prediction for the critical levels with the experimental observations of the critical behaviors. We start

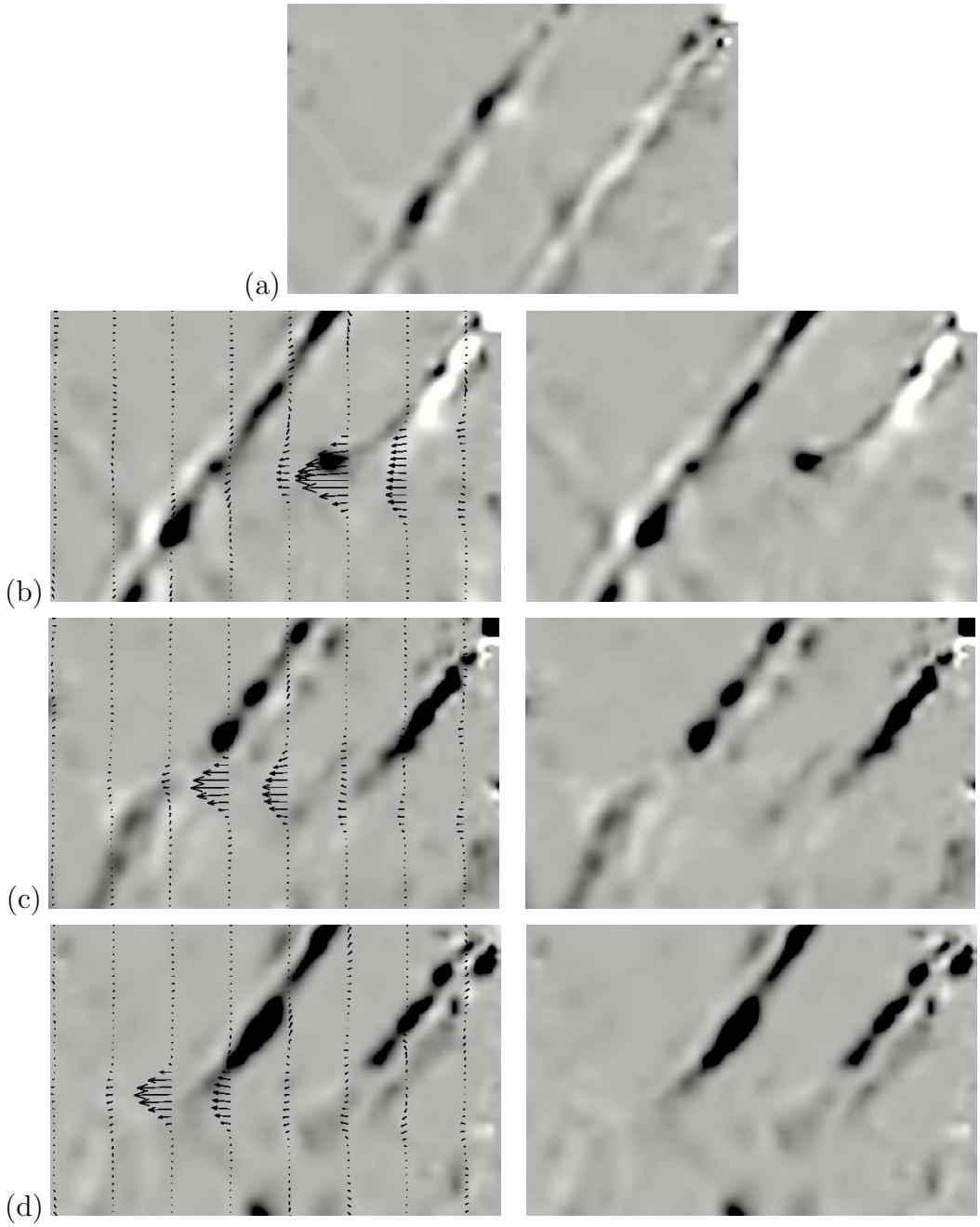


FIG. 6.9 – Vertical velocity field of internal waves of frequency $\omega = 0.2$ s^{-1} with the horizontal component of the wave vector in the same direction as the dipole velocity field on the vertical symmetry plane for times 6, 34, 45 and 53 s, from top to bottom. Vertical sets of velocity vectors on the left images show the position of the dipole, which moves from right to left. The oscillating cylinder is out of view near the top-right corner and the most visible wave beams are the one coming directly from the cylinder and another one that is reflected at the surface.

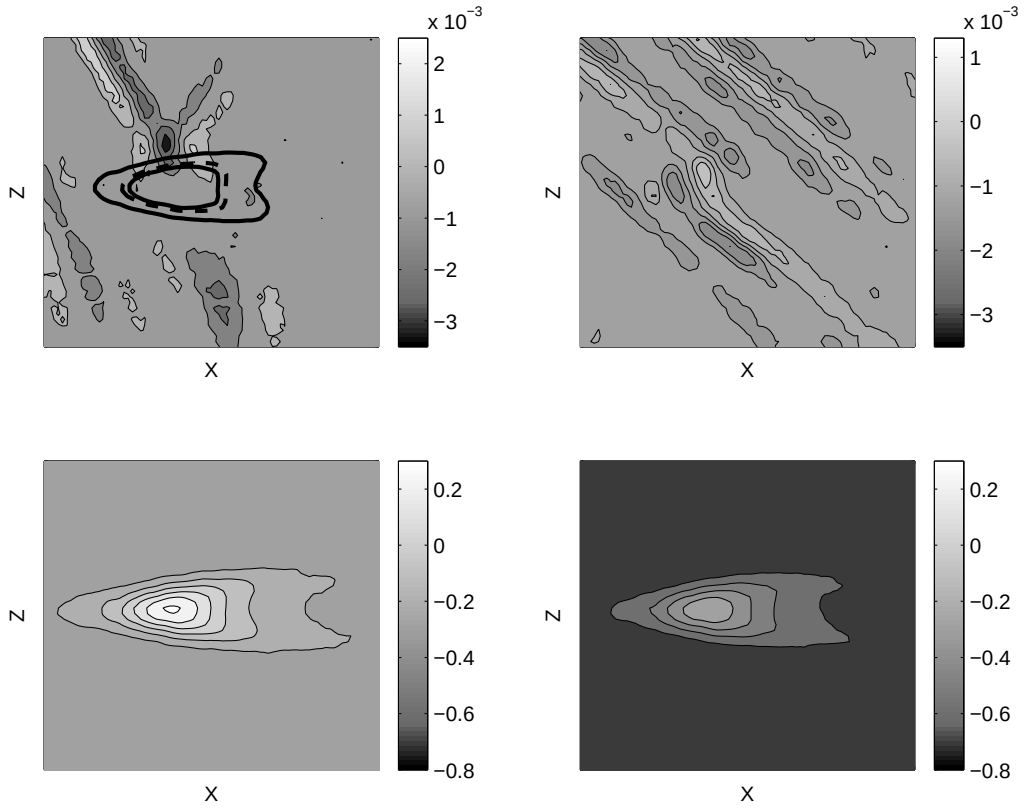


FIG. 6.10 – (a) and (b) Vertical velocity and (c) and (d) $T(x, z)$ fields corresponding to the $t = 115$s frames of figure 6.7. (a) and (d) show the case of figure 6.7.a and (b) and (d) that of figure 6.7.b. The location of the $T(x, z) = 0$ contour is drawn in dashed line in (a). Solid lines show the limits of the *critical band* (see text.)

with the simplest approach that consists in looking at the vertical symmetry plane of the dipole, forgetting its three-dimensional (3D) structure. The application of equations (6.15) and (6.16) is straightforward using the experimental values for ω, k_x, U and N. The location of critical levels for a wave of frequency ω and horizontal wavenumber k_x can be calculated for each background velocity U field using the equations :

$$C = \omega - k_x|U| \,, \tag{6.18}$$

$$T = \omega - N + k_x|U| \,, \tag{6.19}$$

where $C = 0$ identifies the theoretical prediction for the location of a critical layer (where $\omega_r = 0$) while $T = 0$ corresponds to the location of a turning point (where $\omega_r = N$). Given the time-dependence of the background velocity field, it should be noted that we will calculate snapshots of the C and T fields. In figure 6.10 we show contour levels of a $T(x, z)$ field that corresponds to the counter-propagating case of figure 6.7. The vertical

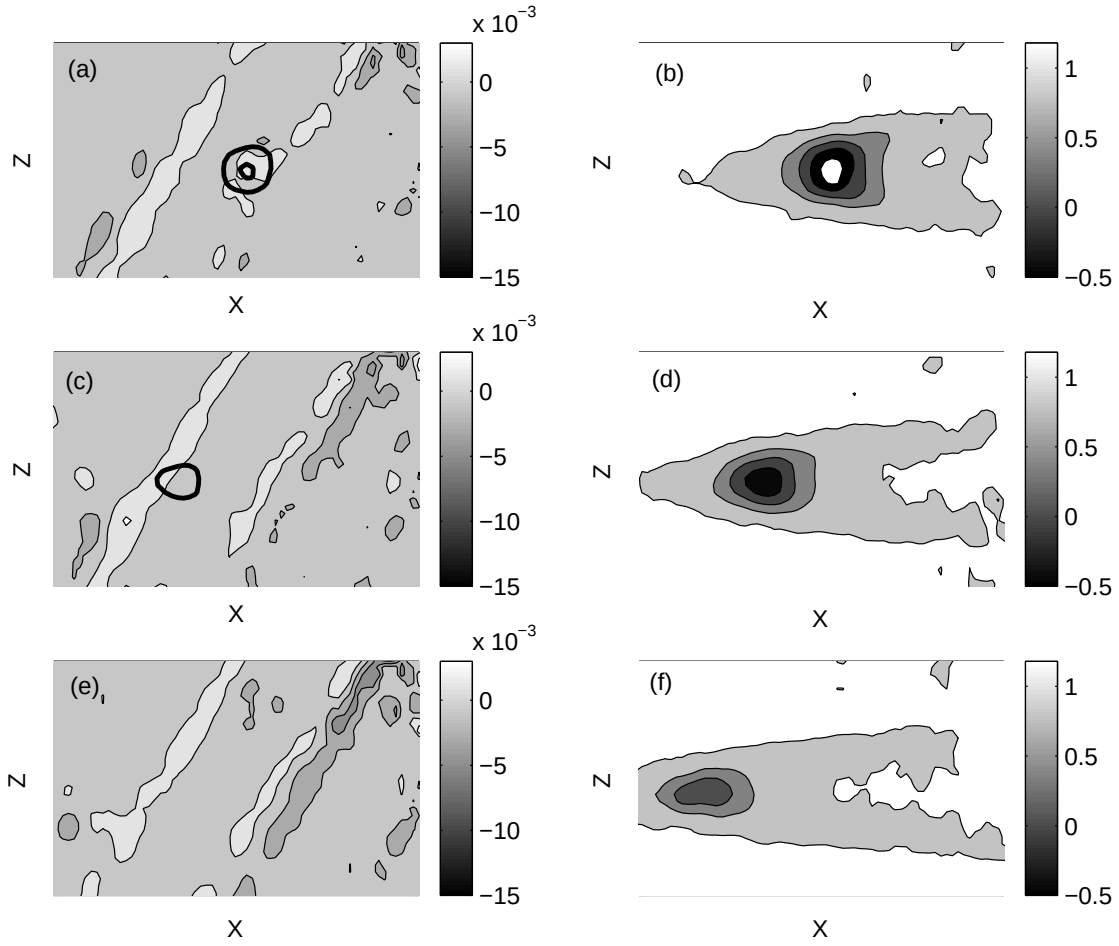


FIG. 6.11 – (a), (c) and (e) Vertical velocity and (b), (d), and (f) $C(x, z)$ fields corresponding to figure 6.9. The location of the $C(x, z) = 0$ contour is drawn in dashed line in (a), (c) and (e). Solid lines show the limits of the *critical band* (see text.)

velocity fields corresponding to figures 6.7.a and 6.7.b are reproduced in figures 6.10.a and 6.10.b and the respective $T(x, z)$ fields are shown in figures 6.10.c and 6.10.d. These fields were computed using the horizontal velocity $U(x, z)$ measured in an experiment of a dipole with no waves. The horizontal wavenumber in (6.19) was calculated as $k_x = \omega/c_x$, where the phase velocity c_x obtained from spatio-temporal diagrams as shown in figure 6.6 (this corresponds to the dashed vertical line in figure 6.6.d). Regions of $T(x, z) = 0$ exist only for the first case and the corresponding contour is traced in figure 6.10.a. The dashed line marks the zero obtained from the $T(x, z)$ field traced in figure 6.10.c. A wider *critical band* can be estimated using a wavenumber interval, which can be defined from the spectral content of the wave packet. The two solid lines correspond to the zeros of the $T(x, z)$ fields calculated using the k_x band limits k_{xMIN} and k_{xMAX} defined through figure 6.6.d as the values where the spectrum mean curve is half its maximum value. The agreement between the observation and the theoretical prediction for the turning point is

satisfactory considering that the hypothesis of slow variation of the background flow at the base of ray theory is not strictly respected since the velocity field of the dipole varies vertically as fast as the wave field. The space and time dependence of these contours results from that of the horizontal velocity field of the dipole $U(x, z; t)$ so that, as the dipole translates, the contours move and eventually the critical reflection stops.

Figure 6.11 is the equivalent of figure 6.10 but for the co-propagating configuration shown on figure 6.9 so that we look at $C(x, z)$ fields instead of $T(x, z)$. The critical contours $C(x, z) = 0$ are traced in figures 6.11.a, c and e over vertical velocity fields that correspond, respectively, to the observations in figures 6.9.b, c and d. For clarity, only the boundaries of the theoretical critical band calculated with the horizontal wavenumber spectrum limits are drawn in solid lines. While in figure 6.11.a both limit calculations lead to a critical contour, in 6.11.c the background velocity of the dipole has diminished enough to erase the inner contour and in 6.11.e the critical band has entirely disappeared. The corresponding $C(x, z)$ fields are plotted in figures 6.11.b, d and f. As in the previous case, these fields where calculated using $U(x, z)$ data of a control experiment without waves. The location of the theoretical critical layer in 6.11.a coincides with the maximum deformation of the wave beam evidenced by the vertical velocity field. In contrast with the case of the turning point where the wave is totally reflected, in a critical layer that is opaque to the incoming waves all the wave energy is transferred to the background flow. If we consider the wave beam that has encountered the critical region in figure 6.11.a, we can see that there are no waves below the critical layer (as asserted above in figure 6.9.b). This could either mean that the theoretical critical layer effectively acts as a barrier to incoming waves and thus that the wave energy is absorbed by the dipolar background flow, or that the waves are obliterated from the 2D view on the vertical plane through a 3D process out of reach of the 2D model.

Going further on the 2D interpretation, one could expect the waves that reach a critical layer to transfer momentum to the dipole and consequently retard its decay. An estimate of the transfer can be calculated using a simple momentum balance where all the wave momentum flux is thought to be transferred to the dipole at the critical level. The change in kinetic energy E_d per unit mass of the dipole due to the interaction in a control volume of dimensions given by the horizontal (L_h) and vertical (L_v) length scales of the dipole can be written as

$$\pi L_h^2 L_v \frac{dE_d}{dt} = SI \ , \tag{6.20}$$

where S is the horizontal surface through which the wave energy flux on the vertical per unit mass I enters the control volume. From equation 6.4, the wave energy flux can be written as $I = \langle E \rangle c_{gz}$ where the wave energy per unit mass averaged over a wave period $\langle E \rangle_w = \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle_w$ is obtained from the 2D measurements on a vertical plane and the magnitude of the vertical component of the group velocity c_{gz} computed from equation

(6.3) using the measured wave frequency and wavenumber. The average kinetic energy per unit mass of the dipole during the time of the interaction is also obtained from the experimental data as $\langle E\rangle_d = \langle|\mathbf{u}|^2\rangle_d$ in the control volume. Two parameters to be estimated carefully are the surface S and the time ΔT during which the transfer occurs. In the experiment, the actual transfer is not only limited by the "spanwise" variation (i.e. in the y direction, perpendicularly to the 2D measurements in the vertical mid-plane) of the dipolar field, which limits the extent of the critical condition, but also due to the finite extent of the interaction region in the x (or streamwise) direction. The latter implies for instance that the transfer may be limited because the waves leave the critical region before complete absorption. In the present order of magnitude calculation, we define $S = \lambda_x(L_h/2)$, i.e. a rectangle of sides the horizontal 'wavelength' λ_x, equivalent to the beam width, and a fourth of the dipolar horizontal length scale L_h. The latter being the 'unit width' in which the 2D critical condition is assumed to be approximately valid. Additionally, the time of interaction $\Delta T = L_h/U_d$, where U_d is the mean translation velocity of the dipole, is estimated using the lapse during which the position of the beam overlaps with the critical region described by the outer dashed line in figure 6.9. The magnitude of the dipolar flow energy increase due to the absorption of wave energy is thus estimated to be of the order, upon substitution of the previous assumptions in equation (6.20),

$$\Delta E_d \sim \frac{\lambda_x c_g}{2\pi L_v U_d}\langle|\mathbf{u}|^2\rangle_w \ . \tag{6.21}$$

Computing this prediction for the experimental data corresponding to figure 6.9 and comparing it with the mean kinetic energy of the dipole during the interaction $\langle E\rangle_d = \langle|\mathbf{u}|^2\rangle_d$ gives a $\Delta E_d/\langle E\rangle_d$ ratio of 1/20. This corresponds to a small value of the predicted change in the dipolar translation velocity due to the waves. Although the wave-vortex interaction is thus expected to be weak, it should be nonetheless observable through the analysis of the dipolar field evolution.

6.5.3 Dipole evolution in presence of waves

To measure the effect of the waves on the dipole we compare the evolution of the dipole passing through the internal wave field with that of a freely evolving dipole (i.e. with no waves). On figure 6.12 we look at the evolution of the dipole of the experimental configuration shown on figure 6.11 plotting (a) the dipole displacement (horizontal position versus time) and (b) the circulation versus time. Experiments with co-propagating waves ($\circ$) and without any waves ($\triangle$) are shown on the same plot. The displacement of the dipole is almost identical for the experiments with or without waves, a fact that shows the weakness of the wave-vortex momentum transfer through critical layer mechanisms. A systematic increase in the circulation of each vortex is observed for the dipoles travelling

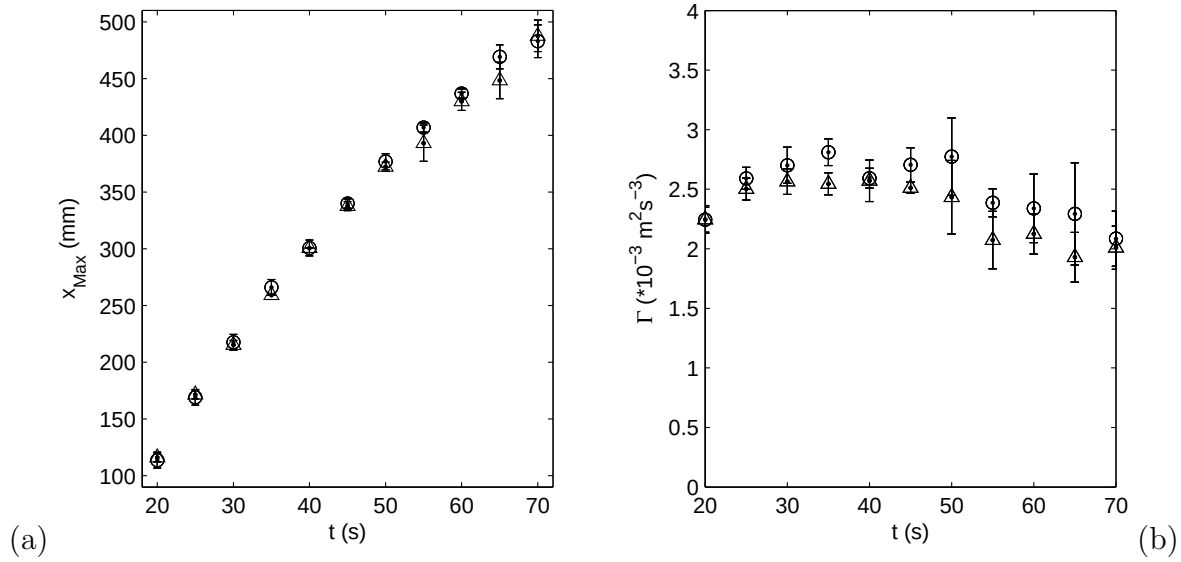


FIG. 6.12 – Evolution of the dipole for experiments with (○) and without (△) waves. (a) Position of the maximum velocity vs. time and (b) circulation of a dipole half vs. time. Each point is the mean value of four experiments and the error bars represent the standard deviation.

through a wave field (figure 6.12.b), but the difference with respect to the cases without waves is very modest so that the net effect of the wave field on the overall evolution of the dipole is nearly negligible. The equivalent analysis for the counter-propagating experimental configuration of figure 6.10, i.e. for the case where the turning point was observed, gives no measurable modification of the macroscopic flow features, as expected from 2D theory, and is not shown here. The surprising absence of momentum transfer as well as the reappearance of gravity waves after total reflection can only be explained taking into account the 3D nature of the flow and the associated wave propagation.

In figure 6.13, we compare contour plots of the velocity modulus on a vertical plane and vertical profiles passing through the point of maximum velocity in both interaction configurations : in (a), the dipole presented in figure 6.7 is traced without any wave field (solid line and triangle symbols) and with the wave field of frequency $\omega = 0.2$ s^{-1} of figure 6.7.a (dashed line and circle symbols) for the second instant shown in figure 6.7, i.e. $t = 115s$; in (b), the dipole used in figure 6.9 is presented without waves and with waves of frequency $\omega = 0.2$ s^{-1} for a time corresponding to the second frame of figure 6.9, i.e. $t = 34$s. In order to look at the mean effect of the waves on the velocity profile, an average over one wave period is shown. The absence of any noticeable deformation of the dipole profile in the presence of waves in case (a) and its extreme weakness with respect to the freely evolving dipole in case (b) is striking and it further demonstrates the absence of a strong wave-vortex energy transfer.

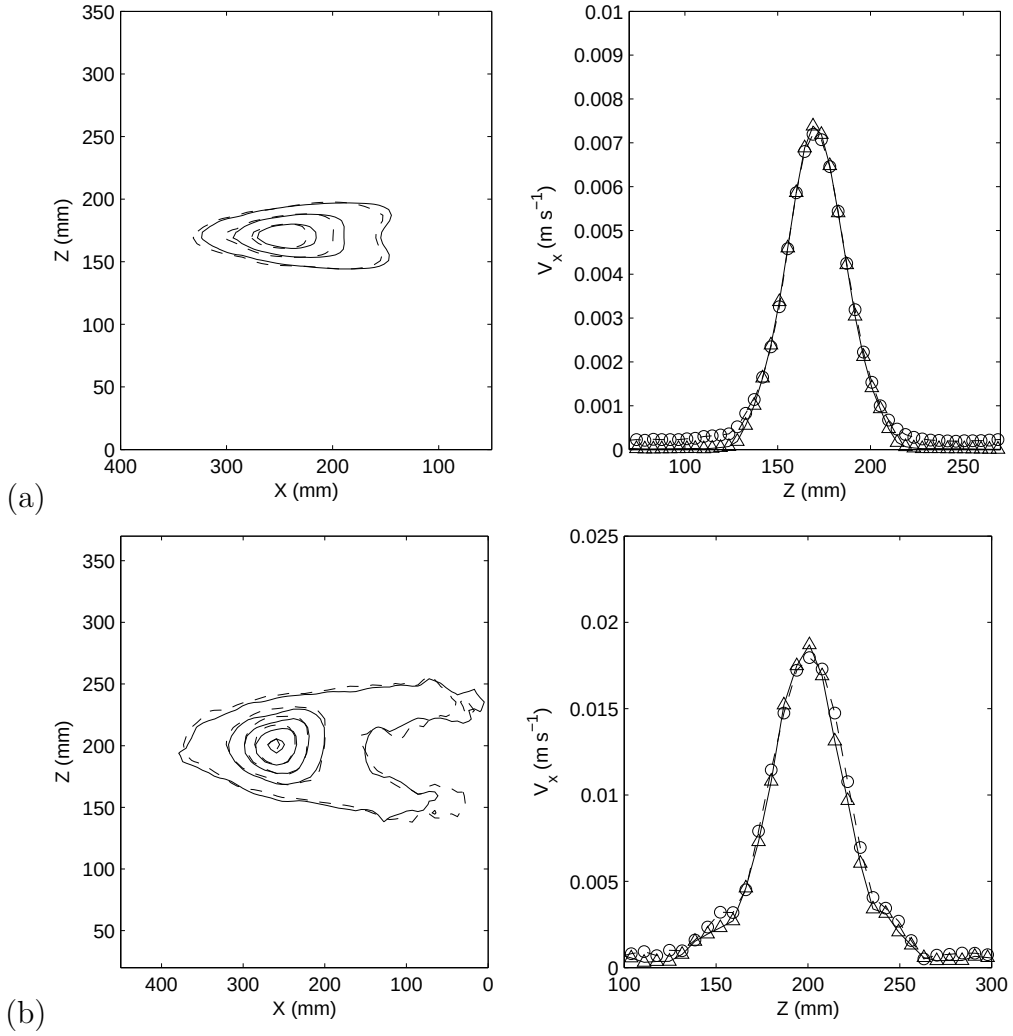


FIG. 6.13 – Contour plots and vertical profiles of the horizontal velocity field for (a) the dipole of figure 6.7 and (b) the dipole of figure 6.9. Dashed lines and ∘ symbols correspond to experimental configurations with waves of frequency $\omega = 0.2$ s^{-1}. Solid lines and △ symbols are the control case without waves.

6.5.4 3D effects : ray focusing and refraction

In figure 6.14, measurements on the horizontal mid-plane of the dipole are shown for the same experimental configuration as figure 6.9, i.e. the co-propagating case : the oscillating cylinder is near the vertical screen from which the dipole comes out so that the horizontal projection of the wave vector for the gravity wave beam points in the same direction as the translation velocity of the dipole (from right to left in the present figure). Two cases are shown for waves of frequencies (a) $\omega = 0.13$ s^{-1} and (b) $\omega = 0.2$ s^{-1}. In each case the left and right frames show velocity vectors traced, respectively, over fields of the vertical vorticity ($\partial u_x/\partial y - \partial u_y/\partial x$) and the divergence of the horizontal velocity field ($\partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y$). Although the velocity vectors let us visualize the position of the dipole, the waves cannot be distinguished due to the dominance of the dipolar field and are only evident looking at the divergence field where the lines of constant phase appear as dark and light stripes [1]. The effect of the dipolar field on the wave beam is readily identified as a deformation of the phase lines (which are straight when there is no dipole). The phase line marked by a dark stripe in the right frame of both figures 6.14.a and b is advected by the dipole in the central region that corresponds to the location of the maximum of the background dipolar velocity field. The wave beam deformed by the passing dipole nearly conserves its horizontal 'wavelength', defined as the horizontal beam width. This observation encourages the description of the waves by the ray-theoretical model used in the previous section because the wave properties (such as the wavelength) appear to be conserved while the wave interacts with the background flow. Thinking again in terms of ray theory, we know from the sideview analysis that the case shown in figure 6.14.a does not reach a critical value. On the contrary, figure 6.14.b corresponds in time to figure 6.9.b where a critical layer was predicted.

The deformation of the phase lines demonstrated by the observations on the horizontal plane determines, in the cases of figure 6.14, the *refraction* of the wave vector. We recall that the horizontal projections of the phase velocity and the group velocity are parallel and therefore orthogonal to the horizontal phase lines. The observed bending of the phase lines implies a wave *defocusing* in the regions where the horizontal phase velocity vectors diverge. This effect, represented schematically in figure 6.15.a, explains the fact that the waves "disappear" in the vertical plane view of figure 6.9 below the layers where the dipole passes even in the absence of a critical layer. The inverse effect is observed in the counter-propagating case corresponding to the setup of figure 6.7 where the *focusing* of the wave beam occurs as represented in figure 6.15.b. A confirmation of this focusing effect can be

[1] The wave/vortex decomposition of the flow in a non-divergent vortex mode that contains the vertical vorticity and in a wave mode that contains all the vertical velocity (as discussed e.g. by Staquet & Riley (1989); Riley & Lelong (2000)) is found to be very useful in the analysis of the flow in a horizontal plane because the dipole can be observed through the vorticity field while the waves, which are completely masked by the dipole in the velocity vector field, are easily brought out by means of the divergence calculation

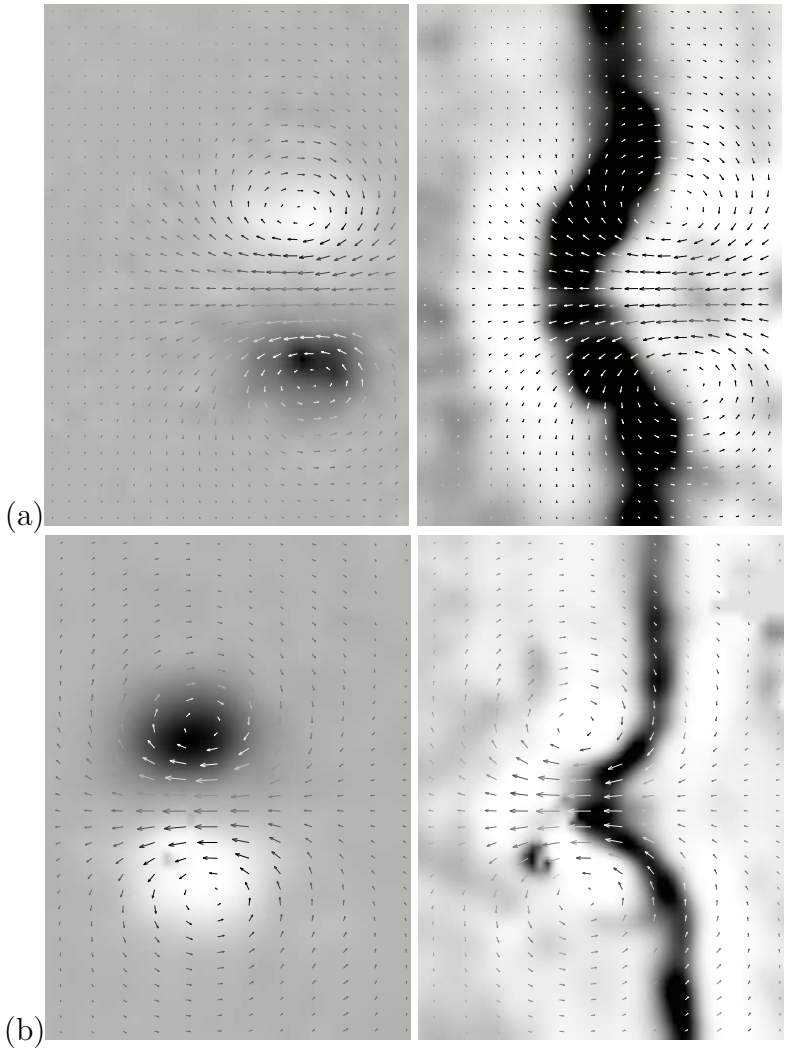


FIG. 6.14 – PIV measurements on a horizontal plane for waves interacting with a dipole in the experimental configuration of figure 6.3.b. The wave frequencies are (a) $\omega = 0.13$ s^{-1} and (b) $\omega = 0.2$ s^{-1}. Left frame : vertical vorticity. Right frame : divergence of the horizontal velocity field. In all frames the velocity vectors measured are shown.

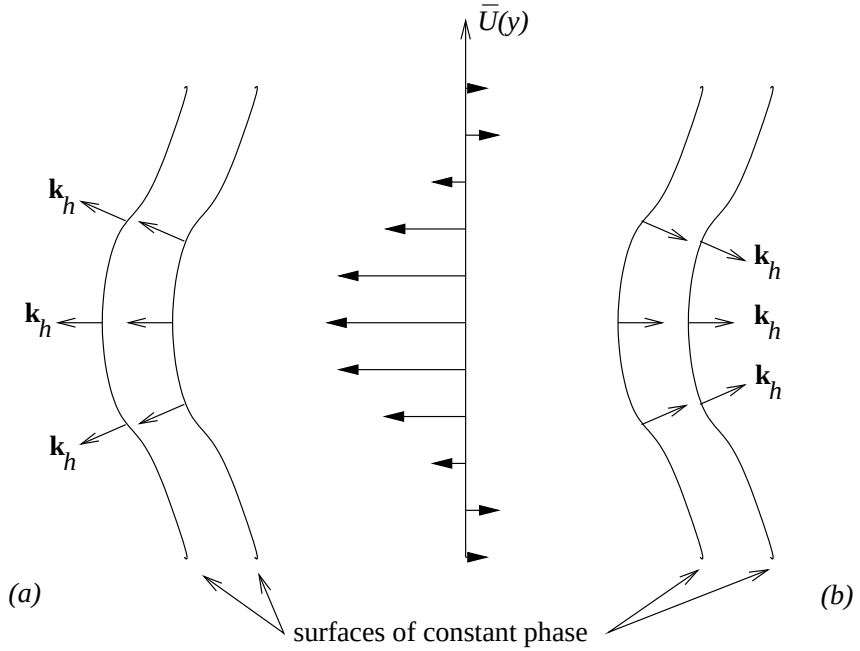


FIG. 6.15 – Schematic diagram of the internal wave phase lines deformed by the dipolar field showing the refraction of the wave vector. In (a) the critical layer case where the horizontal wave vector $\mathbf{k}_h$ points in the direction of the mean dipolar field $U(y)$ (co-propagating case) and the defocusing effect occurs due to diverging horizontal wave vectors. The opposite picture is true for the turning point case (b) where the isophases move opposite to the dipolar mean velocity (counter-propagating case) and wave focusing is produced as a result of converging $\mathbf{k}_h$.

found in a further analysis of figures 6.7.a and b. In 6.7.a the reappearence of the gravity waves below the dipole after the episode of total reflection is an evidence of wave focusing. This can be understood thinking of the vertical planes parallel to the mid-plane where the measurements are made. In this off-center planes the maximum velocity is smaller than on the axis, and for a sufficient shift the wave rays initially in these outer planes will not encounter the critical level and will pass through the dipole. However, because of the deformation of the isophase lines, the rays after traversing the dipole are no more in the off-axis plane but propagate towards the mid-plane. This focusing effect explains the reappearing of gravity waves below a turning point observed in figure 6.7.a. The same mechanism occurs in the case of figure 6.7.b. There, the wave frequency is not high enough for a reflection of the wave to be achieved but the incoming beam is also deformed by the dipole and a careful observation shows that the wave that traverses the dipolar field is intensified.

6.6 Conclusions

The experimental study of wave-vortex interaction in a stratified fluid presented in this paper gives new evidence that three-dimensional effects may play a significant role in the occurrence of critical levels in wave propagation. Internal gravity waves are produced in the laboratory by oscillating either a single cylinder or a set of cylinders in a salt-stratified water tank where the velocity field of a pancake dipole plays the role of a time-dependent three-dimensional background shear. Different configurations of interaction permit to observe waves that are shifted either towards a turning point, where the wave frequency ω_r in the frame of reference of the fluid tends to the buoyancy frequency N, or towards a critical layer, where $\omega_r \to 0$. Measurements of the velocity field on a vertical plane perpendicular to the wave surfaces of constant phase and aligned with the moving direction of the dipole give a picture of the deformation of the wave beams that encounter the dipolar field and allow to identify waves that reach both singularities : a turning point and a critical layer. A 2D analysis built on a classical ray-theory for internal gravity waves in a shear flow predicts the location of critical levels in good agreement with the observations (see figures 6.10 and 6.11). That the 2D model succeeds in predicting the critical levels is quite remarkable not only because, as discussed in section 5.2, the shear flow produced by the dipole does not satisfy the hypotheses of slow variation underlying ray theory, but also because both the basic flow and the ray propagation should be considered 3D.

Two questions arise in regard to the critical layer predicted by the 2D model : On the one hand, what changes with respect to the 2D interpretation should be expected as a result of the 3D nature of the dipolar field ? On the other, can the wave energy lost to the background flow at the critical layer induce an observable change on the dipole ? The latter question was addressed using a simple energy balance in a control volume assuming that all the wave energy on a beam bent towards a critical layer was transferred to the background flow (see section 5.2) and a weak transfer was predicted. Experimentally, an even weaker transfer is observed and the dipole evolution, monitored through its position and circulation versus time (figure 6.12) and through profiles and contours of the horizontal velocity field in the vertical plane (figure 6.13), is at leading order not affected by the presence of a critical layer.

Three-dimensional effects on the wave propagation were discussed exploiting measurements of the velocity field on a horizontal plane (section 5.4). These revealed a deformation of the waves phase lines that are advected by the velocity field of the dipole, evidencing a phenomenon of refraction that limits drastically the horizontal extent of the critical layer. The refraction of a wave beam leads to opposite effects when the wave and the dipole are co-propagating or counter-propagating (depending on the relative direction of the horizontal phase velocity of the wave component with respect to the translation direction of

the dipole). In the co-propagating case the waves are defocused, which might explain the disappearance of the wave beam below the dipole in figure 6.9.b even without the need of a critical layer acting as a barrier. This conjecture is supported by the attenuation of the second beam reached by the dipolar field in figure 6.9.c and its disappearance below the dipole in figure 6.9.d because the dipole has already slowed down and no critical region exists in this late interaction. In the opposite case the expected focusing of the waves was confirmed reexamining the vertical plane observations for waves counter-propagating with respect to the dipolar velocity field (figure 6.7). In that case, a noticeable amplification of the wave amplitude in the part of the beam distorted by the dipolar field is observed. Also, when total reflection occurs, the focusing effect explains that the wave reappears under the dipole.

The ubiquitous presence in a geophysical context of internal gravity waves propagating through three-dimensional vortical flows renders the consideration of the 3D effects studied here indispensable to an adequate modelling. In particular, in contrast to the laboratory where the Reynolds numbers are relatively small, the large values of Re that characterize atmospheric and oceanic flows determine that breaking of internal gravity waves generates turbulence and mixing. The conditions under which wave breaking occurs can be greatly enhanced by the focusing effect discussed here and reduced by the defocusing effects.

We thank warmly Antoine Garcia for his invaluable help in the construction and installation of the wave generating devices. Support from CONACyT-México to RGD through a scholarship for doctoral studies is gratefully acknowledged.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

La dynamique diffusive des tourbillons *pancake* ainsi que les mécanismes d'interaction entre ces derniers et des ondes de gravité internes constituent l'objet d'ètude de cette thèse. Ces ondes et tourbillons sont les éléments fondamentaux des écoulements en milieu stratifié et la compréhension de sa nature s'avère indispensable pour une meilleur modélisation des phénomènes géophysiques dont ils font partie. Les travaux ici présentés ont notamment permis, à partir d'une approche expérimentale et théorique : (1) de caractériser les effets de la diffusion de l'agent stratifiant dans la dynamique des tourbillons pancake, (2) de mettre en évidence un nouveau mécanisme de sélection d'échelle verticale dans les fluides fortement stratifiés et (3) de montrer expérimentalement l'apparition des niveaux critques dans la propagation des ondes internes dans un écoulement tridimensionnel (3D) instationnaire, ainsi que de mettre en évidence le rôle essentiel de cette nature 3D dans l'apparition des événements de focalisation et défocalisation des ondes. Dans ce qui suit je décris un peu plus en détail les résultats obtenus ainsi que ses implications et les axes qui pointent vers des travaux futurs souhaitables.

Dynamique diffusive des tourbillons pancake

Dans la prémière partie (chapitre 3) la diffusion des tourbillons dans un fluide stratifié à été étudié à partir d'une analyse asymptotique des équations de Boussinesq pour un fluide stratifié dans l'approximation Q2D. Cette analyse permet de retrouver de manière formelle et d'étendre le modèle proposé par Beckers, Verzicco, Clercx & van Heijst (2001). Le paramètre approprié pour l'analyse des perturbations est le carré du nombre de Froude vertical $F_v = U/L_vN$, où U, L_v et N sont, respectivement, la vitesse initiale de translation horizontale du dipôle, l'échelles de longueur caractéristique suivant la verticale et la fréquence de Brunt-Väisälä. L'analyse montre que la diffusion du vortex dépend de manière cruciale du nombre de Schmidt $Sc = \nu/\kappa$, qui est le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion de l'agent de stratification. Ainsi, le transport vertical dû à l'ajustement cyclostrophique ralentit la diffusion visqueuse quand Sc est plus grand que l'unité.

Cet effet se manifeste dans les tourbillons pancake de laboratoire où la stratification est due à la concentration du sel dans l'eau et $Sc \approx 700$ et il peut aussi être invoqué pour expliquer l'existence dans la nature de structures tourbillonnaires avec une longue vie (par example Armi *et al.*, 1988, les *meddies*). Le cas contraire apparaît quand Sc est plus petit que l'unité, comme dans le cas de l'atmosphère où l'air est stratifié en température et Sc (où Pr) vaut 0.7. La diffusion de la densité est alors plus rapide que la diffusion visqueuse et elle accélère l'amortissement des tourbillons. Ceci peut eventuellement expliquer que la turbulence type pancake soit difficilement observable dans des expériences dans un gas stratifié en température. D'autres applications de ce régime dynamique peuvent être envisagées dans le domaine de l'astrophysique lorsqu'il s'agit des metaux liquides stratifiés thermiquement (par example dans le coeur de Jupiter).

Sélection d'échelle verticale dans les fluides stratifiés

Un nouveau mécanisme responsable de la formation de petites échelles dans la structure verticale des écoulements fortement stratifiés à été mis en évidence à partir des observations expérimentales sur un dipôle et un modèle physique est proposé. Ce mécanisme, en coopération avec l'instabilité zigzag (Billant & Chomaz, 2000a) et avec la décorrélation cinématique due à l'advection indépendente des couches décrite par Lilly (1983), nous permet de proposer deux scénarios pour l'évolution des écoulements fortement stratifiés en fonction du paramètre $R = ReF_h^2$ où $Re = UL_h/\nu$ est le nombre de Reynolds et $F_h = U/NL_h$ est le nombre de Froude horizontal, tous les deux basés sur l'échelle horizontale L_h. Ce paramètre peut aussi être vu comme le carré du rapport entre les longueurs caractéristiques de flottabilité $L_b = U/N$ et visqueuse $\delta = L_h Re^{-1/2}$. Les expériences présentées dans le chapitre 5 appartiennent au cas où $\delta \gg L_b$, c'est à dire au régime de $R \ll 1$, où les effets visqueux dominent la sélection d'échelle verticale. Dans ce cas, le mécanisme mis en évidence expérimentalement, où la taille verticale caractéristique des structures initialement plus hautes que δ est érodée par des 'couches limites', est actif car il n'y a aucune force qui oppose l'étirement visqueux. L'evolution tardive des écoulements fortement stratifiés souvent observée dans des expériences de laboratoire appartient à ce régime de R petit, ce qui est en accord avec des observations expérimentales où l'échelle verticale a été reportée indépendente du nombre de Froude (e.g. Fincham *et al.*, 1996; Bonnier *et al.*, 2000; Praud, 2003). L'autre régime en termes du paramètre R correspond au cas où $R \gg 1$ (i.e. $\delta \ll L_b$) et où les effets visqueux sont négligéables (voir Billant & Chomaz, 2001). Dans ce cas l'échelle verticale tend vers L_b pour n'importe quelle échelle initiale à travers soit du mécanisme cinématique de Lilly, soit des instabilités tridimensionnelles telles que l'instabilité zigzag.

Si l'on pense à la décroissance libre de la turbulence en présence de stratification forte, même si au début R est grande, dans les étapes tardives on arrivera toujours au régime de $R \leq 1$ et il sera nécessaire de considérer les effets visqueux pour prédire les échelles

verticales aux stades finaux. Dans le cas de la turbulence forcée le rôle des effets visqueux devra aussi être inclu dans tout model de cascade pour prédire la distrubution de l'énergie dans les différentes échelles.

Effets 3D dans la propagation d'ondes de gravité internes

La partie des travaux dévouée à l'interaction ondes-tourbillons a permis, d'une part, d'observer l'apparition des niveaux critiques dans la propagation des ondes internes à travers l'écoulement constitué par un dipôle pancake. Les observations ont motivé l'utilisation de la théorie des rayons pour décrire la propagation des ondes, le dipôle jouant le rôle d'écoulement de fond. D'autre part, l'importance dans la limitation des transferts ondes-tourbillons, des effets de focalisation et réfraction des ondes dus à la nature tridimensionnelle de l'écoulement dipolaire, a été mise en évidence. En particulier, l'effet de défocalisation des ondes internes se propageant dans la direction de l'écoulement dipolaire restreint le transfer énergétique au niveau des couches critiques. Dans le cas des ondes dont la vitesse de phase est opposée à la translation du dipôle, la focalisation des rayons permet d'observer des ondes qui apparaîssent au-délà d'un point tournant.

L'omniprésence dans un contexte géophysique des ondes de gravité internes se propageant à travers des écoulements tourbillonnaires tridimensionnels, obligent à considérer les effets de focalisation/défocalistion dans tout effort de modélisation. En particulier ces effets devraient affecter fortement les phénomènes de déferlement d'ondes internes.

Perspectives

Les resultats obtenus ouvrent des perspectives intéressantes tant pour l'analyse de la dynamique de tourbillons dans les écoulements géophysiques que pour l'étude des interactions ondes-tourbillons.

Dans le premier cas, les limitations des résultats obténus dans l'expérience viennent du fait que les effets visqueux y sont très importants. Ceci détermine que l'échelle de longueur visqueuse δ dans le laboratoire est du même ordre de grandeur que l'échelle de flottabilité L_b. L'échelle visqueuse dans les écoulements géophysiques est beaucoup plus petite que l'échelle de flottabilité et c'est cette dernière qui y est sélectionnée. Le rôle des phénomènes de type épluchage de tourbillons dans les écoulements atmosphériques ou océaniques reste donc à déterminer et, pour cela, l'étude des situations avec une plus grande valeur du nombre de Reynolds (et donc du paramètre R) est souhaitable. On peut espérer que dans le contexte géophysique, où R est grand, le cisaillement entre differentes couches horizontales dû au déplacement d'une structure tourbillonnaire puisse activer d'autres mécanismes qui accompagnent l'épluchage des structures, tels que des instabilités de type Kelvin-Helmholtz. Il est probable que l'épluchage d'un dipôle, comme celui qu'on à mis en évidence dans ces travaux, continue à agir pour des regimes à plus

grand R mais qu'il soit, d'une part, piloté par une viscosité effective, et d'autre part, intimement lié à d'autres mécanismes qui touchent à l'échelle verticale des structures, comme les instabilités zigzag ou Kelvin-Helmholtz.

Toujours dans la reflexion à propos des applications géophysiques des phénomènes qu'on a décrits, tant pour les effets de la diffusion de l'agent stratifiant sur l'évolution des tourbillons que pour les mécanismes de sélection d'échelle verticale, il est important de penser aux modifications qui doivent être attendues lorsqu'on considère le référentiel tournant. Pour les méso-échelles et sous-méso-échelles océaniques et atmosphériques, les effets de la rotation sont non négligéables, voire dominants, et les mécanismes physiques qui régissent la dynamique des tourbillons seront fortement influencés par le rôle de la force de Coriolis.

Quant aux intéractions ondes-tourbillons, l'étude expérimentale offre toute une panoplie de configurations possibles. À la lumière des resultats obtenus, les travaux que nous souhaitons poursuivre pointent principalement en deux directions : d'une part, la recherche des configurations qui permettent d'avoir un transfert ondes-tourbillons plus intense, et d'autre part l'analyse détaillé des effets de focalisation/défocalisation que l'on a mis en évidence. Sur le premier point, une piste est de tenter une séparation d'échelles plus importante entre les ondes et les tourbillons, ce qui permettrait d'augmenter le temps d'interaction type couche critique.

Bibliographie

Afanasyev, Y. 2003 Spontaneous emission of gravity waves by interacting vortex dipoles in a stratified fluid : laboratory experiments. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **97**, 79–95.

Armi, L., Hebert, D., Oakey, N., Price, J., Richardson, P., Rossby, T. & Ruddick, B. 1988 The history and decay of a mediterranean salt lens. *Nature* **333**, 649–651.

Bartello, P. 1995 Geostrophic adjustment and inverse cascades in rotating stratified turbulence. *J. Atmos. Sci.* **52**, 4410–4428.

Batchelor, G. 1967 *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge : Cambridge University Press.

Beckers, M., Verzicco, R., Clercx, H. & van Heijst, G. 2001 Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid : experiments, model and numerical simulations. *J. Fluid Mech.* **433**, 1–27.

Billant, P. 1999 Dynamique d'une paire de tourbillons en milieu stratifié. PhD thesis, LadHyX, Ecole Polytechnique.

Billant, P. & Chomaz, J. 2000*a* Experimental evidence for a zigzag instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **418**, 167–188.

Billant, P. & Chomaz, J. 2000*b* Three dimensional stability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **419**, 65–91.

Billant, P. & Chomaz, J. 2001 Self-similarity of strongly stratified inviscid flows. *Phys. Fluids* **13**, 1645–1651.

Bonneton, P., Chomaz, J. & Hopfinger, E. 1993 Internal waves produced by the turbulent wake of a sphere in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **254**, 23–40.

Bonnier, M., Eiff, O. & Bonneton, P. 2000 On the density structure of far-wake vortices in a stratified fluid. *Dyn. Atmos. Oceans* **31**, 117–137.

Booker, J. & Bretherton, F. 1967 The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J. Fluid Mech.* **27**, 513–539.

Boubnov, B., Gledzer, E. & Hopfinger, E. 1995 Stratified circular couette flow : instability and flow regimes. *J. Fluid Mech.* **292**, 333–358.

Bouruet-Aubertot, P., Sommeria, J. & Staquet, C. 1996 Stratified turbulence produced by internal wave breaking : two-dimensional numerical experiments. *Dyn. Atmos. Oceans* **23**, 371–378.

Bower, A., Armi, L. & Ambar, I. 1997 Lagrangian observations of meddy formation during a mediterranean undercurrent seeding experiment. *J. Phys. Oceanogr.* **27**, 2545–2575.

Bretherton, F. 1966 The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **92**, 466–480.

Broutman, D., Macaskill, C., McIntyre, M. & Rottman, J. 1997 On doppler-spreading models of internal waves. *Geophys. Res. Lett.* **24**, 2813–2816.

Bühler, O. & McIntyre, M. 1998 On non-dissipative wave-mean interactions in the atmosphere or oceans. *J. Fluid Mech.* **354**, 301–343.

Bühler, O. & McIntyre, M. 2003 Remote recoil : a new wave-mean interaction effect. *J. Fluid Mech.* **492**, 207–230.

Chomaz, J., Bonneton, P., Butet, A. & Hopfinger, E. 1993 Vertical diffusion of the far wake of a sphere moving in a stratified fluid. *Phys. Fluids A* **5 (11)**, 2799–2806.

Fincham, A., Maxworthy, T. & Spedding, G. 1996 Energy dissipation and vortex structure in freely decaying, stratified grid turbulence. *Dyn. Atmos. Oceans* **23**, 155–169.

Flor, J. & van Heijst, G. 1996 Stable and unstable monopolar vortices in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **311**, 257–287.

Flor, J., van Heijst, G. & Delfos, R. 1995 Decay of dipolar vortex structures in a stratified fluid. *Phys. Fluids* **7**, 374–383.

Gallaire, F. 2002 Instabilités dans les jets tournants et contrôle de l'éclatement tourbillonnaire. PhD thesis, LadHyX, Ecole Polytechnique.

Garrett, C. 2000 The dynamic ocean. In *Perspectives in fluid dynamics* (ed. G. Batchelor, H. Moffatt & M. Worster), pp. 507–556. Cambridge University Press.

Gill, A. 1982 *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press.

Godeferd, F. & Cambon, C. 1994 Detailed investigation of energy transfers in homogeneous stratified turbulence. *Phys. Fluids* **6**, 2084–2100.

Godeferd, F. & Staquet, C. 2003 Statistical modelling and direct numerical simulations of decaying stably stratified turbulence. part 2. large-scale and small-scale anisotropy. *J. Fluid Mech.* **486**, 115–159.

Godoy-Diana, R. & Chomaz, J. 2003 Effect of the schmidt number on the diffusion of axisymmetric pancake vortices in a stratified fluid. *Phys. Fluids* **15**, 1058–1064.

Godoy-Diana, R., Chomaz, J. & Billant, P. 2004 Vertical length scale selection for pancake vortices in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **504**, 229–238.

van Heijst, G. & Flór, J. 1989 Dipole formation and collisions in a stratified fluid. *Nature* **340**, 212–215.

Herring, J. & Métais, O. 1989 Numerical experiments in forced stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **202**, 97–115.

Hill, D. 2002 General density gradients in general domains : the 'two-tank' method revisited. *Exp. Fluids* **32**, 434–440.

Holford, J. & Linden, P. 1999 Turbulent mixing in a stratified fluid. *Dyn. Atmos. Oceans* **30**, 173–198.

Javam, A., Imberger, J. & Armfield, S. 2000 Numerical study of internal wave-caustic and internal wave-shear interactions in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **415**, 89–116.

Javam, A. & Redekopp, L. 1998 The transmission of spatially-compact internal wave packets through a critical level. *Dyn. Atmos. Oceans* **28**, 127–138.

Kimura, Y. & Herring, J. 1996 Diffusion in stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **328**, 253–269.

Koop, C. 1981 A preliminary investigation of the interaction of internal waves with a steady shearing motion. *J. Fluid Mech.* **113**, 347–386.

Kundu, P. 1990 *Fluid mechanics*. Academic Press.

Lelong, M. & Riley, J. 1991 Internal wave-vortical mode interactions in strongly stratified flows. *J. Fluid Mech.* **232**, 1–19.

Lighthill, J. 1978 *Waves in fluids*. Cambridge : Cambridge University Press.

LIGHTHILL, J. 1996 Internal waves and related initial-value problems. *Dyn. Atmos. Oceans* **23**, 3–17.

LILLY, D. 1983 Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **40**, 749–761.

LIN, J. & PAO, Y. 1979 Wakes in stratified fluids : a review. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **11**, 317–338.

LINDBORG, E. 1999 Can the atmospheric energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence ? *J. Fluid Mech.* **388**, 259–288.

LINDBORG, E. 2002 Strongly stratified turbulence : A special type of motion. In *Advances in Turbulence IX. Proc. of the Ninth European Turbulence Conference* (ed. I. Castro, P. Hancock & T. Thomas), pp. 435–442. CIMNE, Barcelona.

MAJDA, A. & GROTE, M. 1997 Model dynamics and vertical collapse in decaying strongly stratified flows. *Phys. Fluids* **9 (10)**, 2932–2940.

MCDOWELL, S. & ROSSBY, H. 1978 Mediterranean water : An intense mesoscale eddy off the bahamas. *Science* **202**, 1085–1087.

MCINTYRE, M. 2000 On global-scale atmospheric circulations. In *Perspectives in fluid dynamics* (ed. G. Batchelor, H. Moffatt & M. Worster), pp. 557–624. Cambridge University Press.

MCWILLIAMS, J. 1985 Submesoscale, coherent vortices in the ocean. *Rev. Geophys.* **23**, 165–182.

MÉTAIS, O. & HERRING, J. 1989 Numerical simulations of freely evolving turbulence in stably stratified fluids. *J. Fluid Mech.* **202**, 117–148.

MOULIN, F. 2003 Interactions ondes-vortex en milieu stratifié tournant et transport à travers une barrière dynamique. PhD thesis, Grenoble.

MOWBRAY, D. & RARITY, B. 1967 A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid. *J. Fluid Mech.* **28**, 1–16.

OSTER, G. & YAMAMOTO, M. 1963 Density gradient techniques. *Chem. Rev.* **63**, 257–268.

PAO, H. & KAO, T. 1977 Vortex structure in the wake of a sphere. *Phys. Fluids* **20**, 187–191.

Park, Y.-G., Whitehead, J. & Gnanadeskian, A. 1994 Turbulent mixing in stratified fluids : layer formation and energetics. *J. Fluid Mech.* **279**, 279–311.

Pedlosky, J. 1987 *Geophysical fluid dynamics*, 2nd edn. New York : Springer-Verlag.

Phillips, O. 1966 *The dynamics of the upper ocean*. Cambridge : Cambridge University Press.

Plougonven, R. & Zeitlin, V. 2002 Internal gravity wave emission from a pancake vortex : An example of wave-vortex interaction in strongly stratified flows. *Phys. Fluids* **14**, 1259–1268.

Praud, O. 2003 Turbulence stratifiée en cuve tournante. PhD thesis, LEGI, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Raffel, M., Willert, C. & Kompenhans, J. 1998 *Partical image velocimetry : a practical guide*. Berlin : Springer-Verlag.

Richardson, P. 1993 Tracking ocean eddies. *American Scientist* **81**, 261–271.

Riley, J. & deBruynKops, S. 2003 Dynamics of turbulence strongly influenced by buoyancy. *Phys. Fluids* **15(7)**, 2047–2059.

Riley, J. & Lelong, M. 2000 Fluid motions in the presence of strong stable stratification. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 613–657.

Riley, J., Metcalfe, R. & Weissman, M. 1981 Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density stratified fluids. In *Proc. AIP Conf. Nonlinear properties of internal waves* (ed. B. West), pp. 79–112. La Jolla Institute.

Settles, G. 2001 *Schlieren and shadowgraph techniques : visualizing phenomena in transparent media*. Berlin : Springer-Verlag.

Spedding, G. 2002 Vertical structure in stratified wakes with high initial froude number. *J. Fluid Mech.* **454**, 71–112.

Spedding, G., Browand, F. & Fincham, A. 1996*a* The long-time evolution of the initially-turbulent wake of a sphere in a stable stratification. *Dyn. Atmos. Oceans* **23**, 171–182.

Spedding, G., Browand, F. & Fincham, A. 1996*b* Turbulence, similarity scaling and vortex geometry in the wake of a towed sphere in a stably-stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **314**, 53–103.

Staquet, C., Bouruet-Aubertot, P. & Koudella, C. 2001 Mixing by breaking internal gravity waves. In *Turbulent mixing in geophysical flows* (ed. P. Linden & J. Redondo), pp. 175–200. CIMNE, Barcelona.

Staquet, C. & Riley, J. 1989 On the velocity field associated with potential vorticity. *Dyn. Atmos. Oceans* **14**, 93–123.

Staquet, C. & Sommeria, J. 2002 Internal gravity waves, from instabilities to turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 559–593.

Sutherland, B. 2000 Internal wave reflection in uniform shear. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **126**, 3255–3286.

Sutherland, B., Dalziel, S., Hughes, G. & Linden, P. 1999 Visualisation and measurement of internal waves by "synthetic schlieren" : Part 1. vertically oscillating cylinder. *J. Fluid Mech.* **390**, 93–126.

Sutherland, B., Hughes, G., Dalziel, S. & Linden, P. 2000 Internal waves revisited. *Dyn. Atmos. Oceans* **31**, 209–232.

Thorpe, S. 1981 An experimental study of critical layers. *J. Fluid Mech.* **103**, 321–344.

Tritton, D. 1988 *Physical Fluid Dynamics*, 2nd edn. Oxford : Oxford University Press.

Turner, J. 1973 *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge : Cambridge University Press.

Winters, K. & D'Asaro, E. 1994 Three-dimensional wave breaking near a critical level. *J. Fluid Mech.* **272**, 255–284.