

Eléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire

Sandrine Fauqueux

▶ **To cite this version:**

Sandrine Fauqueux. Eléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire. Modélisation et simulation. ENSTA ParisTech, 2003. Français. NNT : 2003PA090002 . tel-00007445

HAL Id: tel-00007445

https://pastel.hal.science/tel-00007445

Submitted on 18 Nov 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

UNIVERSITÉ PARIS IX-DAUPHINE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité

Mathématiques appliquées

soutenue par

Sandrine FAUQUEUX

le 6 Février 2003

Titre

Eléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire

Directeur de thèse : Gary Cohen

Promoteur IFP : Julie Svay-Lucas

Jury

Président :	M.	**Yvon**	**MADAY**
Rapporteurs :	Mme	**Laurence**	**HALPERN**
	M.	**Peter**	**MONK**
Examinateurs :	M.	**Patrick**	**JOLY**
	M.	**Jean-Pierre**	**VILOTTE**

“L’Université n’entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.”

À Éric, pour son soutien et son aide.

À ma mère...

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse : Mr Gary Cohen, qui est à l'origine de ce travail. Je lui suis très reconnaissante pour ses conseils, ses idées, sa disponibilité mais aussi pour la liberté qu'il a su me donner pendant ces trois années de thèse. Ses talents de persuasion auprès de l'IFP m'ont permis d'obtenir une bourse CIFRE et, ainsi, de confronter la théorie aux préoccupations industrielles. Nos rapports étant parfois houleux, je tiens beaucoup à le remercier pour sa patience, son écoute et son ouverture d'esprit.

Mme Julie Svay-Lucas a dirigé ma thèse du point de vue géophysique. Je lui adresse tout mes remerciements pour l'intérêt qu'elle a manifesté tout au long de mon travail. J'ai énormément apprécié son aide, son soutient et sa gentillesse. Je ne la remercierais jamais assez de m'avoir permis de passer six semaines d'échanges fructueux à l'université de Caltech.

Laurence Halpern a accepté de rapporter sur ce travail. Je la remercie pour les remarques et l'esprit critique dont elle a fait preuve à la lecture de ce manuscrit.

Je tiens aussi à remercier Peter Monk d'avoir accepté de lire les quelques 300 pages de cette thèse en français. Sa gentillesse et son optimisme m'ont grandement aidé pendant la difficile période de pré-soutenance.

Je suis gré à Yvon Maday et Jean-Pierre Vilotte pour l'intérêt dont ils ont fait preuve pour mon travail, tant du point de vue numérique que géophysique.

Patrick Joly a accepté de participer à mon jury de thèse. Je l'en remercie. Je lui suis très reconnaissante pour les conseils donnés tout au long de ces trois années. J'ai beaucoup apprécié sa rigueur et la clarté de ces idées. J'en profite pour le remercier, ainsi qu'Eliane Bécache, de m'avoir associé à leur travail sur les problèmes de stabilité des PML. Ils m'ont ainsi permis de bénéficier de leurs connaissances.

Concernant mon séjour de six semaines à l'université de Caltech, je remercie Jeroen Tromp et Dimitri Komatitsch pour l'intérêt dont ils ont fait preuve ainsi que Vincent Richard, Andreas Ehinger et Hery Rakotoarisoa pour leur aide et leur soutient lors de l'organisation de cet échange.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres actuels et anciens des projets ONDES, ESTIME, OTTO et AIR pour la bonne ambiance qu'ils développent au sein du bâtiment 13 et, plus généralement, pour la bonne ambiance de travail qui règne à l'INRIA. Signalons d'ailleurs la bonne participation des équipements sportifs (Volley, Squash ...) et culturels de l'INRIA au bon déroulement

de la thèse. Merci aux joueurs de Volley (Jean-Pierre, Mathias, Mohammed ...) qui m'ont plus d'une fois permis d'évacuer le trop-plein d'énergie d'une journée de travail.

Je remercie aussi le projet Géophysique ainsi que les thésards de l'IFP pour leur accueil et leur disponibilité. Je tiens tout particulièrement à remercier les stages de formation de l'ENSPM qui m'ont permis une approche plus "géophysique" de ma thèse (parfois un peu "géologue" s'il faut en croire les Palois et les Anglais...)

Je tiens aussi à remercier Viola Carter, Juliette Artru et toutes les personnes que j'ai rencontrées à Caltech pour leur formidable accueil ainsi que pour les visites et balades (un Grand Canyon inoubliable) qui m'ont permis de voir la Californie autrement qu'assise derrière un écran d'ordinateur.

Je n'oublie pas, bien sûr, nos secrétaires : Muriel, Helena, Sandrine et Sylvie. Merci pour leur disponibilité, les discussions que nous avons pu avoir et pour leur bonne humeur.

Je finirai cette page par un grand merci à ma famille et mes amis pour toutes les joies qu'il m'a été donné de vivre pendant ces trois ans.

Table des matières

Introduction **vii**

I Modélisation de la Propagation d'Ondes par Eléments Finis Mixtes Spectraux. **1**

1 Présentation de la méthode en acoustique **3**
1.1 Présentation des méthodes d'éléments finis hexaédriques 4
1.1.1 Méthode d'éléments finis hexaédriques d'ordre élevé $\mathcal{C}_0$ 5
1.1.1.1 Sur $\hat{K}$ 6
1.1.1.2 Sur Ω 7
1.1.2 Méthode des éléments finis spectraux 8
1.2 La méthode des éléments finis mixtes spectraux 11
1.2.1 Mise en place d'une formulation mixte 12
1.2.2 Introduction d'un nouvel espace d'approximation 13
1.2.3 Approximation semi-discrète en espace 14
1.2.3.1 Calcul des matrices de masse 16
1.2.3.2 Calcul de la matrice de rigidité 17
1.2.4 Conclusion 17
1.3 Théorème d'équivalence entre les éléments finis spectraux et mixtes spectraux 18

2 Approximation en temps du schéma obtenu en acoustique **23**
2.1 Résultat de stabilité 24
2.2 Comparaison de 3 algorithmes 25
2.2.1 Présentation des trois algorithmes 25
2.2.2 Comparaison du stockage 26
2.2.3 Comparaison des temps CPU 27
2.2.4 Conclusion 30

3 Application de la méthode à l'élastodynamique linéaire **31**
3.1 Reformulation du problème 32
3.2 Formulation variationnelle et conservation de l'énergie 35
3.2.1 Formulation variationnelle 35
3.2.2 Conservation de l'énergie 36
3.3 Semi-discrétisation en espace 38
3.4 Généralisation du théorème d'équivalence avec la méthode des éléments finis spectraux 40

4 Approximation en temps du schéma obtenu en élastodynamique **43**
4.1 Résultat de stabilité 44
4.2 Comparaison de 3 algorithmes 47
4.2.1 Présentation des trois algorithmes 47
4.2.2 Comparaison du stockage 47
4.2.3 Comparaison des temps CPU 49
4.2.4 Un exemple numérique 51
4.2.5 Conclusion 52

II Modélisation de milieux non-bornés par les Perfectly Matched Layers (PML) **53**

5 Mise en place des PML **55**
5.1 En acoustique 57
5.1.1 Mise en place d'une formulation dans les PML 58
5.1.2 Discrétisation 64
5.1.3 Couplage Domaine-PML 66
5.2 En élastodynamique 67
5.2.1 Formulation d'ordre 1 en temps 68
5.2.1.1 Mise en place de la formulation dans les PML 68
5.2.1.2 Discrétisation 71
5.2.2 Couplage du système d'ordre 2 en temps avec les PML d'ordre 1 72
5.2.3 Formulation d'ordre 2 en temps 73
5.2.3.1 Mise en place de la formulation dans les PML 74
5.2.3.2 Couplage domaine-PML 76
5.3 Résultats numériques 77
5.3.1 En acoustique 78
5.3.2 En élastodynamique 80
5.3.2.1 En dimension 2 80
5.3.2.2 En dimension 3 84

6 Analyse de stabilité **87**
6.1 Introduction 88
6.2 Orthotropic elastic waves and PML model 89
6.2.1 The elastodynamics system 89
6.2.2 Harmonic plane waves and slowness diagrams 91
6.2.3 The PML model for a general first-order evolution problem 93
6.2.4 The PML Model for elastodynamics 94
6.2.5 Some instructive numerical simulations 95
6.3 A necessary stability condition for PML models associated to general hyperbolic system. Interpretation in terms of slowness curves. 99
6.3.1 Well-posedness and stability : definition and characterization through plane wave analysis 100
6.3.2 A general well-posedness result 103
6.3.3 A high frequency stability analysis 104
6.3.4 Application of the geometrical stability criterion 106

6.3.4.1 Explanation of the observations of section 6.2.5 via the analysis of slowness diagrams. . . . 106
6.3.4.2 Simulation in a whole absorbing domain . . . 107
6.3.4.3 Application to other mathematical models . . . 109
6.3.5 Other instability phenomena via numerical simulations . . . 111
6.4 Stability analysis for the orthotropic elastic model . . . 114
6.4.1 A first high frequency necessary stability condition . . . 116
6.4.2 A second high frequency necessary stability condition . . . 116
6.4.3 A sufficient stability condition . . . 117
6.4.4 Back to the numerical experiments of section 6.3.5 . . . 119

III Analyses **121**

7 Analyse par ondes planes **123**
7.1 Dimension 1 . . . 125
7.1.1 Mise en place de la relation de dispersion . . . 126
7.1.2 Etude de dispersion . . . 127
7.1.3 Détermination des inconnues du problème aux valeurs propres . . . 136
7.1.4 Conclusion dans le cas 1D . . . 146
7.2 Dimensions supérieures . . . 146
7.2.1 Passage de la dimension 1 à la dimension d . . . 148
7.2.2 Conséquence sur l'étude de la relation de dispersion . . . 150
7.2.3 Conclusion dans le cas dD . . . 155
7.3 Conséquences de l'analyse par ondes planes sur l'analyse de stabilité . . . 155
7.3.1 Eléments finis P_1 . . . 156
7.3.2 Eléments finis P_2 . . . 156
7.3.3 Eléments finis P_3 . . . 157
7.3.4 Eléments finis P_r . . . 158

8 Etude de l'influence du choix du maillage au voisinage d'une interface entre deux milieux 159
8.1 Dimension 1 . . . 160
8.1.1 Dans le cas continu . . . 161
8.1.2 Cas d'un maillage adapté . . . 161
8.1.3 Cas d'un maillage non-adapté . . . 166
8.2 Dimensions supérieures . . . 173
8.2.1 Dans le cas continu 2D . . . 173
8.2.2 Cas d'un maillage adapté 2D . . . 174
8.2.3 Un exemple numérique 2D . . . 180

IV Résultats Numériques **183**

9 En acoustique **185**
9.1 Quelques résultats de validation . . . 185
9.1.1 Récepteurs supérieurs . . . 188
9.1.1.1 Etude des temps d'arrivée aux récepteurs . . . 189

9.1.1.2 Etude de l'amplitude des ondes . . . 191
9.1.2 Récepteurs inférieurs . . . 193
9.1.2.1 Etude des temps d'arrivée aux récepteurs . . . 193
9.1.2.2 Etude de l'amplitude des ondes . . . 195
9.2 Un modèle Foothills . . . 197

10 En élastodynamique 201
10.1 Quelques résultats de validation . . . 201
10.1.1 Cohérence des fronts d'onde . . . 202
10.1.2 Cohérence des temps d'arrivée aux récepteurs . . . 204
10.2 Une expérience numérique réaliste 2D . . . 207

V Vers un couplage fluide-structure 211

11 Couplage Fluide-Structure en 2D 213
11.1 Mise en place du système . . . 214
11.2 Semi-discrétisation en espace par la méthode des éléments finis mixtes spectraux . . . 217
11.3 Approximation en temps . . . 221
11.3.1 Schéma explicite . . . 221
11.3.2 Schéma implicite . . . 221
11.3.3 Comparaison des deux schémas . . . 223
11.4 Couplage des PML . . . 224
11.5 Résultats numériques . . . 226
11.5.1 Première expérience . . . 226
11.5.2 Seconde expérience . . . 227
11.5.2.1 Interface plane . . . 228
11.5.2.2 Interface sinusoïdale . . . 230

Conclusion 233

A Démonstration de l'égalité (3.34) 235

B Mise en place de la formulation PML d'ordre d en temps pour le système (5.41) 239

C Démonstrations liées au chapitre 6 243
C.1 Proof of theorem 3 and lemma 3 . . . 243
C.1.1 Proof of theorem 3 . . . 243
C.1.2 Proof of lemma 3 . . . 244
C.2 Proof of lemma 4 . . . 245
C.3 Proof of lemma 5 . . . 246

D Démonstrations des lemmes de la section 7.1.3 249
D.1 Démonstration du lemme 3 . . . 249
D.2 Démonstration du lemme 5 . . . 249
D.3 Démonstration du lemme 7 . . . 250
D.4 Démonstration du lemme 6 . . . 251
D.5 Démonstration du lemme 8 . . . 252

D.6 Démonstration du lemme 9 253
D.7 Démonstration du lemme 11 256

E Démonstrations des lemmes de la section 8.1 **257**
E.1 Démonstration du lemme 18 257
E.2 Démonstration du lemme 19 258

Introduction

Ce travail a été réalisé sous la direction de Mr Gary Cohen de l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique), qui en a été l'initiateur, et effectué en collaboration avec l'IFP (Institut Français du Pétrole), plus particulièrement avec Mme Julie Svay-Lucas (département Géophysique). Il a fait l'objet d'une convention CIFRE entre l'INRIA, l'IFP et l'étudiante.

Problématique : les attentes de l'IFP

L'Institut français du pétrole (IFP) est un centre indépendant de recherche et développement industriel dans les domaines du pétrole, du gaz naturel et de l'automobile, dont les activités couvrent l'ensemble de la chaîne des hydrocarbures : exploration, production, raffinage, pétrochimie, moteurs et utilisation des produits pétroliers. La division de recherche en Géophysique effectue des travaux visant à l'amélioration des performances en exploration et production par une meilleure estimation du sous-sol.

La modélisation de données sismiques synthétiques est une étape incontournable en exploration pétrolière. Tout d'abord, elle constitue un outil essentiel pour la compréhension des phénomènes physiques mis en oeuvre lors des campagnes d'exploration sismique, notamment dans des milieux complexes (phénomènes de conversion d'ondes, influence géométrique des topographies rugueuses, etc...). La modélisation sur des modèles de sous-sol estimés permet également de mener des études de faisabilité avant acquisition sismique (optimisation des paramètres d'acquisition afin d'illuminer la zone réservoir ciblée). Enfin, les données synthétiques sont indispensables pour la validation des nouvelles techniques de traitement de données conduisant à l'imagerie du sous-sol (le modèle synthétique servant de contrôle qualité pour l'image restituée après traitement sur les données synthétiques). En deux dimensions, certains jeux de données synthétiques ont même joué un rôle quasi-historique révélant les insuffisances du traitement sismique dans le cas de structures complexes (Projet IFP "Marmousi 2D").

Cependant, le calcul de données sismiques synthétiques réalistes en 3D et même parfois en 2D est un besoin encore insatisfait. En effet, les nouveaux prospects en exploration pétrolière posent des problèmes particuliers à la modélisation sismique. Pour les prospects en zone montagneuse (ou "Foothills"), les pendages très élevés des couches superficielles et la topographie complexe de la surface libre entraînent des phénomènes de conversion d'ondes de surface et ondes de volume qui doivent impérativement être traités. Dans les prospects de type "sous-volcanique", la vitesse de propagation très élevée ainsi que la topographie irrégulière des coulées basaltiques font écran à la propagation des ondes de compression alors que les ondes de cisaillement converties offrent en général une meilleure pénétration. On signalera également, pour les prospects marins (marine de surface ou en fond de mer), le besoin de modéliser le couplage entre fluide acoustique et solide élastique. Enfin, pour de

tels prospects, il est nécessaire de modéliser la propagation d'ondes sur de larges distances (les offsets d'acquisition actuels dépassent 12 Km), et de préserver la géométrie irrégulière des interfaces, tout en limitant la dispersion numérique.

En résumé, la problématique consiste à modéliser la propagation de champs d'ondes complets acoustiques et élastiques, sur des modèles de caractéristiques géométriques et physiques complexes (topographie, interfaces finement irrégulières, couches minces, forts contrastes de vitesse, roches anisotropes), s'étendant sur quelques centaines de longueurs d'ondes.

Solution proposée

Depuis la résolution par différences finies d'ordre 2 sur des grilles décalées du système de l'élastodynamique, notamment par L. Nicolétis [59] et J. Virieux [75], de nombreuses méthodes d'ordre supérieur ont été développées [7, 8, 43, 54]. Leur but était d'améliorer la précision et de réduire le temps de calcul pour traiter des modèles réalistes 2D et 3D, tenant compte d'une physique (hétérogénéités, anisotropie...) et d'une géométrie (topographie, failles...) complexes. Toutefois, ces méthodes de différences finies, populaires pour leur simplicité, trouvent leurs limites dans le traitement de milieux hétérogènes et de la topographie. Des techniques de lissage apportent des éléments de réponse aux problèmes de discontinuité des matériaux [58] et certaines études récentes se sont intéressées à un traitement plus rigoureux de la topographie [34, 66].

Autre alternative à ce problème, les méthodes d'éléments finis permettent, par l'utilisation de maillages adaptés à la géométrie et à la physique des milieux étudiés, une meilleure approche des domaines complexes. De plus, basées sur des formulations variationnelles des équations, elles offrent l'avantage d'une prise en compte naturelle des conditions aux limites (entre autres, de la propagation des ondes de Rayleigh dans le cas élastique). Elles sont pourtant longtemps apparues comme inutilisables en raison de temps de calcul trop importants. En effet, il fallait inverser, à chaque pas de temps de l'algorithme, une matrice de masse N-diagonale provenant de l'approximation, matrice dont la taille croît avec l'ordre de la méthode et la dimension de l'espace. Cette difficulté fut levée par une technique de condensation de masse fondée sur les formules de quadrature de Gauss-Lobatto [39, 40]. La condensation de masse a été appliquée à de nombreux modèles physiques, dont la propagation des ondes acoustiques [23, 70] et électromagnétiques [24, 25, 32]. L'application de ces méthodes dans le cas de maillages quadrangulaires (en dimension 2) et hexaédriques (en dimension 3) est couramment appelée maintenant "méthode des éléments finis spectraux" [55, 56, 60]. Elle a été utilisée avec succès pour traiter des modèles élastiques avec topographie [52], puis pour des modélisations globales en géophysique terrestre [48, 51].

Dans ce rapport, nous proposons une formulation mixte de cette dernière méthode, fondée sur une réécriture du système de l'élastodynamique linéaire. Cette nouvelle approche mathémati- que, dont on montre l'équivalence avec la méthode des éléments finis spectraux, présente l'avantage d'obtenir un stockage et un temps de calcul réduit, comparable à ceux obtenus par l'algorithme mis en place par Y. Maday, E.M. Ronquist et A.T. Patera [56]. Sa programmation est immédiate et évidente. De plus, sa forme mixte d'ordre 1 en temps permet une introduction naturelle des Perfectly Matched Layers (PML), couches absorbantes parfaitement adaptées permettant la modélisation de milieux non-bornés.

Plan de la thèse

Cette thèse se divise en cinq parties. Une partie des études présentées dans ce mémoire, menées en début de thèse, apparaissent dans le livre de G. Cohen [20].

Première partie : modélisation de la propagation d'ondes par éléments finis mixtes spectraux

La première partie est axée sur la méthode des éléments finis mixtes spectraux.

Cette méthode est introduite dans le cadre de la propagation d'ondes en milieu acoustique, modèle dérivé du système de l'élastodynamique linéaire qui en permet une présentation didactique. La méthode des éléments finis mixtes spectraux appartient à la classe des éléments finis hexaédriques d'ordre élevé $\mathcal{C}_0$ avec condensation de masse. Appliquée à une formulation mixte en vitesse-pression de l'équation des ondes et grâce à un choix judicieux des espaces d'approximation, le schéma obtenu fait intervenir des matrices de rigidité indépendantes des propriétés géométriques et physiques du domaine. Nous montrons que le schéma semi-discret en espace obtenu est équivalent au schéma semi-discret obtenu sur l'équation des ondes d'ordre deux en temps par la méthode des éléments finis spectraux.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à l'approximation en temps du schéma semi-discret obtenu et nous donnons des résultats de stabilité. Le théorème d'équivalence introduit dans le premier chapitre entre la méthode des éléments finis spectraux et la méthode des éléments finis mixtes spectraux nous permet d'introduire trois algorithmes différents de résolution du schéma. Nous en comparons alors le stockage et le temps de calcul.

Dans le troisième chapitre, nous appliquons la méthode des éléments finis mixtes spectraux au système de l'élastodynamique linéaire. La première approche, consistant à chercher les contraintes dans le nouvel espace de discrétisation introduit, n'assure pas la symétrie du tenseur des contraintes. Elle est donc écartée et une nouvelle formulation du système de l'élastodynamique, proche du système mixte utilisé en acoustique, est alors mise en place. La formulation variationnelle de ce nouveau système vérifiant une conservation de l'énergie (section 3.2.2), nous lui appliquons la méthode des éléments finis mixtes spectraux. Le schéma obtenu offre les mêmes avantages au niveau stockage et temps de calcul que celui obtenu en acoustique. Nous généralisons ensuite le théorème d'équivalence entre la méthode des éléments finis mixtes spectraux et la méthode des éléments finis spectraux, démontrée en acoustique, à l'élastodynamique.

Enfin, dans le dernier chapitre de cette première partie, nous proposons une approximation en temps du schéma semi-discret en espace obtenu et nous donnons, là aussi, des résultats de stabilité. Comme pour l'acoustique, le thérorème d'équivalence nous permet d'introduire trois algorithmes de résolution du schéma, dont l'un est, en fait, l'algorithme mis en place par Y. Maday, E.M. Ronquist et A.T. Patera [56] pour la résolution par la méthode des éléments finis spectraux. Une comparaison des temps de calcul et du stockage nécéssaires à chacun de ces algorithmes est alors effectuée.

Deuxième partie : modélisation de milieux non-bornés par les Perfectly Matched Layers (PML)

La deuxième partie de ce mémoire s'intéresse à la modélisation des milieux non-bornés par les techniques de couches absorbantes parfaitement adaptées (PML). Les PML, introduites par J.P. Bérenger au milieu des années quatre vingt-dix pour les équations de Maxwell [14], consiste en l'adjonction, autour de la zone d'intérêt du domaine physique, d'une bande dans laquellle on introduit un coefficient d'absorption. Cette méthode offre l'avantage non-négligeable de ne générer aucune réflexion entre le domaine physique et la PML.

Dans le premier chapitre de cette partie, nous introduisons les PML dans les différents modèles de propagation d'ondes étudiés dans la première partie. Nous montrons que l'introduction de nouvelles variables spécifiques aux PML ne pose aucune difficulté lors de l'application de la méthode des éléments finis mixtes spectraux au système obtenu. Le couplage domaine-PML se fait naturellement. Plusieurs systèmes sont mis en place, aussi bien en acoustique qu'en élastique. Des résultats numériques concluent ce chapitre et montrent le bon fonctionnement de cette technique pour la plupart des matériaux.

Ces résultats numériques montrent aussi que, dans le cas de la propagation d'ondes en milieu élastique orthotrope, des phénomènes d'instabilité peuvent apparaître, bien que les systèmes PML étudiés soient bien posés. C'est l'étude de ces phénomènes non-physiques qui constitue l'objet du chapitre 6, écrit en collaboration avec E. Bécache et P. Joly. Nous nous y intéressons d'un point de vue théorique. Dans un premier temps, nous établissons une condition nécessaire de stabilité pour un système hyperbolique général, qui s'interprète en terme de propriétés géométriques des surfaces de lenteur. Ces considérations géométriques permettent d'expliquer partiellement les instabilités observées avec les ondes élastiques mais aussi avec d'autres modèles de propagation. Nous déterminons alors une condition suffisante de stabilité, exprimée sous forme d'inégalités sur les coefficients élastiques du milieu.

Troisième partie : analyse par ondes planes

La troisième partie est axée sur l'analyse du schéma semi-discret en espace obtenu par la méthode des éléments finis spectraux sur l'équation des ondes. Les schémas obtenus par la méthode des éléments finis spectraux et la méthode des éléments finis mixtes spectraux étant équivalents, tout les résultats obtenus dans cette partie s'appliquent à la méthode mixte. L'étude a été effectuée sur l'équation des ondes, le système de l'élastodynamique donnant lieu à des calculs trop complexes. Elle ne fournit donc pas de résultats théoriques dans le cas élastique mais permet d'intuiter des éléments de réponse.

Dans un premier temps, nous effectuons une analyse par ondes planes du schéma en milieu homogène. Pour cela, nous nous plaçons dans le cas d'un maillage périodique infini de dimension d. Nous montrons que ce cadre particulier d'étude permet de généraliser rapidement tout résultat obtenu en dimension 1 à une dimension quelconque. Nous nous intéressons alors plus particulièrement à la dimension 1. Nous étudions tout d'abord la dispersion numérique du schéma pour des espaces d'approximation Q_r, r variant de 1 à 5. Cette analyse nous permet aussi d'effectuer une analyse de stabilié du schéma en temps. Nous étudions ensuite une forme plus générale de la solution en déterminant les développements limités des vecteurs propres de la relation de dispersion. Parallèlement, nous obtenons le développement limité du vecteur d'onde numérique qui est le premier jalon de l'étude de réflexion-transmission menée dans le chapitre suivant. Cette étude est effectuée de façon générale

pour tout les ordres d'approximation.

La forme générale de la solution du schéma semi-discret en espace nous permet alors de mener une étude de réflexion-transmission. En effet, un maillage régulier d'un domaine complexe étant plus simple à réaliser qu'un maillage adapté aux propriétés physiques et géométriques de celui-ci, nous avons voulu déterminer si le gain de temps de construction du maillage pouvait être compensé par un gain au niveau précision et temps de calcul. De la même façon que pour l'analyse par ondes planes, l'étude des coefficients de réflexion et de transmission dans le cas d'un domaine constitué de deux milieux de vitesses différentes modélisé par un maillage régulier et adapté en dimension 1 se généralise ensuite à la dimension d. Nous montrons la supériorité de l'utilisation d'un maillage adapté.

Quatrième partie : résultats numériques

La quatrième partie de ce mémoire présente différents résultats numériques obtenus tout au long de cette thèse.

Dans les deux chapitres qui la composent (le premier étant consacré à l'acoustique et le second à l'élastodynamique), nous nous intéressons tout d'abord à la validation des codes de résolution par la méthode des éléments finis mixtes spectraux. Cette validation se fait dans le cadre d'applications simples qui permettent une vérification analytique des résultats.

Dans un second temps, nous appliquons les méthodes introduites (modélisation par la méthode des éléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées) à des problèmes géophysiques réalistes. Ces études permettent de montrer l'aptitude de la méthode à résoudre des modèles complexes et réalistes de grande dimension.

Cinquième partie : vers un couplage fluide-structure

Enfin, la cinquième partie de cette thèse s'intéresse au couplage fluide-structure. Cette étude, qui n'était pas prévue au programme de la thèse, a été initialisée par la possibilité d'un échange entre l'IFP, l'INRIA et Caltech (California Institute of Technology, Pasadena, USA), d'une durée de six semaines au sein du laboratoire de séismologie dirigé par J. Tromp. Elle offre un avantage certain à l'IFP en lui permettant d'étudier de façon pertinente certains milieux sismiques.

Nous mettons en place un système de couplage utilisant le nouveau système de l'élastodynami- que introduit dans la première partie. Nous pouvons alors lui appliquer la méthode des éléments finis mixtes spectraux. Un couplage des PML est facilement introduit et sa discrétisa- tion est immédiate. Des résultats numériques valident la méthode et concluent le chapitre.

Première partie

Modélisation de la Propagation d'Ondes par Eléments Finis Mixtes Spectraux.

Chapitre 1

Présentation de la méthode en acoustique

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons à la mise en place d'une méthode d'éléments finis répondant aux critères exposés dans l'introduction de ce mémoire. Nous considérons un domaine d'application simple : la propagation d'ondes en milieu acoustique hétérogène. Ses similitudes avec le système de l'élastodynamique nous permettront d'appliquer ensuite plus naturellement les méthodes numériques introduites à la propagation en milieu élastique.

Nous nous intéressons à la classe des éléments finis hexaédriques d'ordre élevé dans laquelle entrera la nouvelle méthode présentée ici.
La méthode des éléments finis hexaédriques d'ordre élevé $\mathcal{C}^0$, présentée dans la section 1.1.1, est pénalisée par le fait que la matrice de masse obtenue est N-diagonale, N augmentant avec la dimension de l'espace et l'ordre d'approximation. Ainsi, après discrétisation en temps, le schéma implicite obtenu nécessite soit l'inversion de cette matrice à chaque pas de temps (très coûteux en temps de calcul), soit le stockage de l'inverse de la matrice de masse qui est une matrice pleine (très coûteux en place mémoire).
Cette difficulté a été résolue en utilisant les points de quadrature de Legendre-Gauss-Lobatto en tant que points d'interpolation et en calculant les matrices intervenant dans le schéma par intégration numérique de Gauss-Lobatto. On obtient alors une condensation de masse [23, 70] et un schéma explicite. Cette méthode, intitulée "méthode des éléments finis spectraux" est présentée dans la section 1.1.2. Elle a été appliquée avec succès aux équations de l'élastodynamique par Maday et Ronquist [56] et Komatitsch et Vilotte [52]. Toutefois, la matrice de rigidité reste volumineuse.

Dans la section 1.2, nous proposons une méthode dérivée de la méthode des éléments finis spectraux et basée sur une formulation mixte de l'équation des ondes. Grâce à un choix judicieux d'espace d'approximation pour la nouvelle inconnue introduite, on obtient une matrice de rigidité dont les termes se déduisent d'intégrales définies sur l'élément de référence. Elle ne dépend donc pas du milieu étudié. Nous montrons dans la section 1.3 que la "méthode des éléments finis mixtes spectraux" et la méthode des éléments finis spectraux, pour un même ordre d'approximation et un même milieu, donnent les mêmes résultats. Cette nouvelle méthode est, en fait, une reformulation de la méthode des éléments finis spectraux.
Ce chapitre a fait l'objet d'une publication [21].

Nous considérons donc le problème en dimension d quelconque ($d = 2$ ou 3) suivant :

Trouver $p : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\mathbf{x},t) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t) \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{1.1a}$$

$$p = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \tag{1.1b}$$

$$p(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{1.1c}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{1.1d}$$

où :

- p représente la pression dans le fluide,
- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$,
- $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1..d}$ désigne les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$,
- ρ est la masse volumique du milieu fluide, exprimée en $\mathrm{Kg.m^{-3}}$,
- μ est le module de compressibilité du milieu, exprimé en Pa, et vérifie : $\mu = \rho\, c^2$ où c est la vitesse de l'onde dans le milieu (en $\mathrm{m.s^{-1}}$).

1.1 Présentation des méthodes d'éléments finis hexaédriques

Cet exposé demande la définition de différents concepts et notations. Nous nous plaçons en dimension d.

Remarque 1 *Nous ferons la différence entre hexaèdre ($d = 3$) et quadrangle ($d = 2$) lorsque la dimension de l'espace est spécifiée, mais utiliserons la dénomination "hexaèdre" dans le cas général, en sous-entendant, bien sûr, "quadrangle" lorsque la méthode est appliquée en dimension 2.*

On considère :

- l'espace $C^0(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω,
- une partition de Ω en hexaèdres : $\mathcal{T} = \cup_{i=1}^{N_e} K_i$ telle que l'ensemble des hexaèdres forme un maillage conforme du domaine (la figure 1.1 nous en donne un exemple pour $d = 2$),
- le carré unité $\hat{K} = [0,1]^d$ et $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_i)_{i=1..d}$ le système de coordonnées associé,
- $\mathbf{F}_i$ l'application vectorielle transformant $\hat{K}$ en K_i [1] (voir figure 1.2 pour $d = 2$),
- l'espace $Q_r(\hat{K})$ des polynômes à coefficients réels et à variables dans $\hat{K}$, dont chaque variable est de degré inférieur ou égal à r, soit :

$$Q_r(\hat{K}) = \left\{ \sum_{\mathbf{l} \in \{0,\dots,r\}^d} a_{\mathbf{l}} \prod_{i=1}^{d} \hat{x}_i^{l_i} \,|\, a_{\mathbf{l}} \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{l} = (l_1,\dots,l_d) \in \{0\dots r\}^d \right\} \tag{1.2}$$

- L'espace d'approximation

$$U_d^r = \left\{ \varphi \in C^0(\Omega) \text{ tel que } \varphi_{|K_i} \circ \mathbf{F}_i \in Q_r(\hat{K}) \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \tag{1.3}$$

Remarque 2 *Afin d'alléger les notations, nous noterons dorénavant en gras :* $\mathbf{l}$ *tout d-uplet* $(l_1,\dots,l_d)$.

[1] Les K_i peuvent éventuellement être à frontières courbes.

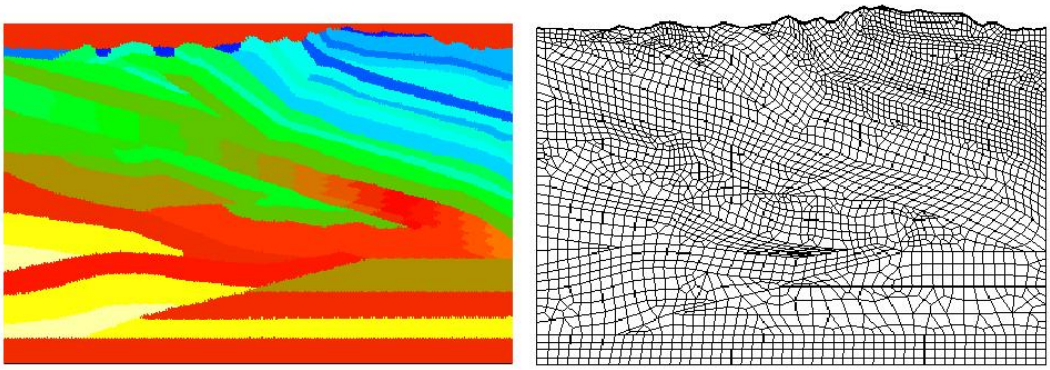


FIG. 1.1: Exemple de maillage quadrangulaire pour $d = 2$ (à droite) adapté à un milieu donné (à gauche).

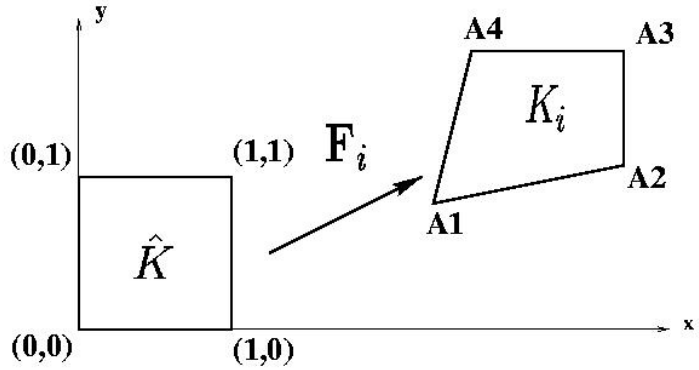


FIG. 1.2: La transformation $\mathbf{F}_i$ en 2D.

1.1.1 Méthode d'éléments finis hexaédriques d'ordre élevé $\mathcal{C}_0$

Ecrivons tout d'abord la formulation variationnelle associée au problème (1.1a)-(1.1d).
En multipliant l'équation (1.1a) par une fonction test φ définie sur Ω et dont les propriétés seront définies ultérieurement, nous obtenons, formellement :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_\Omega \frac{1}{\mu} p\,\varphi\,d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\varphi\,d\mathbf{x} = \int_\Omega f\,\varphi\,d\mathbf{x} \tag{1.4}$$

Nous intégrons alors par partie le second terme de l'équation (1.4) et obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_\Omega \frac{1}{\mu} p\,\varphi\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot\nabla\varphi\,d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot\vec{n}\,\varphi\,ds = \int_\Omega f\,\varphi\,d\mathbf{x} \tag{1.5}$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure au domaine et s est l'abscisse curviligne définie sur $\partial\Omega$.

Nous faisons intervenir une intégration $L^2(\Omega)$ de p et de ∇p. De plus, nous imposons $p = 0$ sur $\partial\Omega$ (voir équation (1.1b)). p sera donc cherché dans $H_0^1(\Omega)$. De même, les fonctions tests φ seront prises dans cet espace, ce qui annulera le terme de bord dans (1.5). De ce fait, les conditions aux limites seront prises en compte de façon naturelle dans la formulation.

Nous obtenons alors la formulation variationnelle :

Trouver $p \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ tel que :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\int_\Omega \frac{1}{\mu} p\,\varphi\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\nabla\varphi\,d\mathbf{x} = \int_\Omega f\,\varphi\,d\mathbf{x} \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Nous pouvons alors écrire le problème approché suivant :

Trouver $p_h \in L^\infty(0,T;U_d^r)$ tel que

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\int_\Omega \frac{1}{\mu} p_h\varphi_h d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{1}{\rho}\nabla p_h\cdot\nabla\varphi_h d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi_h d\mathbf{x} \quad \forall\varphi_h \in U_h^r \tag{1.6a}$$

$$p_h(\mathbf{x},0) = 0 \quad \forall\mathbf{x}\in\Omega \tag{1.6b}$$

$$\frac{\partial p_h}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0 \quad \forall\mathbf{x}\in\Omega \tag{1.6c}$$

p_h est alors décomposé sur une base $\mathcal{B}_U$ de U_d^r. Définissons cette base.
Les fonctions appartenant à U_d^r sont définies par transformation suivant $\mathbf{F}_i$ de fonctions appartenant à $Q_r(\hat{K})$. Nous allons donc construire une base de $Q_r(\hat{K})$ puis en déduire $\mathcal{B}_U$.

1.1.1.1 Sur $\hat{K}$

$Q_r(\hat{K})$ étant de dimension $(r+1)^d$ et composé de polynômes de degré inférieur ou égal à r en chacune des d variables de $\hat{K}$, il suffit de définir $(r+1)^d$ points sur $\hat{K}$ et de considérer la base composée des fonctions d'interpolation de Lagrange $(\hat{\varphi}_j)_{j=1..(r+1)^2}$, qui vérifient :

$$\hat{\varphi}_j(\hat{\mathrm{x}}_l) = \delta_{j,l},$$

où $(\hat{\mathrm{x}}_l)_{l=1..(r+1)^d}$ sont les points d'interpolation. Classiquement, ce sont des points régulièrement distribués sur $\hat{K}$ (représentés pour $r=5$ et $d=2$, dans la figure 1.3).

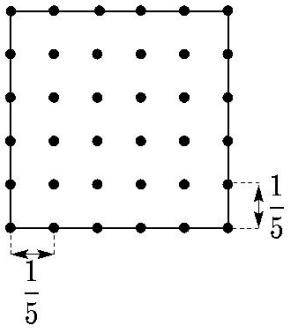


FIG. 1.3: Points d'interpolation pour la méthode d'éléments finis quadrangulaires classique d'ordre élevé $\mathcal{C}^0$, avec $r=5$ et $d=2$.

1.1.1.2 Sur Ω

On définit les degrés de liberté de p_h : $(p_j)_{j=1..N}$ (N étant le nombre de degrés de liberté du maillage) comme la valeur de p_h aux points de Ω définis comme les images par les fonctions $(\mathbf{F}_i)_{i=1..N_e}$ des points d'interpolation définis sur $\hat{K}$.

Remarque 3 *On appellera abusivement aussi, dans le reste de ce rapport, "degrés de liberté" les images par les fonctions $(\mathbf{F}_i)_{i=1..N_e}$ des points d'interpolation $(\hat{\mathrm{x}}_l)_{l=1..(r+1)^d}$.*

On définit alors $\mathcal{B}_U$ comme l'ensemble des fonctions $(\varphi_j)_{j=1..N}$ telles que :

- le support de φ_j est composé de l'ensemble des hexaèdres K_i contenant le $j$ème degré de liberté du maillage,
- l'image par $\mathbf{F}_i^{-1}$ de la restriction de φ_j à chaque élément de son support est une fonction de base de $Q_r(\hat{K})$.

On décompose alors p_h dans $\mathcal{B}_U$:

$$p_h = \sum_{j=1}^{N} p_j \varphi_j$$

On introduit cette décomposition dans l'équation (1.6a), pour toute fonction φ_h fonction de base de U_d^r. On ramène le calcul des intégrales par changement de variables à des intégrations sur l'élément de référence et on obtient le schéma semi-discret suivant :

$$M_{d,r}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t^2} + K_{d,r}\mathbf{P}_h = \mathbf{F}_h \tag{1.7}$$

où :

- $\mathbf{P}_h$ est le vecteur des composantes de p_h sur $\mathcal{B}_U$,
- $M_{d,r}$ est la matrice de masse. Chacun de ses termes est calculé par intégration sur Ω du produit de deux fonctions de base de U_d^r pondéré par $1/\mu$.
- $K_{d,r}$ est la matrice de rigidité. Chacun de ses termes est calculé par intégration sur Ω du produit scalaire des gradients de deux fonctions de base de U_d^r pondéré par $1/\rho$.
- $\mathbf{F}_h$ est le vecteur source. Chacun de ses termes est calculé par intégration numérique sur Ω du produit de la fonction source f avec une fonction de base de U_d^r.

Remarque 4 *$M_{d,r}$ et $K_{d,r}$ sont symétriques.*

Remarque 5 *Dans la notation des matrices de masse et de rigidité, d se rapporte à la dimension de l'espace et r à l'ordre d'approximation de la méthode.*

Après discrétisation en temps par un schéma saute-mouton classique avec un pas de temps Δt, nous obtenons le schéma :

$$\mathbf{P}_h^{n+1} = 2\mathbf{P}_h^n - \mathbf{P}_h^{n-1} - \Delta t^2 M_{d,r}^{-1}\left[K_{d,r}\mathbf{P}_h^n - \mathbf{F}_h^n\right] \tag{1.8}$$

Or, la matrice $M_{d,r}$ intervenant dans cette égalité est une matrice N-diagonale dont l'inverse est une matrice pleine.
Deux possibilités s'offrent alors à nous : stocker une fois pour toute l'inverse de la matrice de masse, ce qui est très coûteux en place mémoire, ou l'inverser à chaque pas de temps, ce qui est très coûteux en temps de calcul.

Du fait de la croissance de N avec l'ordre de la méthode et la dimension de l'espace, ce schéma devient rapidement très coûteux algorithmiquement.

La condensation de masse permet de résoudre ce problème d'inversion en diagonalisant la matrice de masse.

1.1.2 Méthode des éléments finis spectraux

La condensation de masse est basée sur l'utilisation d'une formule d'intégration numérique pour calculer les intégrales présentes dans la matrice de masse. L'utilisation d'une telle formule s'accompagne d'une perte de précision sur les coefficients de la matrice. Or, nous ne voulons pas diminuer l'ordre d'approximation de la méthode numérique. Celle-ci admet une erreur L^2 au plus en $O(h^{r+1})$ (voir, entre autres, [4, 5]) pour une approximation $Q_r(\hat{K})$. Un théorème de Ciarlet nous montre que, si on utilise des éléments finis $Q_r(\hat{K})$, il faut faire appel à une formule d'intégration numérique exacte pour les polynômes de degré $2r-1$ pour garder l'ordre d'approximation du schéma ([19]). Les formules d'intégration de Gauss-Lobatto répondent à ce critère. Nous ne perdrons pas en précision par rapport à la méthode présentée dans la section 1.1.1 en utilisant cette formule d'intégration numérique.

Le deuxième point important de cette méthode est de faire coïncider les points d'interpolation et les points de quadrature des formules d'intégration. Ainsi, les $\hat{\mathrm{x}}_l$ considérés précédemment sont remplacés par les points de Gauss-Lobatto en dimension d. Ceux-ci, notés $\hat{\xi}_{\mathbf{l}}$, sont définis par $\hat{\xi}_{\mathbf{l}} = (\hat{\xi}_{l_1}, ..., \hat{\xi}_{l_d})$ avec $\mathbf{l} = (l_1, ..., l_d)$, où $\hat{\xi}_p$ correspond à la $(p-1)$-ième racine de la dérivée du polynôme de Legendre d'ordre r, de poids associé $\hat{\omega}_p$, $\hat{\xi}_1 = 0$, $\hat{\xi}_{r+1} = 1$ et :

$$\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_{r+1} = \left(1 - \sum_{i=2}^{r} \hat{\omega}_i\right)/2$$

Les poids associés à ces points en dimension d sont notés $\hat{\omega}_{\mathbf{l}} = \prod_{p=1}^{d} \hat{\omega}_{l_p}$.

Remarque 6 *Les points et poids de Gauss-Lobatto en dimension* 1 *sont donnés pour r variant de* 1 *à* 5 *dans le tableau 1.1.*

Nous obtenons donc $(r+1)^d$ points et poids. Ces points sont représentés, pour $r = 5$ et $d = 2$, dans la figure 1.4.

Remarque 7 *Un autre point de vue consiste en l'utilisation des polynômes de Chebyshev en tant que fonctions de base [63]. Cette technique ne mène toutefois pas à la condensation de la matrice de masse.*

Mettons en place quelques notations pour la suite de l'exposé.

- Nous avons vu que les degrés de liberté de p_h sont les valeurs de la solution aux points images des $\hat{\xi}_{\mathbf{p}}$ par les applications $\mathbf{F}_i$.
  Définissons donc deux fonctions : $\mathbf{loc}_i$ et $glob_i$, permettant de passer de la numérotation "globale" sur K_i à la numérotation "locale" sur $\hat{K}$, et inversement :

$$\forall i = 1..N_e \qquad \begin{cases} \forall j = 1..N & \mathbf{loc}_i(j) = \mathbf{p} = (p_1, ..., p_d) \\ \forall \mathbf{p} = (p_1, ..., p_d)_{p_1,...,p_d \in \{1..(r+1)\}} & glob_i(\mathbf{p}) = j \end{cases}$$

  avec $\mathbf{F}_i(\hat{\xi}_{\mathbf{p}}) = \xi_j$, degré de liberté de p_h, et N la dimension de U_d^r.

	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$
$\hat{\xi}_1$	0	0	0	0	0
$\hat{\omega}_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
$\hat{\xi}_2$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{7-\sqrt{21}}{14}$	$\frac{21-\sqrt{147+42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{14-\sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_3$		1	$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{21-\sqrt{147-42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_3$		$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{14+\sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_4$			1	$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	$\frac{21+\sqrt{147-42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_4$			$\frac{1}{12}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{14+\sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_5$				1	$\frac{21+\sqrt{147+42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_5$				$\frac{1}{20}$	$\frac{14-\sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_6$					1
$\hat{\omega}_6$					$\frac{1}{30}$

TAB. 1.1: Points et poids de Gauss-Lobatto, en dimension 1, r variant de 1 à 5.

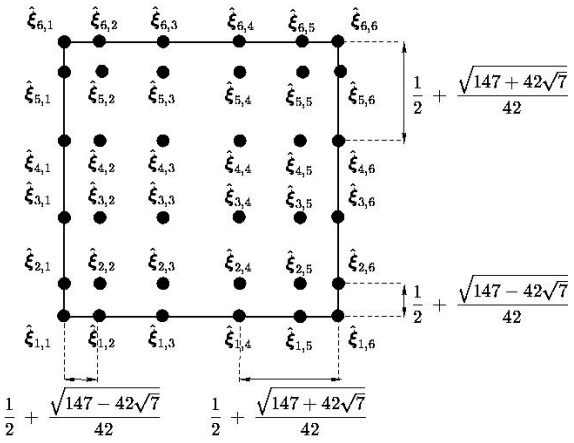


FIG. 1.4: Points d'interpolation pour la méthode des éléments finis spectraux avec $r = 5$ et $d = 2$.

Remarque 8 *La numérotation utilisée sur $\hat{K}$ fait bien ressortir le fait que les points d'interpolation sur $\hat{K}$ sont les produits cartésiens de points définis en dimension* 1. *Par contre, sur K_i, les hexaèdres utilisés pour le maillage étant quelconques, on ne peut pas définir les degrés de liberté globaux par produit cartésien de points en dimension* 1. *La numérotation des degrés de libertés globaux (et donc de leur correspondant géométrique) se fait donc à partir d'un unique nombre, variant de* 1 *au nombre de degrés de liberté du maillage.*

– Soient $(\varphi_j)_{j=1..N}$ les fonctions de base de U_d^r. Elles sont définies de la façon suivante :

$$\varphi_j = \sum_{i\in\{1..N_e\}|\xi_j\in K_i} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(j)} \circ \mathbf{F}_i \tag{1.9}$$

où les $\hat{\varphi}_{\mathbf{p}}$ sont les fonctions d'interpolation de Lagrange de zéros $(\hat{\xi}_{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}\neq\mathbf{p}}$.

Remarque 9 *Comme $\hat{\xi}_{\mathbf{q}} = (\hat{\xi}_{q_1}, ..., \hat{\xi}_{q_d})$, les fonctions $\hat{\varphi}_{\mathbf{p}}$ peuvent s'écrire comme le produit de d fonctions $\hat{\varphi}_{p_i}$ définies sur $[0,1]$, ne dépendant que de x_i et telles que $\hat{\varphi}_{p_i}(\hat{\xi}_{q_j}) = \delta_{p_i,q_j}$*

– Soit $\mathcal{S}_j$ le support de φ_j. Il est définit par :

$$\mathcal{S}_j = \left\{K_i | i \in \{1..N_e\} \quad \text{et} \quad \xi_j \in K_i\right\} \tag{1.10}$$

Après décomposition de p_h dans la nouvelle base de U_d^r, nous obtenons le problème semi-discret suivant, qui a la même forme que celui obtenu avec une méthode d'éléments finis classique hexaédrique d'ordre élevé :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t^2} + K_{d,r}\mathbf{P}_h = \mathbf{F}_h \tag{1.11}$$

Les matrices et vecteurs intervenant dans (1.11) ont la même signification que dans le paragraphe (1.1.1).

Intéressons nous à présent au terme général de la matrice de masse et au terme général de la matrice de rigidité.

Après décomposition des intégrales en somme sur les hexaèdres et après avoir ramené les intégrales élémentaires sur $\hat{K}$ par le changement de variables induit par $\mathbf{F}_i$, nous obtenons :

$$D_{j,k} = \sum_{i/\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k \cap K_i \neq \phi} \int_{\hat{K}} \frac{1}{\mu \circ \mathbf{F}_i} |J_i| \, \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(j)} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(k)} \, d\hat{\mathbf{x}} \tag{1.12}$$

et

$$K_{j,k} = \sum_{i/\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k \cap K_i \neq \phi} \int_{\hat{K}} \frac{1}{\rho \circ \mathbf{F}_i} |J_i| \, D\mathbf{F}_i^{-1} D\mathbf{F}_i^{*-1} \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(j)} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(k)} \, d\hat{\mathbf{x}} \tag{1.13}$$

où J_i est le jacobien de $\mathbf{F}_i$.

Nous utilisons à présent les formules d'intégration numérique de Gauss-Lobatto pour calculer les termes de la matrice de masse et obtenons :

$$\begin{aligned}
D_{j,k} &= \sum_{i/\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k \cap K_i \neq \phi} \sum_{\mathbf{l} \in \{1,..,r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{l}} \frac{1}{\mu \circ \mathbf{F}_i}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \; |J_i|(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \, \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(j)}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \, \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(k)}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \\
&= \sum_{i/\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k \cap K_i \neq \phi} \sum_{\mathbf{l} \in \{1,..,r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{l}} \frac{1}{\mu \circ \mathbf{F}_i}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \; |J_i|(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \, \delta_{\mathbf{loc}_i(j),\mathbf{l}} \, \delta_{\mathbf{loc}_i(k),\mathbf{l}} \\
&= \sum_{i/\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k \cap K_i \neq \phi} \hat{\omega}_{\mathbf{loc}_i(j)} \frac{1}{\mu}(\xi_j) \; |J_i|(\hat{\xi}_{\mathbf{loc}_i(j)}) \, \delta_{\mathbf{loc}_i(k),\mathbf{loc}_i(j)} \\
&= \frac{1}{\mu}(\xi_j) \, \delta_{j,k} \sum_{i/\mathcal{S}_j \cap K_i \neq \phi} \hat{\omega}_{\mathbf{loc}_i(j)} \; |J_i|(\hat{\xi}_{\mathbf{loc}_i(j)})
\end{aligned}$$

On obtient donc bien une matrice de masse diagonale.

Le problème de la matrice de masse étant résolu, intéressons nous à la matrice de rigidité. Après calcul du terme général de la matrice par intégration numérique, nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned}
K_{j,k} \quad = \quad & \sum_{i/\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k \cap K_i \neq \phi} \sum_{\mathbf{l} \in \{1,..,r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{l}} \frac{1}{\rho}(\xi_{glob_i(\mathbf{l})}) \; |J_i|(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \, D\mathbf{F}_i^{-1}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \, D\mathbf{F}_i^{*-1}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \\
& \times \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(j)}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}}) \cdot \hat{\nabla} \, \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(k)}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}})
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Généralement, les intéractions entre les fonctions de base qui apparaissent dans la formule (1.14) sont toutes non-nulles pour des hexaèdres quelconques. Ainsi, nous obtenons une matrice relativement pleine (au mieux $(2r+1)^d$-diagonale).

1.2 La méthode des éléments finis mixtes spectraux

Nous allons réduire le stockage de la matrice de rigidité qui intervient dans la méthode des éléments finis spectraux en utilisant une forme mixte de l'équation (1.1a). Nous choisirons alors un espace d'approximation adéquat pour la nouvelle inconnue introduite afin d'obtenir de bonnes propriétés de stockage.

1.2.1 Mise en place d'une formulation mixte

Nous pouvons écrire l'équation (1.1a) sous les formes mixtes suivantes :

- *Système du premier ordre*

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\cdot\mathbf{v} = F \qquad \text{dans } \Omega\times[0,T]\,, \tag{1.15a}$$

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla p \qquad \text{dans } \Omega\times[0,T]\,, \tag{1.15b}$$

$$p = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega\times[0,T]\,, \tag{1.15c}$$

$$p(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{1.15d}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{1.15e}$$

  où F est la primitive en temps du second membre de (1.1a).
  $\mathbf{v}$ représente le champ de vitesse dans le fluide.

  Remarque 10 *Le système (1.15a)-(1.15b) correspond à la forme initiale de l'équation de l'acoustique telle qu'elle est dérivée des équations d'Euler.*

- *Système du second ordre*

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla\cdot\mathbf{w} = f \qquad \text{dans } \Omega\times[0,T]\,, \tag{1.16a}$$

$$\rho\,\mathbf{w} = \nabla p \qquad \text{dans } \Omega\times[0,T]\,, \tag{1.16b}$$

$$p = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega\times[0,T]\,, \tag{1.16c}$$

$$p(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{1.16d}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega. \tag{1.16e}$$

  $\mathbf{w}$ représente ici le champ d'accélération dans le fluide.

Nous nous intéressons dorénavant au système d'ordre 1 en temps. L'étude peut facilement être appliquée au système du second ordre.

Ecrivons la formulation variationnelle associée au système (1.15a)-(1.15b). Nous multiplions (1.15a) par une fonction test scalaire φ et (1.15b) par une fonction test vectorielle ψ. Les deux fonctions tests sont définies sur Ω. Nous obtenons, formellement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \frac{1}{\mu}p\,\varphi\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi\,d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega}\mathbf{v}\cdot\overrightarrow{n}\,\varphi\,ds = \int_\Omega F\,\varphi\,d\mathbf{x} \tag{1.17a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\,\mathbf{v}\cdot\psi\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla p\cdot\psi\,d\mathbf{x} \tag{1.17b}$$

où $\overrightarrow{n}$ est la normale extérieure au domaine et s est l'abscisse curviligne définie sur $\partial\Omega$.

Comme dans le cas de la méthode des éléments finis spectraux, nous faisons intervenir une intégration L^2 de p et de ∇p et imposons $p = 0$ au bord de Ω (1.15c). p sera donc cherché dans $H_0^1(\Omega)$ et les fonctions tests seront prises dans cet espace, ce qui annulera le terme de bord de l'équation (1.17a).
Nous ne faisons, par contre, intervenir qu'une intégration L^2 de $\mathbf{v}$ et de ψ. $\mathbf{v}$ sera donc pris dans

$\left[L^2(\Omega)\right]^d$, ainsi que les fonctions test vectorielles.
Nous obtenons alors la formulation variationnelle :

Trouver $p \in L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ et $\mathbf{v} \in L^\infty\left(0,T;\left[L^2(\Omega)\right]^d\right)$ tels que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega \frac{1}{\mu}\, p\,\varphi\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi\, d\mathbf{x} = \int_\Omega F\varphi\, d\mathbf{x} \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{1.18a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega \rho\,\mathbf{v}\,\psi\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla p\cdot\psi\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi \in \left[L^2(\Omega)\right]^d \tag{1.18b}$$

1.2.2 Introduction d'un nouvel espace d'approximation

Nous nous plaçons dans le cadre défini en (1.1.2). L'espace d'approximation choisi pour p : U_d^r est le même que précédemment (équation (1.3)), ainsi que la base de cet espace : $\mathcal{B}_U$.
Intéressons nous plus particulièrement à la nouvelle inconnue $\mathbf{v}$. Posons :

$$V_d^r = \left\{\mathbf{v} \in \left[L^2(\Omega)\right]^d ; \mathbf{v}|_{K_i}\circ\mathbf{F}_i \text{vérifiant des propriétés à définir}\right\} \tag{1.19}$$

Nous étudions le problème approché :

Trouver $p_h \in L^\infty\left(0,T;U_d^r\right)$ et $\mathbf{v}_h \in L^\infty\left(0,T;V_d^r\right)$ tels que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega \frac{1}{\mu}\, p_h\,\varphi_h\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{v}_h\cdot\nabla\varphi_h\, d\mathbf{x} = \int_\Omega F\varphi_h\, d\mathbf{x} \qquad \forall\varphi_h \in U_d^r \tag{1.20a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega \rho\,\mathbf{v}_h\psi_h\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla p_h\cdot\psi_h\, d\mathbf{x} \qquad \forall\psi_h \in V_d^r \tag{1.20b}$$

$$p(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \forall\mathbf{x}\in\Omega \tag{1.20c}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \forall\mathbf{x}\in\Omega \tag{1.20d}$$

Déterminons, à présent, les propriétés de l'espace V_d^r qui nous permettraient de réduire le stockage de la matrice de rigidité. Notons $\mathcal{B}_V$ la base de V_d^r.
Après décomposition de p dans $\mathcal{B}_U$ et décomposition de $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{B}_V$, nous obtenons un système matriciel qui fait intervenir deux matrices de rigidité transposées l'une de l'autre : la matrice de rigidité de la première équation ayant comme terme général l'intégrale sur Ω du produit scalaire d'une fonction de $\mathcal{B}_V$ par le gradient d'une fonction de $\mathcal{B}_U$ et la matrice de rigidité de la seconde équation ayant pour terme général l'intégrale sur Ω du produit scalaire du gradient d'une fonction de $\mathcal{B}_U$ par une fonction de $\mathcal{B}_V$.
Comme dans le cas de la méthode des éléments finis spectraux, les intégrales intervenant dans les matrices du problème matriciel sont calculées par intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto.

Ainsi, si l'on considère une fonction φ_h de $\mathcal{B}_U$ et une fonction ψ_h de $\mathcal{B}_V$, le terme général de la matrice de rigidité de la première équation (la matrice de rigidité de la seconde équation aura donc les mêmes propriétées) s'obtient à partir d'intégrations numériques sur des intégrales de la forme :

$$\int_\Omega \psi_h(\mathbf{x})\cdot\nabla\varphi_h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Or, après décomposition de l'intégrale sur Ω par une somme d'intégrales sur tous les hexaèdres du maillage, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi_h \cdot \nabla \varphi_h \, d\mathbf{x} &= \sum_{i/\mathcal{S}_j \cap Supp(\psi_h) \cap K_i \neq \phi} \int_{\hat{K}} |J_i| \; \psi_{h|K_i} \circ \mathbf{F}_i \cdot D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \, \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(j)} \, d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{i/\mathcal{S}_j \cap Supp(\psi_h) \cap K_i \neq \phi} \int_{\hat{K}} |J_i| \; D\mathbf{F}_i^{-1} \, \psi_{h|K_i} \circ \mathbf{F}_i \cdot \hat{\nabla} \, \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(j)} \, d\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

V_d^r étant un sous-espace de $\left[L^2(\Omega)\right]^d$, nous choisissons de définir chaque fonction de base de cet espace sur un élément seulement du maillage. Ainsi, le terme somme de la formule précédente disparaît et il reste, au plus, une intégrale sur $\hat{K}$ à calculer.
Si l'on impose alors $|J_i| \; D\mathbf{F}_i^{-1} \, \psi_{h|K_i} \circ \mathbf{F}_i$ indépendant de l'élément K_i, nous obtenons une matrice de rigidité qui ne dépend pas du maillage.
Posons donc :

$$V_d^r = \left\{ \mathbf{v} \in \left[L^2(\Omega)\right]^d \text{ tel que } |J_i| \; D\mathbf{F}_i^{-1} \, \mathbf{v}_{|K_i} \circ \mathbf{F}_i \in \left[Q_r(\hat{K})\right]^d \right\} \tag{1.21}$$

Remarque 11 *La transformation qui, à un vecteur* $\hat{\mathbf{v}}$ *défini sur* $\hat{K}$ *associe un vecteur* $\mathbf{v}$ *défini sur* K_i *par :*

$$\mathbf{v} = \frac{1}{|J_i|} D\mathbf{F}_i \, \hat{\mathbf{v}}$$

est une transformation locale équivalente à la transformation conforme-$H(\mathrm{div})$*, au signe de* J_i *près.*

1.2.3 Approximation semi-discrète en espace

Nous avons défini les fonctions de base de U_d^r par transformation de fonctions de base de $Q_r(\hat{K})$. D'après la définition de V_d^r, nous pouvons opérer de la même façon pour déterminer $\mathcal{B}_V$. Ses fonctions de bases peuvent se définir par transformation de fonctions de base de $[Q_r(\hat{K})]^d$.
Le choix le plus simple consiste à prendre comme base de $[Q_r(\hat{K})]^d$ l'ensemble des produits de fonction de base de $Q_r(\hat{K})$ par l'un des d vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Nous notons alors $\left(\psi^i_{\mathbf{p},l}\right)^{i=1..N_e}_{\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_d),\, l=1..d}$ les fonctions de base de V_d^r définies par :

$$|J_i| \; D\mathbf{F}_i^{-1} \, \psi^i_{\mathbf{p},l} \circ \mathbf{F}_i = \hat{\varphi}_{\mathbf{p}} \, \overrightarrow{e_l}$$

où $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_d})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Remarque 12 *Les fonctions* $\psi^i_{\mathbf{p},l}$ *dépendent donc de trois paramètres : i désigne l'indice de l'hexaèdre support de la fonction,* $\mathbf{p}$ *désigne l'indice du degré de liberté scalaire associé et l désigne le vecteur de la base canonique associé.*

Définissons, à présent, les degrés de liberté vectoriels (associés à $\mathbf{v}_h$). Soit $\xi_{glob_i(\mathbf{j})}$ l'image, par $\mathbf{F}_i$, de $\xi_{\mathbf{j}}$ et soit $\mathcal{B}_{glob_i(\mathbf{j})}$ la base définie comme l'image par $1/|J_i| \, D\mathbf{F}_i$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On définit alors les degrés de liberté de $\mathbf{v}_h$ comme l'ensemble des valeurs de $\mathbf{v}_h$ dans les repères $\left(\xi_{glob_i(\mathbf{j})}, \mathcal{B}_{glob_i(\mathbf{j})}\right)$.
Ces repères sont repésentés, pour $r = 5$ et $d = 2$, dans la figure 1.5.
Ceci nous permettra d'obtenir la condensation de masse dans la seconde équation du schéma semi-discret en espace.

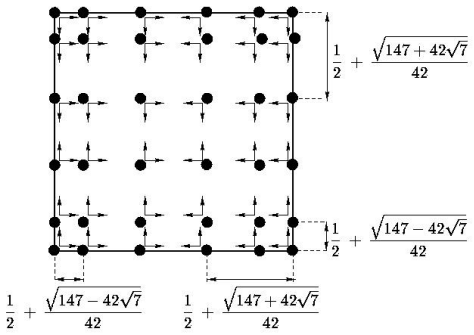


FIG. 1.5: Définition des repères, sur $\hat{K}$, sur lesquels sont calculés les degrés de liberté vectoriels pour la méthode des éléments finis mixtes spectraux pour $r = 5$ et $d = 2$.

Remarque 13 *D'après la définition des espaces d'approximation, signalons que les degrés de liberté scalaires sont continus, contrairement aux degrés de liberté vectoriels qui sont définis dans chaque élément. Ces propriétés sont représentées dans la figure 1.6 pour $r = 5$ et $d = 2$ par le positionnement des points et des repères sur lesquels sont respectivement calculés les valeurs de p_h et de $\mathbf{v}_h$.*

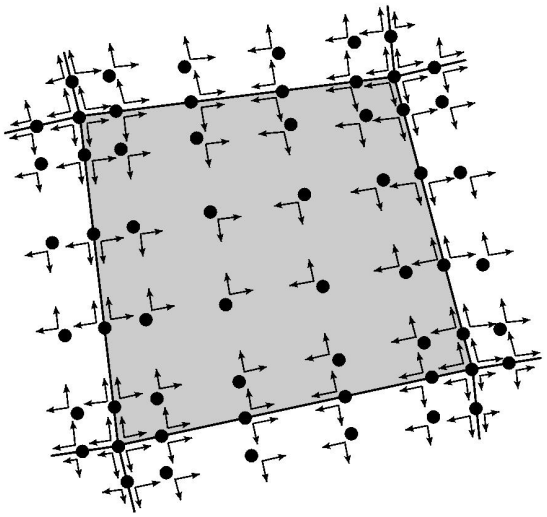


FIG. 1.6: Degrés de liberté scalaires et vectoriels pour la méthode des éléments finis mixtes spectraux pour $r = 5$ et $d = 2$.

Après décomposition de p_h et $\mathbf{v}_h$ dans les bases de leurs espaces d'approximation respectifs, nous obtenons le problème matriciel semi-discret suivant :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t} + R_{d,r}\mathbf{V}_h = \mathbf{F}_h \tag{1.22a}$$

$$B_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_h}{\mathrm{d}t} = R^*_{d,r}\mathbf{P}_h \tag{1.22b}$$

Remarque 14 *Nous notons M^* la matrice transposée de M.*

Remarque 15 *Si nous avions basé notre semi-discrétisation en espace sur le système d'ordre 2 en*

temps (1.16), nous aurions obtenu le schéma suivant :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t^2}+R_{d,r}\mathbf{W}_h=\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_h}{\mathrm{d}t} \tag{1.23a}$$

$$B_{d,r}\,\mathbf{W}_h=R^*_{d,r}\mathbf{P}_h \tag{1.23b}$$

où $\mathbf{W}_h$ est le vecteur des composantes de $\mathbf{w}$ dans U_d^r et où les matrices $D_{d,r}$, $R_{d,r}$ et $B_{d,r}$ sont les mêmes matrices que celles intervenant dans (1.22).

Nous allons, à présent, calculer les termes généraux des matrices de masse et de rigidité.

Remarque 16 *Comme dans le cas des éléments finis hexaédriques d'ordre élevé C^0, la notation des matrices du schéma fait intervenir la dimension d de l'espace et l'ordre d'approximation r du schéma.*

1.2.3.1 Calcul des matrices de masse

Nous avons choisi le même espace d'approximation U_d^r pour p_h que dans la méthode des éléments finis spectraux et la même base $\mathcal{B}_U$ pour définir cet espace. De même, les fonctions tests φ_h intervenant dans (1.20a) sont les mêmes que celles utilisées dans la méthode des éléments finis spectraux. Ainsi, la matrice de masse $D_{d,r}$ est la même matrice de masse diagonale que celle qui intervient dans l'équation (1.11) et dont le terme général, calculé dans le paragraphe précédent s'écrit :

$$D_{j,k}=\frac{1}{\mu}(\xi_j)\,\delta_{j,k}\sum_{i/S_j\cap S_k\cap K_i\neq\phi}\hat{\omega}_{\mathbf{loc}_i(j)}\;|J_i|\,(\hat{\xi}_{\mathbf{loc}_i(j)}) \tag{1.24}$$

Intéressons nous à la seconde matrice de masse du système : $B_{d,r}$.
Etant donné la discontinuité des fonctions de base de V_d^r, nous pouvons dire que le terme général de $B_{d,r}$ est nul s'il fait intervenir deux fonctions de base définies dans deux hexaèdres différents.
Soient deux fonctions de base de V_d^r de même support (K_i) : $\psi^i_{\mathbf{p},l}$ et $\psi^i_{\mathbf{q},n}$. On note $B^i_{\mathbf{p},l,\mathbf{q},n}$ le terme de la matrice de masse qui dépend de ces deux fonctions.
$B^i_{\mathbf{p},l,\mathbf{q},n}$ s'obtient par intégration numérique de :

$$\int_{\hat{K}}\frac{1}{|J_i|}\,D\mathbf{F}_i^*\,\rho\circ\mathbf{F}_i\,D\mathbf{F}_i\,\hat{\psi}_{\mathbf{p},l}\cdot\hat{\psi}_{\mathbf{q},n}\,d\hat{\mathbf{x}}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
B^i_{\mathbf{p},l,\mathbf{q},n} &= \sum_{\mathbf{j}\in\{1,..,r+1\}^d}\hat{\omega}_{\mathbf{j}}\left[\frac{1}{|J_i|}\,D\mathbf{F}_i^*\,\rho\circ\mathbf{F}_i\,D\mathbf{F}_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{j}})\,\hat{\psi}_{\mathbf{p},l}(\hat{\xi}_{\mathbf{j}})\cdot\hat{\psi}_{\mathbf{q},n}(\hat{\xi}_{\mathbf{j}})\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\{1,..,r+1\}^d}\hat{\omega}_{\mathbf{j}}\left[\frac{1}{|J_i|}\,D\mathbf{F}_i^*\,\rho\circ\mathbf{F}_i\,D\mathbf{F}_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{j}})\,\hat{\varphi}_{\mathbf{p}}(\hat{\xi}_{\mathbf{j}})\,\overrightarrow{e_l}\cdot\hat{\varphi}_{\mathbf{q}}(\hat{\xi}_{\mathbf{j}})\,\overrightarrow{e_n}\\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\{1,..,r+1\}^d}\hat{\omega}_{\mathbf{j}}\left[\frac{1}{|J_i|}\,D\mathbf{F}_i^*\,\rho\circ\mathbf{F}_i\,D\mathbf{F}_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{j}})\,\delta_{\mathbf{p},\mathbf{j}}\,\overrightarrow{e_l}\cdot\delta_{\mathbf{q},\mathbf{j}}\,\overrightarrow{e_n}\\
&= \delta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\,\hat{\omega}_{\mathbf{p}}\left[\frac{1}{|J_i|}\,D\mathbf{F}_i^*\,\rho\circ\mathbf{F}_i\,D\mathbf{F}_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{p}})\,\overrightarrow{e_l}\cdot\overrightarrow{e_n}
\end{aligned}$$

$D\mathbf{F}_i$ étant une matrice $d\times d$, $B_{d,r}$ est une matrice diagonale par blocs $d\times d$ de bloc :

$$\hat{\omega}_{\mathbf{p}}\left[\frac{1}{|J_i|}\,D\mathbf{F}_i^*\,\rho\circ\mathbf{F}_i\,D\mathbf{F}_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{p}})$$

1.2.3.2 Calcul de la matrice de rigidité

Soit $\psi^i_{\mathbf{q},l}$, fonction de base de V^r_d et $\varphi_k = \sum_{j \in \mathcal{S}_k} \varphi_{k|K_j}$, fonction de base de U^r_d.
Si $i \notin \mathcal{S}_k$, il n'y a pas d'intéraction entre ces deux fonctions : le support de $\psi^i_{\mathbf{q},l}$ est K_i et celui de $\varphi_{k|K_j}$ est K_j. Considérons donc k tel que $i \in \mathcal{S}_k$ et posons $\mathbf{p} = \mathbf{loc}_i(k)$.
On note $R^i_{\mathbf{q},l,k}$ le terme de la matrice de rigidité qui dépend de ces deux fonctions.
$R^i_{\mathbf{q},l,k}$ s'obtient par intégration numérique de :

$$\int_{K_i} \psi^i_{\mathbf{q},l} \cdot \nabla \varphi_{k|K_i} \, d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}} |J_i| \, \frac{1}{|J_i|} \, D\mathbf{F}_i \, \hat{\psi}_{\mathbf{q},l} \cdot D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{p}} \, d\hat{\mathbf{x}}$$

Ainsi, d'après la commutativité du produit scalaire, $R^i_{\mathbf{q},l,k}$ s'obtient par intégration numérique de :

$$\int_{\hat{K}} \hat{\psi}_{\mathbf{q},l} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{p}} \, d\hat{\mathbf{x}}$$

Le terme général de la matrice de rigidité ne dépend donc pas de $\mathbf{F}_i$. Nous avons donc un gain de stockage très important car il suffit de calculer la matrice de rigidité localement sur $\hat{K}$ pour la connaître dans tout le domaine.

De plus, après intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
R^i_{\mathbf{q},l,k} &= \sum_{\mathbf{m} \in \{1,..,r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{m}} \, \hat{\psi}_{\mathbf{q},l}(\hat{\xi}_{\mathbf{m}}) \cdot \hat{\nabla} \, \hat{\varphi}_{\mathbf{p}}(\hat{\xi}_{\mathbf{m}}) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \{1,..,r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{m}} \, \hat{\varphi}_{\mathbf{q}}(\hat{\xi}_{\mathbf{m}}) \, \overrightarrow{e_l} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{p}}(\hat{\xi}_{\mathbf{m}}) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \{1,..,r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{m}} \, \delta_{\mathbf{q},\mathbf{m}} \, \overrightarrow{e_l} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{p}}(\hat{\xi}_{\mathbf{m}}) \\
&= \hat{\omega}_{\mathbf{q}} \, \overrightarrow{e_l} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{p}}(\hat{\xi}_{\mathbf{q}}) \\
&= \hat{\omega}_{\mathbf{q}} \, \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathrm{x}_l}(\hat{\xi}_{\mathbf{q}})
\end{aligned}$$

D'après la remarque 9, $\hat{\varphi}_{\mathbf{p}}$ s'écrit comme le produit de d fonctions d'interpolation de Lagrange 1D dont les zéros sont les points de Gauss-Lobatto 1D. Les intéractions entre deux degrés de liberté n'ayant pas la même abscisse ou la même ordonnée est donc nulle. Ceci est illustré pour $r = 3$ dans la figure 1.7 : pour un degré de liberté scalaire donné (en bleu foncé sur les figures), les seuls degrés de liberté vectoriels intéragissant de façon non-nulle sont les degrés de liberté représentés en rouge foncé sur les figures.

1.2.4 Conclusion

Pour résumer, nous obtenons donc une méthode qui fait intervenir 4 matrices : une première matrice de masse diagonale, identique à celle obtenue par la méthode des éléments finis spectraux, une seconde matrice de masse diagonale par blocs $d \times d$ et deux matrices de rigidité, transposées l'une de l'autre, ne dépendant ni du milieu physique, ni du maillage utilisé, qui peuvent se déduire d'une matrice creuse dont le nombre de terme non-nuls est $(r+1)^d \times d \times (r+1)$ (nous avions, au mieux, une matrice de rigidité $(2r+1)^d$-diagonale de dimension le nombre de degrés de liberté du maillage dans

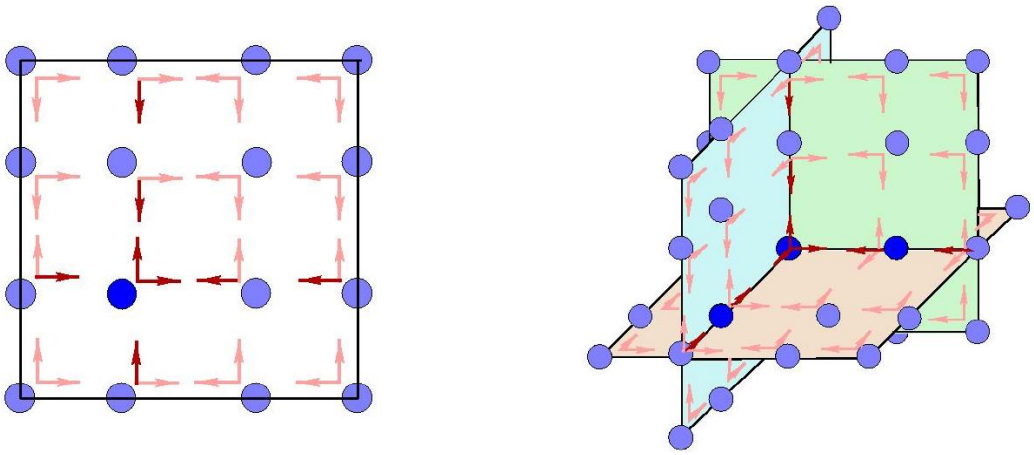


FIG. 1.7: Intéractions non-nulles de la matrice de rigidité pour $r = 3$ en 2D (à gauche) et 3D (à droite).

le cas des éléments finis spectraux). Les propriétés physiques et géométriques du milieu et du maillage sont donc prises en compte dans les matrices de masse uniquement.

Ainsi, par rapport au schéma (1.11) obtenu par la méthode des éléments finis spectraux, nous avons un gain conséquent de stockage au niveau de la matrice de rigidité. Par contre, nous faisons intervenir une matrice de masse et un vecteur suplémentaires. Une comparaison entre ces schémas sera effectuée dans le chapitre 2.

1.3 Théorème d'équivalence entre les éléments finis spectraux et mixtes spectraux

Nous avons vu au paragraphe précédent (1.2) que la méthode des éléments finis mixtes spectraux offre un avantage certain en place mémoire. Cependant, V_d^r peut être vu comme une expression locale de l'espace $H(div;\Omega)$. Or, le couplage $H^1 - H(div)$ donne une approximation dispersive de p dans le cas de l'équation des ondes. On pourrait donc s'attendre à ce que la méthode des éléments finis mixtes spectraux génère une plus grande dispersion numérique que la méthode des éléments finis spectraux.

Or, après quelque calculs en acoustique, il est apparu qu'en Q_1 et Q_2 la matrice de rigidité obtenue par la méthode des éléments finis spectraux s'écrivait sous forme de produit matriciel des matrices de masse et de rigidité obtenues par la méthode mixte. Nous nous sommes alors intéressés à une généralisation de ce résultat à un ordre quelconque d'approximation et en dimension $d \in \{1..3\}$.

Pour généraliser les résultats trouvés, nous nous plaçons dans les espaces d'approximation suivants :

$$U_d^r = \left\{ \varphi \in C^0(\Omega) \text{ tel que } \varphi_{|_{K_i}} \circ \mathbf{F}_i \in Q_r(\hat{K}) \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \tag{1.25a}$$

$$V_d^r = \left\{ \psi \in \left[L^2(\Omega)\right]^d \text{ tel que } P_i^{-1}\, \psi_{|_{K_i}} \circ \mathbf{F}_i \in \left[Q_r(\hat{K})\right]^d \right\} \tag{1.25b}$$

avec P_i, $i = 1..N_e$ matrices $d \times d$ inversibles.

Remarque 17 *Pour* $P_i = \dfrac{1}{|J_i|} D\mathbf{F}_i$, *on retrouve la définition précédente de* V_d^r.

Les deux schémas nous donnent :

- *Méthode des éléments finis spectraux* :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} D_{d,r} \tilde{\mathbf{P}}_h + K_{d,r} \tilde{\mathbf{P}}_h = \mathbf{f}_h \tag{1.26}$$

- *Méthode des éléments finis mixtes spectraux* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} D_{d,r} \mathbf{P}_h + R_{d,r} \mathbf{V}_h = \mathbf{F}_h \tag{1.27a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} B_{d,r} \mathbf{V}_h = R^*_{d,r} \mathbf{P}_h \tag{1.27b}$$

Théorème 1 *Avec les notations définies en (1.26) et (1.27), nous avons*

$$R_{d,r} B^{-1}_{d,r} R^*_{d,r} = K_{d,r}$$

La méthode mixte est donc une **factorisation** *de la méthode spectrale et :*

$$\tilde{\mathbf{P}}_h = \mathbf{P}_h$$

▷ PREUVE : Décomposons les différentes équations.
Nous noterons $\int_{\hat{K}}^{GL} f(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}$ l'intégration numérique, par la formule de Gauss-Lobatto, de $\int_{\hat{K}} f(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}$ et $\int_{K_i}^{GL} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ l'intégration par la formule de Gauss-Lobatto de l'intégrale sur $\hat{K}$ induite par le changement de variable défini par $\mathbf{F}_i$.

- Soit $\psi^i_{\mathbf{k},m}$ une fonction de base de V^r_d.
  Le terme de gauche de l'équation (1.20b) s'écrit :

$$\int_\Omega \rho\, \mathbf{v}_h \cdot \psi^i_{\mathbf{k},m}\, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{K_i} \rho\, \mathbf{v}_h \cdot \psi^i_{\mathbf{k},m}\, d\mathbf{x}$$

  On décompose $\mathbf{v}_h$ dans la base $\psi^n_{\mathbf{j},l}$ de V^r_d

$$\int_\Omega \rho\, \mathbf{v}_h \cdot \psi^i_{\mathbf{k},m}\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{j},l} \int_{K_i} \rho\, \psi^i_{\mathbf{j},l} \cdot \psi^i_{\mathbf{k},m}\, d\mathbf{x}$$

  et on introduit le changement de variable : $\mathbf{x} = \mathbf{F}_i(\hat{\mathbf{x}})$ ($\hat{\rho} = \rho \circ \mathbf{F}_i$)

$$\int_\Omega \rho\, \mathbf{v}_h \cdot \psi^i_{\mathbf{k},m}\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{j},l} \int_{\hat{K}} |J_i|\, \hat{\rho}\, P_i\, \hat{\psi}_{\mathbf{j},l} \cdot P_i\, \hat{\psi}_{\mathbf{k},m}\, d\hat{\mathbf{x}}$$

  On utilise alors la commutativité du produit scalaire :

$$\int_\Omega \rho\, \mathbf{v}_h \cdot \psi^i_{\mathbf{k},m}\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{j},l} \int_{\hat{K}} |J_i|\, P^*_i \hat{\rho}\, P_i\, \hat{\psi}_{\mathbf{j},l} \cdot \hat{\psi}_{\mathbf{k},m}\, d\hat{\mathbf{x}}$$

Le calcul de l'intégrale par la formule d'intégration numérique de Gauss-Lobatto puis l'utilisation des propriétés d'orthogonalité des $\hat{\psi}_{\mathbf{k},m}$ nous donne :

$$\begin{aligned}\int_\Omega^{GL} \rho\, \mathbf{v}_h \cdot \psi^i_{\mathbf{k},m}\, d\mathbf{x} &= \sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{j},l} \sum_{\mathbf{p}\in\{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{p}} \left[|J_i|\, P_i^*\, \hat{\rho}\, P_i\, \hat{\psi}_{\mathbf{j},l}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\psi}_{\mathbf{k},m}(\hat{\xi}_{\mathbf{p}}) \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{j},l} \sum_{\mathbf{p}\in\{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{p}} \left[|J_i|\, P_i^*\, \hat{\rho}\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{p}})\, \delta_{\mathbf{j},\mathbf{p}}\, \overrightarrow{e_l} \cdot \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}}\, \overrightarrow{e_m} \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{k},l} \left[|J_i|\, P_i^*\, \hat{\rho}\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\, \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_m}\end{aligned}$$

Remarque 18 *Nous vérifions bien le fait que la matrice $B_{d,r}$ est diagonale par blocs.*

- Intéressons nous au terme de droite de l'équation (1.20b) avec la même fonction test $\psi^i_{\mathbf{k},m}$. Nous utilisons la même méthode que précédemment :

$$\int_\Omega \nabla p_h \cdot \psi^i_{\mathbf{k},m}\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \int_{\hat{K}} |J_i|\, P_i^*\, D\mathbf{F}_i^{*-1}\, \hat{\nabla}\hat{\varphi}_{\mathbf{j}} \cdot \hat{\psi}_{\mathbf{k},m}\, d\hat{\mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega^{GL} \nabla p_h \cdot \psi^i_{\mathbf{k},m}\, d\mathbf{x} &= \sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \sum_{\mathbf{p}\in\{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{p}} \left[|J_i|\, P_i^*\, D\mathbf{F}_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{p}})\, \hat{\nabla}\hat{\varphi}_{\mathbf{j}}(\hat{\xi}_{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\psi}_{\mathbf{k},m}(\hat{\xi}_{\mathbf{p}}) \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \sum_{\mathbf{p}\in\{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{p}} \left[|J_i|\, P_i^*\, D\mathbf{F}_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{p}})\, \hat{\nabla}\hat{\varphi}_{\mathbf{j}}(\hat{\xi}_{\mathbf{p}}) \cdot \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}}\overrightarrow{e_m} \\ &= \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \left[|J_i|\, P_i^*\, D\mathbf{F}_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\, \hat{\nabla}\hat{\varphi}_{\mathbf{j}}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \cdot \overrightarrow{e_m}\end{aligned}$$

L'équation (1.20b) se résume donc sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall i \in \{1..N_e\}, \quad \forall \mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d, \quad \forall l \in \{1,..,d\} \\ \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{k},l} \left[|J_i|\, P_i^*\, \hat{\rho}\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\, \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_m} \\ = \\ \displaystyle\sum_{\mathbf{j}\in\{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \left[|J_i|\, P_i^*\, D\mathbf{F}_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\, \hat{\nabla}\hat{\varphi}_{\mathbf{j}}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \cdot \overrightarrow{e_m}\end{array}} \tag{1.28}$$

- Soit φ_n une fonction de base de U_d^r.
Le second terme de l'équation (1.20a) s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{v}_h \cdot \nabla\varphi_n\, d\mathbf{x} &= \sum_{i\in\mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k}\in\{1..r+1\}^d} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{k},l} \int_{K_i} \psi^i_{\mathbf{k},l} \cdot \nabla\varphi^i_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}\, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i\in\mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k}\in\{1..r+1\}^d} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{k},l} \int_{\hat{K}} |J_i|\, D\mathbf{F}_i^{-1}\, P_i\, \hat{\psi}_{\mathbf{k},l} \cdot \hat{\nabla}\hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}\, d\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

$$\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla\varphi_n\, d\mathbf{x} = \sum_{i\in\mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k}\in\{1..r+1\}^d} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{k},l}\, \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \left[|J_i|\, D\mathbf{F}_i^{-1}\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\, \overrightarrow{e_l} \cdot \hat{\nabla}\hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}})$$

Faisons apparaître $P_i^* \, \hat{\rho} \, P_i$ afin d'utiliser l'égalité (1.28)

$$\int_\Omega \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_\mathbf{k} \left[D\mathbf{F}_i^{-1} \, \hat{\rho}^{-1} \, P_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \times \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}_{\mathbf{k},l}^i \left[|J_i| \, P_i^* \, \hat{\rho} \, P_i \right] (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \, \overrightarrow{e_l} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} (\hat{\xi}_\mathbf{k})$$

On décompose alors $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} (\hat{\xi}_\mathbf{k})$ sous la forme : $\sum_{p=1}^{d} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_p} (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \, \overrightarrow{e_p}$ et on obtient :

$$\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_\mathbf{k} \left[D\mathbf{F}_i^{-1} \, \hat{\rho}^{-1} \, P_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \times \sum_{p=1}^{d} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_p} (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}_{\mathbf{k},l}^i \left[|J_i| \, P_i^* \, \hat{\rho} \, P_i \right] (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \, \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_p}$$

D'après (1.28), nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} &= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_\mathbf{k} \left[D\mathbf{F}_i^{-1} \, \hat{\rho}^{-1} \, P_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \times \\
&\quad \sum_{p=1}^{d} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_p} (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \left[|J_i| \, P_i^* \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_\mathbf{j} (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \cdot \overrightarrow{e_p} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_\mathbf{k} \left[D\mathbf{F}_i^{-1} \, \hat{\rho}^{-1} \, P_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \times \\
&\quad \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \left[|J_i| \, P_i^* \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_\mathbf{j} (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} (\hat{\xi}_\mathbf{k})
\end{aligned}$$

Intervertissons la somme sur $\mathbf{k}$ et la somme sur $\mathbf{j}$ et simplifions l'expression :

$$\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_\mathbf{k} \left[|J_i| \, D\mathbf{F}_i^{-1} \, \hat{\rho}^{-1} \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \times \hat{\nabla} \hat{\varphi}_\mathbf{j} (\hat{\xi}_\mathbf{k}) \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} (\hat{\xi}_\mathbf{k})$$

Nous reconnaissons l'approximation par la formule de Gauss-Lobatto de :

$$\int_{\hat{K}} |J_i| \, D\mathbf{F}_i^{-1} \, \hat{\rho}^{-1} \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_\mathbf{j} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} \, d\hat{\mathbf{x}}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} &= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \int_{\hat{K}} |J_i| \, D\mathbf{F}_i^{-1} \, \hat{\rho}^{-1} \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_\mathbf{j} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} \, d\hat{\mathbf{x}} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \int_{\hat{K}} \hat{\rho}^{-1} \, |J_i| \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_\mathbf{j} \cdot D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} \, d\hat{\mathbf{x}} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \int_{K_i} \rho^{-1} \, \nabla \varphi_j^i \cdot \nabla \varphi_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}^i \, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} &= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \int_{K_i}^{GL} \rho^{-1} \nabla p_{h|K_i} \cdot \nabla \varphi_{n|K_i} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega}^{GL} \rho^{-1} \nabla p_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction test φ_n, nous avons :

$$\int_{\Omega}^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega}^{GL} \rho^{-1} \nabla p_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x}$$

Le terme de droite de cette dernière égalité correspond au second terme du problème approché (1.6a) introduit pour la méthode des éléments finis spectraux.
Du point de vue matriciel, elle s'écrit sous la forme $R_{d,r} B_{d,r}^{-1} R_{d,r}^{*} = K_{d,r}$. ◁

Chapitre 2

Approximation en temps du schéma obtenu en acoustique

Introduction

Le chapitre 1 présentait la semi-discrétisation en espace de l'équation des ondes par la méthode des éléments finis mixtes spectraux. Nous obtenions alors le schéma :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t} + R_{d,r}\mathbf{V}_h = \mathbf{F}_h \tag{2.1a}$$

$$B_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_h}{\mathrm{d}t} = R^*_{d,r}\mathbf{P}_h \tag{2.1b}$$

Nous nous intéressons ici à la discrétisation en temps de ce système. Nous avons choisi pour cela le schéma classique centré de différences finies suivant, couramment appelé schéma "saute-mouton" :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{P}_h^{n+1}-\mathbf{P}_h^{n}}{\Delta t} + R_{d,r}\,\mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}} \tag{2.2a}$$

$$B_{d,r}\,\frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}}-\mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = R^*_{d,r}\,\mathbf{P}_h^{n+1} \tag{2.2b}$$

Ce schéma d'ordre 2 est, en général, insuffisant pour notre méthode d'éléments finis d'ordre élevé en espace. Deux solutions sont alors possibles. Tout d'abord, nous pouvons choisir d'utiliser un schéma en temps centré à cinq, sept points ou plus. Toutefois, une telle discrétisation mène à des schémas en temps inconditionnellement instables [36]. Une autre solution est l'approche de l'équation modifiée, décrite, par exemple, dans [22] ou [30]. Cette approche pose des questions pour son application aux couches absorbantes parfaitement adaptées qui seront introduites dans le chapitre 5 (voir [20]). Des études supplémentaires sont nécessaires avant l'introduction de telles méthodes. Celles-ci n'ont pu être effectuées pendant cette thèse.

Nous considérons donc le schéma saute-mouton décrit par le système (2.2). Il est bien connu que la stabilité des schémas explicites en temps dépend d'une condition appelée CFL qui lie entre eux le pas de temps (Δt), le pas d'espace h utilisé pour la construction du maillage et les propriétés physiques du milieu. C'est cette condition que nous déterminons dans la section 2.1. Cette étude, menée par une technique d'ondes planes, se fait dans le cas d'un milieu infini homogène maillé avec un pas

constant et égal dans toutes les directions. Nous montrons tout d'abord que nous pouvons nous ramener à l'étude du problème matriciel obtenu après discrétisation en temps par un schéma d'ordre 2 du schéma semi-discret en espace obtenu par la méthode des éléments finis spectraux. Les relations qui lient les matrices de masse et de rigidité obtenues en dimension d avec les matrices de masse et de rigidité obtenues en dimension 1 (voir section 7.2.1) dans ce cadre particulier d'étude nous permettent de généraliser facilement les résultats obtenus en dimension 1 à une dimension d quelconque.

Dans la section 2.2, nous nous intéressons à la comparaison au niveau temps de calcul et place mémoire de trois algorithmes différents résultant de trois façons de programmer le schéma (2.2). Le théorème d'équivalence introduit dans la section 1.3 nous donnera alors des éléments de réponse concernant l'apport, au niveau temps CPU et place mémoire, de la méthode des éléments finis mixtes spectraux par rapport à l'algorithme de programmation de la méthode des éléments finis spectraux [56].

2.1 Résultat de stabilité

Soit le système :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{P}_h^{n+1}-\mathbf{P}_h^n}{\Delta t}+R_{d,r}\,\mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}=\mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}} \tag{2.3a}$$

$$B_{d,r}\,\frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}}-\mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}=R_{d,r}^{*}\,\mathbf{P}_h^{n+1} \tag{2.3b}$$

En soustrayant l'équation (2.3a) écrite au temps $n+1$ à celle écrite au temps n et en divisant chaque terme par Δt, nous obtenons :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{P}_h^{n+1}-2\mathbf{P}_h^n+\mathbf{P}_h^{n-1}}{\Delta t^2}+R_{d,r}\,\frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}}-\mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}=\frac{\mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}}-\mathbf{F}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{2.4}$$

On utilise alors l'équation (2.3b) :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{P}_h^{n+1}-2\mathbf{P}_h^n+\mathbf{P}_h^{n-1}}{\Delta t^2}+R_{d,r}\,B_{d,r}^{-1}\,R_{d,r}^{*}\,\mathbf{P}_h^n=\frac{\mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}}-\mathbf{F}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{2.5}$$

Soit, d'après le théorème 1 :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{P}_h^{n+1}-2\mathbf{P}_h^n+\mathbf{P}_h^{n-1}}{\Delta t^2}+K_{d,r}\,\mathbf{P}_h^n=\frac{\mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}}-\mathbf{F}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{2.6}$$

où $K_{d,r}$ est la matrice de rigidité obtenue par la méthode des éléments finis spectraux.
L'analyse de stabilité de (2.3) se rapporte donc bien à l'analyse de stabilité de la discrétisation en temps par un schéma classique saute-mouton du schéma semi-discret en espace obtenu par la méthode des éléments finis spectraux.

Nous savons [6] que ce schéma est stable si et seulement si :

$$sup_u\,\frac{\left(D_{d,r}^{-1}\,K_{d,r}u\,,\,u\right)}{(u\,,\,u)}\leq\frac{4}{\Delta t^2} \tag{2.7}$$

r	1	2	3	4	5
$cfl_{1,r} \simeq$	1	0.4082	0.2320	0.1476	0.1010

TAB. 2.1: Les conditions de stabilité en P_r, en une dimension, pour un schéma saute-mouton, r variant de 1 à 5.

Il s'agit donc de déterminer la norme de $N_{d,r} = D_{d,r}^{-1} K_{d,r}$. Celle-ci sera étudiée dans le chapitre 7.3 lors de l'analyse par ondes planes du schéma. Nous obtenons la condition de stabilité suivante :

$$c\frac{\Delta t}{h} \leq cfl_{d,r} \tag{2.8}$$

où $c = \sqrt{\mu/\rho}$ est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu.

Pour $d = 1$ et r variant de 1 à 5, nous obtenons les valeurs de $cfl_{1,r}$ données dans le tableau 2.1.
En dimension d quelconque, nous montrerons dans le chapitre 7 au lemme 4 que les valeurs propres de $\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]$ sont les sommes de d valeurs propres de $\widehat{N}_{1,r}[k_l]$. Nous obtenons donc le lemme suivant :

Lemme 1 *Soient $cfl_{1,r}$ la condition de stabilité pour un schéma saute-mouton et une approximation par éléments finis spectraux P_r en dimension 1 et $cfl_{d,r}$ la condition de stabilité pour un schéma saute-mouton et une approximation par éléments finis spectraux Q_r en dimension d.*
Nous avons alors :

$$cfl_{d,r} = \frac{cfl_{1,r}}{\sqrt{d}}$$

Remarque 19 *Les conditions de stabilité déterminées dans ce chapitre sont calculées en fonction de h. Or, en P_r, nous avons r points sur un intervalle de pas h. Ainsi, si l'on veut comparer les différentes conditions de stabilité (entre elles ou par rappport aux différences finies), il faut rapporter le calcul de la* CFL *à l'intervalle entre deux points d'interpolation et non à h.*

2.2 Comparaison de 3 algorithmes

Dans ce chapitre, nous allons utiliser le fait que la matrice de rigidité intervenant dans la formulation par éléments finis spectraux se factorise sous la forme d'un produit des matrices de rigidité et de masse intervenant dans la formulation par éléments finis mixtes spectraux. Cette propriété nous permet d'introduire 3 algorithmes différents pour la résolution du système (2.3). Nous rappelons que le système (2.3) est équivalent au système (2.6).

2.2.1 Présentation des trois algorithmes

– Le premier algorithme considéré (algo1) consiste en la résolution de l'équation (2.3) :

$$\mathbf{P}_h^{n+1} = \mathbf{P}_h^n + \Delta t\, D_{d,r}^{-1} \left[-R_{d,r}\, \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}} \right] \tag{2.9a}$$

$$\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t\, B_{d,r}^{-1} R_{d,r}^{*}\, \mathbf{P}_h^{n+1} \tag{2.9b}$$

– Le second algorithme (algo2) correspond à l'application, en acoustique, de la méthode mise en place par Y. Maday, E.M. Ronquist et A.T. Patera pour la résolution du système de l'élastodynamique par la méthode des éléments finis spectraux [56]. Il consiste en la résolution du système :

$$\mathbf{P}_h^{n+1} = 2\mathbf{P}_h^n - \mathbf{P}_h^{n-1} - \Delta t^2 D_{d,r}^{-1} R_{d,r} B_{d,r}^{-1} R_{d,r}^* \mathbf{P}_h^n + \Delta t \left[\mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_h^{n-\frac{1}{2}} \right] \tag{2.10}$$

où la matrice $B_{d,r}$ est calculée à chaque pas de temps en fonction des DF_e^{-1}, J_e et de la masse volumique du milieu ρ.

– Le dernier algorithme (algo3) est obtenu en discrétisant par un schéma d'ordre 2 en temps le système semi-discret en espace (1.23) obtenu par l'application de la méthode des éléments finis mixtes spectraux au système d'ordre 2 en temps :

$$D_{d,r} \frac{\mathbf{P}_h^{n+1} - 2\mathbf{P}_h^n + \mathbf{P}_h^{n-1}}{\Delta t^2} + R_{d,r} \mathbf{W}_h^n = \frac{F_h^{n+\frac{1}{2}} - F_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{2.11a}$$

$$\mathbf{W}_h^n = B_{d,r}^{-1} R_{d,r}^* \mathbf{P}_h^n \tag{2.11b}$$

Or, le vecteur $\mathbf{W}_h$ est défini localement dans chaque élément. Il n'est donc pas nécessaire de le stocker. Le système (2.11) est alors équivalent au second algorithme, pour lequel on aurait stocké la matrice $B_{d,r}$.

2.2.2 Comparaison du stockage

Nous allons, à présent, comparer les stockages nécessaires à chaque algorithme.
Dans tout les cas, nous négligeons le stockage de la matrice de rigidité $R_{d,r}$ et de sa transposée, celles-ci se déduisant d'une matrice $(r+1)^d \times (r+1)^d$ définie sur $\hat{K}$ uniquement.

Plaçons nous en dimension d. Pour obtenir des estimations qui ne dépendent pas du maillage utilisé, nous considérons un maillage périodique infini et rapportons le stockage nécessaire à un seul élément du maillage. Ainsi, les inconnues scalaires étant continues d'un élément à un autre, nous en comptabilisons r^d sur un élément alors que les inconnues vectorielles étant définies en chaque degré de liberté de chaque élément, nous en comptabilisons $(r+1)^d$ sur chaque élément.

– **algo1** : nous devons stocker $\mathbf{P}_h$ au temps n (r^d inconnues) et $\mathbf{W}_h$ au temps $n+1/2$ ($d(r+1)^d$ valeurs), la matrice de masse diagonale $D_{d,r}$ (r^d termes non-nuls) et la matrice de masse diagonale par blocs $d \times d$ symétrique ($(r+1)^d \times d(d+1)/2$ valeurs).
Notons fsd_{algo1} (d étant relatif à la dimension de l'espace), le nombre de réels à stocker pour résoudre le système avec le premier algorithme. Nous avons :

$$\Rightarrow \quad fsd_{algo1}(r) = 2r^d + d(r+1)^d + \frac{1}{2} d(d+1)(r+1)^d$$

Soit :

$$fs2_{algo1}(r) = 7r^2 + 10r + 5 \qquad \text{pour } d = 2$$
$$fs3_{algo1}(r) = 11r^3 + 27r^2 + 27r + 9 \qquad \text{pour } d = 3$$

– **algo2** : nous devons stocker $\mathbf{P}_h$ aux temps n et $n-1$ ($2 \times r^d$ inconnues), la matrice de masse diagonale $D_{d,r}$ (r^d termes non-nuls) et les valeurs de DF_e^{-1} et J_e en chacun des points d'interpolation ($d^2 \times (r+1)^d + (r+1)^d$ valeurs).

Notons fsd_{algo2} le nombre de réels à stocker pour résoudre le système avec le deuxième algorithme. Nous avons :

$$\Rightarrow \quad fsd_{algo2}(r) = 3r^d + (d^2+1)(r+1)^d$$

Soit :

$$\begin{aligned} fs2_{algo2}(r) &= 8r^2 + 10r + 5 && \text{pour } d = 2 \\ fs3_{algo2}(r) &= 13r^3 + 30r^2 + 30r + 10 && \text{pour } d = 3 \end{aligned}$$

– **algo3** : nous devons stocker $\mathbf{P}_h$ aux temps n et $n-1$ ($2 \times r^d$ inconnues), la matrice de masse diagonale $D_{d,r}$ (r^d termes non-nuls) et la matrice de masse diagonale par blocs $d \times d$ symétrique $B_{d,r}$ ($(r+1)^d \times d(d+1)/2$ valeurs).
Notons fsd_{algo3} le nombre de réels à stocker pour résoudre le système avec le troisième algorithme. Nous avons :

$$\Rightarrow \quad fsd_{algo3}(r) = 3r^d + \frac{1}{2}d(d+1)(r+1)^d$$

Soit :

$$\begin{aligned} fs2_{algo3}(r) &= 6r^2 + 6r + 3 && \text{pour } d = 2 \\ fs3_{algo3}(r) &= 9r^3 + 18r^2 + 18r + 6 && \text{pour } d = 3 \end{aligned}$$

Afin de mieux visualiser les apports de chaque méthode au niveau stockage, nous représentons les courbes de gain entre les 3 méthodes dans la figure 2.1 :

$$gsd_{algo1/algo2} = \frac{fsd_{algo1}(r)}{fsd_{algo2}(r)}, \quad gsd_{algo3/algo2} = \frac{fsd_{algo3}(r)}{fsd_{algo2}(r)}, \quad gsd_{algo1/algo3} = \frac{fsd_{algo1}(r)}{fsd_{algo3}(r)}$$

Ainsi, en 2D et en Q_5 (ordre d'approximation utilisé dans les expériences numériques présentées dans ce rapport), l'algorithme 2 nécessite 1.1 fois plus de stockage que l'algorithme 1 et 1.4 fois plus de stockage que l'algorithme 3. On stocke 1.25 fois plus avec l'algorithme 1 qu'avec l'algorithme 3.
En dimension 3, les différences sont légèrement plus importantes : on stocke 1.1 fois plus avec l'algorithme 2 qu'avec l'algorithme 1, 1.5 fois plus avec l'algorithme 2 qu'avec l'algorithme 3 et 1.3 fois plus avec l'algorithme 1 qu'avec l'algorithme 3.

2.2.3 Comparaison des temps CPU

Nous allons comptabiliser le nombre de multiplications nécessaires à chaque algorithme.

– **algo1** : pour calculer $\mathbf{P}_h^{n+1}$, nous devons effectuer le produit $R_{d,r}\,\mathbf{W}_h^{n+\frac{1}{2}}$ ($d(r+1)^{d+1}$ multiplications) et y ajouter $\mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}}$ (0 multiplications), puis multiplier ce résultat par $\Delta t\, D_{d,r}^{-1}$ ($r^d(1+1)$ multiplications). Ensuite, pour calculer $\mathbf{W}_h^{n+\frac{3}{2}}$, nous devons effectuer le produit $R_{d,r}^*\mathbf{P}_h^{n+1}$ ($d(r+1)^{d+1}$ multiplications), puis le produit $\Delta t\, B_{d,r}^{-1} R_{d,r}^*\,\mathbf{P}_h^{n+1}$ ($(d^2+1)(r+1)^d$ multiplications).
Notons ftd_{algo1} le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution du problème par le premier algorithme. Nous avons :

$$\Rightarrow \quad ftd_{algo1}(r) = 2d(r+1)^{d+1} + 2r^d + (d^2+1)(r+1)^d$$

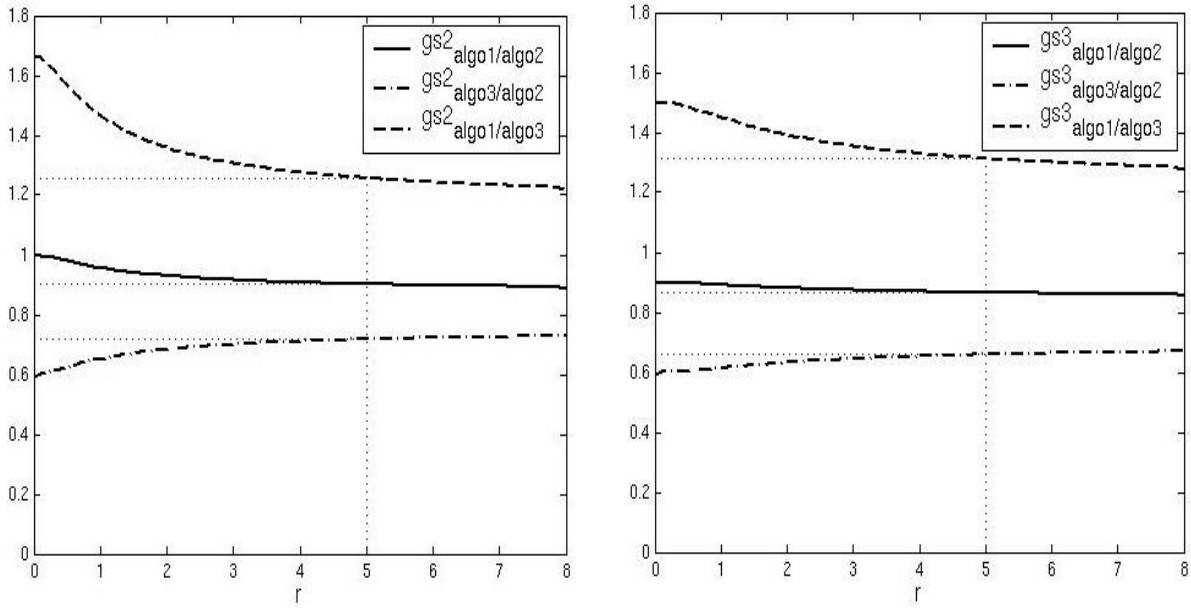


FIG. 2.1: Gains de stockage entre les trois algorithmes proposés en dimension 2 (à gauche) et en dimension 3 (à droite), en fonction de l'ordre d'approximation, pour l'acoustique.

Soit :

$$ft2_{algo1}(r) = 4r^3 + 19r^2 + 22r + 9 \qquad \text{pour } d = 2$$
$$ft3_{algo1}(r) = 6r^4 + 36r^3 + 66r^2 + 54r + 16 \qquad \text{pour } d = 3$$

– **algo2** : nous devons tout d'abord calculer $B_{d,r}^{-1}$ en fonction de DF_e^{-1}, J_e et ρ

Rappel 1 *$B_{d,r}$ est une matrice diagonale par blocs $d \times d$ de bloc (voir section 1.2.3.1) :*

$$DF_e^{-1} \left(\rho \circ \mathbf{F}_i\right)^{-1} DF_e^{*-1} \left|J_e\right| / \hat{\omega}_{\mathbf{p}}$$

Ce calcul nécessite $(r+1)^d[d^3 + d(d+1)(d+2)/2]$ multiplications.
Pour calculer $\mathbf{P}_h^{n+1}$, nous procédons de la manière suivante : nous calculons tout d'abord le produit de $R_{d,r}^*$ par $\mathbf{P}_h^n$ ($d(r+1)^{d+1}$ multiplications) puis multiplions le vecteur résultat par l'inverse de la matrice de masse diagonale par blocs ($d^2(r+1)^d$ multiplications). Ensuite, nous multiplions par $R_{d,r}$ ($d(r+1)^{d+1}$ multiplications). Il ne nous reste plus qu'à multiplier ce vecteur par l'inverse de la matrice de masse diagonale et le pas de temps au carré ($r^d(2+1)$ multiplications).
Notons ftd_{algo2} le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution du problème par le deuxième algorithme. Nous avons :

$$\Rightarrow \quad ftd_{algo2}(r) = (r+1)^d[d^3 + d(d+1)(d+2)/2] + 2d(r+1)^{d+1} + d^2(r+1)^d + 3r^d$$

Soit :

$$ft2_{algo2}(r) = 4r^3 + 39r^2 + 60r + 28 \qquad \text{pour } d = 2$$
$$ft3_{algo2}(r) = 6r^4 + 93r^3 + 234r^2 + 222r + 72 \qquad \text{pour } d = 3$$

– **algo3** : cet algorithme est en fait le même que le deuxième, où la matrice de masse diagonale par blocs est stockée et non pas calculée à chaque pas de temps. Le nombre d'opérations nécessaires est donc celui du second algorithme auquel nous enlevons le nombre de multiplications nécessaires au calcul de la matrice de masse diagonale par blocs.
Notons ftd_{algo3} le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution du problème par le troisième algorithme. Nous obtenons donc :

$$\Rightarrow \quad ftd_{algo3}(r) = 2d(r+1)^{d+1} + d^2(r+1)^d + 3r^d$$

Soit :

$$ft2_{algo3}(r) = 4r^3 + 19r^2 + 20r + 8 \qquad \text{pour } d = 2$$
$$ft3_{algo3}(r) = 6r^4 + 36r^3 + 63r^2 + 51r + 15 \qquad \text{pour } d = 3$$

Afin de mieux visualiser les différences au niveau temps de calcul des différents algorithmes, représentons les courbes de gain entre les 3 méthodes dans la figure 2.2 :

$$gtd_{algo1/algo2} = \frac{ftd_{algo1}(r)}{ftd_{algo2}(r)}, \quad gtd_{algo3/algo2} = \frac{ftd_{algo3}(r)}{ftd_{algo2}(r)}, \quad gtd_{algo1/algo3} = \frac{ftd_{algo1}(r)}{ftd_{algo3}(r)}$$

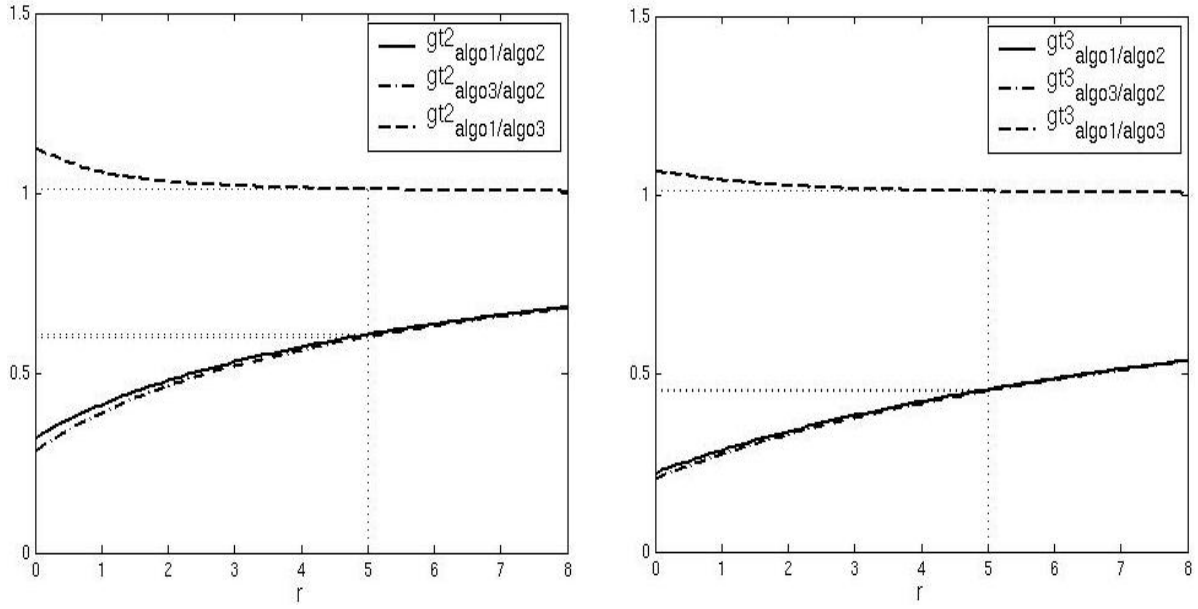


FIG. 2.2: Gains de temps de calcul entre les trois algorithmes proposés en dimension 2 (à gauche) et en dimension 3 (à droite), en fonction de l'ordre d'approximation, pour l'acoustique.

Ainsi, en 2D et en Q_5, l'algorithme 2 est 1.6 fois plus long que les algorithmes 1 et 3. L'algorithme 3 est aussi rapide que l'algorithme 1.
En dimension 3, l'algorithme 1 et l'algorithme 3 ont toujours des temps CPU équivalents. Par contre, ces algorithmes sont 2.2 fois plus rapide que l'algorithme 2.

2.2.4 Conclusion

D'après la place mémoire et le temps de calcul estimés dans cette section, il semble judicieux de privilégier le troisième algorithme. Toutefois, au niveau du temps de calcul, nous avons uniquement estimé le nombre de multiplications nécessaires à chaque algorithme alors que le temps CPU dû aux additions et à l'accès aux données n'est pas négligeable et dépend de la machine sur laquelle est executé le programme.

Remarque 20 *Nous verrons ultérieurement que le premier algorithme garde un avantage certain par rapport aux deux autres : celui de pouvoir y appliquer rapidement des Perfectly Matched Layers (PML) pour modéliser les milieux non-bornés.*

Chapitre 3

Application de la méthode à l'élastodynamique linéaire

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'application de la méthode des éléments finis mixtes spectraux, présentée dans la section 1.2 dans le cadre de l'acoustique, aux équations de l'élastodynamique linéaire. Celles-ci s'écrivent, en dimension d ($d = 2$ ou $d = 3$), sous la forme :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{f} \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.1a}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{U}) \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.1b}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.1c}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.1d}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.1e}$$

où :

- $\mathbf{U} = (u_i)_{i=1..d}$ représente le champ de déplacement dans le solide,
- $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{U})$ est le tenseur des déformations,
- $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes,
- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$,
- $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1..d}$ désigne les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$,
- ρ est la masse volumique du milieu solide, exprimée en $\mathrm{Kg.m}^{-3}$,
- $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur des coefficients d'élasticité, exprimé en Pa.
- $\vec{n}$ est la normale extérieure au domaine

Ces tenseurs vérifient :

1. $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{U})_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \forall i,j = 1..d,$
2. $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \quad \forall i,j = 1..d$ (loi de Hooke),
3. $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} \quad \forall i,j,k,l = 1..d,$

4. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall \underline{\underline{\xi}}$ tenseur d'ordre d symétrique , $c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha \sum \xi_{ij}^2$.

Remarque 21 *Nous supposons que les quantités* ρ *et* A_{ij} *sont indépendantes du temps.*

La démarche la plus immédiate pour appliquer la méthode des éléments finis mixtes spectraux consisterait à chercher les d vecteurs $\sigma_{\mathbf{i}} = (\sigma_{ij})_{j=1..d}$ dans l'espace V_d^r défini par :

$$V_d^r = \left\{ \mathbf{v} \in \left[L^2(\Omega)\right]^d \text{ tel que } |J_i|\, D\mathbf{F}_i^{-1}\, \mathbf{v}_{|K_i} \circ \mathbf{F}_i \in \left[Q_r(\hat{K})\right]^d \right\}.$$

Toutefois, la définition de cet espace ne garantit pas les propriétés de symétrie du tenseur des contraintes lorsque l'on considère un maillage hexaédrique quelconque.

Dans un premier temps, nous reformulons le système de l'élastodynamique (3.1) sous une forme similaire à la forme mixte de l'équation des ondes en introduisant de nouvelles variables vectorielles qui pourront être cherchées dans V_d^r (section 3.1).
Ensuite, dans la section 3.2, nous nous intéressons à l'écriture de la formulation variationelle associée à ce problème et en déduisons une conservation de l'énergie.
Dans la section 3.3, la méthode des éléments finis mixtes spectraux est appliquée au nouveau système. Le schéma obtenu offre des propriétés de stockage similaires à celles obtenues dans le cas de l'acoustique.
Enfin, dans la dernière section (section 3.4), le théorème d'équivalence de la section 1.3 est généralisé à l'élastodynamique.

3.1 Reformulation du problème

En utilisant les propriétés des différents tenseurs, nous allons reformuler le système (3.1) sous une forme proche de la formulation mixte de l'équation des ondes présentée dans le chapitre 1.2.
Les deux premières équations du système considéré peuvent se mettre sous la forme :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left[\underline{\underline{C}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{U}) \right] = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times [0,T],$$

Or $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{U})$ s'écrit sous la forme d'une demi-somme du gradient de $\mathbf{U}$ et de sa transposée. En utilisant les propriétés de symétrie du tenseur d'élasticité, nous allons alors décomposer cette équation sous une forme $\nabla \cdot (M \nabla \mathbf{u})$ où M et $\mathbf{u}$ sont à déterminer.

Remarque 22 *Par abus de notation, nous notons* σ *la forme matricielle associée à* $\underline{\underline{\sigma}}$ *et* C *la forme matricielle associée à* $\underline{\underline{C}}$.

Nous pouvons écrire :

$$\sigma_{ik} = \sum_{j,l=1..d} c_{ikjl}\, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right)$$

Soit, en séparant les termes de la demi-somme et en effectuant un changement d'indice dans le second terme :

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1..d} c_{ikjl}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1..d} c_{iklj}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_l}$$

or $c_{ikl\,j} = c_{ik\,jl}$, d'où :

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} &= \frac{1}{2}\sum_{j,l=1..d} c_{ik\,jl}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\sum_{j,l=1..d} c_{ik\,jl}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \\ &= \sum_{j,l=1..d} c_{ik\,jl}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$[\nabla\cdot\sigma]_i = \sum_{k=1}^{d}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j,l=1..d} c_{ik\,jl}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right) = \sum_{j=1}^{d}\left[\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{l=1}^{d} c_{ik\,jl}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)\right] \tag{3.2}$$

Or, pour une matrice M quelconque, carrée et de dimension d, nous pouvons écrire :

$$\nabla\cdot[M\nabla u] = \sum_{k=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{l=1}^{d} M_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) \tag{3.3}$$

$\nabla\cdot\sigma$ s'exprime alors sous la forme :

$$\nabla\cdot\sigma = \left(\sum_{j=1}^{d}\nabla\cdot[A_{ij}\nabla u_j]\right)_{i=1..d} \tag{3.4}$$

$$\text{avec}\quad A_{ij} = \begin{pmatrix} c_{i1\,j1} & c_{i1\,j2} \\ c_{i2\,j1} & c_{i2\,j2}\end{pmatrix}\ \text{pour } d=2\quad\text{et}\quad A_{ij} = \begin{pmatrix} c_{i1\,j1} & c_{i1\,j2} & c_{i1\,j3} \\ c_{i2\,j1} & c_{i2\,j2} & c_{i2\,j3} \\ c_{i3\,j1} & c_{i3\,j2} & c_{i3\,j3}\end{pmatrix}\ \text{pour } d=3.$$

Remarque 23 *Les propriétés de symétrie du tenseur d'élasticité impliquent :* $A_{ij} = A_{ji}^*$.

Remarque 24 *Dans le cas isotrope, nous avons, en* $2D$ *:*

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & \mu\end{pmatrix},\quad A_{12} = A_{21}^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0\end{pmatrix},\quad A_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu\end{pmatrix},$$

et, en $3D$ *:*

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix},\quad A_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix},\quad A_{33} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2\mu\end{pmatrix},$$

$$A_{12} = A_{21}^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_{13} = A_{31}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_{23} = A_{32}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0\end{pmatrix}.$$

Remarque 25 *La propriété de définie-positivité du tenseur d'élasticité n'implique pas l'inversibilité de toutes les matrices élémentaires* A_{ij}*. Nous le vérifions d'ailleurs dans le cas isotrope* $3D$ *où les matrices* A_{ij} *ne sont pas inversibles pour* $i \neq j$*.*

Nous introduisons alors de nouvelles variables vectorielles $\left(\gamma_{ij}\right)_{i,j=1..d}$ et $(\gamma_i)_{i=1..d}$ telles que :

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = \nabla u_i \quad \forall i = 1..d, \text{ et } \gamma_{ij} = A_{ij}\gamma_j \quad \forall i,j = 1..d.$$

Il est alors évident que $\left(\gamma_{ij}\right)_{i,j=1..d}$ et $(\sigma_{ij})_{i,j=1..d}$ vérifient la relation :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \gamma_{ik}[j]}{\partial t} \quad \text{avec } \gamma_{ik} = (\gamma_{ik}[j])_{j=1..d} \tag{3.5}$$

Remarque 26 *En utilisant la définition des γ_{ij} ainsi que l'égalité (3.5), nous démontrons facilement que les propriétés de symétrie du tenseur des contraintes sont respectées.*

Il nous faut à présent réécrire la condition de Neumann avec les nouvelles variables. En utilisant la relation (3.5) et en imposant $\gamma_{ij}(\mathbf{x},0) = 0 \ \forall i,j = 1..d$, nous obtenons :

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\overrightarrow{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{d} \gamma_{ij} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \forall i = 1..d \tag{3.6}$$

Nous pouvons alors écrire une nouvelle formulation du problème, sous la forme d'un système du premier ordre en espace et en temps :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot \gamma_{ij} = F_i \quad \forall i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.7a}$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = \nabla u_i \quad \forall i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.7b}$$

$$\gamma_{ij} = A_{ij}\gamma_j \quad \forall i,j = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.7c}$$

$$\sum_{j=1}^{d} \gamma_{ij} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \forall i = 1,d \qquad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.7d}$$

$$+ \text{ Conditions initiales.} \tag{3.7e}$$

où $(F_i(\mathbf{x},t))_{i=1..d} = \displaystyle\int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x},\tau)d\tau$

Remarque 27 *Les formulations (3.1) et (3.7) sont équivalentes. En effet, nous avons montré que (3.1) implique (3.7). En injectant (3.5) dans (3.7), nous retrouvons facilement (3.1).*

Nous avons donc exhibé une nouvelle formulation du système de l'élastodynamique sous la forme d'un système d'ordre 1 en temps en $\nabla \cdot (M\nabla u)$.

Remarque 28 *Si nous avions introduit :*

$$\gamma_i = \nabla u_i \quad \forall i = 1..d, \tag{3.8}$$

nous aurions obtenu le système du second ordre suivant :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot \gamma_{ij} = f_i \quad \forall i = 1,d \qquad \textit{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.9a}$$

$$\gamma_i = \nabla u_i \quad \forall i = 1,d \qquad \textit{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.9b}$$

$$\gamma_{ij} = A_{ij}\gamma_j \quad \forall i,j = 1,d \qquad \textit{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.9c}$$

$$\sum_{j=1}^{d} \gamma_{ij} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \forall i = 1,d \qquad \textit{sur } \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.9d}$$

$$+ \textit{ Conditions initiales}. \tag{3.9e}$$

3.2 Formulation variationnelle et conservation de l'énergie

3.2.1 Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe, nous introduisons la formulation variationnelle associée au système (3.7).
Pour cela, multiplions les différentes équations par des fonctions tests. Nous obtenons alors, formellement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\, u_i \varphi_i \, d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{d} \int_\Omega \left(\nabla \cdot \gamma_{ij}\right) \varphi_i \, d\mathbf{x} = \int_\Omega F_i \varphi_i \, d\mathbf{x} \quad \forall i = 1..d, \tag{3.10a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \gamma_i \cdot \psi_i \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla u_i \cdot \psi_i \, d\mathbf{x} \quad \forall i = 1..d, \tag{3.10b}$$

$$\int_\Omega \gamma_{ij} \cdot \psi_{ij} \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(A_{ij}\gamma_j\right) \cdot \psi_{ij} \, d\mathbf{x} \quad \forall i,j = 1..d. \tag{3.10c}$$

Supposons que les γ_{ij} aient une certaine régularité, que nous définirons ultérieurement, qui nous permette d'effectuer une intégration par parties sur le second terme de l'équation (3.10a). En utilisant les conditions aux limites, nous pouvons écrire :

$$\int_\Omega \left(\nabla \cdot \gamma_{ij}\right) \varphi_i \, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \gamma_{ij} \cdot \nabla \varphi_i \, d\mathbf{x} \quad \forall i,j = 1..d. \tag{3.11}$$

Nous pouvons donc chercher

- les u_i dans $L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$,
- les γ_i dans $\left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right]^d$,
- et les γ_{ij} dans $\left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right]^d$.

φ_i décrira $H^1(\Omega)$ et ψ_i et ψ_{ij} décriront $\left[L^2(\Omega)\right]^d$.

Nous obtenons alors la formulation variationnelle suivante :

Trouver $u_i \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right), \forall i = 1..d$, $\gamma_i \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right]^d, \forall i = 1..d$ et
$\gamma_{i,j} \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right]^d, \forall i,j = 1..d$ tels que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\, u_i\, \varphi_i\, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{d}\int_\Omega \gamma_{ij}\cdot\nabla\varphi_i\, d\mathbf{x} = \int_\Omega F_i\,\varphi_i\, d\mathbf{x} \quad \forall\varphi_i \in H^1(\Omega) \qquad \forall i = 1..d, \tag{3.12a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \gamma_i\cdot\psi_i\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla u_i\cdot\psi_i\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi_i \in \left[L^2(\Omega)\right]^d \quad \forall i = 1..d, \tag{3.12b}$$

$$\int_\Omega \gamma_{ij}\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(A_{ij}\,\gamma_j\right)\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi_{ij} \in \left[L^2(\Omega)\right]^d \quad \forall i,j = 1..d. \tag{3.12c}$$

Remarque 29 *Les conditions de Neumann homogènes ("surface libre") sont bien incluses dans la formulation variationnelle.*

3.2.2 Conservation de l'énergie

Nous allons maintenant montrer que la formulation variationnelle (3.12) vérifie une identité d'énergie pour des conditions initiales données et lorsque le terme source est nul.

Comme les fonctions tests φ_i et ψ_{ij} sont indépendantes du temps, en dérivant (3.12a) et (3.12c) par rapport au temps nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\,\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\varphi_i\, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t}\cdot\nabla\varphi_i\, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall\varphi_i \in H^1(\Omega) \qquad \forall i = 1..d, \tag{3.13a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \gamma_i\cdot\psi_i\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla u_i\cdot\psi_i\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi_i \in \left[L^2(\Omega)\right]^d \quad \forall i = 1..d, \tag{3.13b}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t}\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(A_{ij}\,\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}\right)\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi_{ij} \in \left[L^2(\Omega)\right]^d \quad \forall i,j = 1..d. \tag{3.13c}$$

Prenons alors :

- $\varphi_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(t_0,.) \quad \forall i = 1..d,$
- $\psi_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A^*_{ji}\nabla\varphi_j \quad \forall i = 1..d,$
- $\psi_{ij} = \nabla\varphi_i \quad \forall i = 1..d,$

pour t_0 fixé.

Remarque 30 *u_i étant cherché dans $H^1(\Omega)$, les fonctions tests appartiennent bien aux espaces désirés : $\varphi_i \in H^1(\Omega)\ \forall i = 1..d$, $\psi_i \in \left[L^2(\Omega)\right]^d\ \forall i = 1..d$ et $\psi_{ij} \in \left[L^2(\Omega)\right]^d\ \forall i,j = 1..d$.*

Nous obtenons alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\,\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\frac{\partial u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}+\sum_{j=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}=0 \qquad \forall i=1..d, \tag{3.14a}$$

$$\sum_{j=1}^{d}\int_\Omega \left(A_{ji}\frac{\partial \gamma_i}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial \nabla u_j}{\partial t}\,d\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{d}\int_\Omega (A_{ji}\nabla u_i)\cdot\frac{\partial \nabla u_j}{\partial t}\,d\mathbf{x} \qquad \forall i=1..d, \tag{3.14b}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}=\int_\Omega \left(A_{ij}\frac{\partial \gamma_j}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x} \qquad \forall i,j=1..d. \tag{3.14c}$$

On remplace le second terme de l'équation (3.14a) par sa valeur donnée dans l'équation (3.14c). On somme les égalités pour i variant de 1 à d et l'on obtient :

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\,\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\frac{\partial u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}+\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \left(A_{ij}\frac{\partial \gamma_j}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}=0 \tag{3.15a}$$

$$\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \left(A_{ji}\frac{\partial \gamma_i}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial \nabla u_j}{\partial t}\,d\mathbf{x}=\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega (A_{ji}\nabla u_i)\cdot\frac{\partial \nabla u_j}{\partial t}\,d\mathbf{x} \tag{3.15b}$$

Soit, en reportant (3.15b) dans (3.15a) :

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho\left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|^2 d\mathbf{x}+\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega (A_{ij}\nabla u_j)\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}=0 \tag{3.16}$$

En utilisant le fait que $2A_{ij}=A_{ij}+A^*_{ji}$ (remarque 23), nous avons :

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i,j=1..d}\int_\Omega (A_{ij}\nabla u_j)\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}\\
&\quad=\sum_{i,j=1..d}\int_\Omega (A_{ij}\nabla u_j)\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}+\sum_{i,j=1..d}\int_\Omega \left(A^*_{ji}\nabla u_j\right)\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}\\
&\quad=\sum_{i,j=1..d}\int_\Omega (A_{ij}\nabla u_j)\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}+\sum_{i,j=1..d}\int_\Omega \nabla u_j\cdot\left(A_{ji}\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\right)d\mathbf{x}\\
&\quad=\sum_{i,j=1..d}\int_\Omega (A_{ij}\nabla u_j)\cdot\frac{\partial \nabla u_i}{\partial t}\,d\mathbf{x}+\sum_{i,j=1..d}\int_\Omega \nabla u_i\cdot\left(A_{ij}\frac{\partial \nabla u_j}{\partial t}\right)d\mathbf{x}\\
&\quad=\sum_{i,j=1..d}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (A_{ij}\nabla u_j)\cdot\nabla u_i\,d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

L'équation (3.16) se réécrit donc sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \rho\left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|^2 d\mathbf{x}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega (A_{ij}\nabla u_j)\cdot\nabla u_i\,d\mathbf{x}\right\}=0 \tag{3.17}$$

Il nous faut maintenant montrer que la quantité entre accolades est bien une énergie, c'est-à-dire que, pour $u_i\neq 0$:

$$\mathcal{E}=\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \rho\left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|^2 d\mathbf{x}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1..d}\int_\Omega (A_{ij}\nabla u_j)\cdot\nabla u_i\,d\mathbf{x}>0 \tag{3.18}$$

Le premier terme de $\mathcal{E}$ est positif.
Montrons donc que :

$$\tilde{\mathcal{E}} = \sum_{i,j=1..d} (A_{i,j} \nabla u_j) \cdot \nabla u_i > 0 \tag{3.19}$$

Pour cela, nous allons montrer que cette quantité vérifie :

$$\tilde{\mathcal{E}} = C\,\varepsilon(\mathbf{U}) \cdot \varepsilon(\mathbf{U}) \tag{3.20}$$

En utilisant les équations (3.7b)-(3.7c) et (3.5), nous pouvons écrire $\tilde{\mathcal{E}}$ sous la forme :

$$\tilde{\mathcal{E}} = \sum_{i,j=1..d} \sum_{k=1}^{d} [A_{i,j} \nabla u_j]_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \sum_{i,j=1..d} \sum_{k=1}^{d} \left[\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}\right]_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \left[\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}\right]_k \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

où $[\mathbf{v}]_k$ désigne la $k$ième composante du vecteur $\mathbf{v}$.
Soit :

$$\tilde{\mathcal{E}} = \sum_{i,k=1}^{d} \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{3.21}$$

Or, comme $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, nous pouvons écrire $2\sigma_{ik} = \sigma_{ik} + \sigma_{ki}$.
En introduisant cette égalité dans (3.21), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{d} \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{d} \sigma_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{d} \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{d} \sigma_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i,k=1}^{d} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik} \\
&= C\,\varepsilon(\mathbf{U}) \cdot \varepsilon(\mathbf{U})
\end{aligned}$$

Le tenseur C est défini positif et $\varepsilon(\mathbf{U})$ est un tenseur symétrique d'ordre 2. De ce fait, $\tilde{\mathcal{E}}$ est strictement positif, ce qui implique bien la stricte positivité de $\mathcal{E}$.

Nous avons bien démontré la conservation de l'énergie.

3.3 Semi-discrétisation en espace

Le problème étant bien posé, nous pouvons maintenant lui appliquer la méthode des éléments finis mixtes avec condensation de masse.

Les $u_i(.,\mathbf{x})$ seront cherchés dans U_d^r et les $\gamma_i(.,\mathbf{x})$ et les $\gamma_{ij}(.,\mathbf{x})$ dans V_d^r, définis dans le chapitre 1.2.

Nous effectuons les mêmes opérations que pour les équations de l'acoustique et obtenons le problème semi-discret suivant :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_{ih}}{\mathrm{d}t} + \sum_{j=1}^{d} R_{d,r}\,\Gamma_{ijh} = \mathbf{F}_{ih} \quad \forall i = 1..d, \tag{3.22a}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\,\frac{\mathrm{d}\Gamma_{ih}}{\mathrm{dt}} = R^{*}_{d,r}\,\mathbf{U}_{ih} \quad \forall i = 1..d, \tag{3.22b}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\,\Gamma_{ijh} = \tilde{B}_{ijd,r}\,\Gamma_{jh} \quad \forall i,j = 1..d, \tag{3.22c}$$

où $\mathbf{U}_{ih}$ est le vecteur des composantes de u_i dans la base de U_d^r et Γ_{ih} et Γ_{ijh} sont respectivement les vecteurs des composantes de γ_i et γ_{ij} dans la base de V_d^r.

Comme dans le cas acoustique (voir section 1.2), les matrices vérifient les propriétés suivantes :

- $D_{d,r}$, la matrice de masse de (3.22a), est diagonale. En fait, c'est la même matrice que celle obtenue par la même méthode en acoustique dans un milieu de module de compressibilité $\mu = \rho^{-1}$ où ρ est la masse volumique du milieu élastique.
- $\tilde{B}_{d,r}$, matrice de masse de (3.22b) et intervenant dans (3.22c), est une matrice diagonale par blocs $d \times d$ dont chaque bloc s'exprime sous la forme :

  $$\frac{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}}{|J_e|} D\mathbf{F}_e^{*}\, D\mathbf{F}_e(\hat{\xi}_{\mathbf{p}})$$

  En fait, cette matrice est la même que la matrice de masse diagonale par blocs $d \times d$ obtenue après semi-discrétisation par la méthode des éléments finis mixtes spectraux en acoustique dans le cas d'un matériau de masse volumique $1\mathrm{Kg.m}^{-3}$.
- $\tilde{B}_{ijd,r}$, matrices intervenant dans l'équation (3.22c), sont diagonales par blocs $d \times d$ dont chaque bloc se met sous la forme :

  $$\frac{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}}{|J_e|} D\mathbf{F}_e^{*}\, A_{ij}\, D\mathbf{F}_e(\hat{\xi}_{\mathbf{p}})$$

- $R_{d,r}$, matrice de rigidité, est la même matrice que celle obtenue dans le cas de l'acoustique. Elle se déduit d'une matrice $(r+1)^d \times (r+1)^d$ définie sur $\hat{K}$ uniquement.

Remarque 31 *La matrice $\tilde{B}_{d,r}$ est inversible, ce qui n'est pas forcément le cas des matrices $\tilde{B}_{ijd,r}$: ces dernières dépendent des A_{ij} et nous avons vu que ces matrices élémentaires ne sont pas toutes forcément inversible (en particulier dans le cas isotrope 3D).*

Les propriétés des matrices $\tilde{B}_{d,r}$ et $\tilde{B}_{ijd,r}$ nous permettent de simplifier le système (3.22) sous la forme :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_{ih}}{\mathrm{d}t} + \sum_{j=1}^{d} R_{d,r}\,\Gamma_{ijh} = \mathbf{F}_{ih} \quad \forall i = 1..d, \tag{3.23a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_{ijh}}{\mathrm{dt}} = \tilde{B}^{-1}_{d,r}\,\tilde{B}_{ijd,r}\,\tilde{B}^{-1}_{d,r}\,R^{*}_{d,r}\,\mathbf{U}_{ih} \quad \forall i,j = 1..d. \tag{3.23b}$$

Introduisons alors de nouvelles matrices $\left(B_{ijd,r}\right)_{i,j=1..d}$ telles que :

$$B_{ijd,r} = \tilde{B}^{-1}_{d,r}\,\tilde{B}_{ijd,r}\,\tilde{B}^{-1}_{d,r} \quad \forall i,j = 1..d \tag{3.24}$$

Ces matrices sont des matrices diagonales par blocs $d \times d$ dont les blocs s'écrivent :

$$\frac{|J_e|}{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}} D\mathbf{F}_e^{-1} A_{ij} D\mathbf{F}_e^{*-1}(\hat{\xi}_{\mathbf{p}})$$

Remarque 32 *Ces matrices ont la même expression que l'inverse de la matrice de masse diagonale par blocs $d \times d$: $B_{d,r}$, obtenue par la même méthode en acoustique, dans un milieu non-physique où l'on aurait pris $\rho^{-1} = Aij$.*

Le système que nous résolvons s'écrit alors :

$$D_{d,r} \frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_{ih}}{\mathrm{d}t} + \sum_{j=1}^{d} R_{d,r} \Gamma_{ijh} = \mathbf{F}_{ih} \quad \forall i = 1..d, \tag{3.25a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_{ijh}}{\mathrm{dt}} = B_{ijd,r} R^*_{d,r} \mathbf{U}_{ih} \quad \forall i, j = 1..d. \tag{3.25b}$$

Remarque 33 *Si on applique la même méthode sur le système d'ordre* 2 *en temps (3.9), on obtient le schéma semi-discret en espace :*

$$D_{d,r} \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}_{ih}}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{j=1}^{d} R_{d,r} \Gamma_{ijh} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_{ih}}{\mathrm{d}t} \quad \forall i = 1..d, \tag{3.26a}$$

$$\Gamma_{ijh} = B_{ijd,r} R^*_{d,r} \mathbf{U}_{ih} \quad \forall i, j = 1..d, \tag{3.26b}$$

où $D_{d,r}$, $R_{d,r}$ et $\left(B_{ijd,r}\right)_{i,j=1..d}$ sont les mêmes matrices que celles qui interviennent dans le système du premier ordre (3.25).

Remarque 34 *Les propriétés des matrices élémentaires A_{ij} impliquent les propriétés suivantes sur les matrices $B_{ijd,r}$:*

$$B_{ijd,r} = B^*_{jid,r} \quad \forall i, j = 1..d. \tag{3.27}$$

Cette méthode permet d'obtenir un système explicite, une programmation simple, ainsi qu'un gain de place mémoire et de calcul non-négligeables.

Remarque 35 *Cette méthode nécessite exactement le même stockage pour un cas isotrope que pour un cas anisotrope, et le même en milieu homogène ou hétérogène.*

Nous avons donc une méthode d'éléments finis d'ordre élevé, ayant des propriétés intéressantes au niveau du stockage et du temps de calcul. Ces propriétés seront plus longuement étudiées ultérieurement.

3.4 Généralisation du théorème d'équivalence avec la méthode des éléments finis spectraux

Nous voulons généraliser le théorème d'équivalence entre la méthode des éléments finis spectraux et la méthode des éléments finis mixtes spectraux, démontré dans le cas acoustique au paragraphe 1.3, au système de l'élastodynamique.

La méthode des éléments finis spectraux dans le cas de l'élastodynamique s'appuie sur l'approximation du système [52] :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{U}) \right) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.28a}$$

$$\left(\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{U}) \right) \overrightarrow{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.28b}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.28c}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.28d}$$

qui, d'après la décomposition effectuée dans la section 3.1, est équivalent à :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot (A_{ij} \nabla u_j) = \mathbf{f}_i \quad \forall i = 1..d \qquad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \tag{3.29a}$$

$$\sum_{j=1}^{d} (A_{ij} \nabla u_j) \overrightarrow{n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.29b}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.29c}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.29d}$$

où $\mathbf{U} = (u_i)_{i=1..d}$.

Après approximation par la méthode des éléments finis spectraux, détaillée dans la section 1.1.2, on obtient le schéma semi-discret en espace suivant :

$$D_{d,r} \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{\mathbf{U}}_{ih}}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{j=1}^{d} K_{ijd,r} \tilde{\mathbf{U}}_{jh} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_{ih}}{\mathrm{d}t} \quad \forall i = 1..d, \tag{3.30}$$

où $K_{ijd,r}$ est la même matrice que celle obtenue par la méthode des éléments finis spectraux appliquée à l'équation des ondes dans un milieu non physique telle que la masse volumique ρ matricielle vérifierait :

$$\rho^{-1} = A_{ij} \tag{3.31}$$

Considérons alors un milieu acoustique non physique tel que la masse volumique ρ vérifie l'égalité (3.31) et tel que le module de compressibilité valle 1. Dans ce milieu, nous considérons le système équivalent à l'équation classique de propagation d'onde dans un fluide :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla \cdot \mathbf{v} = F \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.32a}$$

$$\mathbf{w} = \nabla p \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.32b}$$

$$\mathbf{v} = A_{ij} \mathbf{w} \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.32c}$$

$$p = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.32d}$$

$$p(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.32e}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega. \tag{3.32f}$$

La méthode des éléments finis mixtes spectraux donne le schéma semi-discret en espace :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t^2} + R_{d,r}\,\mathbf{W}_h = \mathbf{F}_h \tag{3.33a}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\,\mathbf{W}_h = R^*_{d,r}\,\mathbf{P}_h \tag{3.33b}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\,\mathbf{V}_h = \tilde{B}_{ijd,r}\,\mathbf{W}_h \tag{3.33c}$$

où $R_{d,r}$, B_h et $\tilde{B}_{ijh}$ ont bien la même expression que dans le schéma (3.22) obtenu en élastodynamique.

Nous avons alors :

$$K_{ijd,r} = R_{d,r}\,\tilde{B}^{-1}_{d,r}\,\tilde{B}_{ijd,r}\,\tilde{B}^{-1}_{d,r}\,R^*_{d,r} \tag{3.34}$$

▷ PREUVE : La démonstration se fait de la même manière que celle du théorème 1. On renvoit à l'annexe A pour plus de détails. ◁

Remarque 36 *Nous n'avons pu baser entièrement cette démonstration sur les résultats du théorème 1 car la démonstration de celui-ci fait intervenir la masse volumique du milieu acoustique* ρ *et son inverse. Or, dans le cas d'un milieu non-physique qui vérifie la relation (3.31), la masse volumique du milieu n'est pas forcément définie, les matrices* A_{ij} *n'étant pas toutes inversibles.*

Ainsi, d'après la définition des matrices $B_{ijd,r}$:

Théorème 2 *Aves les notations définies en (3.25) et (3.30), nous avons*

$$K_{ijd,r} = R_{d,r}\,B_{ijd,r}\,R^*_{d,r} \tag{3.35}$$

La méthode mixte est donc une factorisation *de la méthode spectrale et :*

$$\tilde{U}_{ih} = U_{ih} \quad \forall i = 1..d$$

Nous avons donc généralisé le théorème d'équivalence entre la méthode des éléments finis spectraux et la méthode des éléments finis mixtes spectraux, démontré pour l'acoustique, à l'élastodynamique. Ce théorème implique, entre autres, l'équivalence entre le schéma semi-discret en espace (3.25) avec le schéma semi-discret utilisé par D. Komatitsch et J.P. Vilotte dans [52].

Chapitre 4

Approximation en temps du schéma obtenu en élastodynamique

Introduction

Le chapitre précédent présentait le schéma semi-discret en espace obtenu par application de la méthode des éléments finis mixtes spectraux à une reformulation du système de l'élastodyna- mique linéaire. Nous obtenions alors le schéma :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_{ih}}{\mathrm{d}t}+\sum_{j=1}^{d}R_{d,r}\Gamma_{ijh}=\mathbf{F}_{ih}\quad\forall i=1..d, \tag{4.1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_{ijh}}{\mathrm{d}t}=B_{ijd,r}R^{*}_{d,r}\mathbf{U}_{jh}\quad\forall i,j=1..d. \tag{4.1b}$$

Nous nous intéressons ici à la discrétisation en temps de ce système. Nous avons choisi pour cela un schéma saute-mouton :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{U}^{n+1}_{ih}-\mathbf{U}^{n}_{ih}}{\Delta t}+\sum_{j=1}^{d}R_{d,r}\,\Gamma^{n+\frac{1}{2}}_{ijh}=\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}}_{ih}\quad\forall i=1..d, \tag{4.2a}$$

$$\frac{\Gamma^{n+\frac{3}{2}}_{ijh}-\Gamma^{n+\frac{1}{2}}_{ijh}}{\Delta t}=B_{ijd,r}R^{*}_{d,r}\,\mathbf{U}^{n+1}_{jh}\quad\forall i,j=1..d. \tag{4.2b}$$

Comme dans le cas du schéma discrétisé obtenu en acoustique, la stabilité du système (4.2) dépend d'une condition appelée CFL qui lie entre eux le pas de temps Δt, le pas d'espace h utilisé pour la construction du maillage et les propriétés physiques du milieu. C'est cette condition que nous déterminons dans la section 4.1. Nous montrons tout d'abord que l'étude peut se ramener à l'étude de stabilité effectuée sur une discrétisation en temps par un schéma centré d'ordre 2 du schéma semi-discret en espace obtenu par la méthode des éléments finis spectraux. Nous utilisons alors les similarités entre la forme des matrices obtenues en acoustique et celles obtenues en élastodynamique pour démontrer une condition suffisante de stabilité déduite de la CFL obtenue dans la section 2.1.
Ensuite, comme dans le chapitre 2, nous étudions les gains au niveau temps de calcul et place mémoire obtenus par l'utilisation de la méthode des éléments finis mixtes spectraux par rapport à l'algorithme de programmation de la méthode des éléments finis spectraux mis en place par Y. Maday, E.M. Ronquist et A.T. Patera [56]. Nous introduisons donc trois algorithmes différents résultant de trois façons de programmer le schéma (4.2) en utilisant le théorème d'équivalence énoncé dans la section 3.4.

4.1 Résultat de stabilité

Nous considérons le système :

$$D_{d,r}\frac{\mathbf{U}_{ih}^{n+1}-\mathbf{U}_{ih}^{n}}{\Delta t}+\sum_{j=1}^{d}R_{d,r}\,\Gamma_{ijh}^{n+\frac{1}{2}}=\mathbf{F}_{ih}^{n+\frac{1}{2}}\quad\forall i=1..d \tag{4.3a}$$

$$\frac{\Gamma_{ijh}^{n+\frac{3}{2}}-\Gamma_{ijh}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}=B_{ijd,r}R_{d,r}^{*}\,\mathbf{U}_{jh}^{n+1}\quad\forall i,j=1..d \tag{4.3b}$$

En soustrayant l'équation (4.3a) écrite au temps $n+1$ à celle écrite au temps n et en divisant chaque terme par Δt, nous obtenons :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{U}_{ih}^{n+1}-2\mathbf{U}_{ih}^{n}+\mathbf{U}_{ih}^{n-1}}{\Delta t^{2}}+\sum_{j=1}^{d}R_{d,r}\,\frac{\Gamma_{ijh}^{n+\frac{1}{2}}-\Gamma_{ijh}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=\frac{\mathbf{F}_{ih}^{n+\frac{1}{2}}-\mathbf{F}_{ih}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\quad\forall i=1..d \tag{4.4}$$

En reportant l'équation (4.3b) dans (4.4) nous avons :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{U}_{ih}^{n+1}-2\mathbf{U}_{ih}^{n}+\mathbf{U}_{ih}^{n-1}}{\Delta t^{2}}+\sum_{j=1}^{d}R_{d,r}\,B_{ijd,r}R_{d,r}^{*}\,\mathbf{U}_{jh}^{n}=\frac{\mathbf{F}_{ih}^{n+\frac{1}{2}}-\mathbf{F}_{ih}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\quad\forall i=1..d \tag{4.5}$$

Soit, d'après le théorème 2 :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{U}_{ih}^{n+1}-2\mathbf{U}_{ih}^{n}+\mathbf{U}_{ih}^{n-1}}{\Delta t^{2}}+K_{ijd,r}\,\mathbf{U}_{ih}^{n}=\frac{\mathbf{F}_{ih}^{n+\frac{1}{2}}-\mathbf{F}_{ih}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{4.6}$$

où $K_{ijd,r}$ est la matrice de rigidité obtenue par la méthode des éléments finis spectraux.
L'analyse de stabilité du système (4.3) se ramène donc bien à l'analyse de stabilité de la discrétisation en temps par un schéma centré d'ordre 2 de la semi-discrétisation en espace obtenue par la méthode des éléments finis spectraux.

Notons :

- $\mathbf{U}_h^n=(\mathbf{U}_{ih}^n)_{i=1.d}$,
- $\mathbf{D}_{d,r}$ la matrice diagonale par blocs de d blocs $D_{d,r}$,
- $\mathbf{R}_{d,r}$ la matrice diagonale par blocs de d blocs $R_{d,r}$,
- $\mathbf{B}_{d,r}$ la matrice composée des d^2 blocs $B_{ijd,r}$:

$$\mathbf{B}_{d,r}=\begin{pmatrix} B_{11\,d,r} & \dots & B_{1d\,d,r}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{d1\,d,r} & \dots & B_{dd\,d,r}\end{pmatrix},$$

- $\mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}}=\left(F_{ih}^{n+\frac{1}{2}}\right)_{i=1.d}$.

Le système (4.5) s'écrit alors :

$$\mathbf{D}_{d,r}\frac{\mathbf{U}_h^{n+1}-2\mathbf{U}_h^{n}+\mathbf{U}_h^{n}}{\Delta t^{2}}+\mathbf{R}_{d,r}\,\mathbf{B}_{d,r}\,\mathbf{R}_{d,r}^{*}\,\mathbf{U}_h^{n}=\frac{\mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}}-\mathbf{F}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{4.7}$$

Or, nous savons [6] que ce schéma est stable si et seulement si :

$$sup_u \frac{\left(\mathbf{D}_{d,r}^{-1}\mathbf{R}_{d,r}\mathbf{B}_{d,r}\mathbf{R}_{d,r}^{*}u\,,\,u\right)}{(u\,,\,u)} \leq \frac{4}{\Delta t^2} \tag{4.8}$$

$\mathbf{D}_{d,r}$ étant diagonale et inversible, nous avons :

$$sup_u \frac{\left(\mathbf{D}_{d,r}^{-1}\mathbf{R}_{d,r}\mathbf{B}_{d,r}\mathbf{R}_{d,r}^{*}u\,,\,u\right)}{(u\,,\,u)} = sup_{v\,/|v|=1}\left(\mathbf{D}_{d,r}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{R}_{d,r}\mathbf{B}_{d,r}\mathbf{R}_{d,r}^{*}\mathbf{D}_{d,r}^{-\frac{1}{2}}v\,,\,v\right) \tag{4.9}$$

De plus, nous avons vu dans le chapitre 3.3 que les matrices $(B_{ijd,r})_{i,j=1..d}$ sont des matrices diagonales par blocs $d\times d$ de bloc :

$$\frac{1}{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}}\left[|J_i|\,D\mathbf{F}_i^{-1}A_{ij}\,D\mathbf{F}_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{p}})$$

Dans le cas d'un maillage périodique infini de pas h dans les d directions et en milieu homogène, $B_{d,r}^{-1}$ est donc une matrice diagonale par blocs de bloc :

$$\frac{1}{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}}A_{ij}$$

Introduisons alors $P_{d,r}$, matrice diagonale de terme général $\sqrt{1/\hat{\omega}_{\mathbf{p}}}$, et $\mathbf{P}_{d,r}$, matrice diagonale par blocs de d blocs $P_{d,r}$.
Soient $\mathbf{A}_{ij}$ la matrice diagonale par blocs de bloc A_{ij} et $\mathbf{A}_{d,r}$ la matrice composée des d^2 blocs $\mathbf{A}_{ij}$:

$$\mathbf{A}_{d,r} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{d1} & \dots & \mathbf{A}_{dd} \end{pmatrix}.$$

Remarque 37 *La matrice $\mathbf{A}_{d,r}$ est équivalente à la matrice diagonale par blocs C où C est le tenseur d'élasticité représenté sous forme matricielle $d^2\times d^2$.*

La matrice $\mathbf{B}_{d,r}$ s'exprime alors comme le produit $\mathbf{P}_{d,r}\mathbf{A}_{d,r}\mathbf{P}_{d,r}^{*}$ et nous obtenons l'inégalité :

$$\begin{aligned} &sup_{v\,/|v|=1}\left(\mathbf{D}_{d,r}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{R}_{d,r}\mathbf{B}_{d,r}\mathbf{R}_{d,r}^{*}\mathbf{D}_{d,r}^{-\frac{1}{2}}v\,,\,v\right) \\ &\qquad = sup_{v\,/|v|=1}\left(\mathbf{D}_{d,r}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{R}_{d,r}\mathbf{P}_{d,r}\mathbf{A}_{d,r}\mathbf{P}_{d,r}^{*}\mathbf{R}_{d,r}^{*}\mathbf{D}_{d,r}^{*-\frac{1}{2}}v\,,\,v\right) \\ &\qquad \leq \lambda_{\mathbf{A}_{d,r}}^{max}\,\|\,\mathbf{P}_{d,r}^{*}\mathbf{R}_{d,r}^{*}\mathbf{D}_{d,r}^{*-\frac{1}{2}}\,\|^2 \end{aligned}$$

où $\lambda_{\mathbf{A}_{d,r}}^{max}$ est la plus grande des valeurs propres de $\mathbf{A}_{d,r}$.
$\mathbf{A}_{d,r}$ étant équivalente à la matrice diagonale par blocs C, nous avons :

$$\lambda_{\mathbf{A}_{d,r}}^{max} = \lambda_{C}^{max} \tag{4.10}$$

où λ_{C}^{max} est la plus grande des valeurs propres de C.

Nous obtenons alors la condition de stabilité suivante, suffisante mais non nécessaire :

$$\lambda_{C}^{max}\,\|\,\mathbf{P}_{d,r}^{*}\mathbf{R}_{d,r}^{*}\mathbf{D}_{d,r}^{*-\frac{1}{2}}\,\|^2 \leq \frac{4}{\Delta t^2} \tag{4.11}$$

Intéressons nous, à présent, au terme $\| \mathbf{P}^*_{d,r} \mathbf{R}^*_{d,r} \mathbf{D}^{*-\frac{1}{2}}_{d,r} \|^2$.
Remarquons tout d'abord que $\mathbf{P}_{d,r}$, $\mathbf{R}_{d,r}$ et $\mathbf{D}_{d,r}$ sont des matrices diagonales par blocs de d blocs respectifs $P_{d,r}$, $R_{d,r}$ et $D_{d,r}$. Nous avons alors :

$$\| \mathbf{P}^*_{d,r} \mathbf{R}^*_{d,r} \mathbf{D}^{*-\frac{1}{2}}_{d,r} \|^2 = \| P^*_{d,r} R^*_{d,r} D^{*-\frac{1}{2}}_{d,r} \|^2$$

Dans le cas de la résolution de l'équation des ondes dans un milieu de masse volumique 1 et de module de compressibilité $1/\rho$ par la méthode des éléments finis mixtes spectraux associée à un schéma d'ordre 1 en temps, la condition de stabilité s'écrivait (voir section 2.1) :

$$sup_u \frac{\left(D^{-1}_{d,r} R_{d,r} B^{-1}_{d,r} R^*_{d,r} u \, , \, u \right)}{(u \, , \, u)} \leq \frac{4}{\Delta t^2} \tag{4.12}$$

où $D_{d,r}$ et $R_{d,r}$ sont les mêmes matrices que celles intervenant dans le système (4.5) et où $B^{-1}_{d,r}$ est une matrice diagonale par blocs $d \times d$ de bloc :

$$\frac{1}{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}} \left[|J_i| \, D\mathbf{F}_i^{-1} \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_{\mathbf{p}})$$

Dans le cas d'un maillage périodique infini de pas h dans les d directions et en milieu homogène, $B^{-1}_{d,r}$ est donc une matrice diagonale par blocs de bloc $1/\hat{\omega}_{\mathbf{p}} \, I_{dd}$, où I_{dd} est la matrice $d \times d$ identité.
Ainsi, d'après la définition de la matrice $P_{d,r}$, :

$$sup_u \frac{\left(D^{-1}_{d,r} R_{d,r} B^{-1}_{d,r} R^*_{d,r} u \, , \, u \right)}{(u \, , \, u)} = sup_{u \, / |u|=1} \left(D^{-\frac{1}{2}}_{d,r} R_{d,r} P_{d,r} P^*_{d,r} R^*_{d,r} D^{-\frac{1}{2}}_{d,r} \, u \, , \, u \right) \tag{4.13}$$

Or, nous savons (voir section 2.1) que :

$$sup_{u \, / |u|=1} \left(D^{-\frac{1}{2}}_{d,r} R_{d,r} B^{-1}_{d,r} R^*_{d,r} D^{*-\frac{1}{2}}_{d,r} \, u, u \right) = \frac{4}{h^2} \frac{d}{cfl^2_{1,r}} \tag{4.14}$$

où $cfl_{1,r}$ est la CFL du même schéma appliqué en acoustique 1D dont les valeurs sont données dans le tableau 2.1.
Ainsi :

$$\| P^*_{d,r} R^*_{d,r} D^{*-\frac{1}{2}}_{d,r} u \|^2 = \frac{4}{h^2} \frac{d}{cfl^2_{1,r}} \tag{4.15}$$

Nous obtenons donc la condition de stabilité suivante, suffisante mais non nécessaire :

$$\sqrt{\lambda_C^{max}} \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{cfl_{1,r}}{\sqrt{d}} \tag{4.16}$$

avec λ_C^{max} la plus grande des valeurs propres de C, $cfl_{1,r}$ est la valeur de la CFL pour le schéma des éléments finis mixtes Q_r en acoustique 1D (donnés dans le tableau **??**) et d est la dimension de l'espace.

Remarque 38 *En pratique, nous remplaçons λ_C^{max} par la plus grande valeur prise par les valeurs propres de la matrice de Christoffel associée au tenseur d'élasticité $\underline{\underline{C}}$.*

4.2 Comparaison de 3 algorithmes

Dans ce chapitre, nous allons utiliser le fait que les matrices de rigidité intervenant dans la formulation par éléments finis spectraux s'expriment comme produit des matrices de rigidité et des matrices de masse diagonales par blocs intervenant dans la formulation par éléments finis mixtes spectraux. Cette propriété nous permet d'introduire trois algorithmes différents pour la résolution du système (4.2), équivalent au système (4.6).

4.2.1 Présentation des trois algorithmes

– Le premier algorithme considéré (algo1) consiste en la résolution du système de l'élastody-namique par la méthode des éléments finis mixtes spectraux :

$$\mathbf{U}_{ih}^{n+1} = \mathbf{U}_{ih}^{n} + \Delta t\, D_{d,r}^{-1} \left[\sum_{j=1}^{d} R_{d,r}\, \Gamma_{ijh}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{F}_{ih}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad \forall i = 1..d, \tag{4.17a}$$

$$\Gamma_{ijh}^{n+\frac{3}{2}} = \Gamma_{ijh}^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t\, B_{ijd,r}\, R_{d,r}^{*}\, \mathbf{U}_{jh}^{n+1} \quad \forall i,j = 1..d. \tag{4.17b}$$

– Le second algorithme (algo2) correspond à la méthode mise en place par Y. Maday, E.M. Ronquist et A.T. Patera pour la résolution du système de l'élastodynamique par la méthode des éléments finis spectraux [56]. Il correspond à la résolution du système :

$$\mathbf{U}_{ih}^{n+1} = 2\mathbf{U}_{ih}^{n} - \mathbf{U}_{ih}^{n-1} - \Delta t^2\, D_{d,r}^{-1} R_{d,r} \sum_{j=1}^{d} B_{ijd,r}\, R_{d,r}^{*}\, \mathbf{U}_{jh}^{n} + \Delta t \left[\mathbf{F}_{ih}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{ih}^{n-\frac{1}{2}} \right] \quad \forall i = 1..d \tag{4.18}$$

où les matrices $B_{ijd,r}$ sont calculées à chaque pas de temps en fonction des $D\mathbf{F}_e$, J_e et du tenseur d'élasticité.

– Le dernier algorithme (algo3) est obtenu en discrétisant par un schéma centré d'ordre 2 en temps le système semi-discret en espace (3.26) obtenu par l'application de la méthode des éléments finis mixtes spectraux au système d'ordre 2 en temps :

$$D_{d,r}\, \frac{\mathbf{U}_{ih}^{n+1} - 2\mathbf{U}_{ih}^{n} + \mathbf{U}_{ih}^{n-1}}{\Delta t^2} + R_{d,r} \sum_{j=1}^{d} \Gamma_{ijh}^{n} = \frac{\mathbf{F}_{ih}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{ih}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad \forall i = 1..d, \tag{4.19a}$$

$$\Gamma_{ijh}^{n} = B_{ijh}\, R_{h}^{*}\, \mathbf{U}_{jh}^{n} \quad \forall i,j = 1..d. \tag{4.19b}$$

Les vecteurs Γ_{ij} sont définis localement dans chaque élément. Il n'est donc pas nécessaire de les stocker. Le système (4.19) correspond donc au second algorithme, pour lequel on aurait stocké les matrices $B_{ijd,r}$ (et non pas calculé à chaque pas de temps comme c'est le cas pour le second algorithme).

4.2.2 Comparaison du stockage

Nous allons, à présent, comparer le stockage nécessaire à chaque algorithme.
Dans tout les cas, la matrice de rigidité R_h et sa transposée se déduisant d'une matrice $(r+1)^d \times (r+1)^d$ définie sur $\hat{K}$ uniquement, nous en négligeons le stockage.

Plaçons nous en dimension d. Pour obtenir des estimations qui ne dépendent pas du maillage utilisé, rapportons le stockage nécessaire à un seul élément du maillage.

– **algo1** : nous devons stocker les $(\mathbf{U}_{ih})_{i=1..d}$ aux temps n ($d \times r^d$ inconnues) et les $(\Gamma_{ijh})_{i,j=1..d}$ au temps $n+1/2$ ($d^2 \times d(r+1)^d$ valeurs), la matrice de masse diagonale $D_{d,r}$ (r^d termes non-nuls), les matrices de masse diagonales par blocs $d \times d$ symétriques $(B_{ii\,d,r})_{i=1..d}$ ($d \times (r+1)^d d(d+1)/2$ valeurs) et les matrices de masse diagonales par blocs $d \times d$ non-symétriques $(B_{ij\,d,r})_{i,j=1..d,i\neq j}$ ($d(d-1)/2 \times (r+1)^d d^2$).
Notons fsd_{algo1} (d étant relatif à la dimension de l'espace), le nombre de réels qu'il nous faut stocker lors de la résolution du système matriciel par le premier algorithme. Nous avons donc :

$$\Rightarrow \quad fsd_{algo1}(r) = (d+1)r^d + \frac{1}{2}d^2(d+1)^2(r+1)^d$$

Soit :

$$\begin{aligned} fs2_{algo1}(r) &= 21r^2 + 36r + 18 && \text{pour } d = 2 \\ fs3_{algo1}(r) &= 76r^3 + 216r^2 + 216r + 72 && \text{pour } d = 3 \end{aligned}$$

– **algo2** : nous devons stocker $(\mathbf{U}_{ih})_{i=1..d}$ aux temps n et $n-1$ ($2 \times d \times r^d$ inconnues), la matrice de masse diagonale $D_{d,r}$ (r^d termes non-nuls) et les valeurs de DF_e^{-1} et J_e en chacun des points d'interpolation ($d^2(r+1)^d + (r+1)^d$ valeurs).
Notons fsd_{algo2}, le nombre de réels qu'il nous faut stocker lors de la résolution du système matriciel par le deuxième algorithme. Nous avons donc :

$$\Rightarrow \quad fsd_{algo2}(r) = (2d+1)r^d + (d^2+1)(r+1)^d$$

Soit :

$$\begin{aligned} fs2_{algo2}(r) &= 10r^2 + 10r + 5 && \text{pour } d = 2 \\ fs3_{algo2}(r) &= 17r^3 + 30r^2 + 30r + 10 && \text{pour } d = 3 \end{aligned}$$

– **algo3** : nous devons stocker $(\mathbf{U}_{ih})_{i=1..d}$ aux temps n et $n-1$ ($2 \times d \times r^d$ inconnues), la matrice de masse diagonale $D_{d,r}$ (r^d termes non-nuls), les matrices de masse diagonales par blocs $d \times d$ symétriques $(B_{ii\,d,r})_{i=1..d}$ ($d \times (r+1)^d d(d+1)/2$ valeurs) et les matrices de masse diagonales par blocs $d \times d$ non-symétriques $(B_{ij\,d,r})_{i,j=1..d,i\neq j}$ ($d(d-1)/2 \times (r+1)^d d^2$).
Notons fsd_{algo3}, le nombre de réels qu'il nous faut stocker lors de la résolution du système matriciel par le troisième algorithme. Nous avons donc :

$$\Rightarrow \quad fsd_{algo3}(r) = (2d+1)r^d + d^2\frac{d^2+1}{2}(r+1)^d$$

Soit :

$$\begin{aligned} fs2_{algo3}(r) &= 15r^2 + 20r + 10 && \text{pour } d = 2 \\ fs3_{algo3}(r) &= 52r^3 + 135r^2 + 135r + 45 && \text{pour } d = 3 \end{aligned}$$

Afin de mieux visualiser les apports de chaque méthode au niveau stockage, nous représentons les courbes de gain entre les 3 méthodes dans la figure 4.1 :

$$gsd_{algo1/algo2} = \frac{fsd_{algo1}(r)}{fsd_{algo2}(r)}, \quad gsd_{algo3/algo2} = \frac{fsd_{algo3}(r)}{fsd_{algo2}(r)}, \quad gsd_{algo1/algo3} = \frac{fsd_{algo1}(r)}{fsd_{algo3}(r)}$$

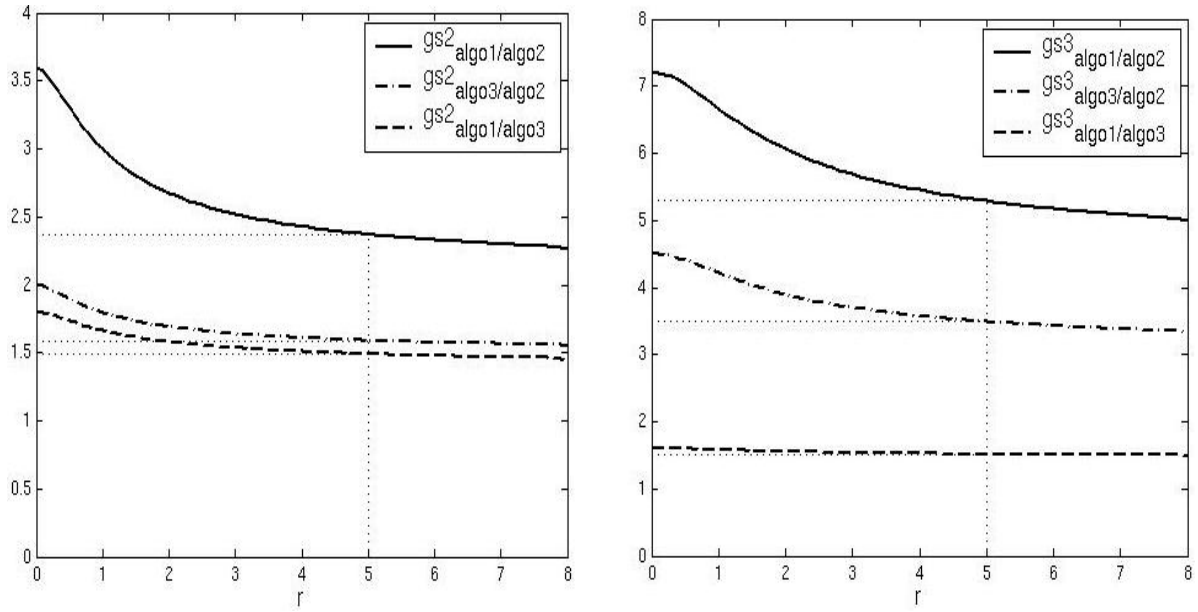


FIG. 4.1: Gains de stockage entre les trois algorithmes proposés en dimension 2 (à gauche) et en dimension 3 (à droite), en fonction de l'ordre d'approximation, pour l'élastodynamique.

Ainsi, en $2D$ et en Q_5 (ordre d'approximation utilisé dans les expériences numériques présentées dans ce rapport), nous stockons 2.4 fois plus avec l'algorithme 1 qu'avec l'algorithme 2, 1.6 fois plus avec l'algorithme 3 qu'avec l'algorithme 2 et 1.5 fois plus avec l'algorithme 1 qu'avec l'algorithme 3.
En dimension 3, les différences sont plus importantes : l'algorithme 2 nécessite 5.2 fois moins de place mémoire que l'algorithme 1, et 3.5 fois moins que l'algorithme 3. Nous avons un rapport de 1.5 entre le stockage nécessaire à l'algorithme 1 et celui nécessaire à l'algorithme 3.

4.2.3 Comparaison des temps CPU

Nous allons comptabiliser le nombre de multiplications nécessaires à chaque algorithme.

– **algo1** : pour calculer les $\mathbf{U}_{ih}^{n+1}$, nous devons effectuer les produits $R_{d,r}\,\Gamma_{ijh}$ ($d \times d(r+1)^{d+1}$ multiplications), sommer les vecteurs résultats sur j, pour toutes les valeurs de i, et y ajouter $\mathbf{F}_{ih}$ (0 multiplications), puis multiplier ces résultats par $\Delta t\, D_{d,r}^{-1}$ ($d \times r^d(1+1)$ multiplications).
Ensuite, pour calculer $\Gamma_{ijh}^{n+\frac{3}{2}}$, nous devons effectuer les produits $R_{d,r}^{*}\,\mathbf{U}_{ih}^{n+1}$ ($d \times d(r+1)^{d+1}$ multiplications), puis les produits $\Delta t\, B_{ijd,r}\, R_{d,r}^{*}\,\mathbf{U}_{jh}$ ($d^2 \times (d^2+1)(r+1)^d$ multiplications).
Notons ftd_{algo1} (d étant relatif à la dimension de l'espace) le nombre de multiplications nécessaires pour la résolution du système matriciel par le premier algorithme. Nous avons alors :

$$\Rightarrow \quad ftd_{algo1}(r) = 2dr^d + 2d^2(r+1)^{d+1} + d^2(d^2+1)(r+1)^d$$

Soit :

$$ft2_{algo1}(r) = 8r^3 + 48r^2 + 64r + 28 \qquad \text{pour } d = 2$$
$$ft3_{algo1}(r) = 18r^4 + 168r^3 + 378r^2 + 342r + 108 \qquad \text{pour } d = 3$$

– **algo2** : nous devons tout d'abord calculer les matrices $B_{ijd,r}$ en fonction de DF_e^{-1}, J_e et $\underline{\underline{C}}$
Rappel 2 *Les matrices $B_{ijd,r}$ sont des matrices diagonales par blocs $d \times d$ de bloc (voir section 3.3) :*

$$DF_e^{-1}\,(A_{ij} \circ \mathbf{F}_e)\,DF_e^{*-1}\,|J_e|\,/\hat{\omega}_{\mathbf{p}}$$

Ce calcul nécessite $d \times (r+1)^d[d^3 + d(d+1)(d+2)/2]$ multiplications pour les matrices symétriques $B_{iid,r}^{-1}$ et $d(d-1)/2 \times (r+1)^d[d^3 + d^2(d+2)]$ multiplications pour les matrices non-symétriques, qui vérifient $B_{ijd,r}^{*-1} = B_{jid,r}^{-1}$.
Pour calculer $\mathbf{U}_{ih}^{n+1}$, nous procédons de la manière suivante : nous calculons tout d'abord les produits de $R_{d,r}^*$ par $\mathbf{U}_{ih}^n$ ($d \times d(r+1)^{d+1}$ multiplications) puis multiplions les vecteurs résultats par les matrices $B_{ijd,r}$ diagonales par blocs associées ($d^2 \times d^2(r+1)^d$ multiplications). Ensuite, nous sommons les valeurs de $B_{ijd,r}R_{d,r}^*U_{jh}^n$ pour j variant de 1 à d (0 multiplications) puis les multiplions par $R_{d,r}$ ($d \times d(r+1)^{d+1}$ multiplications). Il ne nous reste plus qu'à multiplier ces d vecteurs par l'inverse de la matrice de masse diagonale et le pas de temps au carré ($d \times r^d(2+1)$ multiplications).
Notons ftd_{algo2} le nombre de multiplications nécessaires pour la résolution du système matriciel par le deuxième algorithme. Nous avons alors :

$$\Rightarrow \quad ftd_{algo2}(r) = 3dr^d + 2d^2(r+1)^{d+1} + (r+1)^d d^2(d^3 + \frac{5}{2}d^2 + \frac{1}{2}d + 1)$$

Soit :

$$ft2_{algo2}(r) = 8r^3 + 110r^2 + 184r + 88 \qquad \text{pour } d = 2$$
$$ft3_{algo2}(r) = 18r^4 + 549r^3 + 1512r^2 + 1476r + 486 \qquad \text{pour } d = 3$$

– **algo3** : cet algorithme est en fait le même que le second, où les matrices $(B_{ijd,r})_{i,j=1..d}$ sont stockées et non pas calculées à chaque pas de temps. Le nombre d'opérations nécessaires est donc celui du second algorithme auquel nous enlevons le calcul de ces matrices.
Notons ftd_{algo3} le nombre de multiplications nécessaires pour la résolution du système matriciel par le troisième algorithme. Nous obtenons donc :

$$\Rightarrow \quad ftd_{algo3}(r) = 2d^2(r+1)^{d+1} + d^4(r+1)^d + 3dr^d$$

Soit :

$$ft2_{algo3}(r) = 8r^3 + 46r^2 + 56r + 24 \qquad \text{pour } d = 2$$
$$ft3_{algo3}(r) = 18r^4 + 162r^3 + 351r^2 + 315r + 99 \qquad \text{pour } d = 3$$

Afin de mieux visualiser les différences au niveau temps de calcul des différents algorithmes, représentons les courbes de gain entre les 3 méthodes dans la figure 4.2 :

$$gtd_{algo1/algo2} = \frac{ftd_{algo1}(r)}{ftd_{algo2}(r)}, \quad gtd_{algo3/algo2} = \frac{ftd_{algo3}(r)}{ftd_{algo2}(r)}, \quad gtd_{algo1/algo3} = \frac{ftd_{algo1}(r)}{ftd_{algo3}(r)}$$

Ainsi, en $2D$ et en Q_5, l'algorithme 2 est 1.8 fois plus long que les algorithmes 1 et 3. L'algorithme 3 est aussi rapide que l'algorithme 1.
En dimension 3, l'algorithme 3 et l'algorithme 1 ont toujours des CPU équivalents. Par contre, ces algorithmes sont 3.5 fois plus rapide que l'algorithme 2.

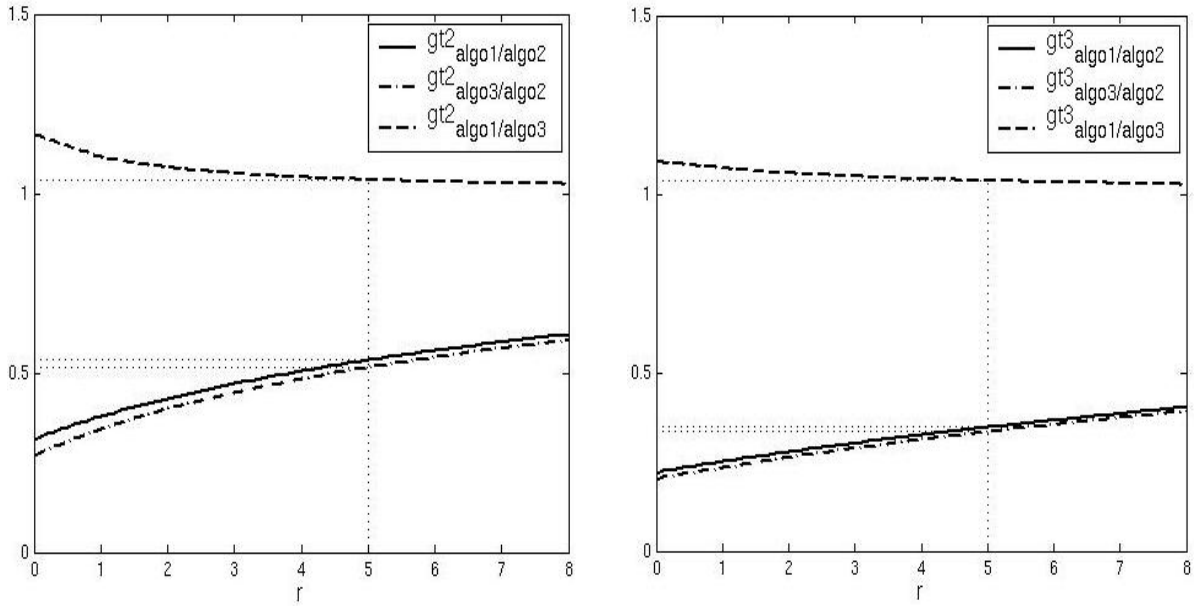


FIG. 4.2: Gains de temps de calcul entre les trois algorithmes proposés en dimension 2 (à gauche) et en dimension 3 (à droite), en fonction de l'ordre d'approximation, pour l'élastodynamique.

4.2.4 Un exemple numérique

Nous avons énuméré le nombre de multiplications à effectuer pour chaque algorithme alors que le temps de calcul dû aux additions et à l'accès aux données n'est pas négligeable. De plus, ce CPU supplémentaire dépend de l'ordinateur utilisé.

Nous avons donc programmé ces trois algorithmes de la même façon (c'est à dire, sans utiliser d'astuces de programmations et en stockant les différentes variables sous la même forme) et les avons testé sur le même modèle 2D : un milieu $[0,25\text{m}]^2$ isotrope ($V_p = 4.47\text{m.s}^{-1}$ et $V_s = 1.41\text{m.s}^{-1}$) maillé avec un pas d'espace constant de 0.5m. Le pas de temps est le même pour les trois algorithmes. Nous avons fait exécuter le programme pendant 1443 pas de temps. La machine utilisée est une station Compac $XP1000$, 1 processeur $21264/ev6$ (500 Mhz). Nous avons obtenu les temps de calcul suivants :

- **algo1** : CPU = 94.07s.
- **algo2** : CPU = 248.42s.
- **algo3** : CPU = 63.25s.

En 3D, pour un milieu $[0,10\text{m}]^3$ isotrope ($V_p = 2\text{m.s}^{-1}$ et $V_s = 1\text{m.s}^{-1}$) maillé avec un pas d'espace constant de 1m, le même pas de temps pour les trois algorithmes et exécuté pendant 100 pas de temps sur la même machine, nous avons obtenu les temps de calcul suivants :

- **algo1** : CPU = 62.65s.
- **algo2** : CPU = 734.98s.
- **algo3** : CPU = 43.35s.

Nous remarquons que les gains estimés ont été sous-estimés. Toutefois, il serait hasardeux de généraliser les temps de calculs obtenus par ces trois algorithmes sur cette machine : comme nous l'avons dit

précédemment, le temps de calcul dépend de la machine utilisée ainsi que de la manière dont l'algorithme est programmé. Les gains obtenus sur une autre machine ne seraient peut-être pas les mêmes que ceux que nous avons ici.

4.2.5 Conclusion

D'après la place mémoire et le temps de calcul estimés dans cette section, il semble judicieux de privilégier le troisième algorithme. Toutefois, comme dans le cas de l'acoustique, le premier algorithme garde un avantage certain par rapport aux deux autres : celui de pouvoir y appliquer rapidement des Perfectly Matched Layers (PML) pour modéliser les milieux non-bornés.

Deuxième partie

Modélisation de milieux non-bornés par les Perfectly Matched Layers (PML)

Chapitre 5

Mise en place des PML

Introduction

De nombreux problèmes de propagation d'ondes se posent en milieu non borné ou, du moins, très grand par rapport à la zone d'intérêt. Pour des raisons pratiques évidentes, on est amené à réduire les calculs effectifs à un domaine borné en espace. Se pose alors le problème de l'introduction d'une frontière artificielle afin de simuler le fait que le milieu de propagation réel est infini. Une des méthodes possibles consiste en l'adjonction de "couches absorbantes parfaitement adaptées" (Perfectly Matched Layers) : bandes ajoutées autour du domaine de calcul dans lesquelles on introduit un terme de viscosité et qui ne génère aucune réflexion entre le domaine physique et la couche absorbante.

Cette méthode, introduite par J.P. Bérenger [14] sur les équations de Maxwell, a été étendue à de nombreux modèles de propagation d'ondes. Parallèlement à ces travaux, W.C. Chew, W.H. Weedon [18] et C.M. Rappaport [65] ont présenté une interprétation des Perfectly Matched Layers (PML) sous forme d'introduction, dans le système fréquentiel associé au problème à résoudre, d'un changement de variables spatiales dépendant d'un coefficient d'absorption et de la pulsation.
Considérons le problème d'évolution général :

$$\partial_t U - \sum_{j=1}^{d} A_j \, \partial_{x_j} U = 0, \tag{5.1a}$$

$$U\,(t=0) = U_0, \tag{5.1b}$$

où U est un vecteur de dimension m et $\left(A_j\right)_{j=1..d}$ sont des matrices $m \times m$.
Le problème fréquentiel associé :

$$-\mathrm{i}\omega\hat{U} - \sum_{j=1}^{d} A_j \, \partial_{x_j} \hat{U} = 0 \tag{5.2}$$

admet des solutions de la forme :

$$\hat{U} = \hat{U}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{5.3}$$

où $\mathbf{k}$ est un vecteur de dimension d qui vérifie la relation de dispersion associée à (5.2).
Nous nous intéressons aux phénomènes physiques se déroulant dans le domaine $\mathcal{D} = \left(\mathbb{R}^-\right)^d$. Considérons donc des PML dans les demi-espaces $x_j > 0$ (Fig. 5.1 en dimension 2). D'après l'interprétation de

W.C. Chew, W.H. Weedon [18] et C.M. Rappaport [65], cela revient à introduire le changement de variables :

$$\tilde{x_j} = x_j + \frac{\mathrm{i}}{\omega}\int_0^{x_j} \tau_j(s)\,ds \tag{5.4}$$

où les τ_j sont des fonctions positives, nulles dans $\mathbb{R}^-$, continues et qui ne dépendent que de x_j.

Remarque 39 *Dans $\mathcal{D}$, nous avons :* $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$.

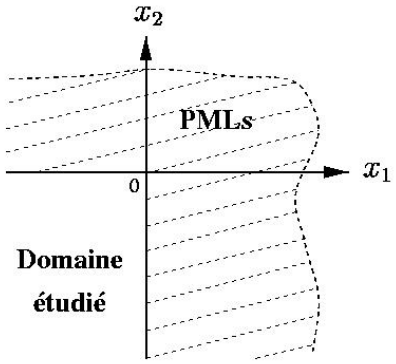


FIG. 5.1: Cadre général de l'étude des PML, en dimension 2.

On effectue alors un prolongement de (5.2) dans le nouveau système de coordonnées :

$$-\mathrm{i}\omega\hat{V} - \sum_{j=1}^{d} A_j\,\partial_{\tilde{x_j}}\hat{V} = 0 \tag{5.5}$$

qui peut s'écrire, en fonction des dérivées spatiales en x_j, sous la forme :

$$-\mathrm{i}\omega\hat{V} - \sum_{j=1}^{d} \frac{-\mathrm{i}\omega}{-\mathrm{i}\omega+\tau_j} A_j\,\partial_{x_j}\hat{V} = 0 \tag{5.6}$$

Posons alors :

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \hat{U}(\tilde{\mathbf{x}}). \tag{5.7}$$

Dans le domaine d'intérêt $\mathcal{D}$ où les fonctions τ_j sont nulles, $\hat{V}(\mathbf{x})$ vérifie (5.6). Par le théorème du prolongement analytique, on en déduit que $\hat{V}(\mathbf{x})$ vérifie (5.6) partout.
Les solutions de (5.6) se mettent donc sous la forme :

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \hat{U}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{d} k_j \cdot \int_0^{x_j} \tau_j(s)ds} \tag{5.8}$$

Les fonctions τ_j étant positives, nous avons une absorption de l'onde dans les PML.
De plus, le prolongement de la solution de $\mathcal{D}$ à $\mathbb{R}^d$ assure qu'il n'y ait pas de réflexion entre le domaine physique et les PML.

Remarque 40 *L'utilisation de PML autour d'un domaine hétérogène occulte tout phénomène physique se déroulant dans les milieux non-considérés (provenant, par exemple, d'un réflecteur penté ou d'une hétérogénéité). Il est donc très important de bien définir la zone d'intérêt et de tenir compte de ce fait lors de la comparaison, par exemple, avec des données réelles.*

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'application de ce principe aux systèmes de l'acoustique et de l'élastodynamique.
Dans la section 5.1, nous mettons en place une formulation PML pour l'acoustique par introduction, après passage au domaine fréquentiel, du changement de variable (5.10). Nous montrons que l'on peut interpréter de différentes manières le système obtenu sous forme d'équations aux dérivées partielles en temps, dont l'une mène à une formulation "type Bérenger" [14]. Une telle formulation fait intervenir des équations où chaque coefficient d'absorption τ_j n'apparaît qu'en présence d'une dérivée spatiale en x_j. Ainsi, bien que plus simple à dériver du système initial, un tel système pose le problème, lors de la semi-discrétisation en espace par éléments finis mixtes spectraux, de la matrice de rigidité qui, dans le cas d'un maillage quelconque, n'est plus indépendante de la géométrie du maillage. Nous introduisons donc des formulations "type Zhao-Cangellaris" [76, 77] qui font intervenir exactement les mêmes opérateurs dans le système PML et dans le système initial, modulo quelques équations différentielles en temps. Un choix judicieux utilisant les propriétés des fonctions τ_j permet de réduire la dimension du système à résoudre. Nous approchons ensuite le système obtenu par éléments finis mixtes spectraux et montrons que l'introduction de nouvelles variables spécifiques aux PML ne pose pas de problème de couplage entre le système à résoudre dans le domaine physique avec celui associé aux PML.
Dans la section 5.2, nous appliquons les mêmes études aux systèmes de l'élastodynamique d'ordre 1 et d'ordre 2 en temps obtenus dans le chapitre 3. Nous nous intéressons aussi au système approché par éléments finis spectraux et montrons qu'il est possible d'introduire des PML pour des systèmes d'ordre 2 en temps.
Nous concluons ce chapitre par des expériences numériques qui montrent le bon fonctionnement de cette méthode.

5.1 En acoustique

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à l'introduction des PML au système de l'acoustique d'ordre 1 en temps :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\cdot\mathbf{v} = F \qquad \text{dans } \Omega\times[0,T]\,, \tag{5.9a}$$

$$\rho\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla p \qquad \text{dans } \Omega\times[0,T]\,, \tag{5.9b}$$

$$p(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{5.9c}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega. \tag{5.9d}$$

Dans un premier temps, nous mettons en place une formulation PML d'ordre d en temps. En supposant la dérivabilité des coefficients d'absorption, nous montrons qu'il est possible d'obtenir un système optimal d'ordre 1 en temps.
La section 5.1.2 est consacrée à la semi-discrétisation en espace par éléments finis mixtes spectraux de la formulation PML optimale mise en place dans la section 5.1.1. Le schéma obtenu est ensuite discrétisé en temps.

Enfin, nous nous intéressons au couplage du schéma à résoudre dans le domaine physique avec celui spécifique aux couches absorbantes parfaitement adaptées (PML).

5.1.1 Mise en place d'une formulation dans les PML

Nous considérons donc un milieu de dimension d infini et nous intéressons uniquement aux phénomènes physiques se déroulant dans $\Omega =]-\infty, 0]^d$. Nous allons introduire les variables $\tilde{x}_j$, définies dans [77] et [65], dans le système (5.9) avec :

$$\tilde{x_j} = x_j + \frac{\mathrm{i}}{\omega} \int_0^{x_j} \tau_j(s)\, ds \tag{5.10}$$

où les fonctions τ_j, j variant de 1 à d, sont des fonctions continues, positives, ne dépendant que de x_j et nulles dans le domaine physique (i.e. pour les x_j négatifs). Dans notre cas, nous supposerons de plus que ces fonctions sont dérivables et de dérivées continues (donc nulles dans le domaine physique).

Les fonctions τ_j sont appelées coefficients d'absorption suivant x_j.

Nous appellerons *PML* en x_j (noté PML_{x_j}) le domaine dans lequel la fonction τ_j est non-nulle et noterons Ω_{pml} le domaine constitué des PML. Ce domaine est borné par le domaine physique et $\partial\Omega_{pml}$. Dans notre cadre d'introduction, nous considérons donc d PML, d'intersections non-nulles (voir figure 5.2 en 2D).

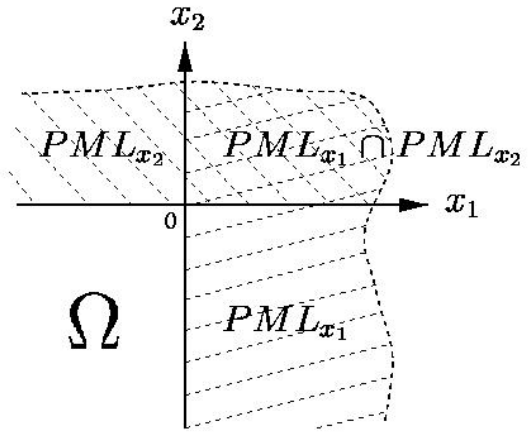


FIG. 5.2: Domaine et PML considérés en 2D pour la mise en place des équations.

Pour la mise en place de la formulation dans les PML, nous allons procéder de la façon suivante :

1. Passage au domaine fréquentiel par l'application de la transformée de Fourier en temps.
2. Prolongement des équations dans l'espace complexe grâce au nouveau système de coordonnées $(\tilde{x}_j)_{j=1..d}$.
3. Introduction des égalités (5.10) pour la réinterprétation du système sous forme d'équations aux dérivées partielles en $(x_j)_{j=1..d}$.
4. Introduction de nouvelles inconnues afin d'obtenir un système ne faisant intervenir que des puissances positives de $-\mathrm{i}\omega$, le but étant de réinterpréter le système obtenu sous forme d'équations aux dérivées partielles temporelles.

5. Obtention du système à résoudre dans les PML par application de la transformée inverse de Fourier en temps au système obtenu à l'étape 4.

Etape 1 :
Oublions les conditions initiales et la fonction source (placée dans le domaine physique) et passons au domaine fréquentiel. Nous avons donc :

$$-\mathrm{i}\omega\frac{1}{\mu}\hat{p}-\nabla\cdot\hat{\mathbf{v}}=0, \tag{5.11a}$$

$$-\mathrm{i}\omega\rho\,\hat{\mathbf{v}}=\nabla\hat{p}, \tag{5.11b}$$

où $\hat{p}=\mathcal{F}_t(p)$ et $\hat{\mathbf{v}}=\mathcal{F}_t(\mathbf{v})$, $\mathcal{F}_t$ étant la transformée de Fourier en temps.

Etape 2 :
Nous prolongeons alors ces équations à l'aide du nouveau système de coordonnées, et obtenons :

$$-\mathrm{i}\omega\frac{1}{\mu}\hat{p}-\tilde{\nabla}\cdot\hat{\mathbf{v}}=0, \tag{5.12a}$$

$$-\mathrm{i}\omega\rho\,\hat{\mathbf{v}}=\tilde{\nabla}\hat{p}, \tag{5.12b}$$

où $\tilde{\nabla}=\left(\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}\right)^*_{j=1..d}$.

Etape 3 :
Nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}=\frac{\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega-\tau_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\quad\forall j=1..d. \tag{5.13}$$

Ainsi, ∇ et $\tilde{\nabla}$ vérifient $\nabla=M\tilde{\nabla}$ où M est une matrice $d\times d$ diagonale de terme diagonal $M_{jj}=1+\mathrm{i}\dfrac{\tau_j}{\omega}$.
Le système (5.12) s'écrit :

$$-\mathrm{i}\omega\frac{1}{\mu}\hat{p}-\sum_{k=1}^{d}M_{kk}^{-1}\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}[k]}{\partial x_k}=0, \tag{5.14a}$$

$$-\mathrm{i}\omega M\rho\,\hat{\mathbf{v}}=\nabla\hat{p}, \tag{5.14b}$$

avec $\hat{\mathbf{v}}=(\hat{\mathbf{v}}[k])_{k=1..d}$.

Etape 4 :
Nous allons tout d'abord nous intéresser au second terme de (5.14a). M_{kk}^{-1} dépendant de $(-\mathrm{i}\omega+\tau_k)^{-1}$, cette équation ne peut être réinterprétée sous forme d'équation aux dérivées partielles en temps après passage par $\mathcal{F}_t^{-1}$ au domaine temporel. Nous introduisons alors $\tilde{\mathbf{v}}$ telle que :

$$M\,\tilde{\mathbf{v}}=\hat{\mathbf{v}}\prod_{l=1}^{d}M_{ll}. \tag{5.15}$$

$\tilde{\mathbf{v}}[k]$ vérifie :

$$\tilde{\mathbf{v}}[k]=\hat{\mathbf{v}}[k]\prod_{l=1..d,l\neq k}M_{ll}. \tag{5.16}$$

Or $M_{kk} = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\tau_k}{\omega}$ et les fonctions τ_k ne dépendent que de x_k. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} M_{kk}^{-1}\,\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}[k]}{\partial x_k} &= M_{kk}^{-1}\,\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}[k]}{\partial x_k} \prod_{l=1..d,\, l\neq k} M_{ll}^{-1} \\ &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}[k]}{\partial x_k} \prod_{l=1}^{d} M_{ll}^{-1}. \end{aligned}$$

Le système (5.14) s'écrit alors :

$$-\mathrm{i}\omega\,\frac{1}{\mu}\,\hat{p}\prod_{l=1}^{d} M_{ll} - \nabla\cdot\tilde{\mathbf{v}} = 0, \tag{5.17a}$$

$$-\mathrm{i}\omega\, M\,\rho\, M\,\tilde{\mathbf{v}}\prod_{l=1}^{d} M_{ll}^{-1} = \nabla\hat{p}. \tag{5.17b}$$

Il suffirait de multiplier par $(-\mathrm{i}\omega)^{d-1}$ l'équation (5.17a) et par $(-\mathrm{i}\omega)^{d-1}\,M^{-1}\prod_{l=1}^{d} M_{ll}$ l'équation (5.17b) pour obtenir un système ne faisant intervenir que des puissances positives de $(-\mathrm{i}\omega)$. Le système obtenu serait alors d'ordre d en temps. Toutefois, la multiplication du gradient de p par une matrice diagonale ne nous permettrait plus, lors de la discrétisation du schéma par la méthode des éléments finis mixtes spectraux, de garder le caractère spécifique de la matrice de rigidité, à savoir le fait qu'elle se déduise d'une matrice $(r+1)^d \times (r+1)^d$ ne dépendant que de l'élément de référence $\hat{K}$. Nous avons donc choisi d'introduire de nouvelles inconnues :

$$\hat{p}^{\star} = \hat{p}\prod_{l=1}^{d} M_{ll}, \tag{5.18a}$$

$$\hat{\mathbf{v}}^{\star}\prod_{l=1}^{d} M_{ll} = M\,\rho\, M\,\tilde{\mathbf{v}}. \tag{5.18b}$$

Soit $\mathcal{T}$ la matrice $d\times d$ diagonale de terme diagonal $\mathcal{T}_{jj} = \tau_j$. Nous avons donc :

$$-\mathrm{i}\omega M = -\mathrm{i}\omega I_{dd} + \mathcal{T}$$

où I_{dd} est la matrice $d\times d$ identité.

Nous pouvons alors poser le système :

$$-\mathrm{i}\omega\,\frac{1}{\mu}\,\hat{p}^{*} - \nabla\cdot\tilde{\mathbf{v}} = 0, \tag{5.19a}$$

$$-\mathrm{i}\omega\,\hat{\mathbf{v}}^{\star} = \nabla\hat{p}, \tag{5.19b}$$

$$\hat{p}\prod_{l=1}^{d}(-\mathrm{i}\omega + \mathcal{T}_{ll}) = (-\mathrm{i}\omega)^{d}\,\hat{p}^{\star}, \tag{5.19c}$$

$$(-\mathrm{i}\omega)^{d-1}\,\rho\,\tilde{\mathbf{v}} + (-\mathrm{i}\omega)^{d-2}\,\rho\mathcal{T}\,\tilde{\mathbf{v}} = (-\mathrm{i}\omega I_{dd} + \mathcal{T})^{-1}\left[\prod_{l=1}^{d}(-\mathrm{i}\omega + \mathcal{T}_{ll})\right]\hat{\mathbf{v}}^{\star}. \tag{5.19d}$$

Etape 5 :
Avant de revenir au domaine temporel, remarquons que $\tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} = \mathcal{F}_t(\mathbf{v})$ dans le domaine physique

(les fonctions τ_j y sont nulles). Nous prolongeons alors par continuité cette égalité dans les PML et obtenons :

$$\mathcal{F}_t^{-1}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{v} \quad \text{dans } \Omega \cup \Omega_{pml}. \tag{5.20}$$

Appliquons $\mathcal{F}_t^{-1}$ au système (5.19). Nous obtenons le système à résoudre dans les PML auquel nous ajoutons la condition aux bords de Dirichlet sur p [1]. Notons $p^\star = \mathcal{F}_t^{-1}(\hat{p}^\star)$ et $\mathbf{v}^\star = \mathcal{F}_t^{-1}(\hat{\mathbf{v}}^\star)$

– En 2D :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p^\star}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.21a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^\star}{\partial t} = \nabla p \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.21b}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + (\tau_1 + \tau_2)\frac{\partial p}{\partial t} + \tau_1\,\tau_2\,p = \frac{\partial^2 p^\star}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.21c}$$

$$\rho\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho\,\mathcal{T}\,\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}^\star}{\partial t} + (\tau_1\,\tau_2)\mathcal{T}^{-1}\,\mathbf{v}^\star \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.21d}$$

$$p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{pml}. \tag{5.21e}$$

– En 3D :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p^\star}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.22a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^\star}{\partial t} = \nabla p \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.22b}$$

$$\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\sum_{j=1}^{3}\tau_j + \frac{\partial p}{\partial t}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\tau_j}\prod_{k=1}^{3}\tau_k + p\prod_{j=1}^{3}\tau_j = \frac{\partial^3 p^\star}{\partial t^3} \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.22c}$$

$$\rho\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \rho\,\mathcal{T}\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\star}{\partial t^2} + \left(\sum_{j=1}^{d}\tau_j\,I_{33} - \mathcal{T}\right)\frac{\partial \mathbf{v}^\star}{\partial t} + (\prod_{j=1}^{3}\tau_j)\,\mathcal{T}^{-1}\,\mathbf{v}^\star \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.22d}$$

$$p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{pml}. \tag{5.22e}$$

Remarque 41 *Dans le domaine physique, où les coefficients d'absorption $(\tau_j)_{j=1..d}$ sont nuls, nous retrouvons bien le système initial (5.9).*

Nous avons donc trouvé une formulation des PML dans le cas de l'acoustique. Toutefois, le système obtenu est coûteux en temps de calcul et en place mémoire du fait de la présence de dérivées d'ordre d en temps de p et d'ordre $d-1$ en temps de $\mathbf{v}$. Nous allons donc essayer de réduire l'ordre global du schéma en temps en utilisant les propriétés de dérivabilité des fonctions $(\tau_j)_{j=1..d}$.

Pour cela, nous allons introduire de nouvelles inconnues à l'étape 4 : considérons $\tilde{\mathbf{v}}$ telle que :

$$M\,\tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}. \tag{5.23}$$

$\tilde{\mathbf{v}}[k]$ vérifie :

$$M_{kk}\,\tilde{\mathbf{v}}[k] = \hat{\mathbf{v}}[k]. \tag{5.24}$$

[1] Des expériences numériques ont montré qu'il est nécessaire d'introduire cette condition pour éviter des phénomènes d'instabilité se développant aux bords des PML. Toutefois, aucune démonstration n'a permis de justifier ce résultat.

En utilisant le fait que $M_{kk} = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\tau_k}{\omega}$ et que les fonctions τ_k ne dépendent que de x_k, nous obtenons :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}[k]}{\partial x_k} = M_{kk}\,\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}[k]}{\partial x_k} + \frac{\mathrm{d}M_{kk}}{\mathrm{d}x_k}\,\tilde{\mathbf{v}}[k],$$

soit :

$$M_{kk}^{-1}\,\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}[k]}{\partial x_k} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}[k]}{\partial x_k} + M_{kk}^{-1}\,\frac{\mathrm{d}M_{kk}}{\mathrm{d}x_k}\,\tilde{\mathbf{v}}[k].$$

Le système (5.14) s'écrit alors :

$$-\mathrm{i}\omega\,\frac{1}{\mu}\,\hat{p} - \nabla\cdot\tilde{\mathbf{v}} - \sum_{k=1}^{d} M_{kk}^{-1}\,\frac{\mathrm{d}M_{kk}}{\mathrm{d}x_k}\,\tilde{\mathbf{v}}[k] = 0, \tag{5.25a}$$

$$-\mathrm{i}\omega\, M\,\rho\, M\,\tilde{\mathbf{v}} = \nabla\hat{p}. \tag{5.25b}$$

Nous introduisons de nouvelles inconnues vectorielles :

$$M\,\hat{\mathbf{v}}^{\diamond} = M^{'}\,\tilde{\mathbf{v}}, \tag{5.26a}$$

$$\hat{\mathbf{v}}^{\star} = \rho\, M\,\tilde{\mathbf{v}}, \tag{5.26b}$$

où $M^{'}$ est la matrice diagonale $d\times d$ de terme diagonal $M^{'}_{kk} = \dfrac{\mathrm{d}M_{kk}}{\mathrm{d}x_k}$.

Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{'}$ deux matrices $d\times d$ diagonales de terme diagonal respectif $\mathcal{T}_{kk} = \tau_k$ et $\mathcal{T}^{'}_{kk} = \dfrac{\mathrm{d}\tau_k}{\mathrm{d}x_k}$.
Nous obtenons les égalités :

$$-\mathrm{i}\omega M = -\mathrm{i}\omega I_{dd} + \mathcal{T} \quad \text{et} \quad -\mathrm{i}\omega M^{'} = \mathcal{T}^{'}.$$

Nous pouvons alors résumer le système sous la forme :

$$-\mathrm{i}\omega\,\frac{1}{\mu}\,\hat{p} - \nabla\cdot\tilde{\mathbf{v}} - \sum_{k=1}^{d}\hat{\mathbf{v}}^{\diamond}\cdot\overrightarrow{e_k} = 0, \tag{5.27a}$$

$$-\mathrm{i}\omega\,\hat{\mathbf{v}}^{\star} + \mathcal{T}\,\hat{\mathbf{v}}^{\star} = \nabla\hat{p}, \tag{5.27b}$$

$$-\mathrm{i}\omega\,\hat{\mathbf{v}}^{\diamond} + \mathcal{T}\,\hat{\mathbf{v}}^{\diamond} = \mathcal{T}^{'}\,\tilde{\mathbf{v}}, \tag{5.27c}$$

$$-\mathrm{i}\omega\hat{\mathbf{v}}^{\star} = -\mathrm{i}\omega\,\rho\,\tilde{\mathbf{v}} + \rho\,\mathcal{T}\,\tilde{\mathbf{v}}, \tag{5.27d}$$

où $(\overrightarrow{e_k})_{k=1..d}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Nous prolongeons par continuité l'égalité $\tilde{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} = \mathcal{F}_t(\mathbf{v})$, vérifiée dans le domaine physique, à toutes les PML et obtenons $\mathcal{F}_t^{-1}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{v}$ dans $\Omega\cup\Omega_{pml}$. Notons $\mathbf{v}^{\star} = \mathcal{F}_t^{-1}(\hat{\mathbf{v}}^{\star})$ et $\mathbf{v}^{\diamond} = \mathcal{F}_t^{-1}(\hat{\mathbf{v}}^{\diamond})$.
Nous appliquons alors $\mathcal{F}_t^{-1}$ au système (5.27) et obtenons le système à résoudre dans les PML auquel

nous ajoutons des conditions de Dirichlet aux bords sur p :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla\cdot\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{d}\mathbf{v}^{\diamond}\cdot\overrightarrow{e_k} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.28a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{\star}}{\partial t} + \mathcal{T}\,\mathbf{v}^{\star} = \nabla p \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.28b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{\diamond}}{\partial t} + \mathcal{T}\,\mathbf{v}^{\diamond} = \mathcal{T}^{'}\,\mathbf{v} \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.28c}$$

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho\,\mathcal{T}\,\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}^{\star}}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.28d}$$

$$p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{pml}. \tag{5.28e}$$

Dans cette nouvelle formulation, nous faisons intervenir une variable vectorielle de plus que dans la formulation précédente mais n'avons pas de variable scalaire $p^{\star}$ et gardons un système d'ordre 1 en temps. Ainsi, en 3D, alors que dans la première formulation des PML il aurait fallu stocker la valeur de deux inconnues scalaires (p et $p^{\star}$) à trois instants différents et la valeur de deux inconnues vectorielles ($\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}^{\star}$) à deux instants différents, la nouvelle formulation nécessite le stockage de la valeur d'une unique inconnue scalaire (p) à un instant donné et de trois variables vectorielles ($\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^{\star}$ et $\mathbf{v}^{\diamond}$) à un instant donné. Nous avons donc gagné en stockage.

Remarque 42 *Comme dans le cas des formulations (5.21) et (5.22), nous retrouvons le système initial dans le domaine physique (où les coefficients d'absorption sont nuls).*

Remarque 43 *Nous verrons dans le chapitre 6 que, les différentes formulations présentées ici ayant toutes (à des puissances de ω près) la même relation de dispersion, les systèmes (5.21), (5.22) et (5.28) sont au moins faiblement bien-posés.*

Remarque 44 *Les deux interprétations présentées conduisent à des sytèmes PML équiva- lents : dans le domaine fréquentiel, nous pouvons introduire des inconnues qui nous permettent de passer d'une formulation à l'autre (par combinaison des inconnues introduites lors de la mise en place de celles-ci).*

Ces deux formulations sont équivalentes à la formulation que l'on obtient en utilisant le principe de Bérenger [14] :

$$p = \sum_{j=1}^{d} p_j \tag{5.29a}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p_j}{\partial t} + \frac{1}{\mu}\tau_j\,p_j - \frac{\partial \mathbf{v}[j]}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j = 1..d \tag{5.29b}$$

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}[j]}{\partial t} + \rho\,\tau_j\,\mathbf{v}[j] = \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad \forall j = 1..d \tag{5.29c}$$

En effet, en introduisant :

$$-i\omega\frac{1}{\mu}\,\hat{p}_j = M_{jj}^{-1}\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}[j]}{\partial x_j} \quad \forall j = 1..d \tag{5.30}$$

dans le système (5.14) puis en appliquant la transformée de Fourier inverse en temps, on obtient le système (5.29).

Remarque 45 *Dans les systèmes (5.21), (5.22) et (5.28), nous gardons les opérateurs gradient et divergence qui interviennent dans le système initial. Par contre, dans (5.29b), seule la dérivée spatiale par rapport à x_j de la j-ième composante de* $\mathbf{v}$ *intervient. De même, dans (5.29c), seule la dérivée spatiale par rapport à x_j de p intervient. Après semi-discrétisation en espace par la méthode des éléments finis mixtes spectraux du système (5.29), on obtient des matrices de rigidité dont le terme général est calculé par la formule d'intégration numérique de Gauss-Lobatto d'intégrales de la forme :*

$$\int_\Omega \psi_h \cdot \overrightarrow{e}_j \times \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}\, d\mathbf{x}$$

où ψ_h est une fonction de base de V_d^r et φ_h est une fonction de base de U_d^r.
La définition de V_d^r, qui assure que :

$$\int_\Omega \psi_h \cdot \nabla \varphi_h \, d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}} \hat{\psi}_h \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_h \, d\hat{\mathbf{x}}$$

*n'***implique pas***, dans le cas d'un maillage quelconque :*

$$\int_\Omega \psi_h \cdot \overrightarrow{e}_j \times \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}\, d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}} \hat{\psi}_h \cdot \overrightarrow{e}_j \times \frac{\partial \hat{\varphi}_h}{\partial \hat{x}_j}\, d\hat{\mathbf{x}}$$

Ainsi, le schéma obtenu sur la formulation "type Bérenger" fait intervenir des matrices de rigidité qui **ne sont pas indépendantes** *de la géométrie du maillage. Ces matrices sont de stockage conséquent. Nous avons donc choisi de ne pas utiliser cette formulation.*

5.1.2 Discrétisation

Dans cette section, nous nous intéressons à la discrétisation en espace (par la méthode des éléments finis mixtes spectraux) et en temps du système PML (5.28). La discrétisation de la première formulation introduite (systèmes (5.21) et (5.22)) se fait de la même façon mais nous ne la développerons pas.

Considérons le système (5.28). Nous multiplions l'équation (5.28a) par une fonction test φ et (5.28b), (5.28c) et (5.28d) par les fonctions tests respectives $\psi^\star$, $\psi^\diamond$ et ψ. Dans la première équation obtenue, nous effectuons une intégration par partie sur l'intégrale de $[\nabla \cdot \mathbf{v}]\,\varphi$ et utilisons la condition aux limites (5.28e). Nous pouvons alors écrire la formulation variationnelle associée :

Trouver $p \in L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega_{pml})\right)$ et $\mathbf{v},\mathbf{v}^\star,\mathbf{v}^\diamond \in L^\infty\left(0,T;\left[L^2(\Omega_{pml})\right]^d\right)$ tels que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \frac{1}{\mu}\, p\,\varphi\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{pml}} \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi\, d\mathbf{x} - \sum_{k=1}^{d}\int_{\Omega_{pml}} \mathbf{v}^\diamond\cdot\overrightarrow{e_k}\,\varphi\, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_{pml}), \tag{5.31a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \mathbf{v}^\star\cdot\psi^\star\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{pml}} (\mathcal{T}\,\mathbf{v}^\star)\cdot\psi^\star\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{pml}} \nabla p\cdot\psi^\star\, d\mathbf{x} \quad \forall \psi^\star \in \left[L^2(\Omega_{pml})\right]^d, \tag{5.31b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \mathbf{v}^\diamond\cdot\psi^\diamond\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{pml}} (\mathcal{T}\,\mathbf{v}^\diamond)\cdot\psi^\diamond\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{pml}} (\mathcal{T}'\,\mathbf{v})\cdot\psi^\diamond\, d\mathbf{x} \quad \forall \psi^\diamond \in \left[L^2(\Omega_{pml})\right]^d, \tag{5.31c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \rho\,\mathbf{v}\cdot\psi\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{pml}} \rho\,(\mathcal{T}\,\mathbf{v})\cdot\psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \mathbf{v}^\star\cdot\psi\, d\mathbf{x} \quad \forall \psi \in \left[L^2(\Omega_{pml})\right]^d. \tag{5.31d}$$

Nous nous plaçons dans le cadre défini dans 1.2. Nous cherchons l'inconnue scalaire (p) dans U_d^r et les inconnues vectorielles ($\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^\diamond$ et $\mathbf{v}^\star$) dans V_d^r.

Effectuons les mêmes opérations que sur le système à résoudre dans le domaine physique. Nous obtenons le schéma semi-discret en espace :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t} + R_{d,r}\mathbf{V}_h - \sum_{k=1}^{d} S_{k\,d,r}\mathbf{V}_h^{\diamond} = 0, \tag{5.32a}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_h^{\star}}{\mathrm{d}t} + T_{d,r}\,\mathbf{V}_h^{\star} = R_{d,r}^{*}\,\mathbf{P}_h, \tag{5.32b}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_h^{\diamond}}{\mathrm{d}t} + T_{d,r}\,\mathbf{V}_h^{\diamond} = T_{d,r}^{'}\mathbf{V}_h, \tag{5.32c}$$

$$B_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_h}{\mathrm{d}t} + Q_{d,r}\,\mathbf{V}_h = \tilde{B}_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_h^{\star}}{\mathrm{d}t}, \tag{5.32d}$$

où $D_{d,r}$, $R_{d,r}$ et $B_{d,r}$ sont les mêmes matrices que celles obtenues lors de la semi-discrétisation en espace par cette méthode du système associé au domaine physique et où :

- $\tilde{B}_{d,r}$ est une matrice diagonale par blocs $d \times d$ dont le bloc associé au p-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s'écrit :

$$\frac{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}}{|J_e|} D\mathbf{F}_e^{*}\, D\mathbf{F}_e(\hat{\xi}_{\mathbf{p}}), \tag{5.33}$$

- $T_{d,r}$ est une matrice diagonale par blocs $d \times d$ dont le bloc associé au p-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s'écrit :

$$\frac{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}}{|J_e|} D\mathbf{F}_e^{*}\, \mathcal{T}\, D\mathbf{F}_e(\hat{\xi}_{\mathbf{p}}), \tag{5.34}$$

- $T_{d,r}^{'}$ est une matrice diagonale par blocs $d \times d$ dont le bloc associé au p-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s'écrit :

$$\frac{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}}{|J_e|} D\mathbf{F}_e^{*}\, \mathcal{T}^{'}\, D\mathbf{F}_e(\hat{\xi}_{\mathbf{p}}), \tag{5.35}$$

- $Q_{d,r}$ est une matrice diagonale par blocs $d \times d$ dont le bloc associé au p-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s'écrit :

$$\frac{\hat{\omega}_{\mathbf{p}}}{|J_e|} D\mathbf{F}_e^{*}\, \rho\, \mathcal{T}\, D\mathbf{F}_e(\hat{\xi}_{\mathbf{p}}), \tag{5.36}$$

  Cette matrice peut donc s'exprimer comme le produit $T_{d,r}$ par la fonction ρ.

Remarque 46 *$\tilde{B}_{d,r}$ intervenait déjà dans la semi-discrétisation par la méthode des éléments finis mixtes spectraux de la nouvelle formulation du système de l'élastodynamique (voir section 3.3).*

Intéressons nous plus particulièrement aux matrices $S_{k\,d,r}$. Soient φ_i une fonction de base de U_d^r et $\psi_{\mathbf{q},l}^e$ une fonction de base de V_d^r (avec les notations mises en place au chapitre 1). e désigne donc un élément du maillage, support de la fonction de base vectorielle $\psi_{\mathbf{q},l}^e$. Le terme de $S_{k\,d,r}$ faisant intervenir ces deux fonctions s'écrit :

$$S_{i,\mathbf{q},l}^{e} = \delta_{S_i \cap K_e \neq \phi} \int_{K_e} \left(\psi_{\mathbf{q},l}^{e} \cdot \overrightarrow{e_k}\right) \varphi_i \, d\mathbf{x}$$

où $\mathcal{S}_i$ est l'ensemble de éléments du maillage constituant le support de φ_i

$$\begin{aligned} S^e_{i,\mathbf{q},l} &= \delta_{\mathcal{S}_i \cap K_e \neq \phi} \int_{\hat{K}} |J_e| \, \frac{1}{|J_e|} \left(D\mathbf{F}_e \, \hat{\psi}_{\mathbf{q},l} \cdot \overrightarrow{e_k} \right) \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_e(i)} \, d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \delta_{\mathcal{S}_i \cap K_e \neq \phi} \int_{\hat{K}} \left(D\mathbf{F}_e \, \hat{\varphi}_{\mathbf{q}} \, \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_k} \right) \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_e(i)} \, d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \delta_{\mathcal{S}_i \cap K_e \neq \phi} \, \delta_{\mathbf{q}=\mathbf{loc}_e(i)} \, \hat{\omega}_{\mathbf{q}} \, D\mathbf{F}_e[k,l](\hat{\xi}_{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

où $D\mathbf{F}_e[k,l]$ est le terme de $D\mathbf{F}_e$ situé à la k-ième ligne et l-ième colonne.
Cette matrice est donc une matrice très creuse qu'il est facile de stocker de façon optimale.

Intéressons nous, à présent, à l'approximation en temps de ce système. Nous utilisons un schéma de type saute-mouton et obtenons :

$$D_{d,r} \frac{\mathbf{P}_h^{n+1} - \mathbf{P}_h^n}{\Delta t} + R_{d,r} \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{d} S_{k\,d,r} \mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{1}{2}} = 0, \tag{5.37a}$$

$$\tilde{B}_{d,r} \frac{\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{3}{2}} - \mathbf{V}_h^{\star n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + T_{d,r} \frac{\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{3}{2}} + \mathbf{V}_h^{\star n+\frac{1}{2}}}{2} = R^*_{d,r} \mathbf{P}_h^{n+1}, \tag{5.37b}$$

$$\tilde{B}_{d,r} \frac{\mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{3}{2}} - \mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + T_{d,r} \frac{\mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{3}{2}} + \mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{1}{2}}}{2} = T'_{d,r} \frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}} + \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{2}, \tag{5.37c}$$

$$B_{d,r} \frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + Q_{d,r} \frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}} + \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{2} = \tilde{B}_{d,r} \frac{\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{3}{2}} - \mathbf{V}_h^{\star n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}. \tag{5.37d}$$

Soit :

$$\mathbf{P}_h^{n+1} = \mathbf{P}_h^n + \Delta t \, D_{d,r}^{-1} \left[-R_{d,r} \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{d} S_{k\,d,r} \mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{1}{2}} \right], \tag{5.38a}$$

$$\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{3}{2}} = [2\tilde{B}_{d,r} + \Delta t \, T_{d,r}]^{-1} \left[(2\tilde{B}_{d,r} - \Delta t \, T_{d,r}) \mathbf{V}_h^{\star n+\frac{1}{2}} + 2\Delta t \, R^*_{d,r} \mathbf{P}_h^{n+1} \right], \tag{5.38b}$$

$$\mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{3}{2}} = [2\tilde{B}_{d,r} + \Delta t \, T_{d,r}]^{-1} \left[(2\tilde{B}_{d,r} - \Delta t \, T_{d,r}) \, \mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{1}{2}} + \Delta t \, T'_{d,r} (\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}} + \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}) \right], \tag{5.38c}$$

$$\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}} = [2B_{d,r} + \Delta t \, Q_{d,r}]^{-1} \left[(2B_{d,r} - \Delta t \, Q_{d,r}) \, \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}} + 2\tilde{B}_{d,r} (\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{3}{2}} - \mathbf{V}_h^{\star n+\frac{1}{2}}) \right]. \tag{5.38d}$$

Remarque 47 *La matrice $D_{d,r}$ est diagonale. Les matrices $\tilde{B}_{d,r}$, $T_{d,r}$, $T'_{d,r}$ et $Q_{d,r}$ sont diagonales par blocs de la forme $\alpha D\mathbf{F}_e^* M D\mathbf{F}_e$ avec α scalaire et M matrice diagonale. Ainsi, les matrices inversées intervenant dans les équations (5.38b)-(5.38d) sont faciles à calculer et restent diagonales par blocs. Le schéma est explicite.*

5.1.3 Couplage Domaine-PML

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au couplage du système discret à résoudre dans le domaine physique :

$$D_{d,r} \frac{\mathbf{P}_h^{n+1} - \mathbf{P}_h^n}{\Delta t} + R_{d,r} \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}}, \tag{5.39a}$$

$$B_{d,r} \frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = R^*_{d,r} \mathbf{P}_h^{n+1}, \tag{5.39b}$$

au système discret PML :

$$D_{d,r}\frac{\mathbf{P}_h^{n+1}-\mathbf{P}_h^n}{\Delta t}+R_{d,r}\mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{d}S_{kd,r}\mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{1}{2}}=0, \tag{5.40a}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\frac{\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{3}{2}}-\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}+T_{d,r}\frac{\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{3}{2}}+\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{1}{2}}}{2}=R_{d,r}^{*}\mathbf{P}_h^{n+1}, \tag{5.40b}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\frac{\mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{3}{2}}-\mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}+T_{d,r}\frac{\mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{3}{2}}+\mathbf{V}_h^{\diamond n+\frac{1}{2}}}{2}=T_{d,r}^{'}\frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}}+\mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{2}, \tag{5.40c}$$

$$B_{d,r}\frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}}-\mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}+Q_{d,r}\frac{\mathbf{V}_h^{n+\frac{3}{2}}+\mathbf{V}_h^{n+\frac{1}{2}}}{2}=\tilde{B}_{d,r}\frac{\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{3}{2}}-\mathbf{V}_h^{\star n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}. \tag{5.40d}$$

Une première solution est de résoudre le système (5.40) en considérant des coefficients d'absorption (c'est-à-dire les fonctions τ_j) nuls dans le domaine. Mais ce système est beaucoup plus coûteux en place mémoire et temps de calcul que le système sans PML.

Considérons un ouvert Ω entouré de PML. Soit $\Gamma = \Omega \cap \Omega_{pml}$ (voir figure 5.5).

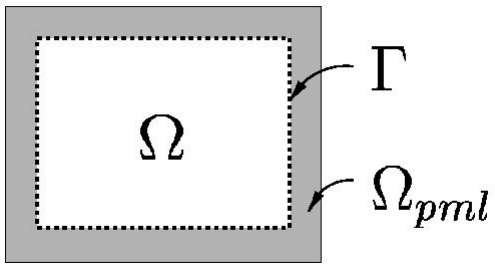


FIG. 5.3: Couple domaine-PML en 2D.

Remarque 48 *Ces deux systèmes sont redondants sur* Γ.

Nous allons utiliser le fait que chaque composante des vecteurs $\mathbf{V}_h$, $\mathbf{V}_h^{\star}$ et $\mathbf{V}_h^{\diamond}$ est associée à un unique vecteur de la base canonique situé sur un unique point d'interpolation d'un unique élément du maillage.
L'équation (5.39b) est donc résolue localement sur chaque élément du maillage du domaine physique. Les équations (5.40b), (5.40c) et (5.40d) sont résolues, elles, sur chaque élément du maillage PML.
Les coefficients d'absorption étant nuls dans le domaine physique, $\mathbf{V}_h^{\diamond}$ est nulle sur Γ. Ainsi, pour tout les points d'interpolation situés à la frontière entre Ω et Ω_{pml}, les équations (5.39a) et (5.40a) sont équivalentes. Hors de cette fontière, ces deux équations font intervenir des variables uniquement définies dans le domaine physique (pour l'équation (5.39a)) ou uniquement définies dans les PML (pour l'équation (5.40a).
Il nous suffit donc d'introduire les nouvelles inconnues vectorielles $\mathbf{V}_h^{\star}$ et $\mathbf{V}_h^{\diamond}$ dans les PML. Le couplage se fait implicitement.

5.2 En élastodynamique

Dans cette section, nous nous intéressons à la mise en place des couches absorbantes parfaitement adaptées en élastodynamique. Plusieurs modèles ont été introduits pour différentes formulations du

système :

– système reformulé du premier ordre :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot \gamma_{ij} = F_i \quad \forall i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{5.41a}$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = \nabla u_i \quad \forall i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{5.41b}$$

$$\gamma_{ij} = A_{ij}\gamma_j \quad \forall i,j = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T]. \tag{5.41c}$$

– système reformulé du second ordre :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot \gamma_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad \forall i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{5.42a}$$

$$\gamma_i = \nabla u_i \quad \forall i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T], \tag{5.42b}$$

$$\gamma_{ij} = A_{ij}\gamma_j \quad \forall i,j = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T]. \tag{5.42c}$$

– système de l'élastodynamique d'ordre 2 :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot (A_{ij}u_j) = \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad \forall i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega \times [0,T]. \tag{5.43}$$

Dans un premier temps, nous nous intéressons au système reformulé du premier ordre (5.41). Nous mettons en place une formulation PML optimale faisant intervenir les coefficients d'absorption et leurs dérivées. Le système obtenu est ensuite discrétisé par éléments finis mixtes spectraux.
Dans un second temps, nous nous intéressons au système d'ordre deux en temps. Nous mettons tout d'abord en place une méthode de couplage des PML obtenues sur le système d'ordre 1 en temps aux systèmes d'ordre 2 en temps. Nous introduisons ensuite une formulation PML spécifique au système (5.43).

5.2.1 Formulation d'ordre 1 en temps

5.2.1.1 Mise en place de la formulation dans les PML

Comme dans le cas de l'acoustique, nous considérons un milieu de dimension d infini et nous intéressons aux phénomènes physiques se déroulant dans $\Omega =]-\infty,0]^d$.
L'introduction des nouvelles variables $(\tilde{\mathbf{x}}_j)_{j=1..d}$ se fait suivant les mêmes étapes que dans la section 5.1.1.
Nous nous intéressons uniquement au système PML faisant intervenir les coefficients d'absorption et leurs dérivées : la première formulation obtenue en acoustique, d'ordre d en temps sur la variable scalaire, est facilement applicable au système de l'élastodynamique (voir annexe B) mais est par trop coûteuse pour être implémentée en 3D sur des modèles réalistes.

Nous allons donc procéder de la même façon que pour la seconde formulation PML de l'acoustique :

Etape 1 :
Nous considérons le système (5.41) dans lequel nous oublions les conditions initiales et la source

(plaçée dans le domaine physique). Après passage au domaine fréquentiel par $\mathcal{F}_t$, la transformée de Fourier en temps, nous obtenons :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,\hat{u}_i - \sum_{j=1}^{d} \nabla\cdot\hat{\gamma}_{ij} = 0 \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.44a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\hat{\gamma}_i = \nabla\hat{u}_i \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.44b}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = A_{ij}\,\hat{\gamma}_j \qquad \forall i,j = 1..d, \tag{5.44c}$$

où $\hat{u}_i = \mathcal{F}_t(u_i)$, $\hat{\gamma}_i = \mathcal{F}_t(\gamma_i)$ et $\hat{\gamma}_{ij} = \mathcal{F}_t(\gamma_{ij})$.

Etape 2 :
Nous prolongeons alors ces équations à l'aide du nouveau système de coordonnées :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,\hat{u}_i - \sum_{j=1}^{d} \tilde{\nabla}\cdot\hat{\gamma}_{ij} = 0 \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.45a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\hat{\gamma}_i = \tilde{\nabla}\hat{u}_i \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.45b}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = A_{ij}\,\hat{\gamma}_j \qquad \forall i,j = 1..d, \tag{5.45c}$$

où $\tilde{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}\right)_{j=1..d}$.

Etape 3 :
∇ et $\tilde{\nabla}$ vérifient $\nabla = M\tilde{\nabla}$ où M est une matrice $d\times d$ diagonale de terme diagonal $M_{kk} = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\tau_k}{\omega}$.
Le système (5.45) s'écrit :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,\hat{u}_i - \sum_{k=1}^{d} M_{kk}^{-1} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial\hat{\gamma}_{ij}[k]}{\partial x_k} = 0 \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.46a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\,M\,\hat{\gamma}_i = \nabla\hat{u}_i \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.46b}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = A_{ij}\,\hat{\gamma}_j \qquad \forall i,j = 1..d, \tag{5.46c}$$

avec $\hat{\gamma}_{ij} = (\hat{\gamma}_{ij}[k])_{k=1..d}$.

Etape 4 :
Considérons $\left(\tilde{\gamma}_{ij}\right)_{i,j=1..d}$ tels que :

$$M\,\tilde{\gamma}_{ij} = \hat{\gamma}_{ij} \quad \forall i,j = 1..d. \tag{5.47}$$

$\tilde{\gamma}_{ij}[k]$ vérifie :

$$\frac{\partial\hat{\gamma}_{ij}[k]}{\partial x_k} = M_{kk}\,\frac{\partial\tilde{\gamma}_{ij}[k]}{\partial x_k} + \frac{\mathrm{d}M_{kk}}{\mathrm{d}x_k}\,\tilde{\gamma}_{ij}[k], \tag{5.48}$$

soit :

$$M_{kk}^{-1}\,\frac{\partial\hat{\gamma}_{ij}[k]}{\partial x_k} = \frac{\partial\tilde{\gamma}_{ij}[k]}{\partial x_k} + M_{kk}^{-1}\,\frac{\mathrm{d}M_{kk}}{\mathrm{d}x_k}\,\tilde{\gamma}_{ij}[k]. \tag{5.49}$$

Le système (5.46) s'écrit alors :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,\hat{u}_i - \sum_{j=1}^{d} \nabla\cdot\tilde{\gamma}_{ij} - \sum_{k=1}^{d} M_{kk}^{-1}\,\frac{\mathrm{d}M_{kk}}{\mathrm{d}x_k}\sum_{j=1}^{d}\tilde{\gamma}_{ij}[k] = 0 \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.50a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega M\hat{\gamma}_i = \nabla\hat{u}_i \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.50b}$$

$$M\tilde{\gamma}_{ij} = A_{ij}\hat{\gamma}_j \qquad \forall i,j = 1..d. \tag{5.50c}$$

Introduisons, à présent, de nouvelles inconnues vectorielles :

$$M\hat{\gamma}_i^{\diamond} = M^{'}\sum_{j=1}^{d}\tilde{\gamma}_{ij} \quad \forall i = 1..d \tag{5.51}$$

où $M^{'}$ est la matrice diagonale $d\times d$ de terme diagonal $M_{kk}^{'} = \dfrac{\mathrm{d}M_{kk}}{\mathrm{d}x_k}$.

Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{'}$ deux matrices $d\times d$ diagonales de terme diagonal respectif $\mathcal{T}_{kk} = \tau_k$ et $\mathcal{T}_{kk}^{'} = \dfrac{\mathrm{d}\tau_k}{\mathrm{d}x_k}$. Nous pouvons alors résumer le système (5.50) sous la forme :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,\hat{u}_i - \sum_{j=1}^{d}\nabla\cdot\tilde{\gamma}_{ij} - \sum_{k=1}^{d}\hat{\gamma}_i^{\diamond}\cdot\overrightarrow{e}_k = 0 \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.52a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\hat{\gamma}_i + \mathcal{T}\hat{\gamma}_i = \nabla\hat{u}_i \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.52b}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\tilde{\gamma}_{ij} + \mathcal{T}\tilde{\gamma}_{ij} = -\mathrm{i}\,\omega A_{ij}\hat{\gamma}_j \qquad \forall i,j = 1..d, \tag{5.52c}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\hat{\gamma}_i^{\diamond} + \mathcal{T}\hat{\gamma}_i^{\diamond} = \mathcal{T}^{'}\sum_{j=1}^{d}\tilde{\gamma}_{ij} \qquad \forall i = 1..d. \tag{5.52d}$$

Etape 5 :
Avant de revenir au domaine temporel, remarquons que $\tilde{\gamma}_{ij} = \hat{\gamma}_{ij} = \mathcal{F}_t(\gamma_{ij})$, $\forall i,j = 1..d$, dans le domaine physique (où les fonctions τ_j sont nulles). Nous prolongeons par continuité cette égalité dans les PML et obtenons :

$$\mathcal{F}_t^{-1}(\tilde{\gamma}_{ij}) = \gamma_{ij} \quad \forall i,j = 1..d \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d. \tag{5.53}$$

Nous notons $\gamma_i^{\diamond}$ l'image, par $\mathcal{F}_t^{-1}$ de $\hat{\gamma}_i^{\diamond}$, pour tout i variant de 1 à d.

Appliquons $\mathcal{F}_t^{-1}$ au système (5.52). Nous obtenons alors le système à résoudre dans les PML au-

quel nous ajoutons les conditions de Dirichlet au bord[2] :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot \gamma_{ij} - \sum_{k=1}^{d} \gamma_i^{\diamond} \cdot \overrightarrow{e}_k = 0 \qquad \forall i = 1..d \qquad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.54a}$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t} + \mathcal{T} \gamma_i = \nabla u_i \qquad \forall i = 1..d \qquad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.54b}$$

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \mathcal{T} \gamma_{ij} = A_{ij} \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} \qquad \forall i,j = 1..d \qquad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.54c}$$

$$\frac{\partial \gamma_i^{\diamond}}{\partial t} + \mathcal{T} \gamma_i^{\diamond} = \mathcal{T}' \sum_{j=1}^{d} \gamma_{ij} \qquad \forall i = 1..d \qquad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.54d}$$

$$u_i = 0 \qquad \forall i = 1..d \qquad \text{sur } \partial\Omega_{pml}. \tag{5.54e}$$

Remarque 49 *Dans le domaine physique, où les coefficients d'absorption sont nuls, nous retrouvons le système initial (5.41).*

Remarque 50 *Comme dans le cas de l'acoustique (voir section 5.1.3), il suffit d'introduire les nouvelles inconnues $(\gamma_i^{\diamond})_{i=1..d}$ dans la PML. Le couplage entre le domaine physique et la couche absorbante parfaitement adaptée se fait de façon implicite par l'équation (5.54a).*

5.2.1.2 Discrétisation

Dans cette section, nous nous intéressons à la discrétisation du système (5.54).

Nous multiplions les équations (5.54a) par des fonctions tests φ_i, i variant de 1 à d, et (5.54b), (5.54c) et (5.54d) par les fonctions tests respectives ψ_i, ψ_{ij} et $\psi_i^{\diamond}$. Dans les d premières équations obtenues, nous effectuons une intégration par partie sur l'intégrale de $\left[\nabla \cdot \gamma_{ij}\right] \varphi_i$ et utilisons la condition aux limites (5.54e). Nous pouvons alors écrire la formulation variationnelle suivante :

Trouver $u_i \in L^{\infty}\left(0,T;H_0^1(\Omega_{pml})\right)$, $\forall i = 1..d$, γ_i et $\gamma_i^{\diamond} \in L^{\infty}\left(0,T;\left[L^2(\Omega_{pml})\right]^d\right)$, $\forall i = 1..d$, et $\gamma_{ij} \in L^{\infty}\left(0,T;\left[L^2(\Omega_{pml})\right]^d\right)$, $\forall i,j = 1..d$, tels que :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \rho\, u_i\, \varphi_i \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{d} \int_{\Omega_{pml}} \gamma_{ij} \cdot \nabla \varphi_i \, d\mathbf{x} - \sum_{k=1}^{d} \int_{\Omega_{pml}} \gamma_i^{\diamond} \cdot \overrightarrow{e_k}\, \varphi_i \, d\mathbf{x} = 0 \quad \begin{array}{l} \forall \varphi_i \in H_0^1(\Omega_{pml}) \\ \forall i = 1..d \end{array} ,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \gamma_i \cdot \psi_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{pml}} (\mathcal{T}\gamma_i) \cdot \psi_i \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{pml}} \nabla u_i \cdot \psi_i \, d\mathbf{x} \quad \begin{array}{l} \forall \psi_i \in \left[L^2(\Omega_{pml})\right]^d \\ \forall i = 1..d \end{array} ,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \gamma_{ij} \cdot \psi_{ij} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{pml}} \left(\mathcal{T}\gamma_{ij}\right) \cdot \psi_{ij} \, d\mathbf{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \left(A_{ij}\gamma_j\right) \cdot \psi_{ij} \, d\mathbf{x} \quad \begin{array}{l} \forall \psi_{ij} \in \left[L^2(\Omega_{pml})\right]^d \\ \forall i,j = 1..d \end{array} ,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{pml}} \gamma_i^{\diamond} \cdot \psi_i^{\diamond} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{pml}} (\mathcal{T}\gamma_i^{\diamond}) \cdot \psi_i^{\diamond} \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} \int_{\Omega_{pml}} (\mathcal{T}'\gamma_{ij}) \cdot \psi_i^{\diamond} \, d\mathbf{x} \quad \begin{array}{l} \forall \psi_i^{\diamond} \in \left[L^2(\Omega_{pml})\right]^d \\ \forall i = 1..d \end{array} .
\end{aligned}$$

Nous nous plaçons dans le cadre défini dans 1.2 et cherchons les inconnues scalaires u_i dans U_d^r et les inconnues vectorielles γ_{ij}, γ_i et $\gamma_i^{\diamond}$ dans V_d^r.

[2]Comme dans le cas acoustique, les expériences numériques montrent la nécessité de ces conditions sans qu'une approche théorique ne la confirme.

Nous effectuons les mêmes opérations que sur le système à résoudre dans le domaine physique et obtenons le schéma semi-discret en espace :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}_{ih}}{\mathrm{d}t}+R_{d,r}\sum_{j=1}^{d}\Gamma_{ijh}-\sum_{k=1}^{d}S_{kd,r}\Gamma^{\diamond}_{ih}=0 \quad \forall i=1..d, \tag{5.55a}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\frac{\mathrm{d}\Gamma_{ih}}{\mathrm{d}t}+T_{d,r}\Gamma_{ih}=R^{*}_{d,r}\mathbf{U}_{ih} \quad \forall i=1..d, \tag{5.55b}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\frac{\mathrm{d}\Gamma_{ijh}}{\mathrm{d}t}+T_{d,r}\Gamma_{ijh}=\tilde{B}_{ijd,r}\frac{\mathrm{d}\Gamma_{jh}}{\mathrm{d}t} \quad \forall i,j=1..d, \tag{5.55c}$$

$$\tilde{B}_{d,r}\frac{\mathrm{d}\Gamma^{\diamond}_{ih}}{\mathrm{d}t}+T_{d,r}\Gamma^{\diamond}_{ih}=T^{'}_{d,r}\sum_{j=1}^{d}\Gamma_{ijh} \quad \forall i=1..d, \tag{5.55d}$$

où $D_{d,r}$, $R_{d,r}$, $\tilde{B}_{d,r}$ et $\tilde{B}_{ijd,r}$ sont les mêmes matrices que celles qui interviennent dans le schéma obtenu par cette même méthode sur le système à résoudre dans le domaine physique et où $T_{d,r}$, $T^{'}_{d,r}$ et $S_{kd,r}$ sont les mêmes matrices que celles obtenues, par la méthode des éléments finis mixtes spectraux, sur la formulation PML équivalente en acoustique (voir section 5.1.2).

Nous utilisons un schéma en temps centré type différences finies : pour tout i et j variant de 1 à d

$$\mathbf{U}^{n+1}_{ih}=\mathbf{U}^{n}_{ih}+\Delta t\, D^{-1}_{d,r}\left[-R_{d,r}\sum_{j=1}^{d}\Gamma^{n+\frac{1}{2}}_{ijh}+\sum_{k=1}^{d}S_{kd,r}\Gamma^{\diamond n+\frac{1}{2}}_{ih}\right], \tag{5.56a}$$

$$\Gamma^{n+\frac{3}{2}}_{ih}=[2\,\tilde{B}_{d,r}+\Delta t\, T_{d,r}]^{-1}\left[(2\tilde{B}_{d,r}-\Delta t\, T_{d,r})\Gamma^{n+\frac{1}{2}}_{ih}+2\Delta t\, R^{*}_{d,r}\mathbf{U}^{n+1}_{ih}\right], \tag{5.56b}$$

$$\Gamma^{n+\frac{3}{2}}_{ijh}=[2\tilde{B}_{d,r}+\Delta t\, T_{d,r}]^{-1}\left[(2\tilde{B}_{d,r}-\Delta t\, T_{d,r})\Gamma^{n+\frac{1}{2}}_{ijh}+2\tilde{B}_{ijd,r}(\Gamma^{n+\frac{3}{2}}_{jh}-\Gamma^{n+\frac{1}{2}}_{jh})\right], \tag{5.56c}$$

$$\Gamma^{\diamond n+\frac{3}{2}}_{ih}=[2\tilde{B}_{d,r}+\Delta t\, T_{d,r}]^{-1}\left[(2\tilde{B}_{d,r}-\Delta t\, T_{d,r})\Gamma^{\diamond n+\frac{1}{2}}_{ih}+\Delta t\, T^{'}_{d,r}\sum_{j=1}^{d}(\Gamma^{n+\frac{3}{2}}_{ijh}+\Gamma^{n+\frac{1}{2}}_{ijh})\right]. \tag{5.56d}$$

Ce schéma est explicite.

Pour conclure la discrétisation, notons que, comme dans le cas de l'acoustique, le couplage entre le domaine et la couche absorbante parfaitement adaptée se fait naturellement.

5.2.2 Couplage du système d'ordre 2 en temps avec les PML d'ordre 1

Le système PML introduit dans la section 5.2.1.1 peut être couplé algorithmiquement à toutes les méthodes de résolution introduites dans la section 4.2. Le couplage avec le premier algorithme est évident. Pour coupler le système (5.56) avec les deux autres algorithmes, nous utilisons le fait que les inconnues vectorielles sont discontinues d'un élément du maillage à un autre.

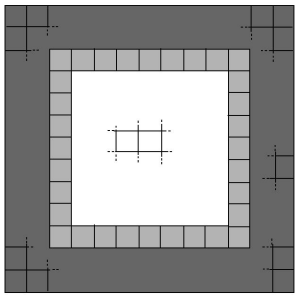


FIG. 5.4: Définition des trois zones du maillage qui permettent de coupler les PMLs d'ordre 1 au système de l'élastodynamique linéaire d'ordre 2.

Ainsi, considérons, par exemple, un domaine 2D carré (voir fig. 5.4). Nous y définissons trois zones :

- La première zone est la zone représentée en gris foncé dans la figure 5.4 (bords inclus). Elle correspond aux PML.
- La deuxième zone est la zone représentée en gris clair. Elle est composée des éléments du maillage du domaine physique qui sont adjacents à la première zone.
- La troisième zone est constituée de tous les éléments du maillage n'appartenant ni à la première ni à la seconde zone.

Notons I l'interface entre la première et la deuxième zone.
Nous résolvons alors l'algorithme associé au système d'ordre 2 en temps (les algorithmes 2 ou 3) dans la seconde et la troisième zone (I exclu). Nous obtenons alors $(\mathbf{U}_i^{n+1})_{i=1..d}$ dans ces deux zones. Nous introduisons $(\Gamma_{ij}^{n+\frac{1}{2}})_{i,j=1..d}$ dans la seconde zone par l'intermédiaire de l'équation du système d'ordre 1 en temps qui exprime $\Gamma_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ en fonction de $\Gamma_{ij}^{n-\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{U}_i^n$. Nous pouvons alors calculer $({U_i}^{n+1})_{i=1..d}$ sur I par l'équation (5.56a). Il ne nous reste plus qu'à résoudre le système PML d'ordre 1 (5.56) dans la première zone pour résoudre le problème dans le domaine et les PML.

Cette méthode a été implémentée avec succès. Elle peut être généralisée au cas tridimensionnel ainsi qu'à des maillages quelconques.

5.2.3 Formulation d'ordre 2 en temps

Nous mettons en place dans cette section un système PML spécifique aux équations de l'élastodynamique linéaire d'ordre 2 en temps ne faisant intervenir que les déplacements. Bien que n'étant pas directement liés à la méthode des éléments finis mixtes spectraux et au sujet de cette thèse, nous exposons ici ces résultats afin de donner un éventail de formulations PML sur les différentes méthodes introduites et comparées dans ce mémoire. De plus, cette formulation a la particularité de faire intervenir des inconnues type "changement de variables" (c'est-à-dire apparaissant dans des équations similaires au système initial ou ne dépendant que de dérivées temporelles) mais aussi des inconnues "type Bérenger" (c'est-à-dire liées à des dérivées spatiales suivant une unique coordonnée). Ces travaux ont été menés dans le cadre d'un échange de six semaines effectué au sein de l'université de Caltech, Pasadena (USA).

5.2.3.1 Mise en place de la formulation dans les PML

Nous nous intéressons à la méthode des éléments finis spectraux appliquée au système de l'élastodynamique utilisée à Caltech par D. Komatitsch et J. Tromp [49, 50, 51]. Pour plus de simplicité, nous travaillons sur le système introduit dans le chapitre 3.4 :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot (A_{ij} \nabla u_j) = \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \quad \forall i = 1..d \tag{5.57}$$

Nous considérons un milieu de dimension d infini et nous intéressons uniquement aux phénomènes physiques se déroulant dans $\Omega =]-\infty, 0]^d$.

Etape 1 :
Nous considérons le système (5.57) sans second membre et y appliquons la transformée de Fourier en temps $\mathcal{F}_t$:

$$(-\mathrm{i}\,\omega)^2 \rho\, \hat{u}_i - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot (A_{ij} \nabla \hat{u}_j) = 0 \quad \forall i = 1..d, \tag{5.58}$$

où $\hat{u}_i = \mathcal{F}_t(u_i)$ pour tout i variant de 1 à d.

Etape 2 :
Nous prolongeons alors ces équations à l'aide du nouveau système de coordonnées, et obtenons :

$$(-\mathrm{i}\,\omega)^2 \rho\, \hat{u}_i - \sum_{j=1}^{d} \tilde{\nabla} \cdot \left(A_{ij} \tilde{\nabla} \hat{u}_j\right) = 0 \quad \forall i = 1..d, \tag{5.59}$$

où $\tilde{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\right)^*_{j=1..d}$.

Etape 3 :
∇ et $\tilde{\nabla}$ sont liés par la relation : $\nabla = M\tilde{\nabla}$ avec M matrice diagonale $d \times d$ de terme diagonal $M_{kk} = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\tau_k}{\omega}$.
Le système (5.59) s'écrit :

$$(-\mathrm{i}\,\omega)^2 \rho\, \hat{u}_i - \sum_{j=1}^{d} M^{-1} \nabla \cdot \left(A_{ij} M^{-1} \nabla \hat{u}_j\right) = 0 \quad \forall i = 1..d. \tag{5.60}$$

Etape 4 :
Considérons $(\hat{u}^\star_{ik})_{i,k=1,2}$ tels que :

$$(-\mathrm{i}\,\omega)^2 \rho\, \hat{u}^\star_{ik} - M^{-1}_{kk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{j=1}^{d} A_{ij} M^{-1} \nabla \hat{u}_j\right] \cdot \vec{e}_k = 0 \quad \forall i,k = 1..d, \tag{5.61}$$

où $(\vec{e}_k)_{k=1..d}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
Le système (5.60) devient alors :

$$\hat{u}_i = \sum_{k=1}^{d} \hat{u}^\star_{ik} \qquad \forall i = 1..d, \tag{5.62a}$$

$$(-\mathrm{i}\,\omega)^2 \rho\, M_{kk}\, \hat{u}^\star_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{j=1}^{d} A_{ij} M^{-1} \nabla \hat{u}_j\right] \cdot \vec{e}_k \quad \forall i,k = 1..d. \tag{5.62b}$$

Introduisons alors $\left(\hat{v}^{\star}_{jl}\right)_{j,l=1,2}$ tels que :

$$-\mathrm{i}\,\omega M_{ll}\,\hat{v}^{\star}_{jl} = \hat{u}_j \quad \forall j,l = 1..d. \tag{5.63}$$

Ces nouvelles variables vérifient :

$$-\mathrm{i}\,\omega M_{ll}\,\frac{\partial \hat{v}^{\star}_{jl}}{\partial x_l} - \mathrm{i}\,\omega\,\frac{\mathrm{d}M_{ll}}{\mathrm{d}x_l}\,\hat{v}^{\star}_{jl} = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_l} \quad \forall j,l = 1..d. \tag{5.64}$$

Nous introduisons de nouvelles variables $(\hat{w}^{\star}_{jl})_{l,j=1..d}$ telles que :

$$M_{ll}\,\hat{w}^{\star}_{jl} = \frac{\mathrm{d}M_{ll}}{\mathrm{d}x_l}\,\hat{v}^{\star}_{jl} \quad \forall j,l = 1..d. \tag{5.65}$$

Nous avons donc :

$$M^{-1}_{ll}\,\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_l} = -\mathrm{i}\,\omega\,\frac{\partial \hat{v}^{\star}_{jl}}{\partial x_l} - \mathrm{i}\,\omega\,\hat{w}^{\star}_{jl} \quad \forall j,l = 1..d. \tag{5.66}$$

Ainsi, $\left[A_{ij}M^{-1}\nabla\hat{u}_j\right]\cdot\overrightarrow{e}_k$ s'exprime en fonction de $\hat{v}^{\star}_{jl}$, $\hat{w}^{\star}_{jl}$ et de la matrice d'élasticité par la relation :

$$\left[A_{ij}M^{-1}\nabla\hat{u}_j\right]\cdot\overrightarrow{e}_k = -\mathrm{i}\,\omega\sum_{l=1}^{d} c_{ikjl}\left(\frac{\partial \hat{v}^{\star}_{jl}}{\partial x_l} + \hat{w}^{\star}_{jl}\right) \quad \forall i,j = 1..d. \tag{5.67}$$

Le système (5.62) s'écrit :

$$\hat{u}_i = \sum_{k=1}^{d}\hat{u}^{\star}_{ik} \quad \forall i = 1..d, \tag{5.68a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\rho\,M_{kk}\,\hat{u}^{\star}_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{j,l=1}^{d} c_{ikjl}\left(\frac{\partial \hat{v}^{\star}_{jl}}{\partial x_l} + \hat{w}^{\star}_{jl}\right)\right] = 0 \quad \forall i,k = 1..d, \tag{5.68b}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega M_{ll}\,\hat{v}^{\star}_{jl} = \hat{u}_j \quad \forall l,j = 1..d, \tag{5.68c}$$

$$M_{ll}\,\hat{w}^{\star}_{jl} = \frac{\mathrm{d}M_{ll}}{\mathrm{d}x_l}\,\hat{v}^{\star}_{jl} \quad \forall l,j = 1..d. \tag{5.68d}$$

Or, M_{ll} vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}M_{ll}}{\mathrm{d}x_l} = \mathrm{i}\frac{\tau_l^{'}}{\omega} \quad \forall l = 1..d. \tag{5.69}$$

Le système (5.68) se résume sous la forme :

$$\hat{u}_i = \sum_{k=1}^{d}\hat{u}^{\star}_{ik} \quad \forall i = 1..d, \tag{5.70a}$$

$$(-\mathrm{i}\,\omega+\tau_k)\,\rho\,\hat{u}^{\star}_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{j,l=1}^{d} c_{ikjl}\left(\frac{\partial \hat{v}^{\star}_{jl}}{\partial x_l} + \hat{w}^{\star}_{jl}\right)\right] = 0 \quad \forall i,k = 1..d, \tag{5.70b}$$

$$(-\mathrm{i}\,\omega+\tau_l)\,\hat{v}^{\star}_{jl} = \hat{u}_j \quad \forall l,j = 1..d, \tag{5.70c}$$

$$(-\mathrm{i}\omega+\tau_l)\,\hat{w}^{\star}_{jl} = \tau_l^{'}\,\hat{v}^{\star}_{jl} \quad \forall l,j = 1..d. \tag{5.70d}$$

Etape 5 :
Appliquons la transformée de Fourier inverse en temps aux équations du système. Notons $u^\star_{ij} = \mathcal{F}_t^{-1}(\hat{u}^\star_{ij})$, $v^\star_{kl} = \mathcal{F}_t^{-1}(\hat{v}^\star_{kl})$ et $w^\star_{kl} = \mathcal{F}_t^{-1}(\hat{w}^\star_{kl})$. Nous obtenons le système à résoudre dans Ω_{pml} auquel nous ajoutons des conditions aux bords de Dirichlet sur les inconnues u_i et des conditions initiales :

$$u_i = \sum_{j=1}^{d} u^\star_{ij} \quad \forall i = 1..d \qquad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.71a}$$

$$\rho \frac{\partial u^\star_{ij}}{\partial t} + \rho\, \tau_j\, u^\star_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{k,l=1}^{d} c_{ijkl}\left(\frac{\partial v^\star_{kl}}{\partial x_l} + w^\star_{kl}\right)\right] = 0 \quad \forall i,j = 1..d \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.71b}$$

$$\frac{\partial v^\star_{ij}}{\partial t} + \tau_j\, v^\star_{ij} = u_i \quad \forall i,j = 1..d \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.71c}$$

$$\frac{\partial w^\star_{ij}}{\partial t} + \tau_j w^\star_{ij} = \tau_j^{'}\, v^\star_{ij} \quad \forall i,j = 1..d \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.71d}$$

$$u_i = 0 \quad \forall i = 1..d \qquad \text{sur } \partial\Omega_{pml}, \tag{5.71e}$$

$$u_i(\mathrm{x},0) = u^\star_{ij}(\mathrm{x},0) = v^\star_{ij}(\mathrm{x},0) = w^\star_{ij}(\mathrm{x},0) = 0 \quad \forall i = 1..d \qquad \text{dans } \Omega_{pml}. \tag{5.71f}$$

Remarque 51 *Les conditions aux bords de la PML impliquent, d'après le système (5.71) et les conditions initiales, la nullité de l'ensemble des inconnues aux bords de la PML.*

5.2.3.2 Couplage domaine-PML

Une première solution pour coupler les équations dans le domaine et celles dans les PML est de résoudre les équations PML partout. En effet, en imposant τ_j et $\tau_j^{'}$ égaux à zéro, le système (5.71) est équivalent aux équations dans le domaine rappelées en (5.57). Or, les équations à résoudre dans les PML sont plus coûteuses en place mémoire et temps de calcul que les équations dans le domaine. Ainsi, nous allons coupler le système (5.57) avec le système (5.71).

Considérons un domaine $\Omega \cup \Gamma$ entouré par des PML $\Omega_{pml} \cup \Gamma$, Γ étant la frontière entre le domaine et les PML (voir figure 5.5). Les équations à résoudre dans $\Omega \cup \Gamma$ sont :

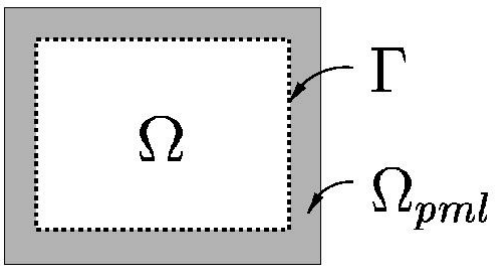


FIG. 5.5: Couple domaine-PML en 2D pour le système d'ordre 2 en temps.

$$\rho\, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot (A_{ij} \nabla u_j) = \frac{\partial F_i}{\partial t} \qquad \forall i = 1..d. \tag{5.72}$$

Les équations à résoudre dans $\Omega_{pml} \cup \Gamma$ sont les équations du système (5.71).

Remarque 52 *Ces deux systèmes sont redondants sur* Γ.

Ces systèmes sont approchés par la méthode des éléments finis spectraux en espace. Toutes les inconnues seront donc cherchées dans U_d^r, sous-espace de H^1 défini dans la section 1.1. Nous n'avons donc pas, comme c'est le cas des formulations PML faisant intervenir de nouvelles inconnues vectorielles cherchées dans V_d^r, le caractère local de la dépendance des inconnues entre elles. Ainsi, l'équation (5.71b), qui permet de déterminer les valeurs des $u_{ij}^\star$ en fonction de la valeur des $v_{kl}^\star$ et des $w_{kl}^\star$, ne peut être résolue que pour les degrés de libertés situés dans Ω_{pml}, Γ étant exclue. En effet, tous les degrés de libertés des $u_{ij}^\star$ situés à la frontière entre le domaine et la PML dépendront de la valeur des $v_{kl}^\star$ et des $w_{kl}^\star$ aux degrés de libertés situés dans le domaine par l'intermédiaire de matrices de rigidité. Or ces inconnues ne sont définies que dans $\Omega_{pml} \cup \Gamma$.
De la même façon, l'équation (5.71a) ne sera résolue que dans Ω_{pml}. Les valeurs des u_i aux degrés de libertés de Γ seront calculées par les équations (5.72).
Par contre, les u_i étant calculés dans le domaine et la PML, nous pouvons en déduire les valeurs des $v_{kl}^\star$ et $w_{kl}^\star$ dans $\Omega_{pml} \cup \Gamma$.

Pour résumer, le système complet domaine et PML à résoudre s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot (A_{ij} \nabla u_j) = \frac{\partial F_i}{\partial t} \ \forall i = 1..d \quad \text{dans } \Omega \cup \Gamma, \tag{5.73a}$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{d} u_{ij}^\star \ \forall i = 1..d \quad \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.73b}$$

$$\rho \frac{\partial u_{ij}^\star}{\partial t} + \rho \tau_j u_{ij}^\star - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{k,l=1}^{d} c_{ijkl} \left(\frac{\partial v_{kl}^\star}{\partial x_l} + w_{kl}^\star \right) \right] = 0 \ \forall i,j = 1..d \ \text{dans } \Omega_{pml}, \tag{5.73c}$$

$$\frac{\partial v_{ij}^\star}{\partial t} + \tau_j v_{ij}^\star = u_i \ \forall i,j = 1..d \ \text{dans } \Omega_{pml} \cup \Gamma, \tag{5.73d}$$

$$\frac{\partial w_{ij}^\star}{\partial t} + \tau_j w_{ij}^\star = \tau_j^{'} v_{ij}^\star \ \forall i,j = 1..d \ \text{dans } \Omega_{pml} \cup \Gamma. \tag{5.73e}$$

5.3 Résultats numériques

Dans cette section, nous montrons quelques résultats numériques obtenus par les méthodes introduites tout au long de ce chapitre, afin de les illustrer. Les expériences sont toutes effectuées dans des milieux homogènes : les résultats numériques regroupés dans la partie IV, concernant des modèles sismiques réalistes, donc hétérogènes, utilisent aussi les PML. Nous verrons à ce moment là que les PML se comportent bien en milieux hétérogènes.

Quelques mots, tout d'abord, au sujet de la mise en place des modélisations.
Intéressons nous à la construction du maillage dans les PML. Considérons un milieu infini hétérogène avec topographie. Nous avons vu que les PML tiennent compte des propriétés physiques du milieu auquel elles sont accolées. Afin d'obtenir une bonne absorption des ondes par les PML, nous prolongeons donc la topographie et les interfaces entre les différents milieux du domaine aux couches absorbantes de façon continue. Nous verrons dans le chapitre 8 qu'il est avantageux, au niveau précision, de construire un maillage qui suive les hétérogénéités du milieu. Le maillage du domaine physique et des PML se fait alors de façon adaptée et avec le même pas d'espace dans une couche et dans la PML qui lui est accolée. De même, dans le cas de l'élastodynamique, la condition de surface libre

sera prolongée à la topographie des PML afin d'obtenir une bonne absorption des ondes de Rayleigh. Intéressons nous, à présent, au choix des coefficients d'absorption. Dans la section précédente, nous avons introduit différentes formulations PML pour un domaine d'intérêt $\Omega =]-\infty,0]^d$ inclus dans un milieu infini hétérogène. Or, la plupart des expériences s'effectuent sur un domaine d'intérêt de la forme :

$$\Omega = \prod_{i=1}^{d} [x_{i\,min}, x_{i\,max}]$$

Nous pouvons être amenés à utiliser des couches absorbantes d'épaisseur différentes dans chaque direction. Nous noterons donc δ_i l'épaisseur de la PML dans la direction x_i.

Remarque 53 *Nous verrons dans les expériences qu'une épaisseur PML de* 10 *points d'interpolation permet une très bonne absorption des ondes de pression et de cisaillement mais qu'il faut généralement un nombre plus important de points d'interpolation pour l'absorption des ondes de Rayleigh.*

Nous considérons alors les fonctions τ_i définies par [28] :

$$\tau_i(x_i) = \begin{cases} \dfrac{3c}{2\delta_i^3} \log(1/r)(x_{i\,min} - x_i)^2 & \text{pour } x_i \leq x_{i\,min} \\ 0 & \text{pour } x_{i\,min} \leq x_i \leq x_{i\,max} \\ \dfrac{3c}{2\delta_i^3} \log(1/r)(x_{i\,max} - x_i)^2 & \text{pour } x_i \geq x_{i\,max} \end{cases} \tag{5.74}$$

où c est la plus grande vitesse de l'onde dans le domaine et $r = 1/1000$, r étant le pourcentage d'énergie réfléchie par le bord extérieur de la PML.

Remarque 54 *Les fonctions τ_i sont donc bien dérivables, de dérivées continues.*

Pour plus de renseignement sur le choix de ces coefficients et la réflexion qu'ils induisent au bord de la PML, nous renvoyons à [28].

5.3.1 En acoustique

Considérons un milieu homogène bidimensionnel infini dans lequel la vitesse de propagation des ondes vaut 0.9m.s^{-1}. Nous nous intéressons aux phénomènes physiques qui se déroulent dans un carré de 18m de côté. Nous considérons un système au repos à $t = 0$s et une fonction source (qui est la dérivée en temps de la fonction F intervenant dans la formulation mixte considérée) :

$$f(\mathbf{x},t) = h(t)\; g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|)$$

où h est un Ricker d'ordre 2 en temps, de fréquence centrale $f_0 = 0.9$Hz, qui s'écrit :

$$h(t) = \left[2\pi^2(f_0 t - 1)^2 - 1\right]\; e^{-\pi^2(f_0 t - 1)^2}. \tag{5.75}$$

La fonction $g(|x - x_S|)$ (voir figure 5.6) est une gaussienne centrée en $x_S = (9\text{m}, 9\text{m})$ et distribuée sur un disque de rayon $r_0 = 0.5$m de la forme :

$$g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|) = \frac{e^{-7|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|/r_0}}{r_0^2} \tag{5.76}$$

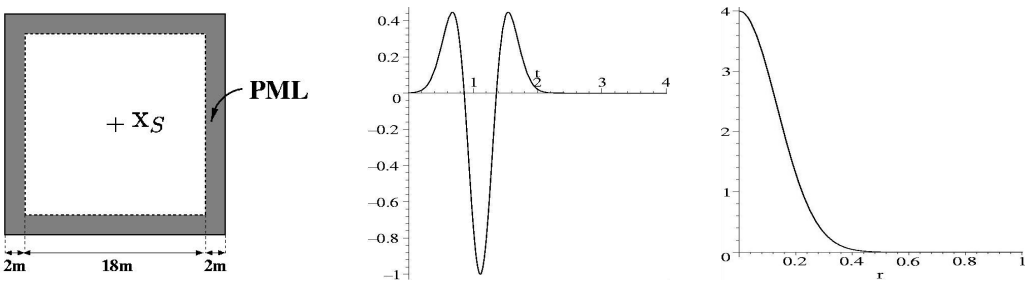


FIG. 5.6: Domaine d'étude (gauche) - Fonction $h(t)$ (centre) - Fonction $g(r)$ (droite)

Nous entourons donc le domaine considéré par des PML d'epaisseur 2m (soit deux longueurs d'onde). Le milieu total domaine et PML est donc de 22m $\times$ 22m (voir figure 5.6).
Nous utilisons la première formulation PML introduite (celle ne faisant pas intervenir les dérivées des coefficients d'absorption) et discrétisons par la méthode des éléments finis mixtes spectraux Q_5. Nous utilisons un maillage à deux éléments par longueur d'onde.
Dans la figure 5.7, nous représentons la pression dans le domaine et les PML (la frontière étant représentée en noir) à différents instants.

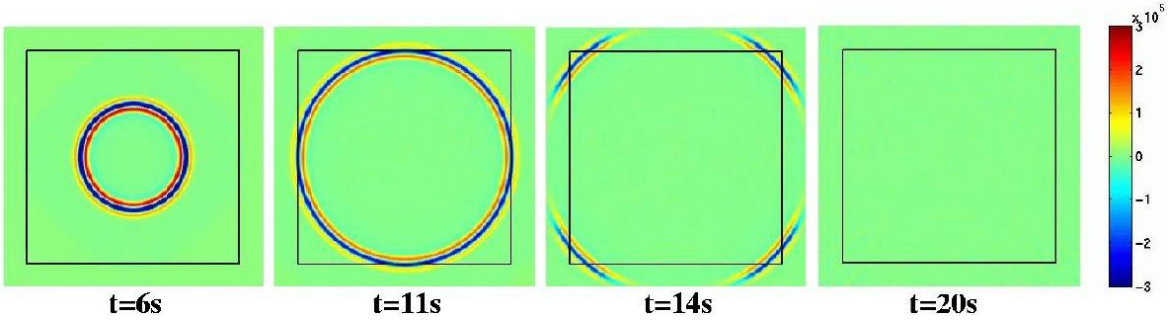


FIG. 5.7: Valeur de la pression dans le domaine physique et les PML pour un milieu acoustique de vitesse 0.9m.s^{-1}.

Représentons le dernier instantané pour une échelle de couleur 100 fois plus petite dans la figure 5.8.

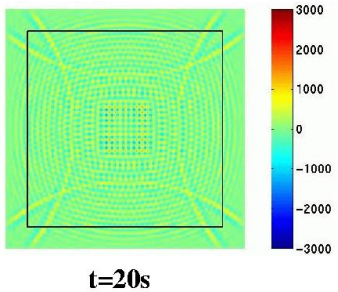


FIG. 5.8: Valeur de la pression dans le domaine physique et les PML pour un milieu acoustique de vitesse 0.9m.s^{-1} pour une échelle de couleur divisée par 100.

Nous remarquons que la réflexion dûe aux PML est très faible. Elle est de l'ordre de la dispersion

numérique.

L'acoustique isotrope n'offrant pas de grande diversité au niveau de la forme de l'onde, nous ne présentons ici qu'une seule expérience.

5.3.2 En élastodynamique

5.3.2.1 En dimension 2

Considérons trois milieux bidimensionnels homogènes de masse volumique $\rho = 1\text{Kg.m}^{-3}$ et de coefficients d'élasticité respectifs (en Pa) :

- Matériau 1 : matériau isotrope avec $\lambda = 16$ et $\mu = 2$ (soit $V_p \simeq 4.47\text{m.s}^{-1}$ et $V_s \simeq 1.41\text{m.s}^{-1}$),
- Matériau 2 : matériau orthotrope avec $c_{1111} = c_{2222} = 20$, $c_{1212} = 2$ et $c_{1122} = 3.8$,
- Matériau 3 : matériau orthotrope avec $c_{1111} = 4$, $c_{2222} = 20$, $c_{1212} = 2$ et $c_{1122} = 7.5$.

Nous nous intéressons aux phénomènes physiques se déroulant dans un carré $[0\text{m}, 25\text{m}]^2$.
Pour toutes les simulations, les données initiales sont nulles et l'on considère une fonction source (dérivée en temps de **F**) :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = h(t)\, g(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_S|)\, \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}-\mathbf{x}_S}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_S|}\, (-\overrightarrow{e}_2)$$

où $\overrightarrow{e}_2$ est le second vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, h est un Ricker d'ordre 2 en temps, de fréquence centrale $f_0 = 0.9$ Hz, qui s'écrit :

$$h(t) = \left[2\pi^2(f_0 t - 1)^2 - 1\right]\, e^{-\pi^2(f_0 t-1)^2}. \tag{5.77}$$

La fonction $g(|x-x_S|)$ (voir figure 5.9) est une gaussienne centrée en $x_S = (12.5\text{m}, 25\text{m})$ et distribuée sur un disque de rayon $r_0 = 0.5\text{m}$ de la forme :

$$g(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_S|) = \frac{e^{-7|\mathbf{x}-\mathbf{x}_S|/r_0}}{r_0^2} \tag{5.78}$$

Pour chaque matériau considéré, nous entourons le domaine sur trois côtés par des PML d'epaisseur la plus grande longueur d'onde de l'onde de pression (la vitesse de l'onde dépendant de la direction, sa longueur d'onde varie aussi en fonction de la direction). Etant données les propriétés élastiques des trois matériaux et la fréquence utilisée, les PML ont donc une épaisseur de 5m. Le milieu total domaine et PMLs est donc de 35m × 30m (voir figure 5.9).

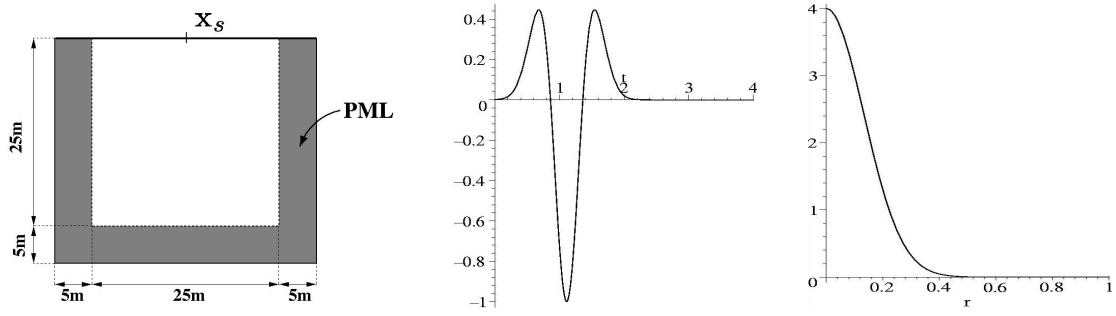


FIG. 5.9: Domaine d'étude (gauche) - Fonction $h(t)$ (centre) - Fonction $g(r)$ (droite)

Pour chaque expérience, nous utilisons la formulation PML (5.54) faisant intervenir les dérivées des fonctions $(\tau_j)_{j=1,2}$. Nous discrétisons par la méthode des éléments finis mixtes spectraux Q_5 et considérons un maillage à au moins deux éléments par longueur d'onde. La plus petite longueur d'onde étant associée à la plus petite des valeurs de la vitesse de l'onde de cisaillement (qui varie en fonction de la direction de propagation), le pas d'espace vaut 0.75m pour les deux premières expériences et 0.45m pour la dernière expérience. Visualisons, pour chaque matériau, le module du déplacement ainsi que sa première et sa deuxième composante, à différents instants, dans le domaine et les PML. Nous représentons ensuite ces mêmes quantités, au dernier instant considéré, avec une échelle de couleur divisée par 100.

Remarque 55 *Pour toutes les expériences, nous avons indiqué la frontière entre le domaine et les PML sur les instantanés.*

- **Expérience 1** : les résultats sont regroupés dans les figures 5.10 et 5.11.
  Nous vérifions la bonne absorption des ondes de pression, de cisaillement ainsi que des ondes de Rayleigh. Dans la figure 5.11, nous remarquons que la quantité d'énergie réflechie dans le domaine par les bords des PML est très faible. Elle est majoritairement composée de la réflexion de l'onde de Rayleigh générée par la discrétisation du coefficient d'absorption τ_1 aux points d'interpolation du maillage. Ainsi, si l'on prend un pas d'espace de 0.5m à la place du pas d'espace considéré précédemment, on obtient, à $t = 25$s et toujours pour une échelle de couleur divisée par 100, les résultats représentés dans la figure 5.12.
  Nous vérifions une meilleure absorption des ondes de Rayleigh lorsque les coefficients d'absorption sont plus finement discrétisés.
- **Expérience 2** : les résultats sont regroupés dans les figures 5.13 et 5.14.
  Nous pouvons faire les mêmes remarques que pour la première expérience : très bonne absorption de l'énergie par les PML. De même, on observe des réflexions de l'onde de Rayleigh dûes aux discontinuités du coefficient d'absorption τ_1 aux points d'interpolation du maillage. Si l'on considère un maillage avec un pas d'espace égal à 0.5m dans les PMls et que l'on représente le module du champ de déplacement ainsi que ses deux composantes à l'instant $t = 25$s avec la même échelle de couleur que précédemment (voir figure 5.15), nous vérifions une meilleure absorption des ondes de Rayleigh.
- **Expérience 3** : les résultats sont représentés dans la figure 5.16.
  Dans cette expérience, les ondes semblent être bien absorbées jusqu'à $t = 16$s. Nous observons toutefois des instabilités sur le dernier instantané. Celles-ci prennent naissance dans les PML. Ces instabilités ont été étudiées dans le cas bidimensionnel pour les matériaux orthotropes. L'étude est détaillée dans le chapitre 6.

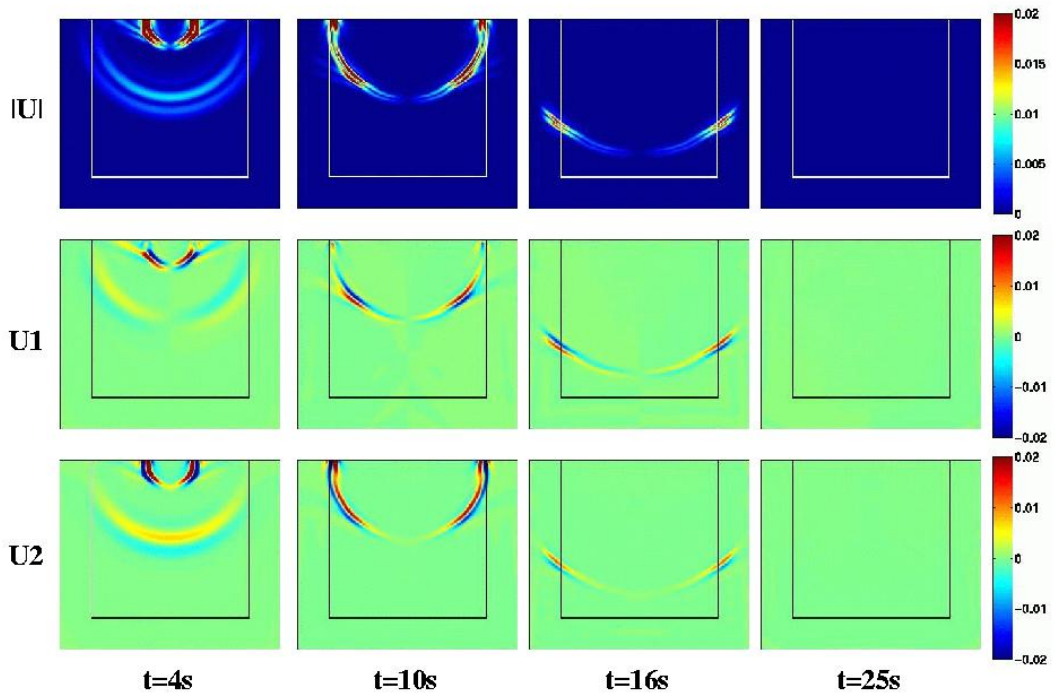


FIG. 5.10: Module du champ de déplacement, première et seconde composantes à différents instants, pour le matériau isotrope : $\lambda = 16$ et $\mu = 2$.

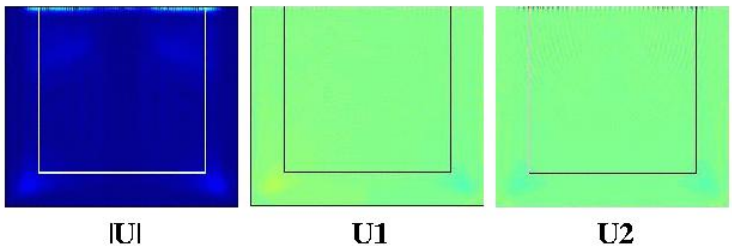


FIG. 5.11: Module du champ de déplacement, première et seconde composantes, à $t = 25$s, pour le matériau isotrope : $\lambda = 16$ et $\mu = 2$, avec une échelle de couleur divisée par 100.

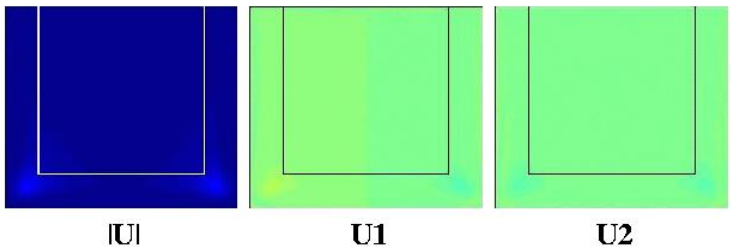


FIG. 5.12: Module du champ de déplacement, première et seconde composantes, à $t = 25s$, pour le matériau isotrope : $\lambda = 16$ et $\mu = 2$, avec une échelle de couleur divisée par 100 et un pas d'espace de 0.5m dans les PML.

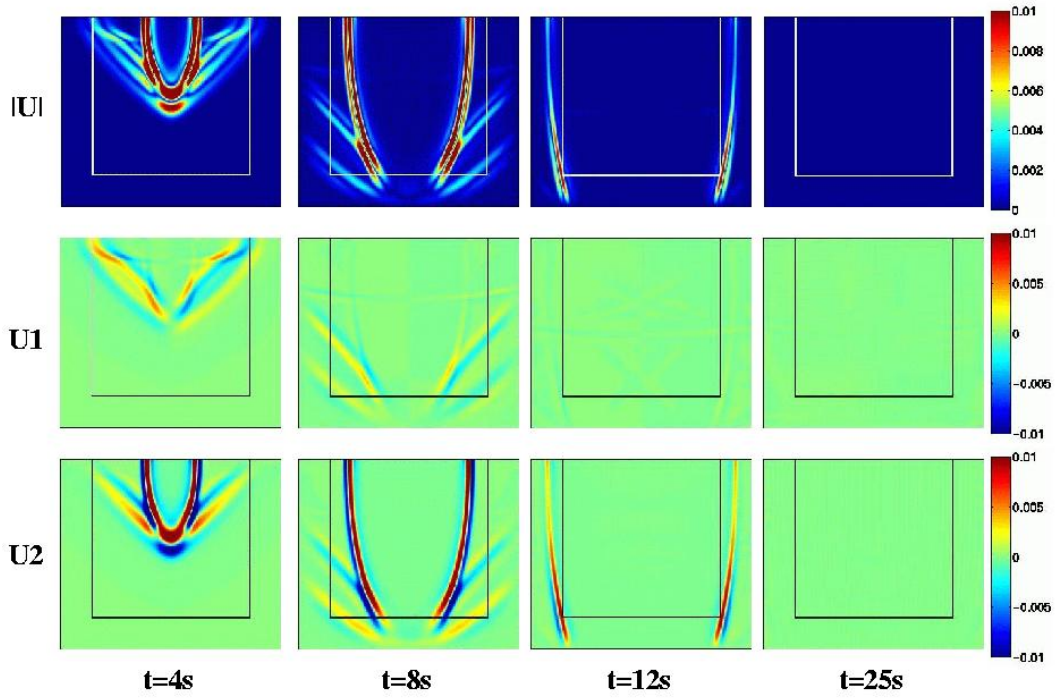


FIG. 5.13: Module du champ de déplacement, première et seconde composantes à différents instants, pour le matériau orthotrope : $c_{1111} = c_{2222} = 20$, $c_{1212} = 2$ et $c_{1122} = 3.8$.

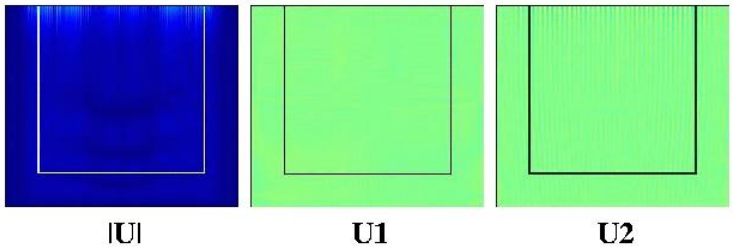


FIG. 5.14: Module du champ de déplacement, première et seconde composantes, à $t = 22$s, pour le matériau orthotrope : $c_{1111} = c_{2222} = 20$, $c_{1212} = 2$ et $c_{1122} = 3.8$, avec une échelle de couleur divisée par 100.

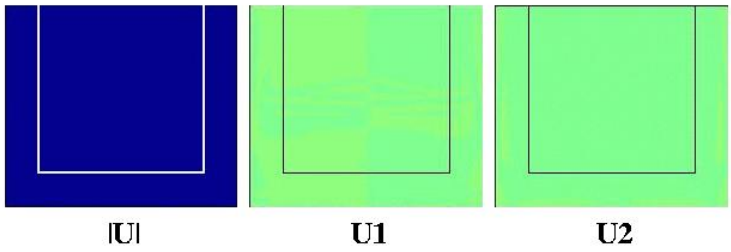


FIG. 5.15: Module du champ de déplacement, première et seconde composantes, à $t = 25$s, pour le matériau orthotrope : $c_{1111} = c_{2222} = 20$, $c_{1212} = 2$ et $c_{1122} = 3.8$, avec une échelle de couleur divisée par 100 et un pas d'espace de 0.5m dans les PML.

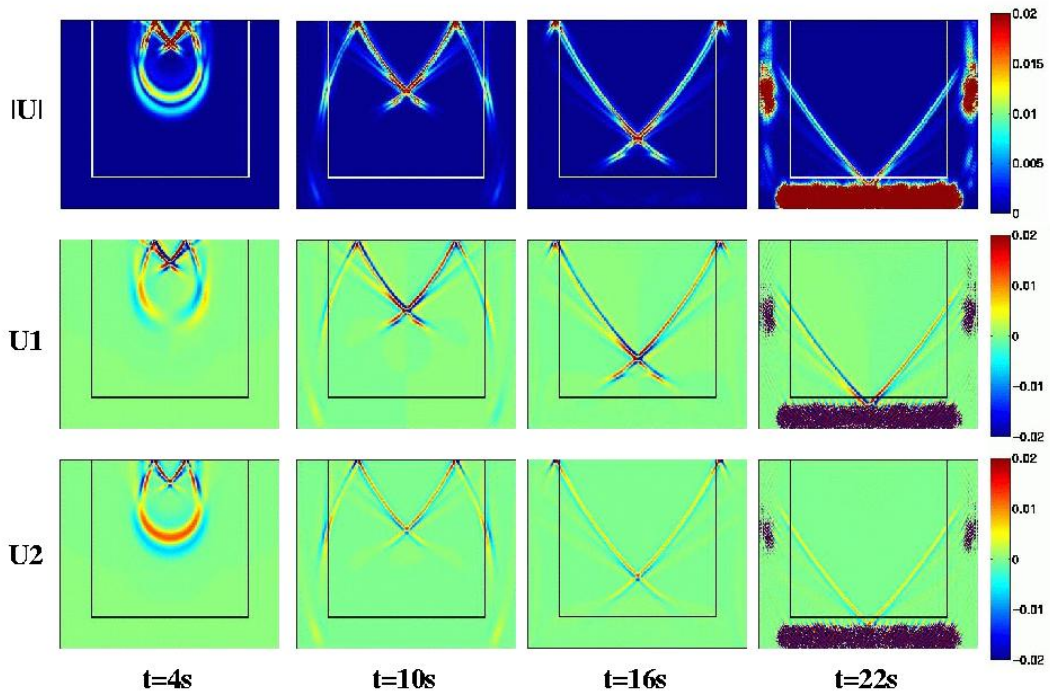


FIG. 5.16: Module du champ de déplacement, première et seconde composantes à différents instants, pour le matériau orthotrope : $c_{1111} = 4$, $c_{2222} = 20$, $c_{1212} = 2$ et $c_{1122} = 7.5$.

5.3.2.2 En dimension 3

Considérons deux milieux tridimensionnels homogènes de masse volumique $\rho = 1\text{Kg.m}^{-1}$ et de coefficients d'élasticité respectifs (en Pa) :

- Matériau 1 : matériau isotrope avec $\lambda = 0.07$ et $\mu = 0.81$ (soit $V_p = 1.3\text{m.s}^{-1}$ et $V_{sv} = V_{sh} = 0.9\text{m.s}^{-1}$),
- Matériau 2 : matériau orthotrope avec $c_{1111} = c_{2222} = 1.58$, $c_{3333} = 1.69$, $c_{1313} = c_{2323} = 0.81$, $c_{1212} = 1.13$, $c_{1122} = -0.67$ et $c_{1133} = c_{2233} = -0.68$.

Nous nous intéressons aux phénomènes physiques se déroulant dans un pavé $[0\text{m}, 10\text{m}] \times [0\text{m}, 7.5\text{m}]^2$. Pour toutes les simulations, les données initiales sont nulles et l'on considère une fonction source (qui est la dérivée en temps de la fonction source $\mathbf{F}$ intervenant dans la formulation mixte) :

$$f(\mathbf{x},t) = h(t)\, g(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_S|)\, \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}-\mathbf{x}_S}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_S|}\, (-\overrightarrow{e}_3)$$

où $\overrightarrow{e}_3$ est le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, h est la même fonction qu'en 2D (même fréquence centrale) et où $g(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_S|)$ est une gaussienne centrée en $\mathbf{x}_S = (5\text{m}, 3.75\text{m}, 3.75\text{m})$ et distribuée sur une sphère de rayon $r_0 = 0.5\text{m}$.
Pour chaque matériau considéré, nous entourons le domaine sur cinq côtés par des PML d'épaisseur la plus grande longueur d'onde de l'onde de pression (celle-ci dépendant de la direction de propagation de l'onde). Etant données les propriétés élastiques des deux matériaux et la fréquence utilisée,

les PML ont une épaisseur de 1.5m. Le milieu total domaine et PML est donc de 16m $\times$ 10.5m $\times$ 9m. Pour chaque expérience, nous utilisons la formulation PML faisant intervenir les dérivées des coefficients d'absorption et discrétisons par éléments finis mixtes spectraux Q_5. Le maillage utilisé est un maillage à au moins deux éléments par longueurs d'onde. La plus petite longueur d'onde étant associée à la plus petite des valeurs des vitesses des ondes de cisaillement (qui varie en fonction de la direction de propagation), le pas d'espace vaut 0.5m. Nous représentons uniquement la norme du champ de déplacement à différents instants, dans le domaine physique et les PML sur trois plans parallèles aux plans de références et s'intersectant au point source. Un trait blanc délimite la frontière entre le domaine et les PML.

– **Expérience 1** : les résultats sont regroupés dans la figure 5.17.
  Dans la figure 5.18, nous représentons le dernier instantané ($t = 15$s) avec une échelle de couleur divisée par 100. Nous vérifions la bonne absorption des ondes de pression et de cisaillement. Comme dans le cas bidimensionnel, l'énergie prépondérante après passage dans les PML provient de l'onde de Rayleigh. Le résidu de cet onde dans la figure 5.18 est négligeable. Pour une meilleure absorption de l'onde de Rayleigh, il suffirait de discrétiser les coefficients d'absoption τ_1 et τ_2 sur un plus grand nombre de points du maillage.

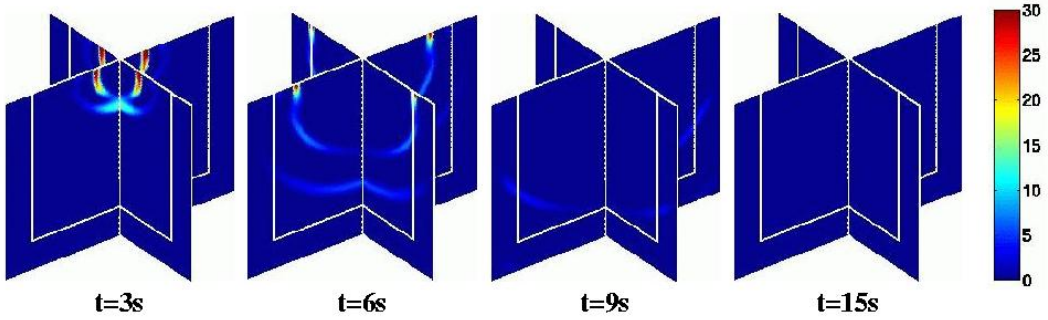


FIG. 5.17: Module du champ de déplacement à différents instants, pour le matériau isotrope : $\lambda = 0.07$ et $\mu = 0.81$.

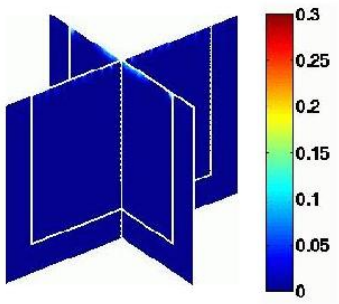


FIG. 5.18: Module du champ de déplacement à $t = 15$s, pour le matériau isotrope : $\lambda = 0.07$ et $\mu = 0.81$ avec une échelle de couleur divisée par 100.

– **Expérience 2** : les résultats sont regroupés dans la figure 5.19.
  Dans la figure 5.20, nous représentons le dernier instantané ($t = 15$s) avec une échelle de couleur divisée par 100. Les remarques sont les mêmes que pour l'expérience en milieu isotrope.

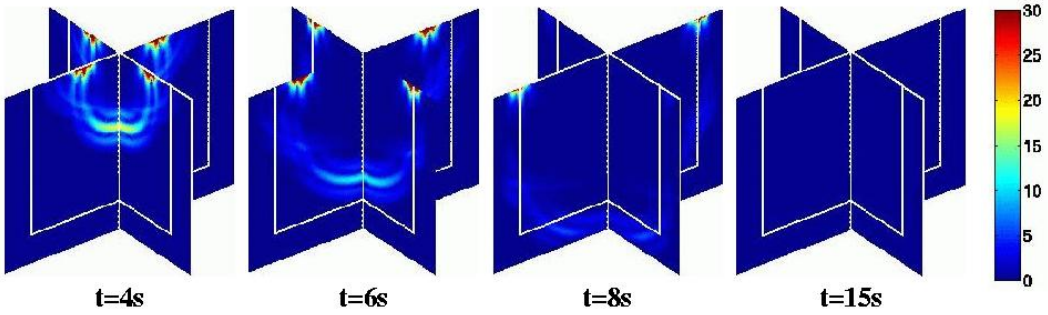


FIG. 5.19: Module du champ de déplacement à différents instants, pour le matériau orthotrope : $c_{1111} = c_{2222} = 1.58$, $c_{3333} = 1.69$, $c_{1313} = c_{2323} = 0.81$, $c_{1212} = 1.13$, $c_{1122} = -0.67$ et $c_{1133} = c_{2233} = -0.68$.

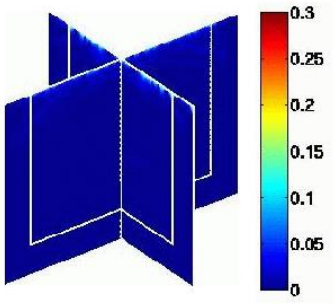


FIG. 5.20: Module du champ de déplacement à $t = 15$s, pour le matériau orthotrope : $c_{1111} = c_{2222} = 1.58$, $c_{3333} = 1.69$, $c_{1313} = c_{2323} = 0.81$, $c_{1212} = 1.13$, $c_{1122} = -0.67$ et $c_{1133} = c_{2233} = -0.68$ avec une échelle de couleur divisée par 100.

Chapitre 6

Analyse de stabilité

Introduction

Nous avons remarqué, dans le chapitre 5.3.2 présentant quelques expériences numériques dans les PML en élastodynamique, des phénomènes d'instabilité pour certains matériaux orthotropes 2D. Ces phénomènes ont fait l'objet d'une étude théorique, effectuée en collaboration avec E. Bécache et P. Joly. L'article sur cette étude, qui parraîtra prochainement dans le Journal of Computational Physics, constitue le corps de ce chapitre.

Résumé :

Les couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) ont étées introduites récemment [14] dans le but de simuler l'absorption des ondes dans des domaines non bornés. Introduites pour les ondes électromagnétiques, les PML ont, depuis, été étendues à de nombreux modèles de propagation d'ondes, dont la propagation d'ondes élastiques en milieu anisotrope. Dans ce dernier cas, des simulations numériques ont montré l'apparition d'instabilités. Dans ce travail, nous nous intéressons à cette question d'un point de vue théorique. Dans la première partie, nous établissons une condition nécessaire de stabilité pour un système hyperbolique général. Cette condition peut être interprétée en terme de propriétés géométriques des surfaces de lenteur et utilisée pour expliquer des instabilités observées avec les ondes élastiques. Cette étude est facilement étendue à d'autres modèles de propagation (équations de Maxwell anisotropes, équations d'Euler linéarisées) pour lesquels des phénomènes semblables ont été mis en lumière. Dans la seconde partie, nous concentrons notre analyse aux ondes élastiques orthotropes et obtenons séparement une condition nécessaire et une condition suffisante de stabilité qui peuvent être exprimées sous forme d'inégalités sur les coefficients élastiques du milieu.

Stability of Perfectly Matched layers, Group Velocities and Anisotropic Waves

E. Bécache, S. Fauqueux and P. Joly

Abstract :
Perfectly Matched Layers (PML) are a recent technique for simulating the absorption of waves in open domains. They have been introduced for electromagnetic waves and extended, since then, to other models of wave propagation, including waves in elastic anisotropic media. In this last case, some numerical experiments have shown that the PMLs are not always stable. In this paper, we investigate this question from a theoretical point of view. In the first part, we derive a necessary condition for the stability of the PML model for a general hyperbolic system. This condition can be interpreted in terms of geometrical properties of the slowness diagrams and used for explaining instabilities observed with elastic waves but also with other propagation models (anisotropic Maxwell's equations, linearized Euler equations). In the second part, we specialize our analysis to orthotropic elastic waves and obtain separately a necessary stability condition and a sufficient stability condition that can be expressed in terms of inequalities on the elasticity coefficients of the model.

keywords :
perfectly matched layers ; absorbing layers ; elastodynamics ; stability ; hyperbolic systems ; Fourier analysis ; linearized Euler equations ; anisotropy

6.1 Introduction

Perfectly Matched Layers (PML) is a recent technique for simulating the absorption of waves in open domains, which provides a very efficient alternative to the use of absorbing boundary conditions in many applications. The idea is to surround the computational domain with an absorbing layer (the PML region) so that the coupled system possesses the property of generating no reflection at the interface between the free medium and the artificial absorbing medium. This technique has been initially introduced by Bérenger [14] for Maxwell's equations, and has been widely used for the simulation of time dependent electromagnetic waves as well as Helmholtz-like equations (e.g., [15, 77, 16, 74, 62]). The method has been extended to various propagation models (the paraxial wave equations [26], the linearized Euler equations [67, 44, 41],...), including in particular elastic wave propagation in isotropic [38] and anisotropic media [29]. Trying to use these PMLs for computing the propagation of seismic waves, we observed exponential blow up phenomena in some numerical experiments involving anisotropic media. Analogous exponential instabilities have been also observed in the simulation of non destructive testing experiments [33]. This has motivated us to look at the question of the *well-posedness* and the stronger notion of *stability* of PMLs, introduced in [10], for anisotropic elastic waves. It is important here to make precise the distinction (see section 6.3) between these two notions (see also [68] for similar considerations) : by well-posedness, we mean that there exists a unique solution and that the L^2 norm of the solution can be bounded by some norm of the initial conditions multiplied by a constant $C(t)$. This does not prevent the solution from blowing up exponentially in time : in this case, we shall say that the problem is unstable. As a matter of fact, if, from the mathe-

matical point of view, the difference between an ill-posed problem and an unstable (but well-posed) problem is fundamental, for practical applications, it is not, since it is difficult to distinguish these two cases numerically. A more pertinent concept is the one of stability, which imposes an estimate of the type $C(t) \leq C\, t^k$. In particular, this concept of stability does not exclude a linear growth as the one studied in [1, 13] for Maxwell's equations. Furthermore, note that the notion of stability described here is linked to the continuous model and is distinct from the numerical stability related to a particular numerical scheme. For an unstable model, no particular discretization prevents the solution from blowing up exponentially.

This type of mathematical questions has already been widely investigated by several authors [76, 61, 57, 64, 10] in the case of Maxwell's equations. For elastodynamics equations, it is easy to show that the PML model is well-posed (cf section 6.3.2) but we will show that it can be unstable for some anisotropic media. The outline of this paper is as follows.

- In section 6.2, we recall the propagation equations for elastic waves in a 2D orthotropic medium (section 6.2.1) and recall the important notion of slowness diagrams (section 6.2.2). In section 6.2.3, we present the construction of the standard PML model for a general first order hyperbolic system and specialize it to elastic waves in section 6.2.4. Finally section 6.2.5 is devoted to various simulations that point out the instability phenomena that motivate the present works.
- In section 6.3 we derive a necessary condition for the stability of the PML model for a general hyperbolic system (theorem 2). This condition can be interpreted in terms of group velocities and phase velocities (also related to geometrical properties of the slowness diagrams) and is more precisely related to the existence of so-called backward propagating waves. We can use this criterion for explaining instabilities observed with elastic waves but also with other propagation models (anisotropic Maxwell's equations, linearized Euler equations) and it seems to show that these instabilities can occur only (but not necessarily) with models involving anisotropy. Finally we present numerical simulations showing that this geometrical criterion is not sufficient for stability in the case of elastic waves.
- In section 6.4, we specialize our analysis to orthotropic elastic waves and obtain separately a necessary stability condition (theorem 4) and a sufficient stability condition that can be expressed in terms of inequalities on the elasticity coefficients of the model (theorem 5).

6.2 Orthotropic elastic waves and PML model

6.2.1 The elastodynamics system

In this article we work in two dimensions. All the indices i, j, k, l take their values in $\{1,2\}$. $x = (x_1, x_2)$ denotes the space variable and ∂_i holds for the derivation with respect to x_i. Throughout this section, we shall use the Einstein convention on repeated indices for summation. Let us introduce the equations of elastodynamics in a 2D homogeneous medium :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(u) = 0, \tag{6.1}$$

where $u = (u_i)$ denotes the displacement field, $\rho > 0$ the density, $\sigma(u) = \sigma_{ij}(u)$ the stress tensor and :

$$\operatorname{div}\sigma = \begin{pmatrix} \partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} \\ \partial_1\sigma_{12} + \partial_2\sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

The stress tensor is related to the strain tensor $\varepsilon(u)$ defined by

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \tag{6.2}$$

by Hooke's law :

$$A\sigma = \varepsilon(u) \Longleftrightarrow \sigma = C\varepsilon(u) = A^{-1}\varepsilon(u). \tag{6.3}$$

The fourth-order tensor C of elasticity coefficients satisfies the classical symmetries, [3] :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl}. \tag{6.4}$$

Moreover, it is positive definite :

$$C_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha \ \|\xi\|^2 = \alpha \ \xi_{ij}\xi_{ij}, \tag{6.5}$$

for all symmetric tensor ξ.

Notation. As it is classical, the symmetries (6.4) of the tensor C allows us to simplify its representation into a 3×3 matrix c_{pq}, still denoted by C for simplicity, such that

$$C_{ijkl} = c_{p(i,j),p(k,l)}$$

where the function p is defined by :

$$p(1,1) = 1, \quad p(2,2) = 2, \quad p(1,2) = p(2,1) = 3.$$

Orthotropic media. In an orthotropic medium whose principal axes coincides with the (x,y) axes, we have $c_{13} = c_{23} = 0$ so that [3] :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

With this notation, the condition (6.5) becomes ($|.|$ denotes the Euclidean norm in $\mathbb{R}^3$) :

$$c_{11}V_1^2 + c_{22}V_2^2 + 2c_{12}V_1V_2 + c_{33}V_3^2 > \ \alpha \, |V|^2, \quad \forall \, V \in \mathbb{R}^3, \tag{6.6}$$

which is equivalent to the inequalities :

$$c_{11} > 0, \ \ c_{22} > 0, \ \ c_{33} > 0, \ \ c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \tag{6.7}$$

For an isotropic medium, which is of course a particular orthotropic material, the coefficients can be expressed in terms of Lamé's coefficients $\lambda > 0$ and $\mu \geq 0$:

$$c_{11} = c_{22} = \lambda + 2\mu, \ c_{12} = \lambda, \ c_{33} = \mu. \tag{6.8}$$

In order to apply the general construction of the PML model, we will need to reformulate the propagation equations as a first-order system, the so-called velocity-stress formulation :

$$\begin{cases} \rho \ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{div}\sigma = 0, \\ A\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(v) = 0, \end{cases} \tag{6.9}$$

where $v = \partial_t u$ is the velocity field.

6.2.2 Harmonic plane waves and slowness diagrams

Plane waves are particular solutions of (6.1) on the form :

$$u(x,t) = D\, e^{\mathrm{i}(\omega t - k.x)}, \quad D \in \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2) \tag{6.10}$$

where $k \in \mathbb{R}^2$ is the wave vector, $\omega \in \mathbb{R}$ the circular frequency and D the displacement vector (or polarization vector). We also introduce

$$\left| \begin{array}{ll} K = \dfrac{k}{|k|}, & \text{the unit propagation direction,} \\ \mathcal{V} = \dfrac{\omega}{|k|}, & \text{the phase velocity,} \\ \vec{\mathcal{S}} = \dfrac{k}{\omega}, & \text{the slowness vector.} \end{array} \right. \tag{6.11}$$

Plane waves of the form (6.10) are solutions of (6.1) if the circular frequency and the wave vector k satisfy a relation, called *dispersion relation*. In order to write this relation, it is useful to introduce the Chrystoffel's tensor, [3] :

$$\Gamma_{ij}(k) = C_{il\,jm} k_l k_m, \tag{6.12}$$

which can be rewritten with the new notation :

$$\Gamma(k) = \begin{pmatrix} c_{11}k_1^2 + 2c_{13}k_1k_2 + c_{33}k_2^2 & c_{13}k_1^2 + (c_{12}+c_{33})k_1k_2 + c_{32}k_2^2 \\ \\ c_{13}k_1^2 + (c_{12}+c_{33})k_1k_2 + c_{32}k_2^2 & c_{33}k_1^2 + 2c_{23}k_1k_2 + c_{22}k_2^2 \end{pmatrix}.$$

So, in an orthotropic medium, we have :

$$\Gamma(k) = \begin{pmatrix} c_{11}k_1^2 + c_{33}k_2^2 & (c_{12}+c_{33})k_1k_2 \\ \\ (c_{12}+c_{33})k_1k_2 & c_{33}k_1^2 + c_{22}k_2^2 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

We notice that $\Gamma(k)$ is homogeneous of degree 2 with respect to k :

$$\Gamma(\alpha k) = \alpha^2 \Gamma(k). \tag{6.14}$$

It is well known that, due to (6.5), for any $k \neq 0$, $\Gamma(k)$ is symmetric positive definite [3]. Substituting (6.10) into (6.1), one sees that the polarization vector D must be an eigenvector of $\Gamma(k)$ associated to the eigenvalue $\rho\,\omega^2$:

$$\Gamma(k)D(k) = \rho\,\omega^2 D(k) \iff \Gamma(K)D = \rho\,\mathcal{V}^2 D.$$

The frequency ω and the wave vector k are thus related by the following *dispersion relation* :

$$F_2(\omega, k) \equiv \det(\Gamma(k) - \rho\,\omega^2 I) = 0 \tag{6.15}$$

where I is the identity matrix. Considering (6.15) as an equation in the frequency ω for a given value of the wave vector k, we obtain four solutions :

$$\omega = \pm\,\omega_{QP}(k), \quad \omega = \pm\,\omega_{QS}(k), \qquad (\omega_{QP}(k) > 0, \quad \omega_{QS}(k) > 0)$$

where $\gamma_{QP}(k) = \rho\,\omega_{QP}^2(k) \geq \gamma_{QP}(k) = \rho\,\omega_{QS}^2(k)$ are the two positive eigenvalues of $\Gamma(k)$ associated to the respective eigenvectors $D_{QP}(k)$ and $D_{QS}(k)$,

– For $\omega = \pm\, \omega_{QP}(k)$ and $D \,//\, D_{QP}(k)$, the wave is called quasi-longitudinal,

– For $\omega = \pm\, \omega_{QS}(k)$ and $D \,//\, D_{QS}(k)$, the wave is called quasi-transverse.

The expressions of the eigenvalues are :

$$\begin{cases} \gamma_{QP}(k) = \dfrac{1}{2}\left(\Gamma_{11}(k)+\Gamma_{22}(k)+\sqrt{(\Gamma_{11}(k)-\Gamma_{22}(k))^2+4\Gamma_{12}(k)^2}\right) \\ \gamma_{QS}(k) = \dfrac{1}{2}\left(\Gamma_{11}(k)+\Gamma_{22}(k)-\sqrt{(\Gamma_{11}(k)-\Gamma_{22}(k))^2+4\Gamma_{12}(k)^2}\right) \end{cases} \tag{6.16}$$

In particular in an isotropic medium, we recover the usual pressure and shear waves :

- $\omega_{QP}(k) = |k|\mathcal{V}_P, \quad \mathcal{V}_P = \sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \qquad$ (in this case $D^{QP}(k) \,//\, k$)
- $\omega_{QS}(k) = |k|\mathcal{V}_S, \quad \mathcal{V}_S = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}, \qquad$ (in this case $D^{QS}(k) \;\perp\; k$)

Slowness diagram and group velocity. By homogeneity, the dispersion relation (6.15) can be rewritten as :

$$F_2(1, \frac{k}{\omega}) = F_2(1, \vec{S}) = 0. \tag{6.17}$$

By definition, the slowness diagram is the set of points, in the plane of slowness vectors $\vec{S} = k/\omega$, that satisfy (6.17). It is also the union of two curves whose equations in polar coordinates are

$$\left|\vec{S}\right| = \frac{1}{\omega_{QP}(K)} \quad \text{and} \quad \left|\vec{S}\right| = \frac{1}{\omega_{QS}(K)}.$$

We give in figure 6.1 two examples of slowness diagrams. On the left, for an isotropic medium (the two curves are two circles respectively of radius $1/\mathcal{V}_P$ and $1/\mathcal{V}_S \geq 1/\mathcal{V}_P$) and on the right for an anisotropic medium ($c_{11} = c_{22} = 20,\ c_{33} = 2,\ c_{12} = 3.8$).

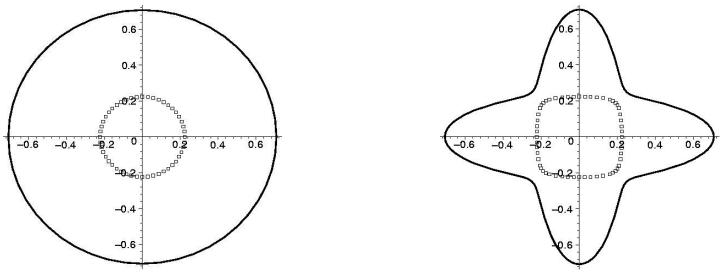


FIG. 6.1: Slowness diagrams. Left : isotropic medium. Right : orthotropic medium.

For each branch of solution $k \to \omega(k)$ of the dispersion relation, one defines the *group velocity* as follows :

$$\vec{V}_g(k) = \nabla_k \omega(k) \tag{6.18}$$

For almost every k, the two branches do not intersect (it can happen only if $c_{33} = c_{11}$ or $c_{33} = c_{22}$ and for at most four particular directions) and using (6.15), by implicit function theorem, it is easy to see that the group velocity can also be expressed as :

$$\vec{V}_g(k) = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial \omega}(\omega(k),k)\right)^{-1} \nabla_k F_2(\omega(k),k) = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial \omega}(1,\vec{S})\right)^{-1} \nabla_k F_2(1,\vec{S}) \tag{6.19}$$

which shows that the *group velocity is orthogonal to the slowness curves.* Finally, *the wave fronts* are defined as the curves described by the extremities of the group velocities. These curves permit to predict the localization of the energy of a solution emitted from a point source (see Fig. 6.2).

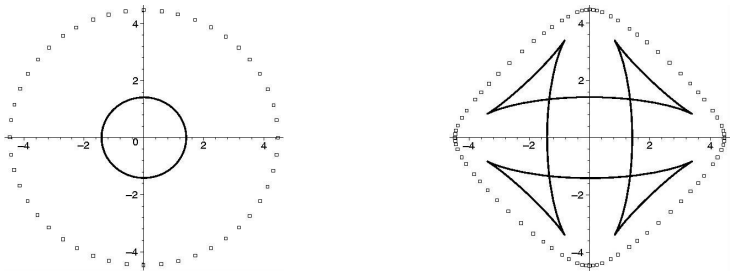


FIG. 6.2: Waves fronts. Left : isotropic medium. Right : orthotropic medium.

Remark 1 *One can notice that the dispersion relation of the first-order system (6.9) is not identical to the second order's one F_2 : it has the additional eigenvalue* 0 *and can be expressed as*

$$F_1(\omega,k) = \omega^{\ell_0} F_2(\omega,k), \qquad (\ell_0 = 1 \textit{ in 2D and } \ell_0 = 3 \textit{ in 3D}) \tag{6.20}$$

6.2.3 The PML model for a general first-order evolution problem

The principle of the perfectly matched layers has been first introduced by Bérenger [14], for electromagnetic waves and has been, since then, applied in numerous applications. In [29], the authors have shown that it is possible to write a systematic way of designing a PML model for a general first-order hyperbolic system. In this section we briefly describe this general construction. Consider a general first order hyperbolic system, posed initially in $\mathbb{R}^m$, of the form

$$\partial_t u - A_1 \partial_1 u - A_2 \partial_2 u = 0 \tag{6.21}$$

where u is a m-vector, A_1 and A_2 are $m \times m$ matrices.

Let us briefly recall the definitions of hyperbolicity (see [53]). We set $\mathcal{A}(k) = k_1 A_1 + k_2 A_2$. The system (6.21) is hyperbolic if, for all $k \in \mathbb{R}^2$, the eigenvalues of $\mathcal{A}(k)$ are real. It is strongly hyperbolic if furthermore, for all $k \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(k)$ can be diagonalized (if not it is weakly hyperbolic). It is strictly hyperbolic if, for all $k \in \mathbb{R}^2$, the eigenvalues of $\mathcal{A}(k)$ are real and distinct.

The formal construction of a PML in the x_1 direction (parallel to the x_2 axis) consists in : (i) introducing a splitting of the field $u = u^1 + u^2$, such that the unknown u^1 is only "associated" to the derivatives with respect to x_1 , and u^2 to the derivatives with respect to x_2, (ii) introducing an aniso-

tropic damping factor only on the u^1 component. We then obtain the following PML system :

$$\begin{cases} \partial_t u^1 + \varsigma(x_1)u^1 - A_1\partial_1(u^1+u^2) = 0 \\ \partial_t u^2 - A_2\partial_2(u^1+u^2) = 0 \end{cases} \tag{6.22}$$

where $\varsigma(x_1) = 0$ for $x_1 < 0$ and $\varsigma(x_1) \geq 0$ for $x_1 \geq 0$.

In the frequency domain, the system (6.22) becomes :

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega u^1 + \varsigma(x_1)u^1 - A_1\partial_1(u^1+u^2) = 0, \\ \mathrm{i}\omega u^2 - A_2\partial_2(u^1+u^2) = 0, \end{cases} \tag{6.23}$$

which can be obtained by substituting in the equation (6.21), written in the frequency domain, the x_1 derivatives ∂_1 into $d(\omega,\varsigma(x_1))\partial_1$, (see [29, 27]), where :

$$d(\omega,\varsigma(x_1)) = \frac{\mathrm{i}\omega}{\varsigma(x_1)+\mathrm{i}\omega} \tag{6.24}$$

Actually, this corresponds to apply the complex change of variable [27, 65, 18] :

$$x_1 \rightarrow x_1 + \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\int_0^{x_1} \varsigma(\xi)\, d\xi,$$

to the solution of the frequency domain version of (6.21). The very astonishing property of this layer model is that it is perfectly matched, which means that it generates no reflection at the interface between the physical domain and the absorbing medium (see [29]). This property can be shown through a plane wave analysis. Furthermore, this analysis also shows that the transmitted wave decreases exponentially during its propagation inside the layer.

Of course to construct the PML model in the x_2 direction it suffices to permute the role of the space directions which gives the following system :

$$\begin{cases} \partial_t u^1 - A_1\partial_1(u^1+u^2) = 0 \\ \partial_t u^2 + \varsigma(x_2)u^2 - A_2\partial_2(u^1+u^2) = 0 \end{cases} \tag{6.25}$$

and in a corner, the damping factor is introduced in both directions :

$$\begin{cases} \partial_t u^1 + \varsigma(x_1)u^1 - A_1\partial_1(u^1+u^2) = 0 \\ \partial_t u^2 + \varsigma(x_2)u^2 - A_2\partial_2(u^1+u^2) = 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

6.2.4 The PML Model for elastodynamics

It is then straightforward to obtain the PML model for the elastodynamics system (6.9), that can be rewritten as :

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial v}{\partial t} - D^1\dfrac{\partial \sigma}{\partial x_1} - D^2\dfrac{\partial \sigma}{\partial x_2} = 0 \\ A\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - E^1\dfrac{\partial v}{\partial x_1} - E^2\dfrac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

where

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^t, \quad E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

The PML system is then obtained by splitting $\sigma = \sigma^1 + \sigma^2$ and $v = v^1 + v^2$ (see [29]) :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial v^1}{\partial t} + \zeta(x_1) v^1 - D^1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}(\sigma^1 + \sigma^2) = 0 \\ \rho \dfrac{\partial v^2}{\partial t} - D^2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\sigma^1 + \sigma^2) = 0 \\ A \dfrac{\partial \sigma^1}{\partial t} + \zeta(x_1) \sigma^1 - E^1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}(v^1 + v^2) = 0 \\ A \dfrac{\partial \sigma^2}{\partial t} - E^2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}(v^1 + v^2) = 0 \end{cases} \tag{6.27}$$

In the frequency domain, this system can be written in u as :

$$\begin{cases} \rho\, \omega^2 u + \mathrm{div}_{pml}\sigma(u) = 0 \\ \sigma(u) = C\varepsilon_{pml}(u) \end{cases} \tag{6.28}$$

which is the same model as in the physical domain, substituting the operators div and ε with div_{pml} and ε_{pml}, where :

$$\mathrm{div}_{pml}\sigma = \begin{pmatrix} d(\omega, \varsigma(x_1))\, \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} \\ d(\omega, \varsigma(x_1))\, \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{pml}(u) = \begin{pmatrix} d(\omega, \varsigma(x_1))\, \partial_1 u_1 & \dfrac{1}{2}(d(\omega, \varsigma(x_1))\, \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) \\ \dfrac{1}{2}(d(\omega, \varsigma(x_1))\, \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) & \partial_2 u_2 \end{pmatrix}.$$

The PML model in the x_2 direction still has the general form (6.28) but this time :

$$\mathrm{div}_{pml}\sigma = \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11} + d(\omega, \varsigma(x_2))\, \partial_2 \sigma_{12} \\ \partial_1 \sigma_{12} + d(\omega, \varsigma(x_2))\, \partial_2 \sigma_{22} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{pml}(u) = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \dfrac{1}{2}(\partial_1 u_2 + d(\omega, \varsigma(x_2))\, \partial_2 u_1) \\ \dfrac{1}{2}(\partial_1 u_2 + d(\omega, \varsigma(x_2))\, \partial_2 u_1) & d(\omega, \varsigma(x_2))\, \partial_2 u_2 \end{pmatrix}.$$

6.2.5 Some instructive numerical simulations

In this section, we will show some simulations with four different homogeneous media, one is isotropic and the three others are orthotropic. The computational domain is a square 25m $\times$ 25m surrounded with PMLs of lenght $\delta = 5$m so that the total computational domain is 35m $\times$ 35m (see Fig. 6.3 - left). The numerical method used to solve the elastodynamic equations is based on a first-order

original mixed formulation of the equations, described in [21], where the unknowns are the displacement searched in H^1 and some new vectorial unknowns searched in $(L^2)^2$. Since we are not interested here in the effects of the numerical scheme, but in the properties of the continuous model, we have also checked these results with another method, developed in [11, 12] and still based on the velocity-stress formulation, but with v in L^2 and σ in $H(\mathrm{div})$.

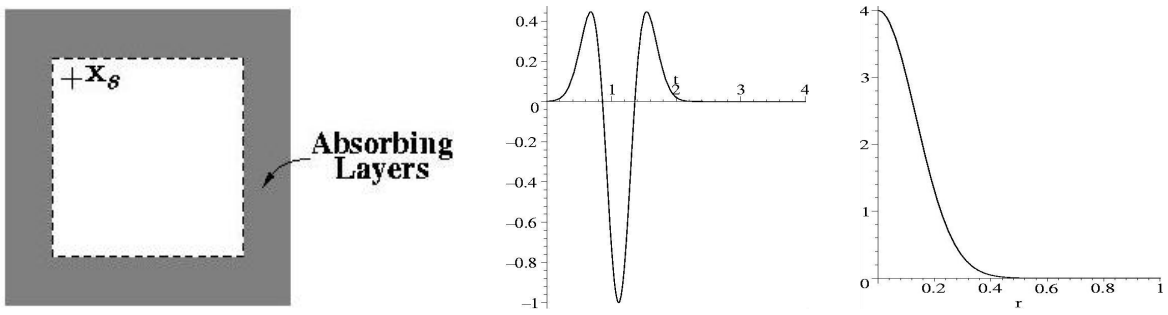


FIG. 6.3: Computational domain (left) - Function $h(t)$ (center) - Function $g(r)$ (right)

In all the simulations, the initial data are taken equal to zero and the source is introduced as a right hand side in equation (3) :

$$f(x,t) = h(t)\, g(|x - x_S|)\, \vec{e}_1 \tag{6.29}$$

where $\vec{e}_1$ denotes the first vector of the canonical basis of $\mathbb{R}^2$ and h is the so-called second order Ricker signal with central frequency equal to $f_0 = 0.9$ Hz, namely (see also Fig 6.3) :

$$h(t) = \left[2\pi^2 (f_0 t - 1)^2 - 1\right]\, e^{-\pi^2 (f_0 t - 1)^2}. \tag{6.30}$$

and the function $g(r)$ is the Gaussian function defined by (see Fig 6.3) :

$$g(r) = \frac{e^{-7(r/r_0)^2}}{r_0^2} \tag{6.31}$$

which is concentrated in a small disk of radius $r_0 = 0.5$m. In our experiments, the source point x_S is located closed to the absorbing layer (2 meters away from each layer) (see Fig 6.3). We choose the density $\rho = 1\mathrm{Kg.m}^{-3}$ in all experiments and give the elasticity coefficients in Pa.

The damping factor is chosen as follows :

$$\zeta(x) = \frac{3c}{2\delta^3} \log(1/R) x^2 \tag{6.32}$$

where $R = 10^{-3}$ is the theoretical reflexion coefficient from the terminating reflection boundaries (see [29]) and $c = 4.5\mathrm{m.s}^{-1}$ is an upper bound of the wave velocities in all the considered materials.

We represent, for each experiment :

(a) the slowness curves and the wave fronts of the material,
(b) the distribution in space of the norm of the displacement field (snapshots) at several times.

Isotropic Medium. The first simulation is done in an isotropic medium, with Lamé's constants :

$$\lambda = 16, \quad \mu = 2. \tag{6.33}$$

The source creates both P and S waves (of respective velocities $2\sqrt{5} \simeq 4.47$ and $\sqrt{2} \simeq 1.414$) that correspond to the two successive wavefronts appearing in the snapshots of the solution. One can see that these two waves are perfectly absorbed by the absorbing layer and that, even after a long while ($t = 500$s), the solution remains equal to zero (see Fig. 6.8).

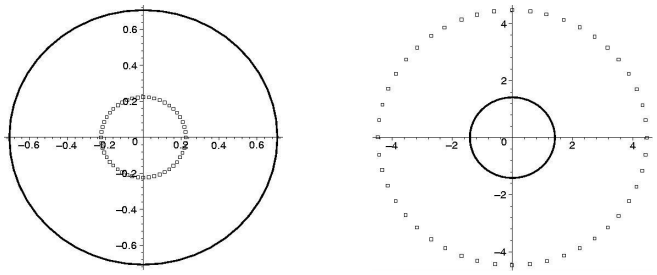


FIG. 6.4: Slowness curves and Wave fronts for the isotropic media.

Simulation in an anisotropic medium (I). In this example, the elasticity coefficients are given by :

$$c_{11} = 4, c_{22} = 20, c_{33} = 2 \text{ and } c_{12} = 3.8. \tag{6.34}$$

The slowness curves and wave fronts reprensented in Fig. 6.5 illustrate the anisotropy of the medium. Note that the sets enclosed by the slowness curves remain convex as in the isotropic case. The snapshots of the corresponding numerical experiment are given in Fig. 6.9.

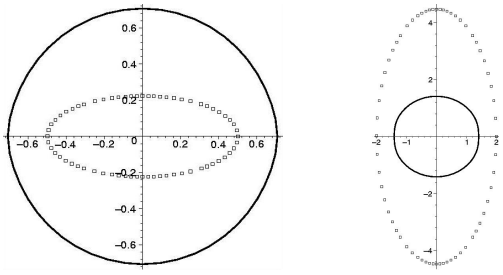


FIG. 6.5: Slowness curves and Wave fronts for the orthotropic medium (I).

They show that the PML's work pretty well. In particular, they are stable : the solution does not blow up, even after a long time.

Simulation in an anisotropic medium (II). This time, the material is characterized by its elasticity coefficients :

$$c_{11} = c_{22} = 20, \quad c_{33} = 2, \quad c_{12} = 3.8 \tag{6.35}$$

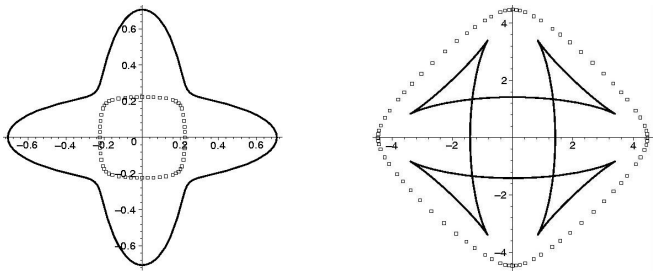


FIG. 6.6: Slowness curves and Wave front for the orthotropic medium (II).

In figure 6.6, the medium appears to be much more anisotropic than the previous one. In particular, the set enclosed by the slowness curve of the *QS* wave is no longer convex, which gives rise to triplications of the wave front. However, one can see in figure 6.10 that the PML model still works very well and does not lead to any instability.

Simulation in an anisotropic medium (III). Our last medium is characterized by the following elasticity coefficients :

$$c_{11} = 4, \quad c_{22} = 20, \quad c_{33} = 2, \quad c_{12} = 7.5 \tag{6.36}$$

Once again, this is a medium which gives rise to triplications of the QS wave front (see Fig. 6.7).

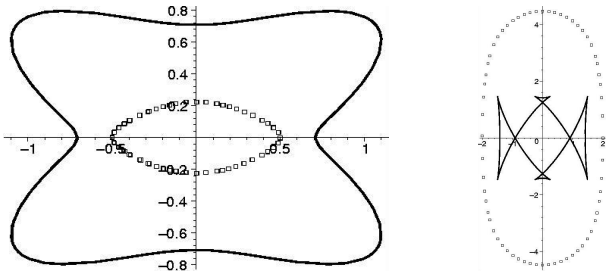


FIG. 6.7: Slowness curves and Wave front for the orthotropic media (III).

On the snapshots (see Fig. 6.11), we can see two instabilities appearing very soon in the two PML layers. These instabilities clearly occur when the lowest wave, namely the QS wave, penetrates the absorbing layer.

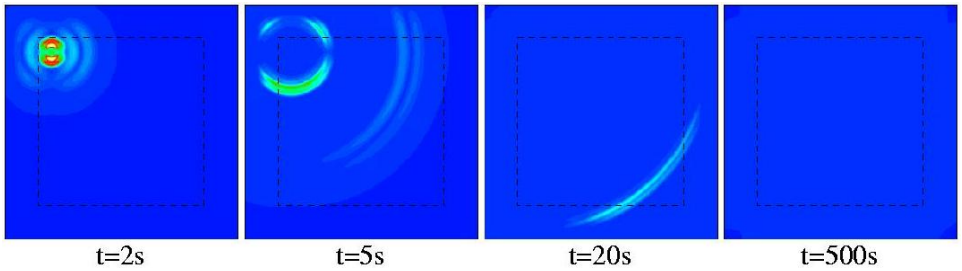


FIG. 6.8: Some snapshots at different times for the isotropic media.

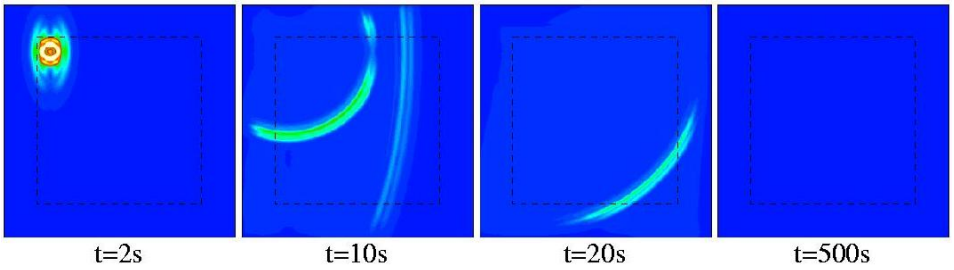


FIG. 6.9: Some snapshots at different times for the orthotropic medium (I).

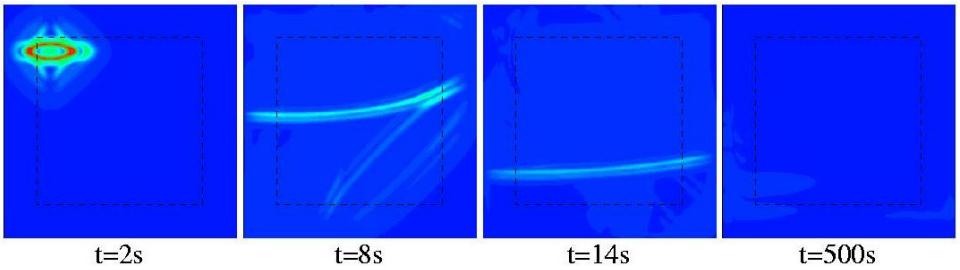


FIG. 6.10: Some snapshots at different times for the orthotropic medium (II).

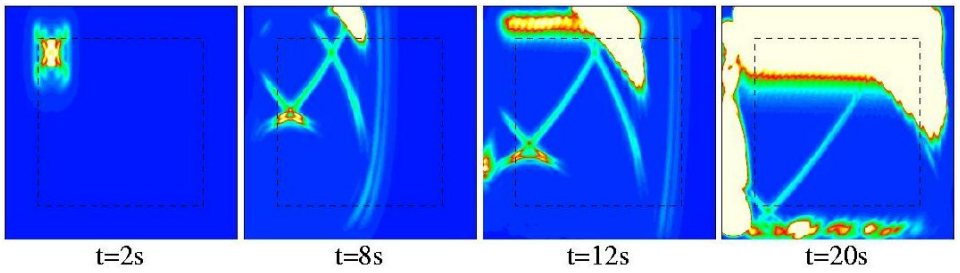


FIG. 6.11: Some snapshots at different times for the orthotropic media (III).

In conclusion, it seems that the stability of the PML model depends on the physical properties of the media. The aim of this paper is to understand this phenomenon. The explanation of the instabilities observed in the last simulation, is that this model does not satisfied a very general necessary condition of stability for the PMLs. This necessary condition has a very simple geometrical interpretation that we present in the next section.

6.3 A necessary stability condition for PML models associated to general hyperbolic system. Interpretation in terms of slowness curves.

In this section, we analyze the PML model (6.22) (or (6.25)) for a general hyperbolic system. We will make the following assumption :

Assumption (A_1). The unsplitted system (6.21) is strongly hyperbolic.

We restrict ourselves to the case where the absorption coefficient ζ is constant in space, which makes possible the use of the Fourier analysis. This is necessary step towards the analysis of the non-constant coefficient case. Moreover, there is a general theory for the link between the analysis of the constant coefficient equation and the one of variable coefficient equation. This is the so-called frozen coefficient technique (see [53]).

6.3.1 Well-posedness and stability : definition and characterization through plane wave analysis

We consider the Cauchy problem in the whole space $\mathbb{R}^2$ associated to the system :

$$\begin{cases} \partial_t u^1 + \zeta u^1 - A_1 \partial_1 u^1 - A_1 \partial_1 u^2 = 0, \\ \partial_t u^2 - A_2 \partial_2 u^1 - A_2 \partial_2 u^2 = 0, \end{cases} \tag{6.37}$$

where ζ is a strictly positive constant and we set $U = (u^1, u^2)$.

Definition 1 *We will say that the Cauchy problem (6.37) associated to the initial data U_0 is weakly (resp. strongly) well-posed if for any $U(.,0) = U_0$ given in the Sobolev space H^s, $s > 0$ (resp. $s = 0$), (6.37) admits a unique solution $U(t)$ that satisfies an estimate on the type*

$$\|U(.,t)\|_{L^2} \leq K e^{\alpha t} \|U_0\|_{H^s} \tag{6.38}$$

We will say that the problem is weakly (resp. strongly) stable if it is weakly (or strongly) well-posed and if the solution $U(t)$ satisfies an estimate on the type

$$\|U(.,t)\|_{L^2} \leq K(1+t)^s \|U_0\|_{H^s} \tag{6.39}$$

with $s > 0$ (resp. $s = 0$).

In what follows we will say that the system is *stable* if it is at least weakly stable. Roughly speaking the difference between a stable system and a well-posed system is that in the first case, exponentially growing solutions are not permitted.

It is well known that the Fourier analysis permits to relate the notions of well-posedness and stability in terms of analysis of plane waves, i.e. solutions of the form

$$U(x,t) = e^{\mathrm{i}(\omega t - k.x)} D, \quad k \in \mathbb{R}^2, \quad D \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \omega \in \mathbb{C}. \tag{6.40}$$

To study such solutions it is useful to refer to the initial hyperbolic system (6.21)

$$\partial_t u - A_1 \partial_1 u - A_2 \partial_2 u = 0,$$

that admits plane wave solutions of the form

$$u(x,t) = e^{\mathrm{i}(\omega t - k.x)} d, \quad k \in \mathbb{R}^2, \quad d \in \mathbb{R}^m, \quad \omega \in \mathbb{C},$$

if and only if k and ω are related by the dispersion relation

$$F_1(\omega, k) = 0, \tag{6.41}$$

where

$$F_1(\omega, k) = \det(\omega I - k_1 A_1 - k_2 A_2), \tag{6.42}$$

is a homogeneous polynomial in ω and k of degree m.

If we consider (6.41) as an equation in ω, a consequence of the hyperbolicity of the system (6.21) (assumption (A_1)) is that the solutions of (6.41) are real :

$$\omega = \omega_j(k), \quad j = 1,...,m, \quad \text{the eigenvalues of } \mathcal{A}(k).$$

Moreover, the functions $\omega_j(k)$ are homogeneous functions of degree 1. In the following, for the sake of simplicity, we will make the assumption :

Assumption (A_2). We assume that the unsplitted system (6.21) admits :

- N_e non-zero eigenvalues of order 1, $\omega_j(k) \neq 0, \forall k \neq 0$ $j = 1,...,N_e$, ($\omega_j(k) \neq \omega_i(k)$ for $i \neq j$)
- the zero eigenvalue of order $\ell_0 = m - N_e$, $\omega_j = 0$, $j = N_e + 1,...,m$

The mode zero is a non propagating mode, and we will call the other modes the *physical modes*. This leads to the following expression

$$F_1(\omega,k) = \omega^{\ell_0} \prod_{j=1}^{N_e} (\omega - \omega_j(k)) \tag{6.43}$$

Remark 2 *One of the main limitations in the assumption A_2 is that we assume that the physical modes correspond to simple eigenvalues. As a consequence, the results of this section are not directly applicable to 3D Maxwell's equations or isotropic elastodynamic equations. However, we think that this assumption only helps to simplify the technique of the proof (see theorem 1) and conjecture that the well-posedness result remains true in the case of multiple non-zero eigenvalues.*

Remark 3 *For the elastic case, in 2D, we have seen in section 6.2.2 that there were five modes :* 0 *of order $\ell_0 = 1$ and the physical modes $\pm\omega_{QP}(k)$ and $\pm\omega_{QS}(k)$, corresponding to two curves constituting the slowness curves. In most cases, assumption (A_2) is satisfied, ie as soon as $c_{33} \neq c_{11}$ and $c_{33} \neq c_{22}$. In these particular cases, for instance $c_{33} = c_{11}$, the two curves intersect at points correponding to $K_2 = 0$. One can then think that the solutions $\omega_{QP}(k)$ and $\omega_{QS}(k)$ are not differentiable with respect to k anymore, which is a trouble for defining the group velocity. But in fact, we then have to define the two branches in another way such that after the intersection we "jump" to the other branch (i.e. the QP branch will not correspond to the larger velocity anymore). This is illustrated with figure 6.12 : left, this is the way we defined the two branches here, and right the way we should define it. Here again we think that we could apply the same type of analysis, but with additional technical difficulties.*

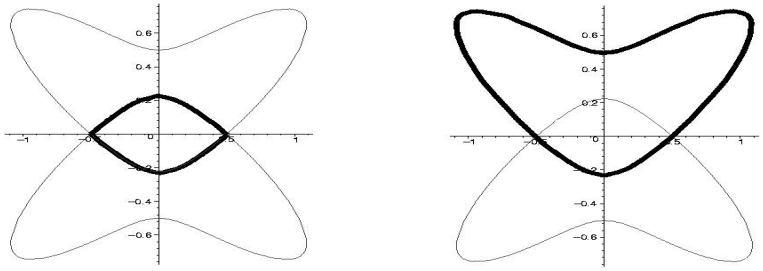


FIG. 6.12: Slowness diagrams of a material of coefficients $c_{11} = c_{33} = 4$, $c_{22} = 20$, $c_{12} = 7.5$. Left : in bold, the QP branch as it has been defined in (6.16). Right : in bold, the new definition of the "QP" branch.

As a consequence of assumption (A_2), the physical modes $\omega(k) = \omega_j(k), j = 1, N_e$, are differentiable with respect to k, and, as for elastic waves, one can define for each mode, the phase velocity

$$\mathcal{V}(K) = \frac{\omega(k)}{|k|} \equiv \omega(K), \tag{6.44}$$

where $K = k/|k|$, the slowness vector

$$\vec{\mathcal{S}}(K) = \frac{K}{\mathcal{V}(K)} = \frac{k}{\omega(k)}, \tag{6.45}$$

and the group velocity

$$V_g(k) = V_g(K) = \nabla_k \omega\,(k) = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial \omega}(\omega(k),k)\right)^{-1} \nabla_k F_1(\omega(k),k) \tag{6.46}$$

which is orthogonal to the slowness curves, defined as in section 2. We shall denote by $(V_g^1(k), V_g^2(k))$ the two components of $V_g(k)$ and by $(S_1(k), S_2(k))$ the ones of $\vec{\mathcal{S}}(K)$.

Going back to the Fourier analysis of the PML system (6.37), we see that (6.37) has solutions of the form (6.40) if and only if ω and k are related by the perturbed dispersion relation :

$$F_{pml}(\omega, k, \varsigma) \equiv F_1(\omega(\omega - \mathrm{i}\varsigma), k_1\omega, k_2(\omega - \mathrm{i}\varsigma)) = 0 \tag{6.47}$$

This is a polynomial equation in ω of degree $2m$. Therefore the dispersion relation in the PMLs defines $2m$ modes, $\omega_j(k,\zeta)$, $j = 1, ..., 2m$, solutions of this equation. It is natural that the number of modes is the double of the one in the original problem, since we have doubled the number of unknowns by passing from (6.21) to (6.22).

We remind how the notions of well-posedness and stability are intimately related to the plane wave analysis.

Well-posedness. The system (6.37) is *strongly ill-posed* if there exists some exponentially growing modes, that is :

$$\Im m\ \omega(k,\zeta) \to -\infty, \quad \text{when } |k| \to +\infty, \tag{6.48}$$

otherwise it is at least *weakly well-posed* (see [53]).

Stability. The system (6.37) is *stable* in the sense of definition 1 if and only if

$$\forall\, k \in \mathbb{R}^m, \text{ the solutions } \omega(k,\zeta) \text{ satisfy } \Im m\ \omega(k,\zeta) \geq 0. \tag{6.49}$$

Actually if $\omega = \omega_R + \mathrm{i}\omega_I$, the plane wave solution can be written as :

$$u(x,t) = e^{-\omega_I t} e^{\mathrm{i}(\omega_R t - k.x)} D$$

The existence of solutions ω with negative imaginary parts would correspond to plane wave solutions with exponential growth in time. A *stable* system does not admit such solutions.

6.3.2 A general well-posedness result

We can show the

Theorem 1 *We make assumptions (A_1) and (A_2) for system (6.21). Then the system (6.37) is well posed.*

According to (6.48), this theorem can be proved with a high frequency analysis, which will be also useful in the following, for deriving a necessary stability condition. More precisely, to prove the well-posedeness of (6.37), we will show that $\Im m\ \omega(k,\zeta)$ is bounded for large $|k|$ and therefore that (6.48) can never happen. For this, it will be convenient to introduce :

$$\varepsilon = \frac{\zeta}{|k|}, \qquad \mathcal{V}(K,\varepsilon) = \frac{\omega(k,\zeta)}{|k|} \tag{6.50}$$

and to rewrite the dispersion relation (6.47) as :

$$F_{pml}(\mathcal{V},K,\varepsilon) \equiv F_1(\mathcal{V}(\mathcal{V}-i\varepsilon),K_1\mathcal{V},K_2(\mathcal{V}-i\varepsilon)) = 0, \tag{6.51}$$

where $K = k/|k|$ is the unit wave vector. We then have the :

Lemma 1 *For every given K, the equation (6.51) admits* $2m$ *complex solutions that we denote by* $(\mathcal{V}_j(K,\varepsilon))_{j=1,...,2m}$*, that can be numbered in such a way that they are continuous functions with respect to K and* ε*. Moreover,* $(\mathcal{V}_j(K,\varepsilon))$ *is differentiable in the neighborhood of any point* (K_0,ε_0) *where* $(\mathcal{V}_j(K_0,\varepsilon_0))$ *is a simple root of (6.51).*

▷ PROOF : Using the expression (6.43) of F_1, it is easy to see that the equation is a polynomial equation in the variable $\mathcal{V}$ of degree $2m$ and that the coefficient of order $2m$ in the polynomial function $F_{pml}(\mathcal{V},K,\varepsilon)$, equal to a power of i, does not vanish. Therefore the solutions $\mathcal{V}_j(K,\varepsilon)$ are continuous functions with respect to ε. The last part of the lemma results from the implicit function theorem. ◁

Note that looking at small ε is equivalent to looking at small ζ (small absorption) or large $|k|$ (high frequencies). The well-posedness is therefore related to the behaviour of the solutions of the dispersion relation for small ε, so we first consider the limit case $\varepsilon = 0$.

The unperturbed equation. Equation (6.51) is a perturbation of the equation obtained for $\varepsilon = 0$, which can be written as (F_1 is homogeneous of degree m)

$$F_{pml}(\mathcal{V},K,0) = \mathcal{V}^m F_1(\mathcal{V},K) = 0 \tag{6.52}$$

The solutions $\mathcal{V}$ of this equation are

– the N_e physical modes (of order 1)

$$\mathcal{V}_j(K,0) = \omega_j(K) = \omega_j(k)/|k|, \quad j = 1,...,N_e \tag{6.53}$$

– one mode of order $p \equiv m + \ell_0$,

$$\mathcal{V}_j(K,0) = 0, \quad j = N_e+1,...,2m \tag{6.54}$$

▷ PROOF OF THEOREM 1 : . We examine the solutions $\mathcal{V}_j(K,\varepsilon)$, $j = 1,...,2m$, of (6.51) in the vicinity of the unperturbed modes defined in (6.53) and (6.54).

– *In the vicinity of a single root (physical mode).* It is very easy to see that the ill-posedness can not come from a single root, thanks to the implicit theorem. Actually, let $\mathcal{V}(K,0) \neq 0$ be a single root, then

$$\frac{\partial F_{pml}}{\partial \mathcal{V}}(\mathcal{V}(K,0),K,0) \neq 0$$

and the implicit theorem can be applied in the vicinity of $(\mathcal{V}(K,0),K,0)$. Therefore equation (6.51) defines a function $\mathcal{V}(K,\varepsilon)$ which is C^1 with respect to ε and thus which can be expanded as

$$\mathcal{V}(K,\varepsilon) = \mathcal{V}(K,0) + \varepsilon\alpha(K) + O(\varepsilon^2) \tag{6.55}$$

This shows that

$$\omega(k,\zeta) = \omega(k) + \alpha(K)\ \zeta + O(1/|k|). \tag{6.56}$$

Thus $\Im m\ \omega(k,\sigma) = \zeta\ \Im m\ \alpha(K)$ is bounded when $|k| \to +\infty$.

– *In the vicinity of the multiple mode $\mathcal{V}_j(K,0) = 0$ of order $p = m + \ell_0$.* Now let $\mathcal{V}(K,0) = 0$ be the root of order p. Since the functions $\mathcal{V}_j(K,\varepsilon)$, $j = N_e + 1, ..., 2m$, are continuous in ε and must vanish for $\varepsilon = 0$, they admit a decomposition as a Puiseux series on the form ([46]) :

$$\mathcal{V}_j(K,\varepsilon) = \alpha(K)\varepsilon^r + o(\varepsilon^r), \quad \text{with} \quad r \in \mathbb{Q}_\star^+ \tag{6.57}$$

If $r \geq 1$, it is clear from (6.50) that the corresponding $\omega_j(k,\zeta)$ have a bounded imaginary part. Let us assume that there exists a solution such that $0 < r < 1$ and $\alpha(K) \not\equiv 0$. Then, plugging (6.57) into the dispersion relation (6.51) yields

$$F_1(\alpha(K)^2\varepsilon^{2r} + o(\varepsilon^{2r}), K_1\alpha(K)\varepsilon^r + o(\varepsilon^r), K_2\alpha(K)\varepsilon^r + o(\varepsilon^r)) = 0$$

We now use the form of F_1 given by (6.43) that we rewrite as

$$F_1(\omega,k) = \omega^{\ell_0}\widetilde{F}_1(\omega,k)$$

with $\widetilde{F}_1(0,k) \not\equiv 0$, together with the homogeneity of F_1, to obtain :

$$(\alpha(K)\varepsilon^r)^{m+\ell_0}\widetilde{F}_1(\alpha(K)o(\varepsilon^r), K_1 + o(1), K_2 + o(1)) = 0$$

$$\Longrightarrow (\alpha(K)\varepsilon^r)^{m+\ell_0}(\widetilde{F}_1(0,K_1,K_2) + o(1)) = 0$$

which implies

$$\alpha(K)^{m+\ell_0}\widetilde{F}_1(0,K_1,K_2) = 0$$

Since $\widetilde{F}_1(0,K_1,K_2)$ can not vanish for all K, this implies that $\alpha(K) = 0$ which is in contradiction with (6.57).

◁

6.3.3 A high frequency stability analysis

For the general PML model, the stability condition (6.49) requires in particular that the high frequency solutions, i.e. $\omega(k,\zeta)$ for large $|k|$, have a positive imaginary part. This is what we call a high frequency necessary condition of stability :

Definition 2 *The system (6.37) is said to be stable at high frequency if and only if, there exists* $\varepsilon_0 > 0$ *such that :*

$$\forall\, \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \forall\, K \,/\, |K| = 1, \quad \Im m\ \mathcal{V}_j(K,\varepsilon) \geq 0, \quad j = 1,...,2m. \tag{6.58}$$

We obtain in particular a necessary stability condition by writing that (6.58) holds for all physical modes ($j = 1,...,N_e$). This allows us to prove the :

Theorem 2 *Let us suppose that system (6.21) satisfies assumptions* (A_1) *and* (A_2)*. A necessary condition of stability (high frequency stability) of the PML model in the* x_1 *direction (6.37) is that, for all physical modes of the unsplit system (6.21) :*

$$\forall K = (K_1, K_2) \,/\, |K| = 1, \quad S_1(K) \cdot (V_g^1)_1 \geq 0. \tag{6.59}$$

▷ PROOF : We have seen in the proof of theorem 1 that in the vicinity of the physical modes, the function $\varepsilon \to \mathcal{V}(K,\varepsilon) = \mathcal{V}_j(K,\varepsilon)$ has an expansion of the form (6.55) (or equivalently (6.56)). Using the homogeneity of function F_1 and the fact that $\mathcal{V}(K,\varepsilon)$ can not coincid with $i\varepsilon$, since we consider the physical modes, the dispersion relation (6.51) can be rewritten as :

$$F_1(\mathcal{V}(K,\varepsilon), K_1(1 - i\frac{\varepsilon}{\mathcal{V}(K,\varepsilon)})^{-1}, K_2) = 0.$$

Expanding this equality in powers of ε, using (6.55), we get

$$F_1(\mathcal{V}(K),K) + \varepsilon\, \alpha(K)\, \frac{\partial F_1}{\partial \omega}(\mathcal{V}(K),K) + i\varepsilon\, \frac{K_1}{\mathcal{V}(K)} \frac{\partial F_1}{\partial K_1}(\mathcal{V}(K),K) + O(\varepsilon^2) = 0,$$

By definition of $\mathcal{V}(K)$ one has $F_1(\mathcal{V}(K),K) = 0$. Then, writing that the term in ε is equal to 0, we obtain

$$\alpha(K) = -\,i\, \left(\frac{\partial F_1}{\partial \omega}(\mathcal{V}(K),K)\right)^{-1} \left(\frac{K_1}{\mathcal{V}(K)} \frac{\partial F_1}{\partial K_1}(\mathcal{V}(K),K)\right),$$

where we have used assumption (A_2) which says that $\mathcal{V}(K) \neq 0$ and is a single eigenvalue, which implies that

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega}(\mathcal{V}(K),K) \neq 0.$$

Using formulas (6.46) and (6.45), we get :

$$\alpha(K) = i\, S_1(K)\, V_g^1(K).$$

It is then easy to conclude since (6.55) shows that for small ε, the sign of $\Im m\ \mathcal{V}(K,\varepsilon)$ is given by the sign of $\Im m\ \alpha(K)$. A standard compactness argument is used to prove the existence of ε_0. ◁

Geometrical interpretation. The condition (6.59) expresses the fact that, along the slowness curves, the slowness vector and the group velocity are oriented in the same way with respect to the Ox_2 axis.

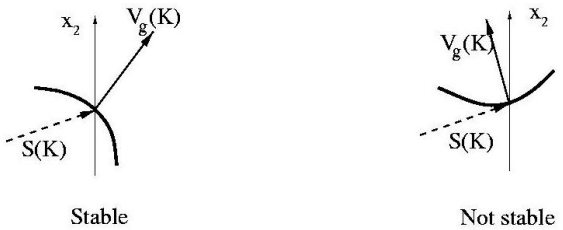


FIG. 6.13: Two different configurations. Left : the slowness vector $\vec{S}$ and the group velocity V_g are oriented in the same way with respect to the Ox_2 axis. Right : $\vec{S}$ and V_g are not oriented in in the same way with respect to the Ox_2 axis.

Obviously, when considering a PML model in the x_2 direction (i.e. parallel to the x_1 axis), one has the

Corollary 1 *A necessary condition of stability (high frequency stability) of the PML model in the x_2 direction is that, for all physical modes of the unperturbed system (6.21) :*

$$\forall K = (K_1, K_2) \ / \ |K| = 1, \quad S_2(K) \cdot V_g^2(K) \geq 0. \tag{6.60}$$

This result shows the importance of the role played by the group velocity in the stability analysis of PML models. This role has been first pointed out by Trefethen in [71] (see also [72, 73]) for the stability analysis of finite difference schemes for linear hyperbolic systems and then by Higdon [42] for the well-posedness analysis of initial boundary value problems for linear hyperbolic systems. Concerning the stability analysis for PML models, we would like to mention [67] where the authors have related the instabilities observed with the PMLs for the linearized Euler equations to the existence of waves for which the group velocity and the phase velocity travel in opposite directions (see also Section 6.3.4.3).

6.3.4 Application of the geometrical stability criterion

6.3.4.1 Explanation of the observations of section 6.2.5 via the analysis of slowness diagrams.

The geometrical stability condition (6.59) is clearly satisfied in an isotropic medium. In this case, the slowness curves are composed of two circles and obviously the vectors $\vec{S}$ and V_g are parallel. More generally, it is easy to see that (6.59) will be satisfied as soon as the slowness curves are the boundary of convex sets, which is the case for the orthotropic material (I) considered in section 6.2.5.

Concerning the two orthotropic materials (II) and (III) of section 6.2.5, we have represented in figure 6.14 their slowness diagrams. The first remark is that for all the slowness curves associated to the *QP* waves (i.e. the inside curve), the geometrical condition is satisfied, since these curves are all convex. This is a general phenomenon that we will prove in the next section (lemma 3). Therefore, the violation of the high frequency stability condition can only come from the *QS* waves.

- For material (II), one can see that for all K, one has $V_1(K)S_1(K) \geq 0$ and $V_2(K)S_2(K) \geq 0$, therefore the high frequency stability condition is satisfied for a layer in the x_1 direction as well as for a layer in the x_2 direction. In this case, we did not observe any instability in the numerical results.
- For material (III) : there are some vectors K (whose extremities describe the thickest line on the figure) for which $V_1(K)S_1(K) < 0$ and there are some other vectors K (whose extremities describe the line of medium thickness on the figure) for which $V_2(K)S_2(K) < 0$ which means that the geometrical condition is not satisfied neither in x_1 nor in x_2. This also confirms the numerical results, since we observed instabilities in both layers.

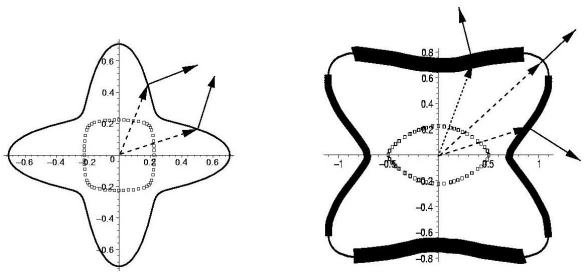


FIG. 6.14: Slowness diagrams. Left : material (II) - Right : material (III).

6.3.4.2 Simulation in a whole absorbing domain

In this section, we make some simulations in a situation closed to the theoretical one : we consider a domain entirely composed by an absorbing layer, i.e. in which we solve the PML system with constant damping factor. Our aim is to illustrate the exponential blow up of the solution in the case of unstable medium.

We consider two materials : (II) and (III) (defined in section 6.2.5). According to the geometrical criterion, the first medium is stable whereas the second one is unstable for high frequencies in the vicinity of the physical eigenvalues. So, for each material, we are interested in two experiments : we consider a 35m $\times$ 35m computational domain, in which we solve the PML model associated to the considered material respectively in the x_1 direction (6.22) for the first experiment, and in the x_2 direction (6.25) for the second one, with reflecting boundaries all around the domain. The pulse is defined by (6.29)-(6.31) but the source point is now located at the center of the computational domain. In the two cases, the absorbing coefficients are constants equal to 2.6.

Experiments in material (II). We first consider the material (II), whose elastic coefficients are defined in (6.35). The experiment with absorbing coefficient in the x_1 direction gives the snapshots in figure 6.15. One can observe that the part of the energy propagating in the x_1 direction is well absorbed. After a while, the wave can be considered as a plane wave only propagating in the x_2 direction. This explains then the low decay of the energy. No blow up is noticed.

The same remarks can be made in the second experiment (figure 6.16) : the PML works pretty well for the part of the energy propagating in the x_2 direction and, after a while, the wave can be considered as a plane wave only propagating in the x_1 direction. Again, no blow up is noticed.

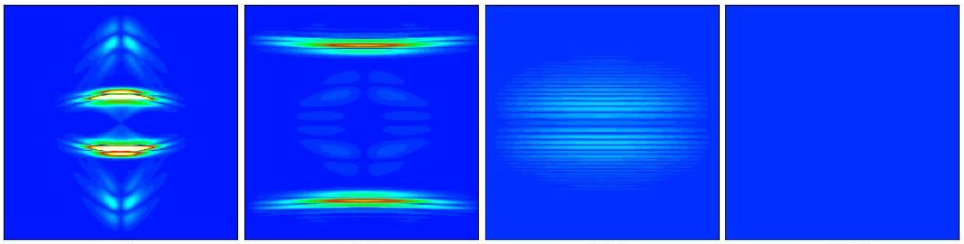


FIG. 6.15: Some snapshots at different times for the orthotropic medium (II) with only x_1 PML.

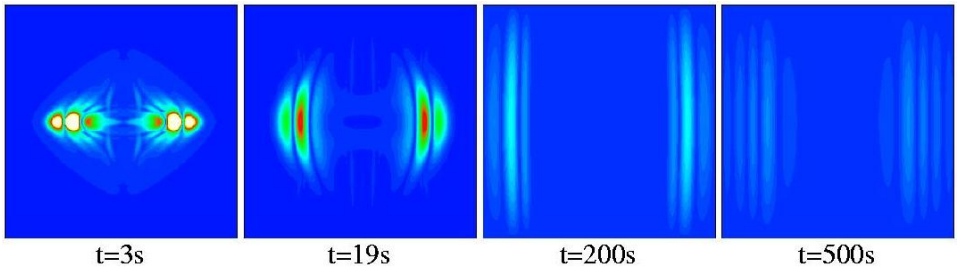


FIG. 6.16: Some snapshots at different times for the orthotropic medium (II) with only x_2 PML.

Experiments in material (III). The elastic coefficients are defined in (6.36). The first simulation, with absorbing factor in the x_1 direction, gives us the snapshots in figure 6.17. We observe that the solution blows up before reaching the external Dirichlet boundary.
We now represent the L^2 norm of the displacement field as a function of time in cartesian and semi-log axis (see Fig. 6.19). One observes that, for $t > 15$s, the norm fits with the exponential function $e^{0.45t}$. We have checked that the solution we compute is stable with respect to mesh refinement which confirms the fact that the instability is due to the continuous problem and not to the discrete scheme.

The second simulation, with absorbing factor in the x_2 direction, gives the snapshots in figure 6.18. In this case, the increasing of the solution is even faster than in the previous one, which is not surprising since the curvature of the part of the S slowness curve which gives rise to instabilities for a PML in x_2 is even stronger than the one in x_1.
Again if we represent the L^2 norm of the displacement field as a function of time in cartesian and semi-log axis (see Fig. 6.20), we observe that for $t > 15$s, the norm fits with the exponential function $e^{0.65t}$. Note that the slope here (0.65) is larger than in the x_1 case (0.45) which confirms our previous remark.

Remark 4 *In section 6.3, we have established a necessary condition of stability and bring out a coefficient called* α *which corresponds to the exponential growth of the norm of the displacement field for high frequencies, in the vicinity of the physical eigenvalues. The simulations are not done exactly in the same framework than the theoretical one. Actually the source does not generate a plane wave with a given frequency, but a superposition of plane waves of a large range of frequencies. Therefore, the exponential growth is probably not produced only by the "high frequencies", which explains why the theoretical coefficient* α *does not fit the numerical observed coefficient in the exponential.*

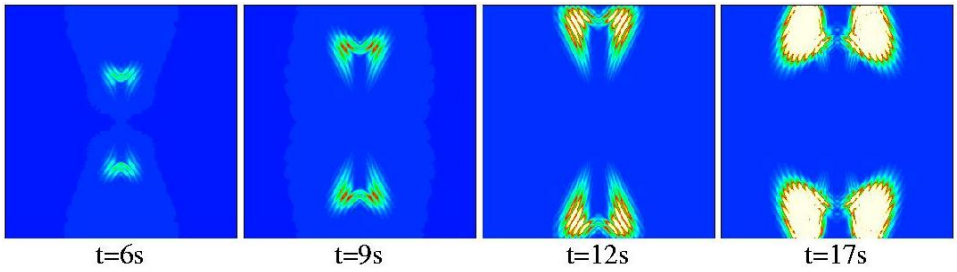


FIG. 6.17: Some snapshots at different times for the orthotropic medium (III) with only x_1 PML.

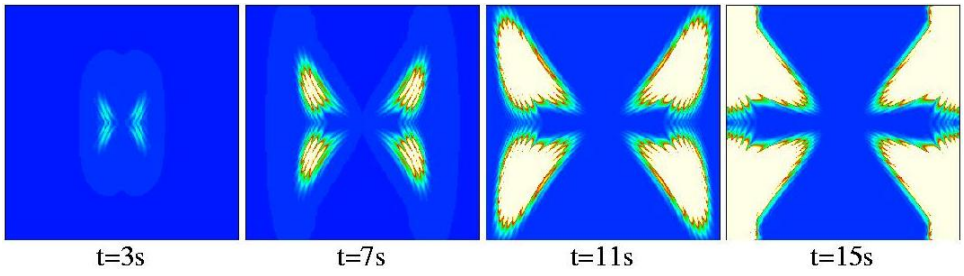


FIG. 6.18: Some snapshots at different times for the orthotropic medium (III) with only x_2 PML.

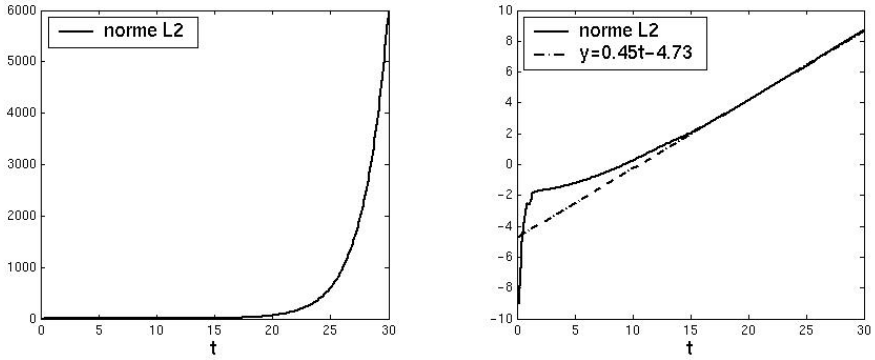


FIG. 6.19: Norm of the displacement field (left) and logarithm of the norm (right) for the orthotropic medium (III) with only x_1 PML.

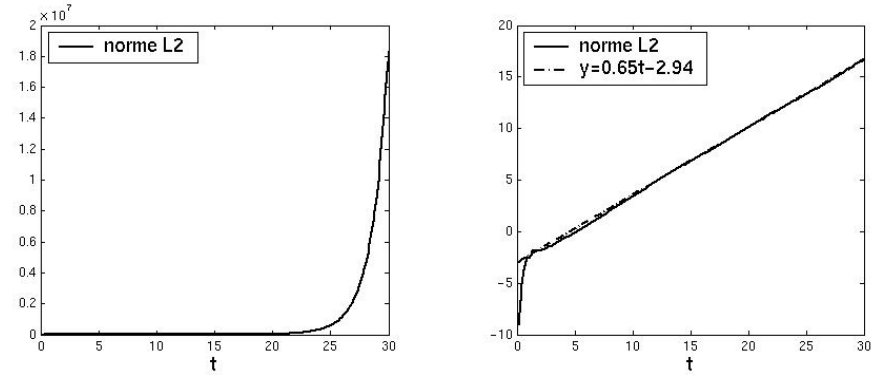


FIG. 6.20: Norm of the displacement field (left) and logarithm of the norm (right) for the orthotropic medium (III) with only x_2 PML.

6.3.4.3 Application to other mathematical models

In this section, we show how our geometrical criterion can be applied to show the instability of the PML model applied to other wave phenomena.

The PML model for anisotropic electromagnetic waves.

Anisotropic dielectric media are characterized by the fact that the electric permittivity ε is a tensor which is not necessarily proportional to the identity. In 2D, the propagation of electromagnetic waves in such a medium can be describes through the solution $u(x,t)$ of an anisotropic wave equation of the form :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div}\,(A\nabla u) = 0$$

where A is a 2×2 symmetric positive definite matrix :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a>0, \quad c>0, \quad a\,c - b^2 > 0.$$

It appears that the PML model associated to this equation is unstable as soon as the eigenvectors of the matrix A are not parallel to the coordinate axes, i.e. as soon as $b \neq 0$. Indeed, the dispersion relation can be written :

$$\omega^2 = Ak \cdot k, \tag{6.61}$$

from which one deduces that the corresponding slowness diagramm is an ellipse whose axes are not parallel to the x_1 and x_2 axes. Figure 6.21 illustrates the fact that the geometrical criterion (6.59) is not satisfied (this is moreover true for both x_1 and x_2 PML layers).
Figure 6.22 gives an illustration of such an instability : we consider an unbounded anisotropic domain modeled by a square surrounded by PML. A is given by :

$$a = \frac{3}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 4$$

The numerical method is quite the same as in the elastic case : we use a mixed formulation of the equation [21] and consider an explosive source at the middle of the square :

$$f(x,t) = h(t)\ g(|x - x_S|)$$

where g and h have already been defined in section 6.2.5. The central frequency is equal to 1 Hz.

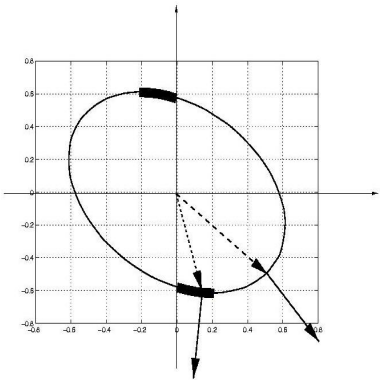


FIG. 6.21: The slowness curve for the anisotropic wave equation.

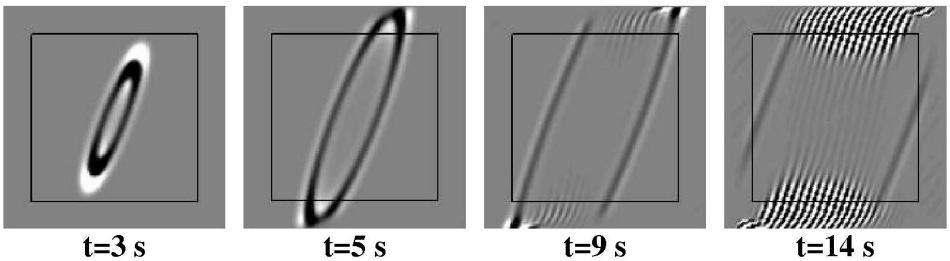


FIG. 6.22: Instability in the anisotropic acoustic case ($a = \frac{3}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 4$).

The linearized Euler equations.

We consider a fluid in which the sound speed is equal to 1 and look at the particular case of a uniform subsonic flow in the direction x_1 with Mach number $0 \leq M < 1$. The linearisation of Euler equations in the neighborhood of such a flow leads to the following advective wave equation which governs the acoustic propagation in such a situation (p denotes the pressure and $v = (v_1, v_2)$ is the velocity field) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + M\dfrac{\partial p}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + M\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} + M\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{6.62}$$

The high frequency geometrical criterium (6.59) allows us to identify a well known result, namely the instability of the PMLs in the x_1 direction (e.g., [44, 41, 67]). Indeed, the dispersion relation of (6.62)

$$(\omega + Mk_1)\left((\omega + Mk_1)^2 - k_1^2 - k_2^2\right) = 0, \tag{6.63}$$

defines one slowness curve which is an ellipse with axes parallel to the coordinates axes but not centered at the origin : the center is $(M/(1-M^2), 0)$. As a consequence, one can see in figure 6.23 that there are some vectors K (corresponding to the part of the curve of medium thickness) for which $S_1(K)V_1(K) < 0$. Let us mention [67] in which the authors have also related the instabilities to the presence of these waves and [2, 35, 9, 31] that propose some solutions to stabilize the PMLs.

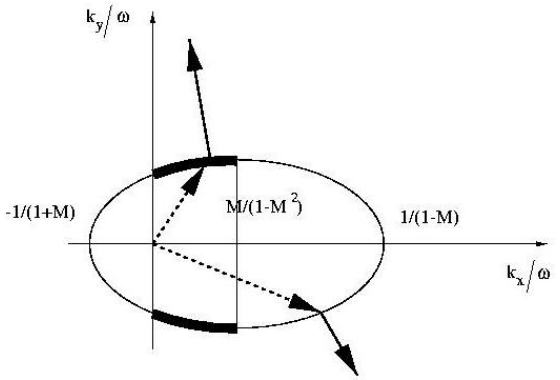


FIG. 6.23: The slowness curve for system (6.62).

Remark 5 *One can however check that the necessary condition for the stability of the PMLs in the x_2 direction is satisfied. The complete calculations shows that the corresponding system is stable.*

6.3.5 Other instability phenomena via numerical simulations

In this section, we present two numerical simulations that seem to indicate that the necessary stability condition (6.59) is not sufficient for the elastodynamics system. We denote by (IV) and (V) these experiments which are done in the two following materials :

$$\begin{array}{lllll} \text{Material (IV)} & c_{11} = 10, & c_{22} = 20, & c_{33} = 6, & c_{12} = 2.5. \\ \text{Material (V)} & c_{11} = 30, & c_{22} = 6, & c_{33} = 1.5, & c_{12} = 9.9. \end{array}$$

In figure 6.24 and 6.25, we represent the slowness diagrams (left) and the wave fronts (right). It is clear that the high frequency conditions (6.59) and (6.60) are satisfied for both x_1 and x_2 layers since the slowness curves are convex.

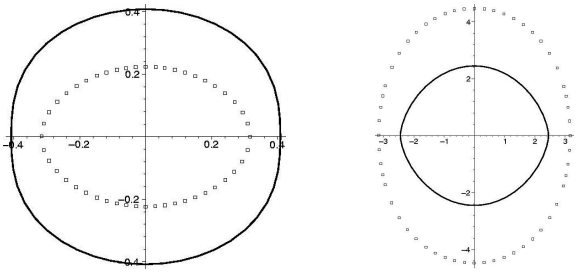


FIG. 6.24: Slowness curves and Wave fronts in the medium (IV).

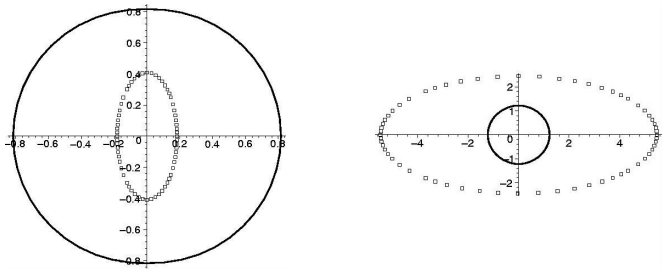


FIG. 6.25: Slowness curves and Wave fronts in the medium (V).

We consider the same experiment as in section 6.3.4.2 : a 35m $\times$ 35m computational domain, in which we solve the PML model in the x_1 direction for both materials (IV) and (V), with a constant damping coefficient equal to 2.6. The pulse is defined by (6.29)-(6.31) and the source point is located at the center of the computational domain.

The snapshots of the experiment (IV) are given in figure 6.26. At the beginning the x_1-PML absorbs very well the waves. But after a long while, an instability appears. If we represent the L^2 norm of the displacement field with respect to time in cartesian and semi-log axis (see Fig. 6.27), we observe that for $t > 150$s, the norm fits with the exponential function $e^{0.04t}$.

For the second experiment, (V), the snapshots are given in figure 6.28. At the beginning, the energy decays, but after 80s an instability also appears. We then represent the L^2 norm of the displacement field with respect to time in cartesian and semi-log axis (see Fig. 6.29). For $t > 80$s, the norm fits with the exponential function $e^{0.07t}$.

These kind of instabilities are only developing after a long time. We can check that the exponential growth rates observed in section 6.3.4.2 for geometrical instabilities ($e^{0.45t}$ for x_1-PML and $e^{0.65t}$ for x_2-PML) are much more important than the growth rates observed in experiments (IV) ($e^{0.04t}$) and (V) ($e^{0.07t}$).

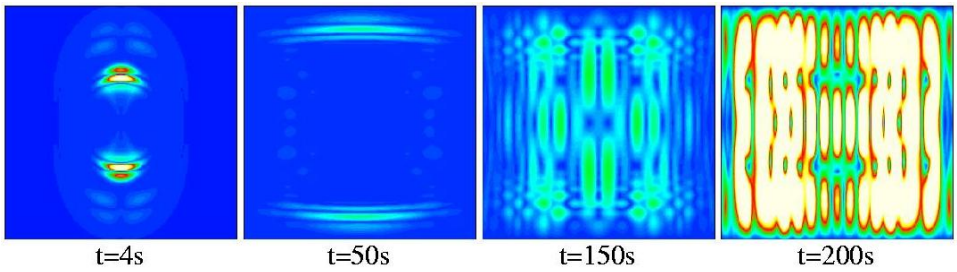


FIG. 6.26: Experiment (IV) : some snapshots at different times for the orthotropic medium (IV) with only x_1 PML.

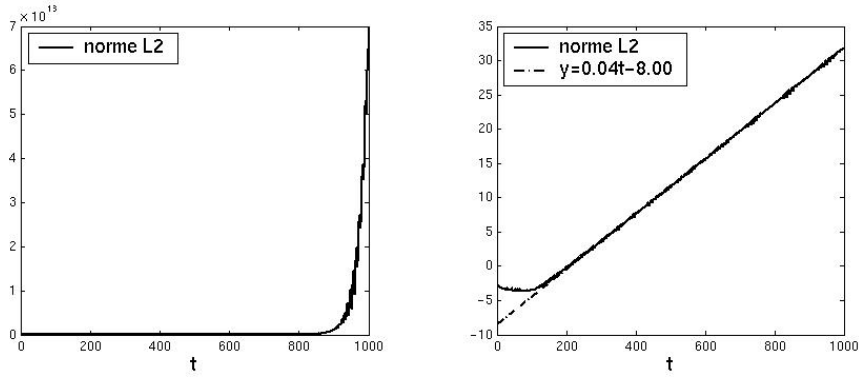


FIG. 6.27: Norm of the displacement field (left) and logarithm of the norm (right) for the orthotropic medium (IV) with only x_1 PML.

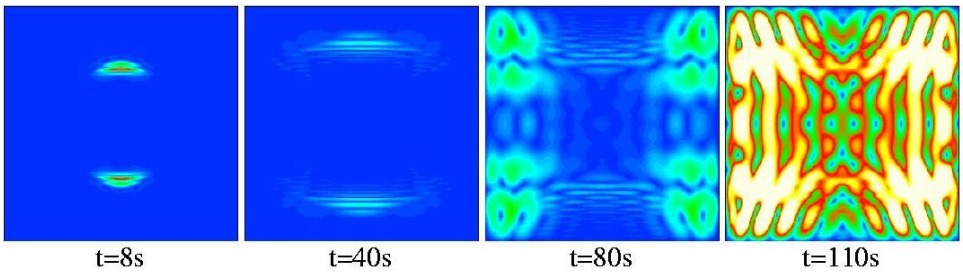


FIG. 6.28: Experiment (V) : some snapshots at different times for the orthotropic medium (V) with only x_1 PML.

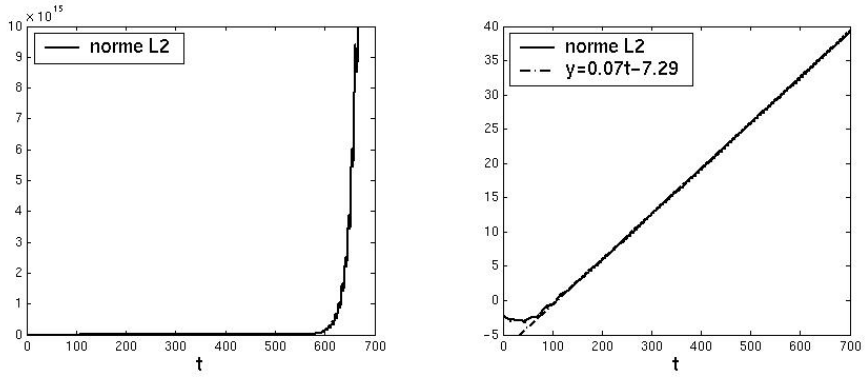


FIG. 6.29: Norm of the displacement field (left) and logarithm of the norm (right) for the orthotropic medium (V) with only x_1 PML.

This suggests additional analysis. We will establish in the next section :

- another necessary stability condition (Lemma 4 and Theorem 4),
- a sufficient stability condition (Theorems 5 and 6).

6.4 Stability analysis for the orthotropic elastic model

We can now go back to the elastodynamic problem in 2D (6.1) and we consider the PML model in the whole space with a constant damping coefficient $\varsigma > 0$. In this case $m = 5$ and the function F_{pml} appearing in the dispersion relation (6.47) can be rewritten, using (6.20), as :

$$\begin{aligned} F_{pml}(\omega,k,\zeta) &= \omega(\omega-i\zeta)\ \det\left(\ \Gamma(\omega k_1,(\omega-i\zeta)k_2)-\rho\,\omega^2(\omega-i\zeta)^2 I\ \right) \\ &\equiv \omega(\omega-i\zeta)\ \widetilde{F}_{pml}(\omega,k,\zeta) \end{aligned} \tag{6.64}$$

Obviously the two modes $\omega = 0$ and $\omega = i\zeta$ cannot give rise to any instability and in the following we will only concentrate on the eight modes associated to $\widetilde{F}_{pml}$. In section 6.4.1, we will show how the high frequency necessary stability condition (6.59) (coming from the high frequency analysis in the vicinity of the four physical modes) can be expressed in terms of inequalities on the elasticity coefficients. In section 6.4.2, we establish a second high frequency necessary stability condition, which comes from the analysis of the solutions in the vicinity of the multiple mode 0 of order 4.
The high frequency stability condition means that, for large k, the solutions $\omega(k,\zeta)$ are in the good side of the complex plane (i.e. with a positive imaginary part), but there is no guaranty that they stay in the good side for every frequencies. In section 6.4.3, we obtain a condition which implies that the solutions never cross the real axis. Using a continuity argument, this allows to conclude that, under this condition, if the solutions are in the good side of the complex plane at high frequency, they necessarily stay in the good side for all frequencies. In this case, we get a sufficient stability condition. As in section 6.3, we introduce the parameter $\varepsilon = \zeta/|k|$ and for convenience, we shall adopt a new notation by introducing the angle $\theta \in [-\pi,\pi[$ such that

$$K = \frac{k}{|k|} = (\cos\theta,\sin\theta)\,.$$

Therefore, if we set :

$$(\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon) = \mathcal{V}_j(K,\varepsilon), \quad j = 1,...,8,$$

the functions $(\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon)$ are the 8 branches of solutions of the dispersion relation, considered as an equation in the phase velocity $\mathcal{V}$ defined in (6.11) :

$$\widetilde{F}_{pml}(\mathcal{V},\theta,\varepsilon) \equiv \widetilde{F}_{pml}(\mathcal{V},K,\varepsilon) = 0, \tag{6.65}$$

where $\widetilde{F}_{pml}$ has been defined in (6.64). We shall assume that the functions $(\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon)$ are numbered in such a way that

- $((\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon))_{j=1,2}$, the two branches issued from the physical modes QP :

$$(\mathcal{V}_\theta)_j(0) = \mathcal{V}_j(K,0) = \pm\omega_{QP}(K), \quad j = 1,2\,,$$

- $((\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon))_{j=3,4}$, the two branches issued from the physical modes QS :

$$(\mathcal{V}_\theta)_j(0) = \mathcal{V}_j(K,0) = \pm\omega_{QS}(K), \quad j = 3,4\,,$$

- $((\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon))_{j=5,..,8}$, the four branches issued from the multiple root of order 4

$$(\mathcal{V}_\theta)_j(0) = \mathcal{V}_j(K,0) = 0, \quad j = 5,...,8.$$

It is easy to see that :

$$\forall\theta \in [-\pi,\pi[, \quad \widetilde{F}_{pml}(\mathcal{V},\theta,\varepsilon) = \widetilde{F}_{pml}(\mathcal{V},-\theta,\varepsilon) = \widetilde{F}_{pml}(\mathcal{V},\pi-\theta,\varepsilon)\,. \tag{6.66}$$

As a consequence, if

$$S(\theta,\varepsilon) = \{\ (\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon),\ j = 1,...,8\ \},$$

denotes the set of solutions of (6.65), one has :

$$\forall\theta \in [-\pi,\pi[,\ \forall j = 1,...,8, \quad S(\theta,\varepsilon) = S(-\theta,\varepsilon) = S(\pi-\theta,\varepsilon) \tag{6.67}$$

which justifies in what follows to restrict ourselves to :

$$\theta \in [0,\pi/2]\,.$$

The two limit values $\theta = 0$ and $\theta = \pi/2$ do not pose any problem as shown is the following (whose proof is immediate) :

Lemma 2 *For $\theta = 0$, the solutions of (6.65) are given by :*

$$\begin{cases} (\mathcal{V}_0(\varepsilon))_{1,2} \equiv (\mathcal{V}_0(\varepsilon))^{\pm}_{QP} = \pm\sqrt{\max(c_{11},c_{33})} + i\varepsilon, \ \textit{of order}\ 1, \\ (\mathcal{V}_0(\varepsilon))_{3,4} \equiv (\mathcal{V}_0(\varepsilon))^{\pm}_{QS} = \pm\sqrt{\min(c_{11},c_{33})} + i\varepsilon, \ \textit{of order}\ 1, \\ ((\mathcal{V}_0(\varepsilon))_j)_{j=5,..,8} = 0, \ \textit{of order}\ 4. \end{cases} \tag{6.68}$$

For $\theta = \pi/2$, the solutions of (6.65) are given by :

$$\begin{cases} (\mathcal{V}_{\pi/2}(\varepsilon))_{1,2} \equiv (\mathcal{V}_{\pi/2}(\varepsilon))^{\pm}_{QP} = \pm\sqrt{\max(c_{22},c_{33})}, \ \textit{of order}\ 1, \\ (\mathcal{V}_{\pi/2}(\varepsilon))_{3,4} \equiv (\mathcal{V}_{\pi/2}(\varepsilon))^{\pm}_{QS} = \pm\sqrt{\min(c_{22},c_{33})}, \ \textit{of order}\ 1. \\ ((\mathcal{V}_{\pi/2}(\varepsilon))_j)_{j=5,..,8} = i\varepsilon, \ \textit{of order}\ 4. \end{cases} \tag{6.69}$$

In particular $\Im m(\mathcal{V}_{\pi/2}(\varepsilon))_j \geq 0$ and $\Im m(\mathcal{V}_0(\varepsilon))_j \geq 0,\ j = 1,..,8.$
It remains to consider $\theta \in]0,\pi/2[$.

6.4.1 A first high frequency necessary stability condition

We have established in Theorem 2 the high frequency necessary stability condition (6.59), which expresses the fact that, in the vicinity of the physical modes (i.e. for small ε), the branches of the solutions $((\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon))_{j=1..4}$ are in the good side of the complex plane (i.e. with a positive imaginary part). We give here an equivalent form of condition (6.59) expressed in terms of the elasticity coefficients.

Theorem 3 *The necessary condition of stability (6.59) is equivalent to :*

$$(\mathcal{C}_1) \qquad \{(c_{12}+c_{33})^2 - c_{11}(c_{22}-c_{33})\} \times \{(c_{12}+c_{33})^2 + c_{33}(c_{22}-c_{33})\} \leq 0.$$

▷ PROOF : see Appendix C.1. ◁

Theorem 3 means that, if $(\mathcal{C}_1)$ is satisfied, then one has for small ε :

$$\Im m((\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon)) \geq 0, \quad \forall \theta \in]0,\pi/2[, \quad \forall j = 1,\dots,4. \tag{6.70}$$

In the following lemma, we make the result more precize : we show that the instability can not come from the vicinity of the *QP* waves, which is in some sense a theoretical confirmation of what we have observed in the numerical experiments of section 2.

Lemma 3 *For any orthotropic material, one has the following property, for small* ε *:*

$$\Im m((\mathcal{V}_\theta)_j)(\varepsilon) \geq 0, \quad \forall \theta \in]0,\pi/2[, \quad j = 1,2. \tag{6.71}$$

▷ PROOF : see appendix C.1. ◁

6.4.2 A second high frequency necessary stability condition

We assume in this section that $\theta \in]0,\pi/2[$.

Lemma 4 *The four solutions* $(\mathcal{V}_\theta(\varepsilon))_j$, $j = 5,..,8$, *satisfy :*

$$\Im m((\mathcal{V}_\theta^1)_j) \geq 0, \quad \forall \theta \in]0,\pi/2[, \quad \forall\ j = 5,\dots,8 \tag{6.72}$$

if and only if the two following inequalities are satisfied ;

$$(\mathcal{C}_2) \qquad \begin{cases} (c_{12}+2c_{33})^2 \leq c_{11}c_{22}, & (i) \\ (c_{12}+c_{33})^2 \leq c_{11}c_{22}+c_{33}^2. & (ii) \end{cases}$$

▷ PROOF : See Appendix C.2. ◁

Theorem 3 and Lemma 4 can be regrouped as follows :

Theorem 4 *The PML model (6.28) is stable at high frequency in the sense of definition 2 if and only if conditions* $(\mathcal{C}_1)$ *and* $(\mathcal{C}_2)$ *are satisfied.*

6.4.3 A sufficient stability condition

From a geometrical point of view, proving the stability of the PML model is equivalent to show that, θ playing the role of a parameter, the curves in the complex plane described by $(\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon)$ when ε goes from 0 to $+\infty$ is located in the right side of the complex plane, namely the half-space of complex numbers with positive imaginary part. In the previous sections, we have established conditions $(\mathcal{C}_1)$ and $(\mathcal{C}_2)$ such that it is the case for the first part of the curves corresponding to small ε. In what follows, we are going to establish the conditions for which these curves never meet again the real axis, which will provide us a sufficient stability condition thanks to a continuity argument. The property which means that the curves $\varepsilon \mapsto \mathcal{V}_j(\varepsilon)$ never meet again the real axis, can be expressed as follows :

$$(P_1) \qquad \forall\, \theta \in]0,\pi/2[, \quad \forall\, j = 1,..,8, \quad (\mathcal{V}_\theta(\varepsilon))_j \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = 0.$$

Lemma 5 *The property (P_1) is realized if and only if the condition $(\mathcal{C}_2)\,(i)$ is satisfied as well as one of the two following conditions $(\mathcal{C}_3)_1$ or $(\mathcal{C}_3)_2$:*

$$(\mathcal{C}_3)_1 \qquad (c_{12}+c_{33})^2 \leq (c_{11}-c_{33})(c_{22}-c_{33}),$$

$$(\mathcal{C}_3)_2 \qquad (c_{11}+c_{33})(c_{12}+c_{33})^2 \geq (c_{11}-c_{33})(c_{11}c_{22}-c_{33}^2).$$

▷ PROOF : see appendix C.3. ◁

Theorem 5 *A sufficient condition for the stability of the PML system (6.28) with absorption in the x_1 direction is that conditions $(\mathcal{C}_1)$ and $(\mathcal{C}_2)$ be satisfied as well as one of the conditions $(\mathcal{C}_3)_1$ or $(\mathcal{C}_3)_2$. This is equivalent to saying that one of the two following conditions is realized :*

$$(\mathcal{C}_{x_1})_1 \qquad (c_{12}+c_{33})^2 < (c_{11}-c_{33})\,(c_{22}-c_{33})$$

$$(\mathcal{C}_{x_1})_2 \quad \begin{cases} \textit{(i)} & (c_{11}-c_{33})\,(c_{22}-c_{33}) \leq (c_{12}+c_{33})^2 \leq \max\{-c_{33}(c_{22}-c_{33}), c_{11}(c_{22}-c_{33})\} \\ \textit{(ii)} & (c_{11}-c_{33})\left(c_{11}c_{22}-c_{33}^2\right) < (c_{11}+c_{33})\,(c_{12}+c_{33})^2 \\ \textit{(iii)} & (c_{12}+2c_{33})^2 < c_{11}c_{22} \end{cases}$$

▷ PROOF : It simply remains to explain why satisfying $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ and $(\mathcal{C}_3)_1$ or $(\mathcal{C}_3)_2$ is equivalent to $(\mathcal{C}_{x_1})_1$ or $(\mathcal{C}_{x_1})_2$. We first observe that the two real numbers :

$$-c_{33}(c_{22}-c_{33}) \quad \text{and} \quad c_{11}(c_{22}-c_{33})$$

have opposite signs. As a consequence, the maximum of these two values is positive and greater than their sum :

$$(c_{11}-c_{33})\,(c_{22}-c_{33}) \leq \max\{-c_{33}(c_{22}-c_{33}), c_{11}(c_{22}-c_{33})\} \quad (\geq 0). \tag{6.73}$$

We next observe that condition $(\mathcal{C}_1)$ means that $(c_{12}+c_{33})^2$ belongs to the interval delimited by the same two numbers. Since $(c_{12}+c_{33})^2 > 0$, this reduces to :

$$(c_{12}+c_{33})^2 \leq \max\{-c_{33}(c_{22}-c_{33}), c_{11}(c_{22}-c_{33})\}. \tag{6.74}$$

As $-c_{33}(c_{22}-c_{33}) \leq c_{33}^2$ and $c_{11}(c_{22}-c_{33}) \leq c_{11}c_{22}$, we deduce that :

$$(6.74) \quad \Longrightarrow \quad (c_{12}+c_{33})^2 \leq \max\left\{c_{33}^2, c_{11}c_{22}\right\} \leq c_{33}^2 + c_{11}c_{22},$$

in other words :

$$(\mathcal{C}_1) \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{C}_2)\,(ii). \tag{6.75}$$

The less immediate remark, whose proof is left to the reader, is that :

$$(c_{12}+c_{33})^2 \leq (c_{11}-c_{33})(c_{22}-c_{33}) \quad \Longrightarrow \quad (c_{12}+2c_{33})^2 \leq c_{11}c_{22}. \quad \text{(i. e. } (\mathcal{C}_2)\,(i)) \tag{6.76}$$

One then concludes as follows :

1. If $(\mathcal{C}_{x1})_1$ - which is nothing but $(\mathcal{C}_3)_1$ - $(\mathcal{C}_1)$ is satisfied thanks to (6.73) and (6.74). Therefore $(\mathcal{C}_2)\,(ii)$ holds thanks to (6.76) and $(\mathcal{C}_2)\,(i)$ holds thanks to (6.75).
   If $(\mathcal{C}_{x1})_2$ is satisfied, $(\mathcal{C}_1)$ (and thus $(\mathcal{C}_2)\,(ii)$) results from $(\mathcal{C}_{x1})_2\,(i)$, $(\mathcal{C}_1)$ from $(\mathcal{C}_{x1})_2\,(iii)$ and $(\mathcal{C}_3)_2$ from $(\mathcal{C}_{x1})_2\,(ii)$.
2. Reciprocally, if $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ and $(\mathcal{C}_3)_1$ or $(\mathcal{C}_3)_2$ are satisfied, then, according to (6.73) and (6.74) either
   $$(c_{12}+c_{33})^2 < (c_{11}-c_{33})(c_{22}-c_{33})$$
   in which case $(\mathcal{C}_{x1})_1$ holds, either
   $$(c_{11}-c_{33})(c_{22}-c_{33}) \leq (c_{12}+c_{33})^2 \leq \max\left\{-c_{33}(c_{22}-c_{33}), c_{11}(c_{22}-c_{33})\right\},$$
   that is $(\mathcal{C}_{x1})_2\,(i)$, in which case $(\mathcal{C}_{x1})_2\,(i)$ and $(\mathcal{C}_{x1})_2\,(i)$ result from $(\mathcal{C}_2)\,(i)$ and $(\mathcal{C}_3)_2$ (which is satisfied since $(\mathcal{C}_3)_1$ is not).

$\lhd$

In order to obtain a sufficient condition for the stability for the PML model with absorption in the x_2 direction, we simply have to permute c_{11} and c_{22} :

Theorem 6 *The PML system (6.28) with absorption in the x_2 direction is stable as soon as one of the two following conditions is realized :*

$$(\mathcal{C}_{x_2})_1 \qquad (c_{12}+c_{33})^2 < (c_{11}-c_{33})(c_{22}-c_{33}),$$

$$(\mathcal{C}_{x_2})_2 \quad \begin{cases} (i) & (c_{11}-c_{33})(c_{22}-c_{33}) \leq (c_{12}+c_{33})^2 \leq \max\left\{-c_{33}(c_{22}-c_{33}), c_{11}(c_{22}-c_{33})\right\}, \\ (ii) & (c_{22}-c_{33})\left(c_{11}c_{22}-c_{33}^2\right) < (c_{22}+c_{33})(c_{12}+c_{33})^2, \\ (iii) & (c_{12}+2c_{33})^2 < c_{11}c_{22}. \end{cases}$$

Remark 6 *In the isotropic case, the coefficients are expressed in terms of Lamé's coefficients λ, μ through relation (6.8) one easily checks that condition $(\mathcal{C}_1)_{x_1} \equiv (\mathcal{C}_1)_{x_2}$ is obviously satisfied, therefore the PML model with absorption in x_1 or in x_2 is stable for any isotropic material.*

Remark 7 *The conditions (6.7) on the coefficients do not imply the positivity of coefficient c_{12}. However, in the applications this coefficient is often positive. It is easy to see that in this case, if $c_{33} > c_{22}$, the condition $(\mathcal{C}_1)$ can not be satisfied, therefore the PML model with absorption in the x_1 direction is not stable. In the same way, if $c_{33} > c_{11}$, the PML model with absorption in the x_2 direction is not stable. Therefore, if $c_{12} \geq 0$, a necessary condition for the general PML model to be stable is that $c_{33} \leq c_{22}$ and $c_{33} \leq c_{11}$.*

6.4.4 Back to the numerical experiments of section 6.3.5

We come back to the numerical experiments done at section 6.3.5. We have seen that both materials (IV) and (V) satisfy the geometrical stability condition. However, we can understand the instability phenomena observed in figure 6.26 and figure 6.28, thanks to the analysis in sections 6.4.2 and 6.4.3. Indeed, one can check that :

- The material (IV) satisfies the condition $(\mathcal{C}_3)$ but does not satisfy the necessary condition $(\mathcal{C}_2)$ that concerns the high frequency analysis of the non-physical modes.
- The material (V) satisfies the necessary condition $(\mathcal{C}_2)$ but does not satisfy the condition $(\mathcal{C}_3)$ that concerns the stability of the physical modes at intermediate frequencies.

Conjecture. We conjecture that the sufficient conditions of theorems 5 and 6 are also necessary stability conditions. The idea is that, as soon as $(\mathcal{C}_3)_1$ or $(\mathcal{C}_3)_2$ is not satisfied, there exists $\theta_0 \in]0,\pi/2[$ such that one curve $\varepsilon \mapsto (\mathcal{V}'_{\theta_0})_j(\varepsilon)$ meets the real axis for some $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$. The proof would be complete if one would be able to show that this curve really crosses the real axis at $\varepsilon = \varepsilon_0$ (case 2 of figure 6.30). This would essentially corresponds to proving that :

$$\Im m\left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\mathcal{V}'_{\theta_0})_j(\varepsilon_0)\right\} \neq 0,$$

that we have not been able to do...

Another element for this conjecture is, of course, the instabilities observed for the material (V) in figure 6.28.

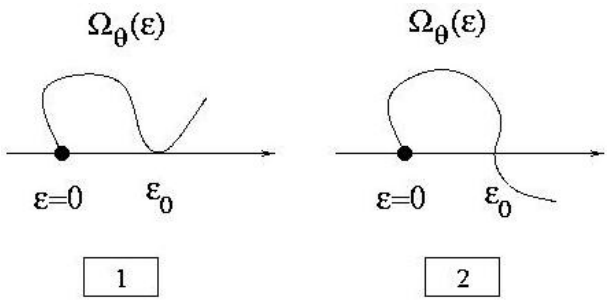


FIG. 6.30: The two possibilities for each curve $\mathcal{V}'_\theta(\varepsilon)$.

Troisième partie

Analyses

Chapitre 7

Analyse par ondes planes

Introduction

Nous nous intéressons ici à l'analyse du problème semi-discret en espace obtenu par la méthode des éléments finis mixtes spectraux sur l'équation des ondes. La méthode mixte étant équivalente à la méthode des éléments finis spectraux, l'étude effectuée dans ce chapitre peut se ramener à l'analyse du schéma obtenu par cette dernière. Nous pourrions mener une analyse classique de la convergence de la solution discrète vers la solution exacte, mais nous avons choisi de nous focaliser sur une analyse par ondes planes du schéma. Cette analyse donne des résultats précis sur la forme de la solution et nous permettra, dans le chapitre suivant, d'étudier l'influence de la construction du maillage au voisinage d'une discontinuité des propriétés physiques du milieu. Nous renvoyons à [56] pour une analyse optimale de l'erreur L^2 du schéma en maillage déformé et coefficients d'élasticité discontinus (cet article montre, entre autre, que l'utilisation d'une formule d'intégration numérique d'ordre supérieur à celle présentée dans cette thèse n'est pas nécessaire dans le cas de mailles déformées) et à [70] pour une analyse dans le cas de maillages périodiques et milieux homogènes (sous certaines hypothèses de continuités des conditions initiales).

Rappelons tout d'abord l'intérêt d'une analyse par ondes planes.
Dans le cas d'un milieu homogène infini, la solution de l'équation des ondes est connue. En effet, considèrons l'équation (ρ étant constant, on peut le sortir du terme en divergence) :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \tag{7.1}$$

et introduisons la tranformée de Fourier en espace et celle en temps ($\mathrm{i}^2 = -1$) :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d) \text{ t.q.} \quad \mathcal{F}_{\mathbf{x}} p = \hat{p}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} p(\mathbf{x}) e^{-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \tag{7.2a}$$

$$\mathcal{F}_t : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d) \text{ t.q.} \quad \mathcal{F}_t p = \hat{p}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} p(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} dt \tag{7.2b}$$

En appliquant $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}$ à (7.1) on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \hat{p}}{dt^2} + c^2 |\mathbf{k}|^2 \hat{p} = 0 \tag{7.3}$$

dont la solution est de la forme

$$\hat{p}(\mathbf{k},t) = A(\mathbf{k})e^{\mathrm{i}c|\mathbf{k}|t} + B(\mathbf{k})e^{-\mathrm{i}c|\mathbf{k}|t} \tag{7.4}$$

D'autre part, en appliquant $\mathcal{F}_t$ à l'équation (7.3), on obtient la relation :

$$\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2 \tag{7.5}$$

qui s'appelle "relation de dispersion du problème continu" et lie la pulsation ω et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. La solution s'écrit finalement comme une superposition continue d'ondes planes de la forme $e^{\mathrm{i}(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$. La même approche peut être appliquée à l'approximation de la solution de l'équation des ondes par la méthode des éléments finis mixtes spectraux dans le cas de l'utilisation d'un maillage régulier dont le pas d'espace est le même dans ses d directions : si l'on cherche p_h sous la forme $e^{\mathrm{i}(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$ et que l'on introduit cette égalité dans le schéma numérique [1], nous obtenons un problème aux valeurs propres, appelé "relation de dispersion numérique". L'étude des valeurs propres mène à l'étude de la dispersion numérique du schéma : pour $\mathbf{k}$ fixé, ce problème nous permet de définir la pulsation numérique ω_h en fonction de $\mathbf{k}$ et des caractéristiques du schéma. Nous définissons alors la vitesse approchée c_h de l'onde propagée par ce schéma :

$$c_h = \frac{\omega_h}{|\mathbf{k}|}\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \tag{7.6}$$

Cette vitesse numérique dépend de $\mathbf{k}$ et, donc, de la fréquence de l'onde. De ce fait, lorsque l'onde est polychromatique, la vitesse de chaque onde entrant dans sa composition dépendant de la fréquence, les différentes ondes monochromatiques la composant se déplacent avec des vitesses différentes, contrairement au cas continu. En particulier, lorsque les variations de c_h en fonction de la fréquence deviennent importantes (ce qui se produit lorsque le pas d'espace devient trop grand), certaines composantes se détachent de l'onde originelle et produisent ainsi un train d'ondes parasites sans aucune signification physique (voir fig. 7.1)

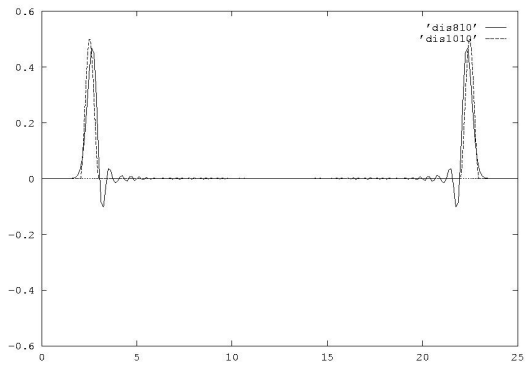


FIG. 7.1: Exemple de dispersion numérique. La solution physique est donnée en pointillés.

Il est évident qu'une telle anomalie entache gravement les mesures réalisées à partir d'un modèle numérique. Un schéma qui a tendance à développer ce phénomène est dit *dispersif*.
La dispersion numérique du schéma est alors définie comme le rapport adimensionnel entre la vitesse

[1] Attention, nous ne sommes pas dans le cas d'un schéma aux différences finies. Ce passage aux solutions sous la forme d'ondes planes ne sera pas aussi immédiat.

numérique c_h et la vitesse physique c. Nous la calculons pour les approximations $Q_r(\hat{K})$, r variant de 1 à 5.
Dans un second temps, nous nous intéressons à la structure fine de la solution en déterminant les vecteurs propres de la relation de dispersion ainsi que le vecteur d'onde numérique $\mathbf{k}_h$. Cette étude est effectuée de façon générale et permet d'obtenir un résultat pour toute valeur de r.
Ces deux études sont tout d'abord effectuées en dimension 1 de manière à les simplifier au maximum. En dimension quelconque, le cadre particulier de l'analyse : milieu infini homogène maillé de façon régulière et avec le même pas d'espace dans toutes les directions nous permet de généraliser rapidement les résultats obtenus en dimension 1.

7.1 Dimension 1

Nous nous plaçons dans le cas d'un milieu infini 1D homogène, maillé de façon périodique avec un pas d'espace h et nous considérons l'espace d'approximation $Q_r(\hat{K})$ (qui se note en fait $P_r([0,1])$ en dimension 1).
Rappelons et introduisons quelques notations spécifiques au cadre de cette étude :

- Soit S_j un élément du maillage monodimensionnel. Le maillage étant périodique, nous avons :

$$\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} S_j = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} [\,jh\,,\,(j+1)h\,] = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} F_j([0,1])$$

  où F_j est une fonction de $[0,1]$ dans S_j vérifiant $F_j(\hat{x}) = jh + \hat{x}h \;\; \forall \hat{x} \in [0,1]$.
- Notons $(\hat{\xi}_l)_{l=1..(r+1)}$ les $r+1$ points de quadrature des formules d'intégration numérique de Gauss-Lobatto, en dimension 1, de poids associés $(\hat{\omega}_l)_{l=1..(r+1)}$.
- Sur S_j, notons $\left(\xi_{jr+l}\right)_{l=1..r+1}$ les images, par F_j des $\hat{\xi}_l$.
- Sur $[0,1]$, nous introduisons $(\hat{\varphi}_l)_{l=1..(r+1)}$ les fonctions d'interpolation de Lagrange :

$$\hat{\varphi}_l(\hat{x}) = \prod_{\substack{m=1..r+1 \\ m\neq l}} \frac{\hat{x}-\hat{\xi}_m}{\hat{\xi}_l-\hat{\xi}_m} \tag{7.7}$$

  Ce sont des fonctions de base de $P_r([0,1])$.
  Dans le cas du maillage périodique défini plus haut, les fonctions de base de U_d^r se déduisent des fonctions $(\hat{\varphi}_l)_{l=1..(r+1)}$ par :

$$\varphi_m(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}|\exists l\in\{1..(r+1)\}\; m=jr+l} \hat{\varphi}_l \circ F_j^{-1}(x)\, \mathbb{1}\!\mathrm{l}_{S_j}(x) \tag{7.8}$$

  où $\mathbb{1}\!\mathrm{l}_{S_j}$ est la fonction indicatrice de S_j.

Remarque 56 *La grande différence entre les notations utilisées ici et celles introduites dans le chapitre 1 provient du fait que, dans le cas d'un maillage monodimensionnel périodique, les fonctions* **loc** *et glob sont inutiles.*

Remarque 57 *Ici, aucun indice n'est en gras : cette notation introduite dans le chapitre 1 avait pour but de faire la différence entre les degrés de libertés et les fonctions de base définis sur l'élément de référence comme produit ou produit cartésien de points de référence et de fonctions de bases définis sur* $[0,1]$ *et les degrés de libertés et les fonctions de base définis sur* Ω*. En dimension* 1 *et pour un maillage périodique, cette distinction n'a plus lieu d'être.*

Le schéma semi-discret que nous étudions s'écrit :

$$D_{1,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t} + R_{1,r}\mathbf{V}_h = 0 \tag{7.9a}$$

$$B_{1,r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_h}{\mathrm{d}t} = R^*_{1,r}\mathbf{P}_h \tag{7.9b}$$

Dans l'étude qui va suivre, nous allons introduire des solutions sous la forme d'ondes planes. Cette approche est cohérente pour p_h, qui représente l'approximation dans un sous-espace de $C^0(\mathbb{R})$ de la solution de l'équation des ondes en milieu homogène infini. Par contre, $\mathbf{v}_h$ correspond à l'approximation du champ de vitesse dans un espace qui n'impose pas la continuité de celui-ci d'un élément du maillage à un autre. Connaissant l'expression de $\mathbf{V}_h$ en fonction de $\mathbf{P}_h$ par (7.9b), nous allons l'introduire dans (7.9a) pour étudier le problème semi-discret équivalent :

$$D_{1,r}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t^2} + R_{1,r}B^{-1}_{1,r}R^*_{1,r}\mathbf{P}_h = 0 \tag{7.10}$$

Utilisons le résultat du théorème 1. Nous étudions finalement :

$$D_{1,r}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t^2} + K_{1,r}\mathbf{P}_h = 0 \tag{7.11}$$

où $D_{1,r}$ et $K_{1,r}$ sont en fait les matrices obtenues par la méthode des éléments finis spectraux.

Toute l'étude qui sera effectuée dans ce chapitre donnera donc des résultats communs à la méthode des éléments finis spectraux et à la méthode mixte.

Rappel 3 *$D_{1,r}$ est une matrice diagonale dont le m-ième terme s'obtient par intégration numérique de :*

$$\sum_{j|\exists l\in\{1..r+1\},\, m=jr+l} \int_{S_j} \mu^{-1}\left(\varphi_{jr+l}\right)^2 dx$$

$K_{1,r}$ est une matrice $(2r+1)$-diagonale telle que le terme situé à la m_1-ième ligne et m_2-ième colonne s'obtient par intégration numérique de :

$$\sum_{j|\exists l_1 \text{ et } l_2\in\{1..r+1\},\, m_1=jr+l_1 \text{ et } m_2=jr+l_2} \int_{S_j} \rho^{-1}\frac{\partial\varphi_{jr+l_1}}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi_{jr+l_2}}{\partial x}\,dx$$

7.1.1 Mise en place de la relation de dispersion

Cette construction, dans le cas d'un maillage homogène périodique infini, induit une propriété importante :

Lemme 2 *Les intégrales sont invariantes par translation de pas h :*

$$\int_{S_{j_0}} \mu^{-1}\left(\varphi_{j_0r+l_0}\right)^2 dx = h\,\mu^{-1}\int_0^1 (\hat{\varphi}_{l_0})^2\,d\hat{x} \tag{7.12a}$$

$$\int_{S_{j_0}} \rho^{-1}\frac{\partial\varphi_{j_0r+l_1}}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi_{j_0r+l_2}}{\partial x}\,dx = \frac{1}{h}\,\rho^{-1}\int_0^1 \frac{\partial\hat{\varphi}_{l_1}}{\partial\hat{x}}\,\frac{\partial\hat{\varphi}_{l_2}}{\partial\hat{x}}\,d\hat{x} \tag{7.12b}$$

▷ PREUVE DU LEMME 2 : Remarquons tout d'abord que, en milieu homogène, les variables μ et ρ sont constantes.
D'après la relation qui lie les fonctions de base φ_m définies sur Ω aux fonctions de Lagrange (équation (7.8)) définies sur $[0,1]$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{S_{j_0}} \mu^{-1} \left(\varphi_{j_0 r+l_0}\right)^2 dx &= \int_{S_{j_0}} \mu^{-1} \left(\hat{\varphi}_{l_0} \circ F_{j_0}^{-1}\right)^2 dx \\ &= \mu^{-1} \int_0^1 F'_{j_0} \left(\hat{\varphi}_{l_0}\right)^2 d\hat{x} \\ &= h\mu^{-1} \int_0^1 \left(\hat{\varphi}_{l_0}\right)^2 d\hat{x}\end{aligned}$$

En opérant de la même façon pour la seconde intégrale, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{S_{j_0}} \rho^{-1} \frac{\partial \varphi_{j_0 r+l_1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{j_0 r+l_2}}{\partial x} dx &= \int_{S_{j_0}} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{\varphi}_{l_1} \circ F_{j_0}^{-1}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{\varphi}_{l_2} \circ F_{j_0}^{-1}\right) dx \\ &= \rho^{-1} \int_0^1 F'_{j_0} \left(\frac{1}{F'_{j_0}} \frac{\partial \hat{\varphi}_{l_1}}{\partial \hat{x}}\right)\left(\frac{1}{F'_{j_0}} \frac{\partial \hat{\varphi}_{l_2}}{\partial \hat{x}}\right) d\hat{x} \\ &= \frac{1}{h} \rho^{-1} \int_0^1 \frac{\partial \hat{\varphi}_{l_1}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\varphi}_{l_2}}{\partial \hat{x}} d\hat{x}\end{aligned}$$

◁

Dans le cadre de notre étude, les intégrales présentes dans les matrices de masse et de rigidité du schéma numérique sont invariantes par translation (lemme 2). Cette propriété reste vérifiée après intégration numérique. Ceci implique que, pour tout segment S_j et tout entier l de 1 à r, la relation qui lie ξ_{jr+l} aux degrés de liberté de S_j et S_{j-1} est la même que la relation qui lie ξ_l aux degrés de liberté de S_0 et S_{-1}. Ceci peut aussi se traduire par le fait que tout les "paquets" de points $\left(\xi_{jr+l}\right)_{l=1..r}$ se comportent de la même façon. Nous cherchons donc une solution du système sous la forme d'une onde plane discrète :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{jr+1} \\ \mathbf{P}_{jr+2} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{jr+r} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - jkh)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_1} \\ \alpha_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_2} \\ \vdots \\ \alpha_r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_r} \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

En introduisant cette relation dans le système (7.11), nous obtenons un problème aux valeurs propres :

$$\widehat{N}_{1,r}[k]\, \alpha_{1,r} = \omega^2 \alpha_{1,r} \tag{7.14}$$

avec $\widehat{N}_{1,r}[k] = \widehat{D}_{1,r}^{-1} \widehat{K}_{1,r}$.

h étant fixé, ce système dépend donc de 3 paramètres : ω (valeur propre et pulsation), k (vecteur d'onde) et $(\alpha_l)_{l=1..r}$ (vecteur propre). Le but de ce chapitre est de déterminer un développement limité de ces différents paramètres. L'étude de dispersion permet de déterminer la pulsation numérique ω_h en fonction du vecteur d'onde et du pas d'espace. Dans un second temps, nous déterminons le vecteur d'onde numérique k_h et le vecteur propre en fonction de la pulsation et du pas d'espace.

7.1.2 Etude de dispersion

Le but de ce paragraphe est de déterminer les expressions de la pulsation numérique pour différentes valeurs de r. Nous mettrons, en particulier, en évidence l'existence de phénomènes parasites.

La plupart des calculs ont été faits à l'aide du logiciel Maple.

Eléments finis P_1 Pour $r = 1$, les équations se résument à :

$$h^2 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{P}_j}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mu}{\rho} [2\mathbf{P}_j - (\mathbf{P}_{j-1} + \mathbf{P}_{j+1})] \qquad \forall j, \tag{7.15}$$

avec les numérotations de la figure (7.2).

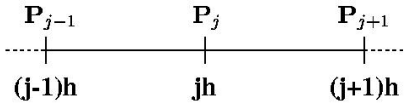


FIG. 7.2: Maillage monodimensionnel périodique dans le cas P_1

Nous avons donc une unique classe d'équations et cherchons les solutions sous la forme :

$$\mathbf{P}_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_h t - jkh)} \alpha_1$$

Le système (7.15) s'écrit alors :

$$h^2 \omega_h^2 \alpha_1 = \frac{\mu}{\rho} \left(2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kh} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh}\right) \alpha_1 \tag{7.16}$$

qui peut se résumer sous la forme :

$$h^2 \omega_h^2 = 2 \frac{\mu}{\rho} (1 - \cos(kh)) \tag{7.17}$$

Nous obtenons donc une unique solution ω_h^2 :

$$\omega_h^2 = \frac{2}{h^2} \frac{\mu}{\rho} (1 - \cos(kh)) \tag{7.18}$$

dont le développement limité est :

$$\omega_h^2 = \frac{\mu}{\rho} k^2 \left(1 - \frac{k^2 h^2}{12} + \frac{k^4 h^4}{360} - \frac{k^6 h^6}{20160} + O(k^8 h^8)\right) \tag{7.19}$$

ω_h est donc une approximation à l'ordre 2 de la pulsation physique ω.

Posons q_h le rapport de la vitesse de phase de l'onde numérique physique sur la vitesse de phase de l'onde plane physique :

$$q_h = \frac{\omega_h}{\omega} = 1 - \frac{k^2 h^2}{12} + O(h^4)$$

Soit N le nombre de points d'interpolation par longueur d'onde :

$$N = \frac{2\pi}{|k|h} \times 1 = \frac{1}{K}$$

où K est donc la proportion de la longueur d'onde séparant deux points d'interpolation.
Alors :

$$q_h = \frac{\omega_h}{\omega} = 1 - \frac{\pi^2 K^2}{3} + O(K^4)$$

Nous obtenons la courbe de dispersion représentée dans la figure 7.3.

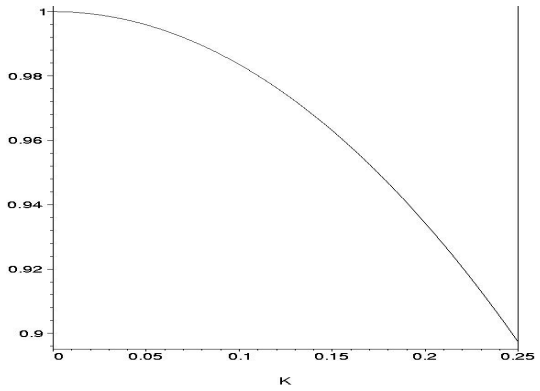


FIG. 7.3: Courbe de dispersion en 1D pour $r = 1$.

Remarque 58 *Nous avons fait intervenir ici le nombre de points d'interpolation par longueur d'onde et non pas le nombre d'éléments par longueur d'onde afin d'obtenir des courbes cohérentes que l'on puisse comparer pour des valeurs de r différentes, et que l'on puisse comparer aux courbes de dispersion d'autres méthodes (différences finies par exemple).*

Eléments finis P_2 Pour $r = 2$, les équations s'écrivent :

$$h^2 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{P}_{2j+1}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{\rho} \left[14\mathbf{P}_{2j+1} - 8\left(\mathbf{P}_{2j+2} + \mathbf{P}_{2j}\right) + \mathbf{P}_{2j+3} + \mathbf{P}_{2j-1}\right] \quad \forall j, \tag{7.20a}$$

$$h^2 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{P}_{2j+2}}{\mathrm{d}t^2} = 4\frac{\mu}{\rho} \left[\mathbf{P}_{2j+1} - 2\mathbf{P}_{2j+2} + \mathbf{P}_{2j+3}\right] \quad \forall j, \tag{7.20b}$$

avec les numérotations de la figure (7.4).
Nous avons donc deux classes d'équations et cherchons les solutions sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{2j+1} \\ \mathbf{P}_{2j+2} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_h t - jkh)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh/2} \end{pmatrix}$$

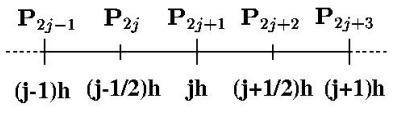


FIG. 7.4: Maillage monodimensionnel périodique dans le cas P_2

Le système (7.20) s'écrit alors :

$$h^2\,\omega_h^2\alpha_1 = \frac{\mu}{\rho}\left[14\alpha_1 - 8\alpha_2\left(e^{ikh/2}+e^{-ikh/2}\right)+\alpha_1\left(e^{ikh}+e^{-ikh}\right)\right] \tag{7.21a}$$

$$h^2\,\omega_h^2\alpha_2 = -4\,\frac{\mu}{\rho}\left[\alpha_1\left(e^{-ikh/2}+e^{ikh/2}\right)-2\alpha_2\right] \tag{7.21b}$$

qui peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\widehat{N}_{1,2}\,[k]\;\alpha_{1,2} = \omega_h^2\,\alpha_{1,2} \tag{7.22}$$

avec

$$\alpha_{1,2} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \qquad \widehat{N}_{1,2}\,[k] = \widehat{D}_{1,2}^{-1}\,\widehat{K}_{1,2},$$

$$\widehat{D}_{1,2} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \quad \widehat{K}_{1,2} = \frac{2}{h^2}\frac{\mu}{\rho}\begin{pmatrix}7+\cos(kh) & -8\cos\dfrac{kh}{2}\\ -8\cos\dfrac{kh}{2} & 8\end{pmatrix}.$$

$\widehat{D}_{1,2}$ et $\widehat{K}_{1,2}$ sont les symboles matriciels respectifs de la matrice de masse $D_{1,2}$ et de l'opposé de la matrice de rigidité $-K_{1,2}$.

L'équation caractéristique du problème (7.22) se met sous la forme :

$$h^4\,\omega_h^4 + 4\,\frac{\mu}{\rho}\,h^2\left(s^2-6\right)\,\omega_h^2 + 96\,\frac{\mu^2}{\rho^2}\,s^2 = 0 \tag{7.23}$$

avec $s = \sin(kh/2)$.
Nous obtenons donc deux solutions ω_h :

$$\omega_{h,1}^2 = \frac{1}{h^2}\,\frac{\mu}{\rho}\left(12-2s^2-2\sqrt{36-36s^2+s^4}\right) \tag{7.24a}$$

$$\omega_{h,2}^2 = \frac{1}{h^2}\,\frac{\mu}{\rho}\left(12-2s^2+2\sqrt{36-36s^2+s^4}\right) \tag{7.24b}$$

Les développements limités de ces deux quantités sont :

$$\omega_{h,1}^2 = \frac{\mu}{\rho}\,k^2\left(1-\frac{k^4h^4}{1440}-\frac{k^6h^6}{48\,384}+O(k^8h^8)\right) \tag{7.25a}$$

$$\omega_{h,2}^2 = \frac{\mu}{\rho}\,k^2\left(\frac{24}{k^2h^2}-2+\frac{k^2h^2}{12}-\frac{k^4h^4}{480}+O(k^6h^6)\right) \tag{7.25b}$$

$\omega_{h,1}$ est donc une approximation à l'ordre 4 de la pulsation physique ω. $\omega_{h,2}$ révèle la présence d'ondes parasites dont la vitesse tend vers l'infini lorsque h tend vers 0 mais dont l'amplitude est en $O(h^4)$ [70].

Posons q_h le rapport de la vitesse de phase de l'onde numérique physique sur la vitesse de phase de l'onde plane physique :

$$q_h = \frac{\omega_h}{\omega} = 1-\frac{k^4h^4}{2880}+O(h^6)$$

Soit N le nombre de points d'interpolation par longueur d'onde :

$$N = \frac{2\pi}{|k|h} \times 2 = \frac{1}{K}$$

Alors :

$$q_h = \frac{\omega_h}{\omega} = 1 - \frac{4\pi^4 K^4}{45} + O(K^6)$$

Nous obtenons la courbe de dispersion représentée dans la figure 7.5.

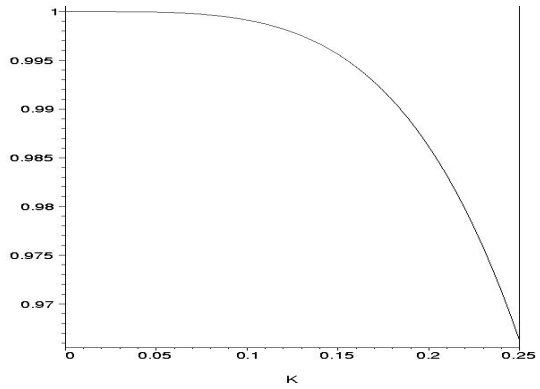


FIG. 7.5: Courbe de dispersion en 1D pour $r = 2$.

Eléments finis P_3 Pour $r = 3$, les équations s'écrivent, $\forall j$:

$$\begin{aligned} h^2 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{P}_{3j+1}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{\rho} \Big[& 52\mathbf{P}_{3j+1} - \frac{5}{2}(5+3\sqrt{5})\left(\mathbf{P}_{3j} + \mathbf{P}_{3j+2}\right) \\ & + \frac{5}{2}(3\sqrt{5}-5)\left(\mathbf{P}_{3j-1} + \mathbf{P}_{3j+3}\right) - \left(\mathbf{P}_{3j-2} + \mathbf{P}_{3j+4}\right) \Big] \end{aligned} \tag{7.26a}$$

$$h^2 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{P}_{3j+2}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{\rho} \left[-(5+3\sqrt{5})\mathbf{P}_{3j+1} + 20\mathbf{P}_{3j+2} - 10\mathbf{P}_{3j+3} + (3\sqrt{5}-5)\mathbf{P}_{3j+4} \right] \tag{7.26b}$$

$$h^2 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{P}_{3j+3}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{\rho} \left[(3\sqrt{5}-5)\mathbf{P}_{3j+1} - 10\mathbf{P}_{3j+2} + 20\mathbf{P}_{3j+3} - (5+3\sqrt{5})\mathbf{P}_{3j+4} \right] \tag{7.26c}$$

avec les numérotations de la figure (7.6).

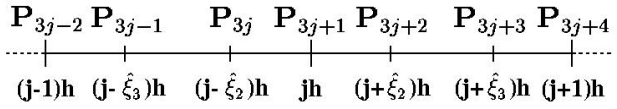


FIG. 7.6: Maillage monodimensionnel dans le cas P_3

Nous avons donc trois classes d'équations et cherchons les solutions sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{3j+1} \\ \mathbf{P}_{3j+2} \\ \mathbf{P}_{3j+3} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_h t - jkh)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\xi}_2 h} \\ \alpha_3 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\xi}_3 h} \end{pmatrix}$$

Le système (7.26) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} h^2\omega_h^2\alpha_1 = \frac{\mu}{\rho}\Big[&52\alpha_1 - \frac{5}{2}(5+3\sqrt{5})\left(\alpha_3 e^{-i\hat{\xi}_2 kh} + \alpha_2 e^{i\hat{\xi}_2 kh}\right) \\ &+ \frac{5}{2}(3\sqrt{5}-5)\left(\alpha_2 e^{-i\hat{\xi}_3 kh} + \alpha_3 e^{i\hat{\xi}_3 kh}\right) - \alpha_1(e^{-ikh}+e^{ikh})\Big] \end{aligned} \tag{7.27a}$$

$$h^2\omega_h^2\alpha_2 = \frac{\mu}{\rho}\left[-(5+3\sqrt{5})\alpha_1 e^{-i\hat{\xi}_2 kh} + 20\alpha_2 - 10\alpha_3 e^{i(\hat{\xi}_3-\hat{\xi}_2)kh} + (3\sqrt{5}-5)\alpha_1 e^{i\hat{\xi}_3 kh}\right] \tag{7.27b}$$

$$h^2\omega_h^2\alpha_3 = \frac{\mu}{\rho}\left[(3\sqrt{5}-5)\alpha_1 e^{-i\hat{\xi}_3 kh} - 10\alpha_2 e^{i(\hat{\xi}_2-\hat{\xi}_3)kh} + 20\alpha_3 - (5+3\sqrt{5})\alpha_1 e^{i\hat{\xi}_2 kh}\right] \tag{7.27c}$$

et peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\widehat{N}_{1,3}[k]\,\alpha_{1,3} = \omega_h^2\,\alpha_{1,3} \tag{7.28}$$

avec

$$\alpha_{1,3} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{N}_{1,3}[k] = \widehat{D}_{1,3}^{-1}\widehat{K}_{1,3}, \quad \widehat{D}_{1,3} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\frac{h^2}{12}\frac{\rho}{\mu}\widehat{K}_{1,3} = \begin{pmatrix} 26-\cos(kh) & \dfrac{-5ae^{ikh\hat{\xi}_2}+5be^{-ikh\hat{\xi}_3}}{4} & \dfrac{-5ae^{-ikh\hat{\xi}_2}+5be^{ikh\hat{\xi}_3}}{4} \\ \dfrac{-5ae^{-ikh\hat{\xi}_2}+5be^{ikh\hat{\xi}_3}}{4} & 25 & \dfrac{-25e^{i(\hat{\xi}_3-\hat{\xi}_2)kh}}{2} \\ \dfrac{-5ae^{ikh\hat{\xi}_2}+5be^{-ikh\hat{\xi}_3}}{4} & \dfrac{-25e^{i(\hat{\xi}_2-\hat{\xi}_3)kh}}{2} & 25 \end{pmatrix},$$

où $a = 5+3\sqrt{5}$ et $b = -5+3\sqrt{5}$.
Ici aussi, $\widehat{D}_{1,3}$ et $\widehat{K}_{1,3}$ sont les symboles des matrices de masse et de rigidité.

L'équation caractéristique du problème (7.28) se met sous la forme :

$$h^6\omega_h^6 + 2\frac{\mu}{\rho}h^4(\cos(kh)-46)\,\omega_h^4 + 120\frac{\mu^2}{\rho^2}h^2(\cos(kh)+14)\,\omega_h^2 + 3600\frac{\mu^3}{\rho^3}(\cos(kh)-1) = 0 \tag{7.29}$$

Nous pouvons obtenir les racines de ce polynôme de façon explicite avec Maple. Par contre, pour des ordres supérieurs, cette forme explicite des racines est impossible à obtenir. Nous cherchons alors un développement limité des solutions $\lambda = \omega_h^2 h^2\frac{\rho}{\mu}$ sous la forme :

$$\lambda = \sum_{n=0}^{N}\lambda_n h^n + O\left(h^{N+1}\right)$$

λ vérifie :

$$\lambda^3 + 2\lambda^2(\cos(kh)-46) + 120\lambda(\cos(kh)+14) + 3600(\cos(kh)-1) = 0 \tag{7.30}$$

Remarque 59 *Le développement limité de* $\cos(kh)$ *ne contient que des puissances paires de kh. Nous pouvons en déduire que les* λ_{2n+1} *sont nuls,* $\forall n$.

En introduisant le développement limité de λ dans l'équation (7.30)et en identifiant les termes en h^0, nous obtenons :

$$\lambda_0^3 - 90\lambda_0^2 + 1800\lambda_0 = 0.$$

Soit :

$$\lambda_{0,1} = 0, \quad \lambda_{0,2} = 30, \quad \lambda_{0,3} = 60. \tag{7.31}$$

La première valeur de λ_0 correspond à la solution physique alors que les deux autres valeurs correspondent aux deux ondes parasites.

En identifiant les termes en h^2, nous obtenons :

$$\lambda_2\left(3\lambda_0^2 - 180\lambda_0 + 1800\right) = \left(\lambda_0^2 + 60\lambda_0 + 1800\right)k^2$$

Nous remplaçons λ_0 par les valeurs successives données en (7.31) et obtenons :

$$\lambda_{2,1} = k^2, \quad \lambda_{2,2} = -5k^2, \quad \lambda_{2,3} = 5k^2. \tag{7.32}$$

En identifiant les termes en h^4, nous obtenons :

$$\lambda_4\left(3\lambda_0^2 - 180\lambda_0 + 1800\right) = -k^4\left(\frac{1}{12}\lambda_0^2 + 5\lambda_0 + 150\right) + 2k^2\lambda_2\left(\lambda_0 + 30\right) - 3\lambda_2^2\left(\lambda_0 - 30\right)$$

Nous remplaçons λ_0 et λ_2 par les valeurs respectives données en (7.31) et (7.32) et otenons :

$$\lambda_{4,1} = 0, \quad \lambda_{4,2} = \frac{13}{12}k^4, \quad \lambda_{4,3} = -\frac{7}{6}k^4. \tag{7.33}$$

En identifiant les termes en h^6, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\lambda_6\left(3\lambda_0^2 - 180\lambda_0 + 1800\right) &= k^6\left(\frac{1}{360}\lambda_0^2 + \frac{1}{6}\lambda_0 + 5\right) - \frac{1}{6}k^4\lambda_2\left(\lambda_0 + 30\right) + k^2\left(\lambda_2^2 + 60\lambda_4 + 2\lambda_0\lambda_4\right) \\ &- \lambda_2\left(\lambda_2^2 - 180\lambda_4 + 6\lambda_0\lambda_4\right)\end{aligned}$$

En remplaçant $(\lambda_{2n})_{n=0..2}$ par leurs valeurs respectives déterminées précédemment, nous obtenons :

$$\lambda_{6,1} = 0, \quad \lambda_{6,2} = -\frac{137}{360}k^6, \quad \lambda_{6,3} = \frac{23}{60}k^6.$$

En identifiant les termes en h^8, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\lambda_8\left(3\lambda_0^2 - 180\lambda_0 + 1800\right) &= -k^8\left(\frac{1}{20160}\lambda_0^2 + \frac{1}{336}\lambda_0 + \frac{5}{56}\right) + \frac{1}{180}k^6\lambda_2\left(\lambda_0 + 30\right) \\ &- k^4\left(\frac{1}{12}\lambda_2^2 + 5\lambda_4 + \frac{1}{6}\lambda_0\lambda_4\right) - k^2\left(2\lambda_0\lambda_6 + 2\lambda_4\lambda_2 + 60\lambda_6\right) \\ &+ 90\lambda_4^2 - 3\lambda_4\lambda_2^2 - 6\lambda_6\lambda_2\lambda_0 - 3\lambda_4^2\lambda_0 + 180\lambda_6\lambda_2\end{aligned}$$

En remplaçant $(\lambda_{2n})_{n=0..3}$ par leurs valeurs respectives déterminées précédemment, nous obtenons :

$$\lambda_{6,1} = -\frac{1}{302400}k^8, \quad \lambda_{6,2} = \frac{51259}{302400}k^8, \quad \lambda_{6,3} = -\frac{1899}{11200}k^8.$$

Nous obtenons donc les développements limités des trois solutions :

$$\omega_{h,1}^2 = \frac{\mu}{\rho}k^2\left(1 - \frac{1}{302400}k^6h^6 + O(h^8)\right) \tag{7.34a}$$

$$\omega_{h,2}^2 = \frac{\mu}{\rho}k^2\left(\frac{30}{k^2h^2} - 5 + \frac{13}{12}k^2h^2 - \frac{137}{360}k^4h^4 + \frac{51259}{302400}k^6h^6 + O(h^8)\right) \tag{7.34b}$$

$$\omega_{h,3}^2 = \frac{\mu}{\rho}k^2\left(\frac{60}{k^2h^2} + 5 - \frac{7}{6}k^2h^2 + \frac{23}{60}k^4h^4 - \frac{1899}{11200}k^6h^6 + O(h^8)\right) \tag{7.34c}$$

La première valeur propre correspond à une approximation d'ordre 6 de la pulsation physique. Les deux autres valeurs propres correspondent à deux ondes parasites d'amplitudes en $O(h^6)$ ou $O(h^5)$ [70].

Notons q_h le rapport de la vitesse de phase de l'onde numérique physique sur la vitesse de phase de l'onde plane physique :

$$q_h = \frac{\omega_h}{\omega} = 1 - \frac{k^6h^6}{302400} + O(h^8)$$

Soit N le nombre de points d'interpolation par longueur d'onde :

$$N = \frac{2\pi}{|k|h} \times 3 = \frac{1}{K}$$

Alors :

$$q_h = \frac{\omega_h}{\omega} = 1 - \frac{27\pi^6K^6}{350} + O(K^8)$$

Nous obtenons la courbe de dispersion représentée dans la figure 7.7.

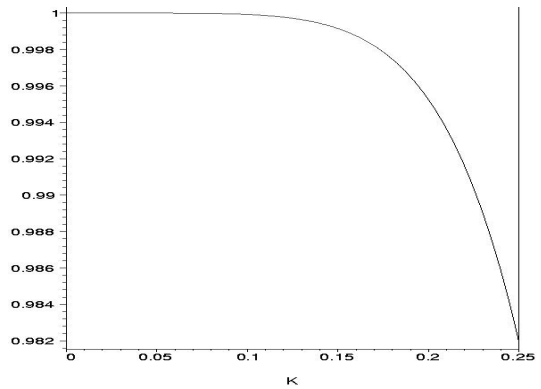


FIG. 7.7: Courbe de dispersion en 1D pour $r = 3$.

Eléments finis P_r Le même raisonnement peut être effectué pour $r > 3$. En injectant les égalités (7.13) dans les équations du système et en utilisant la définition 3 , on se rapporte au problème matriciel :

$$\widehat{N}_{1,r}[k]\,\alpha_{1,r} = \omega_h^2\,\alpha_{1,r} \tag{7.35}$$

avec $\widehat{N}_{1,r}[k] = \widehat{D}_{1,r}^{-1}\widehat{K}_{1,r}$, $\widehat{D}_{1,r}$ et $\widehat{K}_{1,r}$ étant les symboles des matrices de masse et de rigidité.

Par le même raisonnement que dans le cas $r = 3$, nous déterminons r valeurs propres $\omega_{h,i}^2$ où $\omega_{h,1}$ est l'approximation à l'ordre $2r$ de ω et les $r-1$ autres valeurs propres proviennent d'ondes parasites dont l'amplitude est très petite.
Nous avons alors :

$$\omega_{h,1}^2 = c^2\,k^2\left(1 + O(h^{2r})\right)$$

Ce calcul a été fait pour r variant de 1 à 5. Toutefois, d'après le résultat du lemme 3 du paragraphe 7.1.3, nous avons de bonnes chances de pouvoir généraliser ce résultat aux ordres supérieurs.

Soit, toujours, N le nombre de points d'interpolation par longueur d'onde :

$$N = \frac{2\pi}{|k|h} \times r = \frac{1}{K}$$

Nous obtenons les courbes de dispersion représentées dans la figure 7.8.

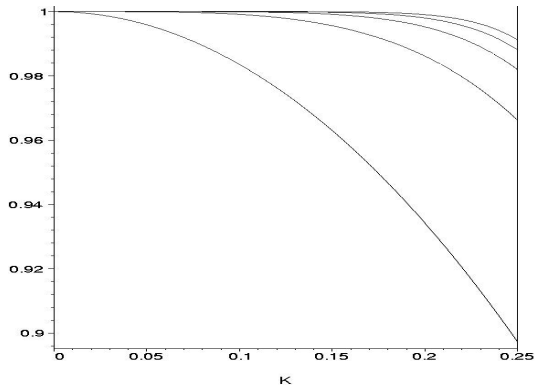


FIG. 7.8: Courbes de dispersion en 1D pour r variant de 1 (courbe inférieure) à 5 (courbe supérieure).

Ces courbes montrent bien l'intérêt de monter en ordre : si l'on veut, par exemple, une erreur de dispersion d'au maximum 1% il faut utiliser :

- 12.5 points d'interpolation, soit 12.5 éléments, par longueur d'onde en P_1,
- 5.4 points d'interpolation, soit 2.7 éléments, par longueur d'onde en P_2,
- 4.4 points d'interpolation, soit 1.5 éléments, par longueur d'onde en P_3,
- 4.1 points d'interpolation, soit 1 éléments, par longueur d'onde en P_4,
- 3.8 points d'interpolation, soit 0.76 éléments, par longueur d'onde en P_5.

Dans les expériences numériques qui seront présentées dans ce rapport, nous considérons une approximation en Q_5 (en dimension 2 et 3) et utilisons en général 10 points d'interpolation, soit 2 éléments, par longueur d'onde.

7.1.3 Détermination des inconnues du problème aux valeurs propres

Nous nous plaçons dans le cas d'un maillage périodique infini et d'un milieu homogène de masse volumique ρ et de module de compressibilité μ.

Nous avons vu au début de cette section que, dans le cas d'un maillage périodique infini, nous pouvons chercher une solution du système semi-discret en espace (7.11) sous la forme d'une onde plane discrète :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{jr+1} \\ \mathbf{P}_{jr+2} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{jr+r} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - jkh)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_1} \\ \alpha_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_2} \\ \vdots \\ \alpha_r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_r} \end{pmatrix} \tag{7.36}$$

Dans le chapitre 7.1.2, nous avions déterminé l'erreur générée sur la pulsation par la méthode des éléments finis (mixtes ou spectraux). Le but de ce paragraphe est de déterminer l'erreur générée sur k et de donner une expression de l'amplitude des ondes monochromatiques $(\alpha_l)_{l=1..r}$ qui composent la solution en fonction de ω et de h, quelque soit la valeur de r.
Nous supposons la pulsation ω fixée.

Avant d'écrire les équations, définissons :

Definition 3 *Nous notons,* $\forall (l_0,l_1,l_2) \in \{1..r+1\}^3$ *:*

$$\hat{D}_{1,r}(l_0) = \int_{[0,1]}^{GL} (\hat{\varphi}_{l_0})^2 d\hat{x} \tag{7.37a}$$

$$\hat{K}_{1,r}(l_1,l_2) = \int_{[0,1]}^{GL} \frac{\partial \hat{\varphi}_{l_1}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\varphi}_{l_2}}{\partial \hat{x}} \, d\hat{x} \tag{7.37b}$$

où $\int_{[0,1]}^{GL}$ *est l'intégrale obtenue par intégration numérique de Gauss-Lobatto sur* $[0,1]$.

Nous avons vu dans le lemme 2 que les intégrales présentes dans les matrices de masse et de rigidité sont invariantes par translation de pas h. Ainsi nous pouvons exprimer $D_{1,r}$ et $K_{1,r}$ en fonction de $\hat{D}_{1,r}$ et $\hat{K}_{1,r}$:

$$D_{1,r}(m_1,m_2) = h \frac{1}{\mu} \delta_{m_1,m_2} \sum_{j \in \mathbb{Z} | \exists l_0 \in \{1..(r+1)\},\, m_1 = jr+l_0} \hat{D}_{1,r}(l_0) \tag{7.38a}$$

$$K_{1,r}(m_1,m_2) = \frac{1}{h} \frac{1}{\rho} \sum_{j \in \mathbb{Z} | \exists (l_1,l_2) \in \{1..(r+1)\}^2,\, m_1 = jr+l_1\, m_2 = jr+l_2} \hat{K}_{1,r}(l_1,l_2) \tag{7.38b}$$

En injectant (7.36) dans le système (7.11) et en utilisant l'égalité (7.38a), nous obtenons le système :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} h^2 (\hat{D}_{1,r}(1) + \hat{D}_{1,r}(r+1)) \alpha_1 = & \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(l,r+1) \alpha_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_l} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kh} \\ & + \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(l,1) \alpha_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_l} \end{aligned} \tag{7.39a}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} h^2 \hat{D}_{1,r}(j) \alpha_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_j} = \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(l,j) \alpha_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_l} \qquad \forall j = 2..r \tag{7.39b}$$

Or :

Lemme 3 *Soit $\hat{D}_{1,r}$ la matrice introduite dans la définition 3. Nous avons alors, pour tout $l_0 = 1..r+1$:*

$$\hat{D}_{1,r}(l_0) = \hat{\omega}_{l_0}.$$

▷ PREUVE DU LEMME 3 : Voir annexe D.1. ◁

En injectant les égalités du lemme 3 dans le système (7.39), nous obtenons :

$$2\frac{\omega^2}{c^2}h^2\,\hat{\omega}_1\,\alpha_1 = \sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,r+1)\alpha_l\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_l}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kh} + \sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,1)\alpha_l\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_l} \tag{7.40a}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}h^2\hat{\omega}_j\,\alpha_j\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_j} = \sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,j)\alpha_l\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_l} \qquad \forall j = 2..r \tag{7.40b}$$

en posant $\alpha_{r+1} = \alpha_1$.

Lemme 4 *ω étant fixé, l'équation (7.40) admet au plus deux solutions, fonctions de h : $k_0(h)$ et $-k_0(h)$.*

Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 5 *La matrice $\hat{K}_{1,r}$ vérifie :*

$$\hat{K}_{1,r}(j,l) = \hat{K}_{1,r}(2+r-j,2+r-l) \qquad \forall j,l \in \{1..r+1\}$$

▷ PREUVE DU LEMME 5 : Voir annexe D.2. ◁

Nous pouvons à présent nous intéresser à la preuve du lemme 4.

▷ PREUVE DU LEMME 4 : Posons $\beta_j = \alpha_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh\hat{\xi}_j}$.
On utilise les résultats du lemme 5 pour $j = l = r+1$: $\hat{K}_{1,r}(r+1,r+1) = \hat{K}_{1,r}(1,1)$ et on pose $Y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh}$.
Le système (7.40) se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} 2\frac{\omega^2}{c^2}h^2\,\hat{\omega}_1\,\beta_1\,Y = {} & \hat{K}_{1,r}(1,r+1)\beta_1(1+Y^2) + \sum_{l=2}^{r}\hat{K}_{1,r}(l,r+1)\beta_l \\ & + 2\,\hat{K}_{1,r}(1,1)\beta_1\,Y + \sum_{l=2}^{r}\hat{K}_{1,r}(l,1)\beta_l\,Y \end{aligned} \tag{7.41a}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}h^2\hat{\omega}_j\,\beta_j = \hat{K}_{1,r}(1,j)\beta_1 + \hat{K}_{1,r}(r+1,j)\beta_1\,Y + \sum_{l=2}^{r}\hat{K}_{1,r}(l,j)\beta_l \quad \forall j = 2..r \tag{7.41b}$$

Posons $X = (\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_r)^*$.
Les $r-1$ dernières équations du système se réécrivent sous la forme :

$$A\,X = B\,\beta_1$$

avec A matrice $(r-1)\times(r-1)$ et B vecteur $(r-1)$ tels que :

$$A_{j-1,l-1} = \frac{\omega^2}{c^2}\,h^2\hat{\omega}_j\,\delta_{j,l} - \hat{K}_{1,r}(l,j) \qquad \forall j = 2..r\ \forall l = 2..r \tag{7.42a}$$

$$B_{j-1} = \hat{K}_{1,r}(1,j) + \hat{K}_{1,r}(r+1,j)Y \qquad \forall j = 2..r \tag{7.42b}$$

Les β_j/β_1 sont donc des polynômes de degré 1 en Y, à coefficients réels (les $\hat{K}_{1,r}(l,j)$ sont réels). En remplaçant les β_j et en simplifiant (7.41a) par β_1, qu'il est légitime de considérer non nul, nous obtenons un polynôme de degré 2 en Y, à coefficients réels. Cette équation admet donc au plus, deux racines, réelles ou complexes conjuguées.
Comme nous avons posé $Y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kh}$, le système (7.40) admet au plus deux solutions, fonctions de h : $k_0(h)$ et $-k_0(h)$. ◁

Nous allons chercher $(\alpha_j)_{j=1..r}$ et k sous la forme de leur développement limité :

$$\alpha_j = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{j,n} h^n + O\left(h^{N+1}\right) \qquad \forall j = 1..r \tag{7.43a}$$

$$k = \sum_{n=0}^{N} a_n h^n + O\left(h^{N+1}\right) \tag{7.43b}$$

Nous allons introduire ces développements limités dans le système (7.40) et identifier les différentes puissances de h pour en déduire les valeurs de $(a_n)_{n=0..2r-1}$.

Remarque 60 *Nous ferons intervenir α_{r+1} en supposant que $\alpha_{r+1} = \alpha_1$.*

Posons :

$$k^p = \sum_{n=0}^{N} b_{p,n} h^n + O\left(h^{N+1}\right) \qquad \forall p \in \mathbb{N} \tag{7.44}$$

Le système (7.40) se met sous la forme :

$$2\frac{\omega^2}{c^2} h^2\, \hat{\omega}_1\, \alpha_1 = \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(r+1,l)\alpha_l\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kh\,(\hat{\xi}_{r+1}-\hat{\xi}_l)} + \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l)\alpha_l\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kh\,(\hat{\xi}_1-\hat{\xi}_l)} \tag{7.45a}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} h^2 \hat{\omega}_j\, \alpha_j = \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\alpha_l\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kh\,(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)} \qquad \forall j = 2..r \tag{7.45b}$$

Déterminons le développement limité de $\alpha_l\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kh\,(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)}$.
Nous pouvons écrire :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kh(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)} = 1 + \sum_{p=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^p}{p!} h^p (\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^p\, k^p + O\left(h^{N+1}\right)$$

soit, d'après le développement limité de k^p donné en (7.44) :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kh(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)} = 1 + \sum_{p=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^p}{p!} h^p (\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^p \sum_{n=0}^{N-p} b_{p,n} h^n + O\left(h^{N+1}\right)$$

Posons $q = p+n$. Nous avons alors :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kh(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)} = 1 + \sum_{q=1}^{N} h^q \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!} (\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^p\, b_{p,q-p} + O\left(h^{N+1}\right)$$

En introduisant le développement limité de α_l donné en (7.43a), nous pouvons écrire :

$$\alpha_l \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kh\,(\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{l,n} h^n + \sum_{m=0}^{N} \alpha_{l,m} h^m \sum_{q=1}^{N-m} h^q \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!} (\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^p \, b_{p,q-p} + O\left(h^{N+1}\right)$$

Posons n=m+q dans la seconde somme. Nous avons alors :

$$\alpha_l \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kh\,(\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{l,n} h^n + \sum_{n=1}^{N} h^n \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!} (\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^p \, b_{p,q-p} \, \alpha_{l,n-q} + O\left(h^{N+1}\right)$$

En identifiant les termes de (7.45), nous obtenons, $\forall n = 0..N$:

$$\begin{aligned} 2\frac{\omega^2}{c^2} \hat{\omega}_1 \alpha_{1,n-2} \delta_{n\geq 2} = & \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l) \alpha_{l,n} + \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!} \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l) (\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_l)^p b_{p,q-p} \alpha_{l,n-q} \\ & + \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(r+1,l) \alpha_{l,n} + \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!} \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(r+1,l) (\hat{\xi}_{r+1} - \hat{\xi}_l)^p b_{p,q-p} \alpha_{l,n-q} \end{aligned} \tag{7.46a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\omega}_j \alpha_{j,n-2} \delta_{n\geq 2} = & \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l) \alpha_{l,n} + \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!} \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l) (\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^p b_{p,q-p} \alpha_{l,n-q} \\ & \forall j = 2..r \end{aligned} \tag{7.46b}$$

Rappel 4 *Soit $\mathcal{P}$ une propriété. $\delta_{n \text{ vérifie } \mathcal{P}}$ est la fonction qui vaut 1 si n vérifie $\mathcal{P}$ et vaut 0 sinon.*

- cas particulier : $N = 0$
  En posant $x_l = \alpha_{l,0}, \forall l = 1..r$, et $X = (x_1, ..., x_r)^*$ le système (7.46) devient :

$$0 = \sum_{l=1}^{r+1} \left(\hat{K}_{1,r}(1,l) + \hat{K}_{1,r}(r+1,l) \right) x_l \tag{7.47a}$$

$$0 = \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l) \, x_l \qquad \forall j = 2..r \tag{7.47b}$$

Definition 4 *Soit $\hat{M}_h$ la matrice $r \times r$ symétrique définie par :*

$$\hat{M}_h(1,l) = \hat{K}_{1,r}(1,l) + \hat{K}_{1,r}(r+1,l) \qquad \forall l = 1..r \tag{7.48a}$$

$$\hat{M}_h(j,l) = \hat{K}_{1,r}(j,l) \qquad \forall j,l = 2..r \tag{7.48b}$$

Le système (7.47) s'écrit alors sous la forme matricielle : $\hat{M}_h X = 0$
Or :

Lemme 6 *La matrice $\hat{M}_h$ est de rang $r-1$.*
Sa sous-matrice $\hat{M}_{h\,[2..r]}$ constituée des $r-1$ dernières lignes et $r-1$ dernières colonnes est inversible.

▷ PREUVE DU LEMME 6 : Voir annexe D.4. ◁

Ainsi, l'ensemble des solution du problème matriciel forme un espace vectoriel de dimension 1.
Or, nous avons le lemme suivant :

Lemme 7 *La matrice $\hat{K}_{1,r}$ vérifie :*

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l) = 0 \qquad \forall j = 1..r$$

▷ PREUVE DU LEMME 7 : Voir annexe D.3 ◁

D'après le lemme 7, $\sum_{l=1}^{r} \hat{M}_h(j,l) = 0$. Ainsi, pour $\alpha_{l,0} = \alpha_{1,0}$, $\forall l = 2..r$, le système est vérifié.
La solution de (7.47) vérifie donc : $\alpha_{l,0} = \alpha_{1,0} \qquad \forall l = 2..r$

- Raisonnement par récurrence : $N \geq 1$
  Nous allons montrer que :

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_{l,n} = \alpha_{1,n} & \forall l = 2..r, \quad \forall n = 0..N-1 \\ a_n = \pm\dfrac{\omega}{c}\,\delta_{n,0} & \forall n = 0..N-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha_{l,N} = \alpha_{1,N} & \forall l = 2..r \\ a_{N-2} = \pm\dfrac{\omega}{c}\,\delta_{N-2,0} & \end{array}\right.$$

La récurrence est bien initialisée pour $N = 1$.
Reprenons le système (7.46) en utilisant le fait que $\alpha_{l,n} = \alpha_{1,n}$, $\forall l = 2..r$, $\forall n = 0..N-1$:

$$\begin{aligned} 2\frac{\omega^2}{c^2}\,\hat{\omega}_1\,\alpha_{1,N-2} = &\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l)\alpha_{l,N} + \sum_{q=1}^{N} \alpha_{1,N-q} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!}\, b_{p,q-p} \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l)(\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_l)^p \\ &+ \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(r+1,l)\alpha_{l,N} + \sum_{q=1}^{N} \alpha_{1,N-q} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!}\, b_{p,q-p} \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(r+1,l)(\hat{\xi}_{r+1} - \hat{\xi}_l)^p \end{aligned} \tag{7.49a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2}\,\hat{\omega}_j\,\alpha_{1,N-2} = &\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\alpha_{l,N} + \sum_{q=1}^{N} \alpha_{1,N-q} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!}\, b_{p,q-p} \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)(\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^p \\ &\forall j = 2..r \end{aligned} \tag{7.49b}$$

Definition 5 *Introduisons $A^n_{r,j}$ tel que :*

$$A^n_{r,j} = \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\,(\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^n \qquad \forall j = 1..r+1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Le système (7.49) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} 2\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\omega}_1\,\alpha_{1,N-2} = &\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l)\alpha_{l,N} + \sum_{q=1}^{N} \alpha_{1,N-q} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!}\, b_{p,q-p} A^p_{r,1} \\ &+ \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(r+1,l)\alpha_{l,N} + \sum_{q=1}^{N} \alpha_{1,N-q} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!}\, b_{p,q-p} A^p_{r,r+1} \end{aligned} \tag{7.50a}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\,\hat{\omega}_j\,\alpha_{1,N-2} = \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\alpha_{l,N} + \sum_{q=1}^{N} \alpha_{1,N-q} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!}\, b_{p,q-p} A^p_{r,j} \;\; \forall j = 2..r \tag{7.50b}$$

Or :

Lemme 8 *$A^n_{r,j}$ vérifie les propriétés suivantes, pour tout $j = 1..r+1$:*

$$A^0_{r,j} = 0 \tag{7.51a}$$
$$A^1_{r,j} = \delta_{j,1} - \delta_{j,r+1} \tag{7.51b}$$
$$A^2_{r,j} = -2\,\hat{\omega}_j \tag{7.51c}$$
$$A^n_{r,j} = 0 \qquad 3 \le n \le r+1 \tag{7.51d}$$

▷ PREUVE DU LEMME 8 : Voir annexe D.5. ◁

Nous pouvons donc simplifier le système (7.50) sous la forme :

$$\begin{aligned} 2\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\omega}_1\,\alpha_{1,N-2} &= \sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,l)\alpha_{l,N} + \hat{\omega}_1\,\delta_{N\ge 2}\sum_{q=2}^{N}\alpha_{1,N-q}\,b_{2,q-2} \\ &+ \sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,l)\alpha_{l,N} + \hat{\omega}_{r+1}\,\delta_{N\ge 2}\sum_{q=2}^{N}\alpha_{1,N-q}\,b_{2,q-2} \end{aligned} \tag{7.52a}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\omega}_j\,\alpha_{1,N-2} = \sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(j,l)\alpha_{l,N} + \hat{\omega}_j\,\delta_{N\ge 2}\sum_{q=2}^{N}\alpha_{1,N-q}\,b_{2,q-2} \quad \forall j = 2..r \tag{7.52b}$$

1. Si $N = 1$, nous retrouvons l'équation (7.47) avec $x_l = \alpha_{l,1}$.
   En effectuant le même raisonnement que pour $N = 0$, nous obtenons $\alpha_{l,1} = \alpha_{1,1}, \forall l = 2..r$, et vérifions donc la récurrence.
2. Pour $N \ge 2$, en additionnant les r équations de (7.52) et en utilisant $\sum_{j=1}^{r+1}\hat{\omega}_j = 1$ nous obtenons :

   $$\frac{\omega^2}{c^2}\alpha_{1,N-2} = \sum_{l=1}^{r+1}\alpha_{l,N}A^0_{r,l} + \sum_{q=2}^{N}\alpha_{1,N-q}\,b_{2,q-2}$$

   Or $A^0_{r,l} = 0$ (lemme 8) et, d'après les hypothèses de récurrence :

   $$b_{2,q-2} = \sum_{j=0}^{q-2} a_j\,a_{q-2-j} = a_0^2\,\delta_{q,2} + 2\,a_0\,a_{N-2}\,\delta_{q,N}$$

   Ce qui donne finalement :

   $$a_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{pour } N = 2 \tag{7.53a}$$
   $$a_{N-2} = 0 \quad \text{pour } N \ge 3 \tag{7.53b}$$

   En injectant ces égalités dans le système (7.52), nous retrouvons l'équation (7.47) avec $x_l = \alpha_{l,N}$.
   Toujours par le même raisonnement, nous obtenons : $\alpha_{l,N} = \alpha_{1,N}, \forall l = 2..r$.

Remarque 61 *L'équation (7.52) ne dépend pas de μ ou ρ. $(\alpha_{l,n})_{l=0..r+1}$ ne dépend donc pas des propriétés physiques du milieu étudié.*

Nous avons donc démontré que $k = \pm\dfrac{\omega}{c} + O(h^r)$.
Nous allons montrer que $a_n = 0$ pour tout n variant de r à $2r-1$.

- Raisonnement par récurrence : $N > r+1$
  Nous allons montrer que :

$$\left.\begin{array}{ll} a_n = \pm\dfrac{\omega}{c}\delta_{n,0} & \forall n = 0..N-3 \\ \exists\,(\alpha_{l,n})_{l=1..r}^{n=0..N-1} & \text{non nuls vérifiant (7.46)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{N-2} = \pm\dfrac{\omega}{c}\delta_{N-2,0} \\ \exists\,(\alpha_{l,N})_{l=1..r} \text{ non nuls vérifiant (7.46)} \end{array}\right.$$

La récurrence est bien initialisée pour $N = r+2$.
Reprenons le système (7.46) pour $n = N$ ($N > r+1 \geq 2$). Nous nous intéressons au terme :

$$\Gamma_j^N = \sum_{q=1}^{N}\sum_{p=1}^{q}\frac{\mathrm{i}^p}{p!}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(j,l)(\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^p\, b_{p,q-p}\,\alpha_{l,N-q}$$

Or, $\forall l = 1..r+1$, $\alpha_{l,n} = \alpha_{1,n}$ pour tout n variant de 1 à $r+1$, c'est-à-dire $\alpha_{l,N-q} = \alpha_{1,N-q}$ pour tout q variant de $N-r-1$ à N.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\Gamma_j^N = \delta_{N\geq r+3}\sum_{q=1}^{N-r-2}\sum_{p=1}^{q}\frac{\mathrm{i}^p}{p!}b_{p,q-p}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(j,l)(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)^p\,\alpha_{l,N-q} \\ + \sum_{q=N-r-1}^{N}\alpha_{1,N-q}\sum_{p=1}^{q}\frac{\mathrm{i}^p}{p!}\,b_{p,q-p}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(j,l)(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)^p\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire : $k = a_0 + O\left(h^{N-2}\right)$.
Nous avons donc :

$$k^p = a_0^p + O\left(h^{N-2}\right) = \sum_{n=1}^{N-3} b_{p,n}h^n + O\left(h^{N-2}\right)$$

Ainsi, $b_{p,0} = a_0^p$ et $b_{p,n} = 0$ pour tout n variant de 2 à $N-3$.
Cette égalité implique, entre autres, que $b_{p,q-p} = 0$ pour tout couple (q,p) avec q compris entre 1 et $N-r-2$ et p compris entre 1 et $q-1$ (car $N-r-2 \leq N-3$ pour $r \geq 1$) ainsi que pour couple (q,p) avec q compris entre 1 et N et p compris entre $\sup(1, q-N+3)$ et $q-1$.
Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\Gamma_j^N = \delta_{N\geq r+3}\sum_{q=1}^{N-r-2}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}a_0^q\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(j,l)(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)^q\alpha_{l,N-q} + \sum_{q=N-r-1}^{N}\alpha_{1,N-q}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}a_0^q A_{r,j}^q \\ + \sum_{q=N-1}^{N}\alpha_{1,N-q}\sum_{p=1}^{q-N+2}\frac{\mathrm{i}^p}{p!}b_{p,q-p}A_{r,j}^p\end{aligned}$$

Où $A_{r,j}^p$ a été défini précédemment. D'après le lemme 8, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\Gamma_j^N = \delta_{N\geq r+3}\sum_{q=1}^{N-r-2}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}a_0^q\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(j,l)(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)^q\alpha_{l,N-q} + \sum_{q=N-r-1}^{N}\alpha_{1,N-q}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}a_0^q A_{r,j}^q \\ + \mathrm{i}\,\delta_{j,1}\sum_{q=N-1}^{N}\alpha_{1,N-q}\,b_{1,q-1} - \mathrm{i}\,\delta_{j,r+1}\sum_{q=N-1}^{N}\alpha_{1,N-q}\,b_{1,q-1} + \alpha_{1,0}\,b_{2,N-2}\,\hat{\omega}_j\end{aligned}$$

Le système (7.46), pour $n = N$, se réécrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
2\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\omega}_1\alpha_{1,N-2} = &\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,l)\alpha_{l,N} + \hat{\omega}_1\,\alpha_{1,0}\,b_{2,N-2} + \sum_{q=N-r-1}^{N}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}a_0^q\,\alpha_{1,N-q}A_{r,1}^q \\
&+\delta_{N\geq r+3}\sum_{q=1}^{N-r-2}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,l)(\hat{\xi}_1-\hat{\xi}_l)^q a_0^q\,\alpha_{l,N-q} \\
&+\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,l)\alpha_{l,N} + \hat{\omega}_{r+1}\,\alpha_{1,0}\,b_{2,N-2} + \sum_{q=N-r-1}^{N}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}a_0^q\,\alpha_{1,N-q}A_{r,r+1}^q \\
&+\delta_{N\geq r+3}\sum_{q=1}^{N-r-2}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,l)(\hat{\xi}_{r+1}-\hat{\xi}_l)^q a_0^q\,\alpha_{l,N-q}
\end{aligned} \tag{7.54a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\omega}_j\alpha_{j,N-2} = &\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(j,l)\alpha_{l,N} + \hat{\omega}_j\,\alpha_{1,0}\,b_{2,N-2} + \sum_{q=N-r-1}^{N}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}a_0^q\,\alpha_{1,N-q}A_{r,j}^q \\
&+\delta_{N\geq r+3}\sum_{q=1}^{N-r-2}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(j,l)(\hat{\xi}_j-\hat{\xi}_l)^q a_0^q\,\alpha_{l,N-q} \\
&\forall j = 2..r
\end{aligned} \tag{7.54b}$$

Nous allons additionner les r équations de (7.54) mais introduisons tout d'abord :

Definition 6 *Introduisons X_r^n tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$X_r^n \;=\; \sum_{j=1}^{r+1} A_{r,j}^n$$

Additionnons donc les r équations de (7.54). En utilisant les définitions de $A_{r,l}^q$ et X_r^q, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{c^2}\sum_{j=1}^{r+1}\hat{\omega}_j\,\alpha_{j,N-2} \;&=\; \sum_{l=1}^{r+1}\alpha_{l,N}A_{r,l}^0 + \alpha_{1,0}\,b_{2,N-2}\sum_{j=1}^{r+1}\hat{\omega}_j + \sum_{q=N-r-1}^{N}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}a_0^q\,\alpha_{1,N-q}\,X_r^q \\
&+\; \delta_{N\geq r+3}\sum_{q=1}^{N-r-2}\frac{\mathrm{i}^q}{q!}a_0^q\sum_{l=1}^{r+1}\alpha_{l,N-q}(-1)^q A_{r,l}^q
\end{aligned}$$

Le lemme 8 va nous permettre de simplifier ce sytème. De plus, nous avons :

Lemme 9 *X_r^n vérifie les propriétés suivantes :*

$$X_r^{2n+1} = 0 \qquad \forall n \tag{7.55a}$$

$$X_r^{2n} = -2\,\delta_{n,1} \quad \forall\, 0 \leq 2n \leq 2r+1 \tag{7.55b}$$

▷ PREUVE DU LEMME 9 : Voir annexe D.6. ◁

Nous pouvons annuler tout les X_r^q dès que le plus grand entier pair inférieur ou égal à N est aussi inférieur à $2r+1$. Alors, d'après les lemmes 8 et 9, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{c^2}\sum_{j=1}^{r+1}\hat{\omega}_j\,\alpha_{j,N-2} = &\;\alpha_{1,0}\,b_{2,N-2} + \delta_{N-r-1\leq 2}\,a_0^2\,\alpha_{1,N-2} + \mathrm{i}\,\delta_{N\geq r+3}\,a_0(\alpha_{r+1,N-1}-\alpha_{1,N-1}) \\
&+\delta_{N\geq r+3}\,\delta_{N-r-2\geq 2}\,a_0^2\sum_{l=1}^{r+1}\hat{\omega}_l\,\alpha_{l,N-q}
\end{aligned}$$

soit, comme $\alpha_{r+1,n} = \alpha_{1,n}$ pour tout n :

$$\frac{\omega^2}{c^2}\sum_{j=1}^{r+1}\hat{\omega}_j\,\alpha_{j,N-2} = \alpha_{1,0}\,b_{2,N-2} + \delta_{N\leq r+3}\,a_0^2\,\alpha_{1,N-2} + \delta_{N\geq r+4}\,a_0^2\sum_{l=1}^{r+1}\hat{\omega}_l\,\alpha_{l,N-2}$$

1. Pour $N \leq r+3$, $\alpha_{j,N-2} = \alpha_{1,N-2}$. L'équation devient alors :

$$\frac{\omega^2}{c^2}\alpha_{1,N-2} = \alpha_{1,0}\,b_{2,N-2} + a_0^2\,\alpha_{1,N-2}$$

2. Pour $N \geq r+4$, nous obtenons :

$$\frac{\omega^2}{c^2}\sum_{j=1}^{r+1}\hat{\omega}_j\,\alpha_{j,N-2} = \alpha_{1,0}\,b_{2,N-2} + a_0^2\sum_{l=1}^{r+1}\hat{\omega}_l\,\alpha_{l,N-2}$$

Comme $a_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ dans les deux cas, nous obtenons :

$$b_{2,N-2} = 0$$

Ce qui implique bien $a_{N-2} = 0$.

Reprenons à présent le système (7.54).
La première équation est redondante car nous avons cherché a_{N-2} tel que la somme des r équations de (7.54) soit nulle.
Intéressons nous donc aux $r-1$ dernières équations. Elles peuvent se mettre sous la forme :

$$\hat{M}_{h\,[2..r]}\begin{pmatrix}\alpha_{2,N}\\ \alpha_{3,N}\\ \\ \alpha_{r,N}\end{pmatrix} = B\,\alpha_{1,N} + C$$

où B et C sont des vecteurs colonnes de dimension $r-1$ et $\hat{M}_{h\,[2..r]}$ la matrice définie dans la définition 4.
Or, nous avons vu dans le lemme 6 que cette matrice est inversible. L'ensemble des solutions de ce système forme donc un espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc $(\alpha_{l,N})_{l=1..r}$ non nul et solution de (7.46).

La récurrence est donc démontrée pour tout N tel que le plus grand entier pair inférieur ou égal à N soit aussi inférieur ou égal à $2r+1$. Nous pouvons prendre au maximum $N = 2r+1$.

Nous avons donc trouvé un développement limité à l'ordre $2r$ d'une fonction $k(h)$ et d'un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r)^*$ non nul tel que le système (7.40) soit vérifié pour $k(h)$ et son opposé. Or, nous avons vu dans le lemme 4 que ce système admet au plus deux solutions égales en module mais de signe opposé. Nous savons que (7.40) admet au moins une solution (à tout ω on peut associé un vecteur d'onde vérifiant la relation de dispersion numérique). Nous avons donc trouvé le développement limité de l'unique solution de (7.40). Nous pouvons donc écrire le théorème suivant :

Théorème 3 *Le vecteur d'onde vérifiant la relation de dispersion numérique s'écrit sous la forme :*

$$k = \pm\frac{\omega}{c} + O\left(h^{2r}\right)$$

Remarque 62 *En fait, nous avons démontré que l'erreur sur k est au plus en $O\left(h^{2r}\right)$. Or, par des calculs avec Maple, nous avons trouvé une erreur en $O\left(h^{2r}\right)$ pour $r = 1..5$.*

Lemme 10 *L'ensemble des $(\alpha_j)_{j=1..r}$ vérifiant le système (7.40) admet un développement limité à l'ordre $r+2$ sous la forme :*

$$\alpha_j = \sum_{n=0}^{r+1} \alpha_{1,n} h^n + \alpha_{j,r+2} h^{r+2} + O\left(h^{r+3}\right)$$

avec : $\alpha_{j,r+2} = \alpha_{2+r-j,r+2}\ \forall j = 1..r+1$ si r est pair.

Pour la démonstration de ce lemme, nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 11 $A^n_{r,j} = (-1)^n A^n_{r,2+r-j} \qquad \forall j = 1..r+1, \quad \forall n \geq 0$

▷ PREUVE DU LEMME 11 : Voir annexe D.7. ◁

Nous pouvons à présent nous intéresser à la démonstration du lemme 10.

▷ PREUVE DU LEMME 10 : Nous avons déjà vu que : $\alpha_{j,n} = \alpha_{1,n}$, $\forall j = 1..r+1\ \forall n = 0..r+1$.
Considérons donc le cas où r est pair et étudions $\alpha_{j,r+2}$.
Pour cela, reprenons l'équation (7.54) pour $N = r+2$:

$$\begin{aligned}
2\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\omega}_1\alpha_{1,r} &= \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l)\alpha_{l,r+2} + \hat{\omega}_1\,\alpha_{1,0}\,b_{2,r} + \sum_{q=1}^{r+2} \frac{\mathrm{i}^q}{q!} a_0^q\,\alpha_{1,r+2-q} A^q_{r,1} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(r+1,l)\alpha_{l,r+2} + \hat{\omega}_{r+1}\,\alpha_{1,0}\,b_{2,r} + \sum_{q=1}^{r+2} \frac{\mathrm{i}^q}{q!} a_0^q\,\alpha_{1,r+2-q} A^q_{r,r+1} \\
\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\omega}_j\alpha_{j,r} &= \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\alpha_{l,r+2} + \hat{\omega}_j\,\alpha_{1,0}\,b_{2,r} + \sum_{q=1}^{r+2} \frac{\mathrm{i}^q}{q!} a_0^q\,\alpha_{1,r+2-q} A^q_{r,j} \qquad \forall j = 2..r
\end{aligned}$$

Or, nous avons vu (découle du théorème 3) que $b_{2,r} = 0$ et que $a_0 = \omega^2/c^2$.
En simplifiant les équations grâce au lemme 8, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l)\alpha_{l,r+2} + \frac{\mathrm{i}^{r+2}}{(r+2)!} a_0^{r+2}\,\alpha_{1,0} A^{r+2}_{r,1} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(r+1,l)\alpha_{l,r+2} + \frac{\mathrm{i}^{r+2}}{(r+2)!} a_0^{r+2}\,\alpha_{1,0} A^{r+2}_{r,r+1} \\
0 &= \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\alpha_{l,r+2} + \frac{\mathrm{i}^{r+2}}{(r+2)!} a_0^{r+2}\,\alpha_{1,0} A^{r+2}_{r,j} \qquad \forall j = 2..r
\end{aligned}$$

r étant pair, d'après le lemme 11, nous avons $A^{r+2}_{r,2+r-j} = A^{r+2}_{r,j}$ pour tout j variant de 1 à $r+1$.
Posons $\beta_l = \alpha_{2+r-l,r+2}$ et prenons $m = 2+r-j$.
$(\beta_l)_{l=1..r+1}$ vérifie donc :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(r+1,l)\beta_l + \frac{\mathrm{i}^{r+2}}{(r+2)!} a_0^{r+2}\,\alpha_{1,0} A^{r+2}_{r,1} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l)\beta_l + \frac{\mathrm{i}^{r+2}}{(r+2)!} a_0^{r+2}\,\alpha_{1,0} A^{r+2}_{r,r+1} \\
0 &= \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(m,l)\beta_l + \frac{\mathrm{i}^{r+2}}{(r+2)!} a_0^{r+2}\,\alpha_{1,0} A^{r+2}_{r,m} \qquad \forall m = 2..r
\end{aligned}$$

Les $(\beta_j)_{j=1..r+1}$ et les $(\alpha_{j,r+2})_{j=1..r+1}$ vérifient donc les mêmes équations, ce qui peut se traduire par le fait que le système (7.47) est vérifié pour $x_l = \beta_l - \alpha_{l,r+2}$. Le système admettant une unique solution vérifiant $x_l = x_1$ pour tout l variant de 1 à r, nous avons :

$$\alpha_{2+r-j,r+2} - \alpha_{j,r+2} = \alpha_{r+1,r+2} - \alpha_{1,r+2} = 0$$

◁

Remark 8 *Tout vecteur provenant d'une multiplication de $\alpha_{1,r}$ par un scalaire est vecteur propre de $\hat{N}_{1,r}[k]$. Ainsi, si l'on multiplie $\alpha_{1,r}$ par λ^{-1} avec $\lambda = \sum_{n=0}^{r+1} \alpha_{1,n} h^n$, on obtient le vecteur propre dont chaque composante a pour développement limité :*

$$\alpha_i = 1 + O\left(h^{r+2}\right)$$

7.1.4 Conclusion dans le cas 1D

Rappelons tout d'abord que l'erreur L^2 générée par l'utilisation de la méthode des éléments finis spectraux dans ce cadre particulier d'application (maillage périodique infini et milieu homogène) est en $O\left(h^{r+2}\right)$ [70].

Nous pouvons résumer les résultats des études précédentes sous la forme du tableau :

Erreur L^2	Erreur sur ω	Erreur sur k	Erreur sur $\alpha_{1,r}$
$O\left(h^{r+2}\right)$	$O\left(h^{2r}\right)$	$O\left(h^{2r}\right)$	$O\left(h^{r+2}\right)$

Remarque 63 *Nous n'avons considéré que les approximations des valeurs ayant un équivalent physique et avons donc omis les ondes parasites exhibées dans l'étude de dispersion.*

7.2 Dimensions supérieures

Nous considérons un infini dD homogène ($d = 2$ ou 3), maillé de façon périodique avec un même pas d'espace h dans toutes les directions.
Nous reprenons les notations introduites dans le chapitre 1 et en introduisons d'autres spécifiques au cadre de cette étude.
En effet, la méthode des éléments finis spectraux dans ce cas se déduit facilement de la méthode des éléments finis spectraux en 1D présentée précédemment.

– Le maillage hexaédrique du domaine est ici constitué de carrés (en dimension 2) ou de cubes (en dimension 3). Il peut donc s'exprimer comme le produit suivant d directions de maillages en une dimension. Nous noterons alors :

$$\Omega = \bigcup K_{\mathbf{j}} \qquad \text{où } K_{\mathbf{j}} = \prod_{p=1}^{d} S_{j_p} = \prod_{p=1}^{d} [\, j_p\, h,\, (j_p+1)\, h\,] \quad \text{et } \mathbf{j} = (j_p)_{p=1..d}$$

On peut alors définir $\mathbf{F_j}$ la fonction qui transforme $[0,1]^d$ en $K_{\mathbf{j}}$ par $\mathbf{F_j}(\mathbf{x}) = \left(F_{j_p}(x_p)\right)_{p=1..d}$ où les fonctions F_{j_p} ont été définies dans le cas 1D.

– L'espace $Q_r(\hat{K})$ peut s'écrire sous la forme $\bigotimes_{p=1}^{d} P_r([0,1])$: espace vectoriel généré par l'ensemble des produits, en chacune des variables de $\mathbb{R}^d$, de d fonctions de base de $P_r([0,1])$.

– Notons $(\hat{\xi}_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l}\in\{1..r+1\}^d}$ les points de quadrature des formules d'intégration numérique de Gauss-Lobatto, en dimension d, de poids associés $(\hat{\omega}_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l}\in\{1..r+1\}^d}$.
Nous pouvons alors écrire :

$$\hat{\xi}_{\mathbf{l}} = \left(\hat{\xi}_{l_1},...,\hat{\xi}_{l_d}\right) \qquad \forall \mathbf{l} \in \{1..r+1\}^d \tag{7.56a}$$

$$\hat{\omega}_{\mathbf{l}} = \prod_{p=1}^{d} \hat{\omega}_{l_p} \qquad \forall \mathbf{l} \in \{1..r+1\}^d \tag{7.56b}$$

où $\hat{\xi}_{l_p}$ et $\hat{\omega}_{l_p}$ correspondent aux points et poids de quadrature des formules d'intégration numérique de Gauss-Lobatto en dimension 1.

– Sur $K_{\mathbf{j}}$, notons $\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}$ les images, par $\mathbf{F_j}$ des $\hat{\xi}_{\mathbf{l}}$.
D'après la définition des points de quadrature des formules d'intégrations numériques de Gauss-Lobatto et d'après la définition des fonctions $\mathbf{F_j}$, nous avons :

$$\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} = \left(\xi_{j_p r+l_p}\right)_{p=1..d} \qquad \text{avec } \mathbf{j} = (j_p)_{p=1..d} \text{ et } \mathbf{l} = (l_p)_{p=1..d}$$

où $\xi_{j_p r+l_p}$ a été définis en 1D comme l'image, par F_{j_p} de $\hat{\xi}_{l_p}$.

– Sur $[0,1]^d$, nous introduisons $(\hat{\varphi}_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l}\in\{1..r+1\}^d}$ les fonctions d'interpolation de Lagrange en dimension d :

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \prod_{p=1}^{d} \hat{\varphi}_{l_p}(x_p)$$

où les fonctions $\hat{\varphi}_{l_p}$ sont les fonctions d'interpolation de Lagrange définis en 1D.
L'ensemble de ces fonctions forme une base de $Q_r(\hat{K})$.
Dans le cas du maillage périodique défini plus haut, les fonctions de base de U_d^r se déduisent des fonctions $(\hat{\varphi}_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l}\in\{1..r+1\}^d}$ par :

$$\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d | \exists \mathbf{l}\in\{1..r+1\}^d,\, \mathbf{m}=\mathbf{j}r+\mathbf{l}} \hat{\varphi}_{\mathbf{l}} \circ \mathbf{F}_{\mathbf{j}}^{-1}(\mathbf{x})\, \mathbb{1}\!\!\mathrm{l}_{K_{\mathbf{j}}}(\mathbf{x})$$

où $\mathbb{1}\!\!\mathrm{l}_{K_{\mathbf{j}}}$ est l'indicatrice de $K_{\mathbf{j}}$.
Ces fonctions peuvent aussi être vues comme produit de d fonctions de base de U_1^r :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d | \exists \mathbf{l}\in\{1..(r+1)\}^d,\, \mathbf{m}=\mathbf{j}r+\mathbf{l}} \prod_{p=1}^{d} \hat{\varphi}_{l_p} \circ F_{j_p}^{-1}(x_p)\, \mathbb{1}\!\!\mathrm{l}_{S_{j_p}}(x_p) \\
&= \prod_{p=1}^{d} \sum_{j_p\in\mathbb{Z} | \exists l_p\in\{1..(r+1)\},\, m_p=j_p r+l_p} \hat{\varphi}_{l_p} \circ F_{j_p}^{-1}(x_p)\, \mathbb{1}\!\!\mathrm{l}_{S_{j_p}}(x_p) \\
&= \prod_{p=1}^{d} \varphi_{m_p}(x_p)
\end{aligned}$$

Comme dans le cas 1D, le schéma semi-discret que nous allons étudier est :

$$D_{d,r}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_h}{\mathrm{d}t^2}+K_{d,r}\mathbf{P}_h=0 \tag{7.57}$$

où $D_{d,r}$ et $K_{d,r}$ sont en fait les matrices obtenues par la méthode des éléments finis spectraux.

Toute l'étude qui sera effectuée dans ce chapitre donnera des résultats communs à la méthode des éléments finis spectraux et à la méthode mixte.

Rappel 5 *$D_{d,r}$ est une matrice diagonale dont le $\mathbf{m}$-ième terme s'obtient par intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto de :*

$$\sum_{\mathbf{j}|\exists\mathbf{l}\in\{1..r+1\}^d,\,\mathbf{m}=\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\int_{K_\mathbf{j}}\mu^{-1}\left(\varphi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\right)^2 d\mathbf{x}$$

$K_{d,r}$ est une matrice pleine telle que le terme situé à la $\mathbf{m_1}$-ième ligne et $\mathbf{m_2}$-ième colonne (suivant un ordre pré-déterminé) s'otient par intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto de :

$$\sum_{\mathbf{j}|\exists\mathbf{l_1}\ et\ \mathbf{l_2}\in\{1..r+1\}^d,\,\mathbf{m_1}=\mathbf{j}r+\mathbf{l_1}\ et\ \mathbf{m_2}=\mathbf{j}r+\mathbf{l_2}}\int_{K_\mathbf{j}}\rho^{-1}\nabla\varphi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l_1}}\cdot\nabla\varphi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l_2}}\,d\mathbf{x}$$

Remarque 64 *Pour ne pas alourdir la notation, nous avons uniquement mis en gras les indices pour différencier le cas 1D du cas dD.*

7.2.1 Passage de la dimension 1 à la dimension d

Introduisons quelques propriétés des matrices intervenant dans le schéma numérique, dans le cas d'un domaine homogène (ρ,μ) infini périodique de pas h dans toutes les directions.

Lemme 12 *Pour tout $\mathbf{m}=(m_p)_{p=1..d}$ et $\mathbf{n}=(n_p)_{p=1..d}$, nous avons :*

$$D_{d,r}(\mathbf{m})=\prod_{p=1}^{d}D_{1,r}(m_p) \qquad \forall\mathbf{m}\in\{1..r+1\}^d, \tag{7.58a}$$

$$K_{d,r}(\mathbf{m},\mathbf{n})=\sum_{p=1}^{d}K_{1,r}(m_p,n_p)\prod_{q=1..d,q\neq p}D_{1,r}(m_q)\delta_{m_q,n_q} \quad \begin{matrix}\forall\mathbf{m}\in\{1..r+1\}^d\\ \forall\mathbf{n}\in\{1..r+1\}^d\end{matrix}. \tag{7.58b}$$

▷ PREUVE DU LEMME 12 : $D_{d,r}(\mathbf{m})$ est le résultat obtenu par intégration numérique de Gauss-Lobatto de :

$$\int_\Omega\mu^{-1}\left(\varphi_\mathbf{m}\right)^2 d\mathbf{x}=\mu^{-1}\int_\Omega\left(\varphi_\mathbf{m}\right)^2 d\mathbf{x} \tag{7.59}$$

puisque nous sommes dans le cas d'un milieu homogène.
Or, d'après la définition des fonctions de base de U_d^r :

$$\int_\Omega\left(\varphi_\mathbf{m}\right)^2 d\mathbf{x}=\int_{\cup_\mathbf{j}K_\mathbf{j}}\left(\prod_{p=1}^{d}\varphi_{m_p}(x_p)\right)^2\prod_{p=1}^{d}dx_p=\prod_{p=1}^{d}\int_{\cup_{j_p}S_{j_p}}\left(\varphi_{m_p}(x_p)\right)^2 dx_p$$

De plus, comme le maillage est périodique de pas h dans toutes les directions, nous avons :

$$\int_{K_{\mathbf{j}}} (\varphi_{\mathbf{m}})^2 \, d\mathbf{x} = h^d \int_{[0,1]^d} \left(\varphi_{\mathbf{m}} \circ F_{\mathbf{j}}^{-1}\right)^2 d\hat{\mathbf{x}}$$
$$\int_{S_{j_p}} \left(\varphi_{m_p}\right)^2 dx_l = h \int_{[0,1]} \left(\varphi_{m_p} \circ F_{j_p}^{-1}\right)^2 d\hat{x_p}$$

Ainsi, comme la formule d'intégration de Gauss-Lobatto en dimension d se déduit de la formule d'intégration de Gauss-Lobatto en dimension 1 et vérifie :

$$\int_{[0,1]^d}^{GL} \prod_{p=1}^{d} \hat{f}_p\left(\hat{x_p}\right) d\hat{\mathbf{x}} = \prod_{p=1}^{d} \int_{[0,1]}^{GL} \hat{f}_p\left(\hat{x_p}\right) d\hat{x}_p$$

nous obtenons bien la décomposition du terme de la matrice de masse en dimension d comme produit de d termes de la matrice de masse en dimension 1.

De même, $K_{d,r}$ est le résultat obtenu par intégration numérique de Gauss-Lobatto de :

$$\int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla\varphi_{\mathbf{m}} \cdot \nabla\varphi_{\mathbf{n}} \, d\mathbf{x} = \rho^{-1} \int_{\Omega} \nabla\varphi_{\mathbf{m}} \cdot \nabla\varphi_{\mathbf{n}} \, d\mathbf{x} \tag{7.60}$$

En utilisant la définition des fonctions de bases de $U_{d,h}^r$, nous avons :

$$\frac{\partial\varphi_{\mathbf{m}}}{\partial x_p}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}\varphi_{m_p}}{\mathrm{d}x_p}(x_p) \prod_{q=1..d,\, q\neq p} \varphi_{m_q}(x_q)$$

et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla\varphi_{\mathbf{m}} \cdot \nabla\varphi_{\mathbf{n}} \, d\mathbf{x} &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} \int_{K_{\mathbf{j}}} \nabla\varphi_{\mathbf{m}} \cdot \nabla\varphi_{\mathbf{n}} \, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{p=1}^{d} \int_{S_{j_p}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{m_p}}{\mathrm{d}x_p}(x_p) \frac{\mathrm{d}\varphi_{n_p}}{\mathrm{d}x_p}(x_p) \, dx_p \prod_{q=1..d,\, q\neq p} \int_{S_{j_q}} \varphi_{m_q}(x_q) \, \varphi_{n_q}(x_q) \, dx_q \\
&= \sum_{p=1}^{d} \left[\sum_{j_p\in\mathbb{Z}} \int_{S_{j_p}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{m_p}}{\mathrm{d}x_p}(x_p) \frac{\mathrm{d}\varphi_{n_p}}{\mathrm{d}x_p}(x_p) \, dx_p \right] \prod_{q=1..d,\, q\neq p} \left[\sum_{j_q\in\mathbb{Z}} \int_{S_{j_q}} \varphi_{m_q}(x_q) \, \varphi_{n_q}(x_q) \, dx_q \right]
\end{aligned}$$

De plus, comme le maillage est périodique de pas h dans toutes les directions, nous avons :

$$\int_{K_{\mathbf{j}}} \nabla\varphi_{\mathbf{m}} \cdot \nabla\varphi_{\mathbf{n}} \, d\mathbf{x} = \frac{h^d}{h^2} \int_{[0,1]^d} \hat{\nabla}\left(\varphi_{\mathbf{m}} \circ F_{\mathbf{j}}^{-1}\right) \cdot \hat{\nabla}\left(\varphi_{\mathbf{n}} \circ F_{\mathbf{j}}^{-1}\right) d\hat{\mathbf{x}}$$
$$\int_{S_{j_p}} \frac{\mathrm{d}\varphi_{m_p}}{\mathrm{d}x_p}(x_p) \frac{\mathrm{d}\varphi_{n_p}}{\mathrm{d}x_p}(x_p) \, dx_p = \frac{1}{h} \int_{[0,1]} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_p}\left(\varphi_{m_p} \circ F_{j_p}^{-1}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_p}\left(\varphi_{n_p} \circ F_{j_p}^{-1}\right) d\hat{x_p}$$

Ainsi, comme la formule d'intégration de Gauss-Lobatto en dimension d est déduite de la formule d'intégration de Gauss-Lobatto en dimension 1 et vérifie :

$$\int_{[0,1]^d}^{GL} \prod_{p=1}^{d} \hat{f}_p\left(\hat{x_p}\right) d\hat{\mathbf{x}} = \prod_{p=1}^{d} \int_{[0,1]}^{GL} \hat{f}_p\left(\hat{x_p}\right) d\hat{x}_p$$

nous retrouvons bien le résultat souhaité, après intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto. ◁

Lemme 13 *Les intégrales sont invariantes par translation de pas h dans toutes les directions.*

$$\mu^{-1}\int_{K_{\mathbf{j_0}}}(\varphi_{\mathbf{j_0}r+\mathbf{l_0}})^2\,d\mathbf{x}=\mu^{-1}h^d\int_{[0,1]^d}(\hat{\varphi}_{\mathbf{l_0}})^2\,d\hat{\mathbf{x}} \tag{7.61a}$$

$$\rho^{-1}\int_{K_{\mathbf{j_0}}}\nabla\varphi_{\mathbf{j_0}r+\mathbf{l_1}}\cdot\nabla\varphi_{\mathbf{j_0}r+\mathbf{l_2}}\,d\mathbf{x}=\rho^{-1}\frac{h^d}{h^2}\int_{[0,1]^d}\nabla\hat{\varphi}_{\mathbf{l_1}}\cdot\nabla\hat{\varphi}_{\mathbf{l_2}}\,d\hat{\mathbf{x}} \tag{7.61b}$$

▷ PREUVE DU LEMME 13 : Il suffit d'utiliser le lemme 12 qui fait le lien entre les matrices de masse et de rigidité en dD et en 1D puis d'utiliser les résultats du lemme 2 qui démontre l'invariance des intégrales par translation de pas h en une direction. ◁

Definition 7 *Soit r quelconque. Posons $N_{1,r}$ et $N_{d,r}$ les matrices :*

$$N_{1,r}=D_{1,r}^{-1}K_{1,r} \tag{7.62a}$$

$$N_{d,r}=D_{d,r}^{-1}K_{d,r} \tag{7.62b}$$

où $D_{1,r}$ et $K_{1,r}$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité intervenant dans le schéma numérique en dimension 1.
$D_{d,r}$ et $K_{d,r}$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité intervenant dans le schéma numérique en dimension d.

Une des conséquence du lemme 12 est le lemme suivant :

Lemme 14 *Soient $\mathbf{m}=(m_p)_{p=1..d}$ et $\mathbf{n}=(n_p)_{p=1..d}$.*
Nous avons alors l'égalité :

$$N_{d,r}(\mathbf{m},\mathbf{n})\;=\;\sum_{p=1}^{d}N_{1,r}(m_p,n_p)\prod_{q=1..d,\,q\neq p}\delta_{m_q,n_q}$$

▷ PREUVE DU LEMME 14 : Nous allons expliciter $N_{d,r}(\mathbf{m},\mathbf{n})$ et utiliser le lemme 12 :

$$\begin{aligned}N_{d,r}(\mathbf{m},\mathbf{n})&=D_{d,r}^{-1}(\mathbf{m})\,K_{d,r}(\mathbf{m},\mathbf{n})\\&=\left(\prod_{p=1}^{d}D_{1,r}^{-1}(m_p)\right)\times\left(\sum_{p=1}^{d}K_{1,r}(m_p,n_p)\prod_{q=1..d,\,q\neq p}D_{1,r}(m_q)\,\delta_{m_q,n_q}\right)\\&=\sum_{p=1}^{d}D_{1,r}^{-1}(m_p)\,K_{1,r}(m_p,n_p)\prod_{q=1..d,\,q\neq p}\delta_{m_q,n_q}\\&=\sum_{p=1}^{d}N_{1,r}(m_p,n_p)\prod_{q=1..d,\,q\neq p}\delta_{m_q,n_q}\end{aligned}$$

Nous obtenons bien le résultat souhaité. ◁

7.2.2 Conséquence sur l'étude de la relation de dispersion

Nous nous plaçons dans le cas d'un maillage périodique infini homogène (ρ,μ).

Nous avons vu que, dans le cas d'un maillage périodique infini, les intégrales présentes dans les

matrices de masse et de rigidité du schéma numérique sont invariantes par translation de pas h dans toutes les directions. Ceci implique que, pour tout élément $K_{\mathbf{j}}$ et tout $\mathbf{l} \in \{1,..,r\}^d$, la relation qui lie $\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}$ aux degrés de liberté de $K_{\mathbf{j}}$ et des éléments du maillage situés "autour" de $K_{\mathbf{j}}$ est la même que la relation qui lie $\xi_{\mathbf{l}}$ aux degrés de liberté de $K_{\mathbf{0}}$ et des éléments du maillage situés "autour" de $K_{\mathbf{0}}$. Ceci peut aussi se traduire par le fait que tout les "paquets" de degrés de liberté $\left(\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\right)_{\mathbf{l}\in\{1,..,r\}^d}$ se comportent de la même façon. Comme dans le cas 1D, nous pouvons donc chercher une solution du système sous la forme d'une onde plane discrète :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{j}r+(1,\ldots,1)} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{j}r+(1,\ldots,2)} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\mathbf{j}r+(1,\ldots,r)} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{j}r+(2,\ldots,1)} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{j}r+(2,\ldots,2)} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\mathbf{j}r+(2,\ldots,r)} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\mathbf{j}r+(r,\ldots,r)} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - h\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})} \begin{pmatrix} \alpha_{(1,\ldots,1)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\hat{\xi}_{(1,\ldots,1)}\cdot\mathbf{k}} \\ \alpha_{(1,\ldots,2)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\hat{\xi}_{(1,\ldots,2)}\cdot\mathbf{k}} \\ \vdots \\ \alpha_{(1,\ldots,r)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\hat{\xi}_{(1,\ldots,r)}\cdot\mathbf{k}} \\ \alpha_{(2,\ldots,1)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\hat{\xi}_{(2,\ldots,1)}\cdot\mathbf{k}} \\ \alpha_{(2,\ldots,2)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\hat{\xi}_{(2,\ldots,2)}\cdot\mathbf{k}} \\ \vdots \\ \alpha_{(2,\ldots,r)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\hat{\xi}_{(2,\ldots,r)}\cdot\mathbf{k}} \\ \vdots \\ \alpha_{(r,\ldots,r)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\hat{\xi}_{(r,\ldots,r)}\cdot\mathbf{k}} \end{pmatrix} \tag{7.63}$$

avec $\mathbf{k} = (k_p)_{p=1..d}$ le vecteur d'onde.

En introduisant ces valeurs dans le système (7.57), comme dans le cas 1D, on se ramène à un problème au valeurs propres :

$$\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]\ \alpha_{d,r} = \omega^2\, \alpha_{d,r} \tag{7.64}$$

avec $\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}] = \widehat{D}_{d,r}^{-1}\widehat{K}_{d,r}$, $\widehat{D}_{d,r}$ et $\widehat{K}_{1,r}$ étant les symboles des matrices de masse et de rigidité. $\widehat{N}_{d,r}$ peut aussi être vu comme le symbole de $N_{d,r}$ défini dans la définition 7.

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 15 *Pour tout* $\mathbf{m} = (m_p)_{p=1..d} \in \{1..r\}^d$*, et tout* $\mathbf{n} = (n_p)_{p=1..d} \in \{1..r\}^d$ *:*

$$\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]\ (\mathbf{m},\mathbf{n}) = \sum_{p=1}^{d} \widehat{N}_{1,r}[k_p]\ (m_p,n_p) \prod_{q=1..d,\, q\neq p} \delta_{m_q,n_q}$$

où $\mathbf{k} = (k_p)_{p=1..d}$ *est le vecteur d'onde dans le cas dD.*

▷ PREUVE DU LEMME 15 : Si l'on considère une onde plane et qu'on l'injecte dans le schéma numérique, nous avons, pour tout $\mathbf{m} = (m_p)_{p=1..d} \in \{1..r\}^d$:

$$\omega^2\, \alpha_{\mathbf{m}}\, e^{\mathrm{i}(\omega t - \xi_{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{k})} = \sum_{\mathbf{j}|\xi_{\mathbf{m}}\in K_{\mathbf{j}}} \sum_{\mathbf{l}\in\{1..r+1\}^d} N_{d,r}(\mathbf{m}, \mathbf{j}r+\mathbf{l})\, \alpha_{\mathbf{l}}\, e^{\mathrm{i}(\omega t - \xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\cdot\mathbf{k})}$$

Soit :

$$\omega^2 \alpha_{\mathbf{m}} = \sum_{\mathbf{j} | \xi_{\mathbf{m}} \in K_{\mathbf{j}}} \sum_{\mathbf{l} \in \{1..r+1\}^d} N_{d,r}(\mathbf{m}, \mathbf{j}r+\mathbf{l})\, \alpha_{\mathbf{l}}\, e^{\mathrm{i}(\xi_{\mathbf{m}} - \xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}})\cdot \mathbf{k}}$$

Nous appliquons alors le lemme 14 :

$$\omega^2 \alpha_{\mathbf{m}} = \sum_{\mathbf{j} | \xi_{\mathbf{m}} \in K_{\mathbf{j}}} \sum_{\mathbf{l} \in \{1..r+1\}^d} \left(\sum_{p=1}^{d} N_{1,r}(m_p, j_p r + l_p) \prod_{q=1..d, q\neq p} \delta_{m_q, j_q r + l_q} \right) \times \alpha_{\mathbf{l}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_{\mathbf{m}} - \xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}})\cdot \mathbf{k}}$$

Nous avons donc :

$$\omega^2 \alpha_{\mathbf{m}} = \sum_{p=1}^{d} \sum_{j_p | \xi_{m_p} \in S_{j_p}} \sum_{l_p=1}^{r+1} N_{1,r}(m_p, j_p r + l_p) \alpha_{(m_1,\ldots,l_p,\ldots,m_d)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_{m_p} - \xi_{j_p r + l_p})k_p} \tag{7.65}$$

où $\alpha_{(m_1,\ldots,r+1,\ldots,m_d)} = \alpha_{(m_1,\ldots,1,\ldots,m_d)}$.
Or, nous pouvons exprimer $\alpha_{\mathbf{m}}$ en fonction de $\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]$ sous la forme

$$\omega^2 \alpha_{\mathbf{m}} = \sum_{\mathbf{n} \in \{1..r\}^d} \widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}](\mathbf{m}, \mathbf{n})\, \alpha_{\mathbf{n}} \tag{7.66}$$

En identifiant les termes des équations (7.65) et (7.66), nous pouvons exprimer $\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]$ en fonction de $N_{1,r}$:

$$\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}](\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \sum_{p=1}^{d} \left(\prod_{q=1..d, q\neq p} \delta_{m_q, n_q} \right) \sum_{j_p | \xi_{m_p} \in S_{j_p}} Y_{1,r}(m_p, j_p r + n_p) \tag{7.67}$$

avec :

$$\begin{cases} Y_{1,r}(m_p, j_p r + 1) &= N_{1,r}(m_p, j_p r + 1)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_{m_p} - \xi_{j_p r + 1})k_p} \\ &+ N_{1,r}(m_p, (j_p+1)r + 1)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_{m_p} - \xi_{(j_p+1)r+1})k_p} \\ Y_{1,r}(m_p, j_p r + n_p) &= N_{1,r}(m_p, j_p r + n_p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_{m_p} - \xi_{j_p r + n_p})k_p} \qquad \forall n_p = 2..r \end{cases}$$

Si l'on écrit l'équation (7.67) pour $d = 1$ et pour chacune des composantes de $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$, on obtient :

$$\widehat{N}_{1,r}[k_p](m_p, n_p) = \sum_{j_p | \xi_{m_p} \in S_{j_p}} Y_{1,r}(m_p, j_p r + n_p) \quad \forall p = 1..d \tag{7.68}$$

Nous reconnaissons le terme de droite de l'équation (7.67) et pouvons donc écrire :

$$\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}](\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \sum_{p=1}^{d} \left(\prod_{q=1..d, q\neq p} \delta_{m_q, n_q} \right) \widehat{N}_{1,r}[k_p](m_p, n_p)$$

◁

Ce lemme implique un résultat très important (démontré jusqu'à l'ordre 3 dans [70]) dans l'étude de la relation de dispersion :

Théorème 4 *Les valeurs propres et vecteurs propres de* $\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]$ *se déduisent des valeurs propres et vecteurs propres en dimension* 1 *par les relations :*

$$\omega^2_{h,\mathbf{j}}[\mathbf{k}] = \sum_{p=1}^{d} \omega^2_{h,j_p}[k_p] \tag{7.69a}$$

$$\alpha_{\mathbf{j}}[\mathbf{k}] = \bigotimes_{p=1}^{d} \alpha_{j_p}[k_p] \tag{7.69b}$$

où $\omega^2_{h,j_p}[k_p]$ *et* $\alpha_{j_p}[k_p]$ *sont respectivement les valeur propre et vecteur propre de* $\widehat{N}_{1,r}[k_p]$.

▷ PREUVE DU THÉORÈME 4 : Soit $\alpha_{\mathbf{j}}[\mathbf{k}] = \bigotimes_{p=1}^{d} \alpha_{j_p}[k_p]$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\hat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]\,\alpha_{\mathbf{j}}[\mathbf{k}] &= \sum_{\mathbf{l}\in\{1..r\}^d} \hat{N}_{d,r}[\mathbf{k}](\mathbf{j},\mathbf{l})\,\alpha_{\mathbf{j}}[\mathbf{k}](\mathbf{l}) \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in\{1..r\}^d} \left(\sum_{p=1}^{d} \widehat{N}_{1,r}[k_p]\,(j_p,l_p) \prod_{q=1..d,\,q\neq p} \delta_{j_q,l_q}\right) \left(\prod_{p=1}^{d} \alpha_{j_p}[k_p](l_p)\right) \\
&= \sum_{p=1}^{d} \left(\sum_{l_p=1}^{r} \widehat{N}_{1,r}[k_p]\,(j_p,l_p)\,\alpha_{j_p}[k_p](l_p)\right) \left(\prod_{q=1..d,\,q\neq p} \alpha_{j_q}[k_q](l_q)\right)
\end{aligned}$$

Or $\omega^2_{h,j_p}[k_p]$ est valeur propre de $\widehat{N}_{1,r}[k_p]$ associée à $\alpha_{j_p}[k_p]$.

$$\begin{aligned}
\hat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]\,\alpha_{\mathbf{j}}[\mathbf{k}] &= \sum_{p=1}^{d} \left(\omega^2_{h,j_p}[k_p]\,\alpha_{j_p}[k_p](l_p)\right) \prod_{q=1..d,\,q\neq p} \alpha_{j_q}[k_q](l_q) \\
&= \left(\sum_{p=1}^{d} \omega^2_{h,j_p}[k_p]\right) \prod_{p=1..d} \alpha_{j_p}[k_p] \\
&= \left(\sum_{p=1}^{d} \omega^2_{h,j_p}[k_p]\right) \alpha_{\mathbf{j}}[\mathbf{k}]
\end{aligned}$$

Les matrices $\hat{N}_{1,r}[k_l]$ admettant r valeurs propres complexes et vecteurs propres associés,nous avons trouvé au moins r^d valeurs propres et vecteurs propres de $\hat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]$. Or, il en existe au plus r^d. Nous avons donc trouvé, par cette méthode, toutes les valeurs propres et vecteurs propres de $\hat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]$. ◁

Ainsi, en 2D, posons q_h le rapport de la vitesse de phase de l'onde numérique physique sur la vitesse de phase de l'onde plane continue :

$$q_h = \frac{\omega_h}{\omega}$$

Soit N le nombre de points par longueur d'onde : $N = \dfrac{2\pi}{|\mathbf{k}|h} \times r = \dfrac{1}{K}$ avec $\mathbf{k} = k(\cos\theta, \sin\theta)$

Nous représentons les courbes de dispersion pour θ variant de 0° à $\theta = 45^\circ$ dans la figure 7.9 pour $r = 1$, la figure 7.10 pour $r = 2$ et $r = 3$ et dans la figure 7.11 pour $r = 4$ et $r = 5$.

Du point de vue de la relation de dispersion, il nous reste maintenant à étudier les vecteurs d'onde numériques en dimension d.
D'après le résultat précédent et comme nous n'avons qu'un unique vecteur d'onde numérique dans le cas 1D (à son signe près), nous avons le lemme :

Lemme 16 *Nous pouvons relier le vecteur d'onde numérique dD au vecteur d'onde numérique* 1*D : k par :*

$$\mathbf{k} = k\overrightarrow{u}$$

où $\overrightarrow{u}$ *est un vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^d$.

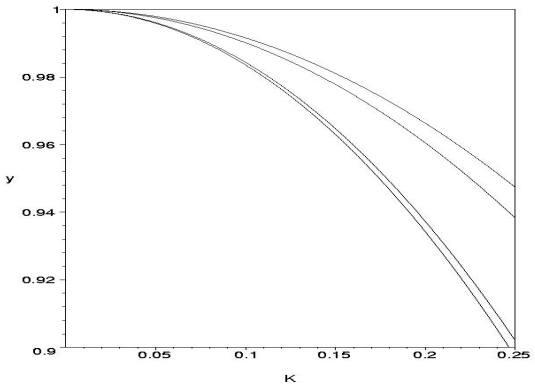


FIG. 7.9: Courbes de dispersion pour $r = 1$ en 2D pour θ variant de $0°$ (courbe inférieure) à $\theta = 45°$ (courbe supérieure).

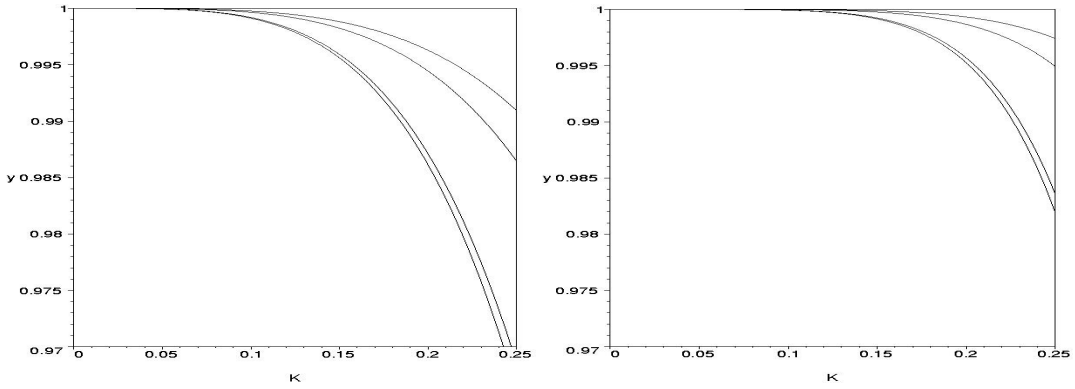


FIG. 7.10: Courbes de dispersion pour $r = 2$ (à gauche) et $r = 3$ (à droite) en 2D pour θ variant de $0°$ (courbe inférieure) à $\theta = 45°$ (courbe supérieure).

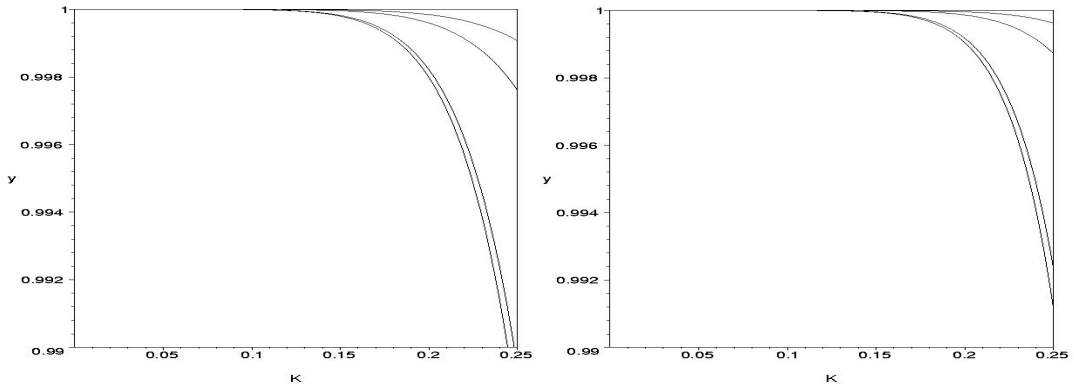


FIG. 7.11: Courbes de dispersion pour $r = 4$ (à gauche) et $r = 5$ (à droite) en 2D pour θ variant de 0° (courbe inférieure) à $\theta = 45^\circ$ (courbe supérieure).

7.2.3 Conclusion dans le cas dD

Nous avons vu que l'étude en dimension d se déduit de l'étude en dimension 1 et que nous gardons les mêmes ordres d'approximation :

Erreur L^2	Erreur sur ω	Erreur sur k	Erreur sur $\alpha_{d,r}$
$O\left(h^{r+2}\right)$	$O\left(h^{2r}\right)$	$O\left(h^{2r}\right)$	$O\left(h^{r+2}\right)$

7.3 Conséquences de l'analyse par ondes planes sur l'analyse de stabilité

Nous revenons dans cette section à l'analyse de stabilité effectuée sur le système obtenu par la méthode des éléments finis spectraux et un schéma saute-mouton d'ordre 2 en temps dans le chapitre 2.1. Dans ce chapitre, nous avions vu que le schéma :

$$D_{d,r}\,\frac{\mathbf{P}_h^{n+1}-2\mathbf{P}_h^n+\mathbf{P}_h^{n-1}}{\Delta t^2}+K_{d,r}\,\mathbf{P}_h^n=\frac{\mathbf{F}_h^{n+\frac{1}{2}}-\mathbf{F}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \tag{7.70}$$

est stable si et seulement si

$$sup_u\,\frac{\left(D_{d,r}^{-1}K_{d,r}u\,,\,u\right)}{(u\,,\,u)}\leq\frac{4}{\Delta t^2} \tag{7.71}$$

Il s'agit donc de déterminer la norme de $N_{d,r}=D_{d,r}^{-1}K_{d,r}$. Or, d'après l'égalité de Parseval, la norme de $N_{d,r}$ est égale à la norme de $\widehat{N}_{d,r}[k]$. Nous obtenons donc la condition de stabilité suivante :

$$sup_{k,\mathbf{i}}\left\{\omega_{h,\mathbf{i}}^2(\mathbf{k})\right\}\leq\frac{4}{\Delta t^2} \tag{7.72}$$

où les $\omega^2_{h,\mathbf{i}}(\mathbf{k})$ sont les valeurs propres de la matrice $\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]$ introduite dans les sections 7.14 (en dimension 1) et 7.2.2 (en dimension d).

Or, nous avons vu dans la section 7.2.2 au lemme 4 que les valeurs propres de $\widehat{N}_{d,r}[\mathbf{k}]$ sont les sommes de d valeurs propres de $\widehat{N}_{1,r}[k_l]$.
La condition de stabilité s'écrit donc :

$$sup_{k,i}\left\{\sum_{l=1}^{d}\omega^2_{h,i_l}[k_l]\right\} \leq \frac{4}{\Delta t^2} \tag{7.73}$$

Nous nous restreigons donc à la dimension 1 et déterminons le maximum des valeurs propres de $\widehat{N}_{1,r}$ pour r variant de 1 à 5. Nous nous rapporterons fréquemment aux résultats de la section 7.1.2.

7.3.1 Eléments finis P_1

L'équation (7.18) nous donne une forme explicite de la valeur propre de $\widehat{N}_{1,1}[k]$:

$$\omega^2_{h,1} = \frac{2}{h^2}\frac{\mu}{\rho}(1-\cos(kh)) \tag{7.74}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} sup_{k,i}\left\{\omega^2_{h,i}(k)\right\} &= 2\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{h^2}sup_{k\in\mathbb{R}}(1-\cos(kh)) \\ &= 4\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{h^2} \end{aligned}$$

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$c\frac{\Delta t}{h} \leq 1 \tag{7.75}$$

avec $c = \sqrt{\mu/\rho}$.

7.3.2 Eléments finis P_2

L'équation (7.24) nous donne une forme explicite des valeurs propres de $\widehat{N}_{1,2}[k]$:

$$\omega^2_{h,1} = \frac{1}{h^2}\frac{\mu}{\rho}\left(12-2s^2-2\sqrt{36-36s^2+s^4}\right) \tag{7.76a}$$

$$\omega^2_{h,2} = \frac{1}{h^2}\frac{\mu}{\rho}\left(12-2s^2+2\sqrt{36-36s^2+s^4}\right) \tag{7.76b}$$

où $s = \sin(kh/2)$.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned} sup_{k,i}\left\{\omega^2_{h,i}(k)\right\} &= 2\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{h^2}sup_{s\in[0,1]}\left(6-s^2+\sqrt{s^4-36s^2+36}\right) \\ &= 24\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{h^2} \end{aligned}$$

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$c\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{6}}{6} \simeq 0.4082 \tag{7.77}$$

avec $c = \sqrt{\mu/\rho}$.

7.3.3 Eléments finis P_3

Notons λ la valeur propre de $\widehat{N}_{1,3}[k]$.
Nous avons vu dans l'équation (7.29) que λ vérifie :

$$h^6\lambda^3 + 2\frac{\mu}{\rho}h^4(\cos(kh)-46)\lambda^2 + 120\frac{\mu^2}{\rho^2}h^2(\cos(kh)+14)\lambda + 3600\frac{\mu^3}{\rho^3}(\cos(kh)-1) = 0 \qquad (7.78)$$

λ étant racine d'un polynôme de degré 3, nous pouvons en donner une forme explicite. Toutefois, nous préférons présenter une méthode de calcul facilement généralisable aux cas $r \geq 3$, où nous n'aurons plus de forme explicite de la solution. Utilisons donc les propriétés de $sup_{k,i}\left\{\omega^2_{h,i}(k)\right\}$.
En fait, nous avons :

$$sup_{k,i}\left\{\omega^2_{h,i}(k)\right\} = sup_i\left\{\lambda_i(k_0) \mid \frac{d\lambda_i}{dk}(k_0) = 0\right\}$$

Posons :

$$P(k,\lambda) = h^6\lambda^3 + 2\frac{\mu}{\rho}h^4(\cos(kh)-46)\lambda^2 + 120\frac{\mu^2}{\rho^2}h^2(\cos(kh)+14)\lambda + 3600\frac{\mu^3}{\rho^3}(\cos(kh)-1)$$

Or :

$$P(\lambda(k)) = 0 \qquad \forall k$$

Nous avons donc :

$$\frac{dP}{dk} = 0 = \frac{\partial P}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dk} + \frac{\partial P}{\partial k}$$

Il nous faut donc trouver k_0 tel que $\dfrac{\partial P}{\partial k}(k_0) = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial k}(k_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(kh) = 0 \\ \text{ ou} \\ \dfrac{\mu}{\rho}h^4\lambda^2 + 60\dfrac{\mu^2}{\rho^2}h^2\lambda + 1800\dfrac{\mu^3}{\rho^3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(kh) = 0 \\ \text{ ou} \\ \dfrac{\rho}{\mu}h^2\lambda \text{ racine de } X^2 + 60X + 1800 = 0 \end{cases}$$

Or $X^2 + 60X + 1800 = 0$ n'a pas de racine réelle. L'unique solution est donc : $\sin(kh) = 0$, soit $\cos(kh) = \pm 1$.
Reprenons alors le polynôme P avec $\cos(kh) = \pm 1$:

$$P(1,\lambda) = h^6\lambda^3 - 90\frac{\mu}{\rho}h^4\lambda^2 + 1800\frac{\mu^2}{\rho^2}h^2\lambda = 0 \qquad (7.79a)$$

$$P(-1,\lambda) = h^6\lambda^3 - 94\frac{\mu}{\rho}h^4\lambda^2 + 1560\frac{\mu^2}{\rho^2}h^2\lambda - 7200\frac{\mu^3}{\rho^3} = 0 \qquad (7.79b)$$

dont les racines, classées par ordre croissant, sont :

$$\frac{\rho}{\mu}h^2\lambda \in \left\{0,\, 42-6\sqrt{29},\, 10,\, 30,\, 60,\, 42+6\sqrt{29}\right\}$$

Nous avons donc :

$$sup_{k,i}\left\{\omega_{h,i}^2(k)\right\} = \frac{\mu}{\rho}\frac{1}{h}\left(42+6\sqrt{29}\right)$$

La condition de stabilité s'écrit :

$$c\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{2}{\sqrt{6\left(7+\sqrt{29}\right)}} \simeq 0.23200 \tag{7.80}$$

7.3.4 Eléments finis P_r

La technique est la même que précédemment. Les calculs sont effectués avec Maple
Le tableau suivant résume les coefficients de stabilité pour différentes valeurs de r :

r	1	2	3	4	5
$cfl_{1,r} \simeq$	1	0.4082	0.2320	0.1476	0.1010

Chapitre 8

Etude de l'influence du choix du maillage au voisinage d'une interface entre deux milieux

Introduction

Dans ce chapitre, nous utilisons les résultats de l'étude précédente sur la structure fine de la solution pour étudier l'effet de la géométrie du maillage sur celle-ci. En effet, si l'on considère un domaine composé de différentes couches de géométries complexes associées à des propriétés physiques différentes, deux choix s'offrent à nous :

- Le premier choix consiste à construire un maillage adapté au milieu, c'est-à-dire tel que le pas d'espace du maillage dépende de la vitesse de l'onde en chaque point du domaine et de la géométrie de celui-ci (voir fig. 8.1). Un tel maillage est optimal au niveau du nombre d'éléments qui le composent et minimise donc stockage et temps de calcul. Par contre, la géométrie complexe des milieux étudiées (milieux sismiques) implique une déformation non-négligeable de certains des éléments du maillage. De plus, avec les logiciels actuels, le temps de construction d'un tel maillage peut être non-négligeable lors d'une modélisation.
- Le second choix consiste à considérer un pas d'espace constant sur tout le maillage et à ne pas tenir compte la géométrie du domaine (voir fig. 8.2). Le pas d'espace est alors adapté à la vitesse minimale de l'onde dans le domaine, ce qui implique, dans des modèles avec de fortes variations de vitesses, un nombre beaucoup plus important d'éléments et donc un temps de calcul beaucoup plus grand que dans le cas du maillage adapté.

Pour notre analyse, nous nous plaçons dans le cas simple d'un modèle infini constitué de deux couches de vitesses différentes. En utilisant la forme de la solution donnée dans l'étude de dispersion pour un milieu infini homogène, nous obtenons des résultats théoriques généraux sur l'erreur générée par l'utilisation d'un maillage adapté ou non sur les coefficients de réflexion et de transmission entre deux milieux de propriétés physiques différentes.

Comme dans le chapitre précédent, le cadre particulier de l'analyse : milieu infini homogène maillé de façon régulière et avec le même pas d'espace dans toutes les directions, nous permet de généraliser sans difficulté les résultats obtenus en dimension 1.

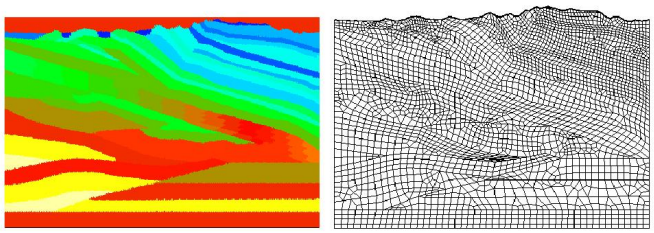


FIG. 8.1: Exemple de maillage adapté (environ 3500 éléments).

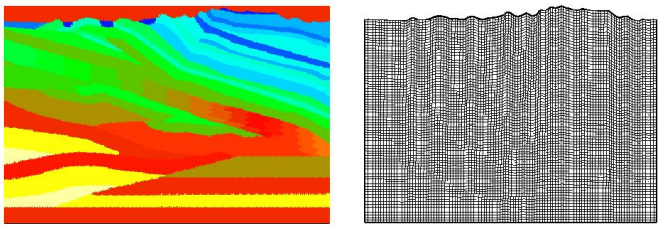


FIG. 8.2: Exemple de maillage non-adapté (8700 éléments).

8.1 Dimension 1

Nous considérons un milieu bicouche 1D :

$$(\rho(x),\mu(x)) = \begin{cases} (\rho_1,\mu_1) & \forall x < x_0 \\ (\rho_2,\mu_2) & \forall x \geq x_0 \end{cases}$$

Nous avons défini dans l'introduction ce que nous entendions par maillage adapté et maillage non-adapté. Dans le cas particulier monodimensionnel et pour l'ordre d'approximation P_3, un exemple de maillage non-adapté et de maillage adapté sont présentés dans la figure 8.3. Le premier milieu, de densité ρ_1 et de module de compressibilité μ_1 est représenté par un trait bleu. Le second milieu, de densité ρ_2 et de module de compressibilité μ_2 est représenté par un trait rouge. L'interface entre les deux milieux est en x_0. Les images des points d'interpolation du maillage sont représentés par un disque noir et les bords des éléments par un trait noir continu.

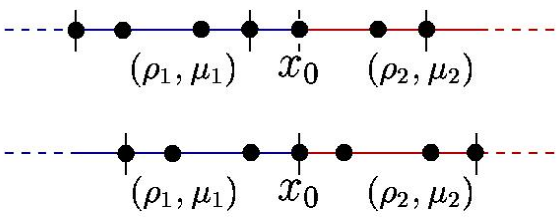


FIG. 8.3: Dans le cas P_3, un maillage non-adapté (en haut) et adapté (en bas).

Nous allons donc déterminer les conséquences de l'utilisation de l'un et l'autre des deux maillages sur les ondes transmise et réfléchie.

8.1.1 Dans le cas continu

Rappelons tout d'abord les coefficients de réflexion et de transmission dans le cas continu, pour le même domaine bicouche.

Nous savons que les solutions de l'équation des ondes peuvent s'écrire comme une superposition d'ondes planes. Nous considérons donc une onde incidente venant de $-\infty$. Nous cherchons alors la solution de l'équation sous la forme :

$$p(x,t) = \begin{cases} e^{i(\omega t - k_1 x)} + R e^{i(\omega t + k_1 x)} & \forall x < x_0 \\ T e^{i(\omega t - k_2 x)} & \forall x > x_0 \end{cases} \tag{8.1}$$

où R et T sont les amplitudes respectives des ondes réfléchie et transmise, et où k_1 et k_2 vérifient les relations de dispersion dans chaque milieu :

$$k_1 = \omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \qquad \text{et} \qquad k_2 = \omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}$$

La solution et sa dérivée normale pondérée par $1/\rho$ sont continues en x_0. Ceci se traduit par :

$$1 + R = T \tag{8.2a}$$

$$\frac{1}{\rho_1} k_1 (1 - R) = \frac{1}{\rho_2} k_2 T \tag{8.2b}$$

En injectant les relations de dispersion dans ces équations, nous obtenons :

$$R = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \tag{8.3a}$$

$$T = \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \tag{8.3b}$$

où σ_1 et σ_2 sont les impédances des milieux, définies par $\sigma_i = \sqrt{\mu_i \rho_i}$.

8.1.2 Cas d'un maillage adapté

Nous nous plaçons donc dans le cas où l'interface entre les deux milieux coïncide avec l'interface entre deux éléments : K_{-1} et K_0. Notons $(\xi_{jr+l})_{l=1..r+1}$ les images, sur K_j, des $r+1$ points d'interpolation définis sur $\hat{K}$. Nous sommes donc dans la configuration de la figure 8.4.

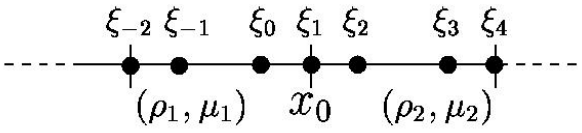


FIG. 8.4: Cas d'un maillage adapté, pour $r = 3$.

Nous allons supposer que $x_0 = 0$ pour simplifier les calculs. Cette hypothèse n'aura aucune incidence sur les résultats de cette étude.

Par analogie avec le cas continu, nous cherchons une solution de l'équation des ondes dans le milieu bicouche sous la forme :

$$\mathbf{P}_{jr+l} = \alpha_l^{(1)} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - k_1 \xi_{jr+l}\right)} + R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t + k_1 \xi_{jr+l}\right)} \right] \quad \forall j < 0,\ \forall l = 1..r+1 \tag{8.4a}$$

$$\mathbf{P}_{jr+l} = \alpha_l^{(2)}\, T\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - k_2 \xi_{jr+l}\right)} \quad \forall j \geq 0,\ \forall l = 1..r+1 \tag{8.4b}$$

où, si l'on pose $\alpha^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, ..., \alpha_r^{(1)})$ et $\alpha^{(2)} = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, ..., \alpha_r^{(2)})$ et que l'on considère que $\alpha_{r+1}^{(1)} = \alpha_1^{(1)}$ et $\alpha_{r+1}^{(2)} = \alpha_1^{(2)}$, les couples $(\alpha^{(1)}, k_1)$ et $(\alpha^{(2)}, k_2)$ vérifient le système (7.40) du chapitre 7 respectivement pour un milieu homogène (ρ_1, μ_1) et (ρ_2, μ_2).

Posons alors :

$$\mathbf{P}_{jr+l}^{(1)} = \alpha_l^{(1)} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - k_1 \xi_{jr+l}\right)} + R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t + k_1 \xi_{jr+l}\right)} \right] \quad \forall j,\ \forall l = 1..r+1 \tag{8.5a}$$

$$\mathbf{P}_{jr+l}^{(2)} = \alpha_l^{(2)}\, T\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - k_2 \xi_{jr+l}\right)} \quad \forall j,\ \forall l = 1..r+1 \tag{8.5b}$$

L'ensemble des $\mathbf{P}_{jr+l}^{(1)}$, d'après leur définition, vérifie le système matriciel (7.11) pour un milieu homogène (ρ_1, μ_1).
Nous pouvons donc écrire en ξ_1, avec les notations introduites dans le chapitre 7 :

$$\frac{1}{\mu_1} h^2 2\, \hat{\omega}_1 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{P}_1^{(1)}}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{1}{\rho_1} \hat{K}_{1,r}(l, r+1)\, \mathbf{P}_{-r+l}^{(1)} + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{1}{\rho_1} \hat{K}_{1,r}(l,1)\, \mathbf{P}_l^{(1)} = 0 \tag{8.6}$$

L'ensemble des $\mathbf{P}_{jr+l}^{(2)}$, d'après leur définition, vérifie le système matriciel (7.11) pour un milieu homogène (ρ_2, μ_2).
Nous pouvons donc écrire, en ξ_1 :

$$\frac{1}{\mu_2} h^2 2\, \hat{\omega}_1 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{P}_1^{(2)}}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{1}{\rho_2} \hat{K}_{1,r}(l, r+1)\, \mathbf{P}_{-r+l}^{(2)} + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{1}{\rho_2} \hat{K}_{1,r}(l,1)\, \mathbf{P}_l^{(2)} = 0 \tag{8.7}$$

Dans le milieu bicouche, chaque segment du maillage étant homogène, nous avons :

$$\int_{S_j} \frac{1}{\mu} \varphi_{jr+l}^2 dx = \frac{1}{\mu} \int_{S_j} \varphi_{jr+l}^2 dx = h \frac{1}{\mu} \hat{D}_{1,r}(l) \qquad \forall j,\ \forall l = 1..r+1$$

$$\int_{S_j} \frac{1}{\rho} \varphi'_{jr+l_1} \varphi'_{jr+l_2} dx = \frac{1}{\rho} \int_{S_j} \varphi'_{jr+l_1} \varphi'_{jr+l_2} dx = \frac{1}{h} \frac{1}{\rho} \hat{K}_{1,r}(l_1, l_2) \qquad \forall j,\ \forall l_1, l_2 = 1..r+1$$

L'équation en ξ_1 s'écrit alors :

$$\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) h^2\, \hat{\omega}_1 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{P}_1}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{1}{\rho_1} \hat{K}_{1,r}(l, r+1)\, \mathbf{P}_{-r+l} + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{1}{\rho_2} \hat{K}_{1,r}(l,1)\, \mathbf{P}_l = 0 \tag{8.8}$$

Or, nous avons :

$$\mathbf{P}_{jr+l} = \mathbf{P}_{jr+l}^{(1)} \quad \forall j \leq 0,\ \forall l = 1..r+1 \tag{8.9a}$$

$$\mathbf{P}_{jr+l} = \mathbf{P}_{jr+l}^{(2)} \quad \forall j \geq 0,\ \forall l = 1..r+1 \tag{8.9b}$$

En retranchant la demi-somme des équations (8.6) et (8.7) à (8.8), nous montrons que (8.8) est vérifiée si et seulement si :

$$\frac{1}{\rho_1}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,r+1)\,\mathbf{P}_{-r+l}^{(1)}-\frac{1}{\rho_1}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,1)\,\mathbf{P}_{l}^{(1)}$$
$$=$$
$$\frac{1}{\rho_2}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,r+1)\,\mathbf{P}_{-r+l}^{(2)}-\frac{1}{\rho_2}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,1)\,\mathbf{P}_{l}^{(2)}$$

Or, d'après le lemme 5 du chapitre 7, nous avons l'égalité suivante, pour tout $a=1,2$:

$$\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,r+1)\,\mathbf{P}_{-r+l}^{(a)}=\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(2+r-l,1)\,\mathbf{P}_{-r+l}^{(a)}=\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,1)\,\mathbf{P}_{2-l}^{(a)}$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{1}{\rho_1}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,1)\left(\mathbf{P}_{l}^{(1)}-\mathbf{P}_{2-l}^{(1)}\right)=\frac{1}{\rho_2}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,1)\left(\mathbf{P}_{l}^{(2)}-\mathbf{P}_{2-l}^{(2)}\right)\tag{8.10}$$

Nous allons, à présent, chercher un développement limité de R et T sous la forme :

$$R=\sum_{n=0}^{N}R_n h^n+O\left(h^{N+1}\right)$$
$$T=\sum_{n=0}^{N}T_n h^n+O\left(h^{N+1}\right)$$

D'après l'expression de $\mathbf{P}_{jr+l}^{(1)}$ donnée en (8.5a), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{l}^{(1)}-\mathbf{P}_{2-l}^{(1)}&=\alpha_l^{(1)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k_1\xi_l)}+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+k_1\xi_l)}\right]-\alpha_{2+r-l}^{(1)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k_1\xi_{2+r-l})}+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+k_1\xi_{2+r-l})}\right]\\&=\alpha_l^{(1)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-k_1h\hat{\xi}_l\right)}+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+k_1h\hat{\xi}_l\right)}\right]-\alpha_{2+r-l}^{(1)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+k_1h\hat{\xi}_l\right)}+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-k_1h\hat{\xi}_l\right)}\right]\end{aligned}$$

Supposons $r\geq 2$ et posons :

$$\begin{aligned}M&=r+1 \qquad \text{si } r \text{ est impaire}\\M&=r+2 \qquad \text{si } r \text{ est paire}\end{aligned}$$

D'après le lemme 10 du chapitre 7, le développement limité de $\alpha_l^{(1)}$ à l'ordre $r+3$ est égal au développement limité de $\alpha_{2+r-l}^{(1)}$ à l'ordre $r+3$ pour tout l.
Ainsi, le développement limité à l'ordre $M+1$ de $\mathbf{P}_{l}^{(1)}-\mathbf{P}_{2-l}^{(1)}$ est égal au développement limité à l'ordre $M+1$ de $2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\alpha_l^{(2)}\,\sin(k_1h\hat{\xi}_l)\,(-1+R)$.
En utilisant le développement limité de k_1 donné par le théorème 3, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left(\mathbf{P}_{l}^{(1)}-\mathbf{P}_{2-l}^{(1)}\right)=&-\sum_{n=0}^{M}h^n\sum_{p=1}^{n}\frac{\mathrm{i}^p-(-\mathrm{i})^p}{p!}\hat{\xi}_l^{\,p}\omega^p\left(\frac{\rho_1}{\mu_1}\right)^{\frac{p}{2}}\alpha_{1,n-p}^{(1)}\\&+\sum_{n=0}^{M}h^n\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=1}^{q}\frac{\mathrm{i}^p-(-\mathrm{i})^p}{p!}\hat{\xi}_l^{\,p}\omega^p\left(\frac{\rho_1}{\mu_1}\right)^{\frac{p}{2}}\alpha_{1,q-p}^{(1)}R_{n-q}+O\left(h^{M+1}\right)\end{aligned}$$

De même, le développement limité à l'ordre $M+1$ de $\mathbf{P}_l^{(2)} - \mathbf{P}_{2-l}^{(2)}$ est égal au développement limité à l'ordre $M+1$ de $-2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\alpha_l^{(2)}\,\sin(k_2 h\,\hat{\xi}_l)\,T$, soit :

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left(\mathbf{P}_l^{(2)} - \mathbf{P}_{2-l}^{(2)}\right) = -\sum_{n=0}^{M} h^n \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p - (-\mathrm{i})^p}{p!}\hat{\xi}_l^p\,\omega^p \left(\frac{\rho_2}{\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha_{1,q-p}^{(2)} T_{n-q} + O\left(h^{M+1}\right)$$

Explicitons le terme de gauche de l'équation (8.10) :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,1)\left(\mathbf{P}_l^{(1)} - \mathbf{P}_{2-l}^{(1)}\right) &= \sum_{n=0}^{M} h^n \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p - (-\mathrm{i})^p}{p!}\omega^p \left(\frac{\rho_1}{\mu_1}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha_{1,q-p}^{(1)} R_{n-q}(-1)^p A_{r,1}^p \\ &\quad - \sum_{n=0}^{M} h^n \sum_{p=1}^{n} \frac{\mathrm{i}^p - (-\mathrm{i})^p}{p!}\omega^p \left(\frac{\rho_1}{\mu_1}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha_{1,n-p}^{(1)}(-1)^p A_{r,1}^p + O\left(h^{M+1}\right)\end{aligned}$$

où $A_{r,1}^p$ a été défini dans le chapitre précédent (définition 5).
Les termes de la somme pour p paire s'éliminent. Nous utilisons les résultats du lemme 8. pour simplifier l'équation.
Comme la plus grande puissance impaire inférieure ou égale à M est $r+1$, nous avons :

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,1)\left(\mathbf{P}_l^{(1)} - \mathbf{P}_{2-l}^{(1)}\right) = 2\mathrm{i}\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}}\sum_{n=1}^{M} h^n \left(\alpha_{1,n-1}^{(1)} - \sum_{q=1}^{n}\alpha_{1,q-1}^{(1)} R_{n-q}\right) + O\left(h^{M+1}\right)$$

De la même façon, nous obtenons :

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l,1)\left(\mathbf{P}_l^{(2)} - \mathbf{P}_{2-l}^{(2)}\right) = 2\mathrm{i}\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}\sum_{n=1}^{M} h^n \sum_{q=1}^{n}\alpha_{1,q-1}^{(2)} T_{n-q} + O\left(h^{M+1}\right)$$

Ainsi, l'équation (8.10) est vérifiée si nous avons :

$$\sigma_1^{-1}\left(\alpha_{1,n-1}^{(1)} - \sum_{q=1}^{n}\alpha_{1,q-1}^{(1)} R_{n-q}\right) = \sigma_2^{-1}\sum_{q=1}^{n}\alpha_{1,q-1}^{(2)} T_{n-q} \qquad \forall n = 1..M \tag{8.11}$$

où σ_1 et σ_2 ont été définis dans la section 8.1.1 par $\sigma_1 = \sqrt{\rho_1\mu_1}$ et $\sigma_2 = \sqrt{\rho_2\mu_2}$.

Exprimons, à présent, la relation de continuité de la solution, dans le cas du domaine bicouche, entre les deux milieux. En $x = 0$, nous avons :

$$\alpha_1^{(1)}(1+R) = \alpha_1^{(2)} T$$

Soit, en considérant les développements limités de chacun des termes et en identifiant :

$$\alpha_{1,n}^{(1)} + \sum_{q=0}^{n}\alpha_{1,q}^{(1)} R_{n-q} = \sum_{q=0}^{n}\alpha_{1,q}^{(2)} T_{n-q} \qquad \forall n = 0..M+1 \tag{8.12}$$

En conjuguant les équations (8.11) et (8.12), il nous reste à résoudre :

$$\sigma_1^{-1}\left(\alpha_{1,n-1}^{(1)} - \sum_{q=1}^{n}\alpha_{1,q-1}^{(1)} R_{n-q}\right) = \sigma_2^{-1}\left(\alpha_{1,n-1}^{(1)} + \sum_{q=1}^{n}\alpha_{1,q-1}^{(1)} R_{n-q}\right) \qquad \forall n = 1..M \tag{8.13}$$

Ainsi, pour $n = 1$, nous obtenons :

$$\sigma_1^{-1}\alpha_{1,0}^{(1)}(1-R_0) = \sigma_2^{-1}\alpha_{1,0}^{(1)}(1+R_0) \tag{8.14}$$

Nous retrouvons bien le coefficient de réflexion dans le cas continu :

$$R_0 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$$

Nous effectuons alors une récurrence élémentaire : montrons que, pour tout N compris entre 1 et $M-2$

$$R_n = 0 \quad \forall n = 1..N \qquad \Rightarrow \qquad R_{N+1} = 0$$

Nous supposons donc que $R_n = 0$ pour tout n compris entre 1 et N. Nous pouvons alors simplifier l'équation (8.13) écrite pour $n = N+2$:

$$\sigma_1^{-1}\alpha_{1,N+1}^{(1)} - \sigma_1^{-1}\sum_{q=1}^{N+2}\alpha_{1,q-1}^{(1)}R_{N+2-q} = \sigma_2^{-1}\alpha_{1,N+1}^{(1)} + \sigma_2^{-1}\sum_{q=1}^{N+2}\alpha_{1,q-1}^{(1)}R_{N+2-q}$$

$$\sigma_1^{-1}\alpha_{1,N+1}^{(1)}(1-R_0) - \sigma_1^{-1}\alpha_{1,0}^{(1)}R_{N+1} = \sigma_2^{-1}\alpha_{1,N+1}^{(1)}(1+R_0) + \sigma_2^{-1}\alpha_{1,0}^{(1)}R_{N+1}$$

Nous utilisons alors l'égalité (8.14) et obtenons :

$$-\sigma_1^{-1}\alpha_{1,0}^{(1)}R_{N+1} = \sigma_2^{-1}\alpha_{1,0}^{(1)}R_{N+1}$$

σ_1 et σ_2 étant positifs, nous vérifions bien la récurrence.

Explicitons à présent T en reprenant l'équation (8.12) et en utilisant l'expression de R :

$$\alpha_{1,n-1}^{(1)}(1+R_0) = \sum_{q=1}^{n}\alpha_{1,q-1}^{(2)}T_{n-q} \qquad \forall n = 1..M$$

Or, d'après la remarque 8, pour tout n compris entre 0 et $r+1$, nous pouvons prendre $\alpha_{1,n}^{(1)} = \alpha_{1,n}^{(2)} = \alpha_{1,n}$. Ainsi, M étant inférieur ou égal à $r+2$, l'équation devient :

$$\alpha_{1,n-1}(1+R_0) = \sum_{q=1}^{n}\alpha_{1,q-1}T_{n-q} \qquad \forall n = 1..M$$

Pour $n = 1$, nous avons $1 + R_0 = T_0$.
Ensuite, nous démontrons facilement par une récurrence similaire au calcul de R que $T_n = 0, \forall n = 1..M-1$.

Lemme 17 *Dans le cas d'un maillage adapté, les coefficients de réflexion et de transmission entre deux milieux* (ρ_1, μ_1) *et* (ρ_2, μ_2) *s'écrivent sous la forme :*

$$R = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} + O\left(h^M\right) \tag{8.15a}$$

$$T = \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} + O\left(h^M\right) \tag{8.15b}$$

où :

$$M = r+1 \qquad \textit{si } r \textit{ est impaire}$$
$$M = r+2 \qquad \textit{si } r \textit{ est paire}$$

Remarque 65 *En fait, nous avons démontré que le coefficient de réflexion et le coefficient de transmission sont au moins en $O\left(h^M\right)$. Toutefois, en effectuant les calculs pour $r = 2..5$ à l'aide de Maple, nous trouvons exactement ce résultat.*

Remarque 66 *Nous aurions obtenu le même résultat si nous avions considéré un pas d'espace différent dans le premier et dans le second milieu. En effet, si l'on s'intéresse à l'écriture de l'équation (8.8) dans le cas où l'on a un pas d'espace h dans le premier milieu et un pas d'espace $a \times h$ dans le second milieu, cela revient à considérer un module de compressibilité dans le second milieu égal à μ_2/a. La suite de la démonstration est évidente.*

8.1.3 Cas d'un maillage non-adapté

Nous nous plaçons donc dans le cas où l'interface entre les deux milieux ne coïncide pas avec l'interface entre deux éléments mais est située à l'intérieur d'un élément du maillage : K_0. Nous sommes donc dans la configuration de la figure 8.5. Nous supposerons que $\xi_1 = 0$ afin de simplifier les calculs sans altérer les résultats.

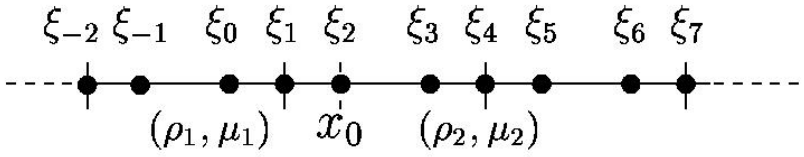


FIG. 8.5: Cas d'un maillage non adapté, pour $r = 3$.

Nous allons, comme dans le cas du maillage adapté, chercher un développement limité de R et T sous la forme :

$$R = \sum_{n=0}^{N} R_n h^n + O\left(h^{N+1}\right)$$
$$T = \sum_{n=0}^{N} T_n h^n + O\left(h^{N+1}\right)$$

Afin d'approcher au mieux l'interface, nous considérons, dans $[\xi_0, \xi_{r+1}]$, les fonctions :

$$\frac{1}{\mu}(x) = \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)x + \frac{1}{\mu_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho}(x) = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)x + \frac{1}{\rho_1}$$

L'interface se situant à l'intérieur de l'élément, il n'est plus possible d'appliquer la même méthode que dans le cas de l'interface entre les deux éléments. En effet, on aurait alors $r+1$ équations (équations aux ξ_l, $l = 1..r+1$) pour seulement deux inconnues (R et T).

Nous posons donc :

$$\mathbf{P}_{jr+l} = \alpha_l^{(1)}\left[e^{i(\omega t - k_1 \xi_{jr+l})} + R\, e^{i(\omega t + k_1 \xi_{jr+l})}\right] \qquad \forall j \leq -1, \forall l = 1..r+1 \tag{8.16a}$$
$$\mathbf{P}_{jr+l} = \alpha_l^{(2)}\, T\, e^{i(\omega t - k_2 \xi_{jr+l})} \qquad \forall j \geq 1, \forall l = 1..r+1 \tag{8.16b}$$

où les $\alpha_l^{(1)}$ et $\alpha_l^{(2)}$ vérifient les mêmes propriétés que dans le cas du maillage adapté.
Les $(\mathbf{P}_l)_{l=2..r}$ restent inconnues.

Ainsi, en écrivant les équations aux $(\xi_l)_{l=1..r+1}$, nous obtenons $r+1$ équations à $r+1$ inconnues (les $\mathbf{P}_l$ ainsi que R et T).

Les termes de la matrice de rigidité aux degrés de libertés inclus dans des segments homogènes s'expriment facilement en fonction de $\hat{K}_{1,r}$ comme dans le cas du maillage adapté.
Par contre, pour les degrés de libertés situés dans $[\xi_1, \xi_{r+1}]$, ces termes sont plus complexes. Nous définissons alors :

Definition 8 *Soit $\hat{R}_{1,r}(j,l)$ la valeur obtenue par intégration numérique de Gauss-Lobatto sur $[0,1]$, de :*

$$\int_0^1 \frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j'(\hat{x})\,\hat{\varphi}_l'(\hat{x})\,d\hat{x} \qquad \text{où } \frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x}) = \frac{1}{\rho}(h\hat{x}).$$

Les équations aux $(\xi_l)_{l=1..r+1}$ s'écrivent alors :

$$0 = 2\frac{1}{\mu_1} h^2\,\hat{\omega}_1 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_1}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{1}{\rho_1}\hat{K}_{1,r}(r+1,l)\,\mathbf{P}_{-r+l} + \sum_{l=1}^{r+1} \hat{R}_{1,r}(1,l)\,\mathbf{P}_l \tag{8.17a}$$

$$0 = \frac{1}{\mu}(\xi_j)\,h^2\,\hat{\omega}_j \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_j}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{l=1}^{r+1} \hat{R}_{1,r}(j,l)\,\mathbf{P}_l \qquad \forall j = 2..r \tag{8.17b}$$

$$0 = 2\frac{1}{\mu_2} h^2\,\hat{\omega}_1 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}_{r+1}}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{l=1}^{r+1} \hat{R}_{1,r}(r+1,l)\,\mathbf{P}_l + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{1}{\rho_2}\hat{K}_{1,r}(1,l)\,\mathbf{P}_{r+l} \tag{8.17c}$$

Posons :

$$\mathbf{P}^{(1)}_{jr+l} = \alpha_l^{(1)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - k_1\xi_{jr+l}\right)} + R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t + k_1\xi_{jr+l}\right)}\right] \quad \forall j,\ \forall l = 1..r+1 \tag{8.18a}$$

$$\mathbf{P}^{(2)}_{jr+l} = \alpha_l^{(2)}\,T\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - k_2\xi_{jr+l}\right)} \qquad \forall j,\ \forall l = 1..r+1 \tag{8.18b}$$

Nous avons, $\forall l = 1..r+1$, $\mathbf{P}_{-r+l} = \mathbf{P}^{(1)}_{-r+l}$ et $\mathbf{P}_{r+l} = \mathbf{P}^{(2)}_{r+l}$.
Considérons un développement limité des $\mathbf{P}_l$ sous la forme :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sum_{n=0}^{N}\mathbf{P}_{l,n}h^n + O\left(h^N\right)$$

Nous allons développer une à une les équations du système (8.17).

1. l'équation (8.17a) s'écrit :

$$0 = 2\frac{1}{\mu_1} h^2\,\hat{\omega}_1 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}^{(1)}_1}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{1}{\rho_1}\hat{K}_{1,r}(r+1,l)\mathbf{P}^{(1)}_{-r+l} + \hat{R}_{1,r}(1,1)\mathbf{P}^{(1)}_1 + \sum_{l=2}^{r}\hat{R}_{1,r}(1,l)\mathbf{P}_l + \hat{R}_{1,r}(1,r+1)\mathbf{P}^{(2)}_{r+1}$$

Calculons $\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,l)\mathbf{P}^{(1)}_{-r+l}$.
D'après le lemme 5 du chapitre 7, nous avons :

$$\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,l)\,\mathbf{P}^{(1)}_{-r+l} = \sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,2+r-l)\mathbf{P}^{(1)}_{-r+l} = \sum_{m=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m)\mathbf{P}^{(1)}_{2-m}$$

Or, le lemme 10 du chapitre 7 et l'expression de R nous permettent d'écrire, pour $N \leq r+1$:

$$\mathbf{P}^{(1)}_{2-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \sum_{n=1}^{N} h^n \sum_{p=1}^{n} \frac{\mathrm{i}^p}{p!}\hat{\xi}^p_m \omega^p \left(\frac{\rho_1}{\mu_1}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha^{(1)}_{1,n-p} + \sum_{n=0}^{N} h^n \sum_{q=0}^{n} \alpha^{(1)}_{1,q} R_{n-q}$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} h^n \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{q} \frac{(-\mathrm{i})^p}{p!}\hat{\xi}^p_m \omega^p \left(\frac{\rho_1}{\mu_1}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha^{(1)}_{1,q-p} R_{n-q} + O\left(h^{N+1}\right)$$

Ainsi :

$$\sum_{m=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,m)\mathbf{P}^{(1)}_{2-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \sum_{n=1}^{N} h^n \sum_{p=1}^{n} \frac{(-\mathrm{i})^p}{p!} A^p_{r,1} \omega^p \left(\frac{\rho_1}{\mu_1}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha^{(1)}_{1,n-p} + \sum_{n=0}^{N} h^n \sum_{q=0}^{n} \alpha^{(1)}_{1,q} R_{n-q} A^0_{r,1}$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} h^n \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{q} \frac{\mathrm{i}^p}{p!} A^p_{r,1} \omega^p \left(\frac{\rho_1}{\mu_1}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha^{(1)}_{1,q-p} R_{n-q} + O\left(h^{N+1}\right)$$

Soit, en utilisant les résultats du lemme 8 ($N \leq r+1$) :

$$\sum_{m=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,m)\mathbf{P}^{(1)}_{2-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}}\,\omega \sum_{n=1}^{N} h^n (\alpha^{(1)}_{1,n-1} - \sum_{q=1}^{n} \alpha^{(1)}_{1,q-1} R_{n-q})$$
$$+ \hat{\omega}_1 \frac{\rho_1}{\mu_1}\,\omega^2 \sum_{n=2}^{N} h^n (\alpha^{(1)}_{1,n-2} + \sum_{q=2}^{n} \alpha^{(1)}_{1,q-2} R_{n-q}) + O\left(h^{N+1}\right)$$

Les développements limités des $\mathbf{P}^{(1)}_{jr+l}$ et des $\mathbf{P}^{(2)}_{jr+l}$ sont les mêmes que dans le cas du maillage adapté.
Identifions alors les termes de l'équation (8.17a) pour $0 \leq n \leq 2$:

- $n = 0$:

$$0 = \hat{R}_{1,r}(1,1)\,\alpha^{(1)}_{1,0}(1+R_0) + \sum_{l=2}^{r} \hat{R}_{1,r}(1,l)\,\mathbf{P}_{l,0} + \hat{R}_{1,r}(1,r+1)\,\alpha^{(2)}_{1,0} T_0 \tag{8.19}$$

- $n = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathrm{i}\frac{1}{\sigma_1}\,\omega\,\alpha^{(1)}_{1,0}(1-R_0) + \left[\alpha^{(1)}_{1,1}(1+R_0) + \alpha^{(1)}_{1,0}\right]\hat{R}_{1,r}(1,1) \\ &+ \sum_{l=2}^{r} \hat{R}_{1,r}(1,l)\mathbf{P}_{l,1} + \left[\alpha^{(2)}_{1,0} T_1 + \alpha^{(2)}_{1,1} T_0 - \mathrm{i}\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}\alpha^{(2)}_{1,0} T_0\right]\hat{R}_{1,r}(1,r+1) \end{aligned} \tag{8.20}$$

- $n = 2$:

$$\begin{aligned} 0 &= -2\frac{1}{\mu_1}\,\hat{\omega}_1\,\omega^2\,\alpha^{(1)}_{1,0}(1+R_0) - \mathrm{i}\,\frac{1}{\sigma_1}\,\omega\,(\alpha^{(1)}_{1,1} - \alpha^{(1)}_{1,0}R_1 - \alpha^{(1)}_{1,1}R_0) \\ &+ \hat{\omega}_1 \frac{1}{\mu_1}\,\omega^2\,(\alpha^{(1)}_{1,0} + \alpha^{(1)}_{1,0}R_0) + \hat{R}_{1,r}(1,1)\sum_{q=0}^{2} \alpha^{(1)}_{1,q} R_{2-q} + \sum_{l=2}^{r} \hat{R}_{1,r}(1,l)\,\mathbf{P}_{l,2} \\ &+ \hat{R}_{1,r}(1,r+1)\left[\sum_{q=1}^{2}\sum_{p=1}^{q} \frac{(-\mathrm{i})^p}{p!}\omega^p \left(\frac{\rho_2}{\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha^{(2)}_{1,q-p} T_{2-q} + \sum_{q=0}^{2} \alpha^{(2)}_{1,q} T_{2-q}\right] \end{aligned} \tag{8.21}$$

2. Identifions à présent les termes en h^n de l'équation (8.17b), pour $0 \leq n \leq 2$.
Nous avons :

- $n=0 : \forall j = 2..r$

$$0 = \hat{R}_{1,r}(j,1)\,\alpha^{(1)}_{1,0}(1+R_0) + \sum_{l=2}^{r} \hat{R}_{1,r}(j,l)\,\mathbf{P}_{l,0} + \hat{R}_{1,r}(j,r+1)\,\alpha^{(2)}_{1,0} T_0 \tag{8.22}$$

- $n=1 : \forall j = 2..r$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\alpha^{(1)}_{1,1}(1+R_0) + \alpha_{1,0}\right]\hat{R}_{1,r}(j,1) + \sum_{l=2}^{r} \hat{R}_{1,r}(j,l)\mathbf{P}_{l,1} \\ &+ \left[\alpha^{(2)}_{1,0} T_1 + \alpha^{(2)}_{1,1} T_0 - \mathrm{i}\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}\alpha^{(2)}_{1,0} T_0\right]\hat{R}_{1,r}(j,r+1) \end{aligned} \tag{8.23}$$

- $n=2 : \forall j = 2..r$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\mu}(\xi_j)\,\hat{\omega}_j\,\omega^2\,\mathbf{P}_{j,0} + \hat{R}_{1,r}(j,1)\sum_{q=0}^{2}\alpha^{(1)}_{1,q} R_{2-q} + \sum_{l=2}^{r}\hat{R}_{1,r}(j,l)\mathbf{P}_{l,2} \\ &+ \hat{R}_{1,r}(j,r+1)\left[\sum_{q=1}^{2}\sum_{p=1}^{q}\frac{(-\mathrm{i})^p}{p!}\omega^p\left(\frac{\rho_2}{\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}\alpha^{(2)}_{1,q-p}T_{2-q} + \sum_{q=0}^{2}\alpha^{(2)}_{1,q}T_{2-q}\right] \end{aligned} \tag{8.24}$$

3. l'équation (8.17c) s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 = 2\frac{1}{\mu_2}h^2\,\hat{\omega}_1\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{P}^{(2)}_{r+1}}{\mathrm{d}t^2} + \hat{R}_{1,r}(r+1,1)\mathbf{P}^{(1)}_1 + \sum_{l=2}^{r}\hat{R}_{1,r}(r+1,l)\mathbf{P}_l + \hat{R}_{1,r}(r+1,r+1)\mathbf{P}^{(2)}_{r+1} \\ + \frac{1}{\rho_2}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,l)\mathbf{P}^{(2)}_{r+l} \end{aligned}$$

Calculons $\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,l)\mathbf{P}^{(2)}_{r+l}$.
Or, le lemme 10 du chapitre 7 et l'expression de T nous permettent d'écrire, pour $N \leq r+1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(2)}_{r+l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} &= \sum_{n=1}^{N}h^n\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q}\frac{(-\mathrm{i})^p}{p!}(1+\hat{\xi}_l)^p\omega^p\left(\frac{\rho_2}{\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}\alpha^{(2)}_{1,q-p}T_{n-q} \\ &+ \sum_{n=0}^{N}h^n\sum_{q=0}^{n}\alpha^{(2)}_{1,q}T_{n-q} + O\left(h^{N+1}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,l)\mathbf{P}^{(2)}_{r+l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} &= \sum_{n=1}^{N}h^n\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q}\frac{(-\mathrm{i})^p}{p!}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,l)(1+\hat{\xi}_l)^p\omega^p\left(\frac{\rho_2}{\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}\alpha^{(2)}_{1,q-p}T_{n-q} \\ &+ \sum_{n=0}^{N}h^n\sum_{q=0}^{n}\alpha^{(2)}_{1,q}T_{n-q}A^0_{r,1} + O\left(h^{N+1}\right) \end{aligned}$$

Or, nous pouvons écrire :

$$\sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,l)(1+\hat{\xi}_l)^p = \sum_{l=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,l)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C^p_k(-\hat{\xi}_l)^k = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k C^p_k A^k_{r,1}$$

où : $C_k^p = \dfrac{(p)!}{k!(p-k)!}$

En utilisant alors le lemme 8 du chapitre 7, nous obtenons :

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l)\,(1+\hat{\xi}_l)^p = -p\,[1+\hat{\omega}_1(p-1)]$$

Nous obtenons donc, en utilisant cette égalité et les résultats du lemme 8 :

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(1,l)\mathbf{P}_{r+l}^{(2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = -\sum_{n=1}^{N} h^n \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} \frac{(-\mathrm{i})^p}{p!}p\,[1+\hat{\omega}_1(p-1)]\,\omega^p \left(\frac{\rho_2}{\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}} \alpha_{1,q-p}^{(2)} T_{n-q} + O\left(h^{N+1}\right)$$

Les développements limités des $\mathbf{P}_{jr+l}^{(1)}$ et des $\mathbf{P}_{jr+l}^{(2)}$ sont les mêmes que dans le cas du maillage adapté.
Identifions alors les termes de l'équation (8.17c) pour $0 \le n \le 2$:

- $n = 0$:

$$0 = \hat{R}_{1,r}(r+1,1)\,\alpha_{1,0}^{(1)}(1+R_0) + \sum_{l=2}^{r} \hat{R}_{r+1,r}(1,l)\,\mathbf{P}_{l,0} + \hat{R}_{1,r}(r+1,r+1)\,\alpha_{1,0}^{(2)} T_0 \tag{8.25}$$

- $n = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\alpha_{1,1}^{(1)}(1+R_0) + \alpha_{1,0}^{(1)}\right]\hat{R}_{1,r}(r+1,1) + \sum_{l=2}^{r}\hat{R}_{1,r}(r+1,l)\mathbf{P}_{l,1} \\ &+ \left[\alpha_{1,0}^{(2)}T_1 + \alpha_{1,1}^{(2)}T_0 - \mathrm{i}\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}\alpha_{1,0}^{(2)}T_0\right]\hat{R}_{1,r}(r+1,r+1) + \mathrm{i}\frac{1}{\sigma_2}\omega\alpha_{1,0}^{(2)}T_0 \end{aligned} \tag{8.26}$$

- $n = 2$:

$$\begin{aligned} 0 &= -2\frac{1}{\mu_2}\hat{\omega}_1\,\omega^2\,\alpha_{1,0}^{(2)}T_0 + \hat{R}_{1,r}(r+1,1)\sum_{q=0}^{2}\alpha_{1,q}^{(1)}R_{2-q} + \sum_{l=2}^{r}\hat{R}_{1,r}(r+1,l)\mathbf{P}_{l,2} \\ &+ \hat{R}_{1,r}(r+1,r+1)\left[\sum_{q=1}^{2}\sum_{p=1}^{q}\frac{(-\mathrm{i})^p}{p!}\omega^p\left(\frac{\rho_2}{\mu_2}\right)^{\frac{p}{2}}\alpha_{1,q-p}^{(2)}T_{2-q} + \sum_{q=0}^{2}\alpha_{1,q}^{(2)}T_{2-q}\right] \\ &+ \mathrm{i}\omega\frac{1}{\sigma_2}\alpha_{1,0}^{(2)}T_1 + \mathrm{i}\omega\frac{1}{\sigma_2}\alpha_{1,1}^{(2)}T_0 + (1+\hat{\omega}_1)\omega^2\frac{1}{\mu_2}\alpha_{1,0}^{(2)}T_0 \end{aligned} \tag{8.27}$$

En additionnant les équations (8.19), (8.22) et (8.25), nous obtenons :

$$0 = \alpha_{1,0}^{(1)}(1+R_0)\sum_{j=1}^{r+1}\hat{R}_{1,r}(j,1) + \sum_{l=2}^{r}\mathbf{P}_{l,0}\sum_{j=1}^{r+1}\hat{R}_{1,r}(j,l) + \alpha_{1,0}^{(2)}T_0\sum_{j=1}^{r+1}\hat{R}_{1,r}(j,r+1) \tag{8.28}$$

Lemme 18 $\displaystyle\sum_{l=1}^{r+1}\hat{R}_{1,r}(j,l) = 0\ \forall j = 1..r+1$

▷ PREUVE DU LEMME 18 : Voir annexe E.1. ◁

L'équation (8.28) est donc toujours vérifiée.

En additionnant les équations (8.20), (8.23) et (8.26), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathrm{i}\frac{1}{\sigma_1}\,\omega\,\alpha_{1,0}^{(1)}(1-R_0)+\mathrm{i}\frac{1}{\sigma_2}\omega\alpha_{1,0}^{(2)}T_0+\left[\alpha_{1,1}^{(1)}(1+R_0)+\alpha_{1,0}^{(1)}\right]\sum_{j=1}^{r+1}\hat{R}_{1,r}(j,1) \\ &+ \sum_{l=2}^{r}\mathbf{P}_{l,1}\sum_{j=1}^{r+1}\hat{R}_{1,r}(j,l)+\left[\alpha_{1,0}^{(2)}T_1+\alpha_{1,1}^{(2)}T_0-\mathrm{i}\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}\alpha_{1,0}^{(2)}T_0\right]\sum_{j=1}^{r+1}\hat{R}_{1,r}(j,r+1) \end{aligned} \tag{8.29}$$

Ce qui nous donne, avec les résultats du lemme 18 :

$$\frac{1}{\sigma_1}\,\alpha_{1,0}^{(1)}\,(1-R_0)=\frac{1}{\sigma_2}\,\alpha_{1,0}^{(2)}\,T_0 \tag{8.30}$$

Le système composé des $r-1$ équations (8.22) et de l'équation (8.19) s'écrit :

$$0=\hat{R}_{1,r}(j,1)\alpha_{1,0}^{(1)}(1+R_0)+\sum_{l=2}^{r}\hat{R}_{1,r}(j,l)\mathbf{P}_{l,0}+\hat{R}_{1,r}(j,r+1)\alpha_{1,0}^{(2)}T_0 \qquad \forall j=1..r \tag{8.31}$$

D'après la démonstration du lemme 18 détaillée dans l'annexe E.1, les termes de la matrice $\hat{R}_{1,r}(j,l)$ s'écrivent :

$$\hat{R}_{1,r}(j,l)=-\frac{1}{\rho_1}\,\hat{\varphi}_j^{'}(0)\,\delta_{l,1}-\hat{\omega}_l\left[\frac{1}{\hat{\rho}}\,\hat{\varphi}_j^{'}\right]^{'}(\hat{\xi}_l) \qquad \forall j,l=1..r$$

Posons alors :

$$\hat{T}_{1,r}(j,l)=-\hat{\omega}_l\left[\frac{1}{\hat{\rho}}\,\hat{\varphi}_j^{'}\right]^{'}(\hat{\xi}_l) \qquad \forall j,l=1..r$$

Le système (8.31) peut alors se mettre sous la forme :

$$\hat{T}_{1,r}X=-B\,\alpha_{1,0}^{(2)}T_0+\frac{1}{\rho_1}\,\Phi\,\alpha_{1,0}^{(1)}(1+R_0) \tag{8.32}$$

avec :

- $X=\left(\alpha_{1,0}^{(1)}(1+R_0),\mathbf{P}_{2,0},...,\mathbf{P}_{r,0}\right)^*$,
- $B=\left(\hat{R}_{1,r}(1,r+1),\hat{R}_{1,r}(2,r+1),...,\hat{R}_{1,r}(r,r+1)\right)^*$,
- $\Phi=\left(\hat{\varphi}_1^{'}(0),\hat{\varphi}_2^{'}(0),...,\hat{\varphi}_r^{'}(0)\right)^*$.

Nous pouvons démontrer que :

Lemme 19 *$\hat{T}_{1,r}$ est inversible.*

▷ PREUVE DU LEMME 19 : La démonstration s'effectue de la même manière que pour le lemme 6 du chapitre 7. Elle est détaillée dans l'annexe E.2. ◁

Ainsi, il existe un unique $(r-1)$-uplet $(\mathbf{P}_{j,0})_{j=2..r}$ vérifiant (8.32) et dépendant de $\alpha_{1,0}^{(1)}$, $\alpha_{1,0}^{(2)}$, R_0 et T_0. Si l'on inclut alors les expressions des $\mathbf{P}_{j,0}$ dans la première équation du système matriciel (8.32), on montre qu'il existe un unique vecteur X vérifiant (8.32).

Nous avons donc démontré qu'il existe une unique solution $(R_0, \mathbf{P}_{2,0}, ..., \mathbf{P}_{r,0})$ vérifiant (8.31).
Or, d'après le lemme 18, $\alpha^{(2)}_{1,0} T_0 = \alpha^{(1)}_{1,0}(1+R_0) = \mathbf{P}_{j,0}, \forall j = 2..r$, est solution du système matriciel.
Nous obtenons donc, grâce à l'égalité (8.30) :

$$R_0 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$$
$$T_0 = \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1}$$
$$\mathbf{P}_{l,0} = \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \alpha^{(2)}_{1,0}$$

En additionnant les équations (8.21),(8.24) et (8.27) et en utilisant le lemme 18, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 = &-\frac{1}{\mu_1}\,\hat{\omega}_1\,\omega^2\,\alpha^{(1)}_{1,0}(1+R_0) - \mathrm{i}\,\frac{1}{\sigma_1}\,\omega\,(\alpha^{(1)}_{1,1} - \alpha^{(1)}_{1,0}R_1 - \alpha^{(1)}_{1,1}R_0) \\ &- \sum_{j=2}^{r} \frac{1}{\mu}\,(\xi_j)\;\hat{\omega}_j\,\omega^2\,\mathbf{P}_{j,0} - \frac{1}{\mu_2}\,\hat{\omega}_1\,\omega^2\,\alpha^{(2)}_{1,0}T_0 + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sigma_2}\,\omega\,(\alpha^{(2)}_{1,0}T_1 + \alpha^{(2)}_{1,1}T_0) + \frac{1}{\mu_2}\,\omega^2\,\alpha^{(2)}_{1,0}T_0 \end{aligned}$$

Nous avons vu, en remarque 8, que, pour tout n compris entre 0 et $r+1$, nous pouvons prendre $\alpha^{(1)}_{1,n} = \alpha^{(2)}_{1,n} = \alpha_{1,n}$. Ainsi, r étant supérieur ou égal à 1, nous imposons $\alpha^{(1)}_{1,0} = \alpha^{(2)}_{1,0}$ et $\alpha^{(1)}_{1,1} = \alpha^{(2)}_{1,1}$. En utilisant les expressions de R_0, T_0 et $\mathbf{P}_{l,0}$, l'équation devient :

$$\omega^2 \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \sum_{j=1}^{r+1} \frac{1}{\mu}\,(\xi_j)\,\hat{\omega}_j = \mathrm{i}\,\omega\,\left(\frac{1}{\sigma_1}R_1 + \frac{1}{\sigma_2}\;T_1\right) + \frac{1}{\mu_2}\,\omega^2\,\frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1}$$

Supposons que $R_1 = T_1 = 0$. Nous avons alors :

$$\sum_{j=1}^{r+1} \frac{1}{\mu}\,(\xi_j)\,\hat{\omega}_j = \frac{1}{\mu_2} \tag{8.33}$$

Or, la fonction $\dfrac{1}{\mu}\,(x)$ étant un polynôme de degrés 1, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{r+1} \frac{1}{\hat{\mu}}\left(\hat{\xi}_j\right)\hat{\omega}_j = \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)\hat{x} + \frac{1}{\mu_1}\right) d\hat{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) + \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1}\right)$$

L'équation (8.33) est donc vérifiée si et seulement si $\mu_1 + \mu_2 = 0$, ce qui est absurde.
R_1 ou T_1 sont donc non-nuls.

Lemme 20 *Dans le cas d'un maillage non-adapté, les coefficients de réflexion et de transmission entre deux milieux (ρ_1, μ_1) et (ρ_2, μ_2), si l'on considère un lissage des paramètres sous la forme d'une application linéaire dans la zone de transition, se mettent sous la forme :*

$$R = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} + O(h) \tag{8.34a}$$
$$T = \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} + O(h) \tag{8.34b}$$

Remarque 67 *En fait, par maple, nous avons aussi trouvé cette erreur sur les coefficients si l'on considère un saut des fonctions μ et ρ des valeurs respectives μ_1 et ρ_1 à μ_2 et ρ_2*

8.2 Dimensions supérieures

Nous pouvons, à présent, étudier l'erreur sur les coefficients de réflexion et de transmission générés par l'utilisation du schéma numérique en milieu hétérogène, en dimension d.
Contrairement au cas 1D, nous effectuons l'étude uniquement en maillage adapté : nous avons vu que l'utilisation d'un maillage non-adapté dans le cas monodimensionnel génère une erreur sur les coefficients de réflexion-transmission en $O(h)$. Les coefficients de réflexion-transmission dans le cas multidimensionnel pour un maillage non-adapté ne peuvent être approchés de manière plus précise en dD qu'en 1D.

Nous ferons l'étude sur le milieu bicouche représenté dans la figure 8.6 et défini par :

$$(\rho(\mathbf{x}),\mu(\mathbf{x})) = \begin{cases} (\rho_1,\mu_1) & \forall x_1 < 0 \\ (\rho_2,\mu_2) & \forall x_1 > 0 \end{cases}$$

Le fait que l'interface entre les deux milieux soit située à $x_1 = 0$ ne modifie pas les résultats.

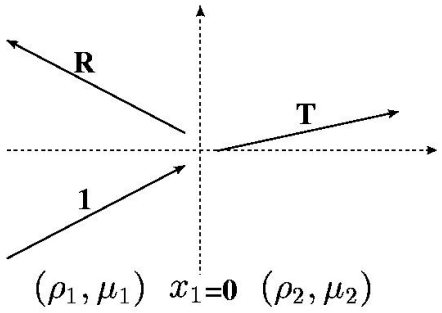


FIG. 8.6: Problème continu.

8.2.1 Dans le cas continu 2D

Rappelons, tout d'abord, les coefficients de réflexion et de transmission dans le cas continu 2D.

Nous cherchons une solution de l'équation des ondes sous la forme :

$$p(\mathbf{x},t) = \begin{cases} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_{in}\cdot\mathbf{x})} + Re^{i(\omega t - \mathbf{k}_{re}\cdot\mathbf{x})} & \forall x_1 < 0 \\ Te^{i(\omega t - \mathbf{k}_{tr}\cdot\mathbf{x})} & \forall x_1 > 0 \end{cases} \tag{8.35}$$

où $\mathbf{k}_{in}$, $\mathbf{k}_{re}$ et $\mathbf{k}_{tr}$ sont les vecteurs d'onde respectivement associés à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise. Ils vérifient donc les relations de dispersion dans chaque couche :

$$|\mathbf{k}_{in}| = |\mathbf{k}_{re}| = \omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \quad \text{et} \quad |\mathbf{k}_{tr}| = \omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}$$

Posons :

$$\mathbf{k}_{in} = |k_{in}|(\cos\theta_{in}, \sin\theta_{in}) \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_{tr} = |k_{tr}|(\cos\theta_{tr}, \sin\theta_{tr})$$

La loi de Descartes nous permet d'écrire :

$$\mathbf{k}_{re} = |\mathbf{k}_{in}|(-\cos\theta_{in}, \sin\theta_{in})$$

La solution et sa dérivée normale pondérée par $1/\rho$ sont continues en $x_1 = 0$ pour toute valeur de x_2. Ceci se traduit par :

$$|\mathbf{k}_{in}| \sin\theta_{in} = |\mathbf{k}_{tr}| \sin\theta_{tr} \tag{8.36a}$$

$$1 + R = T \tag{8.36b}$$

$$\frac{1}{\rho_1} |\mathbf{k}_{in}| \cos\theta_{in} (1 - R) = \frac{1}{\rho_2} |\mathbf{k}_{tr}| \cos\theta_{tr} T \tag{8.36c}$$

En injectant les relations de dispersion dans ces équations, afin d'exprimer $\cos\theta_{tr}$ en fonction de θ_{in}, nous obtenons :

$$R = \frac{1 - \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{1 + \left(1 - \dfrac{c_2^2}{c_1^2}\right)\tan^2\theta_{in}}}{1 + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{1 + \left(1 - \dfrac{c_2^2}{c_1^2}\right)\tan^2\theta_{in}}} \tag{8.37a}$$

$$T = \frac{2}{1 + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{1 + \left(1 - \dfrac{c_2^2}{c_1^2}\right)\tan^2\theta_{in}}} \tag{8.37b}$$

où σ_1 et σ_2 sont les impédances des milieux et c_1 et c_2 les vitesses, définies par $c_i = \sqrt{\dfrac{\mu_i}{\rho_i}}$.

8.2.2 Cas d'un maillage adapté 2D

Nous nous plaçons donc dans le cas où l'interface entre les deux milieux coïncide avec l'interface entre deux éléments. Nous sommes donc dans la configuration de la figure 8.7.

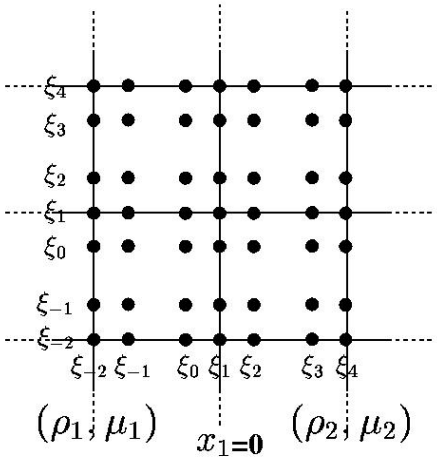


FIG. 8.7: Cas d'un maillage adapté 2D, pour $r = 5$.

Par analogie avec le cas continu, nous cherchons une solution de l'équation des ondes dans le milieu

bicouche sous la forme :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} = \alpha_{\mathbf{l}}^{(1)} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \mathbf{k}_{in}\cdot\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\right)} + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \mathbf{k}_{re}\cdot\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\right)} \right] \quad \forall j_1 < 0, \forall j_2, \forall \mathbf{l} \in \{1..r+1\}^2 \tag{8.38a}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} = \alpha_{\mathbf{l}}^{(2)} T \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \mathbf{k}_{tr}\cdot\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\right)} \quad \forall j_1 \geq 0, \forall j_2, \forall \mathbf{l} \in \{1..r+1\}^2 \tag{8.38b}$$

Notons $\mathbf{k}_{in} = (\mathbf{k}_{in}(1), \mathbf{k}_{in}(2))$, $\mathbf{k}_{re} = (\mathbf{k}_{re}(1), \mathbf{k}_{re}(2))$ et $\mathbf{k}_{tr} = (\mathbf{k}_{tr}(1), \mathbf{k}_{tr}(2))$.
Les deux vecteurs $\mathbf{k}_{in}$ et $\mathbf{k}_{re}$ vérifiant la relation de dispersion dans le milieu (ρ_1, μ_1), nous avons :

$$\mathbf{k}_{in}(1) = -\mathbf{k}_{re}(1) \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_{in}(2) = \mathbf{k}_{re}(2) \tag{8.39}$$

Par continuité en $x_1 = 0$, nous avons :

$$\alpha_{(1,l_2)}^{(1)} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_{in}\cdot\xi_{(0,j_2)r+(1,l_2)}} + R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_{re}\cdot\xi_{(0,j_2)r+(1,l_2)}} \right] = \alpha_{(1,l_2)}^{(2)} T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_{tr}\cdot\xi_{(0,j_2)r+(1,l_2)}} \qquad \forall j_2, \forall l_2 = 1..r \tag{8.40}$$

soit, en utilisant le fait que $\mathbf{k}_{in}(2) = \mathbf{k}_{re}(2)$:

$$\alpha_{(1,l_2)}^{(1)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_{in}(2)\xi_{j_2r+l_2}} (1+R) = \alpha_{(1,l_2)}^{(2)} T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_{tr}(2)\xi_{j_2r+l_2}} \qquad \forall j_2, \forall l_2 = 1..r \tag{8.41}$$

Ainsi, pour $j_2 = 0$ et $l_2 = 1$, l'équation (8.41) s'écrit :

$$\alpha_{(1,1)}^{(1)} (1+R) = \alpha_{(1,1)}^{(2)} T \tag{8.42}$$

Nous pouvons alors simplifier l'équation (8.41) sous la forme :

$$\frac{\alpha_{(1,l_2)}^{(1)}}{\alpha_{(1,1)}^{(1)}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_{in}(2)\xi_{j_2r+l_2}} = \frac{\alpha_{(1,l_2)}^{(2)}}{\alpha_{(1,1)}^{(2)}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_{tr}(2)\xi_{j_2r+l_2}} \qquad \forall j_2, \forall l_2 = 1..r \tag{8.43}$$

Ceci implique (en posant $j_2 = 1$ et $l_2 = 1$) :

$$\mathbf{k}_{in}(2) = \mathbf{k}_{tr}(2) \tag{8.44}$$

et (en reportant (8.44) dans l'égalité (8.43)) :

$$\frac{\alpha_{(1,l_2)}^{(1)}}{\alpha_{(1,1)}^{(1)}} = \frac{\alpha_{(1,l_2)}^{(2)}}{\alpha_{(1,1)}^{(2)}} \tag{8.45}$$

Posons à présent :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}^{(1)} = \alpha_{\mathbf{l}}^{(1)} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \mathbf{k}_{in}\cdot\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\right)} + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \mathbf{k}_{re}\cdot\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\right)} \right] \quad \forall \mathbf{j}, \forall \mathbf{l} \in \{1..r+1\}^2 \tag{8.46a}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}^{(2)} = \alpha_{\mathbf{l}}^{(2)} T \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \mathbf{k}_{tr}\cdot\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}\right)} \quad \forall \mathbf{j}, \forall \mathbf{l} \in \{1..r+1\}^2 \tag{8.46b}$$

Nous avons donc, d'après le système (8.38) :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} = \mathbf{P}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}^{(1)} \quad \forall j_1 < 0, \forall j_2, \forall \mathbf{l} \in \{1..r+1\}^2$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} = \mathbf{P}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}^{(2)} \quad \forall j_1 \geq 0, \forall j_2, \forall \mathbf{l} \in \{1..r+1\}^2$$

Introduisons les matrices $\hat{K}_{2,r}$ et $\hat{D}_{2,r}$:

Definition 9 $\forall \mathbf{l_0}, \mathbf{l_1}$ *et* $\mathbf{l_2} \in \{1..r+1\}^2$ *:*

$$\hat{D}_{2,r}(\mathbf{l_0}) = \int_{[0,1]^2}^{GL} (\hat{\varphi}_{\mathbf{l_0}})^2 d\hat{\mathbf{x}} \tag{8.47a}$$

$$\hat{K}_{2,r}(\mathbf{l_1},\mathbf{l_2}) = \int_{[0,1]^2}^{GL} \nabla\hat{\varphi}_{\mathbf{l_1}} \cdot \nabla\hat{\varphi}_{\mathbf{l_2}}\, d\hat{\mathbf{x}} \tag{8.47b}$$

où $\int_{[0,1]^d}^{GL}$ *est la valeur de l'intégrale par intégration numérique de Gauss-Lobatto sur* $[0,1]^d$.

Ainsi (lemme 13), nous pouvons exprimer $D_{2,r}$ et $K_{2,r}$ en fonction de $\hat{D}_{2,r}$ et $\hat{K}_{2,r}$:

$$D_{2,r}(\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}) = h^2 \frac{1}{\mu} \delta_{\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^2 | \exists \mathbf{l}\in\{1..(r+1)\}^2,\, \mathbf{m_1}=\mathbf{j}r+\mathbf{l}} \hat{D}_{2,r}(\mathbf{l}) \tag{8.48a}$$

$$K_{2,r}(\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}) = \frac{1}{\rho} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^2 | \exists \mathbf{l_1},\mathbf{l_2}\in\{1..(r+1)\}^2,\, \mathbf{m_1}=\mathbf{j}r+\mathbf{l_1}\ \mathbf{m_2}=\mathbf{j}r+\mathbf{l_2}} \hat{K}_{2,r}(\mathbf{l_1},\mathbf{l_2}) \tag{8.48b}$$

Comme dans le cas 1D, d'après la définition de $\mathbf{P}^{(1)}$ et $\mathbf{P}^{(2)}$, nous pouvons dire que $\mathbf{P}$ vérifie les équations en $\xi_{(1,m_2)}$ si et seulement si cette même équation à laquelle on soustrait la demi-somme des équations vérifiées respectivement par $\mathbf{P}^{(1)}$ et $\mathbf{P}^{(2)}$ en $\xi_{(1,m_2)}$ est vérifiée, soit si :

$$E^{(1)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} = E^{(2)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} \quad \forall \mathbf{j} = (0,j_2),\ \forall \mathbf{l} = (1,l_2),\ l_2 = 1..r \tag{8.49}$$

où $E^{(a)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}$ provient de l'écriture des équations aux $\xi_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}$ situés à l'interface entre les deux milieux si l'on considérait un milieu homogène (ρ_a,μ_a).
Nous avons :

$$\begin{aligned}
\rho_a E^{(a)}_{\mathbf{j}r+(1,1)} = & \sum_{\mathbf{m}\in\{1..r+1\}^2} \hat{K}_{2,r}((1,1),\mathbf{m})\, \mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{m}} + \sum_{\mathbf{m}\in\{1..r+1\}^2} \hat{K}_{2,r}((1,r+1),\mathbf{m})\, \mathbf{P}^{(a)}_{(j_1,j_2-1)r+\mathbf{m}} \\
& - \sum_{\mathbf{m}\in\{1..r+1\}^2} \hat{K}_{2,r}((r+1,r+1),\mathbf{m})\, \mathbf{P}^{(a)}_{(j_1-1,j_2-1)r+\mathbf{m}} \\
& - \sum_{\mathbf{m}\in\{1..r+1\}^2} \hat{K}_{2,r}((r+1,1),\mathbf{m})\, \mathbf{P}^{(a)}_{(j_1-1,j_2)r+\mathbf{m}}
\end{aligned}$$

$$\rho_a E^{(a)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} = \sum_{\mathbf{m}\in\{1..r+1\}^2} \hat{K}_{2,r}((1,l_2),\mathbf{m})\, \mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{m}} - \sum_{\mathbf{m}\in\{1..r+1\}^2} \hat{K}_{2,r}((r+1,l_2),\mathbf{m})\, \mathbf{P}^{(a)}_{(j_1-1,j_2)r+\mathbf{m}}$$

Or, nous avons :

Lemme 21 *Pour tout* $\mathbf{j} = (j_p)_{p=1..d} \in \{1..r+1\}^d$ *et* $\mathbf{l} = (l_p)_{p=1..d} \in \{1..r+1\}^d$ *:*

$$\hat{D}_{d,r}(\mathbf{j}) = \prod_{p=1}^{d} \hat{D}_{1,r}(j_p) \tag{8.50a}$$

$$\hat{K}_{d,r}(\mathbf{j},\mathbf{l}) = \sum_{p=1}^{d} \hat{K}_{1,r}(j_p,l_p) \prod_{q=1..d,q\neq p} \hat{D}_{1,r}(j_q)\delta_{j_q,l_q} \tag{8.50b}$$

▷ PREUVE : Elle s'effectue de la même manière que celle du lemme 12. Nous ne nous attarderons pas sur le sujet. ◁

Nous pouvons alors simplifier les expressions de $E^{(a)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}}$:

– Pour $\mathbf{l} = (1,1)$:

$$\begin{aligned}\rho_a E^{(a)}_{\mathbf{j}r+(1,1)} &= \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(m_1,1)} + \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_2=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_2)\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(1,m_2)}\\
&+ \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(m_1,1)} + \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_2=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,m_2)\mathbf{P}^{(a)}_{(j_1,j_2-1)r+(1,m_2)}\\
&- \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{(j_1-1,j_2)r+(m_1,1)} - \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_2=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,m_2)\mathbf{P}^{(a)}_{(j_1,j_2-1)r+(1,m_2)}\\
&- \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{(j_1-1,j_2)r+(m_1,1)} - \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_2=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_2)\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(1,m_2)}\end{aligned}$$

Les sommes sur m_2 s'annulent deux par deux et il nous reste :

$$\rho_a E^{(a)}_{\mathbf{j}r+(1,1)} = 2\hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_1=1}^{r+1}\left[\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(m_1,1)} - \hat{K}_{1,r}(r+1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{(j_1-1,j_2)r+(m_1,1)}\right]$$

Or, d'après le lemme 5, $\hat{K}_{1,r}(r+1,m_1) = \hat{K}_{1,r}(1,2+r-m_1)$. Par un changement d'indice sur le second terme de la somme, nous obtenons :

$$\rho_a E^{(a)}_{\mathbf{j}r+(1,1)} = 2\hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\left[\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(m_1,1)} - \mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(2-m_1,1)}\right]$$

– De même, pour $\mathbf{l} = (1,l_2)$, $l_2 = 2..r$:

$$\begin{aligned}\rho_a E^{(a)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} &= \hat{D}_{1,r}(l_2)\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(m_1,l_2)} + \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_2=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l_2,m_2)\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(1,m_2)}\\
&- \hat{D}_{1,r}(l_2)\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(r+1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{(j_1-1,j_2)r+(m_1,l_2)} - \hat{D}_{1,r}(1)\sum_{m_2=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(l_2,m_2)\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(1,m_2)}\end{aligned}$$

Les sommes sur m_2 s'annulent et il nous reste :

$$\rho_a E^{(a)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} = \hat{D}_{1,r}(l_2)\sum_{m_1=1}^{r+1}\left[\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(m_1,l_2)} - \hat{K}_{1,r}(r+1,m_1)\mathbf{P}^{(a)}_{(j_1-1,j_2)r+(m_1,l_2)}\right]$$

Toujours d'après le lemme 5, $\hat{K}_{1,r}(r+1,m_1) = \hat{K}_{1,r}(1,2+r-m_1)$. Par un changement d'indice sur le second terme de la somme, nous obtenons :

$$\rho_a E^{(a)}_{\mathbf{j}r+\mathbf{l}} = \hat{D}_{1,r}(l_2)\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\left[\mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(m_1,l_2)} - \mathbf{P}^{(a)}_{\mathbf{j}r+(2-m_1,l_2)}\right]$$

Le système (8.49) peut donc s'écrire sous la forme, $\forall \mathbf{j}$ et $\forall l_2 = 1..r$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho_1}\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\left[\mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{j}r+(m_1,l_2)}-\mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{j}r+(2-m_1,l_2)}\right] \\ &= \\ &\frac{1}{\rho_2}\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\left[\mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{j}r+(m_1,l_2)}-\mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{j}r+(2-m_1,l_2)}\right] \end{aligned} \tag{8.51}$$

Nous allons essayer de réduire le problème (8.51) à un problème à une dimension. Pour cela, nous allons utiliser l'égalité (8.45) qui nous dit que :

$$\frac{\alpha^{(1)}_{(1,l_2)}}{\alpha^{(1)}_{(1,1)}} = \frac{\alpha^{(2)}_{(1,l_2)}}{\alpha^{(2)}_{(1,1)}} \qquad \forall j_2, \forall l_2 = 1..r \tag{8.52}$$

Divisons le terme de gauche de l'égalité (8.51) par le terme de gauche de l'égalité (8.52) et le terme de droite de l'égalité (8.51) par le terme de droite de l'égalité (8.52). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho_1}\frac{\alpha^{(1)}_{(1,1)}}{\alpha^{(1)}_{(1,l_2)}}\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\left[\mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{j}r+(m_1,l_2)}-\mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{j}r+(2-m_1,l_2)}\right] \\ &= \\ &\frac{1}{\rho_2}\frac{\alpha^{(2)}_{(1,1)}}{\alpha^{(2)}_{(1,l_2)}}\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\left[\mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{j}r+(m_1,l_2)}-\mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{j}r+(2-m_1,l_2)}\right] \end{aligned} \tag{8.53}$$

Reprenons, à présent, les expressions de $\mathbf{P}^{(1)}$ et $\mathbf{P}^{(2)}$.

– D'après l'équation (8.46a) et en utilisant le fait que $\mathbf{k}_{in}(2) = \mathbf{k}_{re}(2)$ (équation (8.39)), nous avons :

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{j}r+(m_1,l_2)}-\mathbf{P}^{(1)}_{\mathbf{j}r+(2-m_1,l_2)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_{in}(2)\xi_{j_2r+l_2}} &= \alpha^{(1)}_{(m_1,l_2)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\mathbf{k}_{in}(1)\xi_{j_1r+m_1}\right)}+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\mathbf{k}_{re}(1)\xi_{j_1r+m_1}\right)}\right] \\ &\quad -\alpha^{(1)}_{(2-m_1,l_2)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\mathbf{k}_{in}(1)\xi_{j_1r+2-m_1}\right)}+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\mathbf{k}_{re}(1)\xi_{j_1r+2-m_1}\right)}\right] \end{aligned}$$

– D'après l'équation (8.46b) et en utilisant le fait que $\mathbf{k}_{in}(2) = \mathbf{k}_{tr}(2)$ (équation (8.44)), nous avons :

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{j}r+(m_1,l_2)}-\mathbf{P}^{(2)}_{\mathbf{j}r+(2-m_1,l_2)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_{in}(2)\xi_{j_2r+l_2}} &= \alpha^{(2)}_{(m_1,l_2)}\,T\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\mathbf{k}_{tr}(1)\xi_{j_1r+m_1}\right)} \\ &\quad -\alpha^{(2)}_{(2-m_1,l_2)}\,T\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\mathbf{k}_{tr}(1)\xi_{j_1r+2-m_1}\right)} \end{aligned}$$

En introduisant ces expressions dans l'égalité (8.53), nous obtenons :

$$\frac{1}{\rho_1}\alpha^{(1)}_{(1,1)}\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\left[\tilde{\mathbf{P}}^{(1)}_{m_1}-\tilde{\mathbf{P}}^{(1)}_{2-m_1}\right] = \frac{1}{\rho_2}\alpha^{(2)}_{(1,1)}\sum_{m_1=1}^{r+1}\hat{K}_{1,r}(1,m_1)\left[\tilde{\mathbf{P}}^{(2)}_{m_1}-\tilde{\mathbf{P}}^{(2)}_{2-m_1}\right] \tag{8.54}$$

où :

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{P}}^{(1)}_{j_1r+m_1} = \alpha^{(1)}_{(m_1,l_2)}\left(\alpha^{(1)}_{(1,l_2)}\right)^{-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\mathbf{k}_{in}(1)\xi_{j_1r+m_1}\right)}+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\mathbf{k}_{in}(1)\xi_{j_1r+m_1}\right)}\right] && \forall j_1, \forall m_1 = 1..r+1 \\ &\tilde{\mathbf{P}}^{(2)}_{j_1r+m_1} = \alpha^{(2)}_{(m_1,l_2)}\left(\alpha^{(2)}_{(1,l_2)}\right)^{-1}T\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\mathbf{k}_{tr}(1)\xi_{j_1r+m_1}\right)} && \forall j_1, \forall m_1 = 1..r+1 \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème (4) démontré dans le chapitre 7.2.2, nous avons :

$$\begin{cases} \alpha_{\mathbf{l}}^{(1)}[\mathbf{k}] &= \alpha_{l_1}^{(1)}[k_1] \times \alpha_{l_2}^{(1)}[k_2] \quad \forall \mathbf{l} \in \{1..r\}^2 \\ \alpha_{\mathbf{l}}^{(2)}[\mathbf{k}] &= \alpha_{l_1}^{(2)}[k_1] \times \alpha_{l_2}^{(1)}[k_2] \quad \forall \mathbf{l} \in \{1..r\}^2 \end{cases}$$

$\tilde{\mathbf{P}}^{(1)}_{j_1 r+m_1}$ et $\tilde{\mathbf{P}}^{(2)}_{j_1 r+m_1}$ ne dépendent donc pas de l_2.
Nous nous sommes donc rapportés à un problème monodimensionnel équivalent au problème (8.10) avec k_1 et k_2 respectivement remplaçés par $\mathbf{k}_{in}(1)$ et $\mathbf{k}_{tr}(1)$.
Ainsi, si l'on reprend le calcul des coefficients de réflexion et de transmission en dimension 1 et dans le cas d'un maillage adapté avec :

$$\begin{cases} k_1 &= |\mathbf{k}_{in}| \cos(\theta_{in}) \\ k_2 &= |\mathbf{k}_{tr}| \cos(\theta_{tr}) \end{cases}$$

nous obtenons les coefficients (nous ne détaillerons pas les calculs qui sont identiques à ceux effectués dans la section 8.1.2) :

$$\begin{cases} R &= \dfrac{\sigma_2 (\cos(\theta_{tr}))^{-1} - \sigma_1 (\cos(\theta_{in}))^{-1}}{\sigma_2 (\cos(\theta_{tr}))^{-1} + \sigma_1 (\cos(\theta_{in}))^{-1}} + O\left(h^M\right) \\ T &= \dfrac{2\sigma_2 (\cos(\theta_{tr}))^{-1}}{\sigma_2 (\cos(\theta_{tr}))^{-1} + \sigma_1 (\cos(\theta_{in}))^{-1}} + O\left(h^M\right) \end{cases}$$

où $M = r+1$ si r est impaire et $M = r+2$ sinon.
Ces coefficients s'expriment aussi sous la forme :

$$\begin{cases} R &= \dfrac{1 - \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\dfrac{\cos(\theta_{tr})}{\cos(\theta_{in})}}{1 + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\dfrac{\cos(\theta_{tr})}{\cos(\theta_{in})}} + O\left(h^M\right) \\ T &= \dfrac{2}{1 + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\dfrac{\cos(\theta_{tr})}{\cos(\theta_{in})}} + O\left(h^M\right) \end{cases}$$

Exprimons $\cos(\theta_{tr})/\cos(\theta_{in})$ en fonction de θ_{in} et des propriétés physiques des deux milieux. Nous avons vu que que $\mathbf{k}_{in}(2) = \mathbf{k}_{tr}(2)$ (équation (8.44)). L'onde transmise se propageant dans le milieu (ρ_2, μ_2), la première composante de $\mathbf{k}_{in}$ et la première composante de $\mathbf{k}_{tr}$ sont de même signe. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\cos(\theta_{tr})}{\cos(\theta_{in})} = \sqrt{\frac{\cos^2(\theta_{tr})}{\cos^2(\theta_{in})}}$$

Or :

$$\frac{\cos^2(\theta_{tr})}{\cos^2(\theta_{in})} = \frac{1 - \sin^2(\theta_{tr})}{\cos^2(\theta_{in})}$$

De plus, $\mathbf{k}_{in}(2) = \mathbf{k}_{tr}(2)$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2(\theta_{tr})}{\cos^2(\theta_{in})} &= \frac{1-\dfrac{|\mathbf{k}_{in}|^2}{|\mathbf{k}_{tr}|^2}\sin^2(\theta_{in})}{\cos^2(\theta_{in})} \\ &= 1+\tan^2(\theta_{in}) - \frac{|\mathbf{k}_{in}|^2}{|\mathbf{k}_{tr}|^2}\tan^2(\theta_{in}) = 1+\left(1-\frac{|\mathbf{k}_{in}|^2}{|\mathbf{k}_{tr}|^2}\right)\tan^2(\theta_{in})\end{aligned}$$

D'après le théorème 3 et le lemme 16 démontrés au chapitre 7, nous avons les développements limités suivants :

$$\begin{aligned}|\mathbf{k}_{in}| &= \omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} + O\left(h^{2r}\right) = \frac{\omega}{c_1^2} + O\left(h^{2r}\right) \\ |\mathbf{k}_{tr}| &= \omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}} + O\left(h^{2r}\right) = \frac{\omega}{c_2^2} + O\left(h^{2r}\right)\end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire un développement limité de $\cos(\theta_{tr})/\cos(\theta_{in})$:

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\theta_{tr})}{\cos(\theta_{in})} &= \left[1+\left(1-\frac{|\mathbf{k}_{in}|^2}{|\mathbf{k}_{tr}|^2}\right)\tan^2(\theta_{in})\right]^{1/2} \\ &= \left[1+\left(1-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\tan^2(\theta_{in}) + O\left(h^{2r}\right)\right]^{1/2} \\ &= \sqrt{1+\left(1-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\tan^2(\theta_{in})} + O\left(h^{2r}\right)\end{aligned}$$

et retrouvons donc le même ordre d'erreur pour les coefficients de réflexion et transmission que dans le cas 1D.

$$\begin{aligned}R &= \frac{1-\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{1+\left(1-\dfrac{c_2^2}{c_1^2}\right)\tan^2\theta_{in}}}{1+\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{1+\left(1-\dfrac{c_2^2}{c_1^2}\right)\tan^2\theta_{in}}} + O\left(h^M\right) \\ T &= \frac{2}{1+\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{1+\left(1-\dfrac{c_2^2}{c_1^2}\right)\tan^2\theta_{in}}} + O\left(h^M\right)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}M &= r+1 && \text{si } r \text{ est impaire} \\ M &= r+2 && \text{si } r \text{ est paire}\end{aligned}$$

8.2.3 Un exemple numérique 2D

Considérons un milieu bicouche (fig. 8.8). Nous pouvons mailler ce domaine de deux façons différentes : tout d'abord, en ne considérant que la topographie du milieu et en maillant le domaine de façon

régulière, ou alors, en créant un maillage dont les mailles suivent la géométrie des différentes couches présentes dans le milieu (fig. 8.9).

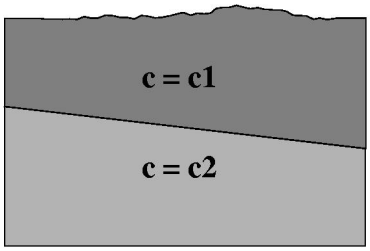


FIG. 8.8: Modèle de vitesses bicouche.

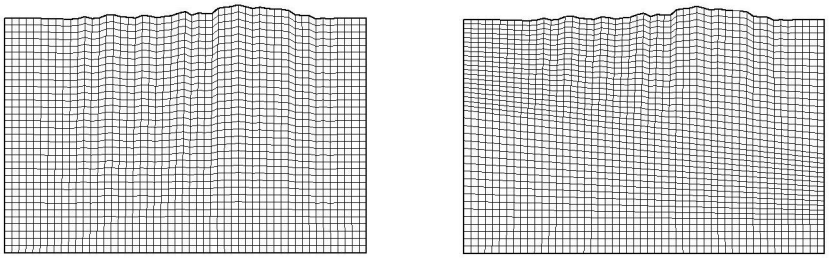


FIG. 8.9: Un exemple de maillage non-adapté (à gauche) et adapté (à droite) du modèle bicouche.

Nous allons comparer les résultats donnés par chacun de ces deux maillages. Nous considérons donc une impulsion au milieu de la topographie (frontière supérieure du domaine), pour une fréquence donnée. La réponse du domaine à cette impulsion est étudiée pour un récepteur situé sur la surface, près de la limite gauche du domaine. La topographie est une surface libre alors que nous imposons des conditions de Dirichlet aux trois autres bords verticaux et horizontaux du domaine.

Avant de visualiser les résultats, vérifions que la déformation du maillage n'a pas d'impact significatif sur la solution. Pour cela, nous supposons que $c_1 = c_2$. Les traces obtenues sont représentées dans la figure 8.10. Nous n'observons pas de différences entre les deux traces et négligeons donc les effets de la déformation du maillage sur la solution.
Les solutions, dans le cas de deux vitesses différentes ($c_1 = 3500\text{m.s}^{-1}$ et $c_2 = 5500\text{m.s}^{-1}$), sont données par la figure 8.10. Les différences sont significatives.

D'après l'étude précédente, nous savons que le maillage adapté permet une meilleur approche de la géométrie du domaine. Comparons donc les résultats donnés par le maillage adapté et son maillage raffiné, ainsi que les résultats donnés par le maillage non-adapté et son maillage raffiné. Pour construire chaque maillage raffiné, nous divisons chaque quadrangle du maillage initial en quatre. Les résultats sont donnés dans la figure 8.11. Ainsi, nous pouvons dire que la solution donnée par le maillage adapté est une solution qui a convergé alors le maillage non-adapté doit être encore raffiné pour donner une solution satisfaisante.
Cette expérience illustre bien les résultats de l'étude précédente.

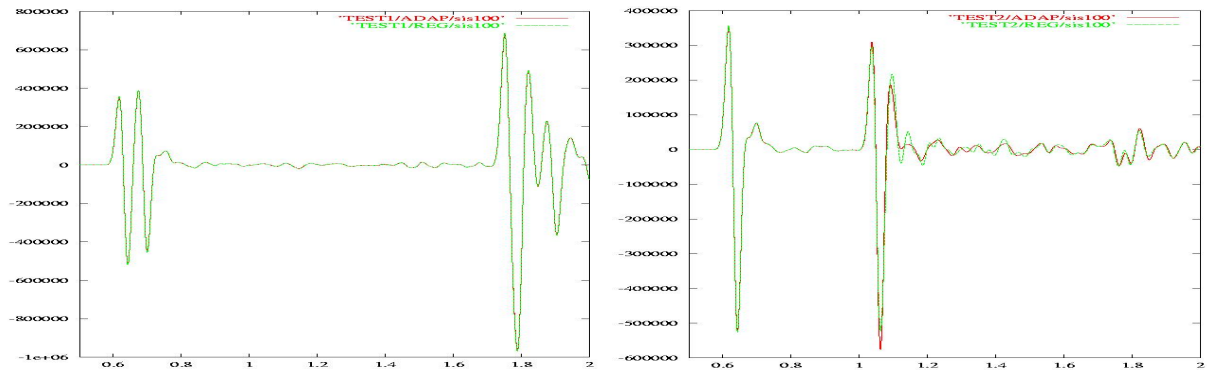


FIG. 8.10: Solution pour le maillage adapté (en rouge) et le maillage non-adapté (en vert), dans le cas où $c_1 = c_2$ (à gauche) et $c_1 \neq c_2$ (à droite).

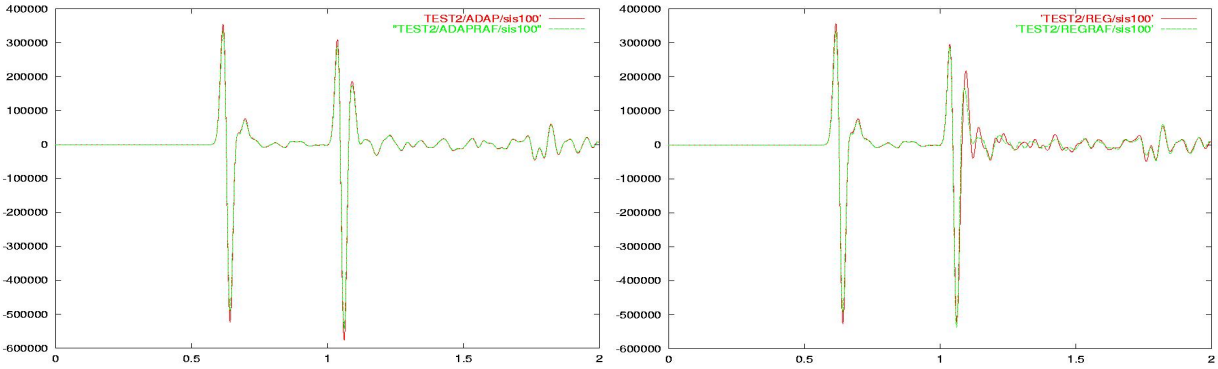


FIG. 8.11: Comparaison des résultats donnés par le maillage et son maillage raffiné, pour le maillage adapté (à gauche) et le maillage non-adapté (à droite).

Quatrième partie

Résultats Numériques

Chapitre 9

En acoustique

Introduction

Dans ce chapitre, nous utilisons les études effectuées dans les premières parties de ce mémoire et les appliquons à des modèles synthétiques.

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la validation du code de modélisation par éléments finis mixtes spectraux de la propagation d'ondes en milieu acoustique. Pour cela, nous considérons le cas simple d'un domaine bidimensionnel constitué de deux matériaux de propriétés physiques différentes séparés par une interface horizontale. Nous considérons une surface libre sur la limite supérieure du domaine et utilisons les PMLs sur les trois autres côtés pour modéliser le fait que le milieu est infini. Le cadre de cette étude nous permet de calculer de façon analytique la solution du problème. Nous comparons alors cette solution à celle obtenue par la méthode des éléments finis mixtes spectraux.

Dans un second temps, nous étudions l'effet d'une explosion sur la topographie d'un modèle réaliste 2D : un modèle Foothills. Celui-ci est constitué d'un très grand nombre de milieux de propriétés physiques différentes et de géométries complexes. Il permet de montrer l'aptitude de la méthode à résoudre des modèles complexes et réalistes de grande dimension. Les résultats montrés dans ce chapitre semblent cohérents mais sont difficiles à analyser.

9.1 Quelques résultats de validation

Nous nous intéressons à la validation du code de résolution par éléments finis mixtes spectraux de l'équation des ondes 2D. Pour cela, nous nous plaçons dans le cas d'un domaine hétérogène constitué de deux milieux de propriétés physiques différentes. L'étude effectuée consiste alors en la comparaison des temps d'arrivée de l'onde et de ses amplitudes à des expressions analytiques de ceux-ci. Nous avons choisi un tel domaine pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il permet de vérifier la cohérence des résultats en milieu homogène (avant que l'onde ne touche l'interface). Ensuite, en faisant intervenir une interface plane entre deux milieux de propriétés physiques différentes, nous pouvons comparer les coefficients de réflexion et de transmission obtenus par discrétisation aux coefficients de réflexion et de transmission théoriques. Enfin, tout domaine constitué de plusieurs milieux est une combinaison de différents milieux du même type que le milieu hétérogène considéré ici. Nous nous sommes restreint au cas où l'interface est plane afin de simplifier cette étude : des expressions analytiques de la

solution sont beaucoup plus difficiles à exhiber dans le cas d'interfaces chahutées. Ce milieu permet donc d'avoir un aperçu du bon comportement (ou non) de la méthode de résolution sans pour autant générer des calculs trop complexes.

Considérons donc le domaine hétérogène constitué de deux milieux de propriétés physiques :

- milieu 1 : $\rho_1 = 2\text{Kg.m}^{-3}$ et $\mu_1 = 8$ Pa (donc $c_1 = 2\text{m.s}^{-1}$),
- milieu 2 : $\rho_2 = 1\text{Kg.m}^{-3}$ et $\mu_2 = 1$ Pa (donc $c_2 = 1\text{m.s}^{-1}$).

L'interface entre ces deux milieux est horizontale, située à une profondeur de 15m par rapport à la limite supérieure du domaine (topographie) qui est définie par $x_2 = 0$. Nous supposons que le domaine est infini et nous intéressons aux phénomènes physiques se déroulant dans le carré $[0\text{m}, 25\text{m}] \times [-25\text{m}, 0\text{m}]$.
Pour toutes les simulations, les données initiales sont nulles et l'on considère une source :

$$f(x,t) = h(t)\ g(|x - x_S|)$$

où h est un Ricker d'ordre 2 en temps, de fréquence centrale $f_0 = 1\text{Hz}$:

$$h(t) = \left[2\pi^2(f_0 t - 1)^2 - 1\right]\ e^{-\pi^2(f_0 t - 1)^2}. \tag{9.1}$$

La fonction $g(|x - x_S|)$ est une gaussienne centrée en $x_S = (5\text{m}, -9\text{m})$ et distribuée sur un disque de rayon $r_0 = 1\text{m}$ de la forme :

$$g(|x - x_S|) = \frac{e^{-7|x - x_S|/r_0}}{r_0^2} \tag{9.2}$$

Remarque 68 *Dans le système mixte sur lequel est basée la méthode, la fonction source F est la primitive en temps de f.*

Nous entourons donc le domaine d'intérêt par des PMLs d'épaisseur 4m.
Nous considérons une première ligne horizontale de 47 récepteurs situés en $x_2 = -14.5\text{m}$ et régulièrement distribués entre $x_1 = 1\text{m}$ et $x_1 = 24\text{m}$. Ce premier groupe de récepteurs est donc entièrement inclus dans le premier milieu et situé près de l'interface entre les deux milieux. De même, nous considérons une seconde ligne horizontale de 47 récepteurs situés en $x_2 = -15.5\text{m}$ et régulièrement distribués entre $x_1 = 1\text{m}$ et $x_1 = 24\text{m}$. Ce second groupe de récepteurs est donc entièrement inclus dans le second milieu et situé symétriquement au premier groupe de récepteurs par rapport à l'interface.
Le cadre de l'expérience est résumé dans la figure 9.1. Nous y avons représenté les récepteurs et l'interface entre les deux milieux. Les PMLs sont en gris.
Nous utilisons le code de résolution par éléments finis mixtes spectraux (EFMS) Q_5. Nous construisons un maillage adapté aux vitesses à deux éléments par longueurs d'onde. Ce maillage est représenté dans la figure 9.2.
Nous représentons, tout d'abord, la pression calculée dans le domaine à différents instants dans la figure 9.3. L'interface entre les deux milieux est représentée en bleu et les récepteurs en noir. La forme de l'onde est cohérente.

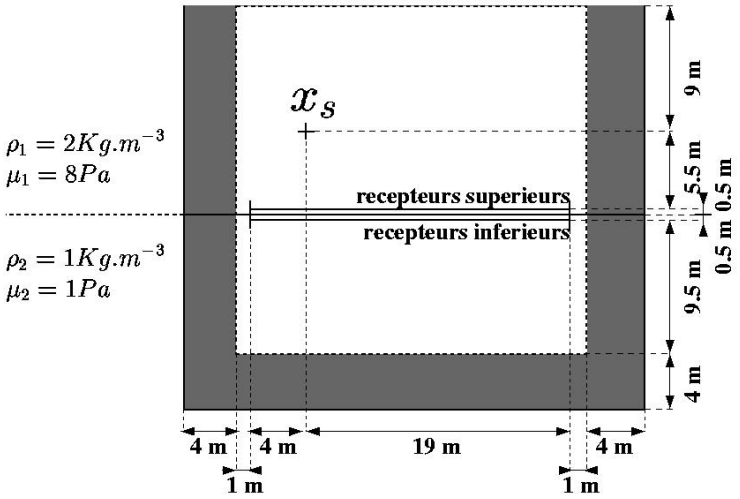


FIG. 9.1: Domaine d'étude pour la validation acoustique.

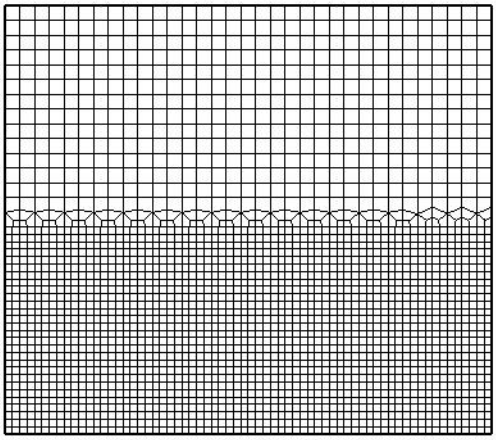


FIG. 9.2: Maillage utilisé pour l'expérience de validation acoustique.

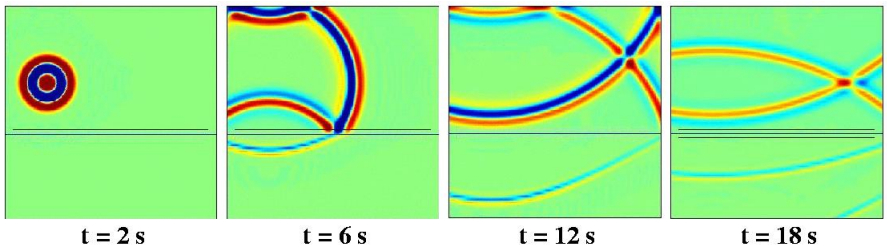


FIG. 9.3: Pression obtenue dans le domaine par EFMS, à différents instants.

9.1.1 Récepteurs supérieurs

Nous obtenons le sismogramme représenté dans la figure 9.4 pour la ligne de récepteurs située dans le premier milieu. La première arrivée enregistrée est l'arrivée directe de l'onde de la source aux récepteurs. La seconde arrivée provient de la réflexion de l'onde sur l'interface entre les deux milieux. Cette arrivée est indifférentiable de la première arrivée du fait de la proximité de la ligne de récepteurs par rapport à l'interface entre les deux milieux. Enfin, la troisième arrivée (la seconde reconnaissable sur le sismogramme) provient de la réflexion de l'onde sur la topographie. Elle est elle-aussi indifférentiable de sa réflexion par l'interface.

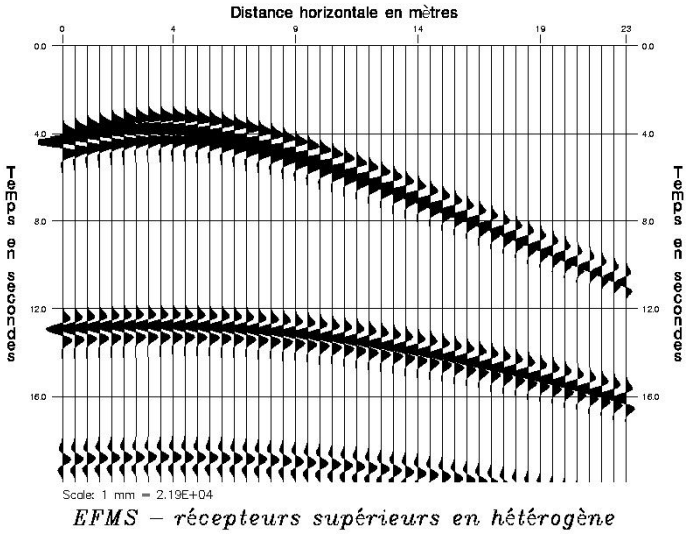


FIG. 9.4: Sismogramme obtenu par EFMS sur les récepteurs supérieurs.

Afin de différencier les arrivées et leurs réflexions par l'interface, nous calculons, pour chacun des récepteurs, la valeur de la pression au cours du temps pour le même domaine en milieu homogène de densité ρ_1 et de module de compressibilité μ_1. Le sismogramme obtenu est représenté dans la figure 9.5. Les deux premières arrivées correspondent donc à l'arrivée directe de l'onde (uniquement) et à l'onde réfléchie par la topographie.
En faisant la soustraction de ce sismogramme au sismogramme obtenu aux mêmes récepteurs en milieu hétérogène, nous obtenons uniquement les ondes réfléchies par l'interface entre les deux milieux : celle de l'arrivée directe et celle de l'onde réfléchie par la topographie (voir figure 9.6).
Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à la vérification des temps et des amplitudes de ces trois premières arrivées.

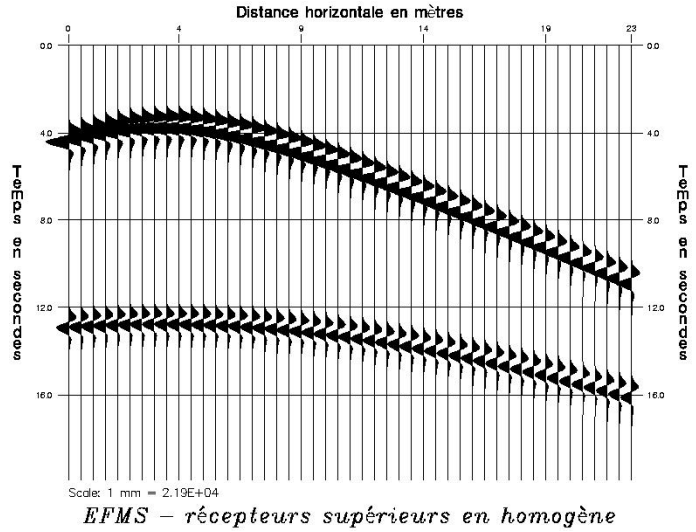


FIG. 9.5: Sismogramme obtenu par EFMS en milieu homogène sur les récepteurs supérieurs.

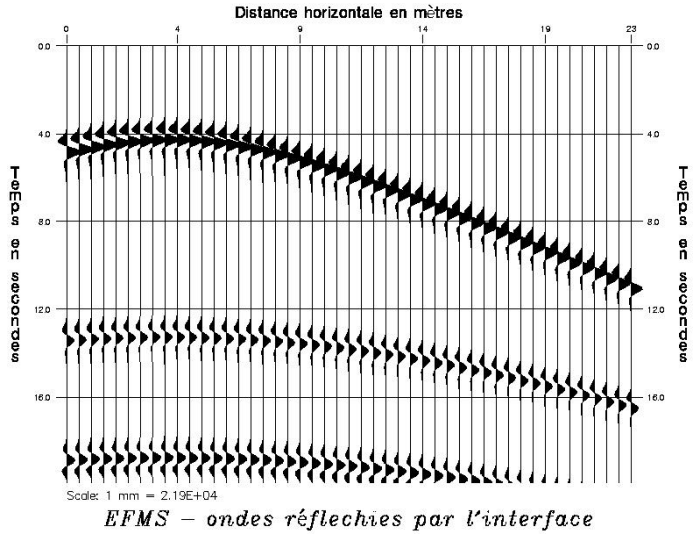


FIG. 9.6: Sismogramme obtenu par soustraction du sismogramme 9.5 au sismogramme 9.4.

9.1.1.1 Etude des temps d'arrivée aux récepteurs

Intéressons-nous tout d'abord aux temps d'arrivée. Nous nous basons sur le schéma représenté dans la figure 9.7 qui tient compte de la loi de Descartes sur les angles des ondes incidente et réfléchie par une interface. Ainsi, pour une onde réfléchie par la topographie ou l'interface entre les deux milieux, tout se passe comme si le rayon provenait d'un point source image de x_s par symétrie par rapport à la surface réfléchissante.

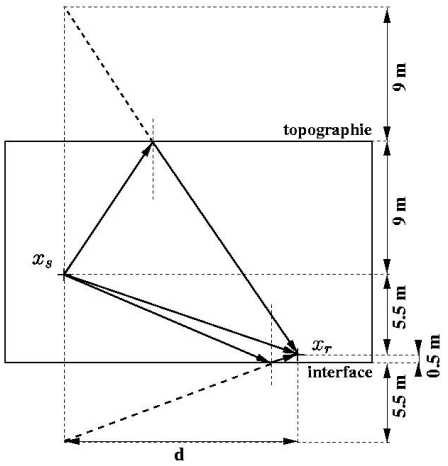


FIG. 9.7: Trajets des 3 ondes étudiées partant de la source et arrivant à un récepteur x_r

Calculons les temps d'arrivée à un récepteur d'abscisse d par rapport à la source :

- arrivée directe : le temps que met l'impulsion pour parcourir la distance entre le point source et le récepteur vaut $\sqrt{d^2+5.5^2}/c_1$,
- seconde arrivée : le temps que met l'impulsion pour parcourir la distance entre le point source, se réfléchir sur l'interface entre les deux milieux et arriver au récepteur vaut $\sqrt{d^2+(5.5+0.5)^2}/c_1$,
- troisième arrivée : le temps que met l'impulsion pour parcourir la distance entre le point source, se réfléchir sur la topographie et arriver au récepteur vaut $\sqrt{d^2+(2\times 9+5.5)^2}/c_1$.

Nous représentons dans la figure 9.8 les temps d'arrivée théoriques de ces trois ondes. En abscisse, nous avons représenté l'abscisse des récepteurs et en ordonnée le temps.

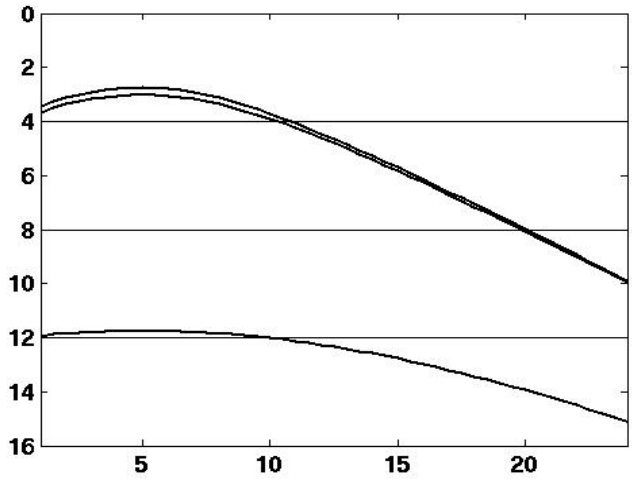


FIG. 9.8: Temps d'arrivée théoriques aux récepteurs supérieurs.

Nous retrouvons bien les temps associés aux trois premières arrivées de l'onde aux récepteurs (il faut regarder le temps d'arrivée du début du signal) représentés dans les figures 9.5 et 9.6.

9.1.1.2 Etude de l'amplitude des ondes

Intéressons-nous, à présent, à l'amplitude des trois arrivées de l'onde aux récepteurs du premier milieu. Pour cela, nous utilisons le fait que l'énergie se conserve dans le domaine au cours du temps. Nous supposons que la source envoit une énergie unitaire. Calculons les amplitudes pour un récepteur d'abscisse d par rapport à la source :

– arrivée directe : pour ce récepteur, l'énergie de l'onde est distribuée sur un cercle de rayon $l = \sqrt{d^2 + 5.5^2}$. L'amplitude du signal sera donc égale à $\sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi l}$. Nous divisons cette quantité par une constante telle que le maximum obtenu soit alors égal à 1 pour les valeurs de l qui nous intéressent. Posons :

$$A_{inc} = \frac{\sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi l}}{sup_{l\in[5.5^2..\sqrt{19^2+5.5^2}]}\sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi l}} = \sqrt{\frac{5.5}{l}}$$

Nous extrayons, par un programme Fortran, la valeur maximale de l'amplitude de l'onde représenté dans la figure 9.5, en chacun des récepteurs et pour t compris entre 0s et 12s. Nous obtenons alors l'amplitude maximale de l'arrivée directe de l'onde en chacun des récepteurs. Comme pour A_{inc}, nous nous arrangeons pour que le maximum pris par cette quantité soit égal à 1.
Nous représentons dans la figure 9.9 la courbe obtenue ainsi que A_{inc}. Les amplitudes de l'arrivée directe de l'onde aux récepteurs sont cohérentes.

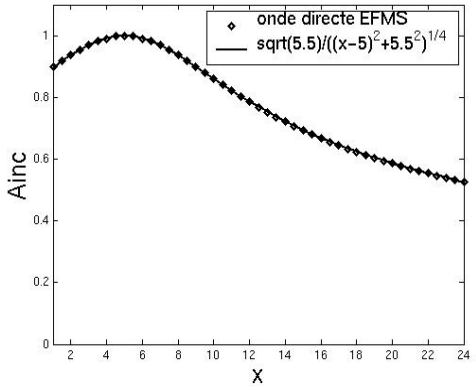


FIG. 9.9: Valeurs théoriques et numériques de l'amplitude de l'arrivée directe de l'onde aux récepteurs supérieurs.

– seconde arrivée : dans ce cas, il faut tenir compte du coefficient de réflexion d'une onde d'amplitude 1 sur l'interface entre les deux milieux. Pour une onde arrivant avec un angle d'incidence θ_{in} sur l'interface horizontale, ce coefficient de réflexion vaut[1] :

$$R = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 1\right)\tan(\theta_{in})^{-2}}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 1\right)\tan(\theta_{in})^{-2}}}$$

[1] les calculs sont détaillés dans le cas d'une interface verticale dans le paragraphe 8.2.

Le récepteur se situant près de l'interface, nous supposons que l'amplitude de l'onde réfléchie est égale au coefficient de réflexion multiplié par l'amplitude de l'onde qui touche l'interface. Ainsi, pour le récepteur considéré, l'angle d'incidence du signal vérifie $d = -\tan\theta_{in} \times (5.5+0.5)$. Si l'on pose $l = \sqrt{d^2+(5.5+0.5)^2}$, l'amplitude du signal est alors $R \times \sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi l}$. Nous divisons cette quantité par la valeur maximale prise par l'amplitude de l'arrivée directe aux récepteurs. Posons :

$$A_{ref} = \frac{R \times \sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi l}}{\sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi \times 5.5}} = R\frac{\sqrt{5.5}}{\sqrt{l}}$$

Nous extrayons, par le même programme Fortran que pour l'étude de l'amplitude de l'arrivée directe, la valeur maximale de l'amplitude de la première onde représentée dans la figure 9.6, en chacun des récepteurs et pour t compris entre 0s et 12s. Nous obtenons alors l'amplitude maximale de la première onde réfléchie par l'interface entre les deux milieux en chacun des récepteurs. Comme pour A_{ref}, nous divisons ces quantités par la valeur maximale de l'amplitude de l'onde directe sur les récepteurs considérés.
Nous représentons dans la figure 9.10 la courbe obtenue ainsi que A_{ref}.

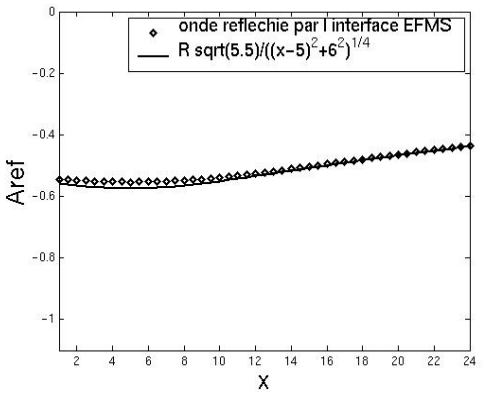


FIG. 9.10: Valeurs théoriques et numériques de l'amplitude de la première réflexion par l'interface entre les deux milieux aux récepteurs supérieurs.

Nous observons une légère erreur au niveau de l'amplitude de l'onde réfléchie pour les récepteurs à la verticale du point source. Cette erreur peut provenir du coefficient de réflexion théorique : l'étude de réflexion-transmission suppose une solution sous forme d'onde plane. Or, d'une part, la source ne génère pas une telle onde et, de plus, les distances source-récepteurs ne sont pas suffisamment grandes pour cette simplification. Ceci expliquerait aussi pourquoi l'erreur diminue lorsque l'on s'éloigne de la verticale de la source.

– troisième arrivée : tout se passe comme si l'onde provenait d'un point source symétrique de x_s par rapport à la topographie. Ainsi, pour le récepteur considéré, l'énergie de l'onde est distribuée sur un cercle de rayon $l = \sqrt{d^2+(2\times 9+5.5)^2}$. L'amplitude du signal sera donc égale à $A_{topo} = \sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi l}$. Nous divisons cette quantité par la valeur maximale prise par l'amplitude de l'arrivée directe aux récepteurs. Posons :

$$A_{topo} = \frac{\sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi l}}{\sqrt{2\Pi \times 5.5}} = \frac{\sqrt{5.5}}{\sqrt{l}}$$

Nous extrayons, toujours par le même programme, la valeur maximale de l'amplitude de la seconde onde représentée dans la figure 9.5, en chacun des récepteurs et pour t compris entre 12s et 20s. Nous obtenons alors l'amplitude maximale de l'onde réfléchie par la topographie en chacun des récepteurs. Comme pour A_{topo}, nous divisons ces quantités par la valeur maximale de l'amplitude de l'onde directe sur les récepteurs considérés.
Nous représentons dans la figure 9.11 la courbe obtenue ainsi que A_{topo}. Les amplitudes sont cohérentes.

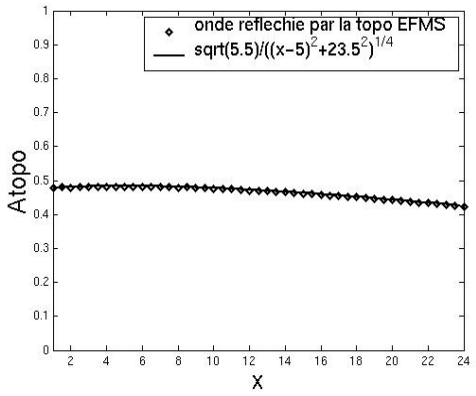


FIG. 9.11: Valeurs théoriques et numériques de l'amplitude de la première réflexion par la topographie aux récepteurs supérieurs.

Cette étude valide les résultats obtenus par la méthode des éléments finis mixtes spectraux pour les trois premières arrivées de l'onde aux récepteurs situés dans le premier milieu.

9.1.2 Récepteurs inférieurs

Le sismogramme représenté dans la figure 9.12 correspond à la ligne de récepteurs située dans le second milieu. Il est représenté avec la même échelle que le sismogramme 9.4. La première arrivée provient de la transmission de l'onde du premier milieu dans le second.
Nous allons nous intéresser à la validation des temps d'arrivée et de l'amplitude de la première onde représentée dans la figure 9.12. Les calculs sont plus complexes que dans le cas des récepteurs supérieurs.

9.1.2.1 Etude des temps d'arrivée aux récepteurs

Intéressons-nous tout d'abord aux temps d'arrivée. Pour cela, nous allons nous baser sur le schéma représenté dans la figure 9.13. Soit t le temps de parcours de l'onde entre x_s et x_r :

$$t = \frac{r_1}{c_1} + \frac{r_2}{c_2} \tag{9.3}$$

où r_1 est la distance entre x_s et le point d'impact sur l'interface et r_2 la distance entre le point d'impact et x_r :

$$r_1 = \sqrt{d_1^2 + 6^2}, \quad r_2 = \sqrt{d_2^2 + 0.5^2},$$

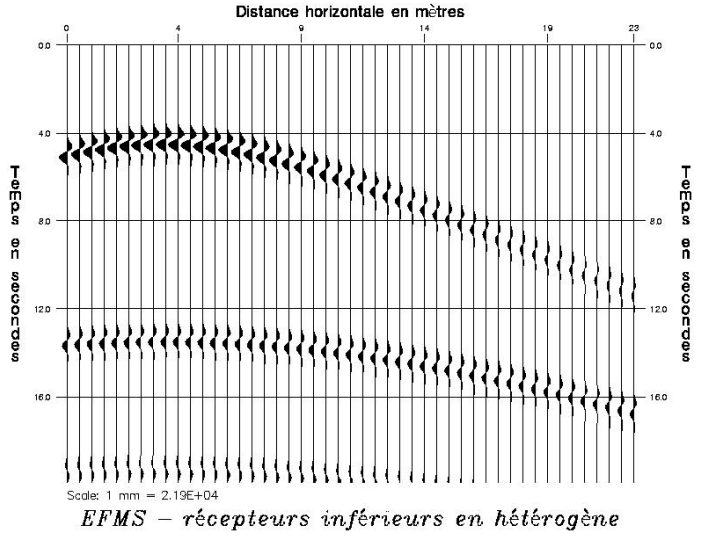


FIG. 9.12: Sismogramme obtenu par EFMS sur les récepteurs inférieurs.

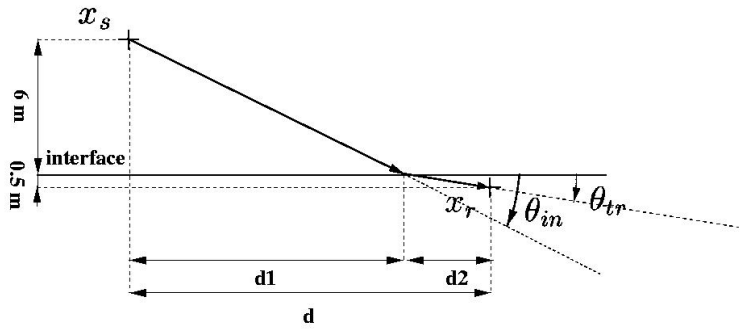


FIG. 9.13: Trajet de l'onde transmise partant de la source x_s et arrivant à un récepteur x_r.

avec les notations de la figure 9.13.
Or :

$$d = d_1 + d_2 \tag{9.4a}$$

$$d_1 = -6\tan(\theta_{in})^{-1} \tag{9.4b}$$

$$d_2 = -0.5\tan(\theta_{tr})^{-1} \tag{9.4c}$$

où θ_{in} est l'angle de propagation de l'onde incidente et θ_{tr} celui de l'onde transmise.

De plus, d'après l'analyse de réflexion-transmission (voir paragraphe 8.2 pour plus de détails), nous pouvons exprimer l'angle de transmission en fonction de l'angle d'incidence par :

$$c_1 \cos(\theta_{tr}) = c_2 \cos(\theta_{in}). \tag{9.5}$$

Soit :

$$2\sqrt{1+\tan^2(\theta_{tr})} = \sqrt{1+\tan^2(\theta_{in})} \tag{9.6}$$

Pour valider les temps d'arrivée aux récepteurs du second milieu, nous allons procéder de la façon suivante : nous discrétisons l'interface entre les deux milieux par une grille suffisamment fine $(x_i)_{i=1..n}$. Pour chaque x_i, nous déterminons l'angle d'incidence d'un rayon partant de x_s et arrivant en x_i par l'équation (9.4b). L'équation (9.6) nous donne alors l'angle de réflexion correspondant. Nous déterminons ensuite l'abscisse du récepteur touché par ce rayon par la formule (9.4a). Si cette abscisse correspond bien à l'un des récepteurs du second milieu, nous associons à ce récepteur le temps pris par le rayon pour parcourir la distance source-récepteur (9.3). Nous obtenons alors la courbe 9.14.

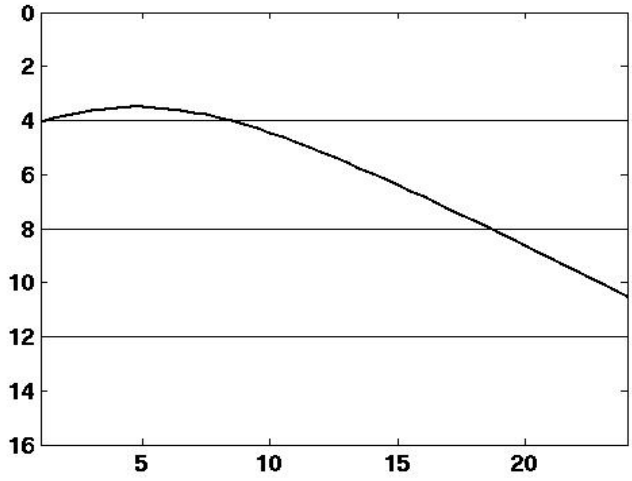


FIG. 9.14: Temps d'arrivée théoriques aux récepteurs inférieurs.

Nous retrouvons bien les temps d'arrivée de la première arrivée du sismogramme 9.12.

9.1.2.2 Etude de l'amplitude des ondes

Intéressons-nous, à présent, à l'amplitude de l'onde transmise. Pour cela, nous allons procéder de la même façon que pour le calcul de l'amplitude de l'onde réfléchie dans la section 9.1.1 : il faut tenir compte du coefficient de transmission d'une onde d'amplitude 1 sur l'interface entre les deux milieux. Pour une onde arrivant avec un angle d'incidence θ_{in} sur l'interface horizontale, ce coefficient de transmission vaut[2] :

$$T = \frac{2\frac{\rho_2}{\rho_1}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 1\right)\tan(\theta_{in})^{-2}}}$$

Le récepteur se situant près de l'interface, nous supposons que l'amplitude de l'onde transmise est égale au coefficient de transmission multiplié par l'amplitude de l'onde qui touche l'interface. Ainsi, pour un récepteur d'abscisse d par rapport à la source, l'angle d'incidence du signal vérifie $d = -\tan\theta_{in} \times (5.5+0.5)$. Si l'on pose $r = \sqrt{d^2 + (5.5+0.5)^2}$, l'amplitude du signal est alors $T \times \sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi r}$. Nous divisons

[2]les calculs sont détaillés dans le cas d'une interface verticale dans le paragraphe 8.2

cette quantité par la valeur maximale prise par l'amplitude de l'arrivée directe aux récepteurs. Posons :

$$A_{tr} = \frac{T \times \sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi r}}{\sqrt{\mu_1}/\sqrt{2\Pi \times 5.5}} = R\frac{\sqrt{5.5}}{\sqrt{r}}$$

Nous extrayons, par le même programme Fortran que pour l'étude des amplitudes aux récepteurs supérieurs, la valeur maximale de l'amplitude de la première onde représentée dans la figure 9.12, en chacun des récepteurs et pour t compris entre 0s et 12s. Nous obtenons alors l'amplitude maximale de la première onde transmise par l'interface entre les deux milieux en chacun des récepteurs. Comme pour A_{tr}, nous divisons ces quantités par la valeur maximale de l'amplitude de l'onde directe sur les récepteurs considérés.
Nous représentons dans la figure 9.15 la courbe obtenue ainsi que A_{tr}. Les amplitudes sont cohérentes.

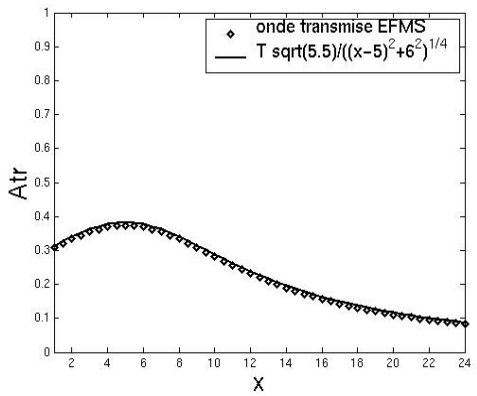


FIG. 9.15: Valeurs théoriques et numériques de l'amplitude de la première transmission par l'interface entre les deux milieux.

Cette étude valide les résultats obtenus par la méthode des éléments finis mixtes spectraux pour l'arrivée, aux récepteurs inférieurs, de la première onde transmise du premier au second milieu. En particulier, elle montre l'efficacité d'un maillage adapté aux vitesses du milieu.

9.2 Un modèle Foothills

Nous nous intéressons à la propagation d'une onde générée par une pression appliquée à la surface d'un sous-sol géophysique. De ce domaine infini, nous extrayons une zone d'intérêt de dimension 4200m $\times$ 3000m. Les vitesses des ondes de pression dans cette zone d'intérêt sont représentées dans la figure 9.16. Ce domaine est apellé "modèle de Foothills".

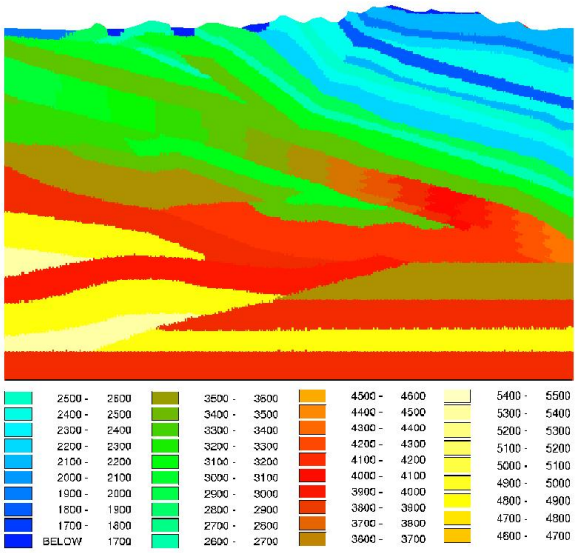


FIG. 9.16: Vitesses associées au modèle Foothills étudié. (en m.s^{-1})

Nous voulons étudier l'effet d'une explosion qui se produit au milieu de la topographie. Pour modéliser cette explosion, nous considérons des données initiales nulles et une fonction source :

$$f(x,t) = h(t)\, g(|x - x_S|)$$

où h est un Ricker d'ordre 2 en temps, de fréquence centrale $f_0 = 20$Hz :

$$h(t) = \left[2\pi^2 (f_0 t - 1)^2 - 1\right]\ e^{-\pi^2 (f_0 t - 1)^2}. \tag{9.7}$$

La fonction $g(|x - x_S|)$ est une gaussienne centrée en $x_S = (2100\text{m}, 2864\text{m})$ et distribuée sur un disque de rayon $r_0 = 42$m de la forme :

$$g(|x - x_S|) = \frac{e^{-7|x - x_S|/r_0}}{r_0^2} \tag{9.8}$$

Nous entourons le domaine de PMLs dont l'épaisseur est la plus grande longueur d'onde du maillage (soit 180m). Nous utilisons la méthode de résolution par éléments finis mixtes spectraux Q_5 et construisons alors un maillage adapté aux vitesses du milieu d'au moins deux éléments par longueur d'onde. Ce maillage est représenté dans la figure 9.17. Nous avons indiqué en gras les interfaces entre les différents milieux ainsi que le bord entre le domaine physique et les PMLs.

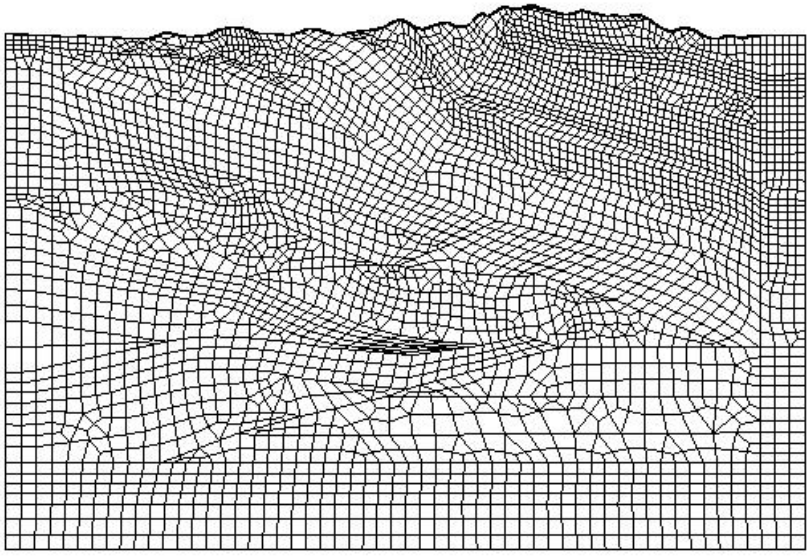


FIG. 9.17: Maillage adapté du modèle Foothills (3693 éléments dont 552 pour les PMLs).

Nous considérons une ligne de 167 récepteurs située sur la topographie et régulièrement espacés entre $x_1 = 25$m et $x_1 = 4175$m.
Le pas de temps utilisé vaut : $\delta t = 2.4 \times 10^{-4}$s et nous faisons exécuter le programme jusque $T = 2$s. Sur un ordinateur Compac $XP1000$, un processeur $21264/ev6$ (500 Mhz), le CPU vaut 8 minutes.

Remarque 69 *N'ayant à notre disposition que la valeur de la vitesse en chaque point du domaine considéré, nous avons pris une densité constante égale à* 1Kg.m^{-3} *dans tout le domaine et un module de compressibilité égal au carré de la vitesse en chaque point.*

Représentons, tout d'abord, la valeur du module du champ de déplacement dans tout le domaine (PMLs exclues) à différents instants dans la figure 9.18. Les interfaces entre les différents milieux sont représentées en blanc. Les instantanés étant relativement complexes, il est difficile de les analyser. Remarquons toutefois que les résultats semblent cohérents : l'onde se propage bien plus lentement dans la zone supérieure droite, là où les vitesses sont les plus faibles, que dans le reste du domaine. Les réflexions et transmissions sur les interfaces inférieures ont l'air de bien se passer. Enfin, les PMLs fonctionnent bien.

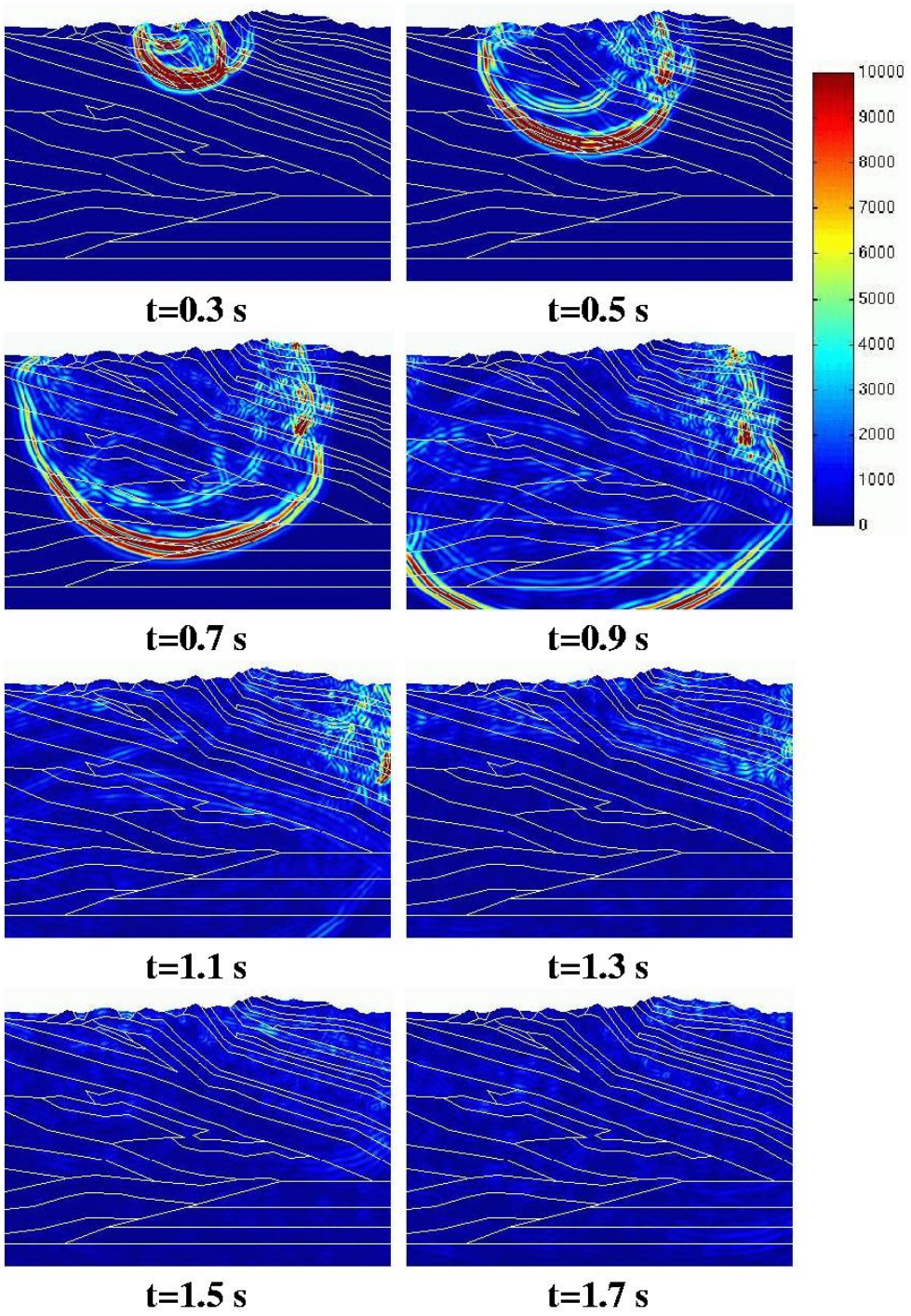


FIG. 9.18: Module du champ de déplacement dans le domaine physique, à différents instants, obtenus par EFMS pour le modèle Foothills.

Le sismogramme obtenu sur la ligne de récepteurs est représenté dans la figure 9.19. Nous avons multiplié chaque valeur de la norme du déplacement en chaque récepteur par $\sqrt{t}$ afin de mieux en visualiser les variations au cours du temps. Nous avons choisi $\sqrt{t}$ pour la raison suivante : à vitesse c constante, nous avons vu dans la section 9.1 que l'amplitude de l'onde est divisée par un facteur $\sqrt{d}$ où d est la distance source-récepteur, ce qui revient à diviser par $\sqrt{t} \times \sqrt{c}$.
Nous remarquons que certains récepteurs ne sont pas illuminés par l'arrivée directe de l'onde mais par ses réflexions. Ceci peut se justifier par la forme chahutée de la topographie.

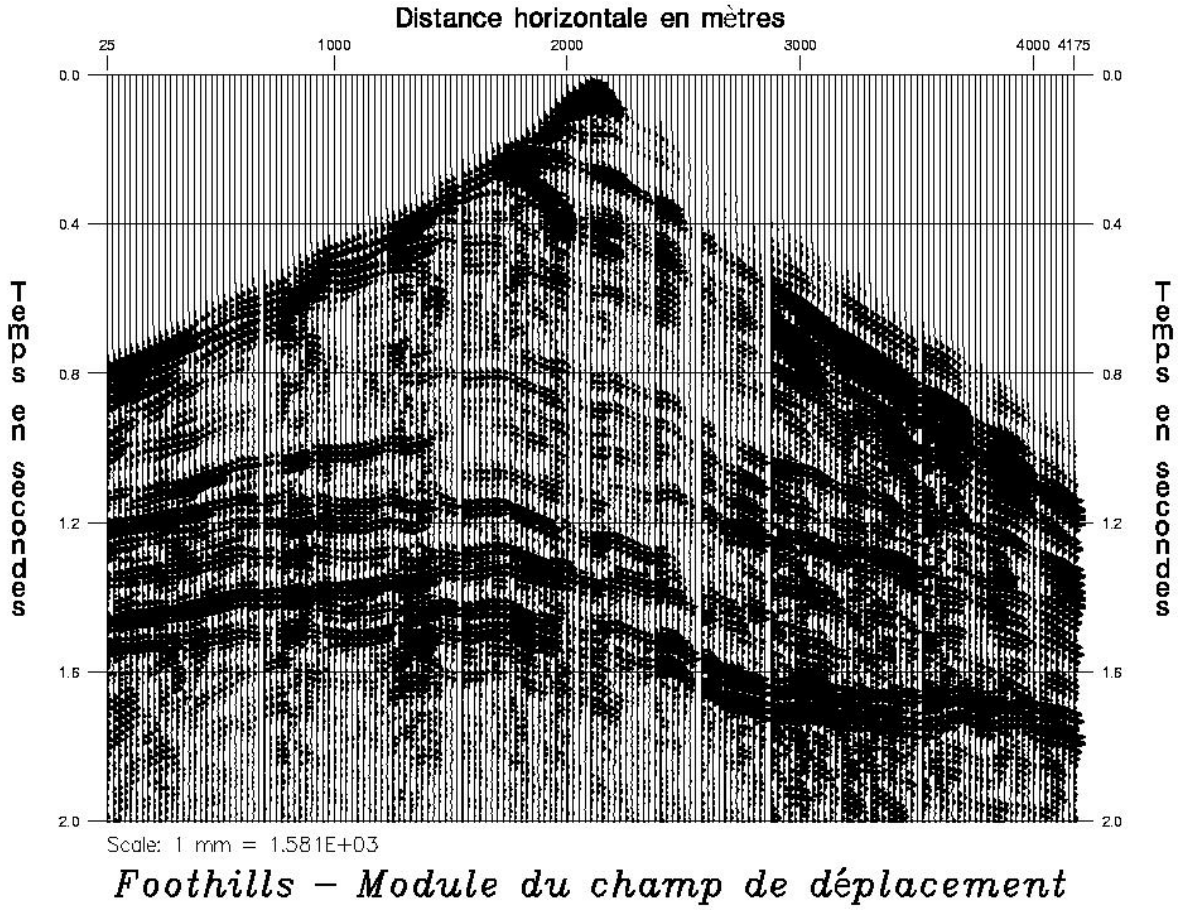


FIG. 9.19: Module du champ de déplacement au cours du temps en chacun des récepteurs, obtenus par EFMS pour le modèle Foothills.

Chapitre 10

En élastodynamique

Introduction

Dans ce chapitre, nous effectuons les mêmes études que dans le chapitre précédent, pour le système de l'élastodynamique.

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la validation du code de modélisation par éléments finis mixtes spectraux de la propagation d'ondes en milieu élastique. Les expressions analytiques des coefficients de réflexion et de transmission étant complexes en élastodynamique, nous nous intéressons uniquement à des milieux homogènes infinis isotrope et anisotrope. Nous vérifions alors les temps d'arrivée des ondes de cisaillement et de pression obtenus par la méthode des éléments finis mixtes spectraux.

Dans un second temps, nous étudions l'effet d'une explosion sur la topographie d'un modèle réaliste 2D de grande dimension. Comme pour le modèle Foothills étudié en acoustique, cette exemple numérique permet de montrer l'aptitude de la méthode à résoudre des modèles complexes et réalistes de grande dimension en élastodynamique.

10.1 Quelques résultats de validation

Nous nous intéressons, dans le cadre de la validation du code élastique en dimension 2, à la cohérence des arrivées directes dans le cas d'un milieu homogène infini. Nous considérons donc trois matériaux de masse volumique $\rho = 1\text{Kg.m}^{-3}$ et de coefficients d'élasticité (en Pa) :

- Matériau 1 : milieu isotrope avec $\lambda = 16$ et $\mu = 2$.
- Matériau 2 : milieu orthotrope avec $c_{1111} = c_{2222} = 20$, $c_{1212} = 2$ et $c_{1122} = 14.5$.
- Matériau 3 : milieu orthotrope avec $c_{1111} = c_{2222} = 20$, $c_{1212} = 2$ et $c_{1122} = 3.8$.

Nous nous intéressons aux phénomènes physiques se déroulant dans un carré 25m de côté. Pour toutes les simulations, les données initiales sont nulles et l'on considère une source :

$$f(x,t) = h(t)\, g(|x - x_S|)\, \frac{\overrightarrow{x - x_S}}{|x - x_S|}$$

où h et g sont les fonctions définies dans la section 5.3.2 : h est un Ricker d'ordre 2 en temps, de fréquence centrale $f_0 = 0.9\text{Hz}$:

$$h(t) = \left[2\pi^2(f_0 t - 1)^2 - 1\right]\ e^{-\pi^2(f_0 t-1)^2}. \tag{10.1}$$

La fonction $g(|x - x_S|)$ est une gaussienne centrée en $x_S = (12.5\text{m}, 12.5\text{m})$ et distribuée sur un disque de rayon $r_0 = 0.5\text{m}$ de la forme :

$$g(|x - x_S|) = \frac{e^{-7|x-x_S|/r_0}}{r_0^2} \tag{10.2}$$

Nous entourons donc le domaine considéré par des PMLs d'epaisseur 5m et considérons une ligne de 81 récepteurs situés sur une ligne horizontale, à une distance minimum de 7.5m de la source (voir figure 10.1).

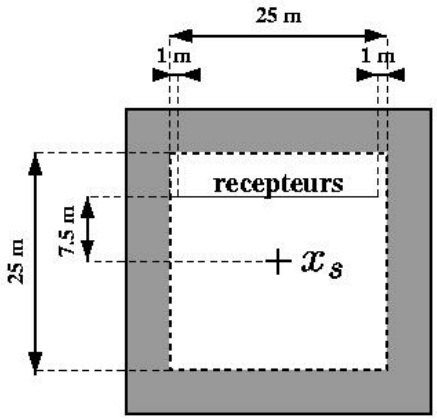


FIG. 10.1: Domaine d'étude pour la validation

La validation va se faire de la façon suivante : nous visualisons tout d'abord les fronts d'ondes théoriques donnés par les valeurs propres de la matrice de Christoffel (définie dans le chapitre 6) et les comparons aux fronts d'ondes obtenus par la méthode numérique à différents instants.
Dans un second temps, nous vérifions les temps d'arrivée des ondes de pression et de cisaillement sur la ligne de récepteurs.

10.1.1 Cohérence des fronts d'onde

Représentons, pour chaque matériau, les fronts d'ondes donnés par le calcul des valeurs propres de la matrice de Christoffel et le module du champ de déplacement dans le domaine physique, à différents instants, obtenus par la méthode des éléments finis mixtes spectraux (EFMS).

Rappel 6 *Soient* $\omega_{QP}(\mathbf{k})$ *et* $\omega_{QS}(\mathbf{k})$ *les racines des valeurs propres de la matrice de Christoffel, avec* $\mathbf{k} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.

- *Les courbes de vitesse de phase sont définies par les fonctions qui, à* θ*, associent respectivement* $\omega_{QP}(\mathbf{k})$ *et* $\omega_{QS}(\mathbf{k})$.
- *Les courbes de lenteur sont définies par les fonctions qui, à* θ*, associent respectivement l'inverse de* $\omega_{QP}(\mathbf{k})$ *et l'inverse de* $\omega_{QS}(\mathbf{k})$.

– *Les vitesses de groupe sont définies par les fonctions qui, à* θ*, associent respectivement le gradient (dérivé par rapport aux composantes de* $\mathbf{k}$*) de* ω_{QP} *et le gradient de* ω_{QS}*.*

– *Les fronts d'ondes sont les courbes décrites par les extrémités des vecteurs vitesse de groupe.*

Les résultats sont donnés dans la figure 10.2 pour le matériau isotrope, 10.3 pour le premier matériau orthotrope et 10.4 pour le dernier matériau considéré.

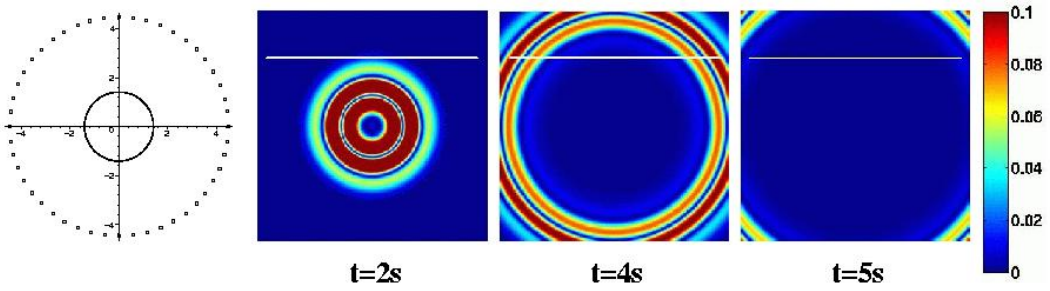


FIG. 10.2: Fronts d'ondes théoriques (à gauche) et module du champ de déplacement, à différents instants, obtenus par EFMS (à droite) pour le premier matériau.

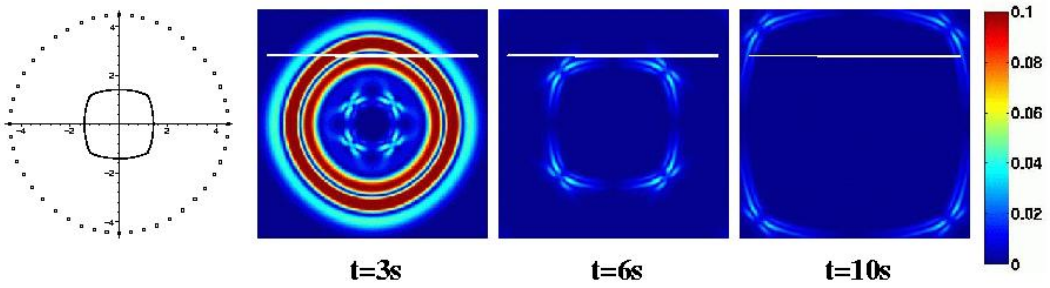


FIG. 10.3: Fronts d'ondes théoriques (à gauche) et module du champ de déplacement, à différents instants, obtenus par EFMS (à droite) pour le second matériau.

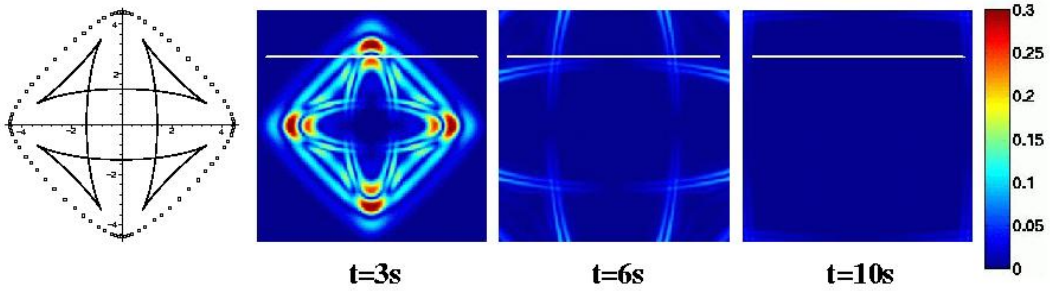


FIG. 10.4: Fronts d'ondes théoriques (à gauche) et module du champ de déplacement, à différents instants, obtenus par EFMS (à droite) pour le troisième matériau.

Remarque 70 *Sur les instantanés, nous avons représenté par un trait blanc la ligne de récepteurs.*

Remarque 71 *La source étant radiale, seule l'onde de pression est générée dans le matériau isotrope et la part d'énergie fournie à l'onde de cisaillement est faible dans le second matériau.*

Les instantanés présentés correspondent parfaitement aux fronts d'ondes théoriques.

10.1.2 Cohérence des temps d'arrivée aux récepteurs

Dans ce paragraphe, nous allons vérifier que les temps d'arrivée des ondes de pression et de cisaillement sur la ligne de récepteurs correspondent bien aux temps d'arrivée associés aux vitesses de groupe. Pour cela, nous allons calculer le temps que met le maximum pris par la source pour parcourir le trajet entre le point source et les récepteurs situés à l'extrémité de la ligne (r1 à gauche et r3 à droite) et entre le point source et le récepteur qui en est le plus proche (noté r2) (voir figure 10.5).

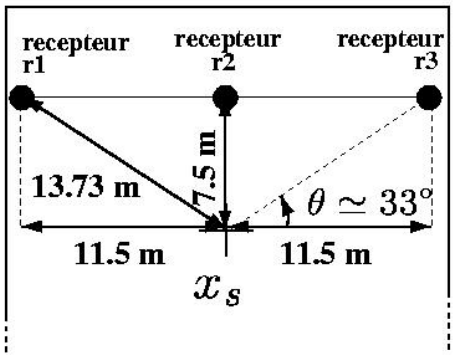


FIG. 10.5: Distances source-récepteurs et angle de propagation minimum à considérer.

Remarque 72 *Les matrices d'élasticité considérées étant toutes orthotropes, les temps d'arrivée au récepteur r1 et au récepteur r3 doivent être identiques.*

– **Expérience 1** : Représentons dans la figure 10.6 les diagrammes de vitesse de groupe pour les ondes de cisaillement et de pression.

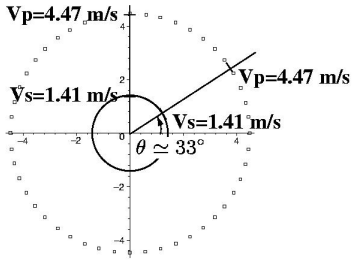


FIG. 10.6: Vitesses de groupe associées au milieu isotrope.

Ce diagramme nous permet alors de déterminer les temps d'arrivée théoriques des ondes aux trois récepteurs étudiés. Le milieu étant isotrope et la source radiale, nous étudions uniquement les temps d'arrivée des ondes de pression :

- arrivée de l'onde P en r1 et r3 : $t \simeq 3.07$s,
- arrivée de l'onde P en r2 : $t \simeq 1.67$s,

Représentons dans la figure 10.7 la valeur du module du champ de déplacement obtenu par éléments finis mixtes spectraux en chacun des récepteurs, au cours du temps.

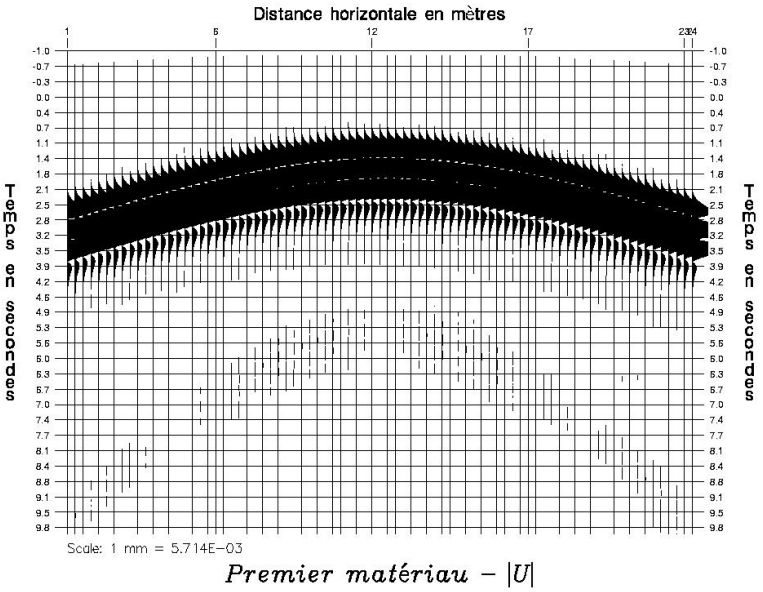


FIG. 10.7: Sismogramme obtenu par EFMS sur la ligne de récepteurs considérée pour la première expérience.

Les temps d'arrivée numériques sont cohérents avec les temps théoriques.

- **Expérience 2** : Nous procédons de la même façon que pour le milieu isotrope. La figure 10.8 représente les diagrammes de vitesse de groupe pour les ondes de cisaillement et de pression. Nous obtenons alors les temps d'arrivée théoriques suivant :
  - arrivée de l'onde P en r1 et r3 : $t \simeq 3.12$s,
  - arrivée de l'onde S en r1 et r3 : $t \simeq 8.84$s,
  - arrivée de l'onde P en r2 : $t \simeq 1.67$s,
  - arrivée de l'onde S en r2 : $t \simeq 5.30s$.

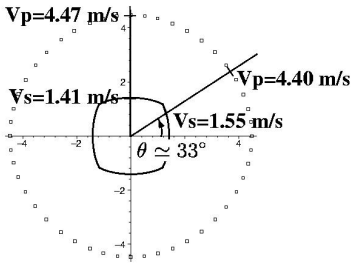


FIG. 10.8: Vitesses de groupe associées au deuxième matériau.

Représentons la valeur du module du champ de déplacement obtenu par éléments finis mixtes spectraux en chacun des récepteurs, au cours du temps dans la figure 10.9.
Nous retrouvons bien les temps d'arrivée théoriques calculés pour les récepteurs r1, r2 et r3.

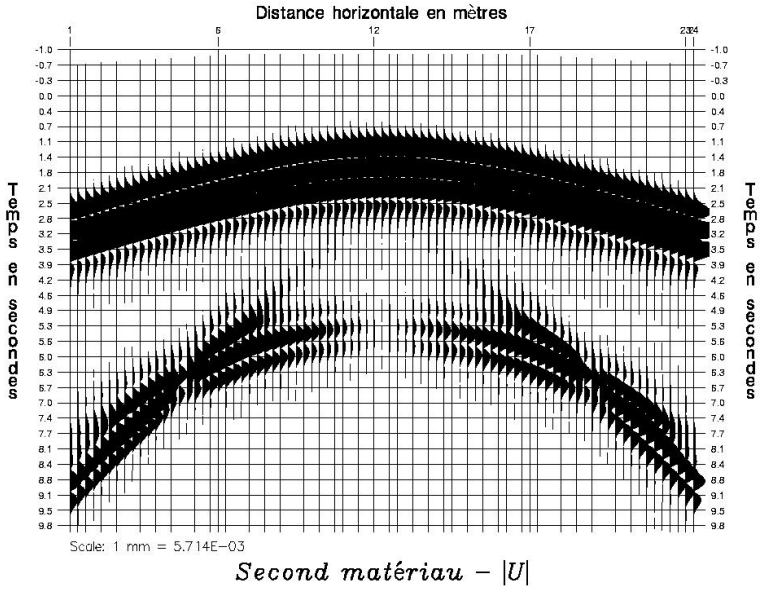


FIG. 10.9: Sismogramme obtenu par EFMS sur la ligne de récepteurs considérée pour la seconde expérience.

Nous remarquons, de plus, une duplication des ondes de cisaillement aux alentours des quinzième et soixante-septième récepteurs. Ces récepteurs correspondent à des angles de propagation respectifs de 135.19° et 45.09°. Nous retrouvons bien, avec une erreur de 0.2° maximum, l'angle correspondant à la discontinuité du front de l'onde de cisaillement.

– **Expérience 3** : La figure 10.10 représente les diagrammes de vitesse de groupe pour les ondes de cisaillement et de pression.

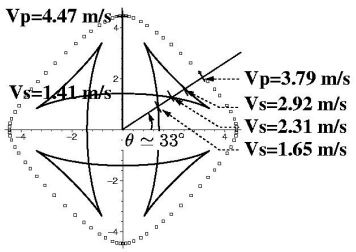


FIG. 10.10: Vitesses de groupe associées au troisième milieu.

Nous obtenons alors les temps d'arrivée théoriques suivant :

– arrivée de l'onde P en r1 et r3 : $t \simeq 3.62$s,
– arrivée des ondes S en r1 et r3 : $t \simeq 4.70$s, $t \simeq 5.95$s et $t \simeq 8.32$s,
– arrivée de l'onde P en r2 : $t \simeq 1.67$s,
– arrivée de l'onde S en r2 : $t \simeq 5.30$s.

Représentons la valeur du module du champ de déplacement obtenu par éléments finis mixtes spectraux en chacun des récepteurs, au cours du temps dans la figure 10.11.
Nous retrouvons bien les temps d'arrivée des ondes de pression et de cisaillement au récepteur

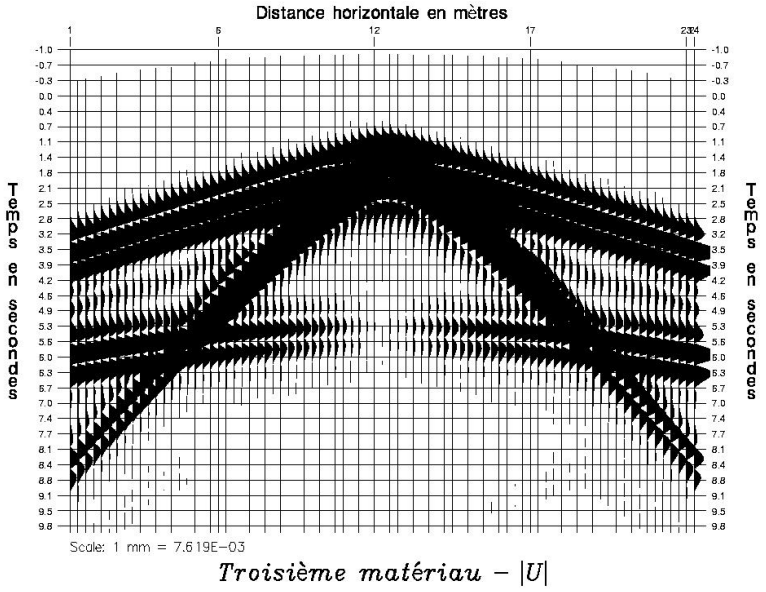


FIG. 10.11: Sismogramme obtenu par EFMS sur la ligne de récepteurs considérée pour la troisième expérience.

r2. Concernant les deux autres récepteurs, les temps d'arrivée de l'onde de pression sont cohérents, ainsi que les arrivées de l'onde de cisaillement à $t \simeq 5.95$s et $t \simeq 8.32$s. Par contre, la première arrivée de l'onde S aux récepteurs r1 et r3 n'est pas remarquable par rapport à la seconde arrivée de cette même onde.
Comme pour la seconde expérience, nous pouvons vérifier que les triplications observées dans le sismogramme aux alentours des quinzième et soixante-huitième récepteurs correspondent bien aux angles de propagation associés aux triplications sur le diagramme de vitesse de groupe de l'onde S.

10.2 Une expérience numérique réaliste 2D

Nous nous intéressons à la propagation d'une onde générée par une explosion verticale à la surface d'un sous-sol géophysique. De ce domaine infini, nous extrayons une zone d'intérêt de dimension 5000m $\times$ 18000m. Les coefficients de Thomsen [69] dans cette zone d'intérêt, qui définissent les propriétés élastiques du milieu, sont donnés par la figure 10.12.
Nous voulons étudier l'effet d'une explosion qui se produit au milieu de la topographie. Pour modéliser cette explosion, nous considérons des données initiales nulles et une fonction source (dérivée en temps de F) :

$$f(x,t) = -h(t)\, g(|x - x_S|)\ \overrightarrow{e}_2$$

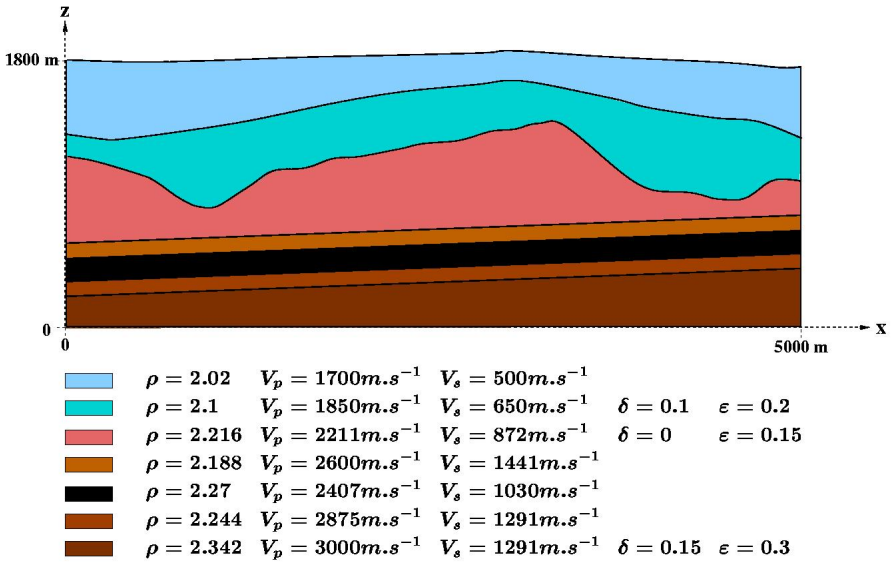


FIG. 10.12: Vitesses associées au modèle réaliste étudié en élastique.

où h est un Ricker d'ordre 2 en temps, de fréquence centrale $f_0 = 20$Hz défini dans le chapitre précédent, $g(|x - x_S|)$ est une gaussienne centrée en $x_S = (2500\text{m}, 1840\text{m})$ et distribuée sur un disque de rayon $r_0 = 5$m et $\overrightarrow{e}_2$ est le second vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Nous entourons le domaine de PMLs d'épaisseur la plus grande longueur d'onde de pression du modèle. Nous utilisons la méthode de résolution par éléments finis mixtes spectraux Q_5 et construisons alors un maillage adapté aux vitesses du milieu d'au moins deux éléments par longueurs d'onde. Ce maillage est représenté dans la figure 10.13.

Remarque 73 *Pour les matériaux considérés, les PMLs sont stables.*

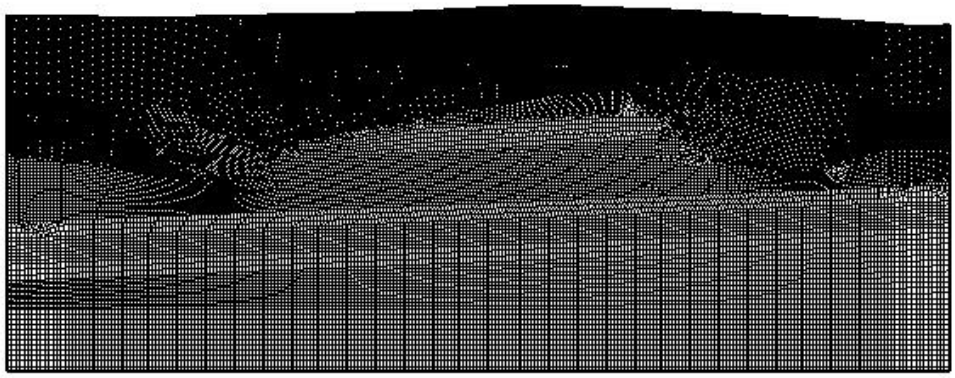


FIG. 10.13: Maillage adapté du modèle réaliste 2D élastique (52050 éléments dont 9789 pour les PMLs).

Le pas de temps utilisé vaut : $\delta t = 8 \times 10^{-5}$s et nous faisons exécuter le programme pendant 87500 pas de temps jusque $T = 8$s. Sur un ordinateur Compac $XP1000$, un processeur $21264/ev6$ (500Mhz), le CPU vaut environ 2 jours.

Représentons la valeur du module du champ de déplacement dans tout le domaine (PMLs exclues) à différents instants dans la figure 10.14. Les interfaces entre les différents milieux sont représentées en blanc.

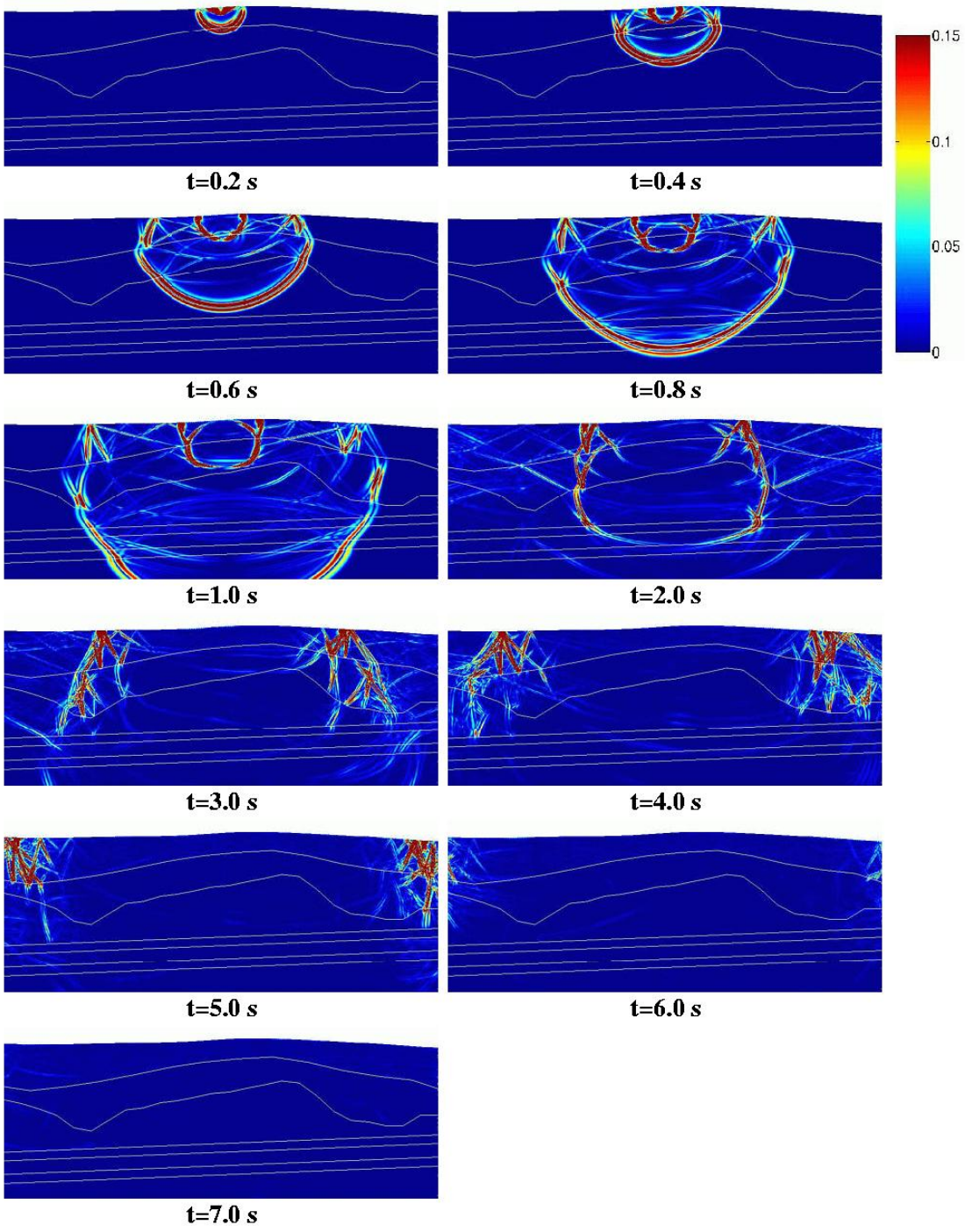


FIG. 10.14: Module du champ de déplacement dans le domaine physique, à différents instants, obtenus par EFMS pour le modèle réaliste étudié en élastique.

Nous observons bien la propagation des différents types d'onde : les ondes de pression, de cisaillement et l'onde de Rayleigh. Toutes ces ondes sont bien absorbées par les PMLs. Ces instantanés nous permettent aussi de suivre les réflexions, transmission et conversions des ondes aux interfaces du milieu.

Cinquième partie

Vers un couplage fluide-structure

Chapitre 11

Couplage Fluide-Structure en 2D

Nous nous sommes intéressés à la propagation d'ondes en milieu acoustique dans le chapitre 1. Le chapitre 3 concernait la propagation des ondes de pression et de cisaillement en milieu élastique. Une étude de fonds marins tenant compte de la propagation d'ondes de pression dans le fluide et d'ondes de pression et de cisaillement dans le solide est difficile à mener de façon satisfaisante à partir de ces deux méthodes : le modèle acoustique ne modélise pas les ondes de cisaillement et le modèle élastique, lui, impose la continuité des contraintes normales et tangentielles à l'interface entre deux milieux de propriétés différentes. L'utilisation du code élastique avec un milieu solide de vitesse V_s très faible pour simuler le fluide ne permet donc pas d'interfacer correctement un milieu fluide à un milieu solide. Nous nous proposons donc, dans ce chapitre, de coupler ces deux systèmes en dimension 2.

Dans un premier temps, nous mettons en place le système de couplage. Le système élastique utilisé est le système reformulé en déplacement-nouvelles variables γ_{ij} introduit dans la section 3.1. Les équations en pression-champ de vitesse dans le fluide sont vite oubliées au profit d'un système d'ordre 1 en temps faisant intervenir la primitive en temps de la pression et le déplacement, afin de garder un système global d'ordre 1 en temps avec des équations de couplage s'intégrant naturellement à la formulation variationnelle.
Dans un second temps, nous nous intéressons à la discrétisation par éléments finis mixtes spectraux du système obtenu. Nous retrouvons alors les matrices et vecteurs introduits dans les chapitres 1 et 3, ainsi que deux matrices de couplage que nous explicitons.
Nous discrétisons ensuite le schéma semi-discret en espace obtenu dans la section 11.3 en temps. Nous présentons deux schéma différents : un premier schéma explicite et un second schéma implicite pour lequel nous utilisons une méthode de prédicteur-multicorrecteur. Une étude de la condition de stabilité inhérente à chacune des deux méthodes n'a pu être effectuée par manque de temps. Nous donnons toutefois quelques éléments de réponse en nous basant sur des expériences numériques.
Nous nous intéressons ensuite au couplage des PML fluide aux PML solide afin de modéliser de façon satisfaisante des milieux non-bornés. Les systèmes PML d'ordre 1 en temps introduits dans le chapitre 5 permettent une mise en place rapide de ce couplage.
Enfin, nous présentons quelques résultats numériques pour des interfaces fluide-solide plane et sinusoïdale.

Le point de départ de cette étude est l'article de D. Komatitsch, C. Barnes et J. Tromp [49] sur la mise en place du couplage fluide-structure pour la méthode des éléments finis spectraux. Cette étude,

qui n'était pas prévue dans le sujet de thèse, a été effectuée au sein du laboratoire de séismologie de Caltech (Pasadena, USA).

11.1 Mise en place du système

Considérons un milieu de dimension 2 constitué d'un fluide Ω_f , de masse volumique ρ_f et de module de compressibilité μ , et d'un solide Ω_s, de densité ρ_s et de tenseur d'élasticité $\underline{\underline{C}}$.
La frontière entre ces deux milieux est notée Γ. Le bord de Ω_f privé de Γ est noté Γ_f. Le bord de Ω_s privé de Γ est noté Γ_s. Nous notons $\overrightarrow{n}$ la normale unitaire à Γ extérieure à Ω_s. (voir figure 11.1).

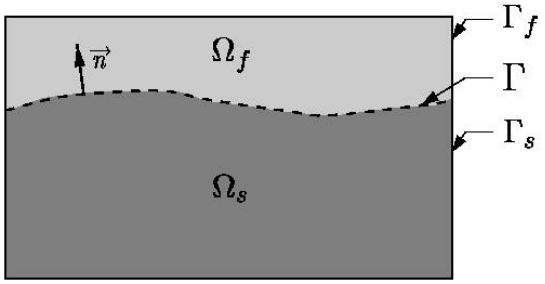


FIG. 11.1: Domaine de couplage fluide-structure.

Rappelons tout d'abord les équations à résoudre respectivement dans le solide et dans le fluide. Nous supposons que la source se trouve dans le fluide. Nous considérons un système au repos à $t = 0$.

Introduisons, dans le fluide, l'équation introduite lors de la mise en place de la méthode des éléments finis mixtes spectraux en acoustique (section 1.2) :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{v} = f \qquad \text{dans } \Omega_f, \tag{11.1a}$$

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla p \qquad \text{dans } \Omega_f, \tag{11.1b}$$

$$p = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_f, \tag{11.1c}$$

où p est la pression et $\mathbf{v}$ le champ de vitesse.

Dans le solide, nous travaillons en déplacement et utilisons la formulation mise en place dans la section 3.1 :

$$\rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{2} \nabla \cdot \gamma_{ij} = 0 \qquad \forall i = 1,2 \qquad \text{dans } \Omega_s, \tag{11.2a}$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = \nabla u_i \qquad \forall i = 1,2 \qquad \text{dans } \Omega_s, \tag{11.2b}$$

$$\gamma_{ij} = A_{ij}\gamma_j \qquad \forall i,j = 1,2 \qquad \text{dans } \Omega_s, \tag{11.2c}$$

$$u_i = 0 \qquad \forall i = 1,2 \qquad \text{sur } \Gamma_s. \tag{11.2d}$$

Le couplage entre les deux milieux se fait par l'intermédiaire de deux équations de continuité : la continuité de la traction et de la vitesse. Ces deux équations s'écrivent :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \overrightarrow{n} = p\,\overrightarrow{n} \qquad \text{sur } \Gamma, \tag{11.3a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{n} = \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{n} \qquad \text{sur } \Gamma, \tag{11.3b}$$

où $\mathbf{u}$ est le champ de déplacement dans le solide défini par $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et où $\underline{\underline{\sigma}}$ est relié aux γ_{ij} par (voir section 3.1) :

$$\sigma_{ik} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \gamma_{ij}[k]}{\partial t} \qquad \forall i,j = 1,2 \qquad \text{avec } \gamma_{ij} = \left(\gamma_{ij}[k]\right)_{k=1,2}. \tag{11.4}$$

Ainsi, le système de couplage 11.3 s'écrit en fonction des γ_{ij} sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{n} = p\, n_i \qquad \text{sur } \Gamma, \tag{11.5a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{n} = \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{n} \qquad \text{sur } \Gamma, \tag{11.5b}$$

avec $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2)$

Nous voudrions appliquer au système regroupant (11.1), (11.2) et (11.5) la méthode des éléments finis mixtes spectraux introduite dans la partie I. Ceci signifie que, pour passer à la formulation variationnelle, nous allons effectuer une intégration par partie sur les termes en divergence de γ_{ij} dans le solide et en divergence de $\mathbf{v}$ dans le fluide. Ces intégrations par partie vont alors faire apparaître naturellement les termes en γ_{ij} et en $\mathbf{v}$ respectivement aux bords de Ω_s et de Ω_f.

Nous avons alors :

Trouver $p \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega_f)\right)$, $u_i \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega_s)\right)$, $\forall i = 1..2$, $\mathbf{v} \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega_f)\right)\right]^2$, $\gamma_i \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega_s)\right)\right]^2$, $\forall i = 1,2$, et $\gamma_{i,j} \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega_s)\right)\right]^2$, $\forall i,j = 1,2$, tels que, pour tout i et tout j variant de 1 à 2 :

$$\int_{\Omega_f} \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial t}\varphi\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi\, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \mathbf{v}\cdot\overrightarrow{n}\,\varphi\, ds = \int_{\Omega_f} f\varphi\, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_f), \tag{11.6a}$$

$$\int_{\Omega_f} \rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot\psi\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_f} \nabla p\cdot\psi\, d\mathbf{x} \quad \forall \psi \in \left[L^2(\Omega_s)\right]^2, \tag{11.6b}$$

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t}\varphi_i\, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_s} \gamma_{ij}\cdot\nabla\varphi_i\, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{2}\gamma_{ij}\cdot\overrightarrow{n}\,\varphi_i\, ds = 0 \quad \forall \varphi_i \in H^1(\Omega_s), \tag{11.6c}$$

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}\cdot\psi_i\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_s} \nabla u_i\cdot\psi_i\, d\mathbf{x} \quad \forall \psi_i \in \left[L^2(\Omega_s)\right]^2, \tag{11.6d}$$

$$\int_{\Omega_s} \gamma_{ij}\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_s} (A_{ij}\gamma_j)\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} \quad \forall \psi_{ij} \in \left[L^2(\Omega_s)\right]^2. \tag{11.6e}$$

A présent, le but est de remplacer $\sum_{j=1}^{2}\gamma_{ij}\cdot\overrightarrow{n}$ intervenant dans l'équation (11.6c) par son équivalent dans le fluide donné par (11.5a) et $\mathbf{v}\cdot\overrightarrow{n}$ intervenant dans (11.6a) par son équivalent dans le solide

donné par (11.5b) afin d'introduire naturellement le couplage dans la formulation variationnelle. Or, c'est la dérivée en temps de la somme des γ_{ij} qui intervient dans l'équation (11.5a). Ainsi, il faudrait faire apparaître dans la formulation la primitive en temps de p ou dériver (11.6c) et faire intervenir p. Nous allons chercher un moyen plus simple d'introduire ce couplage.

L'idée la plus naturelle est alors d'introduire la primitive en temps de la pression dans le système fluide. Notons q cette nouvelle variable. Comme nous nous sommes principalement intéressés jusqu'ici à des systèmes d'ordre 1 en temps et à leur discrétisation par éléments finis mixtes spectraux, introduisons le système d'ordre 1 en temps associé à q :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{u}_f = F \qquad \text{dans } \Omega_f, \tag{11.7a}$$

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} = \nabla q \qquad \text{dans } \Omega_f, \tag{11.7b}$$

$$q = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_f, \tag{11.7c}$$

où $\mathbf{u}_f$ est le champ de déplacement dans le fluide et F est la primitive en temps de f.
Les équations de couplage s'écrivent alors :

$$\sum_{j=1}^{2} \gamma_{ij} \cdot \overrightarrow{n} = q\, n_i \qquad \text{sur } \Gamma, \tag{11.8a}$$

$$\mathbf{u}_s \cdot \overrightarrow{n} = \mathbf{u}_f \cdot \overrightarrow{n} \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{11.8b}$$

Pour ne pas qu'il y ait de confusion entre les champs de déplacement dans le solide et le fluide, nous avons noté $\mathbf{u}_s = (u_1, u_2)$ le champ de déplacement dans le solide.

Nous considérons donc le système :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{u}_f = F \qquad \text{dans } \Omega_f, \tag{11.9a}$$

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} = \nabla q \qquad \text{dans } \Omega_f, \tag{11.9b}$$

$$\rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{2} \nabla \cdot \gamma_{ij} = 0 \qquad \forall i = 1,2 \qquad \text{dans } \Omega_s, \tag{11.9c}$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = \nabla u_i \qquad \forall i = 1,2 \qquad \text{dans } \Omega_s, \tag{11.9d}$$

$$\gamma_{ij} = A_{ij}\, \gamma_j \qquad \forall i,j = 1,2 \qquad \text{dans } \Omega_s, \tag{11.9e}$$

$$q = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_f, \tag{11.9f}$$

$$u_i = 0 \qquad \forall i = 1,2 \qquad \text{sur } \Gamma_s, \tag{11.9g}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \gamma_{ij} \cdot \overrightarrow{n} = q\, n_i \qquad \forall i = 1,2 \qquad \text{sur } \Gamma, \tag{11.9h}$$

$$\mathbf{u}_s \cdot \overrightarrow{n} = \mathbf{u}_f \cdot \overrightarrow{n} \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{11.9i}$$

Remarque 74 *Dans un article de M.A. Hamdi, Y. Ousset [37], les auteurs mettent en évidence l'apparition de modes parasites dans le fluide (solutions rotationnelles non-physiques du système pour*

une fréquence nulle) dans un système de couplage fluide-structure utilisant les déplacements dans les deux milieux, pour une méthode de résolution par différences finis. L. Kiefling et G.C. Feng [47] montrent, quant à eux, que ces modes parasites apparaissent si l'on discrétise le déplacement dans le fluide par une méthode d'élements finis classiques H^1. D'après A. Bermudez, L. Hervella-Nieto et R. Rodriguez [17], ces modes instables proviennent de la non-coercivité de la forme bilinéaire associée au déplacement dans le fluide lorsque l'on cherche celui-ci dans un espace H^1. Ces auteurs montrent aussi que, en utilisant les éléments de Raviart et Thomas pour discrétiser le déplacement dans le fluide (sous-espace de $H(\mathrm{div},\Omega_f)$), on évite ces phénomènes parasites et assurons la coercivité de la forme bilinéaire. $\mathbf{u}_f$ étant cherché dans V_d^r, vision locale de l'espace $H(\mathrm{div},\Omega_f)$, nous éviterons l'apparition de ces phénomènes parasites.

La formulation variationnelle associée au système (11.9) s'écrit :

Trouver $q \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega_f)\right)$,$u_i \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega_s)\right)$, $\forall i=1,2$, $\mathbf{u}_f \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega_f)\right)\right]^2$, $\gamma_i \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega_s)\right)\right]^2$, $\forall i=1,2$, et $\gamma_{i,j} \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega_s)\right)\right]^2$, $\forall i,j=1,2$, tels que, pour tout i et tout j variant de 1 à 2 :

$$\int_{\Omega_f} \frac{1}{\mu}\frac{\partial q}{\partial t}\varphi\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} \mathbf{u}_f \cdot \nabla\varphi\, d\mathbf{x} + \int_\Gamma \mathbf{u}_f \cdot \overrightarrow{n}\,\varphi\, ds = \int_{\Omega_f} F\varphi\, d\mathbf{x} \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega_f), \tag{11.10a}$$

$$\int_{\Omega_f} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t}\cdot\psi\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_f} \nabla q\cdot\psi\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi \in \left[L^2(\Omega_s)\right]^2, \tag{11.10b}$$

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t}\varphi_i\, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_s} \gamma_{ij}\cdot\nabla\varphi_i\, d\mathbf{x} - \int_\Gamma \sum_{j=1}^{2}\gamma_{ij}\cdot\overrightarrow{n}\varphi_i\, ds = 0 \quad \forall\varphi_i \in H^1(\Omega_s), \tag{11.10c}$$

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}\cdot\psi_i d\,\mathbf{x} = \int_{\Omega_s} \nabla u_i\cdot\psi_i\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi_i \in \left[L^2(\Omega_s)\right]^2, \tag{11.10d}$$

$$\int_{\Omega_s} \gamma_{ij}\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_s} (A_{ij}\gamma_j)\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi_{ij} \in \left[L^2(\Omega_s)\right]^2 \tag{11.10e}$$

Il nous reste alors à introduire l'égalité (11.9h) dans l'équation (11.10c) et l'égalité (11.9i) dans l'équation (11.10a). Le système (11.10a)-(11.10e) devient :

$$\int_{\Omega_f} \frac{1}{\mu}\frac{\partial q}{\partial t}\varphi\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} \mathbf{u}_f \cdot \nabla\varphi\, d\mathbf{x} + \int_\Gamma \mathbf{u}_s \cdot \overrightarrow{n}\,\varphi\, ds = \int_{\Omega_f} F\,\varphi\, d\mathbf{x} \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega_f), \tag{11.11a}$$

$$\int_{\Omega_f} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t}\cdot\psi\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_f} \nabla q\cdot\psi\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi \in \left[L^2(\Omega_s)\right]^2, \tag{11.11b}$$

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t}\varphi_i\, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_s} \gamma_{ij}\cdot\nabla\varphi_i\, d\mathbf{x} - \int_\Gamma q\, n_i\,\varphi_i\, ds = 0 \quad \forall\varphi_i \in H^1(\Omega_s), \tag{11.11c}$$

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}\cdot\psi_i\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_s} \nabla u_i\cdot\psi_i\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi_i \in \left[L^2(\Omega_s)\right]^2, \tag{11.11d}$$

$$\int_{\Omega_s} \gamma_{ij}\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_s} (A_{ij}\,\gamma_j)\cdot\psi_{ij}\, d\mathbf{x} \quad \forall\psi_{ij} \in \left[L^2(\Omega_s)\right]^2. \tag{11.11e}$$

11.2 Semi-discrétisation en espace par la méthode des éléments finis mixtes spectraux

Appliquons à présent la méthode des éléments finis mixtes spectraux au système (11.11). Nous considérons un maillage conforme dans tout le domaine (fluide et solide). Nous retrouvons bien

évidemment les matrices de masse obtenues par cette méthode en acoustique, les matrices de masse obtenues par cette méthode en élastodynamique ainsi que la matrice de rigidité $R_{2,r}$, commune aux deux schémas. Pour différencier les matrices de masse associées à l'acoustique et à l'élastodynamique, nous les noterons respectivement avec un exposant f et un exposant s.

Remarque 75 *Bien entendu, les matrices de masse associées au fluide sont calculées uniquement dans le milieu acoustique (les éléments considérés sont les éléments constituant Ω_f) et les matrices de masse associées au solide sont sont calculées uniquement dans le domaine élastique.*

En plus de ces différentes matrices déjà connues apparaissent 2 matrices de couplage que nous noterons $(C_i)_{i=1.,2}$. Calculons ces matrices. Pour cela, déterminons tout d'abord un sens de parcours de Γ : $\vec{\Gamma}$ sera tel qu'en tout point de l'interface, la base $(\overrightarrow{n},\vec{\Gamma})$ forme une base directe.
Remarquons tout d'abord que, pour toute fonction de base φ^f de $U_d^r(\Omega_f)$:

$$\int_\Gamma \mathbf{u}_s \cdot \overrightarrow{n}\, \varphi^f \, ds = \sum_{i=1}^{2} \int_\Gamma u_i n_i \, \varphi^f \, ds. \tag{11.12}$$

Décomposons u_i dans la base de $U_d^r(\Omega_s)$:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N_s} u_i^j \, \varphi_j^s, \tag{11.13}$$

où N_s est le nombre de degrés de libertés dans le domaine solide.

Nous avons alors :

$$\int_\Gamma \mathbf{u}_s \cdot \overrightarrow{n}\, \varphi^f \, ds = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{N_s} u_i^j \int_\Gamma \varphi_j^s \, n_i \, \varphi^f \, ds. \tag{11.14}$$

Cette somme est nulle pour toute fonction φ^f dont le support ne rencontre par Γ. Nous pouvons donc nous restreindre à l'ensemble des fonctions de base de $U_d^r(\Omega_f)$ dont au moins un élément du support intersecte Γ.
Notons alors

$$\mathcal{S}_{\varphi^f} = \left\{ K_e^f \in \Omega_f \,|\, \varphi^f_{|K_e^f} \not\equiv O \text{ et } K_e^f \cap \Gamma \not\equiv O \right\},$$

et posons

$$\mathcal{S}_{\varphi_j^s} = \left\{ K_e^s \in \Omega_s \,|\, \varphi^s_{j\,|K_e^s} \not\equiv O \text{ et } K_e^s \cap \Gamma \not\equiv O \right\}.$$

Nous avons alors :

$$\int_\Gamma \varphi_j^s \, n_i \, \varphi^f \, ds = \sum_{K_e \in \mathcal{S}_{\varphi_j^s} | \exists K_e' \in \mathcal{S}_{\varphi^f} \; K_e \cap \Gamma = K_{e'} \cap \Gamma} \int_{K_e \cap \Gamma} \varphi^s_{j\,|K_e \cap \Gamma} \, n_i \, \varphi^f_{|K_{e'} \cap \Gamma} \, ds.$$

Remarque 76 *Nous intégrons sur $K_e \cap \Gamma = K_{e'} \cap \Gamma$ où K_e est un élément du solide. $\overrightarrow{n}$ sera donc localement la normale unitaire extérieure à K_e.*

Notons $\hat{\varphi}_p$ et $\hat{\varphi}_q$ les fonctions de base de $Q_r(\hat{K})$ telles que :

$$\hat{\varphi}_p \circ F_e = \varphi^s_{j\,|K_e} \text{ et } \hat{\varphi}_q \circ F_{e'} = \varphi^f_{|K_{e'}}.$$

Ces fonctions de base peuvent s'écrire sous la forme (voir chapitre 1) :

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{p}}(\hat{x}_{\mathbf{i}}) = \prod_{l=1}^{2} \hat{\varphi}_{p_l}(\hat{x}_{i_l}) \qquad \text{et} \qquad \hat{\varphi}_{\mathbf{q}}(\hat{x}_{\mathbf{i}}) = \prod_{l=1}^{2} \hat{\varphi}_{q_l}(\hat{x}_{i_l})$$

où les fonctions $\hat{\varphi}_{p_l}$ et $\hat{\varphi}_{q_l}$ sont des fonctions de Lagrange 1D définies sur $[0,1]$.

Posons $\hat{\Gamma}_e$ l'image par F_e^{-1} de $K_e \cap \Gamma$. Nous supposerons que $\hat{\Gamma}_e$ est définie par $0 \leq \hat{x}_l \leq 1$ et $\hat{x}_{3-l} = 0$ ou 1.
Nous voulons définir $\overrightarrow{n}$, la normale extérieure à K_e. Pour cela, définissons un sens de parcours de ∂K_e : $\overrightarrow{\tau_e}$ tel que $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{\tau_e})$ forme une base directe. Introduisons alors $\varepsilon_{K_e\cap\Gamma}$ tel que $\varepsilon_{K_e\cap\Gamma} = 1$ si, suivant le sens de parcours de ∂K_e, $\hat{x}_l$ varie de 0 à 1 et $\varepsilon_{K_e\cap\Gamma} = -1$ sinon.
Nous pouvons alors exprimer $\overrightarrow{n}$ en fonction de DF_e :

$$\overrightarrow{n} = \varepsilon_{K_e\cap\Gamma} \frac{1}{\sqrt{DF^2_{e\,1,l} + DF^2_{e\,2,l}}} \begin{pmatrix} DF_{e\,2,l} \\ -DF_{e\,1,l} \end{pmatrix}. \tag{11.15}$$

Nous avons alors :

– pour n_1 :

$$\begin{aligned}\int_{K_e\cap\Gamma} \varphi^s_{j\,|K_e\cap\Gamma}\, n_1\, \varphi^f_{|K_e\cap\Gamma}\, ds &= \int_0^1 \sqrt{DF^2_{e\,1,l} + DF^2_{e\,2,l}}\, \hat{\varphi}_{p_l}\, \varepsilon_{K_e\cap\Gamma}\, \frac{DF_{e\,2,l}}{\sqrt{DF^2_{e\,1,l} + DF^2_{e\,2,l}}}\, \hat{\varphi}_{q_l}\, d\hat{s} \\ &= \varepsilon_{K_e\cap\Gamma} \int_0^1 DF_{e\,2,l}\, \hat{\varphi}_{p_l}\, \hat{\varphi}_{q_l}\, d\hat{x}_l\end{aligned}$$

– pour n_2 :

$$\begin{aligned}\int_{K_e\cap\Gamma} \varphi^s_{j\,|K_e\cap\Gamma}\, n_2\, \varphi^f_{|K_e\cap\Gamma}\, ds &= \int_0^1 \sqrt{DF^2_{e\,1,l} + DF^2_{e\,2,l}}\, \hat{\varphi}_{p_l}\, \varepsilon_{K_e\cap\Gamma}\, \frac{-DF_{e\,1,l}}{\sqrt{DF^2_{e\,1,l} + DF^2_{e\,2,l}}}\, \hat{\varphi}_{q_l}\, d\hat{s} \\ &= -\varepsilon_{K_e\cap\Gamma} \int_0^1 DF_{e\,1,l}\, \hat{\varphi}_{p_l}\, \hat{\varphi}_{q_l}\, d\hat{x}_l\end{aligned}$$

Après intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto 1D, nous obtenons :

$$\int^{GL}_{K_e\cap\Gamma} \varphi^s_{j\,|K_e\cap\Gamma}\, n_1\, \varphi^f_{|K_e\cap\Gamma}\, ds = \varepsilon_{K_e\cap\Gamma}\, \hat{\omega}_{p_l}\, DF_{e\,2,l}(\hat{\xi}_{p_l})\, \delta_{p_l,q_l} \tag{11.16a}$$

$$\int^{GL}_{K_e\cap\Gamma} \varphi^s_{j\,|K_e\cap\Gamma}\, n_2\, \varphi^f_{|K_e\cap\Gamma}\, ds = -\varepsilon_{K_e\cap\Gamma}\, \hat{\omega}_{p_l}\, DF_{e\,1,l}(\hat{\xi}_{p_l})\, \delta_{p_l,q_l} \tag{11.16b}$$

où les $\hat{\omega}_j$, $j = 1..r+1$ sont les poids des points de Gauss-Lobatto 1D.

Remarque 77 *L'utilisation des quadrilatères et le fait que la formulation d'intégration numérique de Gauss-Lobatto en 2D se déduise de celle en 1D permet l'intégration numérique de l'intégrale sur $K_e \cap \Gamma$ et sa simplification.*

Posons donc C_1 et C_2 les matrices de couplage diagonales définies par :

$$C_1(i,i) = \delta_{\xi_i \in \Gamma} \sum_{K_e \in \Omega_s | \xi_i \in K_e} \varepsilon_{K_e \cap \Gamma} \, \hat{\omega}_{p_l} DF_{e\,2,l}(\hat{\xi}_{p_l}) \tag{11.17a}$$

$$C_2(i,i) = -\delta_{\xi_i \in \Gamma} \sum_{K_e \in \Omega_s | \xi_i \in K_e} \varepsilon_{K_e \cap \Gamma} \, \hat{\omega}_{p_l} DF_{e\,1,l}(\hat{\xi}_{p_l}) \tag{11.17b}$$

où p est tel que $\mathbf{F}_e(\hat{\xi}_p) = \xi_i$ et où le système $0 \leq \hat{x}_l \leq 1$ et $x_{3-l} = 0$ ou 1 défini la frontière de K_e à laquelle appartient ξ_i.

Remarque 78 *Le maillage étant conforme, on suppose que l'on a un maillage global où l'on distinguera ensuite les degrés de libertés appartenant au solide et ceux appartenant au fluide. Ainsi, les degrés de liberté de l'interface fluide-structure ont la même numérotation globale qu'on les considère dans le fluide ou dans le solide*

Ces mêmes calculs peuvent être faits pour le deuxième terme de couplage : $\int_\Gamma q \, n_i \, \varphi_i \, ds$. q étant décomposé dans la base de $U_h^r(\Omega_f)$, cette expression se décompose sous la forme d'une somme de termes de la forme $\int_\Gamma \varphi_j^s \, n_i \, \varphi^f \, ds$, calculés précédemment. On retrouve donc les transposées des matrices de couplage C_1 et C_2.

Ainsi, le système semi-discret obtenu est le suivant :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D_{2,r}^f \mathbf{Q} + R_{2,r} \mathbf{U}_f + C_1 \mathbf{U}_1 + C_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{F}_h \tag{11.18a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B_{2,r}^f \mathbf{U}_f = R_{2,r}^* \mathbf{Q} \tag{11.18b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D_{2,r}^s \mathbf{U}_i + \sum_{j=1}^{2} R_{2,r} \Gamma_{ij} - C_i^* \mathbf{Q} = 0 \qquad \forall i = 1,2 \tag{11.18c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Gamma_{ij} = B_{ij\,2,r}^s R_{2,r}^* \mathbf{U}_j \qquad \forall i,j = 1,2 \tag{11.18d}$$

Remarque 79 *Nous avons utilisé la même notation pour la matrice de rigidité dans le fluide et celle dans le solide alors qu'elles n'ont pas les mêmes dimensions dans la plupart des cas. Nous avons préféré mettre en évidence le fait qu'elles se déduisent toutes les deux d'une même matrice de rigidité définie sur l'élément de référence $\hat{K}$.*

11.3 Approximation en temps

Deux pistes ont été suivies pour discrétiser en temps le système (11.18) : l'utilisation d'un schéma explicite et l'utilisation d'un schéma implicite.

11.3.1 Schéma explicite

Intéressons nous tout d'abord au schéma explicite, le plus simple à mettre en oeuvre. Nous écrivons :

$$D^f_{2,r}\frac{\mathbf{Q}^{n+1}-\mathbf{Q}^n}{\Delta t}+R_{2,r}\mathbf{U}_f^{n+1/2}+C_1\mathbf{U}_1^{n+1/2}+C_2\mathbf{U}_2^{n+1/2}=\mathbf{F}_h^{n+1/2}, \tag{11.19a}$$

$$B^f_{2,r}\frac{\mathbf{U}_f^{n+3/2}-\mathbf{U}_f^{n+1/2}}{\Delta t}=R^*_{2,r}\mathbf{Q}^{n+1}, \tag{11.19b}$$

$$D^s_{2,r}\frac{\mathbf{U}_i^{n+3/2}-\mathbf{U}_i^{n+1/2}}{\Delta t}+\sum_{j=1}^{2}R_{2,r}\Gamma_{ij}^{n+1}-C_i^*\mathbf{Q}^{n+1}=0 \quad \forall i=1,2, \tag{11.19c}$$

$$\frac{\Gamma_{ij}^{n+1}-\Gamma_{ij}^n}{\Delta t}=B^s_{ij\,2,r}R^*_{2,r}\mathbf{U}_j^{n+1/2} \quad \forall i,j=1,2. \tag{11.19d}$$

Nous connaissons séparément la condition de stabilité du schéma en acoustique et une condition suffisante de stabilité du schéma en élastique :

$$\sqrt{\frac{\mu}{\rho_f}}\frac{\Delta t_f}{h}\leq\frac{cfl_{1,r}}{\sqrt{2}} \qquad \text{en acoustique,} \tag{11.20a}$$

$$V_p\frac{\Delta t_s}{h}\leq\frac{cfl_{1,r}}{\sqrt{2}} \qquad \text{en élastique.} \tag{11.20b}$$

où V_p est la plus grande valeur prise par la vitesse de phase de l'onde de pression dans le solide et où $cfl_{1,r}$ est la condition de stabilité du schéma Q_r définie dans le chapitre 7.3.

Les expériences numériques ont montrées que la condition de stabilité du schéma explicite avec couplage est plus pénalisante que les deux conditions de stabilité acoustique et élastique. En fait, le pas de temps à l'air d'être pénalisé par la condition de stabilité dans le fluide et non par celle dans le solide : dans les expériences ultérieures, nous verrons que lorsque le pas de temps Δt_s à prendre dans le solide est inférieur à celui Δt_f du fluide, il est suffisant de prendre $\Delta t=\Delta t_s$ pour obtenir la stabilité. Le nombre d'expériences effectuées ne suffit pas à énoncer un résultat général.
Ceci signifie que :

$$\Delta t\leq inf\,(\Delta t_f,\Delta t_s) \quad \text{et} \quad \Delta t<\Delta t_f$$

11.3.2 Schéma implicite

Déterminons à présent les variables $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$ aux temps $n+1$ et les variables $\mathbf{U}_f$, Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{21} et Γ_{22} aux temps $n+1/2$.

Nous pouvons écrire un schéma en temps de la forme :

$$D^f_{2,r}\frac{\mathbf{Q}^{n+1}-\mathbf{Q}^n}{\Delta t}+R_{2,r}\mathbf{U}_f^{n+1/2}+C_1\frac{\mathbf{U}_1^{n+1}+\mathbf{U}_1^n}{2}+C_2\frac{\mathbf{U}_2^{n+1}+\mathbf{U}_2^n}{2}=\mathbf{F}_h^{n+1/2}, \tag{11.21a}$$

$$B^f_{2,r}\frac{\mathbf{U}_f^{n+3/2}-\mathbf{U}_f^{n+1/2}}{\Delta t}=R^*_{2,r}\mathbf{Q}^{n+1}, \tag{11.21b}$$

$$D^s_{2,r}\frac{\mathbf{U}_i^{n+1}-\mathbf{U}_i^n}{\Delta t}+\sum_{j=1}^{2}R_{2,r}\Gamma_{ij}^{n+1/2}-C_i^*\frac{\mathbf{Q}^{n+1}+\mathbf{Q}^n}{2}=0 \qquad \forall i=1,2, \tag{11.21c}$$

$$\frac{\Gamma_{ij}^{n+3/2}-\Gamma_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t}=B^s_{ij\,2,r}R^*_{2,r}\mathbf{U}_j^{n+1} \qquad \forall i,j=1,2. \tag{11.21d}$$

Les équations (11.21b) et (11.21d) sont explicites alors que le système formé par les équations (11.21a) et (11.21d) est implicite.
Pour résoudre ce dernier, nous allons utiliser un schéma predicteur-multicorrecteur présenté dans [78] et [45] et utilisé avec succès dans [49] et [51].

Considérons donc le système formé par les équations (11.21a) et (11.21d), qui peut aussi s'écrire de façon plus formelle :

$$D^f_{2,r}\dot{\mathbf{Q}}^{n+1/2}+R_{2,r}\mathbf{U}_f^{n+1/2}+C_1\mathbf{U}_1^{n+1/2}+C_2\mathbf{U}_2^{n+1/2}=\mathbf{F}_h^{n+1/2} \tag{11.22a}$$

$$D^s_{2,r}\dot{\mathbf{U}}_i^{n+1/2}+\sum_{j=1}^{2}R_{2,r}\Gamma_{ij}^{n+1/2}-C_i^*\frac{\mathbf{Q}^{n+1}+\mathbf{Q}^n}{2}=0 \qquad \forall i=1,2 \tag{11.22b}$$

L'algorithme se présente de la façon suivante :

1. Prédire la valeur de $\mathbf{Q}^{n+1/2}$ ou les valeurs de $\mathbf{U}_1^{n+1/2}$ et $\mathbf{U}_2^{n+1/2}$ par les formules suivantes :

$$\mathbf{Q}_{pred}^{n+1/2}=\mathbf{Q}^{n-1/2}+\Delta t\,\dot{\mathbf{Q}}^{n-1/2} \tag{11.23a}$$

$$\mathbf{U}_{i\,pred}^{n+1/2}=\mathbf{U}_i^{n-1/2}+\Delta t\,\dot{\mathbf{U}}_i^{n-1/2} \qquad \forall i=1,2 \tag{11.23b}$$

   Nous choisissons, par exemple, de commencer en calculant $\left(\mathbf{U}_{i\,pred}^{n+1/2}\right)_{i=1,2}$.

2. Résolution de (11.22a). On obtient alors $\dot{\mathbf{Q}}^{n+1/2}$.
3. Calcul du prédicteur de $\mathbf{Q}^{n+1/2}$ par :

$$\mathbf{Q}_{pred}^{n+1/2}=\mathbf{Q}^{n-1/2}+\Delta t\,\dot{\mathbf{Q}}^{n+1/2} \tag{11.24}$$

4. Résolution de (11.22b) en remplaçant $\mathbf{Q}^{n+1/2}$ par $\mathbf{Q}_{pred}^{n+1/2}$. On obtient ${\dot{\mathbf{U}}_1}^{n+1/2}$ et ${\dot{\mathbf{U}}_2}^{n+1/2}$.
5. Correction des prédicteurs des $\mathbf{U}_i^{n+1/2}$ par :

$$\mathbf{U}_{i\,pred}^{n+1/2}=\mathbf{U}_i^{n-1/2}+\Delta t\,\dot{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} \tag{11.25}$$

6. Retour à l'étape 2.

... et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne une erreur "acceptable" entre le prédicteur et son correcteur. On égalise alors chaque inconnue avec son prédicteur.

D'après [45], il suffit de deux itérations de cet algorithme pour avoir la stabilité du schéma. Toutefois, il ne faut pas oublier qu'une erreur supplémentaire est générée par l'utilisation du schéma prédicteur-multicorrecteur par rapport au schéma explicite, à l'interface.
Ici aussi le couplage pénalise la condition de stabilité du schéma.

11.3.3 Comparaison des deux schémas

Considèrons un domaine 35m $\times$ 35m avec une interface fluide-solide horizontale située à 10m de profondeur, le fluide étant situé dans la partie supérieure (voir figure 11.3.3).

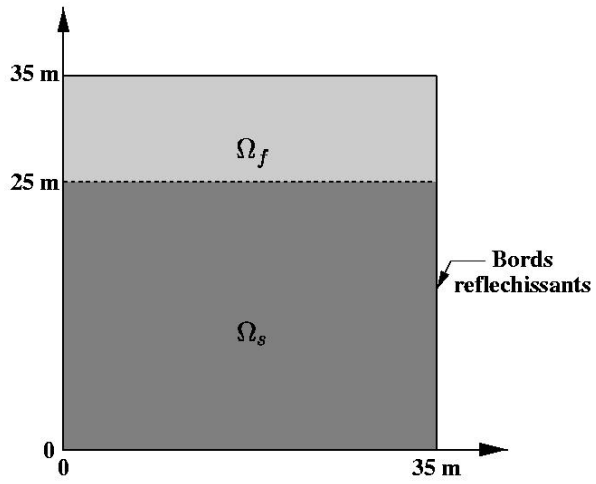


FIG. 11.2: Milieux fluide et solide.

Le milieu acoustique considéré correspond à une vitesse de 2m.s^{-1} ($\rho_f = 1$Kg.m^{-3} et $\mu = 4$ Pa) et le milieu élastique est isotrope, de densité $\rho_s = 1$Kg.m^{-3} et de vitesses $V_p = 2$m.s^{-1} et $V_s = 1$m.s^{-1}. Les donnés initiales sont nulles et l'on considère une fonction source composée d'une partie en espace (gaussienne centrée en $\mathbf{x}_S = (12.5\text{m}, 30\text{m})$ et distribuée sur un disque de rayon $r_0 = 0.5$m) et une partie en temps (primitive d'un Ricker d'ordre 2) de fréquence centrale 1Hz.
Utilisant un pas d'espace identique dans le solide et le fluide à l'interface, nous calculons celui-ci dans le milieu le plus pénalisant, c'est-à-dire, celui où la vitesse est la plus petite : le solide. Nous considérons une approximation Q_5 en espace et construisons donc un maillage à deux éléments par longueurs d'onde. Le pas d'espace vaut alors $h = 0.5$m.
La condition de stabilité dans le fluide s'écrit :

$$c_f \frac{\Delta t}{h} \leq 0.07$$

ce qui impose un pas de temps inférieur ou égale à 0.0175.
La condition de stabilité dans le solide s'écrit :

$$V_p \frac{\Delta t}{h} \leq 0.07$$

ce qui impose aussi un pas de temps inférieur ou égal à 0.0175.

Nous bornons alors le domaine par des conditions de Dirichlet et faisons exécuter les deux programmes pendant 100s. Le système étant fermé (conservation de l'énergie dans le domaine considéré), 2 itérations ne suffisent pas pour le schéma prédicteur-multicorrecteur. En effet, de nombreux échanges d'informations vont avoir lieu pendant les 100 secondes que dure l'expérience et l'erreur générée par ce schéma va s'accumuler à l'interface jusqu'à pollution complète de la solution. Nous implémentons donc le schéma avec un test d'erreur entre les prédicteurs et leurs correcteurs.
Il nous faut alors prendre un pas de temps égal à 0.0115 pour le schéma explicite et un pas de temps de 0.0166 pour le schéma prédicteur-multicorrecteur. La condition de stabilité du schéma prédicteur est donc moins pénalisante que celle du schéma explicite. Toutefois, le temps de calcul relatif à ces deux méthodes est sensiblement le même : 1083s pour le schéma explicite et 1089s pour le schéma prédicteur-multicorrecteur. Ainsi, le gain de temps obtenu pour le schéma prédicteur-multicorrecteur est pénalisé par le surcoût de temps de calcul que ce schéma génère à l'interface fluide-structure.

Pour résumer, il nous semble évident que le calcul de la condition de stabilité dans le cas du couplage est une étude primordiale pour évaluer les performances, mais qu'il faut aussi tenir compte du coût supplémentaire généré par le calcul des prédicteurs et leur correction. Une étude des erreurs supplémentaires générées par ce schéma serait aussi la bienvenue.

11.4 Couplage des PML

Le but de ce paragraphe est d'effectuer le couplage entre les PML en acoustique et celles en élastique. Nous notons $\Omega_{f\,pml}$ l'ouvert représentant les PML fluide et $\Omega_{s\,pml}$ celui relatif aux PML solide. L'interface entre les deux ouverts est notée Γ_{pml}. $\Gamma_{f\,pml}$ désigne le bord de $\Omega_{f\,pml}$ privé de Γ_{pml} et $\Gamma_{s\,pml}$ le bord de $\Omega_{s\,pml}$ privé de Γ_{pml}.

Deux formulations ont été mises en place pour appliquer les PML au système de l'élastodynamique d'ordre 1 en temps (voir chapitre 5). Nous utiliserons la formulation suivante :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{2} \nabla \cdot \gamma_{ij} - \sum_{j=1}^{2} \gamma_j^{\diamond} \cdot \overrightarrow{e}_j = F_i \qquad \forall i = 1,2 \quad \text{dans } \Omega_{s\,pml}, \tag{11.26a}$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t} + \mathcal{T}\gamma_i = \nabla u_i \qquad \forall i,j = 1,2 \quad \text{dans } \Omega_{s\,pml}, \tag{11.26b}$$

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \mathcal{T}\gamma_{ij} = A_{ij}\frac{\partial \gamma_j}{\partial t} \qquad \forall i,j = 1,2 \quad \text{dans } \Omega_{s\,pml}, \tag{11.26c}$$

$$\frac{\partial \gamma_i^{\diamond}}{\partial t} + \mathcal{T}\gamma_i^{\diamond} = \mathcal{T}' \sum_{j=1}^{d} \gamma_{ij} \qquad \forall i = 1,2 \quad \text{dans } \Omega_{s\,pml}, \tag{11.26d}$$

$$u_i = 0 \qquad \forall i = 1,2 \quad \text{sur } \Gamma_{s\,pml}, \tag{11.26e}$$

où $\mathcal{T}$ est une matrice 2×2 diagonale de terme général $\mathcal{T}_{ii} = \tau_i$
et $\mathcal{T}'$ est une matrice 2×2 diagonale de terme général $\mathcal{T}_{ii}' = \tau_i'$ dérivée en espace de τ_i.

Dans le fluide, nous considérons le système :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla\cdot\mathbf{u}_f - \sum_{j=1}^{2}\mathbf{u}_f^{\diamond}\cdot\overrightarrow{e}_j = F \qquad \text{dans } \Omega_{f\,pml}, \tag{11.27a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_f^{\star}}{\partial t} + \mathcal{T}\mathbf{u}_f^{\star} = \nabla q \qquad \text{dans } \Omega_{f\,pml}, \tag{11.27b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_f^{\diamond}}{\partial t} + \mathcal{T}\mathbf{u}_f^{\diamond} = \mathcal{T}^{'}\mathbf{u}_f \qquad \text{dans } \Omega_{f\,pml}, \tag{11.27c}$$

$$\rho_f\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \rho_f\mathcal{T}\mathbf{u}_f = \frac{\partial \mathbf{u}_f^{\star}}{\partial t} \qquad \text{dans } \Omega_{f\,pml}, \tag{11.27d}$$

$$q = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_{f\,pml}. \tag{11.27e}$$

Rappelons les équations de couplage :

$$\sum_{j=1}^{2}\gamma_{ij}\cdot\overrightarrow{n} = q\,n_i \qquad \forall i = 1,2 \quad \text{sur } \Gamma_{pml}, \tag{11.28a}$$

$$\mathbf{u}_s\cdot\overrightarrow{n} = \mathbf{u}_f\cdot\overrightarrow{n} \qquad \text{sur } \Gamma_{pml}. \tag{11.28b}$$

Ecrivons la formulation variationnelle relative aux équations dans le domaine physique et les PML. On introduit les conditions de couplage à l'interface entre le fluide et le solide, et les PML fluide et les PML solide. On obtient :

Trouver $q \in L^{\infty}\left(0,T;H^1\left(\Omega_{f\,pml}\right)\right)$,$u_i \in L^{\infty}\left(0,T;H^1\left(\Omega_{s\,pml}\right)\right)$, $\forall i = 1,2$, $\mathbf{u}_f$, $\mathbf{u}_f^{\star}$ et $\mathbf{u}_f^{\diamond} \in \left[L^{\infty}\left(0,T;L^2\left(\Omega_{f\,pml}\right)\right)\right]^2$, γ_i et $\gamma_i^{\diamond} \in \left[L^{\infty}\left(0,T;L^2\left(\Omega_{s\,pml}\right)\right)\right]^2$, $\forall i = 1,2$, et $\gamma_{ij} \in \left[L^{\infty}\left(0,T;L^2\left(\Omega_{s\,pml}\right)\right)\right]^2$, $\forall i,j = 1,2$, tels que, pour tout i et j variant de 1 à 2 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{f\,pml}}\frac{1}{\mu}q\,d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{f\,pml}}\mathbf{u}_f\cdot\nabla\varphi\,d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{pml}}\mathbf{u}_s\cdot\overrightarrow{n}\,\varphi\,ds - \sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_{pml}}\mathbf{u}_f^{\diamond}\cdot\overrightarrow{e}_j = \int_{\Omega_{f\,pml}}F \tag{11.29a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{f\,pml}}\mathbf{u}_f^{\star}\cdot\psi^{\star}\,d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{f\,pml}}\mathcal{T}\mathbf{u}_f^{\star}\cdot\psi^{\star}\,d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{f\,pml}}\nabla q\cdot\psi^{\star} \tag{11.29b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{f\,pml}}\mathbf{u}_f^{\diamond}\cdot\psi^{\diamond}\,d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{f\,pml}}\mathcal{T}\mathbf{u}_f^{\diamond}\cdot\psi^{\diamond}\,d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{f\,pml}}\mathcal{T}^{'}\mathbf{u}_f\cdot\psi^{\diamond}\,d\mathbf{x} \tag{11.29c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{f\,pml}}\rho_f\,\mathbf{u}_f\cdot\psi\,d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{f\,pml}}\rho_f\,\mathcal{T}\mathbf{u}_f\cdot\psi\,d\mathbf{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{f\,pml}}\mathbf{u}_f^{\star}\cdot\psi\,d\mathbf{x} \tag{11.29d}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{s\,pml}}\rho_s\mathbf{u}_i\varphi_i d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_{s\,pml}}\gamma_{ij}\cdot\nabla\varphi_i d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{pml}}qn_i\varphi_i ds - \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_{s\,pml}}\gamma_j^{\diamond}\cdot\overrightarrow{e}_j\varphi_i d\mathbf{x} = 0 \tag{11.29e}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{s\,pml}}\gamma_i\cdot\psi_i\,d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{s\,pml}}\mathcal{T}\gamma_i\cdot\psi_i\,d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{s\,pml}}\nabla u_i\cdot\psi_i\,d\mathbf{x} \tag{11.29f}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{s\,pml}}\gamma_{ij}\cdot\psi_{ij}\,d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{s\,pml}}\mathcal{T}\gamma_{ij}\cdot\psi_{ij}\,d\mathbf{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{s\,pml}}\left(A_{ij}\,\gamma_j\right)\cdot\psi_{ij}\,d\mathbf{x} \tag{11.29g}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{s\,pml}}\gamma_i^{\diamond}\cdot\psi_i^{\diamond}\,d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{s\,pml}}\mathcal{T}\gamma_i^{\diamond}\cdot\psi_i^{\diamond}\,d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{s\,pml}}\mathcal{T}^{'}\sum_{j=1}^{d}\gamma_{ij}\cdot\psi_i^{\diamond}\,d\mathbf{x} \tag{11.29h}$$

pour toutes fonctions $\varphi \in H^1\left(\Omega_{f\,pml}\right)$, $\psi^\star$, $\psi^\diamond$ et $\psi \in \left[L^2\left(\Omega_{f\,pml}\right)\right]^2$, $\varphi_i \in H^1\left(\Omega_{s\,pml}\right)$ et ψ_i, ψ_{ij} et $\psi_i^\diamond \in \left[L^2\left(\Omega_{s\,pml}\right)\right]^2$.

Nous reconnaissons dans (11.29a) le même terme de couplage que dans l'équation (11.11a) introduite pour le domaine, et le même terme de couplage dans (11.29e) que dans (11.11c). Cela signifie que les matrices de couplage qui interviennent dans la semi-discrétisation en espace de ce système sont exactement les mêmes que celles qui interviennent dans le domaine. L'introduction des PML n'introduit donc pas de difficultés supplémentaires. Le couplage entre les domaines physiques et les PML qui leur sont associées ainsi qu'entre le fluide et le solide et entre les PML fluide et les PML solide se font naturellement.

Remarque 80 *Lors de la mise en place de la formulation de couplage fluide-structure, nous avons choisi d'introduire le champ de déplacement* $\mathbf{u}_f$ *dans le fluide. Ce choix nous permet aussi de simplifier la mise en place du couplage des PML. En effet, si l'on avait choisi de conserver la vitesse dans le fluide, il nous aurait fallu coupler le système d'ordre* 2 *en temps dans le domaine fluide au système d'ordre* 1 *en temps dans les PML fluide, c'est-à-dire introduire une zone de transition entre le domaine fluide et les PML fluide pour y introduire les inconnues nécessaires à la résolution du système PML. Ceci aurait été nécessaire si, contrairement à ce que l'on a supposé, la méthode des éléments finis mixtes générait elle aussi des instabilités dans le couplage du déplacement dans le fluide avec le déplacement dans le solide. La méthode introduite dans le chapitre 11.1 donnant, à priori, de bons résultats, il n'est pas nécessaire de compliquer la mise en place du couplage des PML en utilisant un système d'ordre* 2 *en temps dans le fluide.*

11.5 Résultats numériques

11.5.1 Première expérience

Vérifions tout d'abord le bon comportement des PML. Pour cela, nous considérons un domaine infini, borné dans sa partie supérieure, constitué d'un fluide ($\rho_f = 0.81\text{Kg.m}^{-3}$ et $\mu = 4$ Pa) et d'un solide orthotrope ($\rho_s = 1\text{Kg.m}^{-3}$, $c_{1111} = 4$ Pa, $c_{2222} = 20$Pa, $c_{1212} = 2$Pa et $c_{1122} = 3.8$Pa). L'interface entre les deux milieux est horizontale située à une profondeur de 10m par rapport à la surface du fluide, qui se trouve donc au dessus du solide. Nous nous intéressons aux phénomènes physiques qui se déroulent dans le rectangle $[0\text{m}, 25\text{m}] \times [0\text{m}, 30\text{m}]$.
Les données initiales sont nulles et l'on considère une fonction source située dans le fluide et constituée d'une partie en espace (gaussienne centrée en $\mathbf{x}_S = (12.5\text{m}, 25\text{m})$ et distribuée sur un disque de rayon $r_0 = 0.5$m) et d'une partie en temps (primitive d'un Ricker d'ordre 2) de fréquence centrale $f_0 = 0.9$Hz.
Nous utilisons la méthode des éléments finis mixtes spectraux Q_5 et construisons donc un maillage à pas constant à deux éléments par longueur d'onde. Le pas d'espace est déterminé par la condition de stabilité dans le solide.
Le protocole de l'expérience est résumé dans la figure 11.3.
Nous représentons le module du champ de déplacement dans le fluide et dans le solide à différents instants dans la figure 11.4. L'interface entre le milieu fluide et le milieu solide ainsi qu'entre les domaines physiques et les PML sont représentés par un trait blanc.
On vérifie que les ondes dans le fluide et dans le solide sont bien absorbées. On remarque aussi la bonne absorption de l'onde de Rayleigh à l'interface entre les deux milieux.

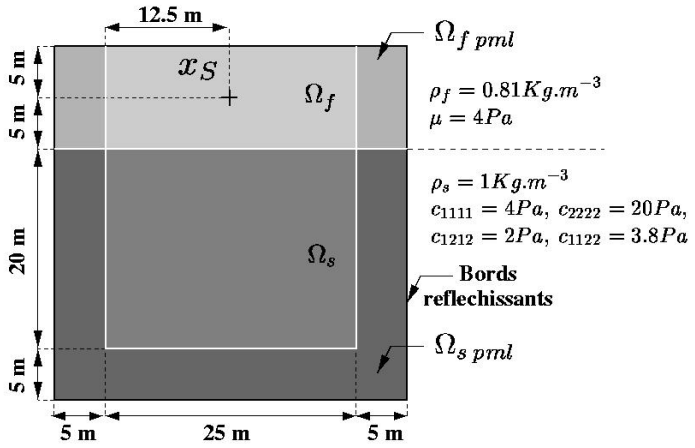


FIG. 11.3: Première expérience de couplage PML fluide-PML solide.

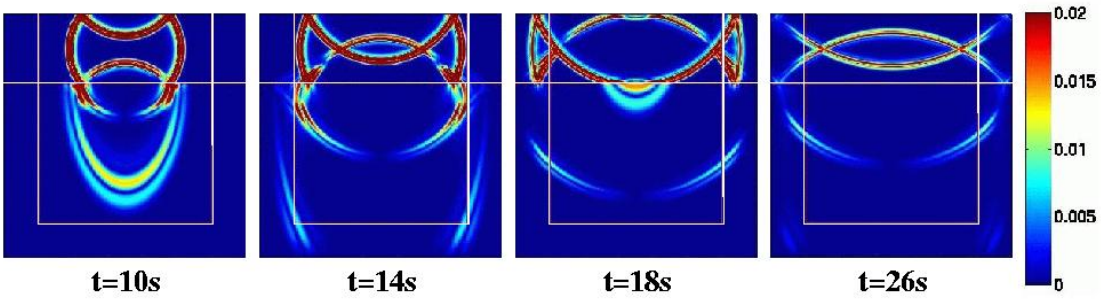


FIG. 11.4: Module des champs de déplacement obtenus pour la première expérience de couplage PML fluide-PML solide, à différents instants.

11.5.2 Seconde expérience

Comparons à présent les résultats donnés par notre méthode à ceux obtenus par la méthode de D. Komatitsch, C. Barnes et J. Tromp. Pour cela, nous effectuons les deux expériences présentées dans [49] : nous considérons un domaine infini composé d'un fluide et d'un solide isotrope, le fluide étant situé dans la partie supérieure du domaine. Les propriétés des matériaux sont :

$$\text{fluide :} \quad \rho_f = 1020\text{Kg.m}^{-3}, \quad \mu = 2295 \times 10^6\text{Pa},$$

$$\text{solide :} \quad \rho_s = 2500\text{Kg.m}^{-3}, \quad V_p = 3400\text{m.s}^{-1}, V_s = 1963\text{m.s}^{-1}.$$

Les données initiales sont nulles et l'on considère une impulsion dans le fluide composée d'une partie en espace (gaussienne centrée en $\mathbf{x}_S$ à déterminer et distribuée sur un disque de rayon $r_0 = 75$m) et d'une partie en temps (primitive d'un Ricker d'ordre 2) de fréquence centrale $f_0 = 10$Hz.
Nous utilisons la méthode des éléments finis mixtes spectraux Q_5 et construisons donc un maillage de pas constant à deux éléments par longueur d'onde. Le pas de temps est déterminé par la condition de stabilité dans le solide.

11.5.2.1 Interface plane

Dans cette expérience, nous nous intéressons aux phénomènes physiques se déroulant dans le bloc $[0\text{m}, 7000\text{m}] \times [0\text{m}, 4800\text{m}]$. Nous considérons une interface fluide-solide plane et nous entourons le milieu par des PML sur ses quatres côtés. L'épaisseur de celles-ci est de 600m. Nous positionnons la source à 500m au dessus de l'interface fluide-solide. Nous considérons une ligne de 110 récepteurs régulièrement espacés, situés à 533.33m au dessus de l'interface, à une distance de la source variant entre 925m et 4425m. Le protocole de l'expérience est résumé dans la figure 11.5.

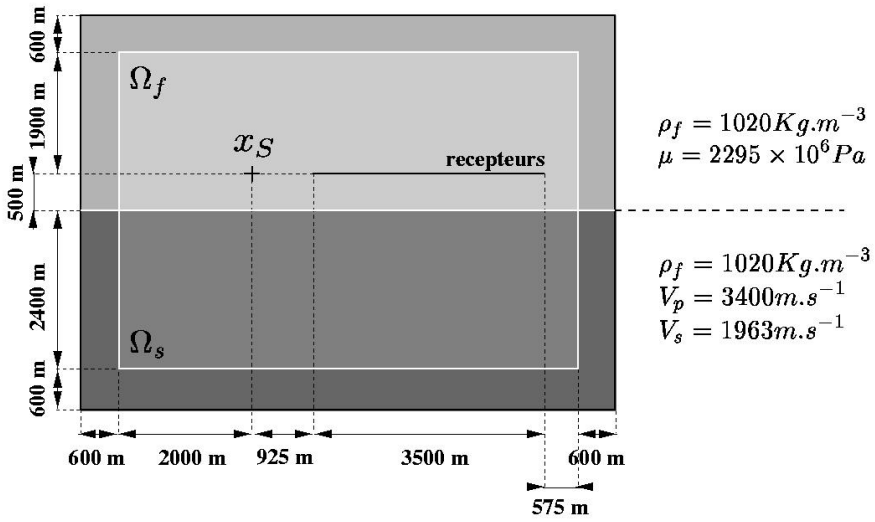


FIG. 11.5: Milieux fluide et solide considérés pour la seconde expérience avec une interface plane.

La figure 11.6 représente la norme des déplacements obtenus dans le fluide et le solide à différents instants. Nous n'avons pas représenté les résultats dans les PML et avons tracé en blanc l'interface entre le milieu fluide et le milieu solide.

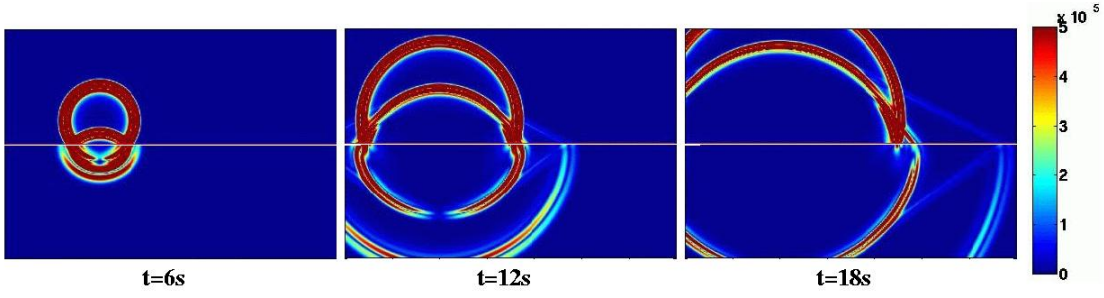


FIG. 11.6: Module des champs de déplacement obtenus pour la seconde expérience, à différents instants et pour une interface plane.

La figure 11.7 représente les deux composantes du champ de déplacement sauvegardé sur chaque récepteur.

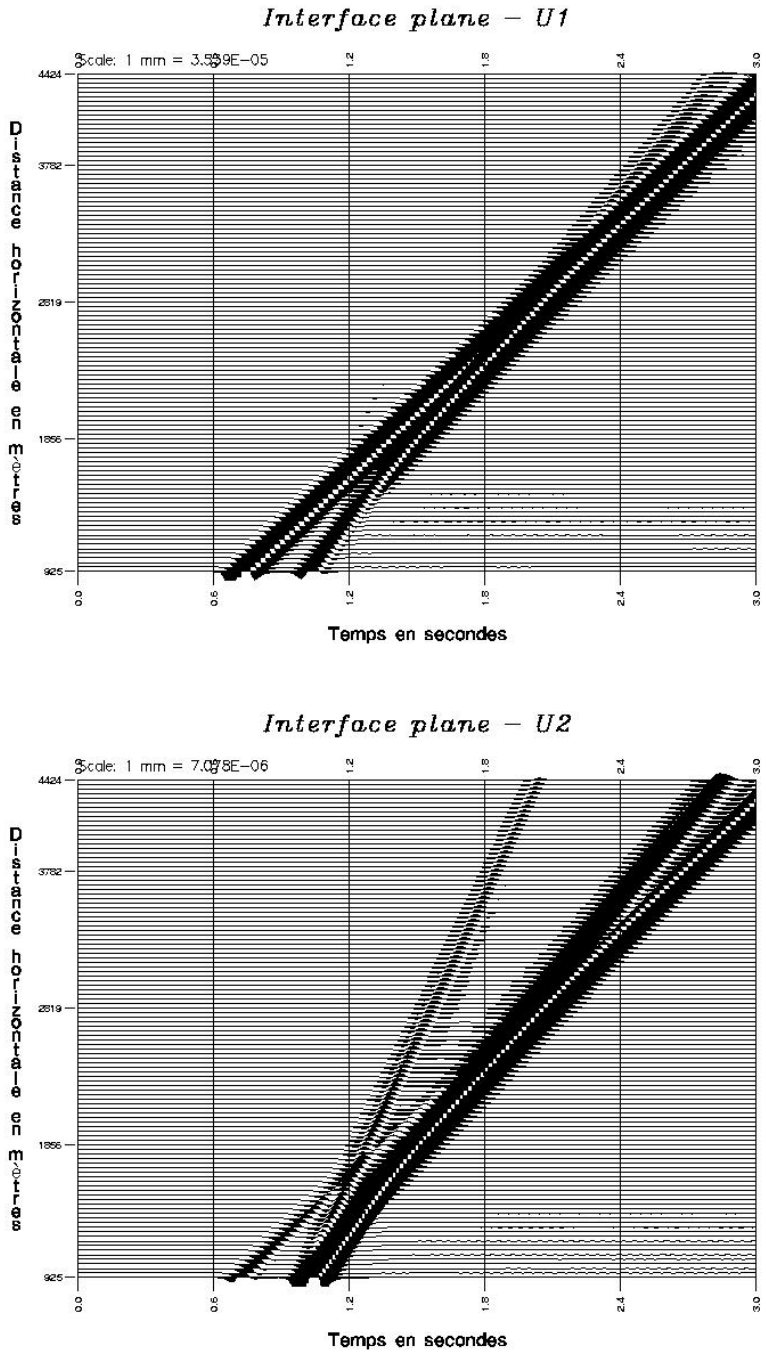


FIG. 11.7: Sismogrammes obtenus pour la seconde expérience et pour une interface plane.

Nous retrouvons bien les mêmes résultats que ceux présentés dans l'article [49], excepté au niveau des sismogrammes sur lesquels on ne visualise pas les réflections dûes aux conditions aux limites absorbantes utilisées par D. Komatitsch, C. Barnes et J. Tromp.

11.5.2.2 Interface sinusoïdale

Dans cette expérience, nous nous intéressons aux phénomènes physiques se déroulant dans un bloc $[0\text{m}, 6400\text{m}] \times [0\text{m}, 4800\text{m}]$. Nous considérons une interface fluide-solide sinusoïdale d'équation :

$$x_2 = 2400 + 213 \times \sin\left(\frac{3\,x_1\,\Pi}{1600}\right) \tag{11.30}$$

et bornons le milieu dans sa partie supérieure. Nous considérons des PML sur trois côtés du milieu, d'épaisseur 600m. Nous positionnons la source à 1700m en dessous de la surface du fluide et à 2909m du bord gauche du domaine physique considéré. Nous considérons une ligne de 50 récepteurs régulièrement espacés, situés à 1500m en dessous de la surface du fluide et régulièrement espacé entre 3200m et 5400m du bord gauche du domaine physique considéré. Le protocole de l'expérience est résumé dans la figure 11.8.

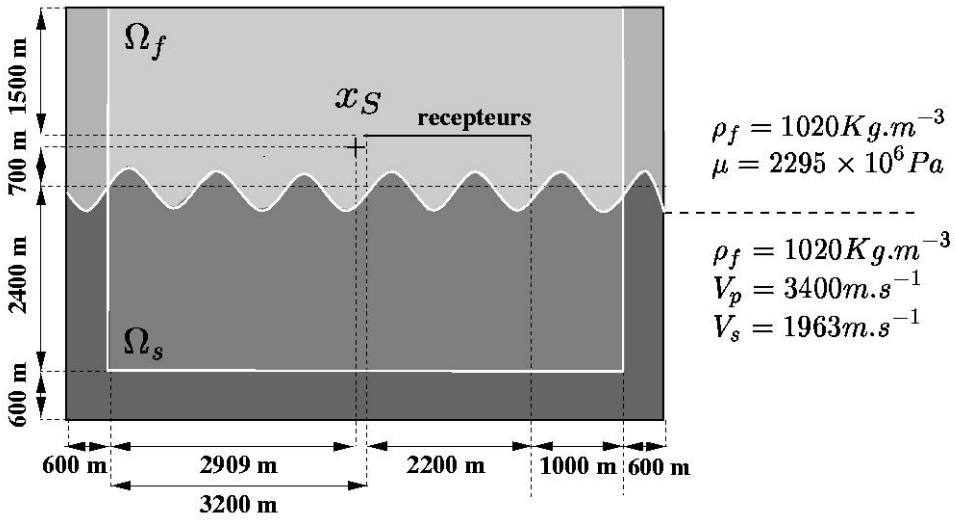


FIG. 11.8: Milieux fluide et solide considérés pour la seconde expérience avec une interface sinusoïdale.

La figure 11.9 représente la norme des déplacements obtenus dans le fluide et le solide à différents instants. Nous n'avons pas représenté les résultats dans les PML et avons tracé en blanc l'interface entre le milieu fluide et le milieu solide.
La figure 11.10 représente les deux composantes du champ de déplacement sauvegardé sur chaque récepteur.
Comme précédemment, nous retrouvons bien les mêmes résultats que ceux présentés dans [49].

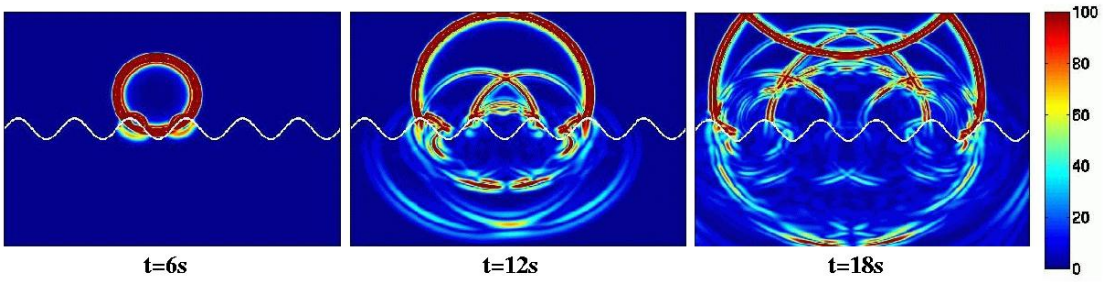


FIG. 11.9: Module des champs de déplacement obtenus pour la seconde expérience, à différents instants et pour une interface sinusoïdale.

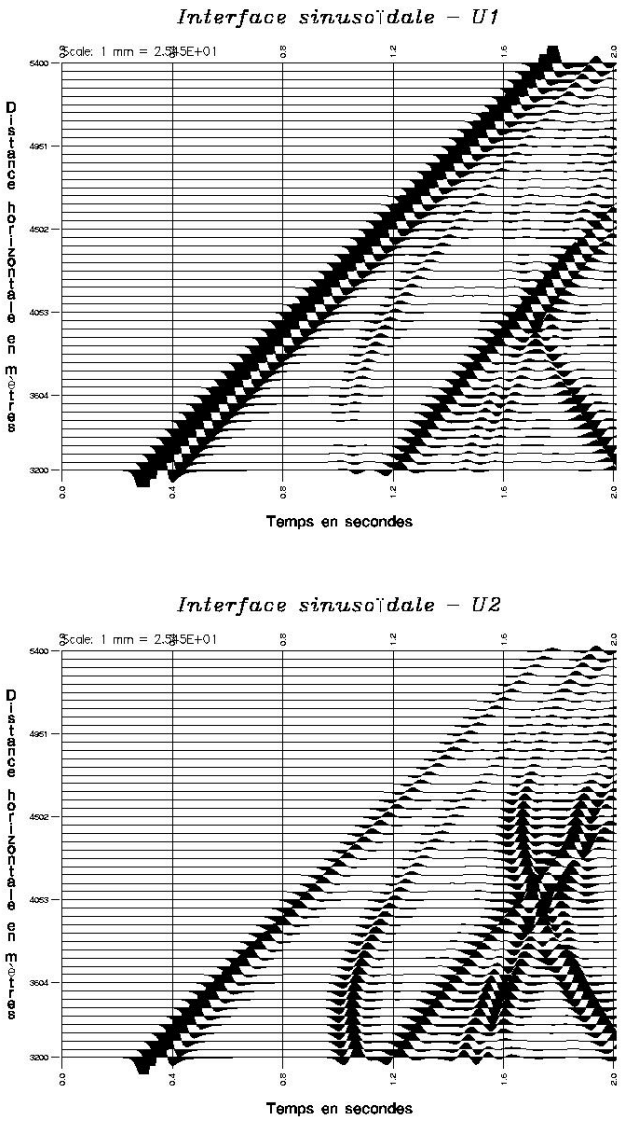


FIG. 11.10: Sismogrammes obtenus pour la seconde expérience et pour une interface sinusoïdale.

Conclusion

Nous avons introduit une nouvelle méthode d'éléments finis hexaédriques d'ordre élevé : la méthode des éléments finis mixtes spectraux. Cette méthode fait intervenir des matrices de masse diagonales et diagonales par blocs ainsi qu'une matrice de rigidité dont le stockage est négligeable parce que déduite d'une matrice calculée sur l'élément de référence uniquement. Cette méthode permet de traiter sans coût supplémentaire des milieux hétérogènes et/ou anisotropes. Son application à l'élastodynamique linéaire a nécessité l'introduction de nouvelles variables vectorielles qui s'expriment en fonction du tenseur des contraintes. Nous avons démontré par deux théorèmes d'équivalence que les schémas obtenu en acoustique et en élastique par cette méthode donnent exactement les mêmes résultats que par la méthode des éléments finis spectraux et nous avons alors comparé les performances algorithmiques de ces deux méthodes. Le schéma en temps utilisé, d'ordre 2, pénalise légérement l'ordre global de la méthode. Une étude dans ce sens permettrait d'homogénéiser les schémas obtenus et d'obtenir des conditions de stabilité moins restrictives.

L'écriture sous forme de systèmes d'ordre 1 en temps des équations de l'acoustique et de l'élastodynamique linéaire, présentés dans la première partie, permet une introduction et une implémentation quasi-immédiate des PML pour la modélisation de milieux non-bornés. Nous avons montré le bon fonctionnement de cette technique pour la plupart des matériaux et, en particulier, pour les milieux géophysiques étudiés. Toutefois, nous avons relevé des phénomènes d'instabilité dans les PML dans le cas de matériaux orthotropes 2D. Un travail théorique important a été fait sur ce sujet. Si une réponse à ce problème a été trouvée dans le cas de l'acoustique anisotrope, le problème de "stabilisation" des PML en élastodynamique linéaire reste entier.

A défaut d'estimation d'erreur L^2 (des éléments de résponse sont disponibles dans [56, 70]), une étude par ondes planes de la méthode dans le cas acoustique nous a permis d'obtenir des résultats intéressants de dispersion et de réflexion-transmission, montrant que l'utilisation de maillages non-adaptés à la physique et la géométrie du modèle (c'est-à-dire qui suivent les interfaces des différentes couches de matériaux) pénalise notre méthode éléments finis. Cette étude nous a aussi permis d'obtenir des résultats de stabilité du schéma.

La quatrième partie nous a permis de valider les codes créés pour modéliser, par la méthode des éléments finis mixtes spectraux, la propagation d'ondes en milieu acoustique et élastique. Les résultats présentés en acoustique (Foothills) et en élastique ont montré l'aptitude de la méthode à traiter des modèles réalistes 2D. En raison de problèmes techniques liés aux mailleurs actuellement disponibles à l'INRIA et à l'IFP, une étude d'un modèle 3D plus complexe que celui présenté dans les résultats PML n'a pu être effectué.

Enfin, nous avons introduit un couplage fluide-structure ainsi qu'un couplage des PML acoustiques

aux PML élastiques dans le cas bidimensionnel. Les résultats présentés ont permis de valider le modèle obtenu. Cette partie reste incomplète, en particulier au niveau de l'étude de stabilité du schéma en temps qui n'est pas évidente.

Nous avons donc exhibé une nouvelle formulation mathématique des éléments finis spectraux conduisant à un algorithme très performant au niveau du temps de calcul tout en minimisant la place mémoire utilisée. Toutefois une amélioration des performances du schéma en temps, par une approche par équations modifiée, et une validation sur des modèles réalistes 3D restent à faire.

Annexe A

Démonstration de l'égalité (3.34)

Nous nous plaçons dans un milieu non-physique dans lequel on résoud une équation des ondes dans un milieu de densité ρ qui vérifie $\rho^{-1} = A_{ij}$, où A_{ij} correspond à l'une des matrices élémentaires $d \times d$ qui interviennent dans la nouvelle formulation du système de l'élastodynamique (3.7).

Nous devons montrer que :

$$K_{ijd,r} = R_{d,r}\,\tilde{B}_{d,r}^{-1}\,\tilde{B}_{ijd,r}\,\tilde{B}_{d,r}^{-1}\,R_{d,r}^{*}$$

où :

- $K_{ijd,r}$ est la matrice de rigidité obtenue par la méthode des éléments finis spectraux,
- $R_{d,r}$, $\tilde{B}_{d,r}$ et $\tilde{B}_{ijd,r}$ sont les matrices obtenues par la semi-discrétisation en espace par la méthode des éléments finis mixtes spectraux du système (3.32).

Pour démontrer cette égalité, nous allons procéder comme pour la démonstration du théorème 1. Nous en utiliserons d'ailleurs certain de ses résultats.

Nous reprenons les notations introduites dans la démonstration du théorème 1 et posons :

$$P_i = \frac{1}{|J_i|} D\mathbf{F}_i$$

- Soit $\psi_{\mathbf{k},m}^{i}$ une fonction de base de V_d^r.
  Après les mêmes calculs que pour la décomposition de l'équation (1.20b) dans la démonstration du théorème 1, nous obtenons :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall i \in \{1..N_e\}, \quad \forall \mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d, \quad \forall l \in \{1..d\} \\ \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{d} \mathbf{w}_{\mathbf{k},l}^{i} \left[|J_i|\, P_i^{*}\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\, \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_m} \\ = \\ \displaystyle\sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \left[|J_i|\, P_i^{*}\, D\mathbf{F}_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\, \hat{\nabla}\hat{\varphi}_{\mathbf{j}}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \cdot \overrightarrow{e_m} \end{array}} \tag{A.1}$$

- D'après les propriétés des matrices $\tilde{B}_{d,r}$ et $\tilde{B}_{ijd,r}$ (section 3.3), l'équation (3.32c) se résume sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall i \in \{1..N_e\}, \quad \forall \mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d, \quad \forall l \in \{1..d\} \\ \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{k},l} \left[|J_i|\, P_i^*\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\ \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_m} \\ = \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{d} \mathbf{w}^i_{\mathbf{k},l} \left[|J_i|\, P_i^*\, A_{ij}\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\ \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_m}\end{array}} \tag{A.2}$$

- Soit φ_n une fonction de base de U_d^r.
  Le second terme de l'équation (3.32a) s'écrit, après intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto :

$$\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{k},l}\, \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \left[|J_i|\, D\mathbf{F}_i^{-1}\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\ \overrightarrow{e_l} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}})$$

  Faisons apparaître $P_i^*\, P_i$ afin d'utiliser l'égalité (A.2)

$$\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \left[D\mathbf{F}_i^{-1} P_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{k},l} \left[|J_i| P_i^*\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\, \overrightarrow{e_l} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}})$$

  On décompose alors $\hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}})$ sous la forme : $\displaystyle\sum_{p=1}^{d} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_p}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\ \overrightarrow{e_p}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = & \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \left[D\mathbf{F}_i^{-1}\, P_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \times \\ & \sum_{p=1}^{d} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_p}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \sum_{l=1}^{d} \mathbf{v}^i_{\mathbf{k},l} \left[|J_i|\, P_i^*\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\ \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_p}\end{aligned}$$

  D'après (A.2), nous avons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = & \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \left[D\mathbf{F}_i^{-1}\, P_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \times \\ & \sum_{p=1}^{d} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_p}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \sum_{l=1}^{d} \mathbf{w}^i_{\mathbf{k},l} \left[|J_i|\, P_i^*\, A_{ij}\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\ \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_p}\end{aligned}$$

  Faisons apparaître $|J_i|\, P_i^*\, P_i$ afin d'utiliser l'égalité (A.1).

$$\begin{aligned}\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = & \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \left[D\mathbf{F}_i^{-1}\, A_{ij}\, P_i^{*-1}\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \times \\ & \sum_{p=1}^{d} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_p}(\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \sum_{l=1}^{d} \mathbf{w}^i_{\mathbf{k},l} \left[|J_i|\, P_i^*\, P_i\right](\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\ \overrightarrow{e_l} \cdot \overrightarrow{e_p}\end{aligned}$$

D'après (A.1) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = & \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \left[D\mathbf{F}_i^{-1} A_{ij} P_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \times \\ & \sum_{p=1}^{d} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_p} (\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \left[|J_i| \, P_i^* \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{j}} (\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \cdot \overrightarrow{e_p} \\ = & \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \left[D\mathbf{F}_i^{-1} A_{ij} P_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \times \\ & \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \left[|J_i| \, P_i^* \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{j}} (\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} (\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\end{aligned}$$

Intervertissons la somme sur $\mathbf{k}$ et la somme sur $\mathbf{j}$ et simplifions l'expression :

$$\begin{aligned}\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = & \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \sum_{\mathbf{k} \in \{1..r+1\}^d} \hat{\omega}_{\mathbf{k}} \left[|J_i| \, D\mathbf{F}_i^{-1} A_{ij} \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \right] (\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \times \\ & \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{j}} (\hat{\xi}_{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} (\hat{\xi}_{\mathbf{k}})\end{aligned}$$

Nous reconnaissons l'approximation par la formule de Gauss-Lobatto de :

$$\int_{\hat{K}} |J_i| \, D\mathbf{F}_i^{-1} A_{ij} \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{j}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} \, d\hat{\mathbf{x}}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} &= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \int_{\hat{K}} |J_i| \, D\mathbf{F}_i^{-1} A_{ij} \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{j}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} \, d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \int_{\hat{K}} A_{ij} \, |J_i| \, D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{j}} \cdot D\mathbf{F}_i^{*-1} \, \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})} \, d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1..r+1\}^d} p_{glob_i(\mathbf{j})} \int_{K_i} \rho^{-1} \nabla \varphi_j^i \cdot \nabla \varphi_{\mathbf{loc}_i(\mathbf{n})}^i \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} &= \sum_{i \in \mathcal{S}_n} \int_{K_i}^{GL} A_{ij} \nabla p_{h|K_i} \cdot \nabla \varphi_{n|K_i} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega^{GL} A_{ij} \nabla p_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction test φ_n, nous avons :

$$\int_\Omega^{GL} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = \int_\Omega^{GL} A_{ij} \nabla p_h \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} = 0$$

Du point de vue matriciel, nous obtenons alors bien le résultat souhaité. ■

Annexe B

Mise en place de la formulation PML d'ordre d en temps pour le système (5.41)

Nous mettons en place les équations PML suivant les mêmes étapes que dans la section 5.2.1.1

Nous considérons donc le système sans second membre :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot \gamma_{ij} = 0 \quad \forall i = 1..d, \tag{B.1a}$$

$$A_{ij}^{-1} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = \nabla u_j \quad \forall i, j = 1..d. \tag{B.1b}$$

Etape 1 :
Nous oublions la source (plaçée dans le domaine physique) et passons au domaine fréquentiel par transformée de Fourier en temps $\mathcal{F}_t$. Le système (B.1) devient :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,\hat{u}_i - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot \hat{\gamma}_{ij} = 0 \quad \forall i = 1..d, \tag{B.2a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\hat{\gamma}_i = \nabla \hat{u}_i \quad \forall i = 1..d, \tag{B.2b}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = A_{ij}\,\hat{\gamma}_i \quad \forall i, j = 1..d, \tag{B.2c}$$

où $\hat{u}_i = \mathcal{F}_t(u_i)$, $\hat{\gamma}_{ij} = \mathcal{F}_t(\gamma_{ij})$ et $\hat{\gamma}_{ij} = \mathcal{F}_t(\gamma_{ij})$.

Etape 2 :
Nous prolongeons alors ces équations à l'aide du nouveau système de coordonnées, et obtenons :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\hat{u}_i - \sum_{j=1}^{d} \tilde{\nabla} \cdot \hat{\gamma}_{ij} = 0 \quad \forall i = 1..d, \tag{B.3a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\hat{\gamma}_i = \tilde{\nabla} \hat{u}_i \quad \forall i = 1..d, \tag{B.3b}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = A_{ij}\,\hat{\gamma}_i \quad \forall i, j = 1..d, \tag{B.3c}$$

où $\tilde{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \right)^*_{i=1..d}$.

Etape 3 :
Nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega - \tau_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \forall i = 1..d$$

Ainsi, ∇ et $\tilde{\nabla}$ vérifient $\nabla = M\tilde{\nabla}$ où M est une matrice $d \times d$ diagonale de terme diagonal $M_{ii} = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\tau_i}{\omega}$.
Le système (B.3) s'écrit :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,\hat{u}_i - \sum_{k=1}^{d} M_{kk}^{-1} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \hat{\gamma}_{ij}[k]}{\partial x_k} = 0 \qquad \forall i = 1..d, \tag{B.4a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega M \hat{\gamma}_i = \nabla \hat{u}_i \qquad \forall i = 1..d, \tag{B.4b}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = A_{ij}\hat{\gamma}_j \qquad \forall i,j = 1..d, \tag{B.4c}$$

avec $\hat{\gamma}_{ij} = (\hat{\gamma}_{ij}[k])_{k=1..d}$.

Etape 4 :
Nous introduisons alors $\left(\tilde{\gamma}_{ij}\right)_{i,j=1..d}$ tels que :

$$M\tilde{\gamma}_{ij} = \hat{\gamma}_{ij} \prod_{l=1}^{d} M_{ll} \tag{B.5}$$

$\tilde{\gamma}_{ij}[k]$ vérifie :

$$\tilde{\gamma}_{ij}[k] = \hat{\gamma}_{ij}[k] \prod_{l=1..d, l\neq k} M_{ll} \tag{B.6}$$

Or $M_{ii} = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\tau_i}{\omega}$ et les fonctions τ_i ne dépendent que de x_i. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} M_{kk}^{-1}\frac{\partial \hat{\gamma}_{ij}[k]}{\partial x_k} &= M_{kk}^{-1}\frac{\partial \tilde{\gamma}_{ij}[k]}{\partial x_k} \prod_{l=1..d, l\neq k} M_{ll}^{-1} \\ &= \frac{\partial \tilde{\gamma}_{ij}[k]}{\partial x_k} \prod_{l=1}^{d} M_{ll}^{-1} \end{aligned}$$

le système (B.4) se réécrit sous la forme :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,\hat{u}_i \prod_{l=1}^{d} M_{ll} - \sum_{j=1}^{d} \nabla \cdot \tilde{\gamma}_{ij} = 0 \qquad \forall i = 1..d, \tag{B.7a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega M \hat{\gamma}_i = \nabla \hat{u}_i \qquad \forall i = 1..d, \tag{B.7b}$$

$$M\tilde{\gamma}_{ij} \prod_{l=1}^{d} M_{ll}^{-1} = A_{ij}\hat{\gamma}_j \qquad \forall i,j = 1..d. \tag{B.7c}$$

Nous introduisons de nouvelles variables :

$$\hat{u}_i^{\star} = \hat{u}_i \prod_{l=1}^{d} M_{ll} \quad \forall i = 1..d, \tag{B.8a}$$

$$\tilde{\gamma}_i = M\hat{\gamma}_i \quad \forall i = 1..d. \tag{B.8b}$$

Introduisons alors $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{'}$, matrices $d \times d$ diagonales de terme diagonale respectif $\mathcal{T}_{ii} = \tau_i$ et $\mathcal{T}_{ii}^{'} = \dfrac{\mathrm{d}\tau_i}{\mathrm{d}x_i}$.
Nous pouvons donc résumer le système :

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,\hat{u}_i^\star - \sum_{j=1}^{d} \nabla\cdot\tilde{\gamma}_{ij} = 0 \;\; \forall i = 1..d, \tag{B.9a}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\tilde{\gamma}_i = \nabla\hat{u}_i \;\; \forall i = 1..d, \tag{B.9b}$$

$$(-\mathrm{i}\,\omega)^d\,\hat{u}_i^\star = \hat{u}_i \prod_{l=1}^{d}(-\mathrm{i}\,\omega+\tau_l) \;\; \forall i = 1..d, \tag{B.9c}$$

$$(-\mathrm{i}\omega)^{d-1}\tilde{\gamma}_{ij} + (-\mathrm{i}\omega)^{d-2}\mathcal{T}\tilde{\gamma}_{ij} = A_{ij}(-\mathrm{i}\,\omega\, I_{dd} + \mathcal{T})^{-1}\left[\prod_{l=1}^{d}(-\mathrm{i}\omega+\tau_l)\right]\tilde{\gamma}_j \;\; \forall i,j = 1..d. \tag{B.9d}$$

Etape 5 :
Avant de revenir au domaine temporel, remarquons que $\tilde{\gamma}_{ij} = \hat{\gamma}_{ij} = \mathcal{F}_t(\gamma_{ij})$ pour tout i et tout j variant de 1 à d et que $\tilde{\gamma}_i = \hat{\gamma}_i = \mathcal{F}_t(\gamma_i)$ pour tout i variant de 1 à d, ces égalités étant vérifiées dans le domaine physique (où les fonctions τ_i sont nulles). Nous prolongeons alors par continuité cette égalié dans les PMLs et obtenons :

$$\mathcal{F}_t^{-1}(\tilde{\gamma}_{ij}) = \gamma_{ij} \quad \forall i,j = 1..d, \tag{B.10a}$$

$$\mathcal{F}_t^{-1}(\tilde{\gamma}_i) = \gamma_i \quad \forall i = 1..d. \tag{B.10b}$$

Nous appliquons $\mathcal{F}_t^{-1}$ au système (B.9) et obtenons le système à résoudre dans les PMLs auquel nous ajoutons la condition aux bords de Dirichlet sur les variables $(u_i)_{i=1..d}$. Nous notons $u_i^\star = \mathcal{F}_t^{-1}(\hat{u}_i^\star)$ pour tout i.

– En $2D$:

$$\begin{aligned}
\rho\,\frac{\partial u_i^\star}{\partial t} - \sum_{j=1}^{2}\nabla\cdot\gamma_{ij} = 0 \quad & \forall i = 1..2,\\
\frac{\partial\gamma_i}{\partial t} = \nabla u_i \quad & \forall i = 1..2,\\
\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + (\tau_1+\tau_2)\frac{\partial u_i}{\partial t} + \tau_1\,\tau_2\,u_i = \frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial t^2} \quad & \forall i = 1..2,\\
\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} + \mathcal{T}\,\gamma_{ij} = A_{ij}\,\frac{\partial\gamma_j}{\partial t} + A_{ij}\,(\tau_1\,\tau_2)\,\mathcal{T}^{-1}\,\gamma_j \quad & \forall i,j = 1..2.
\end{aligned}$$

– En $3D$:

$$\begin{aligned}
\rho\,\frac{\partial u_i^\star}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3}\nabla\cdot\gamma_{ij} = 0 \quad & \forall i = 1..3,\\
\frac{\partial\gamma_i}{\partial t} = \nabla u_i \quad & \forall i = 1..3,\\
\frac{\partial^3 u_i}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\sum_{l=1}^{3}\tau_l + \frac{\partial u_i}{\partial t}\sum_{l=1}^{3}\frac{1}{\tau_l}\prod_{l=1}^{3}\tau_l + u_i\prod_{l=1}^{3}\tau_l = \frac{\partial^3 u_i^\star}{\partial t^3} \quad & \forall i = 1..3,\\
\frac{\partial^2\gamma_{ij}}{\partial t^2} + \mathcal{T}\,\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} = A_{ij}\,\frac{\partial^2\gamma_j}{\partial t^2} + A_{ij}\left(\sum_{i=1}^{d}\tau_i\,I_{33} - \mathcal{T}\right)\frac{\partial\gamma_j}{\partial t} + A_{ij}\,(\prod_{i=1}^{3}\tau_i)\,\mathcal{T}^{-1}\,\gamma_j \quad & \forall i,j = 1..3.
\end{aligned}$$

Remarque 81 *Dans le domaine physique, où les coefficients d'absorption sont nuls, nous retrouvons bien les équations initiales.*

Annexe C

Démonstrations liées au chapitre 6

C.1 Proof of theorem 3 and lemma 3

C.1.1 Proof of theorem 3

In order to prove (6.59), we have to show that, for all physical modes, the quantity :

$$S_1(K)\cdot V_g^1(K) = \frac{K_1}{\mathcal{V}(K)}\,\partial_{k_1}\mathcal{V}(K) = \frac{K_1}{2\mathcal{V}(K)^2}\,\partial_{k_1}(\mathcal{V}(K)^2),$$

is positive for all unit vectors K. As $\mathcal{V}(K)$ is characterized by the fact that $\gamma(K) = \rho\ \mathcal{V}(K)^2$ is one of the eigenvalues of Chrystoffel's tensor $\Gamma(K)$ (6.16), we have to study the sign of :

$$Q(\theta)\ =\ K_1 \times \frac{\partial\gamma}{\partial k_1}(K),$$

for all $K = (\cos\theta, \sin\theta)$, and for the two positive eigenvalues of $\Gamma(K)$:

$$\gamma(K) = \gamma_{QP}(K) = \frac{1}{2}(T + \sqrt{\Delta}) \text{ and } \gamma(K) = \gamma_{QS}(K) = \frac{1}{2}(T - \sqrt{\Delta})$$

where :

$$\begin{cases} T &= (c_{11}+c_{33})\,K_1^2 + (c_{33}+c_{22})\,K_2^2, \\ \\ \Delta &= \left[(c_{11}-c_{33})\,K_1^2 + (c_{33}-c_{22})\,K_2^2\right]^2 + 4K_1^2K_2^2\,(c_{12}+c_{33})^2. \end{cases}$$

Therefore (6.59) is satisfied if and only if $Q^+(\theta) \geq 0$ and $Q^-(\theta) \geq 0$ for all θ, with

$$Q^{\pm}(\theta) = \frac{1}{2}K_1\left(\frac{\partial T}{\partial K_1} \pm \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial K_1}\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\right) = \frac{K_1^4}{\sqrt{\Delta}}\,Q_2^{\pm}(\theta),$$

where, if $t = \tan\theta = K_2/K_1$, one easily computes that :

$$Q_2^{\pm}(\theta) = a(t) \pm b(t), \tag{C.1}$$

with

$$\begin{cases} a(t) = (c_{11}+c_{33})\sqrt{\alpha(t)} \quad (\geq 0), \\ \\ b(t) = (c_{11}-c_{33})^2 + (\alpha_1+\alpha_2)t^2, \\ \\ \alpha(t) = \left((c_{11}-c_{33}) + (c_{33}-c_{22})t^2\right)^2 + 4t^2(c_{12}+c_{33})^2, \end{cases} \tag{C.2}$$

where the coefficients α_1 and α_2 are given by

$$\begin{cases} \alpha_1 = (c_{12}+c_{33})^2 - c_{11}(c_{22}-c_{33}), \\ \alpha_2 = (c_{12}+c_{33})^2 + c_{33}(c_{22}-c_{33}). \end{cases} \tag{C.3}$$

Note that, as $a(t)$ is positive, one has the equivalence :

$$(6.59) \iff \begin{cases} a(t)+b(t) \geq 0, \quad \forall\, t>0, \\ a(t)-b(t) \geq 0, \quad \forall\, t>0, \end{cases} \iff a(t)^2 - b(t)^2 \geq 0, \quad \forall\, t>0.$$

One computes that :

$$a(t)^2 - b(t)^2 = 4\,(a_4 t^4 + 2a_2 t^2 + a_0),$$

with :

$$\begin{cases} a_4 = -\,\alpha_1\,\alpha_2, \\ a_2 = c_{11}c_{33}\,(\alpha_1+\alpha_2), \\ a_0 = c_{11}c_{33}(c_{11}-c_{33})^2 \geq 0. \end{cases} \tag{C.4}$$

Therefore (6.59) is equivalent to :

$$\phi(X) \equiv a_4 X^2 + 2a_2 X + a_0 \geq 0, \quad \forall X \geq 0. \tag{C.5}$$

To conclude, we first observe that condition $(\mathcal{C}_1)$ is nothing but $a_4 \geq 0$.

Obviously, (C.5) implies $a_4 \geq 0$. Conversely, assuming $a_4 \geq 0$,

- If $a_2^2 < a_0 a_4$, $\Phi(X)$ has a constant sign. As $\Phi(0) = a_0 \geq 0$, one has $\Phi(X) \geq 0$, $\forall\, X \geq 0$.
- If $a_2^2 \geq a_0 a_4$, $\Phi(X)$ has two real zeros and condition (C.5) is equivalent to saying that these two roots are negative. Since $a_0 a_4 \geq 0$, the two roots have the same sign. To conclude, it suffishes to observe by a simple computation that :

  $$a_2^2 - a_0 a_4 = c_{11}c_{33}(c_{12}+c_{33})^2\,[a_2 - (c_{12}+c_{33})^2],$$

  Therefore $a_2^2 - a_0 a_4 \geq 0$ implies $a_2 \geq (c_{12}+c_{33})^2 \geq 0$. As $a_0 \geq 0$, this means that the sum of the two roots is negative and thus that each of them is negative.

C.1.2 Proof of lemma 3

In this proof, we use the same notations as in the proof of theorem 3. Let us assume that there is an instability in the vicinity of the QP wave, that means that for $j=1$ or $j=2$, one has :

$$\exists\, \theta \in]0,\pi/2[, \quad \Im m((\mathcal{V}_\theta^1)_j) < 0.$$

This also means (see proof of theorem 3) that

$$\exists\, t>0, \quad a(t)+b(t) < 0. \tag{C.6}$$

From theorem 3, this implies that $(\mathcal{C}_1)$ is not satisfied which is equivalent to say that $a_4 < 0$. Then :

$$\alpha_1\ \alpha_2 > 0. \tag{C.7}$$

Since $a(t) \geq 0$, (C.6) implies in particular that $b(t) < 0$, which is possible only if :

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 0. \tag{C.8}$$

The two inequalities (C.7) and (C.8) thus implies that $\alpha_1 < 0$ and $\alpha_2 < 0$. So, we have :

$$(c_{12}+c_{33})^2 < -c_{33}(c_{22}-c_{33}) \quad \text{and} \quad (c_{12}+c_{33})^2 < c_{11}(c_{22}-c_{33}).$$

Since the two right hand sides are of opposite sign, this would imply that $(c_{12}+c_{33})^2 < 0$ which is impossible.

C.2 Proof of lemma 4

In what follows, $\mathcal{V}_\theta(\varepsilon)$ is one of the functions $(\mathcal{V}_\theta)_j(\varepsilon)$ for $j = 5, ..., 8$. Let us substitute the expansion (we know that such an expansion exists since we have weak well-posedness) :

$$\mathcal{V}_\theta(\varepsilon) = \varepsilon \mathcal{V}_\theta^1 + o(\varepsilon)$$

into the equation :

$$F_{pml}(\mathcal{V}_\theta(\varepsilon), \theta, \varepsilon) = 0.$$

We obtain, by identifying the lower order term in ε :

$$\begin{vmatrix} \left[c_{11}(\mathcal{V}_\theta^1)^2\cos^2\theta + c_{33}(\mathcal{V}_\theta^1 - \mathrm{i})^2\sin^2\theta\right]\left[c_{33}(\mathcal{V}_\theta^1)^2\cos^2\theta + c_{22}(\mathcal{V}_\theta^1 - \mathrm{i})^2\sin^2\theta\right] \\ -(c_{12}+c_{33})^2(\mathcal{V}_\theta^1)^2(\mathcal{V}_\theta^1 - \mathrm{i})^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0. \end{vmatrix} \tag{C.9}$$

It is easy to see that for $\theta \in]0, \pi/2[$, the solution $\mathcal{V}_\theta^1$ does not vanish, then we can make the change of unknown :

$$z = \frac{\mathcal{V}_\theta^1 - \mathrm{i}}{\mathcal{V}_\theta^1}\tan\theta, \tag{C.10}$$

which leads to a polynomial equation in z whose coefficients are independent of θ :

$$A_4 z^4 + A_2 z^2 + A_0 = 0, \tag{C.11}$$

with

$$\begin{cases} A_4 = c_{22}c_{33} > 0, \\ A_2 = c_{11}c_{22} + c_{33}^2 - (c_{12}+c_{33})^2, \\ A_0 = c_{11}c_{33} > 0. \end{cases} \tag{C.12}$$

Let us show the equivalence of the two following conditions :

(a) The solutions $\mathcal{V}_\theta^1$ of (C.9) have a positive imaginary part for all values of θ.

(b) The solutions z of (C.11) are purely imaginary.

Indeed, if (b) holds and if $\{i\lambda_j, j = 5, ..., 8\}$ are the four roots of (C.11) then the four solutions of (C.9) are given by :

$$(\mathcal{V}_\theta^1)_j = \frac{i\tan\theta}{\tan\theta - i\lambda_j} = \tan\theta\ \frac{-\lambda_j + i\tan\theta}{\tan^2\theta + \lambda_j^2},$$

so that :

$$\Im m(\mathcal{V}_\theta^1)_j = \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta + \lambda_j^2} \geq 0.$$

Conversely, let us assume that z is a solution of (C.11) with non zero real part (note that $z \neq 0$). We can assume that $\Re e(z) > 0$ since $-z$ is also a solution. Then, except maybe for $\theta = \theta_0$ such that, when z is real, $z = \tan\theta_0$, a solution of (C.10) is given by :

$$\mathcal{V}_\theta^1 = \frac{i\tan\theta}{\tan\theta - z} = \tan\theta \frac{-\Im m(z) + i(\tan\theta - \Re e(z))}{|\tan\theta - z|^2}$$

with imaginary part :

$$\Im m\ \mathcal{V}_\theta^1 = \frac{\tan\theta\ (\ \tan\theta - \Re e(z)\ )}{|\tan\theta - z|^2}.$$

It suffices to remark that when θ goes from 0 to $\pi/2$ the sign of $\tan\theta - \Re e(z)$ changes which means that, for some values of θ, (C.11) admits solutions with strictly negative imaginary part.

To conclude, it suffices to remark that (a) is equivalent to saying that the two roots of the polynomial $A_4Z^2 + A_2Z + A_0$ are real negative, which is equivalent to :

$$A_2^2 \geq 4A_0A_4 \quad \text{and } A_2 \geq 0,$$

what we wanted to show since $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \geq 0$ and :

$$A_2^2 - 4A_0A_4 = (c_{11}c_{22} - c_{12}^2)\left[c_{11}c_{22} - (c_{12} + 2c_{33})^2\right].$$

C.3 Proof of lemma 5

For our purpose, it will be useful to use a new parameterization of the $(\theta, \mathcal{V}, \varepsilon)$ space. More precisely, we consider the transformation (we shall see that this transformation is one to one) :

$$(\theta, \mathcal{V}, \varepsilon) \in]0, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}_* \times \mathbb{R}_*^+ \quad \mapsto \quad (X, \tau) \in \mathbb{R}_*^+ \times\ (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

defined by (we set $t = \tan\theta$) :

$$\begin{cases} X(\theta, \mathcal{V}) = \dfrac{1+t^2}{t^2}\mathcal{V}^2, \\ \\ \tau(\theta, \varepsilon, \mathcal{V}) = t^2\left(\dfrac{\mathcal{V} - i\varepsilon}{\mathcal{V}}\right)^2. \end{cases} \tag{C.13}$$

By construction, we have :

$$\widetilde{F}_{pml}(\mathcal{V},\theta,\varepsilon) = \cos^4\theta\ \mathcal{V}^4\ G(X(\theta,\mathcal{V}),\tau(\theta,\varepsilon,\mathcal{V})), \tag{C.14}$$

with :

$$G(X,\tau) = (c_{11}+(c_{33}-X)\,\tau)\,(c_{33}+(c_{22}-X)\,\tau) - (c_{12}+c_{33})^2\tau. \tag{C.15}$$

We then use this parametrization to express the property (P_1) in another way, by proving the :

Lemma 6 *The property (P_1) is equivalent to :*

$$(P_2) \qquad \forall X \in \mathbb{R}^+, \quad g(X,\tau) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

$\triangleright$ PROOF : If (P1) does not hold, there exists $\varepsilon_0 > 0$ and $\theta_0 \in]0,\pi/2[$ such that, for some $j \in \{1,..,8\}$,

$$(\mathcal{V}_{\theta_0}(\varepsilon_0))_j = \mathcal{V}_0 \in \mathbb{R}_*.$$

If we set $X_0 = X(\theta_0,\mathcal{V}_0) \in \mathbb{R}^+$ and $\tau_0 = \tau(\theta_0,\varepsilon_0,\mathcal{V}_0)$, by definition of G :

$$\widetilde{F}_{pml}(\mathcal{V}_0,\theta,\varepsilon) = 0 \Longrightarrow G(X_0,\tau_0) = 0.$$

As $\mathcal{V}_0 \in \mathbb{R}_*$, $X_0 > 0$ and $\varepsilon_0 > 0$ implies that $\Im m\tau_0 = -2t_0^2\varepsilon_0/\mathcal{V}_0 \neq 0$, which shows that (P2) does not hold either.

Reciprocally, assume that (P_2) is not satisfied. This means that there exist $\tau_0 \in C \setminus \mathbb{R}$ and $X_0 > 0$ (it is obvious that $X_0 = 0$ would imply that $\tau_0 \in \mathbb{R}$) such that

$$G(X_0,\tau_0) = 0.$$

Let us introduce the two real numbers :

$$t_0 = \left(\frac{1}{2}\frac{(\Im m\ \tau_0)^2}{\Re e\ \tau_0 + |\tau_0|}\right)^{\frac{1}{2}} > 0, \quad R_0 = \frac{\Re e\ \tau_0}{\Im m\ \tau_0} - \text{sign}\ (\Im m\ \tau_0)\sqrt{1+\left(\frac{\Re e\ \tau_0}{\Im m\ \tau_0}\right)^2}.$$

By setting

$$\begin{cases} \theta_0 = \text{atan}\ t_0, & \in]0,\pi/2[, \\ \mathcal{V}_0 = \text{sign}\ (R_0)\dfrac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}}\sqrt{X_0}, & \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon_0 = \mathcal{V}_0 R_0 = |R_0|\dfrac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}}\sqrt{X_0}, & > 0, \end{cases}$$

we have inverted the transformation (C.13), in other words :

$$X_0 = X(\theta_0,\mathcal{V}_0) \text{ and } \tau_0 = \tau(\theta_0,\varepsilon_0,\mathcal{V}_0).$$

Therefore $g(X_0,\tau_0)$ implies $\widetilde{F}_{pml}(\mathcal{V}_0,\theta_0,\varepsilon_0) = 0$, which means that (P1) in not true. $\triangleleft$

We now use the equivalence between (P_1) and (P_2) to prove the lemma 5 :

▷ PROOF : of lemma 5 : Let us rewrite $G(X,\tau)$ as a polynomial of degree two with respect to τ :

$$G(X,\tau) = (c_{33}-X)(c_{22}-X)\tau^2 + (c_{11}(c_{22}-X) + c_{33}(c_{33}-X) - (c_{12}+c_{33})^2)\tau + c_{11}c_{33}.$$

Its discriminant is given by :

$$\Delta(X) = \alpha_2 X^2 + 2\alpha_1 X + \alpha_0$$

with

$$\begin{cases} \alpha_2 = (c_{11}-c_{33})^2 \geq 0, \\ \alpha_1 = (c_{11}+c_{33})(c_{12}+c_{33})^2 - (c_{11}-c_{33})(c_{11}c_{22}-c_{33}^2), \\ \alpha_0 = (c_{11}c_{22}-c_{12}^2)(c_{11}c_{22}-(c_{12}+2c_{33})^2). \end{cases}$$

Obviously, we have the equivalence

$$(P_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta(X) \geq 0, \quad \forall X \geq 0.$$

This means that the two roots of $\Delta(X)$ are either non real either negative, which is equivalent to :

$$\alpha_0 \geq 0 \quad (\text{ i.e. } (C_2)) \quad \text{and (i) or (ii)},$$

where

$$\begin{cases} (i) \quad \alpha_0\alpha_2 \geq \alpha_1^2, \\ (ii) \quad \alpha_1 \geq 0 \quad (\text{ i.e. } (C_3)_2\ ). \end{cases}$$

To conclude, it suffices to remark that the inequality (i) above is nothing but $(C_3)_1$ since a tedious but simple computation shows that :

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 = 4c_{11}c_{33}\ (c_{12}+c_{33})^2\ \left[(c_{12}+c_{33})^2 - (c_{22}-c_{33})(c_{11}-c_{33})\right].$$

◁

Annexe D

Démonstrations des lemmes de la section 7.1.3

D.1 Démonstration du lemme 3

Nous devons montrer que $\hat{D}_{1,r}(l_0) = \hat{\omega}_{l_0}$.
Or :

$$\hat{D}_{1,r}(l_0) = \int_{[0,1]}^{GL} (\hat{\varphi}_{l_0})^2 d\hat{x} = \sum_{p=1}^{r+1} \hat{\omega}_p \left(\hat{\varphi}_{l_0}(\hat{\xi_p})\right)^2 = \sum_{p=1}^{r+1} \hat{\omega}_p \, \delta_{p,l_0} = \hat{\omega}_{l_0} \quad \blacksquare$$

D.2 Démonstration du lemme 5

Nous devons montrer que :

$$\hat{K}_{1,r}(j,l) = \hat{K}_{1,r}(2+r-j, 2+r-l) \;\; \forall j,l \in \{1..r+1\}$$

Les points de Gauss-Lobatto vérifient : $1 - \hat{\xi}_p = \hat{\xi}_{2+r-p}$.
On montre alors que $\hat{\varphi}_j(\hat{x}) = \hat{\varphi}_{2+r-j}(1-\hat{x})$:

$$\hat{\varphi}_j(\hat{x}) = \prod_{\substack{p=1..r+1 \\ p \neq j}} \frac{\hat{x} - \hat{\xi}_p}{\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_p} = \prod_{\substack{p=1..r+1 \\ p \neq j}} \frac{\hat{x} - 1 + \hat{\xi}_{2+r-p}}{-\hat{\xi}_{2+r-j} + \hat{\xi}_{2+r-p}}$$

on effectue alors un changement d'indice : $q = 2 + r - p$

$$\hat{\varphi}_j(\hat{x}) = \prod_{\substack{q=1..r+1 \\ q \neq 2+r-j}} \frac{1 - \hat{x} - \hat{\xi}_q}{\hat{\xi}_{2+r-j} - \hat{\xi}_q} = \hat{\varphi}_{2+r-j}(1-\hat{x})$$

Nous avons donc :

$$\hat{\varphi}_j^{'}(\hat{x}) = -\hat{\varphi}_{2+r-j}^{'}(1-\hat{x}) \tag{D.1a}$$

$$\hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x}) = \hat{\varphi}_{2+r-j}^{''}(1-\hat{x}) \tag{D.1b}$$

Calculons $\hat{K}_{1,r}(j,l)$. Pour cela, nous utilisons la formule de Gauss-Lobatto pour calculer les intégrales. Or, cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2r-1$ et $\hat{\varphi}_j^{'}(\hat{x})\hat{\varphi}_l^{'}(\hat{x})$ est un polynôme de degré $2r-2$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{1,r}(j,l) &= \int_0^1 \hat{\varphi}_j^{'}(\hat{x})\hat{\varphi}_l^{'}(\hat{x})d\hat{x} \\
&= \left[\hat{\varphi}_j^{'}(\hat{x})\hat{\varphi}_l(\hat{x})\right]_0^1 - \int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\hat{\varphi}_l(\hat{x})d\hat{x} \\
&= \hat{\varphi}_j^{'}(1)\hat{\varphi}_l(1) - \hat{\varphi}_j^{'}(0)\hat{\varphi}_l(0) - \int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\hat{\varphi}_l(\hat{x})d\hat{x} \\
&= \delta_{l,r+1}\hat{\varphi}_j^{'}(1) - \delta_{l,1}\hat{\varphi}_j^{'}(0) - \int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\hat{\varphi}_l(\hat{x})d\hat{x}
\end{aligned}$$

Or $\hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\hat{\varphi}_l(\hat{x})$ est un polynôme de degré $2r-2$. Son intégration par la formule de Gauss-Lobatto est donc exacte, ce qui nous donne :

$$\hat{K}_{1,r}(j,l) = \delta_{l,r+1}\,\hat{\varphi}_j^{'}(1) - \delta_{l,1}\,\hat{\varphi}_j^{'}(0) - \hat{\omega}_l\hat{\varphi}_j^{''}(\hat{\xi}_l) \tag{D.2}$$

Nous pouvons donc écrire, en utilisant les égalités (D.1) :

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{1,r}(j,l) &= \delta_{l,r+1}\,\hat{\varphi}_j^{'}(1) - \delta_{l,1}\,\hat{\varphi}_j^{'}(0) - \hat{\omega}_l\hat{\varphi}_j^{''}(\hat{\xi}_l) \\
&= -\delta_{l,r+1}\,\hat{\varphi}_{2+r-j}^{'}(0) + \delta_{l,1}\,\hat{\varphi}_{2+r-j}^{'}(1) - \hat{\omega}_l\hat{\varphi}_{2+r-j}^{''}(1-\hat{\xi}_l)
\end{aligned}$$

or $\hat{\omega}_l = \hat{\omega}_{2+r-l}$ et $\hat{\xi}_l = 1-\hat{\xi}_{2+r-l}$

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{1,r}(j,l) &= -\delta_{2+r-l,1}\,\hat{\varphi}_{2+r-j}^{'}(0) + \delta_{2+r-l,r+1}\,\hat{\varphi}_{2+r-j}^{'}(1) - \hat{\omega}_{2+r-l}\hat{\varphi}_{2+r-j}^{''}(\hat{\xi}_{2+r-l}) \\
&= \hat{K}_{1,r}(2+r-j,2+r-l) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

D.3 Démonstration du lemme 7

Nous devons montrer que la matrice $\hat{K}_{1,r}$ vérifie :

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l) = 0, \quad \forall j = 1..r$$

Pour cela, nous allons utiliser l'égalité (D.2) :

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l) = \hat{\varphi}_j^{'}(1) - \hat{\varphi}_j^{'}(0) - \sum_{l=1}^{r+1} \hat{\omega}_l\hat{\varphi}_j^{''}(\hat{\xi}_l)$$

Nous reconnaissons, dans le troisième terme de cette somme, l'intégration numérique, par la formule de Gauss-Lobatto, de :

$$\int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\,d\hat{x}$$

Or $\hat{\varphi}_j^{''}$ est un polynôme de degré $r-2$. Son intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto est donc exacte.
Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l) &= \hat{\varphi}_j^{'}(1) - \hat{\varphi}_j^{'}(0) - \int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\,dx \\ &= \hat{\varphi}_j^{'}(1) - \hat{\varphi}_j^{'}(0) - \left[\hat{\varphi}_j^{'}(\hat{x})\right]_0^1 \\ &= \hat{\varphi}_j^{'}(1) - \hat{\varphi}_j^{'}(0) - \left(\hat{\varphi}_j^{'}(1) - \hat{\varphi}_j^{'}(0)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

D.4 Démonstration du lemme 6

Nous devons montrer que la matrice $\hat{M}_h$ est de rang $r-1$ et que sa sous-matrice $\hat{M}_{h\,[2..r]}$ constituée des $r-1$ dernières lignes et $r-1$ dernières colonnes est inversible.

Montrons tout d'abord que $\sum_{l=1}^{r} \hat{M}_h(j,l) = 0$. D'après le lemme 7, nous avons :

$$\sum_{l=1}^{r} \hat{M}_h(j,l) = \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_h(j,l) = 0 \tag{D.3}$$

$\hat{M}_h$ est donc bien de rang inférieur ou égal à $r-1$.

Montrons que $\hat{M}_h$ est de rang supérieur ou égal à $r-1$. Pour cela, intéressons nous à $\hat{M}_{h\,[2..r]}$ et effectuons un raisonnement par l'absurde : supposons que $\hat{M}_{h\,[2..r]}$ ne soit pas inversible.
Ceci signifie que l'une de ses lignes est combinaison linéaire de toutes les autres.

$$\Rightarrow \exists j_0 \in \{2..r\}\,,\, \exists(\lambda_j)_{\substack{j=2..r \\ j\neq j_0}} \neq 0, \quad \hat{K}_{1,r}(j_0,l) = \sum_{\substack{j=2..r \\ j\neq j_0}} \lambda_j \hat{K}_{1,r}(j,l)\ \forall l = 2..r$$

D'après l'égalité (D.2) démontré dans l'annexe D.2, nous pouvons écrire :

$$\hat{K}_{1,r}(j,l) = -\hat{\omega}_l\,\hat{\varphi}_j^{''}(\hat{\xi}_l)\ \forall j = 2..r,\ \forall l = 2..r$$

Ainsi :

$$\Rightarrow \exists j_0 \in \{2..r\}\,,\, \exists(\lambda_j)_{\substack{j=2..r \\ j\neq j_0}} \neq 0, \quad \hat{\omega}_l\,\hat{\varphi}_{j_0}^{''}(\hat{\xi}_l) = \sum_{\substack{j=2..r \\ j\neq j_0}} \lambda_j\,\hat{\omega}_l\,\hat{\varphi}_j^{''}(\hat{\xi}_l)\ \forall l = 2..r$$

Après simplification de l'égalité par division par $\hat{\omega}_l$, nous obtenons une égalité entre deux polynômes de degré $r-2$ pour $r-1$ valeurs distinctes. Ceux-ci sont donc égaux, ce qui nous donne :

$$\Rightarrow \exists j_0 \in \{2..r\}\,,\, \exists(\lambda_j)_{\substack{j=2..r \\ j\neq j_0}} \neq 0, \quad \hat{\varphi}_{j_0}^{''}(\hat{x}) = \sum_{\substack{j=2..r \\ j\neq j_0}} \lambda_j \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\ \forall \hat{x} \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \exists j_0 \in \{2..r\}\,,\, \exists(\lambda_j)_{\substack{j=2..r \\ j\neq j_0}} \neq 0, \exists\alpha, \exists\beta \quad \hat{\varphi}_{j_0}(\hat{x}) = \sum_{\substack{j=2..r \\ j\neq j_0}} \lambda_j \hat{\varphi}_j(\hat{x}) + \beta\hat{x} + \alpha\ \forall \hat{x} \in [0,1]$$

Or $\hat{\varphi}_j(\hat{\xi}_l) = \delta_{j,l}$. Ainsi, en prenant successivement $\hat{x} = \hat{\xi}_j$ pour j variant de 1 à $r+1$, nous montrons que $\alpha = \beta = \lambda_j = 0$.
Or, nous avons supposé qu'au moins l'un des λ_j est non nul. Nous arrivons donc à une absurdité et démontrons donc que la matrice est bien inversible.
$\hat{M}_h$ est donc de rang supérieur ou égal à $r-1$. ■

D.5 Démonstration du lemme 8

Nous devons montrer que :

$$\begin{aligned} A^0_{r,j} &= 0 \\ A^1_{r,j} &= \delta_{j,1} - \delta_{j,r+1} \\ A^2_{r,j} &= -2\,\hat{\omega}_j \\ A^n_{r,j} &= 0 \qquad\qquad 3 \le n \le r+1 \end{aligned}$$

D'après l'égalité (D.2) démontré dans l'annexe D.2, nous pouvons écrire :

$$A^n_{r,j} = \hat{\varphi}'_j(1)(\hat{\xi}_j - 1)^n - \hat{\varphi}'_j(0)(\hat{\xi}_j)^n - \sum_{l=1}^{r+1} \hat{\omega}_l\, \hat{\varphi}''_j(\hat{\xi}_l)(\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^n$$

Dans le second terme, nous reconnaissons le résultat obtenu par intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto de l'intégrale sur $[0,1]$ de la fonction $\hat{\varphi}''_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^n$.
Pour $n \le r+1$, cette fonction est un polynôme de degré $2r-1$. Son intégration par la formule de Gauss-Lobatto est donc exacte, ce qui nous donne :

$$A^n_{r,j} = \hat{\varphi}'_j(1)(\hat{\xi}_j - 1)^n - \hat{\varphi}'_j(0)(\hat{\xi}_j)^n - \int_0^1 \hat{\varphi}''_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^n d\hat{x}$$

Ensuite, suivant la valeur de n, nous effectuons plusieurs intégrations par partie sur l'intégrale et obtenons :

- Pour $n = 0$: $\displaystyle\int_0^1 \hat{\varphi}''_j(\hat{x})\,d\hat{x} = \hat{\varphi}'_j(1) - \hat{\varphi}'_j(0)$
- Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \hat{\varphi}''_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})d\hat{x} &= \left[\hat{\varphi}'_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})\right]_0^1 + \int_0^1 \hat{\varphi}'_j(\hat{x})d\hat{x} \\ &= \hat{\varphi}'_j(1)\,(\hat{\xi}_j - 1) - \hat{\varphi}'_j(0)\,\hat{\xi}_j + \hat{\varphi}_j(1) - \hat{\varphi}_j(0) \end{aligned}$$

- Pour $2 \le n \le r+1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \hat{\varphi}''_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^n d\hat{x} &= \left[\hat{\varphi}'_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^n\right]_0^1 + n\int_0^1 \hat{\varphi}'_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^{n-1} d\hat{x} \\ &= \left[\hat{\varphi}'_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^n\right]_0^1 + n\left[\hat{\varphi}_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^{n-1}\right]_0^1 \\ &\quad + n(n-1)\int_0^1 \hat{\varphi}_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^{n-2} d\hat{x} \\ &= \hat{\varphi}'_j(1)(\hat{\xi}_j - 1)^n - \hat{\varphi}'_j(0)(\hat{\xi}_j)^n + n(n-1)\int_0^1 \hat{\varphi}_j(\hat{x})(\hat{\xi}_j - \hat{x})^{n-2} d\hat{x} \end{aligned}$$

Or $\hat{\varphi}_j(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^{n-2}$ est un polynôme de degré $r+n-2 \leq 2r-1$. Son intégration par la formule de Gauss-Lobatto est exacte, ce qui nous donne :

$$\int_0^1 \hat{\varphi}_j''(\hat{x})\,(\hat{\xi}_j - \hat{x})^n d\hat{x} = \hat{\varphi}_j'(1)(\hat{\xi}_j - 1)^n - \hat{\varphi}_j'(0)(\hat{\xi}_j)^n + n(n-1)\hat{\omega}_j\,\delta_{n,2} \quad \blacksquare$$

D.6 Démonstration du lemme 9

Nous devons montrer que :

$$\begin{aligned} X_r^{2n+1} &= 0 && \forall n \\ X_r^{2n} &= -2\,\delta_{n,1} && \forall\, 0 \leq 2n \leq 2r+1 \end{aligned}$$

- D'après le lemme 11, nous avons $A_{r,2+r-j}^{2n+1} = -A_{r,j}^{2n+1}$ (voir démonstration dans l'annexe D.7). Ainsi, dans le cas impair, nous montrons facilement que $2X_r^{2n+1} = 0$.
- Pour $n = 0$, nous savons que $A_{r,j}^{2n} = 0$ et obtenons donc bien le résultat.
  Pour n pair et $n \neq 0$, en reprenant la définition de $A_{r,j}^{2n}$ et en utilisant la formule :

$$(\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_l)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} C_p^{2n}\,(-1)^p\,\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} \qquad \text{avec } C_p^{2n} = \frac{(2n)!}{p!(2n-p)!}$$

  nous obtenons :

$$X_r^{2n} = \sum_{p=0}^{n} C_p^{2n}\,(-1)^p \sum_{j=1}^{r+1}\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} + \sum_{p=n+1}^{2n} C_p^{2n}\,(-1)^p \sum_{l=1}^{r+1}\sum_{j=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} \quad \text{(D.4)}$$

  Par la même méthode que pour le calcul de $A_{r,j}^n$, nous montrons que, pour tout $n \leq r+1$, tout p tel que $0 \leq p \leq n$ et tout j vérifiant $1 \leq j \leq r+1$:

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} = p\,\delta_{j,r+1} - p(p-1)\hat{\omega}_j\,\hat{\xi}_j^{2n-2}$$

  En effet, nous savons que $\hat{K}_{1,r}(j,l) = \delta_{l,r+1}\,\hat{\varphi}_j'(1) - \delta_{l,1}\,\hat{\varphi}_j'(0) - \hat{\omega}_l\hat{\varphi}_j''(\hat{\xi}_l)$ (équation (D.2) démontrée dans l'annexe D.2).
  Nous pouvons donc écrire :

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} = \hat{\varphi}_j'(1)\hat{\xi}_{r+1}^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} - \hat{\varphi}_j'(0)\hat{\xi}_1^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} - \hat{\xi}_j^{2n-p}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{\omega}_l\hat{\varphi}_j''(\hat{\xi}_l)\hat{\xi}_l^p$$

  or $\hat{\xi}_{r+1} = 1$ et $\hat{\xi}_1 = 0$

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} = \hat{\varphi}_j'(1)\,\hat{\xi}_j^{2n-p} - \delta_{p,0}\,\hat{\varphi}_j'(0)\,\hat{\xi}_j^{2n-p} - \hat{\xi}_j^{2n-p}\sum_{l=1}^{r+1}\hat{\omega}_l\hat{\varphi}_j''(\hat{\xi}_l)\hat{\xi}_l^p$$

  Intéressons nous au troisième terme de la somme. Nous reconnaissons l'intégration numérique, par la formule de Gauss-Lobatto, de :

$$\int_0^1 \hat{\varphi}_j''(\hat{x})\,\hat{x}^p\,d\hat{x}$$

Or $\hat{\varphi}_j^{''}$ est un polynôme de degré $r-2$ et p est compris entre 0 et n, avec n inférieur ou égal à $r+1$. Ainsi, $\hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\,\hat{x}^p$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2r-1$. Son intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto est donc exacte.
Ceci nous donne :

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} = \hat{\varphi}_j^{'}(1)\,\hat{\xi}_j^{2n-p} - \delta_{p,0}\,\hat{\varphi}_j^{'}(0)\,\hat{\xi}_j^{2n-p} - \hat{\xi}_j^{2n-p}\int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\,\hat{x}^p\,d\hat{x}$$

Ensuite, suivant la valeur de p, nous effectuons zéro, une ou deux intégrations par partie sur l'intégrale et obtenons :

- Pour $p=0$: $\displaystyle\int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\,d\hat{x} = \hat{\varphi}_j^{'}(1) - \hat{\varphi}_j^{'}(0)$
- Pour $p=1$: $\displaystyle\int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\,\hat{x}\,d\hat{x} = \left[\hat{\varphi}_j^{'}(\hat{x})\,\hat{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \hat{\varphi}_j^{'}(\hat{x})\,d\hat{x} = \hat{\varphi}_j^{'}(1) - \hat{\varphi}_j(1) + \hat{\varphi}_j(0)$
- Pour $2 \le p \le r+1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\,\hat{x}^p\,d\hat{x} &= \left[\hat{\varphi}_j^{'}(\hat{x})\,\hat{x}^p\right]_0^1 - p\int_0^1 \hat{\varphi}_j^{'}(\hat{x})\,\hat{x}^{p-1}\,d\hat{x} \\ &= \hat{\varphi}_j^{'}(1) - p\left[\hat{\varphi}_j(\hat{x})\,\hat{x}^{p-1}\right]_0^1 + p(p-1)\int_0^1 \hat{\varphi}_j(\hat{x})\,\hat{x}^{p-2}\,d\hat{x}\end{aligned}$$

Or $\hat{\varphi}_j(\hat{x})\,\hat{x}^{p-2}$ est un polynôme de degré $r+p-2 \le 2r-1$. Son intégration par la formule de Gauss-Lobatto est exacte, ce qui nous donne :

$$\int_0^1 \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{x})\,\hat{x}^p\,d\hat{x} = \hat{\varphi}_j^{'}(1) - p\hat{\varphi}_j(1) + p(p-1)\,\hat{\omega}_j\,\hat{\xi}_j^{p-2}$$

Nous avons donc :

- Pour $p=0$:

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} = \hat{\varphi}_j^{'}(1)\,\hat{\xi}_j^{2n} - \hat{\varphi}_j^{'}(0)\,\hat{\xi}_j^{2n} - \hat{\xi}_j^{2n}\hat{\varphi}_j^{'}(1) + \hat{\xi}_j^{2n}\hat{\varphi}_j^{'}(0) = 0$$

- Pour $p=1$:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l\,\hat{\xi}_j^{2n-1} &= \hat{\varphi}_j^{'}(1)\,\hat{\xi}_j^{2n-1} - \hat{\xi}_j^{2n-1}\hat{\varphi}_j^{'}(1) + \hat{\xi}_j^{2n-1}\hat{\varphi}_j(1) - \hat{\xi}_j^{2n-1}\hat{\varphi}_j(0) \\ &= \delta_{j,r+1}\,\hat{\xi}_j^{2n-1} - \delta_{j,1}\,\hat{\xi}_j^{2n-1} \\ &= \delta_{j,r+1}\end{aligned}$$

- Pour $2 \le p \le r+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} &= \hat{\varphi}_j^{'}(1)\,\hat{\xi}_j^{2n-p} - \hat{\xi}_j^{2n-p}\,\hat{\varphi}_j^{'}(1) + \hat{\xi}_j^{2n-p}\,p\,\hat{\varphi}_j(1) - \hat{\xi}_j^{2n-p}\,p(p-1)\,\hat{\omega}_j\,\hat{\xi}_j^{p-2} \\ &= \delta_{j,r+1}\,p - p(p-1)\,\hat{\omega}_j\,\hat{\xi}_j^{2n-2}\end{aligned}$$

On montre bien que, pour tout $n \leq r+1$, tout p tel que $0 \leq p \leq n$ et tout j tel que $1 \leq j \leq r+1$:

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} = p\,\delta_{j,r+1} - p(p-1)\hat{\omega}_j\,\hat{\xi}_j^{2n-2}$$

Reprenons l'égalité (D.4). Pour tout $n \leq r+1$, tout p tel que $n+1 \leq p \leq 2n$ et tout l tel que $\forall 1 \leq l \leq r+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} &= \sum_{j=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^{2n-q}\,\hat{\xi}_j^q \\ &= \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(l,j)\hat{\xi}_j^q\,\hat{\xi}_l^{2n-q}\end{aligned}$$

où $q = 2n-p$ et $0 \leq q \leq n$, d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)\hat{\xi}_l^p\,\hat{\xi}_j^{2n-p} &= q\,\delta_{l,r+1} - q(q-1)\hat{\omega}_l\,\hat{\xi}_l^{2n-2} \\ &= (2n-p)\,\delta_{l,r+1} - (2n-p)(2n-p-1)\hat{\omega}_l\,\hat{\xi}_l^{2n-2}\end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire, $\forall n \leq r+1$:

$$\begin{aligned}X_r^{2n} = &\sum_{p=1}^{n} C_p^{2n}(-1)^p p - \sum_{p=2}^{n} C_p^{2n}(-1)^p p(p-1)\sum_{j=1}^{r+1}\hat{\omega}_j\,\hat{\xi}_j^{2n-2} \\ &+ \sum_{p=n+1}^{2n-1} C_p^{2n}(-1)^p(2n-p) - \sum_{p=n+1}^{2n-2} C_p^{2n}(-1)^p(2n-p)(2n-p-1)\sum_{l=1}^{r+1}\hat{\omega}_l\,\hat{\xi}_l^{2n-2}\end{aligned}$$

Or, pour tout $2n-2 \leq 2r-1$, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{r+1}\hat{\omega}_j\,\hat{\xi}_j^{2n-2} = \sum_{l=1}^{r+1}\hat{\omega}_l\,\hat{\xi}_l^{2n-2} = \int_0^1 \hat{x}^{2n-2}d\hat{x} = \frac{1}{2n-1}\,\delta_{n\geq 1}$$

Donc, pour tout $2n \leq 2r+1$, après quelques opérations sur les sommes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}X_r^{2n} &= \sum_{p=1}^{n} C_p^{2n}(-1)^p p\left(1-\frac{p-1}{2n-1}\right) + \sum_{p=n+1}^{2n-1} C_p^{2n}(-1)^p(2n-p)\left(1-\frac{2n-p-1}{2n-1}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{2n-1} C_p^{2n}(-1)^p\,p\,\frac{2n-p}{2n-1} = \sum_{p=0}^{2n-2} C_{p+1}^{2n}(-1)^{p+1}\,(p+1)\,\frac{2n-p-1}{2n-1} \\ &= \sum_{p=0}^{2n-2}\frac{(2n)!}{(p+1)!(2n-p-1)!}(-1)^{p+1}\,(p+1)\,\frac{2n-p-1}{2n-1} \\ &= -2n\sum_{p=0}^{2n-2}(-1)^p C_p^{2n-2} = -2n(1+(-1))^{2n-2}\end{aligned}$$

Nous démontrons bien le résultat souhaité. ■

D.7 Démonstration du lemme 11

Nous devons montrer que :

$$A^n_{r,j} = (-1)^n A^n_{r,2+r-j} \qquad \forall j = 1..r+1 \quad \forall n \geq 0$$

Or :

$$\hat{K}_{1,r}(j,l) = \hat{K}_{1,r}(2+r-j, 2+r-l) \;\; \forall j,l \in \{1..r+1\} \tag{D.5}$$

En effet, les points de Gauss-Lobatto vérifient : $1-\hat{\xi}_l = \hat{\xi}_{2+r-l}$.
On montre alors que $\hat{\varphi}_l(\hat{x}) = \hat{\varphi}_{2+r-l}(1-\hat{x})$:

$$\hat{\varphi}_l(\hat{x}) = \prod_{\substack{m=1..r+1 \\ m \neq l}} \frac{\hat{x}-\hat{\xi}_m}{\hat{\xi}_l - \hat{\xi}_m} = \prod_{\substack{m=1..r+1 \\ m \neq l}} \frac{\hat{x}-1+\hat{\xi}_{2+r-m}}{-\hat{\xi}_{2+r-l}+\hat{\xi}_{2+r-m}}$$

on effectue alors un changement d'indice : $n = 2+r-m$

$$\hat{\varphi}_l(\hat{x}) = \prod_{\substack{n=1..r+1 \\ n \neq 2+r-l}} \frac{1-\hat{x}-\hat{\xi}_n}{\hat{\xi}_{2+r-l} - \hat{\xi}_n} = \hat{\varphi}_{2+r-l}(1-\hat{x})$$

Nous avons donc : $\hat{\varphi}_l^{'}(\hat{x}) = -\hat{\varphi}_{2+r-l}^{'}(1-\hat{x})$ et $\hat{\varphi}_l^{''}(\hat{x}) = \hat{\varphi}_{2+r-l}^{''}(1-\hat{x})$.
Utilisons alors l'équation (D.2) démontrée dans l'annexe D.2 :

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{1,r}(j,l) &= \delta_{l,r+1}\,\hat{\varphi}_j^{'}(1) - \delta_{l,1}\,\hat{\varphi}_j^{'}(0) - \hat{\omega}_l \hat{\varphi}_j^{''}(\hat{\xi}_l) \\
&= -\delta_{l,r+1}\,\hat{\varphi}_{2+r-j}^{'}(0) + \delta_{l,1}\,\hat{\varphi}_{2+r-j}^{'}(1) - \hat{\omega}_l \hat{\varphi}_{2+r-j}^{''}(1-\hat{\xi}_l)
\end{aligned}$$

or $\hat{\omega}_l = \hat{\omega}_{2+r-l}$ et $\hat{\xi}_l = 1-\hat{\xi}_{2+r-l}$

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{1,r}(j,l) &= -\delta_{2+r-l,1}\,\hat{\varphi}_{2+r-j}^{'}(0) + \delta_{2+r-l,r+1}\,\hat{\varphi}_{2+r-j}^{'}(1) - \hat{\omega}_{2+r-l}\hat{\varphi}_{2+r-j}^{''}(\hat{\xi}_{2+r-l}) \\
&= \hat{K}_{1,r}(2+r-j, 2+r-l)
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $1-\hat{\xi}_l = \hat{\xi}_{2+r-l}$, nous avons alors :

$$A^n_{r,2+r-j} = \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,2+r-l)(\hat{\xi}_{2+r-l} - \hat{\xi}_j)^n = \sum_{l=1}^{r+1} \hat{K}_{1,r}(j,l)(\hat{\xi}_l - \hat{\xi}_j)^n = (-1)^n A^n_{r,j} \;\blacksquare$$

Annexe E

Démonstrations des lemmes de la section 8.1

E.1 Démonstration du lemme 18

Nous devons montrer que :

$$\sum_{l=1}^{r+1} \hat{R}_{1,r}(j,l) = 0 \quad \forall j = 1..r+1.$$

$1/\rho$ est un polynôme de degré 1.
Ainsi $\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\hat{\varphi}_j'(\hat{x})\hat{\varphi}_l'(\hat{x})$ est un polynôme de degré $2r-1$.
Son intégration par la formule de Gauss-Lobatto est donc exacte.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\hat{R}_{1,r}(j,l) &= \int_0^1 \frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j'(\hat{x})\,\hat{\varphi}_l'(\hat{x})\,d\hat{x} \\ &= \left[\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j'(\hat{x})\hat{\varphi}_l(\hat{x})\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j''(\hat{x}) + \left(\frac{1}{\hat{\rho}}\right)'(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j'(\hat{x})\right)\hat{\varphi}_l(\hat{x})d\hat{x}\end{aligned}$$

Or $\left(\frac{1}{\hat{\rho}}\right)'(\hat{x}) = \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}$

$$= \frac{1}{\rho_2}\,\hat{\varphi}_j'(1)\,\delta_{l,r+1} - \frac{1}{\rho_1}\,\hat{\varphi}_j'(0)\,\delta_{l,1} - \int_0^1 \frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j''(\hat{x})\hat{\varphi}_l(\hat{x})d\hat{x} - \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\int_0^1 \hat{\varphi}_j'(\hat{x})\hat{\varphi}_l(\hat{x})d\hat{x}$$

$\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j''(\hat{x})\,\hat{\varphi}_l(\hat{x})$ et $\hat{\varphi}_j'\,\hat{\varphi}_l(\hat{x})$ sont des polynômes de degré $2r-1$.

$$\hat{R}_{1,r}(j,l) = \frac{1}{\rho_2}\,\hat{\varphi}_j'(1)\,\delta_{l,r+1} - \frac{1}{\rho_1}\,\hat{\varphi}_j'(0)\,\delta_{l,1} - \hat{\omega}_l\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{\xi}_l)\,\hat{\varphi}_j''(\hat{\xi}_l) - \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\hat{\omega}_l\hat{\varphi}_j'(\hat{\xi}_l)$$

Ainsi :

$$\sum_{l=1}^{r+1}\hat{R}_{1,r}(j,l) = \frac{1}{\rho_2}\,\hat{\varphi}_j'(1) - \frac{1}{\rho_1}\,\hat{\varphi}_j'(0) - \sum_{l=1}^{r+1}\hat{\omega}_l\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{\xi}_l)\,\hat{\varphi}_j''(\hat{\xi}_l) - \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\sum_{l=1}^{r+1}\hat{\omega}_l\hat{\varphi}_j'(\hat{\xi}_l)$$

Or $\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j''(\hat{x})$ et $\hat{\varphi}_j'(\hat{x})$ sont des polynômes de degré $r-1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{r+1}\hat{R}_{1,r}(j,l) &= \frac{1}{\rho_2}\,\hat{\varphi}_j'(1) - \frac{1}{\rho_1}\,\hat{\varphi}_j'(0) - \int_0^1 \frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j''(\hat{x})d\hat{x} - \left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)\int_0^1 \hat{\varphi}_j'(\hat{x})d\hat{x} \\
&= \frac{1}{\rho_2}\,\hat{\varphi}_j'(1) - \frac{1}{\rho_1}\,\hat{\varphi}_j'(0) - \int_0^1 \frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j''(\hat{x})d\hat{x} - \int_0^1 \left(\frac{1}{\hat{\rho}}\right)'(\hat{x})\,\hat{\varphi}_j'(\hat{x})d\hat{x} \\
&= \frac{1}{\rho_2}\,\hat{\varphi}_j'(1) - \frac{1}{\rho_1}\,\hat{\varphi}_j'(0) - \left[\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\hat{\varphi}_j'(\hat{x})\right]_0^1 \\
&= 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

E.2 Démonstration du lemme 19

Il nous faut donc démontrer que $\hat{T}_{1,r}$ est inversible.

Pour cela, effectuons un raisonnement par l'absurde : supposons que $\hat{T}_{1,r}$ ne soit pas inversible. Nous pouvons alors écrire :

$$\Rightarrow \exists(\lambda_i)_{i=1..r} \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\hat{T}_{1,r}(i,j) = 0 \quad \forall j = 1..r$$

Or :

$$\hat{T}_{1,r}(i,j) = -\hat{\omega}_j\left[\frac{1}{\hat{\rho}}\,\hat{\varphi}_i'\right]'(\hat{\xi}_j) \qquad \forall i,j = 1..r$$

Nous obtenons alors :

$$\Rightarrow \exists(\lambda_i)_{i=1..r} \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[\frac{1}{\hat{\rho}}\,\hat{\varphi}_i'\right]'(\hat{\xi}_j) = 0 \quad \forall j = 1..r$$

Nous obtenons une égalité entre un polynôme de degré $r-1$ et le polynôme nul pour $r-1$ valeurs distinctes. Le terme de gauche de l'équation est donc nul, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists(\lambda_i)_{i=1..r} \neq 0 \quad \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[\frac{1}{\hat{\rho}}\,\hat{\varphi}_i'\right]'(\hat{x}) = 0 \quad \forall \hat{x} \in [0,1] \\
&\Rightarrow \exists(\lambda_i)_{i=1..r} \neq 0, \exists\alpha \quad \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\hat{\varphi}_i'(\hat{x}) = \alpha \quad \forall \hat{x} \in [0,1]
\end{aligned}$$

On pose :

$$\hat{\rho}(\hat{x}) = \left[\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{x})\right]^{-1} = \rho_1\,\rho_2\,[(\rho_1-\rho_2)\hat{x}+\rho_2]^{-1}$$

En multipliant par $\hat{\rho}(\hat{x})$, nous obtenons :

$$\Rightarrow \exists(\lambda_i)_{i=1..r} \neq 0, \exists\alpha \quad \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\hat{\varphi}_i'(\hat{x}) = \alpha\,\hat{\rho}(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in [0,1]$$

La primitive de $\hat{\rho}(\hat{x})$ est :

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \ln\left((\rho_1 - \rho_2)\hat{x} + \rho_2\right)$$

Nous intégrons alors :

$$\Rightarrow \exists(\lambda_i)_{i=1..r} \neq 0,\ \exists\alpha,\ \exists\beta \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \hat{\varphi}_i(\hat{x}) = \alpha \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \ln\left((\rho_1 - \rho_2)\hat{x} + \rho_2\right) + \beta \quad \forall \hat{x} \in [0,1]$$

Nous obtenons une égalité entre un logarithme non nul et un polynôme de degré r. La seule solution possible est pour $\alpha = 0$.
Nous prenons alors $\hat{x} = \hat{\xi}_{r+1}$. Les i variant de 1 à r, ceci implique que $\beta = 0$.
Enfin, nous remplaçons $\hat{x}$ par les valeurs successives ξ_j, j variant de 1 à r, et obtenons $\lambda_i = 0, \forall i = 1..r$.
Or, nous avons supposé qu'au moins l'un des λ_i est non nul. Nous arrivons donc à une absurdité et démontrons bien l'inversibilité de $\hat{T}_{1,r}$.

Bibliographie

[1] ABARBANEL, S., GOTTLIEB, D., AND HESTHAVEN, J. Long time behavior of the perfectly matched layer equations in computational elactromagnetics. *J. Scientific Comp. 17*, 1-4 (2002), 405–422.

[2] ABARBANEL, S., GOTTLIEB, D., AND HESTHAVEN, J. S. Well-posed perfectly matched layers for advective acoustics. *J. Comput. Phys. 154*, 2 (1999), 266–283.

[3] AULD, B. Acoustic fields and elastic waves in solids. vol. I et II. Wiley, 1973.

[4] BAKER, G., AND DOUGALIS, V. The effect of quadrature errors on finite element approximations for second order parabolic equations. *SIAM J. Numer. Anal. 13*, 4 (1976), 577–598.

[5] BAKER, G., AND DOUGALIS, V. Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal. 13*, 4 (1976), 564–576.

[6] BAMBERGER, A., CHAVENT, G., AND LAILLY, P. Etude de schémas numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire. Rapport de Recherche 41, INRIA, 1980.

[7] BARBIERA, M. *Schémas aux différences finies d'ordre quatre pour les équations de l'élastodynamique linéaire*. PhD thesis, Université Paris IX-Dauphine, 1993.

[8] BAYLISS, A., JORDAN, A., LEMESURIER, K., AND TURKEL, B. A fourth order accurate finite difference scheme for the computation of elastic waves. *Bull. Seism. Soc. Am.* (1987).

[9] BÉCACHE, E., DHIA, A.-S. B.-B., AND LEGENDRE, G. Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation. In preparation.

[10] BÉCACHE, E., AND JOLY, P. On the analysis of Bérenger's perfectly matched layers for Maxwell equations. *M2AN 36*, 1 (2002), 87–120.

[11] BÉCACHE, E., JOLY, P., AND TSOGKA, C. Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2d elastic wave propagation. *J. Comp. Acous. 9*, 3 (2001), 1175–1203.

[12] BÉCACHE, E., JOLY, P., AND TSOGKA, C. A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem. *SIAM J. Numer. Anal. 39*, 6 (2002), 2109–2132 (electronic).

[13] BÉCACHE, E., PETROPOULOS, P. G., AND GEDNEY, S. On the long-time behavior of unsplit perfectly matched layers. Tech. Rep. 4538, INRIA, 2002. submitted.

[14] BÉRENGER, J. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves. *J. of Comput. Phys. 114* (1994), 185–200.

[15] BÉRENGER, J. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. of Comp. Phys., 127* (1996), 363–379.

[16] BÉRENGER, J. Improved PML for the FDTD solution of wave-structure interaction problems. *IEEE transactions on Antennas and Propagation 45*, 3 (March 1997), 466–473.

[17] BERMUDEZ, A., HERVELLA-NIETO, L., AND RODRIGUEZ, R. Finite element compulation of three-dimensional elastoacoustic vibrations. *J. of Sound and Vibration 219*, 2 (1999), 279–306.

[18] CHEW, W. C., AND WEEDON, W. H. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell equations with stretched coordinates. *IEEE Microwave and Optic. Tech. Letters 7* (1999), 599–604.

[19] CIARLET, P., AND LIONS, J. Handbook of numerical analysis. vol. 2. 1991.

[20] COHEN, G. Higher-ordre numerical methods for transient wave equations. Springer, 2001.

[21] COHEN, G., AND FAUQUEUX, S. Mixed finite elements with mass-lumping for the transient wave equation. *J. of Comp. Acous. 8* (2000), 171–188.

[22] COHEN, G., AND JOLY, P. Fourth order schemes for the heterogeneous acoustics equation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin. 80*, 1-3 (1990), 397–407.

[23] COHEN, G., JOLY, P., AND TORDJMAN, N. Higher-order finite elements with mass lumping for the 1-D wave equation. *Finite elements in analysis and design 17* (1994), 329–336.

[24] COHEN, G., AND MONK, P. Gauss point mass lumping schemes for Maxwell's equations. *Numer. Methods Partial Differential Equations 14*, 1 (1998), 63–88.

[25] COHEN, G., AND MONK, P. Mur-Nédélec finite element schemes for Maxwell's equations. *Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg. 169*, 3-4 (1999), 197–217.

[26] COLLINO, F. Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations. *J. of Comp. Phys. 131*, 1 (1997), 164–180.

[27] COLLINO, F., AND MONK, P. Conditions et couches absorbantes pour les équations de Maxwell. In *Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell*, G. Cohen and P. Joly, Eds., Ecole des Ondes. Collection didactique, Rocquencourt, 1998, ch. 4.

[28] COLLINO, F., AND TSOGKA, C. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heteregeneous media. Rapport de Recherche 3471, INRIA, 1998.

[29] COLLINO, F., AND TSOGKA, C. Application of the pml absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heteregeneous media. *Geophysics 66*, 1 (2001), 294–307.

[30] DABLAIN, M. The application of high order differencing for the scalar wave equation. *Geophysics 51*, 1 (1986), 54–66.

[31] DIAZ, J., AND JOLY, P. Stabilized perfectly matched layers for advective wave equations. In preparation.

[32] ELMKIES, A. *Sur les éléments finis d'arête pour la résolution des équations de Maxwell en milieu anisotrope et pour des maillages quelconques*. PhD thesis, Université Paris IX-Dauphine, 1998.

[33] FOUQUET, T. Personal communication.

[34] GELLER, R., AND TAKEUCHI, N. A new method for computing highly accurate DSM synthetic seismograms. *Geophys. J. Int.* (1995).

[35] HAGSTROM, T., AND NAZAROV, I. Absorbing layers and radiation boundary conditions for jet flow simulations. In *Proc. of the 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conf.* (2002).

[36] HAIRER, E., NORSETT, S. P., AND WANNER, G. Solving ordinary differential equations. In *Springer Series in Computational Mathematics*. 1991.

[37] HAMDI, M., AND OUSSET, Y. A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. *International J. for Num. Meth. in Eng. 13* (1978), 139–150.

[38] HASTINGS, F., SCHNEIDER, J., AND BROSCHAT, S. L. Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *J. Acoust. Soc. Am. 100* (1996), 3061–3069.

[39] HENNART, J.-P. Topics in finite element discretization of parabolic evolution problems. *Lecture Notes in Mathematics 909* (1982), 185–199.

[40] HENNART, J.-P., SAINZ, E., AND VILLEGAS, M. On the efficient use of the finite element method in static neutron diffusion calculations. *Computational Methods in Nuclear Engineering 1* (1979), 3–87.

[41] HESTHAVEN, J. On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations. *J. of Comp. Phys. 142* (1998), 129–147.

[42] HIGDON, R. L. Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems. *SIAM Review 28*, 2 (June 86).

[43] HOLDBERG, O. *Large scale wave equation computations using higher-order difference operators*. PhD thesis, University of Trondheim, 1987.

[44] HU, F. Q. On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer. *J. Comp. Phys. 129* (1996), 201–219.

[45] HUGUES, T. The finite element method. In *Linear static and dynamic finite element analysis*, P.-H. International, Ed.

[46] KATO, T. Perturbation theory for linear operators. Springer, 1980.

[47] KIEFLING, L., AND FENG, G. Fluide-structure finite element vibrational analysis. *AIAA J. 14* (1976), 199–203.

[48] KOMATITSCH, D., BARNES, C., AND TROMP, J. Simulation of anisotropic wave propagation based upon a spectral element method. *Geophysics 65*, 4 (2000), 1251–1260.

[49] KOMATITSCH, D., BARNES, C., AND TROMP, J. Wave propagation near a fluide-solide interface : A spectral-element approach. *Geophysics 65*, 2 (2000), 623–631.

[50] KOMATITSCH, D., AND TROMP, J. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophys J. Int 139* (1999), 806–822.

[51] KOMATITSCH, D., AND TROMP, J. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-i. Validation. *Geophysics 149* (2002), 390–412.

[52] KOMATITSCH, D., AND VILOTTE, J.-P. The spectral element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull. Seis. Soc. Am. 88*, 2 (1998), 368–92.

[53] KREISS, H.-O., AND LORENZ, J. Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations. In *Pure and Appl. Math.*, vol. 136. Academic Press, Boston, USA, 1989.

[54] LEVANDER, A. Fourth-order velocity-stress finite difference scheme. In *Proc. of the 57th SEG Annual International Meeting and Exposition*. New Orleans, 1987.

[55] MADAY, Y., MEIRON, D., PATERA, A., AND RONQUIST, E. Analysis of iterative methods for the steady and unsteady Stokes problem : application to spectral element discretizations. *SIAM J. Sci. Comput. 14*, 2 (1993), 310–337.

[56] MADAY, Y., RONQUIST, E., AND PATERA, A. Optimal error analysis of spectral methods with emphasis on non-constant coefficients and deformed geometries. *Comp. Meth. in App. Mech. and Eng. 80* (1990), 91–115.

[57] MÉTRAL, J., AND VACUS, O. Caractère bien posé du problème de Cauchy pour le système de Bérenger. *C.R.A.S. I Math.*, 10 (1999), 847–852.

[58] MOCZO, P., LUCKA, M., KRISTEK, J., AND KRISTEKOVA, M. 3D displacement finite differences and a combined memory optimization. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 89 (1999), 69–79.

[59] NICOLÉTIS, L. *Simulation numérique de la propagation d'ondes sismiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1981.

[60] PATERA, A. A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys. 54* (1984), 468–488.

[61] PETROPOULOS, P., ZHAO, L., AND CANGELLARIS, A. A reflectionless sponge condition for the solution of Maxwell's equations with hifh-order staggered finite difference schemes. *J. of Comp. Phys. 139* (1998), 184–08.

[62] PETROPOULOS, P. G. Reflectionless sponge layers as absorbing boundary condition for the numerical solution of Maxwell's equations in rectangular, cylindrical, and spherical coordinates. *SIAM J. Appl. Math. 60*, 3 (2000), 1037–1058.

[63] PRIOLO, E., CARCIONE, J., AND SERIANI, G.

[64] RAHMOUNI, A. N. *Des modèles PML bien posés pour divers problèmes hyperboliques*. PhD thesis, Université Paris Nord-Paris XIII, 2000.

[65] RAPPAPORT, C. Perfectly matched absorbing conditions based on anisotropic lossy mapping of space. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters 5*, 3 (1995), 90–92.

[66] TAKEUCHI, N., AND GELLER, R. Optimally accurate second order time-domain finite difference scheme for computing synthetic seismograms in 2-D and 3-D media. *Phys. of the Earth and Plan. Inter.* (2000).

[67] TAM, C. K. W., AURIAULT, L., AND CAMBULI, F. Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains. *J. Comput. Phys. 144*, 1 (1998), 213–234.

[68] TEIXEIRA, F. L., AND CHEW, W. C. On causality and dynamic stability of perfectly matched layers for FDTD simulations. *Micro. Opt. Tech. Lett. 17* (1998), 231–236.

[69] THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics 51* (1986), 1954–1966.

[70] TORDJMAN, N. *Elément finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*. PhD thesis, Université Paris IX-Dauphine, 1995.

[71] TREFETHEN, L. N. Group velocity in finite difference schemes. *SIAM Review 24*, 2 (April 1982).

[72] TREFETHEN, L. N. Group velocity interpretation of the stability theory of Gustafsson, Kreiss and Sundström. *J. Comp. Phys. 49*, 2 (February 1983).

[73] TREFETHEN, L. N. Instability of difference models for hyperbolic initial boundary value problems. *Comm. Pure and Applied Math. 37* (1984), 329–367.

[74] TURKEL, E., AND YEFET, A. Absorbing PML boundary layers for wave-like equations. *Appl. Numer. Math. 27*, 4 (1998), 533–557.

[75] VIRIEUX, J. P-SV wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite difference method. *Geophysics 51*, 4 (1986).

[76] ZHAO, L., AND CANGELLARIS, A. A general approach for developing unsplit-field time-domain implementations of perfectly matched layers for FDTD grid truncation. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 44* (1996), 2555–563.

[77] ZHAO, L., AND CANGELLARIS, A. GT PML : Generalize theory of perfectly matched layers and its application to the reflectionless truncation of finite-difference time-domain grids. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 44* (1996), 2555–2563.

[78] ZIENKIEWICZ, O., AND TAYLOR, R. The finite element method. In *Solid and fluid, mechanics, dynamics and non-linearity*, vol. 2. McGraw-Hill.

Vu : le Président
M. .....

Vu : les suffrageants
MM. .....

Vu et permis d'imprimer :

Le Vice-Président du Conseil Scientifique chargé de la Recherche de l'Université PARIS IX DAUPHINE

Résumé

Nous nous intéressons à la propagation d'ondes en milieu élastique non-borné. Nous développons une nouvelle formulation mixte $H(div) - L^2$ du système de l'élastodynamique linéaire et lui appliquons la "méthode des éléments finis mixtes spectraux". Cette nouvelle méthode permet, par un choix judicieux d'espaces d'approximation et une condensation de masse, d'obtenir un schéma explicite de stockage réduit, en donnant la même solution que la méthode des éléments finis spectraux. Nous introduisons ensuite des couches absorbantes parfaitement adaptées pour modéliser les milieux non-bornés. Des phénomènes d'instabilité sont révélés et analysés pour certains matériaux élastiques 2D. La méthode numérique obtenue est validée et testée sur des modèles réalistes en acoustique et élastique. Une analyse par ondes planes donne des résultats de dispersion numérique et montre la supériorité des maillages adaptés aux vitesses du milieu. Enfin, une extension au couplage fluide-structure 2D est mise en place.

Mots clés : élastodynamique linéaire, éléments spectraux, condensation de masse, couche absorbante parfaitement adaptée, analyse par ondes planes.

Abstract

We consider the propagation of elastic waves in unbounded domains. A new formulation of the linear elasticity system as an $H(div) - L^2$ system enables us to use the "mixed spectral finite element method", This new method is based on the definition of new spaces of approximation and the use of mass-lumping. It leads to an explicit scheme with reduced storage and provides the same solution as the spectral finite element method. Then, we modelize unbounded domains by using Perfectly Matched Layers. Instabilities in the PML in the case of particular 2D elastic media are pointed out and investigated. The numerical method is validated and tested in the case of acoustic and elastic realistic models. A plane wave analysis gives results about numerical dispersion and shows that meshes adapted to the physical and geometrical properties of the media are more accurate than the others. Then, an extension of the method to fluid-solid coupling is introduced for 2D seismic propagation.

Key words : elasticity, spectral element, mass-lumping, perfectly matched layers, plane wave analysis.