Quelques propriétés des superprocessus

Jean-François Delmas

Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6

Spécialité : **Mathématiques**

Présentée par Jean-François DELMAS

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 6

Sujet de la thèse :

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SUPERPROCESSUS

Soutenue le 28 Mars 1997 devant le jury composé de :

Mr Jean BERTOIN
Mr Bernard LAPEYRE
Mr Jean-François LE GALL
Mr Yves LE JAN
Mr Jacques NEVEU
Mr Marc YOR

Table des matières

Chapitre I

Introduction

Ce travail se décompose en trois parties indépendantes qui traitent de questions relatives aux superprocessus. Nous donnons dans un premier paragraphe une description intuitive des phénomènes étudiés. Puis, dans les paragraphes suivants nous détaillons les résultats mathématiques obtenus et présentons l'essentiel des travaux relatifs aux mêmes sujets. Les chapitres II à IV peuvent être lus séparément. Ils possèdent chacun les rappels et leurs notations propres qui assurent leur cohérence.

I.1 Un exemple : une population de bactéries

On considère une population d'êtres uni-cellulaires, des bactéries par exemple, qui se déplacent au hasard et indépendamment les uns des autres. Les bactéries se reproduisent par division cellulaire. Supposons que cette reproduction ne puisse s'effectuer que dans certains lieux. Ces régions particulières seront appelées régions de catalyse. De plus la division cellulaire n'a lieu qu'à partir d'un certain temps (aléatoire) passé dans les régions de catalyse. Enfin elle a un taux de réussite de 50%; on obtient deux bactéries qui vivent alors indépendamment l'une de l'autre. En cas d'échec, la bactérie meurt et n'a donc pas de descendance. On s'intéresse à la répartition de la population et à son évolution. Remarquons que le poids d'une bactérie est faible et que les vitesses de reproduction sont élevées, comparativement aux échelles humaines (kilogramme, jour). Si on ne regarde pas l'évolution d'une bactérie au microscope avec un chronomètre, mais si on regarde la population sur le globe et sur plusieurs mois, on observe alors un "nuage" qui se déplace au hasard et dont la densité évolue aléatoirement au cours du temps.

I.2 Modélisation à l'aide d'un superprocessus

Pour étudier la population de bactéries, on construit le modèle particulaire suivant :

- Chaque particule (bactérie) naît et meurt à deux instants aléatoires.
- La loi de la trajectoire d'une particule née à l'instant t en x est la loi d'un processus de Markov ξ issu de $x \in \mathbb{R}^d$ à l'instant t. Les trajectoires des différentes particules sont indépendantes.

- Étant donné la trajectoire d'une particule, sa probabilité de survivre sur l'intervalle de temps (s,t) est donnée par $\mathrm{e}^{-(A_t - A_s)}$, où A_t est une fonctionnelle additive de la trajectoire (cette fonctionnelle rend compte des régions de catalyse).

- Une particule qui meurt donne naissance indépendamment de ce qui précède à 0 ou 2 enfants avec probabilité 1/2. On caractérise le branchement critique à l'aide de la fonction génératrice $\varphi(\lambda) = (1+\lambda^2)/2$, en fait plus particulièrement à l'aide de la fonction $\Psi(\lambda) = \lambda - 1 + \varphi(1-\lambda) = \lambda^2/2$.

Si on note $Y_t(C)$ le nombre de particules qui sont à l'instant t dans l'ensemble C de $\mathbb{R}^d$, alors $(Y_t, t \geq 0)$ définit un processus de Markov à valeurs dans l'ensemble des mesures ponctuelles finies sur $\mathbb{R}^d$. Si on affecte un poids $1/n$ à toutes les particules, et si on accélère le phénomène de branchement en remplaçant la fonctionnelle A par nA, alors les processus correspondants Y^n convergent en loi vers un processus X, appelé superprocessus, à valeurs dans l'ensemble des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$.

C'est ce processus qui modélise le "nuage" aléatoire de bactéries. Ce processus est caractérisé par le triplet (ξ, dA_t, Ψ) sur lequel nous allons revenir plus précisément.

I.3 Les superprocessus

Les superprocessus sont des processus de Markov à valeurs mesures. Introduits par Watanabe [61] en 1968, ils ont connu un grand développement à partir des années 1980. Nous renvoyons aux travaux de Dynkin [24, 28] et de Dawson [10, 11] pour la construction de tels processus comme limite de systèmes de particules avec branchement. Nous renvoyons également aux travaux de Fitzsimmons [30], Perkins [49] et de Dawson et Perkins [19] pour les propriétés générales de ces processus à valeurs mesures. Un superprocessus sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ est caractérisé par la donnée de trois éléments.

- Un processus de Markov droit $\xi = (\xi_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ issu à l'instant initial de $\xi_0 = x$ sous la probabilité $\mathbb{P}_x$. (Par exemple le mouvement brownien γ sur $\mathbb{R}^d$.)

- Une fonctionnelle additive continue positive $A = (A_t, t \geq 0)$ du processus ξ, dont les moments exponentiels à tous ordres et à tous temps sont finis. (Par exemple $A_t = \int_0^t \mathbf{1}_D(\xi_s)ds$ où D est un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$.)

- Et enfin une fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}^+$ mesurable positive, de la forme

$$\Psi(\lambda) = 2b\lambda^2 + \int_{(0,\infty)} \left[\mathrm{e}^{-u\lambda} - 1 + u\lambda\right] \Pi'(du), \quad \lambda \geq 0, \tag{I.1}$$

  où Π' est une mesure positive sur $(0,\infty)$ telle que $\int_{(0,\infty)} (u \wedge u^2)\Pi'(du) < \infty$. (Par exemple $\Psi(\lambda) = \lambda^2$ ou encore $\Psi(\lambda) = \lambda^{1+\rho}$ avec $\rho \in (0,1)$. Dans ce dernier cas $b = 0$ est $\Pi'(du)$ est proportionelle à $u^{-\rho-2}du$.)

On peut associer au triplet (ξ, dA_t, Ψ) un processus de Markov fort unique X à valeurs dans M_f, l'ensemble des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$. L'ensemble M_f sera toujours muni de la topologie de la convergence faible. Si $\eta \in M_f$ et si φ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ positive mesurable, on note $(\eta, \varphi) = \int \varphi(x)\eta(dx)$. La loi du processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est caractérisée de la manière suivante sous $\mathbb{P}_\eta^X$, $\eta \in M_f$.

- $X_0 = \eta$, $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s.

- Pour toute fonction φ bornée positive mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$, pour tous $t \geq s \geq 0$, on a :

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[\mathrm{e}^{-(X_t,\varphi)} \mid \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s) \right] = \exp\left[-(X_s, v(t-s,\cdot))\right],$$

où la fonction v définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ est l'unique solution positive mesurable de l'équation intégrale

$$v(t,x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \Psi(v(t-s,\xi_s)) dA_s \right] = \mathbb{E}_x \varphi(\xi_t). \tag{I.2}$$

Les superprocessus sont des objets complexes et riches. Ils permettent d'aborder des problèmes d'équations différentielles non linéaires (voir Dynkin [25, 26, 27] et Le Gall [40, 41]). Ils apparaissent également comme un outil naturel pour modéliser l'évolution de populations (cf l'exemple de la population bactérienne).

Nous allons maintenant présenter nos résultats concernant les propriétés des superprocessus. Ils traitent des trois thèmes suivants.

- Le super-mouvement brownien avec catalyse.

- Quelques propriétés de l'image du super-mouvement brownien.

- Propriétés trajectorielles des superprocessus avec mécanisme de branchement général.

I.4 Exposé des résultats

I.4.1 Chapitre II: Le super-mouvement brownien avec catalyse

Ce chapitre correspond à l'étude du processus qui modélise intuitivement l'évolution de la population de bactéries décrite ci-dessus.

En dimension $d = 1$, le super-mouvement brownien X associé au triplet $(\gamma, \kappa dt, \lambda^2)$, où γ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, et $\kappa > 0$, est à chaque instant $t > 0$ p.s. absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. En revanche en dimension $d \geq 2$, p.s. pour tout $t > 0$ la mesure aléatoire X_t est étrangère à la mesure de Lebesgue. Un phénomène différent apparaît si le branchement n'a pas lieu dans tout l'espace.

Dawson, Fleischmann et Roelly [17] ont montré en dimension $d = 1$ que pour une classe générale de superprocessus X, la mesure aléatoire X_t, à $t > 0$ fixé, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Plus précisément, Dawson et Fleischmann [14] se sont intéressé en dimension $d = 1$ au super-mouvement brownien avec un point de catalyse X associé au triplet $(\gamma, \kappa dl_t^c, \lambda^2)$, où $\kappa > 0$ et où l^c est le temps local du mouvement brownien unidimensionnel γ au niveau c. L'ensemble de catalyse $D = \{c\}$ est alors réduit à un point. Les auteurs montrent un résultat d'existence et de continuité du processus à valeurs mesures X (en effet ce cas particulier ne satisfait pas les hypothèses générales des superprocessus traités par Dynkin [24], Dawson [11] ou Fitzsimmons [30]). Ce théorème peut s'exprimer de la manière suivante.

Théorème A ([14]) *Le superprocessus X associé au triplet $(\gamma, \kappa dl_t^c, \lambda^2)$ peut être construit sur $C(\mathbb{R}^+, M_f)$ l'espace des fonctions continues à valeurs dans M_f. Et ce processus vérifie $X_t(\{c\}) = 0$ pour tout $t > 0$ p.s.*

On note dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Théorème B ([14]) *P.s., il existe un processus $z(t,x)$ continu en les deux variables $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}\backslash\{c\}$ tel que $X_t(dx) = z(t,x)dx$ pour tout $t > 0$.*

Dawson et Fleischmann [14] donnent également la caractérisation de la loi de z à l'aide de sa transformée de Laplace.

Dawson et Fleischmann [15] ont étendu ce résultat en dimension supérieure en considérant par exemple pour l'ensemble de catalyse une famille (aléatoire) d'hyperplans parallèles. En fait d'après les auteurs, d'un point de vue technique, les exemples traités peuvent se réduire au cas unidimensionnel.

Pour le superprocessus étudié dans [14], associé à $(\gamma, \kappa dl_t^c, \lambda^2)$, Fleischmann et Le Gall [32] donnent en dimension $d = 1$ une formule de représentation de la densité $z(t,x)$ pour $x \neq c$. Pour cela ils considèrent la densité $y_t(b)$, $b \in \mathbb{R}$, de la mesure d'occupation $Y_t = \int_0^t ds\ X_s$ qui peut être choisie continue en les variables $(t,b) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ (cf [14]). Pour tout b fixé, $y_t(b)$ est une fonction croissante de t, et on peut donc considérer la mesure associée $\lambda^b(dt)$ définie par $\lambda^b((u,v]) = y_v(b) - y_u(b)$. Le théorème B implique que p.s. pour tout $t > 0$, $b \neq c$, $\lambda^b(dt) = z(t,b)dt$. Dans [16], les auteurs montrent que λ^c est singulière bien que son support soit de dimension égale à 1. Notons Q_t le semi-groupe de transition du mouvement brownien tué sur $D = \{c\}$, et $q(t,a,b)$ sa densité. On note $\theta(t,b)$ la densité de la loi de l'excursion brownienne à l'instant t au niveau b, sous la mesure d'Itô des excursions hors de $\{c\}$.

Théorème C ([32]) *Pour tout $\eta \in M_f$, $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s. la densité $z(t,b)$ de X peut s'écrire*

$$z(t,b) = \int \eta(da)\ q(t,a,b) + \int_0^t \lambda^c(ds)\ \theta(t-s,b), \qquad t > 0, \quad b \neq c. \tag{I.3}$$

Intuitivement le premier terme de droite de l'équation (I.3) correspond à la densité des particules qui n'ont pas encore touché l'ensemble de catalyse $\{c\}$. Le second terme correspond aux particules issues de l'ensemble de catalyse, avec intensité λ^c, qui sont distribuées selon la loi des excursions browniennes hors de $\{c\}$. De plus les auteurs montrent que p.s. la densité $z(t,b)$ est une fonction C^∞ des variables $(t,b) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}\backslash\{c\}$ et satisfait l'équation de la chaleur sur $(0,\infty) \times \mathbb{R}\backslash\{c\}$.

Dans le chapitre I nous étendons les résultats précédents en dimension supérieure pour des ensembles de catalyse généraux. Pour cela considérons une mesure σ-finie σ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant l'hypothèse (H) suivante : il existe $\beta \in (0,1)$ tel que $d - 2 + 2\beta \geq 0$ et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B(x,1)} \frac{\sigma(dy)}{|x-y|^{d-2+2\beta}} < \infty,$$

où $B(x,1)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon 1.

Pour $d = 1$ toutes les mesures finies vérifient cette condition d'intégrabilité (prendre $\beta = \frac{1}{2}$). Pour d quelconque, il est clair que la mesure de Lebesgue convient également. Soit γ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ issu de x sous $\mathbb{P}_x$. On note A la fonctionnelle additive continue de γ ayant σ comme mesure de Revuz. Pour toute fonction mesurable positive f, on a :

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty f(s,\gamma_s)dA_s = \int_0^\infty ds \int \sigma(dy)p(s,x-y)f(s,y),$$

où p est la densité de transition du mouvement brownien. On note $a_T = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x A_T < \infty$. Remarquons que la fonctionnelle A ne satisfait pas en général les conditions de [24]. En effet elle ne possède pas a priori des moments exponentiels finis. On construit donc le superprocessus X associé au triplet $(\gamma, \frac{1}{2}\, dA_t, \lambda^2)$ comme limite de systèmes de particules avec branchement. Dans le cas $d = 1$ et $\sigma = \delta_c$, la fonctionnelle A est le temps local de γ au niveau $\{c\}$. On retrouve alors le cas traité dans [14] et [32]. En dimension supérieure, l'objet qui caractérise la catalyse n'est pas l'ensemble D mais la mesure σ.

A l'aide d'un calcul de moments pour le processus X et en utilisant le lemme de Kolmogorov, on montre l'existence d'une version continue pour la topologie de la convergence étroite.

Théorème 1 *Soit $\eta \in M_f$. Il existe un processus de Markov homogène continu $X = (X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans M_f dont la loi est caractérisée sous $\mathbb{P}^X_\eta$ par*

- *$X_0 = \eta$, $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s.*
- *Pour tout $T > 0$, pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$, pour toute fonction φ mesurable positive bornée sur $\mathbb{R}^d$, telle que $a_T \,\|\varphi\|_\infty < 1$,*

$$\mathbb{E}^X_\eta \left[\mathrm{e}^{-(X_t,\varphi)} \mid \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s) \right] = \mathrm{e}^{-(X_s, v(t-s,\cdot))},$$

où la fonction v est l'unique solution positive mesurable de l'équation

$$v(t,x) + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}_x \int_0^t v(t-s,\gamma_s)^2 dA_s = \mathbb{E}_x\, \varphi(\gamma_t), \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d.$$

De plus pour toute fonction φ mesurable positive bornée sur $\mathbb{R}^d$, le processus $((X_t,\varphi), t > 0)$ est $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. continu.

Comme mentionné ci-dessus, la construction du processus X repose sur une approximation par des systèmes de particules browniennes soumises à un phénomène de branchement discret gouverné par la fonctionnelle additive A. Ce théorème limite d'intérêt indépendant permet aussi une meilleure compréhension intuitive du comportement de X.

Les résultats de Maisonneuve [44] assurent l'existence d'un temps local L pour l'ensemble de catalyse D associé au mouvement brownien, et permettent de définir des mesures d'excursions hors de D. On note H^x la mesure d'excursion hors de D issue de $x \in D$. Supposons que la mesure de Revuz μ associée au temps local L satisfasse la condition d'intégrabilité (H). Cette condition est automatiquement satisfaite en dimension $d = 1$. En dimension supérieure, elle est vérifiée dès que D satisfait une hypothèse de régularité assez faible décrite dans l'appendice du chapitre II. Entre autres elle est satisfaite en dimension $d \geq 3$, lorsque D est l'adhérence ou la frontière d'un domaine lipschitzien (borné) ou bien encore si D est une sous-variété de dimension $d-1$. Lorsque $d = 2$, la mesure de Revuz du temps local associé à tout compact connexe non réduit à un point vérifie (H). On peut alors construire une mesure aléatoire Γ_μ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, qui intuitivement rend compte des instants de visites et de la quantité de particules qui rencontrent le support de μ. On peut rapprocher cette mesure des temps locaux de collision (voir Barlow, Evans, Perkins [2] et Dawson et Fleischmann [12]). On note Q_t le noyau de transition du mouvement brownien tué sur D.

Théorème 2 *On définit pour tout $t > 0$ la mesure aléatoire Θ_t sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$(\Theta_t, \varphi) := \int \mathbf{1}_{0 \leq u < t} H^x[\varphi(\omega(t-u))] \Gamma_\mu(du, dx).$$

On a alors la représentation suivante sur D^c: pour toute mesure $\eta \in M_f$, $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s. pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbf{1}_{D^c}.X_t = \eta Q_t + \Theta_t.$$

Remarquons que, si D est de mesure de Lebesgue nulle, alors p.s. pour tout $t > 0$, la mesure X_t ne charge pas D, à cause de la dernière assertion du théorème 1. La formule ci-dessus donne alors une formule de représentation pour X_t et pas seulement pour $\mathbf{1}_{D^c}.X_t$. Ainsi le théorème précédent étend la formule de représentation du théorème C. Enfin on montre à partir de ces formules que

Corollaire 3 *Pour tout $\eta \in M_f$, $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s. pour tout $t > 0$, la mesure aléatoire X_t possède sur D^c une densité $z(t,x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette densité est de classe C^∞ sur $(0,\infty) \times D^c$. De plus on a $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s.*

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\Delta z(t,x) \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times D^c.$$

On a donc généralisé les résultats de Fleischmann et Le Gall [32] en dimension quelconque. On retrouve également comme cas particulier les résultats de Zhao (théorème 2.3 dans [62]) concernant le super-mouvement brownien associé au triplet $(\gamma, h(\gamma_t)dt, \lambda^2)$, où h est une fonction mesurable positive bornée (prendre $\sigma(dx) = h(x)dx$).

Enfin les outils introduits permettent de caractériser la mesure de covariance de la mesure martingale orthogonale associée à X. Cette mesure était déjà connue dans le cas particulier $dA_t = dt$ (cf [45]) et pour le super-mouvement brownien avec un point de catalyse (cf [14]).

I.4.2 Chapitre III: Quelques propriétés de l'image du super-mouvement brownien

Considérons le super-mouvement brownien usuel X associé à $(\gamma, \kappa dt, \lambda^2)$. Par des arguments de changement d'échelle, on se ramène au cas $\kappa = 2$. Pour tout $\eta \in M_f$, on note $\operatorname{supp} \eta$ le support topologique de la mesure η, et pour tout borélien $A \in \mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{Cl}(A)$ la fermeture de A. On note $\mathcal{R}_t(X) = \mathcal{Cl}\left(\cup_{s \geq t} \operatorname{supp} X_t\right)$ l'image (le "range") du superprocessus à partir de l'instant t. L'ensemble $\mathcal{R}_0(X)$ apparaît naturellement dans l'étude des limites pour les arbres sur réseaux en grande dimension (voir les travaux de Derbez et Slade [21, 22]). Pour tout borélien $A \in \mathbb{R}^d$, on note $|A|$ la mesure de Lebesgue de A et $A^\varepsilon = \{x; d(x,A) \leq \varepsilon\}$ où $d(x,A) = \inf\{|x-y|; y \in A\}$. Nous montrons la convergence suivante pour les ε-voisinages de $\mathcal{R}_t(X)$.

Théorème 4 *Soit $d \geq 5$. Il existe une constante $\mathrm{a}_0 > 0$ dépendant uniquement de d telle que pour tout $\eta \in M_f$ pour tout borélien $A \in \mathbb{R}^d$, pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s.*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{4-d} \left|\mathcal{R}_t(X)^\varepsilon \cap A\right| = \mathrm{a}_0 \int_t^\infty ds\ (X_s, \mathbf{1}_A). \tag{I.4}$$

De plus s'il existe $\rho < 4$ tel que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\rho-d} \left|(\operatorname{supp} \eta)^\varepsilon\right| = 0$, alors la convergence (I.4) a également lieu pour $t = 0$ $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s.

Ce résultat est à rapprocher du résultat suivant de Tribe sur le support de X_t.

Théorème D ([59]) *Soit A un borélien borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Soit $t > 0$ et $\eta \in M_f$. Alors il existe une constante $\alpha_0 > 0$, dépendant uniquement de d telle que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2-d} \left|(\text{supp } X_t)^\varepsilon \cap A\right| = \alpha_0 (X_t, \mathbf{1}_A),$$

où la convergence a lieu $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. et dans $L^2(\mathbb{P}^X_\eta)$.

Notre démonstration utilise toutefois une méthode entièrement différente. Elle repose sur l'utilisation du processus à valeurs trajectoires appelé serpent brownien, introduit par Le Gall [38, 40]. Plus précisément, on utilise les résultats de Le Gall [39] sur les probabilités d'atteinte d'ensembles pour les trajectoires du serpent brownien ainsi que la loi de la première trajectoire qui touche un ensemble compact donné.

Rappelons la définition d'ensembles équivalents en capacité introduite par Pemantle et Peres [47]. Soit $f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty]$ une fonction décroissante. On définit la capacité par rapport au noyau f d'un ensemble borélien $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ par

$$\text{cap}_f(\Lambda) = \left[\inf \iint f(|x-y|) \nu(dx) \nu(dy)\right]^{-1},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\nu(\Lambda) = 1$. On dit que deux ensembles Λ_1 et Λ_2 sont équivalents en capacité, s'il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2, telles que pour tout noyau f on a

$$c_1 \,\text{cap}_f(\Lambda_1) \leq \text{cap}_f(\Lambda_2) \leq c_2 \,\text{cap}_f(\Lambda_1).$$

On considère l'image du mouvement brownien γ sur $\mathbb{R}^d$: $\gamma[0,1] = \{\gamma(t); t \in [0,1]\}$. Pemantle, Peres et Shapiro [48] ont montré que

Théorème E ([48]) *Pour $d \geq 3$, l'image $\gamma[0,1]$ est p.s. équivalente en capacité à $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^d$. En d'autres termes, avec probabilité un, il existe deux constantes aléatoires $c_1, c_2 > 0$ telles que*

$$c_1 \,\text{cap}_f(\gamma[0,1]) \leq \text{cap}_f([0,1]^2) \leq c_2 \,\text{cap}_f(\gamma[0,1]),$$

pour tout noyau f.

En utilisant les théorèmes 4 et D, on peut obtenir le théorème analogue suivant.

Théorème 5 *(i) Supposons $d \geq 3$. Soient $t > 0$, $\eta \in M_f$. $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. sur $\{X_t \neq 0\}$, l'ensemble supp X_t est équivalent en capacité à $[0,1]^2$.*

(ii) Supposons $d \geq 5$. Soient $t > 0$, $\eta \in M_f$. $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. sur $\{X_t \neq 0\}$, l'ensemble $\mathcal{R}_t(X)$ est équivalent en capacité à $[0,1]^4$. De plus s'il existe $\rho < 4$ tel que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\rho - d} |(\text{supp } \eta)^\varepsilon| = 0$, alors $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. l'ensemble $\mathcal{R}_0(X)$ est équivalent en capacité à $[0,1]^4$.

N.B. Si on note cap_α la capacité associée à la fonction $f(r) = r^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, alors pour tout borélien $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, la dimension de Hausdorff de Λ est égale à $\sup\{\alpha; \text{cap}_\alpha(\Lambda) > 0\}$ (cf Kahane [37] p133). On retrouve les résultats bien connus suivants : $\dim \text{supp } X_t = 2$ si $d \geq 3$ et $\dim \text{supp } \mathcal{R}_t(X) = 4$ si $d \geq 5$ (voir Perkins [50] et Dawson, Iscoe et Perkins [18] pour des résultats plus précis).

I.4.3 Chapitre IV: Propriétés trajectorielles des superprocessus avec mécanisme de branchement général

De nombreuses propriétés trajectorielles sont connues pour le super-mouvement brownien usuel. En revanche quand le mécanisme de branchement est général, on dispose d'assez peu de résultats. Les comportements des superprocessus associés aux triplets $(\gamma, \kappa dt, \lambda^2)$ et $(\gamma, \kappa dt, \lambda^{1+\rho})$, où $\rho \in (0,1)$, sont différents. Par exemple le premier possède des moments à tous ordres, alors que pour le second le moment d'ordre 2 est divergent.

Récemment Bertoin, Le Gall et Le Jan [5] ont donné une représentation des superprocessus avec mécanisme de branchement général à l'aide du processus à valeurs trajectoires, le serpent brownien, et d'une méthode de subordination. Cette approche nous a permis d'établir des résultats nouveaux pour une classe assez large de superprocessus. Sauf pour le théorème 7, où l'on considère γ^α, $\alpha \in (0,2]$, un processus α-stable symétrique, le processus de Markov sous-jacent sera le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. La fonctionnelle additive sera donnée par $A_t = t$. Enfin on considère le mécanisme de branchement suivant (cf [5]):

$$\Psi(\lambda) = 2b\lambda^2 + \int_{(0,\infty)} \frac{2h\lambda^2}{1+2h\lambda} \Pi(dh),$$

où $b \geq 0$ et Π est une mesure de Radon sur $(0,\infty)$ qui intègre $(1 \wedge h)$. Remarquons que l'on englobe le cas stable $\Psi(\lambda) = \lambda^{1+\rho}$ où $\rho \in (0,1]$ (pour $\rho \in (0,1)$ prendre $b = 0$ et $\Pi(du) = cu^{-1-\rho} du$)). La fonction Ψ peut également s'écrire sous la forme usuelle (I.1) en prenant $\Pi'(du) = \left[\int_{(0,\infty)} \Pi(dh)\, \mathrm{e}^{-u/2h} (4h^2)^{-1}\right] du$.

On utilisera les deux constantes suivantes:

$$\underline{\rho} = -1 + \liminf_{\lambda\to\infty} \frac{\log \Psi(\lambda)}{\log \lambda}, \quad \text{and} \quad \overline{\rho} = -1 + \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\log \Psi(\lambda)}{\log \lambda}.$$

Comme $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge h)\Pi(dh) < \infty$, il est facile de vérifier que $0 \leq \underline{\rho} \leq \overline{\rho} \leq 1$. On considérera les deux conditions suivantes:

(H1): *On a* $0 < \underline{\rho}$.

(H2): *Il existe* $\rho \in (0,1]$ *tel que* $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\Psi(t\lambda)}{\Psi(\lambda)} = t^{1+\rho}$ *pour tout* $t > 0$.

La condition (H2) implique (H1). Remarquons que le cas stable $\Psi(\lambda) = \lambda^{1+\rho}$ vérifie (H2).

On rappelle la définition de la dimension de Hausdorff et de la dimension supérieure de boite. Soit un ensemble borélien borné $A \subset \mathbb{R}^p$. On note $C_\varepsilon(A)$ l'ensemble de tous les recouvrements $C = \{B_i; i \in I\}$ de A à l'aide de boules B_i de rayon $|B_i| \leq \varepsilon$. Pour $r \geq 0$ on considère :

$$H^r_\varepsilon(A) = \inf_{C \in C_\varepsilon(A)} \sum_{i\in I} |B_i|^r .$$

La quantité $H^r_\varepsilon(A)$ est croissante quand ε décroît vers 0. On note $H^r(A)$ la limite. Il est facile de voir que si $H^r(A) < \infty$, alors $H^{r'}(A) = 0$ pour tout $r' > r$; et si $H^r(A) > 0$, alors $H^{r'}(A) = \infty$ pour tout $r' < r$. La valeur critique

$$\dim A = \inf \{r > 0, H^r(A) = 0\},$$

est la dimension de Hausdorff de A. Considérons maintenant le nombre minimal $N_\varepsilon(A)$ de boules de rayon ε nécessaires pour recouvrir A. La dimension supérieure de boite de A est définie par

$$\overline{\dim} A = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{\log 1/\varepsilon}.$$

Il est facile de voir que $\overline{\dim} A \geq \dim A$.

On considère le superprocessus X associé à (γ, dt, Ψ). On note $\sigma_X = \inf\{s > 0; X_s = 0\}$ la durée de vie du processus X. On démontre le théorème suivant:

Théorème 6 *On suppose (H1). Alors pour tout $\eta \in M_f$, pour tout borélien compact non vide $B \subset (0,\infty)$, on a $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. sur $\{B \subset (0, \sigma_X)\}$,*

$$\left(\frac{2}{\overline{\rho}} + 2 \dim B\right) \wedge d \leq \dim \mathcal{C}l \left(\bigcup_{t \in B} \operatorname{supp} X_t\right) \leq \left(\frac{2}{\underline{\rho}} + 2 \overline{\dim} B\right) \wedge d.$$

De plus, si la condition (H2) est satisfaite, alors $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. sur $\{B \subset (0, \sigma_X)\}$,

$$\dim \mathcal{C}l \left(\bigcup_{t \in B} \operatorname{supp} X_t\right) = \left(\frac{2}{\rho} + 2 \dim B\right) \wedge d.$$

Pour le super-mouvement brownien usuel, un résultat plus précis est obtenu par Tribe [57] (théorème 2.13). Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Perkins [49, 50] et de Dawson, Iscoe et Perkins [18] qui traitent le cas particulier où $\Psi(\lambda) = \lambda^2$. Nos résultats précisent aussi le théorème 9.3.3.5 de Dawson [11] où $\Psi(\lambda) = \lambda^{1+\rho}$ (voir également Dawson et Vinogradov [20]).

On note X^α le superprocessus associé au triplet $(\gamma^\alpha, dt, \Psi)$, où γ^α est un processus α-stable symétrique sur $\mathbb{R}^d$, d'indice $\alpha \in (0,2]$ (pour $\alpha = 2$, $\gamma^2 = \gamma$ est le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$). Nous donnons une condition suffisante pour que la mesure aléatoire $\int \mu(dt) X^\alpha_t$, où μ est une mesure finie sur $(0,\infty)$, soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Théorème 7 *On suppose (H1). Soit μ une mesure finie à support dans $(0,\infty)$ et $q \in [0,1)$ tel que*

$$\iint \mu(dt)\mu(ds) \, |t-s|^{-q} < \infty.$$

Si $\dfrac{\alpha}{\overline{\rho}} + \alpha q > d$, alors pour tout $\eta \in M_f$, $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. la mesure $\int \mu(dt) X^\alpha_t$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

On retrouve ainsi le cas particulier suivant. Dans le cas où X^α est associé à $(\gamma^\alpha, dt, \lambda^{1+\rho})$, Fleischmann [31] montre que la mesure aléatoire $\int_0^\infty ds \; X^\alpha_s$ est absolument continue dès que $\dfrac{\alpha}{\rho} + \alpha > d$. Toujours pour ce cas particulier, Dawson [11] (théorème 8.3.1) montre que à $t > 0$ fixé la mesure aléatoire X^α_t est absolument continue si et seulement si $\alpha/\rho > d$.

On ne considère plus maintenant que le super-mouvement brownien X associé à (γ, dt, Ψ), où γ est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. On note $B_\varepsilon(0)$ la boule de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$, et p la densité de transition du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$:

$$p(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp -\frac{|x|^2}{2t}, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d.$$

On dit qu'une fonction positive mesurable, l, varie lentement en $0+$, si pour tout $t > 0$, on a $\lim_{\lambda\to 0+} l(t\lambda)/l(\lambda) = 1$. On note δ_x la masse de Dirac au point x. On montre le résultat suivant sur les probabilités d'atteinte des petites boules.

Théorème 8 *On suppose (H2) et $\rho d > 2$. Il existe une fonction positive mesurable, l_1, qui varie lentement en $0+$, telle que pour tous $t > 0$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\mathbb{P}^X_{\delta_x}\left[(X_t, \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)}) > 0\right] \leq t^{-d/2}\varepsilon^{d-2/\rho} l_1(\sqrt{t}\wedge\varepsilon).$$

Si de plus $\limsup_{\lambda\to 0+} \lambda^{-1-\rho}\Psi(\lambda) < \infty$, *alors pour tout $M > 0$, il existe une fonction positive mesurable, l_2, qui varie lentement en $0+$, telle que pour tous $M\sqrt{t} > \varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\mathbb{P}^X_{\delta_x}\left[(X_t, \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)}) > 0\right] \geq \frac{1}{2} \wedge \left[\varepsilon^{d-2/\rho} p\left(\frac{\rho t}{1+\rho}, x\right) l_2(\varepsilon)\right].$$

Dans le cas stable $\Psi(\lambda) = \lambda^{1+\rho}$, on peut remplacer les fonctions l_1 et l_2 par des constantes strictement positives. Ainsi lorsque $\Psi(\lambda) = \lambda^2$, le théorème précédent correspond au théorème 3.1 de Dawson, Iscoe et Perkins [18]. Dans le cas général, l'absence de propriété de changement d'échelle accroît sensiblement la difficulté des démonstrations. Enfin en utilisant des arguments de Perkins (voir [52]), le résultat précédent nous permet de démontrer que :

Théorème 9 *Supposons (H2) et $d > 4/\rho$. Alors pour tous $\eta \in M_f$, $t > 0$, $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. le support de X_t est totalement discontinu.*

Ce résultat était connu dans le cas particulier où $\Psi(\lambda) = \lambda^2$ (cf Perkins [52], voir aussi Tribe [58] pour un résultat très voisin, et Abraham [1] pour une approche du résultat de Tribe utilisant le serpent brownien).

Chapitre II

Super-mouvement brownien avec catalyse

(à paraître dans Stoch. and Stoch. Reports)

Abstract

We study a general class of catalytic super-Brownian motions. Informally, such a process X describes the evolution of a large number of small particles which move according to independent Brownian motions in $\mathbb{R}^d$ and branch only when they visit a given set D (the catalyst), which may be of zero Lebesgue measure. We first construct the processus X as a weak limit of branching particle systems. We then obtain detailed information about the continuity properties of X. Using excursion theory for Brownian motion in $\mathbb{R}^d$, we prove a representation theorem for X outside the catalyst D. In the special case when D has zero Lebesgue measure, this representation theorem shows that a.s. for every $t > 0$, the measure X_t is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, and its density solves the heat equation outside D.

Mathematics Subject Classification: 60G57
KEY WORDS: super-Brownian motion, catalyst.

II.1 Introduction

L'objet du présent travail est de développer une étude générale des super-mouvements browniens avec catalyse dans $\mathbb{R}^d$. Les superprocessus, ou processus de branchement à valeurs mesures, rendent compte de l'évolution d'un grand nombre de particules soumises à un double phénomène de déplacement spatial et de branchement. Dans la situation classique la plus étudiée, le phénomène de branchement se produit de manière homogène dans l'espace. Récemment sont apparus des modèles où le phénomène de branchement ne se produit que sur une partie de l'espace, appelée ensemble de catalyse, qui peut être de mesure nulle. Dawson et Fleischmann [13], [14], [15] (voir aussi Fleischmann et Le Gall [32]) ont étudié notamment des situations où le déplacement spatial est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, et l'ensemble de catalyse est un point en dimension un, ou bien une famille dense d'hyperplans parallèles en dimension plus grande. Les processus ainsi obtenus, appelés super-mouvements browniens avec catalyse, sont aussi des cas particuliers des superprocessus trés généraux étudiés par Dynkin [24]. Une particularité remarquable de ces modèles avec catalyse est que, au moins dans les exemples traités par Dawson et Fleischmann, la valeur à un instant fixé du superprocessus avec catalyse est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce qui n'est évidemment pas le cas pour le super-mouvement brownien usuel en dimension ≥ 2.

Nous établissons ici un certain nombre de résultats généraux sur les superprocessus avec catalyse, en nous limitant au cas où le déplacement spatial est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. La donnée importante est la mesure σ qui gouverne le phénomène de branchement. L'ensemble de catalyse D est ensuite défini comme le support topologique de σ. Les résultats principaux, obtenus sous des hypothèses convenables sur σ et D, sont les suivants. Nous construisons le super-mouvement brownien avec catalyse comme limite en loi de systèmes de particules browniennes avec branchement. Ce résultat est implicite dans Dynkin [24] (pour des déplacements spatiaux bien plus généraux) mais comme nos hypothèses sont différentes nous avons choisi d'en donner une preuve indépendante. Nous étudions ensuite les propriétés de continuité du super-mouvement brownien avec catalyse, puis nous établissons un théorème de représentation en dehors de l'ensemble de catalyse, qui montre en particulier que la valeur du superprocessus à un instant donné est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur D^c. Ce théorème de représentation généralise un résultat de Fleischmann et Le Gall concernant le cas particulier d'un point de catalyse en dimension un.

Décrivons maintenant plus en détail le contenu des différents paragraphes. Le paragraphe II.2 présente un lemme préliminaire et donne surtout l'hypothèse clef (H) sur la mesure σ qui gouverne le branchement. Cette hypothèse entraine entre autre l'existence d'une fonctionnelle additive continue A associée à la mesure σ.

Dans le paragraphe II.3, on considère un système de particules régi par les règles suivantes:

- Chaque particule a des instants de naissance et de mort aléatoires.
- Étant donné l'instant de naissance t et le lieu de naissance x, la trajectoire de chaque particule a pour loi la loi du mouvement brownien issu de x à l'instant t. Les trajectoires des différentes particules sont indépendantes.
- Étant donné la trajectoire d'une particule, sa probabilité de survivre sur l'intervalle de temps (s,t) est donnée par $\mathrm{e}^{-(A_t-A_s)}$.
- Une particule qui meurt donne naissance indépendamment de ce qui précède à 0 ou 2 enfants avec probabilité $1/2$ (phénomène de branchement critique).

Si on note $Y_t(C)$ le nombre de particules qui sont à l'instant t dans le sous-ensemble borélien C de $\mathbb{R}^d$, alors $(Y_t, t \geq 0)$ définit un processus de Markov homogène à valeurs dans l'ensemble des mesures ponctuelles finies sur $\mathbb{R}^d$. Si on affecte un poids $1/n$ aux particules et si on remplace la fonctionnelle additive A par nA, les processus correspondants Y^n convergent en loi vers un processus de Markov homogène à valeurs dans l'espace des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$ (théorème II.3.2). Ce processus limite noté X est le super-mouvement brownien avec mesure de catalyse σ. La loi de X est caractérisée par sa fonctionnelle de Laplace, solution d'une équation intégrale (cf (II.10)).

En évaluant les moments de X et en utilisant le lemme de Kolmogorov, on montre, dans le paragraphe II.4, que le processus X possède une version continue pour la topologie de la convergence étroite (théorème II.4.7). On montre aussi grâce à un résultat de Perkins [51], que pour toute fonction mesurable bornée φ, p.s. le processus $(\int \varphi(x) X_t(dx), t > 0)$ est continu (théorème II.4.9). Les calculs des moments qui permettent d'aboutir à ces résultats constituent un outil important pour les parties suivantes.

Dans le paragraphe II.5, on construit pour toute mesure ρ vérifiant la condition d'intégrabilité (H) une mesure aléatoire Γ_ρ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Ces mesures aléatoires jouent un rôle capital dans la suite de ce travail et en particulier dans le théorème de représentation en dehors du support de σ. En termes intuitifs, la mesure Γ_ρ rend compte des instants de visite et de la quantité de particules qui rencontrent le support de ρ. On peut aussi rapprocher les mesures Γ_ρ des temps locaux de collision qui ont été étudiés par plusieurs auteurs (Barlow, Evans, Perkins [2] et tout récemment Dawson et Fleischmann [12]). Formellement l'approximation conduisant à Γ_ρ est la même que pour le temps local de collision, à ceci près que la mesure détérministe ρ remplace le deuxième superprocessus indépendant.

En vue du théorème de représentation, on rappelle dans le paragraphe II.6 des résultats généraux de Maisonneuve [44] concernant l'existence pour le mouvement brownien d'un temps local L sur l'ensemble D et d'une famille universellement mesurable de mesures d'excursion en dehors de D. On note H^x la mesure d'excursion hors de D partant de x.

On énonce dans le paragraphe II.7 le théorème de représentation sous la condition (hypothèse (H')) que la mesure de Revuz μ associée au temps local L vérifie la condition d'intégrabilité (H). Cette condition est automatiquement vérifiée si $d = 1$, en dimension supérieure, elle est vérifiée dès que D satisfait une hypothèse de régularité assez faible (cf Appendice). On peut alors considérer la mesure aléatoire Γ_ρ avec $\rho := \mu$ construite dans le paragraphe II.5. On définit pour $t > 0$ une mesure aléatoire Θ_t sur $\mathbb{R}^d$ par:

$$(\Theta_t, \varphi) := \int \mathbf{1}_{0 \le u < t} H^x[\varphi(\omega(t-u))] \Gamma_\mu(du, dx).$$

Si Q_t désigne le noyau de transition du mouvement brownien tué sur D, alors on a la représentation suivante sur le complémentaire de D (théorème II.7.1): $\mathbb{P}^X_\eta$-p.s. pour tout $t > 0$,

$$\mathbf{1}_{D^c}.X_t = \Theta_t + \eta Q_t.$$

Remarquons que, si D est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, alors p.s. pour tout $t > 0$ la mesure X_t ne charge pas D. Le théorème précédent donne donc une formule de représentation pour X_t et pas seulement pour $\mathbf{1}_{D^c}.X_t$.

Dans le paragraphe II.8, à l'aide des formules de représentation, on montre que le processus $(X_t(dx), t > 0)$ possède sur D^c une densité $z(t,x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette densité est de classe C^∞ sur $(0,\infty) \times D^c$ et est solution de l'équation de la chaleur (théorème II.8.1).

Enfin, dans le paragraphe II.9, on donne une autre application des mesures Γ_ρ. Précisément, on identifie la mesure de covariance de la mesure martingale orthogonale associée à X à la mesure Γ_ρ pour $\rho := \sigma$.

Après avoir rédigé la première version de cet article, nous avons eu connaissance des résultats obtenus indépendamment par Dawson et Fleischmann [12], qui dans le but de construire un super-mouvement brownien dans un milieu "super-brownien", étudient des superprocessus avec catalyse généraux. Sous des hypothèses différentes des nôtres, Dawson et Fleischmann obtiennent aussi des résultats d'absolue continuité, mais sans théorème de représentation et sans information sur la régularité des densités.

II.2 Notations et résultats préliminaires

II.2.1 Hypothèse d'intégrabilité (H)

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une mesure positive σ-finie ρ vérifie l'hypothèse d'intégrabilité (H), s'il existe un réel $\beta \in (0,1)$ tel que $d-2+2\beta \geq 0$ et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{B(x,1)} \frac{\rho(dy)}{|x-y|^{d-2+2\beta}} < \infty,$$

où $B(x,1)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon 1.

Pour $d = 1$ toutes les mesures finies vérifient cette condition d'intégrabilité (prendre $\beta = \frac{1}{2}$). Pour d quelconque, il est clair que la mesure de Lebesgue convient également.

Remarquons de plus que sous l'hypothèse (H), la mesure ρ ne charge pas les ensembles polaires du mouvement brownien. En effet pour que la mesure ρ ne charge pas les ensembles polaires, il est suffisant que $|x-y|^{-d+2}$ (respectivement $\log(|x-y|^{-1})$) soit localement intégrable par rapport à $\rho(dy)$ si $d \geq 3$ (resp. si $d = 2$) (cf [53]). On vérifie facilement ces conditions pour toute mesure ρ satisfaisant (H).

A cause des relations classiques entre capacité et mesure de Hausdorff (cf [29]), on remarque que la condition (H) implique que la dimension de Hausdorff du support de ρ est supérieure ou égale à $d-2+2\beta$.

II.2.2 Notations et quelques rappels

Pour alléger les démonstrations, on notera c une constante qui peut changer d'une ligne de calcul à l'autre. On note $(M_f, \mathcal{M}_f)$ l'espace des mesures positives finies sur $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie de la convergence étroite. De manière générale, pour tout espace mesurable $(\Omega, \mathcal{G})$, on note $\mathcal{G}^*$ la complétion universelle de $\mathcal{G}$, et pour tout espace polonais S, on note respectivement $\mathcal{B}(S)$, $\mathcal{B}_{b^+}(S)$, $C(S)$, $C_{b^+}(S)$, l'ensemble des fonctions de S à valeurs dans $\mathbb{R}$ respectivement mesurables, mesurables positives bornées, continues, continues positives bornées. Par abus de notation, on écrit aussi $\mathcal{B}(S)$ pour la tribu borélienne sur S. On note $(M_f(S), \mathcal{M}_f(S))$ l'espace des mesures positives finies sur S muni de la topologie de la convergence étroite. L'espace $(M_f(S), \mathcal{M}_f(S))$ est polonais. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(S)$, on note $\| f \| := \sup_{x\in S} |f(x)|$ et pour toute mesure $\mu \in M_f(S)$, on écrit indifféremment $\int f(y)\mu(dy) = (\mu, f)$.

On note P_s le noyau de transition du mouvement brownien en dimension d et p sa densité de transition:

$$p(s,x) := \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}} \exp -\frac{|x|^2}{2s} \qquad (x,s) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty).$$

On utilisera les résultats élémentaires suivants:

Lemme II.2.1 *Soit ρ une mesure sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant (H). On a les majorations suivantes: soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $(x,s,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \times (0,\infty)$,*

$$|p(s,x) - p(t,x)| \leq c \int_{[s,t]} \frac{1}{u} p(u(1+\varepsilon), x) du; \tag{II.1}$$

pour tout $(x,s) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$,

$$\int p(s,x-y)\rho(dy) \leq c \frac{1}{(s\wedge 1)^{1-\beta}}; \tag{II.2}$$

pour tout $(x, x', s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$,

$$\int \rho(dy) \left|p(s, x-y) - p(s, x'-y)\right| \leq c\, (s \wedge 1)^{\beta-3/2} \left|x - x'\right|; \tag{II.3}$$

et pour tout $(x, x', s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$, *pour toute fonction* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *bornée,*

$$\left|P_s f(x) - P_s f(x')\right| \leq c \frac{1}{\sqrt{s}} \|\, f\,\| \left|x - x'\right|. \tag{II.4}$$

Preuve. Considérons la majoration (II.1). Il existe une constante c dépendant de ε telle que pour tout $r \geq 0$, on a $(r+d)\,\mathrm{e}^{-r/2} \leq c\, \exp -\frac{r}{2(1+\varepsilon)}$, et donc

$$\begin{aligned} |p(s,x) - p(t,x)| &= \left| \int_{[s,t]} p(u,x) \left(\frac{|x|^2}{2u^2} - \frac{d}{2u} \right) du \right| \\ &\leq c \int_{[s,t]} \frac{1}{u}\, p(u(1+\varepsilon), x) du. \end{aligned}$$

Pour la majoration (II.2), remarquons que si $v > 0$, la fonction $s \mapsto s^{-v/2}\,\mathrm{e}^{-c/s}$ définie sur $(0,\infty)$ atteint son maximum pour $s = 2c/v$. Il en découle que pour tout $(x, s, v) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \times (0,\infty)$

$$\frac{1}{(2\pi s)^{v/2}}\, \mathrm{e}^{-\,|x|^2/2s} \leq \left(\frac{v}{2\pi}\right)^{v/2} |x|^{-v}\, \mathrm{e}^{-v/2}.$$

Comme

$$\int_{B(x,1)} p(s, x-y) \rho(dy) = c \int_{B(x,1)} \frac{1}{s^{1-\beta}} \frac{1}{s^{(d-2+2\beta)/2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2s}}\, \rho(dy),$$

en prenant $v = d - 2 + 2\beta$ dans la majoration précédente et en utilisant l'hypothèse (H), on obtient:

$$\int_{B(x,1)} p(s, x-y) \rho(dy) \leq c \frac{1}{s^{1-\beta}}, \tag{II.5}$$

où c est indépendant de x et s. Ensuite, on peut recouvrir $B(x,1)^c$ par une famille dénombrable $\big(\bar{B}(z_i, 1/4), i \in I\big)$ de boules fermées de rayon $1/4$, dont les centres z_i appartiennent à $x + \frac{1}{2\sqrt{d}}\,\mathbb{Z}^d$. On peut supposer que pour tout $i \in I$, $|x - z_i| \geq 1/2$, de sorte que si $y \in \bar{B}(z_i, 1/4)$, alors $|x-y| \geq \frac{1}{2}|x - z_i|$. En remarquant que grâce à (H), $\big(\rho(\bar{B}(z_i, 1/4)), i \in I\big)$ est uniformément borné, il vient:

$$\begin{aligned} \int_{B(x,1)^c} p(s, x-y)\rho(dy) &\leq \frac{c}{s^{d/2}} \sum_{i \in I} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{|x - z_i|^2}{2s} \right) \\ &\leq \frac{c}{s^{d/2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{16d}\frac{1}{4s}} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \exp\left(-\frac{1}{16d} \frac{|z|^2}{4s} \right) \\ &\leq \frac{c}{s^{d/2}}\, \mathrm{e}^{-1/(64ds)} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{1}{16d} \frac{n^2}{4s} \right) \right]^d. \end{aligned}$$

Comme l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut majorer les sommes de Riemann par l'intégrale de Lebesgue. On obtient alors pour tout $h > 0$:

$$h \sum_{n>0} \mathrm{e}^{-(hn)^2} \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, dx.$$

En appliquant cette majoration au résultat précédent avec $h := (64ds)^{-1/2}$, il vient pour tout $s \in (0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \int_{B(x,1)^c} p(s, x-y)\rho(dy) &\leq c\, \frac{1}{s^{d/2}} \left[1 + 8\sqrt{ds}\right]^d \exp -1/(64ds) \\ &\leq c. \end{aligned}$$

On déduit alors de cette inégalité et de (II.5) la majoration (II.2).

Pour montrer (II.3), on utilise la majoration $r\, \mathrm{e}^{-r^2} \leq c\ \mathrm{e}^{-r^2/2}$ $(r \geq 0)$ qui implique

$$\begin{aligned} &\int \rho(dy) \left|p(s, x-y) - p(s, x'-y)\right| \\ &\qquad \leq \int \rho(dy)\, \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}} \int_0^1 \frac{1}{s} \left|(u(x-x') + x' - y|x - x')\right| \mathrm{e}^{-\frac{|u(x-x')+x'-y|^2}{2s}}\, du \\ &\qquad \leq c\, \frac{1}{\sqrt{s}} \left|x - x'\right| \int_0^1 du \int \rho(dy)\, \frac{1}{s^{d/2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|u(x-x')+x'-y|^2}{4s}}, \end{aligned}$$

où on a noté $(x|y)$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$. En utilisant (II.2), on obtient la majoration souhaitée.

Enfin, la majoration (II.4) découle facilement de l'inégalité ci-dessus, en remplaçant simplement $\rho(dy)$ par $|f(y)|\, dy$. □

On note δ un point cimetière ajouté à $\mathbb{R}^d$ comme point à l'infini. On considère $\Omega := \mathbb{D}\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d \bigcup \{\delta\}\right)$ l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \bigcup \{\delta\}$ continues à droite et limitées à gauche. On note $B := (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, B_t, \theta_t, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ la réalisation canonique du mouvement brownien sur Ω (cf [9]). Pour toute la suite, on fixe σ une mesure positive satisfaisant l'hypothèse (H) avec un réel $\alpha \in (0, 1)$. On note D le support topologique de cette mesure. On a vu que la mesure σ ne charge pas les ensembles polaires pour le processus B. En utilisant (II.2), on remarque que pour tous $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, l'intégrale $\int \sigma(dy) \int_0^\infty p(s, x - y)\, \mathrm{e}^{-rs}\ ds$ est finie. D'après le chapitre VI de [9], il existe une unique fonctionnelle additive continue du processus B, notée A, telle que pour tout $f \in \mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $(x, r) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$,

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty f(B_s)\, \mathrm{e}^{-rs}\ dA_s = \int_0^\infty ds \int \sigma(dy) p(s, x-y)\, \mathrm{e}^{-rs} f(y).$$

On en déduit par un argument de classe monotone que pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty f(s, B_s) dA_s = \int_0^\infty ds \int \sigma(dy) p(s, x-y) f(s, y). \tag{II.6}$$

On utilisera également la famille de constantes $(a_T)_{T \in (0,\infty]}$ définies par:

$$a_T := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x A_T = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_0^T ds \int \sigma(dy) p(s, x-y).$$

La majoration (II.2) montre que pour tout temps $T < \infty$, $a_T \leq c\,(T^\alpha \vee T) < \infty$.

L'objectif du présent travail est l'étude du superprocessus X associé au triplet $(B, A, \frac{\lambda^2}{2})$, dans la terminologie de [24]. Remarquons cependant que l'article [24] impose la finitude des moments exponentiels de tous ordres de la fonctionnelle additive A, ce qui n'est pas forcément vérifié ici.

II.3 Construction du super-mouvement brownien avec catalyse comme limite de systèmes de particules avec branchement

II.3.1 Construction du système de particules avec branchement.

Nous développons dans ce paragraphe une construction précise du système de particules avec branchement déjà présenté dans l'introduction. On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des triplets $\mathrm{w} = (\varphi, \alpha, \beta)$ où $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, \infty]$, $\alpha \leq \beta$ et φ est une application continue de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{R}^d$ (de $[\alpha, \infty)$ si $\beta = \infty$). Soit g une application continue strictement croissante de $[0, \infty]$ dans $[0, 1]$. La distance sur $\mathcal{W}$ est définie par:

$$\begin{aligned} d(\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2) := & |\alpha_1 - \alpha_2| + |g(\beta_1) - g(\beta_2)| \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k} \wedge \sup_{t \in [0,k]} |\varphi_1((\alpha_1 \vee t) \wedge \beta_1) - \varphi_2((\alpha_2 \vee t) \wedge \beta_2)| \right). \end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{W}, d)$ est un espace polonais. On définit pour tout $(r, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ une probabilité $\Pi_{r,x}$ sur $\mathcal{W}$ comme étant la loi d'un mouvement brownien B issu de x à l'instant $\alpha = r$ et arrêté à un instant aléatoire β tel que pour tout $t \geq r$,

$$\Pi_{r,x}(\beta > t \mid B_s, r \leq s \leq t) = \mathrm{e}^{-A_{t-r}}$$

(en particulier $\Pi_{r,x}(\beta = \infty \mid B_s, r \leq s) = \mathrm{e}^{-A_\infty}$).

On introduit le modèle d'arbre suivant [46]. Soit l'ensemble $U := \{\partial\} \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{1, 2\}^n)$. L'élément ∂ est interprété comme l'ancêtre de la population. Pour $u \in U$, on note $|u| = 0$ si $u = \partial$, $|u| = n$ si $u \in \{1, 2\}^n$. Si $u \neq \partial$, $u = (i_1, \dots, i_n)$ on note $\bar{u} := (i_1, \dots, i_{n-1})$ le père de u.

Fixons $x \in \mathbb{R}^d$. A chaque $u \in U$, on associe un élément aléatoire $\mathrm{w}_u = (\varphi_u, \alpha_u, \beta_u)$ de $\mathcal{W} \bigcup \{\Delta\}$, où Δ est un point cimetière ajouté à $\mathcal{W}$ comme point isolé. On construit la famille $(\mathrm{w}_u, u \in U)$ par récurrence sur $|u|$.

Si $u = \partial$, w_∂ a pour loi $\Pi_{0,x}$. Ensuite supposons construit w_u pour $|u| \leq n$. Alors les trajectoires w_v, $|v| = n + 1$ sont indépendantes conditionnellement à $(\mathrm{w}_u, |u| \leq n)$. De plus soit v avec $|v| = n + 1$, alors

- si $\mathrm{w}_{\bar{v}} = \Delta$ ou si $\beta_{\bar{v}} = \infty$ on a $\mathrm{w}_v = \Delta$;
- si $\mathrm{w}_{\bar{v}} \neq \Delta$ et $\beta_{\bar{v}} < \infty$ la loi conditionnelle de w_v sachant $(\mathrm{w}_u, |u| \leq n)$ est $\Pi_{\beta_{\bar{v}}, \varphi_{\bar{v}}(\beta_{\bar{v}})}$.

Il reste à introduire le phénomène de branchement. Pour cela on considère un arbre aléatoire A de loi de reproduction $\gamma(0) = \gamma(2) = \frac{1}{2}$ suivant [46]. Cela signifie précisément qu'on se donne une famille η_u, $u \in U$ de variables aléatoires indépendantes et indépendantes de $(\mathrm{w}_u, u \in U)$ de loi γ et on pose

$$A = \{\partial\} \bigcup \left\{ (u_1, \ldots, u_n) \in U; \eta_{(u_1, \ldots u_j)} = 2, \forall j \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}$$

(pour $j = 0$, $\eta_{(u_1, \ldots u_j)} = \eta_\partial$).

Pour tout $t \geq 0$, on définit une mesure ponctuelle Y_t sur $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$(Y_t, \mathbf{1}_C) := \operatorname{card}\{u \in A;\ \alpha_u \leq t < \beta_u, \varphi_u(t) \in C\}.$$

Remarquons que $Y_0 = \delta_x$. Par des méthodes classiques, on vérifie que le processus $(Y_t, t \geq 0)$ est un processus de Markov homogène à valeurs dans l'espace des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}^d$. On note Q_{δ_x} la loi de $(Y_t, t \geq 0)$. Si $\mu := \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ est une mesure finie, on note Q_μ la loi du processus $\sum_{i=1}^n Y^i$ où les processus Y^i sont indépendants et de lois respectives $Q_{\delta_{x_i}}$.

Le caractère critique du branchement assure que le nombre total de particules créées est fini p.s.. En revanche, il n'y a pas forcément extinction car certaines particules peuvent après un certain temps ne plus être soumises au phénomène de branchement (c'est le cas en particulier si $d \geq 3$ et σ à support compact). La famille de probabilités (Q_μ) satisfait par construction au principe de superposition suivant: soit une fonction $f \in \mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^d)$, soient des mesures ponctuelles finies $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n$ telles que $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$, alors on a

$$Q_\mu [\exp -(Y_t, f)] = \prod_{i=1}^n Q_{\mu_i} [\exp -(Y_t, f)].$$

Cela suggère d'étudier la fonction v définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ par:

$$v(t, x) := Q_{\delta_x} [\exp -(Y_t, f)], \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d.$$

Sous Q_{δ_x}, on a $Y_t = \delta_{\varphi_\partial(t)}$ sur $\{\beta_\partial > t\}$, c'est à dire si la particule ancêtre est encore en vie à l'instant t. En revanche sur $\{\beta_\partial \leq t\}$ on a $Y_t = 0$ si $\eta_\partial = 0$ et si $\eta_\partial = 2$, $Y_t = Y_t^1 + Y_t^2$ où les Y_t^i sont indépendants et de loi conditionnelle $Q_{\beta_\partial, \delta_{\varphi_\partial(\beta_\partial)}}$ connaissant w_∂. Cela conduit à la formule suivante:

$$v(t, x) = \mathbb{E}_x \left[\mathrm{e}^{-A_t} \, \mathrm{e}^{-f(B_t)} + \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{e}^{-A_s} [1 + v(t-s, B_s)^2] dA_s \right]. \tag{II.7}$$

En remplaçant $v(t-u, B_u)$ par son expression donnée par (II.7), on trouve:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x \int_0^t v(t-u, B_u) dA_u \\ &\qquad = \mathbb{E}_x \, \mathrm{e}^{-f(B_t)} \left[1 - \mathrm{e}^{-A_t}\right] + \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^t dA_u \int_u^t \mathrm{e}^{-A_s + A_u} \left[1 + v(t-s, B_s)^2\right] dA_s \\ &\qquad = \mathbb{E}_x \, \mathrm{e}^{-f(B_t)} \left[1 - \mathrm{e}^{-A_t}\right] + \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^t \left(1 - \mathrm{e}^{-A_s}\right) \left[1 + v(t-s, B_s)^2\right] dA_s. \end{aligned}$$

En ajoutant cette dernière équation à l'équation (II.7), il vient:

$$v(t, x) = P_t [\exp -f](x) + \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^t [1 - v(t-s, B_s)]^2 \, dA_s. \tag{II.8}$$

Cette équation est plus utile que l'équation (II.7) pour le passage à la limite que l'on considèrera dans la suite du paragraphe. Remarquons déjà que (II.8) permet de calculer les moments d'ordre un de Y_t.

Lemme II.3.1 *Soit $f \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, on a $Q_{\delta_x}(Y_t, f) = P_t f(x)$.*

Preuve. Soit un réel $\varepsilon \geq 0$, on note $v_\varepsilon(t,x) := Q_{\delta_x} \exp -\varepsilon(Y_t, f)$. On a $\| v_\varepsilon \| \leq 1$. On déduit de l'équation (II.8) que

$$0 \leq \frac{1 - v_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon} \leq P_t \left[\frac{1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon f}}{\varepsilon} \right](x) \leq \| f \| .$$

En utilisant de nouveau (II.8) et le fait que $\mathbb{E}_x A_t \leq a_t < \infty$, on obtient que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1 - v_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon} = P_t f(x)$. Or par convergence monotone on a:

$$Q_{\delta_x}(Y_t, f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} Q_{\delta_x} \left[1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon (Y_t, f)} \right].$$

On en déduit le résultat recherché. □

II.3.2 Le passage à la limite.

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures ponctuelles finies. Pour tout entier n, on considère un processus $(Y_t^n, t \geq 0)$ associé par la construction du paragraphe précédent à la fonctionnelle additive $A^n := nA$ et de valeur initiale λ_n. On a un théorème similaire au théorème 1.1 de [24].

Théorème II.3.2 *Supposons que $\frac{1}{n} \lambda_n$ converge étroitement vers $\mu \in M_f$. Alors la suite de processus $(\frac{1}{n} Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de la convergence étroite des lois marginales de dimension finie vers un processus $(X_t, t \geq 0)$. Ce processus est un processus de Markov homogène à valeurs dans M_f. Sa loi est caractérisée par:*

- $X_0 \overset{p.s.}{=} \mu$
- *pour tout $T > 0$, pour tout entier $p \geq 1$, pour tous $0 = t_0 < \cdots < t_p \leq T$, pour toute fonction $f \in C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ telle que $a_T \| f \| < 1$, on a*

$$\mathbb{E}\left[\exp -(X_{t_p}, f) \mid X_{t_0}, \ldots, X_{t_{p-1}}\right] = \exp -(X_{t_{p-1}}, w(t_p - t_{p-1})), \tag{II.9}$$

où w est l'unique solution positive mesurable de l'équation intégrale:

$$w(t,x) = P_t\, f(x) - \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^t w(t-s, B_s)^2 \, dA_s, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d. \tag{II.10}$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$ telle que $a_T \| f \| < 1$. Remarquons dans une première étape que l'équation intégrale (II.10) possède au plus une solution positive. En effet toute solution positive est bornée par $\| f \|$. Donc si w_1 et w_2 sont deux solutions positives distinctes de (II.10), en faisant la différence dans l'équation (II.10), et en utilisant la définition des constantes a_T, il vient:

$$\begin{aligned}\| w_1 - w_2 \| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d, t\in[0,T]} \frac{1}{2}\int_0^t ds \int \sigma(dy)p(s,x-y)\left|w_1(t-s,y)^2 - w_2(t-s,y)^2\right| \\ &\leq \| f \| \ \| w_1 - w_2 \| \, a_T.\end{aligned}$$

Comme $a_T \| f \| < 1$, on en déduit que $w_1 = w_2$.

On pose

$$w_n(t,x) := -n \log Q_{\delta_x}\left[\exp -\frac{1}{n}(Y_t^n, f)\right]. \qquad \text{(II.11)}$$

Lemme II.3.3 *La suite de fonctions w_n converge uniformément sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ vers une fonction w positive mesurable solution de (II.10) sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$. Pour $0 < t \leq T$, les fonctions $w(t,.)$ sont continues sur $\mathbb{R}^d$, et $w(0,x) = f(x)$.*

La démonstration du lemme II.3.3 est reportée à la fin de cette partie.

On établit dans une deuxième étape que la valeur initiale $X_0 \overset{p.s.}{=} \mu$ et la relation (II.9) déterminent uniquement la loi du processus de Markov X. En effet, soit X' un autre processus avec les mêmes propriétés, un raisonnement par récurrence simple montre que pour toutes fonctions $f_0, \dots, f_p \in C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda > 0$ tels que $a_T\lambda\sum_{i=0}^p \| f_i \| < 1$ et pour $0 = t_0 < \cdots < t_p \leq T$, on a:

$$\mathbb{E}\exp -\lambda\sum_{i=0}^p (X_{t_i}, f_i) = \mathbb{E}\exp -\lambda\sum_{i=0}^p (X'_{t_i}, f_i)$$

(remarquer que la solution de (II.10) associée à f vérifie pour tout $t \geq 0$ $\| w(t) \| \leq \| f \|$ et $w(t) \in C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ d'après le lemme II.3.3). Un raisonnement de prolongement analytique montre que l'égalité précédente est vraie pour tout $\lambda \geq 0$. On conclut que les processus X et X' ont les mêmes lois marginales de dimension finie.

Montrons dans une troisième étape que la suite $\frac{1}{n}(Y_{t_0}^n, \dots, Y_{t_p}^n)$ converge en loi dans M_f vers la variable aléatoire $(X_{t_0}, \dots X_{t_p})$ vérifiant $X_0 = \mu$ p.s. et la relation (II.9). Pour cela on utilise un argument classique de compactification.

On note $\hat{\mathbb{R}}^d$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^d$. Les ensembles

$$\{\rho \in M_f(\hat{\mathbb{R}}^d); \quad (\rho, \mathbf{1}) \leq K\}$$

sont compacts dans l'espace polonais $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$. Le lemme II.3.1 montre que
$Q_{\lambda_n}(\frac{1}{n}Y_t^n, \mathbf{1}) = (\frac{\lambda_n}{n}, \mathbf{1})$. On a alors pour tout n assez grand et pour tout réel positif K ,

$$Q_{\lambda_n}[\frac{1}{n}(Y_t^n, \mathbf{1}) > K] \leq \frac{1}{K}Q_{\lambda_n}[\frac{1}{n}(Y_t^n, \mathbf{1})] \leq \frac{(\mu, \mathbf{1}) + 1}{K}.$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$, la suite des lois $\frac{1}{n}Y_t^n$ est tendue dans $M_f(M_f(\hat{\mathbb{R}}^d))$. De même, pour $0 = t_0 < \ldots < t_p \leq T$, la famille des lois de $\frac{1}{n}(Y_{t_0}^n, \dots, Y_{t_p}^n)$ est tendue dans $M_f([M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)]^{p+1})$. On en déduit l'existence d'une sous-suite $\frac{1}{n_k}(Y_{t_0}^{n_k}, \dots, Y_{t_p}^{n_k})$ qui converge en loi vers une variable aléatoire à valeurs dans $[M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)]^{p+1}$, que l'on note $(X_{t_0}, \dots, X_{t_p})$.

Il est clair que cette v.a. est à valeurs dans $[M_f(\mathbb{R}^d)]^{p+1}$, c'est à dire $(X_{t_i}, \mathbf{1}_{\{\infty\}}) = 0$ pour tout i. En effet, fixons $\theta > 0$ tel que $\theta a_T < 1$ et soit, pour tout entier m, $\phi_m \in C_{b+}(\hat{\mathbb{R}}^d)$ telle que $\| \phi_m \| \leq \theta$, $\phi_m(x) = \theta$ si $|x| \geq m+1$ et $\phi_m(x) = 0$ si $|x| \leq m$. Le lemme II.3.3 entraîne par passage à la limite que

$$\mathbb{E}\exp -(X_{t_i}, \phi_m) = \exp -(\mu, w^m(t_i)),$$

où w^m est la solution de (II.10) pour $f = \phi_m$ (remarquer que l'on utilise la continuité des fonctions $w^m(t)$). Comme $w^m(t) \leq P_t \phi_m$, en faisant tendre m vers ∞, on trouve que

$$\mathbb{E}\exp -(X_{t_i}, \theta \mathbf{1}_{\{\infty\}}) \geq \lim_{m \to \infty} \exp -(\mu, P_{t_i}\phi_m) = 1,$$

d'où le résultat annoncé.

En utilisant le théorème de représentation de Skorokhod, on sait qu'il existe sur un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbb{P}})$ une suite $(\tilde{Y}^{n_k}_{t_0}, \ldots, \tilde{Y}^{n_k}_{t_p})$ de variables aléatoires ayant même loi que $(Y^{n_k}_{t_0}, \ldots, Y^{n_k}_{t_p})$, ainsi qu'une variable aléatoire $(\tilde{X}_{t_0}, \ldots, \tilde{X}_{t_p})$ de même loi que $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_p})$, et tels que la suite $\frac{1}{n_k}(\tilde{Y}^{n_k}_{t_0}, \ldots, \tilde{Y}^{n_k}_{t_p})$ converge p.s. au sens de la convergence étroite sur $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$ vers la variable aléatoire $(\tilde{X}_{t_0}, \ldots, \tilde{X}_{t_p})$. On en déduit que la convergence a également lieu au sens de la convergence vague sur $M_f(\mathbb{R}^d)$. Comme on a

$$\frac{1}{n_k}(\tilde{Y}^{n_k}_{t_i}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}) \overset{p.s.}{=} \frac{1}{n_k}(\tilde{Y}^{n_k}_{t_i}, \mathbf{1}_{\hat{\mathbb{R}}^d}) \overset{p.s.}{\to} (\tilde{X}_{t_i}, \mathbf{1}_{\hat{\mathbb{R}}^d}) \overset{p.s.}{=} (\tilde{X}_{t_i}, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}),$$

on en déduit que la convergence a lieu au sens de la convergence étroite sur $M_f(\mathbb{R}^d)$.

Il faut encore vérifier que l'on a $X_0 = \mu$ p.s. et la relation (II.9). L'égalité $X_0 = \mu$ est triviale. Soit ensuite un entier $p \geq 1$, pour toutes fonctions $f_0, \ldots, f_p$ continues positives telles que $a_T \| f_p \| < 1$, la propriété de Markov appliquée à Y^n donne:

$$\mathbb{E}\exp - \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{n}(Y^n_{t_i}, f_i) = \mathbb{E}\exp - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n}(Y^n_{t_i}, f_i) - \frac{1}{n}(Y^n_{t_{p-1}}, w^{(p)}_n(t_p - t_{p-1})),$$

où la fonction $w^{(p)}_n$ est définie par (II.11) avec $f = f_p$. Par passage à la limite dans l'équation ci-dessus le long de la sous-suite (n_k) et en utilisant le lemme II.3.3, il vient:

$$\mathbb{E}\exp - \sum_{i=0}^{p} (X_{t_i}, f_i) = \mathbb{E}\exp - \sum_{i=0}^{p-1} (X_{t_i}, f_i) - (X_{t_{p-1}}, w(t_p - t_{p-1})),$$

où la fonction w est l'unique solution positive de l'équation (II.10) avec $f = f_p$. On en déduit que la variable aléatoire $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_p})$ vérifie (II.9).

Enfin d'après la deuxième étape, la loi de $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_p})$ est uniquement déterminée, ce qui entraîne la convergence en loi de la suite $\frac{1}{n}(Y^n_{t_0}, \ldots, Y^n_{t_p})$ (et pas seulement le long de la sous-suite (n_k)). Le théorème d'extension de Kolmogorov donne l'existence d'un processus X dont la loi marginale aux instants $t_0, \ldots, t_p$ est la loi de $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_p})$. Finalement le caractère markovien homogène de X découle de (II.9). $\square$

Preuve du lemme II.3.3:

Pour le processus Y^n l'équation (II.8) s'écrit:

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}w_n(t,x)} = P_t\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}f}\right](x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x\int_0^t \left[1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}w_n(t-s,B_s)}\right]^2 n dA_s. \tag{II.12}$$

On a en particulier

$$\exp -\frac{1}{n}w_n(t,x) \geq P_t\left[\exp -\frac{1}{n}f\right](x),$$

et en utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient:

$$0 \leq w_n \leq \| P_t f \| \leq \| f \|.$$

On peut alors effectuer un développement limité à l'ordre $\frac{1}{n}$ de l'équation (II.12) car $a_T < \infty$. On obtient pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$,

$$w_n(t,x) = P_t f(x) - \frac{1}{2}\mathbb{E}_x\int_0^t w_n(t-s,B_s)^2 dA_s + E_n, \tag{II.13}$$

avec $|E_n| \leq \frac{c}{n}\| f \|^2 \left(1+\frac{1}{n}\| f \|\right)$. Par différence dans (II.13), il vient pour tout entier $p > n$,

$$\begin{aligned} \| w_n - w_p \| &\leq \sup_{x,t\in[0,T]} \frac{1}{2}\int_0^t ds \int \sigma(dy)p(s,x-y)\left|w_n(t-s,y)^2 - w_p(t-s,y)^2\right| + O(\frac{1}{n}) \\ &\leq \| f \| \, \| w_n - w_p \| \, a_T + O(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Comme $a_T \| f \| < 1$, on en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la convergence uniforme. On note w sa limite. Cette fonction est positive, mesurable, bornée par $\| f \|$, et par convergence dominée, elle est solution de (II.10).

Montrons que la fonction w est continue en la variable x sur $(0,T] \times \mathbb{R}^d$. En faisant la différence dans (II.10), on obtient pour tout $(t,x,x') \in (0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} &\left|w(t,x) - w(t,x')\right| \\ &\quad \leq \left|P_t f(x) - P_t f(x')\right| + \frac{1}{2}\int_0^t ds \int \sigma(dy)\left|p(s,x-y) - p(s,x'-y)\right| w(t-s,y)^2 \\ &\quad \leq \left|P_t f(x) - P_t f(x')\right| + \frac{1}{2}\| f \|^2 \int_0^t ds \int \sigma(dy)\left|p(s,x-y) - p(s,x'-y)\right|. \end{aligned}$$

On utilise la majoration (II.4) pour le premier terme. On écrit l'intégrale de 0 à t dans le deuxième terme comme la somme des intégrales de 0 à ε et de ε à t $(0 < \varepsilon \leq t \wedge 1)$ et en utilisant les majorations (II.3) et (II.2), on trouve:

$$\begin{aligned} &\left|w(t,x) - w(t,x')\right| \\ &\quad \leq c\| f \| \frac{1}{\sqrt{t}}\left|x-x'\right| + c\| f \|^2 \int_0^\varepsilon s^{\alpha-1}\, ds + c\| f \|^2 \int_\varepsilon^t ds\ (s\wedge 1)^{\alpha-3/2}\left|x-x'\right| \\ &\quad \leq c\| f \| \frac{1}{\sqrt{t}}\left|x-x'\right| + c\| f \|^2 \varepsilon^\alpha + c\| f \|^2 (t+\varepsilon^{-1/2})\left|x-x'\right|. \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon := |x-x'| \wedge t \wedge 1$, on en déduit que w est uniformément continue en la variable x sur $[\delta,T] \times \mathbb{R}^d$, pour tout $\delta > 0$. □

II.3.3 Notations et remarques

Suivant la terminologie de [9], on note $X := (\Omega^X, \mathcal{G}^X, X, \theta^X, (\mathbb{P}^X_\mu)_{\mu \in M_f})$ le processus de Markov limite du théorème II.3.2: $\mathcal{G}^{0,X}_t$ est la tribu de Ω^X engendrée par $(X_s, s \in [0,t])$, $\mathcal{G}^X$ la tribu complétée de $\mathcal{G}^{0,X} := \mathcal{G}^{0,X}_\infty$ par rapport aux mesures $\mathbb{P}^X_{\bar{\eta}} := \int \mathbb{P}^X_\mu \bar{\eta}(d\mu)$ où $\bar{\eta}$ décrit l'ensemble des probabilités sur M_f et $\mathcal{G}^X_t$ la tribu complétée de $\mathcal{G}^{0,X}_t$ dans $\mathcal{G}^X$ par rapport aux mesures $\mathbb{P}^X_{\bar{\eta}}$.

Le théorème II.3.2 montre que si $0 \leq s < t \leq T$ et $f \in C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ vérifie $a_T \| f \| < 1$, alors

$$\mathbb{E}^X_\mu \left(\exp -(X_t, f) \mid \mathcal{G}^X_s\right) = \exp -(X_s, w(t-s)), \tag{II.14}$$

où la fonction w est l'unique solution positive mesurable de l'équation (II.10).

Il est facile de de voir que (II.14) reste vraie pour $f \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$ (telle que $a_T \| f \| < 1$). On utilise le fait que la fermeture de $C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ pour la convergence simple bornée est $\mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$. De plus, si $(f_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de fonctions de $\mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$ (telles que $a_T \| f_n \| < 1$) qui converge simplement vers f (telle que $a_T \| f \| < 1$) et si (II.14) est vraie pour chaque fonction f_n, on remarque que les fonctions w^n solutions de (II.10) associées à f_n, convergent simplement (parce que $w^n(t,x) = -\log \mathbb{E}^X_{\delta_x} (\exp -(X_t, f_n)))$ puis que leur limite w vérifie l'équation (II.10) associée à f. Le résultat annoncé en découle facilement.

II.4 Propriétés de continuité

Avant d'énoncer les propriétés de continuité du superprocessus X construit dans la partie précédente, on montre la proposition suivante.

Proposition II.4.1 *Pour toute mesure $\eta \in M_f$, pour tout $T > 0$, pour tout entier p, il existe une constante M_p telle que pour toute fonction φ bornée par 1, lipschitzienne et de constante de Lipschitz bornée par 1, pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$, l'on ait:*

$$\mathbb{E}^X_\eta \left[((X_t, \varphi) - (X_s, \varphi))^{2p}\right] \leq M_p \, |t-s|^{p\alpha}.$$

La démonstration de cette proposition repose sur plusieurs lemmes. Le lemme technique suivant joue un rôle crucial dans le calcul des moments du processus X. On fixe $T > 0$.

Lemme II.4.2 *Soit $J \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, bornée, telle que $|J(r,x)| \leq [2a_T]^{-1} \mathbf{1}_{[0,T]}(r)$. On considère l'équation intégrale suivante:*

$$v(\lambda, r, x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^{T-r} v(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s = \lambda J(r,x), \quad r \in [0,T], \tag{II.15}$$

$$v(\lambda, r, x) = 0, \quad r > T.$$

Pour $|\lambda| < 1$, il existe une unique solution mesurable $v(\lambda)$ de (II.15) telle que $a_T \| v(\lambda) \| < 1$.

On définit la suite de fonctions mesurables $(c_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ par la récurrence suivante:

$$c_1(r,x) := J(r,x), \tag{II.16}$$

et pour tout entier $n \geq 2$,

$$c_n(r,x) := -\frac{1}{2}\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \sum_{j=1}^{n-1} c_j(r+s, B_s) c_{n-j}(r+s, B_s) dA_s \right]. \qquad \text{(II.17)}$$

La série $\sum \lambda^n c_n$ est normalement convergente pour $|\lambda| < 1$. De plus pour $|\lambda| < 1$, on a l'expression suivante de la solution $v(\lambda)$:

$$v(\lambda, r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n c_n(r,x), \qquad (r,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d.$$

Remarque. Contrairement aux énoncés précédents, où l'on considérait des équations intégrales de la forme (II.10), on a ici des solutions de signe quelconque (la fonction v n'est pas nécessairement positive).
Preuve. La fonction $f(\lambda) := \frac{1}{a_T}[1 - \sqrt{1-\lambda}]$ est développable en série entière de rayon 1. De plus, la fonction f est solution de

$$f^2 = \frac{1}{a_T}\left[2f - \frac{\lambda}{a_T}\right]. \qquad \text{(II.18)}$$

Si on note β_n les coefficients du développement de f, on remarque que $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \frac{1}{2a_T}$, et que la suite β_n vérifie la relation de récurrence suivante:

$$\beta_n = \frac{1}{2} a_T \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \beta_{n-j}, \quad n \geq 2.$$

Remarquons que $\| c_1 \| \leq \beta_1$ et $\| c_n \| \leq \frac{1}{2} a_T \sum_{j=1}^{n-1} \| c_j \| \| c_{n-j} \|$ pour $n \geq 2$. On a donc pour tout entier $n > 0$, $\| c_n \| \leq \beta_n$. Cela entraine que la série $v(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n c_n$ est normalement convergente pour $|\lambda| < 1$.

De plus on vérifie facilement que la fonction v ainsi définie est solution de (II.15) et que pour $|\lambda| < 1$, $a_T \| v(\lambda) \| < 1$. L'unicité de la solution de (II.15) telle que $a_T \| v(\lambda) \| < 1$ découle d'arguments semblables au début de la preuve du théorème II.3.2. □

On montre également le lemme suivant.

Lemme II.4.3 *Soit un entier $m > 1$, et soient $0 \leq t_1 < \ldots < t_m \leq T$. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ une famille de fonctions appartenant à $\mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^d)$ telle que $2a_T \sum_{i=1}^m \| \varphi_i \| \leq 1$. On a alors pour toute mesure $\eta \in M_f$, pour tout $\lambda \in [0,1)$,*

$$\mathbb{E}_\eta^X \exp -\lambda \sum_{t_i \geq r} (X_{t_i - r}, \varphi_i) = \exp -(\eta, v(\lambda, r)),$$

où $v(\lambda)$ est l'unique solution mesurable positive de l'équation intégrable (II.15) avec $J(r,x) := \mathbb{E}_x \sum_{t_i \geq r} \varphi_i(B_{t_i - r})$. De plus on a $a_T \| v(\lambda) \| < 1/2$.

Preuve. On fixe $\lambda \in [0,1)$. La démonstration (cf lemme 4.1 de [24]) se fait par récurrence sur m. Pour $m = 1$, on utilise le théorème II.3.2, et on a $v(\lambda, r, x) := w(t_1 - r, x)\mathbf{1}_{[0,t_1]}(r)$ où w est l'unique solution positive de (II.10) avec $f = \lambda\varphi_1$. On remarque alors que $v(\lambda)$ est solution de (II.15) avec $J(r,x) := \mathbb{E}_x \varphi_1(B_{t_1-r})\mathbf{1}_{[0,t_1]}(r)$. On sait de plus que w est borné par $\lambda \,\|\, \varphi_1 \,\|$ ce qui implique $a_T \,\|\, v(\lambda) \,\| < 1/2$.

On suppose le résultat vrai au rang m. On se donne $0 \leq t_1 < \ldots < t_{m+1} \leq T$. Pour $r > t_1$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence et il vient:

$$\mathbb{E}^X_\eta \exp -\lambda \sum_{t_i \geq r} (X_{t_i - r}, \varphi_i) = \mathbb{E}^X_\eta \exp -\lambda \sum_{t_i \geq r,\, i>1} (X_{t_i - r}, \varphi_i) = \exp -(\eta, \tilde{v}(\lambda, r)),$$

où $\tilde{v}(\lambda)$ est l'unique solution mesurable positive de l'équation:

$$\tilde{v}(\lambda, r, x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty \tilde{v}(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s = \lambda \mathbb{E}_x \sum_{t_i \geq r, i>1} \varphi_i(B_{t_i - r})$$

(remarquons que $\|\, \tilde{v}(\lambda) \,\| < \sum_{i>1} \|\, \varphi_i \,\| \leq 1/2a_T$).

Ensuite pour $0 \leq r \leq t_1$, on peut appliquer la propriété de Markov du processus X à l'instant $t_1 - r$. Le théorème II.3.2 donne alors

$$\mathbb{E}^X_\eta \; \mathrm{e}^{-\lambda \sum_{t_i \geq r} (X_{t_i - r}, \varphi_i)} = \mathbb{E}^X_\eta \; \mathrm{e}^{-\lambda (X_{t_1 - r}, \varphi_1) - (X_{t_1 - r}, \tilde{v}(\lambda, t_1))} = \mathrm{e}^{-(\eta, \hat{v}(\lambda, r))},$$

où $\hat{v}(\lambda, r, .) := w(t_1 - r, .)\mathbf{1}_{[0,t_1]}(r)$, la fonction w étant solution de (II.10) avec $f = \lambda\varphi_1 + \tilde{v}(\lambda, t_1)$ (noter que $2a_T \,\|\, f \,\| < 1$). On sait donc que $\hat{v}$ est l'unique solution positive pour $r \in [0, t_1]$ de

$$\hat{v}(\lambda, r, x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty \hat{v}(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s = \mathbb{E}_x \left[\lambda\varphi_1(B_{t_1 - r}) + \tilde{v}(\lambda, t_1, B_{t_1 - r})\right].$$

Or on a pour $0 \leq r \leq t_1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \tilde{v}(\lambda, t_1, B_{t_1 - r}) =& \lambda \mathbb{E}_x \mathbb{E}_{B_{t_1 - r}} \sum_{i>1} \varphi_i(B_{t_i - t_1}) \\
& - \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \mathbb{E}_{B_{t_1 - r}} \int_0^\infty \tilde{v}(\lambda, t_1 + s, B_s)^2 dA_s \\
=& \lambda \mathbb{E}_x \sum_{i>1} \varphi_i(B_{t_i - r}) - \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_{t_1 - r}^\infty \tilde{v}(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s,
\end{aligned}$$

ce qui reporté dans l'équation précédente donne pour $0 \leq r \leq t_1$:

$$\hat{v}(\lambda, r, x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \hat{v}(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s + \int_{t_1 - r}^\infty \tilde{v}(\lambda, r+u, B_u)^2 dA_u\right] = \lambda J(r, x).$$

De plus on a $\hat{v}(\lambda, r, x) = 0$, si $r > t_1$. On en déduit que $v(\lambda, r, x) := \tilde{v}(\lambda, r, x)\mathbf{1}_{(t_1, \infty)}(r) + \hat{v}(\lambda, r, x)\mathbf{1}_{[0,t_1]}(r)$ est solution de (II.15). On vérifie trivialement que $v(\lambda)$ est positive et que $a_T \,\|\, v(\lambda) \,\| < 1/2$. On démontre l'unicité comme dans la preuve du théorème II.3.2. $\square$

Nous aurons également besoin du lemme élémentaire suivant:

Lemme II.4.4 *Soit un entier $n \geq 1$, soit U une variable aléatoire réelle positive telle que l'on ait pour tout $\lambda > 0$ assez petit:*

$$\mathbb{E}\exp -\lambda U = \sum_{p=0}^n \lambda^p \alpha_p + O(\lambda^{n+1}).$$

Alors $U \in L^n(\Omega, \mathbb{P})$ et pour tout entier $p \leq n$, $\mathbb{E}U^p = p!(-1)^p \alpha_p$.

Avant de commencer la démonstration de la proposition II.4.1, énonçons une conséquence importante des trois lemmes précédents:

Corollaire II.4.5 *Soient deux entiers $p, m \geq 1$, soient des réels $0 \leq t_1 < \ldots < t_m \leq T$. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ une famille de fonctions bornées appartenant à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Alors pour toute mesure $\eta \in M_f$, on a*

$$\mathbb{E}_\eta^X \left\{ \left[\sum_{i=1}^m (X_{t_i}, \varphi_i) \right]^p \right\} = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(0)), \tag{II.19}$$

où les fonctions c_n sont définies par (II.16), (II.17) avec $J(r,x) := \mathbb{E}_x(\sum_{t_i \geq r} \varphi_i(B_{t_i - r}))$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que les fonctions φ_i sont positives et que l'on a $2a_T \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\| \leq 1$. D'après le lemme II.4.3, pour $\lambda \in [0,1)$, la fonction positive $v(\lambda, r, x) := -\log \mathbb{E}_{\delta_x}^X \exp -\lambda \sum_{t_i \geq r} (X_{t_i - r}, \varphi_i)$ est l'unique solution de l'équation intégrale (II.15) et on a $2a_T \|v(\lambda)\| < 1$. On déduit alors du lemme II.4.2 que cette fonction v s'écrit pour $\lambda \in [0,1)$: $v(\lambda, r, x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda^n c_n(r,x)$ où les fonctions c_n sont définies par les formules (II.16) et (II.17) avec $J(r,x) := \mathbb{E}_x \sum_{t_i \geq r} \varphi_i(B_{t_i - r})$.

Montrons que l'on a alors pour tout $r \geq 0$, pour tout $\lambda \in [0,1)$:

$$\mathbb{E}_\eta^X \, \mathrm{e}^{-\lambda \sum_{t_i \geq r} (X_{t_i - r}, \varphi_i)} = 1 + \sum_{p=1}^\infty \lambda^p \left[\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(r)) \right]. \tag{II.20}$$

Si $(\beta_n)_{n \geq 1}$ est la série introduite dans la preuve du lemme II.4.2, la série

$$\sum_{p=1}^\infty \lambda^p \left[\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k [\beta_{n_i}(\eta, \mathbf{1})] \right]$$

converge pour $|\lambda| < 1$. En effet, toujours avec les notations de la preuve du lemme II.4.2, on a pour $|\lambda| < 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{f(\lambda)(\eta, \mathbf{1})} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \left[\sum_{n=1}^\infty \lambda^n \beta_n(\eta, \mathbf{1}) \right]^k \\ &= 1 + \sum_{p=1}^\infty \lambda^p \left[\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k [\beta_{n_i}(\eta, \mathbf{1})] \right]. \end{aligned}$$

On en déduit que la série

$$1 + \sum_{p=1}^\infty \lambda^p \left[\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(r)) \right]$$

est absolument convergente si $|\lambda| < 1$. De plus le développement $v(\lambda, r, x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda^n c_n(r,x)$ montre que pour tout $|\lambda| < 1$, la somme de cette série est égale à $\exp -(\eta, v(\lambda, r))$. On en déduit alors (II.20).

De (II.20) et du lemme II.4.4, on déduit que pour tout entier p et pour tout $r \geq 0$, on a:

$$\mathbb{E}_\eta^X \left\{ \left[\sum_{t_i \geq r} (X_{t_i - r}, \varphi_i) \right]^p \right\} = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(r)). \tag{II.21}$$

Dans un deuxième temps, si les fonctions φ_i sont mesurables bornées quelconques, on note φ_i^+ et φ_i^- les parties respectivement positive et négative de φ_i. En posant $\varphi_i^\theta := \theta_i^+\varphi_i^+ + \theta_i^-\varphi_i^-$, on remarque que les membres de droite et de gauche de (II.21) sont des polynômes en $(\theta_1^+, \theta_1^-, \dots, \theta_m^+, \theta_m^-)$ qui coïncident sur $\left\{\theta_i^\pm \geq 0, \sum_{i=1}^m \theta_i^+ \|\varphi_i^+\| + \sum_{i=1}^m \theta_i^- \|\varphi_i^-\| \leq [2a_T]^{-1}\right\}$ d'intérieur non vide. Ils coïncident donc pour tous $\theta_i^\pm$, et entre autre pour $\theta_i^+ = -\theta_i^- = -1$. Cela termine la démonstration. □

Remarques. La formule (II.19) donne immédiatement les moments à tout ordre de (X_t, φ) pour $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ bornée. En particulier, si on note $\mathbb{E}_\eta := \int \eta(dx)\mathbb{E}_x$:

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[(X_t, \varphi)\right] = \mathbb{E}_\eta\left(\varphi(B_t)\right), \tag{II.22}$$

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[(X_t, \varphi)^2\right] = \left[\mathbb{E}_\eta\left(\varphi(B_t)\right)\right]^2 + \mathbb{E}_\eta \int_0^t \left[P_{t-s}\varphi(B_s)\right]^2 dA_s. \tag{II.23}$$

Preuve de la proposition II.4.1.
En appliquant le corollaire précédent à $t_1 = t$, $t_2 = s$, $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, on a pour tout entier p l'égalité:

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[((X_t, \varphi) - (X_s, \varphi))^p\right] = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\dots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(0)), \tag{II.24}$$

où les fonctions c_n vérifient la relation de récurrence (II.17) avec la condition initiale

$$c_1(r,x) := \mathbb{E}_x \left[\varphi(B_{t-r})\mathbf{1}_{[0,t]}(r) - \varphi(B_{s-r})\mathbf{1}_{[0,s]}(r)\right]. \tag{II.25}$$

Le lemme suivant nous permet de majorer les fonctions c_n. On rappelle que $\alpha \in (0,1)$ est le réel intervenant dans l'hypothèse (H) écrite pour σ.

Lemme II.4.6 *On suppose $0 \leq t \leq s < T$, et on note $h := s - t$. Pour toute fonction bornée $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, les fonctions c_n définies par la relation de récurrence (II.17) et la condition initiale (II.25) vérifient la majoration: pour tout $n > 1$,*

$$|c_n(r,x)| \leq b_n \|\varphi\|^n h^{\frac{n\alpha}{2}} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r). \tag{II.26}$$

Les constantes b_n ne dépendent que de σ, T et n.

Preuve. La démonstration se fait par récurrence. Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned}
|c_2(r,x)| =& \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty c_1(r+u, B_u)^2 dA_u \\
=& \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty \left[\left(P_{t+h-r-u} - P_{t-r-u}\right)\varphi\right](B_u)^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r+u) dA_u \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty P_{t+h-r-u}\varphi(B_u)^2 \mathbf{1}_{[t,t+h]}(r+u) dA_u.
\end{aligned}$$

Pour le second terme, en utilisant (II.6) et (II.2), il vient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \int_0^\infty P_{t+h-r-u}\varphi(B_u)^2 \mathbf{1}_{[t,t+h]}(r+u) dA_u &\leq c\|\varphi\|^2 \int_{(t-r)\vee 0}^{t+h-r} \frac{du}{(u \wedge 1)^{1-\alpha}} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r) \\
&\leq c\|\varphi\|^2 \; h^\alpha \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r).
\end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon > 0$. Pour le premier terme, en utilisant (II.6) et (II.1) il vient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x \int_0^\infty \left[(P_{t+h-r-u} - P_{t-r-u})\, \varphi \right] (B_u)^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r+u) dA_u \\
&\qquad = \int_0^{t-r} du \int d\sigma(y) p(u, x-y) \\
&\qquad\qquad \left[\int dz\; \varphi(z) \left(p(t-r+h-u, y-z) - p(t-r-u, y-z) \right) \right]^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r) \\
&\qquad \leq c \,\|\varphi\|^2 \int_0^{t-r} du \int d\sigma(y) p(u, x-y) \\
&\qquad\qquad \left[\int dz \int_{t-r-u}^{t-r+h-u} \frac{1}{v}\; p(v(1+\varepsilon), y-z) dv \right]^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r) \\
&\qquad \leq c \,\|\varphi\|^2 \int_0^{t-r} du \int d\sigma(y) p(u, x-y) \left(\ln[1 + \frac{h}{t-r-u}] \right)^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r).
\end{aligned}$$

Ensuite, comme pour tout $a > 0$, on a $\ln(1+a) \leq c\, a^{\alpha/2}$, il vient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x \int_0^\infty \left[(P_{t+h-r-u} - P_{t-r-u})\, \varphi \right] (B_u)^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r+u) dA_u \\
&\qquad\qquad \leq c \,\|\varphi\|^2 \int_0^{t-r} du \int d\sigma(y) p(u, x-y) \left(\frac{h}{t-r-u} \right)^\alpha \\
&\qquad\qquad \leq c \,\|\varphi\|^2 \int_0^{t-r} \left(\frac{h}{t-r-u} \right)^\alpha \frac{du}{(u \wedge 1)^{1-\alpha}} \\
&\qquad\qquad = c \,\|\varphi\|^2\, h^\alpha
\end{aligned}$$

en utilisant (II.2) une nouvelle fois. Donc on a

$$|c_2(r,x)| \leq c \,\|\varphi\|^2\, h^\alpha \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r),$$

ce qui donne (II.26) pour $n = 2$.

On suppose cette majoration vraie au rang $n \geq 2$ et on la montre au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
c_{n+1}(r,x) &= -\frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^\infty \sum_{p=1}^n c_p(r+u, B_u) c_{n+1-p}(r+u, B_u) dA_u \\
&= -\mathbb{E}_x \int_0^\infty c_1(r+u, B_u) c_n(r+u, B_u) dA_u \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^\infty \sum_{p=2}^{n-1} c_p(r+u, B_u) c_{n+1-p}(r+u, B_u) dA_u.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, en utilisant l'hypothèse de récurrence et un raisonnement similaire au précédent, il vient:

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_x \int_0^\infty c_1(r+u,B_u)c_n(r+u,B_u)dA_u\right| \\
&\qquad\qquad \le \mathbb{E}_x \int_0^\infty |(P_{t+h-r-u} - P_{t-r-u})\,\varphi(B_u)|\, h^{\frac{n\alpha}{2}} \,\|\varphi\|^n\, b_n \mathbf{1}_{[0,t)}(r+u)dA_u \\
&\qquad\qquad\quad + \mathbb{E}_x \int_0^\infty P_{t+h-r-u}\varphi(B_u) h^{\frac{n\alpha}{2}} \,\|\varphi\|^n\, b_n \mathbf{1}_{[t,t+h]}(r+u)dA_u \\
&\qquad\qquad \le c\, h^{\frac{n\alpha}{2}} \,\|\varphi\|^{n+1}\, \mathbf{1}_{[0,t)}(r) \int_0^{t-r} \ln(1+\frac{h}{t-r-u})du \int d\sigma(y)p(u,x-y) \\
&\qquad\qquad\quad + h^{\frac{n\alpha}{2}} \,\|\varphi\|^{n+1}\, b_n \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r)\mathbb{E}_x \int_{(t-r)\vee 0}^{(t+h-r)} dA_u \\
&\qquad\qquad \le c\, h^{\frac{n\alpha}{2}} \,\|\varphi\|^{n+1}\, \mathbf{1}_{[0,t)}(r) \int_0^{t-r} \left(\frac{h}{t-r-u}\right)^\alpha \frac{du}{(u\wedge 1)^{1-\alpha}} \\
&\qquad\qquad\quad + c\, h^{\frac{(n+1)\alpha}{2}} \,\|\varphi\|^{n+1}\, \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r) \\
&\qquad\qquad \le c\, h^{\frac{(n+1)\alpha}{2}} \,\|\varphi\|^{n+1}\, \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r).
\end{aligned}
$$

Pour le second terme, en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty \sum_{p=2}^{n-1} c_p(r+u,B_u)c_{n+1-p}(r+u,B_u)dA_u\right| \\
&\qquad\qquad \le \frac{1}{2}\,\|\varphi\|^{n+1} \sum_{p=2}^{n-1} b_p b_{n-p+1} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r) h^{\frac{p\alpha}{2}} h^{\frac{(n-p+1)\alpha}{2}} \sup_x \mathbb{E}_x A_T \\
&\qquad\qquad \le c\,\|\varphi\|^{n+1}\, h^{\frac{(n+1)\alpha}{2}} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r).
\end{aligned}
$$

On obtient donc le résultat voulu à l'ordre $n+1$. □

Soit une fonction φ bornée par 1, lipschitzienne de constante de Lipschitz bornée par 1, alors on a $|c_1(0,x)| \le \mathbb{E}_x\,|\varphi(B_{t+h}) - \varphi(B_t)| \le c\,\sqrt{h}$. Comme $\alpha < 1$, on en déduit que pour tout entier $n \ge 1$, $|c_n(0,x)| \le b_n h^{\frac{p\alpha}{2}}$. En reportant cette inégalité dans la formule (II.24) on termine la démonstration de la proposition II.4.1. □

Théorème II.4.7 *Sous chaque probabilité $\mathbb{P}^X_\eta$, $\eta \in M_f$, le processus X possède une version continue.*

Preuve. On peut se limiter à $t \in [0,T]$, $T > 0$. On munit $\hat{\mathbb{R}}^d$, le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^d$, d'une distance majorée sur $\mathbb{R}^d$ par la distance euclidienne. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $\hat{\mathbb{R}}^d$. Cet ensemble est dense dans $C(\hat{\mathbb{R}}^d)$ et séparable pour la convergence uniforme. Soit $\mathcal{L}_0$ un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{L}$ contenant $\mathbf{1}_{\hat{\mathbb{R}}^d}$. Si $\mathcal{L}_0 = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$, la formule

$$
d(\mu,\mu') := \sum_{n=0}^\infty 2^{-n}\left(\big|(\mu,\varphi_n) - (\mu',\varphi_n)\big| \wedge 1\right)
$$

définit une distance compatible avec la topologie de $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$, et $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$ est complet pour cette distance. D'après la proposition II.4.1 et le critère de Kolmogorov, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_0$, le processus $((X_t, \varphi), t \geq 0)$ possède une version continue. On note Δ_0 l'ensemble des nombres de la forme $k2^{-n}$ où k et n sont des entiers. On sait que p.s. pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_0$, la fonction (X_t, φ) est uniformément continue sur $[0,T] \bigcap \Delta_0$. On en déduit que p.s. l'application $t \mapsto X_t$ à valeurs dans $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$ est uniformément continue sur $[0,T] \bigcap \Delta_0$. Elle admet donc p.s. un unique prolongement continu sur $[0,T]$ que l'on note $Z := (Z_t, t \in [0,T])$.

Il reste à voir que p.s. pour tout $t \in [0,T]$, on a $(Z_t, \mathbf{1}_{\{\infty\}}) = 0$. Soit une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C(\mathbb{R}^d)$ telles que $\mathbf{1}_{\{|x|\geq n+1\}} \leq g_n(x) \leq \mathbf{1}_{\{|x|\geq n\}}$, on montre alors le lemme suivant:

Lemme II.4.8 *Soit T un réel positif. Pour toute mesure $\eta \in M_f(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq 1} \sup_{0=t_0<t_1<\ldots<t_p\leq T} \mathbb{P}_\eta^X \left(\sup_{i\in\{0,\ldots,\,p\}} (X_{t_i}, g_n) \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Preuve. Soit un entier $n \geq 1$. On note B_n la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon n. Pour tout $s > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $P_s \mathbf{1}_{B_n^c}(x) \geq \frac{1}{2}\mathbf{1}_{B_n^c}(x)$. On a donc, en utilisant la formule (II.22) pour les moments d'ordre 1 de X, pour tous $t \in [0,T)$, $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\eta^X \left((X_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (X_T, \mathbf{1}_{B_n^c}) \mid \mathcal{G}_t^X \right) &= \mathbb{E}_\eta^X \left((X_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ \mathbb{E}_{X_t}^X (X_{T-t}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \mid \mathcal{G}_t^X \right) \\
&= \mathbb{E}_\eta^X \left((X_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (X_t, P_{T-t}\mathbf{1}_{B_n^c}) \mid \mathcal{G}_t^X \right) \\
&\geq \frac{1}{2}\mathbb{E}_\eta^X \left((X_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (X_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \mid \mathcal{G}_t^X \right) \\
&\geq \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{1}_{(X_t, \mathbf{1}_{B_n^c})\geq\varepsilon}.
\end{aligned}$$

La même inégalité est triviale pour $t = T$. Donc on a aisément, en utilisant la propriété de Markov, pour tous entiers $n > 1$, $p \geq 1$, pour tous $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p \leq T$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\eta^X \left(\sup_{i\in\{0,\ldots,\,p\}} (X_{t_i}, g_{n-1}) \geq \varepsilon \right) \\
&\qquad \leq \mathbb{P}_\eta^X \left(\sup_{i\in\{0,\ldots,\,p\}} (X_{t_i}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon \right) \\
&\qquad \leq \sum_{i=0}^{p} \mathbb{E}_\eta^X \left(\sup_{j\in\{0,\ldots,\,i-1\}} (X_{t_j}, \mathbf{1}_{B_n^c}) < \varepsilon;\ (X_{t_i}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon \right) \\
&\qquad \leq \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{p} \mathbb{E}_\eta^X \left(\sup_{j\in\{0,\ldots,\,i-1\}} (X_{t_j}, \mathbf{1}_{B_n^c}) < \varepsilon;\ (X_{t_i}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (X_T, \mathbf{1}_{B_n^c}) \right) \\
&\qquad \leq \frac{2}{\varepsilon}\mathbb{E}_\eta^X \left(\sup_{i\in\{0,\ldots,\,p\}} (X_{t_i}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (X_T, \mathbf{1}_{B_n^c}) \right) \\
&\qquad \leq \frac{2}{\varepsilon}\mathbb{E}_\eta^X (X_T, \mathbf{1}_{B_n^c}) \\
&\qquad = \frac{2}{\varepsilon}(\eta, P_T \mathbf{1}_{B_n^c}).
\end{aligned}$$

Or par convergence dominée, on a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\varepsilon}(\eta, P_T \mathbf{1}_{B_n^c}) = 0.$$

Cela termine la démonstration du lemme. $\square$

Fin de la preuve du théorème II.4.7. On a de plus

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} (Z_t, \mathbf{1}_{\{\infty\}}) &\leq \sup_{t\in[0,T]} (Z_t, g_n) \\
&= \sup_{t\in[0,T]\cap\Delta_0} (Z_t, g_n) \text{ p.s. par continuité} \\
&= \sup_{t\in[0,T]\cap\Delta_0} (X_t, g_n) \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

Or le lemme II.4.8 entraîne que cette dernière quantité converge vers 0 en probabilité. On en déduit que p.s. $\sup_{t\in[0,T]}(Z_t, \mathbf{1}_{\{\infty\}}) = 0$. Donc le processus Z est à valeurs dans $M_f(\mathbb{R}^d)$, et est la version continue recherchée du processus X. $\square$

Par la suite on supposera toujours qu'on a remplacé X par sa version continue. Grâce à un résultat de Perkins [51], on montre la proposition suivante:

Théorème II.4.9 *Pour toute fonction bornée $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, p.s. le processus $((X_t, \varphi), t > 0)$ est continu.*

Preuve. Rappelons sous forme de proposition le corollaire 2 de [51]:

Proposition II.4.10 (Perkins) *Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(X_t)_{t\in[0,N]}$ un processus à valeurs dans $M_f(E)$. Soit C un sous-ensemble de $\mathcal{B}_1 := \{\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \|\varphi\| \leq 1\}$. Supposons qu'il existe des réels $p > 1$, $\delta > 0$, $c_0 > 0$ tel que*

$$\mathbb{E}(|(X_u, \varphi) - (X_t, \varphi)|^p) \leq c_0 \, |t-u|^{1+\delta} \quad \textit{pour tous} \quad u, t \in [0, N], \quad \varphi \in C,$$

et pour tout $\varphi \in C$, p.s. (X_t, φ) est continu sur $[0, N]$. Alors pour tout φ appartenant à la fermeture de C dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour la convergence simple bornée, et pour tout réel $0 < \eta < \frac{\delta}{p}$, il existe p.s. un réel $\rho(\varphi, \eta, \omega)$ tel que

$$|(X_u, \varphi) - (X_t, \varphi)| \leq \rho \, |u-t|^\eta \textit{ pour tous } u, t \in [0, N].$$

On utilise ensuite le lemme suivant:

Lemme II.4.11 *Pour toute mesure $\eta \in M_f$, pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier p, il existe une constante M_p telle que pour toute fonction mesurable φ bornée par 1, pour tout $(s,t) \in [\varepsilon, T]^2$, l'on ait:*

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[((X_t, \varphi) - (X_s, \varphi))^{2p} \right] \leq M_p \, |t-s|^{p\alpha}.$$

Preuve. Reprenons les hypothèses et les notations du lemme II.4.6. Grâce à ce lemme et à l'équation (II.24), il suffit de montrer que pour $0 < \varepsilon \leq t < s \leq T$, on a $|c_1(0,x)| \leq c\, h^{\frac{\alpha}{2}}$. En utilisant l'inégalité (II.1) et la majoration $\ln(1+a) \leq c a^{\alpha/2}$ vraie pour $a \geq 0$, on obtient:

$$|c_1(0,x)| = |(P_{t+h} - P_t)\varphi(x)| \leq c \, \|\varphi\| \ln(1 + \frac{h}{t}) \leq c \, \|\varphi\| \, h^{\alpha/2}$$

avec une constante dépendant uniquement de T et de ε, ce qui termine la démonstration du lemme. $\square$

On peut alors démontrer le théorème II.4.9. La fermeture pour la convergence simple bornée de l'ensemble C_1 des fonctions continues à support compact, bornées par 1 est $\mathcal{B}_1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $\varphi \in C_1$ le processus $((X_t, \varphi), t \in [\varepsilon, T])$ est p.s. continu. Le lemme II.4.11 permet d'appliquer la proposition II.4.10 au processus $(X_{\varepsilon+t}, t \in [0, T - \varepsilon])$ et d'en déduire le théorème II.4.9. $\square$

Remarque. Il est clair qu'on ne peut pas en général avoir la continuité du processus (X_t, φ) en $t = 0$ pour n'importe quelle fonction φ. En effet, sous $\mathbb{P}^X_{\delta_x}$, si on choisit $\varphi := \mathbf{1}_{\{x\}}$, on a $(X_0, \varphi) = 1$ alors que pour tout $t > 0$ p.s. $(X_t, \varphi) = 0$ (cf la formule (II.22) pour les moments d'ordre 1 de X).

II.5 Des mesures aléatoires associées à X

Notre objectif dans cette partie est de construire certaines mesures aléatoires associées au superprocessus X. Soit ρ une mesure positive σ-finie sur $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $V_\rho(\varepsilon)$ la mesure aléatoire sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ définie par:

$$\int V_\rho(\varepsilon)(ds, dy)\varphi(s, y) = \int_0^\infty ds \int \rho(dy) \int X_s(dz) p(\varepsilon, z - y)\varphi(s, y),$$

où $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. Remarquons que la fonction $(\varepsilon, s, y) \mapsto (X_s, p(\varepsilon, . - y))$ est p.s. continue sur $(0, \infty) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. On en déduit que p.s. pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ à support compact, l'application $\varepsilon \mapsto (V_\rho(\varepsilon), \varphi)$ est continue. On désire étudier la limite quand $\varepsilon \to 0$ de $V_\rho(\varepsilon)$. Intuitivement cette limite vaut "$z(s, y) ds \rho(dy)$" où "$z(s, y)$" serait la densité de la mesure $X_s(dy)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, si cette densité existait.

En fait, si on note H_b^T l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ à support dans $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ et $H_b := \bigcup_{T>0} H_b^T$, on a la proposition suivante:

Proposition II.5.1 *Supposons que la mesure ρ vérifie (H). Alors il existe une variable aléatoire notée Γ_ρ définie sur $(\Omega^X, \mathcal{G}^X)$ à valeurs dans l'ensemble des mesures positives sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ telle que p.s. pour tout $T > 0$,*

$$(\Gamma_\rho, \mathbf{1}_{[0,T]\times\mathbb{R}^d}) < \infty \tag{II.27}$$

et telle que pour toute fonction $\varphi \in H_b$, on a p.s.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (V_\rho(\varepsilon), \varphi) = (\Gamma_\rho, \varphi).$$

Le processus $(\int_0^t \Gamma_\rho(ds, dy)\varphi(s, y), t \geq 0)$ est adapté à la filtration $(\mathcal{G}_t^X)_{t\geq 0}$. Il est p.s. continu et on a:

$$\mathbb{E}^X_\eta \int_0^t \Gamma_\rho(ds, dy)\varphi(s, y) = \int \eta(dx) \int_0^t ds \int \rho(dy) p(s, y - x)\varphi(s, y). \tag{II.28}$$

La formule (II.28) montre en particulier que la mesure $\Gamma_\rho(ds, dy)$ est p.s. portée par $\mathbb{R}^+ \times$ supp ρ.

On fixe ρ vérifiant (H) avec un coefficient $\beta \in (0,1)$. La démonstration de la proposition repose sur le lemme suivant:

Lemme II.5.2 *Pour toute mesure $\eta \in M_f$, pour tout entier p, pour tout réel $T > 0$, il existe une constante M_p telle que pour toute fonction $\varphi \in H_b^T$, pour tous ε, $\varepsilon' > 0$, pour tous $t, t' \in [0,T]$, on a*

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[\left[(V_\rho(\varepsilon), \varphi) - (V_\rho(\varepsilon'), \varphi) \right]^{2p} \right] \leq M_p \, \| \varphi \|^{2p} \left| \varepsilon - \varepsilon' \right|^{2p\beta}, \tag{II.29}$$

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[(V_\rho(\varepsilon), \varphi \mathbf{1}_{[t,t']})^{2p} \right] \leq M_p \, \| \varphi \|^{2p} \left| t - t' \right|^{2p\beta}. \tag{II.30}$$

Preuve du lemme II.5.2. La démonstration est en deux étapes. On établit dans une première étape une formule de moment pour les mesures aléatoires $V_\rho(\varepsilon)$.

Soient $T > 0$, $\varepsilon > 0$, et $\varphi \in H_b^T$. On suppose dans un premier temps que la fonction $\varphi(s,y)$ est continue en la variable s uniformément sur $\mathbb{R}^d$. A l'aide de (II.2) et (II.3), on en déduit que l'application

$$(s,x) \mapsto f_\varepsilon(s,x) := \int \varphi(s,y) p(\varepsilon, x-y) \rho(dy)$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Donc grâce au théorème II.4.7, p.s. le processus $((X_s, f_\varepsilon(s)), s \geq 0)$ est continu. De plus ce processus est nul pour $s \geq T$.

Soit $\tau = (0 = t_0, \ldots, t_l = T)$ une subdivision de $[0,T]$, on note $U(\tau) := \sum_{i=1}^l (t_i - t_{i-1})(X_{t_i}, f_\varepsilon(t_i))$. Une application directe du corollaire II.4.5 donne pour tout entier $p > 0$:

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[U(\tau)^p \right] = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1 + \cdots + n_k = p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}^\tau(0)), \tag{II.31}$$

où les fonctions c_n^τ sont définies par la récurrence (II.17) avec la condition initiale $c_1^\tau(r,x) := \mathbb{E}_x \sum_{i=1}^l (t_i - t_{i-1}) \mathbf{1}_{t_i \geq r} f_\varepsilon(t_i, B_{t_i - r})$. Notons que $\sup_\tau \| c_1^\tau \| < \infty$. On en déduit que pour tout entier p,

$$\sup_\tau \mathbb{E}_\eta^X \left[U(\tau)^{2p} \right] < \infty.$$

La famille $U(\tau)^p$ où τ décrit l'ensemble des subdivisions de $[0,T]$ est donc uniformément intégrable.

Par un argument de continuité, pour toute suite de subdivisions finies τ^m de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0, on a p.s.

$$\lim_{m \to \infty} U(\tau^m) = \int_0^\infty (X_s, f_\varepsilon(s)) \, ds.$$

De plus il est clair que quand $m \to \infty$, la fonction $c_1^{\tau^m}$ converge vers

$$J_\varepsilon(r,x) := \mathbb{E}_x \int_0^\infty ds \; f_\varepsilon(s+r, B_s) = \int_0^\infty ds \int \rho(dy) p(\varepsilon + s, x-y) \varphi(s+r, y).$$

Il en découle facilement que pour tout $n \geq 1$ les fonctions $c_n^{\tau^m}$ convergent simplement vers les fonctions c_n, définies par la récurrence (II.17) et la condition initiale $c_1(r,x) = J_\varepsilon(r,x)$. Par passage à la limite dans (II.31), on obtient

$$\mathbb{E}^X_\eta\,(V_\rho(\varepsilon),\varphi)^p = p!\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k+p}}{k!}\sum_{n_1+\cdots+n_k=p}\prod_{i=1}^{k}(\eta, c_{n_i}(0)). \tag{II.32}$$

Par un argument de classe monotone, l'égalité ci-dessus est vraie pour toute fonction $\varphi \in H_b$.

Ce résultat se généralise facilement à une famille finie de fonctions et de mesures. Soit un entier n, soient des mesures $\rho_1, \ldots, \rho_n$ vérifiant l'hypothèse (H), soient des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H_b$, soient des réels $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ strictement positifs, on a pour tout entier p:

$$\mathbb{E}^X_\eta\left[\left[\sum_{i=1}^{n}(V_{\rho_i}(\varepsilon_i),\varphi_i)\right]^p\right] = p!\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k+p}}{k!}\sum_{n_1+\cdots+n_k=p}\prod_{i=1}^{k}(\eta, c_{n_i}(0)). \tag{II.33}$$

où les fonctions c_n sont définies par la récurrence (II.17) avec la condition initiale $c_1(r,x) := \sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty ds \int \rho_i(dy)p(\varepsilon_i+s, x-y)\varphi_i(s+r,y)$.

Dans une deuxième étape, on utilise cette dernière formule pour démontrer les majorations (II.29) et (II.30). Soit $T>0$ fixé. Soit une fonction $\varphi \in H_b^T$. On conserve la notation $J_\varepsilon(r,x) := \int_0^\infty ds \int \rho(dy)\varphi(s+r,y)p(\varepsilon+s,x-y)$. Remarquons qu'en utilisant successivement les majorations (II.1) et (II.2), il vient pour $\varepsilon, \varepsilon' \in (0,1]$:

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(r,x) - J_{\varepsilon'}(r,x)| &\le c\,\|\varphi\| \int_0^{T-r} ds \int_{[s+\varepsilon, s+\varepsilon']}\frac{du}{u^{2-\beta}} \\ &\le c\,\|\varphi\|\,\mathbf{1}_{[0,T]}(r)\,\left|\varepsilon-\varepsilon'\right|^\beta, \end{aligned} \tag{II.34}$$

où on a utilisé $u \wedge 1 \ge cu$ pour $u \in [0, T+1]$.

Nous appliquons alors (II.33) avec $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon'$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Remarquons que dans ce cas $c_1 = J_\varepsilon - J'_\varepsilon$ et donc d'après le calcul précédent, on a $|c_1(r,x)| \le c\,\|\varphi\|\,\mathbf{1}_{[0,T]}(r)\,|\varepsilon-\varepsilon'|^\beta$. Une récurrence simple montre $|c_n(r,x)| \le c\,\|\varphi\|^n\,\mathbf{1}_{[0,T]}(r)\,|\varepsilon-\varepsilon'|^{n\beta}$. La majoration (II.29) découle alors de (II.33).

Pour la majoration (II.30), à l'aide des arguments ci-dessus, on remarque qu'il suffit de montrer que

$$c_1(r,x) := \int_0^\infty ds \int \rho(dy)\varphi(s+r,y)\mathbf{1}_{[t,t']}(r+s)p(\varepsilon+s,x-y)$$

est majoré par $c\,\|\varphi\|\,\mathbf{1}_{[0,T]}(r)\,|t-t'|^\beta$. Or cette dernière majoration est une simple application de (II.2). □

Preuve de la proposition II.5.1. Pour toute fonction $\varphi \in H_b$, on pose

$$\Gamma'_\rho(\varphi) := \liminf_{\varepsilon\to 0}(V_\rho(\varepsilon),\varphi).$$

On a vu au début de cette partie que p.s. pour toute fonction $\varphi \in H_b$, l'application $\varepsilon \mapsto (V_\rho(\varepsilon),\varphi)$ est continue sur $(0,\infty)$. Le lemme de Kolmogorov et la majoration (II.29) montrent que cette application admet une limite à droite en 0. En particulier, pour tout $\varphi \in H_b$, p.s., $\liminf_{\varepsilon\to 0}(V_\rho(\varepsilon),\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}(V_\rho(\varepsilon),\varphi)$.

On désire ensuite obtenir une formule pour les moments de Γ'_ρ. Pour cela, on part de la formule (II.32), avec $\varphi \in H_b$. On conserve les notations introduites dans la preuve du lemme précédent. Remarquons que les arguments de la démonstration de (II.34) entrainent la convergence de $J_\varepsilon(r,x)$ vers $\int_0^\infty ds \int \rho(dy)\varphi(s+r,y)p(s,x-y)$ pour la convergence simple bornée. La définition des fonctions c_n montre alors que le terme de droite de (II.32) converge quand $\varepsilon \to 0$. De plus d'après (II.29), $(V_\rho(\varepsilon),\varphi)$ converge vers $\Gamma'_\rho(\varphi)$ dans $L^p(\mathbb{P}^X_\eta)$ pour tout entier p. Par passage à la limite dans (II.32), on obtient alors une formule pour les moments de Γ'_ρ:

$$\mathbb{E}^X_\eta\left[\Gamma'_\rho(\varphi)^p\right] = p!\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k+p}}{k!}\sum_{n_1+\cdots+n_k=p}\prod_{i=1}^{k}(\eta, c_{n_i}(0))$$

où les fonctions c_n sont définies par la formule (II.17) avec la condition initiale $c_1(r,x) := \int_0^\infty ds \int \rho(dy)p(s,x-y)\varphi(s+r,y)$. On remarque alors grâce à (II.2) que pour toute fonction $\varphi \in H_b$, on a $\mathbb{E}^X_\eta \Gamma'_\rho(|\varphi|) < \infty$.

Montrons qu'il existe une variable aléatoire Γ_ρ à valeurs dans l'espace des mesures positives sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ telle que pour toute fonction $\varphi \in H_b$, p.s. $(\Gamma_\rho,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}(V_\rho(\varepsilon),\varphi)$.

On voit immédiatement que Γ'_ρ est p.s. linéaire (i.e. pour tous réels a, b, pour toutes fonctions $\varphi,\phi \in H_b$, on a p.s. $\Gamma'_\rho(a\varphi+b\phi) = a\Gamma'_\rho(\varphi)+b\Gamma'_\rho(\phi)$), p.s. positive (i.e. si $\varphi \in H_b$ est positive alors p.s. $\Gamma'_\rho(\varphi) \geq 0$) et p.s. finie sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ pour tout $T<\infty$. Soit $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positives de H^T_b qui converge simplement vers $\varphi_\infty \in H^T_b$. A l'aide de la formule pour les moments de Γ'_ρ (avec $\varphi = \varphi_\infty - \varphi_m$), et d'un argument de convergence dominée, il est aisé de vérifier que $\Gamma'_\rho(\varphi_m)$ converge dans $L^p(\mathbb{P}^X_\eta)$ vers $\Gamma'_\rho(\varphi_\infty)$. Or la suite $\Gamma'_\rho(\varphi_m)$ est p.s. croissante et majorée par $\Gamma'_\rho(\varphi_\infty)$, on en déduit qu'elle converge p.s. vers $\Gamma'_\rho(\varphi_\infty)$.

On utilise alors un résultat sur l'existence de noyaux qui découle facilement de la proposition 4.1 de [34]. Soient E un espace lusinien, $(\Omega,\mathcal{G})$ un espace mesurable et $(\mathbb{P}_i)_{i\in I}$ une famille de probabilités sur $(\Omega,\mathcal{G})$. Dans l'énoncé suivant, p.s. signifie $\mathbb{P}_i$-p.s. pour tout $i \in I$. Soit Λ une application définie sur $\{f \in \mathcal{B}(E), \|f\| < \infty\}\times\Omega$ à valeurs dans $\hat{\mathbb{R}}$, telle que pour toute $f \in \mathcal{B}(E)$ bornée, $\Lambda(f)$ est $\mathcal{G}$-mesurable.

Lemme II.5.3 *On suppose que Λ est p.s. finie, linéaire positive et que pour toute suite croissante $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $f_m \in \mathcal{B}_{b+}(E)$, qui converge vers $f \in \mathcal{B}_{b+}(E)$, on a p.s. $\Lambda(f_m)\uparrow\Lambda(f)$.*

Alors il existe un noyau fini K de $(\Omega,\mathcal{G})$ sur $(E,\mathcal{B}(E))$ tel que pour toute fonction bornée $f \in \mathcal{B}(E)$, on a p.s. $K(f) = \Lambda(f)$.

On applique le lemme en prenant $(\Omega,\mathcal{G},(\mathbb{P}_i)_{i\in I}) = (\Omega^X,\mathcal{G}^X,(\mathbb{P}^X_\eta)_{\eta\in M_f})$, pour tout entier n, $E_n := [n,n+1)\times\mathbb{R}^d$, et pour tout $f \in \mathcal{B}(E_n)$, la variable aléatoire $\Lambda_n(f) := \Gamma'_\rho(f)$. Pour tout entier n, Λ_n vérifie les hypothèses du lemme ci-dessus. Donc il existe un noyau K_n de $(\Omega^X,\mathcal{G}^X)$ sur $(E_n,\mathcal{B}(E_n))$ tel que p.s. $K_n(f) = \Lambda_n(f)$. On peut alors considérer le noyau Γ_ρ de $(\Omega^X,\mathcal{G}^X)$ sur $(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d))$ défini par:

$$\Gamma_\rho(\varphi) := \sum_{n\in\mathbb{N}} K_n(\varphi\mathbf{1}_{[n,n+1)\times\mathbb{R}^d}).$$

Comme Γ'_ρ est p.s. linéaire, on a pour tout $\varphi \in H_b$, p.s. $\Gamma_\rho(\varphi) = \Gamma'_\rho(\varphi)$. On a donc obtenu la première partie de la proposition. La formule (II.28) découle des formules ci-dessus pour les moments de Γ'_ρ.

Enfin remarquons que pour tout $\varphi \in H_b$, on a la convergence p.s. de $(V_\rho(\varepsilon),\varphi\mathbf{1}_{[0,t]})$ vers $(\Gamma_\rho,\varphi\mathbf{1}_{[0,t]})$. Donc il est clair que le processus $(\int_0^t \Gamma_\rho(ds,dy)\varphi(s,y), t \geq 0)$ est adapté à la filtration $(\mathcal{G}_t^X)_{t\geq 0}$. De plus à l'aide du lemme de Fatou et de l'inégalité (II.30), on a pour tout entier p

$$\mathbb{E}_\eta^X\left[\left[\int \Gamma_\rho(ds,dy)\varphi(s,y)\mathbf{1}_{[t,t']}(s)\right]^{2p}\right] \leq M_p\,\|\varphi\|^{2p}\left|t-t'\right|^{2p\beta}.$$

Comme le processus $(\int_0^t \Gamma_\rho(ds,dy)\,|\varphi(s,y)|, t\geq 0)$ est croissant, on déduit de l'inégalité précédente et du lemme de Kolmogorov, que ce processus est p.s. continu. □

II.6 Le temps local associé à D

On rappelle que l'on note $D = \operatorname{supp}\sigma$ et D^r l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ réguliers pour D pour le mouvement brownien. On introduit maintenant les éléments nécessaires à la démonstration des théorèmes de représentation du super-mouvement brownien avec catalyse. On rappelle d'abord les résultats de [44] concernant le temps local de D^r et les formules d'excursions. On étudie ensuite un cas particulier utile pour les formules de représentation.

Le temps local associé à D

On pose $M := \{t>0, B_t\in D^r\}$. Comme l'ensemble $D\backslash D^r$ est polaire (cf [53]), on a p.s. $M=\{t>0,B_t\in D\}$. L'ensemble aléatoire M est p.s. un fermé de $(0,\infty)$. Le processus $\mathbf{1}_D(B_t)$ étant optionnel, l'ensemble M l'est aussi. Il est de plus homogène en temps i.e. pour tout $t\geq 0$,

$$(M-t)\cap(0,\infty)=\{s>0,B_s\circ\theta_t\in D\}=M\circ\theta_t.$$

On utilise les notations classiques suivantes (cf [44]):

$$\begin{aligned} R :=& T_D=\inf\{s>0, s\in M\};\\ R_t :=& R\circ\theta_t;\\ G :=& \{t>0, R_{t-}=0,\ R_t>0\}.\end{aligned}$$

L'ensemble G est l'ensemble des extrémités gauches dans $(0,\infty)$ des intervalles contigus à M. L'ensemble G est p.s. dénombrable et p.s. $G\subset M$. Comme D^r est régulier pour lui même, p.s. M ne possède pas de points isolés.

D'après [44], il existe une unique fonctionnelle additive continue L de B telle que

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,dL_t\right]=\mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-R}]. \tag{II.35}$$

On a p.s. $(\operatorname{supp}\ dL_t)\bigcap(0,\infty)=\{t>0,B_t\in D^r\}=M$. Au sens de [9], le support de la fonctionnelle additive L est D^r. On dit que la fonctionnelle additive est le temps local de M ou le temps local de D^r.

La formule d'excursion

On note ω_δ la fonction constante égale à δ sur $\mathbb{R}^+$. Rappelons que l'on s'est placé sur l'espace canonique $\Omega = \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d \bigcup \{\delta\})$. On définit la fonction i_s de Ω dans Ω pour tout $s \geq 0$ par:

$$\begin{aligned} i_s(\omega)(t) =& \omega(t+s) \quad \text{si} \quad 0 \leq t < R_s \\ i_s(\omega)(t) =& \delta \quad \text{si} \quad t \geq R_s. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}^0 := \sigma(B_s, s \in \mathbb{R}^+)$. Le résultat suivant est un cas particulier de la proposition 9.2 de [44].

Proposition II.6.1 (Maisonneuve) *Il existe une famille universellement mesurable de mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{F}^0)$, $(H^x)_{x \in D^r}$, telle que pour tout processus Z prévisible positif, et pour toute fonction $f \in \mathcal{F}^0$ positive vérifiant $f(\omega_\delta) = 0$, on a*

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{s \in G} Z_s f \circ i_s \right] = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty Z_s H^{B_s}(f) dL_s \right].$$

Par des arguments classiques de classe monotone, on généralise cette égalité à une fonction positive $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}^0$.

Lemme II.6.2 *Avec les notations de la proposition précédente, pour tout processus Z prévisible positif et pour toute fonction positive $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}^0$ vérifiant $f(., \omega_\delta) = 0$, on a la relation*

$$\mathbb{E}_x \left[\sum_{s \in G} Z_s f(s,.) \circ i_s \right] = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty Z_s H^{B_s}(f(s,.)) dL_s \right].$$

Un cas particulier

Donnons un exemple utile pour la suite: soit une fonction positive $\phi \in \mathcal{F}^0$ telle que $\phi(\omega_\delta) = 0$, et soit t un réel positif fixé. On pose pour tout réel s positif et pour tout $\omega \in \Omega$, $f(s,\omega) := \phi \circ i_{t-s}(\omega) \mathbf{1}_{[0,t)}(s)$. Remarquons que la fonction positive $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}^0$. On peut alors calculer:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\sum_{s \in G} Z_s f(s,.) \circ i_s \right] &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{s \in G} Z_s \mathbf{1}_{s<t} \phi \circ i_{t-s} \circ i_s \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{R<t,\, t \notin M\}} Z_{g_t} \phi \circ i_t \right], \end{aligned}$$

où $g_t := \sup\{s < t, s \in M\}$ (la condition $\{R < t, t \notin M\}$ est équivalente à $0 < g_t < t$). En prenant $Z := 1$ et $\phi(\omega) := \varphi(\omega(0))$ où $\varphi \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}^d)$, et en utilisant le lemme II.6.2, on trouve:

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty 1_{s<t} \, H^{B_s}(\varphi(\omega(t-s))) dL_s = \mathbb{E}_x \left[\varphi(B_t) \mathbf{1}_{t>T_D} \mathbf{1}_{B_t \in D^c} \right]. \tag{II.36}$$

II.7 Formules de représentation

Dans ce paragraphe et le suivant, on fait l'hypothèse suivante (H'): *La mesure de Revuz notée μ associée au temps local L vérifie la condition d'intégrabilité (H).* Rappelons (cf (II.6)) que L et μ sont liés par la relation: pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{E}_\eta \int_0^\infty \varphi(s, B_s) dL_s = \int \eta(dx) \int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(s, x-y) \varphi(s, y). \tag{II.37}$$

La condition (H') est automatiquement vérifiée lorsque $d = 1$. En dimension supérieure, nous montrons en appendice que la condition (H') est vérifiée dès que D satisfait une hypothèse de régularité assez faible. En général, on sait seulement que $\int_{B(x,1)} |x-y|^{-d+2} \mu(dy)$ (resp. $\int \log_+ \left(|x-y|^{-1}\right) \mu(dy))$ est uniformément borné sur $\mathbb{R}^d$ si $d \geq 3$ (resp. $d = 2$), ce qui est légèrement moins fort que l'hypothèse (H) sur μ.

On note Q_t le semigroupe de transition du mouvement brownien tué sur D: pour tous $\varphi \in \mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^d)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$,

$$Q_t \varphi(x) := \mathbb{E}_x \left[\varphi(B_t) \mathbf{1}_{\{t < T_D\}} \right].$$

Enfin pour toute mesure $\eta \in M_f$, on note ηQ_t la mesure sur $\mathbb{R}^d$ définie par $(\eta Q_t, \varphi) := (\eta, Q_t \varphi)$, $\varphi \in \mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^d)$.

Pour tout réel $t > 0$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, on considère la fonction:

$$\gamma_t^\varphi(s, x) := \mathbf{1}_{s<t} H^x[\phi \circ i_{t-s}] \mathbf{1}_{D^r}(x), \quad (s, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d,$$

où pour tout $\omega \in \Omega$, $\phi(\omega) := \varphi(\omega(0)) \mathbf{1}_{D^c}(\omega(0))$. On a déjà remarqué que l'application $(s, \omega) \mapsto \phi \circ i_{t-s}(\omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}^0$-mesurable. Comme (H^x) est une famille universellement mesurable, la fonction γ_t^φ est $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$-mesurable. De plus elle est à support dans $[0, t] \times \mathbb{R}^d$.

Grâce à l'hypothèse (H'), il est possible de considérer la mesure aléatoire Γ_ρ construite dans la proposition II.5.1 pour $\rho = \mu$. Il existe un unique prolongement de Γ_μ à $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ que l'on continue de noter Γ_μ. On introduit pour tout $t > 0$ la mesure aléatoire Θ_t définie pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$ par

$$(\Theta_t, \varphi) := (\Gamma_\mu, \gamma_t^\varphi) = \int \Gamma_\mu(ds, dy) \mathbf{1}_{s<t} H^y(\varphi(\omega(t-s))). \tag{II.38}$$

On vérifie facilement que le processus $\Theta = (\Theta_t, t > 0)$ est à valeurs dans M_f. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, on a en utilisant successivement (II.28), (II.37), et (II.36):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\eta^X (\Theta_t, \varphi) &= \mathbb{E}_\eta^X (\Gamma_\mu, \gamma_t^\varphi) \\
&= \int \eta(dx) \int_0^{+\infty} ds \int \mu(dy) p(s, x-y) \gamma_t^\varphi(s, y) \\
&= \mathbb{E}_\eta \int_0^{+\infty} dL_s H^{B_s} \left[\varphi(\omega(t-s))\right] \mathbf{1}_{t>s} \\
&= \mathbb{E}_\eta \left[\varphi(B_t) \mathbf{1}_{\{t > T_D,\, B_t \in D^c\}} \right].
\end{aligned}$$

Remarquons que supp $\Theta_t \subset D^c$.

Le théorème suivant fournit une représentation de la mesure X_t sur le complémentaire de D. Cette représentation fait intervenir deux termes. L'un, ηQ_t, correspond intuitivement aux "particules" qui n'ont pas visité l'ensemble de catalyse entre les instants 0 et t. L'autre, Θ_t, rend compte au contraire des particules "libérées" par l'ensemble de catalyse.

Théorème II.7.1 *Pour toute mesure $\eta \in M_f$, $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s., on a pour tout $t > 0$,*

$$\mathbf{1}_{D^c}.X_t = \Theta_t + \eta Q_t.$$

Preuve. Soit un réel $t > 0$ fixé. Il est facile de généraliser la formule (II.33) de la manière suivante: pour tout entier p, pour $\varepsilon > 0$, pour toutes fonctions bornées $f \in H_b$, $\psi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathbb{E}_\eta^X\left[[(V_\mu(\varepsilon), f) + (X_t, \psi)]^p\right] = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(0)),$$

où les fonctions c_n sont définies par la récurrence (II.17) et la condition initiale

$$c_1(r,x) = \int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(\varepsilon + s, y - x) f(r+s, y) + \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x \psi(B_{t-r}).$$

En utilisant les arguments de la preuve de la proposition II.5.1, on obtient par passage à la limite:

$$\mathbb{E}_\eta^X\left[[(\Gamma_\mu, f) + (X_t, \psi)]^p\right] = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(0)), \tag{II.39}$$

où les fonctions c_n sont définies par la récurrence (II.17) et la condition initiale:

$$c_1(r,x) = \int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(s, y - x) f(r+s, y) + \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x \psi(B_{t-r}).$$

Remarquons alors que par des arguments de convergence dominée et d'uniforme intégrabilité, le résultat s'étend aux fonctions $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ telles que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d, r \in \mathbb{R}^+} \int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(s, y-x) \left| f(r+s, y) \right| < \infty \tag{II.40}$$

(cette condition assure que les fonctions c_n intervenant dans le membre de droite de (II.39) sont uniformément bornées). Il s'étend alors immédiatement aux fonctions $f \in \mathcal{B}^*(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ satisfaisant (II.40).

Soit une fonction φ positive bornée à support dans D^c. La fonction $f = \gamma_t^\varphi$ vérifie (II.40). En effet, en raisonnant comme dans le calcul effectué ci-dessus pour $\mathbb{E}_\eta^X(\Theta_t, \varphi)$, on a:

$$\int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(s, y-x) \gamma_t^\varphi(r+s, y) = \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x\left[\varphi(B_{t-r}) \mathbf{1}_{\{t-r > T_D, B_{t-r} \in D^c\}}\right].$$

On peut appliquer la formule (II.39) avec le choix $f = \gamma_t^\varphi$, $\psi = -\varphi$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}
c_1(r,x) &= \int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(s, y-x) \gamma_t^\varphi(r+s, y) - \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x \varphi(B_{t-r}) \\
&= \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x\left[\varphi(B_{t-r}) \mathbf{1}_{\{t-r > T_D, B_{t-r} \in D^c\}} - \varphi(B_{t-r})\right] \\
&= -\mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x\left[\varphi(B_{t-r}) \mathbf{1}_{\{t-r \le T_D\}}\right] \\
&= -\mathbf{1}_{[0,t]}(r) Q_{t-r} \varphi(x),
\end{aligned}$$

où pour la troisième égalité, on a utilisé le fait que φ s'annule sur D. En particulier $c_1(r,x)=0$ si $x \in D^r$. Comme la fonctionnelle A ne croît p.s. que sur $\{s>0, B_s \in D\} = \{s>0, B_s \in D^r\}$, on en déduit aussitôt que

$$c_2(0,x) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty c_1(s,B_s)^2 dA_s = 0.$$

Ces observations nous permettent de calculer pour tout $t>0$,

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[\left((\Theta_t,\varphi) + (\eta Q_t,\varphi) - (X_t,\varphi) \right)^2 \right] = \mathbb{E}_\eta^X \left[\left((\Theta_t,\varphi) - (X_t,\varphi) \right)^2 \right] \\ + (\eta Q_t,\varphi)^2 + 2(\eta Q_t,\varphi)\mathbb{E}_\eta^X \left[(\Theta_t,\varphi) - (X_t,\varphi) \right]. \quad \text{(II.41)}$$

D'après (II.39) et les calculs ci-dessus pour les fonctions $c_1(0,x)$, $c_2(0,x)$ on a

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[(\Theta_t,\varphi) - (X_t,\varphi) \right] = (\eta, c_1(0)) = -(\eta Q_t,\varphi),$$

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[\left((\Theta_t,\varphi) - (X_t,\varphi) \right)^2 \right] = -2(\eta, c_2(0)) + (\eta, c_1(0))^2 = (\eta Q_t,\varphi)^2.$$

Il en découle aussitôt que le terme de droite de (II.41) est nul, et donc pour tout $t>0$, $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s., $(X_t,\varphi) = (\Theta_t,\varphi) + (\eta Q_t,\varphi)$. Enfin, il est facile de vérifier que le processus $((\Theta_t + \eta Q_t,\varphi), t>0)$ est $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s. continu (voir les arguments de la partie suivante). D'après la partie II.4, le processus $((X_t,\varphi), t>0)$ est $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s. continu. Donc on a $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s. pour tout $t>0$, $(X_t,\varphi) = (\Theta_t + \eta Q_t,\varphi)$. Il en découle que $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s. pour tout $t>0$, $\mathbf{1}_{D^c}.X_t = \Theta_t + \eta Q_t$. □

Corollaire II.7.2 *Supposons que D soit de mesure de Lebesgue nulle. Alors $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s., pour tout $t>0$,*

$$X_t = \Theta_t + \eta Q_t.$$

Preuve. D'après le théorème II.4.9 le processus $(X_t, \mathbf{1}_D)$ est p.s. continu sur $(0,\infty)$. La formule de moment d'ordre 1 (II.22) et l'hypothèse sur D montrent que pour tout $t>0$, $\mathbb{P}_\eta^X((X_t,\mathbf{1}_D)=0)=1$. On en déduit que p.s. pour tout $t>0$, $(X_t,\mathbf{1}_D)=0$. Le corollaire découle alors du théorème II.7.1. □

II.8 Existence et régularité de la densité du superprocessus X par rapport à la mesure de Lebesgue en dehors de D

A l'aide de la formule de représentation précédente, il est alors possible de démontrer l'existence et la régularité de la densité du super-mouvement brownien avec catalyse. On note Δ le Laplacien en dimension d.

Théorème II.8.1 *Soit $\eta \in M_f$. $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s., pour tout $t>0$, la mesure aléatoire X_t possède sur D^c une densité $z(t,y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette densité est de classe C^∞ sur $(0,\infty)\times D^c$. De plus on a $\mathbb{P}_\eta^X$-p.s. pour tout $(t,y)\in(0,\infty)\times D^c$,*

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,y) = \frac{1}{2}\Delta z(t,y).$$

Preuve. On note q la densité de transition du mouvement brownien tué sur D: pour tout $(t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$q(t,x,y) := p(t,x-y) - \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{T_D<t} p(t-T_D, B_{T_D} - y) \right]. \tag{II.42}$$

On définit $D_\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^d, d(x,D) \le \varepsilon \right\}$ et $T_\varepsilon := \inf\{t > 0, \omega(t) \in D_\varepsilon^c\}$. En utilisant la propriété de Markov forte des mesures H^x pour le noyau de transition Q_t (cf [44] théorème 5.1), on obtient pour toute fonction φ positive mesurable à support dans $D_{2\varepsilon}^c$, pour tous $u < t$ et pour tout $x \in D^r$,

$$\begin{aligned} H^x(\varphi(\omega(t-u))) &= H^x \left(\int q(t-u-T_\varepsilon, \omega(T_\varepsilon), y) \mathbf{1}_{t-u-T_\varepsilon>0}\ \varphi(y) dy \right) \\ &= \int dy\ \varphi(y) H^x \left(q(t-u-T_\varepsilon, \omega(T_\varepsilon), y) \mathbf{1}_{t-u-T_\varepsilon>0} \right). \end{aligned}$$

En reportant cette égalité dans la définition (II.38) de la mesure aléatoire Θ, on voit que la mesure Θ_t possède une densité θ_t par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette densité est donnée pour tout $y \in D_{2\varepsilon}^c$ par

$$\theta_t(y) := \int \Gamma_\mu(du, dx) H^x \left(q(t-u-T_\varepsilon, \omega(T_\varepsilon), y) \mathbf{1}_{t-u-T_\varepsilon>0} \right). \tag{II.43}$$

Pour étudier la régularité de θ_t, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme II.8.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $(t,y) \mapsto q(t,x,y)$ est de classe C^∞ sur $(0,\infty) \times D^c$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^p$, pour tous $\varepsilon > 0$, $\delta_0 > 0$, on a*

$$\sup \left\{ \left| \frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n \partial y^m} q(t,x,y) \right| ; t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in D_\varepsilon^c, |x-y| > \delta_0 \right\} < \infty.$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a:

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t,x,y) = \frac{1}{2} \Delta_y q(t,x,y), \quad (t,y) \in (0,\infty) \times D^c.$$

Preuve. La première assertion du lemme se démontre par récurrence à l'aide de l'expression de q dans (II.42) et grâce à des arguments classiques de dérivation sous le signe somme. La deuxième assertion est classique. □

Lemme II.8.3 *On a pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{x \in D^r} H^x \left[T_\varepsilon < \infty \right] < \infty$.*

Preuve. Soit $r_0 > 0$. En utilisant la propriété forte de Markov sous la mesure H^x, il vient:

$$\begin{aligned} H^x(T_D > r_0) &\ge H^x \left(T_\varepsilon < \infty, T_D - T_\varepsilon > r_0 \right) \\ &\ge H^x \left(T_\varepsilon < \infty, \mathbb{E}_{\omega(T_\varepsilon)}[T_D > r_0] \right) \\ &\ge H^x \left(T_\varepsilon < \infty, \mathbb{E}_{\omega(T_\varepsilon)}[\forall s \le r_0, |B_s - x_0| \le \frac{\varepsilon}{2})]_{|x_0=\omega(T_\varepsilon)}] \right) \\ &\ge c H^x \left(T_\varepsilon < \infty \right). \end{aligned}$$

De plus on sait par [44] théorème 4.1 que pour tout $x \in D^r$, on a $H^x(1 - \mathrm{e}^{-T_D}) \le 1$ ce qui implique que $H^x(T_D > r_0) \le [1 - \mathrm{e}^{-r_0}]^{-1} < \infty$, pour tout $r_0 > 0$. On en conclut que $\sup_{x \in D^r} H^x \left[T_\varepsilon < \infty \right] < \infty$. □

Fin de la preuve du théorème II.8.1.
On vérifie aisément à l'aide du lemme II.8.2 ci-dessus que la fonction $(t,y) \mapsto \int q(t,x,y)\eta(dx)$ qui est la densité de la mesure ηQ_t par rapport à la mesure de Lebesgue, est de classe C^∞ sur $(0,\infty) \times D^c$. De plus cette fonction est solution de l'équation de la chaleur sur $(0,\infty) \times D^c$.

On a vu que Θ_t posséde une densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par (II.43). Un argument de convergence dominée reposant sur les lemmes II.8.2, II.8.3 et la propriété (II.27), montre que la fonction $(t,y) \mapsto \theta_t(y)$ est continue sur $(0,\infty) \times D^c$ en dehors d'un ensemble de probabilité nulle. Un raisonnement par récurrence utilisant les mêmes arguments et le théorème de dérivation sous le signe somme montre que p.s. la fonction $(t,y) \mapsto \theta_t(y)$ est de classe C^∞. Enfin, comme la fonction $(t,y) \mapsto q(t,x,y)$ est solution de l'équation de la chaleur sur $(0,\infty) \times D^c$, on vérifie à l'aide de (II.43) qu'il en est de même pour θ. On conclut alors à l'aide du théorème de représentation. $\square$

Remarque. Lorsque D est de mesure de Lebesgue nulle, les théorèmes II.7.1 et II.8.1 entraînent que p.s. pour tout $t > 0$, X_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On obtient ainsi une généralisation d'un résultat de [14] pour le cas d'un point de catalyse en dimension un (voir aussi [15] pour certaines extensions en dimension supérieures).

II.9 Mesure martingale orthogonale associée à X

Les résultats de cette partie sont vrais sans l'hypothèse (H'). On utilise les mesures aléatoires construites dans le paragraphe II.5 pour identifier la mesure de covariance de la mesure martingale associée à X. Rappelons d'abord brièvement la construction de cette mesure martingale.

On note $C_b^{2,1}$ l'ensemble des fonctions bornées $\varphi \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ telles que $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ existent et soient continues bornées. Pour toute fonction $\varphi \in C_b^{2,1}$, on considère

$$M\varphi_t := (X_t, \varphi(t)) - (X_0, \varphi(0)) - \int_0^t \left(X_s, \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s) + \frac{1}{2}\Delta\varphi(s) \right) ds.$$

Le membre de droite est bien défini, car le processus $(X_s, \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s) + \frac{1}{2}\Delta\varphi(s))$ est p.s. continu sur $[0,t]$. En utilisant la propriété de Markov du processus X, et le calcul des moments de X, on vérifie facilement que le processus $(M\varphi_t, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{G}_t^X)_{t\geq 0}$-martingale. Remarquons que grâce à la propriété de Markov du processus X, et aux formules (II.22) et (II.23), on calcule pour toutes fonctions φ, ϕ de classe $C_b^{2,1}$

$$\mathbb{E}_\eta^X M\varphi_t M\phi_s = \int \eta(dx) \int_0^{t\wedge s} du \int \sigma(dy) p(u, x-y) \varphi(u,y) \phi(u,y). \tag{II.44}$$

La martingale $(M\varphi_t, t \geq 0)$ est donc de carré intégrable.

De plus l'application $\varphi \mapsto M\varphi$ est une isométrie d'espace vectoriel de $H_b \bigcap C_b^{2,1}$ muni de la semi-norme

$$\| \varphi \|_\sigma^2 := \mathbb{E}_\eta \int_0^\infty \varphi(u, B_u)^2 dA_u$$

dans l'ensemble des martingales continues de carrés intégrables muni de la norme $\mathbb{E}_\eta^X M_\infty^2$. Par des arguments de densité, on peut prolonger M à tout H_b. Il est alors facile de vérifier que dans la terminologie de [60], M est une mesure martingale. De plus on déduit de la formule (II.44) que pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, tels que $A \bigcap B = \emptyset$, on a pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}_\eta^X (M\mathbf{1}_A)_t (M\mathbf{1}_B)_t = 0$. Par définition M est alors une mesure martingale orthogonale.

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, rappelons que puisque la mesure σ vérifie la condition (H), on peut considérer la mesure aléatoire Γ_σ construite dans la proposition II.5.1. On identifie alors la mesure de covariance de M à l'aide de la mesure aléatoire Γ_σ.

Proposition II.9.1 *Pour toute fonction bornée $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, p.s. pour tout $t \geq 0$, on a*

$$< M\varphi >_t = \int_0^t \Gamma_\sigma(ds, dy)\varphi(s, y)^2.$$

Preuve. On utilise les notations du paragraphe II.5. D'après la définition de $V_\rho(\varepsilon)$ avec $\rho := \sigma$, et en utilisant la propriété de Markov pour X, on a pour tous $t \geq 0$, $s \geq 0$, $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[\int_s^{t+s} V_\sigma(\varepsilon)(du, dy)\varphi(u, y)^2 \mid \mathcal{G}_s^X \right]$$
$$= \int X_s(dx) \int_0^t du \int \sigma(dy) \int dz\ p(u, x - z)p(\varepsilon, z - y)\varphi(u + s, y)^2.$$

Par un argument de convergence dominée utilisant à nouveau (II.2) et (II.3) , le membre de droite de l'égalité ci-dessus converge vers

$$\int X_s(dx) \int_0^t du \int \sigma(dy)\ p(u, x - y)\varphi(u + s, y)^2 = \mathbb{E}_{X_s} \int_0^t \varphi(u + s, B_u)^2 dA_u.$$

De plus on a vu que la variable aléatoire $(V_\sigma(\varepsilon), \varphi\mathbf{1}_{[s,t+s]})$ converge vers $(\Gamma_\sigma, \varphi\mathbf{1}_{[s,t+s]})$ dans $L^2(\mathbb{P}_\eta^X)$. On a donc finalement par passage à la limite:

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[\int_s^{t+s} \Gamma_\sigma(du, dy)\varphi(u, y)^2 \mid \mathcal{G}_s^X \right] = \mathbb{E}_{X_s} \int_0^t \varphi(u + s, B_u)^2 dA_u.$$

Par ailleurs, en utilisant la propriété de Markov du processus X et la formule (II.44), on obtient pour tous $t \geq 0$, $s \geq 0$,

$$\mathbb{E}_\eta^X \left[[M\varphi_{t+s}]^2 \mid \mathcal{G}_s^X \right] = [M\varphi_s]^2 + \mathbb{E}_{X_s} \int_0^t \varphi(s + u, B_u)^2 dA_u.$$

Comme le processus $\left(\int_0^t \Gamma_\sigma(ds, dy)\varphi(s, y)^2, t \geq 0\right)$ est croissant, continu, adapté et nul en 0, le processus

$$\left(< M\varphi >_t - \int_0^t \Gamma_\sigma(ds, dy)\varphi(s, y)^2, t \geq 0\right)$$

est une martingale continue à variation finie nulle en 0. Cette martingale est donc identiquement nulle. $\square$

Appendice

On désire donner une hypothèse sur D qui entraîne la condition (H') introduite dans le paragraphe II.7. Rappelons que B désigne un mouvement brownien d-dimensionnel. Soit $C_n(x) := \left\{y \in \mathbb{R}^d, 2^{-n} \leq |x-y| \leq 2^{-n+1}\right\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On introduit l'hypothèse (H"):

– *si $d = 2$, il existe une constante $b > 0$ et un entier n_0 tels que pour tous $x \in D$, $n \geq n_0$,*

$$\inf_{y, |x-y| = 2^{-n-4}} \mathbb{P}_y(T_D < T_{C_n(x)}) \geq b > 0,$$

où $T_{C_n(x)} := \inf\{t > 0, B_t \in C_n(x)\}$,

– *si $d \geq 3$, il existe une constante $b > 0$ et un entier n_0 tels que pour tous $x \in D$, $n \geq n_0$,*

$$\operatorname{cap}(D \bigcap C_n(x)) \geq b \operatorname{cap}(C_n(x)),$$

où $\operatorname{cap}(A)$ est la capacité newtonienne ($\operatorname{cap}(C_n(x)) = c(d)2^{-n(d-2)}$).

En dimension $d \geq 3$, l'hypothèse (H") est vérifiée lorsque D est l'adhérence ou la frontière d'un domaine lipschitzien (borné) ou bien encore si D est une sous variété de dimension $d-1$. Lorsque $d = 2$, on voit facilement que l'hypothèse (H") est satisfaite si D est un compact connexe non réduit à un point.

Lemme *La condition (H") implique (H').*

Preuve. Rappelons que $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ désigne la filtration complétée associée à B. Soit ζ une variable exponentielle de paramètre 1 indépendante de B. Soit

$$\mathcal{L}_D := \sup\{t > 0, t < \zeta, B_t \in D\}$$

avec la convention usuelle $\sup\{\emptyset\} = 0$.

Montrons dans un premier temps que pour tout $\beta \in (0,1)$,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathcal{L}_D^{-\beta} \mathbf{1}_{\mathcal{L}_D > 0}\right] \geq c \int_{B(x,1)} \frac{\mu(dy)}{|x-y|^{d-2+2\beta}}, \tag{II.45}$$

où μ est la 1-mesure d'équilibre de D (cf paragraphe II.7) et la constante c ne dépend que de d et de β. Remarquons que

$$\mathbb{P}_x[\mathcal{L}_D > 0] = \mathbb{P}_x[T_D < \zeta] = \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-T_D}\right].$$

Il découle de (II.35) et de (II.37) que $\mathbb{P}_x[\mathcal{L}_D > 0] = \int \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\, p(s, x-y) ds\ \mu(dy)$. On déduit de l'égalité ci-dessus et de la propriété de Markov (voir [53] p.61-62) pour le processus $(B_{t \wedge \zeta}, t \geq 0)$, que

$$\mathbb{P}_x[\mathcal{L}_D > t] = \int_t^\infty ds\ \mathrm{e}^{-s} \int p(s, x-y)\mu(dy).$$

Donc on en déduit alors que pour $0 < \beta < 1$,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathcal{L}_D^{-\beta} \mathbf{1}_{\mathcal{L}_D > 0}\right] = \int_0^\infty ds\ s^{-\beta}\, \mathrm{e}^{-s} \int p(s, x-y)\mu(dy),$$

et l'inégalité (II.45) en découle facilement.

On veut ensuite majorer le terme de gauche de (II.45). Soit $x \in D$. Sous l'hypothèse (H"), on a $\mathbb{P}_x$-p.s., $\mathcal{L}_D > 0$. On note $S_t := \sup_{s \leq t} |B_t - x|$. Soit la suite de temps d'arrêt $\sigma_n := \inf \{t > 0, S_t > 2^{-4n}\}$. On a alors pour tout $m > 1$,

$$\mathbb{P}_x \left[S_{\mathcal{L}_D} < 2^{-8m}\right] \leq \mathbb{P}_x \left[\bigcap_{n=m}^{2m-1} \{\forall t \in [\sigma_{n+1}, \sigma_n], B_t \notin D\}\right] + \mathbb{P}_x [\zeta \leq \sigma_m] \tag{II.46}$$

On a facilement $\mathbb{P}_x [\zeta \leq \sigma_m] \leq \mathbb{E}_x [\sigma_m] = 2^{-8m} \mathbb{E}_x [\sigma_0]$.
Si $d = 2$, on a par (H"): pour $4n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}_x \left[\exists t \in [\sigma_{n+1}, \sigma_n], B_t \in D \mid \mathcal{F}_{\sigma_{n+1}}\right] \geq b > 0.$$

Si $d \geq 3$, on vérifie aisément (cf [36] p256) que pour $4n + 2 \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x \left[\exists t \in [\sigma_{n+1}, \sigma_n], B_t \in D \mid \mathcal{F}_{\sigma_{n+1}}\right] &\geq \mathbb{P}_x \left[\exists t \in [\sigma_{n+1}, \sigma_n], B_t \in D \bigcap C_{4n+2}(x) \mid \mathcal{F}_{\sigma_{n+1}}\right] \\
&\geq c\, 2^{(4n+2)(d-2)} \operatorname{cap}(D \bigcap C_{4n+2}(x)) \\
&\geq c' > 0,
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (H"). Remarquons que c' est indépendant de x. On peut supposer $c' \in (0, b \wedge (1/2))$. Par applications successives de la propriété de Markov forte à (II.46), il vient en utilisant les majorations ci-dessus, pour tout $m \geq (n_0 + 2)/4$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x \left[S_{\mathcal{L}_D} < 2^{-8m}\right] &\leq \left(\prod_{n=m}^{2m-1} (1 - c')\right) + 2^{-8m} \mathbb{E}_x [\sigma_0] \\
&\leq c(1 - c')^m.
\end{aligned}$$

On choisit ensuite $\beta' > 0$ (indépendamment de x), tel que $2^{8\beta'}(1 - c') < 1$, et il vient:

$$\mathbb{E}_x S_{\mathcal{L}_D}^{-\beta'} \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(8n+8)\beta'} \mathbb{P}_x \left[S_{\mathcal{L}_D} < 2^{-8n}\right] \leq c, \tag{II.47}$$

où c est indépendant de x.

D'autre part, pour tout $\delta \in (0, 1/2)$ et pour tout $p > 0$, on sait que

$$\mathbb{E}_x \left[\sup_{t \leq 1} \left(\frac{S_t}{t^\delta}\right)^p\right] \leq C(p, \delta) < \infty. \tag{II.48}$$

A l'aide de l'inégalité de Hölder on déduit facilement de (II.47) et de (II.48) que pour $0 < \beta < \delta\beta'$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \left[\mathcal{L}_D^{-\beta}\right] &\leq \mathbb{E}_x \left[(\mathcal{L}_D \wedge 1)^{-\beta}\right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{S_{\mathcal{L}_D \wedge 1}}{(\mathcal{L}_D \wedge 1)^\delta}\right)^{\beta/\delta} S_{\mathcal{L}_D \wedge 1}^{-\beta/\delta}\right] \leq C < \infty.
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la propriété de Markov forte, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}_x \left[\mathcal{L}_D^{-\beta} \mathbf{1}_{\mathcal{L}_D > 0}\right] = \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{T_D < \infty} \mathbb{E}_{B_{T_D}} \left[(a + \mathcal{L}_D)^{-\beta}\right]_{|a = T_D}\right] \leq C.$$

On déduit de la majoration ci-dessus et de (II.45) que l'hypothèse (H') est vérifiée. $\square$

Chapitre III

Quelques propriétés de l'image du super-mouvement brownien

III.1 Introduction

Super-Brownian motion, denoted here by $X = (X_t, t \geq 0)$, is a measure-valued process in $\mathbb{R}^d$. It can be obtained as a limit of branching Brownian particle systems. We refer to Dynkin [24, 28] for such an approximation in a more general setting. Another way to study super-Brownian motion, is to use the path-valued process, called the Brownian snake, which was introduced by Le Gall [38, 40]. For every bounded Borel set $A \subset \mathbb{R}^d$, we denote by $A^\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^d; d(x, A) \leq \varepsilon\right\}$ and by $|A|$ the Lebesgue measure of the set A. Recently Tribe [59] proved a convergence result for the volume of the ε-neighborhood of the support at time $t > 0$, supp X_t, of super-Brownian motion in dimension $d \geq 3$. More precisely, Tribe showed that the quantity $\varepsilon^{2-d} \left|(\text{supp } X_t)^\varepsilon \cap A\right|$ converges a.s. to a deterministic constant times $\int \mathbf{1}_A(x) X_t(dx)$. Using results of Le Gall [39] on hitting probabilities for the Brownian snake, we give a similar result for the range of the Brownian snake. As a corollary, we get the analogous result (theorem III.3.1) for the range of super-Brownian motion after time $t > 0$, $\mathcal{R}_t(X)$ defined as the closure of $\cup_{s \geq t} \text{supp } X_s$. More precisely, we show that there exists a positive constant a_0 depending only on d such that for every Borel set $A \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 5$, for every $t > 0$, we have a.s.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{4-d} \left|\mathcal{R}_t(X)^\varepsilon \cap A\right| = \mathrm{a}_0 \int_t^\infty ds \int \mathbf{1}_A(z) X_s(dz). \tag{III.1}$$

Pemantle and Peres [47] defined the notion of capacity-equivalence for two random Borel sets, and later Pemantle and al. [48] showed that the range of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, is capacity-equivalent to $[0,1]^2$. As a consequence of the previous results , we show (proposition III.5.3) that a.s. on $\{X_t \neq 0\}$, the set supp $X_t \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, is capacity-equivalent to $[0,1]^2$, and that a.s. the range $\mathcal{R}_t(X) \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 5$, is capacity-equivalent to $[0,1]^4$.

Let us now describe more precisely the contents of the following sections. In section III.2, we recall the definition of the path-valued process $W = (W_s, s \geq 0)$ called the Brownian snake. The process W takes values in the set $\mathcal{W}$ of all stopped paths in $\mathbb{R}^d$. A stopped path w is a continuous mapping from $[0, \zeta_{(\mathrm{w})}]$ to $\mathbb{R}^d$. The nonnegative real $\zeta_{(\mathrm{w})}$ is called the lifetime of w. We denote by $\hat{\mathrm{w}} = \mathrm{w}(\zeta_{(\mathrm{w})})$ the end point of the stopped path. For every fixed $s \geq 0$, the law of W_s is the law of a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ started at x_0 stopped at lifetime $\zeta_s = \zeta_{(W_s)}$. The lifetime process evolves as a reflecting Brownian motion in $\mathbb{R}^+$. Conditionally on $(\zeta_s, s \geq 0)$, W is a time-inhomogeneous Markov process whose transition kernels are characterized as follows, if $s' > s \geq 0$:

- $W_{s'}(t) = W_s(t)$ for every $0 \leq t \leq \inf_{r \in [s,s']} \zeta_r =: m(s,s')$.
- The path $(W_{s'}(t + m(s,s')) - W_{s'}(m(s,s')), 0 \leq t \leq \zeta_{s'} - m(s,s'))$ is independent of W_s and distributed as a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$, started at 0.

Since obviously the trivial path x_0 (with lifetime $\zeta = 0$ and $\mathrm{x}_0(0) = x_0$) is a recurrent point for W, we can consider the excursion measure $\mathbb{N}_{x_0}$ away from $\{\mathrm{x}_0\}$. Under $\mathbb{N}_{x_0}$, the lifetime process $(\zeta_s, s \geq 0)$ is distributed according to the Itô measure of positive excursions of linear Brownian motion. We set $\sigma = \inf\{s > 0; \zeta_s = 0\}$ which represents the duration of the excursion. We define a measure-valued process Y on $\mathbb{R}^d$ by setting for every $t > 0$, for every nonnegative measurable function φ on $\mathbb{R}^d$,

$$(Y_t, \varphi) = \int_0^\sigma dl_s^t \, \varphi(\hat{W}_s),$$

where l^t is the local time at level t of the lifetime process $(\zeta_s, s \geq 0)$. As usual the range of the Brownian snake is defined as

$$\mathcal{R}(W) = \{W_s(t); 0 \leq t \leq \zeta_s, 0 \leq s \leq \sigma\}.$$

Let ν be a finite measure on $\mathbb{R}^d$. Let $\sum_{i \in I} \delta_{W^i}$ be a Poisson measure on $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W})$ with intensity $\int \nu(dx)\mathbb{N}_x[\cdot]$. We define a measure-valued process $X = (X_t, t \geq 0)$ by $X_0 = \nu$ and for $t > 0$, $X_t = \sum_{i \in I} Y_t(W^i)$. Then X is a super-Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ with $X_0 = \nu$ (we will write $\mathbb{P}_\nu^X$ for the distribution of this process).

In section III.2.3, we consider $T_{(x,\varepsilon)}$ the hitting time for the Brownian snake of the closed ball with center x and radius ε (denoted by $\bar{B}(x,\varepsilon)$):

$$T_{(x,\varepsilon)} = \inf\left\{s \geq 0; \exists t \in [0, \zeta_s], W_s(t) \in \bar{B}(x,\varepsilon)\right\}.$$

The function $u_\varepsilon(x) = \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty\right] = -\log \mathbb{P}_{\delta_0}^X\left[\mathcal{R}_0(X) \cap \bar{B}(x,\varepsilon) = \emptyset\right]$ is the maximal non-negative solution of $\Delta u = 4u^2$ on $\mathbb{R}^d \backslash B(0,\varepsilon)$ (see Dynkin [25]). We have $|\mathcal{R}(W)^\varepsilon \cap A| = \int_A dx \; \mathbf{1}_{\{T_{(x,\varepsilon)} < \infty\}}$. The study of this quantity relies on the explicit law of $\left(W_{T_{(x,\varepsilon)}}, \zeta_{T_{(x,\varepsilon)}}\right)$ under $\mathbb{N}_{x_0}$. This law has been computed by Le Gall [39, 43]. It is closely related to the law of the process $(x_t^\varepsilon, 0 \leq t \leq \tau^\varepsilon)$, defined as the unique strong solution of

$$dx_t^\varepsilon = d\beta_t + \frac{\nabla u_\varepsilon(x_t^\varepsilon - x)}{u_\varepsilon(x_t^\varepsilon - x)} dt, \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq \tau^\varepsilon,$$

where β is a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ started at $\beta_0 = x_0$ and $\tau^\varepsilon = \inf\{t \geq 0; |x_t^\varepsilon - x| = \varepsilon\}$.

In section III.3, we state the main result on the convergence of the volume of the ε-neighborhood of $\mathcal{R}_t(X)$. The method of the proof is completely different from the one used by Tribe in [59]. The proof of (III.1) is derived from the convergence of the volume of the ε-neighborhood of the range of the Brownian snake in $L^2(\mathbb{N}_{x_0})$ (proposition III.3.3).

Section III.4 is devoted to the proof of the latter convergence. The proof of the $L^2(\mathbb{N}_{x_0})$ convergence is somewhat technical because we need a precise rate of convergence. The derivation of this estimate relies heavily on the explicit law of $\left(W_{T_{(x,\varepsilon)}}, \zeta_{T_{(x,\varepsilon)}}\right)$ under $\mathbb{N}_{x_0}$. It also depends on precise information on the behavior of the function u_1 at infinity and on the law of τ^ε. These results are given in appendix.

In section III.5 we prove the results on capacity-equivalence for the support and the range of super-Brownian motion. Let $f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ be a decreasing function. We define the energy of a Radon measure ν on $\mathbb{R}^d$ with respect to the kernel f by:

$$\mathcal{I}_f(\nu) = \iint f(|x-y|)\nu(dx)\nu(dy),$$

and the capacity of a set $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ by

$$\operatorname{cap}_f(\Lambda) = \left[\inf_{\nu(\Lambda)=1} \mathcal{I}_f(\nu)\right]^{-1}.$$

Following the terminology introduced in [47], we say that two sets Λ_1 and Λ_2 are capacity-equivalent if there exist two positive constants c and C such that for every kernel f, we have

$$c\operatorname{cap}_f(\Lambda_1) \le \operatorname{cap}_f(\Lambda_2) \le C\operatorname{cap}_f(\Lambda_1).$$

Proposition III.5.3 states that a.s. the set supp $X_t \subset \mathbb{R}^d$, $d \ge 3$, is capacity-equivalent to $[0,1]^2$, and that a.s. the range $\mathcal{R}_t(X) \subset \mathbb{R}^d$, $d \ge 5$, is capacity-equivalent to $[0,1]^4$. The proof follows the method of [48]. For every measure μ on $\mathbb{R}^d$, we set

$$S_\varepsilon(\mu) = \iint \mu(dx)\mu(dx')\ \frac{1}{(2\pi\varepsilon^2)^{d/2}} \exp -\frac{|x-x'|^2}{2\varepsilon^2}.$$

Theorem III.3.2 (from Tribe [59]) and the convergence of $\varepsilon^{d-2}S_\varepsilon(Y_t)$ under the excursion measure (lemma III.5.4) give the desired result for the support of super-Brownian motion. For the capacity-equivalence between $\mathcal{R}_t(X)$ and $[0,1]^4$, we use theorem III.3.1 and the convergence for the Brownian snake of $\varepsilon^{d-2}S_\varepsilon(\int_t^T ds\, Y_s)$ (lemma III.5.5).

III.2 Preliminaries on the Brownian snake and super-Brownian motion

We first introduce some notation. We denote by $(M_f, \mathcal{M}_f)$ the space of all finite measures on $\mathbb{R}^d$, endowed with the topology of weak convergence. We denote by $\mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^p)$, respectively $\mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p)$, the set of all real bounded nonnegative measurable functions defined on $\mathbb{R}^p$, respectively on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p$. We also denote by $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ the Borel σ-field on $\mathbb{R}^p$. For $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$, let $\mathcal{C}l(A) = \bar{A}$ be the closure of A. For every measure $\nu \in M_f$, and $f \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, we shall write $\int f(y)\nu(dy) = (\nu, f)$. We also denote by supp ν the closed support of the measure ν. If S is a Polish space, we denote by $C(I,S)$ the set of all continuous functions from $I \subset \mathbb{R}$ into S.

III.2.1 The Brownian snake

We recall some facts about the Brownian snake, a path-valued Markov process introduced by Le Gall [38, 40]. A stopped path is a continuous function $\mathrm{w} : [0,\zeta] \to \mathbb{R}^d$, where $\zeta = \zeta_{(\mathrm{w})}$ is called the lifetime of the path. We shall denote by $\hat{\mathrm{w}}$ the end point $\mathrm{w}(\zeta)$. Let $\mathcal{W}$ be the space of all stopped paths in $\mathbb{R}^d$. When equipped with the metric

$$d(\mathrm{w},\mathrm{w}') = \left|\zeta_{(\mathrm{w})} - \zeta_{(\mathrm{w}')}\right| + \sup_{s\geq 0} \left|\mathrm{w}(s\wedge\zeta_{(\mathrm{w})}) - \mathrm{w}'(s\wedge\zeta_{(\mathrm{w}')})\right|,$$

the space $\mathcal{W}$ is a Polish space.

Let $\mathrm{w}\in\mathcal{W}$ and $a,b\geq 0$, such that $a\leq b\wedge\zeta_{(\mathrm{w})}$. There exists a unique probability measure on $\mathcal{W}$ denoted by $Q^{\mathrm{w}}_{a,b}(d\mathrm{w}')$ such that:

(i) $\zeta_{(\mathrm{w}')} = b$, $Q^{\mathrm{w}}_{a,b}(d\mathrm{w}')$-a.s.

(ii) $\mathrm{w}'(t) = \mathrm{w}(t)$ for every $0\leq t\leq a$, $Q^{\mathrm{w}}_{a,b}(d\mathrm{w}')$-a.s.

(iii) The law of $(\mathrm{w}'(t+a), 0\leq t\leq b-a)$ under $Q^{\mathrm{w}}_{a,b}(d\mathrm{w}')$ is the law of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ started at $\mathrm{w}(a)$ and stopped at time $b-a$.

We shall also consider $Q^{\mathrm{w}}_{a,b}(d\mathrm{w}')$ as a probability on the space $C([0,b],\mathbb{R}^d)$. We set $\mathcal{W}_x = \{\mathrm{w}\in\mathcal{W}; \mathrm{w}(0)=x\}$ for $x\in\mathbb{R}^d$. Let $\mathrm{w}\in\mathcal{W}_x$. We restate theorem 1.1 from [38]:

Theorem III.2.1 (Le Gall) *There exists a continuous strong Markov process with values in $\mathcal{W}_x$, $W = (W_s, s\geq 0)$, whose law is characterized by the following two properties.*

(i) The lifetime process $\zeta = \left(\zeta_s = \zeta_{(W_s)}, s\geq 0\right)$ is a reflecting Brownian motion in $\mathbb{R}^+$.

(ii) Conditionally given $(\zeta_s, s\geq 0)$, the process $(W_s, s\geq 0)$ is a time-inhomogeneous continuous Markov process, whose transition kernel between times s and $s'\geq s$ is

$$P_{s,s'}(\mathrm{w}, d\mathrm{w}') = Q^{\mathrm{w}}_{m(s,s'),\zeta_{s'}}(d\mathrm{w}'),$$

where $m(s,s') := \inf_{r\in[s,s']}\zeta_r$.

From now on we shall consider the canonical realization of the process W defined on the space $C(\mathbb{R}^+,\mathcal{W}_x)$. The law of W started at w is denoted by $\mathcal{E}_{\mathrm{w}}$. We will use the following consequence of (ii): outside a $\mathcal{E}_{\mathrm{w}}$-negligible set, for every $s'>s$, one has $W_s(t) = W_{s'}(t)$ for every $t\in[0,m(s,s')]$. We shall write $\mathcal{E}^*_{\mathrm{w}}$ for the law of the process W killed when its lifetime reaches zero. The distribution of W under $\mathcal{E}^*_{\mathrm{w}}$ can be characterized as in theorem III.2.1, except that its lifetime process is distributed as a linear Brownian motion killed at its first hitting time of $\{0\}$. The state space for $(W,\mathcal{E}^*_{\mathrm{w}})$ is the space $\mathcal{W}^*_x = \mathcal{W}_x\cup\partial$, where ∂ is a cemetery point. The trivial path $\mathbf{x}$ such that $\zeta_{(\mathbf{x})} = 0$, $\mathbf{x}(0) = x$ is clearly a regular point for the process $(W,\mathcal{E}_{\mathrm{w}})$. Following [7] chapter 3, we can consider the excursion measure, $\mathbb{N}_x$, outside $\{\mathbf{x}\}$. The distribution of W under $\mathbb{N}_x$ can be characterized as in theorem III.2.1, except that now the lifetime process ζ is distributed according to Itô measure of positive excursions of linear Brownian motion. We normalize $\mathbb{N}_x$ so that, for every $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{N}_x\left[\sup_{s\geq 0}\zeta_s > \varepsilon\right] = \frac{1}{2\varepsilon}.$$

We recall the strong Markov property for the snake under $\mathbb{N}_x$ (see [40]). Let T be a stopping time of the natural filtration $\mathcal{F}^W$ of the process W. Assume $T>0$ $\mathbb{N}_x$-a.e., and let F, H

nonnegative measurable functionals on $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W}_x^*)$ such that F is $\mathcal{F}_T^W$ measurable. Then if θ denotes the usual shift operator, we have

$$\mathbb{N}_x \left[T < \infty; F \cdot H \circ \theta_T\right] = \mathbb{N}_x \left[T < \infty; F \cdot \mathcal{E}^*_{W_T}[H]\right].$$

Let $\sigma = \inf\{s > 0; \zeta_s = 0\}$ denote the duration of the excursion of ζ under $\mathbb{N}_x$. The range $\mathcal{R} = \mathcal{R}(W)$ of W is defined under $\mathbb{N}_x$ by

$$\mathcal{R} = \{W_s(t); 0 \leq t \leq \zeta_s, 0 \leq s \leq \sigma\} = \left\{\hat{W}_s; 0 \leq s \leq \sigma\right\}.$$

We recall the scaling property of the Brownian snake: if $\lambda > 0$, the law of the process $W_s^{(\lambda)}(t) = \lambda^{-1} W_{\lambda^4 s}(\lambda^2 t)$ under $\mathbb{N}_x$ is $\lambda^{-2}\mathbb{N}_{\lambda^{-1}x}$.

For every nonnegative measurable function F on $\mathcal{W}_x^*$, we have

$$\mathbb{N}_x \left[\int_0^\sigma F(W_s, \zeta_s) ds\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}_x \left[F(\beta_{[0,t]}, t)\right] dt, \tag{III.2}$$

where $\beta_{[0,t]}$ is under $\mathbb{P}_x$ the restriction to $[0,t]$ of a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ started at $\beta_0 = x$. Now consider under $\mathbb{N}_x$ the continuous version $\left(l_s^t, t > 0, s \geq 0\right)$ of the local time of ζ at level t and time s. We define a measure valued process Y on $\mathbb{R}^d$ by setting for every $t > 0$, for every $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$,

$$(Y_t, \varphi) = \int_0^\sigma dl_s^t \, \varphi(\hat{W}_s).$$

We shall sometimes write $Y_t(W)$ to recall that Y_t is a function of the Brownian snake. From the joint continuity of the local time, $\mathbb{N}_x$-a.e., the process Y is continuous on $(0,\infty)$ for the Prohorov distance on M_f. Let $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$. We define on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ the function $v(t,x) = \mathbb{N}_x \left[1 - \exp -(Y_t, \varphi)\right]$, if $t > 0$, and $v(0,x) = \varphi(x)$. We will write $v(t)$ for the function $v(t,\cdot)$. We recall that the function v is the unique nonnegative measurable solution of the integral functional equation

$$v(t) + 2\int_0^t ds \; P_s \left[v(t-s)^2\right] = J(t) \qquad t \geq 0, \tag{III.3}$$

where $J(t,x) = P_t\varphi(x)$, and $(P_t, t \geq 0)$ is the Brownian semi-group in $\mathbb{R}^d$. A few other remarks on the solution of (III.3) are presented in section III.6.1 below.

III.2.2 Super-Brownian motion

Let us now recall the definition of super-Brownian motion and its connection with the Brownian snake. The second part of the next theorem is lemma 4.1 from [24]. Let $\nu \in M_f$.

Theorem III.2.2 *There exists a continuous strong Markov process $X = (X_s, s \geq 0)$ defined on the canonical space $C(\mathbb{R}^+, M_f)$, whose law is characterized by the two following properties under $\mathbb{P}_\nu^X$.*

(i) $X_0 = \nu$, $\mathbb{P}_\nu^X$*-a.s.*

(ii) For every $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, $t \geq s > 0$, we have

$$\mathbb{E}_\nu^X \left[\exp\left[-(X_t, \varphi)\right] \mid \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)\right] = \exp\left[-(X_s, v(t-s))\right], \tag{III.4}$$

where the function v is the unique nonnegative solution of (III.3) with $J(t,x) = P_t\varphi(x)$.

Furthermore, for every integer $m \geq 1$, $0 \leq t_1 < \cdots < t_m$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, we have

$$\mathbb{E}_\nu^X \left[\exp\left[-\sum_{\{i; t_i \leq t\}} (X_{t-t_i}, \varphi_i)\right]\right] = \exp\left[-(\nu, v(t))\right], \tag{III.5}$$

where v is the unique nonnegative solution to the integral equation (III.3) with right-hand side $J(t,x) = \sum_{\{i;t_i \leq t\}} P_{t-t_i}\varphi_i(x)$.

Theorem III.2.3 (Le Gall [38, 40]) *Let $\sum_{i\in I} \delta_{W^i}$ be a Poisson measure on $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W})$ with intensity $\int \nu(dx)\mathbb{N}_x[\cdot]$, then the process Z defined by $Z_0 = \nu$ and $Z_t = \sum_{i\in I} Y_t(W^i)$ if $t > 0$, is distributed according to $\mathbb{P}_\nu^X$.*

We deduce from the normalization of $\mathbb{N}_x$ that $\mathbb{N}_x[Y_t \neq 0] = 1/2t < \infty$. This implies that for every $t > 0$, there is only a finite number of indices $i \in I$ such that the process $(Y_s(W^i), s \geq t)$ is nonzero.

III.2.3 Hitting probabilities for the Brownian snake

We now recall a few results from [39]. Let $\mathrm{w} \in \mathcal{W} \cup C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, we introduce the first hitting time of $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$\tau_A(\mathrm{w}) = \inf\{t \geq 0; \mathrm{w}(t) \in A\},$$

with the usual convention $\inf \emptyset = \infty$. We omit w when there is no risk of confusion. Consider the Brownian snake W, and set

$$T_{(y,\varepsilon)} = \inf\left\{s \geq 0; \exists t \in [0, \zeta_s], W_s(t) \in \bar{B}(y, \varepsilon)\right\},$$

where $B(y,\varepsilon)$ is the open ball in $\mathbb{R}^d$ centered at y with radius $\varepsilon > 0$, and $\bar{B}(y,\varepsilon)$ its closure. We know from [40] that the function defined on $\mathbb{R}^d \backslash \bar{B}(0,\varepsilon)$,

$$u_\varepsilon(y) := \mathbb{N}_0\left[T_{(y,\varepsilon)} < \infty\right] = \mathbb{N}_0\left[\mathcal{R} \cap \bar{B}(y,\varepsilon) \neq \emptyset\right] = \mathbb{N}_{-y}\left[\mathcal{R} \cap \bar{B}(0,\varepsilon) \neq \emptyset\right],$$

is the maximal nonnegative solution on $\mathbb{R}^d \backslash \bar{B}(0,\varepsilon)$ of

$$\Delta u = 4u^2.$$

This result was first proved in a more general setting by Dynkin [25] in terms of superprocesses. The function u_ε is strictly positive on $\mathbb{R}^d \backslash \bar{B}(0,\varepsilon)$. For every $y_0 \in \partial B(0,\varepsilon)$, we have

$$\lim_{y \in \bar{B}(0,\varepsilon)^c; y \to y_0} u_\varepsilon(y) = \infty.$$

Scaling and symmetry arguments show that for every $y \in \mathbb{R}^d \backslash \bar{B}(0,\varepsilon)$,

$$u_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-2} u_1\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right), \tag{III.6}$$

where the function $u_1(r)$, $r \in (1,\infty)$ is the maximal nonnegative solution on $(1,\infty)$ of

$$u_1''(r) + \frac{d-1}{r}u_1'(r) = 4u_1^2(r).$$

It is easy to see that the function u_1 is decreasing. It will be proved in section III.6.2 that there exist positive constants a_0', b_0 and b_1, depending only on $d \geq 5$, such that

$$\lim_{r\to\infty} r^{d-2}u_1(r) = \mathrm{a}_0',$$

furthermore for every $r > 1$,

$$u_1(r) \geq \mathrm{a}_0' r^{2-d}, \tag{III.7}$$

and for every $r \geq 4/3$,

$$u_1(r) \leq \mathrm{b}_0 r^{2-d}, \tag{III.8}$$

$$u_1(r) \leq \mathrm{a}_0' r^{2-d} + \mathrm{b}_1 r^{6-2d}. \tag{III.9}$$

We give the following result on the probability of the event $\left\{T_{(y,\varepsilon)} < \infty\right\}$ (see lemma 2.1 of [39]). Assume $x_0 \notin \bar{B}(y,\varepsilon)$. Then $\mathbb{N}_{x_0}$-a.e. for every $T \geq 0$, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^*_{W_T}\left[T_{(y,\varepsilon)} < \infty\right] &= 2\int_0^{\zeta_T \wedge \tau_{B(y,\varepsilon)}(W_T)} dt\; u_\varepsilon(W_T(t)-y))\, \mathrm{e}^{\left[-2\int_0^t u_\varepsilon(W_T(s)-y)ds\right]} \\ &= 1 - \exp\left[-2\int_0^{\zeta_T \wedge \tau_{B(y,\varepsilon)}(W_T)} u_\varepsilon(W_T(s)-y)ds\right].\end{aligned} \tag{III.10}$$

Let $x_0, x \in \mathbb{R}^d$. We will now describe the law of $W_{T_{(x,\varepsilon)}}$ under $\mathbb{N}_{x_0}[\cdot \mid T_{(x,\varepsilon)} < \infty]$. First of all we denote by β a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ started at x_0 under $\mathbb{P}_{x_0}$. Assume $x_0 \notin \bar{B}(x,\varepsilon)$. Corollary 2.3 from [39] ensures that there exists $\mathbb{P}_{x_0}$-a.s. a unique continuous process $x^\varepsilon = (x^\varepsilon_t, 0 \leq t \leq \tau^\varepsilon)$ taking values in $\mathbb{R}^d$ such that for every $\eta \in (0, |x - x_0| - \varepsilon)$, for every $t \leq \tau^\varepsilon_\eta = \inf\{s \geq 0; |x^\varepsilon_s - x| \leq \varepsilon + \eta\}$,

$$x^\varepsilon_t = \beta_t + \int_0^t \frac{\nabla u_\varepsilon(x^\varepsilon_s - x)}{u_\varepsilon(x^\varepsilon_s - x)}ds,$$

furthermore, $\mathbb{P}_{x_0}$-a.s. $\tau^\varepsilon = \lim_{\eta\to 0}\tau^\varepsilon_\eta < \infty$ and $|x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - x| = \varepsilon$. We also recall that thanks to Girsanov's theorem, we have for every nonnegative measurable function F on $C([0,t],\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{x_0}\left[\tau^\varepsilon > t; F\left(x^\varepsilon_{[0,t]}\right)\right] \\ &\qquad = \mathbb{E}_{x_0}\left[\tau_{B(x,\varepsilon)}(\beta) > t; F\left(\beta_{[0,t]}\right)\frac{u_\varepsilon(\beta_t - x)}{u_\varepsilon(x_0 - x)}\exp\left[-2\int_0^t u_\varepsilon(\beta_s - x)ds\right]\right],\end{aligned}$$

where $x^\varepsilon_{[0,t]}$ and $\beta_{[0,t]}$ are the restriction of x^ε and β to $[0,t]$. The law of x^ε under $\mathbb{P}_{x_0}$ can be interpreted as a probability measure on $\mathcal{W}^*_{x_0}$. Consider the closed set

$$A = \left\{\mathrm{w} \in \mathcal{W}^*_{x_0}; \tau_{\bar{B}(x,\varepsilon)}(\mathrm{w}) < \infty\right\}.$$

It has been proved in [39] that its capacitary measure with respect to the Brownian snake with initial point x_0 is exactly $u_\varepsilon(x_0 - x)$ times the law of x^ε under $\mathbb{P}_{x_0}$. It is not hard to check however that the normalized capacitary measure can be interpreted as the hitting distribution under $\mathbb{N}_{x_0}$ (cf [43], this is proved in a way similar to the classical interpretation of the capacitary measure as a last exit distribution, see e.g. Port and Stone [53]). Thus we deduce that for every nonnegative measurable function F on $\mathcal{W}^*_{x_0}$, we have

$$\mathbb{N}_{x_0}\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; F(W_{T_{(x,\varepsilon)}}, \zeta_{T_{(x,\varepsilon)}})\right] = u_\varepsilon(x_0 - x)\mathbb{E}_{x_0}\left[F(x^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\right] \tag{III.11}$$

Hence for every $t \geq 0$, and every nonnegative measurable function F on $C([0,t], \mathbb{R}^d)$, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_{x_0}&\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; \zeta_{T_{(x,\varepsilon)}} > t; F\left((W_{T_{(x,\varepsilon)}}(s), s \in [0,t])\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_{x_0}\left[\tau_{B(x,\varepsilon)} > t; F\left(\beta_{[0,t]}\right) u_\varepsilon(\beta_t - x) \exp\left[-2\int_0^t u_\varepsilon(\beta_s - x) ds\right]\right].\end{aligned} \tag{III.12}$$

It will be proved in section III.6.3, that if g is an increasing nonnegative measurable function, then

$$\mathbb{E}_{x_0}\left[g(\tau^\varepsilon)\right] \leq \alpha_d \int_0^\infty dt\, t^{-d/2}\, \mathrm{e}^{-1/2t}\, g(|x_0 - x|^2\, t), \tag{III.13}$$

where α_d is a finite constant. Finally we shall use the following inequality, that can be derived from the Feynman-Kac formula (use the fact that u_ε solves $\Delta u = 4 u_\varepsilon u$)

$$u_\varepsilon(x) \geq 2\mathbb{E}_0\left[\int_0^{\tau_{B(x,\varepsilon)}} dt\ \ u_\varepsilon(\beta_t - x)^2 \exp\left[-4\int_0^t u_\varepsilon(\beta_s - x) ds\right]\right]. \tag{III.14}$$

There is in fact equality in (III.14). See the remark on page 293 of [39].

III.3 A property of the range of super-Brownian motion

For $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$, we set

$$A^\varepsilon := \left\{x \in \mathbb{R}^d; d(x, A) \leq \varepsilon\right\},$$

where $d(x,A) = \inf\{|x - y|; y \in A\}$. We will write $|A|$ for the Lebesgue measure of A. We also set

$$\mathrm{a}_0 = \mathrm{a}_0' 2\pi^{d/2}\Gamma([d-2]/2)^{-1},$$

where the constant a_0' has been defined in section III.2.3. We set $\mathcal{R}_t(X) = \mathcal{C}l\left(\bigcup_{s \geq t} \operatorname{supp} X_s\right)$.

Theorem III.3.1 *Let $\nu \in M_f$. For every Borel set $A \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 5$, for every $t > 0$, $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s.*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{4-d}\, |\mathcal{R}_t(X)^\varepsilon \cap A| = \mathrm{a}_0 \int_t^\infty ds\ (X_s, \mathbf{1}_A). \tag{III.15}$$

Furthermore if there exists $\rho < 4$ such that $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\rho - d}\, |(\operatorname{supp} \nu)^\varepsilon| = 0$ then (III.15) holds with $t = 0$.

Let us recall the main theorem of [59].

Theorem III.3.2 (Tribe) *Let A a bounded Borel set in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Fix $t > 0$ and $\nu \in M_f$. Then there exists a positive constant α_0 depending only on d such that*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2-d} \left|(\text{supp } X_t)^\varepsilon \cap A\right| = \alpha_0 (X_t, \mathbf{1}_A),$$

where the convergence holds $\mathbb{P}_\nu^X$-a.s. and in $L^2(\mathbb{P}_\nu^X)$.

We shall deduce theorem III.3.1 from the next proposition on the range of the Brownian snake, whose proof will be given in the next section.

Proposition III.3.3 *Let $d \geq 5$. For every $\theta \in (0, 1/d)$ and every $R_0 > 0$, there exists a constant $\kappa = \kappa(\theta) > 0$ and $\varepsilon_0 > 0$ such that for every $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, for every x_0 with $|x_0| \leq R_0$, and every Borel set $A \subset \bar{B}(0, R_0)$, we have*

$$\left| \mathbb{N}_{x_0} \left[\varepsilon^{4-d} \left| \mathcal{R}(W)^\varepsilon \cap A \cap \bar{B}(x_0, \varepsilon^{1-\theta})^c \right| - \mathrm{a}_0 \int_0^\infty ds \; (Y_s, \mathbf{1}_A) \right] \right| \leq \varepsilon^{\kappa/2},$$

and

$$\mathbb{N}_{x_0} \left[\left[\varepsilon^{4-d} \left| \mathcal{R}(W)^\varepsilon \cap A \cap \bar{B}(x_0, \varepsilon^{1-\theta})^c \right| - \mathrm{a}_0 \int_0^\infty ds \; (Y_s, \mathbf{1}_A) \right]^2 \right] \leq \varepsilon^{\kappa}.$$

Remark. We have trivially $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathcal{R}(W)^\varepsilon$, $\mathbb{N}_{x_0}$-a.e. Since $\mathbb{N}_{x_0}$ is an infinite measure, $\mathbb{N}_{x_0}\left[|\mathcal{R}(W)^\varepsilon \cap B(x_0, \delta)|\right] = \infty$ for every $\varepsilon, \delta > 0$. This is the reason why we consider $A \cap \bar{B}(x_0, \varepsilon^{1-\theta})^c$ rather than A in the previous proposition.

We first give a consequence of this proposition.

Corollary III.3.4 *Let $d \geq 5$. For every Borel set $A \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{N}_{x_0}$-a.e., we have*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{4-d} \left|\mathcal{R}(W)^\varepsilon \cap A\right| = \mathrm{a}_0 \int_0^\infty ds \; (Y_s, \mathbf{1}_A).$$

Proof of corollary III.3.4. Since $\mathbb{N}_{x_0}$-a.e. the range $\mathcal{R}(W)$ is bounded, we need only consider a bounded Borel set A. Let $\kappa > 0$ fixed as in proposition III.3.3. Let $\varepsilon_n = n^{-2/\kappa}$ for $n \geq 1$. Using the Borel-Cantelli lemma and the second upper bound of proposition III.3.3, we get that the sequence $\left(\varepsilon_n^{4-d} |\mathcal{R}(W)^\varepsilon \cap A|, n \geq 1\right)$ converges $\mathbb{N}_{x_0}$-a.e. to $\mathrm{a}_0 \int_0^\infty ds \; (Y_s, \mathbf{1}_A)$. But for $\varepsilon' \leq \varepsilon$, since $\mathcal{R}(W)^{\varepsilon'} \subset \mathcal{R}(W)^\varepsilon$, we have

$$\varepsilon'^{4-d} \left|\mathcal{R}(W)^{\varepsilon'} \cap A\right| \leq \varepsilon^{4-d} \left|\mathcal{R}(W)^\varepsilon \cap A\right| (\varepsilon/\varepsilon')^{d-4}.$$

A monotonicity argument using the fact that $\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n$ converges to 1, completes the proof. □

Proof of theorem III.3.1. Recall that for every $t > 0$, $\mathbb{P}_\nu^X$ a.s. the set $\mathcal{R}_t(X)$ is bounded. Thus we need only consider a bounded Borel set A. Thanks to the Markov property of X at time t and theorem III.3.2 it is clearly enough to prove the second part of theorem III.3.1. Let $\nu \in M_f$ and $\rho < 4$ such that $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\rho-d} \left|(\text{supp } \nu)^\varepsilon\right| = 0$. For short we write a.s. for $\mathbb{P}_\nu^X$-a.s.

First step. Recall we can write for every $t > 0$, $X_t = \sum_{i \in I} Y_t(W^i)$, where $\sum_{i \in I} \delta_{W^i}$ is a Poisson measure on $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W})$ with intensity measure $\int \nu(dx) \mathbb{N}_x[\cdot]$. We let x_0^i denote the starting point of the Brownian snake W^i (i.e. $x_0^i = W_0^i(0)$). Notice that a.s. for every $i \in I$,

$x_0^i \in \text{supp}\ \nu$, which is bounded thanks to the hypothesis on supp ν. Fix $\theta \in (0, 1/d)$ such that $d - \rho \geq (d-4)/(1-\theta)$. Fix R_0 such that supp $\nu \subset B(0, R_0)$. Let κ and ε_0 fixed as in proposition III.3.3. We notice that for every bounded Borel set $A \subset B(0, R_0)$,

$$\varepsilon^{4-d} \left|\mathcal{R}_0(X)^\varepsilon \cap A\right| \leq \sum_{i \in I} V_\varepsilon(W^i) + \varepsilon^{4-d} \left|A \cap (\text{supp}\ \nu)^{\varepsilon^{1-\theta}}\right|,$$

where

$$V_\varepsilon(W^i) = \varepsilon^{4-d} \left|\mathcal{R}(W^i)^\varepsilon \cap A \cap \bar{B}(x_0^i, \varepsilon^{1-\theta})^c\right|.$$

We set $V_0(W^i) = \mathrm{a}_0 \int_0^\infty ds\ (Y_s(W^i), \mathbf{1}_A)$. We use the second moment formula for a Poisson measure to get:

$$\mathbb{E}_\nu^X \left[\left[\sum_{i \in I} V_\varepsilon(W^i) - \sum_{i \in I} V_0(W^i)\right]^2\right] = \int \nu(dx) \mathbb{N}_x \left[[V_\varepsilon(W) - V_0(W)]^2\right]$$
$$+ \left[\int \nu(dx) \mathbb{N}_x \left[V_\varepsilon(W) - V_0(W)\right]\right]^2.$$

We deduce from proposition III.3.3 that for every $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

$$\mathbb{E}_\nu^X \left[\left[\sum_{i \in I} V_\varepsilon(W^i) - \sum_{i \in I} V_0(W^i)\right]^2\right] \leq [(\nu, \mathbf{1}) + (\nu, \mathbf{1})^2] \varepsilon^\kappa.$$

Arguments similar to those used in the proof of corollary III.3.4 show that a.s.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i \in I} V_\varepsilon(W^i) = \sum_{i \in I} V_0(W^i).$$

Notice we have $\sum_{i \in I} V_0(W^i) = \mathrm{a}_0 \int_0^\infty ds\ (X_s, \mathbf{1}_A)$. Now the hypothesis on supp ν implies that $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{4-d} \left|(\text{supp}\ \nu)^{\varepsilon^{1-\theta}}\right| = 0$. Thus we deduce that a.s.

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{4-d} \left|\mathcal{R}_0(X)^\varepsilon \cap A\right| \leq \mathrm{a}_0 \int_0^\infty ds\ (X_s, \mathbf{1}_A).$$

Second step. To get a lower bound, consider an increasing sequence $(E_p, p \geq 1)$ of measurable subsets of $E = C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W})$ such that $\bigcup_{p \geq 1} E_p = E$ and $\int \nu(dx) \mathbb{N}_x[E_p] = \alpha_p < \infty$. (For instance we can take $E_p = \left\{W; \sup_{s \geq 0} \zeta_s \geq 1/p\right\}$.) Then a.s. the set $I_p = \left\{i \in I; W^i \in E_p\right\}$ is finite. We have

$$\varepsilon^{4-d} \left|\mathcal{R}_0(X)^\varepsilon \cap A\right| \geq \sum_{i \in I_p} V_\varepsilon(W^i) - \sum_{(i,j) \in I_p^2;\ i \neq j} U_\varepsilon(W^i, W^j),$$

where

$$U_\varepsilon(W^i, W^j) = \varepsilon^{4-d} \left|\mathcal{R}(W^i)^\varepsilon \cap \mathcal{R}(W^j)^\varepsilon \cap A \cap \bar{B}(x_0^i, \varepsilon^{1-\theta})^c \cap \bar{B}(x_0^j, \varepsilon^{1-\theta})^c\right|$$
$$= \varepsilon^{4-d} \int_{A \cap \bar{B}(x_0^i, \varepsilon^{1-\theta})^c \cap \bar{B}(x_0^j, \varepsilon^{1-\theta})^c} dy\ \mathbf{1}_{\left\{T_{(y,\varepsilon)}(W^i) < \infty\right\}} \mathbf{1}_{\left\{T_{(y,\varepsilon)}(W^j) < \infty\right\}}.$$

Arguments similar to those of the first step show that a.s.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i\in I_p} V_\varepsilon(W^i) = \sum_{i\in I_p} V_0(W^i) = \sum_{i\in I_p} \mathrm{a}_0 \int_0^\infty ds\ (Y_s(W^i), \mathbf{1}_A).$$

Now conditionally on the cardinal of I_p, the Brownian snakes $(W^i, i\in I_p)$ are independent and have the same law: $\mu_p = \alpha_p^{-1}\int \nu(dx)\mathbb{N}_x[\cdot\cap E_p]$. For two independent Brownian snakes (W,W') under $\mu_p\otimes\mu_p$, we get using the definition of u_ε, (III.6) and (III.8), that for $\varepsilon \le (3/4)^{1/\theta}$,

$$\begin{aligned}
\mu_p\otimes\mu_p[U_\varepsilon(W,W')] &\le \varepsilon^{4-d}\alpha_p^{-2}\iint \nu(dx_0)\nu(dx_0')\mathbb{N}_{x_0}\otimes\mathbb{N}_{x_0'}[U_\varepsilon(W,W')]\\
&\le \varepsilon^{4-d}\alpha_p^{-2}\iint \nu(dx_0)\nu(dx_0')\int_{A\cap\bar B(x_0,\varepsilon^{1-\theta})^c\cap\bar B(x_0',\varepsilon^{1-\theta})^c} dy\\
&\qquad\qquad \left[\mathrm{b}_0\varepsilon^{d-4}\left|y-x_0\right|^{2-d}\right]\left[\mathrm{b}_0\varepsilon^{d-4}\left|y-x_0'\right|^{2-d}\right]\\
&\le \varepsilon^{4-d}\alpha_p^{-2}(\nu,\mathbf{1})^2\sup_{x_0\in\mathbb{R}^d}\int_{\bar B(0,R_0)\setminus\bar B(x_0,\varepsilon^{1-\theta})} dy\ \left[\mathrm{b}_0\varepsilon^{d-4}\left|y-x_0\right|^{2-d}\right]^2\\
&\le c\varepsilon^{d-4+(1-\theta)(4-d)} = c\varepsilon^{\theta(d-4)},
\end{aligned}$$

where the constant c is independent of ε and A. Using the Borel-Cantelli lemma for the sequence $(\varepsilon_n = n^{-2/\theta(d-4)}, n\ge 1)$, and a monotonicity argument, we get that $\mu_p\otimes\mu_p$-a.s. $\lim_{\varepsilon\to 0} U_\varepsilon(W,W') = 0$. Then since the cardinal of I_p is a.s. finite, we get that for every integer $p\ge 1$, a.s.,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{(i,j)\in I_p^2;\, i\ne j} U_\varepsilon(W^i,W^j) = 0.$$

We deduce that for every integer $p\ge 1$, a.s.

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{4-d}\left|\mathcal{R}_0(X)^\varepsilon\cap A\right| \ge \sum_{i\in I_p}\mathrm{a}_0\int_0^\infty ds\ (Y_s(W^i),\mathbf{1}_A).$$

Letting $p\to\infty$, we get that a.s.

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{4-d}\left|\mathcal{R}_0(X)^\varepsilon\cap A\right| \ge \mathrm{a}_0\int_0^\infty ds\ (X_s,\mathbf{1}_A),$$

which with the first step ends the proof of the theorem. □

III.4 Proof of proposition III.3.3

We shall use many times in the sequel the fact that $\int_0^\infty ds\ (Y_s,\mathbf{1}_A) = \int_0^\sigma ds\ \mathbf{1}_A(\hat W_s)$ $\mathbb{N}_{x_0}$-a.e. We assume $d\ge 5$. We recall easy equalities, which can readily be deduced from the results of section III.6.1. For every $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, we have

$$\mathbb{N}_x\left[\int_0^\sigma ds\ \mathbf{1}_A(\hat W_s)\right] = \int_A dy\ G(x,y), \tag{III.16}$$

where G is the Green kernel in $\mathbb{R}^d$: $G(x,y) = 2^{-1}\pi^{-d/2}\Gamma([d-2]/2)\,|x-y|^{2-d}$, and

$$\mathbb{N}_x\left[\left[\int_0^\sigma ds\,\mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right]^2\right] = 4\int dy\,G(x,y)\left[\int_A dz\,G(y,z)\right]^2. \tag{III.17}$$

We can also compute moments under $\mathcal{E}^*_{\mathrm{w}}$ as an application of proposition 2.5 of [40]. For every $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{w}\in\mathcal{W}$, we have with $\zeta=\zeta_{(\mathrm{w})}$,

$$\mathcal{E}^*_{\mathrm{w}}\left[\int_0^\sigma ds\,\mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right] = 2\int_0^\zeta dt\,\mathbb{N}_{\mathrm{w}(t)}\left[\int_0^\sigma ds\,\mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right] = 2\int_0^\zeta dt\int_A dy\,G(\mathrm{w}(t),y), \tag{III.18}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^*_{\mathrm{w}}&\left[\left[\int_0^\sigma ds\,\mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right]^2\right]\\
&= 2\int_0^\zeta dt\,\mathbb{N}_{\mathrm{w}(t)}\left[\left[\int_0^\sigma ds\,\mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right]^2\right] + \left[2\int_0^\zeta dt\,\mathbb{N}_{\mathrm{w}(t)}\left[\int_0^\sigma ds\,\mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right]\right]^2\\
&= 8\int_0^\zeta dt\int dy\,G(\mathrm{w}(t),y)\left[\int_A dz\,G(y,z)\right]^2 + 4\left[\int_0^\zeta dt\int_A dy\,G(\mathrm{w}(t),y)\right]^2.
\end{aligned} \tag{III.19}$$

Thanks to the space invariance of the law of the Brownian snake, we shall only consider the case $x_0=0$ and $A\subset\bar{B}(0,R_0)$, for R_0 fixed. We fix $\theta\in(0,1/d)$ and $R_0>1$. Let $\varepsilon'_0>0$ small enough, such that ${\varepsilon'_0}^{-\theta}>4/3$. We consider $\varepsilon\in(0,\varepsilon'_0)$. In this section, we denote by c, $c_1,c_2,\ldots$ positive constants whose values depend only on d and R_0. The value of c may vary from line to line. For short we shall write $A_\varepsilon = A\cap\bar{B}(0,\varepsilon^{1-\theta})^c$ (not to be confused with A^ε).

Notice that

$$\mathbb{N}_0\left[|\mathcal{R}^\varepsilon\cap A_\varepsilon|\right] = \int_{A_\varepsilon} dx\,\mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)}<\infty\right] = \int_{A_\varepsilon} dx\,u_\varepsilon(x).$$

Thus we deduce from the definition of u_ε, (III.6), (III.7) and (III.9), that for $\varepsilon\in(0,\varepsilon'_0)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}'_0\varepsilon^{d-4}\int_A dx\ |x|^{2-d} &- \mathrm{a}'_0\varepsilon^{d-4}\int_{B(0,\varepsilon^{1-\theta})} dx\ |x|^{2-d}\\
&\leq \mathbb{N}_0\left[|\mathcal{R}^\varepsilon\cap A_\varepsilon|\right] \leq \mathrm{a}'_0\varepsilon^{d-4}\int_A dx\ |x|^{2-d} + \mathrm{b}_1\varepsilon^{2d-8}\int_{A_\varepsilon} dx\,|x|^{6-2d}.
\end{aligned}$$

Therefore using also (III.16), we have

$$\left|\mathbb{N}_{x_0}\left[\varepsilon^{4-d}\,|\mathcal{R}(W)^\varepsilon\cap A_\varepsilon| - \mathrm{a}_0\int_0^\infty ds\,(Y_s,\mathbf{1}_A)\right]\right| \leq c\varepsilon^\theta.$$

Thus we get the first bound of proposition III.3.3 (take $\kappa<\theta$ and ε_0 small enough).

Now we will prove the second bound. To this end we have to find an upper bound on

$$I = \mathbb{N}_0\left[|\mathcal{R}^\varepsilon\cap A_\varepsilon|^2\right]$$

and a lower bound on

$$J = \mathbb{N}_0\left[|\mathcal{R}^\varepsilon\cap A_\varepsilon|\int_0^\sigma ds\,\mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right].$$

III.4.1 An upper bound on I

The term I can also be written

$$\iint_{A_\varepsilon \times A_\varepsilon} dx\, dy\, \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; T_{(y,\varepsilon)} < \infty\right].$$

Then consider the above integral as the sum of the integral over $|x-y| \le 2\varepsilon^{1-\theta}$ (denoted by I_1) and the one over $|x-y| > 2\varepsilon^{1-\theta}$ (denoted by I_2). Using the definition of u_ε, (III.6) and (III.8) we easily obtain an upper bound on I_1.

$$\begin{aligned} I_1 &\le \left|B(0, 2\varepsilon^{1-\theta})\right| \int_{A_\varepsilon} dx\, \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty\right] \\ &\le c\varepsilon^{d(1-\theta)} \int_{A_\varepsilon} dx\, \varepsilon^{d-4} \mathrm{b}_0\, |x|^{2-d} \\ &\le c_1 \varepsilon^{2d-4-\theta d}. \end{aligned}$$

Before deriving an upper bound on I_2, notice the event $\left\{T_{(x,\varepsilon)} < \infty; T_{(y,\varepsilon)} < \infty\right\}$ is a subset of

$$\left\{T_{(x,\varepsilon)} < \infty; T_{(y,\varepsilon)} \circ \theta_{T_{(x,\varepsilon)}} < \infty\right\} \cup \left\{T_{(y,\varepsilon)} < \infty; T_{(x,\varepsilon)} \circ \theta_{T_{(y,\varepsilon)}} < \infty\right\},$$

where θ_t is the usual shift operator. By symmetry, we get

$$I_2 \le 2 \iint_{A_\varepsilon \times A_\varepsilon} dx\, dy\, \mathbf{1}_{\{|x-y| > 2\varepsilon^{1-\theta}\}} \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; T_{(y,\varepsilon)} \circ \theta_{T_{(x,\varepsilon)}} < \infty\right]. \tag{III.20}$$

Using the strong Markov property of the Brownian snake under $\mathbb{N}_0$ at the stopping time $T_{(x,\varepsilon)}$ and (III.10), we see that the quantity $\mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; T_{(y,\varepsilon)} \circ \theta_{T_{(x,\varepsilon)}} < \infty\right]$ is equal to

$$\mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; 2 \int_0^{\zeta_{T_{(x,\varepsilon)}} \wedge \tau_{B(y,\varepsilon)}(W_{T(x,\varepsilon)})} dt\, u_\varepsilon \left(W_{T_{(x,\varepsilon)}}(t) - y\right) \mathrm{e}^{\left[-2 \int_0^t u_\varepsilon \left(W_{T_{(x,\varepsilon)}}(s) - y\right) ds\right]}\right].$$

Finally the law of the stopped path $W_{T_{(x,\varepsilon)}}$ under $\mathbb{N}_0$ is given by (III.12). Thus the previous expression is equal to

$$2 \int_0^\infty dt\, \mathbb{E}_0 \left[\tau_{B(x,\varepsilon)} > t; \tau_{B(y,\varepsilon)} > t; u_\varepsilon(\beta_t - x) u_\varepsilon(\beta_t - y)\, \mathrm{e}^{\left[-2 \int_0^t ds\, [u_\varepsilon(\beta_s - x) + u_\varepsilon(\beta_s - y)]\right]}\right].$$

We substitute this last expression for $\mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; T_{(y,\varepsilon)} \circ \theta_{T_{(x,\varepsilon)}} < \infty\right]$ in (III.20), and then decompose the right-hand side of (III.20) in three terms by considering the integral in $dxdy$ on the sets $|\beta_t - x| \wedge |\beta_t - y| > \varepsilon^{1-\theta}$ (integral I_{21}), $|\beta_t - x| \le \varepsilon^{1-\theta}$ (integral I_{22}), and $|\beta_t - y| \le \varepsilon^{1-\theta}$ (integral I_{23}) (recall $|x-y| > 2\varepsilon^{1-\theta}$).

An upper bound on I_{21}.

We can use (III.6) and (III.9), since $\varepsilon^{-\theta} > 4/3$, to bound I_{21} above by:

$$
\begin{aligned}
4 \iint_{A_\varepsilon \times A_\varepsilon} & dx\, dy\, \mathbf{1}_{\{|x-y|>2\varepsilon^{1-\theta}\}} \int_0^\infty dt\, \mathbb{E}_0 \Big[|\beta_t - x| > \varepsilon^{1-\theta}; |\beta_t - y| > \varepsilon^{1-\theta}; \\
& \varepsilon^{2(d-4)} |\beta_t - x|^{2-d} |\beta_t - y|^{2-d} \left(\mathrm{a}_0' + \mathrm{b}_1 \varepsilon^{d-4} |\beta_t - x|^{4-d} \right) \left(\mathrm{a}_0' + \mathrm{b}_1 \varepsilon^{d-4} |\beta_t - y|^{4-d} \right) \Big] \\
& \le 4\varepsilon^{2(d-4)} \left[\mathrm{a}_0' + \mathrm{b}_1 \varepsilon^{(d-4)[1-(1-\theta)]} \right]^2 \iint_{A\times A} dx\, dy \int dz\, G(0,z)\, |z-x|^{2-d} |z-y|^{2-d} \\
& \le \varepsilon^{2(d-4)} I_0 + c_2 \varepsilon^{2(d-4)(1+\theta/2)},
\end{aligned}
$$

where we set

$$
I_0 = 4 {\mathrm{a}_0'}^2 \int dz\, G(0,z) \left[\int_A dx\ |z-x|^{2-d} \right]^2 .
$$

An upper bound on I_{22} and I_{23}.

By symmetry we have $I_{22} = I_{23}$. Before getting an upper bound on I_{22}, notice that $|\beta_t - x| \le \varepsilon^{1-\theta}$ and $|x-y| > 2\varepsilon^{1-\theta}$ imply $|\beta_t - y| > \varepsilon^{1-\theta}$. Furthermore thanks to (III.6) and (III.8), we get

$$
\begin{aligned}
\int_{A_\varepsilon} dy\, \mathbf{1}_{\{|\beta_t - y| > \varepsilon^{1-\theta}\}} u_\varepsilon(\beta_t - y)\, \mathrm{e}^{-2\int_0^t u_\varepsilon(\beta_s - y) ds} & \le \int_A dy\ \left[\mathrm{b}_0 \varepsilon^{d-4} |\beta_t - y|^{2-d} \right] \\
& \le \mathrm{b}_0 \varepsilon^{d-4} \int_{B(0,R_0)} dy\ |y|^{2-d} = c_3 \varepsilon^{d-4}.
\end{aligned}
$$

Thus the sum $I_{22} + I_{23}$ is bounded above by

$$
8 c_3 \varepsilon^{d-4} \int_{A_\varepsilon} dx \int_0^\infty dt\, \mathbb{E}_0 \left[\tau_{B(x,\varepsilon)} > t; \mathbf{1}_{\{|\beta_t - x| \le \varepsilon^{1-\theta}\}} u_\varepsilon(\beta_t - x)\, \mathrm{e}^{-2\int_0^t u_\varepsilon(\beta_s - x) ds} \right].
$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality and formula (III.14), we get

$$
\begin{aligned}
I_{22} + I_{23} \le 8 c_3 \varepsilon^{d-4} & \left[\int_{A_\varepsilon} dx \int_0^\infty dt\, \mathbb{P}_0 \left[|\beta_t - x| \le \varepsilon^{1-\theta} \right] \right]^{1/2} \\
& \times \left[\int_{A_\varepsilon} dx \int_0^\infty dt\, \mathbb{E}_0 \left[\tau_{B(x,\varepsilon)} > t; u_\varepsilon(\beta_t - x)^2\, \mathrm{e}^{-4\int_0^t u_\varepsilon(\beta_s - x) ds} \right] \right]^{1/2} \\
\le 8 c_3 \varepsilon^{d-4} & \left[\int_A dx \int dz\, G(0,z) \mathbf{1}_{\{|z-x| \le \varepsilon^{1-\theta}\}} \right]^{1/2} \left[\int_{A_\varepsilon} dx\ 2^{-1} u_\varepsilon(x) \right]^{1/2} .
\end{aligned}
$$

Then thanks to (III.6) and (III.8), we get $I_{22} + I_{23} \le c_4 \varepsilon^{2d-6-\theta d/2}$.

Conclusion on the upper bound on I.

By combining the previous results, we get

$$
I \le c_1 \varepsilon^{2d-4-\theta d} + \varepsilon^{2(d-4)} I_0 + c_2 \varepsilon^{2(d-4)(1+\theta/2)} + c_4 \varepsilon^{2d-6-\theta d/2}.
$$

As $\theta \in (0, 1/d)$ and $d \ge 5$, we get $\varepsilon^{2(4-d)} I \le I_0 + c_5 \varepsilon^\theta$, for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$.

III.4.2 A lower bound on J

We shall need the last hitting time of $\bar{B}(x,\varepsilon)$ under $\mathbb{N}_0$ for the Brownian snake:

$$L_{(x,\varepsilon)} = \sup\left\{s \geq 0; \exists t \in [0,\zeta_s], W_s(t) \in \bar{B}(x,\varepsilon)\right\}.$$

We then get

$$\begin{aligned} J = \int_{A_\varepsilon} dx\ \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; \int_0^{L_{(x,\varepsilon)}} ds\ \mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right] \\ + \int_{A_\varepsilon} dx\ \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; \int_{T_{(x,\varepsilon)}}^{\sigma} ds\ \mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right] \\ - \int_{A_\varepsilon} dx\ \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; \int_{T_{(x,\varepsilon)}}^{L_{(x,\varepsilon)}} ds\ \mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right]. \end{aligned}$$

The time-reversal invariance property of the Itô measure and the characterization of the excursion measure $\mathbb{N}_x$ readily imply that the latter itself enjoys the same invariance property. Thus the first two terms of the right-hand side are equal. We shall denote their sum by J_1. Let J_2 denote the third term.

A lower bound on J_1.

Let us use the strong Markov property of the Brownian snake at time $T_{(x,\varepsilon)}$, then (III.18) and (III.12), to get

$$\begin{aligned} J_1 &= 2\int_{A_\varepsilon} dx\ \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; 2\int_0^{\zeta_{T_{(x,\varepsilon)}}} dt\ \int_A dy\ G\left(W_{T_{(x,\varepsilon)}}(t), y\right)\right] \\ &= 4\int_{A_\varepsilon} dx \int_A dy \int_0^\infty dt\ \mathbb{E}_0\left[\tau_{B(x,\varepsilon)} > t; G(\beta_t, y) u_\varepsilon(\beta_t - x)\, \mathrm{e}^{-2\int_0^t u_\varepsilon(\beta_s - x) ds}\right]. \end{aligned}$$

Fatou's lemma gives that $\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{4-d} J_1 \geq J_0$, where

$$J_0 = 4\mathrm{a}_0' \iint_{A\times A} dxdy \int dz\ G(0,z) G(z,y) \left|z - x\right|^{2-d}.$$

Unfortunately, we need an estimate on the rate of convergence. This requires some tedious technical calculations. Notice that on $\{\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})}(\beta) > t\}$, inequalities (III.7) and (III.8) imply

$$\mathrm{a}_0' \varepsilon^{d-4} \left|\beta_t - x\right|^{2-d} \leq u_\varepsilon(\beta_t - x) \leq \mathrm{b}_0 \varepsilon^{d-4} \left|\beta_t - x\right|^{2-d}.$$

For short we write $\Gamma_t = 2\mathrm{b}_0 \varepsilon^{d-4} \int_0^t \left|\beta_s - x\right|^{2-d} ds$. We assume that ε is small enough so that $2R_0 \varepsilon^{1/2} \leq 1$. Then $\varepsilon^{4-d} J_1$ is bounded below by

$$J_1' = 4\mathrm{a}_0' \int_{A_\varepsilon} dx \int_A dy \int_0^\infty dt\ \mathbb{E}_0\left[\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})} \wedge \tau_{B(x,\varepsilon^{-1/2})^c} > t; G(\beta_t, y) \left|\beta_t - x\right|^{2-d} \mathrm{e}^{-\Gamma_t}\right].$$

In order to obtain an upper bound on $|J_1' - J_0|$, we have to find an upper bound on

$$\iint_{A\times A} dxdy \int_0^\infty dt\ \mathbb{E}_0\left[G(\beta_t, y) \left|\beta_t - x\right|^{2-d}\left[1 - \mathbf{1}_{A_\varepsilon}(x) \mathbf{1}_{\left\{\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})} \wedge \tau_{B(x,\varepsilon^{-1/2})^c} > t\right\}}\, \mathrm{e}^{-\Gamma_t}\right]\right].$$

Thus we shall decompose $1-\mathbf{1}_{A_\varepsilon}(x)\mathbf{1}_{\left\{\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})}\wedge\tau_{B(x,\varepsilon^{-1/2})^c}>t\right\}}\mathrm{e}^{-\Gamma_t}$ into a sum of three terms:

$$[1-\mathbf{1}_{A_\varepsilon}(x)]+\mathbf{1}_{A_\varepsilon}(x)\left[1-\mathbf{1}_{\left\{\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})}\wedge\tau_{B(x,\varepsilon^{-1/2})^c}>t\right\}}\right]$$
$$+\mathbf{1}_{A_\varepsilon}(x)\mathbf{1}_{\left\{\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})}\wedge\tau_{B(x,\varepsilon^{-1/2})^c}>t\right\}}\left[1-\mathrm{e}^{-\Gamma_t}\right].$$

We denote by J_{11}, J_{12}, and J_{13} the corresponding integrals. The integral

$$J_{11}=\int_{A\setminus A_\varepsilon}dx\int_A dy\int_0^\infty dt\ \mathbb{E}_0\left[G(\beta_t,y)\left|\beta_t-x\right|^{2-d}\right]$$

is easily bounded above by

$$\int_{B(0,\varepsilon^{1-\theta})}dx\ \int_{B(0,R_0)}dy\int dz\ G(0,z)G(z,y)\left|z-x\right|^{2-d}$$
$$\leq\left(\int_{B(0,R_0)}dy\int dz\ G(0,z)G(z,y)\right)\int_{B(0,\varepsilon^{1-\theta})}dx\ \left|x\right|^{2-d}=c_6\varepsilon^{2(1-\theta)}.$$

We bound J_{12} by applying the strong Markov property of Brownian motion at time $\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})}$ and at time $\tau_{B(x,\varepsilon^{-1/2})^c}$,

$$\begin{aligned}J_{12}&=\int_{A_\varepsilon}dx\int_A dy\int_0^\infty dt\ \mathbb{E}_0\left[\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})}\leq t\text{ or }\tau_{B(x,\varepsilon^{-1/2})^c}\leq t;G(\beta_t,y)\left|\beta_t-x\right|^{2-d}\right]\\&\leq\int_{A_\varepsilon}dx\int_A dy\ \mathbb{E}_0\left[\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})}<\infty;\int dz\ G(\beta_{\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})}},z)G(z,y)\left|z-x\right|^{2-d}\right]\\&\qquad+\iint_{A\times A}dxdy\ \mathbb{E}_0\left[\int dz\ G(\beta_{\tau_{B(x,\varepsilon^{-1/2})^c}},z)G(z,y)\left|z-x\right|^{2-d}\right].\end{aligned}$$

Notice that

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d}\int_A dy\ G(z,y)\leq R_0^2\int_{B(0,1)}dy\ G(0,y)<\infty.\tag{III.21}$$

An easy calculation shows that there exists a constant c_7 such that for every $(x,x')\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$,

$$\int dz\ G(x',z)\left|z-x\right|^{2-d}\leq c_7\left|x'-x\right|^{4-d}.\tag{III.22}$$

Furthermore we have for every $r\in(0,1)$,

$$\int_{B(0,R_0)}dx\ \mathbb{P}_0\left[\tau_{B(x,r)}<\infty\right]=\int_{B(0,R_0)}dx\ \left[\left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-2}\wedge 1\right]\leq cr^{d-2}.$$

Recalling that $\varepsilon^{-1/2}\geq 2R_0$, we deduce from the previous remarks that

$$\begin{aligned}J_{12}&\leq c\left(\varepsilon^{1-\theta}\right)^{4-d}\int_{A_\varepsilon}dx\ \mathbb{P}_0\left[\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})}<\infty\right]+c\left(\varepsilon^{-1/2}\right)^{4-d}\\&\leq c\left(\varepsilon^{1-\theta}\right)^{4-d}\left(\varepsilon^{1-\theta}\right)^{d-2}+c\left(\varepsilon^{-1/2}\right)^{4-d}\leq c_8\varepsilon^{1/2}.\end{aligned}$$

Finally we have, using (III.21) and the Markov property for Brownian motion at time s, (III.21) again and (III.22)

$$\begin{aligned}
J_{13} &\leq \iint_{A\times A} dxdy \int_0^\infty dt\, \mathbb{E}_0 \Big[\tau_{B(x,\varepsilon^{1-\theta})} > t; \tau_{B(x,\varepsilon^{-1/2})^c} > t; \\
&\qquad\qquad G(\beta_t, y) \left|\beta_t - x\right|^{2-d} 2\mathrm{b}_0 \varepsilon^{d-4} \int_0^t \left|\beta_s - x\right|^{2-d} ds \Big] \\
&\leq c\varepsilon^{d-4} \int_A dx \int_0^\infty ds \int_s^\infty dt\, \mathbb{E}_{-x} \left[\left|\beta_s\right|^{2-d} \mathbb{E}_{\beta_s} \left[\varepsilon^{1-\theta} < \left|\beta_{t-s}\right| < \varepsilon^{-1/2}; \left|\beta_{t-s}\right|^{2-d} \right]\right] \\
&\leq c\varepsilon^{d-4} \int_{B(0,R_0)} dx \int dz\, G(-x,z) \left|z\right|^{2-d} \int_{\varepsilon^{1-\theta} < |x'| < \varepsilon^{-1/2}} dx'\, G(z,x') \left|x'\right|^{2-d} \\
&\leq c\varepsilon^{d-4} \int dz\, \left|z\right|^{2-d} \int_{\varepsilon^{1-\theta} < |x'| < \varepsilon^{-1/2}} dx'\, G(z,x') \left|x'\right|^{2-d} \\
&\leq c\varepsilon^{d-4} \int_{\varepsilon^{1-\theta} < |x'| < \varepsilon^{-1/2}} dx'\, \left|x'\right|^{6-2d} \\
&\leq c\varepsilon^{d-4} \left(\varepsilon^{-1/2} \vee \varepsilon^{(6-d)(1-\theta)} \right) \\
&\leq c_9 \varepsilon^{1/2}.
\end{aligned}$$

We have $\varepsilon^{4-d} J_1 \geq J_0 - 4\mathrm{a}'_0 (J_{11} + J_{12} + J_{13})$. Putting together the previous results, we get for ε small enough, say $\varepsilon \in (0, \varepsilon''_0)$,

$$\varepsilon^{4-d} J_1 \geq J_0 - 4\mathrm{a}'_0 [c_6 \varepsilon^{2(1-\theta)} + c_8 \varepsilon^{1/2} + c_9 \varepsilon^{1/2}] \geq J_0 - c_{10} \varepsilon^{1/2},$$

where the constant c_{10} depends only on d and R_0.

An upper bound on J_2.

Notice that we have

$$\begin{aligned}
J_2 \leq \varepsilon \int_{A_\varepsilon} dx\, \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; L_{(x,\varepsilon)} - T_{(x,\varepsilon)} \leq \varepsilon \right] \\
+ \int_{A_\varepsilon} dx\, \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; L_{(x,\varepsilon)} - T_{(x,\varepsilon)} > \varepsilon; \int_{T_{(x,\varepsilon)}}^{L_{(x,\varepsilon)}} ds\, \mathbf{1}_A(\hat{W}_s) \right].
\end{aligned}$$

Using (III.6) and (III.8), the first term of the right-hand side, denoted by J_{21}, can easily be bounded above by

$$J_{21} \leq \varepsilon \int_{A_\varepsilon} dx\, \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty \right] \leq \mathrm{b}_0 \varepsilon^{1+d-4} \int_{B(0,R_0)} dx\, \left|x\right|^{2-d} = c_{11} \varepsilon^{d-3}.$$

The second term, denoted by J_{22}, is bounded above by

$$\left[\int_{A_\varepsilon} dx\, \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; L_{(x,\varepsilon)} - T_{(x,\varepsilon)} > \varepsilon \right] \right]^{1/q}$$
$$\left[\int_{A_\varepsilon} dx\, \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; \left[\int_{T_{(x,\varepsilon)}}^{\sigma} ds\, \mathbf{1}_A(\hat{W}_s) \right]^p \right] \right]^{1/p},$$

where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ and we assume that $1<p<3/2$ (the exact value of p will be fixed later). The next lemma, whose proof is postponed to the end of this section, provides an upper bound for the first term.

Lemma III.4.1 *There exists a constant c_0 depending only on d and R_0, such that for every $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')$, we have*

$$\int_{A_\varepsilon} dx\ \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)}<\infty; L_{(x,\varepsilon)}-T_{(x,\varepsilon)}>\varepsilon\right]\le c_0\varepsilon^{d-4+1/12}.$$

Consider then the second term. By the strong Markov property of the Brownian snake at time $T_{(x,\varepsilon)}$ and Jensen's inequality we have

$$\begin{aligned}J_{23}:=&\int_{A_\varepsilon} dx\ \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)}<\infty;\left[\int_{T_{(x,\varepsilon)}}^{\sigma} ds\ \mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right]^p\right]\\ \le&\int_{A_\varepsilon} dx\ \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)}<\infty;\left(\mathcal{E}^*_{W_{T_{(x,\varepsilon)}}}\left(\left[\int_0^{\sigma} ds\ \mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right]^2\right)\right)^{p/2}\right].\end{aligned}$$

We deduce from (III.19), that for every $\mathrm{w}\in\mathcal{W}_0$,

$$\mathcal{E}^*_{\mathrm{w}}\left(\left[\int_0^{\sigma} ds\ \mathbf{1}_A(\hat{W}_s)\right]^2\right)\le c(\zeta_{(\mathrm{w})}+\zeta^2_{(\mathrm{w})}).$$

Since for every $r>0$, $(r+r^2)^{p/2}\le 2^{p/2}(1+r^p)$ we have thanks to (III.11)

$$\begin{aligned}J_{23}&\le c_{12}\int_{A_\varepsilon} dx\ \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)}<\infty; 1+\zeta^p_{T_{(x,\varepsilon)}}\right]\\ &\le c_{12}\int_{A_\varepsilon} dx\ u_\varepsilon(x)+c_{12}\int_{A_\varepsilon} dx\ u_\varepsilon(x)\mathbb{E}_0\left[(\tau^\varepsilon)^p\right],\end{aligned}$$

where τ^ε is the lifetime of the process x^ε defined in section III.2.3 (note that x^ε and so τ^ε depend on the point x). The first term of the right-hand side is easily bounded above using (III.6) and (III.8) by

$$c_{12}\mathrm{b}_0\varepsilon^{d-4}\int_{B(0,R_0)} dx\ |x|^{2-d}=c_{13}\varepsilon^{d-4}.$$

Next the function $g(r)=r^p$ is increasing and we can use (III.13) and (III.8) to get that

$$\begin{aligned}\int_{A_\varepsilon} dx\ u_\varepsilon(x)\mathbb{E}_0\left[(\tau^\varepsilon)^p\right]&\le c\int_{A_\varepsilon} dx\ u_\varepsilon(x)\int_0^\infty dt\ t^{-d/2}\,\mathrm{e}^{-1/2t}\,t^p\,|x|^{2p}\\ &\le c'(p)\varepsilon^{d-4}\int_{B(0,R_0)} dx\ |x|^{2-d+2p}\\ &\le c(p)\varepsilon^{d-4}.\end{aligned}$$

Thus we have $J_{23}\le c(p)\varepsilon^{d-4}$ (the constants $c'(p)$ and $c(p)$ depend only on d, R_0 and p).

Using the result of lemma III.4.1, and taking $q=4$, $p=4/3$, we get

$$\begin{aligned}J_{22}&\le\left[c_0\varepsilon^{d-4+1/12}\right]^{1/q}\left[J_{23}\right]^{1/p}\\ &\le c\varepsilon^{d-4+1/48}.\end{aligned}$$

Then we get $J_2\le J_{21}+J_{22}\le c_{14}\varepsilon^{d-4+1/48}$.

Conclusion on the lower bound on J.

By combining the previous results, we get for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0^{''})$,

$$\varepsilon^{4-d} J \geq J_0 - c_{10}\varepsilon^{1/2} - \varepsilon^{4-d} J_2 \geq J_0 - c_{15}\varepsilon^{1/48}.$$

III.4.3 End of the proof of proposition III.3.3

We deduce from formula (III.17), that

$$J_0 = \mathrm{a}_0 \mathbb{N}_0 \left[\left[\int_0^\sigma \mathbf{1}_A(\hat{W}_s) ds \right]^2 \right], \quad \text{and} \quad I_0 = \mathrm{a}_0^2 \mathbb{N}_0 \left[\left[\int_0^\sigma \mathbf{1}_A(\hat{W}_s) ds \right]^2 \right].$$

Thus we get from section III.4.1 and III.4.2 that for ε small enough

$$\mathbb{N}_0 \left[\left[\varepsilon^{4-d} \left| \mathcal{R}^\varepsilon \cap A_\varepsilon \right| - \mathrm{a}_0 \int_0^\sigma ds \, \mathbf{1}_A(\hat{W}_s) \right]^2 \right] \leq c_5 \varepsilon^\theta + 2c_{15}\varepsilon^{1/48}.$$

Take $\kappa < \theta \wedge (1/48)$ and ε_0 small to get the second upper bound of proposition III.3.3. $\square$

III.4.4 Proof of lemma III.4.1

We shall be interested in

$$K = \int_{A_\varepsilon} dx \; \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; L_{(x,\varepsilon)} - T_{(x,\varepsilon)} > \delta \right],$$

for $\delta > 0$. Let $\gamma > 0$ and write $\tau_\gamma = \tau_{B(x,\gamma)}$. We assume $\gamma \geq \varepsilon^{1-\theta}$. The values of δ and γ will be fixed at the end of the proof. Consider the first stopped path which hits the closed ball $\bar{B}(x,\varepsilon)$, that is $W_{T_{(x,\varepsilon)}}$, and the last such path, that is $W_{L_{(x,\varepsilon)}}$. Let us call branching point the first point where these two paths become different, that is $\hat{W}_{m(T_{(x,\varepsilon)}, L_{(x,\varepsilon)})}$. We shall treat separately the case when the branching point is in the ball $B(x,\gamma)$ and the case when it is not. The proof of the upper bound in the second case is similar to what we have already done (section III.4.1). But in the first case, we shall use information on the behavior of $W_{T_{(x,\varepsilon)}}$ in the neighborhood of $\bar{B}(x,\varepsilon)$ (in fact in $B(x,\gamma)$).

Notice $\tau_\gamma \left(W_{T_{(x,\varepsilon)}} \right) < \infty$ on the set $\left\{ T_{(x,\varepsilon)} < \infty \right\}$. Thanks to the strong Markov property at time $T_{(x,\varepsilon)}$, we get

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; L_{(x,\varepsilon)} - T_{(x,\varepsilon)} > \delta \right] \\
&\quad = \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; L_{(x,\varepsilon)} - T_{(x,\varepsilon)} > \delta; L_{(x,\varepsilon)} \geq \inf \left\{ s > T_{(x,\varepsilon)}; \zeta_s = \tau_\gamma \left(W_{T_{(x,\varepsilon)}} \right) \right\} \right] \\
&\qquad\qquad + \mathbb{N}_0 \left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; \mathcal{E}^*_{W_{T_{(x,\varepsilon)}}} \left[L_{(x,\varepsilon)} > \delta; L_{(x,\varepsilon)} < \inf \left\{ s > 0; \zeta_s = \tau_\gamma(W_0) \right\} \right] \right].
\end{aligned}$$

The two terms of the right-hand side are denoted by K_1 and K_2 respectively.

An upper bound on K_1.

We first assume that $x \in B(0,R_0)\backslash B(0,\gamma)$. Consider the stopping time

$$T = \inf\left\{s \geq T_{(x,\varepsilon)}; \zeta_s = \tau_\gamma\left(W_{T_{(x,\varepsilon)}}\right)\right\}.$$

Notice that on the event $\left\{T_{(x,\varepsilon)} < \infty\right\}$, we have $\zeta_T = \tau_\gamma\left(W_{T_{(x,\varepsilon)}}\right)$, and for every $t \in [0,\zeta_T]$, $W_T(t) = W_{T_{(x,\varepsilon)}}(t)$. Thus we have $|W_T(t) - x| \geq \gamma$ for $t \in [0,\zeta_T]$. By applying the strong Markov property at time T, then (III.10) and the above observations, we get

$$\begin{aligned}
K_1 &\leq \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; \mathcal{E}^*_{W_T}\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty\right]\right] \\
&\leq \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; \left[1 - \exp -2\int_0^{\zeta_T} u_\varepsilon(W_T(t) - x)dt\right]\right] \\
&\leq \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; 2\tau_\gamma\left(W_{T_{(x,\varepsilon)}}\right)\varepsilon^{-2}u_1(\gamma/\varepsilon)\right] \\
&\leq 2\varepsilon^{-2}u_1(\gamma/\varepsilon)\int_0^\infty dt\ \mathbb{E}_0\left[\tau_{B(x,\varepsilon)} > t; \tau_\gamma > t; u_\varepsilon(\beta_t - x)\,\mathrm{e}^{-2\int_0^t u_\varepsilon(\beta_s - x)ds}\right] \\
&\leq 2\varepsilon^{-2}u_1(\gamma/\varepsilon)\int_0^\infty dt\ \mathbb{E}_0\left[\mathrm{b}_0\varepsilon^{d-4}\left|\beta_t - x\right|^{2-d}\right] \\
&\leq 2\mathrm{b}_0^2\gamma^{2-d}\varepsilon^{2(d-4)}\int dz\ G(0,z)\left|z - x\right|^{2-d}.
\end{aligned}$$

We used (III.8) and $\gamma \geq \varepsilon^{1-\theta}$ in the last two inequalities.

An upper bound on K_2.

We still assume that $x \in B(0,R_0)\backslash B(0,\gamma)$. We get the following inequalities

$$\begin{aligned}
K_2 &\leq \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; \mathcal{E}^*_{W_{T_{(x,\varepsilon)}}}\left[\inf\left\{s > 0; \zeta_s = \tau_\gamma(W_0)\right\} > \delta\right]\right] \\
&= \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; g_\delta\left(\zeta_{T_{(x,\varepsilon)}} - \tau_\gamma(W_{T_{(x,\varepsilon)}})\right)\right],
\end{aligned}$$

where

$$g_\delta(r) = \mathrm{P}_r\left[\inf\left\{s > 0; B_s = 0\right\} > \delta\right] = \mathrm{P}_0\left[|B_1| < r/\sqrt{\delta}\right],$$

and B is under P_r a linear Brownian motion started at r. Thanks to (III.11) (recall notation of section III.2.3) we have

$$\begin{aligned}
K_2 &\leq u_\varepsilon(x)\mathbb{E}_0\left[g_\delta\left(\tau^\varepsilon - \tau_\gamma(x^\varepsilon)\right)\right] \\
&= u_\varepsilon(x)\mathbb{E}_0\left[\mathbb{E}_{x^\varepsilon_{\tau_\gamma(x^\varepsilon)}}\left[g_\delta\left(\tau^\varepsilon\right)\right]\right],
\end{aligned}$$

where we used the strong Markov property of x^ε at time $\tau_\gamma(x^\varepsilon)$. Next the function g_δ is positive increasing and $g_\delta(r) \leq 2r/\sqrt{2\pi\delta}$. Use (III.13) and notice that $\left|x^\varepsilon_{\tau_\gamma(x^\varepsilon)} - x\right| = \gamma$ to get

$$\begin{aligned}
K_2 &\leq u_\varepsilon(x)\alpha_d\int_0^\infty dt\ t^{-d/2}\,\mathrm{e}^{-1/2t}\,g_\delta(\gamma^2 t) \\
&\leq c u_\varepsilon(x)\int_0^\infty dt\ t^{-d/2}\,\mathrm{e}^{-1/2t}\,\gamma^2 t\delta^{-1/2}.
\end{aligned}$$

For $x \in B(0,R_0)\backslash B(0,\gamma)$, we can use (III.8) to get:

$$K_2 \le c\gamma^2 \delta^{-1/2} \varepsilon^{d-4} |x|^{2-d},$$

where the constant c depends only on d and R_0.

Conclusion on the upper bound on K.

If $x \in B(0,\gamma)\backslash B(0,\varepsilon^{1-\theta})$, we simply use

$$\mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty; L_{(x,\varepsilon)} - T_{(x,\varepsilon)} > \delta\right] \le \mathbb{N}_0\left[T_{(x,\varepsilon)} < \infty\right] \le \mathrm{b}_0 \varepsilon^{d-4} |x|^{2-d}.$$

Thus, by combining the previous bounds, we get

$$\begin{aligned} K &\le \mathrm{b}_0 \varepsilon^{d-4} \int_{B(0,\gamma)} dx\ |x|^{2-d} + \int_{B(0,R_0)\backslash B(0,\gamma)} dx\ [K_1 + K_2] \\ &\le c\gamma^2 \varepsilon^{d-4} + c\gamma^{2-d}\varepsilon^{2(d-4)} + c\gamma^2\delta^{-1/2}\varepsilon^{d-4}. \end{aligned}$$

Now take $\delta = \varepsilon$, and $\gamma = \varepsilon^a$ for $21/72 < a < 22/72$, to conclude that for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$,

$$K \le c\varepsilon^{d-4+1/12}.$$

III.5 Capacity equivalence for the support and the range of X

Let $f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ be a decreasing function. We put $f(0) = \lim_{r\downarrow 0} f(r) \in [0,\infty]$. We define the energy of a Radon measure ν on $\mathbb{R}^d$ with respect to the kernel f by:

$$\mathcal{I}_f(\nu) = \iint f(|x-y|)\nu(dx)\nu(dy),$$

and the capacity of a set $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ by

$$\mathrm{cap}_f(\Lambda) = \left[\inf_{\nu(\Lambda)=1} \mathcal{I}_f(\nu)\right]^{-1}.$$

Following [47], we say that two sets Λ_1 and Λ_2 are capacity-equivalent if there exist two positive constants c and C such that for every kernel f, we have

$$c\,\mathrm{cap}_f(\Lambda_1) \le \mathrm{cap}_f(\Lambda_2) \le C\,\mathrm{cap}_f(\Lambda_1).$$

Recall that for every $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, we set $\Lambda^\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^d; d(x,\Lambda) \le \varepsilon\right\}$ and $|\Lambda|$ is the Lebesgue measure of Λ. The next lemma is an immediate consequence of the remarks in [48] p.385.

Lemma III.5.1 *Let $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded Borel set. Suppose there exist two positive constants c' and γ such that*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\gamma-d} |\Lambda^\varepsilon| = c'.$$

Then there exists a constant C such that for every kernel f, we have

$$\mathrm{cap}_f(\Lambda) \le C\left[\int_0^1 f(r) r^{\gamma-1} dr\right]^{-1}.$$

For every measure $\mu \in M_f$, we set

$$S_\varepsilon(\mu) = \iint \mu(dx)\mu(dy)\, p(\varepsilon^2, x-y),$$

where p is the Brownian transition density in $\mathbb{R}^d$

$$p(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp -\frac{|x|^2}{2t}, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d.$$

The next lemma is also an immediate consequence of [48] (p.387).

Lemma III.5.2 *Let $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded Borel set. Suppose there exist two positive constants c' and γ and a measure $\mu \in M_f$ such that $\mu(\Lambda^c) = 0$ and*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{d-\gamma} S_\varepsilon(\mu) = c'.$$

Then there exists a constant c such that for every kernel f, we have

$$c\left[\int_0^1 f(r)r^{\gamma-1}dr\right]^{-1} \le \mathrm{cap}_f(\Lambda)\,.$$

For example, for every integer $p \le d$, we can consider the cube $[0,1]^p$ as a subset of $\mathbb{R}^d$, and then we obviously have

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{p-d}\,|([0,1]^p)^\varepsilon| = 1,$$

and if μ is Lebesgue measure on $[0,1]^p$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{d-p} S_\varepsilon(\mu) = (2\pi)^{(p-d)/2}.$$

Thus we deduce from lemma III.5.1 and III.5.2 that there exist two positive constants c'_p, C'_p, such that for every kernel f,

$$c'_p\left[\int_0^1 f(r)r^{p-1}dr\right]^{-1} \le \mathrm{cap}_f([0,1]^p) \le C'_p\left[\int_0^1 f(r)r^{p-1}dr\right]^{-1}. \qquad \text{(III.23)}$$

We shall prove the following result on super-Brownian motion.

Proposition III.5.3 *(i) Assume $d \ge 3$. Let $t > 0$, $\nu \in M_f$. $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. on $\{X_t \neq 0\}$, the set $\mathrm{supp}\, X_t$ is capacity-equivalent to $[0,1]^2$.*

(ii) Assume $d \ge 5$. Let $t > 0$, $\nu \in M_f$. $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. on $\{X_t \neq 0\}$, the set $\mathcal{R}_t(X)$ is capacity-equivalent to $[0,1]^4$. Furthermore, if there exists a positive number $\rho < 4$ such that $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\rho-d}\,|(\mathrm{supp}\,\nu)^\varepsilon| = 0$, then $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. the set $\mathcal{R}_0(X)$ is capacity-equivalent to $[0,1]^4$.

Proof of proposition III.5.3 (i). Let $d \ge 3$. It is well-known that for $t > 0$, $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. the set $\mathrm{supp}\, X_t$ is bounded. Thus, thanks to theorem III.3.2, $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s., we have

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2-d}\,|(\mathrm{supp}\, X_t)^\varepsilon| = \alpha_0(X_t, \mathbf{1}).$$

Now apply lemma III.5.1 to $\Lambda = \text{supp } X_t$, with $\gamma = 2$ and take $p = 2$ in (III.23). We get that $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s., on $\{X_t \neq 0\}$, there exists a (random) positive constant C_1, such that for every kernel f,

$$\text{cap}_f(\text{supp } X_t) \leq C_1 \, \text{cap}_f([0,1]^2) \, .$$

For the second part of (i), we use lemma III.5.4 below. Recall notation Y_t from section III.2.1.

Lemma III.5.4 *Fix $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Then we have*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{d-2} S_\varepsilon(Y_t) = \frac{4}{d-2}(Y_t, \mathbf{1}),$$

where the convergence holds $\mathbb{N}_x$-a.e. and in $L^2(\mathbb{N}_x)$.

Let us explain how the proof is completed using lemma III.5.4. Thanks to lemma III.5.2, the above lemma and (III.23) imply that $\mathbb{N}_x$-a.e. on $\{Y_t \neq 0\}$, there exists a positive constant c_1 such that for every kernel f,

$$\text{cap}_f(\text{supp } Y_t) \geq c_1 \, \text{cap}_f([0,1]^2) \, .$$

Now remember that for $t > 0$, under $\mathbb{P}^X_\nu$, we can write $X_t = \sum_{i \in I} Y_t(W^i)$, where $\sum_{i \in I} \delta_{W^i}$ is a Poisson measure on $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W})$ with intensity $\int \nu(dx) \, \mathbb{N}_x[\cdot]$. On $\{X_t \neq 0\}$, there exists i_0 such that $Y_t(W^{i_0}) \neq 0$. Then we have $\text{supp } Y_t(W^{i_0}) \subset \text{supp } X_t$. Thus the previous lemma entails that there exists a.s. a positive constant $c_1(W^{i_0})$ such that for every kernel f,

$$\text{cap}_f(\text{supp } X_t) \geq \text{cap}_f(\text{supp } Y_t(W^{i_0})) \geq c_1(W^{i_0}) \, \text{cap}_f([0,1]^2)$$

This completes the proof of (i). $\square$

Proof of proposition III.5.3 (ii). Let $d \geq 5$. Arguing as in the proof of (i), with theorem III.3.1 instead of theorem III.3.2, we get that for $t > 0$, $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s., on $\{X_t \neq 0\}$, there exists a (random) positive constant C_2, such that for every kernel f,

$$\text{cap}_f(\mathcal{R}_t(X)) \leq C_2 \, \text{cap}_f([0,1]^4) \, .$$

Furthermore, if there exists $\rho < 4$ such that $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\rho - d} \, |(\text{supp } \nu)^\varepsilon| = 0$, the previous result holds with $t = 0$ $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s.

For the second part of (ii), we use the next lemma, whose proof is postponed to the end of this section.

Lemma III.5.5 *Fix $t \geq 0$ and $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 5$. Then we have for every $T > t \geq 0$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{d-4} (2\pi)^{d/2} S_\varepsilon\left(\int_t^T ds \; Y_s\right) = \frac{16}{(d-2)(d-4)} \int_t^T ds \; (Y_s, \mathbf{1}),$$

where the convergence holds $\mathbb{N}_x$-a.e. and in $L^2(\mathbb{N}_x)$.

Arguing as in the second part of the proof of (i), we get that for every $t \geq 0$, $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. on $\{X_t \neq 0\}$ there exists a positive constant c_2, such that for every kernel f,

$$\text{cap}_f(\mathcal{R}_t(X)) \geq c_2 \, \text{cap}_f([0,1]^4) \, .$$

This completes the proof of (ii). $\square$

The proofs of lemma III.5.4 and lemma III.5.5 are very similar. We shall only prove the latter. The former uses the same techniques in a simpler way.
Proof of lemma III.5.5. We first want to show the convergence in $L^2(\mathbb{N}_x)$. Fix $T > t \geq 0$. By standard monotone class arguments, we deduce from the results of section III.6.1 an explicit expression for

$$\mathbb{N}_x \left[\int_0^T \cdots \int_0^T ds_1 \dots ds_4 \int \cdots \int Y_{s_1}(dx_1) \dots Y_{s_4}(dx_4) g(s_1, \dots, s_4, x_1, \dots, x_4) \right],$$

where g is any measurable positive function on $(\mathbb{R}^+)^4 \times (\mathbb{R}^d)^4$. Specializing to the case $g(s_1, \dots, s_4, x_1, \dots, x_4) = \prod_{i=1}^4 \mathbf{1}_{[t,T]}(s_i) p(\varepsilon^2, x_1 - x_2) p(\varepsilon^2, x_3 - x_4)$, we get

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N}_x \left[S_\varepsilon \left(\int_t^T ds\, Y_s \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{3} 4! 2^3 \int_0^T ds \int dy\, p(s, x - y) \Bigg\{ 4 \int_{(t-s)_+}^{T-s} ds_1 \int dy_1\, p(s_1, y - y_1) \int_0^{T-s} ds_2 \\
&\qquad \int dy_2\, p(s_2, y - y_2) \int_{(t-s-s_2)_+}^{T-s-s_2} ds_3 \int dy_3\, p(s_3, y_2 - y_3) \int_0^{T-s-s_2} ds_4 \\
&\qquad \int dy_4\, p(s_4, y_2 - y_4) \int_{(t-s-s_2-s_4)_+}^{T-s-s_2-s_4} ds_5 \int dy_5\, p(s_5, y_4 - y_5) \\
&\qquad \int_{(t-s-s_2-s_4)_+}^{T-s-s_2-s_4} ds_6 \int dy_6\, p(s_6, y_4 - y_6) \\
&\qquad\qquad [p(\varepsilon^2, y_1 - y_3) p(\varepsilon^2, y_5 - y_6) + p(\varepsilon^2, y_1 - y_5) p(\varepsilon^2, y_3 - y_6) \\
&\qquad\qquad\qquad + p(\varepsilon^2, y_1 - y_6) p(\varepsilon^2, y_3 - y_5)] \\
&\quad + \int_0^{T-s} ds_7 \int dy_7\, p(s_7, y - y_7) \int_{(t-s-s_7)_+}^{T-s-s_7} ds_8 \int dy_8\, p(s_8, y_7 - y_8) \\
&\qquad\qquad \int_{(t-s-s_7)_+}^{T-s-s_7} ds_9 \int dy_9\, p(s_9, y_7 - y_9) \\
&\qquad \int_0^{T-s} ds_{10} \int dy_{10}\, p(s_{10}, y - y_{10}) \int_{(t-s-s_{10})_+}^{T-s-s_{10}} ds_{11} \int dy_{11}\, p(s_{11}, y_{10} - y_{11}) \\
&\qquad\qquad \int_{(t-s-s_{10})_+}^{T-s-s_{10}} ds_{12} \int dy_{12}\, p(s_{12}, y_{10} - y_{12}) \\
&\qquad [p(\varepsilon^2, y_8 - y_9) p(\varepsilon^2, y_{11} - y_{12}) + p(\varepsilon^2, y_8 - y_{11}) p(\varepsilon^2, y_9 - y_{12}) \\
&\qquad\qquad + p(\varepsilon^2, y_8 - y_{12}) p(\varepsilon^2, y_9 - y_{11})] \Bigg\}
\end{aligned}$$

We write J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, and J_6, respectively for the integrals corresponding to the integrands $p(\varepsilon^2, y_1 - y_3) p(\varepsilon^2, y_5 - y_6)$, $p(\varepsilon^2, y_1 - y_5) p(\varepsilon^2, y_3 - y_6)$, $p(\varepsilon^2, y_1 - y_6) p(\varepsilon^2, y_3 - y_5)$, $p(\varepsilon^2, y_8 - y_9) p(\varepsilon^2, y_{11} - y_{12})$, $p(\varepsilon^2, y_8 - y_{11}) p(\varepsilon^2, y_9 - y_{12})$, and $p(\varepsilon^2, y_8 - y_{12}) p(\varepsilon^2, y_9 - y_{11})$ respectively. As we shall see the integral J_4 gives the main contribution. Before proceeding to the calculations, we give three useful bounds: for every positive real numbers s, $\varepsilon^2 < 2^{-1}(T^{-1} \wedge T)$, we have for $d \geq 5$

$$\int_0^T \left(\varepsilon^2 + s + r\right)^{-d/2} dr \leq \frac{2}{d-2} \left(\varepsilon^2 + s\right)^{1-d/2}, \tag{III.24}$$

$$\int_0^T \left(\varepsilon^2 + s + r\right)^{1-d/2} dr \leq \frac{2}{d-4} \left(\varepsilon^2 + s\right)^{2-d/2}, \tag{III.25}$$

$$\int_0^T \left(\varepsilon^2 + r\right)^{2-d/2} dr \leq H_T(\varepsilon) := \begin{cases} 2(d-6)^{-1}\varepsilon^{6-d} & \text{if } d \geq 7, \\ 4 \ln \varepsilon^{-1} & \text{if } d = 6, \\ \sqrt{6T} & \text{if } d = 5. \end{cases} \tag{III.26}$$

From now on, we assume that $\varepsilon^2 < 2^{-1}(T^{-1} \wedge T)$ and also $\varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-1} < T$ if $d = 6$. Let us derive an upper bound on J_1. By repeated applications of the Chapman-Kolmogorov identities, we get

$$\begin{aligned} J_1 \leq 2^8 \int_0^T \cdots \int_0^T ds \dots ds_6 \int dy\, p(s, x-y) \int dy_1\, p(s_1, y-y_1) \\ \int dy_2\, p(s_2, y-y_2) \int dy_3\, p(s_3, y_2-y_3) \int dy_4\, p(s_4, y_2-y_4) \\ \int dy_5\, p(s_5, y_4-y_5) \int dy_6\, p(s_6, y_4-y_6) p(\varepsilon^2, y_1-y_3) p(\varepsilon^2, y_5-y_6) \\ \leq 2^8 \int_0^T \cdots \int_0^T ds \dots ds_6\, p(\varepsilon^2 + s_1 + s_2 + s_3, 0) p(\varepsilon^2 + s_5 + s_6, 0). \end{aligned}$$

We can apply (III.24), (III.25) and (III.26) to get:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \frac{2^8}{(2\pi)^d} T \int_0^T ds_1 \frac{4}{(d-2)(d-4)} (\varepsilon^2 + s_1)^{2-d/2} \frac{4}{(d-2)(d-4)} T \varepsilon^{4-d} \\ &\leq c_1 T^2 \varepsilon^{4-d} H_T(\varepsilon), \end{aligned}$$

where the constant c_1 depends only on d. We can use the same method for J_2:

$$\begin{aligned} J_2 \leq 2^8 \int_0^T \cdots \int_0^T ds \dots ds_6 \int dy\, p(s, x-y) \int dy_1\, p(s_1, y-y_1) \\ \int dy_2\, p(s_2, y-y_2) \int dy_3\, p(s_3, y_2-y_3) \int dy_4\, p(s_4, y_2-y_4) \\ \int dy_5\, p(s_5, y_4-y_5) \int dy_6\, p(s_6, y_4-y_6) p(\varepsilon^2, y_1-y_5) p(\varepsilon^2, y_3-y_6) \\ \leq 2^8 \int_0^T \cdots \int_0^T ds \dots ds_6 \int dz\, p(s_4, z) p(\varepsilon^2 + s_1 + s_2 + s_5, z) p(\varepsilon^2 + s_3 + s_6, z), \end{aligned}$$

where we made the change of variables $z = y_2 - y_4$. Since $p(\varepsilon^2 + s_3 + s_6, z) \leq p(\varepsilon^2 + s_3 + s_6, 0)$ and $p(\varepsilon^2 + s_1 + s_2 + s_5, z) \leq p(\varepsilon^2 + s_1 + s_2 + s_5, 0)$, we can argue as for J_1 to get:

$$\begin{aligned} J_2 &\leq 2^8 \int_0^T \cdots \int_0^T ds \dots ds_6\, p(\varepsilon^2 + s_1 + s_2 + s_5, 0) p(\varepsilon^2 + s_3 + s_6, 0). \\ &\leq c_1 T^2 \varepsilon^{4-d} H_T(\varepsilon). \end{aligned}$$

By symmetry, we get $J_2 = J_3$. We want now to find an upper bound on J_4. Using (III.24), (III.25) and (III.26) we get:

$$
\begin{aligned}
J_4 &= 2^6 \int_0^T ds \int dy\, p(s, x-y) \Bigg[\int_0^{T-s} ds_7 \int_{(t-s-s_7)_+}^{T-s-s_7} ds_8 \int_{(t-s-s_7)_+}^{T-s-s_7} ds_9 \\
&\qquad \int dy_7\, p(s_7, y-y_7) \int dy_8\, p(s_8, y_7 - y_8) \int dy_9\, p(s_9, y_7 - y_9) p(\varepsilon^2, y_8 - y_9) \Bigg]^2 \\
&= 2^6 \int_0^T ds \Bigg[\int_0^{T-s} ds_7 \int_{(t-s-s_7)_+}^{T-s-s_7} ds_8 \int_{(t-s-s_7)_+}^{T-s-s_7} ds_9\, p(\varepsilon^2 + s_8 + s_9, 0) \Bigg]^2 \\
&\le 2^6 (2\pi)^{-d} \int_0^T ds \Bigg[\int_0^{T-s} ds_7 \frac{4}{(d-2)(d-4)} \left[\varepsilon^2 + 2(t-s-s_7)_+\right]^{2-d/2} \Bigg]^2 \\
&= \frac{2^{10}}{(2\pi)^d \left[(d-2)(d-4)\right]^2} \\
&\qquad \int_0^T ds \Bigg[\varepsilon^{4-d} [(T-s) - (t-s)_+] + \int_0^{(t-s)_+} ds_7 \left[\varepsilon^2 + 2(t-s-s_7)_+\right]^{2-d/2} \Bigg]^2 \\
&\le \frac{2^{10}}{(2\pi)^d \left[(d-2)(d-4)\right]^2} \int_0^T ds \Bigg[\varepsilon^{4-d} [(T-s) \wedge (T-t)] + 2^{-1} H_{2T}(\varepsilon) \Bigg]^2 \\
&\le \frac{2^{10}}{(2\pi)^d} \left[\frac{\varepsilon^{4-d}}{(d-2)(d-4)} \right]^2 \left[\frac{(T-t)^3}{3} + (T-t)^2 t \right] + c_2 T^2 \varepsilon^{4-d} H_T(\varepsilon),
\end{aligned}
$$

where the constant c_2 depends only on d. We now compute an upper bound on J_5:

$$
\begin{aligned}
J_5 &\le 2^6 \int_0^T \cdots \int_0^T ds \ldots ds_{12} \int dy\, p(s, x-y) \int dy_7\, p(s_7, y - y_7) \\
&\qquad \int dy_8\, p(s_8, y_7 - y_8) \int dy_9\, p(s_9, y_7 - y_9) \int dy_{10}\, p(s_{10}, y - y_{10}) \\
&\qquad\qquad \int dy_{11}\, p(s_{11}, y_{10} - y_{11}) \int dy_{12}\, p(s_{12}, y_{10} - y_{12}) p(\varepsilon^2, y_8 - y_{11}) p(\varepsilon^2, y_9 - y_{12}) \\
&\le 2^6 \int_0^T \cdots \int_0^T ds \ldots ds_{12} \int dz\, p(s_7 + s_{10}, z) p(\varepsilon^2 + s_8 + s_{11}, z) p(\varepsilon^2 + s_9 + s_{12}, z),
\end{aligned}
$$

where we made the change of variables $z = y_{10} - y_7$. Since $p(\varepsilon^2 + s_9 + s_{12}, z) \le p(\varepsilon^2 + s_9 + s_{12}, 0)$, and $p(\varepsilon^2 + s_7 + s_8 + s_{10} + s_{11}, 0) \le p(\varepsilon^2 + s_7 + s_8 + s_{10}, 0)$, we can argue as for J_1, and get:

$$J_5 \le c_1 T^2 \varepsilon^{d-4} H_T(\varepsilon).$$

By symmetry we get $J_6 = J_5$. Combining the previous bounds leads to

$$\mathbb{N}_x \left[S_\varepsilon \left(\int_0^t ds\, Y_s \right)^2 \right] \le \frac{2^{10}}{(2\pi)^d} \left[\frac{\varepsilon^{4-d}}{(d-2)(d-4)} \right]^2 \left[\frac{(T-t)^3}{3} + (T-t)^2 t \right] + c_3 T^2 \varepsilon^{d-4} H_T(\varepsilon),$$

where the constant c_3 depends only on d.

We shall now find a lower bound for $\mathbb{N}_x\left[S_\varepsilon(\int_t^T ds\ Y_s)\int_t^T ds\ (Y_s,\mathbf{1})\right]$. Using similar arguments as in the beginning of the proof, we get

$$\begin{aligned}
I :=& \mathbb{N}_x\left[S_\varepsilon\left(\int_t^T ds\ Y_s\right)\int_t^T ds\ (Y_s,\mathbf{1})\right]\\
=& \frac{1}{3}\,3!2^3\int_0^T ds\int dy\ p(s,x-y)\int_{(t-s)_+}^{T-s} ds_1\int dy_1\ p(s_1,y-y_1)\\
&\int_0^{T-s} ds_2\int dy_2\ p(s_2,y-y_2)\int_{(t-s-s_2)_+}^{T-s-s_2} ds_3\int dy_3\ p(s_3,y_2-y_3)\int_{(t-s-s_2)_+}^{T-s-s_2} ds_4\\
&\int dy_4\ p(s_4,y_2-y_4)\left[p(\varepsilon^2,y_1-y_3)+p(\varepsilon^2,y_1-y_4)+p(\varepsilon^2,y_3-y_4)\right].
\end{aligned}$$

Since we are looking for a lower bound, we restrict our attention to the term $p(\varepsilon^2,y_3-y_4)$. We get

$$\begin{aligned}
I \geq& 2^4\int_0^T ds\int_{(t-s)_+}^{T-s} ds_1\int_0^{T-s} ds_2\int_{(t-s-s_2)_+}^{T-s-s_2} ds_3\int_{(t-s-s_2)_+}^{T-s-s_2} ds_4\ p(\varepsilon^2+s_3+s_4,0)\\
\geq& \frac{2^4}{(2\pi)^{d/2}}\frac{4}{(d-2)(d-4)}\int_0^T ds\ \left[(T-s)\wedge(T-t)\right]\\
&\int_0^{T-s} ds_2\left[\left(\varepsilon^2+2(t-s-s_2)_+\right)^{2-d/2}-2\left(\varepsilon^2+(T-s-s_2)\right)^{2-d/2}\right]\\
\geq& \frac{2^6}{(2\pi)^{d/2}}\frac{1}{(d-2)(d-4)}\int_0^T ds\ \left[(T-s)\wedge(T-t)\right]\left[\varepsilon^{4-d}(T-s-(t-s)_+)-2H_T(\varepsilon)\right]\\
\geq& \frac{2^6}{(2\pi)^{d/2}}\frac{\varepsilon^{4-d}}{(d-2)(d-4)}\left[\frac{(T-t)^3}{3}+(T-t)^2t\right]-c_4T^2H_T(\varepsilon),
\end{aligned}$$

where c_4 depends only on d. Finally we deduce from section III.6.1, with $\varphi(s)=\mathbf{1}_{[0,T-t]}(s)$, that

$$\mathbb{N}_x\left[\left[\int_t^T ds\ (Y_s,\mathbf{1})\right]^2\right]=4\left[\frac{(T-t)^3}{3}+(T-t)^2t\right].$$

Combining the previous results, we get for ε small enough

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_x\left[\left[\varepsilon^{d-4}(2\pi)^{d/2}S_\varepsilon\left(\int_t^T ds\ Y_s\right)-\frac{2^4}{(d-2)(d-4)}\int_t^T ds\ (Y_s,\mathbf{1})\right]^2\right] &\leq c_5T^2\varepsilon^{d-4}H_T(\varepsilon)\\
&\leq c_6T^2\varepsilon,
\end{aligned}$$

where c_6 depends only on d. This gives the convergence in $L^2(\mathbb{N}_x)$. Now $S_\varepsilon\left(\int_t^T ds\ Y_s\right)$ is monotone decreasing in ε (cf lemma 5.3 in [48]). The $\mathbb{N}_x$-a.e. convergence then follows from the previous estimate by an application of the Borel-Cantelli lemma and monotonicity arguments. $\square$

III.6 Appendix

III.6.1 Formula for moments of the Brownian snake

For the reader's convenience, we recall some explicit formulas for moments of the Brownian snake. These formulas are well-known, at least in the context of superprocesses (see e.g. Dynkin [23]). We can compute the Laplace functional of $\int_0^t ds(Y_s, \varphi(s))$ for $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. To this end start from the finite dimensional Laplace functional (III.5) with $t_i = i/m$, $\varphi_i = \frac{1}{m}\varphi(i/m)$ for a nonnegative continuous function φ with compact support on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Thanks to the continuity of the process X, by a suitable passage to the limit, we get for $\nu \in M_f$

$$\mathbb{E}_\nu^X \left[\exp\left[-\int_0^t (X_{t-s}, \varphi(s))ds\right]\right] = \exp\left[-(\nu, v(t))\right],$$

where v is a nonnegative solution of (III.3) with right-hand side $J(t,x) = \int_0^t ds\ P_{t-s}[\varphi(s)](x)$. This can be extended by monotone class arguments to any $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. The uniqueness of the solution is easily established using arguments similar to the classical Gronwall lemma. Then we get $v(t,x) = \mathbb{N}_x\left[1 - \exp\left[-\int_0^t ds\ (Y_{t-s}, \varphi(s))\right]\right]$, thanks to theorem III.2.3.

Now we introduce an auxiliary power series. Let us consider the analytic function $f(\lambda) = 1 - \sqrt{1-\lambda}$ for $|\lambda| < 1$. It is easy to check that for $|\lambda| < 1$, we have

$$f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \lambda^n,$$

where the sequence $(\gamma_n, n \geq 1)$ is defined by $\gamma_1 = 1/2$ and the recurrence

$$\gamma_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \gamma_{n-k} \quad \text{for} \quad n \geq 2$$

(use the fact that f solves $2f(\lambda) = f(\lambda)^2 + \lambda$). Now let $T > 0$ and J a nonnegative measurable function on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, such that $M_T = \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} J(t,x) < \infty$. We define the family of measurable functions $(h_n, n \geq 1)$ on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, by the initial condition

$$h_1(t) = J(t),$$

and the recurrence

$$h_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t ds\ P_s\left[h_k(t-s)h_{n-k}(t-s)\right]. \tag{III.27}$$

We clearly have for every $n \geq 1$,

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} |h_n| \leq [4T]^{n-1}[2M_T]^n \gamma_n.$$

Thus the power series $w(\lambda, t) = \sum(-1)^{n+1}\lambda^n h_n(t)$ is normally convergent on $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ for $|\lambda| < [8TM_T]^{-1}$. And it clearly solves the integral equation on $[0,T] \times \mathbb{R}^d$

$$w(t) + 2\int_0^t ds\ P_s\left[w(t-s)^2\right] = \lambda J(t). \tag{III.28}$$

To get the uniqueness of the solution to the previous integral equation, use arguments similar to Gronwall's lemma. Finally we can compute the moments for the process Y under $\mathbb{N}_x$. Indeed, let $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. We have shown that for $\lambda > 0$, the function $v_\lambda(t,x) = \mathbb{N}_x \left[1 - \exp -\lambda \int_0^t (Y_{t-s}, \varphi(s)) ds\right]$ is the unique solution to (III.28) on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ with $J(t,x) = \int_0^t ds\ P_s[\varphi(t-s)]$. Thus for $\lambda \geq 0$ small enough, we have $v_\lambda(t) = w(\lambda, t)$. Then from the series expansion for $w(\lambda, t)$, we get for every integer $n \geq 1$

$$\mathbb{N}_x \left[\left(\int_0^t ds\ (Y_{t-s}, \varphi(s)) \right)^n \right] = n! h_n(t,x),$$

where the functions h_n are defined by the initial condition

$$h_1(t) = \int_0^t ds\ P_s[\varphi(t-s)],$$

and the recurrence (III.27). In the same way it can be shown that for every $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, for every $t \geq 0$, $n \geq 1$,

$$\mathbb{N}_x \left[(Y_t, \varphi)^n \right] = n! h_n(t,x),$$

where the functions are defined by the initial condition $h_1(t) = P_t[\varphi]$, and the recurrence (III.27).

III.6.2 Some properties of the function u_1

We consider the function u_1, which is the maximal solution on $(1, \infty)$ of the non linear differential equation

$$u_1''(r) + \frac{d-1}{r} u_1'(r) = 4 u_1(r)^2.$$

We shall assume $d \geq 5$. We introduce the auxiliary function

$$z(t) = 4(d-2)^{-2(d-1)/(d-2)} t\ u_1 \left[\left(\frac{t}{d-2} \right)^{1/(d-2)} \right], \quad \text{for } t > d-2.$$

This function is solution on $(d-2, \infty)$ of

$$y''(t) = t^{-\delta-2} y(t)^2, \tag{III.29}$$

where $\delta = \dfrac{d-4}{d-2} \in (0,1)$. We deduce from [56] theorem 1.1 and p.132 (see also [3] chapter 7) that the differential equation (III.29) with condition $y(t_0) = y_0 > 0$ for $t_0 > 0$ has a unique positive solution defined on $[t_0, \infty)$. Furthermore this unique solution y is positive decreasing and we have $\lim_{t\to\infty} y(t) = y(\infty) > 0$ and $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$.

As a first consequence, we obtain that the function $r^{d-2} u_1(r)$ is decreasing (this fact could also be derived from a simple probabilistic argument relying on the special Markov property). Since the function u_1 is of class C^∞ on $(1, \infty)$, we have

$$0 \geq [r^{d-2} u_1(r)]' = r^{d-3} [r u_1'(r) + (d-2) u_1(r)],$$

This entails that for for every $r > \varepsilon > 0$ we have

$$\frac{1}{2}\frac{d-1}{r} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{u_1'(r/\varepsilon)}{u_1(r/\varepsilon)} \leq \frac{3-d}{2r}. \tag{III.30}$$

We are now interested in the series expansion of u_1 at infinity. We shall write $q_0 = z(\infty) > 0$. Hence by integrating (III.29) twice from t to ∞, we get for $t > d-2$,

$$z(t) - q_0 = \int_t^\infty (r-t) r^{-\delta-2} z(r)^2 dr. \tag{III.31}$$

Now consider the sequence $(q_n, n \geq 0)$ defined by the recurrence

$$q_{n+1} = \frac{(n+1)\delta}{(n+1)\delta + 1} \sum_{k=0}^{n} q_k q_{n-k}, \quad \text{for} \quad n \geq 0.$$

Clearly we have for every $n \geq 0$,

$$q_n \leq [2/\delta]^n \, [2q_0]^{n+1} \gamma_{n+1},$$

where the sequence $(\gamma_n, n \geq 1)$ has been introduced in section III.6.1. Thus the power series $\sum q_n t^{-\delta n}$ is convergent and even C^∞ as a function of t for $t > t_1 = [4q_0/\delta]^{1/\delta}$. This power series also solves (III.31) for $t > t_1$. The same arguments as in the proof of the Gronwall lemma show that equation (III.31) possesses a unique solution bounded in a neighborhood of infinity. We get for $t > t_1$

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^{-n\delta}.$$

Thus we get with obvious notation for $r > r_1$,

$$\begin{aligned} u_1(r) &= 4^{-1}(d-2)^{d/(d-2)} r^{2-d} \sum_{n=0}^{\infty} q_n (d-2)^{-n(d-4)/(d-2)} r^{-n(d-4)} \\ &= r^{2-d} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}'_n r^{-n(d-4)}. \end{aligned}$$

Since the function $r^{d-2}u_1(r)$ is decreasing we get (III.7). Since the real numbers $(\mathrm{a}'_n, n \geq 0)$ are positive, (III.8) and (III.9) follow easily.

III.6.3 A comparison theorem for the law of τ^ε

We use notations introduced in section III.2.3. We set $r_t^\varepsilon = |x_t^\varepsilon - x|$. The process $r^\varepsilon = (r_t^\varepsilon, 0 \leq t \leq \tau^\varepsilon)$ is the unique solution for $t \in [0, \tau^\varepsilon)$ of

$$r_t^\varepsilon = B_t + \int_0^t \varphi_\varepsilon(r_s^\varepsilon) ds,$$

where B is under $\mathbb{P}_{x_0}$ a linear Brownian motion started at $|x_0|$ and

$$\varphi_\varepsilon(r) = \frac{1}{2}\frac{d-1}{r} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{u_1'(r/\varepsilon)}{u_1(r/\varepsilon)}.$$

We know from (III.30) that for $r > \varepsilon$, $\varphi_\varepsilon(r) \le (3-d)/2r$. Consider the process r^0 defined on the same probability space as the unique solution (stopped when it hits 0) of the stochastic integral equation

$$r_t^0 = B_t + \int_0^t \frac{3-d}{2r_s^0} ds.$$

The process r^0 is a Bessel process of (negative) dimension $4-d$ started at $|x_0|$, and is defined on the random interval $[0, \tau]$, where

$$\tau = \inf\left\{t; r_t^0 = 0\right\} = \lim_{\eta \to 0} \tau_\eta^0,$$

where we set $\tau_\eta^0 = \inf\left\{t; r_t^0 \le \eta\right\}$. Recall $\tau_\eta^\varepsilon = \inf\{t; r_t^\varepsilon \le \varepsilon + \eta\}$. We deduce from theorem IX 3.7 in [54] that $\mathbb{P}_{x_0}$-a.s. for every $t \in [0, \tau_\eta^\varepsilon \wedge \tau_\eta^0]$, $r_t^\varepsilon \le r_t^0$. Hence $\mathbb{P}_{x_0}$-a.s. $\tau \ge \tau^\varepsilon$. Thus we deduce that if g is a positive measurable increasing function defined on $\mathbb{R}^+$, then

$$\mathbb{E}_{x_0}[g(\tau^\varepsilon)] \le \mathbb{E}_{x_0}[g(\tau)].$$

We know from classical results on Bessel processes (see ex. VII.4.18 in [54]) that the process $(r_{\tau-t}^0, 0 \le t \le \tau)$ is a d-dimensional Bessel process started at 0 and stopped at its last hitting time of level $|x_0 - x|$. Thus the law of τ is the law of the last hitting time of level $|x_0 - x|$ for a d-dimensional Bessel process started at 0. We know explicitly this law (see [35]):

$$\mathbb{P}_{x_0}[\tau \in dt] = \alpha_d \, |x_0 - x|^{d-2} \, t^{-d/2} \, \mathrm{e}^{-|x_0-x|^2/2t} \, dt, \quad \text{with} \quad \alpha_d = \left[2^{(d-2)/2}\Gamma([d-2]/2)\right]^{-1}.$$

And so (III.13) follows from the bound $\mathbb{E}_{x_0}[g(\tau^\varepsilon)] \le \mathbb{E}_{x_0}[g(\tau)]$.

Chapitre IV

Propriétés trajectorielles des superprocessus avec mécanisme de branchement général

IV.1 Introduction

Superprocesses $(X_t, t \geq 0)$ are measure valued branching processes whose distribution can be characterized by a pair (γ, Ψ), where γ is the underlying Markov process, playing the role of the spatial motion and Ψ is the branching mechanism function. We refer to Dynkin [24, 25] for basic facts about superprocesses and their construction as limits of branching particle systems. Some recent studies on super-Brownian motion (corresponding to the case when γ is a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and $\Psi(\lambda) = \lambda^2$) give the exact Hausdorff measure of its support supp X_t, at fixed time $t > 0$, see Perkins [49, 50], Dawson, Iscoe, and Perkins [18], see also Dawson [11], theorem 9.3.3.5 for the Hausdorff dimension of supp X_t with $\Psi(\lambda) = \lambda^{1+\rho}$, $\rho \in (0, 1)$. The proof relies on approximation of super-Brownian motion by branching particle systems. Another way to study this superprocess is to use the Brownian snake introduced by Le Gall [38, 40] which is a path valued Markov process. In [5], Bertoin Le Gall and Le Jan succeeded through a subordination method to use the Brownian snake to represent superprocesses with a rather general branching mechanism. They construction applies in particular to the stable case $\Psi(\lambda) = \lambda^{1+\rho}$ for $\rho \in (0, 1]$. In the present paper, we shall use this path representation to derive some properties of the (γ, Ψ) superprocess when γ is a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and Ψ is of the type considered in [5]. In particular we give the Hausdorff dimension of the closure of $\bigcup_{t\in B}$ supp X_t, when B is a closed subset of $(0, \infty)$ (theorem IV.2.1). We also provide sufficient conditions for the a.s. absolute continuity of the measure X_t (theorem IV.2.4), thus extending to a general branching mechanism a well-known result for super-Brownian motion (see Dawson [11]). The result can be generalized to α-stable superprocesses, extending results of Fleischmann [31] and of Dawson [11]. We then use exit measures to give precise lower and upper bounds for hitting probabilities of small balls (theorem IV.2.2). As an application, we can prove that if the dimension is large enough, supp X_t is totally disconnected (theorem IV.2.3). This extends a result of Tribe [58] concerning super-Brownian motion.

Let us now describe more precisely the contents of the following sections. In section IV.2, we recall the definition of Hausdorff dimension and upper box-counting dimension. We introduce the special type of branching mechanism function Ψ that we will consider. We recall the definition of the (γ, Ψ) superprocess X, where γ is a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$. The Laplace transform of X is related to the solution of an integral equation (IV.1). We then state the main results of this paper. In particular, theorem IV.2.1 provides upper and lower bounds on the Hausdorff dimension of the closure of $\bigcup_{t\in B} \text{supp } X_t$. Under suitable assumptions, the lower and upper bounds coincide and we get the exact value of the dimension.

With the branching mechanism Ψ, we can associate a subordinator S that plays a key role in the subordination method. Section IV.3 is devoted to some preliminary results on this subordinator. We give short proofs for the reader's convenience.

In section IV.4, we first recall the subordination method of [5] based on the Brownian snake. Precisely, we consider the path-valued process of [38] when the underlying (Markov) spatial motion is a triple (ξ_t, L_t, Γ_t) whose law can be described as follows. First ξ is the residual lifetime process associated with S: $\xi_t = \inf\{S_r - t; r \geq 0, S_r > t\}$. Second L_t is the right-continuous inverse of S (equivalently it is the local time at 0 of ξ). Finally $\Gamma_t = \gamma_{L_t}$, where γ is a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ independent of S. Using the Brownian snake with spatial motion (ξ, L, Γ), we can give an explicit formula for the (γ, Ψ)-superprocess. This formula is crucial for our investigation of path properties.

In section IV.5, we prove theorem IV.2.1. The proof of the lower bound on the Hausdorff dimension uses a "Palm measure formula" for the exit measure associated to the Brownian snake (proposition IV.4.2), classical results from Falconer [29] and technical results that are derived in the appendix. The upper bound is a bit more complex, and really relies on the path properties of the Brownian snake and its transition kernel. At this point, the Brownian snake approach is used in its full strength.

Section IV.6 is devoted to our bounds on hitting probabilities of small balls and the result about connected components of the support of super-Brownian motion. Lower bounds on hitting probabilities are quite easy to prove from the integral equation (IV.1). The upper bounds use the special Markov property of the Brownian snake and the connection between exit measures and solutions of nonlinear partial differential equations (see Dynkin [25, 28] and Le Gall [40] for the snake approach). The proof of the theorem on connected components then follows from a technique of Perkins (see [52] p.1041).

Finally in section IV.7, we discuss the absolute continuity of the measure $\int \mu(ds)\ X_s$. Assume that $\iint \mu(ds)\mu(dt)\ \ |s-t|^{-q} < \infty$, where $q \in [0, 1)$. Then we prove that in the ρ-stable branching case ($\Psi(\lambda) = \lambda^{1+\rho}$), $\int \mu(ds)\ X_s$ is absolutely continuous if $d < 2(q + 1/\rho)$. If the underlying Brownian motion is replaced by an α-stable symmetric Lévy process in $\mathbb{R}^d$, $\alpha \in (0, 2)$, then the measure $\int \mu(ds)\ X_s$ is absolutely continuous if $d < \alpha(q + 1/\rho)$.

IV.2 Notation and results

First we introduce some notation. We denote by $(M_f, \mathcal{M}_f)$ the space of all finite nonnegative measures on $\mathbb{R}^d$, endowed with the topology of weak convergence. We denote by $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ the set of all measurable functions defined on $\mathbb{R}^p$ taking values in $\mathbb{R}$. With a slight abuse of notation, we also denote by $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ the Borel σ-field on $\mathbb{R}^p$. For every measure $\nu \in M_f$, and every nonnegative function $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, we shall use both notations $\int f(y)\nu(dy) = (\nu, f)$. We also write $\nu(A) = (\nu, \mathbf{1}_A)$ for $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. For $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$, let $\mathcal{C}l(A)$ be the closure of A. We recall briefly the definition of Hausdorff dimension and upper box-counting dimension (cf [29]). Let $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ bounded. Let $C_\varepsilon(A)$ denote the set of all coverings $C = \{B_i, i \in I\}$ of A

with balls B_i of radius $|B_i| \leq \varepsilon$. Then for every $r > 0$, we consider

$$H^r_\varepsilon(A) = \inf_{C \in C_\varepsilon(A)} \sum_{i \in I} |B_i|^r .$$

Clearly $H^r_\varepsilon(A)$ increases to $H^r(A) \in [0, \infty]$, as ε decreases to $0+$. The mapping $r \mapsto H^r(A)$ is decreasing. Moreover we see that if $H^r(A) < \infty$, then $H^{r'}(A) = 0$ for every $r' > r$; and if $H^r(A) > 0$, then $H^{r'}(A) = \infty$ for every $r' < r$. The critical value

$$\dim A = \sup\{r > 0, H^r(A) = \infty\} = \inf\{r > 0, H^r(A) = 0\},$$

with the convention $\sup \emptyset = 0$, is called the Hausdorff dimension of A. Then consider $N_\varepsilon(A)$ the minimal number of balls of radius ε necessary to cover A. Define the upper box-counting dimension of A by

$$\overline{\dim}\, A = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{\log 1/\varepsilon}.$$

Plainly we have $\overline{\dim}\, A \geq \dim A$.

We consider the increasing function Ψ defined on $\mathbb{R}^+$ by

$$\Psi(\lambda) = 2b\lambda^2 + \int_{(0,\infty)} \frac{2h\lambda^2}{1 + 2h\lambda} \Pi(dh),$$

where $b \geq 0$ and Π is a Radon measure on $(0, \infty)$ such that $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge h)\, \Pi(dh) < \infty$. To avoid trivial cases, we assume either $b > 0$ or $\Pi((0, \infty)) = \infty$. Note that $\Psi(\lambda) \leq c\lambda$ for $\lambda \in [0, 1]$. The function Ψ can be expressed in the usual form for branching mechanism functions:

$$\Psi(\lambda) = 2b\lambda^2 + \int_{(0,\infty)} \Pi'(du) \left[\mathrm{e}^{-u\lambda} - 1 + u\lambda \right],$$

where $\Pi'(du) = \left[\int_{(0,\infty)} \Pi(dh)\, \mathrm{e}^{-u/2h} (4h^2)^{-1} \right] du$ satisfies $\int_{(0,\infty)} (u \wedge u^2) \Pi'(du) < \infty$. Notice that if we take $b = 0$ and $\Pi(dh) = c' h^{-1-\rho} dh$ then we get the stable case $\Psi(\lambda) = c\lambda^{1+\rho}$.

Let γ be a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$, and $(P_s, s \geq 0)$ its transition kernel.

We then consider $X := \big((X_t, t \geq 0), (\mathbb{P}^X_\nu, \nu \in M_f) \big)$ the canonical realization of the (γ, Ψ)-superprocess defined on $\mathbb{D} := \mathbb{D}([0, \infty), M_f)$, the set of all càdlàg functions defined on $[0, \infty)$ with values in M_f. We refer to [19, 24, 28, 30] for its construction and general properties. We recall that the superprocess X is a càdlàg strong Markov process with values in M_f characterized by $X_0 = \nu$ $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. and for every nonnegative bounded function $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $t \geq s \geq 0$,

$$\mathbb{E}^X_\nu \left[\mathrm{e}^{-(X_t, f)} \mid \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s) \right] = \mathrm{e}^{-(X_s, v(t-s, \cdot))},$$

where v is the unique nonnegative measurable solution of the integral equation

$$v(t, x) + \int_0^t ds\, P_{t-s}[\Psi(v(s, \cdot))](x) = P_t f(x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d. \tag{IV.1}$$

We define the constants $\underline{\rho}$ and $\overline{\rho}$ by:

$$\underline{\rho} = -1 + \liminf_{\lambda \to \infty} \frac{\log \Psi(\lambda)}{\log \lambda}, \quad \text{and} \quad \overline{\rho} = -1 + \limsup_{\lambda \to \infty} \frac{\log \Psi(\lambda)}{\log \lambda}.$$

Since $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge h)\Pi(dh) < \infty$, we easily get $0 \le \underline{\rho} \le \overline{\rho} \le 1$. From the definition of $\overline{\rho}$, $\underline{\rho}$, for every $\delta \in (0,1)$, there exists $\lambda_\delta \in (0,\infty)$ such that for every $\lambda > \lambda_\delta$

$$\lambda^{1+\underline{\rho}-\delta} \le \Psi(\lambda) \le \lambda^{1+\overline{\rho}+\delta}. \tag{IV.2}$$

We will consider the following two assumptions:

(H1): *We have* $0 < \underline{\rho}$.

(H2): *The function* Ψ *is regularly varying at* ∞ *with index* $1+\rho$ *where* $\rho \in (0,1]$, *that is to say:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\Psi(t\lambda)}{\Psi(\lambda)} = t^{1+\rho} \quad \textit{for every} \quad t > 0.$$

Notice that (H2) implies (H1) and $\underline{\rho} = \overline{\rho} = \rho$. The stable case $\Psi(\lambda) = c\lambda^{1+\rho}$ satisfies (H2).

We can now give our first result about the Hausdorff dimension of the topological support of the measure X_t. Let supp ν denote the topological support of a measure $\nu \in M_f$. Set $\sigma_X = \inf\{s > 0; X_s = 0\}$.

Theorem IV.2.1 *Assume (H1). Then for every* $\nu \in M_f$, *for every nonempty compact set* $B \subset (0,\infty)$, *we have* $\mathbb{P}^X_\nu$*-a.s. on* $\{B \subset (0,\sigma_X)\}$,

$$\left(\frac{2}{\overline{\rho}} + 2\dim B\right) \wedge d \le \dim \mathcal{C}l\left(\bigcup_{t\in B} \text{supp } X_t\right) \le \left(\frac{2}{\underline{\rho}} + 2\overline{\dim} B\right) \wedge d.$$

Moreover, if (H2) holds, then $\mathbb{P}^X_\nu$*-a.s. on* $\{B \subset (0,\sigma_X)\}$,

$$\dim \mathcal{C}l\left(\bigcup_{t\in B} \text{supp } X_t\right) = \left(\frac{2}{\rho} + 2\dim B\right) \wedge d.$$

In the special case $\Psi(\lambda) = \lambda^2$, Tribe [57] (theorem 2.13) proved a stronger form of theorem IV.2.1. Precisely, Tribe showed that the last assertion of the theorem holds simultaneously for all sets B outside a set of zero probability. Our next result is about the hitting probabilities of small balls. We denote by $B_\varepsilon(0)$ the ball centered at 0 with radius ε, and by p the Brownian transition density on $\mathbb{R}^d$

$$p(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp -\frac{|x|^2}{2t}, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d.$$

We say a nonnegative function l, defined on $(0,\infty)$ is slowly varying at $0+$, if for every $t > 0$, $\lim_{\lambda\downarrow 0} l(\lambda t)/l(\lambda) = 1$. Let δ_x be the Dirac mass at point $x \in \mathbb{R}^d$.

Theorem IV.2.2 *Assume (H2) and* $\rho d > 2$. *There exists a positive function* l_1, *which is slowly varying at* $0+$, *such that for every* $t > 0$, $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}^X_{\delta_x}[X_t(B_\varepsilon(0)) > 0] \le t^{-d/2} \varepsilon^{d-2/\rho} l_1(\sqrt{t} \wedge \varepsilon).$$

Moreover if $\limsup_{\lambda\to 0+} \lambda^{-1-\rho}\Psi(\lambda) < \infty$, *then for every* $M > 0$, *there exists a positive increasing function* l_2, *which is slowly varying at* $0+$, *such that for every* $M\sqrt{t} > \varepsilon > 0$, *we have*

$$\mathbb{P}^X_{\delta_x}[X_t(B_\varepsilon(0)) > 0] \ge \frac{1}{2} \wedge \left[\varepsilon^{d-2/\rho} p\left(\frac{\rho t}{1+\rho}, x\right) l_2(\varepsilon)\right].$$

Our next result is about the connected components of X_t.

Theorem IV.2.3 *Assume (H2) and $d > 4/\rho$. Let $\nu \in M_f$, $t > 0$. Then $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. the support of X_t is totally disconnected.*

The last result deals with the absolute continuity of superprocesses in the case where the underlying process may be not only Brownian motion but also a symmetric α-stable process. We first introduce the α-stable superprocess.

Let γ^α be a symmetric α-stable process on $\mathbb{R}^d$ of index $\alpha \in (0,2)$ started at x under $\mathbb{P}_x$. For every $y \in \mathbb{R}^d$, for every $t \geq 0$, we have

$$\mathbb{E}_x \, \mathrm{e}^{-i\langle y, \gamma^\alpha_t - x\rangle} = \mathrm{e}^{-t \int_{|z|=1} |\langle y,z\rangle|^\alpha \, \chi(dz)}$$

where $\langle .,. \rangle$ denotes the usual scalar product on $\mathbb{R}^d$ and χ is a finite symmetric measure on the sphere $\{z \in \mathbb{R}^d, |z| = 1\}$. In order to avoid degenerate cases we assume that

$$\inf_{|y|=1} \int_{|z|=1} |\langle y, z\rangle|^\alpha \, \chi(dz) > 0.$$

In particular the transition density is continuous on $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ (see [33] theorem 10.1). For $\alpha = 2$ we consider $\gamma^2 = \gamma$, the Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ started at x under $\mathbb{P}_x$. We consider $X^\alpha = (X^\alpha_t, t \geq 0)$ the canonical realization of the (γ^α, Ψ)-superprocess defined on $\mathbb{D}$. We refer again to [19, 24, 28, 30] for its construction and general properties.

Theorem IV.2.4 *Assume (H1). Let $\alpha \in (0,2]$. Let μ be a finite positive measure with support in $(0,\infty)$ and $q \in [0,1)$ such that*

$$\iint \mu(dt)\mu(ds) \, |t-s|^{-q} < \infty.$$

If $\dfrac{\alpha}{\overline{\rho}} + \alpha q > d$, then for every $\nu \in M_f$, $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. $\int \mu(dt) X^\alpha_t$ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure.

As a particular case, taking $\mu = \delta_t$ for $t > 0$, and $q = 0$, we get that if $\alpha/\overline{\rho} > d$, then for $t > 0$, $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. X^α_t is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure.

Hypothesis (H1) will be in force from now on.

IV.3 Preliminary estimates

Notice that the function defined on $\mathbb{R}^+$ by $\eta(\lambda) = b\lambda + \int_0^\infty [1 - \exp(-\lambda h)] \, \Pi(dh)$ is the Laplace exponent of a subordinator. By comparing the functions $2u/(1+2u)$ and $1 - \exp(-u)$, it is easy to obtain the following bounds:

$$\frac{2}{3}\lambda\eta(\lambda) \leq \Psi(\lambda) \leq 4\lambda\eta(\lambda), \quad \lambda \geq 0. \tag{IV.3}$$

The constants $\underline{\rho}$ and $\overline{\rho}$ thus correspond to the lower index and upper index of the subordinator associated to η (cf [8]). We give an elementary result about η.

Lemma IV.3.1 *If (H2) is satisfied and if $\rho < 1$, then the function η is regularly varying at ∞ with index ρ.*

We shall need the usual notation $\bar{\Pi}(h) = \Pi([h,\infty))$

Proof. Assume (H2) and $\rho < 1$. The latter condition implies $b = 0$. Fubini's theorem gives

$$\Psi(\lambda) = \int_0^\infty 2\lambda^2 (1 + 2\lambda h)^{-2} \bar{\Pi}(h) dh = 2\lambda^2 \int_0^\infty (h + 2\lambda)^{-2} \bar{\Pi}(1/h) dh.$$

Thanks to theorems 1.7.4 and 1.7.2 of [6], we deduce that the function $\bar{\Pi}$ is regularly varying with index $-\rho$ at $0+$. Then theorem 1.7.1' of [6] implies that the function η is regularly varying with index ρ at ∞. □

We now give some simple results about the subordinator with Laplace exponent η. We refer to [4] for definitions and properties of subordinators. Let $S = (S_t, t \geq 0)$ be a subordinator with Laplace exponent η. We denote by $L = (L_t, t \geq 0)$ the right continuous inverse of S, that is $L_t = \inf\{u \geq 0; S_u > t\}$.

Lemma IV.3.2 *1. For every $\delta > 0$, there exists $h_\delta > 0$ such that for every $h \in [0, h_\delta]$,*

$$\mathbb{E} L_h \leq h^{\underline{\rho} - \delta}.$$

Furthermore there exists a constant C_δ, such that for every $h \geq 0$, $\mathbb{E} L_h \leq C_\delta (h \wedge h^{\underline{\rho} - \delta})$.

2. *The process L is locally Hölder with exponent α, for every $\alpha \in [0, \underline{\rho})$.*

3. *For every $\alpha \in [0, 1/\overline{\rho})$, $s > 0$, a.s. there exists $\varepsilon \in (0, s)$, depending on $(S_t, 0 \leq t < s)$ and α, such that for every $u \in [s - \varepsilon, s)$, we have*

$$S_{s-} - S_u \leq (s - u)^\alpha.$$

4. *For every $\delta > 0$, there exists a sequence $(R_n, n \geq 1)$ of positive real numbers, decreasing to zero, such that for every $M \in (0, \infty)$, we have*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left[\inf_{i \geq n} R_i^{-\underline{\rho}(1+\delta)} L_{R_i} > M\right] = 1.$$

5. *If (H2) holds, then for every $(\delta, M) \in (0, \infty)^2$, we have*

$$\lim_{r \to 0} \mathbb{P}\left[\inf_{h \in (0, r]} h^{-\rho(1+\delta)} L_h > M\right] = 1.$$

Proof. 1. Using the links between S and L, we have for $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\eta(\lambda)^{-1} &= \int_0^\infty dt\, \mathbb{E} \mathrm{e}^{-\lambda S_t} = \mathbb{E} \int_0^\infty dL_h\ \mathrm{e}^{-\lambda h} = \lambda \int_0^\infty dh\ \mathrm{e}^{-\lambda h}\, \mathbb{E}[L_h] \\ &\geq \lambda \int_{1/\lambda}^{2/\lambda} dh\ \mathrm{e}^{-2}\, \mathbb{E}[L_{1/\lambda}] = \mathrm{e}^{-2}\, \mathbb{E}[L_{1/\lambda}]\end{aligned}$$

The first part of the lemma follows from (IV.2) and (IV.3). The second one is then trivial.

2. The variable $L_{t+h} - L_t$ is bounded from above in distribution by L_h. By a standard argument for additive functionals, we have also $\mathbb{E}[(L_h)^p] \leq p!\, (\mathbb{E}[L_h])^p$. Thus for every $t \geq 0$, $\delta > 0$, if h_δ is defined as in 1., and $h \in [0, h_\delta)$, we have

$$\mathbb{E}[(L_{t+h} - L_t)^p] \leq \mathbb{E}[(L_h)^p] \leq p!\, (\mathbb{E}[L_h])^p \leq p! h^{p(\underline{\rho} - \delta)}.$$

From the classical Kolmogorov lemma, we obtain that L is locally Hölder with exponent α, for any $\alpha \in [0, \underline{\rho})$.

3. Let $s > 0$. The two processes $(S_{s-} - S_u, 0 \leq u < s)$ and $\big(S_{(s-u)-}, 0 \leq u < s\big)$ have the same law. So it is sufficient to prove the analogous result for $V_u = S_{(s-u)-}$.

- If $\overline{\rho} = 1$, the result is a consequence of proposition 8 p.84 of [4].
- If $\overline{\rho} < 1$, then $b = 0$, and we have

$$\Psi(\lambda) \geq \lambda \int_{1/\lambda}^{\infty} 2h\lambda(1 + 2h\lambda)^{-1}\Pi(dh) \geq \frac{2}{3}\lambda\bar{\Pi}(1/\lambda).$$

Then the upper bound (IV.2) implies that the integral $\int_{0+} \bar{\Pi}(t^{\alpha})dt$ is convergent for every $\alpha \in (0, 1/\overline{\rho})$. Thanks to theorem 9 p.85 of [4], we have for every $\alpha \in [0, 1/\overline{\rho})$ a.s.

$$\lim_{u \to s,\, u<s} V_u/(s-u)^{\alpha} = 0.$$

The desired result follows.

4. Fix $\delta \in (0, \infty)$. Note that (IV.2) and (IV.3) imply $\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\underline{\rho}(1+\delta/2)}\eta(\lambda) = 0$. We can find a sequence $(R_n, n \geq 1)$ of positive reals decreasing to zero such that

$$\text{for every} \quad n \geq 1, \quad \eta(1/R_n) \leq R_n^{-\underline{\rho}(1+\delta/2)} \quad \text{and} \quad \sum_{n\geq 1} R_n^{\delta/2} < \infty.$$

In order to bound for every $M \in (0, \infty)$,

$$\mathbb{P}\left[L_{R_n} < MR_n^{\underline{\rho}(1+\delta)}\right] = \mathbb{P}\left[R_n^{-1}S_{MR_n^{\underline{\rho}(1+\delta)}} > 1\right],$$

we consider the Laplace transform of S:

$$\mathbb{E}\exp\left[-R_n^{-1}S_{MR_n^{\underline{\rho}(1+\delta)}}\right] = \exp\left[-MR_n^{\underline{\rho}(1+\delta)}\eta(1/R_n)\right] \geq \exp\left[-MR_n^{\underline{\rho}\delta/2}\right].$$

An easy calculation shows that

$$\mathbb{P}\left[R_n^{-1}S_{MR_n^{\underline{\rho}(1+\delta)}} > 1\right] \leq (1 - 1/\mathrm{e})^{-1}\left[1 - \mathbb{E}\exp\left[-R_n^{-1}S_{MR_n^{\underline{\rho}(1+\delta)}}\right]\right] \leq (1 - 1/\mathrm{e})^{-1}MR_n^{\underline{\rho}\delta/2}.$$

Since the series $\sum_{n\geq 1} R_n^{\underline{\rho}\delta/2}$ converges, we get

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left[L_{R_n} < MR_n^{\underline{\rho}(1+\delta)}\right] < \infty.$$

The desired result then follows from the Borel-Cantelli lemma.

5. If (H2) holds, we have $\rho = \overline{\rho}$, and we deduce from the proof of 3., that for every $s > 0$, $m > 0$,

$$\lim_{r\to 0} \mathbb{P}\left[\sup_{u\in(0,r]} u^{-1/\rho(1+\delta)}S_u < m\right] = 1.$$

The desired result follows since L is the inverse of S.

IV.4 The subordination approach to superprocesses

IV.4.1 The Brownian snake

Our main goal in this section is to explain how superprocesses with a general branching mechanism can be constructed using the Brownian snake and a subordination method taken from [5]. We start from a subordinator $S = (S_t, t \geq 0)$ as in section IV.3. We denote by ξ the associated residual lifetime process defined by $\xi_t = \inf\{S_s - t; S_s > t\}$, and by L the right continuous inverse of S, $L_t = \inf\{s; S_s > t\}$. We also consider an independent Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ denoted by $\gamma = (\gamma_t, t \geq 0)$. We shall be interested in the process $\bar{\xi}_t = (\xi_t, L_t, \gamma_{L_t})$, which is a Markov process with values in $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Let $\bar{\mathbb{P}}_z$ be the law of $\bar{\xi}$ started at $z \in E$. For simplicity we write $\Gamma_t = \gamma_{L_t}$, and $\bar{\mathbb{P}}_x = \bar{\mathbb{P}}_z$ when $z = (0, 0, x)$.

We then introduce the Brownian snake with spatial motion $\bar{\xi}$ (cf [38], our construction is slightly different here because the first coordinate of $\bar{\xi}$ is not a continuous process). The Brownian snake is a Markov process taking values in the set of all killed paths in E. By definition a killed path in E is a càdlàg mapping $w : [0, \zeta) \to E$ where $\zeta = \zeta_w > 0$ is called the lifetime of the path. By convention we also agree that every point $z \in E$ is a killed path with lifetime 0. The set $\mathcal{W}$ of all killed paths is a Polish space when equipped with the metric

$$d(w, w') := \left|\zeta - \zeta'\right| + \left|w(0) - w'(0)\right| + \int_0^{\zeta \wedge \zeta'} \left[d_u\left(w_{\leq u}, w'_{\leq u}\right) \wedge 1\right]\, du,$$

where $w_{\leq u}$ denotes the restriction of w to $[0, u]$, and d_u is the Skorokhod distance on the space of all càdlàg functions from $[0, u]$ into E.

Let us fix $z \in E$ and denote by $\mathcal{W}_z$ the subset of $\mathcal{W}$ of all killed paths with initial point $w(0) = z$ (in particular $z \in \mathcal{W}_z$). Let $w \in \mathcal{W}_z$ with lifetime $\zeta > 0$. If $0 \leq a < \zeta$, and $b \geq a$, we let $Q_{a,b}(w, dw')$ be the unique probability measure on $\mathcal{W}_z$ such that:

- $\zeta' = b$, $Q_{a,b}(w, dw')$-a.s.,
- $w'(t) = w(t)$, $\forall t \in [0, a]$, $Q_{a,b}(w, dw')$-a.s.,
- the law under $Q_{a,b}(w, dw')$ of $(w'(a + t), 0 \leq t < b - a)$ is the law of $(\bar{\xi}, 0 \leq t < b - a)$ under $\bar{\mathbb{P}}_{w(a)}$.

By convention we set $Q_{0,b}(z, dw')$ for the law of $(\bar{\xi}, 0 \leq t < b)$ under $\bar{\mathbb{P}}_z$.

Denote by $\theta_s^\zeta(dadb)$ the joint distribution of $(\inf_{[0,s]} B_r, B_s)$ where B is a one dimensional reflecting Brownian motion with initial value $B_0 = \zeta \geq 0$.

$$\theta_s^\zeta(dadb) = \frac{2(\zeta + b - 2a)}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{(\zeta + b - 2a)^2}{2s}\right) \mathbf{1}_{\{0<a<\zeta\wedge b\}} dadb + \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \exp\left(-\frac{(\zeta + b)^2}{2s}\right) \mathbf{1}_{\{0<b\}} \delta_0(da) db.$$

We recall proposition 5 of [5].

Proposition IV.4.1 *There exists a continuous strong Markov process in $\mathcal{W}_z$, denoted by $W = (W_s, s \geq 0)$, whose transition kernels are given by the formula*

$$Q_s(w, dw') = \int_{[0,\infty)^2} \theta_s^\zeta(dadb) Q_{a,b}(w, dw').$$

If ζ_s denotes the lifetime of W_s, the process $(\zeta_s, s \geq 0)$ is a reflecting Brownian motion in $\mathbb{R}_+$.

Intuitively the path W_s is erased from its tip when the lifetime ζ_s decreases, and it is extended, independently of the past, when ζ_s increases, according to the law of the underlying spatial motion $\bar{\xi}$. It is easy to check that a.s. for every $s < s'$, the two killed paths W_s and $W_{s'}$ coincide for $t < m(s, s') := \inf_{r\in[s,s']} \zeta_r$. They also coincide at $t = m(s, s')$ if $m(s, s') < \zeta_s \wedge \zeta_{s'}$. In the sequel, we shall refer to this property as the "snake property" of W.

Denote by $\mathcal{E}_w$ the probability measure under which W starts at w, and by $\mathcal{E}^*_w$ the probability under which W starts at w and is killed when ζ reaches zero.

Here thanks to the properties of the process $\bar{\xi}$ (and in particular assumption (H1)), we can get stronger continuity properties for the process W. First introduce an obvious notation for the coordinates of a path $w \in \mathcal{W}$:

$$w(t) = (\xi_t(w), L_t(w), \Gamma_t(w)) \quad \text{for} \quad 0 \le t < \zeta_w.$$

We also set $\hat{w} = \lim_{t\uparrow\zeta_w} \Gamma_t(w)$ if the limit exists, $\hat{w} = \partial$ otherwise, where ∂ is a cemetery point added to $\mathbb{R}^d$. Fix $w_0 \in \mathcal{W}_z$, such that the functions $t \mapsto L_t(w_0)$ and $t \mapsto \Gamma_t(w_0)$ are continuous on $[0, \zeta_{w_0})$ and have a continuous extension on $[0, \zeta_{w_0}]$. By using the Hölder properties of the processes L and Γ (cf lemma IV.3.2) one can prove that $\mathcal{E}_{w_0}$-a.s. for every $s \ge 0$, the functions $t \mapsto L_t(W_s)$ and $t \mapsto \Gamma_t(W_s)$ which are a priori defined on $[0, \zeta_s)$ are continuous and have a continuous extension to $[0, \zeta_s]$ (cf lemma 10 and its proof in [5], see also the proof of lemma IV.5.3 below). Furthermore the mappings $s \mapsto (L_{t\wedge\zeta_s}(W_s), t \ge 0)$ and $s \mapsto (\Gamma_{t\wedge\zeta_s}(W_s), t \ge 0)$ are continuous with respect to the uniform topology. The processes $L_{\zeta_s}(W_s)$ and $\hat{W}_s$ are continuous $\mathcal{E}_{w_0}$-a.s.

It is clear that the trivial path $z \in \mathcal{W}_z$ is a regular recurrent point for W. We denote by $\mathbb{N}_z$ the associated excursion measure (see [7]). The law under $\mathbb{N}_z$ of $(\zeta_s, s \ge 0)$ is the Itô measure of positive excursions of linear Brownian motion. We assume that $\mathbb{N}_z$ is normalized so that

$$\mathbb{N}_z \left[\sup_{s\ge 0} \zeta_s > \varepsilon \right] = \frac{1}{2\varepsilon}.$$

We also set $\sigma = \inf\{s > 0, \zeta_s = 0\}$, which represents the duration of the excursion. Then for any nonnegative measurable function G on $\mathcal{W}_z$, we have:

$$\mathbb{N}_z \int_0^\sigma G(W_s)\, ds = \int_0^\infty ds\, \bar{\mathbb{E}}_z \left[G\left((\bar{\xi}_t, 0 \le t < s) \right) \right]. \tag{IV.4}$$

For simplicity we write $\mathbb{N}_x = \mathbb{N}_z$ when $z = (0, 0, x)$. The continuity properties mentioned above under $\mathcal{E}_{w_0}$ also hold under $\mathbb{N}_z$. In particular the two processes $(L_{\zeta_s}(W_s), s \ge 0)$ and $\left(\hat{W}_s, s \ge 0\right)$ are well defined and continuous under $\mathbb{N}_z$.

Remark. We set $\mathcal{G} := \left\{ \left(L_{\zeta_s}(W_s), \hat{W}_s \right), s \ge 0 \right\}$. Since $L_{\zeta_s}(W_s)$ and $\hat{W}_s$ are continuous under $\mathcal{E}_x$, we deduce that for any open set $\Delta \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ such that $(0, x) \in \Delta$, we have $\mathbb{N}_x [\mathcal{G} \cap \Delta^c \ne \emptyset] < \infty$.

IV.4.2 Exit measures

Let D be an open subset of E with $z \in D$ (or $w_0(0) \in D$). As in [5], we can define the exit local time from D, denoted by $\left(L^D_s, s \ge 0\right)$. $\mathbb{N}_z$-a.e. (or $\mathcal{E}_{w_0}$-a.s.), the exit local time L^D is a continuous increasing process given by the approximation: for every $s \ge 0$,

$$L^D_s = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mathbf{1}_{\{\tau_D(W_u) < \zeta_u < \tau_D(W_u)+\varepsilon\}} du,$$

where $\tau_D(w) = \inf\{r; w(r) \notin D\}$ with the convention $\inf\emptyset = +\infty$. We then define under the excursion measure $\mathbb{N}_z$ a random measure Y^D on $\mathbb{R}^d$ by the formula: for every bounded nonnegative function $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$(Y_D, \varphi) = \int_0^\sigma \varphi(\hat{W}_s) dL_s^D.$$

The first moment of the random measure can be derived from the following fact. By passing to the limit in (IV.4) (see [40] proposition 3.3 for details), we have for every nonnegative measurable function G on $\mathcal{W}_z$

$$\mathbb{N}_z \int_0^\sigma G(W_s)\, dL_s^D = \bar{\mathbb{E}}_z^D\,[G]\,, \tag{IV.5}$$

where $\bar{\mathbb{P}}_z^D$ is the sub-probability on $\mathcal{W}_z$ defined as the law of $\bar{\xi}$ stopped at time τ_D under $\bar{\mathbb{P}}_z(\cdot \cap \{\tau_D < \infty\})$.

We apply this construction with $D = D_t = \mathbb{R}^+ \times [0, t) \times \mathbb{R}^d$. For convenience we write $\tau_t(w) = \tau_{D_t}(w)$, $L_s^t = L_s^{D_t}$, $Y_t = Y_{D_t}$, and $\bar{\mathbb{P}}_z^t = \bar{\mathbb{P}}_z^{D_t}$. We also will write $\bar{\mathbb{P}}_x^t = \bar{\mathbb{P}}_z^t$ when $z = (0, 0, x)$. When $z \notin D_t$, we then take $L_s^t = 0$ for all $s \geq 0$ and $Y_t = 0$. Using (IV.5), we get in particular the first moment for the process $(Y_t, t \geq 0)$: for every bounded nonnegative function $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{N}_x\,[(Y_t, \varphi)] = P_t\varphi(x).$$

To get a measurable version of $(Y_t, t \geq 0)$, we take a measurable version of $\left(L_s^t, t \geq 0, s \geq 0\right)$: for t such that $z \in D_t$,

$$L_s^t = \liminf_{p\to\infty} L_s^{t,2^{-p}},$$

where for $\varepsilon > 0$, $\quad L_s^{t,\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^s \mathbf{1}_{\{\tau_t(W_u) < \zeta_u < \tau_t(W_u) + \varepsilon\}} du.$

Remark. As a simple consequence of (IV.4), we have for $t > 0$,

$$\mathbb{N}_x\left[L_\sigma^{t,\varepsilon}\right] = \frac{1}{\varepsilon}\bar{\mathbb{E}}_x\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\tau_t < u < \tau_t + \varepsilon\}} du\right] = 1.$$

If μ is a finite Radon measure on $[0, \infty)$, then $\mu(dt)$-a.e. $\mathbb{N}_z$-a.e. the function $s \mapsto L_s^t$ is increasing and continuous. Similar observations hold under $\mathcal{E}_{w_0}$. We shall be interested in the random measure $\int \mu(ds)\, Y_s$. By arguing as in [40], theorem 4.1, we easily get a "Palm measure formula" for this random measure.

Proposition IV.4.2 *For every nonnegative measurable function F on $\mathbb{R}^+ \times M_f$, for every $t > 0$ and $z \in D_t$, we have*

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_z &\left[\int Y_t(dy) F\left(y, \int_0^\infty \mu(ds)\, Y_s\right)\right] \\ &\qquad = \int \bar{\mathbb{P}}_z^t(dw)\mathbb{E}\left[F\left(\hat{w}, \int \mathcal{N}_w(du, d\mathrm{W}) \int_0^\infty \mu(ds)\, Y_s(\mathrm{W})\mathbf{1}_{\{u < \tau_s(w)\}}\right)\right],\end{aligned}$$

where for every $w \in \mathcal{W}_z$, $\mathcal{N}_w(du, d\mathrm{W})$ denotes a Poisson measure on $\mathbb{R}^+ \times C\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{W}\right)$ with intensity

$$4\; \mathbf{1}_{[0,\zeta_w]}(u)\; du\; \mathbb{N}_{w(u)}[d\mathrm{W}].$$

IV.4.3 The subordinate superprocess

We introduced the process Y because its distribution under the excursion measure $\mathbb{N}_x$ is the canonical measure of the (γ, Ψ)-superprocess started at δ_x. More precisely, we have the following result.

Proposition IV.4.3 *Let $\nu \in M_f$ and let $\sum_{i\in I} \delta_{W^i}$ be a Poisson measure on $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W})$ with intensity $\int \nu(dx)\mathbb{N}_x[\cdot]$. The process*

$$X_0 = \nu, \quad X_t = \sum_{i\in I} Y_t(W^i), \quad \textit{for} \quad t > 0,$$

is a (Ψ, γ)-superprocess. Moreover, a.s. for every $t > 0$, the collection $\left(\left(Y_s(W^i), s \geq t\right), i \in I\right)$ has only a finite number of non zero terms.

The proposition is proved in [5], except for the last assertion. For this it is enough to check that $\mathbb{N}_x[Y_t \neq 0] < \infty$ for $t > 0$. We know from [5], that

$$\mathbb{N}_x\left[1 - \mathrm{e}^{-n(Y_t, \mathbf{1})}\right] = v_n(t, x), \quad t \geq 0, \ \ x \in \mathbb{R}^d,$$

is the only nonnegative measurable solution of (IV.1) with $f = n$. By a uniqueness argument, we have $v_n(t, x) = v_n(t)$. Then (IV.1) implies $v_n(0) = n$, $\frac{d}{dt}v_n(t) = -\Psi(v_n(t))$, from which we easily get:

$$\int_{v_n(t)}^{n} \Psi(u)^{-1} du = t, \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

By (IV.2) and (H1), we have $\int^{\infty} \Psi(u)^{-1} du < \infty$. Thus if $v(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t) = \mathbb{N}_x[Y_t \neq 0]$, we get from the previous equation that $v(t) < \infty$ and more precisely

$$\int_{v(t)}^{\infty} \Psi(u)^{-1} du = t, \quad \text{for} \quad t \geq 0. \tag{IV.6}$$

Remark. We can use the continuity of the mapping $t \mapsto v(t)$ to derive a fact that will be useful later. For $t > 0$ fixed, observe that $\mathbb{N}_x$-a.e.

$$\left\{\sup_{s\geq 0} L_{\zeta_s}(W_s) > t\right\} \subset \{Y_t \neq 0\} \subset \left\{\sup_{s\geq 0} L_{\zeta_s}(W_s) \geq t\right\}.$$

The second inclusion follows from the construction of L^t and the first one is easily deduced from the special Markov property (cf [5] proposition 7). It follows that

$$\mathbb{N}_x\left[\sup_{s\geq 0} L_{\zeta_s}(W_s) \geq t\right] = \mathbb{N}_x[Y_t \neq 0] = v(t),$$

and so

$$\mathbb{N}_x\left[\sup_{s\geq 0} L_{\zeta_s}(W_s) = t\right] = 0.$$

We shall also need the following result, which is a consequence of (IV.6) and theorem 1.5.12 of [6]:

Corollary IV.4.4 *Under (H2), the function $v(t) = \mathbb{N}_x[Y_t \neq 0]$ is regularly varying at $0+$ with index $-1/\rho$.*

IV.4.4 The support of the exit measure

In this section, we give a technical result about the support of the exit measure L^t, which is crucial for the proof of theorem IV.2.1. Recall that by definition we have $\tau_t(W_s) = \inf\{r < \zeta_s; L_r(W_s) \geq t\}$. However we know that $\mathbb{N}_z$-a.e. (or $\mathcal{E}_{w_0}$-a.s.), for every $s \geq 0$ the mapping $r \mapsto L_r(W_s)$, $r \in [0, \zeta_s)$ has a continuous extension to $[0, \zeta_s]$. Thanks to this fact, we slightly modify the previous definition of τ_t by taking $\tau_t(W_s) = \zeta_s$ when $L_{\zeta_s}(W_s) = t$ and $L_r(W_s) < t$ for $r < \zeta_s$. For $t > 0$, we introduce under $\mathbb{N}_x$ the set

$$\mathcal{H}_t = \{s \in [0, \sigma]; \zeta_s = \tau_t(W_s)\}.$$

Recall that supp ν denotes the closed topological support of a measure ν.

Lemma IV.4.5 *$\mathbb{N}_x$-a.e. for every $t > 0$, the set $\mathcal{H}_t$ is closed. Furthermore for every fixed $t > 0$, $\mathbb{N}_x$-a.e., we have* $\operatorname{supp} dL^t \subset \mathcal{H}_t$.

Proof. We prove the first part of the lemma. From the "snake property", it is easy to see that $\{s; \tau_t(W_s) < \zeta_s - \varepsilon\}$ is open. Note also that the set $\{s; \tau_t(W_s) \leq \zeta_s\} = \{s; L_{\zeta_s}(W_s) \geq t\}$ is closed since the function $s \mapsto L_{\zeta_s}(W_s)$ is continuous. Thus the set $A_\varepsilon = \{s; \zeta_s - \varepsilon \leq \tau_t(W_s) \leq \zeta_s\}$ is closed. We deduce the set $\mathcal{H}_t = \cap_{n \geq 1} A_{1/n}$ is closed.

For the second part of the lemma, fix $t > 0$. By the definition of $L_s^{t,\varepsilon}$, we have

$$\operatorname{supp} dL^{t,\varepsilon} \subset \mathcal{C}l\left(\{s; \tau_t(W_s) < \zeta_s < \tau_t(W_s) + \varepsilon\}\right) \subset \{s; \zeta_s - \varepsilon \leq \tau_t(W_s) \leq \zeta_s\}.$$

Since $L_s^t = \lim_{\varepsilon \to 0} L_s^{t,\varepsilon}$, we deduce that supp $L^t \subset \mathcal{H}_t$ $\mathbb{N}_x$-a.e. □

IV.5 Proof of theorem IV.2.1

We prove theorem IV.2.1 in three steps. In the first one we reduce the proof to proposition IV.5.1. The second and third step deal respectively with the proof of the lower bound and the proof of the upper bound of proposition IV.5.1.

IV.5.1 Preliminary reduction

Let $q \in [0, 1)$, and μ a measure on $\mathbb{R}^+$, such that supp $\mu \subset (0, \infty)$ and

$$0 < \iint \mu(dt)\, \mu(ds)\, |t - s|^{-q} < \infty. \tag{IV.7}$$

Let B a compact subset of $(0, \infty)$. We set $\sigma_Y = \sup_{s \in [0,\sigma]} L_{\zeta_s}(W_s)$ and $\mathcal{H}_B = \cup_{t \in B} \mathcal{H}_t$.

Proposition IV.5.1 *Let $x \in \mathbb{R}^d$. $\mathbb{N}_x$-a.e., on $\{\operatorname{supp} \mu \subset (0, \sigma_Y)\}$, we have the lower bound*

$$\dim \operatorname{supp} \int \mu(ds)\, Y_s \geq \left(\frac{2}{\rho} + 2q\right) \wedge d.$$

$\mathbb{N}_x$-a.e., on $\{B \subset (0, \sigma_Y)\}$, we have the upper bound

$$\dim\left\{\hat{W}_s; s \in \mathcal{H}_B\right\} \leq \left(\frac{2}{\underline{\rho}} + 2\,\overline{\dim}\, B\right) \wedge d.$$

Moreover if (H2) holds, then we have the stronger upper bound: $\mathbb{N}_x$-a.e., on $\{B \subset (0, \sigma_Y)\}$,

$$\dim\left\{\hat{W}_s; s \in \mathcal{H}_B\right\} \leq \left(\frac{2}{\rho} + 2 \dim B\right) \wedge d.$$

We first show how theorem IV.2.1 follows from proposition IV.5.1. For every $q \in (0, \dim B)$ (take $q = 0$ if $\dim B = 0$), there exists a Radon measure μ, supported on B, such that (IV.7) holds (cf theorem 4.13 of [29]). We deduce from proposition IV.4.3 and the first part of proposition IV.5.1 that $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s., on $\{B \subset (0, \sigma_X)\}$,

$$\dim \operatorname{supp} \int \mu(ds)\ X_s \geq \left(\frac{2}{\overline{\rho}} + 2q\right) \wedge d.$$

Since $\operatorname{supp} \int \mu(ds)\ X_s \subset \mathcal{C}l\left(\bigcup_{t\in B} \operatorname{supp} X_t\right)$ and since q can be chosen arbitrarily close to $\dim B$, we get the lower bound of theorem IV.2.1.

Let B' a countable subset of B such that every point of B is the limit of a decreasing sequence of points of B'. The proof of the following lemma is postponed until the end of this subsection.

Lemma IV.5.2 *We have $\mathbb{N}_x$-a.e.*

$$\mathcal{C}l\left(\bigcup_{t\in B'} \operatorname{supp}\ Y_t\right) \subset \left\{\hat{W}_s; s \in \mathcal{H}_B\right\}.$$

Since the process X is càdlàg, and all points of B are limits of decreasing sequences of points of B', it is clear that on $\{B \subset (0, \sigma_X)\}$,

$$\mathcal{C}l\left(\bigcup_{t\in B} \operatorname{supp}\ X_t\right) = \mathcal{C}l\left(\bigcup_{t\in B'} \operatorname{supp}\ X_t\right).$$

It is then easy to deduce the upper bounds in theorem IV.2.1 from the upper bounds in proposition IV.5.1, proposition IV.4.3 and lemma IV.5.2. $\square$

Proof of lemma IV.5.2. Using the properties of the Brownian snake (in particular the "snake property"), $\mathbb{N}_x$-a.e. for every $t > 0$, we have $\left\{\hat{W}_s; s \in \mathcal{H}_t\right\} = \left\{\hat{W}_s; s \in [0,\sigma], L_{\zeta_s}(W_s) = t\right\}$. Thus, we have $\left\{\hat{W}_s; s \in \mathcal{H}_B\right\} = \left\{\hat{W}_s; s \in [0,\sigma], L_{\zeta_s}(W_s) \in B\right\}$. Since the mappings $s \mapsto L_{\zeta_s}(W_s)$ and $s \mapsto \hat{W}_s$ are continuous, we deduce that the set $\left\{\hat{W}_s; s \in [0,\sigma], L_{\zeta_s}(W_s) \in B\right\}$ is compact, and thus closed. Finally we deduce from lemma IV.4.5 that $\mathbb{N}_x$-a.e., for every $t \in B'$,

$$\operatorname{supp}\ Y_t = \left\{\hat{W}_s; s \in \operatorname{supp}\ dL^t\right\} \subset \left\{\hat{W}_s; s \in \mathcal{H}_t\right\} \subset \left\{\hat{W}_s; s \in \mathcal{H}_B\right\}.$$

The desired result follows. $\square$

IV.5.2 The lower bound of proposition IV.5.1

We introduce the set $K = \left\{s \in \operatorname{supp} \mu; \int \mu(dt)\, |t-s|^{-q} < \infty\right\}$. Notice that $\mu(K^c) = 0$. In a first step we show that for every $\kappa \in (0, (2q + 2/\overline{\rho}) \wedge d)$, $\delta \in (0, \kappa/2)$, $s_0 \in K$,

$$\mathbb{N}_x\left[\int Y_{s_0}(dz)\ F_{\kappa-2\delta}\left(z, \int \mu(dt)\ Y_t\right)\right] = 0,$$

where if $\theta > 0$, F_θ is the measurable function on $\mathbb{R}^d \times M_f$ defined by

$$F_\theta(y,\nu) = \mathbf{1}_{\left\{\limsup_{n\to\infty} \nu(B_{2^{-n}}(y))2^{n\theta} > 0\right\}},$$

where $B_r(y)$ is the ball centered at y with radius r. By proposition IV.4.2, we have

$$\mathbb{N}_x\left[\int Y_{s_0}(dy)F_\theta\left(y, \int \mu(dt)\ Y_t\right)\right] \\ = \int \bar{\mathbb{P}}_x^{s_0}(dw)\mathbb{E}\left[F_\theta\left(\hat{w}, \int \mathcal{N}_w(du, d\mathrm{W}) \int \mu(dt)\ \mathbf{1}_{\{u<\tau_t(w)\}}\ Y_t(\mathrm{W})\right)\right]. \quad \text{(IV.8)}$$

In order to use the Borel-Cantelli lemma, we first bound $\iint \bar{\mathbb{P}}_x^{s_0}(dw)\mathbb{P}(d\omega)\mathbf{1}_{A_n}(w,\omega)$, where

$$A_n := \left\{(w,\omega);\ 2^{n(\kappa-2\delta)} \int \mathcal{N}_w(\omega)(du, d\mathrm{W}) \int \mu(dt)\ \mathbf{1}_{\{u<\tau_t(w)\}}\ Y_t(\mathrm{W})\,(B_{2^{-n}}(\hat{w})) \geq C_\kappa 2^{-n\delta}\right\},$$

where $C_\kappa = C_\kappa(w)$ is a finite positive constant that does not depend on n and ω, and depends on w only through $(S_v(w), 0 \leq v < s_0)$ (the choice of this constant will be made precise later). Conditioning on $\mathcal{S}_0 = \sigma\,(S_v(w), 0 \leq v < s_0)$, and using the Markov inequality, we obtain

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\,[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_n}]] \\
&\quad \leq \bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[\mathbb{E}\left[C_\kappa^{-1}2^{n(\kappa-\delta)} \int \mathcal{N}_w(du, d\mathrm{W}) \int \mu(dt)\mathbf{1}_{\{u<\tau_t(w)\}}Y_t(\mathrm{W})\,(B_{2^{-n}}(\hat{w}))\right]\middle|\mathcal{S}_0\right]\right] \\
&\quad = 2^{n(\kappa-\delta)}\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[C_\kappa^{-1}\left[\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[\int \mu(dt)4\int_0^{\zeta_w} du\ \mathbf{1}_{\{u<\tau_t(w)\}}\mathbb{N}_{w(u)}\,[Y_t\,(B_{2^{-n}}(y))]_{y=\hat{w}}\middle|\mathcal{S}_0\right]\right]\right] \\
&\quad = 4\ 2^{n(\kappa-\delta)}\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[C_\kappa^{-1}\left[\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[\int \mu(dt)\int_0^{\tau_{s_0}\wedge\tau_t} du\ \bar{\mathbb{P}}_{w(u)}^t\,[\hat{w} \in B_{2^{-n}}(y)]_{y=\hat{w}}\middle|\mathcal{S}_0\right]\right]\right] \\
&\quad = 4\ 2^{n(\kappa-\delta)}\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[C_\kappa^{-1}\int \mu(dt)\int_{[0,s_0\wedge t)} dS_{u'}\ \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{\gamma_{u'}}\,[\gamma_{t-u'} \in B_{2^{-n}}(y)]_{y=\gamma_{s_0}}\right]\right],
\end{aligned}$$

where γ is under $\mathbb{P}_x$ a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ started at x. In the first equality we used the form of the intensity of the Poisson measure $\mathcal{N}_w$. In the second one, we applied (IV.5) with $D = D_t$. In the third one, we made the formal change of variable $u = S_{u'}$, using the specific properties of the process ξ, and in particular the fact that Γ is constant over each interval (S_{u-}, S_u). We have

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{\gamma_{u'}}\,[\gamma_{t-u'} \in B_{2^{-n}}(y)]_{y=\gamma_{s_0}}\right] = g_2(2^{-n}, s_0 + t - 2u'),$$

where $g_2(r,t) = \mathbb{P}_0[|\gamma_t| \leq r]$. We prove in the appendix (lemma IV.8.1) that under the assumption $s_0 \in K$, we can choose a finite constant C_κ depending only on $(S_v(w), 0 \leq v < s_0)$ such that for $r \in (0,1]$,

$$\int \mu(dt)\int_{[0,s_0\wedge t)} g_2(r, s_0 + t - 2u)dS_u \leq C_\kappa r^\kappa.$$

As a consequence, we have for every $n \geq 1$,

$$\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\,[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_n}]] \leq 4\ 2^{-n\delta}.$$

Applying the Borel-Cantelli lemma to the sequence $(A_n, n \geq 1)$, we get $\bar{\mathbb{P}}_x^{s_0}$-a.s., $\mathbb{P}$-a.s.

$$\limsup_{n\to\infty} 2^{n(\kappa-2\delta)} \int \mathcal{N}_w(du, d\mathrm{W}) \int \mu(dt)\ \mathbf{1}_{\{u<\tau_t(w)\}}\ Y_t(\mathrm{W})\ (B_{2^{-n}}(\hat{w})) = 0.$$

Hence by the definition of F_θ and (IV.8), we get for every $s_0 \in K$,

$$\mathbb{N}_x \left[\int Y_{s_0}(dy) F_{\kappa-2\delta} \left(y, \int \mu(dt)\ Y_t \right) \right] = 0.$$

Since $\mu(K^c) = 0$, integrating with respect to $\mu(ds_0)$ gives $\mathbb{N}_x$-a.e.

$$\int \mu(ds) \int Y_s(dy) F_{\kappa-2\delta} \left(y, \int \mu(dt)\ Y_t \right) = 0. \tag{IV.9}$$

We deduce from theorem 4.9 of [29], that for every $\kappa \in (0, (2q + 2/\overline{\rho}) \wedge d)$, $\delta \in (0, \kappa/2)$, $\mathbb{N}_x$-a.e. on $\left\{ \int \mu(dt)\ Y_t \neq 0 \right\}$,

$$\dim\ \mathrm{supp} \int \mu(ds) Y_s \geq \kappa - 2\delta.$$

The lower bound of proposition IV.5.1 follows. □

IV.5.3 The upper bounds of proposition IV.5.1

First of all we give a technical result about the Brownian snake.

Lemma IV.5.3 *1. $\mathbb{N}_x$-a.e. the function $s \mapsto L_{\zeta_s}(W_s)$, respectively $s \mapsto \hat{W}_s = \Gamma_{\zeta_s}(W_s)$, is locally Hölder with index $\underline{\rho}/2 - \delta$, respectively $\underline{\rho}/4 - \delta$, for every $\delta \in (0, \underline{\rho}/4)$.*

2. The adapted increasing process $(M_t, t > 0)$, defined by:

$$M_t := \sup_{s\in(0,t]} \sup_{u\neq v, (u,v)\in[0,\zeta_s]^2} \frac{|L_u(W_s) - L_v(W_s)|}{|u-v|^{\underline{\rho}(1-\delta/2)}},$$

is $\mathbb{N}_x$-a.e. finite for every $\delta \in (0,1)$.

Proof. 1. Recall that $\mathcal{E}_x$-a.s. the mapping $s \mapsto \left(L_{\zeta_s}(W_s), \hat{W}_s \right)$ is continuous. Thanks to the Kolmogorov lemma it is sufficient to prove that for every integer $k \geq 1$, and $\delta \in (0, \underline{\rho})$, $N > 0$, there exists a constant c'_N such that for every $0 \leq s, s' \leq N$,

$$\mathcal{E}_x \left[\left| L_{\zeta_s}(W_s) - L_{\zeta_{s'}}(W_{s'}) \right|^{2k} \right] \leq c'_N \left| s - s' \right|^{(\underline{\rho}-\delta)k}, \tag{IV.10}$$

$$\mathcal{E}_x \left[\left| \hat{W}_s - \hat{W}_{s'} \right|^{2k} \right] \leq c'_N \left| s - s' \right|^{(\underline{\rho}-\delta)k/2}. \tag{IV.11}$$

Firstly, we prove (IV.11). Since $\mathcal{E}_x$-a.s. $\Gamma_{m(s,s')}(W_s) = \Gamma_{m(s,s')}(W_{s'})$, we have by symmetry

$$\mathcal{E}_x \left[\left| \hat{W}_s - \hat{W}_{s'} \right|^{2k} \right] \leq 2.2^{2k-1} \mathcal{E}_x \left[\left| \Gamma_{\zeta_s}(W_s) - \Gamma_{m(s,s')}(W_s) \right|^{2k} \right].$$

Conditionally on ζ the distribution of $\Gamma_{\zeta_s}(W_s)-\Gamma_{m(s,s')}(W_s)$ is the same as that of $\Gamma_{\zeta_s}-\Gamma_{m(s,s')}$ under $\bar{\mathbb{P}}_x$. Thus we get

$$\mathcal{E}_x\left[\left|\Gamma_{\zeta_s}(W_s)-\Gamma_{m(s,s')}(W_s)\right|^{2k}\right]=\mathcal{E}_x\left[\bar{\mathbb{E}}_x\left[|\Gamma_u-\Gamma_v|^{2k}\right]_{u=\zeta_s,v=m(s,s')}\right].$$

By scaling and using the same arguments as in the proof of lemma IV.3.2, we get

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{E}}_x\left[|\Gamma_u-\Gamma_v|^{2k}\right]=\mathbb{E}_0\left[|\gamma_1|^{2k}\right]\bar{\mathbb{E}}_0\left[L_u-L_v\right]^k\leq\mathbb{E}_0\left[|\gamma_1|^{2k}\right]k!\left[\mathbb{E}[L_{u-v}]\right]^k\\ \leq c_1\left[|u-v|\wedge|u-v|^{\underline{\rho}-\delta}\right]^k,\end{aligned}$$

by lemma IV.3.2,1. From this inequality and standard bounds on the moments of the increments of ζ, we easily get

$$\mathcal{E}_x\left[\left|\hat{W}_s-\hat{W}_{s'}\right|^{2k}\right]\leq c_2\left[|s-s'|\wedge|s-s'|^{\underline{\rho}-\delta}\right]^{k/2},$$

where the constant c_2 is independent of s and s'. Since s and s' are bounded, (IV.11) follows. The proof of (IV.10) is similar.

2. Thanks to lemma IV.3.2,1. for every integer $k\geq 1$, and $1/2>\delta>0$, $A>0$, $T>0$, there exists a constant c_1 such that for every $(u,v)\in[0,A]^2$,

$$\mathbb{E}\left[|L_u-L_v|^k\right]\leq c_1\,|u-v|^{k\underline{\rho}(1-\delta)}.$$

Furthermore, there exists a constant c_2, such that for every $(s,t)\in[0,T]^2$,

$$\mathcal{E}_x\left[\sup_{r,q\in[s,t]}|\zeta_r-\zeta_q|^{k\underline{\rho}(1-\delta)}\right]\leq c_2\,|s-t|^{k\underline{\rho}(1-\delta)/2}.$$

For convenience, we put $L_u(W_s)=L_{\zeta_s}(W_s)$ when $u>\zeta_s$. Using the above inequalities and the snake properties, we then bound for every integer $k\geq 2\underline{\rho}^{-1}$, and $u\geq v$, $(u,v)\in[0,A]^2$, $(s,t)\in[0,T]^2$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_x\left[|L_u(W_s)-L_v(W_s)-L_u(W_t)+L_v(W_t)|^k\right]\\ &\quad\leq\mathcal{E}_x\left[\mathbf{1}_{m(s,t)\leq v\leq u}\left[(L_u(W_s)-L_v(W_s))+(L_u(W_t)-L_v(W_t))\right]^k\right]\\ &\qquad+\mathcal{E}_x\left[\mathbf{1}_{v<m(s,t)\leq u}\left[\left(L_u(W_s)-L_{m(s,t)}(W_s)\right)+\left(L_u(W_t)-L_{m(s,t)}(W_t)\right)\right]^k\right]\\ &\quad\leq c_3\mathcal{E}_x\left[\mathbf{1}_{m(s,t)\leq v\leq u}\left[|\zeta_s\wedge u-\zeta_s\wedge v+\zeta_t\wedge u-\zeta_t\wedge v|\right]^{k\underline{\rho}(1-\delta)}\right]\\ &\qquad+c_3\mathcal{E}_x\left[\mathbf{1}_{v<m(s,t)\leq u}\left[|\zeta_s\wedge u+\zeta_t\wedge u-2m(s,t)|\right]^{k\underline{\rho}(1-\delta)}\right]\\ &\quad\leq c_4\mathcal{E}_x\left[(u-v)^{k\underline{\rho}(1-\delta)}\wedge\sup_{r,q\in[s,t]}|\zeta_r-\zeta_q|^{k\underline{\rho}(1-\delta)}\right]\\ &\quad\leq c_5\left[|u-v|\wedge|s-t|^{1/2}\right]^{k\underline{\rho}(1-\delta)},\end{aligned}$$

where the constant c_5 is independent of u, v, s and t. For s, t fixed consider the continuous random process $Z_u^{s,t} = L_u(W_s) - L_u(W_t)$. Fix $\eta \in (1/2, 1)$. The previous inequality gives:

$$\mathcal{E}_x\left[\left|Z_u^{s,t} - Z_v^{s,t}\right|^k\right] \le c_5\,|u-v|^{k\eta\underline{\rho}(1-\delta)}\,|t-s|^{k(1-\eta)\underline{\rho}(1-\delta)/2}.$$

The Kolmogorov lemma (theorem 1.2.1 of [54]) implies that the process $Z^{s,t}$ is locally Hölder with exponent $\theta = \eta\underline{\rho}(1 - 3\delta/2)$, and moreover a close look at the arguments of the proof shows that

$$\mathcal{E}_x\left[\left(\sup_{u\neq v;(u,v)\in[0,A]^2} \frac{\left|Z_u^{s,t} - Z_v^{s,t}\right|}{|u-v|^{\theta}}\right)^k\right] \le c_6\,|t-s|^{k(1-\eta)\underline{\rho}(1-\delta)/2},$$

where the constant c_6 is independent of t, s. Now consider the norm on the Banach space of all real functions f on $[0, A]$ that are Hölder with exponent θ and such that $f(0) = 0$, defined by

$$\|\, f \,\|_\theta := \sup_{u\neq v;(u,v)\in[0,A]^2} |f(u) - f(v)|\,|u-v|^{-\theta}.$$

The above inequality can be written as

$$\mathcal{E}_x\left[\|\, L(W_s) - L(W_t)\,\|_\theta^k\right] \le c_6\,|t-s|^{k(1-\eta)\underline{\rho}(1-\delta)/2}.$$

We can again use the Kolmogorov lemma to get $\mathcal{E}_x$-a.s.

$$\sup_{s\in[0,T]} \|\, L(W_s)\,\|_\theta < \infty.$$

Note that $\mathcal{E}_x$-a.s. $\sup_{s\in[0,T]}\zeta_s$ is finite, and so $\sup_{s\in[0,T]}\zeta_s \le A$ if A is large enough. The fact that $M_t < \infty$ follows from the last bound by taking η sufficiently close to 1 and δ small enough. This completes the proof. □

Since we have proved the function $s \mapsto \hat{W}_s$ is $\mathbb{N}_x$-a.e. locally Hölder with index $\frac{\underline{\rho}}{4} - \delta$, for any $\delta \in (0, \underline{\rho}/4)$, proposition 2.2 from [29] implies that $\mathbb{N}_x$-a.e.,

$$\dim\left\{\hat{W}_s, s \in \mathcal{H}_B\right\} \le \frac{4}{\underline{\rho}} \dim \mathcal{H}_B.$$

We will now prove in three steps that for every $[\alpha, \beta] \in (0, \infty)$, $\delta' \in (0, 1/2)$, $\mathbb{N}_x$-a.e.,

$$\dim(\mathcal{H}_B \cap [\alpha, \beta]) \le \frac{1}{2}(1 + \underline{\rho}\,\overline{\dim}\,B) + \delta'. \tag{IV.12}$$

Moreover if (H2) is satisfied then $\mathbb{N}_x$-a.e.,

$$\dim(\mathcal{H}_B \cap [\alpha, \beta]) \le \frac{1}{2}(1 + \rho\,\dim B) + \delta'. \tag{IV.13}$$

This will be sufficient to prove the upper bounds of proposition IV.5.1.
Proof of (IV.12) and (IV.13). In a first step we start from a covering of B by open sets and construct an associated covering of $\mathcal{H}_B \cap [\alpha, \beta]$. In a second step, lemma IV.5.4 gives us an

upper bound on the cardinality of this covering. In the last step, we prove (IV.12) and (IV.13) by letting the maximal diameter of the open sets in the covering of B tend to 0.

Let $[\alpha,\beta]\subset(0,\infty)$, with $\alpha<1$, and let $\delta>0$ small enough. We set $\theta=\underline{\rho}(1+\delta)/2$.

First step. Let i be an integer and $\varepsilon>0$, $h>\varepsilon^\theta$. We define the stopping times:

$$T_i^\varepsilon=\inf\left\{u\in[i\varepsilon,(i+1)\varepsilon]\,;u\in\mathcal{H}_{[h-\varepsilon^\theta,h]}\cap[\alpha,\beta+1]\right\},$$

with the convention $\inf\emptyset=\sigma$. If $[t]$ is the unique integer k such that $k\le t<k+1$, we define

$$N_{\varepsilon,h,\delta}=\sum_{i=[\alpha/\varepsilon]}^{[\beta/\varepsilon]}\mathbf{1}_{\{T_i^\varepsilon<\sigma\}}.$$

The random variable $N_{\varepsilon,h,\delta}$ represents an upper bound on the total number of intervals of the form $[i\varepsilon,(i+1)\varepsilon]$ which intersect $\mathcal{H}_{[h-\varepsilon^\theta,h]}\cap[\alpha,\beta]$. Let $\varepsilon_0\in(0,\alpha/2)$, and $((h_n,r_n),n\ge1)$ a possibly finite sequence in $(0,\infty)\times(0,\varepsilon^\theta]$ such that $h_n>r_n>0$ for all $n\ge1$, and the family of open sets (h_n-r_n,h_n) covers the compact set B. It is clear that

$$\mathcal{H}_B\cap[\alpha,\beta]\subset\bigcup_{n\ge1}\mathcal{H}_{[h_n-r_n,h_n]}\cap[\alpha,\beta]\,.$$

We finally denote by Δ the collection of all pairs $(i,\varepsilon)\in\mathbb{N}^*\times(0,\varepsilon_0]$ such that there exists $n\ge1$ for which

$$\varepsilon=r_n^{1/\theta},\quad\text{and}\quad[i\varepsilon,(i+1)\varepsilon]\cap\mathcal{H}_{[h_n-r_n,h_n]}\cap[\alpha,\beta]\neq\emptyset.$$

The collection of balls $([i\varepsilon,(i+1)\varepsilon]\,;(i,\varepsilon)\in\Delta)$ covers the set $\mathcal{H}_B\cap[\alpha,\beta]$. Moreover for ε fixed of the form $\varepsilon=r_n^{1/\theta}$,

$$\text{Card }\{i\in\{[\alpha/\varepsilon],\dots,[\beta/\varepsilon]\}\,;(i,\varepsilon)\in\Delta\}\le N_{\varepsilon,h_n,\delta}.$$

Second step. We are mainly concerned by a control on the expectation of $N_{\varepsilon,h,\delta}$. Recall the notation of IV.4.2, and observe that for $\varepsilon\in(0,\alpha/2)$,

$$\begin{aligned}1\ge\mathbb{N}_x L_{\beta+1}^{h,\sqrt{\varepsilon}}&\ge\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathbb{N}_x\int_{\alpha/2}^{\beta+1}\mathbf{1}_{\{\tau_h(W_u)<\zeta_u<\tau_h(W_u)+\sqrt{\varepsilon}\}}du\\&\ge\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\sum_{i=[\alpha/\varepsilon]}^{[\beta/\varepsilon]}\mathbb{N}_x\left[T_i^\varepsilon<\sigma;\int_{i\varepsilon}^{(i+2)\varepsilon}\mathbf{1}_{\{\tau_h(W_u)<\zeta_u<\tau_h(W_u)+\sqrt{\varepsilon}\}}du\right]\\&\ge\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\sum_{i=[\alpha/\varepsilon]}^{[\beta/\varepsilon]}\mathbb{N}_x\left[T_i^\varepsilon<\sigma;\mathcal{E}^*_{W_{T^i_\varepsilon}}\left[\int_0^{\varepsilon}\mathbf{1}_{\{\tau_h(W_u)<\zeta_u<\tau_h(W_u)+\sqrt{\varepsilon}\}}du\right]\right],\end{aligned}$$

where we used the strong Markov property at time T_ε^i for the last inequality. To go further, let us introduce some notation and state a technical lemma. Recall the notation of lemma IV.3.2 to define, for every real number $u>0$ of the form $u=(4R_n)^2$,

$$Z_u^1(y):=\bar{\mathbb{P}}_0\left[\inf_{i\ge n}R_i^{-\underline{\rho}(1+\delta/2)}L_{R_i}>(y+1)\right].$$

Note that the sequence (R_n) depends on δ. If (H2) holds, then consider

$$Z_u^2(y) := \bar{\mathbb{P}}_0 \left[\inf_{v \in (0, \sqrt{u}/4]} v^{-\rho(1+\delta/2)} L_v > (y+1) \right].$$

We will use the same notation $Z_u(y)$, for both functions $Z_u^1(y)$ and $Z_u^2(y)$. This function is defined for $(u,y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{R}^+$, where $\mathbb{F} = \left\{(4R_n)^2; n \geq 1\right\}$ in the first case and $\mathbb{F} = (0,\infty)$ in the second one. Clearly the function Z is positive and bounded above by 1, and is decreasing in both variables u and y. Moreover thanks to lemma IV.3.2, we have for every $y > 0$, $\lim_{u\in\mathbb{F}, u\to 0+} Z_u(y) = 1$. Recall the process M_t was defined in lemma IV.5.3. The proof of the following lemma is postponed to the end of this section.

Lemma IV.5.4 *There exists a universal constant C_0, such that for every $\delta \in (0,1/2]$, $h > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{F} \cap (0,1/2)$, $\mathbb{N}_x$-a.e. for every stopping time T taking values in $\left(\mathcal{H}_{[h-\varepsilon^\theta, h]} \cap [\alpha,\beta]\right) \cup \{\sigma\}$, we have*

$$\mathcal{E}^*_{W_T} \left[\int_0^\varepsilon \mathbf{1}_{\left\{\tau_h(W_u) < \zeta_u < \tau_h(W_u) + \sqrt{\varepsilon}\right\}} du \right] \geq C_0 \, \varepsilon^{1+\delta} Z_\varepsilon(M_T) \mathbf{1}_{\sigma > T} \, \mathcal{E}^*_{W_T} \left[\sigma > \varepsilon\right].$$

Using this lemma with $T = T_i^\varepsilon$, we get for $\varepsilon \in \mathbb{F} \cap (0,1/2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_x &\left[T_i^\varepsilon < \sigma; \mathcal{E}^*_{W_{T_\varepsilon^i}} \left[\int_0^\varepsilon \mathbf{1}_{\left\{\tau_h(W_u) < \zeta_u < \tau_h(W_u) + \sqrt{\varepsilon}\right\}} du \right]\right] \\
&\geq C_0 \varepsilon^{1+\delta} \mathbb{N}_x \left[T_i^\varepsilon < \sigma; Z_\varepsilon(M_{T_i^\varepsilon}) \, \mathcal{E}^*_{W_{T_i^\varepsilon}} [\sigma > \varepsilon] \right] \\
&\geq C_0 \varepsilon^{1+\delta} \mathbb{N}_x \left[T_i^\varepsilon < \sigma; \sigma > (i+2)\varepsilon; Z_\varepsilon(M_{T_i^\varepsilon}) \right] \\
&\geq C_0 \varepsilon^{1+\delta} \mathbb{N}_x \left[T_i^\varepsilon < \sigma; Z_\varepsilon(M_{T_i^\varepsilon}) \right] - C_0 \varepsilon^{1+\delta} \mathbb{N}_x \left[\sigma \in [i\varepsilon, (i+2)\varepsilon] \right].
\end{aligned}$$

We then sum over $i \in \{[\alpha/\varepsilon], \ldots, [\beta/\varepsilon]\}$, and use the monotonicity of the mapping $y \mapsto Z_\varepsilon(y)$ to get

$$\begin{aligned}
1 \geq \mathbb{N}_x L_{\beta+1}^{h,\sqrt{\varepsilon}} &\geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} C_0 \varepsilon^{1+\delta} \sum_{i=[\alpha/\varepsilon]}^{[\beta/\varepsilon]} \mathbb{N}_x \left[T_i^\varepsilon < \sigma; Z_\varepsilon(M_{\beta+1}) \right] - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C_0 \varepsilon^{1+\delta} \mathbb{N}_x \left[\sigma > \alpha/2\right] \\
&\geq 2^{-1} C_0 \varepsilon^{1/2+\delta} \mathbb{N}_x \left[Z_\varepsilon(M_{\beta+1}) N_{\varepsilon,h,\delta} \right] - 2C_0 \varepsilon^{1/2+\delta} [\alpha\pi]^{-1/2}.
\end{aligned}$$

In the last bound we also used the definition of $N_{\varepsilon,h,\delta}$ and the well-known formula $\mathbb{N}_x[\sigma > a] = (2/\pi a)^{1/2}$. From the monotonicity of the mapping $\varepsilon \mapsto Z_\varepsilon(y)$, we get for $\varepsilon_0 \in \mathbb{F}$ small enough and $\varepsilon_0 \geq \varepsilon \in \mathbb{F}$

$$\mathbb{N}_x \left[Z_{\varepsilon_0}(M_{\beta+1}) N_{\varepsilon,h,\delta} \right] \leq 4 C_0^{-1} \varepsilon^{-1/2-\delta}.$$

Third step. Let κ be such that $2(\kappa - 1/2)/\underline{\rho} > d_1$ where $d_1 = \dim B$ if (H2) is satisfied, $d_1 = \overline{\dim} B$ otherwise. Let $\delta > 0$ be so small that $(\kappa - 1/2 - \delta)/\theta \geq d_1 + \delta$. By the definition of upper box-counting dimension, and Hausdorff dimension, for every integer p there exists a sequence $((h_n^p, r_n^p), n \geq 1)$, where $h_n^p > r_n^p > 0$, such that the family of open sets $(h_n^p - r_n^p, h_n^p)$ covers B and such that $(r_n^p)^{1/\theta} \in \mathbb{F} \cap (0, 2^{-p} \wedge \alpha/2]$ for all $n \geq 1$ and

$$\sum_{n \geq 1} (r_n^p)^{d_1+\delta} \leq 2^{-2p}.$$

For each p consider the set Δ_p associated to the sequence $((h_n^p, r_n^p), n \geq 1)$ as in the first step of the proof. For p big enough we deduce from the last inequality of the second step that, if $\varepsilon_0(p) = \sup \mathbb{F} \cap (0, (\alpha/2) \wedge 2^{-p}]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_x \left[Z_{\varepsilon_0(p)}(M_{\beta+1}) \sum_{(i,\varepsilon)\in\Delta_p} \varepsilon^\kappa \right] &\leq \sum_{n\geq 1} (r_n^p)^{\kappa/\theta} \mathbb{N}_x \left[Z_{\varepsilon_0(p)}(M_{\beta+1}) N_{(r_n^p)^{1/\theta}, h_n^p, \delta} \right] \\ &\leq 4C_0^{-1} \sum_{n\geq 1} (r_n^p)^{(\kappa-1/2-\delta)/\theta} \\ &\leq 4C_0^{-1} 2^{-2p}.\end{aligned}$$

By the Borel-Cantelli lemma we get the existence of p' such that for every integer $p \geq p'$,

$$Z_{\varepsilon_0(p)}(M_{\beta+1}) \sum_{(i,\varepsilon)\in\Delta_p} \varepsilon^\kappa \leq 2^{-p}.$$

We have $\lim_{p\to\infty} \varepsilon_0(p) = 0$. Thanks to the properties of Z, we get $\lim_{p\to\infty} Z_{\varepsilon_0(p)}(M_{\beta+1}) = 1$. We have thus proved that $\mathbb{N}_x$-a.e.,

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{(i,\varepsilon)\in\Delta_p} \varepsilon^\kappa = 0.$$

Since the collection $([i\varepsilon, (i+1)\varepsilon]; (i,\varepsilon) \in \Delta_p)$ covers $\mathcal{H}_B \cap [\alpha, \beta]$, we obtain that $\mathbb{N}_x$-a.e.

$$\dim \mathcal{H}_B \cap [\alpha, \beta] \leq \kappa.$$

Since this bound holds for every κ such that $2(\kappa - 1/2)/\underline{\rho} > \overline{\dim} B$ (and $2(\kappa-1/2)/\underline{\rho} > \dim B$, if (H2) is satisfied), we obtain (IV.12) and (IV.13), which completes the proof of proposition IV.5.1. □

Proof of lemma IV.5.4. Let $\delta \in (0, 1/2)$, $h > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{F} \cap (0, 1/2)$. We set $\theta = \underline{\rho}(1+\delta)/2$. Let T be a stopping time with values in $\left(\mathcal{H}_{[h-\varepsilon^\theta, h]} \cap [\alpha, \beta]\right) \cup \{\sigma\}$. Note that, on $\{T < \sigma\}$, $L_r(W_T) < L_{\zeta_T}(W_T)$ for every $r \in [0, \zeta_T)$. We introduce the following three sets, where $m(s, s') = \inf_{r\in[s,s']} \zeta_r$ and $b_\varepsilon := \left[\frac{1}{16}\, \varepsilon^{1+2\delta}\right] \wedge (\zeta_T/2)^2$,

$$\begin{aligned}A'_\varepsilon := \Big\{ & m(T, T+b_\varepsilon) \in \left[\zeta_T - \sqrt{b_\varepsilon}, \zeta_T - \sqrt{b_\varepsilon}/2\right]; m(T+b_\varepsilon, T+\varepsilon/2) \geq \zeta_T; \\ & \zeta_{T+\varepsilon/2} \in \left[\zeta_T + 3\sqrt{\varepsilon}/8, \zeta_T + 5\sqrt{\varepsilon}/8\right] \Big\},\end{aligned}$$

$$A_\varepsilon := A'_\varepsilon \cap \left\{ \forall s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon], \zeta_s \in \left(\zeta_T + \sqrt{\varepsilon}/4, \zeta_T + 3\sqrt{\varepsilon}/4\right] \right\}$$

and

$$B_\varepsilon := \left\{ L_{y_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}/4}(W_{T+\varepsilon/2}) - L_{y_\varepsilon}(W_{T+\varepsilon/2}) \geq \varepsilon^\theta (M_T + 1) \right\},$$

where $y_\varepsilon := \inf\left\{ r > m(T, T+\varepsilon); L_r(W_T) > L_{m(T,T+\varepsilon)}(W_T) \right\}$. The lemma is then a simple consequence of the following two results:

A. $\mathbb{N}_x$-a.e. on $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \cap \{\sigma > T\}$, we have

$$\int_T^{T+\varepsilon} \mathbf{1}_{\{\tau_h(W_s) < \zeta_s < \tau_h(W_s) + \sqrt{\varepsilon}\}} ds \geq \varepsilon/2,$$

B. There exists a universal constant C_0 such that

$$\mathcal{E}^*_{W_T}\left[A_\varepsilon \cap B_\varepsilon\right] \geq 2C_0\varepsilon^\delta \mathbf{1}_{\sigma>T} Z_\varepsilon(M_T)\mathcal{E}^*_{W_T}\left[\sigma > \varepsilon\right].$$

$\square$

Proof of A. The proof is based on the properties of the Brownian snake. Let us first show that on $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \cap \{\sigma > T\}$, for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$, $\tau_h(W_s) < \zeta_s$. Notice that we have $y_\varepsilon \leq \zeta_T$ on $\{T < \sigma\} \cap \{m(T, T+\varepsilon) < \zeta_T\} \subset \{T < \sigma\} \cap A_\varepsilon$. On $\{T < \sigma\} \cap A_\varepsilon$ we get $m(T+\varepsilon/2, T+\varepsilon) > \zeta_T + \sqrt{\varepsilon}/4 \geq y_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}/4$. Thus for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$, the paths $t \mapsto L_t(W_s)$ coincide for $t \in [0, y_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}/4]$. Thus we have for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$

$$L_{y_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}/4}(W_{T+\varepsilon/2}) = L_{y_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}/4}(W_s) \leq L_{\zeta_s}(W_s).$$

Furthermore, the paths $t \mapsto L_t(W_T)$ and $t \mapsto L_t(W_{T+\varepsilon/2})$ coincide over $[0, m(T, T+\varepsilon/2)]$. Since $m(T, T+\varepsilon/2) \geq \zeta_T - \sqrt{b_\varepsilon}$, we get

$$\begin{aligned} L_{y_\varepsilon}(W_{T+\varepsilon/2}) &\geq L_{m(T,T+\varepsilon/2)}(W_{T+\varepsilon/2}) \\ &= L_{m(T,T+\varepsilon/2)}(W_T) \geq L_{\zeta_T-\sqrt{b_\varepsilon}}(W_T). \end{aligned}$$

Using the definition of M_t (cf lemma IV.5.3), we see that

$$L_{\zeta_T-\sqrt{b_\varepsilon}}(W_T) \geq L_{\zeta_T}(W_T) - M_T b_\varepsilon^{\rho(1-\delta/2)/2} > L_{\zeta_T}(W_T) - M_T\varepsilon^\theta.$$

Then we get that on the event $\{T < \sigma\} \cap A_\varepsilon$, for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$,

$$\begin{aligned} L_{\zeta_s}(W_s) &\geq L_{y_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}/4}(W_{T+\varepsilon/2}) - L_{y_\varepsilon}(W_{T+\varepsilon/2}) + L_{y_\varepsilon}(W_{T+\varepsilon/2}) \\ &> L_{y_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}/4}(W_{T+\varepsilon/2}) - L_{y_\varepsilon}(W_{T+\varepsilon/2}) + L_{\zeta_T}(W_T) - M_T\varepsilon^\theta. \end{aligned}$$

It is then clear that on $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \cap \{\sigma > T\}$, we have for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$,

$$L_{\zeta_s}(W_s) > (M_T+1)\,\varepsilon^\theta + L_{\zeta_T}(W_T) - M_T\varepsilon^\theta = L_{\zeta_T}(W_T) + \varepsilon^\theta.$$

Since, on $\{T < \sigma\}$, $T \in \mathcal{H}_{[h-\varepsilon^\theta, h]}$, we have $L_{\zeta_T}(W_T) \geq h - \varepsilon^\theta$. It follows that $L_{\zeta_s}(W_s) > h$ for $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$. Thus we have also $\tau_h(W_s) < \zeta_s$ for $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$.

Finally let us prove that on $\{T < \sigma\} \cap A_\varepsilon$, for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$, $\tau_h(W_s) > \zeta_s - \sqrt{\varepsilon}$. For every $s \in [T, T+\varepsilon]$, the paths $t \mapsto L_t(W_s)$ coincide over $[0, m(T, T+\varepsilon)]$. The inequality

$$L_{m(T,T+\varepsilon)}(W_s) = L_{m(T,T+\varepsilon)}(W_T) < L_{\zeta_T}(W_T) \leq h,$$

implies $\tau_h(W_s) > m(T, T+\varepsilon)$ for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$. Recall that on $\{T < \sigma\} \cap A_\varepsilon$, for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$,

$$m(T, T+\varepsilon) \geq \zeta_T - \sqrt{b_\varepsilon} \geq \zeta_s - \sqrt{b_\varepsilon} - 3\sqrt{\varepsilon}/4 > \zeta_s - \sqrt{\varepsilon}.$$

Then we have for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$, $\tau_h(W_s) > \zeta_s - \sqrt{\varepsilon}$. In a nutshell we have obtained that $\mathbb{N}_x$-a.e. on $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \cap \{\sigma > T\}$, for every $s \in [T+\varepsilon/2, T+\varepsilon]$,

$$\tau_h(W_s) < \zeta_s < \tau_h(W_s) + \sqrt{\varepsilon}.$$

This completes the proof of A. $\square$

Proof of B. Let $\varepsilon \in \mathbb{F} \cap (0,1/2)$. By conditioning on $\sigma\left(W_s, 0 \le s \le T+\varepsilon/2\right)$ and using a scaling argument we get

$$\mathcal{E}^*_{W_T}\left[A_\varepsilon\right] \ge \mathcal{E}^*_{W_T}\left[A'_\varepsilon\right] P_0\left[\forall s \in [0,1/2], |B_s| < 1/8\right],$$

where B is under P_y a linear Brownian motion started at $y \in \mathbb{R}$. We set $\tilde{m}(s,t) = \inf_{r\in[s,t]} B_r$. Using the Markov property at time b_ε for B, we get:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^*_{W_T}\left[A'_\varepsilon\right] =& P_{\zeta_T}\Big[\tilde{m}(0,b_\varepsilon) \in \left[\zeta_T - \sqrt{b_\varepsilon}, \zeta_T - \sqrt{b_\varepsilon}/2\right];\\
&\qquad \tilde{m}(b_\varepsilon, \varepsilon/2) \ge \zeta_T; B_{\varepsilon/2} \in \left[\zeta_T + 3\sqrt{\varepsilon}/8, \zeta_T + 5\sqrt{\varepsilon}/8\right]\Big]\\
\ge& P_0\Big[\tilde{m}(0,b_\varepsilon) \in \left[-\sqrt{b_\varepsilon}, -\sqrt{b_\varepsilon}/2\right]; \sqrt{b_\varepsilon}/2 \le B_{b_\varepsilon} \le \sqrt{b_\varepsilon};\\
&\qquad P_{B_{b_\varepsilon}}\left[\tilde{m}(0, \frac{\varepsilon}{2} - b_\varepsilon) \ge 0, B_{\frac{\varepsilon}{2}-b_\varepsilon} \in \left[3\sqrt{\varepsilon}/8, 5\sqrt{\varepsilon}/8\right]\right]\Big].
\end{aligned}$$

Using standard properties of linear Brownian motion, we easily see that the above expression is bounded below by a universal constant times $\sqrt{b_\varepsilon/\varepsilon}$. So there exists a universal constant C_0 such that

$$\mathcal{E}^*_{W_T}\left[A_\varepsilon\right] > 8\, C_0 \sqrt{b_\varepsilon/\varepsilon}.$$

We finally get a lower bound on $\mathcal{E}^*_{W_T}\left[A_\varepsilon \cap B_\varepsilon\right]$. We denote by $\mathcal{S}_T$ the σ-field $\sigma(W_s, s \le T) \vee \sigma(\zeta_s, s \ge 0)$. Recall that the two paths W_T and $W_{T+\varepsilon/2}$ coincide over $[0, m(T, T+\varepsilon/2)]$. Conditionally on $\mathcal{S}_T$, the distribution of

$$\left(\left(\xi_{m(T,T+\varepsilon/2)+u}(W_{T+\varepsilon/2}), L_{m(T,T+\varepsilon/2)+u}(W_{T+\varepsilon/2})\right), 0 \le u < \zeta_{T+\varepsilon/2} - m(T, T+\varepsilon/2)\right)$$

is the law of (ξ_u, L_u), started at $\left(\xi_{m(T,T+\varepsilon/2)}(W_T), L_{m(T,T+\varepsilon/2)}(W_T)\right)$ and killed at time $\zeta_{T+\varepsilon/2} - m(T, T+\varepsilon/2)$. Notice $y_\varepsilon = \inf\left\{r > m(T, T+\varepsilon); L_r(W_T) > L_{m(T,T+\varepsilon)}(W_T)\right\}$ is $\mathcal{S}_T$-measurable by construction. Moreover on $\{T < \sigma\} \cap A_\varepsilon$, we have $y_\varepsilon = m(T, T+\varepsilon/2) + \xi_{m(T,T+\varepsilon/2)}(W_T)$, as a consequence of the behavior of the process ξ. Thus conditionally on $\mathcal{S}_T$, on $\{T < \sigma\} \cap A_\varepsilon$, we obtain that $\left(\left(\xi_{y_\varepsilon+u}(W_{T+\varepsilon/2}), L_{y_\varepsilon+u}(W_{T+\varepsilon/2})\right), 0 \le u < \zeta_{T+\varepsilon/2} - y_\varepsilon\right)$ is distributed as (ξ_u, L_u), started at $\left(0, L_{m(T,T+\varepsilon/2)}(W_T)\right)$ and killed at time $\zeta_{T+\varepsilon/2} - y_\varepsilon$. Notice also that on $\{T < \sigma\} \cap A_\varepsilon$, we have

$$y_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}/4 \le \zeta_T + \sqrt{\varepsilon}/4 < \zeta_{T+\varepsilon/2}.$$

Thus, conditionally on $\mathcal{S}_T$, on $\{T < \sigma\} \cap A_\varepsilon$, $\left(L_{y_\varepsilon+u}(W_{T+\varepsilon/2}) - L_{y_\varepsilon}(W_{T+\varepsilon/2}), 0 \le u \le \sqrt{\varepsilon}/4\right)$ is distributed as $(L_u, 0 \le u \le \sqrt{\varepsilon}/4)$, under $\bar{\mathbb{P}}_0$. Hence we get

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\sigma>T}\, \mathcal{E}^*_{W_T}\left[A_\varepsilon \cap B_\varepsilon\right] &= \mathbf{1}_{\sigma>T}\, \mathcal{E}^*_{W_T}\left[A_\varepsilon, \mathcal{E}^*_{W_T}\left[B_\varepsilon \mid \mathcal{S}_T\right]\right]\\
&= \mathbf{1}_{\sigma>T}\, \mathcal{E}^*_{W_T}\left[A_\varepsilon, \bar{\mathbb{P}}_0\left[L_u > \varepsilon^\theta(M+1)\right]_{u=\sqrt{\varepsilon}/4}\right]_{M=M_T}.
\end{aligned}$$

Since $\varepsilon \in \mathbb{F}$, by the definition of Z_ε, we have

$$\bar{\mathbb{P}}_0\left[L_{\sqrt{\varepsilon}/4} > \varepsilon^\theta(M+1)\right] \ge Z_\varepsilon(M).$$

Then we have

$$\mathbf{1}_{\sigma>T}\ \mathcal{E}^*_{W_T}\left[A_\varepsilon \cap B_\varepsilon\right] \geq \mathbf{1}_{\sigma>T}\ \mathcal{E}^*_{W_T}\left[A_\varepsilon\right] Z_\varepsilon(M_T) \geq \mathbf{1}_{\sigma>T}\ 8\, C_0 \sqrt{b_\varepsilon/\varepsilon}\ Z_\varepsilon(M_T). \qquad \text{(IV.14)}$$

To conclude note that the law of σ under $\mathcal{E}^*_{W_T}$ is the law of $\zeta_T^2 N^{-2}$ where N is a standard normal variable. Thus we have

$$\mathcal{E}^*_{W_T}\left[\sigma > \varepsilon\right] \leq 1 \wedge (\zeta_T \varepsilon^{-1/2}) \leq 4\varepsilon^{-(\frac{1}{2}+\delta)}\sqrt{b_\varepsilon}.$$

Combine this with the inequality (IV.14) to complete the proof of B. □

IV.6 Hitting probability of small balls and proof of theorem IV.2.2

From now on we assume (H2) holds. In the next two sections, we state and prove upper and lower bound for the hitting probability of small balls for the process Y_t (cf [1] for $\Psi(\lambda) = \lambda^2$). Then we derive theorem IV.2.2. In the fourth section, we prove theorem IV.2.3.

IV.6.1 Upper bound for the hitting probability of small balls

The next proposition gives an upper bound for the hitting probability of small balls.

Proposition IV.6.1 *Assume $\rho d > 2$. There exists a positive function l_1, which is slowly varying at $0+$, such that for every $t > 0$, $\varepsilon > 0$:*

$$\mathbb{N}_x\left[Y_t(B_\varepsilon(0)) > 0\right] \leq t^{-d/2}\varepsilon^{d-2/\rho}\, l_1(\sqrt{t} \wedge \varepsilon).$$

Proof. We are following the proof of proposition 8 from [42]. We first consider the case $0 < 2\varepsilon < \sqrt{t}$. We introduce the open set

$$\Delta := \left\{(r,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d,\ r < t, |y| > 2\varepsilon\right\} \bigcup \left\{(r,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d,\ r < t - \varepsilon^2, |y| \leq 2\varepsilon\right\}.$$

Formula (IV.5), with $D = \mathbb{R}^+ \times \Delta$ implies the measure $Y_{\mathbb{R}^+ \times \Delta}$ defined in section IV.4.2 is supported on $\{0\} \times \partial\Delta$. For convenience, let us denote by $\tilde{Y}_\Delta$ its restriction to $\partial\Delta \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, that is $\delta_0 \otimes \tilde{Y}_\Delta = Y_{\mathbb{R}^+ \times \Delta}$. By the special Markov property (cf [5] proposition 7), if N is the number of excursions of the Brownian snake outside $\mathbb{R}^+ \times \Delta$, that reach $\mathbb{R}^+ \times \{t\} \times B_\varepsilon(0)$, then we have:

$$\mathbb{N}_x\left[Y_t\left(B_\varepsilon(0)\right) > 0\right] \leq \mathbb{N}_x\left[N\right] = \mathbb{N}_x\left[\int \tilde{Y}_\Delta(dr,dy)\mathbb{N}_{(0,r,y)}\left[\mathcal{G} \cap (\{t\} \times B_\varepsilon(0)) \neq \emptyset\right]\right], \qquad \text{(IV.15)}$$

where the set $\mathcal{G}$ has been defined in section IV.4.1. Since the measure $\tilde{Y}_\Delta$ is supported by $\partial\Delta$, it is sufficient to bound the integrand for $(r,y) \in \partial\Delta$:

- if $r = t$, $|y| > \varepsilon$, then $\mathcal{G} \cap (\{t\} \times B_\varepsilon(0)) = \emptyset$, $\mathbb{N}_{(0,r,y)}$-a.e.
- if $r = t - \varepsilon^2$ and $|y| \leq 2\varepsilon$, then using the function v defined in section IV.4.3, we get

$$\mathbb{N}_{(0,r,y)}\left[\mathcal{G} \cap (\{t\} \times B_\varepsilon(0)) \neq \emptyset\right] \leq \mathbb{N}_{(0,0,y)}\left[\sup_{s \geq 0} L_{\zeta_s} > \varepsilon^2\right] = v(\varepsilon^2). \qquad \text{(IV.16)}$$

- if $t-\varepsilon^2 < r < t$ and $|y| = 2\varepsilon$, then by time translation and symmetry we get

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_{(0,r,y)}\left[\mathcal{G}\cap(\{t\}\times B_\varepsilon(0))\neq\emptyset\right] &\leq \mathbb{N}_{(0,0,y)}\left[\mathcal{G}\cap\left(\mathbb{R}^+\times B_\varepsilon(0)\right)\neq\emptyset\right]\\ &\leq \mathbb{N}_{(0,0,y')}\left[\mathcal{G}\cap\left(\mathbb{R}^+\times\left((-\infty,0]\times\mathbb{R}^{d-1}\right)\right)\neq\emptyset\right],\end{aligned}$$

where $y' = (\varepsilon, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$. Let $u(y')$ denotes the right-hand side of the previous formula. It can be deduced from the remark in section IV.4.1 that the function u is bounded on every compact set of $(0,\infty)\times\mathbb{R}^{d-1}$. The arguments of propositions 6 to 8 from [5] and propositions 4.3 to 5.3 from [40] can be adapted to prove that u solves

$$\frac{1}{2}\Delta u = \Psi(u),$$

on $(0,\infty)\times\mathbb{R}^{d-1}$, with the boundary condition

$$\lim_{y_1>0,\, y_1\to 0} u(y) = \infty,$$

where we write $y = (y_1, \dots, y_d)$. Obviously, by space homogeneity, the function u depends only on y_1. For simplicity we write $u(y_1)$ for $u((y_1,\dots,y_d))$. Therefore $u : (0,\infty)\to\mathbb{R}^+$ solves

$$u''(s) = 2\Psi(u(s)), \quad s>0 \quad \text{and} \quad \lim_{s\to 0} u(s) = \infty.$$

Using the fact that u is decreasing, we get for $r > 1$

$$u'(r) = -\left[u'(1)^2 + 4\int_{u(1)}^{u(r)} \Psi(h)dh\right]^{1/2}.$$

Integrating over $(0,s]$ and making the change of variable $t = u(r)$, we get for $s\in(0,1)$:

$$\int_{u(s)}^{\infty}\left[u'(1)^2 + 4\int_{u(1)}^{t}\Psi(h)dh\right]^{-1/2} dt = s.$$

Notice that the integrand is regularly varying at ∞ with index $-1-\rho/2$. Thanks to theorems 1.5.10 and 1.5.12 of [6], we deduce that u is regularly varying at $0+$ with index $-2/\rho$. Recall that

$$\mathbb{N}_{(0,r,y)}\left[\mathcal{G}\cap(\{t\}\times B_\varepsilon(0))\neq\emptyset\right] \leq u(\varepsilon). \tag{IV.17}$$

Recall that the function v is regularly varying at $0+$ with index $-1/\rho$. Since the functions u and v are positive, there exists a positive function, l', which is slowly varying at $0+$ such that $u(\varepsilon)+v(\varepsilon^2)\leq\varepsilon^{-2/\rho}l'(\varepsilon)$. We can then substitute (IV.16) and (IV.17) into inequality (IV.15) to obtain

$$\mathbb{N}_x\left[Y_t\left(B_\varepsilon(0)\right)>0\right] \leq \varepsilon^{-2/\rho}l'(\varepsilon)\mathbb{N}_x\left[\left(\tilde{Y}_\Delta, \mathbf{1}_{(0,t)\times\mathbb{R}^d}\right)\right].$$

Then formula (IV.5) gives

$$\mathbb{N}_x\left[\left(\tilde{Y}_\Delta, \mathbf{1}_{(0,t)\times\mathbb{R}^d}\right)\right] = \mathbb{P}_x\left[T_\Delta < t\right],$$

where $T_\Delta = \inf\{s > 0, (s, \gamma_s) \notin \Delta\}$ (recall that γ_s is a Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ started at x under $\mathbb{P}_x$). Then we easily get the existence of constants c_1 depending only on d such that:

$$\mathbb{P}_x [T_D < t] \leq c_1 t^{-d/2} \varepsilon^d.$$

Thus we have

$$\mathbb{N}_x [Y_t (B_\varepsilon(0)) > 0] \leq c_1 t^{-d/2} \varepsilon^{d-2/\rho} l'(\varepsilon).$$

Now if $0 < \sqrt{t} < \varepsilon$, we have the elementary upper bound:

$$\mathbb{N}_x [Y_t(B_\varepsilon(0)) > 0] \leq v(t) \leq t^{-d/2} \varepsilon^{d-2/\rho}\, l'(\sqrt{t}).$$

Taking $l_1 = (c_1 + 1) l'$ gives the desired inequality. □

Notice that in the stable case, a scaling argument shows that we can replace l by a constant.

IV.6.2 Lower bound for the hitting probability of small balls

We assume only in this section that

$$\limsup_{\lambda \to 0+} \lambda^{-1-\rho} \Psi(\lambda) < \infty. \tag{IV.18}$$

Proposition IV.6.2 *Assume that $\rho d > 2$. For every $M > 0$, there exists a positive increasing function l_2, which is slowly varying at $0+$, such that for every $M\sqrt{t} > \varepsilon > 0$, we have*

$$\mathbb{N}_x [Y_t (B_\varepsilon(0)) > 0] \geq \varepsilon^{d-2/\rho} p \left(\frac{\rho t}{1+\rho}, x \right) l_2(\varepsilon).$$

Moreover, if $\limsup_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1-\rho} \Psi(\lambda) < \infty$, we can replace l_1 by a positive constant.

Notice that all the assumptions on Ψ are satisfied in the stable case.
Proof. Let $A \geq \kappa > 0$. We have (cf [5]):

$$\mathbb{N}_x [Y_t (B_\varepsilon(0)) > 0] \geq v_\varepsilon(t, x) := \mathbb{N}_x \left[1 - \exp\left[-\kappa \varepsilon^{-2/\rho} Y_t (B_\varepsilon(0)) \right] \right],$$

where the function v_ε is the only nonnegative solution of (IV.1) with $f = \kappa \varepsilon^{-2/\rho} \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)}$. As

$$v_\varepsilon(t, x) \leq \kappa \varepsilon^{-2/\rho} P_t \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)}(x),$$

we deduce from (IV.1) and the monotonicity of Ψ, that

$$v_\varepsilon(t, x) \geq \kappa \varepsilon^{-2/\rho} P_t \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)}(x) - \int_0^t du\, P_u \left[\Psi\left(\kappa \varepsilon^{-2/\rho} P_{t-u} \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)} \right) \right](x). \tag{IV.19}$$

We now bound the second term of the right-hand side, which we denote by I_t. Thanks to (IV.18) and [6] (ex:4 p.58), we know that the function l^A defined on $(0, \infty)$ by

$$l^A(r) := \sup_{\lambda \in (0, A r^{-2/\rho}]} \lambda^{-1-\rho} \Psi(\lambda)$$

is decreasing and slowly varying at 0+. Using the monotonicity of l^A, it follows that

$$\begin{aligned} I_t &\leq \left(\kappa\varepsilon^{-2/\rho}\right)^{1+\rho} \int_0^t du\; P_u\left[\left(P_{t-u}\mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)}\right)^{1+\rho}\right](x) l^A(\varepsilon) \\ &\leq \kappa^{1+\rho}\varepsilon^{-2(1+1/\rho)} t \int_0^1 du\; P_u\left[\left(P_{1-u}\mathbf{1}_{B_{\varepsilon/\sqrt{t}}(0)}\right)^{1+\rho}\right](x/\sqrt{t}) l^A(\varepsilon). \end{aligned}$$

Let $\lambda \in (0, M)$. We now give an upper bound on

$$\int_0^1 du \int dz\; p(u, z-x)\left[\left[\int_{B_\lambda(0)} dy\; p(1-u, y-z)\right]^{1+\rho}\right].$$

We decompose the above integral in two terms by considering the integral du on the sets $\{u < 1/2\}$ (integral J_1), $\{u \geq 1/2\}$ (integral J_2). Using $\rho d > 2$, the integral J_1 is bounded above by

$$\int_0^{1/2} du \int dz\; p(u, z-x)\left[c\lambda^d\right]^{1+\rho} \leq c_1 \lambda^{d+2},$$

where c_1 depends only on M and d. Now by scaling we get

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \int_0^{1/2} du \int dz\; \left[\int_{B_\lambda(0)} dy\; p(u, y-z)\right]^{1+\rho} \\ &\leq \lambda^{d+2} \int_0^\infty du \int dz\; \left[\int_{B_1(0)} dy\; p(u, y-z)\right]^{1+\rho} \\ &= c_2 \lambda^{d+2}. \end{aligned}$$

We use $\rho d > 2$ to get $c_2 < \infty$. Combining those results together with $\lambda = \varepsilon/\sqrt{t}$, we get that there exists a constant c'_M depending only on M and d such that

$$I_t \leq c'_M \kappa^{1+\rho} \varepsilon^{-2(1+1/\rho)} t^{1-(d+2)/2} \varepsilon^{d+2} l_A(\varepsilon). \tag{IV.20}$$

On the other hand, there exists a constant c_d depending only on d such that:

$$P_t \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)}(x) \geq c_d\left[1 \wedge \left(\left(\varepsilon/\sqrt{t}\right)^d \mathrm{e}^{-|x|^2/2t}\right)\right]$$

Thus for $M\sqrt{t} > \varepsilon > 0$, we have

$$P_t \mathbf{1}_{B_\varepsilon(0)}(x) \geq c_d M^{-d} t^{-d/2} \varepsilon^d \mathrm{e}^{-|x|^2/2t}.$$

Plugging the previous inequality and (IV.20) into (IV.19), we get

$$v_\varepsilon(t,x) \geq \kappa t^{-d/2} \varepsilon^{d-2/\rho}\left[c_d M^{-d} \mathrm{e}^{-|x|^2/2t} - c'_M \kappa^\rho l_A(\varepsilon)\right].$$

Since the constants A and κ are arbitrary, we can take $A = (c_d M^{-d} c'^{-1}_M)^{1/\rho}$ and $\kappa = A(\mathrm{e}^{-|x|^2/2t}[1 + l_A(\varepsilon)]^{-1})^{1/\rho}$ to get

$$\mathbb{N}_x\left[Y_t\left(B_\varepsilon(0)\right) > 0\right] \geq v_\varepsilon(t,x) \geq c_M \varepsilon^{d-2/\rho} p\left(\rho t/(1+\rho), x\right) l(\varepsilon),$$

where $l(\varepsilon) = \left[1 + l^A(\varepsilon)\right]^{-1-1/\rho}$ is increasing and slowly varying at 0+, and the constant c_M is independent of x, t and ε. Moreover, if $\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1-\rho}\Psi(\lambda) < \infty$, then l_A is bounded above by a positive constant independent of A, and we can let l be a constant. $\square$

IV.6.3 Proof of theorem IV.2.2

We deduce from proposition IV.4.3 that for every $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^d \backslash B_\varepsilon(0)$,

$$\mathbb{P}^X_{\delta_x}\left[\mathrm{e}^{-\lambda X_t(B_\varepsilon(0))}\right] = \mathrm{e}^{-\mathbb{N}_x[1-\exp -\lambda Y_t(B_\varepsilon(0))]}.$$

Letting $\lambda \to \infty$, we get

$$\mathbb{P}^X_{\delta_x}\left[X_t(B_\varepsilon(0)) > 0\right] = 1 - \mathrm{e}^{-\mathbb{N}_x[Y_t(B_\varepsilon(0))>0]}.$$

Then theorem IV.2.2 is a consequence of proposition IV.6.1, proposition IV.6.2 and the inequality $(1 \wedge u)/2 \leq 1 - \mathrm{e}^{-u} \leq u$.

IV.6.4 Proof of theorem IV.2.3

Before proving the theorem, we give a result on the intersection of the support of two independent copies of Y. In the next lemma, we consider the product measure $\mathbb{N}_{x_1} \otimes \mathbb{N}_{x_2}$ on the space $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W})^2$. The canonical process on this space is denoted by (W^1, W^2), and we write Y^1, respectively Y^2, for the measure-valued process associated with W^1, respectively W^2.

Lemma IV.6.3 *Assume $\rho d > 4$. Then for every $t > 0$, $s > 0$, we have $\mathbb{N}_{x_1} \otimes \mathbb{N}_{x_2}$-a.e.*

$$\text{supp } Y^1_t \cap \text{supp } Y^2_s = \emptyset.$$

Proof of lemma IV.6.3. Fix $t > 0$ and $s > 0$, and let $\delta \in (0, 1 \wedge \sqrt{t} \wedge \sqrt{s})$, $y \in \mathbb{R}^d$. We can cover the ball $B_1(y)$ with less than $\left[4\sqrt{d}\delta^{-1}\right]^d$ balls $(B_\delta(y_i), i \in J)$ with radius δ and centers y_i belonging to $y + 2\delta d^{-1/2}\mathbb{Z}^d$. Use proposition IV.6.1 to write

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N}_{x_1} \otimes \mathbb{N}_{x_2}\left[\text{supp } Y^1_t \cap \text{supp } Y^2_s \cap B_1(y) \neq \emptyset\right] \\
&\qquad \leq \sum_{i \in J} \mathbb{N}_{x_1}\left[\text{supp } Y_t \cap B_\delta(y_i) \neq \emptyset\right] \mathbb{N}_{x_2}\left[\text{supp } Y_s \cap B_\delta(y_i) \neq \emptyset\right] \\
&\qquad \leq \sum_{i \in J} t^{-d/2} s^{-d/2}\left[\delta^{d-2/\rho}\, l(\delta)\right]^2 \\
&\qquad \leq (ts)^{-d/2}(4\sqrt{d})^d \delta^{d-4/\rho}\, l(\delta)^2.
\end{aligned}$$

Since $\rho d > 4$, let δ go to 0 to see that the left-hand side is 0. As this is true for every $y \in \mathbb{R}^d$, the desired result follow. $\square$

Recall from section IV.4.1 the definition of the set $\mathcal{G}$.

Lemma IV.6.4 *For $\varepsilon > 0$, $t > 0$ set*

$$h_\varepsilon(t) = \mathbb{N}_0\left[\mathcal{G} \cap ([0, t] \times B_\varepsilon(0)^c) \neq \emptyset\right].$$

Then for every $\varepsilon > 0$, $\lim_{t \downarrow 0} h_\varepsilon(t) = 0$.

Proof. We start by making the simple observation that $\mathbb{N}_0$-a.e. for every $s \geq 0$ such that $L_{\zeta_s}(W_s) = 0$ we have $\zeta_s = 0$, and thus $\hat{W}_s = 0$. Indeed, if there would exist s such that $L_{\zeta_s}(W_s) = 0$ and $\zeta_s > 0$, then the snake property would yield a rational s' "close" to s such that $L_t(W_{s'}) = 0$ for $t \in [0, \theta)$, for some $\theta > 0$. This is impossible since under $\mathbb{N}_0$, conditionally on $\zeta_{s'}$, $W_{s'}$ is distributed as $\bar{\xi}$ started at $(0,0,0)$ and killed at time $\zeta_{s'}$.

Then let (t_n) be a sequence decreasing to 0, and let $A_n = \{\mathcal{G} \cap ([0, t_n] \times B_\varepsilon(0)^c) \neq \emptyset\}$. Thanks to the remark in section IV.4.1, we have $\mathbb{N}_0\left[A_n\right] < \infty$. We claim that $\mathbb{N}_0\left[\bigcap_{n\geq 1} A_n\right] = 0$. In fact, on the event $\bigcap_{n\geq 1} A_n \neq \emptyset$, the definition of $\mathcal{G}$ yields a sequence (s_n) in $[0,\sigma]$ such that

$$L_{\zeta_{s_n}}(W_{s_n}) \leq t_n \qquad \text{and} \quad \hat{W}_{s_n} \in B_\varepsilon(0)^c.$$

We can extract from the sequence (s_n) a subsequence converging to s_∞. By the continuity of the mappings $s \mapsto L_{\zeta_s}(W_s)$ and $s \mapsto \hat{W}_s$, we get that $L_{\zeta_{s_\infty}}(W_{s_\infty}) = 0$ and $\hat{W}_{s_\infty} \in B_\varepsilon(0)^c$, which contradicts the beginning of the proof.

Since the function h_ε is monotone increasing and $h_\varepsilon(t_n) = \mathbb{N}_0[A_n]$, the statement of lemma IV.6.4 follows from the fact that $\mathbb{N}_0\left[\bigcap_{n\geq 1} A_n\right] = 0$. □

Proof of theorem IV.2.3. We adapt an argument of Perkins ([52], p.1041). Let us fix $t > 0$ and $\delta \in (0, t)$. By combining the Markov property of X at time $t - \delta$ and proposition IV.4.3, we obtain that the distribution of X_t under $\mathbb{P}^X_\nu$ is the same as the law of $\sum_{i\in I} Y_\delta(W^i)$, where conditionally on $X_{t-\delta}$, $\sum_{i\in I} \delta_{W^i}$ is a Poisson measure on $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W})$ with intensity $\int X_{t-\delta}(dy)\mathbb{N}_y[\cdot]$. With a slight abuse of notation, we may assume that the point measure $\sum_{i\in I} Y_\delta(W^i)$ is also defined under $\mathbb{P}^X_\nu$. It follows from lemma IV.6.3 and properties of Poisson measures that a.s. for every $i \neq j$,

$$\text{supp } Y_\delta(W^i) \cap \text{supp } Y_\delta(W^j) = \emptyset.$$

For $\varepsilon > 0$, let U_ε denote the event "supp X_t is contained in a finite union of disjoint compact sets with diameter less than ε". It is easy to check that U_ε is measurable. Furthermore, by the previous observations, and denoting by y_i the common starting point of the paths W^i_s,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^X_\nu[U_\varepsilon] &\geq \mathbb{P}^X_\nu\left[\forall i \in I, \text{diam }(\text{supp } Y_\delta(W^i)) \leq \varepsilon\right] \\
&\geq \mathbb{P}^X_\nu\left[\forall i \in I, \text{supp } Y_\delta(W^i) \subset B_{\varepsilon/2}(y_i)\right] \\
&= \mathbb{E}^X_\nu\left[\exp - \int X_{t-\delta}(dy)\mathbb{N}_y[\text{supp } Y_\delta \cap B_{\varepsilon/2}(y)^c \neq \emptyset]\right] \\
&= \mathbb{E}^X_\nu\left[\exp -(X_{t-\delta}, \mathbf{1})\mathbb{N}_0[\text{supp } Y_\delta \cap B_{\varepsilon/2}(0)^c \neq \emptyset]\right] \\
&\geq \mathbb{E}^X_\nu\left[\exp -h_{\varepsilon/2}(\delta)(X_{t-\delta}, \mathbf{1})\right].
\end{aligned}$$

We can now let δ go to 0, using lemma IV.6.4, to conclude that $\mathbb{P}^X_\nu[U_\varepsilon] = 1$. Since this holds for every $\varepsilon > 0$, we conclude that supp X_t is totally disconnected $\mathbb{P}^X_\nu$-a.s. □

IV.7 Absolute continuity of the superprocess in the Brownian case and in the symmetric α-sable case

In this section we prove theorem IV.2.4. In fact, it is enough to prove the theorem for a finite measure μ with support in $[\underline{m}, \overline{m}] \subset (0, \infty)$. The construction of the Brownian snake

W associated with the process $\bar{\xi}_t = \left(\xi_t, L_t, \gamma^\alpha_{L_t}\right)$ is performed as in section IV.4, following the general results of [5] (see section 4 and hypothesis (H) therein). In fact only the spatial motion Γ has to be modified. However the processes $t \mapsto \Gamma_t(W_s)$ and $s \mapsto \hat{W}_s$ are no longer continuous. The construction of the measure L^t in section IV.4.2 remain valid and we can still define the exit measure by the formula

$$(Y_t, \varphi) = \int_0^\sigma \varphi(\hat{W}_s) dL^t_s.$$

Proposition IV.4.2 remains also valid.

Let $\nu \in M_f$. Let $\sum_{i\in I} \delta_{W^i}$ be a Poisson measure on $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{W})$ with intensity $\int \nu(dx)\mathbb{N}_x[\cdot]$. The process

$$X^\alpha_0 = \nu, \quad X^\alpha_t = \sum_{i\in I} Y_t(W^i), \quad \text{for} \quad t > 0,$$

is a (γ^α, Ψ)-superprocess (see [5]). Moreover, a.s. the collection $\left(\left(Y_s(W^i), s \geq \underline{m}\right), i \in I\right)$ has finitely many non zero terms. Then theorem IV.2.4 is a consequence of the next proposition.

Proposition IV.7.1 *Let μ a finite measure on $[\underline{m}, \overline{m}] \subset (0, \infty)$ and $q \in [0, 1)$ such that*

$$\iint \mu(dt)\mu(ds) \left|t - s\right|^{-q} < \infty.$$

If $\dfrac{\alpha}{\rho} + \alpha q > d$, then for every $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{N}_x$-a.e. the measure $\int \mu(dt) Y_t$ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure.

We shall now give a proof of this proposition. The arguments are very similar to section IV.5.2.
Proof. Thanks to theorem 7.15 from [55], it is sufficient to prove that $\mathbb{N}_x$-a.e. $\int \mu(dt) Y_t(dy)$-a.e.

$$F\left(y, \int \mu(dt)\ Y_t\right) := \mathbf{1}_{\left\{\liminf\limits_{n\to\infty} 2^{nd} \int \mu(dt) Y_t(B_{2^{-n}}(y)) = \infty\right\}} = 0,$$

Let $K = \left\{s \in \text{supp } \mu; \int \mu(dt) \left|t - s\right|^{-q} < \infty\right\}$. Notice that $\mu(K^c) = 0$. Therefore it is enough to verify that for $s_0 \in K$,

$$\mathbb{N}_x \left[\int Y_{s_0}(dz)\ F\left(z, \int \mu(dt)\ Y_t\right)\right] = 0, \tag{IV.21}$$

Thanks to proposition IV.4.2, we get

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_x &\left[\int Y_{s_0}(dy) F\left(y, \int \mu(dt)\ Y_t\right)\right] \\ &= \int \bar{\mathbb{P}}^{s_0}_x(dw) \mathbb{E}\left[F\left(\hat{w}, \int \mathcal{N}_w(du, d\mathrm{W}) \int \mu(dt)\ \mathbf{1}_{\{u<\tau_t(w)\}}\ Y_t(\mathrm{W})\right)\right].\end{aligned} \tag{IV.22}$$

Conditioning on $\mathcal{S}_0 = \sigma\left(S_v(w), 0 \leq v < s_0\right)$, we shall prove that $\bar{\mathbb{P}}^{s_0}_x$-a.s.,

$$U = \bar{\mathbb{E}}^{s_0}_x \left[\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} 2^{nd} \int \mathcal{N}_w(du, d\mathrm{W}) \int \mu(dt) \mathbf{1}_{\{u<\tau_t(w)\}} Y_t(\mathrm{W})\left(B_{2^{-n}}(\hat{w})\right)\right] \middle| \mathcal{S}_0\right] < \infty.$$

To this end, we use Fatou's lemma to get

$$\begin{aligned} U &\leq \liminf_{n\to\infty} 2^{nd}\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[\mathbb{E}\left[\int \mathcal{N}_w(du,d\mathrm{W})\int \mu(dt)\mathbf{1}_{\{u<\tau_t(w)\}}Y_t(\mathrm{W})\left(B_{2^{-n}}(\hat{w})\right)\right]\middle|\mathcal{S}_0\right] \\ &= \liminf_{n\to\infty} 2^{nd}\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[\int \mu(dt)4\int_0^{\zeta_w} du\ \mathbf{1}_{\{u<\tau_t(w)\}}\mathbb{N}_{w(u)}\left[Y_t\left(B_{2^{-n}}(y)\right)\right]_{y=\hat{w}}\middle|\mathcal{S}_0\right] \\ &= 4\liminf_{n\to\infty} 2^{nd}\bar{\mathbb{E}}_x^{s_0}\left[\int \mu(dt)\int_0^{S_{s_0-}\wedge S_{t-}} du\ \bar{\mathbb{P}}^t_{w(u)}\left[\hat{w}\in B_{2^{-n}}(y)\right]_{y=\hat{w}}\middle|\mathcal{S}_0\right] \\ &= 4\liminf_{n\to\infty} 2^{nd}\int \mu(dt)\int_{[0,s_0\wedge t)} dS_{u'}\ \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{\gamma^\alpha_{u'}}\left[\gamma^\alpha_{t-u'}\in B_{2^{-n}}(y)\right]_{y=\gamma^\alpha_{s_0}}\right]. \end{aligned}$$

We used the formula for the intensity of $\mathcal{N}_w$ in the first equality, then formula (IV.5) in the second one, and finally the change of variables $u = S_{u'}$ in the last one. We have

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{\gamma^\alpha_{u'}}\left[\gamma^\alpha_{t-u'}\in B_{2^{-n}}(y)\right]_{y=\gamma^\alpha_{s_0}}\right] = g_\alpha(2^{-n}, s_0+t-2u'),$$

where $g_\alpha(r,t) = \mathbb{P}_0\left[|\gamma^\alpha_t|\leq r\right]$. Since $s_0\in K$ and $\frac{\alpha}{\bar{\rho}}+\alpha q > d$, we can apply lemma IV.8.1 below with $\kappa = d$, and we get $U\leq 4C_\kappa<\infty$ $\bar{\mathbb{P}}^{s_0}_x$-a.s. Formula (IV.22) then gives (IV.21), which completes the proof of the proposition. □

IV.8 Appendix

Let γ^α be a symmetric α-stable process in $\mathbb{R}^d$ as in section IV.2. Let the function g_α be defined on $\mathbb{R}^+\times(0,\infty)$ by

$$g_\alpha(r,t) = \mathbb{P}_0\left[|\gamma^\alpha_t|\leq r\right] = \mathbb{P}_0\left[|\gamma^\alpha_1|\leq rt^{-1/\alpha}\right]$$

Since the law of the random variable γ^α_1 has a continuous density with respect to Lebesgue measure on $\mathbb{R}^d$, there exists a constant c_α, such that $g_\alpha(r,t)\leq c_\alpha\left[1\wedge r^d t^{-d/\alpha}\right]$ on $(r,t)\in\mathbb{R}^+\times(0,\infty)$. Hence we have also $g_\alpha(r,t)\leq c_\alpha r^\theta t^{-\theta/\alpha}$ for every $\theta\in[0,d]$. Let μ be a non zero finite measure with support in $[\underline{m},\overline{m}]\subset(0,\infty)$. Let $s_0\in\operatorname{supp}\mu$, and $q\in[0,1)$ such that

$$\int \mu(dt)\ |s_0-t|^{-q}<\infty.$$

Let S be a subordinator as in section IV.3.

Lemma IV.8.1 *Let $\kappa\in[0,d]$, such that $\kappa<\alpha(q+1/\overline{\rho})$. Then $\bar{\mathbb{P}}^{s_0}_x(dw)$-a.s. there exists a finite constant C_κ depending on w only through $(S_v(w), 0\leq v<s_0)$, such that for every $r\leq 1$:*

$$\int \mu(dt)\int_{[0,s_0\wedge t)} g_\alpha(r, s_0+t-2u)\ dS_u\leq C_\kappa r^\kappa.$$

Proof of lemma IV.8.1. Let $\kappa\in[0,d]$, such that $\kappa<\alpha(q+1/\overline{\rho})$. Let $\delta\in(0,1)$ small enough such that $\kappa<\alpha(q+\frac{1}{\bar{\rho}}-\delta)$ and $\kappa\neq\alpha(\frac{1}{\bar{\rho}}-\delta)$. Recall the upper bound $g_\alpha(r,t)\leq c_\alpha r^\kappa t^{-\kappa/\alpha}$. The lemma will be proved as soon as we can verify that $\bar{\mathbb{P}}^{s_0}_x$-a.s.

$$\int \mu(dt)\int_{[0,s_0\wedge t)}[s_0+t-2u]^{-\kappa/\alpha}\ dS_u<\infty. \tag{IV.23}$$

By lemma IV.3.2 3., we can find $\bar{\mathbb{P}}_x^{s_0}$-a.s. a (random) constant $\varepsilon \in (0, \underline{m}/2)$, such that for every $u \in [s_0 - \varepsilon, s_0)$,

$$S_{s_0-} - S_u \le [s_0 - u]^{\frac{1}{\rho} - \delta}.$$

In order to bound the left-hand side of (IV.23), we first observe that

$$\int \mu(dt) \int_0^{(s_0-\varepsilon)\wedge t} [s_0 + t - 2u]^{-\kappa/\alpha} \, dS_u \le (\mu, \mathbf{1}) \varepsilon^{-\kappa/\alpha} S_{\overline{m}}.$$

Consider the case $u \in [(s_0 - \varepsilon) \wedge t, s_0 \wedge t)$. An integration by parts gives

$$\begin{aligned} \int_{[(s_0-\varepsilon)\wedge t, s_0 \wedge t)} & [s_0 + t - 2u]^{-\kappa/\alpha} \, dS_u \\ &= \left[S_{(s_0\wedge t)-} - S_{((s_0-\varepsilon)\wedge t)}\right] [s_0 + t - 2((s_0 - \varepsilon) \wedge t)]^{-\kappa/\alpha} \\ &\qquad + \frac{2\kappa}{\alpha} \int_{(s_0-\varepsilon)\wedge t}^{s_0\wedge t} [s_0 + t - 2u]^{-1-\kappa/\alpha} \left[S_{(s_0\wedge t)-} - S_u\right] du. \end{aligned}$$

Now for $u \in [s_0 - \varepsilon, s_0 \wedge t)$, we have

$$S_{(s_0\wedge t)-} - S_u \le S_{s_0-} - S_u \le (s_0 - u)^{\frac{1}{\rho} - \delta}.$$

Thus the integral $\int_{(s_0-\varepsilon)\wedge t}^{s_0\wedge t} [s_0 + t - 2u]^{-1-\kappa/\alpha} [S_{(s_0\wedge t)-} - S_u] du$ is bounded above by

$$\int_{(s_0-\varepsilon)\wedge t}^{s_0\wedge t} [s_0 + t - 2u]^{-1-\frac{\kappa}{\alpha}+\frac{1}{\rho}-\delta} du \le \begin{cases} C\,|s_0 - t|^{-\frac{\kappa}{\alpha}+\frac{1}{\rho}-\delta} & \text{if} \quad \kappa > \frac{\alpha}{\rho} - \alpha\delta, \\ C & \text{if} \quad \kappa < \frac{\alpha}{\rho} - \alpha\delta, \end{cases}$$

where the constant C is independent of $t \in [\underline{m}, \overline{m}]$. By combining the previous estimates, we see that the left-hand side of (IV.23) is bounded above by

$$2(\mu, \mathbf{1}) \varepsilon^{-\kappa/\alpha} S_{\overline{m}} + \begin{cases} \frac{2\kappa}{\alpha} C \int \mu(dt) \ |s_0 - t|^{-\frac{\kappa}{\alpha}+\frac{1}{\rho}-\delta} & \text{if} \quad \kappa > \frac{\alpha}{\rho} - \alpha\delta, \\ \frac{2\kappa}{\alpha} C(\mu, \mathbf{1}) & \text{if} \quad \kappa < \frac{\alpha}{\rho} - \alpha\delta. \end{cases}$$

This quantity is finite by the assumption $\int \mu(dt) \ |s_0 - t|^{-q} < \infty$ and the choice of δ. The lemma follows. $\square$

Bibliographie

[1] R. ABRAHAM. On the connected components of super-Brownian motion and of its exit measure. *Stoch. Process. and Appl.*, 60:227–245, 1995.

[2] M. T. BARLOW, S. N. EVANS, and E. A. PERKINS. Collision local times and measure-valued process. *Canad. J. of Math.*, 43(5):897–938, 1991.

[3] R. BELLMAN. *Stability theory of differential equations.* McGraw-Hill, New-York, 1953.

[4] J. BERTOIN. *Lévy processes.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[5] J. BERTOIN, J.-F. LE GALL, and Y. LE JAN. Spatial branching processes and subordination. *Canad. J. of Math.*, 1997. To appear.

[6] N. BINGHAM, C. GOLDIE, and J. TEUGELS. *Regular variation.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[7] R. BLUMENTHAL. *Excursions of Markov processes.* Birkhäuser, Boston, 1992.

[8] R. BLUMENTHAL and R. GETOOR. Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments. *J. Math. and Mechanics*, 10(3):493–516, 1961.

[9] R. BLUMENTHAL and R. GETOOR. *Markov processes and potential theory.* Academic press, New York, 1968.

[10] D. A. DAWSON. Infinitely divisible random measures and superprocesses. In *Stochastic analysis and related topics*, pages 1–130. Birkhäuser, 1990.

[11] D. A. DAWSON. Measure-valued markov processes. In *École d'été de probabilité de Saint Flour 1991*, volume 1541 of *Lect. Notes Math.*, pages 1–260. Springer Verlag, Berlin, 1993.

[12] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. A continuous super-Brownian motion in a super-Brownian medium. To appear.

[13] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. Diffusion and reaction caused by point catalysts. *SIAM J. Appl. Math.*, 52(1):163–180, 1992.

[14] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. A super-Brownian motion with a single point catalyst. *Stoch. Process. and Appl.*, 49:3–40, 1994.

[15] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. Super-Brownian motion in higher dimensions with absolutely continuous measure states. *J. Theor. Probab.*, 8(1):179–206, 1995.

[16] D. A. DAWSON, K. FLEISCHMANN, Y. LI, and C. MUELLER. Singularity of super-Brownian local time at a point catalyst. *Ann. Probab.*, 23:37–55, 1995.

[17] D. A. DAWSON, K. FLEISCHMANN, and S. ROELLY. Absolute continuity of the measure states in a branching model with catalysts. In *Seminar on Stoch. Process 1990*, pages 117–160. Birhäuser, Boston, 1991.

[18] D. A. DAWSON, I. ISCOE, and E. PERKINS. Super-Brownian motion: path properties and hitting probabilites. *Probab. Th. Rel. Fields*, pages 135–20, 1989.

[19] D. A. DAWSON and E. PERKINS. Historical processes. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 93(454), 1991.

[20] D. A. DAWSON and V. VINOGRADOV. Almost sure path properties of $(2, d, \beta)$-superprocesses. *Stoch. Process. and Appl.*, 51:221–258, 1994.

[21] E. DERBEZ and G. SLADE. Lattice trees and super-Brownian motion. *Canad. Math. Bull.*, 1996. To appear.

[22] E. DERBEZ and G. SLADE. The scaling limit of lattice trees in high dimension. Preprint, 1996.

[23] E. DYNKIN. Representation for functionals of superprocesses by multiple stochastic integrals, with application to self-intersection local times. *Astérisque*, 157-158:1147–1171, 1988.

[24] E. DYNKIN. Branching particle systems and superprocesses. *Ann. Probab.*, 19:1157–1194, 1991.

[25] E. DYNKIN. A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations. *Probab. Th. Rel. Fields*, 89:89–115, 1991.

[26] E. DYNKIN. Superprocesses and parabolic differential equations. *Ann. Probab.*, 20:942–962, 1992.

[27] E. DYNKIN. Superprocesses and partial differential equations. *Ann. Probab.*, 21:1185–1262, 1993.

[28] E. DYNKIN. *An introduction to branching measure-valued processes*, volume 6 of *CRM Monograph series*. Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[29] K. FALCONER. *Fractal geometry*. Wiley, New York, 1990.

[30] P. FITZSIMMONS. Construction and regularity of measure-valued Markov branching processes. *Israel J. Math.*, 64:337–361, 1988.

[31] K. FLEISCHMANN. Critical behavior of some measure-valued processes. *Math. Nachr.*, 135:131–147, 1988.

[32] K. FLEISCHMANN and J.-F. LE GALL. A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 102:63–82, 1995.

[33] B. FRISTEDT. Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments. In *Advances in probability*, volume 3, pages 241–396. Dekker, New York, 1974.

[34] R. GETOOR. On the construction of kernels. In *Séminaires de probabilités IX*, volume 465 of *Lect. Notes Math.*, pages 443–463. Springer Verlag, Berlin, 1974.

[35] R. GETOOR. The Brownian escape process. *Ann. Probab.*, 7(5):864–867, 1979.

[36] K. ITÔ and H. P. McKean. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[37] J.-P. KAHANE. *Some random series of functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1985.

[38] J.-F. LE GALL. A class of path-valued Markov processes and its applications to superprocesses. *Probab. Th. Rel. Fields*, 95:25–46, 1993.

[39] J.-F. LE GALL. Hitting probabilities and potential theory for the Brownian path-valued process. *Ann. Inst. Four.*, 44:277–306, 1994.

[40] J.-F. LE GALL. A path-valued Markov processes and its connections with partial differential equations. In *Proceedings in First European Congress of Mathematics*, volume II, pages 185–212. Birkhäuser, Boston, 1994.

[41] J.-F. LE GALL. The Brownian snake and solutions of $\delta u = u^2$ in a domain. *Probab. Th. Rel. Fields*, 102:393–432, 1995.

[42] J.-F. LE GALL. Brownian snakes, superprocesses and partial differential equations. In preparation.

[43] J.-F. LE GALL. Communication personnelle.

[44] B. MAISONNEUVE. Exit systems. *Ann. Probab.*, 3:399–411, 1975.

[45] S. MELEARD and S. ROELLY-COPPOLETTA. A generalized equation for a continuous measure branching process. In *Stochastic partial differential equations and applications (Trento 1988)*, volume 1390 of *Lect. Notes Math.*, pages 171–185. Springer, Berlin, 1989.

[46] J. NEVEU. Arbres et processus de Galton-Watson. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 22:199–207, 1986.

[47] R. PEMANTLE and Y. PERES. Galton-Watson trees with the same mean have the same polar sets. *Ann. Probab.*, 23(3):1102–1124, 1995.

[48] R. PEMANTLE, Y. PERES, and J. W. SHAPIRO. The trace of spatial Brownian motion is capacity-equivalent to the unit square. *Probab. Th. Rel. Fields*, 106(3):379–400, 1996.

[49] E. PERKINS. A space-time property of a class of measure-valued branching diffusions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 305(2), 1988.

[50] E. PERKINS. The Hausdorff measure of the closed support of super-Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 25(2):205–224, 1989.

[51] E. PERKINS. On the continuity of measure-valued processes. In *Seminar on Stochastic Processes 1990*, volume 24, pages 261–268. Birkhaüser, 1991.

[52] E. PERKINS. Measure-valued branching diffusions and interactions. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1036–1045. Birkhäuser, Basel, 1995.

[53] S. C. PORT and C. J. STONE. *Brownian motion and classical potential theory.* Academic Press, 1978.

[54] D. REVUZ and M. YOR. *Continuous martingales and Brownian motion.* Springer Verlag, Heidelberg, 1991.

[55] W. RUDIN. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, third edition, 1986.

[56] S. D. TALIAFERRO. Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \phi(t)\ y^\lambda$. *J. Math. Analys. and Appl.*, 66:95–134, 1978.

[57] R. TRIBE. *Path properties of superprocesses.* PhD thesis, University of British Columbia, 1989.

[58] R. TRIBE. The connected components of the closed support of super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 89:75–87, 1991.

[59] R. TRIBE. A representation for super-Brownian motion. *Stoch. Process. and Appl.*, 51:207–219, 1994.

[60] J. WALSH. An introduction to stochastic partial differential equations. In *École d'été de Saint-Flour XIV (1984)*, volume 1180 of *Lect. Notes Math.*, pages 266–439. Springer, 1986.

[61] S. WATANABE. A limit theorem of branching and continous state branching processes. *J. Math. Kyoto Univ.*, 8(1):141–167, 1968.

[62] X.-L. ZHAO. Some absolute continuities of superdiffusions and super-stable processes. *Stoch. Process. and Appl.*, 50:21–35, 1994.