

Méthodologies pour la commande de manipulateurs mobiles non-holonomes

Matthieu Fruchard

▶ **To cite this version:**

Matthieu Fruchard. Méthodologies pour la commande de manipulateurs mobiles non-holonomes. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005. Français. NNT : . tel-00010344

HAL Id: tel-00010344
https://pastel.hal.science/tel-00010344

Submitted on 30 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

préparée à

L'INRIA Sophia Antipolis

et présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS - SOPHIA ANTIPOLIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité

Informatique Temps Réel, Automatique et Robotique

soutenue publiquement par

Matthieu FRUCHARD

Sujet de la thèse :

Méthodologies pour la commande de manipulateurs mobiles non-holonomes

le 23 septembre 2005 devant le jury composé de :

M.	**Yves**	**ROUCHALEAU**	Président
MM.	**Wisama**	**KHALIL**	Rapporteurs
	Marc	**RENAUD**	
MM.	**Guy**	**CAMPION**	Examinateurs
	Pascal	**MORIN**	
	Claude	**SAMSON**	Directeur de Thèse

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Yves Rouchaleau d'avoir accepté la présidence de mon jury de thèse. Merci également à Messieurs Wisama Khalil et Marc Renaud pour leur consciencieux travail de rapporteurs, et à Monsieur Guy Campion pour avoir examiné ma thèse.

Je remercie Claude Samson, mon directeur de thèse, qui a su m'encadrer sans m'enfermer et se montrer patient durant ces trois années. Je remercie tout spécialement Pascal Morin pour son écoute, son attention et ses lumières qui furent bien nécessaires à la réalisation de ce travail.

Un merci tout spécial aux membres du projet non-H du programme ROBEA : Marc Renaud, Florent Lamiraux, Bernard Bayle, Vincent Padois, Jean-Yves Fourquet et Pascale Chiron, pour la richesse de nos échanges et la convivialité de ce projet de trois ans.

Merci aussi à tous les membres permanents du projet ICARE avec qui j'ai partagé ces lieux : Ezio, Patrick, Agnès, Patricia et Christel, et bien évidemment à mes corrélégionnaires de passage : Guillaume, Alex, Selim, Christopher, Nicolas, Alessandro, FX, Vincent, Mauro, Géraldo et Doo Jin, ... et les nombreux oiseaux de passage dans mon bureau, qui ont partagé leur savoir, leur angoisses métaphysiques et leurs rires. Un grand merci général à ceux et celles qui ont su élever la rencontre à la machine à café au rang du joyeux rituel, et le co-voiturage en Marguerite au rang de franche rigolade.

Enfin, un Nénorme merci aux Canards inséparables, toujours proches et unis malgré la distance pour leur indéfectible amitié, merci à Anne, au Nico, au Djé, et à tous ceux et celles qui comptent pour moi. Merci à mes parents, frères et p'tite sœur, évidemment. Merci au Tono pour de rire, et j'arrête, sinon je n'en finirais pas !

Résumé

Cette thèse se place dans le cadre de la commande des manipulateurs mobiles hybrides holonomes/ non-holonomes, c'est-à-dire des robots constitués d'un bras manipulateur embarqué sur une plate-forme porteuse. L'objectif de ce travail est de fournir un cadre méthodologique pour la synthèse de lois de commande par retour d'état de tels systèmes, en partant du constat qu'une stratégie de coordination entre la plate-forme et le manipulateur requiert génériquement de commander la situation complète de la plate-forme. L'originalité des deux nouvelles approches proposées est de permettre un contrôle coordonné d'une tâche prioritaire de manipulation et d'une tâche secondaire de locomotion, obtenu via la *stabilisation pratique* de la situation *complète* de la plate-forme le long d'une trajectoire de référence quelconque.

Ces deux méthodes génériques s'appuient sur la fusion de deux outils de commande : l'approche par *fonctions de tâches*, dédiée au contrôle des bras manipulateurs, et l'approche par *fonctions transverses*, consacrée à la commande des plates-formes non-holonomes. Différentes applications de suivi de cible valident la flexibilité et la polyvalence de ces approches de commande à travers le choix de plusieurs stratégies de coopération entre manipulation et locomotion.

« Marco Polo décrit un pont, pierre par pierre.
- Mais laquelle est la pierre qui soutient le pont ? demande Kublai Khan.
- Le pont n'est pas soutenu par telle ou telle pierre, répond Marco, mais par la ligne de l'arc qu'à elles toutes elles forment.
Kublai Khan reste silencieux, il réfléchit. Puis il ajoute :
- Pourquoi me parles-tu des pierres ? C'est l'arc seul qui m'intéresse.
Polo répondit :
- Sans pierres, il n'y a pas d'arc. »

Italo Calvino, Les Villes Invisibles.

Table des matières

Résumé **c**

Contexte et positionnement du problème **1**

1 Problématiques associées aux manipulateurs mobiles 1

2 Repères bibliographiques sur la commande des robots manipulateurs mobiles 3

2.1 Commande des manipulateurs 3

2.2 Commande des véhicules non-holonomes 4

2.3 Commande des manipulateurs mobiles 6

3 Contributions 8

4 Contenu des chapitres 9

1 Notations, modélisation, et rappels de géométrie différentielle **11**

1.1 Introduction 12

1.2 Notations et rappels de géométrie différentielle 12

1.2.1 Cas général des variétés différentielles 12

1.2.2 Cas particulier des groupes de Lie 13

1.2.3 Exemple : le groupe de Lie SE(2) 15

1.3 Modélisation des manipulateurs mobiles 18

1.3.1 Hypothèses de modélisation 18

1.3.2 Modélisation cinématique des manipulateurs 20

1.3.3 Modélisation cinématique des plates-formes mobiles 20

1.3.4 Modèle cinématique d'un manipulateur mobile 30

2 Fonctions transverses et repère compagnon omnidirectionnel **33**

2.1 Introduction 34

2.2 Coordination et objectifs de commande pour la plate-forme 34

2.2.1 Problématique 35

2.2.2 Stabilisation pratique 37
2.3 Fonctions transverses 39
2.3.1 Cas général des systèmes sans dérive affines en la commande . . . 39
2.3.2 Cas des systèmes sur un groupe de Lie 41
2.4 Concept de repère compagnon omnidirectionnel 44
2.4.1 Cas d'une plate-forme de type unicycle 45
2.4.2 Cas d'une plate-forme de type voiture 47
2.5 Conclusion 50

3 Approche de commande par système omnidirectionnel équivalent 53
3.1 Introduction 54
3.2 Principe de l'approche 54
3.3 Fonctions de tâche pour les manipulateurs mobiles holonomes 57
3.3.1 Rappels sur l'approche par fonction de tâche 57
3.3.2 Tâche de manipulation et tâche globale 59
3.3.3 Synthèse de tâche globale par minimisation d'une fonction de coût 63
3.3.4 Synthèse de tâche globale par minimisation d'un coût secondaire sous contrainte 68
3.4 Synthèse de commande par système omnidirectionnel équivalent 69
3.4.1 Définition et existence de systèmes omnidirectionnels équivalents . 70
3.4.2 Application à la synthèse de lois de commande 73
3.5 Application au cas d'un bras RPR sur une plate-forme de type unicycle . 75
3.6 Conclusion 83

4 Approche générale de commande des manipulateurs mobiles 85
4.1 Introduction 86
4.2 Principe de l'approche 86
4.3 Indications pour le choix de la tâche de manipulation 89
4.4 Indications pour le choix du coût secondaire 91
4.4.1 Choix de la fonction de coût secondaire 91
4.4.2 Contrôle de la plate-forme mobile 92
4.5 Applications 97
4.5.1 Cas d'un bras RPR sur une plate-forme de type unicycle 97
4.5.2 Cas d'un bras RP sur une plate-forme de type unicycle 117
4.5.3 Cas d'un bras RPR sur une plate-forme de type voiture 126
4.6 Conclusion 135

Conclusion **137**
1 Contributions 137
2 Perspectives 138

A Annexes **141**
A.1 Annexes du Chapitre 1 141
A.1.1 Preuve de la Proposition 1 141
A.1.2 Preuve de la Relation (1.4) 142
A.2 Annexe du Chapitre 2. Preuve de la Proposition 2 142
A.3 Annexes du Chapitre 3 143
A.3.1 Preuve du Lemme 3 143
A.3.2 Preuve de la Proposition 6 144
A.3.3 Preuve de la Proposition 9 145

Bibliographie **157**

Table des figures

1.1 Roue verticale sur le plan 22
1.2 Véhicule de type unicycle 24
1.3 Voiture 28
1.4 Manipulateur mobile plan 31

2.1 Illustration de la transversalité 40

3.1 Système omnidirectionnel équivalent 55
3.2 Manipulateur plan deux axes sur base fixe 57
3.3 Suivi dans $SE(2)$ 61
3.4 Illustration de l'hypothèse (3.29) de la Proposition 9 72
3.5 Trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. 79
3.6 Norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation. 80
3.7 Vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile. 81
3.8 Vitesse angulaire ω_b de la plate-forme mobile. 82

4.1 Trajectoire de la cible n° 1 : trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. 105
4.2 Trajectoire de la cible n° 1 : norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation. 106
4.3 Trajectoire de la cible n° 1 : vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile. 107
4.4 Trajectoire de la cible n° 1 : vitesse ω_b de la plate-forme mobile. 108
4.5 Trajectoire de la cible n° 1 : fonction de coût secondaire h_s. 109
4.6 Trajectoire de la cible n° 2 : trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. 112
4.7 Trajectoire de la cible n° 2 : norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation. 113
4.8 Trajectoire de la cible n° 2 : vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile. 114

4.9 Trajectoire de la cible n° 2 : vitesse ω_b de la plate-forme mobile. 115
4.10 Trajectoire de la cible n° 2 : fonction de coût secondaire h_s. 116
4.11 Suivi dans $\mathbb{R}^2$ 117
4.12 Trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. 121
4.13 Norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation. 122
4.14 Vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile. 123
4.15 Vitesse ω_b de la plate-forme mobile. 124
4.16 Fonction de coût secondaire h_s. 125
4.17 Suivi dans SE(2) 126
4.18 Projections des fonctions transverses (2.7) et (2.24) 128
4.19 Trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. 130
4.20 Norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation. 131
4.21 Vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile de type voiture. 132
4.22 Vitesse v_φ de l'angle volant. 133
4.23 Fonction de coût secondaire h_s. 134

Contexte et positionnement du problème [1]

1 Problématiques associées aux manipulateurs mobiles

L'objectif de ce mémoire est la conception de méthodologies de synthèse de lois de commande réactives pour des manipulateurs mobiles non-holonomes, constitués de bras manipulateurs portés par des plates-formes mobiles non-holonomes. Le cadre applicatif récurrent est l'exécution de tâches de manipulation par l'organe terminal du manipulateur, en profitant de l'extension du domaine de travail qui résulte de la mobilité de la plate-forme mobile.

Historiquement, les premiers robots produits en masse furent les bras manipulateurs, aujourd'hui très répandus dans l'industrie. L'émergence de cadres méthodologiques généraux, au début des années 1990, montre la maturité actuelle de la théorie de la commande réactive de ces mécanismes holonomes (Khatib, 1987; Samson et al., 1991). Ces systèmes répondent à la capacité d'action sur l'environnement à travers la réalisation de tâches de manipulation comme la saisie d'objets, l'assemblage de pièces, etc. Ils sont néanmoins fortement limités dans leur espace de travail opérationnel, et dans le type de tâches réalisables. La robotique mobile a d'abord été développée en vue d'opérations de maintenance ou de surveillance, notamment en milieu hostile, en équipant des plates-formes mobiles de capteurs (caméras, détecteurs de gaz, de radioactivité, etc ...). Naturellement, le besoin de robots ayant à la fois des capacités de locomotion et de manipulation a conduit à la réalisation de manipulateurs mobiles. Des exemples courants de manipulateurs mobiles,

1. Ce travail de thèse a été réalisé dans le cadre du projet « Commande de manipulateurs mobiles non-holonomes » du programme ROBEA, soutenu conjointement par le CNRS et l'INRIA.

plus ou moins automatisés, sont les grues montées sur camions, les bras de satellites, les sous-marins d'exploration des fonds marins ou encore les véhicules d'exploration extra-planétaires. Traditionnellement, l'exploitation de tels systèmes repose sur une mise en œuvre en deux temps : *1)* une phase de transport, où seuls sont utilisés les degrés de mobilité de la plate-forme, afin d'amener le bras manipulateur sur le site de manipulation, et *2)* une phase de manipulation pendant laquelle la base reste fixe, et où seuls les degrés de mobilité du bras sont utilisés. Actuellement, l'automatisation de ces systèmes est encore largement conçue sur ce principe de séparation fonctionnelle, et sur l'utilisation découplée des techniques de commande pour chacun des sous-systèmes.

Au delà de l'accroissement de l'espace opérationnel de l'organe terminal du bras, la nature des tâches exécutables par les manipulateurs mobiles est grandement étendue. En effet, comme le souligne Arai dans (Arai, 1997) avec une vision systémique, les degrés de liberté apportés par la plate-forme permettent d'étendre l'espace de manipulation et la dextérité du bras, et le manipulateur améliore la locomotion, e.g. à travers une meilleure appréhension de l'environnement grâce aux capteurs embarqués sur le bras, ou par l'élargissement du domaine de navigation (en écartant les obstacles ou en ouvrant les portes). L'étude de la commande des manipulateurs mobiles sous-tend celle de la coordination entre la locomotion et la manipulation. Pour des raisons de simplicité de synthèse de la commande, les travaux menés dans le sens de la coordination des mouvements de la base et du bras ont commencé dans le cadre des manipulateurs mobiles « holonomes », c'est-à-dire des manipulateurs embarqués sur des systèmes de transport pouvant se déplacer instantanément dans toutes les directions de leur espace de configuration. Ainsi ont paru les premières études sur un bras manipulateur monté sur un portique (Seraji, 1993), sur le bras d'un satellite en déplacement sur un plan (Papadopoulos et Dubowsky, 1991), ou sur des plates-formes omnidirectionnelles dans le plan. Cependant, il s'avère que les systèmes de transport les plus communs sont les véhicules à roues, lesquels sont sujets à des contraintes non-holonomes interdisant au véhicule de se déplacer instantanément dans certaines directions. En raison des difficultés théoriques associées à la commande réactive coordonnée des manipulateurs mobiles non-holonomes, les efforts de recherche qui lui ont été consacrés restent aujourd'hui peu nombreux, comme nous le verrons dans la section suivante, et nul cadre méthodologique un tant soit peu général et générique n'avait, à notre connaissance, encore été proposé.

2 Repères bibliographiques sur la commande des robots manipulateurs mobiles

Afin de situer notre travail dans la littérature existante, nous proposons un rappel des études menées dans le cadre de la manipulation mobile selon un classement thématique. Nous commençons par un très court rappel des problèmes de commande pour les manipulateurs à base fixe. Nous nous intéressons ensuite à la commande des robots mobiles non-holonomes. Enfin, nous donnons des repères bibliographiques concernant les manipulateurs mobiles et leur commande [2].

2.1 Commande des manipulateurs

Il est impossible, dans ce mémoire, de faire une synthèse –même partielle– des techniques de commande des bras manipulateurs, tant ce domaine recouvre de problématiques différentes. Outre les travaux liés à la modélisation (i.e. l'identification) (Khalil, 1978; Gorla et Renaud, 1984; Khalil et Dombre, 1999), et à la planification de mouvements (Brooks, 1983; Faverjon, 1984; Craig, 1986), le traitement de la redondance (Liégeois, 1977; Vukobratović et Kirćanski, 1984; Bailleul et al., 1984; Yoshikawa, 1985; Sciavicco et Siciliano, 1988), des singularités géométriques, la commande dynamique (Khalil et al., 1979; Luh et al., 1980), la commande par retour d'efforts (Withney, 1977; Withney, 1985; Boissonnat et al., 1988), et plus généralement la commande référencée capteurs (Espiau et al., 1992; Samson et al., 1991), sont autant de domaines de recherche qui mériteraient à eux seuls une synthèse bibliographique. En dehors des quelques références précitées, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages et articles de synthèse suivants : (Dombre et Khalil, 1988) pour la modélisation, la commande dynamique et adaptative, (Samson et al., 1991) pour le cadre méthodologique de synthèse de retours d'état par l'approche par fonctions de tâches, (Canudas de Wit et al., 1996) pour un état de l'art sur la modélisation et les techniques de commande des bras manipulateurs, (Siciliano, 1990; Yoshikawa, 1990) pour une synthèse des techniques de commande de manipulateurs redondants, et (Asada et Slotine, 1986) pour des synthèses de commandes dynamiques et le contrôle de tâches compliantes.

2. Pour de plus amples références bibliographiques, nous conseillons la consultation du site web du projet Non H du programme ROBEA : **http ://www-sop.inria.fr/icare/robea/index_robea.html**, où l'important travail de classification effectué par Marc Renaud et Bernard Bayle est mis en ligne.

2.2 Commande des véhicules non-holonomes

Parmi les techniques de commande des systèmes non-holonomes, nous établissons une distinction entre les techniques de commande en boucle ouverte, consacrées à la planification de trajectoires réalisables, et les lois de commande réactives.

En ce qui concerne la commande en boucle ouverte, une première approche repose sur l'utilisation de commandes oscillantes multi-fréquences qui permettent, par des effets de couplage, de produire des déplacements dans les directions données par les crochets de Lie des champs de commande du système. Ce principe de commande est latent dans les premières études de commandabilité des systèmes non-linéaires (Lobry, 1970; Haynes et Hermes, 1970), et a été appliqué à la planification au début des années 90. Un algorithme général de synthèse de commandes basé sur ce principe a été proposé dans (Sussmann et Liu, 1991). Il permet d'atteindre approximativement un point final désiré, avec une précision d'autant meilleure que les fréquences intervenant dans la commande sont élevées. Dans le cas de systèmes nilpotents [3], l'utilisation de hautes fréquences n'est plus nécessaire, et il est possible d'atteindre exactement le point final désiré (Murray et Sastry, 1991; Murray et Sastry, 1993; Murray et al., 1994; Teel et al., 1992). D'autres travaux ont étendu cette méthode à certaines classes de systèmes avec dérive (Bloch et al., 1990; Sussmann, 1991; Bullo et al., 2000). Enfin, une autre approche consiste à exploiter les propriétés de platitude [4] de certains systèmes (Fliess et al., 1995b; Rouchon et al., 1993; Rouchon, 2001) pour obtenir des commandes en boucle ouverte résolvant le problème de planification.

La littérature consacrée à la synthèse de commandes en boucle fermée s'articule autour de deux problématiques majeures : la stabilisation partielle (le plus souvent en position) et la stabilisation complète (i.e. à la fois en position et en orientation) de la situation d'un véhicule.

Pour ce qui est de la stabilisation d'une partie de la situation, nous pouvons d'abord évoquer la commande par retour de sortie, illustrée par exemple par (Samson et Ait-Abderrahim, 1991). Dans ce cas, l'objectif de stabilisation concerne *une partie* seulement de la situation en un point fixe (de la position seule ou bien d'une composante de la

3. Par systèmes nilpotents, nous entendons des systèmes dont les champs de commande sont tels que leurs crochets sont nuls à partir d'un certain rang, voir (Haynes et Hermes, 1970; Lafferriere et Sussmann, 1993) pour plus de détails.

4. Les systèmes plats se caractérisent par le fait que les entrées et l'état de ces systèmes peuvent s'exprimer en fonction de sorties particulières et de leurs dérivées successives, appelées sorties plates.

position et de l'orientation). Le problème du suivi de chemin entre également dans cette catégorie : il s'agit de suivre un repère en déplacement sur une courbe avec une vitesse d'avancement donnée (Nelson et Cox, 1988; Canudas de Wit et al., 1996).

La stabilisation de la situation complète d'un véhicule non-holonome fait apparaître deux problèmes principaux : la stabilisation de trajectoires réalisables non-stationnaires et la stabilisation en un point fixe. Concernant le premier problème, plusieurs méthodes ont été proposées. Une première approche, locale, consiste à synthétiser des retours d'état (linéaires) à partir du linéarisé du système d'erreur le long de cette trajectoire de référence ; une seconde méthode, plus globale, repose sur les approches de type Lyapunov (Kanayama et al., 1990; Samson et Ait-Abderrahim, 1991) ; enfin, une troisième approche est basée sur la linéarisation exacte entrée/ sortie des systèmes plats (d'Andréa Novel et al., 1995; Fliess et al., 1995a). Toutes ces méthodes reposent sur la commandabilité du linéarisé le long de trajectoires non-stationnaires (Sontag, 1992). Néanmoins, l'hypothèse d'excitation persistante sous-jacente, c'est-à-dire l'hypothèse que la trajectoire à stabiliser ne présente pas de point fixe, rend ces approches inadaptées dans le cas d'une trajectoire a priori inconnue.

L'autre problématique est la stabilisation des points fixes d'un système non-holonome. Ce problème est plus difficile. D'une part, le linéarisé de ces systèmes en un point fixe n'est jamais commandable. D'autre part, il n'existe pas de retours d'état purs permettant la stabilisation asymptotique de tels points (Brockett, 1983). Parmi les moyens de contourner ce dernier obstacle, trois types de commande ont été proposées. Une première approche repose sur l'utilisation de commandes discontinues (Canudas de Wit et Sørdalen, 1992). Ces retours d'état peuvent assurer la convergence vers le point d'équilibre, mais pas la stabilité de ce point, et donc pas la stabilité asymptotique (Bacciotti et Rosier, 2001). De plus, l'implémentation de telles commandes pose des difficultés sur le plan pratique. Les retours d'état instationnaires hybrides (continus par rapport au temps, et discontinus par rapport à l'état) (Bennani et Rouchon, 1995) et les retours d'état instationnaires (Samson, 1990; Coron, 1992; Pomet, 1992) constituent deux autres classes de commandes. Au sein de ces derniers, nous pouvons différencier les retours d'état Lipschitz continus (Samson, 1995) des retours seulement continus (M'Closkey et Murray, 1993; M'Closkey et Murray, 1997; Morin et al., 1999). Les premiers se caractérisent par une faible sensibilité aux bruits de mesure, et peuvent aussi avoir une robustesse correcte vis-à-vis des erreurs de modèle, mais ont l'inconvénient de mener à une convergence lente (souvent polynômiale) vers le point désiré. Les seconds conduisent à une convergence exponentielle, mais sont sensibles aux bruits et peu robustes (Lizárraga et al., 1999). Finalement, outre cette absence de compromis satisfaisant entre robustesse et vitesse de convergence, il a été

démontré dans (Lizárraga, 2004) qu'il n'existe pas de retour d'état universel (i.e. une loi de commande unique) instationnaire permettant la stabilisation asymptotique de toute trajectoire réalisable. Ces difficultés suggèrent que la stabilisation asymptotique de telles trajectoires n'est pas génériquement réalisable en pratique. On peut alors se demander s'il ne convient pas de relâcher cet objectif de commande au profit d'un objectif de *stabilisation pratique*. C'est ce qui a récemment été proposé avec l'approche par fonctions transverses dans (Morin et Samson, 2001a; Morin et Samson, 2003), qui permet aussi de traiter la stabilisation de trajectoires quelconques, c'est-à-dire réalisables ou non, via un retour d'état unique. Nous détaillerons plus précisément cette approche dans le corps du mémoire, et montrerons qu'elle permet de définir des outils pour la commande des manipulateurs mobiles.

2.3 Commande des manipulateurs mobiles

Comme nous l'avons évoqué en préliminaire, la commande des manipulateurs mobiles fait émerger la notion de coordination de mouvements entre la locomotion et la manipulation, que nous approfondissons en premier lieu. Nous évoquons ensuite les méthodes associées à la commande en boucle ouverte. Enfin, nous discutons les différentes approches de commande réactive des manipulateurs mobiles.

La coopération du bras et de la base a suscité de nombreuses publications, et s'est rapidement posé le problème de définir un critère permettant d'évaluer quantitativement la coordination entre locomotion et manipulation. Ainsi les concepts de manipulabilité du bras (Yoshikawa, 1985) et de mobilité de la plate-forme ont été regroupés dans la notion de dextérité [5] du manipulateur mobile (Foulon et al., 1997; Bayle et al., 2001b; Tchoń et Muszyński, 2000; Tchoń et Zadarnowska, 2003), qui fournit un critère dont l'optimisation permet un contrôle coordonné de la plate-forme et du bras (Bayle, 2001). Les travaux sur les manipulateurs mobiles holonomes (Papadopoulos et Dubowsky, 1991; Khatib et al., 1996), assimilables à des bras manipulateurs de dimension étendue, ont fait apparaître une hiérarchie naturelle entre la plate-forme omnidirectionnelle aux dynamiques lentes, et le bras embarqué au positionnement plus précis et aux dynamiques plus rapides. La stratégie de coordination repose sur une relation de type maître / esclave (Luksch et al., 2003) entre manipulation et locomotion. Il s'agit d'utiliser la locomotion afin de maintenir les variables

5. Une extension de cette notion cinématique dans le cadre des modèles dynamiques a été développée dans (Yamamoto et Yun, 1999), mais son application à la synthèse de commandes n'a pas été traitée.

articulaires du bras à mi-chemin de leurs butées (Khatib et al., 1996). Cette notion de situation préférentielle de la plate-forme mobile a également été employée dans le cadre de manipulateurs mobiles non-holonomes (Yamamoto et Yun, 1994; Yamamoto et Yun, 1996) pour maintenir le manipulateur autour d'une configuration où sa manipulabilité est importante.

Une part importante de la littérature est dédiée aux méthodes de planification de trajectoire, c'est-à-dire aux approches de prédétermination d'une solution prenant en compte la structure de l'espace de travail de l'organe terminal et les contraintes sur la plate-forme. Les méthodes employées pour résoudre le problème sont variées : méthode d'optimisation numérique du recuit simulé (Carriker et al., 1991), utilisation de l'optimisation sous contrainte (Perrier et al., 1998; Furuno et al., 2003), notamment du critère de dextérité dans (Bayle et al., 2000), ou dans le cadre de la commande optimale (Desai et al., 1996) (voir e.g. (Bayle et al., 2001a) pour un état de l'art). Notons l'apport du concept de bande élastique proposé par Quinlan (Quinlan et Khatib, 1993; Quinlan, 1994) pour les plates-formes omnidirectionnelles, étendu au manipulateurs mobiles (Brock et Khatib, 1997) et aux plates-formes non-holonomes (Lamiraux et Bonnafous, 2002), qui propose un lien entre planification et commande. Cette approche permet, en fonction de la présence éventuelle d'obstacles, de déformer en temps réel une trajectoire planifiée par avance, ce qui pallie le manque de réactivité des méthodes de planification classiques.

Intéressons-nous maintenant aux commandes réactives. Etant donné qu'il est génériquement impossible de stabiliser asymptotiquement la situation complète d'une plate-forme non-holonome le long d'une trajectoire de référence quelconque, les lois de commande par retour d'état proposées jusqu'ici dans la littérature conduisent à un contrôle partiel de l'état du manipulateur mobile (plus précisément un contrôle de la situation de l'effecteur du manipulateur et d'une partie de la situation de la plate-forme). Les contributions en ce sens sont par exemple les travaux de (Yamamoto et Yun, 1994) pour une commande en position de la plate-forme par linéarisation entrée-sortie, (Egerstedt et Hu, 2000) pour une commande plus nettement découplée où le contrôle de la plate-forme repose sur le suivi d'un chemin de référence (voir à ce sujet (Canudas de Wit et al., 1996)), ou encore (Miksch et Schroeder, 1992; Wang et Kumar, 1993) pour une approche de minimisation fonctionnelle sous contrainte via les conditions d'optimalité de Lagrange. Citons aussi l'utilisation de l'optimisation sous contrainte du critère de dextérité utilisé dans (Bayle et al., 2001b). Des approches héritées du formalisme des bras manipulateurs, sans découplage entre base mobile et bras manipulateur, ont également été développées dans (Seraji, 1998; Bayle et al., 2002) avec l'utilisation de tâches additionnelles. Toutes ces méthodes s'appuient sur le fait qu'un contrôle partiel de la situation de la base peut

se montrer suffisant pour les tâches de manipulation considérées. Cependant, dès que la stratégie de coordination impose à la plate-forme d'effectuer des manœuvres (par exemple afin d'éviter les butées articulaires du manipulateur), un contrôle de la situation complète de la plate-forme est nécessaire. C'est la raison pour laquelle une approche générique pour la commande réactive des manipulateurs mobiles requiert de commander la plate-forme à la fois en position et en orientation, problème qui, à notre connaissance, n'a pas été traité jusqu'à présent. Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans cette logique.

3 Contributions

Le travail effectué durant cette thèse a essentiellement contribué à l'extension des approches de commande pour des bras manipulateurs au cas plus général des manipulateurs mobiles hybrides, c'est-à-dire composés d'un bras manipulateur et d'une plate-forme porteuse omnidirectionnelle ou non-holonome, et au développement de lois de commande non-linéaires pour la réalisation d'objectifs coordonnés de manipulation. Plus particulièrement, notre travail a apporté les contributions suivantes :

- Apports conceptuels :
  1. En premier lieu, nous avons exploité l'approche par fonctions transverses pour associer à une plate-forme non-holonome un « repère compagnon » arbitrairement proche du repère attaché à la plate-forme, et avons montré son omnidirectionnalité. Cet outil est la base des approches de commande que nous avons développées.
  2. Nous avons étendu le principe de repère compagnon à travers la définition locale et implicite d'un « système virtuel omnidirectionnel équivalent » associé au manipulateur mobile non-holonome et à une tâche de manipulation.
- Apports méthodologiques : nous avons développé deux méthodologies pour la synthèse de lois de commande par retour d'état pour les manipulateurs mobiles.
  1. Une première méthodologie a été développée sur la base du concept de système omnidirectionnel équivalent. Cette approche est la fusion d'une méthodologie dédiée à la commande de systèmes holonomes, l'approche par fonctions de tâches, avec l'approche par fonctions transverses.
  2. Notre contribution majeure réside dans le développement d'une seconde approche de commande plus générique, et plus facile à mettre en oeuvre. Cette méthodologie de commande repose sur une stratégie donnant structurellement une priorité plus importante à la tâche de manipulation, et permet une plus

grande liberté dans le choix des objectifs de locomotion. Cette polyvalence a été testée et validée par des résultats de simulations.

- Ces approches de commande sont nourries par des exemples de manipulateurs plans embarqués sur une plate-forme de type unicycle, mais la portée de ces méthodologies est plus vaste :
  1. Ces approches s'étendent par exemple sans modification majeure au cas de plates-formes de type voiture, comme le corroborent les simulations menées en ce sens.
  2. De plus, l'intérêt majeur de ces approches réside dans le fait que la synthèse de la loi de commande est très peu dépendante de la plate-forme.

Ces travaux ont fait l'objet d'un rapport de recherche (Fruchard et al., 2005a) et d'une soumission d'article (Fruchard et al., 2005b). Le financement de cette thèse par le programme ROBEA a également été une opportunité de travailler en collaboration avec d'autres chercheurs et laboratoires, et de présenter, enrichir, et promouvoir ces approches nouvelles.

4 Contenu des chapitres

Outre cette introduction qui fait office à la fois de motivation et de présentation générale du problème, le manuscrit se compose de quatre chapitres organisés comme suit :

Chapitre 1 : Ce premier chapitre a pour vocation de présenter les outils nécessaires au développement de nos approches de commande. Il rappelle des outils de géométrie différentielle, et notamment des notions relatives au groupes de Lie, utiles à la modélisation des plates-formes porteuses. Nous rappelons également les propriétés de commandabilité de ces véhicules.

Chapitre 2 : Ce chapitre est essentiellement consacré à la commande de la plate-forme. Après un rappel de la problématique de la commande par retour d'état des systèmes non-holonomes, et de l'approche par fonctions transverses proposée dans (Morin et Samson, 2001a; Morin et Samson, 2003), nous présentons le concept de base de nos approches de commande, c'est-à-dire celui de repère compagnon associé à une plate-forme porteuse. Ce concept permet d'associer conceptuellement à un véhicule non-holonome un repère omnidirectionnel et arbitrairement proche du repère lié à la plate-forme, lequel sera commandé en lieu et place de la plate-forme.

Chapitre 3 : Ce chapitre est consacré à l'adaptation de l'approche par fonctions de tâches, développée pour la synthèse de lois de commande par retour d'état des manipulateurs, au cas des manipulateurs mobiles hybrides, i.e. dont la base mobile est non-holonome. Après avoir adapté ce cadre méthodologique aux manipulateurs mobiles holonomes, c'est-à-dire mûs par une plate-forme omnidirectionnelle, nous montrons sous quelles hypothèses il est possible de trouver un manipulateur mobile virtuel, holonome, et voisin du manipulateur mobile non-holonome, équivalent à ce dernier par rapport à une tâche de manipulation donnée. Cette approche par système omnidirectionnel équivalent est illustrée par des résultats de simulations.

Chapitre 4 : Finalement, nous donnons une seconde méthodologie de synthèse de lois de commande des manipulateurs mobiles par retour d'état, plus générique et plus facile à implémenter que la précédente. Cette approche permet notamment de garantir plus efficacement l'évitement des butées articulaires du bras. Nous montrons comment cette approche de commande peut être employée pour la mise en œuvre de différentes stratégies de coordination entre le bras manipulateur et la plate-forme, et illustrons cette flexibilité par des résultats de simulations pour différents types de manipulateurs mobiles.

Chapitre 1

Notations, modélisation, et rappels de géométrie différentielle

Contenu du chapitre

1.1 Introduction 12

1.2 Notations et rappels de géométrie différentielle 12

1.2.1 Cas général des variétés différentielles 12

1.2.2 Cas particulier des groupes de Lie 13

1.2.3 Exemple : le groupe de Lie SE(2) 15

1.3 Modélisation des manipulateurs mobiles 18

1.3.1 Hypothèses de modélisation 18

1.3.2 Modélisation cinématique des manipulateurs 20

1.3.3 Modélisation cinématique des plates-formes mobiles 20

1.3.3.1 Dérivation du modèle cinématique 21

1.3.3.2 Propriétés de symétrie et décomposition du modèle cinématique 26

1.3.3.3 Repère mobile de référence et modèle d'erreur 30

1.3.4 Modèle cinématique d'un manipulateur mobile 30

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de fournir les outils nécessaires à la présentation de notre approche de commande. Nous commençons par rappeler, en Section 1.2, quelques éléments de géométrie différentielle. En particulier, des notions relatives aux groupes de Lie, utiles à la modélisation des systèmes mécaniques, sont ici introduites. Nous abordons ensuite en Section 1.3 la modélisation des manipulateurs mobiles en présentant les principales notions liées à la commandabilité des plates-formes souvent non-holonomes de ces manipulateurs mobiles.

1.2 Notations et rappels de géométrie différentielle

1.2.1 Cas général des variétés différentielles

Rappelons qu'une variété différentielle N de dimension n est essentiellement un espace topologique tel que tout point $z \in N$ possède un voisinage difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ (pour une définition plus complète, voir par exemple (Warner, 1983)). Pour la terminologie française, nous conseillons (Berger et Gostiaux, 1987; Lafontaine, 1996).

- L'espace tangent à N en un point z est noté $T_z(N)$. Par extension, nous noterons $T(N)$ le fibré tangent à N, c'est-à-dire l'ensemble $\bigcup_{z\in N} T_z(N)$.
- La frontière d'un espace K est notée $\mathrm{F}_r(K)$, son intérieur $\mathrm{Int}(K)$, et son adhérence $\bar{K}$.
- La différentielle d'une fonction régulière[1] f au point z est notée $df(z)$.
- $\mathbb{T}^d$ désigne le tore de dimension d, avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$, c'est-à-dire $\mathbb{T}^d = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{d \text{ fois}}$.
- $\mathcal{B}_N(z_0, \rho)$ désigne la boule fermée de N, de centre z_0 et de rayon ρ, c'est-à-dire $\mathcal{B}_N(z_0, \rho) = \{z : \mathrm{d}(z, z_0) \leqslant \rho\}$ où d est une distance riemannienne.
- Un champ de vecteurs sur N est une application régulière de N dans $T(N)$. L'ensemble des champs de vecteurs sur N est noté $\mathcal{X}(N)$.
- Nous utilisons la définition d'algèbre de Lie donnée dans (Warner, 1983, Prop. 1.45), que nous rappelons ici :
  Une algèbre de Lie $\mathfrak{L}$ est un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire de

1. Sauf mention contraire, régulier signifie infiniment différentiable, i.e. $\mathcal{C}^\infty$.

$\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$ qui, à deux éléments X, Y de $\mathfrak{L}$, associe le « crochet de Lie » $[X, Y]$. Outre la bilinéarité, le crochet vérifie les deux propriétés suivantes :
- Antisymétrie : $[X, Y] = -[Y, X],\ \forall X, Y \in \mathfrak{L}$;
- Identité de Jacobi : $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,\ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{L}$.

- $\mathcal{X}(N)$ est une algèbre de Lie avec le crochet de Lie $[X, Y]$ défini, dans un système de coordonnées y autour de z, par :

$$[X, Y](y) = \Big(\frac{\partial Y}{\partial y} X - \frac{\partial X}{\partial y} Y\Big)(y)$$

- Etant donné m champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m \in \mathcal{X}(N)$, $\mathcal{L}ie\{X_1, \cdots, X_m\}$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(N)$ engendrée par $X_1, \cdots, X_m$.
- Soit X un champ de vecteurs sur N et $z_0 \in N$. Nous notons $\exp(tX)(z_0)$ la solution (si elle existe) à l'instant t de l'équation différentielle $\dot{z} = X(z),\ z(0) = z_0$.

Bien que les notions de géométrie différentielle soient importantes pour définir les propriétés intrinsèques des systèmes mécaniques, il est nécessaire d'utiliser des systèmes de coordonnées lors des calculs. Afin de simplifier les notations, nous utiliserons le même symbole pour des variables appartenant à une variété, et pour des variables associées à un système de coordonnées (c'est-à-dire des variables dans $\mathbb{R}^n$). Par exemple, si $z \in N$ et f est une fonction régulière sur N, nous écrirons $(\partial f/\partial z)(z_0)$ quand nous devrions noter, pour être tout à fait correct, $(\partial f/\partial y)(y_0)$, où y est un système de coordonnées associant z_0 à y_0.

1.2.2 Cas particulier des groupes de Lie

Les notations suivantes portent sur les groupes de Lie (voir (Warner, 1983; Varadarajan, 1983) pour plus de détails sur ce sujet). Nous rappelons qu'un groupe de Lie G est une variété différentielle munie d'une opération de groupe régulière $(r, \tau) \mapsto r\tau$ et telle que l'application $(r, \tau) \mapsto r\tau^{-1}$ est aussi régulière.

- e désigne l'élément neutre de G pour l'opération de groupe, i.e. $\forall r \in G, re = er = r$.
- L'inverse d'un élément $r \in G$ est noté r^{-1}, c'est-à-dire $rr^{-1} = r^{-1}r = e$.
- Les opérateurs de translation à gauche et à droite par un élément $r \in G$ sont notés respectivement L_r et R_r, c'est-à-dire $L_r(\tau) = r\tau$ et $R_r(\tau) = \tau r$.
- Un champ de vecteurs X sur G est *invariant à gauche* si :

$$\forall r \in G, \qquad dL_r(e)\ X(e) = X(L_r(e)) = X(r)$$

- L'ensemble des champs de vecteurs sur G invariants à gauche est une sous-algèbre de $\mathcal{X}(G)$. Cet ensemble noté $\mathfrak{g} = T_e(G)$ est appelé *algèbre de Lie* du groupe G. La dimension de cette algèbre (en tant que $\mathbb{R}-$espace vectoriel) est finie, égale à $n = \dim G$.
- Un système de commande $\dot{r} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(r)$, avec $r \in G$, est un *système sur un groupe de Lie* (invariant à gauche), si les champs de vecteurs X_i du système de commande sont invariants à gauche. Du point de vue des trajectoires, cela signifie que pour tout élément τ de G fixé, et pour toute solution $r(.)$ du système de commande associée à la commande $u(.)$, $\tau r(.)$ est aussi solution du système pour la même commande $u(.)$.
- La représentation adjointe de G est notée Ad. Plus précisément, $\forall r \in G, \mathrm{Ad}_r = dI_r(e)$ avec $I_r : G \to G$ la bijection définie par $I_r(\tau) = r\tau r^{-1}$.

Proposition 1 *Soit $r \in G$, on montre facilement que* Ad_r *peut s'écrire :*

$$\mathrm{Ad}_r = dR_{r^{-1}}(r)dL_r(e) = dL_r(r^{-1})dR_{r^{-1}}(e) \tag{1.1}$$

Une preuve de ce résultat classique de la théorie des groupes de Lie est donnée en Annexe A.1.1.

Remarque 1 Par extension, nous noterons Ad_r^X, avec $\{X\} = \{X_1, \cdots, X_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$, l'application à valeur matricielle définie par

$$\forall r \in G,\ \forall u \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{Ad}_r X(e)u = X(e)\mathrm{Ad}_r^X u \tag{1.2}$$

avec le champ de vecteurs $X(r)u = \sum_{i=1}^{n} u_i X_i(r)$. Nous omettrons toutefois la référence à la base $\{X\}$ de $\mathfrak{g}$ lorsque cette base sera clairement identifiée et noterons alors abusivement Ad_r, alors qu'il faudrait noter Ad_r^X.

Intéressons-nous maintenant aux relations cinématiques sur un groupe de Lie. Soient $(r_j, u^j) \in G \times \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, 2\}$, deux solutions d'un système sur un groupe de Lie G :

$$\dot{r}_j = X(r_j)u^j = \sum_{i=1}^{n} u_i^j X_i(r_j) \tag{1.3}$$

avec $\{X\}$ une famille de champs de vecteurs formant une base de $\mathfrak{g}$. Alors, en dérivant l'égalité $rr^{-1} = e$ et en utilisant les relations (1.1) et (1.2), on obtient les relations

suivantes (voir Annexe A.1.2 pour un détail du calcul) :

$$\dot{\overbrace{r_i^{-1}}} = -X(r_i^{-1})\mathrm{Ad}^X_{r_i} u^i \tag{1.4}$$

$$\dot{\overbrace{r_1 r_2^{-1}}} = X(r_1 r_2^{-1})\mathrm{Ad}^X_{r_2}(u^1 - u^2) \tag{1.5}$$

et

$$\dot{\overbrace{r_1^{-1} r_2}} = X(r_1^{-1} r_2)(u^2 - \mathrm{Ad}^X_{r_2^{-1} r_1} u^1) \tag{1.6}$$

1.2.3 Exemple : le groupe de Lie SE(2)

Les notations matricielles suivantes sont utilisées tout au long de ce mémoire. La matrice identité dans $\mathbb{R}^n$ est notée I_n. $R(\theta)$, J, et $\bar{R}(\theta)$, sont les matrices de rotation définies par :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}(\theta) = \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etant donné une famille de scalaires $\{k_1, \cdots, k_n\}$, nous noterons $\mathrm{Diag}(k_1, \cdots, k_n)$ la matrice dans $\mathbb{R}^n$ dont tous les éléments sont nuls, exceptés les termes de la diagonale donnés par $k_1, \cdots, k_n$.

Nous illustrons maintenant les concepts introduits précédemment sur le groupe de Lie $G = SE(2)$. Le groupe spécial euclidien $SE(2)$ est le groupe des mouvements rigides dans le plan. C'est une variété de dimension $n = 3$. La situation d'un repère $\mathcal{F} = \{0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\}$ dans le plan par rapport à un repère de référence inertiel $\mathcal{F}_0$ peut être caractérisée par un élément de $SE(2)$. Le groupe $SE(2)$ étant isomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, la situation de $\mathcal{F}$ peut également être identifiée à un vecteur $r = (p^T, \theta)^T \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, où p est le vecteur de coordonnées de l'origine du repère dans la base du repère $\mathcal{F}_0$, et θ la différence d'orientation entre les repères $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}$. Dans la suite, nous ferons implicitement cette identification en assimilant r à un élément de $SE(2)$.

Étant donné deux repères quelconques du plan $\mathcal{F}_1 = \{O_1, \overrightarrow{\imath_1}, \overrightarrow{\jmath_1}\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{O_2, \overrightarrow{\imath_2}, \overrightarrow{\jmath_2}\}$, nous adoptons les notations suivantes. La « situation » (ou posture) de $\mathcal{F}_2$ par rapport à $\mathcal{F}_1$ est définie comme l'élément $r_{12} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ donné par :

$$r_{12} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ \theta_{12} \end{pmatrix}$$

où $p_{12} = (x_{12}, y_{12})^T$ est la composante de $\overrightarrow{O_1O_2}$ dans la base de $\mathcal{F}_1$, et θ_{12} l'angle orienté entre $\overrightarrow{\imath_1}$ et $\overrightarrow{\imath_2}$. Si $\mathcal{F}_1$ désigne le repère de référence $\mathcal{F}_0$ défini ci-dessus, $r_{12} = r_{02}$ est simplement appelée la « situation » de $\mathcal{F}_2$, et nous omettons l'indice 0, c'est-à-dire

$$r_{02} = r_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

L'application

$$\begin{pmatrix} p \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} R(\theta) & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

définit un isomorphisme de groupe entre $SE(2)$ et le groupe de Lie des matrices homogènes dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce dernier, l'opération de groupe est donnée par le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\theta_2) & p_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\theta_1 + \theta_2) & p_1 + R(\theta_1)p_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'opération de groupe sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 (\simeq SE(2))$ est donc définie par

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + R(\theta_1)p_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Par conséquent, l'élément neutre e de $SE(2)$ et l'inverse r^{-1} de $r = (p^T, \theta)^T$ sont donnés par

$$e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r^{-1} = \begin{pmatrix} -R(-\theta)p \\ -\theta \end{pmatrix}$$

Remarque 2 Comme l'opération de groupe joue le même rôle que l'addition dans $\mathbb{R}^n$, la « différence » entre deux éléments de $SE(2)$ est donnée par le produit de l'un des éléments par l'inverse de l'autre (et non par la différence terme-à-terme des composantes des deux vecteurs). Par exemple, la différence entre r_2 et r_1 est $r_{12} = (r_1)^{-1} r_2 = r_{10} r_{02}$; rappelons que r_{12} désigne la situation du repère $\mathcal{F}_2$ par rapport au repère $\mathcal{F}_1$, exprimée dans la base de $\mathcal{F}_1$. En raison de la non-commutativité de l'opération de groupe, l'ordre des éléments dans le produit est important, et on peut former plusieurs « différences » entre deux mêmes éléments de SE(2). Par exemple $r_{21} = (r_2)^{-1} r_1 = r_{20} r_{01} = r_{12}^{-1}$ caractérise la situation du repère $\mathcal{F}_1$ par rapport à $\mathcal{F}_2$, exprimée dans la base de $\mathcal{F}_2$.

Une distance possible entre deux repères $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) := \mathrm{d}(r_1, r_2) & := & \sqrt{\|p_1 - p_2\|^2 + 2(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2))} \\ & = & \sqrt{\|p_{12}\|^2 + 2(1 - \cos\theta_{12})} \end{array} \tag{1.8}$$

avec $\|.\|$ la norme euclidienne (ici sur $\mathbb{R}^2$). Il est utile de remarquer que la dernière égalité dans (1.8) indique que la distance d est invariante à gauche sur $SE(2)$, c'est-à-dire que $\mathrm{d}(r_1, r_2) = \mathrm{d}(e, r_{12})$.

Etudions maintenant les relations cinématiques sur $SE(2)$. Etant donné un repère $\mathcal{F}_b = \{B, \overrightarrow{\imath_b}, \overrightarrow{\jmath_b}\}$, on note $v_{b,1}$ et $v_{b,2}$ les composantes de la vitesse du point B par rapport à $\mathcal{F}_0$, exprimées dans $\mathcal{F}_b$, i.e.

$$\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = v_{b,1}\overrightarrow{\imath_b} + v_{b,2}\overrightarrow{\jmath_b}$$

La vitesse angulaire du repère $\mathcal{F}_b$ par rapport à $\mathcal{F}_0$ est notée ω_b, i.e.

$$\frac{d\theta_b}{dt} = \omega_b$$

En posant $u_b := (v_{b,1}, v_{b,2}, \omega_b)$, on obtient donc :

$$\dot{r}_b = \bar{R}(\theta_b)u_b \tag{1.9}$$

qui est un cas particulier de la relation (1.3), puisque les vecteurs colonnes de $\bar{R}(\theta_b)$ peuvent être assimilés à une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(2)$ de $SE(2)$. On vérifie en effet que ces champs sont invariants à gauche par rapport à l'opération de groupe (1.7).

Soit $r_i(t), i \in \{1, 2\}$, deux chemins réguliers sur $SE(2)$ tels que $\dot{r}_i = \bar{R}(\theta_i)u_i$. Les relations suivantes peuvent être obtenues par un calcul direct à partir de (1.7) et (1.9), ou en utilisant les relations (1.1)–(1.6) (voir e.g. (Murray et al., 1994, Prop. 2.15)) :

$$\dot{\widehat{r_1 r_2}} = \bar{R}(\theta_1 + \theta_2)\left(u_2 + \mathrm{Ad}_{r_2^{-1}}u_1\right) \tag{1.10}$$

et

$$\begin{array}{l} \dot{\widehat{r_1^{-1} r_2}} = \dot{r}_{12} = \bar{R}(\theta_{12})u_{12} \\ u_{12} = u_2 - \mathrm{Ad}_{r_{21}}u_1 \end{array} \tag{1.11}$$

avec $\mathrm{Ad}_{r_2^{-1}}$ la matrice définie par les relations suivantes :

$$\mathrm{Ad}_{r_2} := \begin{pmatrix} R(\theta_2) & -Jp_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ad}_{r_2^{-1}} = (\mathrm{Ad}_{r_2})^{-1} = \begin{pmatrix} R(-\theta_2) & R(-\theta_2)Jp_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

1.3 Modélisation des manipulateurs mobiles

De nombreux travaux ont déjà traité de la modélisation géométrique et cinématique des manipulateurs mobiles, c'est-à-dire de systèmes composés d'une plate-forme mobile porteuse d'un bras manipulateur. Nous renvoyons donc le lecteur aux études (Campion et al., 1996; Canudas de Wit et al., 1996) pour un état de l'art sur la modélisation des plates-formes mobiles à roues et de leurs cinématiques, et à (Renaud et Dauchez, 1999; Bayle, 2001; Bayle et al., 2001a) pour la modélisation des manipulateurs mobiles et les modèles géométriques directs des manipulateurs.

Dans le cadre de cette étude, une modélisation très générale et détaillée n'est pas nécessaire puisque l'on se concentrera principalement sur les systèmes appartenant à la classe suivante de manipulateurs mobiles :

- Le bras manipulateur est plan et composé de liaisons rotoïdes ou prismatiques ;
- La plate-forme mobile est de type unicycle ou voiture.

L'hypothèse de manipulateur plan est un choix simplificateur que nous faisons non pas pour des raisons de limitation théorique de nos approches, mais seulement par souci de simplification de l'exposé. Ainsi, nos approches s'étendent sans modification notable au cas d'un manipulateur dont la situation de l'effecteur par rapport à un repère de référence est caractérisée par un élément de $SE(3)$. Les outils développés dans ce mémoire peuvent également être utilisés pour d'autres plates-formes non-holonomes, de façon plus ou moins directe selon le système considéré.

1.3.1 Hypothèses de modélisation

Nous restreignons cette étude à des manipulateurs mobiles holonomes ou non-holonomes dont les modèles vérifient les hypothèses suivantes :

- La plate-forme est un véhicule à roues.
- La contrainte de roulement sans glissement des roues sur le sol est toujours satisfaite.

- Les flexibilités du bras manipulateur sont négligées.
- Nous travaillons uniquement à partir du modèle cinématique d'un manipulateur mobile, compte tenu du fait que tous les systèmes étudiés sont supposés complètement actionnés (à chaque degré de liberté correspond un actionneur indépendant).

Le choix de ne pas modéliser les effets dynamiques peut, de prime abord, paraître limitatif et mérite quelques justifications complémentaires.

- Utilisant le formalisme de Lagrange, nous pouvons écrire le modèle dynamique de la plate-forme sous la forme (voir (Campion et al., 1991))

$$\begin{cases} \dot{z} & = & X(z)u \\ J(z)\dot{u} + g(z,u) & = & G(z)\Gamma \end{cases}$$

avec Γ le vecteur des couples fournis par les actionneurs, et les matrices $J(z)$ et $G(z)$ inversibles. Par conséquent, en imposant une loi de commande de la forme $\Gamma = G^{-1}(z)(J(z)v + g(z,u))$, nous obtenons le modèle simplifié suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = X(z)u & \text{(1.13a)} \\ \dot{u} = v & \text{(1.13b)} \end{cases}$$

Le choix d'une commande auxiliaire v du type

$$v = -\lambda(u - u^*) + \frac{\partial u^*}{\partial z}X(z)u + \frac{\partial u^*}{\partial t}, \quad \lambda > 0$$

avec $u^*(z,t)$ une vitesse de consigne désirée, supposée différentiable, conduit à l'équation en boucle fermée

$$\dot{\overbrace{(u - u^*)}} = -\lambda(u - u^*)$$

ce qui implique la convergence exponentielle de la commande cinématique u vers la valeur de consigne. L'hypothèse que nous faisons revient donc à supposer que les moteurs sont dotés de boucles de régulation bas-niveau de ce type.

- Les flexibilités du bras manipulateur sont essentiellement dues d'une part au choix de structures composées de matériaux légers afin d'accorder au manipulateur de meilleures performances (comme une charge utile de manipulation plus importante, par exemple, ou des effets inertiels amoindris) ou pour des économies de masse (dans le cadre des robots spatiaux notamment) et d'autre part au fait que

certaines applications nécessitent des bras très longs afin d'accéder à des sites encombrés ou hostiles (grues, robots de maintenance de centrale nucléaire, etc). En outre, l'effet des flexibilités des corps composant le manipulateur est d'autant plus manifeste que les vitesses articulaires et la fréquence de leurs oscillations sont élevées (apparition de vibrations et de modes de résonance). Nous supposons que ces effets, aux dynamiques beaucoup plus rapides que celles du mouvement d'ensemble, sont négligeables aux vitesses considérées.

1.3.2 Modélisation cinématique des manipulateurs

Nous considérons le cas d'un bras manipulateur à structure de chaîne ouverte simple possédant n_q liaisons de type rotoïdes (R) ou prismatiques (P). Par exemple, nous appelons « bras manipulateur RPR » un bras constitué de trois liaisons successives de type rotoïde-prismatique-rotoïde. La configuration du manipulateur est définie par ses coordonnées généralisées $q = (q_1, \cdots, q_{n_q})^T$ qui représentent indifféremment les valeurs des variables articulaires de rotation ou de translation.

La modélisation cinématique des bras manipulateurs se limite dans notre étude à l'équation :

$$\dot{q} = u_q, \quad q \in Q \tag{1.14}$$

Ceci signifie que chaque articulation est actionnée, et que chaque vitesse articulaire est modifiable à loisir.

Dans la plupart des applications, chacune des variables articulaires est limitée dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$ par l'existence de butées articulaires. Par conséquent, l'espace de configuration Q du bras manipulateur sera restreint à un produit d'intervalles du type :

$$Q = (q_1^-, q_1^+) \times \cdots \times (q_{n_q}^-, q_{n_q}^+)$$

avec $q_i^- < q_i < q_i^+$ et $(q_i^-, q_i^+) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n_q$.

1.3.3 Modélisation cinématique des plates-formes mobiles

Les véhicules à roues sont des systèmes mécaniques caractérisés par l'existence de contraintes cinématiques complètement non-intégrables (c'est-à-dire non-holonomes), lesquelles sont une conséquence de l'hypothèse de roulement sans glissement des roues sur le sol communément adoptée pour la modélisation du contact roue/sol (Neimark et Fufaev, 1972; Campion et al., 1996; Canudas de Wit et al., 1996).

1.3.3.1 Dérivation du modèle cinématique

Après élimination de l'ensemble des contraintes complètement intégrables, nous supposons que les contraintes restantes (non-holonomes par construction) sont indépendantes sur $\mathbb{R}$. Nous considérons donc des systèmes dont la configuration $z \in N$, N étant une variété différentielle de dimension n, évolue dans le temps sous un ensemble de contraintes complètement non-intégrables du type :

$$\forall z \in N, \ < a_j(z), \dot{z} >= 0, j = 1, \ldots, k, \ k \leqslant n \tag{1.15}$$

avec les champs de covecteurs (ou formes différentielles) a_j à valeurs dans l'espace dual de $T_z(N)$ formant une famille libre en tout point de N (voir (Campion et al., 1991) pour plus de détails). De ce fait, l'annulateur à droite de cette codistribution est une distribution de dimension constante $m = n - k$ en tout point. Il existe donc, en tout point $z_0 \in N$, un voisinage $\mathcal{U}(z_0)$ de z_0 et une famille de champs de vecteurs $X_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}(z_0), T(N))$ génératrice de cet annulateur, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j), \forall z \in \mathcal{U}(z_0), \ < a_j(z), X_i(z) >= 0$$

qui est également une famille libre. Nous supposons que $\mathcal{U}(z_0) = N$. Par construction :

Propriété 1 *Les $m \leqslant n$ champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$ sont linéairement indépendants en tout point de N.*

Remarque 3 Dans le cas où N est un groupe de Lie et les $X_i, i = 1, \ldots, m$, sont invariants à gauche, l'indépendance des X_i en e suffit à assurer l'indépendance de ces champs en tout point de N.

Le modèle cinématique correspondant est alors :

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \dot{z} = \sum_{i=1}^{m} u_i \, X_i(z), \quad z \in N \tag{1.16}$$

avec $m = n - k \leqslant n$, le nombre de variables de commande cinématiques indépendantes, également appelé nombre de degrés de liberté du système, et X_i les champs de vecteurs du système. Par la suite, $(\mathcal{S}_0)$ sera la notation générique utilisée pour la classe des systèmes sans dérive affines en la commande, c'est-à-dire du type (1.16). Soient $X_{m+1}, \cdots, X_n$, $(n - m)$ champs de vecteurs indépendants tels que $\{X_1(z), \cdots, X_n(z)\}$ constitue une base de $T_z(N)$ en tout point $z \in N$. Il est alors équivalent d'écrire le système $(\mathcal{S}_0)$ sous la

forme :

$$(\mathcal{S}_0) \quad \dot{z} = X(z)u, \quad z \in N \tag{1.17}$$

avec $X(z)u = \sum_{i=1}^{n} X_i(z)u_i$, et le vecteur de commande $u = (u_1 \cdots u_m \, 0 \cdots 0)^T \in \mathbb{R}^n$.

Le résultat suivant permet de vérifier a posteriori que le système de contraintes (1.15) est complètement non-intégrable.

Théorème 1 (Théorème d'intégrabilité de Frobenius)
Si $\dim\left(\mathrm{Span}\{X(z_0) : X \in \mathcal{L}ie\{X_1, \cdots, X_m\}\}\right) = p \leqslant n, \forall z_0 \in N$, *alors l'ensemble des contraintes* (1.15) *contient* $(n-p)$ *contraintes intégrables. Par conséquent, si* $p = n$, *alors le système* (1.15) *est complètement non-intégrable.*

Illustrons maintenant la dérivation du modèle cinématique depuis les équations de contraintes liées à l'hypothèse de roulement sans glissement, en considérant les deux exemples de la roue verticale sur le plan et du véhicule de type unicycle.

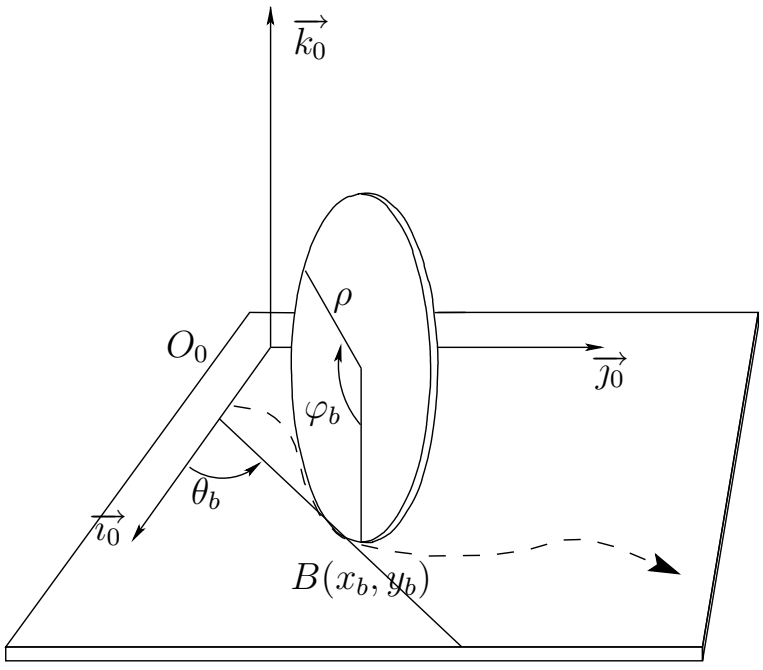


Figure 1.1 – Roue verticale sur le plan

Exemple 1 (La roue) Considérons une roue verticale sur le plan qui roule sans glisser sur le sol (voir Figure 1.1). L'hypothèse de roulement sans glissement se traduit par une vitesse nulle au point de contact B entre la roue et le plan, de coordonnées (x_b, y_b) par

rapport à un repère fixe $\mathcal{F}_0$ du plan. L'orientation de la roue par rapport à $\overrightarrow{i_0}$ est notée θ_b. Nous notons respectivement φ_b la variable angulaire caractérisant la position angulaire de la roue, et ρ le rayon de la roue. La configuration de la roue est alors donnée par $z = (x_b \ y_b \ \theta_b \ \varphi_b)^T \in N = SE(2) \times \mathbb{S}^1$. Par composition des vitesses, nous obtenons directement les deux contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_b} - \rho\dot{\varphi}_b \cos\theta_b & = & 0 \\ \dot{y_b} - \rho\dot{\varphi}_b \sin\theta_b & = & 0 \end{array} \right.$$

Celles-ci sont équivalentes aux deux contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_b}\cos\theta_b + \dot{y_b}\sin\theta_b - \rho\dot{\varphi}_b & = & 0 \\ -\dot{x_b}\sin\theta_b + \dot{y_b}\cos\theta_b & = & 0 \end{array} \right.$$

Ces dernières peuvent se ré-écrire sous la forme $< a_j(z), \dot{z} >= 0$ avec les covecteurs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1(z) & = & \begin{pmatrix} \cos\theta_b & \sin\theta_b & 0 & -\rho \end{pmatrix} \\ a_2(z) & = & \begin{pmatrix} -\sin\theta_b & \cos\theta_b & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Ces deux covecteurs sont clairement indépendants. Nous obtenons un modèle cinématique du type $(\mathcal{S}_0)$, avec $m = 2$, et

$$X_1(z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_b \\ \sin\theta_b \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad X_2(z) = X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui sont indépendants. Les covecteurs correspondent bien à des contraintes non-holonomes. En effet, leur complète non-intégrabilité se vérifie par exemple en montrant que la fermeture involutive de la distribution engendrée par X_1 et X_2 est de rang maximal [2], c'est-à-dire ici de rang $n = \dim N$ égal à quatre. Tel est le cas puisque la matrice

$$\Big(X_1(z), X_2(z), [X_1, X_2](z), [X_2, [X_1, X_2]](z)\Big) = \begin{pmatrix} \cos\theta_b & 0 & \sin\theta_b & \cos\theta_b \\ \sin\theta_b & 0 & -\cos\theta_b & \sin\theta_b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. d'après le Théorème d'intégrabilité de Frobenius.

est inversible en tout point.

La réduction de la configuration de la roue à ses trois premières composantes conduit à un système $(\mathcal{S}_0)$ dont les champs de commande sont :

$$X_1(z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_b \\ \sin\theta_b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(z) = X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces champs vérifient la Propriété 1 puisqu'ils sont indépendants en tout point.

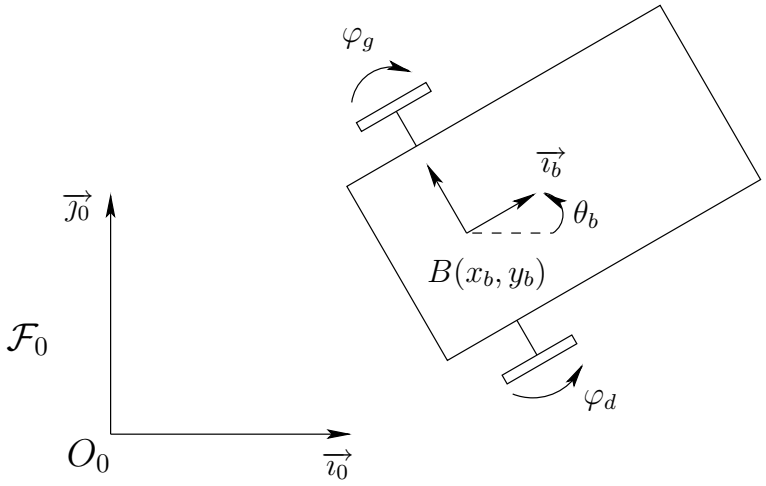


Figure 1.2 – Véhicule de type unicycle

Exemple 2 (Véhicule de type unicycle) La plate-forme de type unicycle, schématisée sur la Figure 1.2, est actionnée par deux roues motrices indépendantes et coaxiales. Nous notons (x_b, y_b) la position du centre de l'axe des roues B dans un repère fixe donné $\mathcal{F}_0$, et θ_b l'angle orienté entre $\overrightarrow{\imath_0}$ et $\overrightarrow{\imath_b}$. Nous désignons également par ρ le rayon des roues, par l la distance entre les deux roues, et par (φ_d, φ_g) les variables angulaires caractérisant la position angulaire des roues droite et gauche. Comme nous l'avons montré précédemment, les hypothèses de roulement sans glissement se traduisent, pour chaque roue, par deux contraintes cinématiques. En éliminant une des quatre contraintes liées, et en intégrant l'une des trois contraintes restantes —qui est complètement intégrable— nous obtenons l'expression de la variable φ_g comme une fonction de θ_b et φ_d. Il est alors possible de décrire le système par seulement quatre coordonnées. En éliminant φ_g, la configuration du système est réduite à $z = (x_b, y_b, \theta_b, \varphi_d)^T \in SE(2) \times \mathbb{S}^1$ et les deux

contraintes non-holonomes indépendantes qui restent sont sous la forme (1.15)

$$< a_j(z), \dot{z} >= 0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_1(z) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_b & \sin\theta_b & -\frac{l}{2} & -\rho \end{pmatrix} \\ a_2(z) &= \begin{pmatrix} -\sin\theta_b & \cos\theta_b & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ceci mène à un modèle cinématique $(\mathcal{S}_0)$ avec les champs de vecteurs suivants :

$$X_1(z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_b \\ \sin\theta_b \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad X_2(z) = X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{l}{2\rho} \end{pmatrix}$$

Nous vérifions, comme dans l'exemple précédent, la complète non-intégrabilité des contraintes en montrant que $\dim\left(\text{Span}\{X(z) : X \in \mathcal{L}ie\{X_1, X_2\}\}\right) = 4$, pour tout $z \in N$. En omettant la position angulaire φ_d de la roue droite, dont le contrôle présente peu d'intérêt pratique, nous réduisons la configuration du système à la posture $z = r_b = (x_b, y_b, \theta_b)^T \in SE(2)$ du corps de l'unicycle. Le modèle cinématique $(\mathcal{S}_0)$ associé est :

$$\dot{r}_b = X_1(r_b)u_1 + X_2u_2, \; r_b \in G = SE(2) \tag{1.18}$$

avec

$$X_1(r_b) = \begin{pmatrix} \cos\theta_b \\ \sin\theta_b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(r_b) = X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Pour ce modèle, les variables libres u_1 et u_2 sont respectivement la vitesse longitudinale de l'unicycle, également notée $v_{b,1}$, et la vitesse angulaire du corps de l'unicycle dans le plan, notée ω_b. Ces vitesses s'expriment également en fonction des vitesses angulaires des roues, via les relations :

$$\begin{cases} v_{b,1} &:= \frac{\rho}{2}(\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g) \\ \omega_b &:= \frac{\rho}{l}(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_g) \end{cases}$$

Remarque 4 Les champs de vecteurs associés à la configuration réduite des systèmes roue et véhicule de type unicycle sont identiques. Du point de vue de la cinématique, le véhicule de type unicycle se comporte donc comme la roue seule, ce qui justifie l'appellation d' « unicycle », courante dans la littérature.

Les deux exemples précédents illustrent la propriété suivante, satisfaite (par construction) par tout système mécanique sujet à des contraintes non-holonomes indépendantes.

Propriété 2 *Les champs X_i du système $(\mathcal{S}_0)$ satisfont à la* condition de rang de l'algèbre de Lie[3] *en tout point z_0 de l'espace de configuration N, c'est-à-dire que la distribution d'accessibilité Δ au point z_0 définie par :*

$$\Delta(z_0) := \mathrm{Span}\{X(z_0) : X \in \mathcal{L}ie(X_1, \cdots, X_m)\}$$

vérifie

$$\Delta(z_0) = T_{z_0}(N)$$

La Propriété 2 est directement liée à la propriété de commandabilité du système $(\mathcal{S}_0)$. Le théorème classique qui suit indique que cette propriété implique la commandabilité du système $(\mathcal{S}_0)$ (voir e.g. (Nijmeijer et Van der Schaft, 1991, Prop 3.15, Th. 3.21) pour une preuve).

Théorème 2 ((Chow, 1939)) *Soit un système $(\mathcal{S}_0)$ sur une variété différentielle N de dimension n, et $X_1, \cdots, X_m \in \mathcal{X}(N)$ des champs de vecteurs réguliers sur N. Alors,*

- *si les champs vérifient la condition de rang de l'algèbre de Lie en un point $z_0 \in N$, le système $(\mathcal{S}_0)$ est localement commandable au voisinage de z_0 ;*
- *si la condition de rang de l'algèbre de Lie est satisfaite pour tout $z_0 \in N$ et si la variété N est connexe, le système $(\mathcal{S}_0)$ est globalement commandable sur N.*

1.3.3.2 Propriétés de symétrie et décomposition du modèle cinématique

Outre la Propriété 2 de commandabilité, une propriété générique des véhicules est l'existence de groupes de symétries pour ces systèmes. Plus précisément, dans (Bloch et al., 1996), les auteurs utilisent une décomposition de l'espace de configuration N du type $N = G \times S$, avec G un groupe de Lie associé à la situation du véhicule dans le plan ou dans l'espace[4], et S une variété associée aux variables internes de la plate-forme.

Toute configuration $z \in N$ du système est alors décomposable sous la forme suivante

$$z = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad \text{avec } r \in G,\ s \in S \tag{1.20}$$

3. A des fins de concision, et suivant l'abréviation anglaise, cette condition de rang sera notée LARC(z_0).

4. Ce groupe est typiquement $SE(2)$, $SE(3)$ ou $SO(3)$.

Le système $(\mathcal{S}_0)$ peut alors être décomposé comme suit :

$$(\mathcal{V}_0) \qquad \begin{cases} \dot{r} &= \sum_{i=1}^{m} u_i X_i^r(r,s), \quad m \leqslant \dim G \\ \dot{s} &= \sum_{i=1}^{m} u_i X_i^s(s) \end{cases} \tag{1.21}$$

avec la décomposition associée des champs de commande complets $X_i(z)$ du système $(\mathcal{S}_0)$:

$$\forall i \in 1,\ldots,m, \forall z = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in N = G \times S,\ X_i(z) = \begin{pmatrix} X_i^r(r,s) \\ X_i^s(s) \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

Tous les véhicules considérés dans ce mémoire seront désormais supposés appartenir à la sous-classe $(\mathcal{V}_0)$ des systèmes de la classe $(\mathcal{S}_0)$.

Rappelons les définitions d'une symétrie et d'un groupe de symétries (voir à ce sujet l'article de référence (Grizzle et Marcus, 1985)).

Définition 1 (Symétrie) *Soit un système $(\mathcal{S}_0)$ défini sur une variété N de dimension n, et un difféomorphisme φ de N dans N. L'application φ est une* symétrie *pour le système $(\mathcal{S}_0)$ si, pour toute solution $z(t)$ de $(\mathcal{S}_0)$ associée à une commande $u(t)$, $\varphi(z(t))$ est également solution de $(\mathcal{S}_0)$ associée à la même commande $u(t)$.*

Définition 2 (Groupe de transformations) *Soit G un groupe d'élément neutre e. (G,φ) est un* groupe de transformations *sur une variété N si*

- $\forall r \in G,\ \varphi(r) \in \mathrm{Diff}(N)$, *où* $\mathrm{Diff}(N)$ *désigne l'ensemble des difféomorphismes de N dans N.*
- $\varphi(e) = \mathrm{Id}_N$, *avec* Id_N *l'application identité sur N.*
- $\forall (r_1,r_2) \in G^2 : \varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1) \circ \varphi(r_2)$

Définition 3 (Groupe de symétries) *Le groupe de transformations (G,φ) sur N est un* groupe de symétries *pour $(\mathcal{S}_0)$ si, pour tout élément r de G, l'application $\varphi(r)$ est une symétrie pour $(\mathcal{S}_0)$.*

Dans le cas où la variété N est réduite au groupe de Lie G, nous relions les notions de symétrie et d'invariance à gauche.

Corollaire 1 *(G, L), avec L l'opérateur de translation à gauche sur G, est un groupe de transformations sur G, et le système $(\mathcal{S}_0)$ est invariant à gauche sur G si et seulement si (G, L) est un groupe de symétries pour $(\mathcal{S}_0)$.*

Les véhicules non-holonomes ont pour caractéristique de vérifier la propriété de symétrie suivante :

Propriété 3 *Le groupe de transformations (G, φ) sur $N = G \times S$, avec l'application $\varphi : G \to \mathrm{Diff}(N)$ définie, pour tout élément $\tau \in G$, par*

$$\varphi(\tau) = \begin{pmatrix} L_\tau \\ \mathrm{Id}_S \end{pmatrix}$$

est un groupe de symétries pour le système $(\mathcal{V}_0)$.

Remarque 5 Si $(r(t),\ s(t))$ est une solution du système $(\mathcal{V}_0)$ associée à la commande $u(t)$, la Propriété 3 indique que, pour tout élément donné $\tau \in G$, $(\tau\ r(t),\ s(t))$ est aussi une solution du système $(\mathcal{V}_0)$ associée à la même commande.

Exemple 3 (plate-forme de type unicycle) Il est facile de montrer que le modèle cinématique décrit par les relations (1.18)–(1.19) de l'unicycle admet une décomposition sous la forme $(\mathcal{V}_0)$ avec $S = \varnothing$, et les champs $X_i^r(r)$ donnés par (1.19).

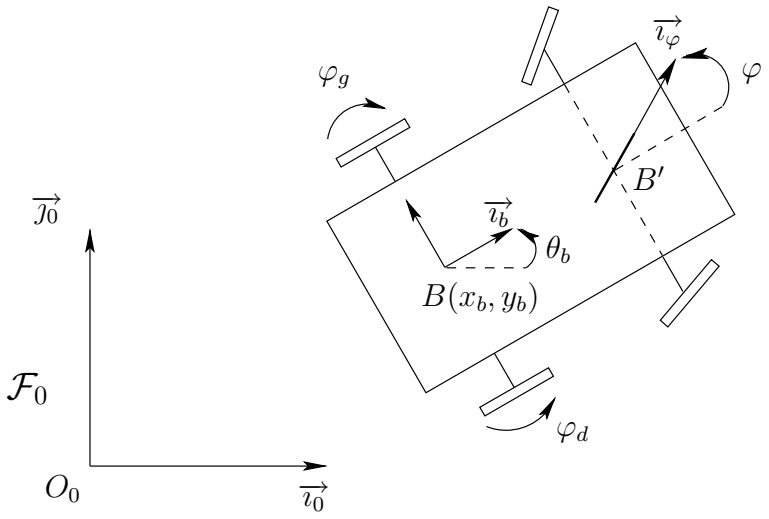


Figure 1.3 – Voiture

Exemple 4 (plate-forme de type voiture) La plate-forme de type voiture, voir Figure 1.3, est à traction arrière et possède une roue directrice. Nous notons (x_b, y_b) la position du centre de l'axe des roues B dans un repère fixe $\mathcal{F}_0$, θ_b l'angle orienté entre $\overrightarrow{\imath_0}$ et $\overrightarrow{\imath_b}$, et $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ l'angle orienté de la roue avant directrice entre $\overrightarrow{\imath_b}$ et $\overrightarrow{\imath_\varphi}$. La distance entre le centre B de l'axe des roues arrières et le centre B' de l'essieu de la roue directrice est notée ℓ. La configuration de la voiture est alors $z = (x_b, y_b, \theta_b, \varphi)^T \in N$. Une décomposition possible de la variété N est $N = G \times S$, avec $G = SE(2)$ et $S = \mathbb{S}^1$, selon laquelle $z = (r_b^T, \varphi)^T$. Soit $v_{b,1}$ la vitesse instantanée du point B selon $\overrightarrow{\imath_b}$, et v_φ la vitesse de rotation instantanée de la roue directrice. Un modèle cinématique bien connu de la voiture est le suivant (voir par exemple (Murray et Sastry, 1993) pour l'obtention du modèle à partir des contraintes non-holonomes du système).

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_b &=& \cos\theta_b v_{b,1} \\ \dot{y}_b &=& \sin\theta_b v_{b,1} \\ \dot{\theta}_b &=& \frac{\tan\varphi}{\ell} v_{b,1} \\ \dot{\varphi} &=& v_\varphi \end{array} \right. \tag{1.23}$$

Posons $s := \varphi$. Ce système est directement de la forme $(\mathcal{V}_0)$, avec

$$X_1^r(r_b, s) = \begin{pmatrix} \cos\theta_b \\ \sin\theta_b \\ \frac{\tan s}{\ell} \end{pmatrix},\ X_2^r(r_b, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{et } \left\{ \begin{array}{l} X_1^s(s) = 0 \\ X_2^s(s) = 1 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = v_{b,1} \\ u_2 = v_\varphi \end{array} \right. \tag{1.24}$$

En posant $s := \frac{\tan\varphi}{\ell}$, et $u_2 := \frac{1}{\ell\cos^2\varphi} v_\varphi$, on obtient une autre représentation du type $(\mathcal{V}_0)$ sur $N = SE(2) \times \mathbb{R}$ avec

$$X_1^r(r_b, s) = \begin{pmatrix} \cos\theta_b \\ \sin\theta_b \\ s \end{pmatrix},\ X_2^r(r_b, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{et } \left\{ \begin{array}{l} X_1^s(s) = 0 \\ X_2^s(s) = 1 \end{array} \right. \tag{1.25}$$

Dans les deux cas, on vérifie aisément que les champs X_1^r et X_2^r satisfont la Propriété 3, et que les champs complets X_1 et X_2 du système satisfont LARC(z) en tout point de $z \in G \times S$. En particulier, concernant ce dernier point, il suffit de vérifier que la famille $\{X\}(z) := \{X_1(z), \cdots, X_4(z)\}$ des vecteurs définis par

$$X_1(z),\ X_2(z),\ X_3(z) := [X_1, X_2](z),\ X_4(z) := [X_1, [X_1, X_2]](z)$$

forme une base de $T_z(N) = \mathbb{R}^4$ en tout point $z \in N$.

1.3.3.3 Repère mobile de référence et modèle d'erreur

Nous considérons jusqu'à la fin de cette section que le groupe de Lie G est $SE(2)$.

Soit $r_d \in SE(2)$ (avec l'index d pour « désiré ») la situation d'un repère mobile de référence. Un modèle cinématique dérivé du modèle cinématique (1.21) d'une plate-forme de configuration $z_b = (r_b^T, s^T)^T \in N$ décrivant l'évolution de « l'erreur de situation » entre la plate-forme et le repère de référence est donné par (voir (1.11))

$$(\mathcal{V}_d) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{r}_{db} & = & \sum_{i=1}^{m} u_{b,i} X_i^r(r_{db}, s) - \bar{R}(\theta_{db}) \mathrm{Ad}_{r_{db}^{-1}} u_d(t) \\ \dot{s} & = & \sum_{i=1}^{m} u_{b,i} X_i^s(s) \end{array} \right. \tag{1.26}$$

avec $u_d(t)$ la vitesse définie par $\dot{r}_d(t) = \bar{R}(\theta_d(t)) u_d(t)$.

Une propriété remarquable du système d'erreur $(\mathcal{V}_d)$, qui résulte de la Propriété 3, est que les champs de commande du système $(\mathcal{V}_d)$ sont les mêmes que ceux du système $(\mathcal{V}_0)$, c'est-à-dire que le système (1.26) peut s'écrire :

$$\dot{z_{db}} = \sum_{i=1}^{m} u_{b,i} X_i(z_{db}) + X_0(z_{db}, t)$$

avec le champ de dérive donné par :

$$X_0(z_{db}, t) = \begin{pmatrix} -\bar{R}(\theta_{db}) \mathrm{Ad}_{r_{db}^{-1}} u_d(t) \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_2 & Jp_{db} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_d(t) \tag{1.27}$$

où la dernière égalité découle de (1.12). Notons que dans le cas d'un repère fixe (i.e. si $u_d = 0$), nous retrouvons l'expression du système $(\mathcal{V}_0)$.

1.3.4 Modèle cinématique d'un manipulateur mobile

Un manipulateur mobile est un système robotique composé d'une plate-forme porteuse sur laquelle est fixé un bras manipulateur. Les notations suivantes sont utilisées pour décrire la configuration du manipulateur mobile plan représenté en Figure 1.4.

- q est le vecteur des coordonnées articulaires du bras manipulateur (liées indifféremment à des liaisons de type prismatique ou rotoïde), de dimension n_q.
- $\mathcal{F}_0 = \{O, \overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0}\}$ est un repère fixe dans le plan.

- $\mathcal{F}_b = \{B, \overrightarrow{\imath_b}, \overrightarrow{\jmath_b}\}$ est le repère attaché à la plate-forme mobile dans le plan. Si la base mobile est non-holonome, nous imposons que la vitesse instantanée du point B par rapport à $\mathcal{F}_0$ est le long du vecteur unitaire $\overrightarrow{\imath_b}$.
- $\mathcal{F}_e = \{E, \overrightarrow{\imath_e}, \overrightarrow{\jmath_e}\}$ est le repère attaché à l'organe terminal du bras manipulateur.

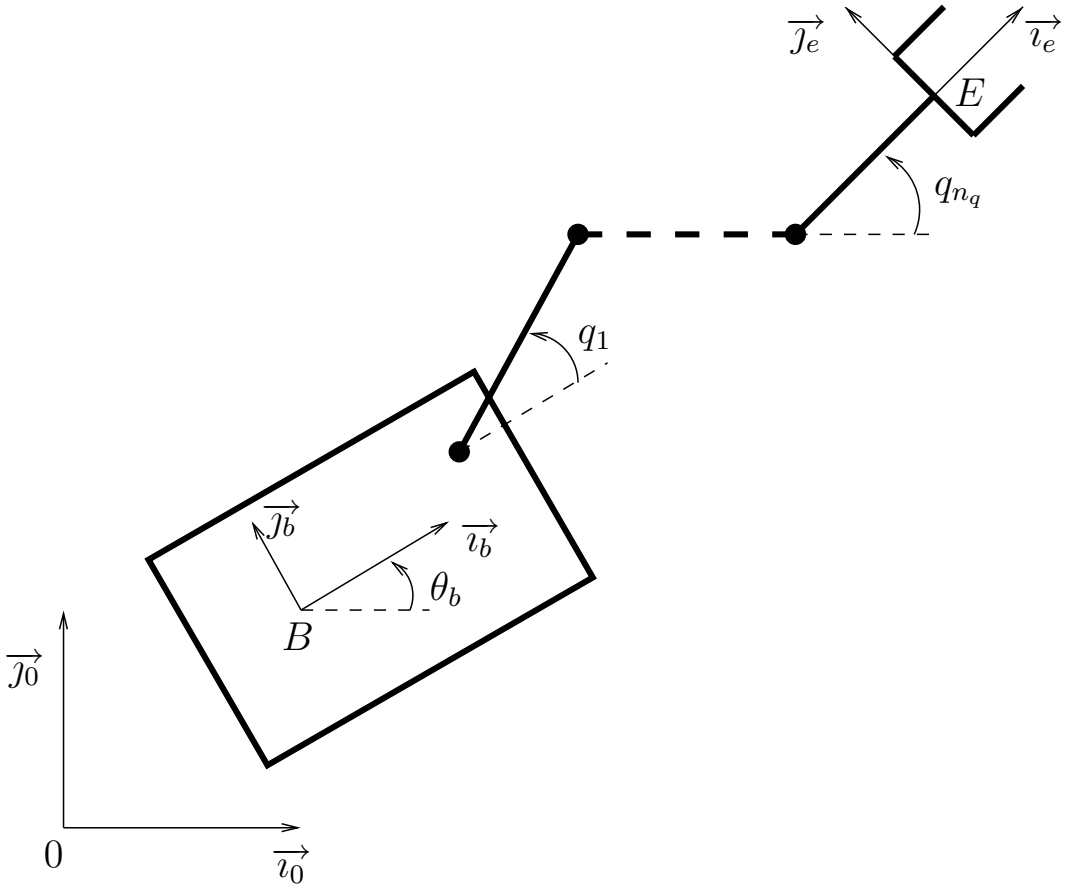


Figure 1.4 – Manipulateur mobile plan

L'espace de configuration du système est $Q \times N = Q \times SE(2) \times S$. Il découle des Sections 1.3.3 et 1.3.2 que le modèle cinématique du manipulateur mobile, par rapport à un repère de référence $\mathcal{F}_d$, est donné par :

$$(\mathcal{M}_d) \quad \left\{ \begin{array}{rcc} \dot{q} & = & u_q \\ \dot{r}_{db} & = & \sum_{i=1}^{m} u_{b,i} X_i^r(r_{db}, s) - \bar{R}(\theta_{db}) \mathrm{Ad}_{r_{db}^{-1}} u_d(t) \\ \dot{s} & = & \sum_{i=1}^{m} u_{b,i} X_i^s(s) \end{array} \right. \tag{1.28}$$

Chapitre 2

Fonctions transverses et repère compagnon omnidirectionnel

Contenu du chapitre

2.1 Introduction 34

2.2 Coordination et objectifs de commande pour la plate-forme 34

2.2.1 Problématique 35

2.2.2 Stabilisation pratique 37

2.3 Fonctions transverses 39

2.3.1 Cas général des systèmes sans dérive affines en la commande . 39

2.3.2 Cas des systèmes sur un groupe de Lie 41

2.4 Concept de repère compagnon omnidirectionnel 44

2.4.1 Cas d'une plate-forme de type unicycle 45

2.4.2 Cas d'une plate-forme de type voiture 47

2.5 Conclusion 50

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour vocation de donner des outils pour la commande de la plate-forme porteuse d'un manipulateur mobile. Nous commençons par définir, en Section 2.2, les objectifs de commande pour la plate-forme en fonction du choix d'une stratégie de coordination entre manipulation et locomotion. Nous abordons ensuite la problématique de la commande par retour d'état des systèmes non-holonomes, et rappelons des résultats récents sur l'approche de commande par fonctions transverses. Ceci nous permet d'introduire, pour les plates-formes non-holonomes des manipulateurs mobiles, la notion de « repère compagnon omnidirectionnel » qui est l'un des points-clés de notre approche.

2.2 Coordination et objectifs de commande pour la plate-forme

Un manipulateur mobile, c'est-à-dire un bras manipulateur embarqué sur une plate-forme mobile, présente l'avantage, par rapport aux classiques bras manipulateurs à base fixe, d'avoir un espace de travail considérablement accru du fait des degrés de mobilité apportés par sa plate-forme porteuse. Les degrés de liberté supplémentaires fournis par cette plate-forme au manipulateur mobile génèrent une redondance du système par rapport à une tâche de manipulation réalisable par le seul bras manipulateur, ce qui procure à ce type de systèmes une polyvalence et des capacités de manipulation et de locomotion étendues (Arai, 1997).

En pratique, il arrive encore fréquemment que la commande de tels systèmes soit obtenue en accomplissant tour à tour *i)* un déplacement de la plate-forme mobile visant à positionner le manipulateur, et *ii)* la réalisation d'une tâche robotique par ce manipulateur en maintenant la plate-forme immobile, comme dans le cas des grues montées sur des chariots. De ce fait, pendant le déplacement de la plate-forme, la tâche de manipulation est temporairement abandonnée. Cependant, certaines applications nécessitent une synchronisation, une *coordination des mouvements* de la plate-forme porteuse et du bras embarqué (Khatib et al., 1996; Yamamoto et Yun, 1994). Ceci est notamment le cas si l'on désire accomplir une tâche de manipulation sans interruption sur un espace opérationnel requérant de la plate-forme qu'elle déplace le manipulateur, comme par exemple le suivi d'un objet en mouvement tendant à sortir de l'espace de travail du bras lorsque la plate-forme est immobile.

La coordination entre locomotion et manipulation d'un manipulateur mobile fait rapi-

dement apparaître une différence majeure entre la précision demandée pour chacune des tâches qui leurs sont associées. Il est généralement demandé au manipulateur de réaliser finement une tâche de manipulation, c'est-à-dire de positionner avec précision l'organe terminal du bras, mais en revanche, la plate-forme n'est souvent utilisée qu'à des fins de positionnement approximatif, et ce en vue de permettre au manipulateur de poursuivre la tâche qui lui est attribuée. Cette subordination de la locomotion vis-à-vis de la manipulation s'explique à la fois par les dynamiques et par la précision des capteurs proprioceptifs de chacun de ces sous-systèmes. En effet, traditionnellement, d'une part l'inertie de la plate-forme est bien plus importante que celle du bras, et d'autre part, la dérive associée aux mesures odométriques de la plate-forme n'apparaît pas sur les codeurs du bras.

La question qui se pose alors est de savoir quels sont les objectifs que l'on doit fixer à la plate-forme mobile afin de réaliser au mieux un contrôle coordonné des deux sous-systèmes composant le manipulateur mobile.

2.2.1 Problématique

Dans le cas de plates-formes omnidirectionnelles, c'est-à-dire dont les déplacements dans l'environnement ne sont pas contraints cinématiquement, les cadres méthodologiques hérités de la commande des bras manipulateurs, comme l'approche par fonctions de tâches (Samson et al., 1991), s'appliquent sans modification majeure. En revanche, la commande d'une plate-forme non-holonome, dont les contraintes cinématiques réduisent les capacités opérationnelles, peut poser problème. Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, la non-holonomie de ces systèmes ne les empêche en général pas d'être commandables. Néanmoins la subordination de la locomotion à la manipulation fait apparaître deux implications qui compliquent le contrôle de la plate-forme.

Premièrement, le découplage hiérarchique entre le système de locomotion et le système de manipulation mène naturellement à des lois de commande dont *i)* l'objectif principal est la réalisation de la tâche de manipulation, et *ii)* l'objectif secondaire est la stabilisation de la situation de la base mobile sur une trajectoire choisie de sorte à permettre la réalisation de l'objectif principal. En d'autres termes, la trajectoire de référence pour la plate-forme est choisie en fonction de l'espace de travail du manipulateur, sans préjuger du fait qu'elle soit ou non réalisable par la plate-forme. C'est là une première difficulté à laquelle se greffe le fait que, lorsque la tâche de manipulation impose à l'organe terminal du bras une trajectoire a priori inconnue, la trajectoire de référence pour la plate-forme

est elle aussi inconnue. Ceci est notamment le cas pour des tâches de suivi d'un objet dont le mouvement n'est pas connu à l'avance par l'organe terminal du bras. En contrepartie, puisque la locomotion est un objectif secondaire, la plate-forme n'est pas tenue de le réaliser exactement.

En second lieu, même en supposant la trajectoire de référence réalisable par la plate-forme, la synthèse de lois de commande pour une plate-forme non-holonome qui assurent la stabilisation asymptotique d'une trajectoire de référence n'est pas un problème facile. C'est la raison pour laquelle il est fréquent, dans le domaine de la manipulation mobile, de voir les objectifs de commande relatifs à la plate-forme posés sous la forme de la stabilisation asymptotique d'une *partie* de la situation de la plate-forme (Wang et Kumar, 1993; Seraji, 1998; Bayle et al., 2002), par exemple de sa seule position cartésienne, à l'instar des méthodes héritées du suivi de chemin sans contrôle de l'orientation (Nelson et Cox, 1988; Morin et Samson, 2001b). En pratique, ces méthodes se traduisent par le fait que le bras manipulateur semble « traîner » la plate-forme derrière lui. Cependant, ces approches se révèlent inadaptées lorsque la plate-forme mobile doit effectuer des manœuvres et/ ou lorsque l'existence de butées articulaires du bras manipulateur réduit notablement l'espace opérationnel du bras. Il est alors nécessaire d'effectuer un contrôle de la posture complète de la plate-forme mobile, c'est-à-dire de commander simultanément la base mobile en position et en orientation.

Pour résumer, le choix de privilégier la manipulation dans la coordination entre la plate-forme et le bras mène à un problème de synthèse de lois de commande pour la plate-forme qui permettent de stabiliser la situation de celle-ci le long d'une trajectoire de référence a priori inconnue et éventuellement non-réalisable. Dans le cadre de la manipulation mobile, il n'existe pas —à notre connaissance— d'étude menée en ce sens et qui utilise des retours d'état réactifs [1]. Il existe une bonne raison à cette carence dans la littérature : la synthèse de lois de commande par retour d'état garantissant la stabilisation asymptotique de la situation complète d'un système non-holonome est un problème difficile à résoudre lorsque la trajectoire de référence à stabiliser est *a priori* inconnue, et n'a pas de solution si la trajectoire est non-réalisable. La section suivante explique rapidement la raison de cette difficulté, et donne un aperçu des solutions proposées pour y remédier.

1. A contrario, de nombreuses références sont disponibles dans le cadre de la synthèse de lois de commande en boucle ouverte (Sussmann et Liu, 1991; Murray et Sastry, 1991; Lafferriere et Sussmann, 1993; Laumond, 1998) pour des systèmes non-holonomes.

2.2.2 Stabilisation pratique

Un problème de commande générique pour les plates-formes non-holonomes est la synthèse de lois de commande par retour d'état assurant la stabilisation asymptotique de trajectoires réalisables par ces plates-formes. Des solutions ont d'abord été proposées (Kanayama et al., 1990; Samson et Ait-Abderrahim, 1991; Fliess et al., 1995a) sous une hypothèse « d'excitation persistante » impliquant, à peu de choses près, que la trajectoire à stabiliser ne présente aucun point fixe. Pour de telles trajectoires, le linéarisé du système d'erreur est commandable (Sontag, 1992), et les outils classiques de la commande des systèmes linéaires s'appliquent. En revanche, ce système linéarisé devient non-commandable en un point fixe, et la situation dans ce cas est encore rendue plus compliquée en raison de la non-existence de retours d'état continus autonomes permettant la stabilisation asymptotique de tels points. Cette difficulté est une conséquence directe de l'application du théorème suivant aux systèmes sans dérive affines en la commande, avec moins d'entrées de commande que de variables d'état, c'est-à-dire $m < n$ dans le théorème qui suit.

Théorème 3 ((Brockett, 1983)) *Soit un système $\dot{z} = f(z, u)$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, et $f(z_0, 0) = 0$. Une condition nécessaire pour qu'il existe un retour d'état autonome $u(z)$ régulier qui stabilise asymptotiquement le point d'équilibre $(z_0, 0)$ est que pour tout voisinage $\mathcal{U}(z_0, 0) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ de ce point d'équilibre, l'image par f de ce voisinage contienne un voisinage $\mathcal{U}(0) \subset \mathbb{R}^n$ de zéro.*

Afin de circonvenir cette limitation, de nombreuses recherches se sont placées dans le cadre de retours d'état instationnaires (voir par exemple (Samson, 1990; Coron, 1992)). Les commandes résultant de ces approches présentent toutefois des limitations. L'impossibilité d'atteindre un compromis satisfaisant entre robustesse aux erreurs de modèle et vitesse de convergence (Morin et Samson, 2004b) en est une. D'autre part, la non-existence d'un retour d'état unique qui permette la stabilisation asymptotique de toute trajectoire réalisable par ces plates-formes constitue une autre restriction. Le théorème suivant conclut en ce sens pour certains des systèmes affines en la commande et sans dérive (notamment le véhicule de type unicycle ou la voiture), et suggère l'utilisation de plusieurs retours d'état afin de stabiliser asymptotiquement différentes trajectoires de référence. La complétude de l'analyse de stabilité d'une loi de commande résultant d'une telle approche, avec des commutations entre différents retours d'état, demeure cependant problématique.

Théorème 4 ((Lizárraga, 2004)) *Soit un système* $(\mathcal{S}_0)$*, avec* $m = 2$*, et tel que les champs de commande satisfont à la condition de rang de l'algèbre de Lie et sont indépendants en tout point* z *de la variété* N*. Alors il n'existe pas de retour d'état continu dépendant du temps* $u(z, z^r, u^r, t)$*, avec* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial^2 u}{\partial u^r \partial t}$ *définis en tout point et bornés sur* $\{(z, z^r, u^r, t) : z = z^r, u^r = 0\}$*, qui stabilise asymptotiquement toute trajectoire réalisable*[2] *pour le système* $(\mathcal{S}_0)$*.*

Enfin, une troisième limitation est la non-applicabilité des solutions de commande précédemment citées au problème de stabilisation, nécessairement non-asymptotique, de trajectoires de référence non-réalisables.

Ces diverses limitations suggèrent d'abandonner l'objectif trop contraignant de stabilisation asymptotique pour un nouvel objectif de stabilisation légèrement moins ambitieux, mais ouvrant sur de nouvelles solutions de commande mieux adaptées aux spécificités de la classe de systèmes considérée. Une définition d'un tel objectif de *stabilisation pratique* (voir également (Khalil, 1992)) est la suivante :

Définition 4 (Stabilisation pratique (Morin, 2004)) *Soit un système* $(\mathcal{S}_0)$ *sur une variété* N*. On dira qu'une famille* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *de lois de commande est un* stabilisateur pratique *de* $z_0 \in N$ *pour le système* $(\mathcal{S}_0)$ *si :*

- $\forall \varepsilon > 0$*, il existe un compact* $\mathcal{A}_\varepsilon \subset N$ *asymptotiquement stable pour le système* $(\mathcal{S}_0)$ *contrôlé par* u^ε *;*
- *Pour une distance* d *définie localement autour de* z_0*,*

$$D(z_0, \mathcal{A}_\varepsilon) := \max\{\mathrm{d}(z_0, z) : z \in \mathcal{A}_\varepsilon\} \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

Autrement dit, il s'agit de stabiliser asymptotiquement non plus un point de l'espace d'état, mais un ensemble contenu dans un *voisinage* arbitrairement petit de ce point. Puisque nous avons choisi de formuler les objectifs de commande de la plate-forme mobile sous la forme d'un positionnement approximatif autour d'une trajectoire de référence, le fait de stabiliser le voisinage d'un point plutôt que le point lui-même va dans le même sens.

2. On appelle trajectoire *réalisable* du système $\dot{z} = f(z, u)$ toute fonction z^r pour laquelle il existe une fonction u^r telle que

$$\forall t, \quad \dot{z^r}(t) = f(z^r(t), u^r(t))$$

2.3 Fonctions transverses

L'approche par fonctions transverses permet la stabilisation pratique de toute trajectoire de référence, même non réalisable, pour un système commandable $(\mathcal{S}_0)$ et invariant à gauche sur un groupe de Lie (Morin et Samson, 2001d; Morin et Samson, 2003). Elle s'étend également à certains systèmes possédant des propriétés de symétrie adéquates, comme la voiture (Morin et Samson, 2004b) ou les chariots à attaches centrées, et, dans une certaine mesure, à tout système sans dérive affine en la commande, régulier et commandable (Morin et Samson, 2001c; Morin et Samson, 2004a). Cette méthode repose sur l'utilisation de fréquences variables, utilisées comme entrées de commande supplémentaires.

2.3.1 Cas général des systèmes sans dérive affines en la commande

Le théorème suivant constitue la brique de base de l'approche de commande par fonctions transverses, en établissant l'équivalence entre la commandabilité d'un système sans dérive affine en la commande et l'existence de fonctions transverses.

Théorème 5 ((Morin et Samson, 2001a)) *Considérons la classe de systèmes du type $(\mathcal{S}_0)$ définis sur une variété N de dimension n. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le système vérifie la condition de commandabilité $LARC(z_0)$ en $z_0 \in N$.*
2. *Il existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ et, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de z_0, une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{\bar{n}-m},\mathcal{U})$ tels que, pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^{\bar{n}-m}$, la relation suivante est satisfaite :*

$$T_{f(\alpha)}(N) = \mathrm{Span}\{X_1(f(\alpha)), \cdots, X_m(f(\alpha))\} + df(\alpha)(T_\alpha(\mathbb{T}^{\bar{n}-m})) \tag{2.1}$$

Remarque 6 La relation (2.1) est une réminiscence de la propriété de transversalité définie dans (Abraham et Robbin, 1967). Il est clair que, pour que la condition de transversalité soit satisfaite, il faut que $\bar{n} \geqslant n$.

Le Théorème 5 établit l'équivalence entre la satisfaction de la condition de rang de l'algèbre de Lie par les champs de vecteurs du système $(\mathcal{S}_0)$ en un point de la variété et l'existence d'applications entre le tore de dimension $\bar{n} - m$ et un voisinage du point considéré, chacune ayant des variations maximalement *transverses* à la distribution engendrée par les champs évalués en chaque point-image du tore de dimension $\bar{n} - m$. Ces

fonctions seront appelées *fonctions transverses* aux champs de vecteurs X_i (évalués sur l'image de ce tore), ou simplement *fonctions transverses* s'il n'y a pas d'ambiguïté possible. La condition (2.1) est appelée *condition de transversalité*. Elle est illustrée sur la Figure 2.1 pour un système $(\mathcal{S}_0)$ avec $n = \bar{n} = 3, m = 2$. Cette condition traduit le fait que les champs de vecteurs du système commandé évalués en un point $f(\alpha)$ de la courbe $\mathcal{C}_f = f(\mathbb{T})$ forment, avec le vecteur tangent $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ à la courbe en ce point, une base de $\mathbb{R}^3$. Dans le cas général, $\bar{n} \geqslant n$ et la famille composée des champs $X_i, i = 1, \ldots, m$, évalués en un point de la courbe et des vecteurs $\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, j = m+1, \ldots, \bar{n}$, tangents à la courbe forment une famille génératrice.

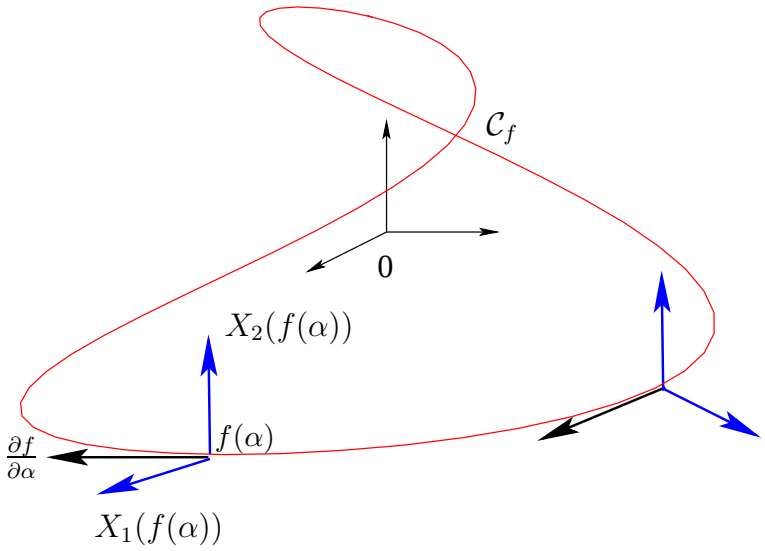


Figure 2.1 – Illustration de la transversalité .

En munissant la variété N d'une carte (c'est-à-dire d'un système de coordonnées locales sur $\mathbb{R}^n$), il est possible de ré-exprimer la condition (2.1) sous la forme suivante.

Définition 5 (Matrice de transversalité (Morin et Samson, 2001a)) *Soit une variété N munie d'une carte associant z_0 à $0 \in \mathbb{R}^n$. Soit un système du type $(\mathcal{S}_0)$ sur la variété N, satisfaisant LARC(z_0) et f une fonction transverse associée. La condition de transversalité* (2.1) *est équivalente au fait que la matrice $H(\alpha)$ définie par*

$$H(\alpha) := \left(X_1(f(\alpha)), \cdots, X_m(f(\alpha)), -\frac{\partial f}{\partial \alpha_{m+1}}(\alpha), \cdots, -\frac{\partial f}{\partial \alpha_{\bar{n}}}(\alpha)\right) \tag{2.2}$$

est de rang plein n, pour tout $\alpha = (\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_{\bar{n}})^T \in \mathbb{T}^{\bar{n}-m}$. La matrice $H(\alpha)$ associée à une fonction transverse f est appelée matrice de transversalité.

Avec une fonction transverse telle que définie ci-dessus, il est alors possible de définir un retour d'état continu qui, localement, assure l'attractivité d'un voisinage de l'origine pour les solutions d'un système commandé du type $(\mathcal{S}_0)$ (voir (Morin et Samson, 2003; Morin, 2004) pour des explications complémentaires).

2.3.2 Cas des systèmes sur un groupe de Lie

La structure de groupe, couplée à l'invariance à gauche des champs de vecteurs, permet d'énoncer une variante plus précise du Théorème 5 en donnant, complémentairement, l'expression d'une classe de fonctions transverses possibles.

Pour donner un sens à cette expression, il est nécessaire d'introduire au préalable la notion de base graduée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G. Rappelons que cette algèbre est de dimension $n = \dim G$.

Définition 6 (Base graduée d'une algèbre de Lie) *Soient $X_1, \cdots, X_m \in \mathfrak{g}$ des champs de vecteurs indépendants tels que $\mathcal{L}ie\{X_1, \cdots, X_m\} = \mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Span}\{X_1, \cdots, X_m\}$, nous définissons par récurrence :*

$$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_{k-1} + [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{k-1}],\ k \geqslant 2$$

avec $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{k-1}] = \mathrm{Span}\{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_{k-1}\}$. Soit $K = \min\{k \in \mathbb{N} : \mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}\}$. Une base graduée de $\mathfrak{g}$ associée aux champs $X_1, \cdots, X_m$ est une base ordonnée $X_1, \cdots, X_n$ munie de deux applications $\lambda, \rho : \{m+1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ telles que :

1. *$\forall k = 1, \ldots, K,\ \mathfrak{g}_k = \mathrm{Span}\{X_1, \cdots, X_{\dim(\mathfrak{g}_k)}\}$;*
2. *$\forall k \geqslant 2$ et $\forall i \in \mathbb{N}$ tel que $\dim \mathfrak{g}_{k-1} < i \leqslant \dim \mathfrak{g}_k$, $X_i = [X_{\lambda(i)}, X_{\rho(i)}]$ avec $X_{\lambda(i)} \in \mathfrak{g}_a$, $X_{\rho(i)} \in \mathfrak{g}_b$, et $a + b = k$.*

Il est possible d'associer à toute base graduée de $\mathfrak{g}$ un vecteur de poids $\omega \in \mathbb{N}^n$ défini comme suit.

1. $\forall i = 1, \ldots, m,\ \omega_i = 1$;
2. $\forall i = m+1, \ldots, n,$

$$\omega_i = k \Leftrightarrow X_i \in \mathfrak{g}_k \backslash \mathfrak{g}_{k-1} \Leftrightarrow \dim \mathfrak{g}_{k-1} < i \leqslant \dim \mathfrak{g}_k$$

Nous avons par conséquent $1 = \omega_1 = \cdots = \omega_m \leqslant \omega_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant \omega_n = K$, et, d'après la Définition 6,

$$\forall i = m+1, \ldots, n,\ \omega_i = \omega_{\lambda(i)} + \omega_{\rho(i)}$$

Théorème 6 ((Morin et Samson, 2003)) *Soit G un groupe de Lie de dimension n et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soient $X_1, \cdots, X_m \in \mathfrak{g}$ des champs de vecteurs indépendants. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{L}ie(X_1, \cdots, X_m) = \mathfrak{g}$;
2. *Pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de e dans G, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{n-m}, \mathcal{U})$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^{n-m}$,*

$$T_{f(\alpha)}(G) = \mathrm{Span}\{X_1(f(\alpha)), \cdots, X_m(f(\alpha))\} \oplus df(\alpha)(T_\alpha(\mathbb{T}^{n-m})) \tag{2.3}$$

De plus, étant donné une base graduée $\{X_1, \cdots, X_n\}$ de $\mathfrak{g}$, un choix possible pour la fonction f est donné, pour tout $\alpha = (\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)^T \in \mathbb{T}^{n-m}$, par

$$f(\alpha) = f_n(\alpha_n)\, f_{n-1}(\alpha_{n-1}) \cdots f_{m+1}(\alpha_{m+1}) \tag{2.4}$$

où chaque fonction $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}, \mathcal{U})$ est définie par

$$f_i(\alpha_i) := \exp\left(\varepsilon_{i,1}^{\omega_{\lambda(i)}} \sin\alpha_i X_{\lambda(i)} + \varepsilon_{i,2}^{\omega_{\rho(i)}} \cos\alpha_i X_{\rho(i)}\right) \tag{2.5}$$

pour des scalaires $\varepsilon_{i,j} > 0$ appropriés, $i = m+1, \ldots, n$, $j = 1, 2$.

Les apports du Théorème 6 par rapport au Théorème 5 concernent à la fois :
- la dimension $\bar{n} - m$ du tore sur lequel est définie la fonction transverse, qui est fixée dans le Théorème 6 à sa valeur minimale $\bar{n} - m = n - m$;
- la formulation explicite d'une famille (2.4)–(2.5) de fonctions transverses.

Exemple 5 Illustrons ce théorème par l'exemple du véhicule de type unicycle. Nous rappelons que le modèle cinématique (1.18) de l'unicycle de configuration $r \in G = SE(2)$ est défini par la donnée des deux champs de vecteurs donnés par (1.19) :

$$X_1(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } X_2(r) = X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que X_1, X_2 et $X_3 = [X_1, X_2]$ constituent une base graduée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(2)$ associée à $SE(2)$ avec le vecteur de poids $\omega = (1, 1, 2)$. Une fonction

transverse aux champs X_1 et X_2 est alors donnée par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{S}^1, \quad f(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon \sin\alpha \frac{\sin(\varepsilon\cos\alpha)}{\varepsilon\cos\alpha} \\ \varepsilon \sin\alpha (\frac{1-\cos(\varepsilon\cos\alpha)}{\varepsilon\cos\alpha}) \\ \varepsilon\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Preuve : La fonction définie par (2.6) est donnée par (2.4)–(2.5) avec $\lambda(3) = 1$ et $\rho(3) = 2$,i.e. $f = f_3$, avec le choix de paramètres $\varepsilon_{3,1} = \varepsilon_{3,2} = \varepsilon$ dans la relation (2.5). Il suffit de remarquer que $f(\alpha)$ est solution à $t = 1$ de l'équation $\dot{r} = \varepsilon \sin\alpha X_1(r) + \varepsilon\cos\alpha X_2$, avec pour condition initiale $r(0) = 0$. Par intégration de cette équation entre $t = 0$ et $t = 1$, le résultat est direct. ■

La matrice de transversalité associée, de déterminant

$$\det H(\alpha) = \frac{\cos(\varepsilon\cos\alpha) - 1}{\cos^2\alpha}$$

est inversible si $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$.

Remarque 7 Les fonctions transverses données dans ce théorème ne sont pas les seules à vérifier la propriété de transversalité. D'autres expressions de fonctions transverses peuvent, par exemple, être obtenues en utilisant l'approximation homogène[3] du système (voir (Morin et Samson, 2003) pour de tels exemples). Ainsi, en prenant l'approximation homogène $\tilde{X}_i(r)$ des champs de vecteurs $X_i(r)$ de l'unicycle donnés par (1.19) autour de l'origine $r_0 = 0$, c'est-à-dire $\tilde{X}_1(r) = (1\ \theta\ 0)^T$ et $\tilde{X}_2 = (0\ 0\ 1)^T$, nous obtenons la famille de fonctions transverses suivantes :

$$\forall \alpha \in \mathbb{S},\ f(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sin\alpha \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\sin 2\alpha}{4} \\ \varepsilon_2 \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 \in (0, \frac{\pi}{2}) \tag{2.7}$$

Afin d'illustrer l'intérêt pratique des fonctions transverses pour la synthèse de retours d'état, nous pouvons considérer l'objectif de stabilisation pratique d'un point du groupe G pour un système $(\mathcal{S}_0)$. Pour simplifier l'exposé, nous supposons le groupe muni d'une carte en ce point.

3. voir (Hermes, 1991) pour une définition du concept de système homogène.

Proposition 2 *Soit un système* $(\mathcal{S}_0)$ *sur un groupe de Lie* G*, supposé commandable et invariant à gauche. Soit* $f : \mathbb{T}^{n-m} \to \mathcal{U} \subset G$*, avec* $\mathcal{U}$ *un voisinage de l'élément neutre du groupe, une fonction transverse pour* $(\mathcal{S}_0)$*. Alors le retour d'état dynamique défini par :*

$$\begin{pmatrix} u \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = H^{-1}(\alpha) dL_{\bar{r}^{-1}}(r) dR_{f(\alpha)}(\bar{r}) Z(\bar{r}) \tag{2.8}$$

avec $\bar{r} := r f^{-1}(\alpha)$*,* $\alpha \in \mathbb{T}^{n-m}$*, la matrice* $H(\alpha)$ *de transversalité donnée par* (2.2)*, et* Z *un champ de vecteur quelconque sur* G*, conduit en boucle fermée à la relation suivante :*

$$\dot{\bar{r}} = Z(\bar{r}) \tag{2.9}$$

Par conséquent, si le champ Z *est choisi de sorte à stabiliser asymptotiquement l'élément neutre* e *pour le système* (2.9)*, alors toute solution* $r(.)$ *du système commandé, initialisée à l'intérieur du domaine où* Z *est stabilisant pour* $\bar{r}$*, converge vers l'image du tore* $\mathbb{T}^{n-m}$ *par* f*.*

La preuve de cette proposition est donnée en Annexe A.2.

Dans la mesure où Z joue le rôle d'une commande auxiliaire dont le choix est libre, on peut voir cette proposition comme un résultat de linéarisation par retour d'état de l'équation d'évolution associé à l'état $\bar{r}$. Le choix d'une fonction transverse dont l'image est contenue dans $\mathcal{B}_G(e, \varepsilon)$ permet à r d'approcher e d'aussi près que l'on veut en choisissant ε aussi petit que nécessaire.

2.4 Concept de repère compagnon omnidirectionnel

Nous montrons dans cette partie comment les outils définis précédemment, appliqués au cas d'un véhicule de type unicycle ou de type voiture, permettent d'associer conceptuellement un repère omnidirectionnel (c'est-à-dire non contraint cinématiquement) arbitrairement proche du repère lié au corps du véhicule.

Définition 7 (Repère compagnon) *Soit* $z = (r_b, s)$ *la configuration d'une plate-forme dont le modèle cinématique définit un système* $(\mathcal{V}_0)$ *sur une variété* $N = SE(2) \times S$*. Soit* $f = (r_f,\ s_f)$ *une fonction transverse associée. Nous appelons* repère compagnon *du repère* $\mathcal{F}_b$ *de situation* r_b *le repère* $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$ *de situation* $\bar{r}_b := r_b r_f^{-1}$*.*

Remarque 8 Lorsque le repère $\mathcal{F}_b$ associé à la plate-forme est lui-même omnidirectionnel, nous pouvons prendre pour f l'application nulle. Dans ce cas, les repères $\mathcal{F}_b$ et $\mathcal{F}_{\bar{b}}$

coïncident. Ce cas présente en soi peu d'intérêt, si ce n'est pour souligner que l'approche proposée s'applique indifféremment au cas de plates-formes omnidirectionnelles ou non-holonomes.

La stabilisation d'une trajectoire de référence quelconque pour une plate-forme omnidirectionnelle étant un problème plus aisé que la résolution de ce même problème pour une plate-forme non-holonome, l'idée sous-jacente est de commander le repère omnidirectionnel compagnon ainsi défini en lieu et place du repère du véhicule non-holonome. La distance entre le repère $\mathcal{F}_b$ et son repère compagnon pouvant être choisie (via le choix de la « taille » de l'espace-image $\mathcal{B}_G(e,\varepsilon)$ du tore par la fonction r_f) aussi proche de zéro que souhaité, la stabilisation « exacte » du repère compagnon entraîne la stabilisation *pratique* du repère $\mathcal{F}_b$ sur la trajectoire de référence.

Il s'agit maintenant de justifier l'introduction du repère compagnon $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$, et son intérêt pour la commande du repère non-holonome « voisin » $\mathcal{F}_b$, en montrant son caractère omnidirectionnel (ce qui est une conséquence de la relation plus générale (2.9)). Dans la suite de cette section, nous illustrons cette approche par son application aux cas des véhicules de type unicycle et de type voiture.

2.4.1 Cas d'une plate-forme de type unicycle

Nous rappelons que le modèle cinématique du déplacement du repère $\mathcal{F}_b$ de situation r_b associé à la plate-forme de type unicycle définit un système $(\mathcal{S}_0)$ sur le groupe de Lie $SE(2)$

$$\dot{r_b} = X_1(r_b)v_{b,1} + X_2\omega_b \tag{2.10}$$

avec les champs de vecteurs :

$$\begin{cases} X_1(r_b) &= (\cos\theta_b \ \sin\theta_b \ 0)^T \\ X_2 &= (0 \ 0 \ 1)^T \end{cases}$$

Ce système est invariant à gauche sur $SE(2)$. L'équation précédente s'écrit également :

$$\dot{r_b} = \bar{R}(\theta_b)u_b \tag{2.11}$$

avec $u_b = (v_{b,1} \ 0 \ \omega_b)^T$. Le Théorème 6 assure l'existence de fonctions transverses pour ce système. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T},\mathcal{U} \subset G)$ une telle fonction, avec $\mathcal{U}$ un voisinage de l'élément neutre de $SE(2)$, dont deux expressions (2.6) et (2.7) ont été données précédemment (cf

Section 2.3.2). Puisque $f(\alpha)$ est un élément de $SE(2)$, il admet une décomposition de la forme :

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} p_f(\alpha) \\ \theta_f(\alpha) \end{pmatrix}$$

avec $p_f(\alpha) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta_f(\alpha) \in \mathcal{S}^1$. Le repère compagnon $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$ est caractérisé par sa situation $\bar{r}_b(\alpha)$ définie par :

$$\bar{r}_b(\alpha) := r_b(f(\alpha))^{-1} = \begin{pmatrix} p_b - R(\theta_b - \theta_f(\alpha))p_f(\alpha) \\ \theta_b - \theta_f(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{p}_b \\ \bar{\theta}_b \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Le vecteur des coordonnées de l'origine de ce repère, exprimé dans la base du repère $\mathcal{F}_b$ est :

$$-R(-\theta_f(\alpha))p_f(\alpha)$$

Avec la distance entre les repères $\mathcal{F}_b$ et $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$ définie par (1.8), nous obtenons :

$$\mathrm{d}(\mathcal{F}_b, \mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)) = \mathrm{d}(r_b, \bar{r}_b(\alpha)) = \mathrm{d}(r_b, r_b(f(\alpha))^{-1}) = \mathrm{d}(e, (f(\alpha))^{-1}) = \mathrm{d}(f(\alpha), e)$$

Par conséquent,

$$\forall \alpha \in \mathbb{T}, \qquad \mathrm{d}(\mathcal{F}_b, \mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)) = \sqrt{\|p_f(\alpha)\|^2 + 2(1 - \cos\theta_f(\alpha))} \leqslant \sup_{\alpha} \mathrm{d}(f(\alpha), e)$$

A partir de (1.5), nous établissons aisément l'équation suivante pour la cinématique du repère compagnon $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$:

$$\dot{\bar{r}}_b = \bar{R}(\bar{\theta}_b)\bar{u}_b \tag{2.13}$$

avec

$$\bar{u}_b := \begin{pmatrix} I_2 & -Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{R}(\theta_f(\alpha)) & -\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_b \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

A partir de maintenant, $\dot{\alpha}$ peut être considéré comme une variable de commande supplémentaire utilisée pour contrôler le mouvement du repère $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$. Le repère $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$ est omnidirectionnel à condition que $\bar{u}_b$ puisse être rendu égal à un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire à condition que l'application $(u_b, \dot{\alpha}) \longmapsto \bar{u}_b$ soit surjective).

La deuxième composante de u_b (c'est-à-dire $v_{b,2}$) étant nulle, nous réduisons (2.14) à :

$$\bar{u}_b = \begin{pmatrix} I_2 & -Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H(\alpha) \begin{pmatrix} v_{b_1} \\ \omega_b \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \bar{H}(\alpha) \begin{pmatrix} v_{b_1} \\ \omega_b \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

avec

$$H(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\theta_f(\alpha) & 0 & -\frac{\partial x_f}{\partial \alpha}(\alpha) \\ \sin\theta_f(\alpha) & 0 & -\frac{\partial y_f}{\partial \alpha}(\alpha) \\ 0 & 1 & -\frac{\partial \theta_f}{\partial \alpha}(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{H}(\alpha) := \begin{pmatrix} I_2 & -Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H(\alpha) \tag{2.16}$$

La fonction f étant transverse, la matrice de transversalité $H(\alpha)$ est inversible. Il en résulte que la matrice $\bar{H}(\alpha)$ est aussi inversible, et que l'application $(v_{b,1}, \omega_b, \dot{\alpha}) \mapsto \bar{u}_b$ est bijective. Ceci implique que $\bar{u}_b$ peut être rendu égal à n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$, et établit le caractère omnidirectionnel du repère compagnon $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$.

D'après ce qui précède, quel que soit le mouvement de $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$, la distance entre les repères $\mathcal{F}_b$ et $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$ n'excède jamais $\sup_\alpha \mathrm{d}(f(\alpha), e)$, une limite qui peut être rendue arbitrairement petite (mais non nulle) via le choix des paramètres $\varepsilon_{i,j}$ intervenant dans l'expression de la fonction transverse dans le Théorème 6.

2.4.2 Cas d'une plate-forme de type voiture

Rappelons que le modèle cinématique (1.21)-(1.25) de la voiture est :

$$\begin{cases} \dot{x}_b &= v_{b,1}\cos\theta_b \\ \dot{y}_b &= v_{b,1}\sin\theta_b \\ \dot{\theta}_b &= v_{b,1}s \\ \dot{s} &= v_s \end{cases} \tag{2.17}$$

avec $s = (\tan\varphi)/\ell$ (voir la Figure 1.3).

Le système (2.17) peut se ré-écrire (comparer avec (2.11)) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{r}_b &= \bar{R}(\theta_b)u_b \\ \dot{s} &= v_s \end{cases} \tag{2.18}$$

avec $u_b = (v_{b,1}\ 0\ v_{b,1}s)^T$. Considérons maintenant une fonction transverse

$$f : \alpha \longmapsto f(\alpha) = \begin{pmatrix} p_f(\alpha) \\ \theta_f(\alpha) \\ s_f(\alpha) \end{pmatrix}$$

de $\mathbb{T}^2$ dans $SE(2) \times \mathbb{R}$ (c'est-à-dire $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$). D'après la Définition 7, la situation

$\bar{r}_b(\alpha)$ est toujours définie comme dans (2.12), à savoir

$$\bar{r}_b(\alpha) := \begin{pmatrix} p_b - R(\theta_b - \theta_f(\alpha))p_f(\alpha) \\ \theta_b - \theta_f(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{p}_b \\ \bar{\theta}_b \end{pmatrix}$$

et l'équation (2.13)

$$\dot{\bar{r}}_b = \bar{R}(\bar{\theta}_b)\bar{u}_b$$

est désormais satisfaite avec :

$$\bar{u}_b := \begin{pmatrix} I_2 & -Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{R}(\theta_f(\alpha)) & -\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_1}(\alpha) & -\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_b \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix}$$

Pour un véhicule de type voiture, en utilisant le fait que $u_b = (v_{b,1}\ 0\ v_{b,1}s)^T$, l'équation précédente s'écrit également :

$$\bar{u}_b := \begin{pmatrix} I_2 & -Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_r(\alpha) \begin{pmatrix} v_{b,1} \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_2 & -Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{b,1}(s - s_f(\alpha)) \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

avec

$$H_r(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\theta_f(\alpha) & -\frac{\partial x_f}{\partial \alpha_1}(\alpha) & -\frac{\partial x_f}{\partial \alpha_2}(\alpha) \\ \sin\theta_f(\alpha) & -\frac{\partial y_f}{\partial \alpha_1}(\alpha) & -\frac{\partial y_f}{\partial \alpha_2}(\alpha) \\ s_f(\alpha) & -\frac{\partial \theta_f}{\partial \alpha_1}(\alpha) & -\frac{\partial \theta_f}{\partial \alpha_2}(\alpha) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

L'inversibilité de cette matrice est assurée pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^2$ du fait de la propriété de transversalité de la fonction f. En effet, il suffit de remarquer que $H_r(\alpha)$ est la matrice extraite de la matrice de transversalité $H(\alpha)$ associée à f en supprimant la dernière ligne et la deuxième colonne, et que le développement du déterminant de $H(\alpha)$ selon la dernière ligne donne $\det H_r(\alpha) = \det H(\alpha)$.

Rappelons que s_f désigne la dernière composante de la fonction f. Puisque $\dot{s} = v_s$, le choix

$$v_s := -k_s(s - s_f(\alpha)) + \dot{s}_f(\alpha) \qquad (k_s > 0) \tag{2.21}$$

assure la stabilisation exponentielle de $\bar{s} := s - s_f(\alpha)$ en zéro. Par conséquent, il suffit que $v_{b,1}$ soit borné pour que le second terme dans le membre de droite de (2.19) converge lui aussi exponentiellement vers zéro. Après cette phase transitoire, qu'un choix adéquat

du gain k_s peut rendre arbitrairement courte, la relation (2.19) devient :

$$\bar{u}_b = \begin{pmatrix} I_2 & -Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_r(\alpha) \begin{pmatrix} v_{b,1} \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Cette relation montre que, le long de la zéro-dynamique de $\bar{s}$, la vitesse $\bar{u}_b$ peut être rendue égale à tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ via un choix adéquat de $v_{b,1}$, $\dot{\alpha_1}$ et $\dot{\alpha_2}$, d'où l'omnidirectionnalité du repère compagnon $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$.

Indiquons pour terminer une famille de fonctions transverses pour la plate-forme de type voiture proposée dans (Morin et Samson, 2004b) :

Lemme 2 *(Morin et Samson, 2004b) Pour tout $\varepsilon > 0$, et η_1, η_2, η_3 tels que*

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0 \quad \text{et} \quad 6\eta_2\eta_3 > 8\eta_3 + \eta_1\eta_2 \tag{2.23}$$

la fonction f définie par

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1(\alpha) \\ \bar{f}_4(\alpha) \\ \arctan(\bar{f}_3(\alpha)) \\ \bar{f}_2(\alpha)\cos^3 f_3(\alpha) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

en utilisant la fonction $\bar{f} : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$\bar{f}(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\sin\alpha_1 + \eta_2 \sin\alpha_2) \\ \varepsilon\eta_1 \cos\alpha_1 \\ \varepsilon^2\left(\frac{\eta_1 \sin 2\alpha_1}{4} - \eta_3 \cos\alpha_2\right) \\ \varepsilon^3\left(\eta_1 \frac{\sin^2\alpha_1 \cos\alpha_1}{6} - \frac{\eta_2\eta_3 \sin 2\alpha_2}{4} - \eta_3 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2\right) \end{pmatrix}$$

satisfait à la condition de transversalité $\det H(\alpha) \neq 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{T}^2$.

Remarquons que la famille de fonctions transverses définie dans ce lemme possède la propriété que la norme de $\bar{f}$ (et donc la distance de r_b à $\bar{r}_b$) tend vers zéro quand ε tend vers zéro. Par conséquent, il est possible de rendre la distance de $\mathcal{F}_b$ au repère compagnon $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$ arbitrairement petite.

Remarque 9 Il est possible d'obtenir un résultat similaire avec des systèmes plus complexes. Citons notamment le chariot à N remorques avec attaches centrées, dont le modèle

cinématique peut se mettre sous la forme $(\mathcal{V}_0)$ sur une variété $N = SE(2) \times S$ (voir (Morin, 2004)) :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{x}_b & = & v_{b,1} \cos\theta_b & \\ \dot{y}_b & = & v_{b,1} \sin\theta_b & \\ \dot{\theta}_b & = & v_{b,1} s_1 & \\ \dot{s}_i & = & v_{b,1} s_{i+1}, & (i = 1, \ldots, N-1) \\ \dot{s}_N & = & v_s & \end{array} \right. \tag{2.25}$$

Ce modèle est du même type que le modèle utilisé pour la voiture, avec un sous-système chaîné correspondant à la cinématique de la variable interne $s := (s_1, \cdots, s_N)^T \in S = \mathbb{R}^N$. Les champs de vecteurs de ce système associés aux variables de commande $v_{b,1}$ et v_s sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{rcc} X_1(r_b, s) & = & (\cos\theta_b, \sin\theta_b, s_1, \cdots, s_N, 0)^T \\ X_2 & = & (0, \cdots, 0, 1)^T \end{array} \right.$$

La propriété de commandabilité est facilement obtenue en vérifiant que la condition de rang de l'algèbre de Lie est satisfaite (à partir des champs $X_1, X_2, [X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]]$, $\cdots$). Le Théorème 5 garantit alors l'existence de fonctions transverses aux champs de commande de ce système. Comme dans le cas de la voiture, il est possible d'imposer la convergence exponentielle de $s_N - f_{N+3}(\alpha)$ vers zéro, et, de proche en proche, la convergence exponentielle de $\bar{s} := s - s_f(\alpha)$ vers zéro. Une fois sur la zéro-dynamique de $\bar{s}$, l'application $(v_{b,1}, \dot{\alpha}) \mapsto \bar{u}_b$ est surjective, et le repère compagnon $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$, de situation $\bar{r}_b$ définie par $\bar{r}_b := r_b r_f^{-1}$, associé au repère du chariot de situation r_b peut être considéré comme un repère omnidirectionnel.

2.5 Conclusion

Nous avons d'abord montré que le choix d'une stratégie de coordination des mouvements entre la plate-forme mobile et le bras manipulateur requiert —génériquement— de commander la plate-forme à la fois en position et en orientation. De plus, la trajectoire à stabiliser est généralement inconnue à l'avance et n'est pas nécessairement réalisable par un véhicule non-holonome. L'apparente simplicité des modèles cinématiques associés aux véhicules à roues, présentés au chapitre précédent, cache en réalité des problèmes de commande complexes. Notamment, les solutions classiques au problème posé par le contrôle de la plate-forme tel que nous l'avons déterminé ne sont pas entièrement satisfaisantes.

Nous avons mis en évidence l'adéquation entre l'objectif de coordination de mouvements entre la plate-forme mobile et le bras manipulateur embarqué et la relaxation de l'objectif de stabilisation asymptotique de trajectoires pour la plate-forme en un objectif de stabilisation pratique. Cet objectif présente de plus l'avantage, par rapport aux lois de commande classiques pour des systèmes non-holonomes, de permettre la stabilisation de trajectoires non-réalisables.

Nous avons montré qu'une approche de commande idoine est fournie par la récente approche de commande par fonctions transverses pour les systèmes affines en la commande et sans dérive. Cet outil est donc adapté à l'objectif de stabilisation pratique d'une trajectoire de référence quelconque (c'est-à-dire réalisable ou non) pour des véhicules à roues non-holonomes. Dans le cadre de la manipulation mobile, nous nous intéressons particulièrement à la stabilisation d'une trajectoire dans l'espace des mouvements rigides dans le plan ou dans l'espace. C'est la raison pour laquelle nous avons adapté l'approche par fonctions transverses en définissant le concept de repère compagnon associé à une plate-forme—omnidirectionnelle ou non-holonome— et à une fonction transverse. Nous avons démontré l'existence, au moins pour certaines plates-formes courantes comme les véhicules de type unicycle ou voiture, d'un repère compagnon omnidirectionnel, c'est-à-dire d'un véhicule virtuel aussi proche de la plate-forme porteuse que désiré, et qui possède la propriété —utile au niveau de la commande— d'être omnidirectionnel.

Avec ces outils, il est maintenant possible d'envisager des méthodologies unifiées pour le contrôle de manipulateurs mobiles dotés indifféremment de bases mobiles omnidirectionnelles ou non-holonomes, en choisissant de commander le repère omnidirectionnel compagnon en lieu et place du véhicule non-holonome qui porte le bras manipulateur. Il est possible de voir cette approche comme une manière de substituer le problème initial de contrôle d'un système non-holonome par un problème plus classique de contrôle d'un système « voisin » omnidirectionnel.

Chapitre 3

Approche de commande par système omnidirectionnel équivalent

Contenu du chapitre

3.1 Introduction 54

3.2 Principe de l'approche 54

3.3 Fonctions de tâche pour les manipulateurs mobiles holonomes 57

3.3.1 Rappels sur l'approche par fonction de tâche 57

3.3.2 Tâche de manipulation et tâche globale 59

3.3.3 Synthèse de tâche globale par minimisation d'une fonction de coût 63

3.3.4 Synthèse de tâche globale par minimisation d'un coût secondaire sous contrainte 68

3.4 Synthèse de commande par système omnidirectionnel équivalent 69

3.4.1 Définition et existence de systèmes omnidirectionnels équivalents 70

3.4.2 Application à la synthèse de lois de commande 73

3.5 Application au cas d'un bras RPR sur une plate-forme de type unicycle 75

3.6 Conclusion 83

3.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une première méthode pour la commande des manipulateurs mobiles. Le principe de l'approche, que nous exposerons plus en détail dans la prochaine section, consiste à associer au manipulateur mobile un autre manipulateur (virtuel) composé d'une base omnidirectionnelle et d'un bras manipulateur de même type que celui du manipulateur de départ. Pour qu'une telle association soit utile du point de vue de la commande, on demande que les deux systèmes soient équivalents au sens où la réalisation de l'objectif de manipulation considéré pour un des deux manipulateurs entraîne automatiquement la réalisation de cet objectif pour l'autre manipulateur. Dès lors, il devient en théorie possible de se limiter à la commande du manipulateur virtuel ; celui-ci étant de type holonome, on comprend l'intérêt d'une telle méthode lorsque le manipulateur de départ est non-holonome. Cette approche peut être vue comme une généralisation du concept de repère compagnon omnidirectionnel (défini dans le chapitre précédent pour les bases mobiles non-holonomes), au sens où l'on est également amené à définir un bras manipulateur « compagnon » du bras manipulateur de départ.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous présentons plus en détail le principe de cette approche dans la Section 3.2. La Section 3.3 est consacrée à la commande des manipulateurs mobiles holonomes. La méthode de synthèse de commande proposée dans cette section, qui s'appuie sur l'approche par "fonctions de tâche" (Samson et al., 1991), est notamment utilisée pour la commande du manipulateur virtuel holonome évoqué ci-dessus. Nous utiliserons également certains éléments de cette méthode dans le Chapitre 4. La Section 3.4 est la partie centrale de ce chapitre. Nous commençons par y définir le concept de système omnidirectionnel équivalent ; nous donnons ensuite une condition d'existence d'un tel système ; puis nous montrons comment l'on peut calculer des commandes pour un manipulateur mobile non-holonome à partir d'un système omnidirectionnel équivalent associé. Enfin, des exemples d'application de cette approche sont traités en Section 3.5.

3.2 Principe de l'approche

Considérons l'application illustrée par la figure 3.1. L'objectif est de contrôler la position et l'orientation du repère $\mathcal{F}_e$ lié à l'effecteur du manipulateur, par rapport un repère $\mathcal{F}_d$ associé à une cible mobile. La configuration relative désirée entre les deux repères est celle représentée sur le schéma. Le manipulateur mobile, représenté en traits pleins, est constitué d'une base non-holonôme (de type unicycle par exemple) et d'un bras mani-

pulateur de type RRR. Le système virtuel représenté en traits pointillés [1] correspond à un système omnidirectionnel équivalent. Il est constitué d'une base mobile holonôme, et d'un bras RRR de même géométrie que celle du manipulateur non-holonome. Par définition, la réalisation de l'objectif de suivi considéré doit être obtenu simultanément pour le manipulateur non-holonome et pour le système omnidirectionnel. Dans le cas particulier de cet exemple, ceci signifie que les situations des deux effecteurs sont confondues dès lors qu'un des deux atteint la situation désirée. Lorsque l'objectif de suivi n'est pas exactement réalisé, il est par contre possible que les situations des effecteurs diffèrent.

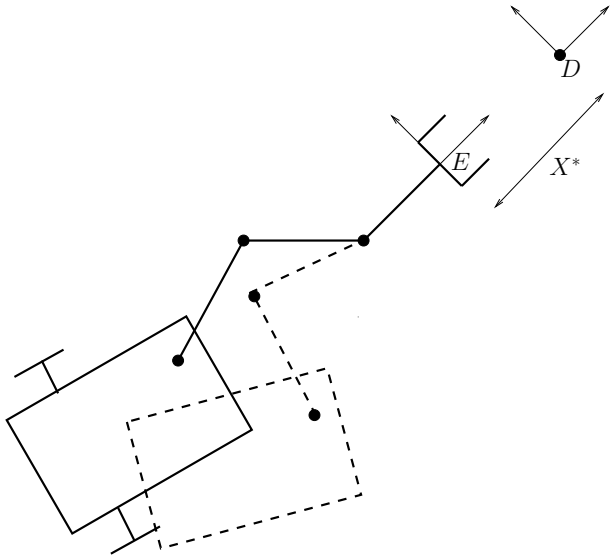


Figure 3.1 – Système omnidirectionnel équivalent

Cet exemple simple suggère une stratégie de commande en deux étapes pour les manipulateurs mobiles non-holonomes.

Étape 1 : Définition d'un système omnidirectionnel équivalent. Dans un premier temps, il convient de définir une « fonction de tâche de manipulation [2] » $e_m(q, r_b, t)$ (avec r_b la situation de la base mobile du manipulateur), telle que $e_m(q, r_b, t) = 0$ si et seulement si l'objectif de manipulation est réalisé. Une fois cette fonction choisie, la définition d'un système omnidirectionnel équivalent consiste à trouver $\bar{q}$ et $\bar{r}_b$, fonctions entre autre de q et r_b, tels que *i)* la variable $\bar{r}_b$ n'est sujette à aucune contrainte cinématique (i.e. la base mobile virtuelle de configuration $\bar{r}_b$ est omnidirectionnelle), et *ii)* $e_m(q, r_b, t) = 0$ si et

1. Le dernier axe et l'effecteur de ce système sont confondus avec ceux du manipulateur mobile non-holonôme.

2. Voir la section suivante pour une définition plus précise.

seulement si $e_m(\bar{q}, \bar{r}_b, t) = 0$. Le chapitre précédent fournit directement une solution pour le choix de $\bar{r}_b$, donnée par la configuration d'un repère compagnon $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$ associé à une fonction transverse pour la base mobile du manipulateur. La question du choix de $\bar{q}$ sera abordée en Section 3.4. Dès lors qu'un système omnidirectionnel équivalent a été défini, la régulation à zéro de la fonction de tâche de manipulation e_m le long des solutions de ce système suffit à assurer la réalisation de l'objectif de commande pour le manipulateur mobile.

Étape 2 : Commande du système omnidirectionnel équivalent. Bien que ce système soit assimilable à un manipulateur mobile holonome, la détermination de lois de commande permettant de réguler une fonction de tâche de manipulation à zéro le long des solutions du système n'est pas un problème simple. Ceci nécessite en effet, pour la plupart des applications, de traiter des problèmes de redondance et de singularité de la fonction de tâche. En outre, il est également nécessaire en pratique de traiter le problème d'évitement des butées articulaires. La régulation à zéro d'une fonction de tâche de manipulation e_m ne garantit pas, a priori, d'éviter l'occurrence de telles difficultés. La démarche adoptée dans ce chapitre consiste à associer à e_m une « fonction de tâche globale » e qui, idéalement, vérifie les propriétés suivantes :

1. e est une fonction vectorielle de dimension $\dim(\bar{q}) + \dim(\bar{r}_b) = \dim(q) + \dim(r_b)$ et sa « jacobienne » par rapport à $\bar{q}$ et $\bar{r}_b$ (i.e. la matrice $(\frac{\partial e}{\partial \bar{q}}(\bar{q}, \bar{r}_b, t)\ \frac{\partial e}{\partial \bar{r}_b}(\bar{q}, \bar{r}_b, t))$) est inversible pour tout $(\bar{q}, \bar{r}_b, t)$ dans un « large domaine »,

2. les butées articulaires ne peuvent être atteintes tant que e reste bornée,

3. e est « compatible » avec e_m, au sens où la régulation de e à zéro implique la régulation de e_m à zéro.

Comme nous le verrons dans la prochaine section, les propriétés 1 et 2 permettent de définir une loi de commande pour le système omnidirectionnel équivalent, bien définie le long des solutions du système, qui assure la convergence de e vers zéro. La propriété 3 implique alors la convergence de e_m vers zéro pour ce système, d'où l'on déduit la réalisation de l'objectif de manipulation pour le manipulateur mobile de départ.

Il convient maintenant de détailler chacune de ces deux étapes. Nous commençons par l'étape 2.

3.3 Fonctions de tâche pour les manipulateurs mobiles holonomes

Tout au long de cette section, nous considérons un manipulateur mobile holonome de configuration (q, r) dont les équations cinématiques sont données par :

$$\begin{cases} \dot{q} = u_q \\ \dot{r} = u_r \end{cases} \tag{3.1}$$

L'approche par fonction de tâche (Samson et al., 1991) a été initialement développée pour la commande des robots manipulateurs. Nous rappelons ci-dessous quelques notions de base de cette approche pour de tels systèmes.

3.3.1 Rappels sur l'approche par fonction de tâche

Pour un robot manipulateur de configuration q, l'approche par fonction de tâche consiste à associer à chaque problème de commande une « fonction de tâche » $e(q, t)$, à valeur dans $\mathbb{R}^{n_q}$, telle que $e(q, t) = 0$ si et seulement si l'objectif de commande est exactement réalisé. Toute trajectoire $q^*(.)$ définie sur un intervalle de temps $[0, T]$ et telle que $e(q^*(t), t) = 0 \ \forall t \in [0, T]$ est appelée « trajectoire de référence ».

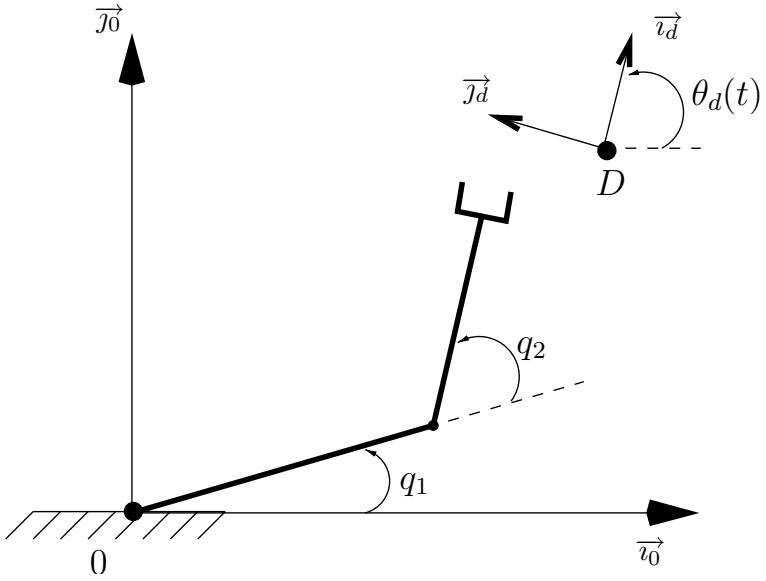


Figure 3.2 – Manipulateur plan deux axes sur base fixe

Exemple 6 (Manipulateur fixe) Considérons le manipulateur représenté sur la Figure 3.2, de configuration $q = (q_1, q_2)^T \in \mathbb{T}^2$. L'objectif de commande est le suivi de l'orientation θ_d de la cible D par l'effecteur du bras, et la régulation de q_1 à zéro. Une fonction de tâche associée est donnée tout simplement par

$$e(q,t) = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 - \theta_d(t) \\ q_1 \end{pmatrix}$$

Dès lors qu'une fonction de tâche e a été définie, l'approche de commande consiste à réguler e à zéro. Il existe évidemment une infinité de fonctions de tâche possibles pour un problème de commande donné, mais toutes ne sont pas les mieux adaptées à la synthèse de commande, et toutes ne sont pas équivalentes quand à la taille du domaine de stabilité qu'elles permettent d'obtenir pour le système contrôlé. La notion d'admissibilité a essentiellement pour but de quantifier cet aspect.

Définition 8 *Soit $e \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^{n_q})$, avec Ω un ouvert de $Q \times \mathbb{R}$, une fonction de tâche, et $\rho \geqslant 0$ une constante. La fonction e est dite « ρ-admissible » sur un domaine $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]} \subset \Omega$ si la fonction $F_e : (q,t) \longmapsto F_e(q,t) = (e(q,t),t)$ est un difféomorphisme entre $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n_q}}(0,\rho) \times [0,T]$.*

Le résultat suivant relie la propriété d'admissibilité aux caractéristiques du domaine $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ et du jacobien de la fonction e.

Proposition 3 *(Samson et al., 1991, Th. 3.1) Avec les notations de la Définition 8, e est $\rho-$*admissible *sur $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *$\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ est une composante non-vide et connexe par arcs de $F_e^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n_q}}(0,\rho) \times [0,T])$.*
2. *$\mathrm{F}_r(\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}) \cap \mathrm{F}_r(\Omega) = \varnothing$, où F_r désigne la frontière.*
3. *Il existe des constantes m_1 et m_2 positives telles que, pour tout $(q,t) \in \mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$,*
   - *i.* $\det\left(\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)\right) \neq 0$,
   - *ii.* $\left\| \left(\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)\right)^{-1} \right\| \leqslant m_1$,
   - *iii.* $\left\| \frac{\partial e}{\partial t}(q,t) \right\| \leqslant m_2$.

Remarque 10 Commentons brièvement ce résultat. Sous réserve que la Propriété 2 de la Proposition 3 soit satisfaite, et que $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ soit un sous-espace borné de $Q \times \mathbb{R}$, l'adhérence $\bar{\mathcal{D}}_{\rho,[0,T]}$ de $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ est un sous-espace compact de $Q \times \mathbb{R}$. Par conséquent, si la Propriété 3.i) est satisfaite pour tout $(q,t) \in \bar{\mathcal{D}}_{\rho,[0,T]}$, la régularité de e implique que les Propriétés 3.ii) et 3.iii) sont également satisfaites. Ainsi, la non-singularité du jacobien $\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)$ (qu'on

qualifiera aussi de non-singularité de la fonction de tâche e) est une propriété essentielle de l'admissibilité de la fonction e. L'importance de cette propriété vis-à-vis du problème de régulation de e à zéro apparaît clairement dans le résultat suivant.

Proposition 4 *Soit $e \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^{n_q})$ une fonction de tâche ρ-admissible sur un ensemble $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$, et u_q la commande par retour d'état définie par*

$$u_q = -\left(\frac{\partial e}{\partial q}(q,t)\right)^{-1}\left(Ge(q,t) + \frac{\partial e}{\partial t}(q,t)\right) \tag{3.2}$$

Alors pour tout $q(0)$ tel que $(q(0),0) \in \mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$, la trajectoire associée du système en boucle fermée est définie sur $[0,T]$, et la dérivée temporelle de e le long de cette trajectoire satisfait

$$\dot{e} = -Ge \tag{3.3}$$

En particulier, si la matrice G est définie positive, alors e est exponentiellement décroissante sur $[0,T]$.

Preuve : L'équation (3.3) découle directement de (3.2), de sorte qu'il est suffisant de montrer que les solutions sont définies sur l'intervalle $[0,T]$ tout entier. Il suffit pour cela de montrer que $\frac{\partial e}{\partial q}(q(t),t)$ est toujours inversible puisque dans ce cas, la décroissance de e et l'hypothèse $(q(0),0) \in \mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ garantissent que $(q(t),t) \in \mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ pour tout t. Supposons au contraire qu'il existe un instant t_0 tel que $\frac{\partial e}{\partial q}(q(t_0),t_0)$ n'est pas inversible. Alors, d'après la Propriété 3.i) de la Proposition 3.2, $(q(t_0),t_0) \notin \mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$. Or ceci est impossible d'après la décroissance de e et d'après la définition de $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$. ■

3.3.2 Tâche de manipulation et tâche globale

Il existe plusieurs façons d'étendre la notion de fonction de tâche rappelée ci-dessus aux manipulateurs mobiles holonomes. Nous utiliserons plus particulièrement les deux suivantes dans ce mémoire.

Tâche globale : L'extension la plus directe consiste a considérer le manipulateur mobile comme un bras manipulateur étendu sur $Q_e := Q \times SE(2)$. Les définition et propositions de la section précédente s'appliquent alors *mutatis mutandis* en remplaçant q par (q,r), et u_q par (u_q,u_r). On appelle alors « tâche globale » une tâche ρ-admissible sur un certain sous-espace $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ de $Q_e \times \mathbb{R}$. Remarquons qu'une telle fonction de tâche est à valeurs dans $\mathbb{R}^{n_q+3}$. Ainsi une fonction de tâche globale est essentiellement une fonction dont la régulation nécessite l'ensemble des degrés de liberté du système.

En notant $\frac{\partial e}{\partial r}$ la fonction telle que, le long de toute solution du système (3.1),

$$\frac{d}{dt}e(q,r,t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q,r,t)u_q + \frac{\partial e}{\partial r}(q,r,t)u_r + \frac{\partial e}{\partial t}(q,r,t)$$

on obtient, en lieu et place de la Proposition 4, le résultat suivant.

Proposition 5 *Soit e une fonction de tâche globale (i.e. ρ-admissible sur un domaine $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$) pour le manipulateur mobile holonome* (3.1)*, et (u_q, u_r) la commande par retour d'état définie par*

$$\begin{pmatrix} u_q \\ u_r \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial e}{\partial q}(q,r,t) \quad \frac{\partial e}{\partial r}(q,r,t)\right)^{-1}\left(Ge(q,r,t) + \frac{\partial e}{\partial t}(q,r,t)\right)$$

Alors pour tout $(q(0), r(0))$ tel que $(q(0), r(0), 0) \in \mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$, la trajectoire associée du système en boucle fermée est définie sur $[0,T]$, et la dérivée temporelle de e le long de cette trajectoire satisfait

$$\dot{e} = -Ge \tag{3.4}$$

En particulier, si la matrice G est définie positive, alors e est exponentiellement décroissante sur $[0,T]$.

Tâche de manipulation : Une autre possibilité consiste à assimiler $e(q,r,t)$ à une fonction de q d'une part et de la variable exogène (r,t) d'autre part (i.e. (r,t) joue alors le même rôle que t pour un bras manipulateur). On appelle alors « tâche de manipulation » une tâche associée à une fonction ρ-admissible sur un domaine $\mathcal{D}_{\rho,W}$ de $Q \times (SE(2) \times \mathbb{R})$, avec $\mathcal{D}_{\rho,W}$ une composante non-vide et connexe par arcs de $F_e^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n_q}}(0,\rho) \times W)$ et $F_e : (q,r,t) \longmapsto (e(q,r,t), r, t)$. La Définition 8 et la Proposition 3 s'étendent sans grande difficulté à ce cadre un peu plus général, à condition que $W \subset SE(2) \times \mathbb{R}$ ait les mêmes propriétés topologiques que $[0,T]$, (i.e., W doit être un sous ensemble non-vide, compact, et simplement connexe de $SE(2) \times \mathbb{R}$). Une tâche de manipulation sera notée e_m pour la distinguer d'une tâche globale e. Notons que cette définition implique que e_m est à valeurs dans $\mathbb{R}^{n_q}$, et qu'une telle fonction peut être régulée à zéro, au moins localement, par le contrôle des degrés de liberté du bras seulement. Plus précisément, la Proposition 4 suggère de définir la loi de commande

$$u_q = -\left(\frac{\partial e_m}{\partial q}(q,r,t)\right)^{-1}\left(Ge_m(q,r,t) + \frac{\partial e_m}{\partial r}(q,r,t)u_r + \frac{\partial e_m}{\partial t}(q,r,t)\right)$$

afin d'obtenir en boucle fermée $\dot{e}_m = -Ge_m$, et donc la convergence de e_m vers zéro si G est

définie positive. La ρ-admissibilité de la fonction e_m implique que cette loi de commande est bien définie sur $[0,T]$ si $(q(t),r(t),t) \in \mathcal{D}_{\rho,W}$ pour tout $t \in [0,T]$, ce qui est le cas si, par exemple, $(q(0),r(0),0) \in \mathcal{D}_{\rho,W}$ et $(r(t),t) \in W$ pour tout $t \in [0,T]$. Cependant, puisque cette condition porte sur la trajectoire $r(.)$, elle n'est a priori satisfaite que pour des choix spécifiques de la commande u_r appliquée à la base mobile.

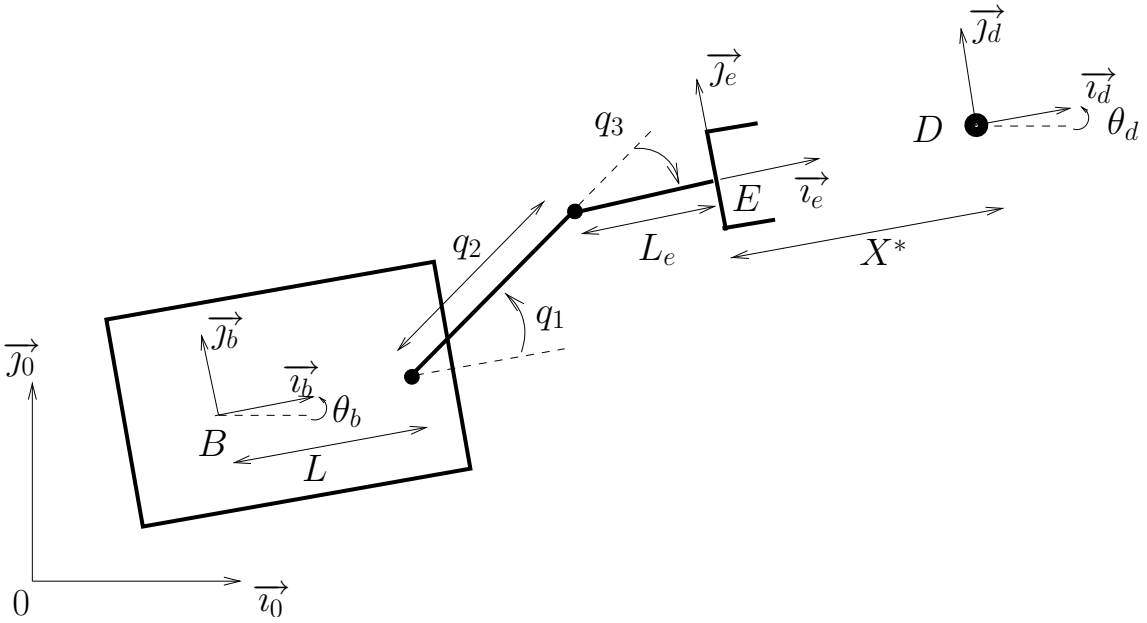


Figure 3.3 – Suivi dans $SE(2)$

Exemple 7 Nous illustrons la notion de fonction de tâche de manipulation sur le manipulateur mobile schématisé sur la Figure 3.3, composé d'une plate-forme omnidirectionnelle munie d'un bras manipulateur trois axes de type RPR. L'espace de configuration du bras est donné par $Q = \prod_{i=1}^{3}(q_i^-, q_i^+)$, avec $q_2^- > 0$ et $-q_3^- = q_3^+ < \frac{\pi}{2}$. L'objectif de contrôle consiste à stabiliser la posture relative r_{ed} de la cible D par rapport au repère associé à l'organe terminal du bras à une valeur de référence $r_{ed}^* = (X^*, 0, 0)^T$. En d'autres termes, la réalisation de cet objectif de contrôle implique que la cible paraît immobile par rapport au repère de l'effecteur, distante de ce dernier de la valeur X^*, et ce quel que soit le mouvement de la cible dans l'environnement.

Ce problème de commande consiste simplement à réguler $\tilde{r}_{ed} := (r_{ed}^*)^{-1} r_{ed}$ à zéro, ce qui suggère de considérer la fonction de tâche

$$e_m(q, r_b, t) = \tilde{r}_{ed} = (r_{ed}^*)^{-1} r_{ed} = (r_{ed}^*)^{-1} r_{eb}(q) r_b^{-1} r_d(t) \tag{3.5}$$

Comme ce problème de régulation ne fait intervenir que la situation *relative* de la base par rapport au repère désiré, il est plus simple dans ce cas de paramétrer e_m par un autre jeu de variables, en posant

$$e_m(q, r_{db}) = \tilde{r}_{ed} = (r^*_{ed})^{-1} r_{ed} = (r^*_{ed})^{-1} r_{eb}(q) r_{db}^{-1} \tag{3.6}$$

Rappelons que, d'après (1.11),

$$\dot{r}_{db} = \bar{R}(\theta_{db}) u_{db}$$

avec $u_{db} = u_b - \mathrm{Ad}_{r_{db}^{-1}} u_d$. Puisque l'application $u_b \longmapsto \bar{R}(\theta_{db}) u_{db}$ est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^3$, on peut assimiler r_{db} à la variable r du modèle (3.1). Avec les notations de la Figure 3.3, on obtient :

$$e_m(q, r_{db}) = - \begin{pmatrix} R^T(q_1 + q_3) \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} + R^T(q_3) \begin{pmatrix} q_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_e + X^* \\ 0 \end{pmatrix} + R^T(\theta_{db} + q_1 + q_3) p_{db} \\ \theta_{db} + q_1 + q_3 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Une trajectoire de référence possible $(q^*(t), r^*_{db}(t))$ est la trajectoire constante :

$$q^* = \begin{pmatrix} 0 \\ (q_2^- + q_2^+)/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r^*_{db} = \begin{pmatrix} -(L + L_e + X^* + (q_2^- + q_2^+)/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

La propriété suivante, dont la preuve est donnée en Annexe A.3.1, montre que e_m définit bien une fonction de tâche de manipulation.

Lemme 3 *Munissons le groupe de Lie $SE(2)$ de la distance définie par* (1.8)*. Soit $W_M := \mathcal{B}_G(r^*_{db}, M)$. Alors, pour tout $M \in (0, 2)$, il existe une composante connexe par arcs non-vide $\mathcal{D}_{\rho, W_M}$ de $F_{e_m}^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, \rho) \times W_M)$. En outre, il existe $M, \rho > 0$ tels que e_m est $\rho-$admissible sur la composante $\mathcal{D}_{\rho, W_M}$ pour M et ρ suffisamment petits.*

La notion de fonction de tâche de manipulation est naturelle dans le contexte des manipulateurs mobiles, car de nombreux problèmes de manipulation se ramènent à la régulation à zéro de telles fonctions. Toutefois, cette façon de poser le problème n'est pas entièrement satisfaisante :

1. Elle ne permet pas de fournir de critère pour le choix de la commande u_r de la base mobile ; autrement dit, le problème de la redondance du manipulateur mobile n'est pas traité.

2. Il peut être difficile de garantir que la commande est toujours bien définie le long des solutions du système (i.e. que le jacobien $\frac{\partial e_m}{\partial q}(q,r,t)$ est toujours inversible). Par exemple, il se peut que la fonction e_m soit ρ-admissible sur $\mathcal{D}_{\rho,W}$ mais que W ne soit pas bien connu car difficile à spécifier par le calcul (c'est souvent le cas en pratique) ; dès lors, le contrôle de la base mobile ne va pas nécessairement garantir que $(r(t),t)$ reste dans W.
3. La régulation d'une fonction de tâche de manipulation ne garantit pas a priori l'évitement des butées articulaires.

C'est pourquoi nous proposons de synthétiser, à partir d'une tâche de manipulation e_m, une tâche globale e qui soit mieux conditionnée vis-à-vis des difficultés mentionnées ci-dessus, et qui soit (si possible) compatible avec e_m au sens ou $e(q,r,t) = 0 \Longrightarrow e_m(q,r,t) = 0$. Deux méthodes de construction sont proposées dans les sous-sections suivantes.

3.3.3 Synthèse de tâche globale par minimisation d'une fonction de coût

Soit e_m une fonction de tâche de manipulation pour un manipulateur mobile. Une première approche pour synthétiser une tâche globale e associée à e_m consiste à poser

$$e(q,r,t) := \left(\frac{\partial h}{\partial q}(q,r,t) \quad \frac{\partial h}{\partial r}(q,r,t)\right)^T \tag{3.9}$$

avec h une fonction de coût positive et régulière dont la minimisation revient à annuler le jacobien $(\frac{\partial h}{\partial q}\ \frac{\partial h}{\partial r})$. Par exemple, si h est une fonction strictement convexe de (q,r) pour tout t, elle admet un unique minimum $(q^*(t),r^*(t))$, et $e(q,r,t) = 0$ si et seulement si $(q(t),r(t)) = (q^*(t),r^*(t))$. Dans ces conditions, la régulation de e à zéro est équivalente à la minimisation de h. La fonction de coût h peut être définie comme la somme de quatre fonctions de coût :

$$h(q,r,t) = h_m(q,r,t) + h_\ell(q) + h_{r,1}(q,t) + h_{r,2}(r,t) \tag{3.10}$$

La fonction h_m est associée à la fonction de tâche de manipulation, de sorte que $h_m(q,r,t) = 0$ si et seulement si $e_m(q,r,t) = 0$. Un choix naturel est

$$h_m(q,r,t) := \frac{1}{2}\|e_m(q,r,t)\|^2 \tag{3.11}$$

La fonction h_ℓ a pour but d'assurer l'évitement des butées articulaires sous la condition que e reste bornée. Par conséquent h_ℓ doit tendre vers l'infini lorsqu'une des variables q_i tend vers une de ses limites. A l'opposé, afin de permettre la compatibilité de e avec e_m, il est souhaitable que h_ℓ soit nulle lorsque tous les q_i sont éloignés de leur limites. Une définition possible consiste à poser

$$h_\ell(q) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_q} \alpha_i f_i^2(q) \qquad (\alpha_i \geqslant 0) \tag{3.12}$$

où les f_i sont des fonctions convexes définies par

$$f_i(q) := \begin{cases} \frac{(q_i^- + \delta_i - q_i)^2}{q_i - q_i^-} & \text{si } q_i \leqslant q_i^- + \delta_i \qquad\qquad (0 < \delta_i \leqslant (q_i^+ - q_i^-)/2) \\ 0 & \text{si } q_i^- + \delta_i \leqslant q_i \leqslant q_i^+ - \delta_i \\ \frac{(q_i^+ - \delta_i - q_i)^2}{q_i^+ - q_i} & \text{si } q_i \geqslant q_i^+ - \delta_i \end{cases} \tag{3.13}$$

Notons que h_ℓ est globalement convexe, et que

$$h_\ell(q) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial h_\ell}{\partial q}(q) = 0 \Longleftrightarrow q_i \in [q_i^- + \delta_i, q_i^+ - \delta_i],\ \forall i$$

Les « coûts de régularisation » $h_{r,1}$ et $h_{r,2}$ seront spécifiés plus loin. Nous supposerons seulement pour l'instant que le hessien de ces deux fonctions par rapport à q et r respectivement est positif pour tout t.

D'après les relations (3.9), (3.10), (3.11), et (3.12), il vient

$$e = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial e_m}{\partial q}\right)^T e_m + \left(\frac{\partial h_\ell}{\partial q}\right)^T + \left(\frac{\partial h_{r,1}}{\partial q}\right)^T \\ \left(\frac{\partial e_m}{\partial r}\right)^T e_m + \left(\frac{\partial h_{r,2}}{\partial r}\right)^T \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

et

$$\frac{\partial e}{\partial q, r} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial e_m}{\partial q}\right)^T \frac{\partial e_m}{\partial q} + \frac{\partial^2 h_\ell}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 h_{r,1}}{\partial q^2} & \left(\frac{\partial e_m}{\partial q}\right)^T \frac{\partial e_m}{\partial r} \\ \left(\frac{\partial e_m}{\partial r}\right)^T \frac{\partial e_m}{\partial q} & \left(\frac{\partial e_m}{\partial r}\right)^T \frac{\partial e_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_{r,2}}{\partial r^2} \end{pmatrix} + \varphi(e_m, q, r, t) \tag{3.15}$$

avec $\frac{\partial e}{\partial q,r} = (\frac{\partial e}{\partial q}\ \frac{\partial e}{\partial r})$, et φ une fonction identiquement nulle lorsque $e_m = 0$. Cette propriété de la fonction φ, combinée avec le fait que le premier terme du membre de droite de (3.15) définit une matrice positive (mais pas nécessairement strictement positive), suggère diverses possibilités pour assurer l'inversibilité du jacobien $\frac{\partial e}{\partial q,r}$ lorsque e_m est proche de zéro.

Un premier résultat, assurant à la fois l'admissibilité de la fonction de tâche e et sa compatibilité avec la fonction de tâche de manipulation e_m, est donné par la proposition suivante.

Proposition 6 *On considère la fonction de tâche* (3.9)–(3.10) *avec* $h_{r,2} = 0$*, et l'on suppose que les propriétés suivantes sont satisfaites :*

i. e_m *et* $\frac{\partial e_m}{\partial q}$ *sont bornés par rapport à* $q \in Q$ *pour tout* (r,t) *;*

ii. $(\frac{\partial e_m}{\partial r})^T e_m$ *est propre*[3] *par rapport à* r *et tend vers zéro seulement si* e_m *tend vers zéro,*

iii. $\forall (q,r,t),\ \mathrm{Rang}(\frac{\partial e_m}{\partial r}(q,r,t)) = \dim(r)(=3)$ *;*

iv. $\frac{\partial^2 h_{r,1}}{\partial q^2}(q,t) > 0$ *pour tout* (q,t)*.*

Alors, e est compatible avec e_m*, et pour tout* $T > 0$*, il existe* $\rho > 0$ *tel que e soit* ρ*-admissible sur toute composante non-vide et connexe par arcs* $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ *de* $F_e^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(0,\rho) \times [0,T])$*.*

La preuve de ce résultat est donnée en Annexe A.3.2.

Exemple 8 Considérons à nouveau le manipulateur mobile de l'exemple précédent (voir Figure 3.3). La fonction de tâche de manipulation e_m est définie par (3.7), la fonction h_ℓ est définie par (3.12)–(3.13) avec $\alpha_i = 1,\ \forall i = 1,2,3$, et l'on pose $h_{r,1}(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(q_i - q_i^*)^2$, avec par exemple $q_i^* = \frac{q_i^+ - q_i^-}{2}$. A partir de la relation (3.7), on peut vérifier que toutes les hypothèses de la Proposition 6 sont satisfaites. Par conséquent, la fonction de tâche e définie par (3.9)-(3.10) avec $h_{r,2} = 0$ est $\rho-$admissible pour un certain scalaire $\rho > 0$, et sa régulation à zéro entraîne la régulation à zéro de la fonction de tâche de manipulation e_m.

La Proposition 6 présente l'intérêt de fournir un choix de tâche globale simple. En contrepartie, la condition *iv)* de cette proposition est relativement restrictive. Elle implique que $h_{r,1}$ ne s'annule qu'en un point q^*. En particulier, si $h_\ell(q^*) = 0$, on peut vérifier à partir de (3.14) que $e(q,r,t)$ elle-même ne peut s'annuler que si $q = q^*$. Toute loi de commande basée sur la régulation de e à zéro impliquera donc la convergence de $q(t)$ vers q^*. A titre d'illustration, pour l'exemple de suivi dans $SE(2)$ considéré précédemment, ceci implique la convergence de $(q(t), r(t))$ vers (q^*, r^*) alors qu'il existe une infinité de couples (q,r) permettant de réaliser l'objectif de commande (i.e. tels que $e_m(q,r) = 0$). Ceci n'est pas très satisfaisant en pratique. Par exemple, si $e_m(q(0), r(0)) = 0$ avec

3. Rappelons qu'une fonction f est propre si pour tout compact K, $f^{-1}(K)$ est compact.

$(q(0), r(0)) \neq (q^*, r^*)$, il serait souhaitable que $(q(t), r(t))$ reste égal à $(q(0), r(0))$. Pour ce faire, il est nécessaire de considérer d'autres coûts de régularisation.

Nous proposons de choisir $h_{r,1}$ de la façon suivante :

$$h_{r,1}(q,t) := \frac{1}{2}(q - \hat{q}(t))^T \, \Gamma(t) \, (q - \hat{q}(t)) \tag{3.16}$$

avec $\Gamma(t)$ une matrice symétrique et positive pour tout t (de sorte à assurer la convexité de $h_{r,1}$), et $\hat{q}$ une *fonction filtrée* de q, implicitement définie le long des solutions du système par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{q}} &= -\sigma \frac{\hat{q} - q(t)}{\xi + \|\hat{q} - q(t)\|}, \qquad (\sigma, \xi > 0) \\ \hat{q}(0) &= q(0) \end{cases} \tag{3.17}$$

Puisque $\frac{\partial^2 h_{r,1}}{\partial q^2} = \Gamma(t) \geqslant 0$, il découle de (3.15) que ce choix est favorable à l'admissibilité de la fonction e. En outre, on déduit de (3.17) les propriétés suivantes : *i)* $\|\dot{\hat{q}}(t)\|$ est uniformément bornée, *ii)* $\|\hat{q}(t) - q(t)\|$ est petit si $\|\dot{q}(t)\|$ est petit, et *iii)* $\hat{q}(t) - q(t)$ tend vers zéro lorsque $\dot{q}(t)$ tend vers zéro. En particulier, si $h_{r,2} = 0$ (mais cette condition n'est pas nécessaire comme nous le verrons ci-dessous), la propriété *iii)* implique que toute solution constante $(q(t), r(t)) = (q_0, r_0)$ telle que $e_m(q_0, r_0) = 0$ et $h_\ell(q_0) = 0$ vérifie $e(q(t), r(t), t) = 0 \; \forall t$.

En ce qui concerne $h_{r,2}$, un choix analogue au précédent, mais tenant compte du fait que $r \in SE(2)$, est donné par

$$h_{r,2}(r,t) := \frac{1}{2}(\mathrm{d}(r, \hat{r}(t)))^2 \tag{3.18}$$

avec d la distance invariante à gauche sur $SE(2)$ donnée par (1.8), et $\hat{r}$ définie par

$$\begin{cases} \dot{\hat{r}} = \bar{R}(\hat{\theta})\hat{u}\,, \quad \hat{u}(t) = -\sigma \frac{1}{\xi + \mathrm{d}(r(t), \hat{r})} r(t)^{-1} \hat{r} \quad (\sigma, \xi > 0) \\ \hat{r}(0) = r(0) \end{cases} \tag{3.19}$$

On déduit de (3.18) et (1.8) que

$$\frac{\partial^2 h_{r,2}}{\partial r^2}(r,t) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \cos(\theta - \hat{\theta}) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Ce terme est donc strictement positif si $\theta - \hat{\theta} \in (-\pi/2, \pi/2)$. Il n'est pas difficile de montrer, à partir de (3.19), que cette condition est toujours satisfaite si $\dot{r}$ est borné et σ est choisi suffisamment grand.

Illustrons maintenant l'utilisation de ces coûts de régularisation pour l'application de

suivi dans $SE(2)$ considérée précédemment.

Exemple 9 Rappelons que la fonction de tâche de manipulation e_m est donnée par (3.7) avec $r = r_{db}$, et que les trois fonctions f_1, f_2, f_3 associées à l'évitement des butées sont définies par (3.13). La matrice $\Gamma(t)$ dans (3.16) est choisie identiquement nulle de sorte que $h_{r,1} = 0$. Il découle alors de (3.14) et (3.15) que

$$e = \begin{pmatrix} (\frac{\partial e_m}{\partial q})^T e_m + \frac{\partial h_\ell}{\partial q} \\ (\frac{\partial e_m}{\partial r})^T e_m + \frac{\partial h_{r,2}}{\partial r} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

et

$$\frac{\partial e}{\partial q, r} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial e_m}{\partial q})^T \frac{\partial e_m}{\partial q} + \frac{\partial^2 h_\ell}{\partial q^2} & (\frac{\partial e_m}{\partial q})^T \frac{\partial e_m}{\partial r} \\ (\frac{\partial e_m}{\partial r})^T \frac{\partial e_m}{\partial q} & (\frac{\partial e_m}{\partial r})^T \frac{\partial e_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_{r,2}}{\partial r^2} \end{pmatrix} + \varphi(e_m, q, r, t) \tag{3.22}$$

En utilisant (3.20) et le fait que $\frac{\partial e_m}{\partial q}$ est inversible sur Q, on déduit les propriétés suivantes :

i) si $e(q, r, t) = 0$ et $h_\ell(q) = 0$ (i.e. $q_i \in [q_i^- + \delta_i, q_i^+ - \delta_i]$), alors $e_m(q, r) = 0$; ceci suggère de choisir δ_i petit pour assurer la compatibilité de e avec e_m sur un large domaine.

ii) si $e_m(q, r) = 0$ et $\theta - \hat{\theta} \in (-\pi/2, \pi/2)$, la matrice jacobienne $(\frac{\partial e}{\partial q} \ \frac{\partial e}{\partial r})$ est inversible. En particulier, au vu de la propriété *i)*, cette propriété d'inversibilité est satisfaite lorsque $e(q, r, t) = 0$, $h_\ell(q) = 0$, et $\theta - \hat{\theta} \in (-\pi/2, \pi/2)$.

iii) l'évitement des butées articulaires du bras manipulateur est assuré tant que $\|e\|$ reste borné.

L'exemple précédent illustre bien les possibilités et les limites de construction de tâches globales. Il est très difficile d'assurer conjointement et globalement la compatibilité de e avec e_m, l'évitement des butées, et l'admissibilité de la fonction de tâche (ou du moins l'inversibilité du jacobien), car ces propriétés ont souvent tendance à être antagonistes. Le principal intérêt des coûts de régularisation introduits dans cette section est de permettre d'obtenir les propriétés de compatibilité et d'admissibilité dans un domaine « raisonnablement large » en dehors des butées. A proximité des butées par contre, la réalisation parfaite de l'objectif de manipulation doit souvent être abandonnée.

3.3.4 Synthèse de tâche globale par minimisation d'un coût secondaire sous contrainte

Nous présentons brièvement dans cette section une autre méthode de synthèse de tâche globale, basée sur le traitement de la redondance proposé dans (Samson et al., 1991, Sec. 4.2). Cette méthode consiste à minimiser, par rapport à (q, r), une fonction de coût secondaire $h_s(q, r, t)$ sous la contrainte $e_m(q, r, t) = 0$. Il est bien connu qu'une condition nécessaire pour que (q, r) soit solution d'un tel problème d'optimisation est que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_m(q,r,t) & = & 0 \\ \frac{\partial H}{\partial q,r}(q,r,t,\lambda) & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.23}$$

avec $H(q, r, t, \lambda) := h_s(q, r, t) + \lambda^T e_m(q, r, t)$ le lagrangien associé à cette minimisation, et λ le vecteur des n_q multiplicateurs de Lagrange. Le résultat suivant fournit une fonction de tâche globale candidate associée à ce problème d'optimisation sous contrainte.

Proposition 7 *(Samson et al., 1991, Lemmes 4.2, 4.3) Soit e_m une fonction de tâche de manipulation, h_s une fonction de coût secondaire, et $P_m(q, r, t) := I - W^T(WW^T)^{-1}$ le projecteur orthogonal sur* $\ker(\frac{\partial e_m}{\partial q,r})$*, avec $W := C\frac{\partial e_m}{\partial q,r}$ où C est une matrice carrée inversible. Posons*

$$e(q,r,t) := \frac{\partial e_m}{\partial q,r}(q,r,t)^T e_m(q,r,t) + \beta(q,r,t) P_m(q,r,t) \frac{\partial h_s}{\partial q,r}(q,r,t) \tag{3.24}$$

avec β une fonction à valeurs réelles ne s'annulant jamais. Alors,

1. *Si $\frac{\partial e_m}{\partial q,r}(q,r,t)$ est de rang plein pour tout (q,r,t), alors les conditions nécessaires d'optimalité* (3.23) *sont équivalentes à $e = 0$ et, par suite, e est compatible avec e_m.*
2. *Si $\frac{\partial e_m}{\partial q,r}(q^*,r^*,t)$ est de rang plein, et $e(q^*,r^*,t) = 0$, alors $\frac{\partial e}{\partial q,r}(q^*,r^*,t)$ est inversible si,*

$$x^T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial (q,r)^2}(q^*,r^*,t,\lambda^*) \right) x > 0 \quad \text{pour } 0 \neq x \in \ker\left(\frac{\partial e_m}{\partial q,r}(q^*,r^*,t) \right) \tag{3.25}$$

avec

$$\lambda^* := -\left(\left(\frac{\partial e_m}{\partial q,r} (\frac{\partial e_m}{\partial q,r})^T \right)^{-1} \frac{\partial e_m}{\partial q,r} (\frac{\partial h_s}{\partial q,r})^T \right) (q^*,r^*,t) \tag{3.26}$$

Illustrons l'application de la Proposition 7 au problème de suivi dans $SE(2)$. La fonction de tâche de manipulation e_m, qui dépend de q et $r = r_{db}$ seulement, est définie par la relation (3.7).

Exemple 10 Posons

$$h_s(q, r, t) = h_s(q) = \frac{1}{2}(q_1^2 + (q_2 - q_2^*)^2 + q_3^2) \tag{3.27}$$

et rappelons que $\frac{\partial e_m}{\partial q,r}(q, r)$ est de rang plein pour tout (q, r). Si $(q^*(t), r^*(t), t)$ est une trajectoire de référence pour e, alors il découle de la Propriété 1 de la Proposition 7 que $(q^*(t), r^*(t))$ est également une trajectoire de référence pour e_m. En utilisant cette propriété, nous pouvons exhiber une base $\{v_1(q^*), v_2(q^*), v_3(q^*)\}$ de $\ker(\frac{\partial e_m}{\partial q,r})$ en (q^*, r^*), définie par :

$$\begin{cases} v_1(q) = (1\ 0\ 0\ L\sin(q_1 + q_3)\ L\cos(q_1 + q_3)\ -1)^T \\ v_2(q) = (0\ 1\ 0\ -\cos q_3\ \sin q_3\ 0)^T \\ v_3(q) = (0\ 0\ 1\ L\sin(q_1 + q_3) + q_2 \sin q_3\ L\cos(q_1 + q_3) + q_2 \cos q_3\ -1)^T \end{cases} \tag{3.28}$$

Partant du fait que $\frac{\partial h_s}{\partial q,r}$ est orthogonal à $\ker(\frac{\partial e_m}{\partial q,r})$ le long de toute trajectoire de référence, nous en déduisons que h_s et $\frac{\partial h_s}{\partial q,r}$ s'annulent sur cet ensemble. Par conséquent, il ressort de (3.26) que $\lambda^*(.) = 0$ et la condition (3.25) est réduite à la propriété suivante : $x^T \frac{\partial^2 h_s}{\partial (q,r)^2}(q^*, r^*, t)x > 0$ pour tout élément non nul $x \in \ker(\frac{\partial e_m}{\partial q,r}(q^*, r^*, t))$, ce qu'on peut vérifier facilement grâce aux relations (3.27) et (3.28). Par application de la Proposition 7, la matrice jacobienne de e est donc inversible sur le domaine $\mathcal{D}_{0,[0,T]}$ associé à $(q^*(t), r^*(t))$. De plus, comme h_s s'annule sur ce domaine, la Propriété 2 de la Proposition 3 est satisfaite avec $\Omega = Q \times G \times \mathbb{R}$ (c'est-à-dire que l'évitement des butées articulaires du bras est garanti sur $\mathcal{D}_{0,[0,T]}$). La 0-admissibilité de la fonction de e est alors une conséquence directe de la Remarque 10.

3.4 Synthèse de commande par système omnidirectionnel équivalent

Nous présentons dans cette section une première approche de synthèse de commande pour les manipulateurs mobiles non-holonomes. Comme nous l'avons indiqué en Section 3.2, cette approche repose sur la notion de système omnidirectionnel équivalent.

3.4.1 Définition et existence de systèmes omnidirectionnels équivalents

Définition 9 *Considérons un manipulateur mobile non-holonome et une fonction de tâche de manipulation associée $e_m(q,r)$, avec q la configuration du bras et r la situation de la base mobile. On suppose qu'il existe un repère compagnon omnidirectionnel de situation $\bar{r} = rr_0$ pour le repère associé à la base mobile. On appelle alors « système omnidirectionnel équivalent » tout manipulateur mobile holonome constitué i) de la base mobile de situation $\bar{r}$, et ii) d'un « manipulateur équivalent » de même structure et géométrie que celui du manipulateur mobile non-holonome, et de configuration $\bar{q} = \Phi(q,r,r_0)$ telle que*

1. $e_m(q,r) = 0 \Longleftrightarrow e_m(\bar{q}, rr_0) = 0$ $(= e_m(\bar{q},\bar{r}))$,
2. *l'application* $q \longmapsto \bar{q} = \Phi(q,r,r_0)$ *est un difféomorphisme pour tout* (r,r_0) .

L'existence *locale* d'un manipulateur équivalent (et donc d'un système omnidirectionnel équivalent), découle facilement de l'admissibilité de e_m (et en fait plus simplement de la non-singularité de cette tâche).

Proposition 8 *Considérons un manipulateur mobile non-holonome et une fonction $e_m(q,r)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n_q}$ telle que $e_m(q^*,r^*) = 0$ et $\frac{\partial e_m}{\partial q}(q^*,r^*)$ est inversible. Alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (q^*,r^*), un scalaire $\varepsilon_0 > 0$, et une application régulière Φ, tels que les Propriétés 1 et 2 de la Définition 9 sont satisfaites pour tout $(q,r) \in \mathcal{U}$ et tout $r_0 \in \mathcal{B}_G(e,\varepsilon_0)$.*

Preuve : Considérons la fonction ξ définie par $\xi(\bar{q},q,r,r_0) = e_m(\bar{q},rr_0) - e_m(q,r)$. On a $\xi(q^*,q^*,r^*,e) = 0$ et

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{q}}(q^*,q^*,r^*,e) = \frac{\partial e_m}{\partial q}(q^*,r^*)$$

Par hypothèse $\frac{\partial e_m}{\partial q}(q^*,r^*)$ est inversible, de sorte que la preuve découle directement du théorème des fonctions implicites. ■

Commentons brièvement ce résultat. Tout d'abord, l'existence de l'application Φ (et donc de $\bar{q}$) repose uniquement sur les propriétés de e_m ; en particulier, il n'est nullement nécessaire que $\bar{r} = rr_0$ corresponde à la situation d'un repère compagnon omnidirectionnel. En outre, la fonction Φ implicitement définie dans la preuve entraîne l'égalité $e_m(q,r) = e_m(\bar{q},rr_0)$ pour tout $(q,r) \in \mathcal{U}$ et tout $r_0 \in \mathcal{B}_G(e,\varepsilon_0)$, et donc pas uniquement pour les $(q,r) \in \mathcal{U}$ tels que $e_m(q,r) = 0$. Toutefois, le fait de n'exiger l'égalité $e_m(q,r) = e_m(\bar{q},rr_0)$ que lorsque $e_m(q,r) = 0$ peut avoir un intérêt dans certains cas,

dans la mesure où ceci permet de garantir l'existence de fonctions Φ plus simples. C'est le sens du résultat suivant qui met en évidence l'existence de telles fonctions dépendant de q et r_0 uniquement.

Proposition 9 *Considérons un manipulateur mobile non-holonome et une fonction de tâche de manipulation e_m, $\rho-$admissible sur un ensemble $\mathcal{D}_{\rho,W_M} \supset \mathcal{D}_{0,W_M}$ avec $W_M := \mathcal{B}_G(r^*, M)$, $(M > 0)$. On suppose qu'il existe un sous-groupe de Lie $\bar{G}$ de G de dimension $\dim G - n_q$, connexe, et tel que :*

$$e_m(q,r) = 0 \Longrightarrow \quad \begin{cases} \bar{G} = \{\tau \in G : e_m(q, \tau r) = 0\} & \text{(3.29a)} \\ \text{et } \ker \dfrac{\partial e_m}{\partial r}(q,r) = \bar{\mathfrak{g}} & \text{(3.29b)} \end{cases}$$

avec $\bar{\mathfrak{g}}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ associée au sous-groupe $\bar{G}$. Alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}_q$ de q^*, un scalaire $\varepsilon_0 > 0$, et une application régulière Φ indépendante de r, i.e. $\Phi(q, r_0)$, tels que les Propriétés 1 et 2 de la Définition 9 sont satisfaites pour tout $q^* \in \mathcal{U}_q$, pour tout $r \in G$, et pour tout $r_0 \in \mathcal{B}_G(e, \varepsilon_0)$.

La preuve de cette proposition est donnée en Annexe A.3.3.

Remarque 11 D'après la théorie des groupes de Lie (voir par exemple (Varadarajan, 1983, Lemme 2.5.1, Théorème 2.5.2)), l'équation (3.29a) implique que $\ker \frac{\partial e_m}{\partial r}(q,r) \supset \bar{\mathfrak{g}}$. Inversement, la relation (3.29b) implique que $\bar{G} \subset \{\tau \in G : e_m(q, \tau r) = 0\}$.

Illustrons la proposition précédente à travers quelques exemples.

Exemple 11 Considérons le manipulateur mobile de la Figure 3.3, avec la fonction de tâche de manipulation e_m définie par la relation (3.7) (avec $r = r_{db}$). L'admissibilité de cette tâche a été établie par le Lemme 3. La condition (3.29) est également satisfaite avec $\bar{G} = \{e\}$ et $\bar{\mathfrak{g}} = \{0\}$ puisque la relation (3.7) implique que :

$$\forall q, \quad r_2 = r_1 \iff e_m(q, r_2) = e_m(q, r_1)$$

et que $\frac{\partial e_m}{\partial r}(q,r)$ est non-singulière pour tout (q,r). Déterminons maintenant $\bar{q}$. Posons $r_0 = (p_0, \theta_0)$. D'après la Définition 9, $\bar{q} = \Phi(q, r_0)$ doit satisfaire la relation suivante :

$$e_m(q,r) = 0 \Longrightarrow e_m(\bar{q}, r r_0) = e_m(q,r) \tag{3.30}$$

En utilisant les relations (3.7) et (3.30), nous en déduisons que $\bar{q}$ est implicitement défini

par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} R(\bar{q}_1)\begin{pmatrix}\bar{q}_2\\0\end{pmatrix} & = & R(q_1-\theta_0)\begin{pmatrix}q_2\\0\end{pmatrix} + (R(-\theta_0)-I)\begin{pmatrix}L\\0\end{pmatrix} - R(-\theta_0)p_0 \\ \bar{q}_3 & = & q_1+q_3-\bar{q}_1-\theta_0 \end{array} \right. \tag{3.31}$$

ce qui conduit à l'expression explicite

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{q}_1 = \arctan 2\Big(q_2\sin(q_1-\theta_0)+F_2(r_0), q_2\cos(q_1-\theta_0)+F_1(r_0)\Big) \\ \bar{q}_2 = \sqrt{q_2^2+2q_2(F_1(r_0)\cos(q_1-\theta_0)+F_2(r_0)\sin(q_1-\theta_0))+F_1(r_0)^2+F_2(r_0)^2} \\ \bar{q}_3 = q_1+q_3-\theta_0-\arctan 2\Big(q_2\sin(q_1-\theta_0)+F_2(r_0), q_2\cos(q_1-\theta_0)+F_1(r_0)\Big) \end{array} \right. \tag{3.32}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(r_0) = L(\cos\theta_0-1)-(1,0)R^T(\theta_0)p_0 \\ F_2(r_0) = -L\sin\theta_0-(0,1)R^T(\theta_0)p_0 \end{array} \right. \tag{3.33}$$

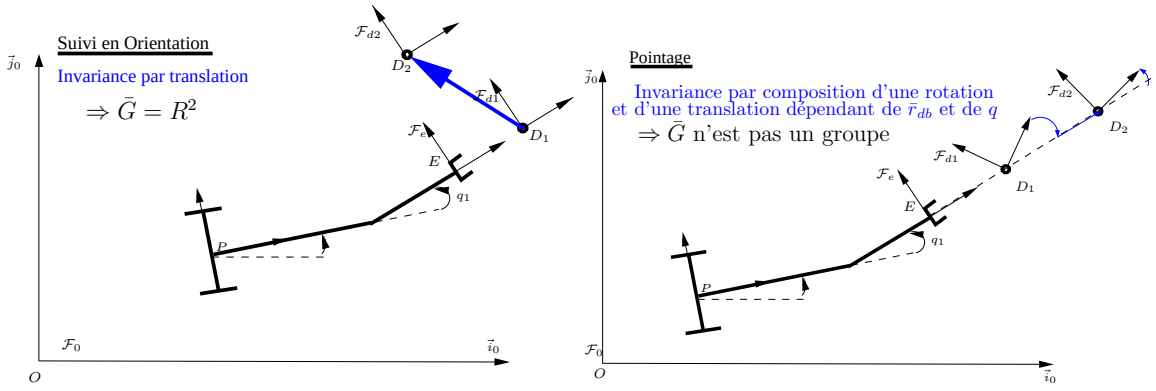


Figure 3.4 – Exemples de fonctions de tâches de manipulation satisfaisant (à gauche) ou non (à droite) l'hypothèse (3.29) de la Proposition 9

Exemple 12 Considérons maintenant le manipulateur mobile de la Figure 3.4, constitué d'une plate-forme de type unicycle et d'un bras manipulateur embarqué à un degré de liberté, relié à la plate-forme par une liaison rotoïde. La tâche de manipulation $e_m(q, r_{db}) = \theta_{ed} = -q_1 - \theta_{db}$ associée au suivi en orientation de la cible par l'organe terminal du manipulateur (sous-figure de gauche) satisfait les hypothèses de la Proposition 9, et en particulier l'invariance de la fonction de tâche de manipulation par rapport à un sous-groupe $\bar{G}$ de dimension 2, comme l'illustre la figure ci-dessus. Par contre, la fonction de tâche de manipulation $e_m(q, r_{db}) = (0,1)p_{ed} = (0,1)(p_{eb}(q) - R^T(\theta_{db})p_{db})$ associée au pointage vers la cible par l'organe terminal du manipulateur (sous-figure de droite) ne

satisfait pas cette hypothèse.

3.4.2 Application à la synthèse de lois de commande

L'approche de commande par système omnidirectionnel équivalent repose sur la proposition suivante.

Proposition 10 *Considérons le manipulateur mobile non-holonome $\mathcal{M}_d$ (cf. Eq. (1.28)), et une fonction de tâche de manipulation $e_m(q, r_{db})$ associée avec $e_m(q^*, r^*_{db}) = 0$ et $\frac{\partial e_m}{\partial q}(q^*, r^*_{db})$ inversible. Soit $(\bar{q}, \bar{r}_{db})$ la configuration d'un système omnidirectionnel équivalent avec*

1. *$\bar{r}_{db} = r_{db} r_{f_\varepsilon}^{-1}(\alpha)$, où f_ε est une fonction transverse pour la base mobile, r_{f_ε} la composante en situation de cette fonction, et $\mathrm{d}(r_{f_\varepsilon}(\alpha), e) \leqslant \varepsilon$ $(\forall \alpha)$.*
2. *$\bar{q} = \Phi(q, r_{db}, r_{f_\varepsilon}^{-1}(\alpha))$ défini pour tout (q, r_{db}) dans le voisinage $\mathcal{U}$ de (q^*, r^*_{db}), tout α, et tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.*

Alors, sur le domaine de définition de Φ, les équations cinématiques du système omnidirectionnel équivalent sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{r}}_{db} \end{pmatrix} = E(q, r_{db}, \alpha) \begin{pmatrix} u_q \\ u_e \end{pmatrix} + E_0(r_{db}, \alpha, t) \tag{3.34}$$

avec $u_e^T = (u_b, \dot{\alpha})$ et $E(q, r_{db}, \alpha)$ une matrice de rang $n_q + 3 = \dim(\bar{q}) + \dim(\bar{r}_{db})$ pour tout (q, r_{db}, α).

Preuve : Puisque $\bar{r}_{db}$ est la situation d'un repère compagnon omnidirectionnel, il existe une matrice $T_{rr}(r_{db}, \alpha)$, de rang 3, telle que

$$\dot{\bar{r}}_{db} = T_{rr}(r_{db}, \alpha) u_e - dR_{r_{f_\varepsilon}(\alpha)^{-1}}(r_{db}) \bar{R}(\theta_{db}) \mathrm{Ad}_{r_{db}^{-1}} u_d(t)$$

D'autre part, d'après la Propriété 2 de la Définition 9, $\frac{\partial \Phi}{\partial q}(q, r_{db}, r_0)$ est une matrice inversible sur le domaine de définition de Φ. La proposition découle directement de ces deux propriétés avec

$$E = \begin{pmatrix} T_{qq} & (T_{qr}\ T_{q\alpha}) \\ 0 & T_{rr} \end{pmatrix}, \quad E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ P_0 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

et

$$\begin{aligned} P_0(r_{db}, \alpha, t) &= -dR_{r_{f_\varepsilon}(\alpha)^{-1}}(r_{db})\ \bar{R}(\theta_{db}) \mathrm{Ad}_{r_{db}^{-1}} u_d(t) \\ T_{qq}(q, r_{db}, \alpha) &= \tfrac{\partial \Phi}{\partial q}(q, r_{db}, r_{f_\varepsilon}(\alpha)^{-1}) \\ T_{qr}(q, r_{db}, \alpha) &= \tfrac{\partial \Phi}{\partial r}(q, r_{db}, r_{f_\varepsilon}(\alpha)^{-1}) \\ T_{q\alpha}(q, r_{db}, \alpha) &= \tfrac{\partial \Phi}{\partial r_0}(q, r_{db}, r_{f_\varepsilon}(\alpha)^{-1}) \tfrac{\partial r_{f_\varepsilon}^{-1}}{\partial \alpha}(\alpha) \end{aligned} \tag{3.36}$$

■

La stratégie de commande esquissée dans la Section 3.2 peut maintenant être appliquée : étant donné une tâche de manipulation $e_m(q, r_{db})$ pour un manipulateur mobile, les

techniques de la Section 3.3 peuvent être utilisées pour la synthèse d'une tâche globale e, compatible avec e_m. La Proposition 5 suggère alors de définir une loi de commande par retour d'état du type :

$$\begin{pmatrix} u_q \\ u_e \end{pmatrix} = -E^\dagger \left(\left(\frac{\partial e}{\partial q}(\bar{q}, \bar{r}_{db}, t) \; \frac{\partial e}{\partial r}(\bar{q}, \bar{r}_{db}, t) \right)^{-1} \left(Ge(\bar{q}, \bar{r}_{db}, t) + \frac{\partial e}{\partial t} \right) + E_0 \right) \tag{3.37}$$

avec $E^\dagger$ une inverse à droite de E. Ceci conduit, en boucle fermée, à $\dot{e} = -Ge$, et donc à la convergence exponentielle de $e(\bar{q}, \bar{r}_{db}, t)$ vers zéro si G est définie positive. La compatibilité de e avec e_m entraîne alors la convergence de $e_m(\bar{q}, \bar{r}_{db})$ vers zéro, ce qui induit la convergence de $e_m(q, r_{db})$ vers zéro, d'après la définition d'un système omnidirectionnel équivalent. Afin de pouvoir appliquer cette stratégie de commande, il est cependant nécessaire de prendre en compte les aspects suivants :

i. Le système omnidirectionnel équivalent n'est défini que localement, pour (q, r) appartenant à un voisinage $\mathcal{U}$ de (q^*, r^*). Il est donc nécessaire de garantir l'appartenance de (q, r) à ce domaine de définition de Φ. Notons cependant que lorsque les hypothèses de la Proposition 9 sont satisfaites, Φ ne dépend pas de r et le voisinage $\mathcal{U}$ est de la forme $\mathcal{U}_q \times SE(2)$ avec $\mathcal{U}_q$ un voisinage de q^*. Il n'est donc pas nécessaire de contraindre r dans ce cas.

ii. Cette approche de commande, qui consiste à contrôler *indirectement* la variable $e_m(q, r_{db})$ en contrôlant la variable $e(\bar{q}, \bar{r}_{db})$, ne permet pas directement de résoudre le problème d'évitement des butées articulaires pour le manipulateur mobile. En particulier, on ne peut pas a priori introduire dans $e(\bar{q}, \bar{r}_{db})$ un terme $h_\ell(q)$ d'évitement des butées, sous peine de ne plus pouvoir réguler e à zéro, car e serait alors une fonction de $\bar{q}, \bar{r}_{db}$ et q.

Une façon de traiter ces difficultés consiste à imposer des butées articulaires (virtuelles) sur le système omnidirectionnel équivalent, afin d'imposer que $(\bar{q}, \bar{r}_{db})$ reste dans un voisinage de (q^*, r^*_{db}). Etant donné que $(\bar{q}, \bar{r}_{db}) = (q, r_{db})$ lorsque $\varepsilon = 0$ (puisque dans ce cas $f_\varepsilon = 0$), on en déduit par un argument de continuité que si l'on choisit ε suffisamment petit (mais non nul pour que la matrice T_{rr} dans (3.35) soit bien définie), on peut garantir que $(q, r_{db}) \in \mathcal{U}$ ainsi que l'évitement des butées articulaires pour le manipulateur mobile. Il faut toutefois noter que ceci conduit souvent à limiter de façon très conservative les débattements articulaires du manipulateur, ce qui entraîne alors de nombreuses manœuvres pour la base mobile.

3.5 Application au cas d'un bras RPR sur une plate-forme de type unicycle

Nous considérons l'application représentée en Figure 3.3, qui consiste à suivre en position et en orientation le repère $\mathcal{F}_d$ avec l'organe terminal du bras. Le manipulateur mobile est composé d'une plate-forme de type unicycle porteuse d'un bras manipulateur trois axes de type RPR. L'objectif de manipulation est donné par la fonction e_p définie par la relation (3.7).

Afin d'implémenter la loi de commande par retour d'état définie par la relation (3.37), il nous faut d'abord calculer les matrices E et E_0 de la Proposition 10. D'après la donnée de (3.35), ce calcul nécessite de déterminer les matrices A, H, P_0, T_{qq} et $T_{q\alpha}$, la matrice T_{qr} étant nulle (en effet Φ est indépendant de r_{db}). En utilisant les expressions (2.16), (1.27), (3.31) et (3.36), nous obtenons les matrices suivantes :

$$A(r_{db},\alpha) = \begin{pmatrix} I_2 & -R(\bar{\theta}_{db})Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\bar{\theta}_{db}) & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\theta_f(\alpha) & 0 & -\frac{\partial x_f(\alpha)}{\partial \alpha} \\ \sin\theta_f(\alpha) & 0 & -\frac{\partial y_f(\alpha)}{\partial \alpha} \\ 0 & 1 & -\frac{\partial \theta_f(\alpha)}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$$

$$P_0(r_{db},\alpha,t) = -\begin{pmatrix} I_2 & J\bar{p}_{db} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_d(t)$$

$$T_{q\alpha}(q,\alpha) = \bar{D}^{-1}(\bar{q})\, D_\alpha(q,\alpha)\, \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha)\,, \quad T_{qq}(q,\alpha) = \bar{D}^{-1}(\bar{q})\, D(q,\alpha)$$

avec les matrices

$$\bar{D}(\bar{q}) = \begin{pmatrix} R(\bar{q}_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{q}_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix}, \quad D(q,\alpha) = \begin{pmatrix} R(q_1+\theta_f(\alpha))\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$D_\alpha(q,\alpha) = \begin{pmatrix} I_2 & R(q_1+\theta_f(\alpha))\begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \end{pmatrix} + R(\theta_f(\alpha))\begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'expression de $\bar{q}$ comme fonction de q et de α est donnée par l'équation (3.32), avec la fonction transverse pour l'unicycle définie par (2.7). L'expression de la situation $\bar{r}_{db}$ du repère compagnon en fonction de r_{db} et α découle de la relation (2.12) et des règles de

calcul sur $SE(2)$:

$$\bar{r}_{db} = \begin{pmatrix} p_{db} - R(\theta_{db} - \theta_f(\alpha))p_f \\ \theta_{db} - \theta_f(\alpha) \end{pmatrix}$$

Il est aisé de vérifier que $\det T_{qq} = \frac{q_2}{\bar{q}_2}$, de sorte que la matrice $E(r_{db}, q, \alpha)$ est définie et inversible si et seulement si q_2 et $\bar{q}_2$ sont non-nuls.

Les résultats de simulation qui suivent illustrent la flexibilité et les limites de l'approche par système omnidirectionnel équivalent via le choix de deux fonctions de coût différentes, la fonction de tâche globale étant synthétisée dans chaque cas selon les deux méthodes proposées dans les Sections 3.3.3 et 3.3.4. Plus précisément, nous prenons pour fonctions de tâches globales, dans les simulations indexées de (a) à (d), les expressions ci-dessous :

a. La simulation (a) est basée sur la fonction de tâche de l'exemple 8, obtenue par minimisation d'une fonction de coût globale $h = h_m + h_\ell + h_{r,1}$, i.e.

$$e = \begin{pmatrix} (\frac{\partial e_m}{\partial q})^T e_m + \frac{\partial (h_\ell + h_{r,1})}{\partial q} \\ (\frac{\partial e_m}{\partial r})^T e_m \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

b. La simulation (b) utilise la fonction de tâche globale de l'exemple 10, construite par minimisation d'un coût sous la contrainte $e_m = 0$, dont l'expression est donnée par la relation (3.24) de la Proposition 7 avec le coût $h_s = h_\ell + h_{r,1}$. Les deux fonctions de coût h_ℓ et $h_{r,1}$ sont les mêmes que celles utilisées dans la simulation (a) ; leurs expressions sont données plus loin.

c. La simulation (c) repose sur la fonction de tâche globale de l'exemple 9, définie par (3.21) comme le gradient d'une fonction de coût globale $h = h_m + h_\ell + h_{r,2}$, i.e.

$$e = \begin{pmatrix} (\frac{\partial e_m}{\partial q})^T e_m + \frac{\partial h_\ell}{\partial q} \\ (\frac{\partial e_m}{\partial r})^T e_m + \frac{\partial h_{r,2}}{\partial r} \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

d. Finalement, la fonction de tâche de la simulation (d) est obtenue par minimisation de la fonction de coût $h_s = h_\ell + h_{r,2}$ sous la contrainte $e_m = 0$, avec les fonctions h_ℓ et $h_{r,2}$ identiques à celles employées dans la synthèse de la tâche précédente.

Les paramètres géométriques du manipulateur mobile sont les suivants :

- $L = 0,4$ m, $L_e = 0,15$ m ;
- $(q_1^-, q_1^+) = (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ rad, $(q_2^-, q_2^+) = (0,\ 0,7)$ m, et $(q_3^-, q_3^+) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rad.

Nous donnons maintenant les paramètres des fonctions de coût utilisées dans l'expression ces tâches. Les paramètres du coût h_ℓ sont $\alpha_1 = 1$, et les marges $\delta_i = 0,05(\bar{q}_i^+ - \bar{q}_i^-)$ avec $\bar{q}_1^+ = -\bar{q}_1^- = \frac{\pi}{6}$, $\bar{q}_2^- = 0,25$, $\bar{q}_2^+ = 0,45$, et $\bar{q}_3^+ = -\bar{q}_3^- = \frac{\pi}{4}$. Ces butées virtuelles sont imposées afin de garantir l'évitement des butées physiques pour les variables articulaires du bras, pour des paramètres $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0,15,\ 0,15)$ de la fonction transverse (2.7). Pour la fonction $h_{r,1}$, nous prenons l'expression $h_{r,1}(\bar{q}, t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\bar{q}_i - q_i^*)^2$ avec $q^* = (0,\ 0,35\ 0)^T$ dans les simulations (a) et (b). Cette fonction est nulle dans les simulations (c) et (d). La fonction de régularisation $h_{r,2}(\bar{r}_{db}, t)$ est nulle dans les simulations (a) et (b), et elle est donnée par (3.18)–(3.19) pour les simulations (c) et (d). Les paramètres du filtre sont alors $\sigma = 10$ et $\xi = 1$. Enfin, la matrice de gain G du retour d'état (3.37) est $G = 10I_6$.

La configuration initiale du bras manipulateur est $q(0) = (0\ 0,35\ 0)^T$, la situation relative initiale de la plate-forme par rapport à la cible est $r_{db}(0) = (2,5\ 1\ 0)^T$, et le mouvement de la cible est donné par la table 3.1 avec $\dot{r}_d = u_d(t)$.

TAB. 3.1 – Vitesse u_d de la cible

Intervalle de temps en s	*Vitesse de la cible (en $m.s^{-1}$, $m.s^{-1}$ et $rad.s^{-1}$)*
$t \in [0, 5)$	$u_d(t) = (0\ 0\ 0)^T$
$t \in [5, 27)$	$u_d(t) = (0\ 0\ \frac{\pi^2}{20}\cos\frac{\pi\,(t-5)}{2})^T$
$t \in [27, 37)$	$u_d(t) = (0,2\ 0\ 0)^T$
$t \in [37, 59)$	$u_d(t) = (0\ 0\ \frac{\pi^2}{20}\cos\frac{\pi\,(t-37)}{2})^T$
$t \in [59, 99)$	$u_d(t) = (0\ 0,05\ 0)^T$
$t \in [99, 105)$	$u_d(t) = (0\ 0\ 0)^T$
$t \in [105, 115)$	$u_d(t) = (-0,2\ 0\ 0)^T$
$t \in [115, 120)$	$u_d(t) = (0\ 0\ 0)^T$

La trajectoire de l'origine du repère de la cible est donc composée de trois lignes droites, et l'orientation de ce repère est sujette à des oscillations. Sur certains intervalles de temps, une telle trajectoire nécessite des déplacements de la plate-forme afin de permettre le suivi, mais pendant d'autres périodes, comme celles correspondant aux oscillations de l'orientation du repère, le suivi devrait être possible sans que la plate-forme ne se déplace. Les résultats de simulation (Fig. 3.5–3.8) mènent aux observations suivantes :

a. Comme nous l'avons déjà souligné, ce choix du coût $h_{r,1}$ est très restrictif car il impose à la plate-forme mobile d'effectuer un nombre important de manœuvres (c.f. Figure

3.5(a)), et un effort de commande élevé (voir Figures 3.7(a) et 3.8(a)). En revanche, la compatibilité des tâches permet de garantir le suivi en permanence.

b. Les résultats de la simulation (b) ne diffèrent pas de ceux de la simulation (a). En ce cas, la formulation de la tâche globale comme un problème de minimisation sous contrainte n'apporte pas d'amélioration au contrôle.

c. Le choix du coût de régularisation dans la Simulation (c) permet effectivement une réduction notable des efforts de commande sur la plate-forme, comme le corroborent les Figures 3.7(c) et 3.8(c). Cependant, comme cette fonction $h_{r,2}$ agit comme un terme de retenue de la plate-forme, le bras manipulateur équivalent a plus tendance à entrer dans ses butées virtuelles $\overline{q_i}^-, \overline{q_i}^+$, ce qui se traduit par des valeurs non-nulles de la fonction h_ℓ. Par conséquent, la compatibilité de la tâche globale avec la tâche de manipulation n'est pas toujours satisfaite, et la réalisation du suivi de la cible par l'organe terminal n'est plus garantie à tout instant (voir Figure 3.6(c)) ; ce suivi reste cependant de très bonne qualité.

d. Dans ce cas, le fait d'associer la fonction de tâche globale à un problème de minimisation sous contrainte permet d'assurer, par construction, la compatibilité de la tâche globale et de la tâche de manipulation. La Figure 3.6(d) montre en effet que le suivi est correctement assuré. Quant à la plate-forme, ses manœuvres restent peu importantes tant que la cible ne fait pas marche arrière.

Ces résultats de simulations mettent en évidence deux points importants.

- D'une part, d'après la Proposition 8, la fonction Φ (et donc le manipulateur équivalent) n'est définie que pour de faibles valeurs des paramètres ε_i de la fonction transverse, ce qui implique une fréquence élevée des manœuvres de la plate-forme. D'un autre côté, plus ε est important, plus les butées virtuelles doivent être conservatives afin de garantir l'évitement des butées articulaires physiques du bras manipulateur, et plus les périodes d'immobilité de la plate-forme sont réduites. En effet, en dépit de la réduction des efforts de commande sur la plate-forme avec le choix des tâches (c) ou (d), la plate-forme mobile effectue de nombreuses manœuvres, et ses périodes d'immobilité sont plus restreintes que ce à quoi l'on peut s'attendre au vu de la géométrie du manipulateur mobile.
- Le suivi, dans toutes ces simulations, est d'une excellente qualité en raison de la taille importante du domaine de compatibilité de la fonction de tâche globale avec la tâche de manipulation. La tâche de manipulation est même exactement réalisée dès lors que la fonction de tâche globale est associée à un problème d'optimisation sous contrainte.

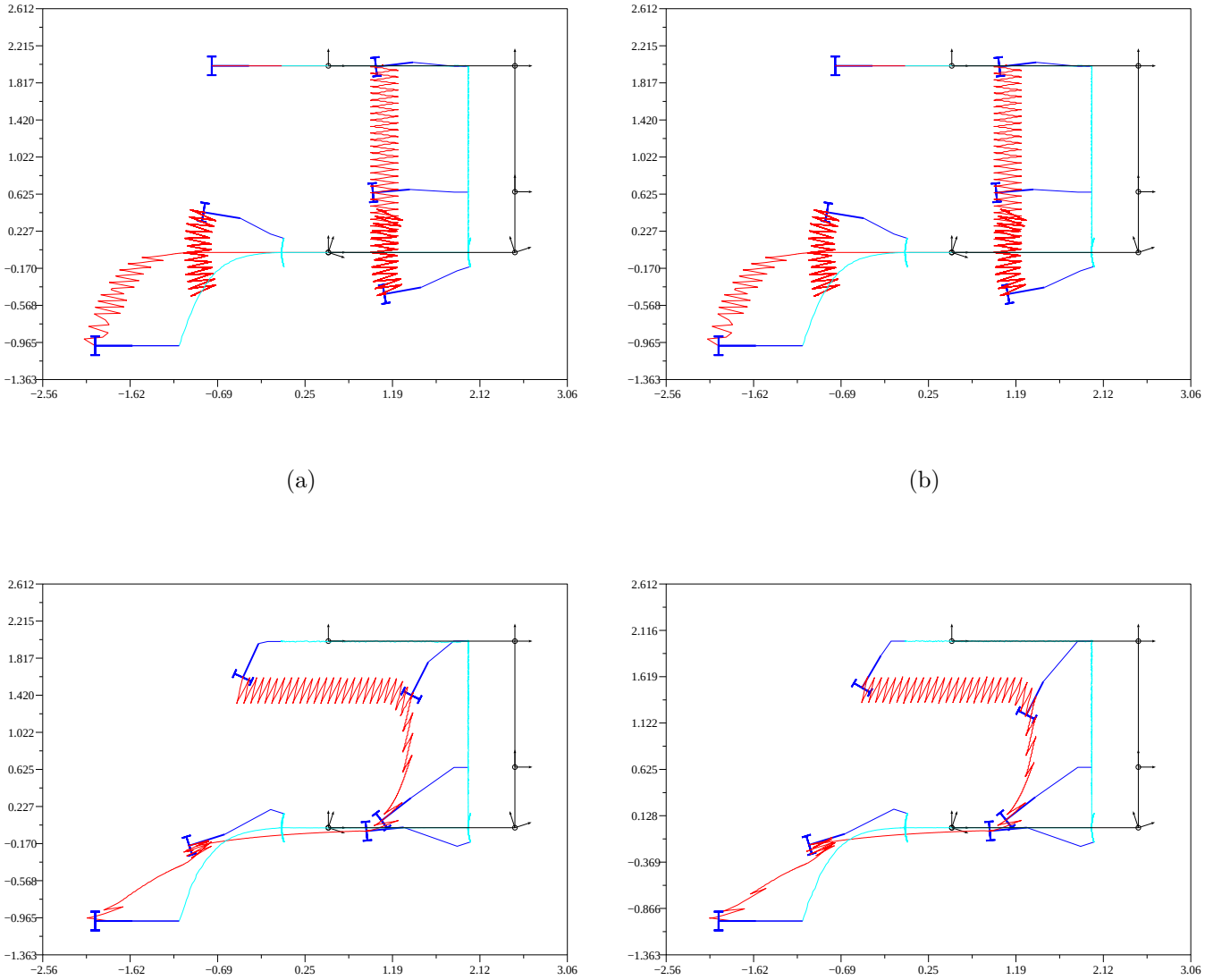
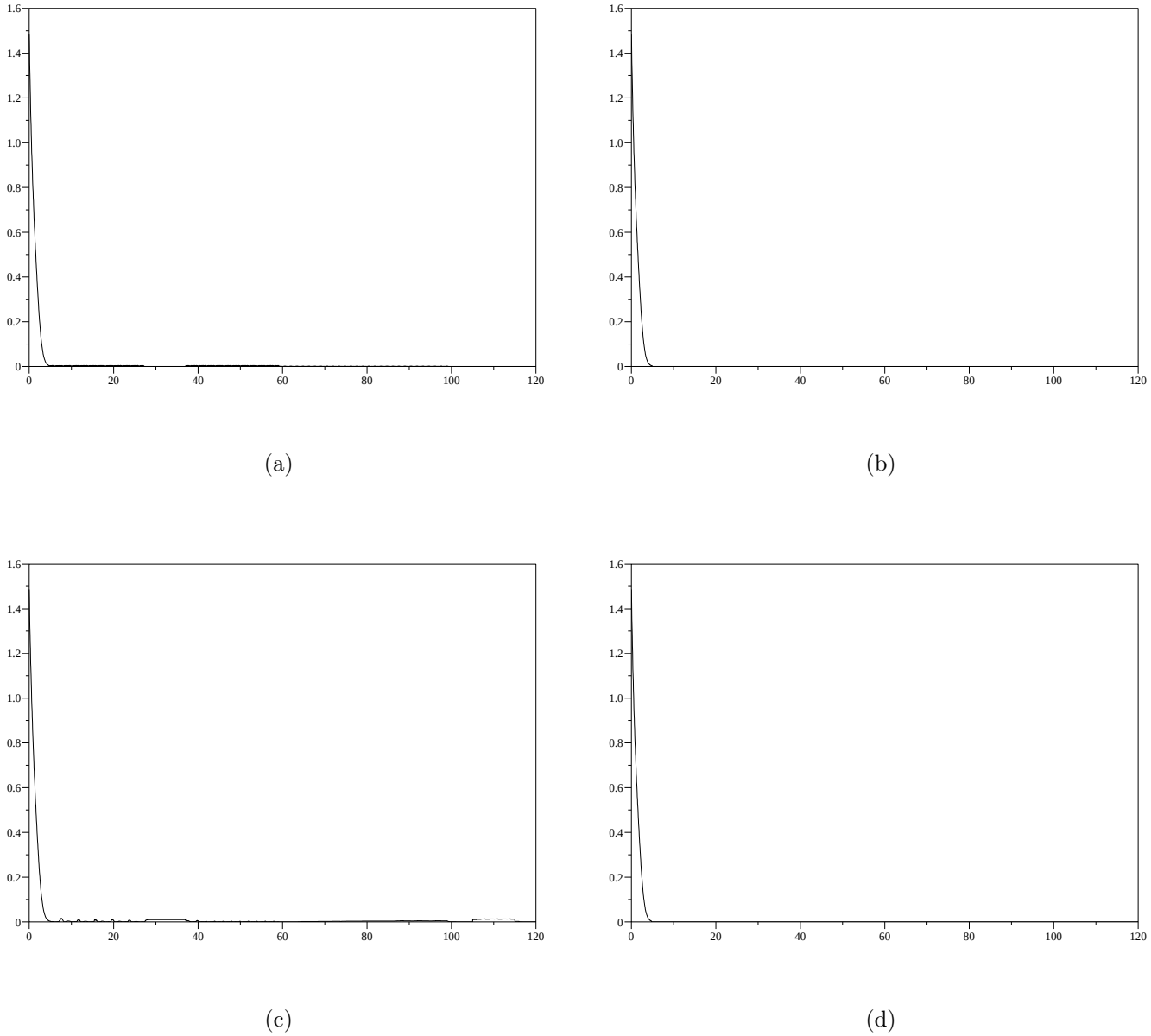


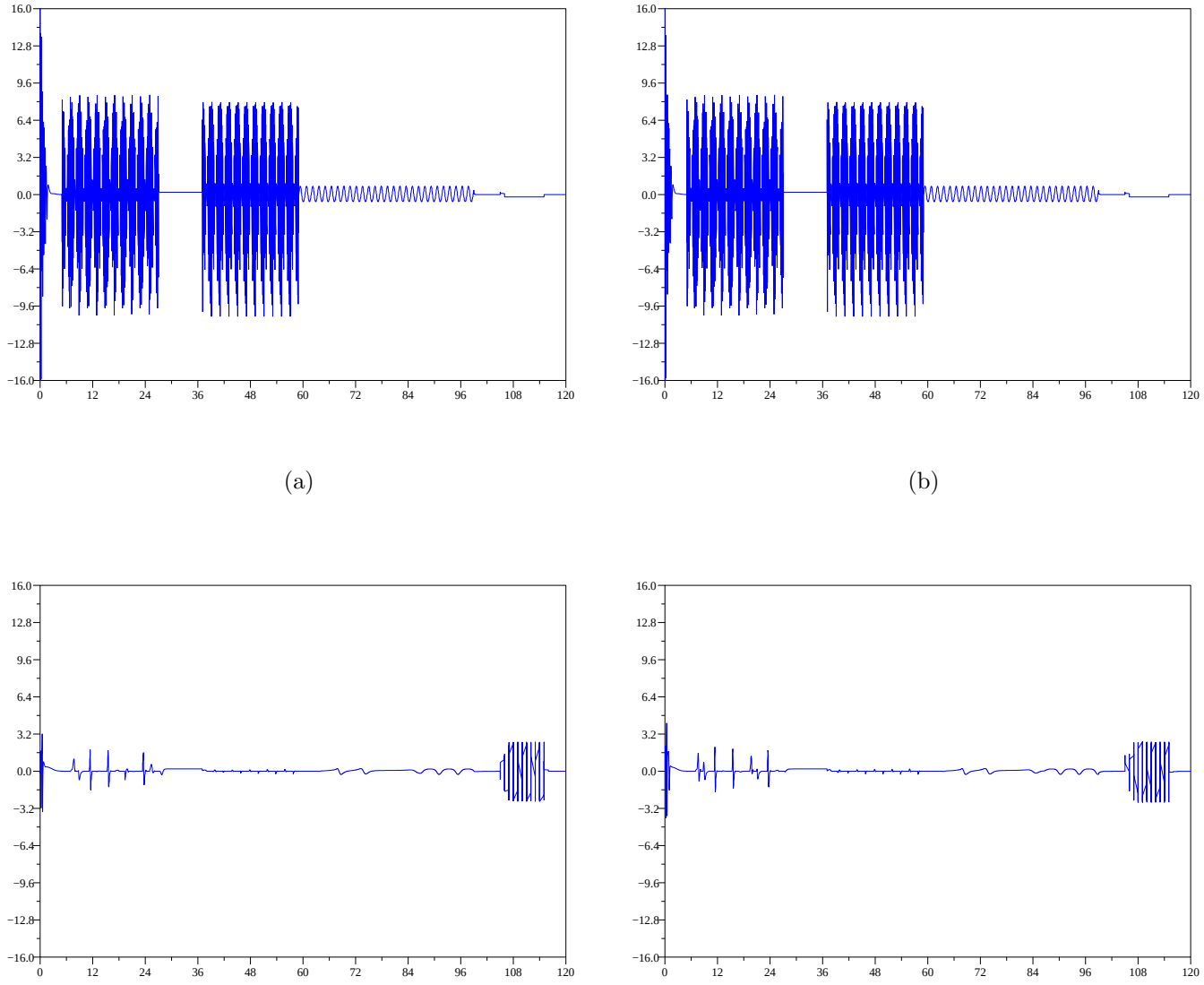
Figure 3.5 – Trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. En rouge la trajectoire du centre de l'axe des roues, en bleu celle de l'organe terminal, et en noir celle de la cible.



(a) (b)

(c) (d)

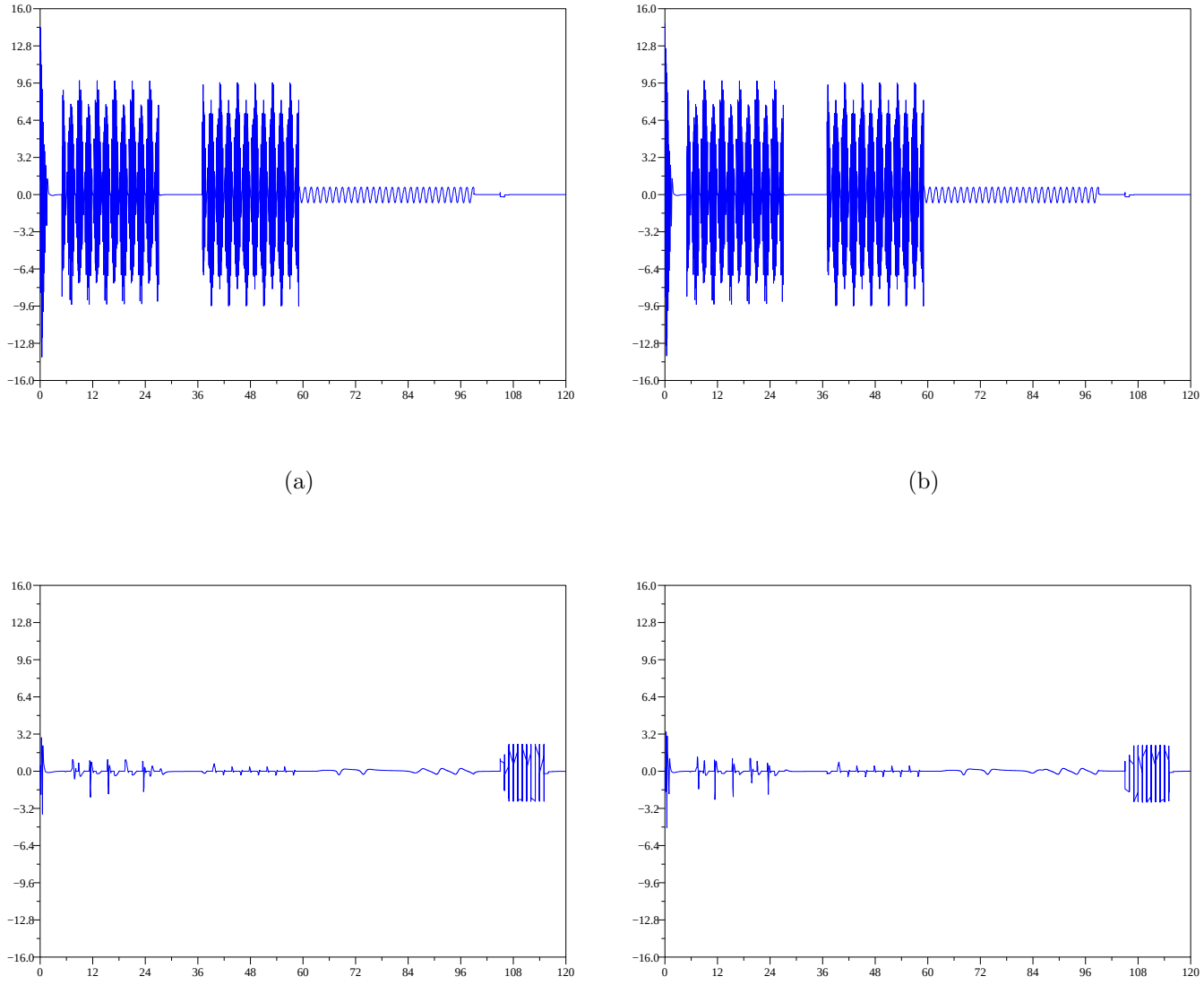
Figure 3.6 – Norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 3.7 – Vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 3.8 – Vitesse ω_b de la plate-forme mobile.

3.6 Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre une notion de système omnidirectionnel équivalent qui généralise, dans un certain sens, la notion de repère compagnon omnidirectionnel associé à une base mobile. Nous avons prouvé l'existence d'un tel système pour toute fonction de tâche de manipulation, et montré que pour certaines tâches possédant des propriétés d'invariance par rapport à des mouvements de la base mobile, on peut trouver un système omnidirectionnel équivalent possédant des propriétés d'invariance analogues. Cette nouvelle notion est séduisante sur le plan théorique dans la mesure où elle permet, conceptuellement, de ramener la commande d'un manipulateur mobile non-holonome à celle d'un manipulateur holonome. Toutefois, sa mise en œuvre présente certaines difficultés qui, pour l'instant, limitent son intérêt pratique :

i. La détermination du système omnidirectionnel équivalent nécessite de résoudre des équations implicites. Pour des bras manipulateurs simples, cette résolution peut être faite analytiquement. Pour des systèmes plus complexes, d'autres méthodes devraient probablement être envisagées.

ii. Etant donné que ce système est défini seulement localement, on est amené à restreindre les débattements du manipulateur mobile, ce qui conduit à un nombre important de manœuvres dès que la réalisation de l'objectif de manipulation nécessite un déplacement relativement ample.

iii. La prise en compte des butées articulaires du manipulateur mobile est relativement délicate. Une méthode possible consiste à introduire des butées virtuelles sur le système équivalent, mais cela ne peut qu'amplifier les problèmes décrits dans les deux points précédents.

La difficulté de remédier à ces limitations nous a conduit à travailler sur une autre approche de commande que nous présentons dans le prochain chapitre.

Chapitre 4

Approche générale de commande des manipulateurs mobiles

Contenu du chapitre

4.1 Introduction 86
4.2 Principe de l'approche 86
4.3 Indications pour le choix de la tâche de manipulation . . . 89
4.4 Indications pour le choix du coût secondaire 91
4.4.1 Choix de la fonction de coût secondaire 91
4.4.2 Contrôle de la plate-forme mobile 92
4.5 Applications 97
4.5.1 Cas d'un bras RPR sur une plate-forme de type unicycle 97
4.5.1.1 Tâche de manipulation et commande associée 97
4.5.1.2 Coût secondaire et commande de la plate-forme mobile 99
4.5.1.3 Résultats de simulation 102
4.5.2 Cas d'un bras RP sur une plate-forme de type unicycle 117
4.5.2.1 Tâche de manipulation et commande du bras 117
4.5.2.2 Coût secondaire et commande de la plate-forme mobile 118
4.5.2.3 Résultats de simulation 119
4.5.3 Cas d'un bras RPR sur une plate-forme de type voiture 126
4.6 Conclusion 135

4.1 Introduction

Les difficultés associées à l'approche de commande précédente nous ont amené à développer une autre stratégie qui présente comparativement plusieurs avantages. Cette nouvelle approche repose ici aussi sur la commande du repère compagnon omnidirectionnel, mais ne fait pas intervenir le bras équivalent. D'une part, la synthèse de lois de commande est plus simple au sens où elle ne nécessite pas de résoudre un système d'équations implicites. D'autre part, le problème d'évitement des butées peut être pris en compte plus facilement et plus efficacement.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans le Section 4.2, nous commençons par présenter le principe de l'approche, puis nous faisons des propositions pour le choix des différentes fonctions utilisées pour le calcul de la commande. Des exemples d'applications sont ensuite traités en Section 4.5, tout d'abord pour une plate-forme de type unicycle, puis de type voiture.

4.2 Principe de l'approche

Dans ce chapitre, le manipulateur mobile de configuration (q, r_b) que nous considérons est a priori non-holonome. Ses équations cinématiques sont données par :

$$\begin{cases} \dot{q} = u_q \\ \dot{r}_b = \bar{R}(\theta_b) u_b \end{cases}$$

Le principe général de la coordination de mouvements pour un manipulateur mobile est que le rôle principal de la plate-forme mobile est de déplacer le manipulateur afin de compenser l'étendue limitée de son domaine de travail, de sorte à ce que la tâche de manipulation puisse être accomplie sans interruption. Il est manifeste que l'objectif assigné à la base mobile est moins exigeant que celui imposé au manipulateur. L'approche que nous présentons ici s'appuie sur cette dichotomie en introduisant une hiérarchie, au niveau de la commande, entre un objectif (fort) de manipulation et un objectif (faible) de mobilité. Une façon de traduire le principe de coordination évoqué ci-dessus, inspirée de l'approche classique développée pour la gestion de la redondance dans le cadre de manipulateurs fixes (voir par exemple la Section 3.3 ou (Samson et al., 1991) pour plus de détails), consiste à considérer la minimisation d'une fonction de coût secondaire que la commande de la plate-forme doit réaliser, sous la contrainte de respecter, via la commande du manipulateur, un ensemble de « liaisons virtuelles » qui caractérise la tâche de manipulation. En

d'autres termes, l'objectif de contrôle global peut être approximativement [1] posé comme suit pendant la durée T d'exécution de la tâche :

$$\mathcal{P}_0 : \qquad \forall t \in [0, T], \qquad \text{Minimiser } h_s(r_b, t) \text{ sous la contrainte } e_m(q, r_b, t) = 0$$

La fonction e_m caractérise la tâche de manipulation. L'objectif secondaire de minimisation de h_s est en règle générale moins astreignant que la tâche de manipulation car, dans de nombreuses situations, la minimisation « exacte » de cette fonction ne sera pas une stricte exigence.

Lorsque la plate-forme mobile est holonome, nous pouvons considérer le manipulateur mobile comme un bras manipulateur étendu doté de $\dim(q) + \dim(r_b)$ degrés de liberté. Si $h_s(r_b, t)$ admet un unique minimum $r^*(t)$ pour tout t, et si la fonction $(q, t) \longmapsto e_m(q, r^*(t), t)$ est *admissible* (voir Définition 8) de sorte qu'il existe une solution $q^*(t)$ à l'équation $e_m(q, r^*(t), t) = 0$, une solution au Problème $\mathcal{P}_0$ est donnée par le choix de n'importe quelle loi de commande (u_q, u_b) qui assure la convergence de $(q(t), r_b(t))$ vers la trajectoire *idéale* $(q^*(t), r^*(t))$. Bien sûr, appliquer directement ce type de stratégie de commande n'est pas toujours faisable, en raison de la fréquente complexité du calcul de la trajectoire idéale. Cependant, des moyens de contourner cette difficulté ont été proposés dans la littérature, à l'instar des deux méthodes rappelées dans les Sections 3.3.3 et 3.3.4 du chapitre précédent. Pour des plates-formes mobiles non-holonomes, le Problème $\mathcal{P}_0$ est trop contraignant. La difficulté est double : *i)* tout d'abord, la trajectoire idéale $r^*(t)$ associée au problème de minimisation peut ne pas être une trajectoire réalisable pour la plate-forme en raison de la non-holonomie de cette dernière, et *ii)* quand bien même cette trajectoire serait réalisable, la synthèse d'un contrôle par retour d'état capable d'assurer la stabilisation asymptotique reste problématique, en raison de la non-existence de stabilisateurs *universels* pour ce type de systèmes (voir le théorème de (Lizárraga, 2004), rappelé au Chapitre 2). Ceci indique déjà qu'une minimisation « exacte » du coût h_s est impossible dans le cas d'une trajectoire quelconque. Considérons même le cas particulier où la trajectoire idéale $r^*(t) = r^*$ est une trajectoire constante (et donc réalisable). D'après le théorème de Brockett, dont l'énoncé est donné dans le Chapitre 2, il n'existe pas de retour d'état continu $u_b(r_b)$ permettant une stabilisation asymptotique d'une configuration fixe r^*. C'est pourquoi, même dans le cas où la minimisation « exacte » de la fonction h_s est possible, par exemple lorsque $h_s(r_b, t) = h_s(r_b) = \mathrm{d}(r_b, r^*)$, la mise en œuvre de cette minimisation par le biais de lois de commande par retour d'état peut se

1. Puisque les variables q et r_b varient continuement en fonction du temps, il est évident que le Problème $\mathcal{P}_0$ ne peut être résolu instantanément ; ce problème de minimisation doit plutôt être considéré comme un objectif « asymptotique ».

révéler difficile et nécessiter l'utilisation de lois de commande non-standard. Nous modifions donc le Problème $\mathcal{P}_0$, trop restrictif puisque ne sous-tendant pas l'existence de solution de contrôle, de la façon suivante :

$$\mathcal{P} : \qquad \forall t \in [0, T], \qquad \text{Minimiser } h_s(\bar{r}_b, t) \text{ sous la contrainte } e_m(q, r_b, t) = 0$$

avec $\bar{r}_b$, donné par (2.12), la configuration du repère compagnon $\mathcal{F}_{\bar{b}}(\alpha)$ de $\mathcal{F}_b$ (pour une fonction transverse donnée). Pour traiter le Problème $\mathcal{P}$, nous proposons la méthodologie suivante, composée de deux étapes.

Étape 1 : Sélection de la tâche de manipulation e_m et synthèse de la commande u_q.
Par rapport à la méthode précédente, la fonction de tâche de manipulation e_m doit être non-singulière dans un plus large domaine, et doit permettre de garantir l'évitement des butées articulaires du bras. Autrement dit, elle combine des propriétés des fonctions e et e_m du chapitre précédent. Nous proposons donc de choisir e_m sur la base des propriétés suivantes :

1. e_m est une fonction vectorielle de dimension n_q et sa jacobienne $\frac{\partial e_m}{\partial q}(q, r_b, t)$ est inversible pour tout (q, t), et tout r_b appartenant à un domaine $\mathcal{D}(t)$ suffisamment « grand »,
2. les limitations articulaires ne peuvent être atteintes tant que e_m reste borné,
3. la régulation de e_m à zéro implique la réalisation de l'objectif de manipulation tant que $(q(t), r_b(t))$ appartient à un domaine $\mathcal{O}_q(t) \times \mathcal{O}_r(t)$.

L'inversibilité de la matrice jacobienne $\frac{\partial e_m}{\partial q}(q, r_b, t)$ permet de déduire des lois de commande u_q pour le bras, définies tant que r_b reste dans $\mathcal{D}(t)$, qui assurent la convergence de e_m à zéro. De telles lois de commande sont définies, par exemple, de la manière suivante :

$$u_q = -\left(\frac{\partial e_m}{\partial q}(q, r_b, t)\right)^{-1} \left(G e_m(q, r_b, t) + \frac{\partial e_m}{\partial r_b}(q, r_b, t) u_b + \frac{\partial e_m}{\partial t}(q, r_b, t)\right) \tag{4.1}$$

avec $\dot{r}_b = \bar{R}(\theta_b) u_b$. Ainsi, nous obtenons en boucle fermée $\dot{e}_m = -G e_m$, d'où la convergence exponentielle de e_m à zéro si G est définie positive. Cette convergence, combinée à la Propriété 2, garantit alors l'évitement des butées articulaires du bras (pourvu que la configuration du bras soit initialement hors de ces butées). Enfin, la Propriété 3 traduit le fait que la régulation de e_m à zéro doit être cohérente avec la réalisation de l'objectif de manipulation. Notons que cette étape 1 est assez similaire à l'étape 1 du chapitre précédent, à ceci près que e_m et q jouent ici le rôle de e et (q, r) respectivement.

Etape 2 : Sélection du coût secondaire h_s.
Au vu des Propriétés 1 et 3 données ci-dessus, le but est de choisir h_s de sorte à ce que la minimisation de h_s implique que $r_b(t)$ appartienne à $\mathcal{D}(t)$ (afin que la commande u_q soit définie), et si possible au domaine $\mathcal{O}_r(t)$ (afin que l'objectif de manipulation puisse être atteint). Par exemple, si $\mathcal{D}(t)$ est un ouvert qui varie continuement en fonction du temps, nous pouvons définir h_s par $h_s(\bar{r}_b, t) = \mathrm{d}(\bar{r}_b, r^*(t))$ avec $r^*(t) \in \mathcal{D}(t)$ une fonction continue du temps. Alors, la « minimisation » de h_s est équivalente à $\bar{r}_b(t) = r^*(t)$. Comme $\bar{r}_b \neq r_b$ a priori, ceci n'implique pas que $r_b(t) = r^*(t)$. Néanmoins, nous pouvons utiliser le fait que la distance de $\bar{r}_b$ à r_b est bornée par une valeur que nous pouvons rendre arbitrairement petite pour assurer que la plate-forme mobile reste dans un voisinage prédéfini de la trajectoire idéale $r^*(t)$.

Discutons maintenant plus en détail des choix possibles pour les fonctions e_m et h_s.

4.3 Indications pour le choix de la tâche de manipulation

Notre objectif est de définir une fonction de tâche vectorielle e_m de dimension n_q qui satisfasse aux Propriétés 1–3 de la section précédente. Nous procédons comme dans la Section 3.3.3, en définissant la fonction de tâche e_m comme le gradient d'une fonction de coût à minimiser, i.e.

$$e_m(q, r_b, t) = \left(\frac{\partial h_m}{\partial q}(q, r_b, t) \right)^T \tag{4.2}$$

où h_m est une fonction de coût régulière positive dont la minimisation par rapport à q est équivalente à l'annulation de sa dérivée $\frac{\partial h_m}{\partial q}(q, r_b, t)$. Une définition possible pour la fonction h_m est

$$h_m(q, r_b, t) = h_p(q, r_b, t) + h_\ell(q, t) + h_r(q, t) \tag{4.3}$$

La fonction de coût h_p est associée à la Propriété 3. Elle doit être nulle si et seulement si l'objectif de manipulation est atteint, et doit prendre des valeurs d'autant plus élevées

que l'objectif est loin d'être réalisé. Habituellement, h_p peut s'écrire comme

$$h_p(q, r_b, t) = \frac{1}{2}\|e_p(q, r_b, t)\|^2 \tag{4.4}$$

où e_p est une fonction vectorielle dont l'annulation correspond à la réalisation des liaisons virtuelles associées à l'objectif de manipulation.

Le coût h_ℓ est ajouté afin de garantir la Propriété 2, c'est-à-dire pour assurer que les butées articulaires ne seront pas atteintes tant que e_m reste borné. Cette fonction est définie comme dans la Section 3.3.3, i.e.

$$h_\ell(q) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_q} \alpha_i \, f_i^2(q_i) \qquad (\alpha_i > 0) \tag{4.5}$$

où les fonctions f_i, $\forall i = 1, \ldots, n_q$, sont les fonctions convexes à valeurs réelles définies par les relations (3.13). En dernier lieu, h_r est un coût de régularisation, convexe par rapport à q quel que soit t, dont le rôle est d'aider à assurer la Propriété 1. Nous choisissons $h_r = h_{r,1}$, avec la fonction $h_{r,1}$ de régularisation de la Section 3.3.3, i.e.

$$h_r(q, t) = \frac{1}{2}(q - \hat{q}(t))^T \Gamma(t)(q - \hat{q}(t)) \tag{4.6}$$

avec $\Gamma(t)$ une matrice symétrique définie positive, et $\hat{q}(t)$ la fonction filtrée de $q(t)$ définie par (3.17). Il découle de (4.2)–(4.6), que la tâche de manipulation s'écrit

$$e_m = \left(\frac{\partial e_p}{\partial q}\right)^T e_p + \left(\frac{\partial h_\ell}{\partial q}\right)^T + \Gamma(t)\,(q - \hat{q}(t)) \tag{4.7}$$

et que

$$\frac{\partial e_m}{\partial q} = \left(\frac{\partial e_p}{\partial q}\right)^T \frac{\partial e_p}{\partial q} + \frac{\partial^2 h_\ell}{\partial q^2} + \Gamma(t) + \sum_{k=1}^{n_q} e_{p,k} \frac{\partial^2 e_{p,k}}{\partial q^2} \tag{4.8}$$

Avec h_ℓ définie par (4.5) et (3.13), et d'après l'hypothèse de convexité sur h_r, les deux premières matrices du membre de droite de (4.8) sont positives. Alors,

$$\frac{\partial e_m}{\partial q} \geqslant \Gamma(t) + \sum_{k=1}^{n_q} e_{p,k} \frac{\partial^2 e_{p,k}}{\partial q^2} \tag{4.9}$$

Comme e_p est régulière, l'inversibilité de $\frac{\partial e_m}{\partial q}$ sur tout compact (Propriété 1) peut être obtenue par le choix d'une matrice $\Gamma(t)$ « suffisamment positive ».

4.4 Indications pour le choix du coût secondaire

4.4.1 Choix de la fonction de coût secondaire

Le choix d'une fonction de coût secondaire h_s résulte souvent de la tentative de satisfaire à plusieurs exigences, lesquelles peuvent être tantôt complémentaires, tantôt antagonistes. L'une d'entre elles, d'un intérêt pratique particulièrement important, est de déplacer la plate-forme mobile de sorte à ce que la tâche de manipulation puisse être exécutée sans que le manipulateur n'atteigne ses butées physiques. Une fonction de coût dont la minimisation garantit cette contrainte sera notée $h_{s,1}$. À ce niveau de généralisation, il est difficile de spécifier plus précisément cette fonction. En fait, il existe plusieurs façons de remplir l'obligation mentionnée ci-dessus, qui dépendent des propriétés du manipulateur (notamment le nombre de degrés de liberté du manipulateur, l'existence ou non de variables articulaires non sujettes à des butées, etc...), de la nature de la tâche de manipulation, et également de l'intégralité des informations fournies par les capteurs disponibles quant à la situation de la plate-forme mobile par rapport à son environnement. Des exemples de fonctions $h_{s,1}$ seront toutefois discutés dans la section suivante.

Une seconde contrainte est typiquement de garder la plate-forme immobile tant qu'il est possible de le faire, par exemple lorsque les variables articulaires du manipulateur sont « loin » de leurs butées. La réalisation de cette contrainte peut être traitée par le biais de la minimisation d'une fonction de coût $h_{s,2}$ de la forme suivante, similaire à la fonction de régularisation $h_{r,2}$ de la Section 3.3.3.

$$h_{s,2}(\bar{r}_b, t) \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{d}^2(\bar{r}_b, \hat{r}(t)) \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{d}^2(e, \tilde{r}_b(\bar{r}_b, t)) \tag{4.10}$$

où $\tilde{r}_b(\bar{r}_b, t) = \bar{r}_b^{-1}\hat{r}(t)$ est calculé en utilisant

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{r}}_b &= \bar{R}(\tilde{\theta}_b)(\hat{u}(t) - \mathrm{Ad}_{\tilde{r}_b^{-1}}\bar{u}_b) \\
&= \bar{R}(\tilde{\theta}_b)\hat{u}(t) - \begin{pmatrix} I_2 & J\tilde{p}_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\bar{u}_b \\
\hat{u}(t) &= -\tfrac{1}{\xi + \mathrm{d}(e,\tilde{r}_b(t))}\mathrm{Diag}(\sigma_i)\tilde{r}_b(t)\ (\sigma_{1,2,3} > 0\ , \xi > 0) \\
\tilde{r}_b(0) &= 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ce coût $h_{s,2}$ est minimal pour $\tilde{r}_b = 0$. Au vu de (4.11), la satisfaction de cette égalité sur un intervalle de temps donné implique que $\bar{u}_b = 0$ sur cet intervalle. D'après (2.14), ou (2.15), ceci implique en retour que la vitesse u_b appliquée à la plate-forme mobile est elle aussi égale à zéro. Ceci traduit bien le fait que la minimisation de $h_{s,2}$ est liée à

notre préoccupation d'empêcher la plate-forme de se déplacer. Pourtant, une telle fonction n'est pas, en soi, très utile, puisqu'il suffirait simplement d'imposer $u_b = 0$ pour garder la plate-forme immobile. L'utilité réelle de cette fonction résulte en réalité de son association avec une autre fonction de coût, afin d'aboutir à une loi de commande qui contienne un terme visant à ralentir la plate-forme mobile. Ainsi, l'association de $h_{s,2}$ avec l'objectif de contrôle représenté par la fonction de coût $h_{s,1}$ introduite précédemment mène à la fonction de coût h_s suivante :

$$h_s(\bar{r}_b, t) \;=\; \Psi(t) h_{s,1}(\bar{r}_b, t) + (1 - \Psi(t)) h_{s,2}(\bar{r}_b, t) \tag{4.12}$$

où $\Psi(t) \in [0, 1]$ est une fonction de pondération, de dérivée bornée. Des exemples d'une telle fonction seront donnés plus loin. Plus généralement, h_s sera une somme pondérée de plusieurs coûts, chacun d'entre eux étant associé à une comportement désirable de la plate-forme mobile, c'est-à-dire

$$h_s(\bar{r}_b, t) = \sum_i \Psi_i(t) h_{s,i}(\bar{r}_b, t)$$

4.4.2 Contrôle de la plate-forme mobile

Étant donné une fonction de coût secondaire h_s, notre but est de déterminer une loi de commande par retour d'état $\bar{u}_b$, dont l'application amène et maintient le coût à une valeur « proche » de son minimum. Dans le cas où h_s ne dépend pas du temps et admet un unique minimum r^* (ce qui résulterait de la stricte convexité de la fonction, par exemple), une loi de commande possible est donnée par :

$$\bar{u}_b = -\left(\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}(\bar{r}_b)\right)^T h_s(\bar{r}_b) \tag{4.13}$$

Effectivement, comme $\dot{h}_s(\bar{r}_b) = \frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}(\bar{r}_b)\bar{u}_b$, cette commande conduit, en boucle fermée, à $\dot{h}_s = -\|\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}(\bar{r}_b)\|^2 h_s$ ($\leqslant 0$), ce qui implique alors que $\|\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}(\bar{r}_b)\|^2 h_s(\bar{r}_b)$ tend vers zéro, et que h_s décroît vers une valeur-limite (positive ou nulle). Si cette limite est non-nulle, alors $\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}$ tend nécessairement vers zéro, de sorte que h_s tend vers son minimum. Le contrôle ci-dessus fait donc converger $\bar{r}_b$ vers la posture r^* solution du problème de minimisation, quelle que soit la valeur minimale de h_s. Notons que le calcul de ce contrôle ne nécessite pas la détermination explicite de r^*. La mesure de $h_s(\bar{r}_b)$ et de son gradient $\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}(\bar{r}_b)$, ajoutés à la propriété de convexité de la fonction, sont suffisantes (tout comme pour les algorithmes de minimisation par descente de gradient).

Le cas d'une fonction h_s dépendant du temps est plus ardu. Dans ce cas, la dérivée temporelle de $h_s(\bar{r}_b, t)$ le long des trajectoires du manipulateur mobile est donnée par :

$$\dot{h}_s = a^T(\bar{r}_b, t)\bar{u}_b + \frac{\partial h_s}{\partial t}(\bar{r}_b, t) \tag{4.14}$$

avec

$$a^T(\bar{r}_b, t) := \frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}(\bar{r}_b, t) \tag{4.15}$$

Tant que $\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}(\bar{r}_b, t) \neq 0$, il est toujours possible de trouver une commande $\bar{u}_b$ qui fasse décroître h_s (c'est-à-dire $\dot{h}_s < 0$). Mais, lorsque $\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}(\bar{r}_b, t)(\bar{r}_b, t) = 0$ —ce qui correspond à la condition nécessaire pour que $\bar{r}_b$ soit un optimum local de h_s— la commande n'a plus aucun effet sur l'évolution de h_s. Ceci implique que, dans ce cas, la minimisation de h_s ne peut être garantie à tout instant. L'évolution temporelle de h_s dépendra donc non seulement du choix de la loi de commande, mais aussi des propriétés intrinsèques de h_s. Nous proposons dans la suite une expression de $\bar{u}_b$ qui, associée à une décomposition appropriée du « terme de dérive » $\frac{\partial h_s}{\partial t}(\bar{r}_b, t)$, est « susceptible » de produire de bons résultats dans la plupart des circonstances. Dans ce qui suit, les arguments $\bar{r}_b$ et t de toutes les fonctions seront omis, à des fins de lisibilité.

Soit une décomposition de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$ sous la forme

$$\frac{\partial h_s}{\partial t} = a^T b_1 + b_2 \tag{4.16}$$

avec b_1 et b_2 des fonctions de $\bar{r}_b$ et t. Alors, d'après (4.14)

$$\dot{h}_s = a^T(\bar{u}_b + b_1) + b_2 \tag{4.17}$$

Cette décomposition n'est bien sûr pas unique. La relation précédente suggère qu'une telle décomposition avec $b_2 = 0$ doit être favorable à la minimisation de h_s. Ce choix n'est cependant pas toujours possible, car $\frac{\partial h_s}{\partial t}$ peut être non nul alors que $\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b} = 0$. La relation (4.17) montre également que b_1 contient une part de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$, qui peut être « exactement » pré-compensée par la commande.

Afin de spécifier le choix de la commande $\bar{u}_b$, en relation avec la décomposition (4.16), nous considérons le problème de minimisation d'une fonction de coût $h_{\bar{u}_b}$ sous la contrainte que $\dot{h}_s = -(a^T D a)$. Ce problème se pose classiquement sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{h}_s + (a^T D a) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_b}(\bar{u}_b) &= 0 \end{cases}$$

avec $L := h_{\bar{u}_b} + \lambda(\dot{h}_s + (a^T Da))$ le lagrangien associé à cette minimisation sous contrainte. La fonction $h_{\bar{u}_b}$ à minimiser par rapport à $\bar{u}_b$ est la suivante :

$$h_{\bar{u}_b} := \frac{1}{2}(\bar{u}_b + b_1)^T K^{-1}(\bar{u}_b + b_1),\ K > 0 \tag{4.18}$$

L'idée sous-jacente est *i)* de faire décroître h_s avec un taux fixé (partiellement) par la matrice D (c'est le rôle de la contrainte), et *ii)* de choisir, parmi les contrôles menant à ce taux de décroissance de h_s, celui dont la différence avec la pré-compensation de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$ par le terme b_1 est minimale, en terme de norme pondérée par la matrice positive K^{-1}. Cet objectif de minimisation est inspiré par des considérations d'économie d'énergie, et correspond aussi à l'intérêt de limiter le nombre de manœuvres durant la phase transitoire, lorsque la plate-forme est non-holonome, par un choix adéquat de la matrice K. Pour de plus amples détails sur ce sujet, se référer à (Artus et al., 2004). Par exemple, pour un véhicule de type unicycle, le choix de la matrice

$$K(\alpha) := \bar{H}(\alpha)\bar{K}\bar{H}(\alpha)^T \tag{4.19}$$

avec $\bar{H}(\alpha)$ la matrice définie dans (2.16) et $\bar{K} := \mathrm{Diag}(\bar{k}_b, \bar{k}_b, \bar{k}_\alpha)$ une matrice constante positive, conduit à $\bar{u}_b^T K(\alpha)^{-1}\bar{u}_b = (1/\bar{k}_b)\|u_b\|^2 + (1/\bar{k}_\alpha)\dot{\alpha}^2$. Cette dernière relation suggère alors de choisir $\bar{k}_b$ inférieur à $\bar{k}_\alpha$, afin de pénaliser les composantes $v_{b,1}$ et ω_b de la vitesse de la plate-forme vis-à-vis de la commande virtuelle $\dot{\alpha}$.

En utilisant (4.17), le lagrangien devient :

$$L(\bar{u}_b) = \frac{1}{2}(\bar{u}_b + b_1)^T K^{-1}(\bar{u}_b + b_1) + \lambda\left(a^T(\bar{u}_b + b_1) + b_2 + (a^T Da)\right)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. La condition d'optimalité

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_b}(\bar{u}_b) = 0$$

conduit à $\bar{u}_b = -b_1 - \lambda K a$, et la substitution de cette expression dans l'équation de la contrainte donne le multiplicateur suivant :

$$\lambda = \frac{a^T Da + b_2}{a^T K a}$$

La solution au problème de minimisation est donc

$$\bar{u}_b = -b_1 - \frac{a^T Da}{a^T K a} K a - \frac{b_2}{a^T K a} K a$$

Afin d'assurer que $\bar{u}_b$ est correctement défini quand $\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b} = 0$ (c'est-à-dire quand $a = 0$), on peut, par exemple, modifier l'expression précédente de la manière suivante :

$$\bar{u}_b = -\hat{b}_1 - \frac{a^T Da + \hat{b}_2}{a^T Ka + \mu} Ka \tag{4.20}$$

avec μ un réel positif proche de zéro, et $\hat{b}_i$, $i = 1, 2$, une estimation *ad hoc* des b_i dont le choix est discuté ci-après.

D'après (4.17), l'application de la loi de commande (4.20) donne, en boucle fermée :

$$\begin{array}{rcl} \dot{h}_s & = & -\frac{a^T Ka}{a^T Ka+\mu} a^T Da + \frac{\partial h_s}{\partial t} - (a^T \hat{b}_1 + \frac{a^T Ka}{a^T Ka+\mu} \hat{b}_2) \\ & = & -\frac{a^T Ka}{a^T Ka+\mu} a^T Da + a^T (b_1 - \hat{b}_1) + (b_2 - \frac{a^T Ka}{a^T Ka+\mu} \hat{b}_2) \end{array} \tag{4.21}$$

Parmi l'infinité des choix possibles pour $\hat{b}_1$ et $\hat{b}_2$, les trois suivants nous semblent assez significatifs des diverses stratégies de mouvement pour la base mobile.

Cas 1 :Pré-compensation totale de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$ via le choix $(\hat{b}_1 = b_1, \hat{b}_2 = b_2)$.

Dans ce cas, la relation (4.21) donne

$$\dot{h}_s = -\frac{a^T Ka}{a^T Ka + \mu} a^T Da + \frac{\mu}{a^T Ka + \mu} b_2 \tag{4.22}$$

Cette équation montre que l'introduction de la constante μ de régularisation empêche la contrainte désirée $\dot{h}_s = -a^T Da$ d'être exactement satisfaite, ce qui était prévisible. Elle souligne également le fait que la pré-compensation de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$ est d'autant plus efficace, en terme de minimisation de h_s, que $\|b_2\|$ est petit. En effet, quand $b_2 \equiv 0$, alors h_s est non-croissante et a –et par suite également $\frac{\partial h_s}{\partial \bar{r}_b}$– converge vers zéro. Si h_s est strictement convexe par rapport à $\bar{r}_b$ et indépendante du temps, il s'en suit que h_s converge vers son minimum. Quand $b_2 \neq 0$, il n'est plus possible de garantir la convergence de h_s à son minimum. Néanmoins, la relation suivante (conséquence directe de (4.22))

$$(a^T Da)(a^T Ka) \geqslant \mu b_2 \Longrightarrow \dot{h}_s \leqslant 0$$

indique que la décroissance de h_s est d'autant plus probable que $\|b_2\|$ est petit. Lorsque b_2 ne peut être choisi nul, une décomposition possible (b_1, b_2) de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$, cohérente avec l'idée

de garder b_2 petit est, par exemple

$$b_1 = \frac{\partial h_s}{\partial t}\frac{b}{\|a\|^2 + \nu}a \;\Rightarrow\; b_2 = \frac{\nu}{\|a\|^2 + \nu}\frac{\partial h_s}{\partial t} \tag{4.23}$$

avec ν un réel positif proche de zéro.

Cas 2 : Aucune pré-compensation de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$ par le choix $(\hat{b}_1 = 0, \hat{b}_2 = 0)$.

D'après (4.21), la fonction h_s suit alors l'évolution suivante

$$\dot{h}_s = -\frac{a^T K a}{a^T K a + \mu}a^T D a + \frac{\partial h_s}{\partial t} \tag{4.24}$$

Les conséquences de ce type de choix sont un contrôle moins « réactif » et une dégradation des performances quant à la minimisation de h_s. D'un autre côté, une contrepartie bénéfique de cette perte de réactivité est la réduction des efforts de commande sur la plate-forme. Cet effet est prévisible puisque, d'après (4.18), la fonction minimisée $h_{\bar{u}_b}$ est alors donnée par $h_{\bar{u}_b} = \bar{u}_b^T K^{-1} \bar{u}_b$.

Cas 3 : Pré-compensation de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$ combinée avec une réduction des efforts de commande sur la plate-forme, par le choix $(\hat{b}_1 = 0, \hat{b}_2 = \frac{\partial h_s}{\partial t})$.

Nous obtenons alors en boucle fermée :

$$\dot{h}_s = -\frac{a^T K a}{a^T K a + \mu}a^T D a + \frac{\mu}{a^T K a + \mu}\frac{\partial h_s}{\partial t} \tag{4.25}$$

Dans ce cas, l'effort de commande est réduit (pour les mêmes raisons que stipulées dans le cas précédent) au détriment de la pré-compensation de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$, laquelle ne peut plus être exactement réalisée, et, par voie de conséquence, au détriment de la minimisation de h_s. Cette solution de contrôle peut être considérée comme une possibilité intermédiaire entre les deux cas précités. Évidemment, il existe tout un continuum de solutions intermédiaires impliquant une pré-compensation partielle de $\frac{\partial h_s}{\partial t}$, chacune d'entre elles menant à un compromis différent en terme de dépense énergétique liée au contrôle et de minimisation de h_s.

Une analyse plus poussée des propriétés de la commande nécessiterait de spécifier plus précisément la fonction h_s, comme nous l'illustrons dans les exemples d'application présentés dans la section suivante.

Rappelons enfin que le contrôle u_b de la plate-forme mobile est déduit de $\bar{u}_b$ en utilisant la relation (2.14) (ou (2.15)), c'est-à-dire $u_b = \bar{u}_b$, lorsque la plate-forme mobile est omnidirectionnelle, et $(u_b, \dot{\alpha})^T = \bar{H}(\alpha)^{-1}\bar{u}_b$ avec la matrice $\bar{H}(\alpha)$ définie dans (2.16), lorsque la plate-forme est non-holonome et de type unicycle. Commentons aussi rapidement l'existence de limitations sur les vitesses appliquées à la plate-forme, c'est-à-dire sur les composantes de u_b. Une façon élégante de résoudre ce problème consiste à imposer des « saturations » sur les commandes de la plate-forme. Dans ce cas, il est important de garder à l'esprit que cette saturation est implémentée en divisant *toutes* les composantes de $(u_b, \dot{\alpha})$ par la même grandeur (supérieure ou égale à un), de manière à accroître les chances de préserver les propriétés de stabilité du contrôle (ce traitement des limitations en vitesses se ramène en effet à un simple changement d'échelle de temps, pourvu que le système soit sans dérive).

4.5 Applications

Nous appliquons l'approche par repère compagnon dans un premier temps au cas de manipulateurs mobiles composés de plates-formes de type unicycle, avec des manipulateurs et des tâches de manipulation différentes. Nous présentons ensuite une application pour une plate-forme de type voiture.

4.5.1 Cas d'un bras RPR sur une plate-forme de type unicycle

L'objectif de commande, déjà considéré au chapitre précédent (voir Figure 3.3), consiste à suivre à la fois en position et en orientation un objet (associé sur la figure à un repère $\mathcal{F}_d$) en mouvement dans le plan. Le manipulateur mobile est composé d'une plate-forme porteuse de type unicycle équipée d'un bras manipulateur trois axes de type RPR. Le premier axe du manipulateur est fixé à la plate-forme au point de coordonnées $(L, 0)$ dans le repère $\mathcal{F}_b$. La distance entre la dernière articulation et l'origine E du repère associé à l'organe terminal $\mathcal{F}_e$ est notée L_e.

4.5.1.1 Tâche de manipulation et commande associée

L'objectif de manipulation est la stabilisation de la situation relative de la cible par rapport à l'organe terminal du bras, r_{ed}, à une valeur de consigne donnée $r_{ed}^* = (X^* \; 0 \; 0)^T$. La réalisation de cet objectif implique que, quel que soit le mouvement de la cible dans le plan, la cible paraît immobile dans le repère lié à l'organe terminal, à la distance X^* de ce dernier. C'est une liaison virtuelle de dimension trois. Nous pouvons supposer, par

exemple, que r_{ed} est mesurée par une caméra fixée sur l'organe terminal. Un choix possible pour l'objectif de manipulation e_p est le suivant

$$e_p(q, r_b, t) = \tilde{r}_{ed} := (r^*_{ed})^{-1} r_{ed} \tag{4.26}$$

Afin de calculer la commande articulaire (4.1), il nous faut déterminer les dérivées partielles de e_p par rapport à q, r_b, et t. Puisque $\theta^*_{ed} = 0$ et $u^*_{ed} = 0$, on déduit des relations (1.6) et (4.26) que

$$\dot{e}_p = \dot{r}_{ed} \tag{4.27}$$

Comme $r_{ed} = r_{eb} r_{bd}$, on obtient aussi, grâce à (1.10) et (1.11),

$$\dot{r}_{ed} = \bar{R}(\theta_{ed})(u_{bd} + \mathrm{Ad}_{r_{db}} u_{eb})$$

avec

$$u_{bd} = u_d - \mathrm{Ad}_{r_{db}} u_b$$

Il en résulte

$$\dot{r}_{ed} = \bar{R}(\theta_{ed}) \left(u_d + \mathrm{Ad}_{r_{db}}(u_{eb} - u_b)\right) \tag{4.28}$$

La situation relative r_{eb} de la plate-forme mobile par rapport à l'organe terminal est une fonction de q uniquement, et il est aisé de vérifier que

$$r_{eb} = \begin{pmatrix} -R(-q_1 - q_3) \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} - R(-q_3) \begin{pmatrix} q_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_e \\ 0 \end{pmatrix} \\ -q_1 - q_3 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \dot{r}_{eb} &= \bar{R}(\theta_{eb}) u_{eb} \\ &= \frac{\partial r_{eb}}{\partial q} \dot{q} \end{aligned} \tag{4.30}$$

et, d'après (4.27)-(4.28),

$$\dot{e}_p = \bar{R}(\theta_{ed}) \left(u_d + \mathrm{Ad}_{r_{db}} (\bar{R}(\theta_{be}) \frac{\partial r_{eb}}{\partial q} \dot{q} - u_b) \right) \tag{4.31}$$

De l'équation ci-dessus, nous déduisons l'expression des dérivées partielles de la fonction e_p :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_p}{\partial q} &= \bar{R}(\theta_{ed})\mathrm{Ad}_{r_{db}}\bar{R}(\theta_{be})\frac{\partial r_{eb}}{\partial q} = \begin{pmatrix} I_2 & R(\theta_{eb})Jp_{bd} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial r_{eb}}{\partial q} \\
\frac{\partial e_p}{\partial r_b} &= -\bar{R}(\theta_{ed})\mathrm{Ad}_{r_{db}} = -\begin{pmatrix} R(\theta_{eb}) & R(\theta_{eb})Jp_{bd} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\frac{\partial e_p}{\partial t} &= \bar{R}(\theta_{ed})u_d
\end{aligned} \tag{4.32}$$

avec $\theta_{eb} = -\theta_{be} = -(q_1 + q_3)$. En utilisant (4.29), on peut montrer que $\frac{\partial r_{eb}}{\partial q}$, et donc $\frac{\partial e_p}{\partial q}$, sont inversibles en tout point, hormis en $q_2 = 0$.

Une fois déterminé l'objectif de manipulation e_p, la fonction de tâche de manipulation e_m est donnée par (4.2)–(4.3), avec le coût h_p défini par (4.4), h_l par (4.5) et (3.13), et h_r par (4.6) et (3.17). La loi de commande u_q est alors donnée par (4.1). Les différents paramètres constants intervenant dans ces expressions seront spécifiés plus loin.

4.5.1.2 Coût secondaire et commande de la plate-forme mobile

Pour cette application, dans le cas d'une plate-forme omnidirectionnelle, un moyen simple de garantir l'évitement des butées articulaires tout en assurant le suivi de la cible consiste à maintenir la situation relative $r_{db} = r_d^{-1} r_b$ entre la plate-forme et la cible à une certaine valeur nominale r^*. Dans le cas d'une plate-forme sujette à des contraintes non-holonomes, cet objectif ne peut plus être atteint pour un déplacement quelconque de la cible. Cependant, il est possible d'approcher cet objectif en choisissant de commander le repère compagnon de la plate-forme non-holonome au lieu de cette dernière. Ceci suggère de considérer la fonction de coût secondaire $h_{s,1}$ suivante :

$$h_{s,1}(\bar{r}_b, t) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2(r^*, r_d^{-1}(t)\bar{r}_b) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2(e, \tilde{r}) \tag{4.33}$$

avec d la distance définie par (1.8), et $\tilde{r} = (r^*)^{-1} r_d^{-1} \bar{r}_b$. Nous déduisons alors des relations (1.6) et (2.13)

$$\dot{\tilde{r}} = \bar{R}(\tilde{\theta})(\bar{u}_b - \mathrm{Ad}_{(r^*\tilde{r})^{-1}} u_d) \tag{4.34}$$

avec u_d définie par $\dot{r}_d = \bar{R}(\theta_d)u_d$. D'après l'expression (1.8) de la distance d, nous avons

$$\frac{\partial \mathrm{d}^2(e, \tilde{r})}{\partial \tilde{r}} = 2(\tilde{x}, \tilde{y}, \sin\tilde{\theta})\bar{R}(\tilde{\theta})$$

et, en utilisant (4.34), on montre que l'équation (4.14) est satisfaite pour la fonction $h_s = h_{s,1}$ avec

$$\begin{array}{rcl} a^T(\bar{r}_b, t) & = & (\tilde{x}, \tilde{y}, \sin\tilde{\theta})\bar{R}(\tilde{\theta}) \\ \frac{\partial h_s}{\partial t}(\bar{r}_b, t) & = & (\tilde{x}, \tilde{y}, \sin\tilde{\theta})\bar{R}(\tilde{\theta})\left(-\mathrm{Ad}_{(r^*\tilde{r})^{-1}} u_d\right) \end{array}$$

Ces équations indiquent également, dans ce cas, une décomposition de la dérive $\frac{\partial h_s}{\partial t}$ sous la forme $\frac{\partial h_s}{\partial t} = a^T b_1 + b_2$ avec

$$b_1(\bar{r}_b, t) = -\mathrm{Ad}_{(r^*\tilde{r})^{-1}} u_d\,, \qquad b_2 = 0 \tag{4.35}$$

L'application de la loi de commande (4.20) avec $\hat{b}_1 = b_1$ et $\hat{b}_2 = b_2 = 0$ entraîne alors la décroissance de h_s (comme le montre la relation (4.22) avec $b_2 = 0$) et la convergence du coût vers zéro. Dans ce cas, pourvu que *i)* les paramètres ε_1, ε_2 de la fonction transverse (2.7) soient choisis suffisamment petits, *ii)* la situation relative initiale $r_{ed}(0)$ entre l'organe terminal et la cible ne soit pas trop éloignée de la valeur de consigne, *iii)* la situation relative initiale $r_{db}(0)$ de la plate-forme par rapport à la cible soit assez proche de r^*, et *iv)* la matrice $\Gamma(t)$ intervenant dans le coût de régularisation h_r est choisie égale à zéro, alors l'erreur de suivi entre la cible et l'organe terminal est exponentiellement stabilisée à zéro, tout en maintenant les variables articulaires à distance de leurs butées. Ce résultat est valide quel que soit le mouvement de la cible, à condition que la « vitesse » u_d de la cible soit mesurée (ou estimée) avec précision.

Comme nous l'avons déjà souligné, la réalisation de cette tâche secondaire impose à la plate-forme de se déplacer dès que la cible est en mouvement. Eu égard aux considérations sur la coordination entre locomotion et manipulation, il serait préférable de garder la plate-forme immobile tant que les variables articulaires restent éloignées de leurs butées, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'exécution exacte de la tâche de positionnement doive être abandonnée au profit de l'évitement des butées. Une telle stratégie peut être menée en considérant une combinaison de plusieurs fonctions de coût secondaires, par exemple en combinant $h_{s,1}$ avec la fonction $h_{s,2}$ donnée par les relations (4.10) et (4.11). Ce choix conduit à la fonction de coût secondaire de la relation (4.12), i.e.

$$h_s(\bar{r}_b, t) = \Psi(t) h_{s,1}(\bar{r}_b, t) + (1 - \Psi(t)) h_{s,2}(\bar{r}_b, t)$$

où Ψ est une fonction de pondération dont le choix est discuté à présent. Le principe est de garder $\Psi(t)$ égal à zéro tant que les variables articulaires q restent loin de leurs butées, et strictement positif ailleurs. Notons que $\Psi(t)$ ne peut pas dépendre de q, car h_s ne serait alors plus une fonction des seules variables r_b et t. $\Psi(t)$ doit être une fonction du temps

de dérivée bornée. Afin de satisfaire cette contrainte, une possibilité consiste à utiliser une valeur filtrée de $\tilde{\Psi}(q(t))$, avec $q(t)$ le vecteur de mesure des coordonnées articulaires, et $\tilde{\Psi}$ une fonction égale à zéro quand les variables articulaires sont loin de leurs butées, et strictement positive ailleurs. Une telle fonction est obtenue en posant par exemple

$$\tilde{\Psi}(q) = \frac{1}{n_q}\sum_{i=1}^{n_q}\tilde{\sigma}_i^2(q_i)\ , \quad \tilde{\sigma}_i(q_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } q_i \leqslant q_i^- + \delta_i^{--} \text{ ou } q_i \geqslant q_i^+ - \delta_i^{++} \\ \frac{q_i^- + \delta_i^- - q_i}{\delta_i^- - \delta_i^{--}} & \text{si } q_i^- + \delta_i^{--} < q_i < q_i^- + \delta_i^- \\ 0 & \text{si } q_i^- + \delta_i^- \leqslant q_i \leqslant q_i^+ - \delta_i^+ \\ \frac{q_i - q_i^+ - \delta_i^+}{\delta_i^+ - \delta_i^{++}} & \text{si } q_i^+ - \delta_i^+ < q_i < q_i^+ - \delta_i^{++} \end{cases} \tag{4.36}$$

avec les marges δ_i^+ et δ_i^- choisies supérieures aux marges δ_i utilisées dans (4.5), afin de réduire le risque pour le manipulateur d'atteindre une configuration au-delà de laquelle l'exécution parfaite de la tâche de positionnement e_p est susceptible d'être mise en défaut en raison du fait que $h_l(q) \neq 0$. Enfin, les marges δ_i^{++} et δ_i^{--} sont prises respectivement dans les intervalles (δ_i, δ_i^+) et (δ_i, δ_i^-).

Un filtrage possible de $\tilde{\Psi}(q(t))$ est donné par (voir (3.17)) :

$$\begin{cases} \dot{\Psi} &= -\lambda\frac{\Psi - \tilde{\Psi}(q(t))}{\xi + \|\Psi - \tilde{\Psi}(q(t))\|} \qquad (\lambda > 0\ , \xi > 0) \\ \Psi(0) &= \tilde{\Psi}(q(0)) \end{cases} \tag{4.37}$$

Remarquons que $\Psi(t) \in [0,1]$ pour tout t car $\tilde{\Psi}(q) \in [0,1]$ pour tout q, de sorte que Ψ correspond à une fonction de pondération. Soulignons aussi que plus λ est élevé, plus le filtre laisse passer les hautes fréquences.

Il est également possible de déterminer $\Psi(t)$ de manière légèrement différente, en posant :

$$\Psi(t) = \frac{1}{n_q}\sum_{i=1}^{n_q}\sigma_i^2(t) \tag{4.38}$$

où $\sigma_i(t)$ est une valeur filtrée de $\tilde{\sigma}_i(q_i(t))$, numériquement calculée comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_i &= -\lambda\frac{\sigma_i - \tilde{\sigma}_i(q_i(t))}{\xi + |\sigma_i - \sigma_i(q_i(t)|} \qquad (\lambda > 0\ , \xi > 0) \\ \sigma_i(0) &= \tilde{\sigma}_i(q_0) \end{cases}$$

Enfin une troisième possibilité, moins coûteuse en temps de calcul, consiste à poser :

$$\Psi(t) = \frac{1}{n_q}\sum_{i=1}^{n_q}\sigma_i^2(\hat{q}_i(t))$$

où les $\hat{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n_q)$ désignent les composantes de la fonction $\hat{q}$ obtenue par filtrage de q via (3.17).

4.5.1.3 Résultats de simulation

Les paramètres géométriques du manipulateur mobile sont les suivants :

- $L = 0,4$ m, $L_e = 0,15$ m,
- $(q_1^-, q_1^+) = (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ rad, $(q_2^-, q_2^+) = (0,\ 0,7)$ m, et $(q_3^-, q_3^+) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rad.

La fonction de tâche de manipulation e_m est construite comme indiqué dans la Section 4.3, avec la fonction e_p donnée par (4.26) et $X^* = 0,5$ (m). Les paramètres du coût h_ℓ, intervenant dans les relations (4.5) et (3.13), sont $\alpha_i = 1$, $\delta_i = 0,05\ (q_i^+ - q_i^-)$. Le terme de régularisation h_r est défini par (4.6), avec la matrice $\Gamma(t) = 0,2\exp(-t)I_3$. La matrice de gain dans la définition (4.1) de u_q est $G = 3I_3$.

Quant à la détermination de la fonction de coût secondaire associée à la commande de la plate-forme mobile, la fonction h_s est définie par (4.12), avec $h_{s,1}$ et $h_{s,2}$ données respectivement par les relations (4.33) d'une part, et (4.10)-(4.11) d'autre part. Dans la fonction $h_{s,1}$, la situation relative préférentielle est $r^* = -(X^* + L_e + L + 0,45\ 0\ 0)^T$. Cette valeur a été choisie afin que $e_p = 0$ lorsque $r_{db} = r^*$ et $q = q^* = (0\ 0,45\ 0)^T \in \prod_{i=1}^{3}(q_i^-, q_i^+)$. Les paramètres de la fonction $h_{s,2}$ sont $\sigma_i = 10$ et $\xi = 1$. En ce qui concerne la fonction de pondération $\Psi(t)$, nous avons considéré deux choix, que nous spécifierons un peu plus loin. La loi de commande $\bar{u}_b$ est alors calculée conformément à (4.20) avec la matrice K donnée par (4.19) pour $\bar{K} = \mathrm{Diag}(1, 1, 100)$, $D = I_3$, et $\mu = 10^{-4}$. Les fonctions $\hat{b}_1$ et $\hat{b}_2$ seront spécifiées pour chaque jeu de simulations. La fonction transverse f, qui permet de déterminer les matrices $H(\alpha)$ et $\bar{H}(\alpha)$, est définie par (2.7) avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0,2,\ 0,4)$. La loi de commande u_b pour la plate-forme mobile non-holonome est enfin déduite de $\bar{u}_b$ et de (2.15). Il nous reste donc à fixer les fonctions Ψ, $\hat{b}_1$ et $\hat{b}_2$. Afin d'illustrer l'influence de ces fonctions sur le comportement du système en boucle fermée, nous considérons ci-dessous quatre choix et présentons les résultats de simulation associés pour deux trajectoires de la cible dans le plan.

Exemple 13 Trajectoire de la cible n° 1

Dans les résultats de simulation présentés sur les Figures 4.1–4.5, l'amplitude des déplacements de la cible est faible, de telle sorte que, une fois la plate-forme à proximité de la cible, la tâche de manipulation peut être réalisée sans nécessiter de mouvements

de la plate-forme. Le mouvement de la cible est défini par sa vitesse u_d (c'est-à-dire $\dot{r}_d = \bar{R}(\theta_d)u_d$) avec

$$u_d(t) = -\frac{\pi}{20}\left(\sin\frac{\pi}{2}t, \cos\frac{\pi}{2}t, 0\right)^T,\ t \in [0, 20](s)$$

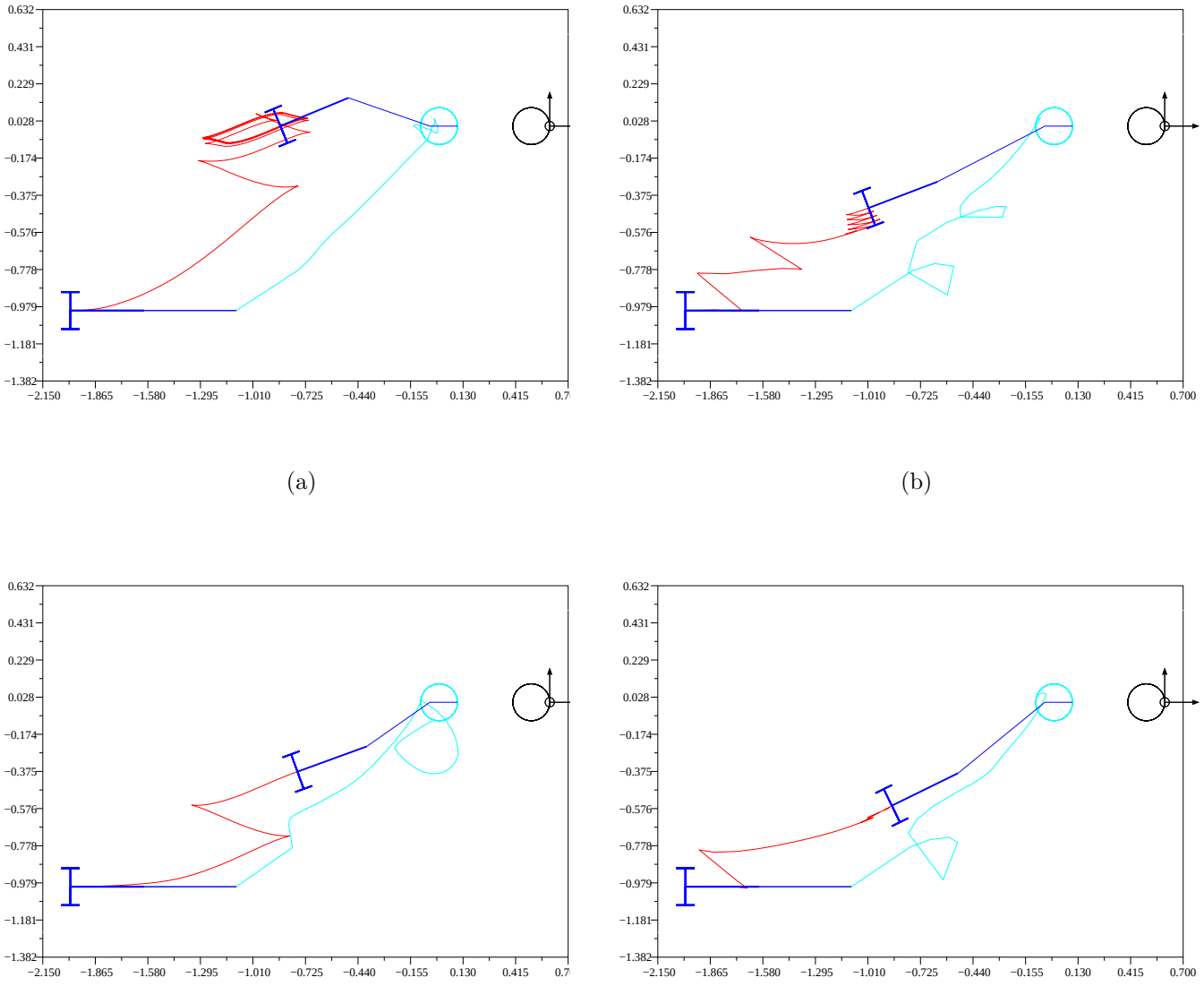
L'origine du repère de la cible décrit ainsi une trajectoire circulaire, avec une orientation fixe (voir la Figure 4.1 où sont représentés en haut à droite le déplacement du repère associé à la cible et la trajectoire circulaire de ce dernier). La situation relative initiale de la cible par rapport à la base mobile est $r_{bd}(0) = (2,6\ 1\ 0)^T$, et la configuration initiale du bras manipulateur est $q(0) = (0\ 0,35\ 0)^T$ (avec les variables articulaires q spécifiées sur la Figure 3.3). Nous détaillons maintenant les différents choix de Ψ, $\hat{b}_1$ et $\hat{b}_2$.

a. $\Psi = 1$, et $(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$ est choisi suivant le **Cas 1** de la Section 4.4.2, c'est-à-dire $(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = (b_1, b_2)$ avec b_1, b_2 définis par (4.35). Comme $\Psi \equiv 1$, h_s est réduit à $h_{s,1}$. Dans ce cas, en raison de la définition de $(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$, et comme $b_2 = 0$, on garantit la convergence de h_s à zéro, comme le montre la Figure 4.5(a). Le mouvement cartésien du manipulateur mobile est donné en Figure 4.1(a). Il est possible de distinguer deux phases. Pendant un premier temps, la plate-forme s'approche de la cible et h_s comme e_p tendent vers zéro (voir Figures 4.5(a) et 4.2(a)). Cette phase transitoire de convergence est suivie d'un régime permanent caractérisé par des mouvements périodiques (non-stationnaires) simultanés de la plate-forme mobile et du bras manipulateur. Bien que h_s et e_p soient correctement régulés à zéro, cette solution présente un inconvénient pratique majeur : cette stratégie ne permet pas de maintenir la plate-forme immobile. Ce problème est également illustré par les Figures 4.3(a) et 4.4(a), qui montrent l'évolution des entrées de commande $v_{b,1}$ et ω_b de la plate-forme.

b. $\Psi(t)$ est définie par (4.37), et $(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$ est encore choisi selon le **Cas 1** de la Section 4.4.2, à la différence près que b_1 et b_2 sont désormais définis par (4.23) avec $\nu = 10^{-4}$. Les paramètres de filtrage $(\lambda, \xi) = (1,66,;\ 1)$, $\delta_i^- = 0,2(q_i^* - q_i^-)$, $\delta_i^+ = 0,2(q_i^+ - q_i^*)$, $\delta_i^{--} = \frac{2}{3}\delta_i^-$, et $\delta_i^{++} = \frac{2}{3}\delta_i^+$ sont utilisés dans la relation (4.36) définissant la fonction $\tilde{\Psi}$. La différence majeure par rapport au cas précédent réside dans la définition de h_s, et dans l'effet d'inertie qui résulte de la fonction $h_{s,2}$. Les Figures 4.1(b), 4.3(b) et 4.4(b)confirment que cette stratégie réduit l'amplitude des déplacements de la plate-forme. De plus, elle ne nuit pas à la réalisation de l'objectif de manipulation, comme le corrobore la Figure 4.2(b). Bien que h_s ne tende plus vers zéro en raison du choix $b_2 \neq 0$, les valeurs asymptotiques prises par h_s sont petites (voir la Figure 4.5(b)).

c. $\Psi(t)$ est définie comme dans la simulation précédente (Simulation (b)), et $(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$ est choisi conformément au **Cas 2** proposé en Section 4.4.2, c'est-à-dire $(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = (0, 0)$. La comparaison avec les résultats des simulations précédentes met en évidence la plus grande régularité des mouvements de la plate-forme induits par ce choix, ainsi que la convergence vers une posture fixe. L'objectif de manipulation est toujours parfaitement atteint (cf Figure 4.2(c)) après une phase transitoire légèrement plus longue que dans les Simulations (a) et (b).

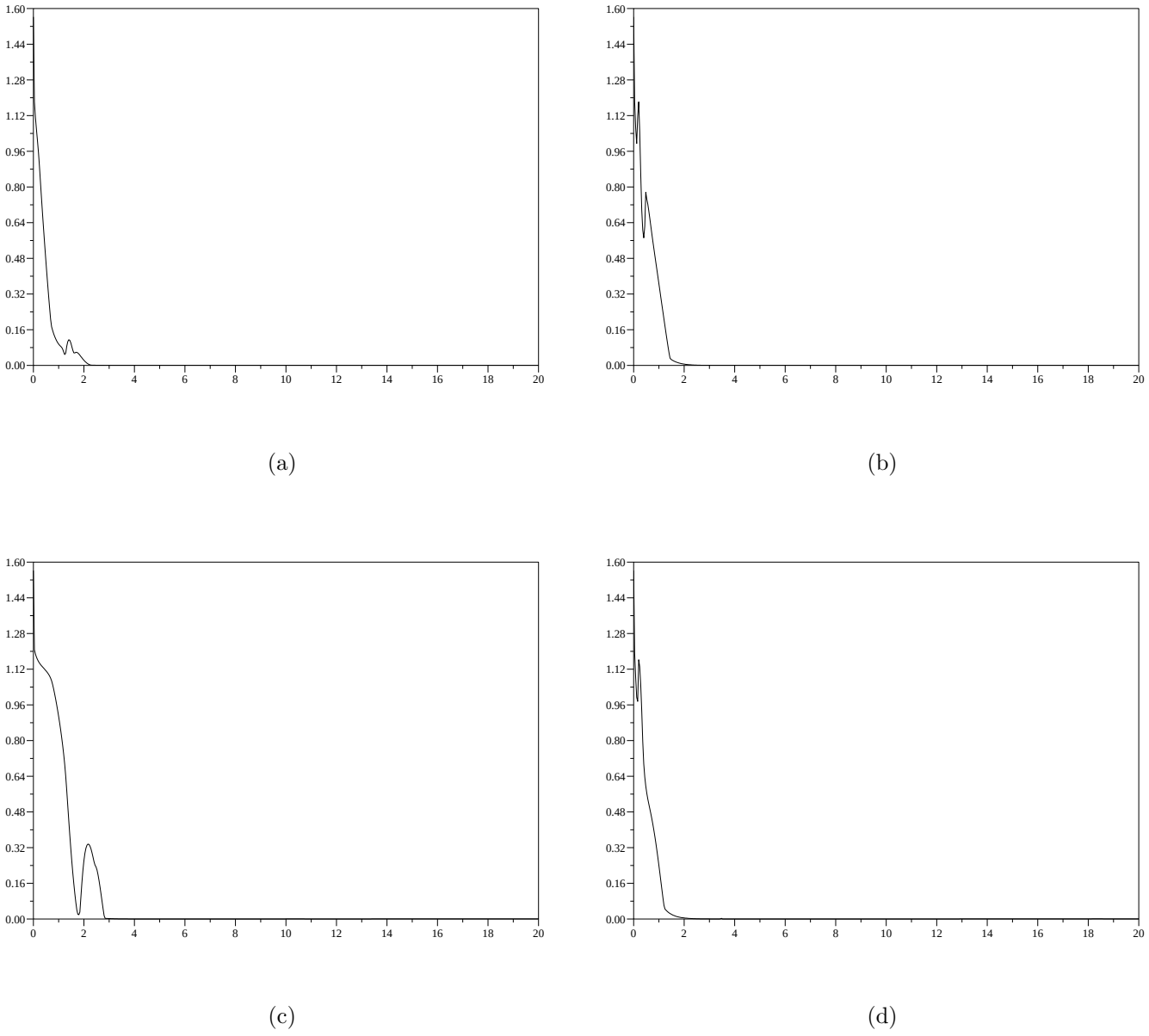
d. $\Psi(t)$ est définie comme dans les Simulations (b) et (c), et $(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$ selon les indications du **Cas 3** en Section 4.4.2, c'est-à-dire $(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = (0, \frac{\partial h_s}{\partial t})$. Ceci correspond à un compromis entre les choix des Simulations (b) et (c), puisque cette stratégie a la particularité de pré-compenser partiellement le terme de dérive $\frac{\partial h_s}{\partial t}$ dans (4.21). Avec ce type de trajectoire de la cible, il en résulte un comportement du manipulateur mobile assez proche de celui obtenu avec les paramètres de la Simulation (c).



(a) (b)

(c) (d)

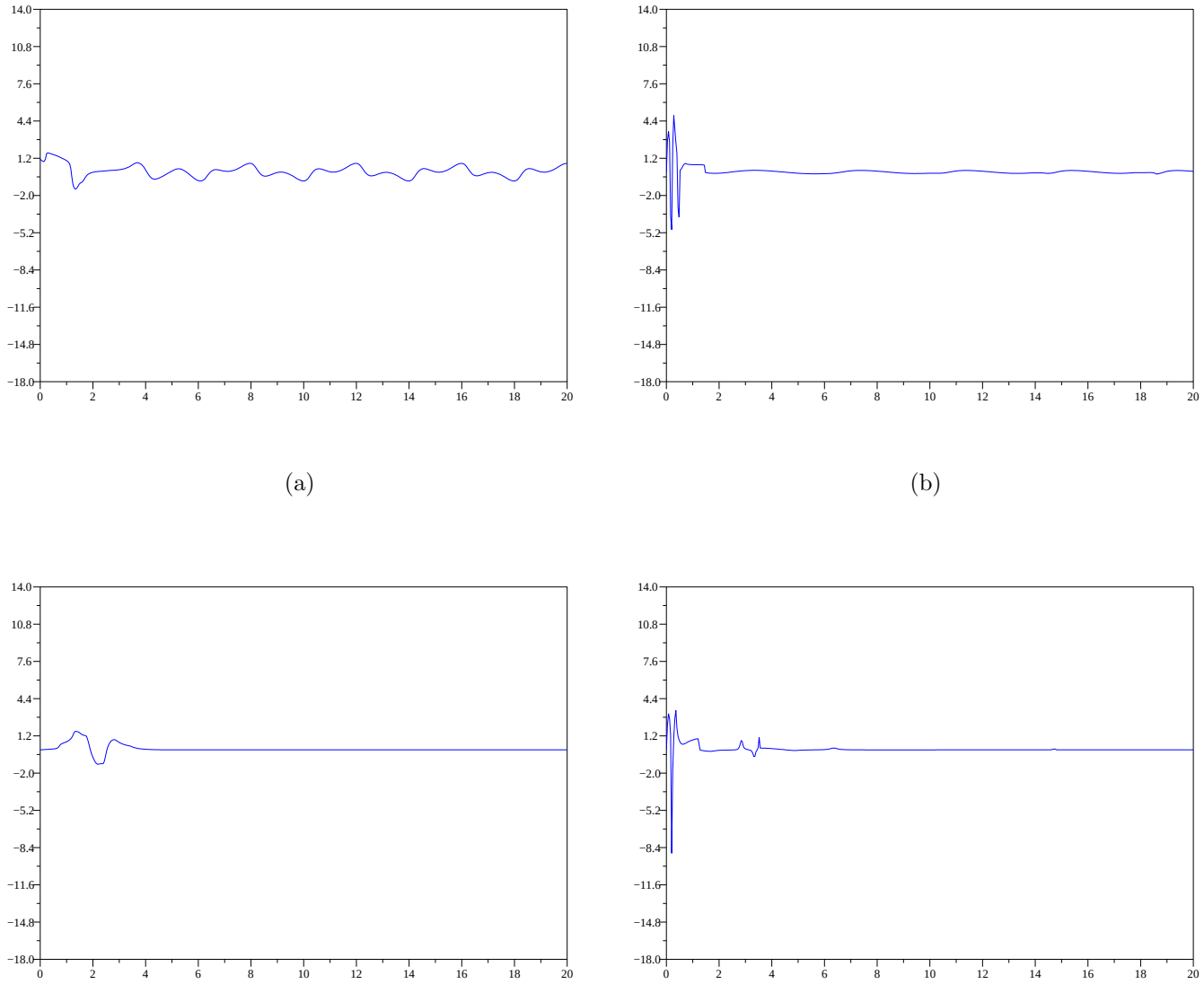
Figure 4.1 – Trajectoire de la cible n° 1 : trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. En rouge la trajectoire du centre de l'axe des roues, en bleu celle de l'organe terminal, et en noir celle de la cible.



(a) (b)

(c) (d)

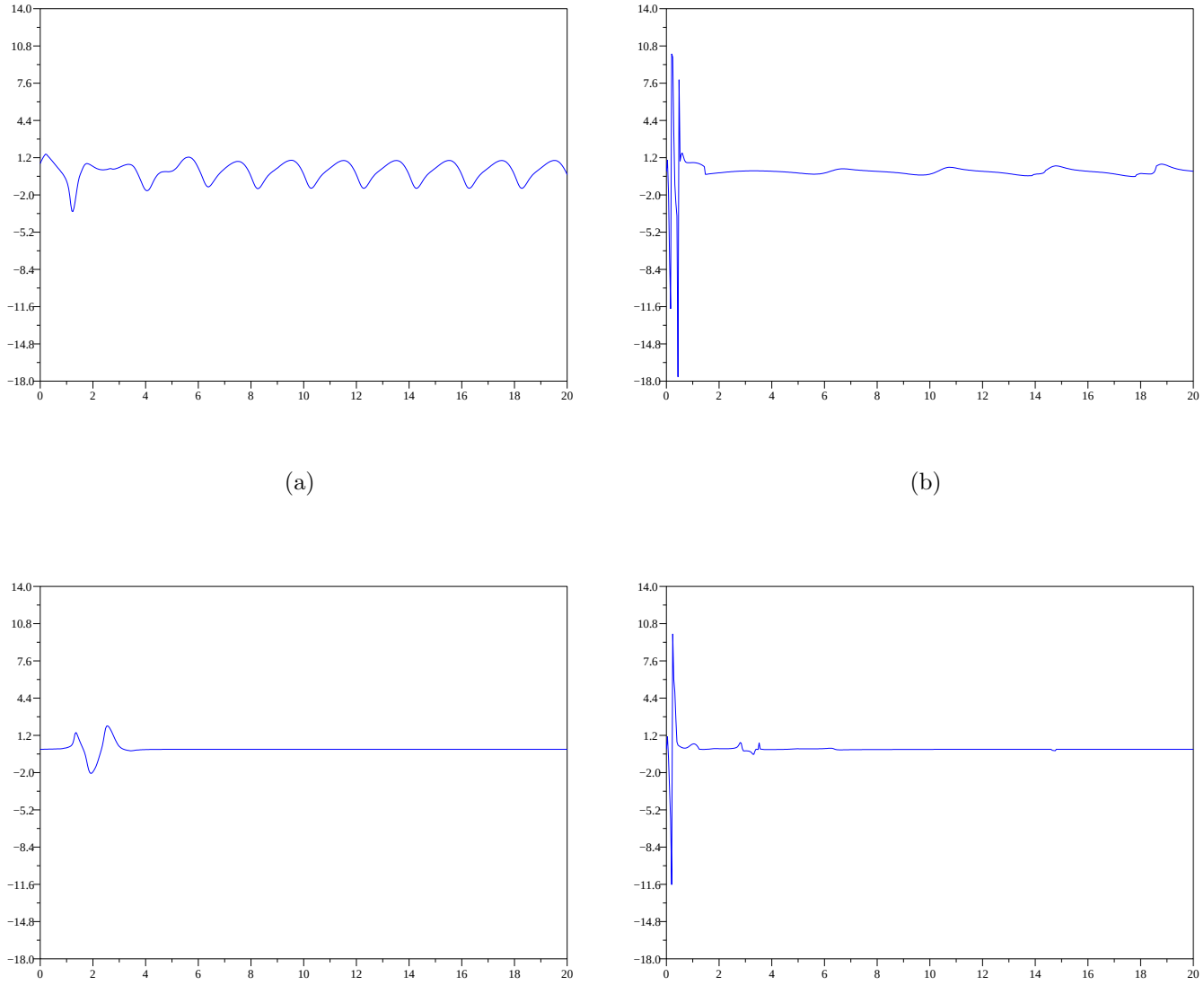
Figure 4.2 – Trajectoire de la cible n° 1 : norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation.



(a) (b)

(c) (d)

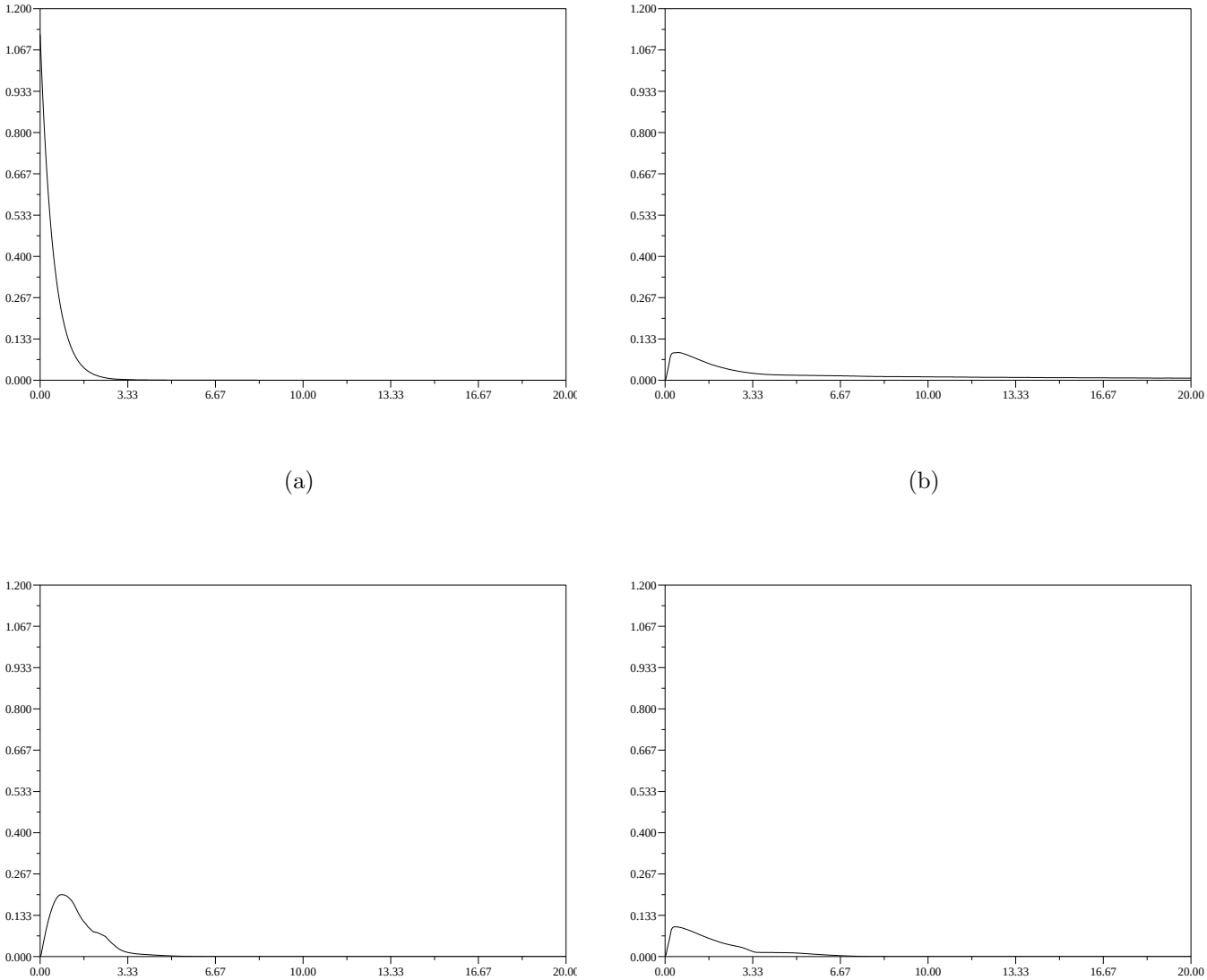
Figure 4.3 – Trajectoire de la cible n° 1 : vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 4.4 – Trajectoire de la cible n° 1 : vitesse ω_b de la plate-forme mobile.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 4.5 – Trajectoire de la cible n° 1 : fonction de coût secondaire h_s.

Exemple 14 Trajectoire de la cible n° 2 Les résultats de simulation illustrés par les Figures 4.6–4.10 sont obtenus pour les mêmes jeux de paramètres de contrôle Ψ, $\hat{b}_1$, et $\hat{b}_2$ que ceux donnés dans l'exemple précédent dans les Simulations (a), (b), (c) et(d). La trajectoire de la cible est cependant plus complexe et ses déplacements présentent une amplitude plus importante. Ainsi, sur certains intervalles de temps, la plate-forme doit nécessairement se déplacer et exécuter des manœuvres afin de permettre le suivi de la cible par l'organe terminal du bras. La situation relative de la cible par rapport à la plate-forme mobile est initialisée à $r_{bd}(0) = (2,5\ 1\ 0)^T$, et la configuration initiale du bras manipulateur est donnée par $q(0) = (0\ 0,35\ 0)^T$. Le Tableau 4.1 donne la vitesse u_d de la cible en fonction du temps.

TAB. 4.1 – Vitesse u_d de la cible pour la trajectoire n° 2

Intervalle de temps en s	*Vitesse de la cible (en $m.s^{-1}$, $m.s^{-1}$ et $rad.s^{-1}$)*
$t \in [0, 5)$	$u_d(t) = (0\ 0\ 0)^T$
$t \in [5, 27)$	$u_d(t) = (0\ 0\ \frac{\pi^2}{20} \cos \frac{\pi\,(t-5)}{2})^T$
$t \in [27, 37)$	$u_d(t) = (0,2\ 0\ 0)^T$
$t \in [37, 59)$	$u_d(t) = (0\ 0\ \frac{\pi^2}{20} \cos \frac{\pi\,(t-37)}{2})^T$
$t \in [59, 99)$	$u_d(t) = (0\ 0,05\ 0)^T$
$t \in [99, 105)$	$u_d(t) = (0\ 0\ 0)^T$
$t \in [105, 115)$	$u_d(t) = (-0,2\ 0\ 0)^T$
$t \in [115, 120)$	$u_d(t) = (0\ 0\ 0)^T$

D'après les données de ce tableau, et comme nous pouvons le constater sur la Figure 4.6, la trajectoire de l'origine du repère associé à la cible est composée de trois lignes droites. Contrairement à la trajectoire n° 1, l'orientation de la cible n'est plus constante. Les résultats de simulation (Fig. 4.6–4.10) confirment les observations faites sur l'exemple précédent. En particulier,

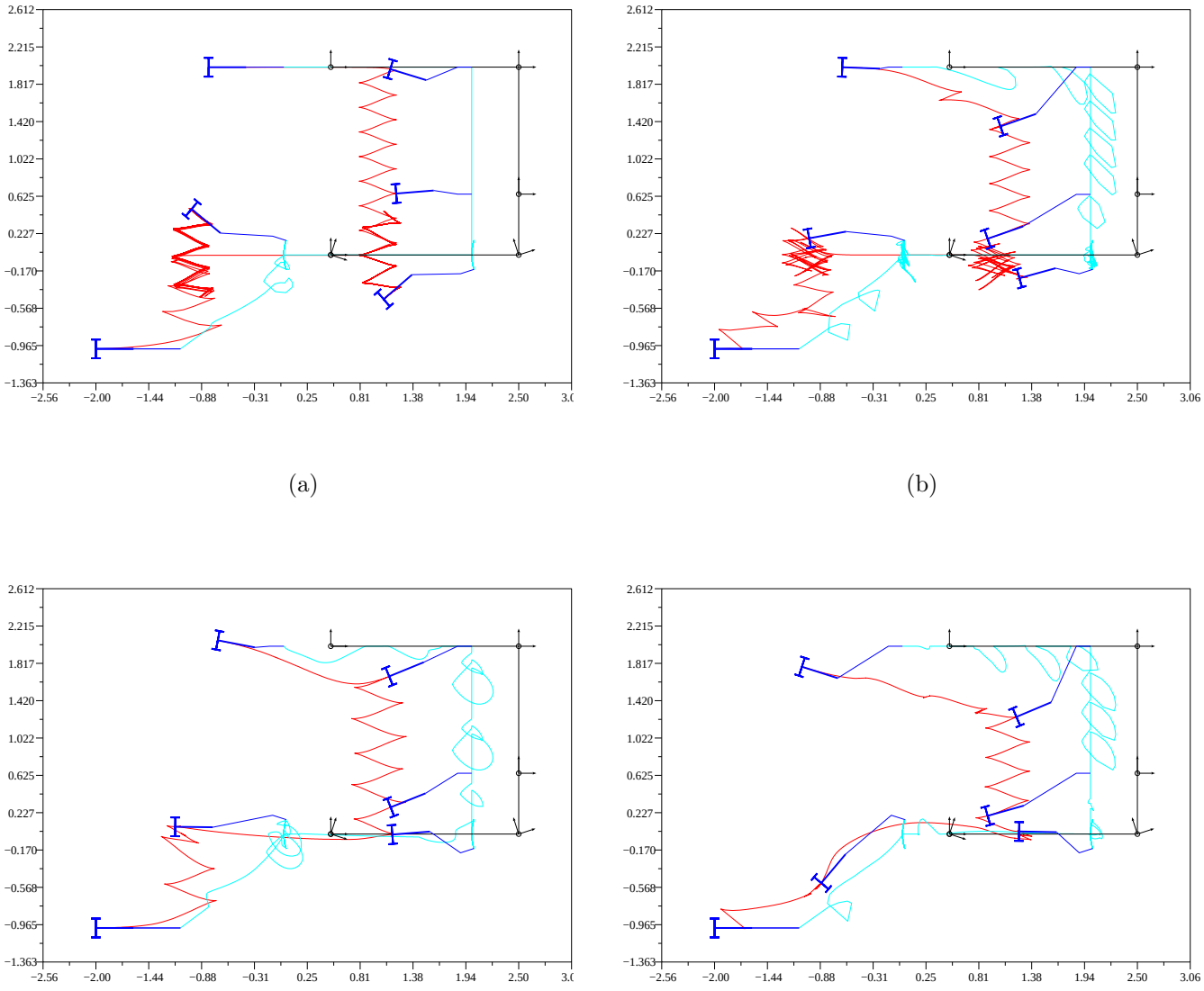
a. La stratégie de contrôle (a) conduit à un excellent suivi de la cible par l'organe terminal du bras manipulateur, mais cette bonne performance est acquise au prix d'un mouvement permanent de la plate-forme et de l'exécution de nombreuses manœuvres.

b. La stratégie (b) permet de réduire le nombre des manœuvres effectuées par la plate-forme, mais ne conduit pas à une baisse significative des vitesses de la plate-forme qui restent importantes pendant ces manœuvres. De plus, ce choix ne garantit plus à tout instant le suivi fin de la cible par l'organe terminal du manipulateur. Ce problème apparaît lorsque les manœuvres tardives de la plate-forme mobile, dans le but de rattraper la cible qui sort de l'espace de travail du bras, empêchent

d'assurer conjointement réalisation de l'objectif de manipulation et l'évitement des butées articulaires.

c. Par comparaison avec la stratégie (b), les stratégies (c) et (d) génèrent encore moins de manœuvres, et de plus faibles vitesses pour la plate-forme. Sur la durée totale de la simulation, les intervalles de temps pendant lesquels l'objectif de manipulation est parfaitement réalisé sont d'une durée à peu près identique pour ces deux simulations, bien que la fréquence des phases de suivi approximatif ne semble pas favorable au choix (b) (comme le confirment les Figures 4.7(b), 4.7(c), et 4.7(d)). A cet égard, et comme l'analyse le suggérait, la stratégie (d) mène à des lois de commande plus réactives et plus performantes que le choix (c). Ceci est cohérent avec les brusques variations sur l'amplitude des commandes en vitesse de la plate-forme qui sont observées sur les Figures 4.8(c), 4.9(c), 4.8(d) et 4.9(d).

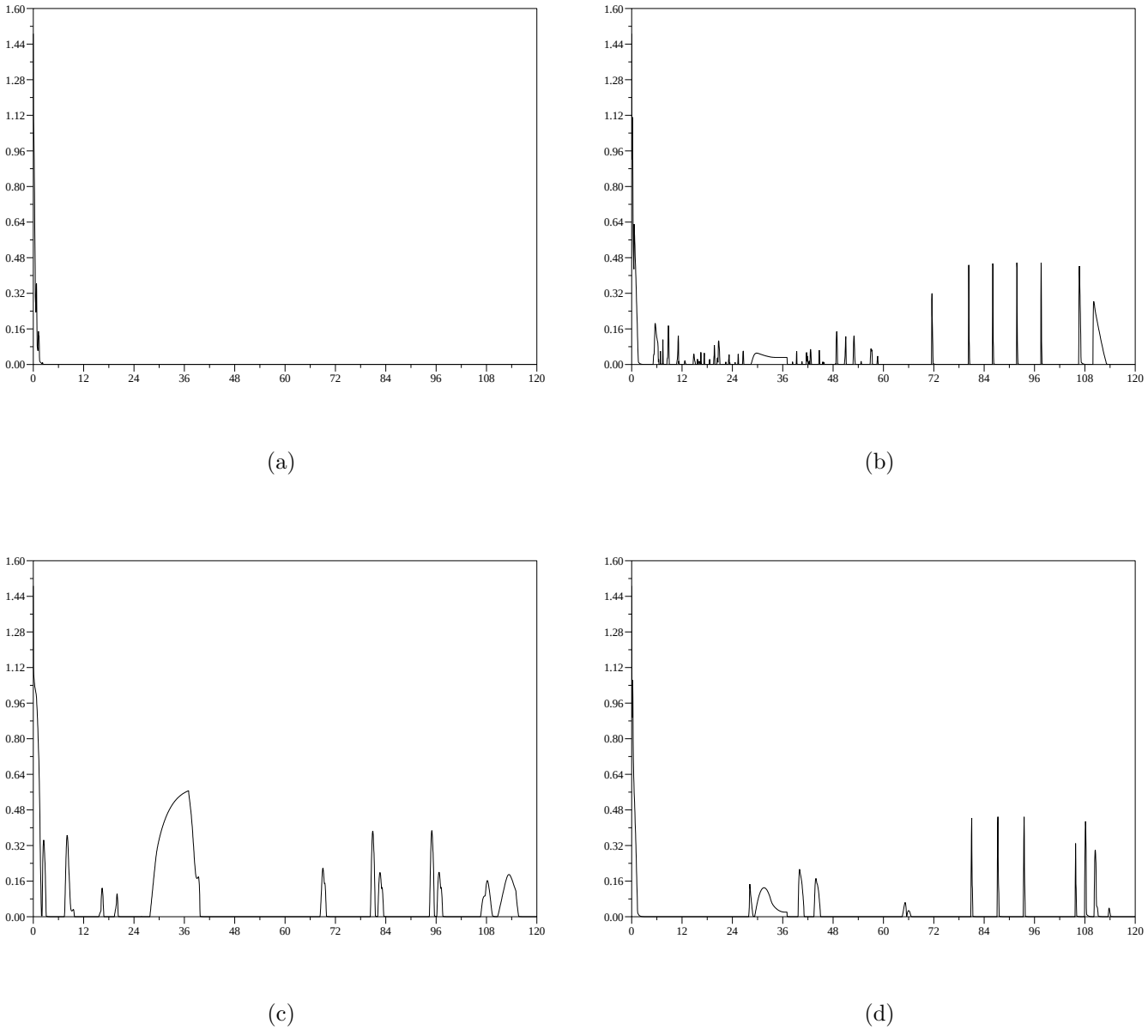
La comparaison avec les résultats de simulation de la Section 3.5 du chapitre précédent, obtenus pour une même trajectoire de la cible, montre que la présente approche permet une meilleure coordination de mouvements entre la base et le bras. Les simulations (a) et (b) du chapitre précédent et la simulation (a) ici présentée sont très similaires (à la différence près que notre seconde approche de commande permet d'utiliser des paramètres ε_i, $i = 1, 2$, plus élevés), puisque les fonctions de coût traduisent dans ces trois cas le même objectif de maintien de la plate-forme autour d'une situation préférentielle (comparer les Figures 3.5(a)–3.5(b) et 3.7(a)–3.7(b) aux Figures 4.6(a) et 4.8(a)). Dans le cas où nous ajoutons un coût visant à garder la plate-forme immobile, la seconde approche est également plus performante. L'immobilité de la plate-forme peut notamment être obtenue grâce à un meilleur traitement de l'évitement des butées articulaires, et à la possibilité d'utiliser des paramètres ε_i plus importants dans l'expression de la fonction transverse. En revanche, la comparaison de précision du suivi pour ces deux approches semble défavorable à la dernière. Il est évident que l'approche que nous proposons ici n'assure pas nécessairement la compatibilité de la tâche globale et de la tâche de manipulation.



(a) (b)

(c) (d)

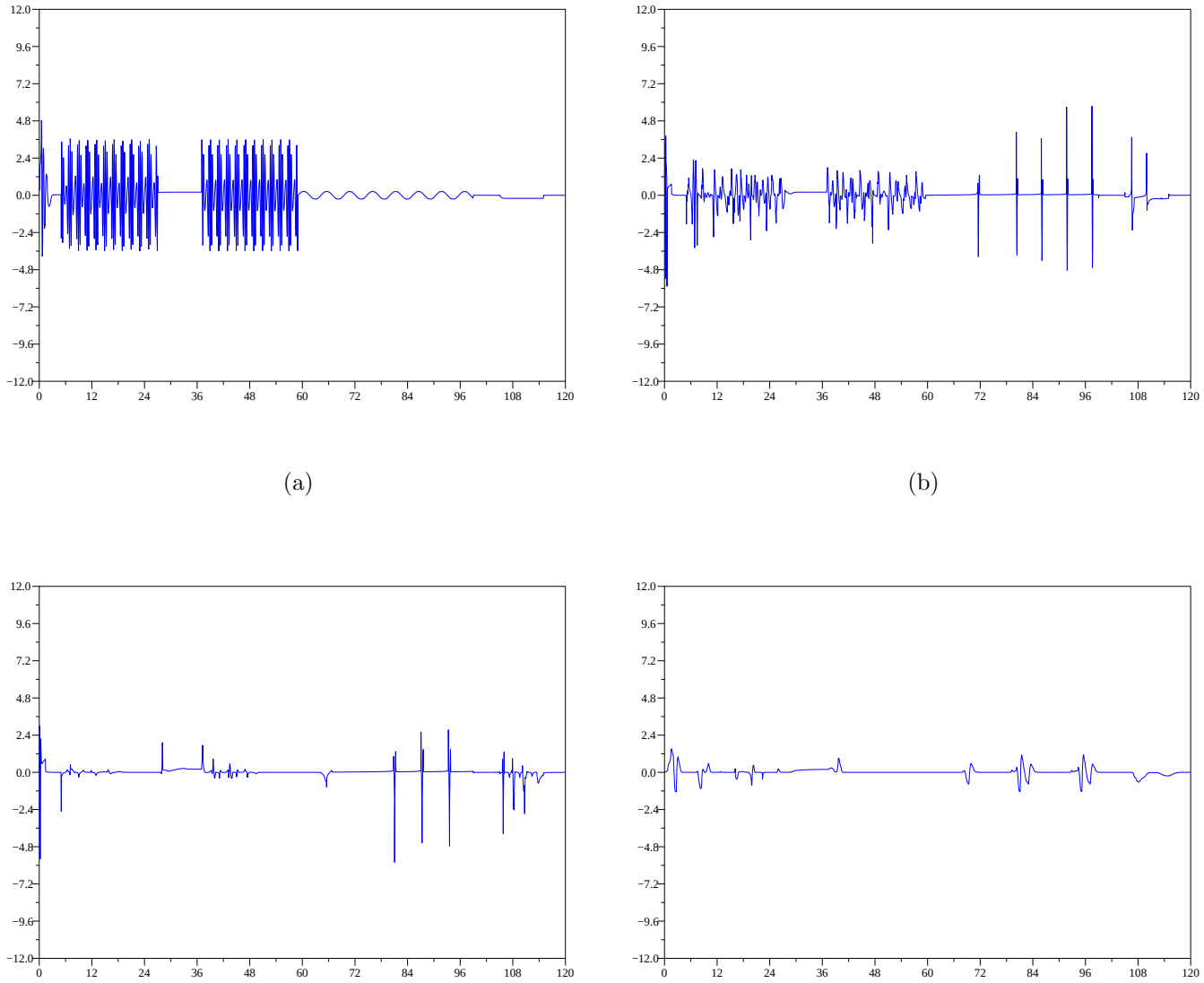
Figure 4.6 – Trajectoire de la cible n° 2 : trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. En rouge la trajectoire du centre de l'axe des roues, en bleu celle de l'organe terminal, et en noir celle de la cible.



(a) (b)

(c) (d)

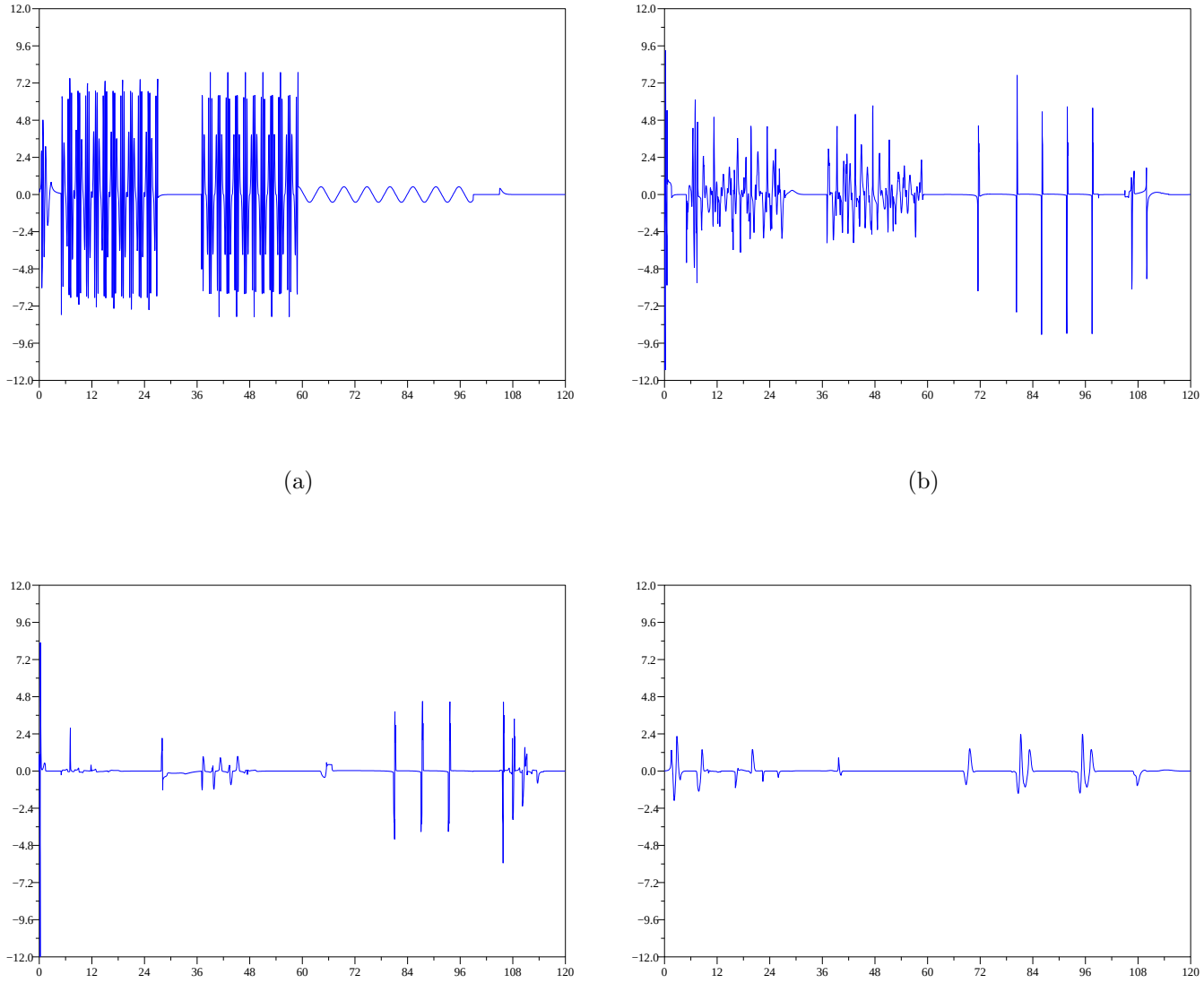
Figure 4.7 – Trajectoire de la cible n° 2 : norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation.



(a) (b)

(c) (d)

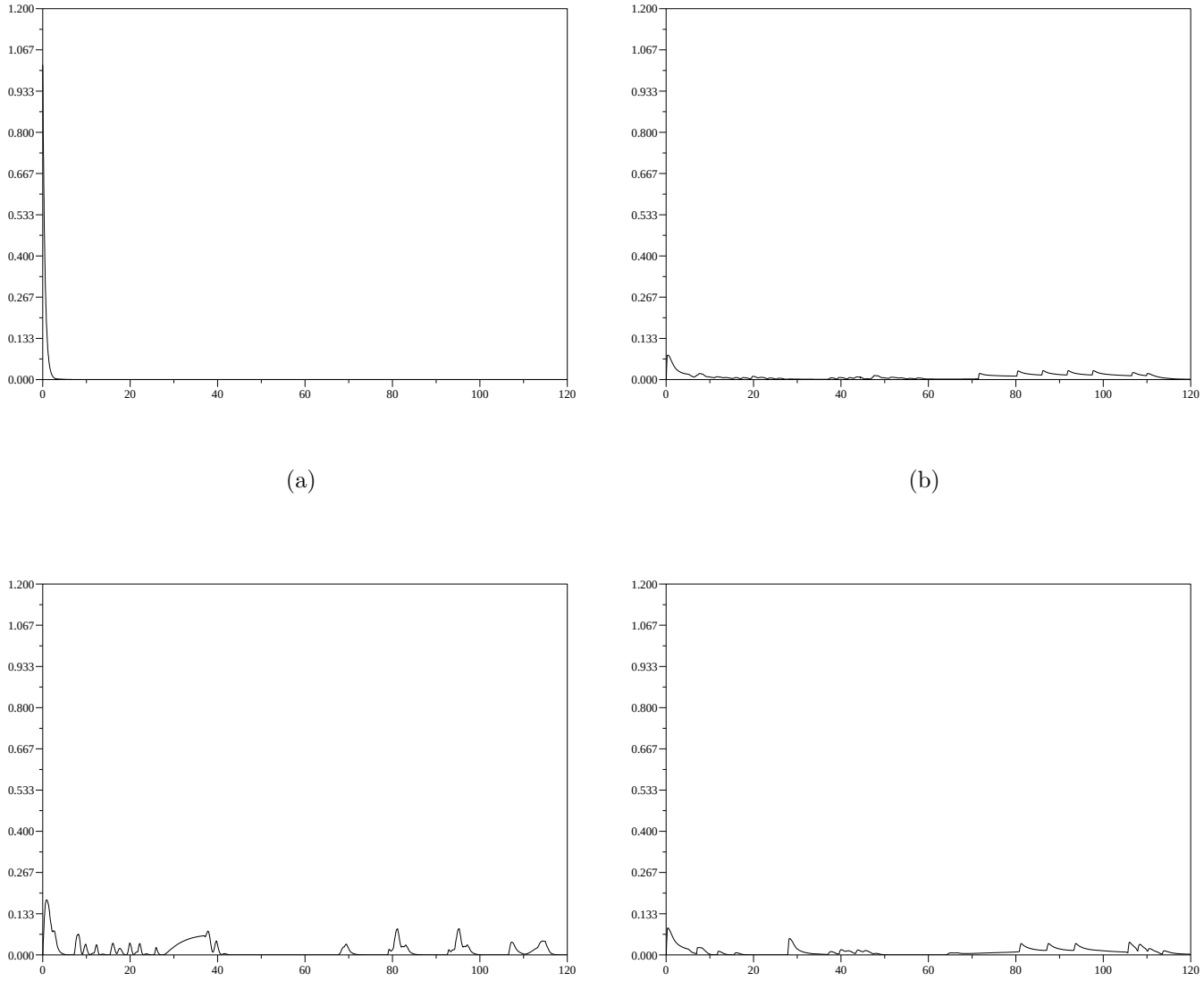
Figure 4.8 – Trajectoire de la cible n° 2 : vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 4.9 – Trajectoire de la cible n° 2 : vitesse ω_b de la plate-forme mobile.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 4.10 – Trajectoire de la cible n° 2 : fonction de coût secondaire h_s.

4.5.2 Cas d'un bras RP sur une plate-forme de type unicycle

Nous considérons à présent le problème du suivi en position d'un objet (le point D sur la Figure 4.11) par l'organe terminal d'un manipulateur mobile composé d'une plate-forme de type unicycle porteuse d'un bras manipulateur deux axes de type RP. Le premier axe du manipulateur est attaché à la plate-forme par une liaison rotoïde au point de coordonnées $(L, 0)$ dans le repère $\mathcal{F}_b$. La synthèse des lois de commande est très similaire à la méthode exposée dans le cas précédent.

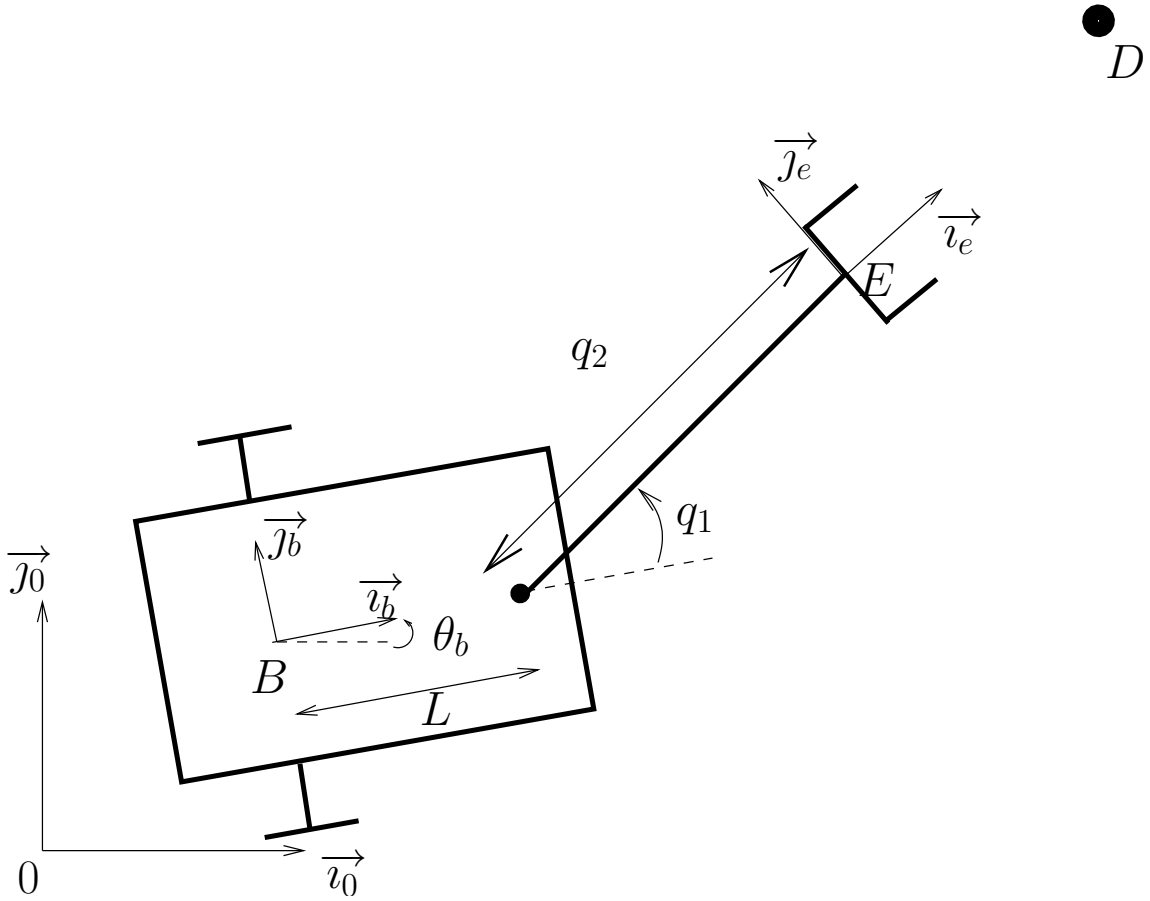


Figure 4.11 – Suivi dans $\mathbb{R}^2$

4.5.2.1 Tâche de manipulation et commande du bras

L'objectif de manipulation est une tâche de suivi qui consiste à pointer avec le bras manipulateur vers le point D tout en maintenant la distance de l'origine E du repère associé à l'organe terminal du bras à la cible D égale à une certaine valeur de consigne

X^*. Cet objectif est équivalent à la stabilisation de la position cartésienne p_{ed} de la cible dans le repère $\mathcal{F}_e$ de l'effecteur (et exprimée dans ce dernier), à une valeur de consigne $p^*_{ed} = (X^*\ 0)^T$. Ceci suggère de définir l'objectif de manipulation e_p comme suit :

$$e_p(q, r_b, t) = \tilde{p}_{ed} := p_{ed} - p^*_{ed} \tag{4.39}$$

Les dérivées partielles de la fonction e_p peuvent être obtenues soit par un calcul direct (voir Section 4.5.1), soit en utilisant le fait que $\tilde{p}_{ed}$ est la composante en position de la situation $\tilde{r}_{ed}$ définie par (4.26) (en effet, nous rappelons que $\theta^*_{ed} = 0$). Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_p}{\partial q} &= \begin{pmatrix} I_2 & R(\theta_{eb}) J p_{bd} \end{pmatrix} \frac{\partial r_{eb}}{\partial q} \\ \frac{\partial e_p}{\partial r_b} &= -\begin{pmatrix} R(\theta_{eb}) & R(\theta_{eb}) J p_{bd} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial e_p}{\partial t} &= R(-\theta_e)\dot{p}_d \end{aligned} \tag{4.40}$$

D'après les relations

$$r_{eb} = \begin{pmatrix} -R(-q_1)\begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -q_1 \end{pmatrix}$$

et $\theta_{eb} = -\theta_{be} = -q_1$, nous remarquons que $\frac{\partial e_p}{\partial q}$ est inversible partout, sauf en $q_2 + x_{ed} = 0$.

Dès lors, la tâche de manipulation e_m et la loi de commande u_q pour le manipulateur sont définies comme stipulé dans la Sous-section 4.3. Nous préciserons plus loin les paramètres impliqués dans ces expressions.

4.5.2.2 Coût secondaire et commande de la plate-forme mobile

Dans le cadre de cette application, nous pouvons spécifier un vecteur $p^* \in \mathbb{R}^2$ tel que, lorsque p_{bd} appartient à un voisinage de p^*, l'objectif de manipulation e_p peut être parfaitement réalisé, tout en maintenant les variables q du bras à l'intérieur de leur espace de configuration $(q_1^-, q_1^+) \times (q_2^-, q_2^+)$. Comme p_{bd} est la composante en position de $r_{bd} = r_b^{-1} r_d$, un choix pertinent pour le coût $h_{s,1}$ est le suivant :

$$h_{s,1}(\bar{r}_b, t) = \frac{1}{2}\|\tilde{p} - p^*\|^2 \tag{4.41}$$

où $\tilde{p}$ est la composante en position de $\bar{r}_b^{-1} r_d = f(\alpha) r_b^{-1} r_d$. Etant donné que

$$\tilde{p} = p_f + R(\theta_f) p_{bd} = p_f + R(\theta_f - \theta_b)(p_d - p_b)$$

ce vecteur peut être calculé à partir de la fonction transverse f et de la position relative p_{bd} de la cible par rapport à la plate-forme. En utilisant les relations (1.12) et (1.6), nous montrons que

$$\dot{\tilde{p}} = R(-\bar{\theta}_b)\dot{p}_d - (I_2 \quad J\tilde{p})\bar{u}_b$$

Il en découle que $\dot{h}_{s,1} = a^T\bar{u}_b + \frac{\partial h_{s,1}}{\partial t}$ (c'est-à-dire que nous retrouvons la relation (4.14)) avec

$$\begin{array}{rcl} a^T(\bar{r}_b, t) & = & -(\tilde{p} - p^*)^T(I_2 \quad J\tilde{p}) \\ \frac{\partial h_{s,1}}{\partial t} & = & (\tilde{p} - p^*)^T R(-\bar{\theta}_b)\dot{p}_d \end{array}$$

et une décomposition possible de $\frac{\partial h_{s,1}}{\partial t}$ sous la forme $\frac{\partial h_{s,1}}{\partial t} = a^T b_1 + b_2$ est donnée par

$$b_1(\bar{r}_b, t) = -\begin{pmatrix} R(-\bar{\theta}_b)\dot{p}_d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2(\bar{r}_b, t) = 0 \tag{4.42}$$

Tout comme dans l'application précédente, il est possible de définir une fonction de coût secondaire h_s sous la forme d'une somme pondérée (4.12) des coûts $h_{s,1}$ et $h_{s,2}$, cette dernière étant définie par (4.10). Les expressions de la fonction de pondération $\Psi(t)$ données en Section 4.5.1.2 sont toujours valides et sont utilisées pour la présente application.

4.5.2.3 Résultats de simulation

Dans les simulations qui suivent, les paramètres géométriques du manipulateur mobile ont été fixés aux valeurs suivantes :

- $L = 0,4$ m,
- $(q_1^-, q_1^+) = (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ rad, et $(q_2^-, q_2^+) = (0,15,\ 0,85)$ m,

La tâche de manipulation e_m est construite selon la méthode décrite à la Section 4.3, où la fonction e_p est donnée par (4.39) et $X^* = 0,5$ (m). Les paramètres utilisés pour définir h_ℓ, c'est-à-dire dans les relations (4.5) et (3.13), sont $\alpha_i = 1$ et $\delta_i = 0,05(q_i^+ - q_i^-)$, et le coût de régularisation h_r est donné par (4.6) avec la matrice $\Gamma(t) = 0,6\exp(-t)I_2$. Enfin, la matrice de gain dans la définition (4.1) du retour d'état u_q est $G = 3I_2$.

La fonction de coût secondaire h_s est donnée par (4.12), avec les fonctions $h_{s,1}$ et $h_{s,2}$ définies respectivement par (4.41) et (4.10)-(4.11). Le vecteur de consigne dans $h_{s,1}$ est fixé à $p^* = (X^* + L + 0,5\ 0)^T$ de sorte que $h_{s,1} = 0 \Longrightarrow e_p = 0$ lorsque $q = q^*$, avec $q^* = (0\ 0,5)^T$. La fonction $h_{s,2}$ a pour paramètres $\sigma_i = 10$ et $\xi = 1$. La loi de commande $\bar{u}_b$ est

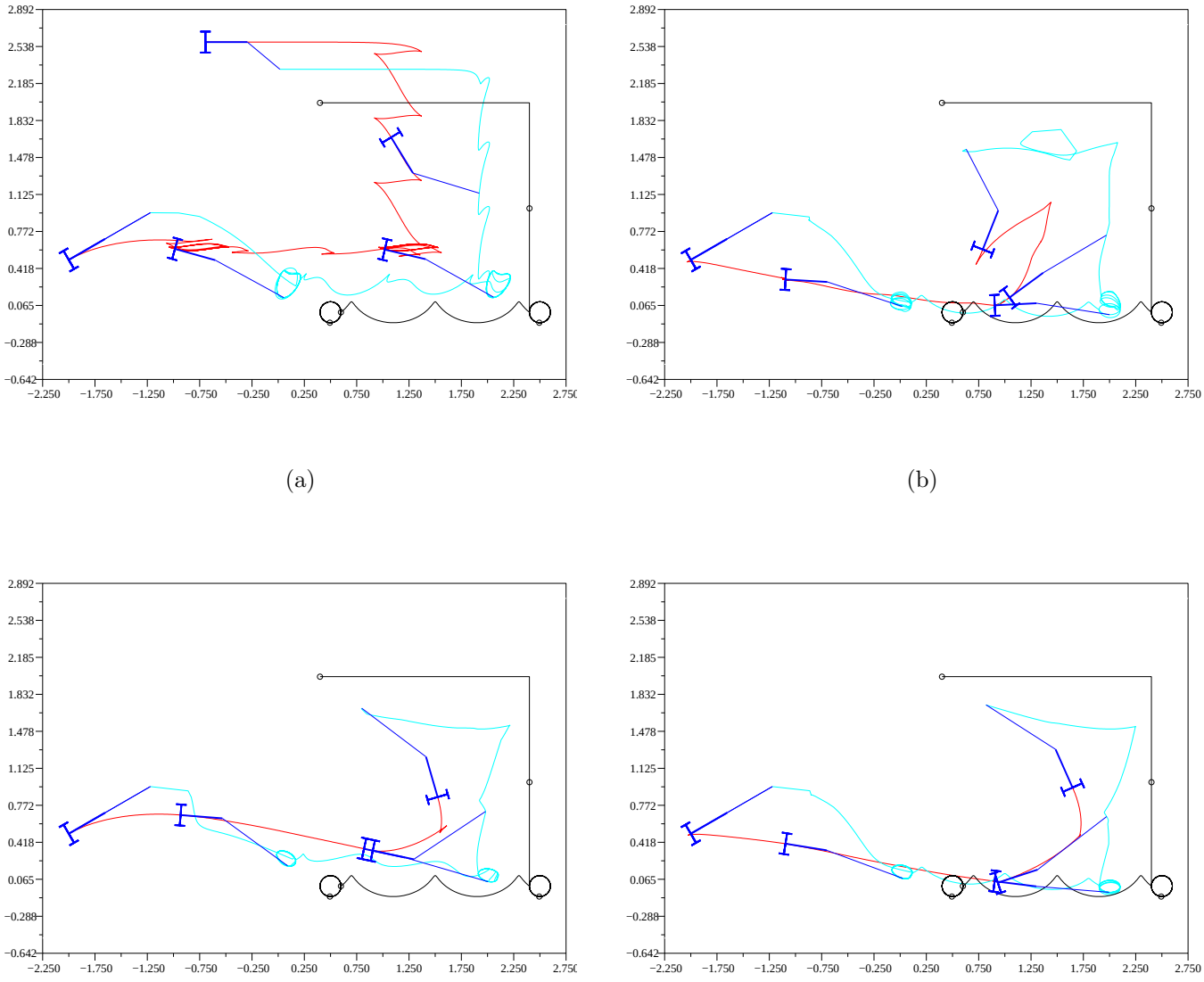
définie par (4.20) avec la matrice K donnée par (4.19) et $\bar{K} = \mathrm{Diag}(1, 1, 100)$, $D = I_3$, et $\mu = 10^{-4}$. Les fonctions $\hat{b}_1$ et $\hat{b}_2$ sont spécifiées plus bas. La fonction transverse f est définie par (2.7) avec les paramètres $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0,25,\ 0,6)$. Enfin, la loi de commande u_b associée à la plate-forme non-holonome est déduite de (2.15) et de l'expression précédemment calculée de $\bar{u}_b$.

La position initiale de la cible relativement à la plate-forme est $p_{bd}(0) = (2\ -1,7)^T$, et la configuration initiale du bras manipulateur est $q(0) = (0\ 0,5)^T$. La vitesse $\dot{p}_d$ de la cible est donnée dans le Tableau 4.2.

TAB. 4.2 – Vitesse $\dot{p}_d$ de la cible

Intervalle de temps en s	*Vitesse de la cible (en $m.s^{-1}$)*
$t \in [0, 5)$	$\dot{p_t} = (0\ 0)^T$
$t \in [5, 25)$	$\dot{p_t} = (-\frac{\pi}{20}\sin\frac{\pi\,(t-5)}{2}\ \frac{\pi}{20}\cos\frac{\pi\,(t-5)}{2})^T$
$t \in [25, 35)$	$\dot{p_t} = (0,2 - \frac{\pi}{20}\sin\frac{\pi\,(t-5)}{2}\ \frac{\pi}{20}\cos\frac{\pi\,(t-5)}{2})^T$
$t \in [35, 55)$	$\dot{p_t} = (-\frac{\pi}{20}\sin\frac{\pi\,(t-5)}{2}\ \frac{\pi}{20}\cos\frac{\pi\,(t-5)}{2})^T$
$t \in [55, 65)$	$\dot{p_t} = (0\ 0,2)^T$
$t \in [65, 70)$	$\dot{p_t} = (0\ 0)^T$
$t \in [70, 80)$	$\dot{p_t} = (-0,2\ 0)^T$
$t \in [80, 90]$	$\dot{p_t} = (0\ 0)^T$

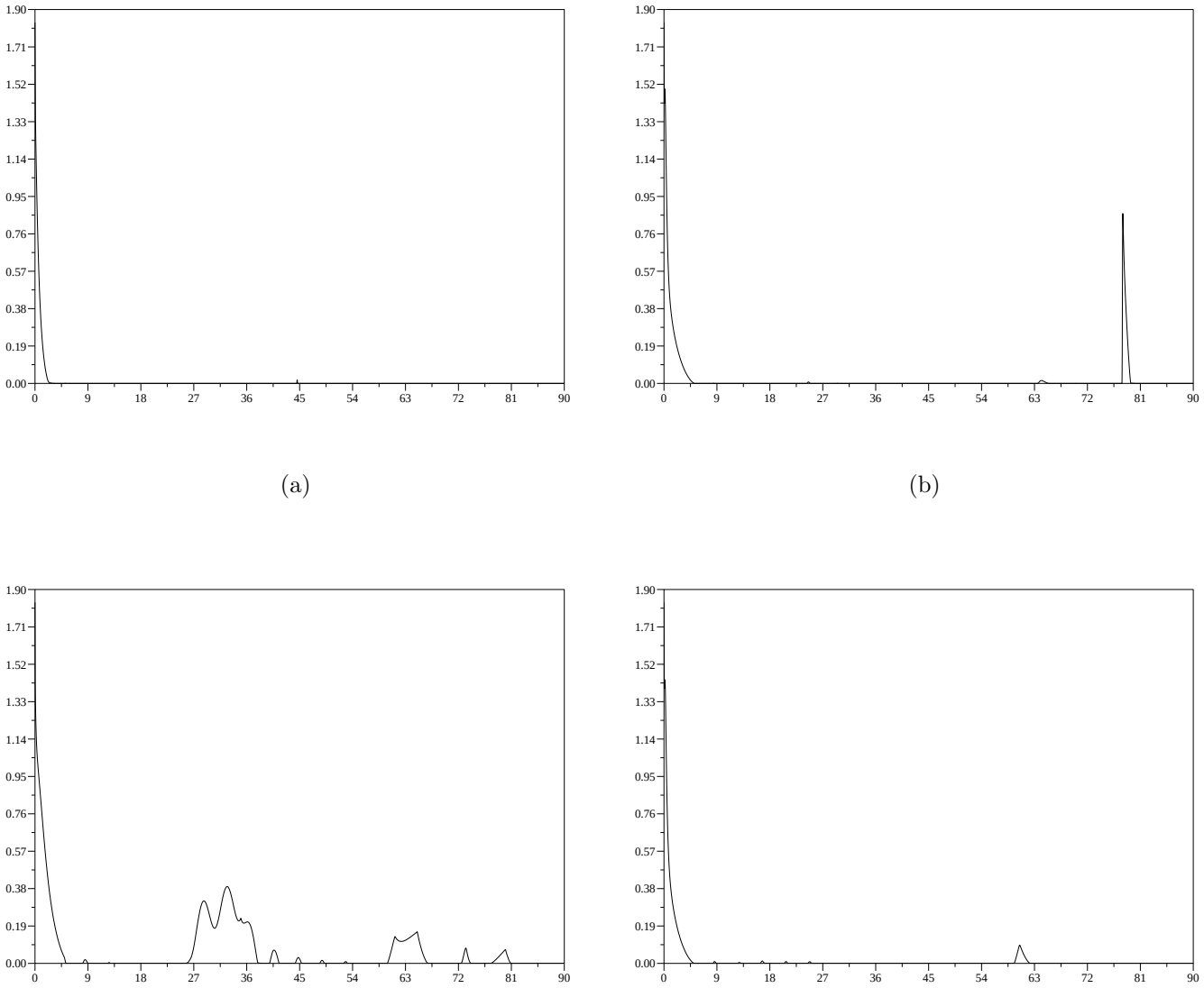
Nous considérons les quatre choix pour les fonctions Ψ, $\hat{b}_1$, et $\hat{b}_2$, correspondant aux quatre stratégies (a)–(d) présentées dans l'application au suivi dans $SE(2)$, en Section 4.5.1. Les résultats de simulation sont illustrés par les Figures 4.12–4.16, et confirment les conclusions que nous avions déjà tirées dans le cadre de l'application précédente. En outre, ils indiquent que la stratégie (d) semble mener au meilleur compromis entre la performance en terme de suivi de la cible (voir Figure 4.13) et la régularité des mouvements de la plate-forme, combinée à un nombre réduit de manœuvres et à de faibles amplitudes des vitesses appliquées à la plate-forme (voir Figures 4.12 et 4.14, 4.15).



(a) (b)

(c) (d)

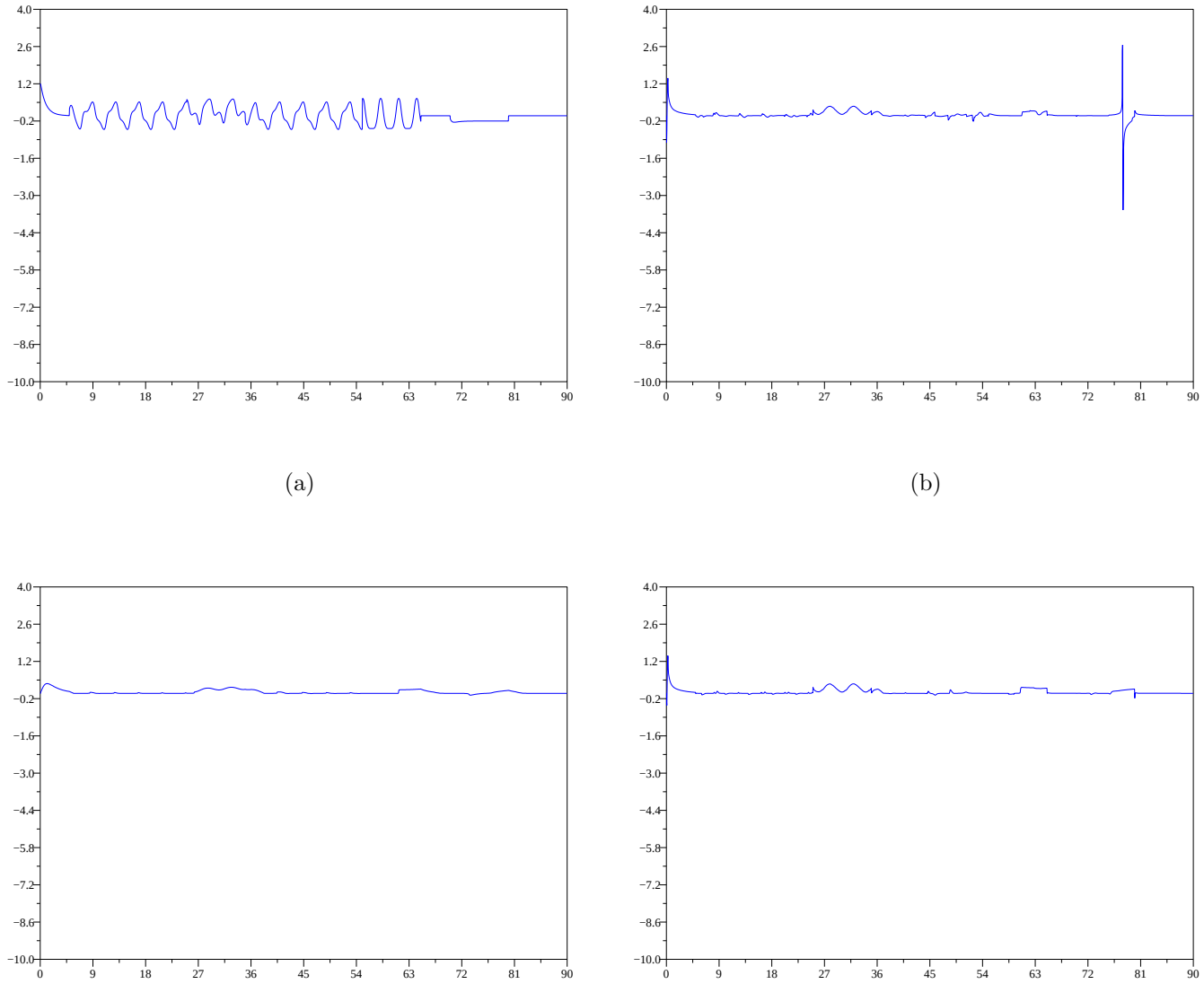
Figure 4.12 – Trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. En rouge la trajectoire du centre de l'axe des roues, en bleu celle de l'organe terminal, et en noir celle de la cible.



(a) (b)

(c) (d)

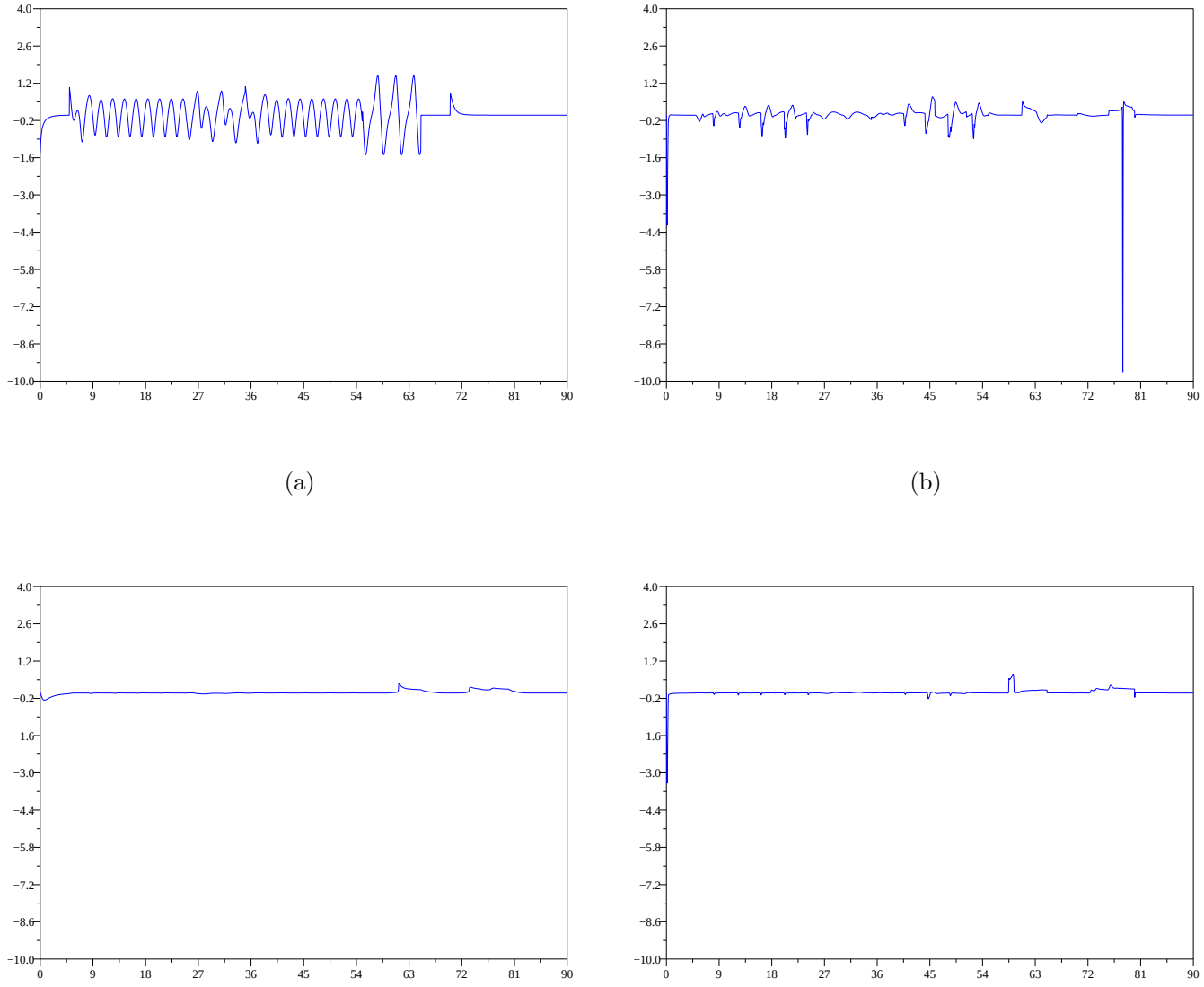
Figure 4.13 – Norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation.



(a) (b)

(c) (d)

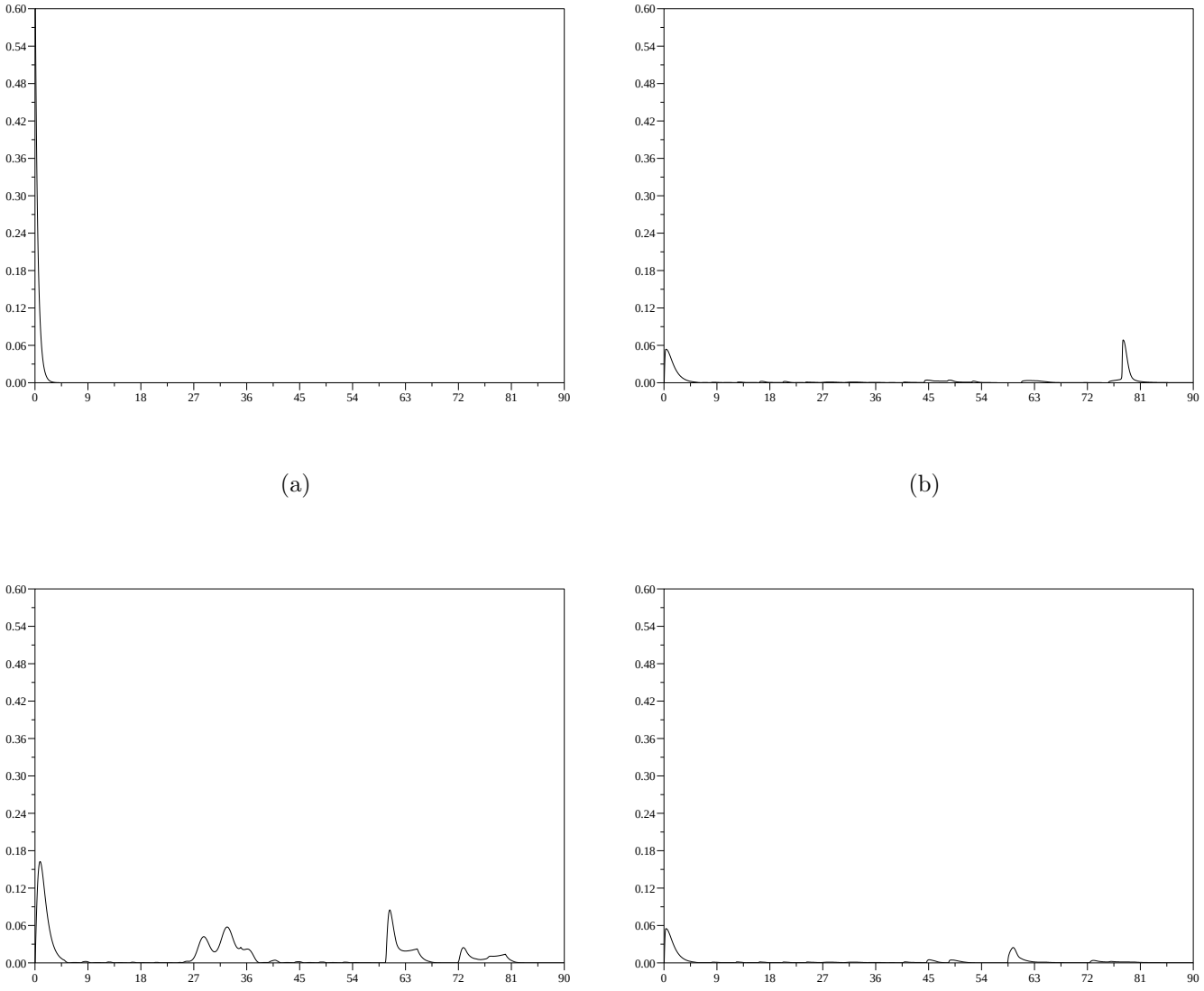
Figure 4.14 – Vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 4.15 – Vitesse ω_b de la plate-forme mobile.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 4.16 – Fonction de coût secondaire h_s.

4.5.3 Cas d'un bras RPR sur une plate-forme de type voiture

Nous reconsidérons le problème de suivi de cible étudié en Section 4.5.1, en utilisant maintenant une plate-forme de type voiture. Le bras manipulateur est ici aussi de type RPR (c.f. Figure 4.17). Comme nous l'avons déjà signalé, un intérêt important de notre approche réside dans le fait que, une fois défini un repère compagnon de la plate-forme, la procédure de synthèse de la commande devient indépendante du système. Ainsi, on peut reprendre directement les fonctions e_m et h_s synthétisées en Section 4.5.1 pour une base de type unicycle, et utiliser les mêmes expressions de commande pour u_q et $\bar{u}_b$.

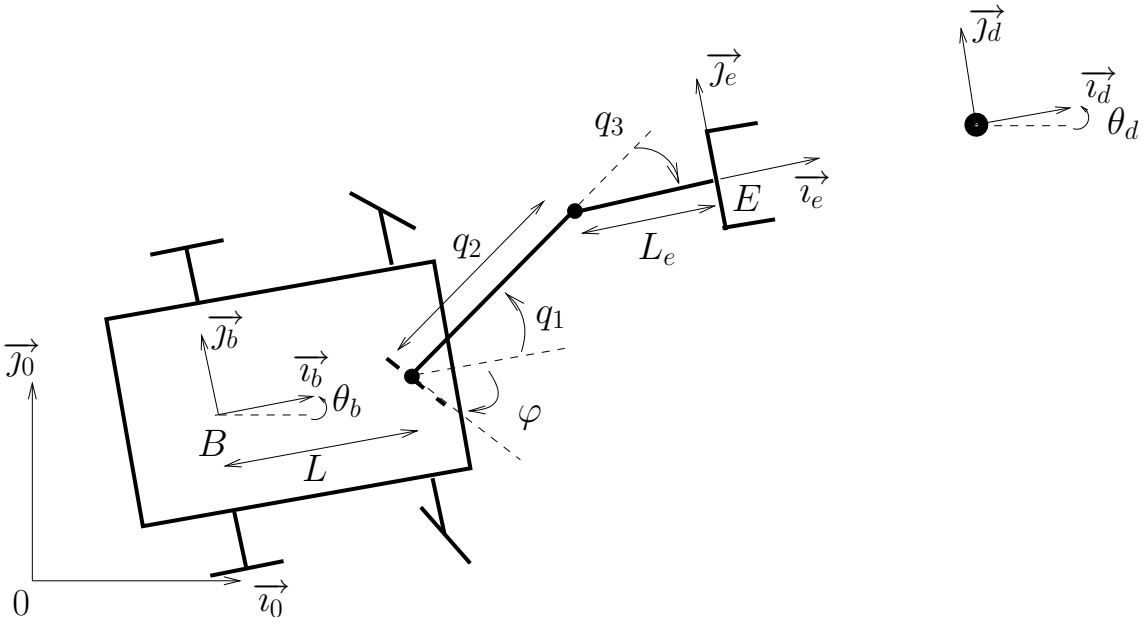


Figure 4.17 – Suivi dans SE(2)

Pour les simulations, nous avons repris les mêmes valeurs de paramètres que celles utilisées en Section 4.5.1, que ce soit pour les paramètres géométriques du bras manipulateur, ou pour les paramètres intervenant dans les expressions de e_m et h_s. Une fois ces deux fonctions définies, et comme pour la base de type unicycle, la commande u_q est donnée par (4.1) (avec $G = 3I_3$) et la commande $\bar{u}_b$ du repère compagnon est définie par (4.20). Les paramètres de la voiture sont les suivants :

- $L = 0,4m$,
- $\ell = 0,4m$.

La fonction transverse $f = (p_f, \theta_f, \xi_f) \in G \times \mathbb{R}$, qui permet de déterminer la matrice $H_r(\alpha)$, est définie par les relations du Lemme 2 avec des paramètres $(\varepsilon, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$

qui vérifient la condition (2.23). Afin de garder un comportement proche de ce que nous obtenions avec la plate-forme de type unicycle, il est naturel d'utiliser des fonctions transverses dont la projection de l'ensemble-image $f(\mathbb{T}^2)$ sur $SE(2)$ est de taille comparable à celle de l'ensemble-image $f_u(\mathbb{T})$, où f_u correspond à la fonction transverse utilisée pour l'unicycle. Pour cela, raisonnons sur les valeurs maximales prises par les composantes de ces deux fonctions transverses. Dans le cas de l'unicycle, l'expression de la fonction (2.7) donne :

$$\begin{cases} \max(x_f) &= \varepsilon_1 \\ \max(y_f) &= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} \\ \max(\theta_f) &= \varepsilon_2 \end{cases}$$

Dans le cas de la voiture, il vient :

$$\begin{cases} \max(x_f) &= \varepsilon(1+\eta_2) \\ \max(y_f) &= \varepsilon^3(\sqrt{3}\frac{\eta_1}{27} + \eta_3\frac{\eta_2+4}{4}) \\ \max(\theta_f) &= \varepsilon^2(\frac{\eta_1}{4} + \eta_3) \end{cases}$$

Au vu de ces équations, nous fixons les paramètres de la fonction donnée dans le Lemme 2 comme suit :

$$\begin{cases} \eta_2 &= 2, \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon_1}{1+\eta_2}, \\ \eta_1 &= \frac{4(1+\eta_2)^2}{5}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}, \\ \eta_3 &= \eta_1 \end{cases} \tag{4.43}$$

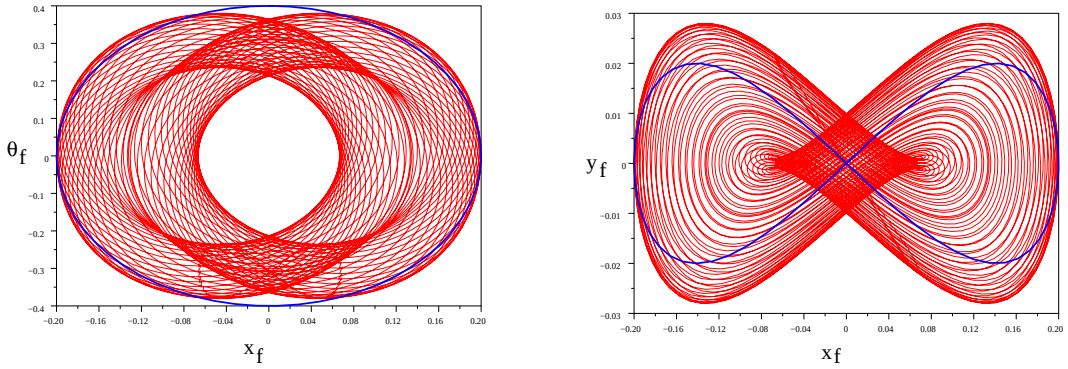
L'intérêt de ce choix est double :

i. Pour la fonction transverse associée à la voiture, on obtient $\max(x_f) = \varepsilon_1$ et $\max(\theta_f) = \varepsilon_2$, c'est-à-dire les mêmes valeurs que celles de la fonction f_u.

ii. $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, la condition de transversalité (2.23) du Lemme 2 est satisfaite.

Les projections sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}^2$ de la fonction (2.7) transverse pour l'unicycle et de la fonction (2.24) transverse pour la voiture sont représentées respectivement en bleu et en rouge sur la Figure 4.18. Notons que la courbe $\mathcal{C}_{f_u}$ associée à la fonction transverse pour l'unicycle est paramétrée par $\alpha \in \mathbb{T}$, alors que la courbe $\mathcal{C}_f$ associée à la fonction transverse pour la voiture est paramétrée par $\alpha \in \mathbb{T}^2$. Les valeurs des paramètres $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sont celles utilisées pour les simulations de la Section 4.5.1, à savoir $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0,2,\ 0,4)$, ce qui donne, en utilisant les relations 4.43 pour la fonction transverse (2.24), les paramètres

suivants : $(\varepsilon, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0,06,\ 72,\ 2,\ 72)$.



(a) (b)

Figure 4.18 – Projections des fonctions transverses (2.7) et (2.24) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ à gauche et sur $\mathbb{R}^2$ à droite

La commande $\bar{u}_b$ est calculée conformément à (4.20) avec la matrice K donnée par la relation suivante, inspirée de (4.19) et (2.22) :

$$K(\alpha) := \bar{H}_r(\alpha)\bar{K}\bar{H}_r(\alpha)^T \tag{4.44}$$

avec la matrice

$$\bar{H}_r(\alpha) := \begin{pmatrix} I_2 & -Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_r(\alpha)$$

et $\bar{K} = \mathrm{Diag}(\bar{k}_b, \bar{k}_\alpha, \bar{k}_\alpha)$. Cette modification par rapport au cas d'une plate-forme porteuse de type unicycle est motivée par le fait que, dans le cas d'une plate-forme de type voiture, la relation suivante (voir les relations (2.19)–(2.22)) est vérifiée le long de la zéro-dynamique de la variable $\bar{s} := s - s_f(\alpha)$:

$$\bar{u}_b = \begin{pmatrix} I_2 & -Jp_f(\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H_r(\alpha) \begin{pmatrix} v_{b,1} \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la matrice K donnée par (4.44), la fonction $h_{\bar{u}_b}$ à minimiser peut se mettre sous la forme :

$$h_{\bar{u}_b} = (1/\bar{k}_b)\|v_{b,1}\|^2 + (1/\bar{k}_\alpha)\|\dot{\alpha}\|^2 \tag{4.45}$$

Afin de pénaliser la commande u_b sur la plate-forme vis-à-vis des commandes virtuelles $\dot{\alpha}$, et comme $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ et $u_b = (v_{b,1}\ 0\ v_{b,1}s)^T$, la relation (4.45) suggère de prendre le premier élément diagonal $\bar{k}_b$ de $\bar{K}$ inférieur aux éléments diagonaux $\bar{k}_\alpha$, par exemple $\bar{K} = \text{Diag}(1, 10, 10)$. Le choix des estimations $\hat{b}_1$ et $\hat{b}_2$ sera discuté pour chaque simulation. Finalement, la loi de commande u_b pour la plate-forme mobile non-holonome est déduite de $\bar{u}_b$ et de (2.19), et la loi de commande v_s sur la variable interne de la voiture est donnée par la relation (2.21), avec un gain $k_s = 10$, afin de conduire à une convergence rapide de $s - s_f$ vers zéro.

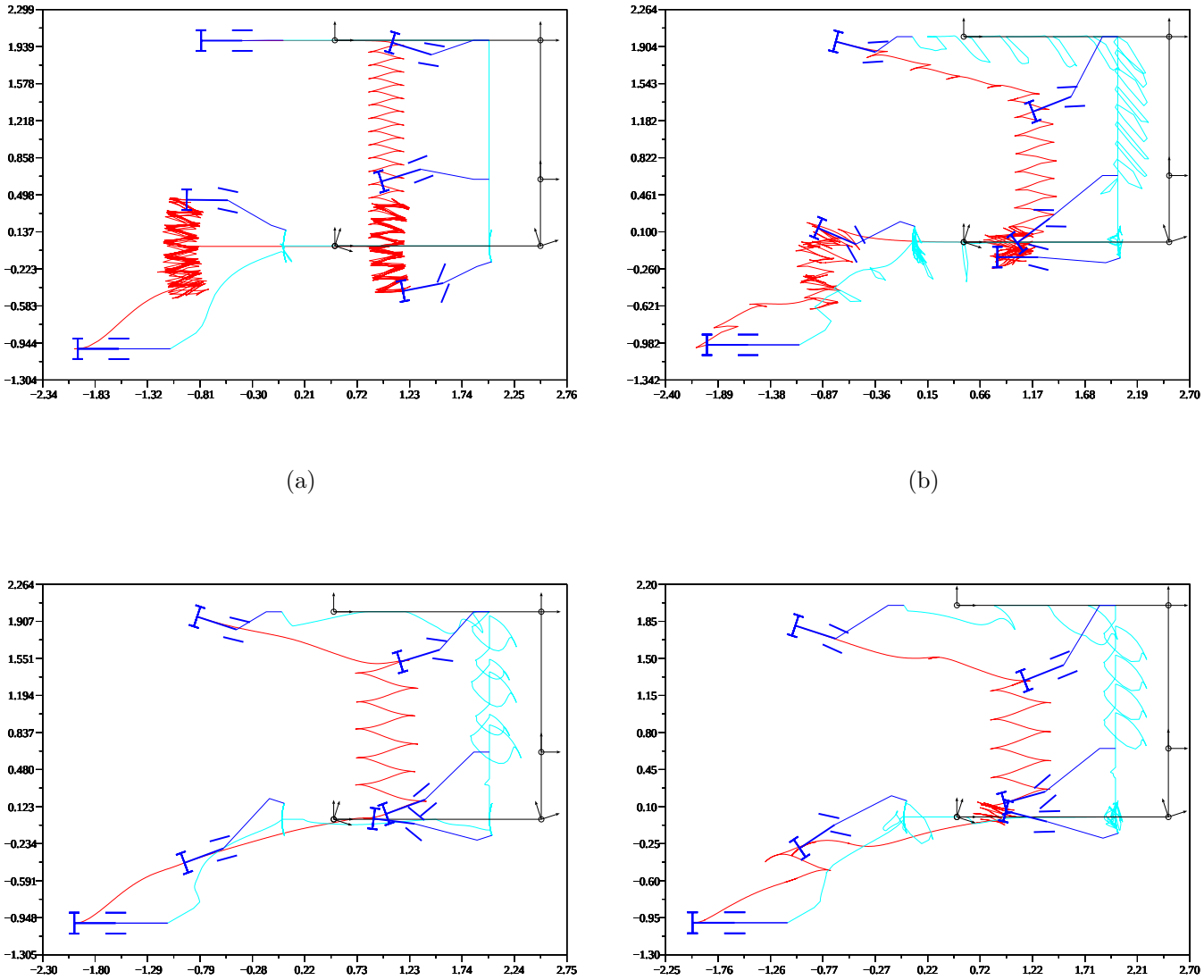
Exemple 15 Les résultats de simulation illustrés par les (Fig. 4.19–4.23) ont été obtenus en utilisant la trajectoire de référence n° 2 de la Section 4.5.1.3 (voir le Tableau 4.1). Les différents choix de fonctions Ψ, $\hat{b}_1$, et $\hat{b}_2$ (associés aux stratégies (a), (b), (c), et (d)) ont à nouveau été testés. Les conditions initiales $r_{bd}(0) = (2,5\ 1\ 0)^T$ et $q(0) = (0\ 0,35\ 0)^T$ sont les mêmes que pour le manipulateur mobile avec une plate-forme de type unicycle, et l'angle de braquage initial est $\varphi(0) = 0$ (donc $s(0) = 0$ en utilisant le modèle cinématique (2.17) de la plate-forme de type voiture). Ces simulations corroborent les conclusions tirées des exemples d'application précédents.

a. Comme dans les simulations associées au choix de la stratégie de commande (a), nous obtenons un excellent suivi de la cible par l'organe terminal du manipulateur (voir la Figure 4.20(a)), au prix de déplacements importants de la plate-forme. Celle-ci est en effet en mouvement permanent, et effectue de nombreuses manœuvres à des vitesses élevées, comme le montrent les Figures 4.19(a), 4.21(a) et 4.22(a).

b. La stratégie (b) n'est pas très satisfaisante car elle mène à la fois à une réalisation approximative de l'objectif de manipulation (voir les nombreux dépassements sur la Figure 4.20(b)), et à un important effort de commande sur la plate-forme, que l'on observe sur les Figures 4.21(b) et 4.22(b).

c. La stratégie (c) donne ici de bons résultats. Le manque de réactivité dû à la non-précompensation du terme de dérive de la fonction de coût secondaire mène certes à un suivi approximatif de la cible, mais c'est la seule simulation pour laquelle la plate-forme mobile s'immobilise pendant de longues périodes (voir Figures 4.21(c), 4.22(c)).

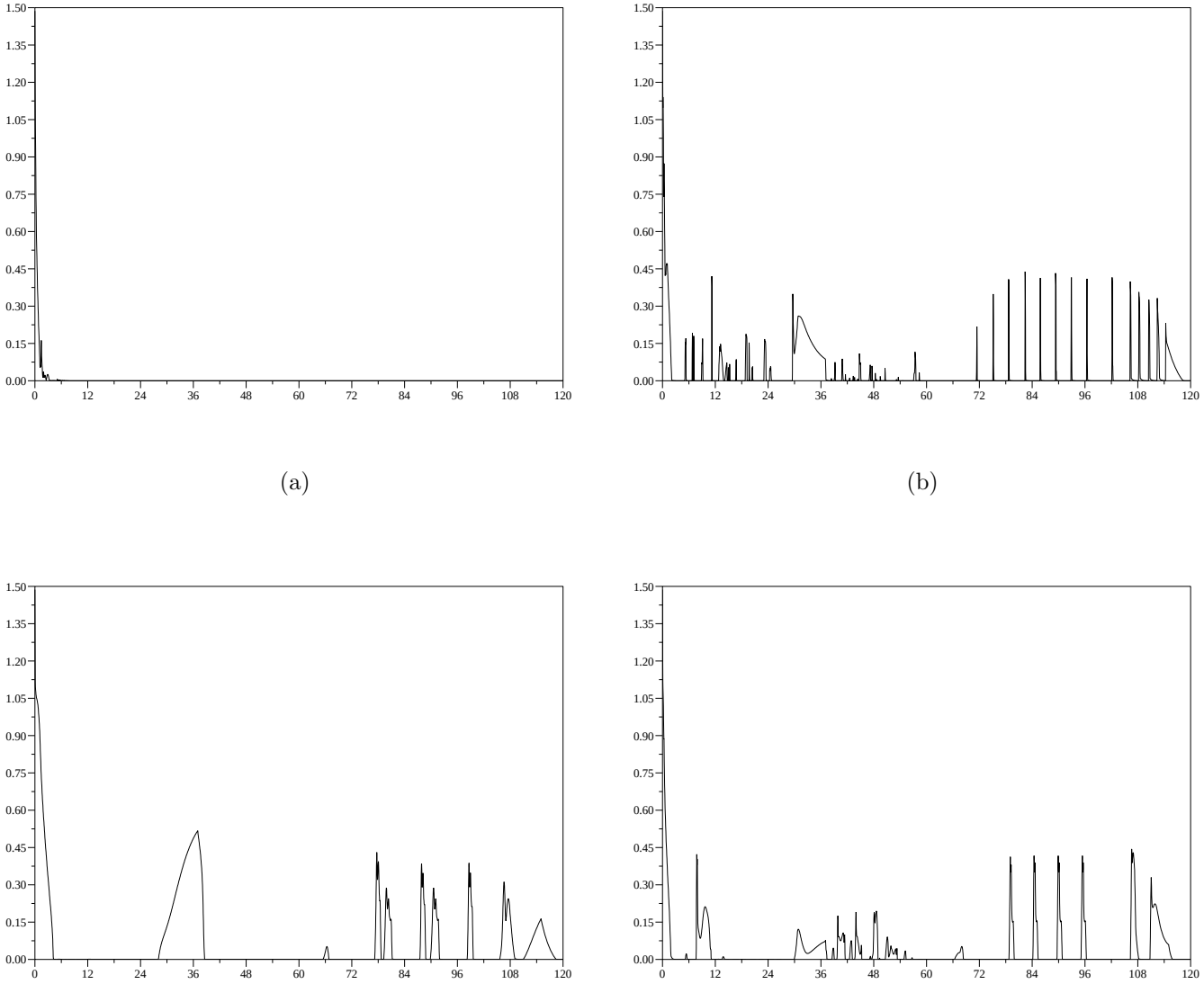
d. Enfin, même si les périodes d'immobilité de la plate-forme de type voiture ne sont pas aussi longues que dans la simulation précédente, la stratégie (d) produit encore un bon compromis entre un suivi fin de la cible et la minimisation des efforts de commande sur la plate-forme porteuse.



(a) (b)

(c) (d)

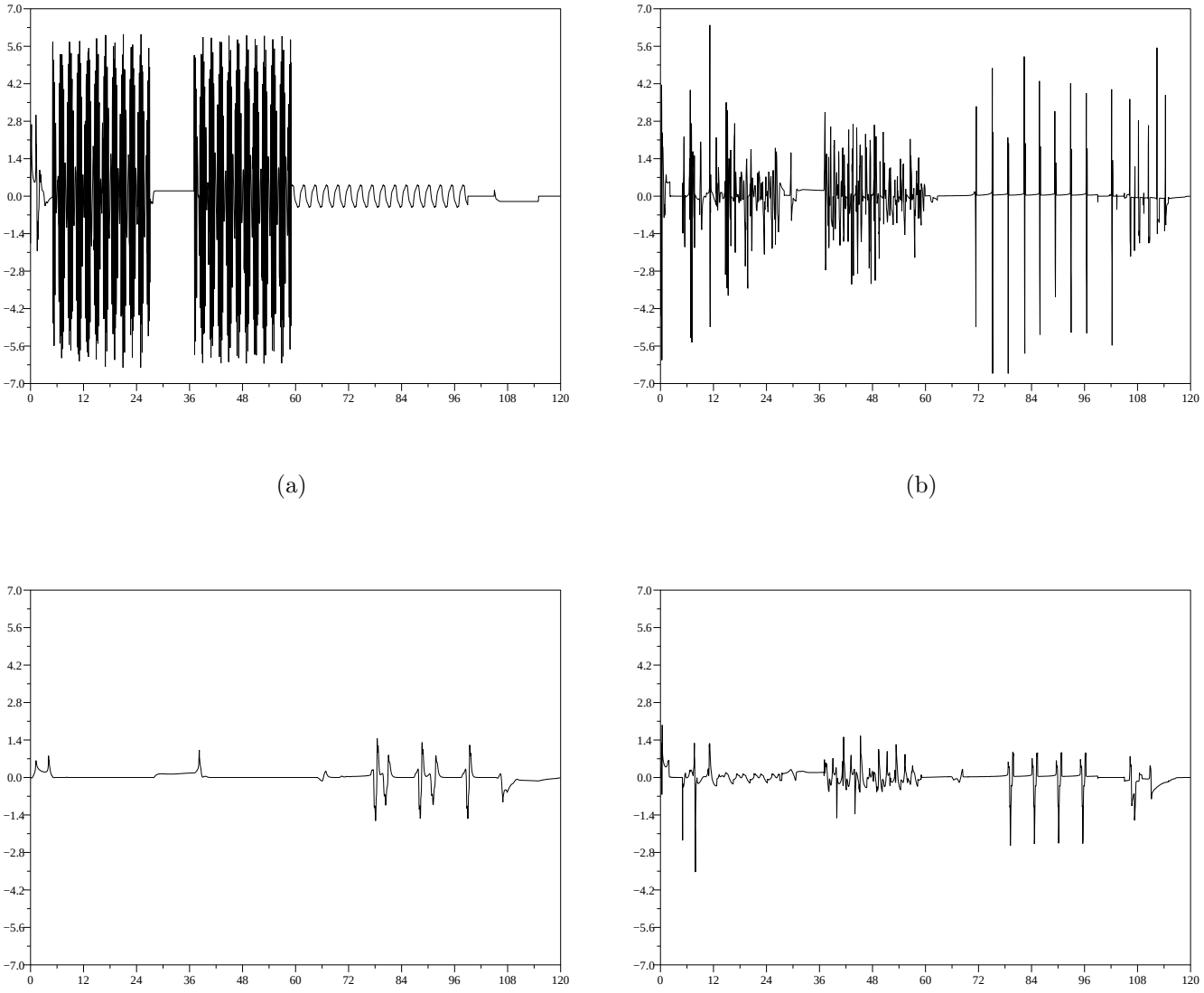
Figure 4.19 – Trajectoires cartésiennes du manipulateur mobile et de la cible. En rouge la trajectoire du centre de l'axe des roues, en bleu celle de l'organe terminal, et en noir celle de la cible.



(a) (b)

(c) (d)

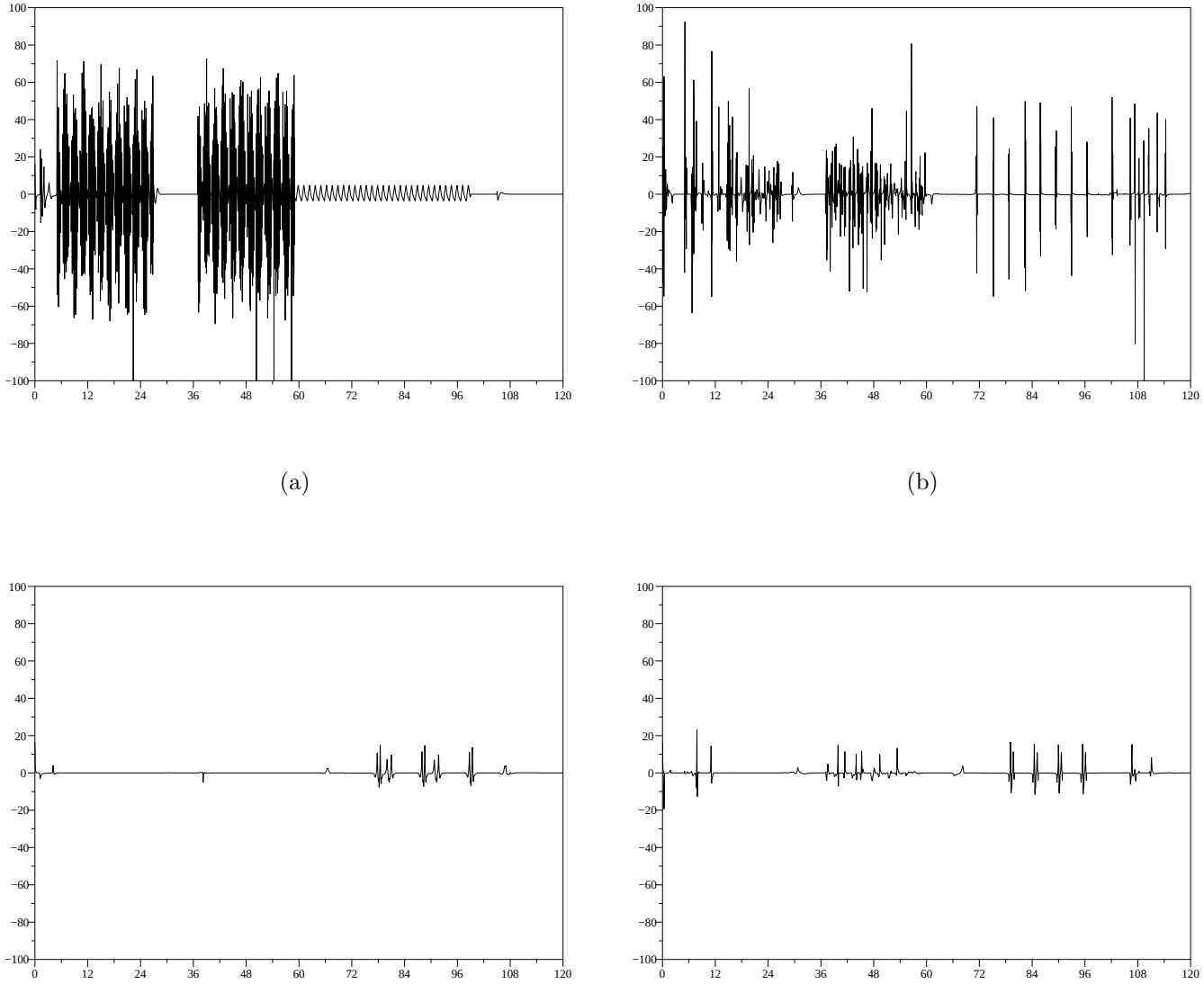
Figure 4.20 – Norme de la fonction e_p associée à l'objectif de manipulation.



(a) (b)

(c) (d)

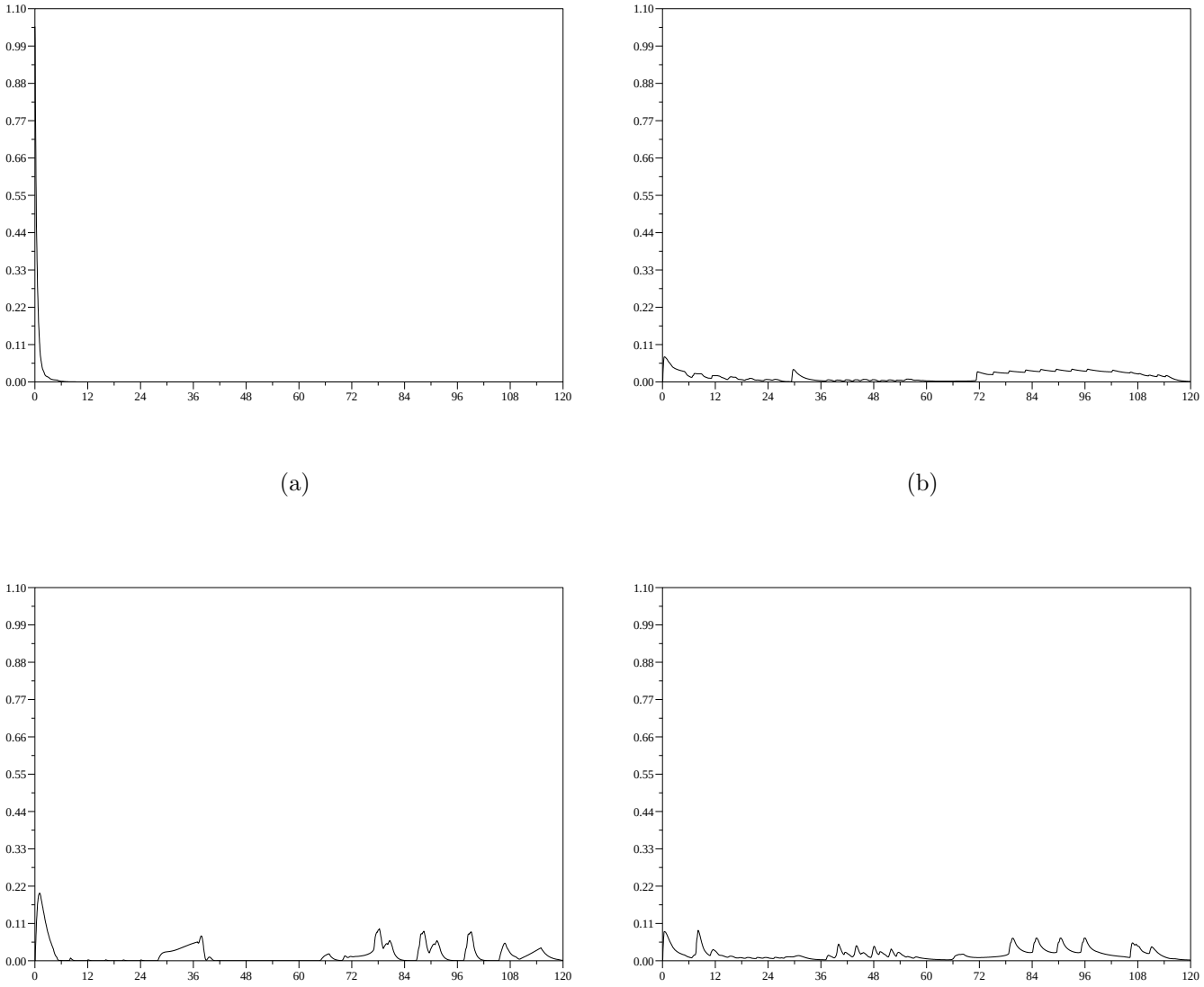
Figure 4.21 – Vitesse $v_{b,1}$ de la plate-forme mobile de type voiture.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 4.22 – Vitesse v_φ de l'angle volant.



(a) (b)

(c) (d)

Figure 4.23 – Fonction de coût secondaire h_s.

4.6 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une méthodologie pour la synthèse de lois de commande par retour d'état des manipulateurs mobiles non-holonomes. Elle repose sur l'approche par fonctions de tâches pour générer la commande du bras, et sur le concept de repère compagnon omnidirectionnel pour ce qui est de la commande de la plate-forme. Les avantages de cette méthode résident d'une part dans la simplicité de la formulation de la commande, et d'autre part dans son caractère générique. Plus précisément, nous pouvons souligner les atouts suivants :

i. Cette méthode propose une formulation des objectifs de commande qui permet de garantir l'évitement des butées articulaires du manipulateur.

ii. Elle présente un avantage hérité du concept de repère compagnon. Une fois ce repère déterminé, le procédure de synthèse de la loi de commande est indépendante de la plate-forme associée, comme l'illustrent les Sections 4.5.1 et 4.5.3 où le passage d'une plate-forme de type unicycle à une plate-forme de type voiture ne nécessite que peu de modifications.

iii. Enfin, la polyvalence des stratégies de coordination entre la locomotion et la manipulation est rendue possible à la fois *1)* par le choix d'une fonction de coût secondaire formulée comme une somme pondérée de coûts (traduisant chacun un objectif différent), et *2)* par le choix de la commande du repère compagnon. Nous avons en particulier montré l'influence de différents choix associés à la pré-compensation du mouvement de la cible, en liaison avec la minimisation du nombre de manœuvres effectuées par la plate-forme.

Conclusion

1 Contributions

L'objectif scientifique de ce travail de thèse était de faire progresser l'état de l'art dans le domaine de la commande des manipulateurs mobiles hybrides holonomes/ non-holonomes, en dégageant un cadre méthodologique pour la synthèse de lois de commande par retour d'état de ces systèmes. Nous l'avons accompagné d'un souci de validation en simulation pour des applications de suivi de cible. L'originalité de ce travail tient au développement de nouvelles méthodes permettant un contrôle réactif coordonné d'une tâche de manipulation –exécutée avec finesse– et d'une tâche de locomotion –réalisée avec moins de précision–, via la stabilisation *pratique* de la situation *complète* de la plate-forme le long d'une trajectoire de référence quelconque. Cette caractéristique de la tâche de locomotion est cruciale dans les deux approches de commande que nous avons présentées, et est rendue possible par l'utilisation des *fonctions transverses*. Enfin, bien que ces approches de commande reposent sur une hiérarchie nette de la coordination de mouvements, nous avons montré leur flexibilité à travers les choix de diverses stratégies de coopération entre la base et le manipulateur.

En premier lieu, nous avons exploité l'approche par fonctions transverses pour associer à une plate-forme non-holonome un « repère compagnon » arbitrairement proche du repère attaché à la plate-forme. Ce repère compagnon possède la propriété, fort utile du point de vue de la commande, d'être omnidirectionnel moyennant une éventuelle phase transitoire. De plus, une fois ce repère compagnon omnidirectionnel défini, la synthèse de la commande est indépendante de la plate-forme choisie.

Après avoir adapté le formalisme des fonctions de tâches à la classe des manipulateurs mobiles holonomes, notre première contribution importante a été la fusion de cette méthodologie dédiée à la commande de systèmes holonomes avec l'approche par fonctions transverses, à travers la définition locale et implicite d'un « système virtuel omnidirec-

tionnel équivalent » associé au manipulateur mobile non-holonome et à une tâche de manipulation. Nous avons cependant montré certaines limites de cette approche, sur le plan de la stratégie de coordination de mouvements et sur celui de la difficulté du calcul de la commande.

Notre contribution majeure réside dans le développement d'une seconde approche de commande plus générique, et plus facile à mettre en oeuvre. Cette méthodologie de commande repose sur une stratégie donnant structurellement une priorité plus importante à la tâche de manipulation, et permet une plus grande liberté dans le choix des objectifs de locomotion. Nous avons étudié l'application de cette approche au cas d'un problème de suivi de cible par différents types de manipulateurs mobiles plans.

2 Perspectives

A l'issue de cette thèse, certains problèmes demeurent non-résolus, et les approches de commande proposées dans ce mémoire requièrent des extensions et des développements afin de répondre pleinement à l'objectif de commande unifiée des manipulateurs mobiles. Nous concluons ici sur les améliorations nécessaires, notamment en vue d'implémentations sur des dispositifs expérimentaux, sur les problèmes ouverts par notre contribution à la commande des manipulateurs mobiles et les pistes de recherche qu'ils suscitent.

En ce qui concerne les développements méthodologiques, les perspectives suivantes nous paraissent particulièrement dignes d'intérêt :

- Grâce à l'approche par fonctions transverses, nous avons montré l'existence de classes de repères compagnons omnidirectionnels dans $SE(2)$, attachés à des plates-formes non-holonomes de type unicycle ou voiture. Cette propriété semble être généralisable à d'autres types de plates-formes mobiles, évoluant dans $SE(3)$, et éventuellement sous-actionnées (Morin et Samson, 2005), telles que des dirigeables ou des sous-marins. De telles extensions devront vraisemblablement être accompagnées d'une adaptation des techniques de synthèse de commandes coordonnées que nous avons considérées.
- Afin d'améliorer l'autonomie du système robotique, il convient de prendre en compte des problématiques supplémentaires comme, par exemple, l'évitement des obstacles dans le cas d'une évolution dans un environnement encombré. Des premiers résultats de simulations menées dans ce sens, avec l'ajout de coûts inspirés par les travaux de (Khatib, 1986), semblent indiquer que cette intégration ne pose

pas de problème.

- Dans une perspective plus large, il importe également de tirer profit de la connaissance accrue de l'environnement du robot via les capteurs embarqués. Les approches proposées étant en partie issues de l'approche par fonctions de tâches, particulièrement adaptée à la commande référencée capteurs, de tels développements semblent envisageables.
- Dans notre seconde approche de commande, nous avons focalisé notre attention sur des objectifs de commande de la plate-forme associés aux notions de situation préférentielle de la base et de minimisation des efforts de commande sur la plate-forme. La flexibilité de l'approche permet de formuler d'autres objectifs pour la plate-forme, correspondant à des stratégies de coordination différentes. Etant donné qu'il est a priori difficile de préjuger d'une solution meilleure que les autres dans un cadre applicatif quelconque, il est envisageable de donner des solutions nouvelles à des problèmes de manipulation mobile que nous n'avons pas considérés.

D'un point de vue pratique, il reste de nombreux points à étudier afin d'envisager une implémentation sur un dispositif expérimental :

- La validation expérimentale de ces approches nécessite une étude de stabilité conjointe du manipulateur mobile et d'un estimateur de position et de vitesse de la cible suivie. Reprenant les travaux de (Artus et al., 2003) sur un tel estimateur couplé à une plate-forme dépourvue de bras manipulateur, nous avons obtenu des premiers résultats de simulation satisfaisants ; l'étude de stabilité conjointe dans le cadre de notre approche est cependant rendue plus délicate en raison de la complexité des équations du système complet en boucle fermée.
- L'effet de la discrétisation de la commande, partiellement étudié en simulation, ne pose pas de problème tant que la « taille » des fonctions transverses, proportionnelle aux paramètres ε, n'est pas trop petite. En revanche, le mauvais conditionnement de la matrice de transversalité peut mener à l'instabilité du contrôle si les ε sont trop petits. Ces derniers étant majorés en fonction des limitations articulaires du bras, l'adaptation de nos approches à des manipulateurs disposant d'un espace de travail restreint peut soulever des problèmes numériques lors de leur discrétisation.

D'une manière plus générale, sortant du contexte de la commande réactive, d'autres problématiques peuvent bénéficier de ces méthodes. Nous nous sommes exclusivement intéressé au problème de la commande réactive, mais nos approches de commande peuvent apporter des solutions nouvelles à des problèmes de planification prenant en compte la coordination entre manipulation et locomotion.

Annexe A

Annexes

A.1 Annexes du Chapitre 1

A.1.1 Preuve de la Proposition 1

L'application I_r est un automorphisme de G. Par définition, $\mathrm{Ad}_r = dI_r(e)$. Décomposer I_r appliquée en e sous la forme $I_r(e) = R_{r^{-1}}(r) \circ L_r(e)$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccccc} & & L_r & & R_{r^{-1}} & \\ G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G \\ e & \mapsto & r & \mapsto & e \end{array}$$

conduit, par différentiation, à

$$\begin{array}{ccccc} & & dL_r(e) & & dR_{r^{-1}}(r) & \\ \mathfrak{g} = T_e(G) & \longrightarrow & T_r(G) & \longrightarrow & \mathfrak{g} = T_e(G) \end{array}$$

Donc $\mathrm{Ad}_r = dI_r(e) = dR_{r^{-1}}(r) \circ dL_r(e)$.

Réciproquement, écrire $I_r(e) = L_r(r^{-1}) \circ R_{r^{-1}}(e)$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccccc} & & R_{r^{-1}} & & L_r & \\ G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G \\ e & \mapsto & r^{-1} & \mapsto & e \end{array}$$

conduit à

$$\begin{array}{ccccc} & & dR_{r^{-1}}(e) & & dL_r(r^{-1}) & \\ \mathfrak{g} = T_e(G) & \longrightarrow & T_{r^{-1}}(G) & \longrightarrow & \mathfrak{g} = T_e(G) \end{array}$$

Soit $\mathrm{Ad}_r = dI_r(e) = dL_r(r^{-1}) \circ dR_{r^{-1}}(e)$.

A.1.2 Preuve de la Relation (1.4)

Nous avons $rr^{-1} = e$, d'où

$$dL_r(r^{-1})\dot{\overbrace{r^{-1}}} = -dR_{r^{-1}}(r)\dot{r}$$

Comme $dL_r(r^{-1})^{-1} = dL_{r^{-1}}(e)$, il vient

$$\dot{\overbrace{r^{-1}}} = -dL_{r^{-1}}(e)dR_{r^{-1}}(r)\dot{r}$$

D'après la relation cinématique (1.3) et l'invariance à gauche des champs de vecteurs, nous obtenons

$$\dot{\overbrace{r^{-1}}} = -dL_{r^{-1}}(e)dR_{r^{-1}}(r)dL_r(e)X(e)u$$

D'où le résultat.

A.2 Annexe du Chapitre 2. Preuve de la Proposition 2

Le système $(\mathcal{S}_0)$ vérifiant la Propriété 2 de commandabilité, le Théorème 6 affirme l'existence de fonctions transverses définies sur $\mathbb{T}^{n-m}$.

Afin d'alléger les notations, nous omettrons le paramètre α dans l'expression de f. Par définition de $\bar{r}$, nous avons $r = \bar{r}f = R_f(\bar{r}) = L_{\bar{r}}(f)$. Dérivons cette relation, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{d}{dt}(R_f(\bar{r})) \\ \dot{r} &= dR_f(\bar{r})\dot{\bar{r}} + dL_{\bar{r}}(f)\dot{f} \end{aligned}$$

D'où :

$$\dot{\bar{r}} = [dR_f(\bar{r})]^{-1}[\dot{r} - dL_{\bar{r}}(f)\dot{f}]$$

Comme $[dR_f(\bar{r})]^{-1} = dR_{f^{-1}}(r)$, l'équation ci-dessus s'écrit aussi :

$$\dot{\bar{r}} = dR_{f^{-1}}(r)[\dot{r} - dL_{\bar{r}}(f)\dot{f}]$$

Sachant que $dL_{\bar{r}}(f)^{-1} = dL_{\bar{r}^{-1}}(r)$, nous mettons le terme $dL_{\bar{r}}(f)$ en facteur :

$$\dot{\bar{r}} \;=\; dR_{f^{-1}}(r)\; dL_{\bar{r}}(f)[\sum_{i=1}^{m} u_i\; dL_{\bar{r}^{-1}}(r) X_i(r) - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(\alpha)\dot{\alpha}_i]$$

Du fait de l'invariance à gauche des champs de vecteurs X_i par rapport à l'opération de groupe, on en conclut :

$$\dot{\bar{r}} \;=\; dR_{f^{-1}}(r)\; dL_{\bar{r}}(f)\Big[\sum_{i=1}^{m} u_i X_i(f) - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i\Big]$$

En munissant le groupe d'une carte, nous pouvons mettre cette dernière relation sous forme matricielle :

$$\dot{\bar{r}} = A(\alpha, \bar{r})\; H(\alpha) u_e$$

avec la matrice inversible $A(\alpha, \bar{r}) := dR_{f^{-1}}(r)\; dL_{\bar{r}}(f)$, le vecteur de commande étendue $u_e := [u_1, \cdots, u_m, \dot{\alpha}_{m+1}, \cdots, \dot{\alpha}_n]^T$, et la matrice de transversalité

$$H(\alpha) := \Big(X_1(f(\alpha)), \cdots, X_m(f(\alpha)), -\frac{\partial f}{\partial \alpha_{m+1}}(\alpha), \cdots, -\frac{\partial f}{\partial \alpha_n}(\alpha)\Big)$$

Comme la matrice $H(\alpha)$ est par définition inversible pour tout α, le retour d'état (2.8) conduit à l'équation suivante en boucle fermée :

$$\dot{\bar{r}} = Z(\bar{r})$$

A.3 Annexes du Chapitre 3

A.3.1 Preuve du Lemme 3

Tout d'abord, (q^*, r^*_{db}) appartient à $F_e^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, \rho) \times W_M)$ pour tout M et tout ρ. Ceci implique que ces ensembles sont non-vides et, par conséquent, possèdent des composantes connexes par arcs non-vides $\mathcal{D}_{\rho, W_M} \ni (q^*, r^*_{db})$.

Afin de démontrer la propriété d'admissibilité de e_m, nous appliquons la Proposition 3. Premièrement, W_M est un sous-ensemble compact, connexe par arcs et simplement connexe, de G car $M < 2$. Par définition, $\mathcal{D}_{\rho, W_M}$ satisfait la Propriété 1 de la Proposition 3. Montrons maintenant que, pour M et ρ suffisamment petits, $\mathrm{F}_r(\mathcal{D}_{\rho, W_M}) \cap \mathrm{F}_r(Q \times G) =$

$\mathrm{F}_r(\mathcal{D}_{\rho,W_M}) \cap (\mathrm{F}_r(Q) \times G) = \varnothing$. Pour tout $(q, r_{db}) \in \mathcal{D}_{\rho,W_M}$, nous avons

$$\|e_m(q, r_{db})\| \leqslant \rho \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(r_{db}, r_{db}^*) \leqslant M$$

Nous déduisons donc des relations (3.7) et (3.8) que, lorsque M et ρ tendent vers zéro, pour tout $(q, r_{db}) \in \mathcal{D}_{\rho,W_M}$,

$$\begin{pmatrix} q_2 \begin{pmatrix} \cos q_3 \\ \sin q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (q_2^- + q_2^+)/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ q_1 + q_3 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

Puisque $q_2 > q_2^- > 0$ et $q_3 \in (-\pi/2, \pi/2)$, nous en déduisons premièrement que $q_3 \longrightarrow 0$, ce qui implique à la fois que $q_1 \longrightarrow 0$ et que $q_2 \longrightarrow (q_2^- + q_2^+)/2$. C'est pourquoi, pour M et ρ suffisamment petits, $(q, r_{db}) \in \mathcal{D}_{\rho,W_M}$ ne peut appartenir à $\mathrm{F}_r(Q) \times G$ et la Propriété 2 est satisfaite. Il nous reste à vérifier la Propriété 3. En premier lieu, en notant $\tilde{r}_{ed} = (\tilde{x}_{ed}, \tilde{y}_{ed}, \tilde{\theta}_{ed})^T$, il vient de la relation (3.7) l'expression suivante de la dérivée partielle de e_m par rapport aux variables du bras :

$$\frac{\partial e_m}{\partial q}(q, r_{db}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_{ed} \\ -\tilde{x}_{ed} - L_e \end{pmatrix} - R^T(q_3) \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \end{pmatrix} & -R^T(q_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{y}_{ed} \\ -\tilde{x}_{ed} - L_e \end{pmatrix} \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

De cette relation, nous déduisons que

$$\det\left(\frac{\partial e_m}{\partial q}(q, r_{db})\right) = q_2$$

Comme $q_2 \in (q_2^-, q_2^+)$ avec $q_2^- > 0$, la Propriété 3.*i)* est clairement satisfaite. Les Propriétés 3.*ii)* et 3.*iii)* peuvent ensuite être démontrées soit par le calcul, soit en se référant à la Remarque 10.

A.3.2 Preuve de la Proposition 6

Comme $h_{r,2}$ est fixé à zéro, et que $h_{r,1}$ comme h_ℓ dépendent uniquement de q et de t, l'expression (3.14) de la fonction de tâche globale se simplifie :

$$e = \begin{pmatrix} e_q \\ e_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial e_m}{\partial q}\right)^T e_m + \frac{\partial (h_\ell + h_{r,1})}{\partial q} \\ \left(\frac{\partial e_m}{\partial r}\right)^T e_m \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

et donc,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial e}{\partial q} & \frac{\partial e}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial e_m}{\partial q})^T \frac{\partial e_m}{\partial q} + \frac{\partial^2 (h_\ell + h_{r,1})}{\partial q^2} & (\frac{\partial e_m}{\partial q})^T \frac{\partial e_m}{\partial r} \\ (\frac{\partial e_m}{\partial r})^T \frac{\partial e_m}{\partial q} & (\frac{\partial e_m}{\partial r})^T \frac{\partial e_m}{\partial r} \end{pmatrix} + \sum_k e_{m,k} \frac{\partial^2 e_{m,k}}{\partial (q,r)^2} \tag{A.3}$$

Le fait que e est compatible avec e_m provient de l'expression (A.2) de la fonction de tâche et de l'Hypothèse *ii)*. Pour prouver la $\rho-$admissibilité de e, nous appliquons la Proposition 3. La Propriété 1 de cette proposition est satisfaite par définition de $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$. En ce qui concerne la Propriété 2, notons tout d'abord que $\mathrm{F}_r(Q \times G \times \mathbb{R}) = \mathrm{F}_r(Q) \times G \times \mathbb{R}$. Par construction de h_ℓ et en raison de la convexité de $h_{r,1}$ par rapport à q, $\|\frac{\partial (h_\ell + h_{r,1})}{\partial q}(q)\|$ tend vers l'infini quand q tend vers $\mathrm{F}_r(Q)$. Donc, en utilisant la relation (A.2) et l'Hypothèse *i)*, il s'en suit que $\|e(q,r,t)\|$ tend également vers l'infini quand q tend vers $\mathrm{F}_r(Q)$, ce qui démontre que la Propriété 2 est vérifiée.

Il nous reste à prouver la Propriété 3. Notons que $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ est un ensemble borné. Ceci est une conséquence du fait que $\|e(q,r,t)\|$ tend vers l'infini quand q tend vers $\mathrm{F}_r(Q)$, comme nous l'avons montré précédemment, et tend également vers l'infini lorsque r tend vers l'infini, ce qui résulte de (A.2) et de l'Hypothèse *ii)*. Par conséquent, au vu de la Remarque 10, il nous suffit de montrer que la Propriété 3.*i)* de la Proposition 3 est satisfaite. D'après les Hypothèses *iii)* et *iv)*, la première matrice du membre de droite de la relation (A.3) est définie positive sur tout ensemble $\mathcal{D}_{0,[0,T]}$, puisque $e = 0$ implique $e_m = 0$. Comme $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$ est un compact, il découle aussi de ces hypothèses que sur tout ensemble $\mathcal{D}_{\rho,[0,T]}$, cette matrice est supérieure à γI ($\gamma > 0$). La Propriété 3.*i)* est donc vérifiée, pour un scalaire ρ suffisamment petit, en raison de la compatibilité de e avec e_m .

A.3.3 Preuve de la Proposition 9

On déduit de (3.29) que $\frac{\partial e_m}{\partial r}(q^*, r^*)$ est une matrice de rang n_q. Par application du théorème des fonctions implicites, il existe donc une application φ, définie dans un voisinage $\mathcal{U}_q$ de q^*, telle que $\varphi(q^*) = r^*$ et

$$\forall q \in \mathcal{U}_q, \qquad e_m(q, \varphi(q)) = 0 \tag{A.4}$$

Posons alors

$$\bar{\Phi}(q, r_0) = \Phi(q, \varphi(q), r_0)$$

avec Φ l'application définie par la Proposition 8. En restreignant si nécessaire le voisinage $\mathcal{U}_q$ de sorte que $(q, \varphi(q)) \in \mathcal{U},\ \forall q \in \mathcal{U}_q$, cette application est bien définie et régulière pour

tout $q \in \mathcal{U}_q$, et tout $r_0 \in \mathcal{B}_G(e, \varepsilon_0)$. Nous allons montrer qu'elle satisfait bien les Propriétés 1 et 2 de la Définition 9. Avant cela, établissons la propriété suivante :

$$\forall (q, r_i) \in \mathcal{U}, i \in \{1, 2\}, \quad e_m(q, r_1) = e_m(q, r_2) = 0 \Longrightarrow \Phi(q, r_1, r_0) = \Phi(q, r_2, r_0) \quad \text{(A.5)}$$

pour tout $r_0 \in \mathcal{B}_G(e, \varepsilon_0)$. Puisque $e_m(q, r_1) = e_m(q, r_2) = 0$, il découle de (3.29a) que $r_1 = \tau r_2$ avec $\tau \in \bar{G}$. Puisque $e_m(q, r_2) = 0$ alors, par construction de Φ, $e_m(\Phi(q, r_2, r_0), r_2 r_0) = 0$ pour tout $r_0 \in \mathcal{B}_G(e, \varepsilon_0)$. Donc, en appliquant à nouveau (3.29a),

$$e_m(\Phi(q, r_2, r_0), \tau r_2 r_0) = e_m(\Phi(q, r_2, r_0), r_1 r_0) = 0 \quad \text{(A.6)}$$

et, puisque $e_m(q, r_1) = 0$,

$$e_m(\Phi(q, r_1, r_0), r_1 r_0) = 0 \quad \text{(A.7)}$$

Or l'application $q \longmapsto e_m(q, r)$ est un diffémorphisme local pour tout r dans un voisinage de r^*. On déduit donc de (A.6) et (A.7), en restreignant si nécessaire $\mathcal{U}_q$ et ε_0, l'égalité du membre de droite de (A.5).

Montrons maintenant que $\bar{\Phi}$ satisfait la Propriété 1 de la Définition 9. Supposons tout d'abord que $e(q, r) = 0$ (avec $q \in \mathcal{U}_q$ et $(q, r) \in \mathcal{U}$). En utilisant (A.4) et (A.5), on déduit que

$$\Phi(q, \varphi(q), r_0) = \Phi(q, r, r_0)$$

(pour tout $r_0 \in \mathcal{B}_G(e, \varepsilon_0)$). D'où

$$e_m(\bar{\Phi}(q, r_0), r r_0) = e_m(\Phi(q, r, r_0), r r_0) = e_m(q, r) = 0$$

où la dernière égalité provient du fait que Φ satisfait la Propriété 1 de la Définition 9.

Suppposons à l'inverse que $e_m(\bar{\Phi}(q, r_0), r r_0) = 0$. Alors

$$e_m(\Phi(q, \varphi(q), r_0), r r_0) = 0 \quad \text{(A.8)}$$

D'après (A.4), $e_m(q, \varphi(q)) = 0$, d'où

$$e_m(\Phi(q, \varphi(q), r_0), \varphi(q) r_0) = 0 \quad \text{(A.9)}$$

On déduit de (A.8), (A.9), et de l'hypothèse (3.29a) que $\varphi(q) = \tau r$ avec $\tau \in \bar{G}$. Donc $e_m(q, \tau r) = 0$ et, en appliquant à nouveau (3.29a), $e_m(q, r) = 0$. Ceci conclut la preuve de la Propriété 1.

Pour établir la Propriété 2, il suffit de remarquer que $\bar{\Phi}(q, e) = q$. En effet, $\bar{\Phi}(q, e) =$

$\Phi(q, \varphi(q), e)$ avec

$$e_m(\Phi(q, \varphi(q), e), r) = e_m(q, r)$$

Puisque $q \longmapsto e_m(q, r)$ est un difféomorphisme local, l'égalité $\Phi(q, \varphi(q), e) = q = \bar{\Phi}(q, e)$ en découle.

Bibliographie

Abraham, R. et Robbin, J. (1967). *Transversal Mappings and Flows*. Addison Wesley Benjamin.

Arai, T. (1997). « Robots with integrated locomotion and manipulation and their future ». *Journal of Robotics and Mechatronics*, 9(4) :251–255.

Artus, G., Morin, P., et Samson, C. (2003). « Tracking of an omnidirectional target with a unicycle-like robot : control design and experimental results ». Rapport technique 4849, INRIA.

Artus, G., Morin, P., et Samson, C. (2004). « Control of a maneuvering mobile robot by transverse functions ». Dans *Symp. on Advances in Robot Kinematics (ARK)*, pages 459–468.

Asada, H. et Slotine, J. (1986). *Robot analysis and control*. Wiley, New York.

Bacciotti, A. et Rosier, L. (2001). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer.

Bailleul, J., Hollerbach, J., et Brockwett, R. (1984). « Programming and control of kinematically redundant manipulators ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 768–774.

Bayle, B. (2001). « *Modélisation et commande cinématiques des manipulateurs mobiles à roues* ». Thèse de Doctorat, LAAS, Université Paul Sabatier de Toulouse.

Bayle, B., Fourquet, J.-Y., Lamiraux, F., et Renaud, M. (2002). « Kinematic control of wheeled mobile manipulators ». Dans *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 1572–1577.

Bayle, B., Fourquet, J.-Y., et Renaud, M. (2000). « Generalized path generation for a mobile manipulator ». Dans *Int. Conf. on Mechanical Design and Production*, pages 541–545, Le Caire.

Bayle, B., Fourquet, J.-Y., et Renaud, M. (2001a). « Génération de mouvements des manipulateurs mobiles ». *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 35 :809–845.

Bayle, B., Fourquet, J.-Y., et Renaud, M. (2001b). « Manipulability analysis for mobile manipulators ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1251–1256, Séoul.

Bennani, M. K. et Rouchon, P. (1995). « Robust stabilization of flat and chained systems ». Dans *European Control Conference (ECC)*, pages 2642–2646.

Berger, M. et Gostiaux, B. (1987). *Géométrie Différentielle : Variétés, Courbes et Surfaces*. Presses Universitaires de France.

Bloch, A., Krishnaprasad, P., Marsden, J., et Murray, R. (1996). « Nonholonomic mechanical systems with symmetry ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 136 :21–99.

Bloch, A., McClamroch, N., et Reyhanoglu, M. (1990). « Controllability and stabilization properties of a nonholonomic control system ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 1312–1314.

Boissonnat, J.-D., Faverjon, B., et Merlet, J.-P. (1988). *Techniques de la robotique. Perception et planification.* Hermès.

Brock, O. et Khatib, O. (1997). « Elastic strips : real-time path modification for mobile manipulation ». Dans *Int. Symp. of Robotics Research'97*, pages 117–122.

Brockett, R. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. Dans Brockett, R., Millman, R., et Sussmann, H., éditeurs, *Differential Geometric Control Theory*. Birkauser.

Brooks, R. (1983). « Planning collision-free motions for pick-and-place operations ». *International Journal of Robotics Research (IJRR)*, 2(4).

Bullo, F., Leonard, N., et Lewis, A. (2000). « Controllability and motion algorithms for underactuated Lagrangian systems on Lie groups ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 45 :1437–1454.

Campion, G., d'Andrea Novel, B., et Bastin, G. (1991). « Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 1184–1189.

Campion, G., d'Andrea Novel, B., et Bastin, G. (1996). « Structural properties and classification of dynamic models of wheeled mobile robots ». *IEEE Trans. on Robotics and Automation (ITRA)*, 12 :47–62.

Canudas de Wit, C., Siciliano, B., et Bastin, G., éditeurs (1996). *Theory of robot control*. Springer Verlag.

Canudas de Wit, C. et Sørdalen, O. J. (1992). « Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 37(11) :1791–1797.

Carriker, W., Khosla, P., et Krogh, B. (1991). « Path planning for mobile manipulators for multiple task execution ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 7(3) :403–408.

Chow, W. (1939). « Uber systeme von linearen partiellen differential-gleichungen erster ordnung ». *Math. Ann.*, 117 :98–105.

Coron, J.-M. (1992). « Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift ». *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*, 5 :295–312.

Craig, J. (1986). *Introduction to robotics : mechanisms and control*. Addison Wesley publishing company, Reading.

d'Andréa Novel, B., Campion, G., et Bastin, G. (1995). « Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization ». *International Journal of Robotics Research (IJRR)*, 14(6) :543–559.

Desai, J., Wang, C., Zefran, M., et Kumar, V. (1996). « Motion planning for multiple mobile manipulators ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 2073–2078.

Dombre, E. et Khalil, W. (1988). *Modéliation et commande des robots*. Hermès.

Egerstedt, M. et Hu, X. (2000). « Coordinated trajectory following for mobile manipulation ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3479–3485, San Francisco.

Espiau, B., Chaumette, F., et Rives, P. (1992). « A new approch to visual servoing in robotics ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 8(3) :313–326.

Faverjon, B. (1984). « Obstacle avoidance using an octree in the configuration space of a manipulator ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, Atlanta, USA.

Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., et Rouchon, P. (1995a). « Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems ». Dans *European Control Conference (ECC)*, pages 1882–1887.

Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., et Rouchon, P. (1995b). « Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples ». *International Journal of Control (IJC)*, 61 :1327–1361.

Foulon, G., Fourquet, J.-Y., et Renaud, M. (1997). « On coordinated tasks for nonholonomic mobile manipulators ». Dans *5th IFAC Symp. Robot Control*, pages 491–498.

Fruchard, M., Morin, P., et Samson, C. (2005a). « A framework for the control of nonholonomic mobile manipulators ». Rapport technique, INRIA. Rapport de Recherche 5556.

Fruchard, M., Morin, P., et Samson, C. (2005b). « A framework for the control of nonholonomic mobile manipulators ». *International Journal of Robotics Research (IJRR)*. Article en cours de soumission.

Furuno, S., Yamamoto, M., et Mohri, A. (2003). « Trajectory planning of mobile manipulator with stability considerations ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3403–3408, Taiwan.

Gorla, B. et Renaud, M. (1984). *Modèle des robots manipulateurs. Application à leur commande*. Cepadues Toulouse.

Grizzle, J. et Marcus, S. (1985). « The structure of nonlinear control systems possessing symmetries ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 30 :248–258.

Haynes, G. et Hermes, H. (1970). « Nonlinear controllability via Lie theory ». *SIAM Journal on Control*, 8 :450–460.

Hermes, H. (1991). « Nilpotent and high-order approximations of vector field systems ». *SIAM Review*, 33 :238–264.

Kanayama, Y., Kimura, Y., Miyazaki, F., et Noguchi, T. (1990). « A stable tracking control method for an autonomous mobile robot ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 384–389.

Khalil, H. K. (1992). *Nonlinear systems*. MacMillan Publishing, New York.

Khalil, W. (1978). « *Contribution à la commande automatique des manipulateurs avec l'aide d'un modèle mathématique des mécanismes* ». Thèse de Doctorat, Université de Montpellier.

Khalil, W. et Dombre, E. (1999). *Modélisation, identification et commande des robots*. Hermès.

Khalil, W., Liegois, A., et Fournier, A. (1979). « Commande dynamique des robots ». *RAIRO automatique / Systems analysis and control*, 13(2) :189–201.

Khatib, O. (1986). « Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots ». *International Journal of Robotics Research (IJRR)*, 5(1) :90–98.

Khatib, O. (1987). « A unified approach for motion and force control of robots manipulators : the operational space formulation. ». *Journal of Robotics and Automation*, 3(1) :43–53.

Khatib, O., Yokoi, K., Chang, K., Ruspini, D., Holmberg, R., et Casal, A. (1996). « Vehicle/ Arm coordination and multiple mobile manipulators decentralized cooperation. ». pages 546–553, Osaka.

Lafferriere, G. et Sussmann, H. (1993). A differential geometric approach to motion planning. Dans Li, Z. et Canny, J., éditeurs, *Nonholonomic motion planning*. Kluwer Academic Press.

Lafontaine, J. (1996). *Introduction aux variétés différentielles*. Press. Univ. Grenoble,.

Lamiraux, F. et Bonnafous, D. (2002). « Reactive trajectory deformation for nonholonomic systems : Application to mobile robots ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3099–3104, Washington DC.

Laumond, J.-P., éditeur (1998). *Robot motion planning and control*, volume 229 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag.

Liégeois, A. (1977). « Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms ». *IEEE Transactions Systems Man Cybernetics*, 7 :868–871.

Lizárraga, D. (2004). « Obstructions to the existence of universal stabilizers for smooth control systems ». *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*, 16 :255–277.

Lizárraga, D., Morin, P., et Samson, C. (1999). « Non-robustness of continuous homogeneous stabilizers for affine control systems ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 855–860.

Lobry, C. (1970). « Controlabilité des systèmes non linéaires ». *SIAM Journal on Control and Optimization (SIAM)*, 8 :573–605.

Luh, J., Walker, M., et Paul, R. (1980). « Resolved acceleration control of mechanical manipulators ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 25(3) :468–474.

Luksch, T., Ylönen, S., et Halme, A. (2003). « Combined motion control of the platform and the manipulator of Workpartner robot ». Dans *6ième Int. Conf. on Climbing and Walking Robots (CLAWAR)*, Catania, Italie.

M'Closkey, R. et Murray, R. (1997). « Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 42 :614–628.

M'Closkey, R. T. et Murray, R. M. (1993). « Nonholonomic systems and exponential convergence : some analysis tools ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 943–948.

Miksch, W. et Schroeder, D. (1992). « Performance-functional based controller design for a mobile manipulator ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 227–232, Nice.

Morin, P. (2004). « Stabilisation de systèmes non linéaires critiques et application à la commande de véhicules ». Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Nice Sophia Antipolis.

Morin, P., Pomet, J.-B., et Samson, C. (1999). « Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for driftless controllable systems via oscillatory approximation of Lie brackets in closed-loop ». *SIAM Journal on Control and Optimization (SIAM)*, 38 :22–49.

Morin, P. et Samson, C. (2001a). « A characterization of the Lie Algebra Rank Condition by transverse periodic functions ». *SIAM Journal on Control and Optimization (SIAM)*, 40(4) :1227–1249.

Morin, P. et Samson, C. (2001b). Commande. Dans Laumond, J.-P., éditeur, *La robotique mobile*. Hermes.

Morin, P. et Samson, C. (2001c). « Practical stabilization of driftless homogeneous systems based on the use of transverse periodic functions ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 1761–1766.

Morin, P. et Samson, C. (2001d). « Practical stabilization of driftless systems on Lie groups ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 4272–4277.

Morin, P. et Samson, C. (2003). « Practical stabilization of driftless systems on Lie groups : the transverse function approach ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 48 :1496–1508.

Morin, P. et Samson, C. (2004a). « Practical and asymptotic stabilization of chained systems by the transverse function control approach ». *SIAM Journal on Control and Optimization (SIAM)*, 43(1) :32–57.

Morin, P. et Samson, C. (2004b). « Trajectory tracking for non-holonomic vehicles : overview and case study ». Dans Kozlowski, K., éditeur, *4th Inter. Workshop on Robot Motion Control (RoMoCo)*, pages 139–153.

Morin, P. et Samson, C. (2005). « Control of underactuated mechanical systems by the transverse function approach ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*. Article en cours de soumission.

Murray, R., Li, Z., et Sastry, S. (1994). *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC Press.

Murray, R. et Sastry, S. (1991). « Steering nonholonomic systems in chained form ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 1121–1126.

Murray, R. et Sastry, S. (1993). « Nonholonomic motion planning : Steering using sinusoids ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 38 :700–716.

Neimark, J. et Fufaev, N. (1972). « Dynamics of Nonholonomic Systems ». Dans *American Mathematical Society*, volume 33.

Nelson, W. et Cox, I. (1988). « Local path control for an autonomous vehicle ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1504–1510.

Nijmeijer, H. et Van der Schaft, A. (1991). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Verlag.

Papadopoulos, E. et Dubowsky, S. (1991). « Coordinated manipulator/ spacedraft motion control for space robotic systems ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1696–1701.

Perrier, C., Dauchez, P., et Pierrot, F. (1998). « A global approach for motion generation of non-holonomic mobile manipulators ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 2971–2976.

Pomet, J.-B. (1992). « Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift ». *Systems & Control Letters (SCL)*, 18 :467–473.

Quinlan, S. (1994). « *Real-time modification of collision-free path* ». Thèse de Doctorat, Stanford University.

Quinlan, S. et Khatib, O. (1993). « Elastic bands : connecting path planning and control ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 2, pages 802–807, Atlanta, Georgia.

Renaud, M. et Dauchez, P. (1999). « Modélisation et commande des manipulateurs mobiles à roues ». Dans *Journées Nationales de la Recherche en Robotique*, pages 179–194.

Rouchon, P. (2001). « Motion planning, equivalence, infinite dimensional systems ». *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 11(1) :165–188.

ROUCHON, P., FLIESS, M., LÉVINE, J., et MARTIN, P. (1993). « Flatness, motion planning and trailer systems ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 2700–2705.

SAMSON, C. (1990). « Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart ». *Int. Workshop in Adaptative and Nonlinear Control : Issues in Robotics*. Egalement dans LNCIS, Vol. 162, Springer Verlag, 1991.

SAMSON, C. (1995). « Control of chained systems. Application to path following and time-varying point-stabilization ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 40 :64–77.

SAMSON, C. et AIT-ABDERRAHIM, K. (1991). « Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1136–1141.

SAMSON, C., LEBORGNE, M., et ESPIAU, B. (1991). *Robot Control : The Task-function Approach*. Oxford Engineering. Oxford University Press.

SCIAVICCO, L. et SICILIANO, B. (1988). « A solution algorithm to the inverse kinematic problem for redundant manipulators ». *IEEE Journal Robotics and Automation*, 4 :403–410.

SERAJI, H. (1993). « An on-line approach to coordinated mobility and manipulation ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 28–35, Atlanta, USA.

SERAJI, H. (1998). « A unified approach to motion control of mobile manipulators ». *International Journal of Robotics Research (IJRR)*, 17 :107–118.

SICILIANO, B. (1990). « Kinematic control of redundant robot manipulators : a tutorial ». *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 3(3) :201–212.

SONTAG, E. D. (1992). « Universal nonsingular controls ». Dans *Systems & Control Letters (SCL)*, volume 19, pages 221–224.

SUSSMANN, H. (1991). « Local controllability and motion planning for some classes of systems with drift ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 1110–1141.

SUSSMANN, H. et LIU, W. (1991). « Limits of highly oscillatory controls and approximation of general paths by admissible trajectories ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 437–442.

TCHOŃ, K. et MUSZYŃSKI, R. (2000). « Instantaneous kinematics and dexterity of mobile manipulators ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 3, pages 2493–2498, San Francisco.

Tchoń, K. et Zadarnowska, K. (2003). « Kinematic dexterity of mobile manipulators : an endogenous configuration space approach ». *Robotica*, 21 :521–530.

Teel, A. R., Murray, R., et Walsh, G. (1992). « Nonholonomic control systems : from steering to stabilization with sinusoids ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 1603–1609.

Varadarajan, V. (1983). *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Springer Verlag.

Vukobratović, M. et Kirćanski, M. (1984). « A dynamic approach to nominal trajectory synthesis for redundant manipulators ». *IEEE Trans. Systems Man Cyber.*, 14 :580–586.

Wang, C.-C. et Kumar, V. (1993). « Velocity control of mobile manipulators ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 2, pages 713–718.

Warner, F. (1983). *Foundations of differential manifolds and Lie groups*. Springer Verlag.

Withney, D. (1977). « Force feedback control of manipulator fine motions ». *Journal of Dynamic Systems, Measures and Control*, pages 91–97.

Withney, D. (1985). « Historical perspective and state of the art in robot force control ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 262–268.

Yamamoto, Y. et Yun, X. (1994). « Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator ». *IEEE Trans. on Automatic Control (ITAC)*, 39(6) :1326–1332.

Yamamoto, Y. et Yun, X. (1996). « Effect of dynamic interaction on tthe coordinated control of mobile manipulators ». *IEEE Trans. on Robotics and Automation (ITRA)*, 12(5) :816–824.

Yamamoto, Y. et Yun, X. (1999). « Unified analysis on mobility and manipulability of mobile manipulators ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1200–1206, Detroit, Michigan.

Yoshikawa, T. (1985). « Manipulability of robotic mechanisms ». *International Journal of Robotics Research (IJRR)*, 4(2) :3–9.

Yoshikawa, T. (1990). *Foundations of robotics : Analysis and control*. MIT Press.