

Contrôle stochastique et méthodes numériques en finance mathématique

Romuald Elie

▶ **To cite this version:**

Romuald Elie. Contrôle stochastique et méthodes numériques en finance mathématique. Mathématiques [math]. ENSAE ParisTech, 2006. Français. NNT : . tel-00122883

HAL Id: tel-00122883
https://pastel.hal.science/tel-00122883

Submitted on 5 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contrôle optimal stochastique et méthodes numériques en finance mathématique

Romuald ELIE

ENSAE-CREST, CEREMADE

Plan

- Méthodes numériques probabilistes

- Gestion de portefeuille et contrainte drawdown

Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**

Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**

Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini

Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini
  - Caractérisation par EDP en horizon fini

Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini
  - Caractérisation par EDP en horizon fini

Problème & Littérature

Z_λ v. a. de densité $f(\lambda, .)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Option de payoff actualisé $\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)$

Problème & Littérature

Z_λ v. a. de densité $f(\lambda, .)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Option de payoff actualisé $\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)$

Prix: $P(\lambda^0) := \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$

Problème & Littérature

Z_λ v. a. de densité $f(\lambda, .)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Option de payoff actualisé $\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)$

Prix: $P(\lambda^0) := \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$ Sensibilité: $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$

Problème & Littérature

Z_λ v. a. de densité $f(\lambda, .)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Option de payoff actualisé $\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)$

Prix: $P(\lambda^0) := \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$ Sensibilité: $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$

Comment calculer β_0 ?

Problème & Littérature

Z_λ v. a. de densité $f(\lambda, .)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Option de payoff actualisé $\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)$

Prix: $P(\lambda^0) := \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$ Sensibilité: $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$

Comment calculer β_0 ?

- Différences finies $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon}\left\{P(\lambda^0 + \epsilon) - P(\lambda^0)\right\}$ [LP94]

Problème & Littérature

Z_λ v. a. de densité $f(\lambda, .)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Option de payoff actualisé $\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)$

Prix: $P(\lambda^0) := \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$ Sensibilité: $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$

Comment calculer β_0 ?

- Différences finies $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon}\left\{P(\lambda^0 + \epsilon) - P(\lambda^0)\right\}$ [LP94]
- Pathwise $\beta_0 = \mathbb{E}[\phi'(Z_{\lambda^0})\nabla_\lambda Z_{\lambda^0}]$ [BG96]

Problème & Littérature

Z_λ v. a. de densité $f(\lambda, .)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Option de payoff actualisé $\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)$

Prix: $P(\lambda^0) := \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$ Sensibilité: $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$

Comment calculer β_0 ?

- Différences finies $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon}\left\{P(\lambda^0 + \epsilon) - P(\lambda^0)\right\}$ [LP94]
- Pathwise $\beta_0 = \mathbb{E}[\phi'(Z_{\lambda^0})\nabla_\lambda Z_{\lambda^0}]$ [BG96]
- Vraisemblance $\beta_0 = \mathbb{E}\left[\phi(Z_{\lambda^0})\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\lambda^0, Z_{\lambda^0})\right]$ [BGP6]

Problème & Littérature

Z_λ v. a. de densité $f(\lambda, .)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Option de payoff actualisé $\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)$

Prix: $P(\lambda^0) := \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$ Sensibilité: $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$

Comment calculer β_0 ?

- Différences finies $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon}\left\{P(\lambda^0 + \epsilon) - P(\lambda^0)\right\}$ [LP94]
- Pathwise $\beta_0 = \mathbb{E}[\phi'(Z_{\lambda^0})\nabla_\lambda Z_{\lambda^0}]$ [BG96]
- Vraisemblance $\beta_0 = \mathbb{E}\left[\phi(Z_{\lambda^0})\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\lambda^0, Z_{\lambda^0})\right]$ [BGP6]

Que faire si f est inconnue et ϕ irrégulière ?

Problème & Littérature

Z_λ v. a. de densité $f(\lambda, .)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Option de payoff actualisé $\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)$

Prix: $P(\lambda^0) := \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$ Sensibilité: $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$

Comment calculer β_0 ?

- Différences finies $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon}\left\{P(\lambda^0+\epsilon) - P(\lambda^0)\right\}$ [LP94]
- Pathwise $\beta_0 = \mathbb{E}[\phi'(Z_{\lambda^0})\nabla_\lambda Z_{\lambda^0}]$ [BG96]
- Vraisemblance $\beta_0 = \mathbb{E}\left[\phi(Z_{\lambda^0})\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\lambda^0, Z_{\lambda^0})\right]$ [BGP6]
- Malliavin $\beta_0 = \mathbb{E}\left[\phi(Z_{\lambda^0})\,\pi\right]$ [FLLLT99]

Que faire si f est inconnue et ϕ irrégulière ?

Paramètre aléatoire

Prix

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$$

Sensibilité β^0

$$\mathbb{E}\left[\phi(Z_{\lambda^0})\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\lambda^0, Z_{\lambda^0})\right]$$

Paramètre aléatoire

Prix

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$$

Sensibilité β^0

$$\mathbb{E}\left[\phi(Z_{\lambda^0})\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\lambda^0, Z_{\lambda^0})\right]$$

v.a. Λ de densité ℓ donnée et Z_Λ tq $Z_\Lambda \mid \Lambda$ de densité f

$$\mathbb{E}\left[\phi(Z_\Lambda) \mid \Lambda = \lambda^0\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\phi(Z_\Lambda)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda, Z_\Lambda) \mid \Lambda = \lambda^0\right]$$

Paramètre aléatoire

Prix

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(Z_{\lambda^0}\right)\right]$$

Sensibilité β^0

$$\mathbb{E}\left[\phi(Z_{\lambda^0})\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\lambda^0, Z_{\lambda^0})\right]$$

v.a. Λ de densité ℓ donnée et Z_Λ tq $Z_\Lambda \mid \Lambda$ de densité f

$$\mathbb{E}\left[\phi(Z_\Lambda) \mid \Lambda = \lambda^0\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\phi(Z_\Lambda)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda, Z_\Lambda) \mid \Lambda = \lambda^0\right]$$

Simulation de N réalisations i.i.d. de (Λ, Z_Λ)

Estimation non paramétrique: Noyau K, fenêtre h

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^N \phi(Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^N \phi(Z_i)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda_i, Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Sensibilité β^0

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda_i,Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Trois estimateurs non paramétriques

Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Sensibilité β^0

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda_i,Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Trois estimateurs non paramétriques

- On estime $\frac{\nabla_\lambda f}{f}$ à l'aide d'un estimateur à noyau de f

Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Sensibilité β^0

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda_i,Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Trois estimateurs non paramétriques

- On estime $\frac{\nabla_\lambda f}{f}$ à l'aide d'un estimateur à noyau de f
- On laisse $N\to\infty$ à h fixe $\quad\to \mathbb{E}\left[\phi(Z)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda,Z)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda}{h}\right)\right]$

Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Sensibilité β^0

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda_i,Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Trois estimateurs non paramétriques

- On estime $\frac{\nabla_\lambda f}{f}$ à l'aide d'un estimateur à noyau de f
- On laisse $N\to\infty$ à h fixe $\quad\to \mathbb{E}\left[\phi(Z)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda,Z)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda}{h}\right)\right]$

  Par une intégration par parties, ce terme est la limite de

$$\hat\beta_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\left(\nabla K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)-hK\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)\frac{\nabla\ell}{\ell}(\Lambda_i)\right)$$

Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Sensibilité β^0

$$\frac{h^{-d}}{N\,\ell(\lambda^0)}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda_i,Z_i)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)$$

Trois estimateurs non paramétriques

- On estime $\frac{\nabla_\lambda f}{f}$ à l'aide d'un estimateur à noyau de f
- On laisse $N\to\infty$ à h fixe $\quad\to \mathbb{E}\left[\phi(Z)\frac{\nabla_\lambda f}{f}(\Lambda,Z)K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda}{h}\right)\right]$

  Par une intégration par parties, ce terme est la limite de

$$\hat\beta_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\left(\nabla K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)-hK\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)\frac{\nabla\ell}{\ell}(\Lambda_i)\right)$$

- On dérive l'estimateur du prix par rapport à λ^0

Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\left(\nabla K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)-hK\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)\frac{\nabla\ell}{\ell}(\Lambda_i)\right)$$

Hypothèse: Régularité de ℓ et f et $Nh^{d+2}\to 0$

$$\begin{cases}\text{Biais} & \sim & Ch^p \\ \text{Variance} & \sim & \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}}\end{cases}$$

$$\sqrt{Nh^{d+2}}\left(\hat{\beta}_N-\beta^0\right)\underset{N\to\infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}}\mathcal{N}(0,\Sigma)$$

Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\left(\nabla K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)-hK\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)\frac{\nabla\ell}{\ell}(\Lambda_i)\right)$$

Hypothèse: Régularité de ℓ et f et $Nh^{d+2}\to 0$

$$\begin{cases}\text{Biais} & \sim & Ch^p \\ \text{Variance} & \sim & \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}}\end{cases}$$

$$\sqrt{Nh^{d+2}}\left(\hat{\beta}_N-\beta^0\right)\xrightarrow[N\to\infty]{loi}\mathcal{N}(0,\Sigma)$$

- Equilibre N et h $\Rightarrow h^*\sim CN^{-\frac{1}{d+2p+2}}$ $\Rightarrow$ Vitesse en $N^{\frac{p}{d+2p+2}}$

Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\left(\nabla K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)-hK\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)\frac{\nabla\ell}{\ell}(\Lambda_i)\right)$$

Hypothèse: Régularité de ℓ et f et $Nh^{d+2}\to 0$

$$\begin{cases}\text{Biais} & \sim & Ch^p \\ \text{Variance} & \sim & \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}}\end{cases}$$

$$\sqrt{Nh^{d+2}}\left(\hat{\beta}_N-\beta^0\right)\underset{N\to\infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}}\mathcal{N}(0,\Sigma)$$

- Equilibre N et h $\Rightarrow h^*\sim CN^{-\frac{1}{d+2p+2}}$ $\Rightarrow$ Vitesse en $N^{\frac{p}{d+2p+2}}$
- Densité ℓ de largeur h $\Rightarrow$ Vitesse en $N^{\frac{p}{2p+2}}$

Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\left(\nabla K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)-hK\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)\frac{\nabla\ell}{\ell}(\Lambda_i)\right)$$

Hypothèse: Régularité de ℓ et f et $Nh^{d+2}\to 0$

$$\begin{cases}\text{Biais} & \sim & Ch^p \\ \text{Variance} & \sim & \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}}\end{cases}$$

$$\sqrt{Nh^{d+2}}\left(\hat{\beta}_N-\beta^0\right)\underset{N\to\infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}}\mathcal{N}(0,\Sigma)$$

- Equilibre N et h $\Rightarrow h^*\sim CN^{-\frac{1}{d+2p+2}}$ $\Rightarrow$ Vitesse en $N^{\frac{p}{d+2p+2}}$
- Densité ℓ de largeur h $\Rightarrow$ Vitesse en $N^{\frac{p}{2p+2}}$
- Différences finies pour ϕ irrégulier $\Rightarrow$ Vitesse en $N^{\frac{2}{5}}$

Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N}\sum_{i=1}^{N}\phi(Z_i)\left(\nabla K\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)-hK\left(\frac{\lambda^0-\Lambda_i}{h}\right)\frac{\nabla\ell}{\ell}(\Lambda_i)\right)$$

Hypothèse: Régularité de ℓ et f et $Nh^{d+2}\to 0$

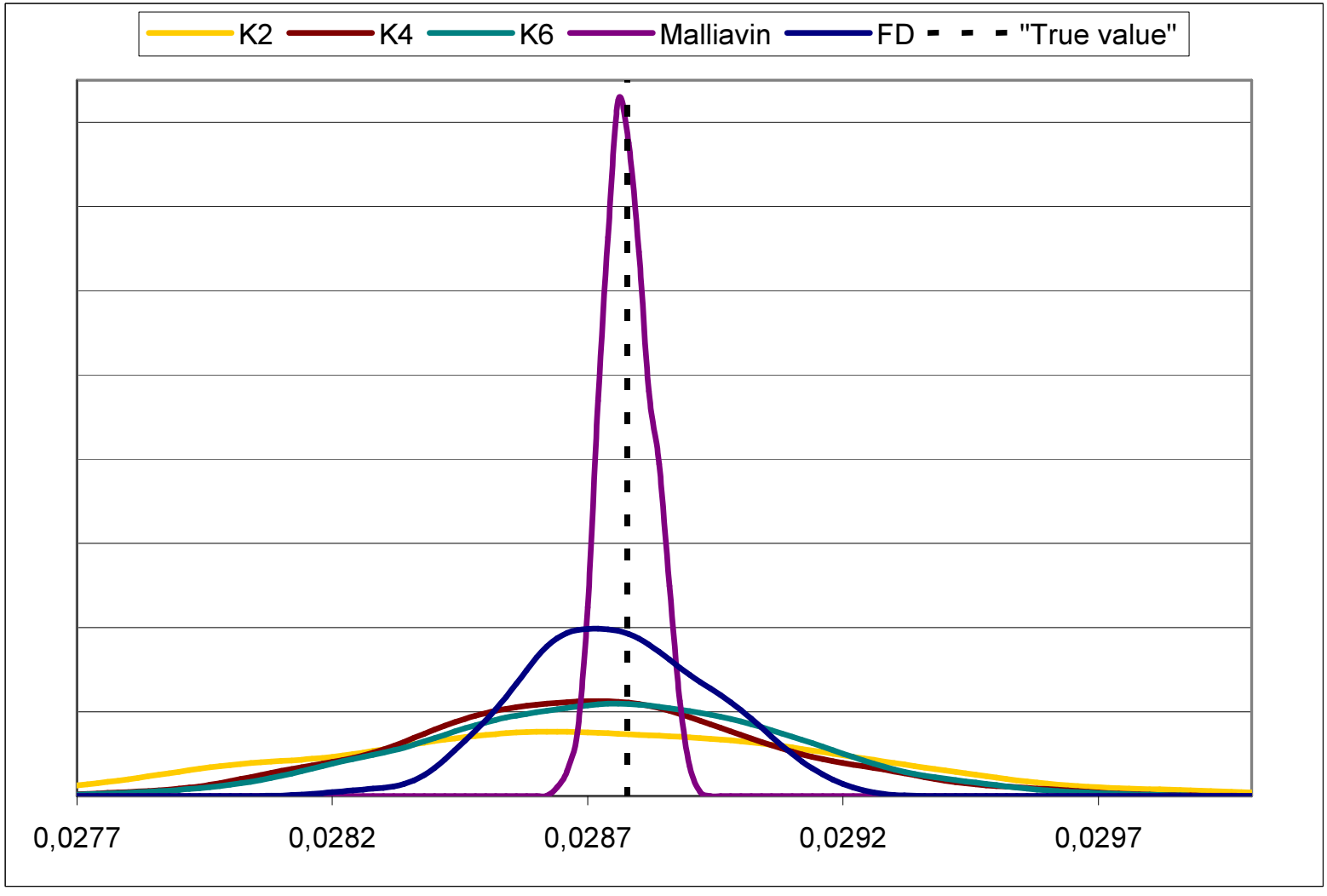
$$\begin{cases}\text{Biais} & \sim & Ch^p\\ \text{Variance} & \sim & \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}}\end{cases}$$

$$\sqrt{Nh^{d+2}}\left(\hat{\beta}_N-\beta^0\right)\underset{N\to\infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}}\mathcal{N}(0,\Sigma)$$

- Equilibre N et h $\Rightarrow h^*\sim CN^{-\frac{1}{d+2p+2}}$ $\Rightarrow$ Vitesse en $N^{\frac{p}{d+2p+2}}$
- Densité ℓ de largeur h $\Rightarrow$ Vitesse en $N^{\frac{p}{2p+2}}$
- Différences finies pour ϕ irrégulier $\Rightarrow$ Vitesse en $N^{\frac{2}{5}}$

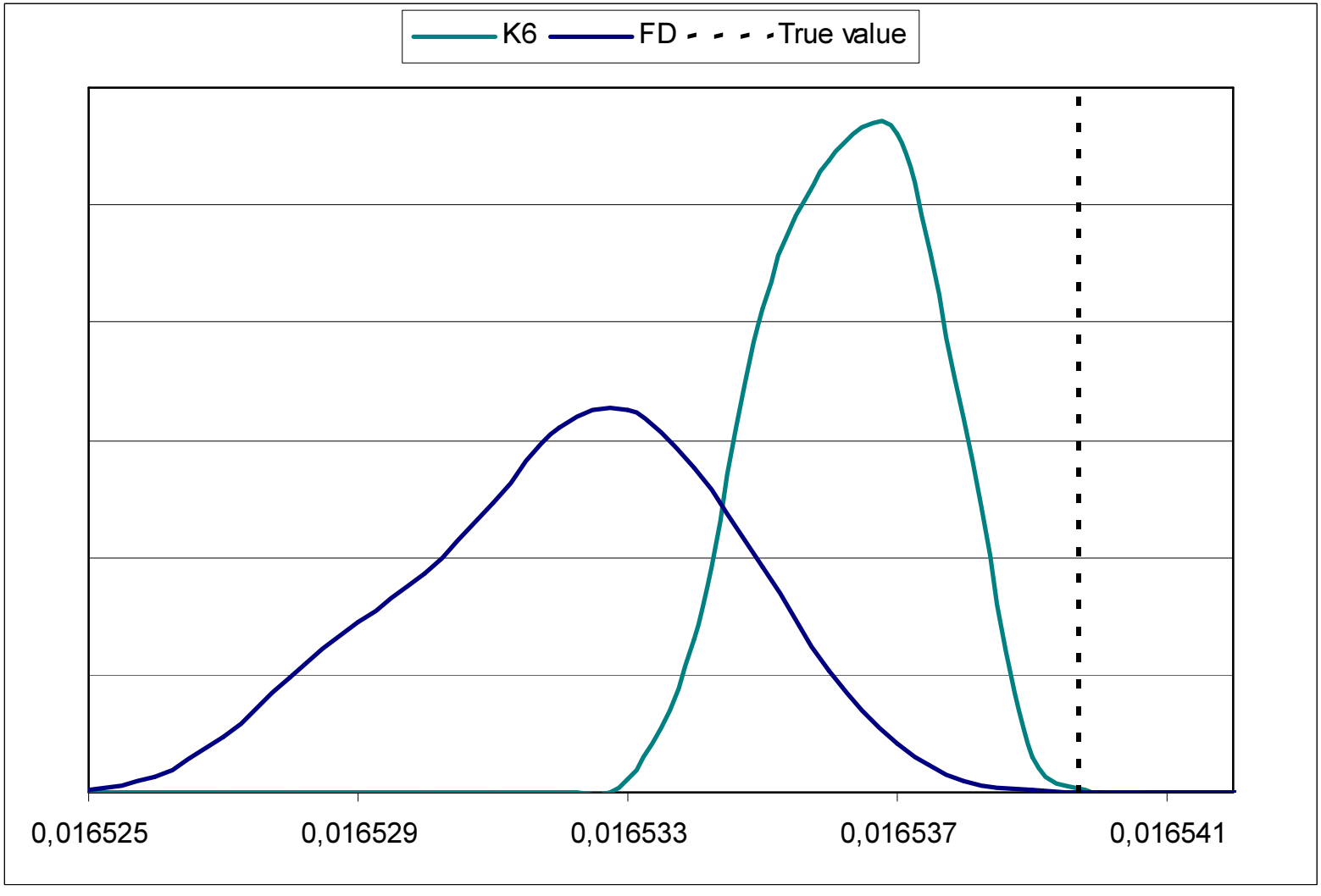
$\Rightarrow$ Plus rapide dès que $p>4$

Call Digital Asiatique, N=1 Million



Distribution des estimateurs

Call Digital Européen, N=1 Milliard



Distribution des estimateurs

Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini
  - Caractérisation par EDP en horizon fini

Problème et littérature

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e)\bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e)\bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec $\Gamma_s := \int_E U_s(e)\gamma(e)\lambda(de)$

Hypothèses

- W MB et $\bar{\mu}$ mes. de Poisson indépendante compensée par $\nu(de, dt) = \lambda(de)dt$, avec $\lambda(E) < \infty$

Problème et littérature

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e)\bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e)\bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec $\Gamma_s := \int_E U_s(e)\gamma(e)\lambda(de)$

Hypothèses

- W MB et $\bar{\mu}$ mes. de Poisson indépendante compensée par $\nu(de, dt) = \lambda(de)dt$, avec $\lambda(E) < \infty$
- Tous les coefficients sont Lipschitz et γ est bornée

Problème et littérature

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e)\bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e)\bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec $\Gamma_s := \int_E U_s(e)\gamma(e)\lambda(de)$

Hypothèses

- W MB et $\bar{\mu}$ mes. de Poisson indépendante compensée par $\nu(de, dt) = \lambda(de)dt$, avec $\lambda(E) < \infty$
- Tous les coefficients sont Lipschitz et γ est bornée

Littérature

- Existence, unicité et lien avec EID [TL94] [BBP97]

Problème et littérature

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e)\bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e)\bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec $\Gamma_s := \int_E U_s(e)\gamma(e)\lambda(de)$

Hypothèses

- W MB et $\bar{\mu}$ mes. de Poisson indépendante compensée par $\nu(de, dt) = \lambda(de)dt$, avec $\lambda(E) < \infty$
- Tous les coefficients sont Lipschitz et γ est bornée

Littérature

- Existence, unicité et lien avec EID [TL94] [BBP97]
- Résolution numérique sans sauts [Z01] [BT04] [GLW05]

Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e)\bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e)\bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec $\Gamma_s := \int_E U_s(e)\gamma(e)\lambda(de)$

Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e)\bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e)\bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec $\Gamma_s := \int_E U_s(e)\gamma(e)\lambda(de)$

- Approximation Progressive X^π de X

$$X^\pi_{t_i+1} := X^\pi_{t_i} + \frac{1}{n}\mu(t_i, X^\pi_{t_i}) + \sigma(t_i, X^\pi_{t_i})\Delta W_{t_i} + \int_E \beta(t_i, X^\pi_{t_i}, e)\bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}])$$

Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e)\bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e)\bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec $\Gamma_s := \int_E U_s(e)\gamma(e)\lambda(de)$

- Approximation Progressive X^π de X

$$X^\pi_{t_{i+1}} := X^\pi_{t_i} + \tfrac{1}{n}\mu(t_i, X^\pi_{t_i}) + \sigma(t_i, X^\pi_{t_i})\Delta W_{t_i} + \int_E \beta(t_i, X^\pi_{t_i}, e)\bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}])$$

- Approximation Rétrograde $(\bar{Y}^\pi, \bar{Z}^\pi, \bar{\Gamma}^\pi)$ de (Y, Z, Γ)

$$\bar{Y}^\pi_1 := g(X^\pi_1) \ \text{ et } \ \begin{cases} \bar{Z}^\pi_{t_i} &:= n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}^\pi_{t_{i+1}}\Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ \bar{\Gamma}^\pi_{t_i} &:= n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}^\pi_{t_{i+1}}\int_E \gamma(e)\bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ \bar{Y}^\pi_{t_i} &:= \mathbb{E}\left[\bar{Y}^\pi_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] + \tfrac{1}{n}\, h\left(t_i, X^\pi_{t_i}, \bar{Y}^\pi_{t_i}, \bar{Z}^\pi_{t_i}, \bar{\Gamma}^\pi_{t_i}\right) \end{cases}$$

Algorithme: de $\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}}$ à $\bar{Y}^{\pi}_{t_i}$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h\left(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r\right) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

Algorithme: de $\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}}$ à $\bar{Y}^{\pi}_{t_i}$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h\left(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r\right) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Générateur constant, (Z^{π}, U^{π}) donné par représentation de $\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}}$

$$\bar{Y}^{\pi}_{t_i} = \bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}} + \frac{1}{n} h\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}, \bar{Y}^{\pi}_{t_i}, \bar{Z}^{\pi}_{t_i}, \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}\right) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z^{\pi}_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U^{\pi}_r(e)\, \bar{\mu}(de, dr)$$

Algorithme: de $\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}}$ à $\bar{Y}^{\pi}_{t_i}$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h\left(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r\right) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Générateur constant, (Z^{π}, U^{π}) donné par représentation de $\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}}$

$$\bar{Y}^{\pi}_{t_i} = \bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}} + \frac{1}{n} h\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}, \bar{Y}^{\pi}_{t_i}, \bar{Z}^{\pi}_{t_i}, \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}\right) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z^{\pi}_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U^{\pi}_r(e)\, \bar{\mu}(de, dr)$$

- Approximation dans $\mathcal{L}^2(\Omega \times [t_i, t_{i+1}])$ de Z^{π} et $\Gamma^{\pi} = \int_E U^{\pi}(e)\gamma(e)\lambda(de)$ par des v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables

$$\bar{Z}^{\pi}_{t_i} := n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z^{\pi}_r dr \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]$$

$$\bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i} := n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma^{\pi}_s ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]$$

Algorithme: de $\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}}$ à $\bar{Y}^{\pi}_{t_i}$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h\left(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r\right) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Générateur constant, (Z^{π}, U^{π}) donné par représentation de $\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}}$

$$\bar{Y}^{\pi}_{t_i} = \bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}} + \frac{1}{n} h\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}, \bar{Y}^{\pi}_{t_i}, \bar{Z}^{\pi}_{t_i}, \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}\right) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z^{\pi}_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U^{\pi}_r(e)\, \bar{\mu}(de, dr)$$

- Approximation dans $\mathcal{L}^2(\Omega \times [t_i, t_{i+1}])$ de Z^{π} et $\Gamma^{\pi} = \int_E U^{\pi}(e)\gamma(e)\lambda(de)$ par des v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables

$$\begin{aligned}
\bar{Z}^{\pi}_{t_i} &:= n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z^{\pi}_r dr \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}} \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
\bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i} &:= n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma^{\pi}_s ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}} \int_E \gamma(e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]
\end{aligned}$$

Algorithme: de $\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}}$ à $\bar{Y}^{\pi}_{t_i}$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h\left(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r\right) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Générateur constant, (Z^{π}, U^{π}) donné par représentation de $\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}}$

$$\bar{Y}^{\pi}_{t_i} = \bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}} + \frac{1}{n} h\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}, \bar{Y}^{\pi}_{t_i}, \bar{Z}^{\pi}_{t_i}, \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}\right) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z^{\pi}_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U^{\pi}_r(e)\, \bar{\mu}(de, dr)$$

- Approximation dans $\mathcal{L}^2(\Omega \times [t_i, t_{i+1}])$ de Z^{π} et $\Gamma^{\pi} = \int_E U^{\pi}(e)\gamma(e)\lambda(de)$ par des v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables

$$\bar{Z}^{\pi}_{t_i} := n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z^{\pi}_r dr \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}} \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]$$

$$\bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i} := n\,\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma^{\pi}_s ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}} \int_E \gamma(e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]$$

- Conditionnant la première expression

$$\bar{Y}^{\pi}_{t_i} = \mathbb{E}\left[\bar{Y}^{\pi}_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] + \frac{1}{n}\, h\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}, \bar{Y}^{\pi}_{t_i}, \bar{Z}^{\pi}_{t_i}, \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}\right)$$

Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e)\bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e)\bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

- Approximation Progressive X^π de X
- Approximation Rétrograde $(\bar{Y}^\pi, \bar{Z}^\pi, \bar{\Gamma}^\pi)$ de (Y, Z, Γ)

$$\bar{Y}_1^\pi := g(X_1^\pi) \text{ et } \begin{cases} \bar{Z}_{t_i}^\pi &:= n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi &:= n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \int_E \gamma(e)\bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ \bar{Y}_{t_i}^\pi &:= \mathbb{E}\left[\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] + \frac{1}{n}\, h\left(t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi\right) \end{cases}$$

Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e)\bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e)\bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

- Approximation Progressive X^π de X
- Approximation Rétrograde $(\bar{Y}^\pi, \bar{Z}^\pi, \bar{\Gamma}^\pi)$ de (Y, Z, Γ)

$$\bar{Y}_1^\pi := g(X_1^\pi) \text{ et } \begin{cases} \bar{Z}_{t_i}^\pi &:= n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi &:= n\,\mathbb{E}\left[\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \int_E \gamma(e)\bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ \bar{Y}_{t_i}^\pi &:= \mathbb{E}\left[\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] + \frac{1}{n}\, h\left(t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi\right) \end{cases}$$

Quelle est l'erreur d'approximation ?

Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) \ , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

- Approximation Progressive X^π de X
- Approximation Rétrograde $(\bar{Y}^\pi, \bar{Z}^\pi, \bar{\Gamma}^\pi)$ de (Y, Z, Γ)

$$\bar{Y}_1^\pi := g(X_1^\pi) \text{ et } \begin{cases} \bar{Z}_{t_i}^\pi &:= n\, \mathbb{E}\left[\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi &:= n\, \mathbb{E}\left[\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \int_E \gamma(e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{Y}_{t_i}^\pi &:= \mathbb{E}\left[\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] + \frac{1}{n} h\left(t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi \right) \end{cases}$$

Quelle est l'erreur d'approximation ?

Statistique / Discrétisation

Convergence

Erreur d'approximation

$$\mathrm{Err_n} := \left(\sup_{t_i} \mathbb{E}\left[|Y_{t_i} - \bar{Y}^{\pi}_{t_i}|^2 \right] + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}^{\pi}_{t_i}|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Convergence

Erreur d'approximation

$$\mathrm{Err_n} := \left(\sup_{t_i} \mathbb{E}\left[|Y_{t_i} - \bar{Y}^{\pi}_{t_i}|^2 \right] + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}^{\pi}_{t_i}|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Représentation et régularité

- Y_t s'écrit $y(t, X_t)$ avec y lipschitz

Convergence

Erreur d'approximation

$$\mathrm{Err_n} := \left(\sup_{t_i} \mathbb{E}\left[|Y_{t_i} - \bar{Y}^{\pi}_{t_i}|^2 \right] + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}^{\pi}_{t_i}|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Représentation et régularité

- Y_t s'écrit $y(t, X_t)$ avec y lipschitz
- U partie saut de Y $\Rightarrow U_t(e) = y(t, X_{t-} + \beta(t, X_{t-}, e)) - y(t, X_{t-})$

Convergence

Erreur d'approximation

$$\mathrm{Err_n} := \left(\sup_{t_i} \mathbb{E}\left[|Y_{t_i} - \bar{Y}^{\pi}_{t_i}|^2 \right] + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}^{\pi}_{t_i}|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Représentation et régularité

- Y_t s'écrit $y(t, X_t)$ avec y lipschitz
- U partie saut de Y $\Rightarrow U_t(e) = y(t, X_{t-} + \beta(t, X_{t-}, e)) - y(t, X_{t-})$
- Z, dérivée de Malliavin de Y, solution d'une EDSR linéaire

Convergence

Erreur d'approximation

$$\mathrm{Err_n} := \left(\sup_{t_i} \mathbb{E}\left[|Y_{t_i} - \bar{Y}^{\pi}_{t_i}|^2 \right] + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}^{\pi}_{t_i}|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Représentation et régularité

- Y_t s'écrit $y(t, X_t)$ avec y lipschitz
- U partie saut de Y $\Rightarrow U_t(e) = y(t, X_{t-} + \beta(t, X_{t-}, e)) - y(t, X_{t-})$
- Z, dérivée de Malliavin de Y, solution d'une EDSR linéaire

Vitesse

- Coefficients Lipschitz $\Rightarrow \mathrm{Err_n} \leq C_\varepsilon n^{-1/2+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$

Convergence

Erreur d'approximation

$$\mathrm{Err_n} := \left(\sup_{t_i} \mathbb{E}\left[|Y_{t_i} - \bar{Y}^{\pi}_{t_i}|^2 \right] + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}^{\pi}_{t_i}|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}^{\pi}_{t_i}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Représentation et régularité

- Y_t s'écrit $y(t, X_t)$ avec y lipschitz
- U partie saut de Y $\Rightarrow U_t(e) = y(t, X_{t-} + \beta(t, X_{t-}, e)) - y(t, X_{t-})$
- Z, dérivée de Malliavin de Y, solution d'une EDSR linéaire

Vitesse

- Coefficients Lipschitz $\Rightarrow \mathrm{Err_n} \leq C_\varepsilon n^{-1/2+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$
- ∇X inversible ou coefficients C_b^1 $\Rightarrow \mathrm{Err_n} \leq C n^{-1/2}$

Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut $\tau \sim \mathcal{E}(c)$

Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut $\tau \sim \mathcal{E}(c)$ $\xrightarrow{\tau > T}$ $g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$

Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut $\tau \sim \mathcal{E}(c)$

$$\tau > T \Rightarrow g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$$

$$\tau < T \Rightarrow g_0(X_T) = g_1(X_T) \wedge 0.5$$

Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut $\tau \sim \mathcal{E}(c)$

$$\tau > T \Rightarrow g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$$

$$\tau < T \Rightarrow g_0(X_T) = g_1(X_T) \wedge 0.5$$

- Prix:

$$u_0(t,x) := \mathbb{E}\left[g_0(X_T) \ / X_t = x\right]$$

$$u_1(0,x) := \mathbb{E}\left[g_1(X_T)e^{-cT} + \int_0^T u_0(s,X_s)ce^{-cs}ds \ / X_0 = x\right]$$

Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut $\tau \sim \mathcal{E}(c)$

$$\tau > T \Rightarrow g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$$

$$\tau < T \Rightarrow g_0(X_T) = g_1(X_T) \wedge 0.5$$

- Prix:

$$u_0(t,x) := \mathbb{E}\left[g_0(X_T) \ / X_t = x\right]$$

$$u_1(0,x) := \mathbb{E}\left[g_1(X_T)e^{-cT} + \int_0^T u_0(s,X_s)ce^{-cs}ds \ / X_0 = x\right]$$

- EDP:

$$\mathcal{L}\, u_0 = 0\,, \quad u_0(T,\cdot) = g_0$$

$$\mathcal{L}\, u_1 + c(u_0 - u_1) = 0\,, \quad u_1(T,\cdot) = g_1$$

Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut $\tau \sim \mathcal{E}(c)$

$$\tau > T \Rightarrow g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$$

$$\tau < T \Rightarrow g_0(X_T) = g_1(X_T) \wedge 0.5$$

- Prix:

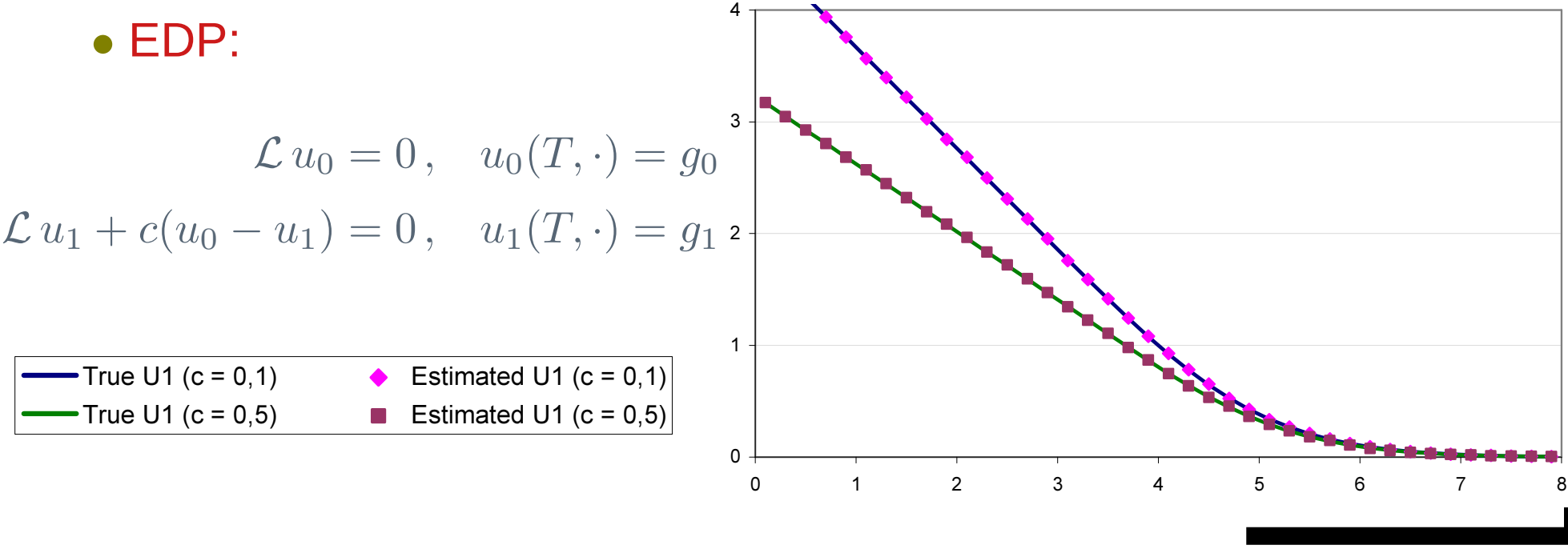
$$u_0(t,x) := \mathbb{E}\left[g_0(X_T) \ / X_t = x\right]$$

$$u_1(0,x) := \mathbb{E}\left[g_1(X_T)e^{-cT} + \int_0^T u_0(s,X_s)ce^{-cs}ds \ / X_0 = x\right]$$

- EDP:

$$\mathcal{L}\,u_0 = 0\,, \quad u_0(T,\cdot) = g_0$$

$$\mathcal{L}\,u_1 + c(u_0 - u_1) = 0\,, \quad u_1(T,\cdot) = g_1$$



Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini
  - Caractérisation par EDP en horizon fini

Problème

Un gestionnaire de fond dispose d'un capital initial x et peut

- investir θ dans un actif risqué: $dS_t = \sigma S_t(dW_t + \lambda dt)$
- consommer C: verser des dividendes aux investisseurs

Problème

Un gestionnaire de fond dispose d'un capital initial x et peut

- investir θ dans un actif risqué: $dS_t = \sigma S_t(dW_t + \lambda dt)$
- consommer C: verser des dividendes aux investisseurs

Richesse: $$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$$

Problème

Un gestionnaire de fond dispose d'un capital initial x et peut

- investir θ dans un actif risqué: $dS_t = \sigma S_t(dW_t + \lambda dt)$
- consommer C: verser des dividendes aux investisseurs

Richesse: $$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$$

Pour rassurer ses investisseurs, il s'impose une

Contrainte drawdown : $$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$$

Problème

Un gestionnaire de fond dispose d'un capital initial x et peut

- investir θ dans un actif risqué: $dS_t = \sigma S_t(dW_t + \lambda dt)$
- consommer C: verser des dividendes aux investisseurs

Richesse: $$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$$

Pour rassurer ses investisseurs, il s'impose une

Contrainte drawdown : $$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$$

Quelle est la stratégie (C, θ) optimale ?

Littérature

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$

Littérature

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$

- Taux de croissance à long terme [GZ93] [CK95]

$$u(x) = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_D} \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left[\left(X_t^{x,C,\theta}\right)^p\right]$$

Littérature

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$

- Taux de croissance à long terme [GZ93] [CK95]

$$u(x) = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_D} \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left[\left(X_t^{x,C,\theta}\right)^p\right]$$

$\Rightarrow$ Investissement $\theta_t = \pi\left(X_t^{x,C,\theta} - \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*\right)$

Littérature

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$

- Taux de croissance à long terme [GZ93] [CK95]

$$u(x) = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_D} \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}\left[\left(X_t^{x,C,\theta}\right)^p\right]$$

$\Rightarrow$ Investissement $\theta_t = \pi\left(X_t^{x,C,\theta} - \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*\right)$

- Utilité puissance intertemporelle [R06]

$$u(x) = \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} {C_t}^p dt\right]$$

Modélisation

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$

- Utilité générale intertemporelle

$$u(x) := \sup_{(C,\theta)\in\mathcal{A}_D} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} U(C_t) dt\right]$$

Modélisation

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$

- Utilité générale intertemporelle

$$u(x) := \sup_{(C,\theta)\in\mathcal{A}_D} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} U(C_t) dt\right]$$

$\mathcal{A}_D$ contient l'ensemble des stratégies de la forme

$$[\theta_t, C_t] = [\pi_t, c_t]\left(X_t^{x,C,\theta} - \alpha\left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*\right)$$

Modélisation

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$

- Utilité générale intertemporelle

$$u(x) := \sup_{(C,\theta)\in\mathcal{A}_D} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} U(C_t) dt\right]$$

$\mathcal{A}_D$ contient l'ensemble des stratégies de la forme

$$[\theta_t, C_t] = [\pi_t, c_t]\left(X_t^{x,C,\theta} - \alpha\left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*\right)$$

Clef: $M_t := \left[X_t^{x,C,\theta} - \alpha\left(X^{x,C,\theta}\right)^*\right]\left[\left(X^{x,C,\theta}\right)^*\right]^{\alpha/(1-\alpha)}$

Modélisation

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha\, Z_t^{x,z,C,\theta}$

avec $Z_t^{x,z,C,\theta} := z \vee \left(X_t^{x,C,\theta}\right)^*$

- Utilité générale intertemporelle

$$u(x,z) := \sup_{(C,\theta)\in\mathcal{A}_D} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\beta_t} U(C_t) dt\right]$$

$\mathcal{A}_D$ contient l'ensemble des stratégies de la forme

$$[\theta_t, C_t] = [\pi_t, c_t]\left(X_t^{x,C,\theta} - \alpha Z_t^{x,z,C,\theta}\right)$$

Clef: $M_t := \left[X_t^{x,C,\theta} - \alpha Z_t^{x,z,C,\theta}\right]\left[Z_t^{x,z,C,\theta}\right]^{\alpha/(1-\alpha)}$

Propriétés

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \to \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Propriétés

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \to \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Propriétés de la fonction valeur

$u(.,z)$ est concave et croissante

Propriétés

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \to \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Propriétés de la fonction valeur

$u(.,z)$ est concave et croissante $u(x,.)$ est décroissante

Propriétés

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \to \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Propriétés de la fonction valeur

$u(.,z)$ est concave et croissante $\qquad$ $u(x,.)$ est décroissante

$u(x,z) \leq u_0(x,z)$

Propriétés

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Propriétés de la fonction valeur

$u(.,z)$ est concave et croissante $\qquad$ $u(x,.)$ est décroissante

$u(x,z) \leq u_0(x,z) \leq K(1+x^p)$

Propriétés

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Propriétés de la fonction valeur

$u(.,z)$ est concave et croissante $u(x,.)$ est décroissante

$u(x,z) \leq u_0(x,z) \leq K(1+x^p)$ $u(\alpha z, z) = 0$

Propriétés

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Propriétés de la fonction valeur

$u(.,z)$ est concave et croissante $u(x,.)$ est décroissante

$u(x,z) \leq u_0(x,z) \leq K(1+x^p)$ $u(\alpha z, z) = 0$ $u_z(z,z) = 0$

Propriétés

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Propriétés de la fonction valeur

$u(.,z)$ est concave et croissante $\qquad$ $u(x,.)$ est décroissante

$$u(x,z) \le u_0(x,z) \le K(1+x^p) \qquad u(\alpha z, z) = 0 \qquad u_z(z,z) = 0$$

Programmation Dynamique

$$\beta u - \sup_{C\ge 0, \theta\in\mathbb{R}} \left[U(C) + (\theta\sigma\lambda - C)u_x + \frac{\theta^2\sigma^2}{2} u_{xx} \right] = 0\,, \quad \alpha z < x < z$$

Propriétés

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Propriétés de la fonction valeur

$u(.,z)$ est concave et croissante $\qquad$ $u(x,.)$ est décroissante

$$u(x,z) \le u_0(x,z) \le K(1+x^p) \qquad u(\alpha z, z) = 0 \qquad u_z(z,z) = 0$$

Programmation Dynamique

$$\beta u - \sup_{C\ge 0, \theta\in\mathbb{R}} \left[U(C) + (\theta\sigma\lambda - C)u_x + \frac{\theta^2\sigma^2}{2} u_{xx} \right] = 0\,, \quad \alpha z < x < z$$

$$\begin{cases} C^* &= -V'(u_x) \\ \theta^* &= -\lambda u_x/\sigma u_{xx} \end{cases} \Rightarrow \beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2}\frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0\,, \quad \alpha z < x < z$$

Dualité

$v(y,z) := \sup_{x \geq 0} [u(x,z) - xy]$

EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z,z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

Dualité

$v(y,z) := \sup_{x \geq 0}[u(x,z) - xy]$

EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2}\frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z,z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$\varphi(z) := u_x(z,z)$ et $\varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$

Dualité

$v(y,z) := \sup_{x \geq 0}[u(x,z) - xy]$

EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2}\frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z,z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$

$\varphi(z) := u_x(z,z)$ et $\varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$

Dualité

$v(y,z) := \sup_{x \geq 0}[u(x,z) - xy]$

EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2}\frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z,z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$

$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

$\varphi(z) := u_x(z,z)$ et $\varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$

Dualité

$v(y,z) := \sup_{x \geq 0}[u(x,z) - xy]$

EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2}\frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z,z) = 0$$
$$u(\alpha z, z) = 0$$

EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$
$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

$\varphi(z) := u_x(z,z)$ et $\varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$

- $\varphi_\alpha = \infty$ mène à v_z comme fonction de φ

Dualité

$v(y,z) := \sup_{x \geq 0}[u(x,z) - xy]$

EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2}\frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z,z) = 0$$
$$u(\alpha z, z) = 0$$

EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$
$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

$\varphi(z) := u_x(z,z)$ et $\varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$

- $\varphi_\alpha = \infty$ mène à v_z comme fonction de φ
- On déduit v_y en fonction de φ

Dualité

$v(y,z) := \sup_{x \geq 0}[u(x,z) - xy]$

EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2}\frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z,z) = 0$$
$$u(\alpha z, z) = 0$$

EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$
$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

$\varphi(z) := u_x(z,z)$ et $\varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$

- $\varphi_\alpha = \infty$ mène à v_z comme fonction de φ
- On déduit v_y en fonction de φ
- φ déterminée implicitement par $v_y(\varphi(z), z) = -z$

Dualité

$v(y,z) := \sup_{x \geq 0}[u(x,z) - xy]$

EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2}\frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z,z) = 0$$
$$u(\alpha z, z) = 0$$

EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$
$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

$\varphi(z) := u_x(z,z)$ et $\varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$

- $\varphi_\alpha = \infty$ mène à v_z comme fonction de φ
- On déduit v_y en fonction de φ
- φ déterminée implicitement par $v_y(\varphi(z), z) = -z$
- u déterminée implicitement si $\gamma < (1-\alpha)(1+\gamma)$

Vérification

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \to \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Vérification

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Théorème de vérification

- $u \in C^0\left(\overline{\mathbf{D}}_\alpha\right) \cap C^{2,1}\left(\mathbf{D}_\alpha\right)$ avec $\mathbf{D}_\alpha := \{(x,z) : \alpha z < x < z\}$

Vérification

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Théorème de vérification

- $u \in C^0\left(\overline{\mathbf{D}}_\alpha\right) \cap C^{2,1}\left(\mathbf{D}_\alpha\right)$ avec $\mathbf{D}_\alpha := \{(x,z) : \alpha z < x < z\}$
- u est solution de l'EDP primale

Vérification

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Théorème de vérification

- $u \in C^0\left(\overline{\mathbf{D}}_\alpha\right) \cap C^{2,1}\left(\mathbf{D}_\alpha\right)$ avec $\mathbf{D}_\alpha := \{(x,z) : \alpha z < x < z\}$
- u est solution de l'EDP primale
- Sol. unique à l'EDS de la richesse pour la stratégie optimale

Vérification

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

Théorème de vérification

- $u \in C^0\left(\overline{\mathbf{D}}_\alpha\right) \cap C^{2,1}\left(\mathbf{D}_\alpha\right)$ avec $\mathbf{D}_\alpha := \{(x,z) : \alpha z < x < z\}$
- u est solution de l'EDP primale
- Sol. unique à l'EDS de la richesse pour la stratégie optimale
- $u(x,z) \leq K\ \left(1 + z^{\alpha p}(x-\alpha z)^{(1-\alpha)p}\right)$

Vérification

Hypothèses: U est C^2, croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1\,, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

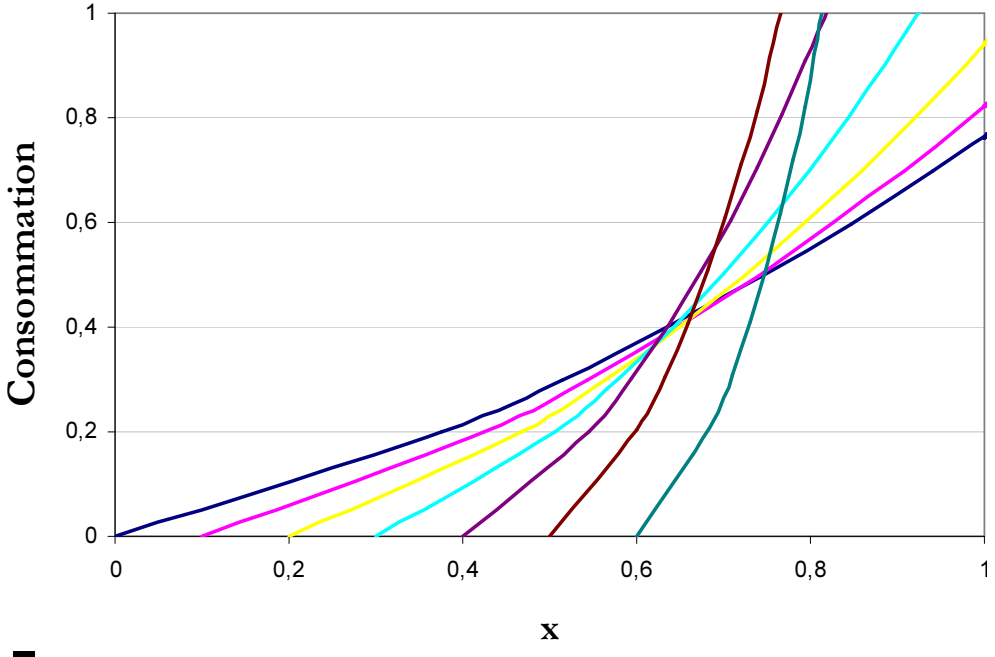
Théorème de vérification

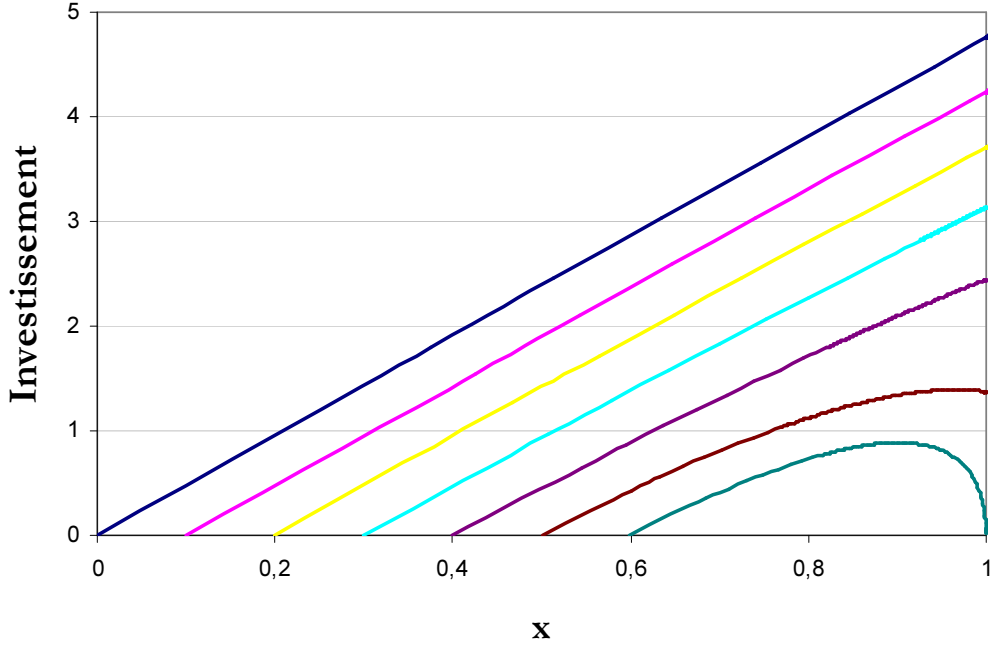
- $u \in C^0\left(\overline{\mathbf{D}}_\alpha\right) \cap C^{2,1}\left(\mathbf{D}_\alpha\right)$ avec $\mathbf{D}_\alpha := \{(x,z) : \alpha z < x < z\}$
- u est solution de l'EDP primale
- Sol. unique à l'EDS de la richesse pour la stratégie optimale
- $u(x,z) \leq K\ \left(1 + z^{\alpha p}(x-\alpha z)^{(1-\alpha)p}\right)$

Martingale d'Azema-Yor, contrainte non-linéaire ? [EM06]

Stratégie optimale

$$U(x) = x^p + x^q$$





Stratégie optimale en fonction de x pour différents α.

Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini
  - Caractérisation par EDP en horizon fini

Drawdown en horizon fini

Richesse: $$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$$

Contrainte drawdown : $$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$$

Drawdown en horizon fini

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left(X^{x,C,\theta}\right)_t^*$

Maximisation avec un horizon fixé T

$$u(x) := \sup_{(C,\theta)\in\mathcal{A}_D} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\beta_s} U(C_s) ds\right]$$

Drawdown en horizon fini

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha\, Z_t^{x,z,C,\theta}$

avec $Z_t^{x,z,C,\theta} := z \vee \left(X_t^{x,C,\theta}\right)^*$

Maximisation avec un horizon fixé T

$$u(x,z) := \sup_{(C,\theta)\in\mathcal{A}_D} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\beta_s} U(C_s) ds\right]$$

Drawdown en horizon fini

Richesse: $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma\theta_r \left(dW_r + \lambda dr\right)$

Contrainte drawdown : $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha\, Z_t^{x,z,C,\theta}$

avec $Z_t^{x,z,C,\theta} := z \vee \left(X_t^{x,C,\theta}\right)^*$

Maximisation avec un horizon fixé T

$$u(x,z) := \sup_{(C,\theta)\in\mathcal{A}_D} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\beta_s} U(C_s) ds\right]$$

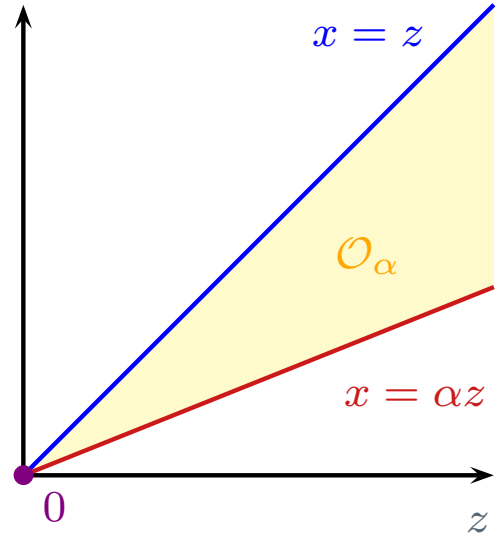
Dépendance temporelle de la fonction valeur

$$u(t,x,z) := \sup_{(C,\theta)\in\mathcal{A}_D} \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\beta_s} U(C_s) ds\right]$$

Domaine et propriétés

Domaine de définition $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ de u se décompose en

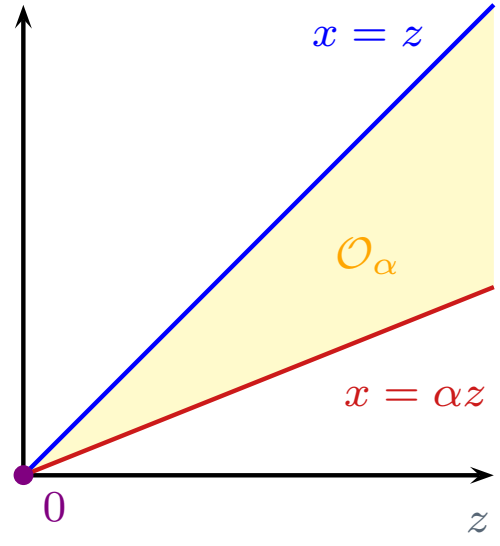
$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_\alpha &:= [0,T) \times \{(x,z) \ : \ 0 < \alpha z < x < z\}\,, \\
\mathcal{B}_0 &:= [0,T] \times \{(0,0)\}\,, \\
\mathcal{B}_\alpha &:= [0,T] \times \{(\alpha z, z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_1 &:= [0,T) \times \{(z,z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_T &:= \{T\} \times \{(x,z) \ : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}\,.
\end{aligned}
$$



Domaine et propriétés

Domaine de définition $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ de u se décompose en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_\alpha &:= [0,T) \times \{(x,z) \ : \ 0 < \alpha z < x < z\}\,, \\
\mathcal{B}_0 &:= [0,T] \times \{(0,0)\}\,, \\
\mathcal{B}_\alpha &:= [0,T] \times \{(\alpha z, z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_1 &:= [0,T) \times \{(z,z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_T &:= \{T\} \times \{(x,z) \ : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}\,.
\end{aligned}
$$



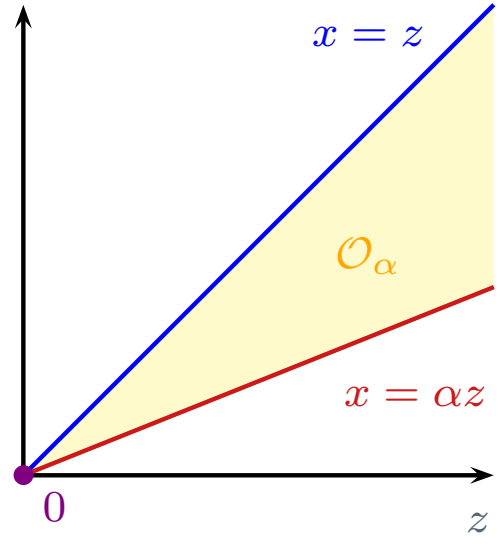
Propriétés de la fonction valeur

$$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow)$$

Domaine et propriétés

Domaine de définition $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ de u se décompose en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_\alpha &:= [0,T) \times \{(x,z) \ : \ 0 < \alpha z < x < z\}\,, \\
\mathcal{B}_0 &:= [0,T] \times \{(0,0)\}\,, \\
\mathcal{B}_\alpha &:= [0,T] \times \{(\alpha z, z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_1 &:= [0,T) \times \{(z,z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_T &:= \{T\} \times \{(x,z) \ : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}\,.
\end{aligned}
$$



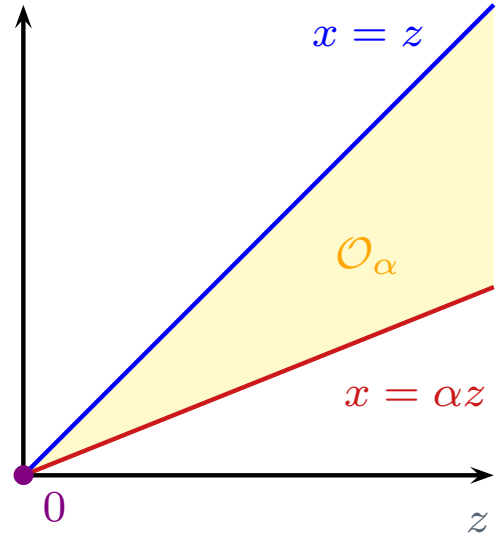
Propriétés de la fonction valeur

$$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow) \qquad 0 \leq u(t,x,z) \leq K(1+x^p)$$

Domaine et propriétés

Domaine de définition $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ de u se décompose en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_\alpha &:= [0,T) \times \{(x,z) \ : \ 0 < \alpha z < x < z\}\,, \\
\mathcal{B}_0 &:= [0,T] \times \{(0,0)\}\,, \\
\mathcal{B}_\alpha &:= [0,T] \times \{(\alpha z, z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_1 &:= [0,T) \times \{(z,z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_T &:= \{T\} \times \{(x,z) \ : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}\,.
\end{aligned}
$$



Propriétés de la fonction valeur

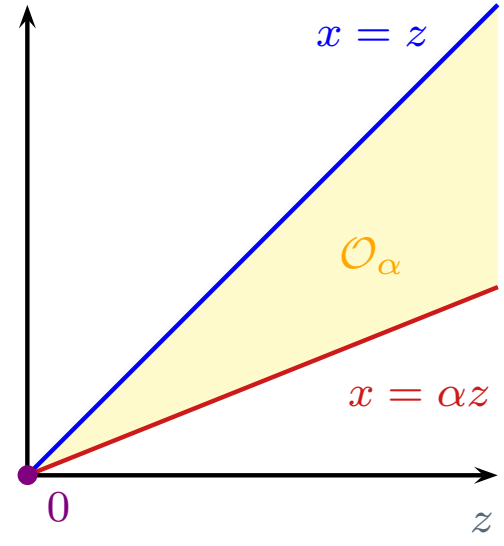
$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow)$ $\qquad$ $0 \leq u(t,x,z) \leq K(1+x^p)$

$u = 0$ sur $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha$

Domaine et propriétés

Domaine de définition $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ de u se décompose en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_\alpha &:= [0,T) \times \{(x,z) \ : \ 0 < \alpha z < x < z\}\,, \\
\mathcal{B}_0 &:= [0,T] \times \{(0,0)\}\,, \\
\mathcal{B}_\alpha &:= [0,T] \times \{(\alpha z, z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_1 &:= [0,T) \times \{(z,z) \ : z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_T &:= \{T\} \times \{(x,z) \ : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}\,.
\end{aligned}
$$



Propriétés de la fonction valeur

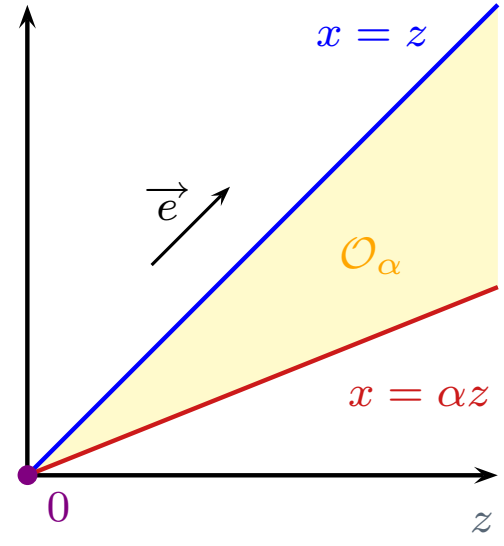
$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow)$ $\qquad$ $0 \leq u(t,x,z) \leq K(1+x^p)$

$u = 0$ sur $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha$ $\qquad$ $u_z = 0$ sur $\mathcal{B}_1$

Domaine et propriétés

Domaine de définition $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ de u se décompose en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_\alpha &:= [0,T) \times \{(x,z) \,:\, 0 < \alpha z < x < z\}\,, \\
\mathcal{B}_0 &:= [0,T] \times \{(0,0)\}\,, \\
\mathcal{B}_\alpha &:= [0,T] \times \{(\alpha z, z) \,:\, z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_1 &:= [0,T) \times \{(z,z) \,:\, z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_T &:= \{T\} \times \{(x,z) \,:\, 0 < \alpha z \le x \le z\}\,.
\end{aligned}
$$



Propriétés de la fonction valeur

$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow)$ $\qquad$ $0 \le u(t,x,z) \le K(1+x^p)$

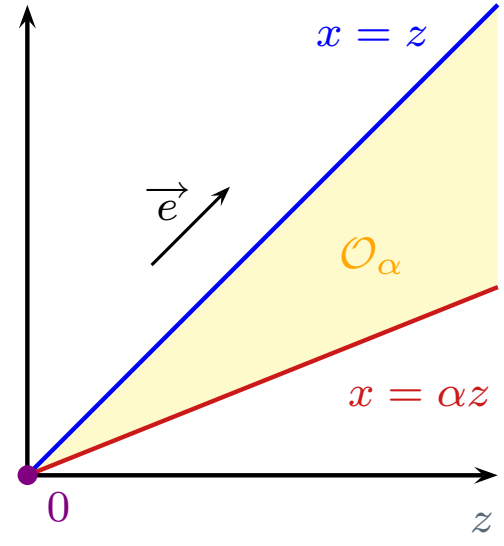
$u = 0$ sur $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha$ $\qquad$ $u_z = 0$ sur $\mathcal{B}_1$

$h \mapsto u[y + h\overrightarrow{e}]$ est concave sur $\mathbb{R}_+$ $\qquad$ avec $\overrightarrow{e} := (0,1,1)$

Domaine et propriétés

Domaine de définition $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ de u se décompose en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_\alpha &:= [0,T) \times \{(x,z) \,:\, 0 < \alpha z < x < z\}\,, \\
\mathcal{B}_0 &:= [0,T] \times \{(0,0)\}\,, \\
\mathcal{B}_\alpha &:= [0,T] \times \{(\alpha z, z) \,:\, z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_1 &:= [0,T) \times \{(z,z) \,:\, z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_T &:= \{T\} \times \{(x,z) \,:\, 0 < \alpha z \leq x \leq z\}\,.
\end{aligned}
$$



Propriétés de la fonction valeur

$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow)$ $\qquad$ $0 \leq u(t,x,z) \leq K(1+x^p)$

$u = 0$ sur $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha$ $\qquad$ $u_z = 0$ sur $\mathcal{B}_1$

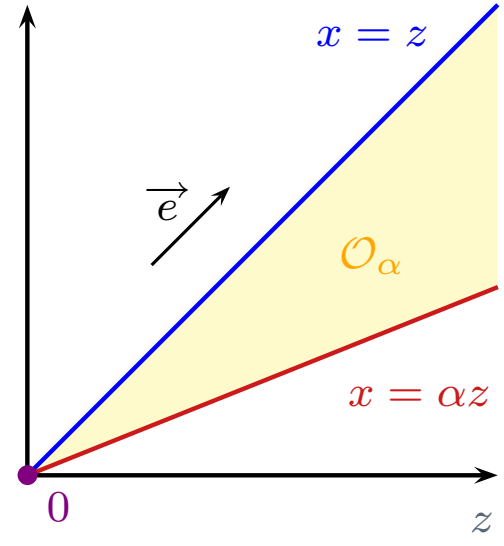
$h \mapsto u[y + h\overrightarrow{e}]$ est concave sur $\mathbb{R}_+$ $\qquad$ avec $\overrightarrow{e} := (0,1,1)$

$\Rightarrow$ u est C^0 à droite dans la direction $\overrightarrow{e}$ sur $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_1$

Domaine et propriétés

Domaine de définition $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ de u se décompose en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_\alpha &:= [0,T) \times \{(x,z) \,:\, 0 < \alpha z < x < z\}\,, \\
\mathcal{B}_0 &:= [0,T] \times \{(0,0)\}\,, \\
\mathcal{B}_\alpha &:= [0,T] \times \{(\alpha z, z) \,:\, z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_1 &:= [0,T) \times \{(z,z) \,:\, z > 0\}\,, \\
\mathcal{B}_T &:= \{T\} \times \{(x,z) \,:\, 0 < \alpha z \le x \le z\}\,.
\end{aligned}
$$



Propriétés de la fonction valeur

$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow)$ $\qquad$ $0 \le u(t,x,z) \le K(1+x^p)$

$u = 0$ sur $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha$ $\qquad$ $u_z = 0$ sur $\mathcal{B}_1$

$h \mapsto u[y + h\overrightarrow{e}]$ est concave sur $\mathbb{R}_+$ $\qquad$ avec $\overrightarrow{e} := (0,1,1)$

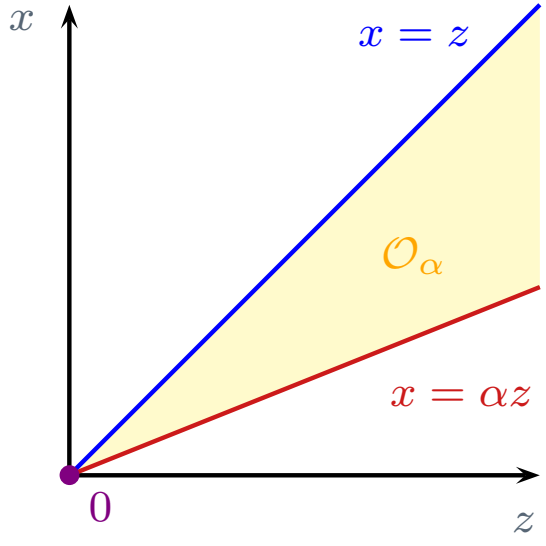
$\Rightarrow$ u est C^0 à droite dans la direction $\overrightarrow{e}$ sur $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_1$

$0 \le u(t,x,z) \le u_\infty(x,z)$ $\Rightarrow$ vrai sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$

Solution de viscosité

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$

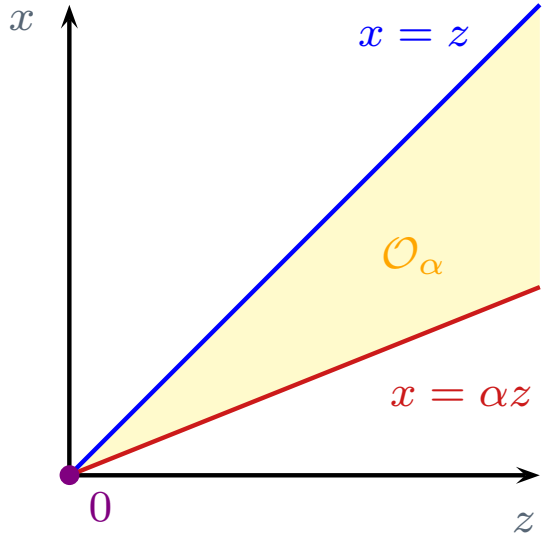


Solution de viscosité

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$

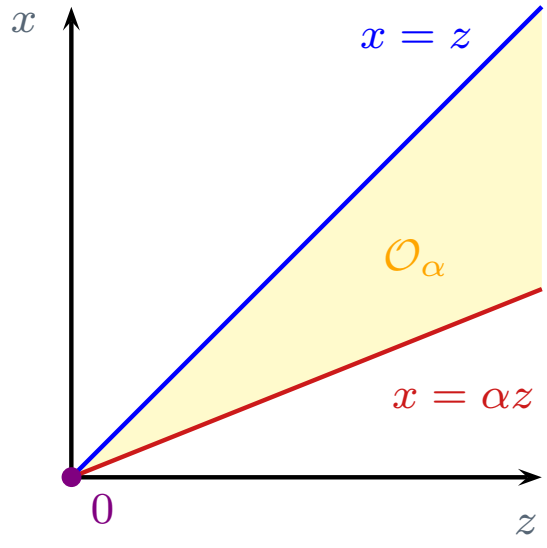
u est solution de viscosité contrainte de (E)



Solution de viscosité

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



u est solution de viscosité contrainte de (E), i.e.

sur-solution

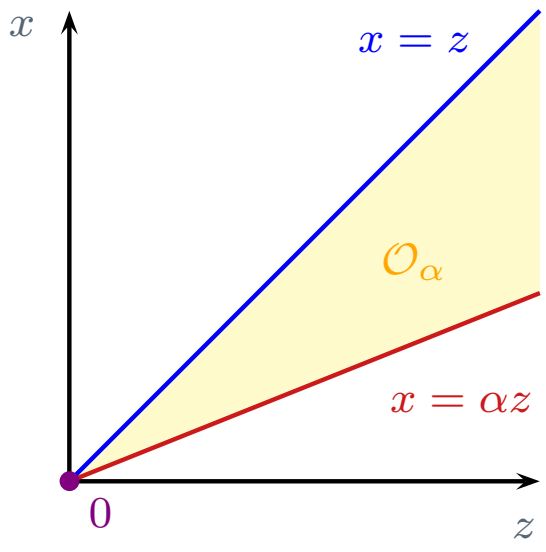
- $u_* \geq 0$ sur $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0$,
- $\forall\, y_0 \in \overline{\mathcal{O}}_\alpha$, $\varphi \in C^{1,2,1}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)$ tq $0 = (u_* - \varphi)(y_0) = \inf_{\overline{\mathcal{O}}_\alpha}(u_* - \varphi)$, on a

$$-\mathcal{L}\varphi(y_0) \geq 0 \text{ si } y_0 \in \mathcal{O}_\alpha \quad \text{et} \quad -\varphi_z(y_0) \geq 0 \text{ si } y_0 \in \mathcal{B}_1 .$$

Solution de viscosité

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



u est solution de viscosité contrainte de (E), i.e.

sur-solution

- $u_* \geq 0$ sur $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0$,
- $\forall\, y_0 \in \overline{\mathcal{O}}_\alpha$, $\varphi \in C^{1,2,1}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)$ tq $0 = (u_* - \varphi)(y_0) = \inf_{\overline{\mathcal{O}}_\alpha}(u_* - \varphi)$, on a

$$-\mathcal{L}\varphi(y_0) \geq 0 \text{ si } y_0 \in \mathcal{O}_\alpha \quad \text{et} \quad -\varphi_z(y_0) \geq 0 \text{ si } y_0 \in \mathcal{B}_1 .$$

sous-solution

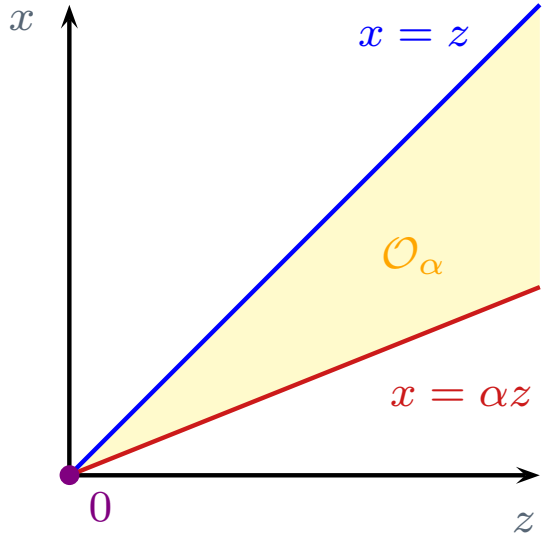
- $u^* \leq 0$ sur $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0$,
- $\forall\, y_0 \in \overline{\mathcal{O}}_\alpha$, $\varphi \in C^{1,2,1}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)$ tq $0 = (u^* - \varphi)(y_0) = \sup_{\overline{\mathcal{O}}_\alpha}(u^* - \varphi)$, on a

$$-\mathcal{L}\varphi(y_0) \leq 0 \text{ si } y_0 \in \mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_\alpha \text{ et } \min\{-\mathcal{L}\varphi, -\varphi_z\}(y_0) \leq 0 \text{ si } y_0 \in \mathcal{B}_1$$

Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$

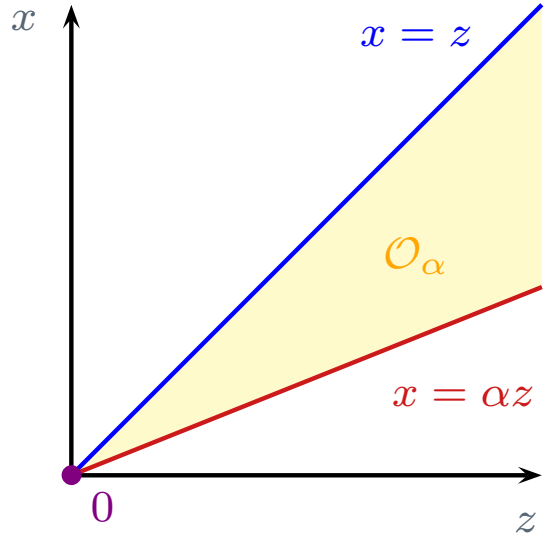


Théorème de comparaison

Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



Théorème de comparaison [Z94]

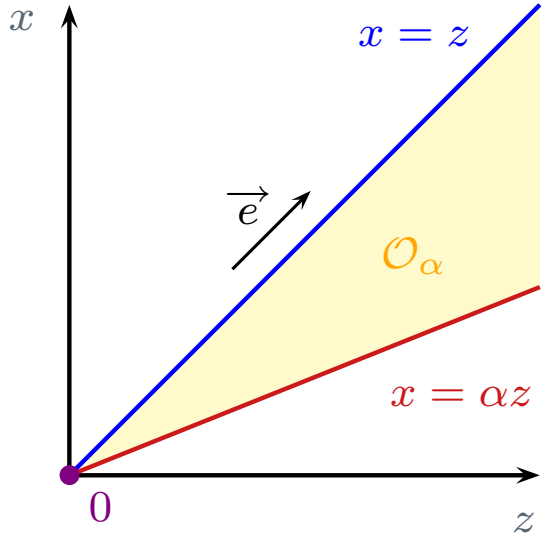
Soient w sous-solution s.c.s. et v sur-solution s.c.i. de (E) tq

- $([w]^+ + [v]^-)(t,x,z) \leq K(1+x^p)$ sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$

Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



Théorème de comparaison [Z94]

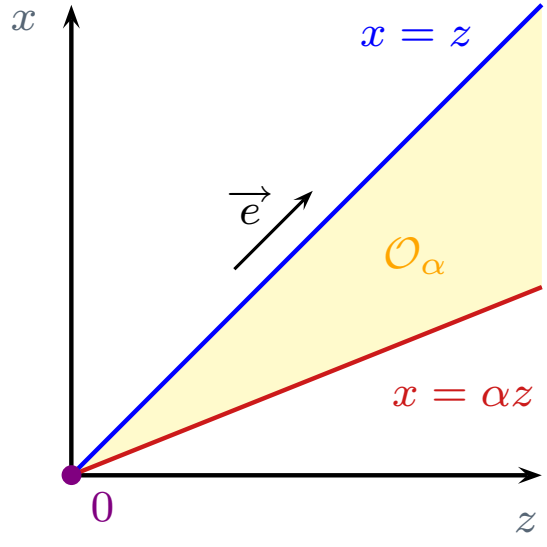
Soient w sous-solution s.c.s. et v sur-solution s.c.i. de (E) tq

- $([w]^+ + [v]^-)(t,x,z) \leq K(1+x^p)$ sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$
- v est C^0 à droite dans la direction $\overrightarrow{e}$ sur $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$

Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



Théorème de comparaison [Z94]

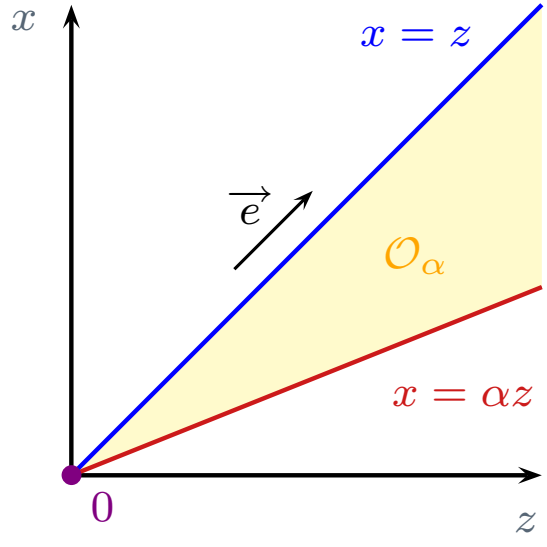
Soient w sous-solution s.c.s. et v sur-solution s.c.i. de (E) tq

- $([w]^+ + [v]^-)(t,x,z) \leq K(1+x^p)$ sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$
- v est C^0 à droite dans la direction $\overrightarrow{e}$ sur $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$
- $w \leq v$ sur $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_T$

Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



Théorème de comparaison [Z94]

Soient w sous-solution s.c.s. et v sur-solution s.c.i. de (E) tq

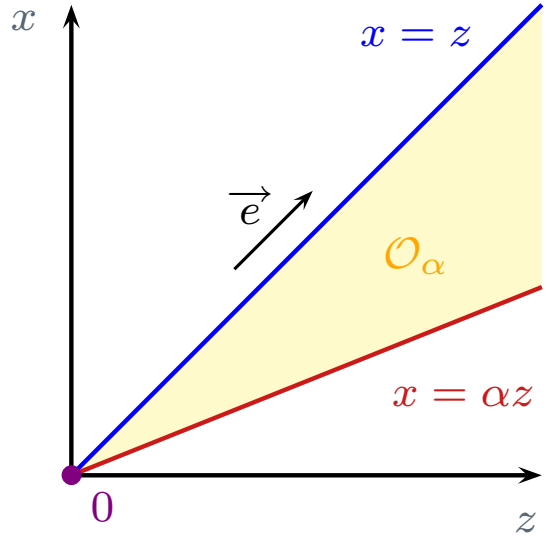
- $([w]^+ + [v]^-)(t,x,z) \leq K(1+x^p)$ sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$
- v est C^0 à droite dans la direction $\overrightarrow{e}$ sur $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$
- $w \leq v$ sur $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_T$

Alors $w \leq v$ sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$.

Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



Théorème de comparaison [Z94]

Soient w sous-solution s.c.s. et v sur-solution s.c.i. de (E) tq

- $([w]^+ + [v]^-)(t,x,z) \leq K(1+x^p)$ sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$
- v est C^0 à droite dans la direction $\overrightarrow{e}$ sur $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$
- $w \leq v$ sur $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_T$

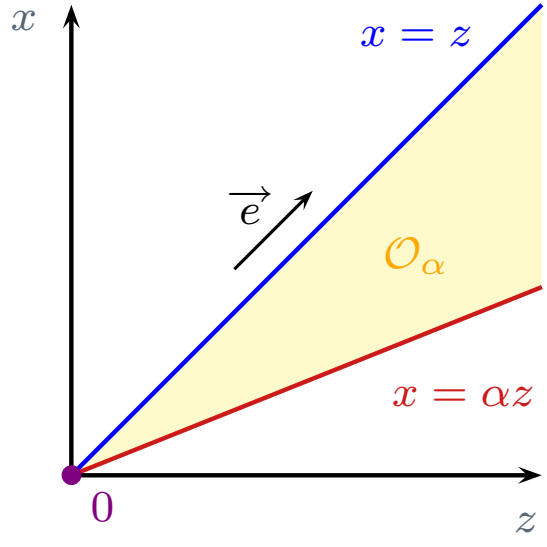
Alors $w \leq v$ sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$.

$\Rightarrow u$ caractérisée comme unique solution de viscosité

Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E)\begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



Théorème de comparaison [Z94]

Soient w sous-solution s.c.s. et v sur-solution s.c.i. de (E) tq

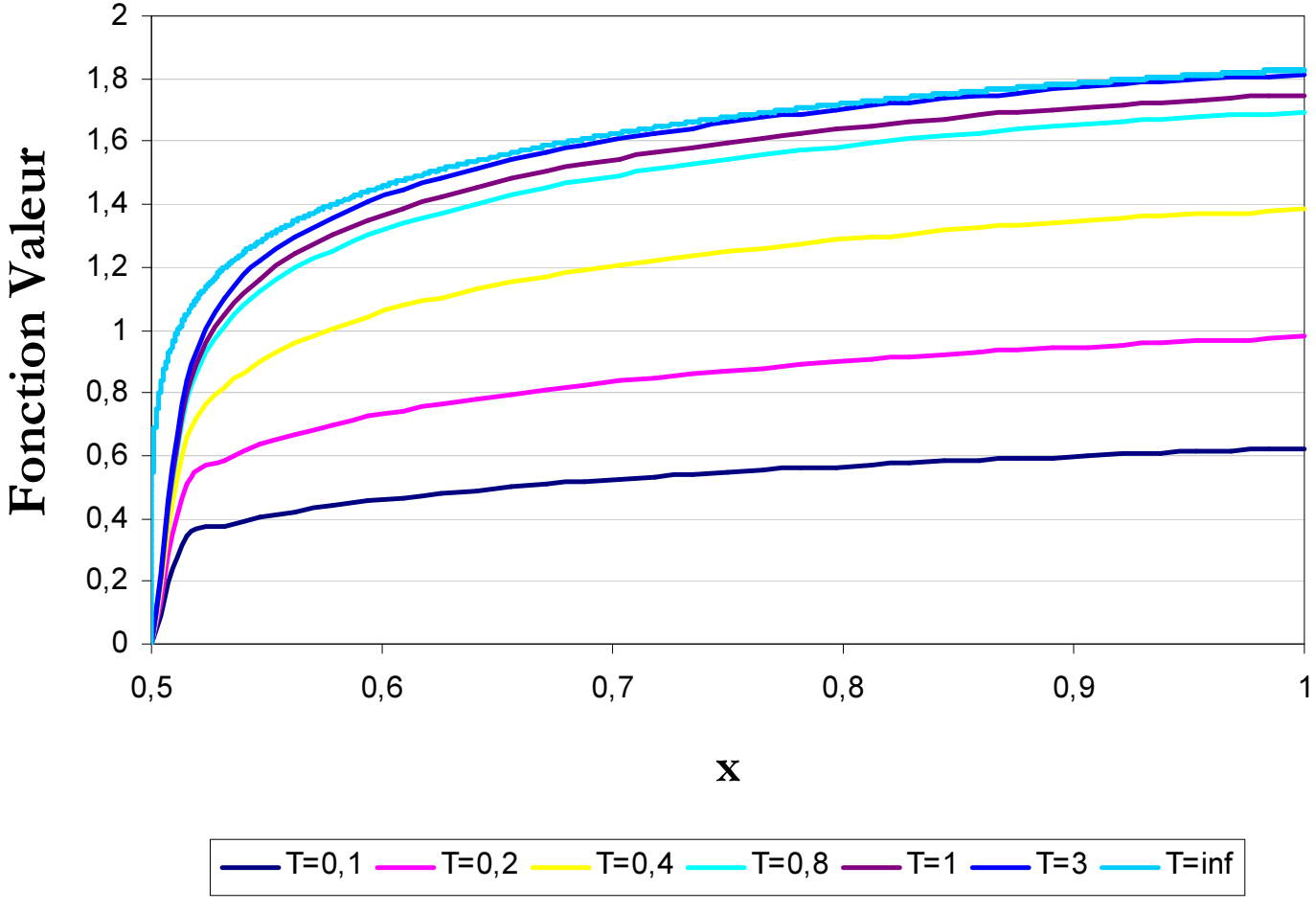
- $([w]^+ + [v]^-)(t,x,z) \leq K(1+x^p)$ sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$
- v est C^0 à droite dans la direction $\overrightarrow{e}$ sur $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$
- $w \leq v$ sur $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_T$

Alors $w \leq v$ sur $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$.

$\Rightarrow$ u caractérisée comme unique solution de viscosité

$\Rightarrow$ Approximation numérique [BS91] [BDR94]

Fonction valeur $u(x,1)$



Fonction valeur $u(x,1)$ en fonct. de x pour différents horizons T

Merci !

Merci !

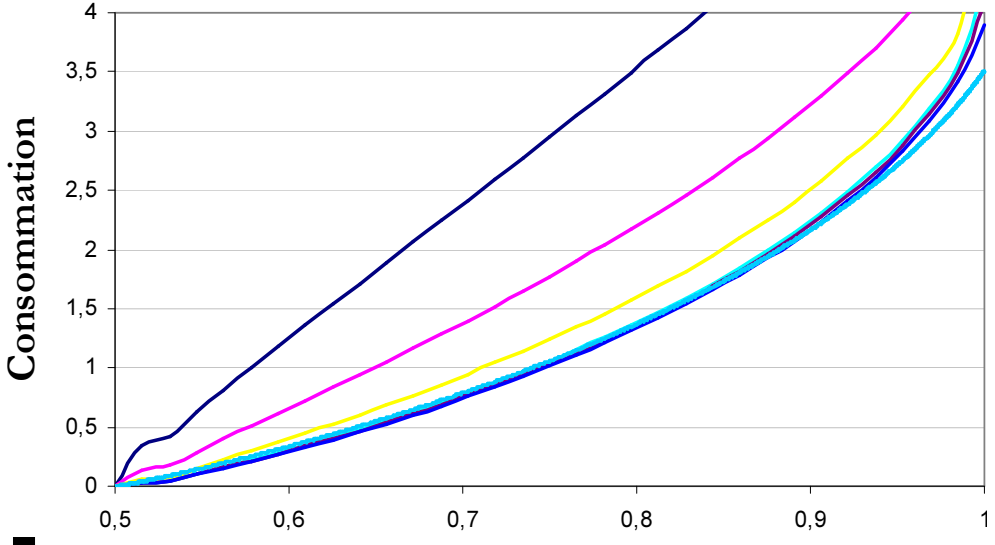
Merci !

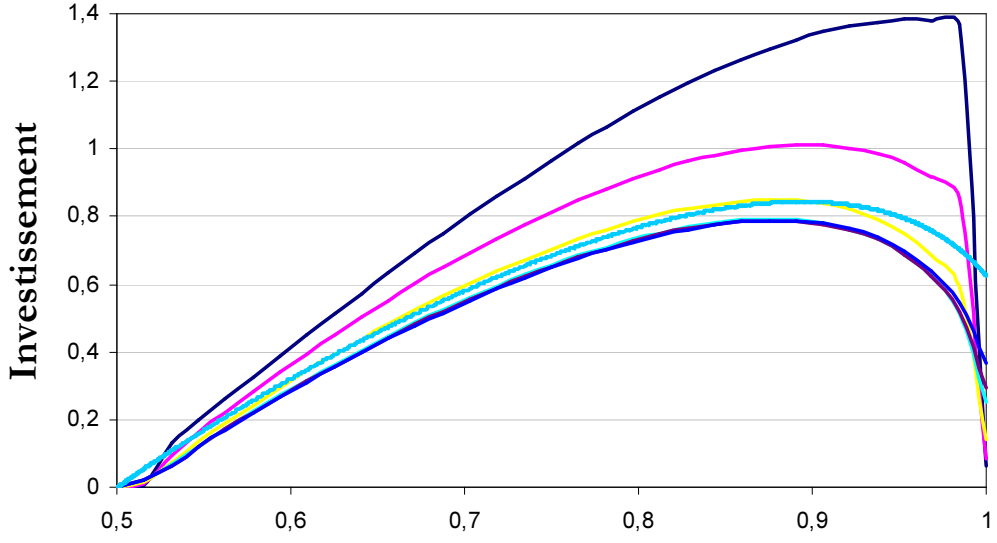
Merci !

Merci !

Merci !

Stratégie optimale





T=0,1 T=0,2 T=0,4 T=0,8 T=1 T=3 T=inf

Stratégie optimale en fonction de x pour différents horizons T.

Système couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, y^0, \sigma^0 y_x^0) = 0\,, \quad y^0(1,\cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, y^1, \sigma^1 y_x^1) = 0\,, \quad y^1(1,\cdot) = g^1 \end{cases}$$

Système couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0\,, \quad y^0(1,\cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0\,, \quad y^1(1,\cdot) = g^1 \end{cases}$$

Système couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0\,, \quad y^0(1,\cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0\,, \quad y^1(1,\cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$, μ mes. de Poisson sur $E = \{1\}$ avec $\lambda : A \mapsto \lambda.\, card(A)$.

Système couplé d'EDP

$$\begin{cases} y^0_t + \mu^0 y^0_x + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y^0_{xx} + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y^0_x) = 0\,, \quad y^0(1,\cdot) = g^0 \\ y^1_t + \mu^1 y^1_x + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y^1_{xx} + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y^1_x) = 0\,, \quad y^1(1,\cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$, μ mes. de Poisson sur $E = \{1\}$ avec $\lambda : A \mapsto \lambda.\, card(A)$.
- Posons $\tilde{h}^0 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^0(t, x, (y, y+u), z) - \lambda u$

Système couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0\,, \quad y^0(1,\cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0\,, \quad y^1(1,\cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$, μ mes. de Poisson sur $E = \{1\}$ avec $\lambda : A \mapsto \lambda.\, card(A)$.
- Posons $\tilde{h}^0 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^0(t, x, (y, y+u), z) - \lambda u$

  et $\tilde{h}^1 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^1(t, x, (y+u, y), z) - \lambda u$

Système couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot,(y^0,y^1),\sigma^0 y_x^0) = 0\,, \quad y^0(1,\cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot,(y^0,y^1),\sigma^1 y_x^1) = 0\,, \quad y^1(1,\cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$, μ mes. de Poisson sur $E = \{1\}$ avec $\lambda : A \mapsto \lambda.\, card(A)$.
- Posons $\tilde{h}^0 : (t,x,y,z,u) \mapsto h^0(t,x,(y,y+u),z) - \lambda u$

  et $\tilde{h}^1 : (t,x,y,z,u) \mapsto h^1(t,x,(y+u,y),z) - \lambda u$

EDSPR

$J_t = \int_0^t \int_E e\, \mu(de,ds) \;\; [mod\ 2]$

Système couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot,(y^0,y^1),\sigma^0 y_x^0) = 0\,, \quad y^0(1,\cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot,(y^0,y^1),\sigma^1 y_x^1) = 0\,, \quad y^1(1,\cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$, μ mes. de Poisson sur $E = \{1\}$ avec $\lambda : A \mapsto \lambda.\, card(A)$.
- Posons $\tilde{h}^0 : (t,x,y,z,u) \mapsto h^0(t,x,(y,y+u),z) - \lambda u$

  et $\tilde{h}^1 : (t,x,y,z,u) \mapsto h^1(t,x,(y+u,y),z) - \lambda u$

EDSPR

$J_t = \int_0^t \int_E e\, \mu(de,ds) \;\; [mod\ 2]$

$X_t = \int_0^t \mu^{J_r}(r,X_r)dr + \int_0^t \sigma^{J_r}(r,X_r)dW_r\,,$

Système couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot,(y^0,y^1),\sigma^0 y_x^0) = 0\,, \quad y^0(1,\cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot,(y^0,y^1),\sigma^1 y_x^1) = 0\,, \quad y^1(1,\cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$, μ mes. de Poisson sur $E = \{1\}$ avec $\lambda : A \mapsto \lambda.\, card(A)$.
- Posons $\tilde{h}^0 : (t,x,y,z,u) \mapsto h^0(t,x,(y,y+u),z) - \lambda u$

  et $\tilde{h}^1 : (t,x,y,z,u) \mapsto h^1(t,x,(y+u,y),z) - \lambda u$

EDSPR

$$J_t = \int_0^t \int_E e\,\mu(de,ds) \;\; [mod\ 2]$$

$$X_t = \int_0^t \mu^{J_r}(r,X_r)dr + \int_0^t \sigma^{J_r}(r,X_r)dW_r\,,$$

$$Y_t = g^{J_T}(X_T) + \int_t^T \tilde{h}^{J_r}(r,X_r,Y_r,Z_r,U_r(1))dr - \int_t^T Z_r dW_r - \int_t^T \int_E U_r(e)\bar{\mu}(de,dr)$$

Système couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot,(y^0,y^1),\sigma^0 y_x^0) = 0\,, \quad y^0(1,\cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot,(y^0,y^1),\sigma^1 y_x^1) = 0\,, \quad y^1(1,\cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$, μ mes. de Poisson sur $E = \{1\}$ avec $\lambda : A \mapsto \lambda.\, card(A)$.
- Posons $\tilde{h}^0 : (t,x,y,z,u) \mapsto h^0(t,x,(y,y+u),z) - \lambda u$

  et $\tilde{h}^1 : (t,x,y,z,u) \mapsto h^1(t,x,(y+u,y),z) - \lambda u$

EDSPR

$$\Rightarrow \quad Y_t = y^{J_t}(t,X_t)$$

$$J_t = \int_0^t \int_E e\,\mu(de,ds) \;\; [mod\ 2]$$

$$X_t = \int_0^t \mu^{J_r}(r,X_r)dr + \int_0^t \sigma^{J_r}(r,X_r)dW_r\,,$$

$$Y_t = g^{J_T}(X_T) + \int_t^T \tilde{h}^{J_r}(r,X_r,Y_r,Z_r,U_r(1))dr - \int_t^T Z_r dW_r - \int_t^T\int_E U_r(e)\bar{\mu}(de,dr)$$