Thèse présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité :

Mathématiques

par

Yann ROLLIN

Titre : Métriques kählériennes de volume fini, uniformisation des surfaces complexes réglées et équations de Seiberg-Witten

soutenue le 9 janvier 2001 devant le jury composé de :

M. Olivier BIQUARD, Directeur de thèse
M. Paolo DE BARTOLOMEIS,
M. Paul GAUDUCHON,
M. Joseph LE POTIER,
M. Pierre PANSU,
M. Claude VITERBO.

Rapporteurs : M. Claude LE BRUN et M. Pierre PANSU

Adresse de l'auteur : Yann ROLLIN
Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex, France.

e-mail : `rollin@math.polytechnique.fr`

Remerciements

C'est bien sûr en tout premier lieu mon directeur de thèse, Olivier Biquard, que je souhaite remercier : son savoir en géométrie et en analyse globale, la pertinence de ses conseils ou de ses critiques, mais aussi la confiance et le soutien constant qu'il m'a accordés pendant toute l'élaboration de cette thèse sont pour moi inestimables.

C'est un honneur pour moi que Claude Le Brun et Pierre Pansu aient accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et je les remercie chaleureusement pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je remercie également vivement Joseph Le Potier, Paul Gauduchon, Claude Viterbo pour avoir accepté de faire partie du jury ainsi que Paolo de Bartolomeis, qui est à l'origine avec Burns et Le Brun des idées développées dans cette thèse.

J'adresse des remerciements spéciaux à Paul Gauduchon pour m'avoir permis de bénéficier de ses enseignements et de sa grande disponibilité dès mon D.E.A. ; je lui en témoigne toute ma gratitude. Je lui dois également beaucoup pour m'avoir fait connaître le Centre de Mathématiques : ce laboratoire de L'Ecole Polytechnique procure un environnement humain et scientifique très stimulant pour la préparation d'une thèse. Je remercie également Michèle Lavallette, Claudine Harmide et l'ensemble des secrétaires du centre pour leur bonne humeur et leur redoutable efficacité.

Enfin, merci à Denis Auroux, Charles Favre, Fabrice Lembrez, Christophe Margerin et à tous ceux qui ont bien voulu écouter mes questions ou qui par leurs conversations d'ordre mathématique ou extra-mathématique m'ont aidé dans ce travail.

Table des matières

Introduction **3**

I Surfaces réglées modèles **13**
I.1 Exemple de surface réglée de volume fini 13
I.1.1 Surfaces de Riemann de volume fini 13
I.1.2 Surfaces réglées et représentations unitaires 15
I.1.3 Prolongement holomorphe et structure parabolique . . 16
I.2 Fibrés paraboliquement stables 18
I.2.1 Définition algébrique 18
I.2.2 Stabilité parabolique et représentations unitaires 20
I.2.3 Stabilité et existence métriques extrémales 21
I.3 Étude locale du modèle 22
I.3.1 Le modèle local du bout parabolique 23
I.3.2 Quelques notations 25
I.3.3 Compactification du bout parabolique rationnel 28

II Cohomologie L^2 et formes harmoniques **31**
II.1 Approximation par des métriques lisses 32
II.1.1 Approximation du modèle local $\hat{g}$ 32
II.1.2 Approximation d'une métrique asymptotique au modèle local 34
II.2 Cohomologie L^2 et lemme de Poincaré 36
II.2.1 Inégalité de Poincaré pour les fonctions 36
II.2.2 Lemme de Poincaré à l'infini 41
II.3 Convergence des formes harmoniques 49
II.3.1 Convergence des 1-formes harmoniques 49
II.3.2 Inégalité de Poincaré pour les 1-formes 52
II.3.3 Convergence des 2-formes harmoniques 59

III Équations de Seiberg-Witten **65**
III.1 Rappels 65
III.1.1 Structure $spin^c$ et opérateur de Dirac 65
III.1.2 Structures $spin^c$ de type presque complexe 68
III.1.3 Le cas kählérien 69
III.1.4 Invariant de Seiberg-Witten 71
III.2 Uniformisation 73
III.2.1 Équations de Seiberg-Witten sur M 74
III.2.2 Un lemme clef 74
III.2.3 Démonstration du théorème I.3.5 77
III.3 Convergence des solutions 81
III.3.1 Compactification du fibré K_M^{-1} 82
III.3.2 Équations perturbées pour les métriques g_j 85
III.3.3 Calcul de l'invariant de Seiberg-Witten 91
III.4 Le cas du bout parabolique irrationnel 94
III.4.1 Approximation d'une métrique asymptotique au modèle local dans le cas irrationnel 94
III.4.2 Cohomologie L^2 des métriques g^j 95
III.4.3 Convergence des 1-formes harmoniques 97
III.4.4 Inégalité de Poincaré pour les 1-formes 98
III.4.5 Convergence des 2-formes harmoniques 101
III.4.6 Convergence des solutions (cas irrationnel) 102
III.4.7 Calcul de l'invariant 103

Introduction

Peut-on trouver une métrique de Kähler «canonique» sur une variété complexe compacte X ? Supposons que X soit munie d'une métrique kählérienne g^{K} dont la classe de Kähler vérifie $c_1(X) = \frac{\lambda}{2\pi}[\omega]$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après les réponses aux conjectures de Calabi apportées par Aubin [A] et Yau [Y] dans le cas où $c_1(X) \leq 0$ (c'est à dire $\lambda \leq 0$), il existe une unique métrique kählérienne g vérifiant $[\omega^g] = [\omega]$ et telle que $ric^g = \lambda\omega^g$. Les métriques vérifiant cette dernière condition s'appellent des métriques de *Kähler-Einstein*.

Dans le cas où $c_1(X) > 0$, le problème est plus compliqué et l'existence de métrique de Kähler-Einstein n'est plus toujours assurée, comme le montre par exemple l'obstruction liée à l'invariant de Calabi-Futaki dans [Fu]. On a tout de même le résultat suivant, démontré par Tian dans le cas des surfaces complexes (cf. [T]) : il existe une métrique de Kähler-Einstein g sur X telle que $[\omega^g] = [\omega^{g_0}]$ si et seulement si l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes sur X est réductive.

Si on abandonne l'hypothèse $c_1(X) = \frac{\lambda}{2\pi}[\omega^{g_0}]$, on peut s'intéresser aux métriques kählériennes g dans la classe de Kähler fixée $[\omega^{g_0}]$, minimisant la fonctionnelle $\int_X s_g^2 \mathrm{vol}^g$, où s_g est la courbure scalaire de g et vol^g sa forme volume. De telles métriques sont appelées des *métriques extrémales*. Les métriques de Kähler-Einstein sont en fait des métriques extrémales appartenant à une classe de Kähler particulière.

On sait peu de choses en général sur les métriques extrémales. Sous une condition d'annulation de l'invariant de Calabi-Futaki, les métriques extrémales coïncident avec les métriques à courbure scalaire constante que nous pouvons étudier sous un angle plus géométrique. Dans le cas où $c_1(X) \leq 0$, les métriques extrémales, si elles existent, sont uniques dans une classe de Kähler donnée (cf. X. Chen [C] répondant à des conjectures de Donaldson formulées dans [D2]). Souvent leur existence n'est pas assurée : dans [BB], Burns et de Bartolomeis découvrent une obstruction plus fine que celle de l'invariant de Calabi-Futaki à l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante sur les modèles minimaux de surfaces complexes réglées liée à la notion de *stabilité*.

Soit un modèle minimal de surface complexe réglée $M = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe de rang 2 au dessus d'une surface de Riemann compacte Σ. Nous supposons maintenant de plus que $g(\Sigma) \geq 2$, c'est à dire que Σ est hyperbolique et qu'elle admet donc une unique métrique kählérienne g^Σ à courbure -1. La sphère de Riemann est munie quant à elle d'une unique métrique kählérienne g^{FS} à courbure constante $c > 0$ appelée *métrique de Fubini-Study*. Mais il nous manque encore un ingrédient pour pouvoir déduire une métrique de Kähler sur M des métriques g^Σ et g^{FS}.

Supposons le fibré holomorphe $\mathcal{E}$ *polystable* (cf. §I.2 pour la définition) ; on en déduit d'après le théorème de Narasimhan et Seshadri démontré dans [NS], que M provient à un biholomorphisme près d'une représentation projective unitaire $M \simeq \Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1$, avec $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PU}(2)$. On construit alors une métrique kählérienne $\hat{g}$ à courbure scalaire constante $s = 2(c-1)$ en munissant chacun des facteurs du produit tordu $\Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1$ de sa métrique kählérienne standard g^Σ et g^{FS}.

Réciproquement, suivant [BB], supposons M dotée d'une métrique kählérienne g^{K} à courbure scalaire $s = 0$. On sait que pour une surface réglée $M = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ au dessus d'une surface de Riemann, $H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}F$ où h est la classe du fibré tautologique $\mathcal{O}_M(1)$ et où F est la classe d'une fibre. Ces classes de cohomologie vérifient $h^2 = \deg \mathcal{E}$, $F^2 = 0$ et $h \cdot F = 1$ (cf. [Bv] prop. III.18). On en déduit que $b_2 = 2$, $b_2^+ = b_2^- = 1$ et que la signature de M est nulle.

Alors

$$\int_M \left(|\mathcal{W}^+|^2 - |\mathcal{W}^-|^2 \right) \mathrm{vol}^{g^{\mathrm{K}}} = \sigma(M) = 0, \tag{1}$$

où $\mathcal{W}$ est le tenseur de Weyl de la métrique g^{K}. Or une surface kählérienne est anti-autoduale si et seulement si sa courbure scalaire est identiquement nulle. D'après (1) on en déduit qu'on a également $W^- = 0$. Mais une surface complexe kählérienne conformément plate est un produit local de deux courbes munies de métriques de courbures opposées. On en déduit que le revêtement universel de (M, g^{K}) est de la forme $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ avec chacun des facteurs muni de sa métrique standard à courbure $-\kappa$ et $+\kappa > 0$. En faisant agir $\pi_(M) \simeq \pi_1(\Sigma)$ sur le revêtement, on en déduit que $(M, g^{\mathrm{K}}) \simeq \Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1$ muni d'un multiple constant de la métrique $\hat{g}$ à courbure scalaire nulle (i.e. $c = 1$). Puis d'après le théorème de Narasimhan et Seshadri, il en résulte que $\mathcal{E}$ est polystable.

Dans le cas où $s \neq 0$, on ne peut plus utiliser la formule (1) pour en déduire que $\mathcal{W} = 0$. A la place, Le Brun utilise la théorie des équations de Seiberg-Witten, qui lui permet d'étendre ce résultat d'uniformisation au cas $s < 0$ dans [L].

Nous pouvons résumer ainsi les théorèmes de Burns-de Bartolomeis et de Le Brun :

Théorème (Burns-de Bartolomeis, Le Brun) *Soit une surface complexe réglée $M = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe de rang 2 au dessus d'une surface de Riemann compacte Σ de genre $g(\Sigma) \geq 2$. Alors M admet une métrique kählérienne g^{K} à courbure scalaire constante $s \leq 0$ si et seulement si $\mathcal{E}$ est polystable. De plus la métrique g^{K} se déduit à un biholomorphisme et une constante près du modèle $(\Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1, \hat{g})$ où*

- *$\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PU}(2)$ est une représentation projective unitaire associée au fibré polystable $\mathcal{E}$.*
- *$\hat{g}$ est le produit local de la métrique hyperbolique g^Σ à courbure -1 sur Σ et de la métrique de Fubini-Study g^{FS} à courbure $c > 0$ sur $\mathbb{CP}^1$.*

Remarque : posons $H = h - \frac{1}{2}\deg \mathcal{E} F$ de sorte que $H \cdot F = 1$, $H^2 = 0$ et $H^2(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}F \oplus \mathbb{R}H$. En outre, $[K_M] = -2H + (2g(\Sigma) - 2)F$ (cf. [Bv]). Alors la classe de Kähler $\Omega = [\omega]$ de g^{K} est déterminée à une constante λ près par le coefficient c donné par le rapport

$$\frac{[\omega] \cdot H}{[\omega] \cdot F}.$$

Nous voyons ainsi que la classe de cohomologie Ω est définie indépendamment de la métrique kählérienne à laquelle elle peut être associée.

Nous allons à présent étudier dans le cadre de cette thèse une classe de métriques kählériennes singulières sur M avec des singularités de volume fini pour lesquelles nous allons généraliser les théorèmes de Burns-de Bartolomeis et de Le Brun.

Métriques de volume fini. Il est clair que la construction de $\hat{g}$ s'étend aux surfaces de Riemann de volume fini : retirons un nombre fini de *points paraboliques* $(P_i)_{1 \leq i \leq k}$ à une surface de Riemann compacte $\overline{\Sigma}$. La surface de Riemann Σ obtenue est hyperbolique à condition que $2g(\overline{\Sigma}) - 2 + k > 0$; elle admet alors une unique métrique kählérienne g^Σ à courbure sectionnelle constante -1 qui possède des cusps aux points paraboliques ; la métrique g^Σ est donc de volume fini. Plus précisément, en chaque point parabolique, on a une coordonnée locale holomorphe z telle que la métrique s'exprime sous la forme

$$g^\Sigma = \frac{|dz|^2}{|z|^2 \ln^2 |z|}.$$

De même que dans le cas compact, pour toute représentation $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PU}(2)$ on construit une métrique kählérienne $\hat{g}$ à courbure scalaire constante constante sur $M = \Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1$ comme un produit local de g^Σ et de g^{FS}. La

métrique $\hat{g}$ est de volume fini et ses singularités s'expriment comme suit dans des coordonnées adaptées : il existe une base de sections locales holomorphes (s_1, s_2) de $\mathcal{E}$ en un point parabolique P dont on déduit une base orthonormée de sections locales singulières $(s_1/|z|^{\alpha_1}, s_2/|z|^{\alpha_2})$ de $\mathcal{E} \to \Sigma$ avec $0 \leq \alpha_1(P) \leq \alpha_2(P) < 1$ puis des coordonnées homogènes $(t, \theta, [u : v])$ sur M (où $z = re^{i\theta}$ et $t = \ln(-\ln r)$). Alors en choisissant la coordonnée affine induite dans la carte $v = 1$, la métrique $\hat{g}$ est donnée par

$$\hat{g} = dt^2 + e^{-2t}d\theta^2 + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2}|du - i\alpha u d\theta|^2, \tag{2}$$

avec $\alpha = \alpha(P_i) = \alpha_2(P_i) - \alpha_1(P_i)$. Nous appellerons *bout parabolique* un voisinage de cette singularité muni de la métrique $\hat{g}$.

De façon analogue au cas compact, on définit une *structure parabolique* sur le fibré $\mathcal{E}$ (cf. définition I.1.1) et une notion de polystabilité parabolique (cf. §I.2). Mehta et Seshadri on démontré dans [MS] que les fibrés paraboliquement polystables $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$ sont les fibrés tels que $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \overline{\Sigma}$ est obtenu à un biholomorphisme près à partir d'une représentation projective unitaire $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PU}(2)$.

Eclatements de surfaces complexes. Notons $\widetilde{M}$ la surface complexe compacte donnée comme l'espace total du fibré $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \overline{\Sigma}$. Le théorème de Burns-de Bartolomeis et de Le Brun comporte des restrictions techniques (en ce qui concerne le genre de $\overline{\Sigma}$ et la courbure positive) mais surtout, il ne concerne que les modèles minimaux de surfaces complexes réglées. Le problème d'existence de métriques de Kähler à courbure scalaire constante sur les éclatements de surfaces complexes réglées possédant des champs de vecteurs holomorphes péridiques a été abordé par Le Brun et Singer dans le cas où $s = 0$ dans [LS] : de telles métriques existent toujours sur $\widetilde{M}$ quitte à en éclater certains points. De plus pour toute procédure d'éclatements fixée, Le Brun et Singer attribuent une structure parabolique au fibré $\mathcal{E}$ de sorte qu'il existe une métrique kählérienne à courbure scalaire $s = 0$ sur cet éclatement si et seulement si $\mathcal{E}$ est paraboliquement stable.

On peut éclater $\widetilde{M}$ en un point Q_i au dessus de chaque point parabolique P_i selon la méthode proposée dans [LS] ; on obtient ainsi une surface réglée $\widehat{M}$ avec des diviseurs exceptionnels E_i à la place des points Q_i éclatés. Alors la forme de Kähler ω interprétée comme un courant sur $\widetilde{M}$ se relève en un courant $\widehat{\omega}$ appelé *transformée stricte* de ω sur l'éclatement $\widehat{M}$ (cf. page 26) tel que

$$\alpha(P_i) = \frac{[\widehat{\omega}] \cdot [E_i]}{[\widehat{\omega}] \cdot [F]}.$$

Cette relation est également vérifiée par les classes de Kähler considérées dans [LS]. Bien que les métriques étudiées soient singulières sur $\widehat{M}$, ceci est une indication supplémentaire mettant en évidence le lien entre la notion de stabilité et le problème d'existence de métriques kählérienne à courbure scalaire constante sur les surfaces complexes.

Nous allons étendre les résultats de [BB] et [L] à ce cadre de volume fini quitte à faire une hypothèse technique raisonnable sur le comportement asymptotique des métriques considérées : nous nous limiterons aux métriques qui sont asymptotique au sens C^2 au modèle local défini par (2).

Théorème A *Soit $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$ un fibré parabolique holomorphe tel que $\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \{P_i\}$ soit hyperbolique. Notons M la surface complexe réglée $\mathbb{P}(\mathcal{E})_{|\Sigma}$. Si M admet une métrique kählérienne g^{K} à courbure scalaire constante $s \leq 0$ asymptotique au modèle local (au sens C^2), alors le fibré $\mathcal{E}$ est paraboliquement polystable. De plus la métrique g^{K} se déduit à un biholomorphisme et une constante près du modèle $(\Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1, \hat{g})$ où*

- *$\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PU}(2)$ est une représentation projective unitaire associée au fibré parabolique polystable $\mathcal{E}$.*
- *$\hat{g}$ est le produit local de la métrique hyperbolique g^Σ à courbure -1 avec des cusps aux points P_i sur Σ et de la métrique de Fubini-Study g^{FS} à courbure $c > 0$ sur $\mathbb{CP}^1$.*

Remarques : comme dans le cas compact, la constante $c > 0$ du théorème dépend de la classe de Kähler Ω de g^{K}. Notons que la classe de cohomologie Ω doit être définie dans un sens L^2 car les singularités de la métrique sont de volume fini ; nous étudierons précisément cette cohomologie en démontrant un lemme de Poincaré local au voisinage des singularités de g^{K} (cf. §II.2). Nous en déduirons que comme dans le cas lisse,

$$\mathrm{H}^2_{L^2}(M, g^{\mathrm{K}}) = \mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}F,$$

où $H^2 = F^2 = 0$ et $H \cdot F = 1$. Dans le cas où g^{K} admet au moins une singularité $\Omega \cdot F = \int_{\mathbb{CP}^1} \omega$ est imposé par le comportement asymptotique de g^{K}. On en déduit que la constante du théorème ci-dessus est égale à 1 dès qu'il y a au moins un point parabolique.

Outils de la démonstration. Il s'agit comme dans le cas compact de commencer par démontrer que le revêtement universel holomorphe riemannien de (M, g^{K}) est donné par $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ (cf. proposition III.2.4). On en déduit alors la polystabilité parabolique de $\mathcal{E}$ à l'aide du théorème de Mehta-Seshadri I.2.2.

Les véritables difficultés de la démonstration sont posées par le cas $s < 0$. pour lequel on procède suivant l'idée de Le Brun. On dispose d'une antipodie

ξ sur les fibres de M qui est involutive et renverse l'orientation. On utilise également les équations de Seiberg-Witten (cf. §III.1) : la structure complexe de M induit une structure *spin*^{c} de fibré déterminant K_M^{-1} avec un fibré de spineurs associés $W = W^+ \oplus W^-$ et une action de Clifford de TM sur W. Le choix d'une métrique riemannienne g sur M et d'une connexion unitaire A sur le fibré déterminant induit un opérateur de Dirac $D_A : \Gamma(W^+) \to \Gamma(W^-)$. On a alors les équations de Seiberg-Witten associées portant sur des couples (A, ψ) avec $\psi \in \Gamma(W^+)$

$$\begin{aligned} D_A\psi &= 0 \\ F_A^+ &= q(\psi). \end{aligned}$$

En l'absence de singularités, Le Brun utilise la théorie des invariants de Seiberg-Witten, valable dans le cas compact, afin d'obtenir une solution des équations associées à la métrique $g = \xi^* g^{\mathrm{K}}$. Il en déduit une structure complexe faisant de g une métrique de Kähler. Alors g^{K} est kählérienne relativement à deux structure complexes J_0 et J_1 compatibles avec des orientations opposées de M et on en déduit à partir de là que le revêtement universel de M est de la forme $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ (cf. §III.2).

Le point difficile à étendre au cadre de volume fini est celui de l'existence d'une solution des équations de Seiberg-Witten pour la métrique g car nous ne pouvons plus nous appuyer sur la théorie de l'invariant.

Cas rationnel. Dans les cas où g est une métrique asymptotique au modèle local avec des poids $\alpha(P_i) = \alpha_2(P_i) - \alpha_1(P_i)$ rationnels, on peut définir une compactification holomorphe orbifold de M en ajoutant des diviseurs au dessus des points paraboliques, sur laquelle on approxime g par des métriques g_j lisses (cf. cor. I.3.3 et §II.1.2). Si $\alpha(P_i) = r_i/q_i$, il suffit d'ajouter au dessus de P_i un diviseur de la forme $\mathbb{CP}^1/\mathbb{Z}_{q_i}$ et $\overline{M} = M \sqcup D$ où $D = \sqcup_i \mathbb{CP}^1/\mathbb{Z}_{q_i}$ est le *diviseur à l'infini*.

Afin d'obtenir une solution des équations de Seiberg-Witten à la limite, on va montrer qu'on peut faire converger une suite de solutions pour les équations de Seiberg-Witten sur $(\overline{M}, g_j)$ vers une solution des équations sur (M, g). Par ailleurs une telle suite sera obtenue en calculant l'invariant de Seiberg-Witten associé aux équations.

La première étape (cf. chap. II) consiste à comprendre la convergence des formes g_j-harmoniques. Tout d'abord, le lemme de Poincaré à l'infini nous permet de construire un isomorphisme entre les espaces de cohomologie

$$\mathrm{H}^*_{L^2}(M) \simeq \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\overline{M}).$$

Grâce à des inégalités de Poincaré (cf. cor. II.2.3 et prop. II.3.3) on développe la théorie de Hodge pour la cohomologie L^2 dans le cas des $0, 1$ et 2-formes,

et on démontre le résultat de convergence suivant pour les représentants g_j harmoniques d'une classe de cohomologie :

proposition B *Soit g une métrique asymptotique au modèle local avec poids $\alpha_2(P_i) - \alpha_1(P_i)$ rationnels et soit g_j la suite d'approximation de g.*

Soit une classe de cohomologie $b \in \mathrm{H}^i_{L^2}(M)$, où $i = 0, 1$ ou 2. Alors le représentant g_j-harmonique de b converge au sens C^∞ sur tout compact de M vers le représentant $g-$harmonique L^2 de b.

En outre dans le cas où $i = 2$, on le résultat supplémentaire de convergence

$$b^{+_j} \to b^+, \quad et \quad b^{+_j} \to b^-.$$

On définit la première classe de Chern L^2 de K_M^{-1} (cf. §III.2.1) notée L^2c_1. Notons que l'hypothèse de la courbure $s < 0$ pour la métrique g^{K} se traduit par

$$\mathrm{L}^2c_1 \cdot \Omega < 0.$$

Via l'isomorphisme entre $\mathrm{H}_{L^2}(M)$ et $\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$, la classe L^2c_1 se décompose en $c_1(\overline{M})$ plus un courant concentré à l'infini qui représente le dual de Poincaré de $[D]^{-1}$ (cf. lemme III.3.1) ; ceci nous indique qu'afin de faire converger A_j vers une connexion définie sur le «bon fibré», nous devons perturber les équations de Seiberg-Witten pour $(\overline{M}, g_j)$ en

$$\begin{aligned} D_A\psi &= 0 \\ (F_A - F_{B_j})^+ &= q(\psi), \end{aligned}$$

où B_j est une suite de connexion sur $[D]$ dont la courbure est telle que $\frac{i}{2\pi}F_{B_j}$ converge vers le courant d'intégration sur le diviseur D. Alors, on démontre le théorème de convergence suivant

Théorème C *Soit g une métrique sur M asymptotique au modèle local avec poids $\alpha_2(P_i) - \alpha_1(P_i)$ rationnels et soit g_j la suite d'approximation de g. Soit (A_j, ψ_j) une suite de solutions des équations de Seiberg-Witten perturbées associées à la structure spin^c induite par la structure complexe de $\overline{M}$ et aux métriques g_j. Alors quitte à faire des changements de jauge et à extraire une sous-suite, la suite (A_j, ψ_j) converge au sens C^∞ sur tout compact de M vers une solution des équations non perturbées (A, ψ) pour la métrique g vérifiant*

- *$A = C + a$, où $a \in L^2_1(g)$ est en jauge de Hodge $d^*a = 0$,*
- *ψ est bornée en norme C^0 et $\psi \in L^2_1(g)$ relativement à ∇_C.*

Ici, C désigne la connexion de référence à courbure L^2 sur K_M^{-1} fixée par le lemme III.3.1.

Puisque les espaces de cohomologie vérifient $b_2^+ = 1$, l'invariant de Seiberg-Witten dépend donc de la *chambre* dans laquelle se trouve chaque métrique g_j

(cf. §III.1). On peut perturber la structure holomorphe de $\mathcal{E}$ afin d'obtenir un fibré $\mathcal{E}'$ paraboliquement stable. En utilisant la représentation associée à $\mathcal{E}'$, on en déduit une métrique kählérienne $\hat{g}$ (relativement à une autre structure complexe sur M) dont la classe de Kähler est égale à Ω. On peut éliminer les singularités de $\hat{g}$ et en déduire une métrique kählérienne g' sur la compactification $\overline{M}$ dont la classe de Kähler est égale à Ω. On calcule ensuite l'invariant de Seiberg-Witten associé à la métrique g' et on montre que sous l'hypothèse de la courbure strictement négative $\deg_{\omega'} K_{\overline{M}}^{-1} \otimes [D]^{-1} = \mathrm{L}^2 c_1 \cdot \Omega < 0$ cet invariant vérifie $\mathrm{SW}(g') = 1$ (cf. §III.1).

Alors, par la proposition B,

$$c_1(K_{\overline{M}}^{-1} \otimes [D]^{-1}) \cdot \Omega^{+_{g_j}} \to \mathrm{L}^2 c_1 \cdot \Omega^{+_g}.$$

Sous l'hypothèse $\mathrm{L}^2 c_1 \cdot \Omega^{+_g} < 0$, ceci implique que g' et g_j sont dans la même chambre dès que j est suffisamment grand et que $\mathrm{SW}(g_j) = \mathrm{SW}(g') = 1$ (cf. prop. III.1.7).

Théorème D *Sous l'hypothèse* $\mathrm{L}^2 c_1 \cdot \Omega < 0$, *soit g une métrique asymptotique au modèle local sur M telle que*

$$\mathrm{L}^2 c_1 \cdot \Omega^{+_g} < 0. \tag{3}$$

Alors les équations de Seiberg-Witten non perturbées associées à la métrique g et à la structure spin^c induite par la structure complexe de M admettent une solution (A, ψ) telle que

- *$A = C + a$, avec $a \in L_1^2(g)$ en jauge de Hodge $d^*a = 0$,*
- *ψ est bornée en norme C^0 et $\psi \in L_1^2(g)$ relativement à la connexion ∇_C.*

Remarque : en particulier, dans le cas où $g = \xi^* g^{\mathrm{K}}$ on a $[\omega] = \Omega$, avec ω la forme de Kähler de g^{K}. On démontrera de plus que $+_g = +_{g^{\mathrm{K}}}$. Or ω est un représentant L^2 harmonique autodual de Ω donc $\Omega^+ = \Omega$. Alors comme pour une métrique kählérienne à courbure scalaire constante négative $\mathrm{L}^2 c_1 \cdot [\omega] = \frac{s}{4\pi} \mathrm{vol}(g^{\mathrm{K}})$ la condition (3) est vérifiée. On obtient alors une solution des équations de Seiberg-Witten associée à g.

Une fois une solution des équations obtenue pour $g = \xi^* g^{\mathrm{K}}$, on vérifie que la démonstration donnée par Le Brun dans le cas $s < 0$ s'adapte sans difficulté à notre cadre de volume fini. La démonstration de Burns et de Bartolomeis s'adapte également facilement et on en déduit finalement le théorème A (cf. §III.2.2).

Cas irrationnel En fait le théorème D est vrai même si les poids des singularités de g ne vérifient aucune condition de rationalité. Dans le cas où g est asymptotique à un modèle dont certains poids vérifient la condition

$\alpha(P_i) \notin \mathbb{Q}$, la compactification qui devrait s'imposer serait obtenue en ajoutant des diviseurs de la forme $\mathbb{CP}^1/\mathbb{Z}$. Or, cet objet ne permet pas d'appliquer les techniques d'analyse nécessaires pour développer la théorie des invariants de Seiberg-Witten (par exemple le théorème de l'indice).

On contourne ce problème en approximant g par une suite de métriques g^j en recollant g au modèle local avec des poids $\alpha^j(P_i) \in \mathbb{Q}$ tels que $\alpha^j(P_i) \to \alpha(P_i)$ lorsque j tend vers l'infini (cf. §III.4). On note $\overline{M}^j = M \sqcup D^j$ la suite de compactifications associées à ces structures paraboliques.

On démontrera au §III.4 qu'on a toujours un isomorphisme

$$\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(\overline{M}^j) \simeq \mathrm{H}_{L^2}(M, g^j) \simeq \mathrm{H}_{L^2}(M, g)$$

suivant lequel $c_1(K_{\overline{M}^j}^{-1} \otimes [D^j]^{-1}) = \mathrm{L}^2 c_1$. On va pouvoir appliquer les résultats précédents aux métriques g^j qui sont asymptotiques au modèle local avec poids rationnels afin d'obtenir des solutions (A^j, ψ^j) des équations de Seiberg-Witten pour les métriques g^j. Puis de façon analogue au cas rationnel, on va faire converger ces solutions vers une solution limite pour la métrique g.

Chapitre I

Surfaces réglées modèles

I.1 Exemple de surface réglée de volume fini

Voici tout d'abord une famille d'exemples de surfaces complexes réglées construites à partir de représentations projectives unitaires. Ces exemples sont fondamentaux dans la théorie des fibrés paraboliquement stables comme nous le verrons au §I.2 où nous citerons le théorème important de Mehta-Seshadri I.2.2 ; en outre ces exemples possèdent des métriques kählériennes «modèles» à courbure scalaire constante qui possèdent des singularités que nous étudierons précisément au §I.3 et que nous appellerons *bouts paraboliques*.

I.1.1 Surfaces de Riemann de volume fini

Soit Γ un sous groupe discret de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agissant librement et avec covolume fini sur le demi plan de Poincaré

$$\mathbb{H}^2 = \{\xi \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Im}\xi > 0\} \ ;$$

le quotient est une surface de Riemann $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$ munie de la métrique kählérienne g^Σ à courbure -1 induite par la métrique de Lobachevsky standard de $\mathbb{H}^2$. Le groupe Γ agit également sur le bord à l'infini de $\mathbb{H}^2$ que l'on peut voir comme $\partial_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Alors le stabilisateur d'un point P du bord est soit trivial soit engendré par un élément parabolique τ. Dans ce dernier cas, le point P est appelé un *point parabolique*. Lorsque Σ est non compacte, il existe des points paraboliques $\{P_i\}$ (en nombre fini) sur $\partial_\infty\mathbb{H}^2$, et quitte à ajouter ces points à $\mathbb{H}^2$, on obtient alors un espace noté $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \{P_i\}$, tel que le quotient $\overline{\Sigma} = \overline{\mathbb{H}^2}/\Gamma$ est une surface de Riemann compacte.

La métrique g^Σ possède des singularités aux points P_i, appelée cusps comme nous allons le voir ci-dessous. Soit $\rho \in \Gamma$, l'élément engendrant le

stabilisateur d'un point parabolique ; puisque τ est un élément parabolique de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, on peut supposer quitte à faire une conjugaison par une homographie, que τ est de la forme $\xi \mapsto \xi + u$ où $u \in \mathbb{R}$; pour simplifier encore on supposera même que $u = 2\pi$. Au voisinage de P, la surface de Riemann Σ est isomorphe à $I_a/\langle\tau\rangle$, avec $I_a = \{\xi \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Im}\xi > a\}$ pour $a > 0$ suffisamment grand. Ces voisinages de P munis de leurs métriques induites sont appelés des cusps paraboliques. On définit un isomorphisme entre le disque épointé $\Delta_a^* = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |z| < e^{-a}\}$ et le cusp parabolique $I_a/\langle\tau\rangle$ par

$$\begin{array}{rcl} I_a/\langle\tau\rangle & \longrightarrow & \Delta_a^* \\ \xi & \longmapsto & z = e^{i\xi} \ ; \end{array} \tag{I.1}$$

le point P est envoyé sur 0 dans le modèle du disque. En utilisant le plongement holomorphe $\Delta_a^* \subset \Delta_a = \Delta_a^* \cup \{0\}$, on retrouve la compactification holomorphe de Σ en $\overline{\Sigma}$. Le groupe Γ est égal au groupe fondamental $\pi_1(\Sigma)$. Si g désigne le genre de $\overline{\Sigma}$ et k le nombre de points paraboliques, on sait que Γ est engendré par

$$X_1, Y_1, \ldots, X_g, Y_g \quad \text{et} \quad \tau_1, \ldots, \tau_k,$$

avec la relation

$$[X_1, Y_1] \cdot [X_2, Y_2] \cdots [X_g, Y_g] \cdot \tau_1 \cdots \tau_k = 1,$$

où les X_i, Y_j correspondent à des lacets qui engendrent $\pi_1(\overline{\Sigma})$ et où τ_i est un élément parabolique de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ qui engendre le stabilisateur de P_i dans Γ.

Voyons maintenant comment s'exprime la métrique g^Σ sur le cusp parabolique : le demi-plan de Poincaré est muni de la métrique à courbure -1 :

$$g^{\mathbb{H}^2} = \frac{|d\xi|^2}{|\xi - \bar{\xi}|^2},$$

et on calcule facilement la métrique de cusp induite sur Δ_a^*

$$g^{\Delta^*} = \frac{|dz|^2}{(|z| \ln |z|)^2}.$$

Nous utiliserons encore un autre système de coordonnées locales sur les bouts de Σ défini par :

$$(t, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \text{ avec } z = re^{i\theta} \text{ et } t = \ln(-\ln |z|).$$

Dans ces coordonnées

$$g^{\Delta^*} = dt^2 + e^{-2t} d\theta^2. \tag{I.2}$$

En général si $\overline{\Sigma}$ est une surface de Riemann quelconque avec k points paraboliques marqués (P_i), la surface de Riemann $\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \{P_i\}$ résultante est de type hyperbolique si et seulement si $2g(\overline{\Sigma}) - 2 + k > 0$ (cf. par exemple [Fo], th. 27.12) et dans ce cas, elle admet une unique métrique kählérienne g^Σ de courbure -1 avec des singularités de cusps aux points P_i.

I.1.2 Surfaces réglées et représentations unitaires

Soit ρ une représentation unitaire $\rho : \Gamma \to \mathrm{U}(2)$. On en déduit une action de Γ sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}^2$ donnée par

$$\sigma.(\xi, \mu) = (\sigma.\xi, \rho(\sigma).\mu) \quad \textit{pour } \sigma \in \Gamma \textit{ et } (\xi, \mu) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}^2.$$

Au quotient, on obtient un fibré vectoriel holomorphe

$$\mathcal{E} = \mathbb{H}^2 \times_\rho \mathbb{C}^2$$

au dessus de Σ. Comme le fibré $\mathcal{E}$ est obtenu par une représentation unitaire, le produit hermitien standard sur $\mathbb{C}^2$ passe au quotient et nous donne une métrique hermitienne h sur $\mathcal{E}$. La sphère de Riemann $\mathbb{CP}^1$ est munie d'une métrique de Fubini-Study, kählérienne à courbure sectionnelle $c > 0$, que nous appellerons également *métrique standard* sur $\mathbb{CP}^1$. Les coordonnées homogènes $[u : v]$ sur $\mathbb{CP}^1$ induisent des coordonnées de projection stéréographique. Par exemple dans la carte $v = 1$, la métrique de Fubini-Study de courbure c est classiquement définie par

$$g^{\mathrm{FS}} = \frac{4/c}{(1 + |u|^2)^2} |du|^2;$$

sa forme de Kähler est donnée par

$$\omega^{\mathrm{FS}} = \frac{2i}{c} \partial\overline{\partial} \ln(1 + |u|^2) \ ;$$

le groupe d'isométries de $(\mathbb{CP}^1, g^{\mathrm{FS}})$ est égal à $\mathrm{PU}(2)$. La métrique produit $g^{\mathbb{H}^2} + g^{\mathrm{FS}}$ sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ que nous appellerons également métrique standard sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ est kählérienne, car c'est un produit riemannien de métriques kählériennes. Sa courbure scalaire est égale à la somme des courbures scalaires sur chacun des facteurs ; cette métrique est donc à courbure scalaire constante $s = 2(c - 1)$.

Alors la représentation $\rho : \Gamma \to \mathrm{U}(2)$ induit une représentation notée également $\rho : \Gamma \to \mathrm{PU}(2)$. On en déduit une action isométrique de Γ sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$. Alors la métrique standard sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ passe au quotient, et on

obtient une métrique kählérienne $\hat{g}$ à courbure scalaire constante $2(c-1)$ sur la surface complexe réglée $M = \mathbb{P}(\mathcal{E})$. De plus, M admet par construction un revêtement universel riemannien

$$p : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1 \to M.$$

De plus, $\hat{g}$ est de volume fini car c'est un produit local donc $\mathrm{vol}^g(M) = \mathrm{vol}^{g^\Sigma}(\Sigma) \times \mathrm{vol}^{\mathrm{FS}}(\mathbb{CP}^1)$. Nous allons maintenant nous concentrer sur l'étude locale de la métrique $\hat{g}$ au voisinage d'un point parabolique.

I.1.3 Prolongement holomorphe et structure parabolique

Prolongement holomorphe de $\mathcal{E}$. Le fibré $\mathcal{E}$ que nous avons obtenu à partir d'une représentation unitaire admet un prolongement holomorphe en un fibré au dessus de $\overline{\Sigma}$ comme nous allons le voir.

Afin de définir un tel prolongement, il nous suffit de décrire les sections holomorphes de $\mathcal{E}$ au voisinage d'un point parabolique P : reprenons le modèle local $I_a/\langle\tau\rangle$ du cusp de Σ d'extrémité P. Les sections holomorphes du fibré $\mathcal{E}$ au voisinage de P sont par définition de la structure holomorphe sur $\mathcal{E} = \mathbb{H}^2 \times_\rho \mathbb{C}^2$ les fonctions holomorphes Γ-équivariantes $s : I_a \to \mathbb{C}^2$. Dans une base (ϵ_1, ϵ_2) de $\mathbb{C}^2$ bien choisie,

$$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\alpha_2} \end{pmatrix}, \text{ avec } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1. \tag{I.3}$$

Alors une section holomorphe de $\mathcal{E}$ s'écrit $s = \sum_{i=1}^2 \sigma_i \epsilon_i$, où les $\sigma_i : I_a \to \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes et la condition d'équivariance se traduit par $s \circ \tau = \rho(\tau) \circ s$, soit

$$\sigma_i(\xi + 2\pi) = e^{2i\pi\alpha_i}\sigma_i(\xi) \ ,$$

ce qui signifie

$$\sigma_i(\xi) = f_i(z)e^{i\alpha_i\xi} \quad \text{avec} \quad z = e^{i\xi},$$

où f_i est une fonction holomorphe sur le disque épointé Δ_a^*. On définit alors le prolongement holomorphe $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$, en décidant que les sections locales holomorphes en P sont données par les sections locales holomorphes de $\mathcal{E} \to \Sigma$ telles que les f_i soient bornées au voisinage de P. Alors f_i se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque Δ_a tout entier, et la famille

$$(s_i = e^{i\alpha_i\xi}\epsilon_i),$$

est une base de sections locales holomorphes de $\mathcal{E}$ en P.

Morphismes bornés et structure parabolique. Le fibré $\mathcal{E}$ est muni d'une métrique hermitienne (la métrique quotient) qui possède des singularités aux points paraboliques : pour le voir, exprimons la dans la base de sections holomorphes (s_i) définies au voisinage de P.

$$h = \begin{pmatrix} |z|^{2\alpha_1} & 0 \\ 0 & |z|^{2\alpha_2} \end{pmatrix}. \tag{I.4}$$

On en déduit une base orthonormée de sections locales en P données par

$$e_i = s_i/|z|^{\alpha_i} = e^{i\alpha_i \mathrm{Re}\xi}\epsilon_i,$$

tandis que la base orthonormée (ϵ_i) n'a de sens que sur le revêtement $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}^2$.

La structure parabolique sur $\mathcal{E}$ apparaît naturellement en décrivant ses morphismes bornés (dans la catégorie holomorphe). Soit $\mathcal{E}'$ un fibré obtenu de même que $\mathcal{E}$ à partir d'une représentation unitaire ρ' de Γ. Les morphismes de ces fibrés sont par définition les applications holomorphes Γ-équivariantes, pour l'action induite par ρ et ρ' de $\mathbb{H}^2 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$. Si on se place près du point parabolique P, la condition d'équivariance s'écrit

$$\gamma(\tau\xi) = \rho'(\tau)\gamma(\xi)\rho(\tau)^{-1},$$

alors, en notant $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 < 1$ les poids de ρ' et $\gamma = \gamma^i_j s'_j \otimes s^*_i$ cette condition se traduit par

$$\gamma^i_j(\xi + 2\pi) = e^{2i\pi(\beta_j - \alpha_i)}\gamma^i_j(\xi),$$

dont on déduit que

$$\gamma^i_j(\xi) = f^i_j(z)e^{2i\pi(\beta_j - \alpha_i)\xi}.$$

Pour que γ admette un prolongement holomorphe au point parabolique, il suffit que les f^i_j soient bornées au voisinage de 0. Si on souhaite de plus obtenir des morphismes bornés, la condition nécessaire et suffisante est donnée par

$$f^i_j(0) = 0 \text{ si } \beta_j < \alpha_i. \tag{I.5}$$

Cette condition peut être traduite en des termes plus géométriques en introduisant une *structure parabolique.*

Définition I.1.1 (Structures paraboliques) *Une structure parabolique sur le fibré $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$ est la donnée d'un ensemble fini points paraboliques $P_i \in \overline{\Sigma}$, de filtrations au dessus des points paraboliques*

$$\mathcal{E}_{P_i} = \mathcal{F}^1_{P_i} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{F}^{k_i+1}_{P_i} = 0,$$

et de poids associés à la filtration $0 \leq \alpha_1(P_i) < \cdots < \alpha_{k_i}(P_i) < 1$; on appelle multiplicité d'un poids $\alpha_j(P_i)$ l'entier $d_j(P_i) = \dim \mathcal{F}^j_{P_i} - \dim \mathcal{F}^{j+1}_{P_i}$.

Remarque : pour les fibrés paraboliques de rang 2, on a soit $k_i = 2$, soit $k_i = 1$. Dans ce dernier cas, la structure parabolique au point P_i est réduite à une filtration triviale et à un unique poids de multiplicité 2. Un tel point parabolique est appelé un *point trivial* de la structure parabolique.

Structure parabolique associée à une représentation unitaire. On définit maintenant une structure parabolique sur le fibré que nous avons construit à partir d'une représentation unitaire comme suit : en un point parabolique P de $\overline{\Sigma}$, si $\alpha_1 < \alpha_2$, on pose $\mathcal{F}_P^2 = \mathbb{C}s_2(P)$, $\alpha_1(P) = \alpha_1$ et $\alpha_1(P) = \alpha_1$. Nous sommes ici dans le cas où les poids sont de multiplicités 1. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, on décide que P est un point trivial de la structure parabolique, muni d'un unique poids $\alpha_1(P) = \alpha_1$.

Si l'on revient au morphisme de fibré parabolique holomorphes γ, on voit que la condition (I.5) se traduit simplement par

$$\gamma(\mathcal{F}_P^j) \subset \mathcal{F}'^{k+1}_P \quad si \quad \alpha_j > \beta_k.$$

Ce qui revient à dire lorsque $\rho = \rho'$ que les endomorphismes de fibrés parabolique préservent les filtrations : $\gamma(\mathcal{F}_P^j) \subset \mathcal{F}_P^j$.

Il est donc naturel de définir en général un *isomorphisme parabolique* d'un fibré parabolique $\mathcal{E}$ comme un automorphisme holomorphe de $\mathcal{E}$ respectant la filtration au dessus des points paraboliques. Souvent, lorsque aucune ambiguïté n'est possible, il sera sous-entendu lorsque nous parlerons d'isomorphisme d'un fibré muni d'une structure parabolique qu'il s'agit en fait des isomorphismes paraboliques du fibré.

I.2 Fibrés paraboliquement stables

Une question naturelle se pose maintenant si nous voulons fabriquer des métriques de Kähler de volume fini à courbure scalaire constante sur les surfaces complexes réglées de la forme $\mathbb{P}(\mathcal{E})$: comment reconnaître les fibrés paraboliques holomorphes qui sont obtenus à isomorphisme parabolique près à partir de représentations unitaire ? La réponse à cette question est apportée par la théorie des fibrés paraboliques stables développée par Mehta et Seshadri (cf. [MS]).

I.2.1 Définition algébrique

Soit $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$ un fibré holomorphe de rang 2 muni d'une structure parabolique (cf. définition I.1.1). Supposons $2g(\overline{\Sigma}) - 2 + k > 0$, où k est le nombre

de points paraboliques, de sorte que l'on puisse munir $\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \{P_i\}$ d'une métrique g^Σ à courbure sectionnelle -1 possédant des singularités de type cusp aux points paraboliques P_i.

Degré parabolique. Étant donné un fibré en vectoriel complexe $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$, on définit classiquement son *degré* par

$$\deg \mathcal{E} = c_1(\mathcal{E}).[\overline{\Sigma}] = \frac{i}{2\pi} \int_{\overline{\Sigma}} \mathrm{tr} F_A,$$

où F_A est la courbure d'une connexion $\mathbb{C}-$linéaire A, sur le fibré $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$. Le *degré parabolique* du fibré $\mathcal{E}$ et sa *pente* sont définis respectivement par

$$\deg \mathrm{par}\, \mathcal{E} = \deg \mathcal{E} + \sum_{i,j} d_j(P_i).\alpha_j(P_i), \quad \mu(\mathcal{E}) = \frac{\deg \mathrm{par}\, \mathcal{E}}{\mathrm{rang}\ \mathcal{E}}.$$

Structure parabolique induite. Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ un sous-fibré holomorphe en droites complexes de $\mathcal{E}$. Le fibré $\mathcal{L}$ hérite d'une *structure parabolique induite* définie par la seule donnée de poids

$$0 \leq \alpha^{\mathcal{L}}(P_i) < 1,$$

avec $\alpha^{\mathcal{L}}(P_i) = \alpha_2(P_i)$ si $\mathcal{F}^2_{P_i} = L$ et $\alpha^{\mathcal{L}}(P_i) = \alpha_1(P_i)$ sinon.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, est une somme de deux fibrés paraboliques en droites complexes ayant les mêmes points paraboliques , alors E possède une structure parabolique induite définie comme suit : en un point parabolique P, si $\alpha^{\mathcal{L}_1} = \alpha^{\mathcal{L}_2}$, alors on définit la structure parabolique de $\mathcal{E}$ comme la structure parabolique triviale en P, avec un unique poids $\alpha_1(P) = \alpha^{\mathcal{L}_1}$ de multiplicité 2. Si $\alpha^{\mathcal{L}_1} < \alpha^{\mathcal{L}_2}$, on pose $\alpha_1 = \alpha^{\mathcal{L}_1}$, $\alpha_2 = \alpha^{\mathcal{L}_2}$ et $\mathcal{F}^2_P = \mathcal{L}_{2P}$. Si $\alpha^{\mathcal{L}_1} > \alpha^{\mathcal{L}_2}$, on pose $\alpha_1 = \alpha^{\mathcal{L}_2}$, $\alpha_2 = \alpha^{\mathcal{L}_1}$ et $\mathcal{F}^2_P = \mathcal{L}_{1P}$. On vérifie que cette structure parabolique sur E induit la structure parabolique de départ sur les sous fibrés $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ et que

$$\deg \mathrm{par}\, \mathcal{E} = \deg \mathrm{par}\, \mathcal{L}_1 + \deg \mathrm{par}\, \mathcal{L}_2.$$

Si un fibré parabolique admet une décomposition (non nécessairement holomorphe) $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ en deux fibrés paraboliques, et que la structure parabolique induite sur $\mathcal{E}$ coïncide avec celle qu'on avait départ, on appellera cette décomposition une *décomposition parabolique* de $\mathcal{E}$. Alors, on dira d'un fibré parabolique holomorphe $\mathcal{E}$ qu'il est *paraboliquement décomposable* s'il admet une décomposition à la fois holomorphe et parabolique $E = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$.

Définition I.2.1 *Un fibré holomorphe de rang* 2, $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$ *muni d'une structure parabolique est dit paraboliquement stable si tout sous-fibré holomorphe en droites complexes* $\mathcal{L}$ *muni de la structure parabolique induite vérifie*

$$\mu(\mathcal{L}) < \mu(\mathcal{E}).$$

Si on remplace cette condition par une inégalité large

$$\mu(\mathcal{L}) \leq \mu(\mathcal{E}),$$

le fibré $\mathcal{E}$ *sera dit paraboliquement semi-stable.*

Le fibré $\mathcal{E}$ *sera dit paraboliquement polystable s'il est soit paraboliquement stable, soit à la fois paraboliquement semi-stable et paraboliquement décomposable.*

Remarques :

- Un fibré paraboliquement stable $\mathcal{E}$ est paraboliquement indécomposable. Sinon, on aurait une décomposition parabolique holomorphe $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ d'où $\deg \text{par}\, \mathcal{E} = \deg \text{par}\, \mathcal{L}_1 + \deg \text{par}\, \mathcal{L}_2$ ce qui est impossible puisque la condition de stabilité implique $\deg \text{par}\, \mathcal{L}_i < \frac{1}{2} \deg \text{par}\, \mathcal{E}$.
- Un fibré paraboliquement polystable décomposable $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ est semi-stable, d'où $\deg \text{par}\, \mathcal{L}_i \leq \frac{1}{2} \deg \text{par}\, \mathcal{E}$. Or $\deg \text{par}\, \mathcal{E} = \deg \text{par}\, \mathcal{L}_1 + \deg \text{par}\, \mathcal{L}_2$; on en déduit que $\deg \text{par}\, \mathcal{L}_1 = \deg \text{par}\, \mathcal{L}_2$.
- Réciproquement, tout fibré parabolique holomorphe décomposable $\mathcal{E}$ obtenu comme une somme directe $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ de deux fibrés holomorphes paraboliques en droites complexes tels que $\deg \text{par}\, \mathcal{L}_1 = \deg \text{par}\, \mathcal{L}_2$ est paraboliquement semi-stable (cf. [S] cor. 10 p. 71) et donc paraboliquement polystable.
- Il existe sur tout fibré parabolique C^∞, $E \to \overline{\Sigma}$ une structure holomorphe paraboliquement stable (cf. par exemple [S] th. 38 p. 91).
- En outre la stabilité parabolique est une condition ouverte. Elle est donc préservée par de petites perturbations des poids de la structure parabolique (cf [MS] ou [S]).

I.2.2 Stabilité parabolique et représentations unitaires

Le lien entre ces notions a été fait tout d'abord par Narasimhan et Seshadri dans le cas où la structure paraboliques est vide (cf. [NS]). Puis ce travail a été généralisé au cadre de volume fini (lorsque l'on rencontre des points paraboliques) par Mehta et Seshadri (cf. [MS] th. 4.1) où ils démontrent

Théorème I.2.2 (Mehta-Seshadri) *Soit* S *l'ensemble des fibrés holomorphes paraboliques polystables de degré parabolique* 0 *au dessus de* $\overline{\Sigma}$. *Soit* R

l'ensemble des représentations unitaires de $\pi_1(\Sigma)$, *où* $\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \{P_i\}$. *Toute représentation de* R *induit un fibré parabolique (cf. §I.1.3) de degré parabolique* 0, *paraboliquement polystable.*

Réciproquement, tout fibré de S *provient, à un isomorphisme de fibré parabolique près, d'une représentation de* R, *et on à une bijection entre les espaces de modules*

$$S \mod \{\textit{isomorphismes paraboliques}\} \simeq R \mod \textit{équivalence}.$$

De plus via cette bijection, les fibrés paraboliquement stables de S, *sont ceux qui correspondent aux classes de représentations unitaires irréductibles de* R.

Remarques :

i) précisons que dans cet énoncé, les isomorphismes sont relatif à la structure holomorphe et la structure parabolique (cf. §I.1.3).

ii) Lorsque $\deg \mathrm{par}\, \mathcal{E} \neq 0$, on peut se ramener au cas du degré parabolique nul de la façon suivante : soit $\mathcal{L} \to \overline{\Sigma}$, un fibré en droites complexes de degré très négatif, tel que $\deg \mathcal{E} \otimes \mathcal{L} < 0$. Puisque $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L})$, on peut donc supposer le degré de $\mathcal{E}$ négatif. Dans un deuxième temps, on peut ajouter des points paraboliques triviaux $Q_k \in \Sigma$ à la structure parabolique de $\mathcal{E}$. On obtient ainsi un nouveau fibré parabolique noté $\mathcal{E}'$. Alors

$$\deg \mathrm{par}\, \mathcal{E}' = \deg \mathrm{par}\, \mathcal{E} + \sum_k 2\alpha_1(Q_k),$$

et le fibré $\mathcal{E}'$ est paraboliquement stable (resp. semi-stable, polystable) si et seulement si le fibré $\mathcal{E}$ est paraboliquement stable (resp. semi-stable, polystable). En choisissant bien les poids, on obtient un fibré de degré parabolique 0.

I.2.3 Stabilité et existence métriques extrémales

Soit $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$ un fibré parabolique polystable, et M la surface réglée obtenue comme $\mathbb{P}(\mathcal{E})_{|\Sigma}$, où $\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \{P_i\}$ avec $(P_i)_{1 \leq i \leq k}$ les points paraboliques. Sous l'hypothèse $2g(\overline{\Sigma}) - 2 + k > 0$, on sait que Σ admet une unique métrique kählérienne g^Σ à courbure sectionnelle -1 avec des cusps aux points P_i. D'après la remarque I.2.2, on peut supposer, quitte à rajouter des points triviaux Q_i à la structure parabolique et à tensoriser par un fibré de degré suffisamment négatif, que $\deg \mathrm{par}\, \mathcal{E} = 0$ sans changer la stabilité parabolique du fibré.

Alors, d'après le théorème de Mehta et Seshadri, il existe une représentation projective unitaire $\rho : \pi_1(\Sigma \setminus \{Q_i\}) \to \mathrm{U}(2)$ telle que $\mathcal{E} \simeq \mathbb{H}^2 \times_\rho \mathbb{C}^2$ en tant que fibré paraboliques. Notons que puisque la structure parabolique

est respectée, ceci implique que si τ engendre le stabilisateur d'un point parabolique, alors $\rho(\tau)$ est conjugué à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \exp(2i\pi\alpha_1) & 0 \\ 0 & \exp(2i\pi\alpha_2) \end{pmatrix},$$

où $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$ représentent les poids de la structure parabolique (avec éventuellement $\alpha_1 = \alpha_2$ dans le cas de la structure triviale).

Il est alors facile de voir que la métrique hermitienne, singulière aux points Q_i, induit une métrique de Fubini-Study sur la fibre qui est lisse sur $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \Sigma$ tout entier. On obtient alors suivant le §I.1.2 une métrique kählérienne $\hat{g}$ à courbure scalaire constante sur M.

Remarque : la construction que nous venons de faire montre que nous pouvons facilement nous ramener au cas des fibrés de degré parabolique 0 sans ajouter de singularités à la métrique $\hat{g}$. Par la suite, nous supposerons en général, sauf mention du contraire, que nous travaillons avec des fibré de degré parabolique 0.

I.3 Étude locale du modèle

La métrique $\hat{g}$ que nous avons définie sur la surface réglée M tout entière lorsque $\mathcal{E}$ est paraboliquement polystable, peut être définie localement en général sur un fibré parabolique. Pour commencer, on choisit une trivialisation locale de $\mathcal{E}$ par une base de section holomorphes (s_1, s_2) définies au voisinage d'un point parabolique P et respectant la filtration. Soit z une coordonnée locale holomorphe telle que $z(P) = 0$ et telle que la métrique sur Σ s'exprime sous la forme

$$g^{\Sigma} = \frac{dz^2}{|z|^2 \ln^2 |z|}.$$

On défini alors une métrique hermitienne sur $\mathcal{E}$ adaptée à la structure parabolique par

$$h = \begin{pmatrix} |z|^{2\alpha_1} & 0 \\ 0 & |z|^{2\alpha_2} \end{pmatrix}. \tag{I.6}$$

On en déduit une base orthonormée de sections locales en P données par

$$e_i = s_i / |z|^{\alpha_i},$$

et on calcule la connexion de Chern associée à h dans la trivialisation (s_i) :

$$\nabla^h = d + h^{-1}\partial h = d + \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \frac{dz}{z}, \tag{I.7}$$

ce qui donne dans les coordonnées induites par la base orthonormales (e_i),

$$\nabla^h = d + i \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} d\theta.$$

Cette connexion est plate, avec une singularité logarithmique au point P et on retrouve ainsi dans cette expression locale le fait que l'holonomie de la connexion de Chern ∇^h après un tour autour du point parabolique est égale à $diag(\exp(-2i\pi\alpha_1), \exp(-2i\pi\alpha_2))$. En notant H_x la distribution horizontale de la connexion induite par ∇^h sur le $\mathbb{CP}^1$-fibré $M \to \Sigma$, on a une décomposition au voisinage du point parabolique

$$T_x M = H_x \oplus T_x \mathbb{P}(\mathcal{E}_{\pi(x)}).$$

Comme la connexion de Chern respecte par définition la métrique hermitienne sur $\mathcal{E}$, on en déduit que la distribution (H_x) est invariante par les isométries de la métrique de Fubini-Study sur les fibres de $M \to \Sigma$.

On définit alors localement la métrique riemannienne $\hat{g}$ en prenant la métrique de Fubini-Study sur l'espace tangent aux fibres et l'image réciproque de g^Σ sur H_x. Comme de plus la connexion est plate, la distribution horizontale H_x est intégrable, et $\hat{g}$ apparaît comme un produit local $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ où chaque facteur est muni de sa métrique kählérienne standard.

I.3.1 Le modèle local du bout parabolique

En reprenant les notations du §I.1.3, nous disposons de plusieurs coordonnées locales définies au voisinage de P : la coordonnée $\xi \in \mathbb{H}^2$, la coordonnée $z \in \Delta_a$ définie au voisinage de P, les coordonnées $(\xi, (\tilde{u}, \tilde{v}))$ sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}^2$ induites par la base canonique (ϵ_i) de $\mathbb{C}^2$ et les coordonnées $(z, (u, v))$ sur $\mathcal{E}$ induites par la base orthonormée de sections locales (e_i) de $\mathcal{E}$.

On en déduit des coordonnées locales homogènes sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ et $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ dans lesquelles on a le revêtement holomorphe riemannien

$$\begin{array}{rcl} p : I_a \times \mathbb{CP}^1 & \to & \Delta_a^* \times \mathbb{CP}^1 \\ (\xi, [\tilde{u} : \tilde{v}]) & \mapsto & (e^{i\xi}, [e^{-i\alpha_1 \mathrm{Re}\xi}\tilde{u} : e^{-i\alpha_2 \mathrm{Re}\xi}\tilde{v}]), \end{array} \tag{I.8}$$

et

$$\tau.(\xi, [\tilde{u} : \tilde{v}]) = (\xi + 2\pi, [e^{2i\pi\alpha_1}\tilde{u} : e^{2i\pi\alpha_2}\tilde{v}]), \tag{I.9}$$

qui engendre le groupe d'automorphismes $\langle\tau\rangle \simeq \mathbb{Z}$ du revêtement p.

Si on se place par exemple dans les coordonnées locales de projection stéréographique $\tilde{v} = 1$ et $v = 1$, on obtient l'expression de p

$$p(\xi, \tilde{u}) = (e^{i\xi}, e^{i\alpha \mathrm{Re}\xi}\tilde{u}) \text{ avec } \alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

On en déduit que $e^{i\alpha \mathrm{Re}\xi} d\tilde{u} = p^* du - i\alpha u d\theta$. Or la métrique standard sur le revêtement s'écrit

$$p^*\hat{g} = g^{\mathbb{H}^2} + g^{\mathrm{FS}} = \frac{|d\xi|^2}{|\xi - \bar{\xi}|^2} + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2} |d\tilde{u}|^2 .$$

d'où

$$\hat{g} = \frac{|dz|^2}{(|z| \ln |z|)^2} + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2} |du - i\alpha u d\theta|^2 . \tag{I.10}$$

Dans les coordonnées $\tilde{u} = 1$ et $u = 1$, on calcule de même

$$\hat{g} = \frac{|dz|^2}{(|z| \ln |z|)^2} + \frac{4/c}{(1+|v|^2)^2} |dv + i\alpha v d\theta|^2 . \tag{I.11}$$

Nous pouvons maintenant oublier la construction globale de p et de l'action de τ pour ne retenir que les expressions locales (I.8) et (I.9) qui ne dépendent que des poids α_i.

Définition I.3.1 *Le groupe $\mathbb{Z} \simeq \langle \tau \rangle$ a une action libre, holomorphe et isométrique sur la variété complexe kählérienne $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ munie de sa métrique standard à courbure scalaire constante $2(c-1)$ définie par*

$$\tau.(\xi, [\tilde{u} : \tilde{v}]) = (\xi, [\tilde{u} e^{2i\pi\alpha_1} : \tilde{v} e^{2i\pi\alpha_2}]). \tag{I.12}$$

Le quotient $(I_a \times \mathbb{CP}^1)/\mathbb{Z}$ est par conséquent une variété kählérienne munie de la métrique de Kähler quotient $\hat{g}$, à courbure scalaire constante $2(c-1)$, et de volume fini. Ce quotient sera appelé le bout parabolique associé aux poids α_1, α_2. Nous le noterons $\mathcal{B}_a^{\alpha_1,\alpha_2}$, ou bien $\mathcal{B}$ lorsque aucune ambiguïté n'est possible.

Par définition, un bout parabolique est muni de *coordonnées adaptées* $(z, [u : v]) \in \Delta_a^* \times \mathbb{CP}^1$ dans lesquelles le revêtement canonique $p : I_a \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$ est donné par (I.8) soit :

$$\begin{array}{rcl} p : I_a \times \mathbb{CP}^1 & \to & \mathcal{B} \simeq \Delta_a^* \times \mathbb{CP}^1 \\ (\xi, [\tilde{u} : \tilde{v}]) & \mapsto & (e^{i\xi}, [e^{-i\alpha_1 \mathrm{Re}\xi} \tilde{u} : e^{-i\alpha_2 \mathrm{Re}\xi} \tilde{v}]). \end{array}$$

Si on se place dans des coordonnées de projection stéréographiques $u = 1$, ou $v = 1$, la métrique $\hat{g}$ est alors donnée par (I.10) et (I.11).

Dans des coordonnées adaptées, la projection suivant le premier facteur,

$$\pi : \mathcal{B} \simeq \Delta_a^* \times \mathbb{CP}^1 \to \Delta_a^*$$

est holomorphe et donne au bout parabolique une structure de $\mathbb{CP}^1$-fibré. Nous ferons référence au point $0 \in \Delta_a \supset \Delta_a^*$ en le notant P le plus souvent.

Le point P sera appelé *point parabolique associé au bout parabolique.* De plus, on a clairement le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I_a \times \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{p} & \mathcal{B} \\ & \searrow^{\pi_1} & \downarrow \pi \\ & & \Delta_a^* \end{array}$$

où π_1 est induite par le revêtement canonique $I_a \to \Delta_a^*$.

Remarques :

i) Nous avons introduit dans ce modèle la notion de point parabolique car nous verrons que la structure de $\mathbb{CP}^1$-fibré de $\mathcal{B}$ admet sous une certaine condition (cf corollaire I.3.3) un prolongement holomorphe au dessus du point parabolique en un orbifibré $\pi : \overline{\mathcal{B}} \to \Delta_a$.

ii) *A propos des points triviaux d'une structure parabolique :* si le point P, est un point trivial de la structure parabolique, on peut fabriquer à partir de la représentation unitaire ρ du §I.1 une métrique lisse sur $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \Sigma \cup \{P\}$. Pour commencer, on modifie la métrique g^Σ : à la place, on choisit une métrique à courbure -1 lisse sur $\Sigma \cup \{P\}$ avec des cusps paraboliques pour $P_i \neq P$. Puis on construit une la métrique kählérienne g sur M comme précédemment (cf. §I.1.2). Alors il est facile de voir que, dans les coordonnées induites sur $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ par les sections locales holomorphes (s_1, s_2) de $\mathcal{E}$ en P (cf. §I.1.3), la métrique g est égale à un produit $g = g^\Sigma + g^{\mathrm{FS}}$. On en déduit le prolongement souhaité de g.

I.3.2 Quelques notations

Fixons maintenant quelques notations. Soit $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ la 2-forme fermée sur $I_a \times \mathbb{CP}^1$ induite par la forme volume du facteur $(\mathbb{CP}^1, g^{\mathrm{FS}})$. Comme $\langle\tau\rangle$ agit isométriquement sur $I_a \times \mathbb{CP}^1$, on en déduit que la forme $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ passe au quotient. Nous noterons également $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ sa projection sur le bout parabolique.

Si à la place des coordonnées adaptées $(z, [u : v])$ sur le bout parabolique $\mathcal{B}$, on utilise plutôt les coordonnées $(t, \theta, [u : v])$, où $z = re^{i\theta}$ et $t = \ln(-\ln r)$, on obtient par exemple la coordonnée affine $v = 1$

$$\hat{g} = dt^2 + e^{-2t}d\theta^2 + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2}\,|du - i\alpha u d\theta|^2 = dt^2 + \hat{g}_t, \tag{I.13}$$

où $\hat{g}_t$ est une métrique sur $N \simeq S^1 \times \mathbb{CP}^1$ que nous appellerons la *tranche* du bout parabolique.

La métrique sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ dégénère dans la direction $\partial_x = dx^\sharp$ (où $\xi = x + iy$ et où $dx^\sharp$ désigne le dual suivant la métrique de dx). Ce champ de vecteurs est invariant sous l'action de $\mathbb{Z}$. Par conséquent $\partial_x = dx^\sharp$ passe au quotient et nous donne un champ de vecteurs noté $\mathcal{X}_\theta$ sur le bout parabolique. Comme $p^* d\theta = dx$, on calcule explicitement en introduisant les coordonnées polaires $u = \rho e^{i\theta_2}$

$$\mathcal{X}_\theta = \partial_\theta + \alpha \partial_{\theta_2}.$$

On vérifie que la métrique $p^*\hat{g} = g^{\mathbb{H}^2} + g^{\mathrm{FS}}$ est invariante suivant ∂_x (i.e. $\mathcal{L}_{\partial_x} p^*\hat{g} = 0$), on en déduit que $\hat{g}$ est invariante suivant $\mathcal{X}_\theta$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_\theta} \hat{g} = 0. \tag{I.14}$$

Classe de Kähler. Etant donné un fibré parabolique holomorphe au dessus d'une surface de Riemann $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$ de rang 2, nous choisissons une base locale de sections holomorphes (s_1, s_2), au voisinage d'un point P, adaptées à la structure parabolique (i.e. $\mathcal{F}^2_{P_i} = \langle s_2(P) \rangle$). On définit ainsi des coordonnées locales $(z, [x : y])$ sur la surface réglée compacte $\widetilde{M} \to \overline{\Sigma}$ obtenue par projectivisation de $\mathcal{E}$. Dans la coordonnée affine $y = 1$, la forme de Kähler $\omega^{\Delta^*} + \omega^{FS}$ de $\hat{g}$ s'exprime sous la forme

$$\omega = -2i\partial\overline{\partial} \ln(-\ln|z|) + 2\frac{i}{c}\partial\overline{\partial} \ln(|z|^{2\alpha} + |x|^2).$$

Dans l'autre carte affine, on a

$$\omega = -2i\partial\overline{\partial} \ln(-\ln|z|) + 2\frac{i}{c}\partial\overline{\partial} \ln(|z|^{2\alpha}|y|^2 + 1).$$

Les fonctions $-\ln(-\ln|z|)$, $\ln(|z|^{2\alpha} + |x|^2)$ et $\ln(|z|^{2\alpha}|y|^2 + 1)$ sont plurisousharmoniques (et non identiquement égales à $-\infty$ donc L^1_{loc}) et définissent par conséquent un potentiel pour ω vu comme un courant positif fermé sur la surface réglée $\widetilde{M}$ (pour une référence sur les singularités de fonctions plurisousharmoniques et les éclatements cf. [CG]).

La forme de Kähler associée à la métrique hyperbolique $-2i\partial\overline{\partial} \ln(-\ln|z|)$ a une singularité en $z = 0$. Or le nombre de Lelong de son potentiel est nul en $z = 0$; il nous suffit donc d'étudier le terme ω^{FS} restant.

Comme nous l'avons vu, le courant ω^{FS} est défini localement par un potentiel plurisousharmonique

$$\omega^{\mathrm{FS}} = i\partial\overline{\partial} U.$$

Nous constatons que le potentiel U est continu en dehors d'un pôle $U = -\infty$ au point Q de coordonnées $z = x = 0$. Pour étudier la singularité au point

Q, on fait un éclatement ; on obtient ainsi une surface réglée $\pi : \widehat{M} \to \widetilde{M}$ avec une fibre exceptionnelle $E = \pi^{-1}\{Q\}$ d'auto-intersection -1.

La composée d'une fonction plurisousharmonique et d'une fonction holomorphe est plurisousharmonique. De plus, on vérifie que dans le cas étudié $U \circ \pi \not\equiv -\infty$ ce qui nous permet de définir ici le l'image réciproque du courant $\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}} := \pi^*\omega^{\mathrm{FS}}$ en posant localement

$$\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}} = i\partial\overline{\partial}(U \circ \pi).$$

Par construction, l'adjoint relativement à la forme d'intersection de l'opérateur π^* défini ci-dessus est donné par π_* d'où

$$\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}} \cdot [E] = \pi^*\omega^{\mathrm{FS}} \cdot [E] = \omega^{\mathrm{FS}} \cdot \pi_*[E] = 0.$$

Nous allons maintenant analyser le courant $\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}}$: on a des coordonnées locales explicites (w_1, t_1) et (w_2, t_2) sur $\widehat{M}$ définies par

$$\begin{array}{lll} z & = w_1 & = t_2 w_2 \\ x & = t_1 w_1 & = w_2, \end{array}$$

de sorte que le courant $\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}}$ est donné par

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi}\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}} &= \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln(|w_1|^{2\alpha} + |t_1 w_1|^2) \\ &= \frac{i}{\pi}\alpha\partial\overline{\partial}\ln(|w_1|) + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln(1 + |t_1|^2|w_1|^{2(1-\alpha)}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi}\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}} &= \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln(|t_2 w_2|^{2\alpha} + |w_2|^2) \\ &= \frac{i}{\pi}\alpha\partial\overline{\partial}\ln(|w_2|) + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln(|t_2|^{2\alpha} + |w_2|^{2(1-\alpha)}). \end{aligned}$$

Nous remarquons que le potentiel du courant $\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}}$ possède des pôles tout le long du diviseur exceptionnel E donné dans chaque carte par les équations $w_1 = 0$ et $w_2 = 0$.

Par la formule de Poincaré-Lelong, on en déduit que le courant $\frac{c}{4\pi}\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}}$ se décompose en $\alpha[E] + \Phi$ avec $[E]$ le courant d'intégration sur le diviseur exceptionnel, et Φ un courant fermé positif appelé *transformée stricte* de $\frac{c}{4\pi}\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}}$. En outre, Φ est défini localement à l'aide d'un potentiel plurisousharmonique $\Phi = i\partial\overline{\partial}V$ possédant un unique pôle $V = -\infty$ au point $w_2 = t_2 = 0$. De plus,

$$\frac{c}{4\pi}\widehat{\omega}^{\mathrm{FS}} \cdot [E] = 0 = \alpha[E]^2 + \Phi \cdot [E] = -\alpha + \Phi \cdot [E],$$

d'où $\Phi \cdot [E] = \alpha$.

Nous résumons : la forme de Kähler ω vue comme un courant sur $\widetilde{M}$ se prolonge naturellement en un courant fermé positif $\widehat{\omega}' := \pi^*\omega$ sur $\widehat{M}$. Le courant $\widehat{\omega}'$ se décompose alors en une somme $\frac{4\alpha\pi}{c}[E] + \widehat{\omega}$. Ici, $[E]$ est le courant d'intégration sur E concentré près du diviseur exceptionnel et $\widehat{\omega}$ est la transformée stricte de ω qui est un courant fermé strictement positif sur $\widehat{M}$ vérifiant

$$\frac{\widehat{\omega} \cdot [E]}{\widehat{\omega} \cdot [F]} = \alpha,$$

où F est une fibre générique de la surface réglée. On peut donc faire une analogie entre le théorème I.3.5 et la conjecture suivante (démontrée dans certains cas pour $s = 0$ par Le Brun et Singer) :

Conjecture : Il existe une métrique de Kähler lisse à courbure scalaire constante $s \leq 0$ sur l'éclatement de surface réglée $\widehat{M}$ vérifiant

$$\frac{[\omega] \cdot [E]}{[\omega] \cdot [F]} = \alpha,$$

si et seulement si le fibré parabolique correspondant est paraboliquement polystable.

I.3.3 Compactification du bout parabolique rationnel

Nous faisons maintenant l'hypothèse que $\alpha_2 - \alpha_1 = r/q \in \mathbb{Q}$, où r et q sont premiers entre eux. Dans ce cas, il est facile de voir que l'action de $\mathbb{Z}$ définie par (I.12) vérifie

$$\tau^q.(\xi, [\tilde{u} : \tilde{v}]) = (\xi + 2\pi q, [\tilde{u} : \tilde{v}]).$$

On en déduit que $(I_a \times \mathbb{CP}^1)/\langle\tau^q\rangle \simeq (I_a/\langle\tau^q\rangle) \times \mathbb{CP}^1$. On vient donc de montrer que le revêtement $p : I_a \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$ se factorise par un revêtement p^q à q feuillets dont le groupe d'automorphismes est égal à $\langle\tau\rangle/\langle\tau^q\rangle \simeq \mathbb{Z}_q$. On a donc un diagramme commutatif holomorphe

$$\begin{array}{ccc} I_a \times \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{\tilde{p}} & I_a/\langle\tau^q\rangle \times \mathbb{CP}^1 \\ & \searrow^{p} & \downarrow{\scriptstyle p^q} \\ & & \mathcal{B} \end{array}$$

où $\tilde{p}$ désigne la projection canonique sur le revêtement quotient. Nous noterons

$$\begin{array}{rcl} \pi^q : \Delta_{a/q} \simeq I_a/\langle\tau^q\rangle \cup \{\infty\} & \to & \Delta_a \simeq I_a/\langle\tau\rangle \cup \{\infty\} \\ z & \mapsto & z^q \end{array}$$

le revêtement holomorphe ramifié à q feuillets du disque par lui-même qui est également donné à l'aide de la coordonnée ξ sur I_a par $\xi \mapsto \xi$. Le groupe d'automorphisme $\mathbb{Z}_q \simeq \langle\tau\rangle/\langle\tau^q\rangle$ du revêtement π^q agit par

$$\tau.\xi = \xi + 2\pi \text{ ou de façon équivalente } \tau.z = e^{\frac{2i\pi}{q}} z.$$

On déduit de π^q une projection holomorphe notée également

$$\pi^q : I_a/\langle\tau^q\rangle \cup \{\infty\} \times \mathbb{CP}^1 \to \Delta_a.$$

Par construction, il est clair que $\pi \circ p = \pi_1 = \pi^q \circ \tilde{p}$; on en déduit le lemme suivant :

Lemme I.3.2 (Structure du bout parabolique rationnel) *Supposons que $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = r/q \in \mathbb{Q}$, avec r et q premiers entre eux. Le revêtement standard $p : I_a \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$ du bout parabolique $\mathcal{B}_a^{\alpha_1,\alpha_2}$ se factorise par un revêtement à q- feuillets p^q et on a le diagramme holomorphe commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} I_a \times \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{\tilde{p}} & I_a/\langle\tau^q\rangle \times \mathbb{CP}^1 & & \\ & \searrow^{p} & \downarrow{\scriptstyle p^q} & \searrow^{\pi^q} & \\ & & \mathcal{B} & \xrightarrow{\pi} & \Delta_a^*, \end{array}$$

L'action de $\mathbb{Z}_q$ sur $I_a/\langle\tau^q\rangle \times \mathbb{CP}^1 \simeq \Delta^*_{a/q} \times \mathbb{CP}^1$ s'étend clairement en une action holomorphe sur $\Delta_{a/q} \times \mathbb{CP}^1$: pour le voir, il suffit de l'écrire dans des coordonnées adaptées $(z, [\tilde{u} : \tilde{v}])$

$$\tau.(z, [\tilde{u} : \tilde{v}]) = (ze^{\frac{2i\pi}{q}}, [\tilde{u}e^{2i\pi\alpha_1} : \tilde{v}e^{2i\pi\alpha_2}]).$$

Remarque : si l'on modifie la métrique sur le facteur $\Delta^*_{a/q}$ et qu'on la remplace par n'importe quelle métrique lisse sur $\Delta_{a/q}$ invariante par rotation, cette action devient même isométrique.

Alors, comme nous l'avons déjà remarqué, π^q se prolonge de façon holomorphe en $\pi^q : \Delta_{a/q} \times \mathbb{CP}^1 \to \Delta_a$; au quotient, on obtient un orbifibré holomorphe en droites projectives

$$\overline{\mathcal{B}} = (\Delta_{a/q} \times \mathbb{CP}^1)/\mathbb{Z}_q = \mathcal{B} \cup (\mathbb{CP}^1/\mathbb{Z}_q) \xrightarrow{\pi} \Delta_a.$$

Reformulons cette discussion dans le corollaire suivant.

Corollaire I.3.3 *Si $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = r/q \in \mathbb{Q}$ avec r et q premiers entre eux, le $\mathbb{CP}^1$-fibré $\mathcal{B} \to \Delta_a^*$ admet un prolongement holomorphe en un orbifibré*

$$\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup (\mathbb{CP}^1/\mathbb{Z}_q) \xrightarrow{\pi} \Delta_a.$$

Cet orbifibré possède un revêtement ramifié à q feuillets $p^q : \Delta_{a/q} \times \mathbb{CP}^1 \to \overline{\mathcal{B}}$ tel que $(p^q)^*\hat{g}$ est égale à la métrique produit standard sur $\Delta^*_{a/q} \times \mathbb{CP}^1$.

La fibre $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^1/\mathbb{Z}_q$ sera appelée «diviseur à l'infini du bout parabolique».

Modèle asymptotique. Nous introduisons maintenant sur une variété à bouts paraboliques, une notion de métriques asymptotiques (au sens C^2) au modèle local de métrique $\hat{g}$. C'est une condition technique raisonnable qui va nous permettre de démontrer le théorème I.3.5.

Définition I.3.4 *Si une variété X possède des bouts paraboliques, on en déduit un modèle local de métrique que nous noterons $\hat{g}$. Nous appellerons métrique «asymptotique au modèle local», toute métrique g sur X telle que $g = \hat{g} + o(\hat{g})$, où $o(\hat{g})$ tend uniformément vers 0 en norme C^2, lorsqu'on s'approche d'un diviseur parabolique à l'infini.*

Remarque : lorsque nous parlerons d'un modèle local $\hat{g}$, il sera toujours sous-entendu que nous avons préalablement choisi les isomorphismes entre les bouts de X et des bouts paraboliques.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème

Théorème I.3.5 *Soit $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$ un fibré parabolique holomorphe de rang 2 sur une surface de Riemann compacte $\overline{\Sigma}$. Soit $(P_i)_{1\leq i\leq k}$ l'ensemble des points paraboliques de $\overline{\Sigma}$. Nous supposons en outre que $2g(\overline{\Sigma}) - 2 + k > 0$. Si la surface complexe réglée associée $M \to \Sigma$ admet une métrique kählérienne g^{K} à courbure scalaire constante négative $2(c-1)$, asymptotique au modèle local $\hat{g}$, alors $\mathcal{E}$ est paraboliquement stable.*

En outre, si une telle métrique g^{K} existe, alors elle provient à biholomorphisme près, du modèle $(\Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1, \hat{g})$ où $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PU}(2)$ est une représentation projective unitaire associée à $\mathcal{E}$.

Chapitre II

Cohomologie L^2 et formes harmoniques

Dans tout ce chapitre, on étudie une variété M munie de bouts paraboliques. On en déduit un modèle local de métrique $\hat{g}$ pour lequel on peut définir la cohomologie L^2 de M.

Cette cohomologie notée $\mathrm{H}^*_{L^2(\hat{g})}(M)$ ou $\mathrm{H}^*_{L^2}(M)$ lorsque aucune confusion n'est possible est définie à l'aide du complexe des formes différentielles L^2 sur M. Plus précisément $\mathrm{H}^*_{L^2}(M)$ est l'espace des formes différentielles fermées $L^2(\hat{g})$ sur M modulo les formes exactes $d\gamma$ avec γ telle que $\gamma,\ d\gamma \in L^2(\hat{g})$.

Nous allons démontrer un lemme de Poincaré «à l'infini» sur le bout parabolique de M pour la cohomologie L^2, afin de pouvoir la calculer explicitement (cf II.2.2).

Soit g une métrique asymptotique au modèle local $\hat{g}$; alors son complexe des formes différentielles $L^2(g)$ coïncide avec celui de formes $L^2(\hat{g})$. On en déduit que les espaces des cohomologies correspondantes sont égaux

$$\mathrm{H}^*_{L^2(g)}(M) \simeq \mathrm{H}^*_{L^2(\hat{g})}(M).$$

Pour simplifier, nous supposerons que M a un unique bout parabolique. Tout ce que nous dirons s'étend trivialement au cas de plusieurs bouts paraboliques.

Si nous faisons l'hypothèse supplémentaire que les poids associés vérifient la condition, $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \in \mathbb{Q}$ alors, nous avons vu que M admet une compactification $\overline{M}$ en ajoutant un diviseur orbifold D de la forme $\mathbb{CP}^1/\mathbb{Z}_q$ au dessus du point parabolique.

Si on munit la surface de Riemann Σ de sa métrique kählérienne g^Σ à courbure -1 avec des cusps aux points paraboliques, alors un résultat bien connu (cf. [Z]) est que

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\Sigma}) \simeq \mathrm{H}^*_{L^2}(\Sigma).$$

Il est donc raisonnable d'espérer étendre ce résultat en

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\overline{M}) \simeq \mathrm{H}^*_{L^2}(M). \tag{II.1}$$

à l'aide d'un lemme de Poincaré local II.2.6. Nous allons au §II.1 définir sur $\overline{M}$ des métriques lisses g_j qui vont approximer la métrique singulière g. On démontrera alors un résultat de convergence sur tout compact de M des représentants g_j harmoniques d'une classe de cohomologie vers le représentant L^2 (cf. prop. II.3.1 et II.3.7). Afin de démontrer ce résultat, nous développerons la théorie de Hodge à l'aide d'inégalités de Poincaré uniformes pour les métriques g_j et nous démontrerons également (cf. cor. II.3.10) que la décomposition

$$\mathrm{H}^2_{L^2}(M) = H^{+_j} \oplus H^{-_j}$$

converge vers la décomposition $H^+ \oplus H^-$ induite par g.

II.1 Approximation par des métriques lisses

Nous expliquons dans cette partie comment approximer la métrique g singulière sur $\overline{M}$ par une suite de métriques (g_j) lisses sur $\overline{M}$ qui s'approchent de g.

II.1.1 Approximation du modèle local $\hat{g}$

Puisque les poids du bout parabolique vérifient $\alpha_2 - \alpha_1 = r/q \in \mathbb{Q}$ (où r et q sont premiers entre eux), on sait d'après le lemme I.3.2 et le corollaire I.3.3, que la compactification du bout parabolique admet un revêtement ramifié holomorphe à q feuillets

$$p^q : \Delta_{a/q} \times \mathbb{CP}^1 \to \overline{\mathcal{B}},$$

tel que $(p^q)^*\hat{g}$ est la métrique standard $g^{\Delta^*} + g^{\mathrm{FS}}$ sur $\Delta^*_{a/q} \times \mathbb{CP}^1$. Alors, on peut approximer $\hat{g}$ en remplaçant la métrique singulière g^{Δ^*} par une métrique lisse sur Δ, invariante sous l'action de $\mathbb{Z}_q$. On sait que

$$g^{\Delta^*} = \frac{|dz|^2}{(|z| \ln |z|)^2}.$$

On peut par exemple multiplier cette métrique par un facteur conforme singulier de la forme $\lambda(|z|)$, valant $(|z| \ln |z|)^2$ au voisinage de l'origine et 1 loin de l'origine. La métrique $g_\lambda = \lambda(|z|)g^{\Delta^*}$ s'étend de façon lisse à l'origine ; cette opération consiste simplement à recoller un disque plat au bout du cusp et

la métrique ainsi définie est compatible avec la structure complexe donc kählérienne (il s'agit d'une surface). Cette construction est $\mathbb{Z}_q$-invariante car la fonction $\lambda(|z|)$ est elle même invariante. Alors la métrique $g_\lambda + g^{\mathrm{FS}}$ passe au quotient et définit une métrique kählérienne sur le bout parabolique orbifold compactifié $\overline{\mathcal{B}}$.

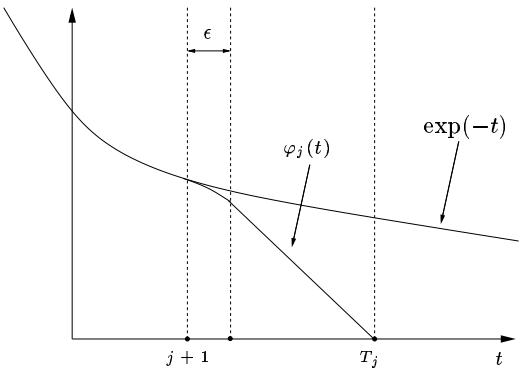
Si on suit les géodésiques de g_λ normales à un cercle, on en déduit une nouvelle coordonnée locale t' telle que $t = t'$ là où $\lambda(|z|) = 1$ et $g_\lambda = dt'^2 + \varphi(t')^2 d\theta^2$. De façon équivalente, on peut donc définir ce type de métrique en se donnant la fonction $\varphi(t')$.

Définition des métriques $\hat{g}_j$. Soit la métrique

$$g_j^\Delta = dt^2 + \varphi_j^2 d\theta^2,$$

où φ_j est définie comme suit : pour $t \leq j+1$, on pose $\varphi_j = e^{-t}$. Puis pour $j+1 \leq t \leq j+1+\delta_j$, on fait brutalement décroître φ_j'' de $e^{-(j+1)}$ jusqu'à 0 pour un δ_j que nous ferons par la suite tendre vers 0. Enfin pour $j+1+\delta_j \leq t \leq j+1+\epsilon$, on peut quitte à rendre φ_j'' très négative faire passer φ_j' dans cet intervalle de $-e^{-(j+1)}$ à -1.

On a donc recollé la métrique la métrique de cusp (pour $t \leq j+1$) à la métrique plate. En effet si $\varphi_j' = -1$, alors pour un T_j légèrement supérieur à $j+1+\epsilon$ bien choisit, on a $\varphi_j = T_j - t$. Comme le montre le changement de variable $t' = T_j - t$, la métrique g_j^Δ se recolle à la métrique plate sur le disque ; il en résulte que g_j^Δ est en réalité lisse sur le disque $\Delta_{a/q}$ tout entier. On vérifie que quitte à choisir δ_j suffisamment petit, on peut supposer que le rapport $-\varphi_j'/\varphi_j$ est croissant, et reste donc minoré par 1. Nous résumons cette construction dans un dessin.



Alors, la métrique $g_j^\Delta + g^{\mathrm{FS}}$ est lisse et $\mathbb{Z}_q$-invariante sur $\Delta_{a/q} \times \mathbb{CP}^1$. On en déduit une métrique $\hat{g}_j$ lisse sur $\overline{\mathcal{B}}$ qui s'écrit dans les coordonnées (t, θ, u)

$$\hat{g}_j = dt^2 + \varphi_j^2 d\theta^2 + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2} \left| du - i\alpha u d\theta \right|^2 . \qquad \text{(II.2)}$$

II.1.2 Approximation d'une métrique asymptotique au modèle local

Étant donnée une métrique riemannienne g sur M, asymptotique au modèle local sur le bout parabolique de M, on approxime la métrique g par des métriques g_j lisses sur la compactification $\overline{M}$ comme suit : soit $\chi(t)$ une fonction lisse telle que

- χ est croissante,
- $\chi(t) = 0$ pour $t \leq 0$,
- $\chi(t) = 1$ pour $t \geq \frac{1}{2}$.

Notons $\chi_j(t) = \chi(t-j)$, puis posons

$$g_j = (1-\chi_j)g + \chi_j \hat{g}_j. \tag{II.3}$$

Alors puisque g est asymptotique au modèle local, les métriques g_j et $\hat{g}_j$ sont également très proche au sens C^2 sur la zone de recollement $j \leq t \leq j+1$, et on en déduit que

$$\sup_{t \geq j} \left\{ |\hat{g}_j - g_j| + |\nabla^{\hat{g}_j} - \nabla^{g_j}| + |R^{\hat{g}_j} - R^{g_j}| \right\} \to 0 \text{ lorsque } j \to \infty. \tag{II.4}$$

Courbure des métriques g_j. Le modèle local de métrique $\hat{g}$ est à courbure bornée. En effet comme le montre le modèle local du bout parabolique (cf définition I.3.1) la métrique $p^*\hat{g}$ apparaît sur le revêtement associé au bout parabolique comme la métrique standard sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$. Puisque les courbures sectionnelles de cette métrique valent c et -1, on en déduit que $\hat{g}$ est à courbure bornée. Par définition de «asymptotique au modèle local», ceci implique que toute métrique asymptotique au modèle local est à courbure bornée.

Lorsqu'on approxime la métrique $\hat{g}$ par des métrique $\hat{g}_j$ lisses sur la compactification $\overline{M}$, on crée une «bulle» de courbure très positive : pour le voir revenons à la définition de $\hat{g}_j$ que nous avons donnée dans la partie II.1.1. Pour approximer $\hat{g}$, nous avons simplement modifié dans le revêtement local p^q la métrique de cusp sur le premier facteur en une métrique

$$g_j^{\Delta} = dt^2 + \varphi_j^2 d\theta^2.$$

La connexion de Levi-Civita associée est explicite ; un calcul simple montre que

$$\nabla_{\partial_t}\partial_t = 0, \qquad \nabla_{\partial_t}(\varphi_j^{-1}\partial_\theta) = 0,$$
$$\nabla_{(\varphi_j^{-1}\partial_\theta)}\partial_t = \frac{\partial_t\varphi_j}{\varphi_j}\varphi_j^{-1}\partial_\theta, \qquad \nabla_{(\varphi_j^{-1}\partial_\theta)}\varphi_j^{-1}\partial_\theta = -\frac{\partial_t\varphi_j}{\varphi_j}\partial_t,$$

et on en déduit que la courbure sectionnelle de g_j^Δ est égale à

$$K^{g_j^\Delta}(\partial_t, \varphi_j^{-1}\partial_\theta) = -\frac{{\partial_t}^2\varphi_j}{\varphi_j}.$$

Ce terme est par définition de φ_j singulier (très positif quand $j \to \infty$) sur l'anneau $t \in [j+1, j+1+\epsilon]$ et uniformément borné en dehors.

On en déduit que la courbure scalaire de la métrique $\hat{g}_j = {p^q}_*(g_j^\Delta + g^{\mathrm{FS}})$ obtenue sur le bout parabolique est donnée par

$$s^{\hat{g}_j} = 2(c - \chi_j \frac{{\partial_t}^2\varphi_j}{\varphi_j}),$$

et que

$$s_b^{\hat{g}_j} = s^{\hat{g}_j} + 2\chi_j \frac{{\partial_t}^2\varphi_j}{\varphi_j}$$

est uniformément bornée.

Puisque la métrique g est asymptotique au modèle local $\hat{g}$, on en déduit d'après (II.4) un résultat analogue pour les métriques g_j :

Lemme II.1.1 *La courbure scalaire de la métrique g_j s'écrit*

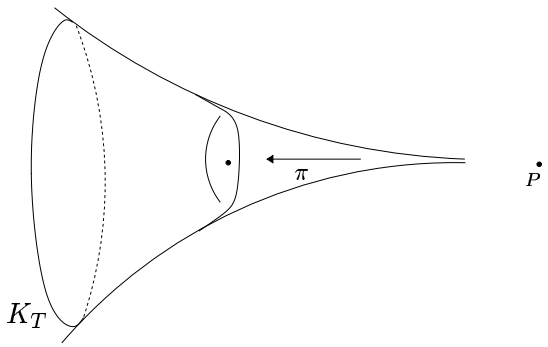
$$s^{g_j} = s_b^{g_j} - 2\chi_j \frac{{\partial_t}^2\varphi_j}{\varphi_j}, \tag{II.5}$$

où $s_b^{g_j}$ est uniformément borné.

Nous aurons besoin par la suite du lemme technique suivant :

Lemme II.1.2 (Contrôle du volume) *Quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un compact K de M, tel que* $\mathrm{vol}^{g_j}(M \setminus K) \leq \epsilon$ *et* $\mathrm{vol}^{g}(M \setminus K) \leq \epsilon$.

Démonstration : Puisque la métrique g est asymptotique au modèle local $\hat{g}$, il suffit de démontrer le lemme pour $\hat{g}$ et $\hat{g}_j$. Comme $\hat{g}$ est de volume fini, on en déduit un compact $K_T = M \setminus \{t > T\}$, avec T suffisamment grand, tel que $\mathrm{vol}^g(M \setminus K_T) \leq \epsilon$. La construction des approximations g_j^Δ de la métrique de cusp g^{Δ^*} peut être dessinée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ de cette façon



où π est un difféomorphisme entre les deux surfaces (en dehors du point parabolique) contractant les distances. Alors pour T suffisamment grand,

$$\mathrm{vol}^{g_j^\Delta}(\{t > T\}) \leq \mathrm{vol}^{g^{\Delta^*}}(\{t > T\}) \leq \epsilon / \mathrm{vol}^{g^{\mathrm{FS}}}(\mathbb{CP}^1).$$

Puisque dans le revêtement standard $p : I_a \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$ associé au bout parabolique, les métriques $p^*\hat{g}$ et $p^*\hat{g}_j$ coïncident respectivement par définition avec g^Δ et g_j^Δ sur le premier facteur et avec la métrique de Fubini-Study sur le facteur $\mathbb{CP}^1$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}^{\hat{g}_j}(M \setminus K_T) &= \mathrm{vol}^{g_j^\Delta}(\{t > T\}) \times \mathrm{vol}^{g^{\mathrm{FS}}}(\mathbb{CP}^1) \\ &\leq \mathrm{vol}^{g^{\Delta^*}}(\{t > T\}) \times \mathrm{vol}^{g^{\mathrm{FS}}}(\mathbb{CP}^1) = \mathrm{vol}^{\hat{g}}(M \setminus K_T) \leq \epsilon,\end{aligned}$$

d'où le lemme. □

On en déduit immédiatement le corollaire suivant

Corollaire II.1.3 *Le volume des métriques g et g_j est uniformément borné.*

II.2 Cohomologie L^2 et lemme de Poincaré

Nous commençons par démontrer des estimées sur la première valeur propre du laplacien sur les fonction à l'aide de la courbure moyenne des métriques.

II.2.1 Inégalité de Poincaré pour les fonctions

La non annulation de la courbure moyenne est un outil essentiel pour obtenir des contrôles sur la première valeur propre du laplacien.

Définition II.2.1 *Soit g une métrique riemannienne sur $[t_1, t_2] \times N$ de la forme $g = dt^2 + g_t$ où g_t est une métrique sur N dépendant de t. On définit la courbure moyenne de la métrique g comme la fonction*

$$H = \frac{1}{3}\mathrm{tr}_g \mathbb{I} = -\frac{1}{3}\frac{\partial_t \mathrm{vol}^{g_t}}{\mathrm{vol}^{g_t}},$$

où $\mathbb{I}$ désigne la deuxième forme fondamentale de la tranche N et où vol^{g_t} est la forme volume associée à la métrique g_t. Par commodité, on définit également la fonction h par

$$h = \frac{3}{2}H.$$

Courbure moyenne de $\hat{g}$ et $\hat{g}_j$. Nous avons vu que dans des coordonnées adaptées, $(t, \theta, [u : v])$ sur un bout parabolique, la métrique $\hat{g}$ s'écrit (cf. (II.2))

$$\hat{g} = dt^2 + \hat{g}_t,$$

où $\hat{g}_t$ est une métrique sur la tranche $S^1 \times \mathbb{CP}^1$ que l'on peut exprimer par exemple dans les coordonnées de projection stéréographique $v = 1$ par

$$\hat{g}_t = e^{-2t} d\theta^2 + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2} \left| du - i\alpha u d\theta \right|^2, \text{ avec } \alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

On en déduit que la courbure moyenne du modèle local $\hat{g}$ sur le bout parabolique est égale à $h = 1/2$.

Dans le cas où $\alpha_2 - \alpha_1 \in \mathbb{Q}$, on définit les métriques $\hat{g}_j$, et par construction, on a des coordonnées $(t, \theta, [u : v])$ sur le bout parabolique dans lesquelles

$$\hat{g}_j = dt^2 + \hat{g}_t^j,$$

avec $\hat{g}_t^j$ une métrique sur la tranche qui s'écrit dans les coordonnées où $v = 1$

$$\hat{g}_t^j = \varphi_j(t)^2 d\theta^2 + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2} \left| du - i\alpha u d\theta \right|^2,$$

d'où

$$\mathrm{vol}^{\hat{g}_t^j} = \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2} \varphi_j(t) d\theta \wedge (du - i\alpha u d\theta) \wedge (d\bar{u} + i\alpha \bar{u} d\theta).$$

Un simple calcul montre que pour la métrique $\hat{g}_j$, la courbure moyenne est alors égale à

$$h = -\frac{1}{2} \frac{\partial_t \varphi_j}{\varphi_j},$$

qui est par construction de φ_j minoré par $1/2$. Près de $t = T_j$, on sait même que $\varphi_j = T_j - t$; la courbure moyenne est alors égale à $h = \frac{1}{2} \frac{1}{T_j - t}$. On voit donc que h tend vers $+\infty$ quand $t \to T_j$.

Courbure moyenne et laplacien sur les fonctions. Dès que l'on a un contrôle du type $h \geq h_0 > 0$, nous obtenons des estimées sur la première valeur propre du laplacien sur les fonctions.

Lemme II.2.2 *Soit $g = dt^2 + g_t$ une métrique riemannienne sur $[t_1, t_2] \times N$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Si la courbure moyenne de g vérifie*

$$h \geq h_0 > \delta, \text{ ou } \delta > h_0 \geq h,$$

alors pour toute fonction f, on a un contrôle

$$\begin{aligned}\int_{[t_1,t_2]\times N}|e^{\delta t}\partial_t f|^2\mathrm{vol}^g \geq (h_0-\delta)^2\int_{[t_1,t_2]\times N}|fe^{\delta t}|^2\mathrm{vol}^g \\ +(h_0-\delta)\Big\{\int_{t=t_2}|fe^{\delta t}|^2\mathrm{vol}^g-\int_{t=t_1}|fe^{\delta t}|^2\mathrm{vol}^g\Big\},\end{aligned} \tag{II.6}$$

Remarque : ce lemme s'applique en particulier aux métriques $\hat{g}$ et $\hat{g}_j$ dans le cas $h \geq h_0 = \frac{1}{2} > \delta = 0$ et à la métrique $\hat{g}$ avec $\delta = 1 > h_0 = \frac{1}{2} \geq h$.
Démonstration : On commence dans les deux cas par une simple intégration par parties :

$$\int_{\partial[t_1,t_2]\times N}|fe^{\delta t}|^2\mathrm{vol}^g = \int\left(2f\partial_t f+|f|^2\left(2\delta+\frac{\partial_t\mathrm{vol}^{g\,g}}{\mathrm{vol}}\right)\right)e^{2\delta t}\mathrm{vol}^g\,;$$

ensuite suivant l'hypothèse, $2\delta + \partial_t\mathrm{vol}^g/\mathrm{vol}^g = 2(\delta - h)$ est soit majoré par $2(h_0 - \delta)$ lorsque $h \geq h_0 > \delta$, soit minoré par $2(\delta - h_0)$ lorsque $\delta > h_0 \geq h$.

Continuons ici le premier cas : on majore le terme

$$2f\partial_t f \leq (h_0-\delta)|f|^2+\frac{1}{h_0-\delta}|\partial_t f|^2$$

ce qui implique,

$$\int_{\partial[t_1,t_2]\times N}|fe^{\delta t}|^2\mathrm{vol}^g \leq \int\left((\delta-h_0)|fe^{2\delta t}|^2+\frac{1}{h_0-\delta}|e^{2\delta t}\partial_t f|^2\right)\mathrm{vol}^g,$$

d'où le résultat.

Pour le cas $\delta > h_0 \geq h$, on utilise la minoration

$$(h_0-\delta)|f|^2+\frac{1}{h_0-\delta}|\partial_t f|^2 \leq 2f\partial_t f, \tag{II.7}$$

et on obtient

$$\int_{\partial[t_1,t_2]\times N}|fe^{\delta t}|^2\mathrm{vol}^g \geq \int\left((\delta-h_0)|fe^{2\delta t}|^2+\frac{1}{h_0-\delta}|e^{2\delta t}\partial_t f|^2\right)\mathrm{vol}^g.$$

□

On en déduit le résultat suivant pour le laplacien sur les fonctions

Corollaire II.2.3 *Dans le cas où M possède des bouts paraboliques vérifiant la condition $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \in \mathbb{Q}$, on définit pour toute métrique g asymptotique au modèle local les métrique g_j lisse sur $\overline{M}$ qui l'approximent. Alors il existe*

une constante $c > 0$, indépendante de j, telle que pour toute fonction f vérifiant $\int_M f \mathrm{vol}^{g_j} = 0$, on ait

$$\int_M |df|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \geq c \int_M |f|^2 \mathrm{vol}^{g_j},$$

les normes étant prises par rapport à la métrique g_j.

Démonstration : Supposons que c'est faux. Alors il existe une suite de fonctions (f_j) telle que $\int f_j \mathrm{vol}^{g_j} = 0$, $\|f_j\|_{L^2(g_j)} = 1$ et $\|df_j\|_{L^2(g_j)} \to 0$. Sur un domaine compact K fixé, (f_j) est donc uniformément bornée au sens $L^2_1(g)$. Par compacité de la boule unité en topologie faible, on en déduit que quitte à extraire une sous-suite, (f_j) converge au sens faible vers $f \in L^2_1$ vérifiant $\|df\|_{L^2(g)} = 0$, d'où $f = cste$. Par compacité de l'inclusion $L^2_1 \hookrightarrow L^2$, on en déduit que (f_j) converge fortement vers f au sens L^2 sur tout compact de M.

D'après le lemme II.1.2, il est possible étant donné $\epsilon > 0$ de choisir un compact K suffisamment grand, afin que $\mathrm{vol}^g(M \setminus K) \leq \epsilon$ et $\mathrm{vol}^{g_j}(M \setminus K) \leq \epsilon$ pour tout j. Sur K, (f_j) converge fortement vers f au sens L^2, donc

$$\int_K f \mathrm{vol}^g = \lim \int_K f_j \mathrm{vol}^{g_j} = -\lim \int_{M \setminus K} f_j \mathrm{vol}^{g_j} \tag{II.8}$$

or

$$\left| \int_{M \setminus K} f_j \mathrm{vol}^{g_j} \right|^2 \leq \mathrm{vol}^{g_j}(M \setminus K) \left(\int_M |f_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \right),$$

et comme par hypothèse $\|f_j\|_{L^2(g_j)} = 1$,

$$\left| \int_{M \setminus K} f_j \mathrm{vol}^{g_j} \right|^2 \leq \epsilon.$$

Finalement, puisque f est constante, l'équation (II.8) implique que

$$|f|(\mathrm{vol}^g(M) - \epsilon) \leq |f \mathrm{vol}^g(K)| \leq \epsilon,$$

d'où $f = 0$.

Soit $\chi(t)$, une fonction cut-off à support compact valant 1 sur K et 0 pour $t \geq t_0$. Découpons $f_j = \chi f_j + (1-\chi) f_j$; d'une part, $\chi f_j \xrightarrow{L^2} \chi f = 0$; d'autre part, on applique le lemme II.2.2 sur $[t_0, T_j]$. On vérifie que les termes de bords sont nuls : en effet $\chi f(t_0) = 0$ et le volume des tranches tend vers 0 quand $t \to T_j$. Le lemme fournit ainsi une constante $c > 0$, indépendante de j telle que

$$\int |(1-\chi) f_j|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}_j} \leq c \int |d(1-\chi) f_j|^2_{\hat{g}_j} \mathrm{vol}^{\hat{g}_j}. \tag{II.9}$$

Comme g est asymptotique au modèle local , les métriques g_j vérifient (II.4) et on en déduit une inégalité du même type pour les métriques g_j (à condition de prendre un compact K suffisamment grand une constante c légèrement plus grande).

On majore

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|f_j\|^2_{L^2(g_j)} &\leq \int |\chi f_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} + \int |(1-\chi)f_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \\ &\leq \int |\chi f_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} + c\int |d((1-\chi)f_j)|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \\ &\leq \int |\chi f_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} + 2c\int |(d\chi)f_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} + 2c\|df_j\|^2_{L^2(g_j)}\end{aligned}$$

Ceci est contradictoire car sur tout compact de M, $f_j \xrightarrow{L^2} f = 0$ donc les deux premières intégrales tendent vers 0 et par hypothèse, $\|df_j\|^2_{L^2(g_j)}$ tend vers 0. □

En passant à la limite (en utilisant la densité des fonctions C^∞ à support compact dans $L^2_1(g)$) on démontre le corollaire suivant qui est vrai même dans les cas où les bouts paraboliques de M ne vérifient pas nécessairement la condition $\alpha \in \mathbb{Q}$:

Corollaire II.2.4 *Soit g une métrique asymptotique au modèle local sur M. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^2_1(g)$ vérifiant $\int_M f \mathrm{vol}^g = 0$, on ait*

$$\int_M |df|^2 \mathrm{vol}^g \geq c \int_M |f|^2 \mathrm{vol}^g.$$

Cette inégalité de Poincaré permet classiquement de développer la théorie de Hodge des 1-formes g-harmoniques L^2. On en déduit que toute classe de cohomologie de $\mathrm{H}^1_{L^2}(M)$ admet un unique représentant g-harmonique L^2 (quel que soit le modèle local).

Corollaire II.2.5 *Pour une métrique $g = dt^2 + g_t$ sur $[t_1, t_2] \times N$ telle que $h \geq h_0 > 0$, on a pour toute fonction f*

$$\frac{1}{h_0}\int_{[t_1,t_2]\times N} |\partial_t f - 2fh|^2 \mathrm{vol}^g + \int_{t=t_2} |f|^2 \mathrm{vol} - \int_{t=t_1} |f|^2 \mathrm{vol}^g \geq h_0 \int |f|^2 \mathrm{vol}.$$

Démonstration : Posons $H(t) = 2\int_{t_0}^t h$, et $G_t = \exp(4/3H)g_t$. Alors $\mathrm{vol}^{G_t} = \exp(2H)\mathrm{vol}^{g_t}$, d'où $\partial_t \mathrm{vol}^{G_t} = (2\partial_t H - 2h)\mathrm{vol}^{G_t} = 2h\ vol^{G_t}$. On en déduit que la courbure moyenne de la métrique $G = dt^2 + G_t$ est égale à $-h$. On applique le lemme II.2.2 à la métrique G et à la fonction $F = \exp(-H)f$, dans le cas où $h^G = -h \leq -h_0 < 0$. Alors $\partial_t F = (\partial_t f - 2hf)\exp(-H)f$, d'où $|\partial_t F|^2 \mathrm{vol}^{G_t} = |\partial_t f - 2hf|^2 \mathrm{vol}^g_t$ et on en déduit le corollaire. □

II.2.2 Lemme de Poincaré à l'infini

Le lemme II.2.2 (qui ne dépend de l'hypothèse $\alpha \in \mathbb{Q}$) est un outil suffisant pour obtenir un lemme de Poincaré à l'infini pour la cohomologie L^2 sur le bout parabolique de M (cf. prop. II.2.6).

Le cas des fonctions. Il est clair que $\mathrm{H}^0_{L^2}(M) \simeq \mathbb{R}$, car la métrique est de volume fini, et par conséquent, les fonctions constantes sont L^2.

Rappel sur le modèle local $\hat{g}$ (cf. §I.1, quelques notations) : on a un revêtement riemannien $p : I_a \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$ qui envoie la métrique standard $g^{\mathbb{H}^2} + g^{\mathrm{FS}}$ sur la métrique $\hat{g}$ du bout parabolique. Le facteur $\mathbb{CP}^1$ possède une 2-forme volume (fermée) projetable notée $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$. Nous noterons également $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ la forme obtenue par projection. Dans les coordonnées $(t, \theta, [u : v])$ sur $\mathcal{B}$, en prenant par exemple la carte $v = 1$, on a

$$\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} = \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2}(du - i\alpha u d\theta) \wedge (d\bar{u} + i\alpha\bar{u}d\theta).$$

Il est clair que $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} \in L^2$ car $|\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}| = 1$ et la métrique $\hat{g}$ est de volume fini.

De plus, dans le cas où $\alpha_2 - \alpha_1 \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ se prolonge en une forme lisse sur $\overline{M}$, puisqu'elle provient d'une forme lisse invariante sur le revêtement ramifié $\tilde{p} : \Delta_{a/q} \times \mathbb{CP}^1 \to \overline{\mathcal{B}}$ donnée par la forme volume sur le second facteur.

On va démontrer le lemme de Poincaré à l'infini sur le bout parabolique de M suivant, même lorsque les poids α des bouts paraboliques de M ne vérifient aucune condition particulière.

Lemme II.2.6 (Lemme de Poincaré L^2 à l'infini) *Soit γ, une k-forme fermée L^2 sur la variété à bouts paraboliques M.*

- *Pour $k = 1, 3$ ou 4, il existe une $k-1$-forme β, L^2 définie sur le bout parabolique de M telle que $\gamma = d\beta$ sur le bout parabolique.*
- *Dans le cas où $k = 2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une 1-forme β L^2 définie sur le bout parabolique de M tels que*

$$\gamma = \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} + d\beta \text{ sur le bout parabolique.}$$

Dans le cas d'une surface réglée M à bouts paraboliques issue d'un fibré parabolique $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$, on a la compactification $\widehat{M}$ qu'est l'espace total du fibré $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \overline{\Sigma}$. On en déduit de même une compactification lisse $\widehat{M}$ pour toute variété M à bouts paraboliques.

Admettons pour l'instant le lemme de Poincaré II.2.6. On en déduit un isomorphisme entre les cohomologies

$$\mathrm{H}^*_{L^2}(M) \simeq \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\widehat{M}),$$

défini comme suit : on introduit un nouvel espace de cohomologie en posant :

$$Z_0 = \mathbb{R}, \quad Z_k = \{\gamma \in \Omega^k_c(M) \ / \ d\gamma = 0\} \text{ pour } k = 1, 3 \text{ ou } 4 \ ,$$

$$Z_2 = \{\gamma \in \Omega^2(M) / \ \gamma = \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} \text{près de l'infini, avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } d\gamma = 0\},$$

$$B_0 = 0 \text{ et } B_k = \Omega^{k-1}_c(M) \text{ pour k>0.}$$

où $\Omega^*_c(M)$ est l'espace des formes différentielles C^∞ à support compact sur M. On définit alors

$$\mathcal{H}^k = Z_k / B_k.$$

D'après le lemme de Poincaré, on a un isomorphisme

$$\mathcal{H}^* \simeq \mathrm{H}^*_{L^2}(M).$$

Soit vol^{S^2} une 2 forme fermée lisse sur $\overline{M}$ définie au voisinage du diviseur à l'infini, telle que $\int_{\mathbb{CP}1} \mathrm{vol}^{S^2} = \int_{\mathbb{CP}1} \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$. En remplaçant $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ par vol^{S^2} dans la définition de $\mathcal{H}^*$, on définit un espace de cohomologie $\widehat{\mathcal{H}}^*$ qui lui est isomorphe. On a un lemme de Poincaré local pour la cohomologie $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\widehat{M})$ dont on déduit que $\widehat{\mathcal{H}}^* \simeq \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\widehat{M})$. On en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{H}^*_{L^2}(M)^* \simeq \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\widehat{M}).$$

Cohomologie L^2 des surfaces complexes réglés à bouts paraboliques. La cohomologie de la surface complexe réglée $\widehat{M}$ est bien connue (cf. [Bv] prop. III.18) : on a

$$H^2(\widehat{M}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}F,$$

où F est le dual de Poincaré d'une fibre, et h la classe du fibré tautologique $\mathcal{O}_{\widehat{M}}(1)$ sur $\widehat{M}$. Alors $h^2 = \deg \mathcal{E}$, $F^2 = 0$ et $h \cdot F = 1$; on en déduit via l'isomorphisme $\mathrm{H}^*_{L^2}(M)^* \simeq \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\widehat{M})$ que $b_2 = 2$ et que la signature est nulle pour la cohomologie L^2. Nous reformulons ce résultat dans le lemme suivant

Lemme II.2.7 *La cohomologie L^2 de M vérifie $b_2 = 2$, et sa forme d'intersection est de signature $(1, 1)$.*

Remarque sur la cohomologie de De Rham orbifold $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$. Dans le cas où les bouts paraboliques de M vérifient la condition $\alpha \in \mathbb{Q}$, nous avons une compactification orbifold $\overline{M}$ et une cohomologie de de Rham $\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$. Nous allons voir qu'on a également un isomorphisme

$$\mathrm{H}^*_{L^2}(M) \simeq \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\overline{M}).$$

On définit classiquement la *cohomologie de De Rham orbifold* de $\overline{M}$ que nous noterons $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$. Il s'agit comme dans le cas lisse de l'espace des formes différentielles fermées sur $\overline{M}$ modulo les formes exactes. Ces fibrés de formes différentielles sont en fait des orbifibrés sur $\overline{M}$ dont les sections lisses sont par définition les sections lisses invariantes dans tout revêtement local ramifié de l'orbifibré. Comme dans pour les variétés, on a donc un complexe des formes différentielles lisses, d'où une cohomologie $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$ associée.

Identification des cohomologies $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$ et $\mathrm{H}^*_{L^2}(M)$ (cas rationnel). Dans le cas où $\alpha_2 - \alpha_1 \in \mathbb{Q}$, on dispose également d'un lemme de Poincaré sur le bout parabolique de l'orbifold $\overline{M}$. Une forme différentielle sur le bout parabolique compactifié $\overline{\mathcal{B}}$ de $\overline{M}$ est par définition donnée par une forme différentielle lisse et $\mathbb{Z}_q$−invariante sur le revêtement ramifié $p^q : \Delta_{a/q} \times \mathbb{CP}^1$. Comme la cohomologie du disque $\Delta_{a/q}$ est triviale, la cohomologie de De Rham usuelle de $\Delta_a \times \mathbb{CP}^1$ est égale à la cohomologie du facteur $\mathbb{CP}^1$ par la formule de Künneth. On remarque que si γ est une forme exacte et $\mathbb{Z}_q$-invariante sur le revêtement ramifié $\Delta_a \times \mathbb{CP}^1$, ceci signifie qu'il existe une forme β a priori non invariante, telle que $\gamma = d\beta$. Or en moyennant sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_q$, on obtient

$$\gamma = \frac{1}{q}\sum_{k\in\mathbb{Z}_q} \tau^k.\gamma = \frac{1}{q}\sum_{k\in\mathbb{Z}_q} \tau^k.d\beta = d(\frac{1}{q}\sum_{k\in\mathbb{Z}_q} \tau^k.\beta),$$

où la forme $\beta' = \frac{1}{q}\sum_{k\in\mathbb{Z}_q} \tau^k.\beta$ est $\mathbb{Z}_q$-invariante. Donc γ est exacte pour la cohomologie orbifold. On en déduit l'analogue du lemme de Poincaré précédent pour la cohomologie de De Rham de l'orbifold $\overline{M}$:

Lemme II.2.8 (Lemme de Poincaré à l'infini sur $\overline{M}$) *Soit γ, une k-forme lisse fermée sur $\overline{M}$.*

- *Pour $k = 1, 3$ ou 4, il existe une $k-1$-forme β, C^∞ définie sur le bout parabolique de $\overline{M}$ telle que $\gamma = d\beta$ sur le bout parabolique de $\overline{M}$.*
- *Dans le cas où $k = 2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une 1-forme β C^∞ définie sur le bout parabolique de $\overline{M}$ tels que*

$$\gamma = \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} + d\beta \text{ sur le bout parabolique.}$$

De même que pour la cohomologie L^2, on déduit de ce lemme de Poincaré local un isomorphisme $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(M) \simeq \mathcal{H}^*$, Ce qui entraîne immédiatement le corollaire

Corollaire II.2.9 *Dans le cas où les bouts de M on des poids vérifiant la condition $\alpha \in \mathbb{Q}$, les espaces de cohomologie suivants sont isomorphes*

$$\mathrm{H}_{L^2(g)}(M) \simeq \mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(\overline{M}).$$

Démonstration du lemme II.2.6.

Le cas des 1-formes. Sur le bout parabolique, γ s'écrit comme une somme

$$\gamma = f dt + \gamma_2,$$

où γ_2 est une 1-forme orthogonale à dt. Définissons

$$\tilde{f} = \int_0^t f dt,$$

une primitive de f s'annulant en $t = 0$. D'après le lemme II.2.2,

$$\int_{t=0}^{T} |f|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}} = \int_{t=0}^{T} |\partial_t \tilde{f}|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}} \geq h_0^2 \int_{t=0}^{T} |\tilde{f}|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}},$$

car les termes de bords sont positifs. Puisque $f \in L^2$, il en résulte que $\tilde{f} \in L^2$.

Maintenant $\gamma - d\tilde{f}$ est par définition de $\tilde{f}$ orthogonale à dt, donc

$$\mathcal{L}_{\partial_t}(\gamma - d\tilde{f}) = (d \circ i_{\partial_t} + i_{\partial_t} \circ d)(\gamma - d\tilde{f}) = 0.$$

Par conséquent $(\gamma - d\tilde{f})$ est indépendante de t, et représente une classe de cohomologie sur la tranche $N \simeq S^1 \times \mathbb{CP}^1$. Comme $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(S^1 \times \mathbb{CP}^1) = \mathbb{R}[d\theta]$, il existe donc une fonction f_2 indépendante de t (et donc L^2), telle que $\gamma - d\tilde{f} - df_2 = \mu d\theta$, où μ est une constante.

Soit $\mathcal{X}_\theta$ le champ de vecteurs défini sur le bout parabolique de M comme le dual de $d\theta$ suivant la métrique $\hat{g}$. Rappelons que dans les coordonnées $(t, \theta, [u : v])$ sur le bout parabolique de M, le modèle local de métrique s'écrit $\hat{g} = dt^2 + \hat{g}_t$ et que la forme volume vérifie $\mathrm{vol}^{\hat{g}} = dt \wedge \mathrm{vol}^{\hat{g}_t}$. Posons

$$V(t) = \int_{\{t\} \times N} (i_{e^t \mathcal{X}_\theta} \gamma) \, \mathrm{vol}^{\hat{g}_t}.$$

Comme $|e^t \mathcal{X}_\theta| = |e^{-t} d\theta| = 1$, $\gamma \in L^2$ et $\mathrm{vol}^{\hat{g}} \in L^2$, on en déduit par inégalité de Cauchy-Schwarz que $(i_{e^t \mathcal{X}_\theta} \gamma) \, \mathrm{vol}^{\hat{g}}$ est intégrable. On peut donc choisir des tranches $t_k \to \infty$ telles que $V(t_k) \to 0$.

Nous remarquons que

$$\begin{aligned}\int_N \Big(i_{e^t\mathcal{X}_\theta} d(\tilde{f}+f_2)\Big)\mathrm{vol}^{\hat{g}_t} &= \int_N \Big(\mathcal{L}_{e^t\mathcal{X}_\theta}(\tilde{f}+f_2)\Big)\mathrm{vol}^{\hat{g}_t}\\ &= \int_N \mathcal{L}_{e^t\mathcal{X}_\theta}\Big((\tilde{f}+f_2)\mathrm{vol}^{\hat{g}_t}\Big) - \int_N (\tilde{f}+f_2)\mathcal{L}_{e^t\mathcal{X}_\theta}\mathrm{vol}^{\hat{g}_t}\\ &= \int_N d\circ i_{e^t\mathcal{X}_\theta}\Big((\tilde{f}+f_2)\mathrm{vol}^{\hat{g}_t}\Big) - \int_N (\tilde{f}+f_2)\mathcal{L}_{e^t\mathcal{X}_\theta}\mathrm{vol}^{\hat{g}_t}\\ &= 0,\end{aligned}$$

car la métrique est invariante suivant $\mathcal{X}_\theta$ (cf I.14). On en déduit que

$$k(t) = \int_N i_{e^t\mathcal{X}_\theta}\mu d\theta \mathrm{vol}^{\hat{g}_t} = \mu\int_N e^t\mathrm{vol}^{\hat{g}_t}$$

or $e^t\mathrm{vol}^{\hat{g}_t} = d\theta\wedge\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ est indépendante de t et comme $\int_N \mathrm{vol}^{\hat{g}_t} > 0$, on en déduit que nécessairement, $\mu = 0$. Finalement, on a démontré que

$$\gamma = d(\tilde{f}+f_2),$$

où $\tilde{f}$ et f_2 sont L^2 ce qui achève la démonstration pour les 1-formes.

Le cas des 2-formes. Soit γ une 2-forme fermée L^2. On peut écrire γ sous la forme :

$$\gamma = dt\wedge\beta + \gamma_2,$$

où β est une 1-forme différentielle orthogonale à dt et γ_2 une 2-forme telle que $i_{\partial_t}\gamma_2 = 0$. Comme dans le cas des fonctions, nous cherchons une 1-forme $\tilde{\beta}$ dans L^2, telle que $i_{\partial_t}\tilde{\beta} = 0$ et $\mathcal{L}_{\partial_t}\tilde{\beta} = \beta$. Pour trouver une telle primitive, on commence par décomposer

$$\beta = \mu d\theta + \beta_2,$$

où μ est une fonction, et β_2 est une 1-forme telle que $i_{\partial_t}\beta_2 = 0$ et $i_{\partial_\theta}\beta_2 = 0$. Comme γ est L^2 par hypothèse, on en déduit β_2 et μe^t sont L^2. Pour la partie β_2, on pose

$$\tilde{\beta}_2 = \int_0^t \beta_2 dt,$$

alors d'après le lemme II.2.2,

$$\int_0^T |\tilde{\beta}_2|^2\mathrm{vol}^{\hat{g}} \le \int_0^T |\partial_t\tilde{\beta}_2|^2\mathrm{vol} = \int_0^T |\beta_2|^2\mathrm{vol}^{\hat{g}},$$

d'où $\tilde{\beta}_2 \in L^2$. Pour la partie μ, on voudrait définir

$$\tilde{\mu} = \int_t^\infty \mu dt.$$

Cette intégrale est définie presque partout, et μ a un sens dans L^2. Pour le voir, on commence par le cas où μ est à support compact. Alors $\tilde{\mu}$ est bien définie et d'après le lemme II.2.2,

$$\int_0^\infty |\tilde{\mu} d\theta|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}} = \int_0^\infty |\tilde{\mu} e^t|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}}$$
$$\leq \int_0^\infty |(\partial_t \tilde{\mu}) e^t|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}} = \int_0^\infty |\mu d\theta|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}}.$$

Si $\mu e^t \in L^2$, on approxime μe^t par des fonctions C^∞ à support compact $(\mu_j e^t)$. Puisque la suite de fonction $\mu_j e^t$ converge dans L^2, elle est de Cauchy et d'après l'inégalité ci-dessus, la suite $\tilde{\mu}_j e^t$ est également de Cauchy, donc convergente. A la limite, on obtient une solution $\tilde{\mu} d\theta \in L^2$ à notre problème.

Posons $\tilde{\beta} = \tilde{\mu} d\theta + \tilde{\beta}_2 \in L^2$ et $\gamma_3 = \gamma - d\tilde{\beta}$. Alors $i_{\partial_t} \gamma_3 = 0$ et $d\gamma_3 = 0$, d'où $\mathcal{L}_{\partial_t} \gamma_3 = 0$, ce qui implique que γ_3 est une 2-forme sur la tranche indépendante de t. On écrit alors

$$\gamma_3 = \beta_3 \wedge d\theta + \gamma_4,$$

avec β_3 et γ_4 des formes sur la tranche, indépendantes de t telles que $i_{\mathcal{X}_\theta} \beta_3 = 0$ et $i_{\mathcal{X}_\theta} \gamma_4 = 0$.

On appelle *champ de vecteurs horizontaux* sur le bout parabolique , un champ de vecteurs sur la tranche indépendant de t et orthogonal à $\mathcal{X}_\theta = d\theta^\sharp$. Les champs de vecteurs horizontaux sont tous obtenus comme suit : soit $p : I_a \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$, le revêtement riemannien associé à la structure de bout parabolique. Alors $p^* X$ est un champ de vecteurs tangents au facteur $\mathbb{CP}^1$ ne dépendant pas de y (en notant $\xi = x + iy$ la coordonnée sur I_a) et invariant sous l'action de $\mathbb{Z}$. Réciproquement, un champ de vecteurs tangent à $\mathbb{CP}^1$ $\mathbb{Z}$-invariant et indépendant de y induit au quotient un champ de vecteurs horizontaux.

Remarque : soit X un champ de vecteurs horizontaux. Alors les quantités $|X|_{\hat{g}}$ et $|\mathcal{L}_X \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}|_{\hat{g}}$ sont uniformément bornées sur le bout parabolique. Le volume étant fini, ceci implique que $\mathcal{L}_X \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} \in L^2$.

Posons

$$U(t) = \int_{\{t\} \times N} (i_X \gamma) \wedge \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1},$$

et

$$V(t) = \int_{\{t\} \times N} (i_X \tilde{d\beta}) \wedge \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} = \int_N \mathcal{L}_X \tilde{\beta} \wedge \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} = \int_N \tilde{\beta} \wedge \mathcal{L}_X \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}.$$

Comme $\gamma \in L^2$ on a $i_X\gamma \in L^2$; de plus $\mathcal{L}_X \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ et $\tilde{\beta}$ sont dans L^2. On peut donc choisir des tranches $t_k \to \infty$ de sorte que $U(t_k) \to 0$ et $V(t_k) \to 0$. Mais

$$U(t_k) - V(t_k) = \int_{\{t_k\}\times N} i_X\gamma_3 \wedge \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} = \int_N (i_X\beta_3)d\theta \wedge \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$$

est indépendant de k. Dès que $\beta_3 \neq 0$, on peut choisir X tel que cette intégrale soit non nulle. Nécessairement on a alors $\beta_3 = 0$. On en déduit que $\gamma_3 = \gamma_4$ est une 2-forme sur la tranche indépendante de t telle que $i_{\mathcal{X}_\theta} = 0$, $d\gamma_3 = 0$, d' oú $\mathcal{L}_{\mathcal{X}_\theta}\gamma_3 = 0$. On en déduit en passant au revêtement que $p^*\gamma_3$ est une 2-forme $\mathbb{Z}$-invariante sur le facteur $\mathbb{CP}^1$.

En utilisant la cohomologie de De Rham usuelle, on peut écrire $\gamma_3 = \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} + d\beta_4$, avec β_4 une 1-forme sur $\mathbb{CP}^1$

Si $\alpha_2 - \alpha_1 \in \mathbb{Q}$, l'action de $\mathbb{Z}$ induite sur $\mathbb{CP}^1$ se factorise en une action de $\mathbb{Z}_q$. La 1-forme β_4 n'est pas nécessairement invariante, mais quitte à moyenner sous l'action de $\mathbb{Z}_q$, on peut la supposer invariante. Alors β_4 passe au quotient et $\beta_4 \in L^2$. On a donc démontré que $\gamma = \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} + d(\tilde{\beta} + \beta_4)$ avec $\tilde{\beta}, \beta_4 \in L^2$.

Dans le cas où $\alpha_2 - \alpha_1 \notin \mathbb{Q}$, l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{CP}^1$ ne se factorise pas. Cette action est engendrée par une rotation $\mathcal{R}_\alpha$ donnée par

$$\tau[\tilde{u} : \tilde{v}] = [\tilde{u}e^{2i\pi\alpha_1} : \tilde{v}e^{2i\pi\alpha_2}],$$

d'angle $-2\pi\alpha$. Comme $\alpha \notin \mathbb{Q}$, le groupe engendré par $\mathcal{R}_\alpha$ est dense dans le groupe des rotations de même axe. Alors par densité, puisque γ_4 est $\mathbb{Z}$-invariante, elle est donc invariante par toute rotation de même axe que l'action de $\mathbb{Z}$.

Puisque la forme volume $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ est invariante par rotation, la forme exacte $\gamma_3 - \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ est également invariante pour toutes les rotations de même axe que $\mathcal{R}_\alpha$. Nous allons prouver qu'on peut trouver dans ce cas une 1-forme β_4 vérifiant $\gamma_3 - \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} = d\beta_4$ et invariante par ces rotations.

Dans des coordonnées sphériques $(\varphi, \theta) \in ([-\pi/2, +\pi/2] \times S^1)$, on écrit $\gamma_3 - \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} = f(\varphi)\cos\varphi d\theta \wedge d\varphi$, avec $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi)\cos\varphi d\varphi = 0$. On pose $F(\varphi) = \int_{-\pi/2}^{\varphi} f(s)\cos s ds$ et on en déduit une 1-forme invariante par rotation $\beta_4 = F(\varphi)d\theta$ qui résout le problème.

Les cas des 3-formes. Une 3-forme sur le bout parabolique peut être réécrite

$$\Omega = dt \wedge (\beta \wedge d\theta + \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}) + \Omega_2,$$

où les formes λ, β, Ω_2 sont de degrés 0, 1,3, respectivement et telles que :

$$i_{\partial_t}\beta = i_{\partial_\theta}\beta = 0,\ i_{\partial_t}\Omega_2 = 0.$$

On utilise encore la même méthode en cherchant des primitives suivant t de β et λ :

$$\tilde{\beta} = \int_t^\infty \beta dt, \quad \tilde{\lambda} = \int_0^t \lambda dt.$$

Afin d'être totalement rigoureux, il faudrait comme dans le cas des 2-formes commencer par supposer que β est à support compact, mais il n'est pas difficile de voir que le raisonnement ne pose pas de problème et qu'on peut faire converger au sens L^2 des approximations à support compact de β comme le montre l'inégalité suivante : en utilisant le lemme II.2.2, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\tilde{\beta} \wedge d\theta|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}} &= \int_0^\infty |\tilde{\beta} e^t|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}} \\ &\leq \frac{1}{h_0^2} \int_0^\infty |(\partial_t \tilde{\beta}) e^t|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}} = \frac{1}{h_0^2} \int_0^\infty |\beta \wedge d\theta|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}},\end{aligned}$$

et

$$\int_0^T |\tilde{\lambda} \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}} = \int_0^T |\tilde{\lambda}|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}} \leq \frac{1}{h_0^2} \int_0^T |\partial_t \tilde{\lambda}|^2 \mathrm{vol} = \frac{1}{h_0^2} \int_0^T |\lambda|^2 \mathrm{vol}^{\hat{g}}.$$

On en déduit une 2-forme L^2 définie par $\omega = \tilde{\beta} \wedge d\theta + \tilde{\lambda} \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$, de sorte que $\Omega_3 = \Omega - d\omega$ vérifie $i_{\partial_t} \Omega_3 = 0$, par définition de ω. Alors

$$\mathcal{L}_{\partial_t} \Omega_3 = (d \circ i_{\partial_t} + i_{\partial_t} \circ d)\Omega_3 = 0,$$

donc Ω_3 est une 3-forme sur la tranche $N \simeq S^1 \times \mathbb{CP}^1$ du bout parabolique, indépendante de t. On peut donc l'écrire sous la forme

$$\Omega_3 = \mu d\theta \wedge \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1},$$

où μ est une fonction indépendante de t.

S'il existe une fonction f constante suivant ∂_t et $\mathcal{X}_\theta$, telle que

$$\int_N f\mu d\theta \wedge \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} \neq 0,$$

on a alors une contradiction : f, $|df|$ sont bornées car f ne dépend que du facteur $\mathbb{CP}^1$. On en déduit que f et df sont L^2 puisque nous sommes en volume fini et que $f\Omega$, $df \wedge \omega \in L^1$ par inégalité de Cauchy-Schwarz. Puis par le théorème de Stokes, on a

$$\int_{\{t\}\times N} f\Omega = \int_{\{t\}\times N} f\Omega_3 + \int_{\{t\}\times N} f d\omega = \int_{\{t\}\times N} f\Omega_3 - \int_{\{t\}\times N} df \wedge \omega$$

Or $f\Omega$, $df \wedge \omega \in L^1$, alors nous pouvons choisir des tranches t_k telles que leurs intégrales tendent vers 0 ; mais nous avons vu que $\int_{\{t\}\times N} f\Omega_3$ est indépendante de t et non nulle ce qui est contradictoire.

On en déduit que μ est orthogonale aux fonctions constantes suivant $\mathcal{X}_\theta$ ce qui entraîne l'existence d'une primitive $\tilde{\mu}$ suivant $\mathcal{X}_\theta$, c'est à dire vérifiant $\mathcal{X}_\theta.\tilde{\mu} = \mu$. Alors $\tilde{\mu}\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ est bornée, donc L^2, et on en déduit que

$$\Omega = d(\omega + \tilde{\mu}),$$

est exacte au sens de la cohomologie L^2 sur le bout parabolique. □

Les cas des 4-formes. Une 4-forme L^2 sur le bout parabolique s'écrit

$$\gamma = \mu dt \wedge d\theta \wedge \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1},$$

avec $\mu d\theta \in L^2$. Mais nous avons déjà démontré (cf démonstration dans le cas des 2-formes) qu'alors, il existe une fonction $\tilde{\mu}$ définie sur le bout parabolique telle que $\tilde{\mu}d\theta \in L^2$ et $\partial_t\tilde{\mu} = \mu$. On en déduit que $\tilde{\gamma} = \tilde{\mu}d\theta \wedge \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} \in L^2$ et que $d\tilde{\gamma} = \gamma$, d'où le résultat. □

II.3 Convergence des formes harmoniques

Dans toute cette section, M désignera une variété lisse munie de bouts paraboliques dont les poids vérifient la condition de rationalité $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \in \mathbb{Q}$. Nous reviendrons sur le cas irrationnel dans au §III.4.

II.3.1 Convergence des 1-formes harmoniques

Convergence sur tout compact. Nous avons identifié dans le cas rationnel les cohomologies $\mathrm{H}_{L^2(g)}(M)$ et $\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$. Les métriques g_j sur la variété compactifiée $\overline{M}$ qui approchent la métrique g asymptotique au modèle local sur le bout parabolique de M, nous permettent de représenter toute classe de cohomologie de $H(M)$ par des formes g_j-harmoniques sur $\overline{M}$. Alors nous allons voir que ces représentants convergent vers le représentant g-harmonique L^2 de cette classe de cohomologie.

Proposition II.3.1 *Soit $b \in H^1(M)$ une classe de cohomologie sur M. La suite γ_j de ses représentants g_j-harmoniques sur $\overline{M}$ converge au sens C^∞ sur tout compact de M, vers le représentant L^2 g-harmonique γ de b.*

Plus précisément, il existe une constante $c > 0$, telle que si l'on choisit un représentant à support compact β de b, et qu'on écrit $\gamma_j = \beta + df_j$, où

f_j est une fonction sur $\overline{M}$ vérifiant $\int_M f_j \mathrm{vol}^{g_j} = 0$, alors f_j converge sur tout compact de M vers une fonction f dans $L^2_1(g)$ telle que $\beta + df$ soit g-harmonique,

$$\int_M f \mathrm{vol}^g = 0, \ \textit{et} \ \|f\|_{L^2_1} \leq c\|\beta\|_{L^2(g)}.$$

Démonstration : Par définition de $H^1(M)$, la classe de cohomologie b peut être représentée par une 1-forme fermée β à support compact sur M. Le représentant g_j-harmonique de b peut être écrit sous la forme

$$\gamma_j = \beta + df_j,$$

où f_j vérifie

$$\int_M f_j \mathrm{vol}^{g_j} = 0, \quad \Delta^{g_j} f_j = -d^{*_{g_j}} \beta;$$

d'après le corollaire II.2.3,

$$c \int |f_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \leq \int |df_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} = -\int f_j d^{*_j} \beta \mathrm{vol}^{g_j} = -\int \langle df_j, \beta \rangle \mathrm{vol}^{g_j},$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit un contrôle

$$\sqrt{c}\,\|f_j\|_{L^2(g_j)} \leq \|df_j\|_{L^2(g_j)} \leq \|\beta\|_{L^2(g_j)}.$$

Comme β est à support compact, il est clair que $\|\beta\|_{L^2(g_j)} = \|\beta\|_{L^2(g)}$ à partir d'un certain rang.

Plaçons nous sur un compact K de M de sorte qu'à partir d'un rang (suffisamment grand), les métriques g_j coïncident avec g sur K. Ceci a donc un sens de dire que la norme L^2_1 de f_j reste uniformément bornée sur tout compact de M. Comme la boule unité est compacte pour la topologie faible, on peut donc supposer, quitte à extraire une sous suite de f_j, que f_j converge sur tout compact de M vers une limite faible f qui vérifie

$$\sqrt{c}\,\|f\|_{L^2(g)} \leq \|\beta\|_{L^2(g)}, \quad \|df\|_{L^2(g)} \leq \|\beta\|_{L^2(g)},$$

soit $f \in L^2_1(g)$, et qui de plus est solution de

$$\Delta^g f = -d^{*_g} \beta, \quad \int_M f \mathrm{vol}^g = 0.$$

La première équation est vérifiée par définition de f, la seconde est moins évidente : on sait que $f \in L^2$ et que $\|f_j\|_{L^2(g_j)}$ est bornée, alors d'après

le lemme II.1.2, étant donné $\epsilon > 0$, on peut choisir un compact K de M suffisamment grand, tel que

$$\int_{M\setminus K} |f| \mathrm{vol}^g \leq \mathrm{vol}^g(M \setminus K)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{M\setminus K} |f|^2 \mathrm{vol}^g \right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon,$$

et

$$\left| \int_{M\setminus K} f_j \mathrm{vol}^{g_j} \right| \leq \mathrm{vol}^{g_j}(M \setminus K)^{\frac{1}{2}} \, \|f_j\|_{L^2(g_j)} \leq \epsilon \text{ pour tout } j.$$

Par compacité de l'inclusion $L^2_1 \hookrightarrow L^2$, (f_j) converge fortement vers f sur tout compact de M au sens L^2 (et donc également au sens L^1 puisque la métrique est de volume fini). Alors

$$\int_K f \mathrm{vol}^g = \lim \int_K f_j \mathrm{vol}^{g_j} = -\lim \int_{M\setminus K} f_j \mathrm{vol}^{g_j},$$

d'où $|\int_K f \mathrm{vol}^g| \leq \epsilon$. Maintenant,

$$\left| \int_M f \mathrm{vol}^g \right| \leq \left| \int_K f \mathrm{vol}^g \right| + \int_{M\setminus K} |f| \mathrm{vol}^g \leq 2\epsilon,$$

d'où $\int_M f \mathrm{vol}^g = 0$.

Par régularité elliptique la convergence est en réalité C^∞ sur tout compact de M. Finalement $\gamma = \beta + df$ est une 1-forme g-harmonique L^2 qui représente la classe de cohomologie définie par b en cohomologie L^2 d'où le résultat. □

Comportement à l'infini. Bien que les 1-formes lisses sur $\overline{M}$ ne soient pas en général $L^2(g)$ sur M, on à tout de même un contrôle uniforme sur le comportement à l'infini de la suite des représentant g_j-harmoniques d'une classe de cohomologie dans $H^1(M)$:

Lemme II.3.2 *En reprenant les notations de la proposition II.3.1, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un T suffisamment grand tel que*

$$\int_{t\geq T} |\gamma|^2 \mathrm{vol}^g \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \int_{t\geq T} |\gamma_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \leq \epsilon.$$

Démonstration : Pour démontrer ce lemme, reprenons la démonstration de la proposition II.3.1 là où nous l'avions laissée.

Par hypothèse, β est à support compact, donc pour T assez grand, on a $\gamma_j = \beta + df_j = df_j$ d'où

$$\int_{t\geq T} |\gamma_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} = \int_{t\geq T} |df_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j}.$$

En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}\int_{t\geq T} |df_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} &= \int_{t\geq T} df_j \wedge *_j df_j \\ &= \int_{t\geq T} d(f_j *_j df_j) - \int_{t\geq T} f_j d *_j df_j \\ &= \int_{t=T} f_j *_j df_j + \int_{t\geq T} \langle \Delta^{g_j} f_j, f_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j}.\end{aligned}$$

Or, comme nous nous sommes placé hors du support de β,

$$\Delta^{g_j} f_j = \Delta^{g_j} f_j + d^{*_j}\beta = \Delta^{g_j}\gamma_j = 0,$$

d'où

$$\int_{t\geq T} |df_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} = \int_{t=T} f_j *_j df_j.$$

Le même calcul reste valable pour la limite $\gamma = \beta + df$ car $f \in L^2_1$. Choisissons un T suffisamment grand, de sorte que $\int_{t\geq T} |df|^2 \mathrm{vol}^g \leq \epsilon/2$. Alors comme f_j tend vers f au sens C^∞ sur tout compact on a

$$\int_{t=T} f_j *_j df_j \to \int_{t=T} f * df \text{ pour } j \to \infty$$

soit

$$\int_{t\geq T} |df_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \to \int_{t\geq T} |df_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \text{ pour } j \to \infty$$

dont on déduit le lemme. □

II.3.2 Inégalité de Poincaré pour les 1-formes

Nous allons démontrer la proposition suivante, donnant une estimation uniforme sur la première valeur propre du laplacien sur les 1-forme pour les métriques g_j.

Remarque : les techniques utilisées sont largement inspirées de [Bi2]. Néanmoins la façon dont les 1-formes y sont traitées doit être modifiée car la formule de Bochner du lemme 4.5 comporte une erreur dans les termes mixtes. On pourra vérifier que la méthode proposée ici permet de corriger ce défaut en utilisant le fait que les valeurs propres de Ric sont suffisamment petites (cf. [Bi2], lemme 3.3).

Proposition II.3.3 *Supposons que M soit une variété avec des bouts paraboliques vérifiant la condition $\alpha \in \mathbb{Q}$. Soit g une métrique asymptotique au modèle local et g_j la suite d'approximations associée. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour toutes les métriques g_j, et toute 1-forme orthogonale aux formes g_j-harmoniques, on ait :*

$$\int_M (|d\beta|^2 + |d^{*_j}\beta|^2)\mathrm{vol}^{g_j} \geq c \int_M |\beta|^2 \mathrm{vol}^{g_j},$$

les normes étant prises par rapport à la métrique g_j. L'inégalité est également vérifiée pour la métrique g et toute 1-forme $\beta \in L^2_1$ orthogonale aux formes g-harmoniques L^2.

Remarque : comme dans le cas des fonctions, cette inégalité de Poincaré pour la métrique limite g nous permet d'en déduite la théorie de Hodge pour les 2-formes. En fait ce résultat est valable même si g est asymptotique à un modèle avec des poids irrationnels : on démontrera au §III.4 que l'inégalité de Poincaré est vraie même dans ce cas.

On commence par démontrer le lemme :

Lemme II.3.4 *Soit $\hat{g}$ un modèle local de métrique dont les bouts vérifient la condition de rationalité. Il existe une constante T suffisamment grande telle que pour toute métrique $g = \hat{g}$ ou $\hat{g}_j$, et toute 1-forme β sur $[t_1, t_2] \times N$ avec $t_1, t_2 \geq T$, on ait :*

$$h_0^2 \int_{[t_1,t_2]\times N} |\beta|^2 \ \mathrm{vol}^g + h_0 \int_{\partial[t_1,t_2]\times N} |\beta|^2 \ \mathrm{vol}^g \leq \int_{[t_1,t_2]\times N} \left(|\nabla\beta|^2 + \mathrm{Ric}^g(\beta,\beta)\right) \ \mathrm{vol}^g,$$

les normes étant prises par rapport à la métrique g.

Démonstration : Soit g une métrique sur de la forme $g = dt^2 + g_t$, sur $[t_1, t_2] \times N$. On décompose les 1-formes en $\beta = f dt + \mu$, avec $i_{\partial_t}\mu = 0$. Alors la connexion de Levi-Civita se décompose en

$$\nabla\beta = dt \otimes \nabla_{\partial_t}\beta + \nabla_{|N}\beta,$$

où $\nabla_{|N}\beta$ est la restriction de $\nabla\beta$ à une section de $T^*N \otimes \Omega^1([t_1, t_2] \times N)$. Calculons ce terme plus précisément : notons ∇^N la connexion de Levi-Civita induite sur N par g et d^N la différentielle suivant la tranche, alors

$$\nabla_{|N}\beta = d^N f \otimes dt + f\nabla_{|N}dt + \nabla^N\mu + \mathbb{I}(\mu) \otimes dt,$$

or

$$\nabla_{|N}dt = \langle ., \nabla_{|N}\partial_t\rangle = -\langle \nabla_{|N}., \partial_t\rangle = -\mathbb{I},$$

donc

$$\nabla\beta = dt \otimes \nabla_{\partial_t}\beta + (d^N f + \mathbb{I}(\mu)) \otimes dt - f\mathbb{I} + \nabla^N \mu.$$

Appliquons ce calcul dans le cas où g est égale au modèle local $\hat{g}$, où à $\hat{g}_j$. La métrique g_t sur la tranche $N \simeq S^1 \times \mathbb{CP}^1$ s'exprime en prenant par exemple la coordonnée u de projection stéréographique définie par $v = 1$,

$$g_t = \varphi^2(t)d\theta^2 + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2}\,|du - i\alpha u d\theta|^2 \ ; \tag{II.10}$$

la deuxième forme fondamentale est donnée par

$$\mathbb{I} = -\frac{1}{2}g_t = -\frac{\partial_t\varphi}{\varphi}(\varphi d\theta)^2,$$

et

$$h = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g\,\mathbb{I} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_t \mathrm{vol}^{g_t}}{\mathrm{vol}^{g_t}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_t\varphi}{\varphi}.$$

de plus en notant $\mu = f_2\varphi d\theta + \eta$, avec $i_{\mathcal{X}_\theta}\eta = 0$, la connexion de Levi-Civita sur la tranche est égale à

$$\nabla^N\mu = (\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f_2)\varphi d\theta \otimes \varphi d\theta + (d^{\mathbb{CP}^1} f_2) \otimes \varphi d\theta + \varphi d\theta \otimes (\mathcal{L}_{\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta}\eta) + \nabla^{\mathbb{CP}^1}\eta.$$

Finalement on peut écrire

$$\begin{aligned}\nabla\beta = dt \otimes \nabla_{\partial_t}\beta + (\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta.f + f_2)\varphi d\theta \otimes dt + (\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta.f_2 - f)\varphi d\theta \otimes \varphi d\theta \\ + (d^{\mathbb{CP}^1} f) \otimes dt + (d^{\mathbb{CP}^1} f_2) \otimes \varphi d\theta + \varphi d\theta \otimes (\mathcal{L}_{\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta}\eta) + \nabla^{\mathbb{CP}^1}\eta,\end{aligned}$$

or $\mathrm{Ric}^g(\beta,\beta) = \mathrm{Ric}^{\mathbb{CP}^1}(\eta,\eta) - \frac{\partial_t{}^2\varphi}{\varphi}(|f|^2 + |f_2|^2)$ et $\mathrm{Ric}^{\mathbb{CP}^1} > 0$; dans le cas où $g = \hat{g}$, on a $\varphi(t) = e^{-t}$ et on en déduit que

$$\begin{aligned}|\nabla\beta|^2 + \mathrm{Ric}^g(\beta,\beta) \geq |\nabla_{\partial_t}\beta|^2 + |\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f|^2 + |\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f_2|^2 \\ + 2\langle\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta.f, f_2\rangle - 2\langle f, \varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta.f_2\rangle + |d^{\mathbb{CP}^1} f|^2 + |d^{\mathbb{CP}^1} f_2|^2.\end{aligned} \tag{II.11}$$

Dans le cas où $g = \hat{g}_j$ soit $\varphi = \varphi_j$, on voit que par définition de φ_j, cette dernière inégalité reste vraie sur le domaine $t \leq j+1+\delta_j$. Pour $t \geq j+1+\delta_j$, la courbure de g devient positive, et on obtient un contrôle

$$|\nabla\beta|^2 + \mathrm{Ric}^g(\beta,\beta) \geq |\nabla_{\partial_t}\beta|^2. \tag{II.12}$$

Nous supposerons à partir d'ici que nous nous sommes restreint au domaine $t \leq j+1+\delta_j$ dans le cas où $g = \hat{g}_j$.

Nous allons maintenant montrer que les termes mixtes de (II.11) sont contrôlés. On peut remarquer que par une simple intégration par parties sur la tranche,

$$\int \langle \varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta.f, f_2\rangle \mathrm{vol}^g = -\int \langle f, \varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta.f_2\rangle \mathrm{vol}^g,$$

et dès que f ou f_2 est constante suivant $\mathcal{X}_\theta$, ces termes sont nuls. Nous allons donc nous restreindre à la partie orthogonale aux constante de f_1 et f_2 par la suite.

Puisque nous nous sommes placés dans le cas d'un bout parabolique dont les poids vérifient la condition de rationnalité, le champ de vecteurs $\mathcal{X}_\theta$ se referme et donne une structure de S^1-fibré au bout parabolique. Dans le revêtement à q feuillets $p^q : \Delta^*_{a/q} \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$, les orbites de $\mathcal{X}_\theta$ correspondent aux cercles centrés au point parabolique de $\Delta^*_{a/q}$. En utilisant la décompositions en séries de Fourrier sur ce revêtement local, $f = \sum_k c_k e^{ki\theta/q}$, on voit que la condition d'être orthogonale au constantes se traduit par $c_0 = 0$. Alors

$$\int_N |\mathcal{X}_\theta \cdot f|^2 = \int_N \sum_k |\frac{k}{q} c_k|^2 \geq \frac{1}{q^2}\int_N |f|^2,$$

d'où

$$\int_N |\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta.f|^2 \geq \frac{1}{(q\varphi)^2}\int_N |f|^2,$$

et de même

$$\int_N |\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta.f_2|^2 \geq \frac{1}{(q\varphi)^2}\int_N |f_2|^2.$$

Puisque $\varphi(t) \leq e^{-t} \to 0$, on en déduit que pour t suffisamment grand, les termes mixtes de (II.11) sont très bien contrôlés par les termes en $|\varphi^{-1}.\mathcal{X}_\theta f|^2$ et $|\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta.f_2|^2$, d'où

$$\int_N |\nabla\beta|^2 + \mathrm{Ric}^g(\beta,\beta) \geq \int_N |\nabla_{\partial_t}\beta|^2 \ ;$$

on combine cette dernière inégalité avec (II.12) dans le cas où $g = \hat{g}_j$. On en déduit un T, tel que pour $t \geq T$ et pour toute métrique $g = \hat{g}$ ou $\hat{g}_j$, on ait

$$\int_N |\nabla\beta|^2 + \mathrm{Ric}^g(\beta,\beta)\ \mathrm{vol}^g \geq \int_N |\nabla_{\partial_t}\beta|^2\ \mathrm{vol}^g.$$

Par ailleurs, pour une métrique g qui vérifie $0 < h_0 \leq h$, en intégrant sur

$[t_1, t_2] \times N$ il vient

$$\begin{aligned}\int 2h_0|\mu|^2\mathrm{vol}^g + \int_\partial |\mu|^2\mathrm{vol}^{g_t} &\leq \int 2h|\mu|^2\mathrm{vol}^g + \int_\partial |\mu|^2\mathrm{vol}^{g_t} \\ &= \int \partial_t|\mu|^2\mathrm{vol}^g \\ &= 2\int \langle\nabla_{\partial_t}\mu, \mu\rangle\mathrm{vol}^g \\ &\leq \int (\frac{1}{h_0}|\nabla_{\partial_t}\mu|^2 + h_0|\mu|^2)\mathrm{vol}^g.\end{aligned}$$

d'où

$$h_0^2\int |\mu|^2\mathrm{vol}^g + h_0\int_\partial |\mu|^2\mathrm{vol}^{g_t} \leq \int |\nabla_{\partial_t}\mu|^2\mathrm{vol}^g. \tag{II.13}$$

On en déduit le lemme pour $t_1, t_2 \geq T$. □

Ce lemme reste vrai (en modifiant légèrement les constantes) si l'on remplace $\hat{g}$ et $\hat{g}_j$ par une métrique asymptotique au modèle local g et ses approximations g_j. déduit immédiatement le corollaire suivant

Corollaire II.3.5 *Soit g une métrique asymptotique au modèle local $\hat{g}$. Il existe des constantes T suffisamment grande et $c > 0$ telles que pour toutes les métriques g ou g_j, et toute 1-forme β sur $[t_1, t_2] \times N$ avec $t_1, t_2 \geq T$, on ait :*

$$h_0^2\int_{[t_1,t_2]\times N} |\beta|^2 \text{ vol} + h_0\int_{\partial[t_1,t_2]\times N} |\beta|^2 \text{ vol}^N \leq c\int_{[t_1,t_2]\times N} |\nabla\beta|^2 + \mathrm{Ric}(\beta,\beta) \text{ vol}.$$

Démonstration : Quand on passe des métriques $\hat{g}$ et $\hat{g}_j$ aux métriques g et g_j, l'inégalité est perturbée par des termes en $\epsilon(T)O(\|\beta\|^2_{L^2_1})$, avec $\epsilon(T) \to 0$ quand $T \to \infty$. Ce n'est pas complètement évident pour les termes de bord : pour la métrique $\hat{g}$,

$$\int_{t_2} |\beta|^2\mathrm{vol}^{\hat{g}_t} = \int_{t\leq t_2} \langle\beta, \nabla_{\partial_t}\beta\rangle - 2h|\beta|^2 \text{ vol}^{\hat{g}}.$$

On en déduit que la différence entre les termes de bord pour $\hat{g}_j$ et g_j ou pour $\hat{g}$ et g est également en $\epsilon(T)O(\|\beta\|^2_{L^2_1})$ d'où le lemme. □

Nous avons maintenant fait un premier pas dans la démonstration de la proposition II.3.3 grâce au corollaire suivant :

Corollaire II.3.6 *Il existe une constante $c > 0$ et T suffisamment grand, tels que pour toute 1-forme lisse β sur le bout parabolique compactifié $\overline{\mathcal{B}}$ nulle en $t = T$ on ait*

$$\int_{t\geq T} \left(|d\beta|^2 + |d^{*_j}\beta|^2\right)\mathrm{vol}^{g_j} \geq c\int_{t\geq T} |\beta|^2\mathrm{vol}^{g_j}, \tag{II.14}$$

les normes étant prises par rapport à la métrique g_j. Cette inégalité est également valable pour la métrique g, et pour une 1-forme $\beta \in L^2_1(g)$ définie sur $\mathcal{B}$ et nulle en $t = T$.

Démonstration : Pour T suffisamment grand, on applique le corollaire II.3.5 sur $[T, T_j] \times N$ pour la métrique g_j. Le terme de bord est nul par hypothèse pour $t = T$. Il est nul également nul pour $t = T_j$ car le volume de cette tranche est égal à 0. Dans le cas de la métrique g, on applique le corollaire à $[T, T_2] \times N$. Alors le terme de bord en $t = T_2$ tend vers 0 quand $T_2 \to \infty$ car β a été choisie dans L^2. Dans tous les cas, on en déduit que

$$c \int_{t \geq T} |\nabla \beta|^2 + \mathrm{Ric}(\beta, \beta) \ \mathrm{vol} \geq h_0^2 \int_{t \geq T} |\beta|^2 \mathrm{vol} \ ;$$

en utilisant la formule de Bochner

$$\nabla^* \nabla \beta + \mathrm{Ric}(\beta) = (dd^* + d^* d)\beta,$$

une simple intégration par parties nous donne le corollaire. □

Démonstration de la proposition II.3.3 : supposons la proposition fausse : on en déduit une suite de 1-formes β_j telle que β_j est orthogonale aux formes g_j-harmoniques,

$$\|\beta_j\|_{L^2(g_j)} = 1 \quad et \quad \int_M \left(|d\beta_j|^2 + |d^{*_j} \beta_j|^2 \right) \mathrm{vol}^{g_j} \to 0.$$

Sur un compact K de M, les métriques g et g_j sont égales par construction à partir d'un certain rang ; ceci a donc un sens de dire que la suite β_j admet une borne uniforme L^2_1 sur tout compact K de M. Quitte à extraire une sous suite, on peut donc supposer que β_j converge faiblement dans L^2_1 sur tout compact de M, vers une 1-forme $\beta \in L^2_1(g)$. vérifiant nécessairement $\int_M (|d\beta|^2 + |d^*\beta|^2) \mathrm{vol}^g = 0$ et $\|\beta\|_{L^2(g)} = 1$. On en déduit que β est g-harmonique.

Montrons maintenant que β est orthogonale aux formes g-harmoniques L^2. Soit γ une 1-forme g-harmonique L^2 et γ_j les représentant g_j harmoniques de $[\gamma]$ sur $\overline{M}$.

Alors , on décompose

$$0 = \int_M \langle \beta_j, \gamma_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j} = \int_{M \setminus \{t \geq T\}} \langle \beta_j, \gamma_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j} + \int_{t \geq T} \langle \beta_j, \gamma_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j}, \qquad \text{(II.15)}$$

et on majore

$$\left| \int_{t \geq T} \langle \beta_j, \gamma_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j} \right|^2 \leq \|\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} \int_{t \geq T} |\gamma_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} = \int_{t \geq T} |\gamma_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j}.$$

De même,

$$\left|\int_{t\geq T}\langle\beta,\gamma\rangle\mathrm{vol}^g\right|^2 \leq \|\beta\|^2_{L^2(g)}\int_{t\geq T}|\gamma|^2\mathrm{vol}^g = \int_{t\geq T}|\gamma|^2\mathrm{vol}^g.$$

Quitte à extraire une sous suite de γ_j, on peut d'après II.3.1 supposer que γ_j converge vers γ sur tout compact de M, et d'après le lemme II.3.2 choisir un T suffisamment grand tel que

$$\left|\int_{t\geq T}\langle\beta_j,\gamma_j\rangle\mathrm{vol}^{g_j}\right|^2 \leq \int_{t\geq T}|\gamma_j|^2\mathrm{vol}^{g_j} \leq \frac{\epsilon^2}{4},$$

et

$$\left|\int_{t\geq T}\langle\beta,\gamma\rangle\mathrm{vol}^{g}\right|^2 \leq \int_{t\geq T}|\gamma|^2\mathrm{vol}^{g} \leq \frac{\epsilon^2}{4}.$$

D'après (II.15), on a donc

$$\left|\int_{M\setminus\{t\geq T\}}\langle\beta_j,\gamma_j\rangle\mathrm{vol}^{g_j}\right| = \left|\int_{t\geq T}\langle\beta_j,\gamma_j\rangle\mathrm{vol}^{g_j}\right| \leq \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Or $\gamma_j \overset{L^2}{\to} \gamma$ et $\beta_j \overset{L^2}{\to} \beta$ donc en faisant tendre j vers l'infini,

$$\int_{M\setminus\{t\geq T\}}\langle\beta_j,\gamma_j\rangle\mathrm{vol}^{g_j} \longrightarrow \int_{M\setminus\{t\geq T\}}\langle\beta,\mu\rangle\mathrm{vol}^{g},$$

d'où un contrôle à la limite

$$\left|\int_{M\setminus\{t\geq T\}}\langle\beta,\mu\rangle\mathrm{vol}^{g}\right| \leq \epsilon/2.$$

Pour conclure,

$$\left|\int_M\langle\beta,\mu\rangle\mathrm{vol}^g\right| \leq \left|\int_{M\setminus\{t\geq T\}}\langle\beta,\mu\rangle\mathrm{vol}^g\right| + \left|\int_{t\geq T}\langle\beta,\mu\rangle\mathrm{vol}^g\right| \leq \epsilon,$$

ce qui entraîne que β est orthogonale à γ. On en déduit que β est orthogonales aux formes L^2 g-harmoniques. Or β est également harmonique d'après ce que nous avons vu en début de démonstration ; on en déduit que $\beta = 0$.

Nous allons voir maintenant que nos hypothèses impliquent une contradiction. Choisissons un $T > 0$ suffisamment grand afin d'être dans le cadre du corollaire II.3.6. Soit $\chi(t)$ une fonction cut-off valant 1 sur le compact $M \setminus \{t \geq T\}$ et 0 hors d'un compact. Alors on découpe les β_j en

$$\|\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} = 1 \leq \|\chi\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} + \|(1-\chi)\beta_j\|^2_{L^2(g_j)},$$

afin d'appliquer II.3.6 à $(1-\chi)\beta_j$:

$$\begin{aligned} c\|(1-\chi)\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} &\leq \|d(1-\chi)\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} + \|d^{*_j}(1-\chi)\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} \\ &\leq 2\|d\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} + 2\|d^{*_j}\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} + 4\|(\partial_t\chi)\beta_j\|^2_{L^2(g_j)}. \end{aligned}$$

Puisque, β_j converge vers $\beta = 0$ en norme L^2 sur tout compact de M et comme χ et $\partial_t\chi$ sont à support compact, on en déduit que $\|\chi\beta_j\|^2_{L^2(g_j)}$ et $\|(\partial_t\chi)\beta_j\|^2_{L^2(g_j)}$ tendent vers 0. Par hypothèse $\|d\beta_j\|_{L^2(g_j)}$ et $\|d^{*_j}\beta_j\|_{L^2(g_j)}$ tendent également vers 0 donc finalement $\|\beta_j\|_{L^2(g_j)}$ tend vers 0 , ce qui contredit l'hypothèse $\|\beta_j\|_{L^2(g_j)} = 1$. □

II.3.3 Convergence des 2-formes harmoniques

Comme dans le cas des 1-formes, on utilise l'inégalité de Poincaré donnée par le lemme II.3.4 qui nous permet d'étudier la convergence des formes g_j-harmoniques. Nous allons démontrer un résultat de convergence sur tout compact, et un contrôle de la convergence à l'infini qui se traduit par une propriété de passage à la limite de la décomposition du $\mathrm{H}^2_{L^2}(M)$ en ses parties g_j-autoduale et g_j-anti-autoduale.

Convergence sur tout compact.

Proposition II.3.7 *Soit une classe de cohomologie $b \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$. La suite γ_j de ses représentants g_j-harmoniques sur $\overline{M}$ converge au sens C^∞ sur tout compact de M vers un représentant g-harmonique L^2 de b.*

Plus précisément : soit un représentant w de b égal à $\lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$) près de l'infini, sur le bout parabolique de M. On écrit alors $\gamma_j = w + d\beta_j$, où β_j est une 1-forme lisse sur $\overline{M}$ orthogonale aux formes g_j-harmoniques et telle que $d^{*_j}\beta_j = 0$. Alors β_j converge sur tout compact de M vers une 1-forme β dans $L^2_1(g)$, orthogonale aux 1-formes L^2 g-harmoniques, telle que $\gamma = w + d\beta$ soit g-harmonique,

$$d^{*_g}\beta = 0 \quad et \quad \|\beta\|_{L^2_1} \leq c\|w\|_{L^2(g)},$$

pour une constante $c > 0$ fixée.

Pour la démonstration, nous aurons besoin du lemme technique suivant destiné au contrôle de w :

Lemme II.3.8 *Quel que soit $\epsilon > 0$, il existe T suffisamment grand tel que*

$$\int_{t\geq T} |d^{*_g}\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}|^2 \mathrm{vol}^g \leq \epsilon \quad et \quad \int_{t\geq T} |d^{*_j}\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \leq \epsilon.$$

Démonstration : Il suffit de démontrer ce lemme pour le modèle local de métrique $\hat{g}$ sur le bout parabolique et ses approximations $\hat{g}_j$: en effet, $|\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}|_{\hat{g}_j} = |\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}|_{\hat{g}} = 1$, donc ces intégrales dépendent de façon C^1 de la métrique, et lemme suit pour toute métrique asymptotique au modèle local (qui signifie C^2 proche).

Le lemme est trivial pour $g = \hat{g}$ ou $\hat{g}_j$ car $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ est harmonique pour ces métriques. En effet le bout parabolique possède un revêtement standard $p : I_a \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$ dans lequel p^*g apparaît comme un produit riemannien de la forme $p^*g = g' + g^{\mathrm{FS}}$ et $p^*\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ est par définition égale à $\mathrm{vol}^{\mathrm{FS}}$ qui est harmonique pour $g' + g^{\mathrm{FS}}$. □

Démonstration de la proposition II.3.7 : Le lemme de Poincaré II.2.6 nous permet de trouver un représentant w de b égal à $\lambda\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ sur le bout parabolique. Le fait de pouvoir écrire les β_j sous la forme annoncée relève de la théorie de Hodge sur les variétés compact et ne présente pas de difficulté.

Par hypothèse, $\gamma_j = w + d\beta_j$, est g_j-harmonique, donc

$$d^{*_j} d\beta_j = -d^{*_j}\gamma.$$

En intégrant contre β_j, puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\|d\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} = -\int \langle \beta_j, d^{*_j}\gamma\rangle \mathrm{vol}^{g_j} \leq \|\beta_j\|_{L^2(g_j)} \|d^{*_j} w\|_{L^2(g_j)},$$

et par l'inégalité de Poincaré de II.3.3, on en déduit que pour une constante c indépendante de b telle que

$$\|\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} \leq c\|d\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} \leq c\|\beta_j\|_{L^2(g_j)} \|d^{*_j} w\|_{L^2(g_j)}.$$

D'après le lemme II.3.8, $\|d^{*_j} w\|_{L^2(g_j)}$ est uniformément bornée, ce qui entraîne que $\|\beta_j\|_{L^2(g_j)}$ est uniformément bornée, puis que $\|d\beta_j\|_{L^2(g_j)}$ est uniformément bornée. Comme on a pris le soin de choisir une jauge telle que $d^{*_j}\beta_j = 0$, alors $\|\beta_j\|_{L^2_1(g_j)}$ est uniformément bornée.

Comme de plus les métriques g et g_j coïncident sur un compact K de M fixé dès que j est suffisamment grand, on en déduit une borne $L^2_1(g)$ pour β_j sur K. Alors, par compacité de la boule unité en topologie faible, quitte à extraire une sous suite, β_j converge au sens faible sur tout compact de M vers une 1-forme $\beta \in L^2_1(g)$, vérifiant

$$d^{*_g}\beta = 0, \quad \Delta^g \beta = -d^{*_g} w,$$

$$\|\beta\|_{L^2(g)} \leq c\|d^{*_g} w\|_{L^2(g)}, \text{ et } \quad \|d\beta\|^2_{L^2(g)} \leq c\|d^{*_g} w\|^2_{L^2(g)},$$

ce qui entraîne $\|\beta\|^2_{L^2_1(g)} \leq (c + c^2)\|d^{*_g} w\|^2$.

Sur un compact de M, les β_j sont solutions d'une équation elliptique d'ordre 2 $\Delta^{g_j}\beta_j = -d^{*_j}w$; sur un compact fixé, la borne uniforme L^2_1 nous permet donc d'avoir des bornes uniformes L^2_k de tous ordres sur β_j. Finalement par l'injection compacte de Sobolev, $L^2_{k+1} \hookrightarrow L^2_k$ et l'injection bornée $L^2_k \hookrightarrow C^{k-3}$, on en déduit que la convergence est en réalité C^∞ sur tout compact de M. □

Convergence à l'infini. L'étoile de Hodge associée à g est une involution sur l'espace des 2-formes en dimension 4. Comme dans la théorie sur les variétés compactes, les formes g-harmoniques L^2 se décomposent grâce à l'étoile de Hodge en leurs parties autoduales et anti-autoduales suivant les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres $+1$ et -1. Cette décomposition des formes harmoniques induit alors une décomposition du $\mathrm{H}^2_{L^2}(M)$: on note alors

$$\mathrm{H}^2_{L^2}(M) = H^{+_g} \oplus H^{-_g}, \tag{II.16}$$

où H^{+_g} est le sous-espace des classes de cohomologies représentées par des formes g-harmoniques autoduales L^2, et H^{-_g} celui des classes représentées par les anti-autoduales.

Lorsque les bouts paraboliques de M vérifient la condition $\alpha_2 - \alpha_1 \in \mathbb{Q}$ nous avons vu que $\mathrm{H}^2_{L^2}(M) \simeq \mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$, et nous nous demandons alors quel est le lien entre cette décomposition et la décomposition habituelle pour les métriques g_j sur la variété compactifiée $\overline{M}$.

$$\mathrm{H}^2_{\mathrm{DR}}(\overline{M}) = H^{+_j} \oplus H^{-_j}.$$

Remarque : nous avons vu que $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(\overline{M}) \simeq \mathrm{H}^*_{L^2}(M) \simeq H^*(M)$ et nous sous-entendons à chaque fois les identifications dans les notations ci-dessus.

Lemme II.3.9 *Pour tout $\epsilon > 0$, et toute classe de cohomologie $b \in \mathrm{H}^2_{L^2}(M)$, il existe un T suffisamment grand tel que avec les notations de II.3.7, on ait*

$$\int_{t\geq T} |\gamma|^2 \mathrm{vol}^g \leq \epsilon, \quad et \quad \int_{t\geq T} |\gamma_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \leq \epsilon.$$

Démonstration : Rappelons qu'avec les notation de II.3.7, on note $\gamma_j = w + d\beta_j$, où w est de la forme $\lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ sur le bout parabolique de M. On rappelle également que nous avons choisi des formes β_j orthogonales aux formes g_j-harmoniques et telles que $d^{*_j}\beta_j = 0$; par II.3.3, nous en avons déduit que $\|\beta_j\|_{L^2(g_j)}$ était uniformément borné par (cf démonstration de II.3.7).

En utilisant le fait que γ_j est harmonique, d'où $d^{*_j} d\beta_j = -d^{*_j} w$, et le lemme II.3.8, on en déduit que pour tout $\epsilon > 0$, pour T suffisamment, on a

$$\|\beta_j\|_{L^2(g_j)} \left(\int_{t \geq T} |d^{*_j} w|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \right)^{1/2} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{pour tout } j.$$

Pour démontrer le lemme, on commence par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{t \geq T} |d\beta_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} &= \int_{t \geq T} \langle d^{*_j} d\beta_j, \beta_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j} + \int_{t=T} \beta_j \wedge *_j d\beta_j \\ &= -\int_{t \geq T} \langle d^{*_j} w, \beta_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j} + \int_{t=T} \beta_j \wedge *_j d\beta_j, \quad \text{(II.17)} \end{aligned}$$

d'où la majoration

$$\begin{aligned} \int_{t \geq T} |d\beta_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j} &\leq \left| \int_{t \geq T} \langle d^{*_j} d\beta_j, \beta_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j} \right| + \left| \int_{t=T} \beta_j \wedge *_j d\beta_j \right| \\ &\leq \|\beta_j\|_{L^2(g_j)} \left(\int_{t \geq T} |d^{*_j} w|^2 \mathrm{vol}^{g_j} \right)^{1/2} + \left| \int_{t=T} \beta_j \wedge *_j d\beta_j \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \left| \int_{t=T} \beta_j \wedge *_j d\beta_j \right|. \end{aligned}$$

Puisque β_j converge au sens C^∞ sur tout compact de M, le terme $\int_{t=T} \beta_j \wedge *_j d\beta_j$ converge vers $\int_{t=T} \beta \wedge *d\beta$ lorsque j tend vers l'infini ; comme $\beta \in L^2_1$, on peut choisir une tranche $t = T$ près de l'infini telle que $|\int_{t=T} \beta \wedge *d\beta| \leq \epsilon/4$. On en déduit que, quitte à éliminer les premiers termes de la suite β_j, on peut supposer

$$\left| \int_{t \geq T} \beta_j \wedge *d\beta_j \right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

d'où le lemme. □

Convergence en cohomologie. Étant données des classes de cohomologie a et b de $\mathrm{H}^2_{L^2}(M)$, et leurs représentants g_j-harmoniques γ_j et ω_j sur $\overline{M}$, on sait d'après II.3.7, que γ_j et ω_j convergent sur tout compact vers les représentants g-harmoniques L^2 γ et ω de a et b. Alors une conséquence immédiate de II.3.9 est que

$$\int_M \langle \gamma_j, \omega_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j} \to \int_M \langle \gamma, \omega \rangle \mathrm{vol}^g \quad \text{lorsque } j \to \infty. \qquad \text{(II.18)}$$

Pour le voir il suffit de décomposer l'intégrale en deux morceaux :

$$\int_M \langle \gamma_j, \omega_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j} = \int_{t \geq T} \langle \gamma_j, \omega_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j} + \int_{M \setminus \{t \geq T\}} \langle \gamma_j, \omega_j \rangle \mathrm{vol}^{g_j}.$$

Pour T suffisamment grand, le premier morceau est contrôlé par le lemme II.3.9 et on peut également supposer que $\int_{t \geq T} \langle \gamma, \omega \rangle \mathrm{vol}^g$ est petit car γ et ω sont L^2. Le second morceau tend vers $\int_{M \setminus \{t \geq T\}} \langle \gamma, \omega \rangle \mathrm{vol}^g$ en raison de la convergence C^∞ de γ_j et ω_j, d'où le résultat.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire II.3.10 *Soit une classe de cohomologie $b \in \mathrm{H}^2_{L^2}(M)$, alors*

$$b^{+_j} \to b^+ \quad \text{et} \quad b^{-_j} \to b^-,$$

pour j tendant vers l'infini.

Démonstration : Soient γ_j les représentants g_j-harmoniques de b, et γ son représentant g-harmonique L^2. Nous noterons $(\gamma^+)_j$ les représentants g_j-harmoniques de b^+. Alors ces représentants convergent sur tout compact par la proposition II.3.7.

On en déduit les convergences sur tout compact suivantes : par unicité du représentant $g-$harmonique $(\gamma^+)_j$ converge vers son représentant g-harmonique qui est par hypothèse γ^+ ; parce que les métrique g_j convergent vers g sur tout compact de M, $\gamma_j^{+_j} \to \gamma^+$.

Soit une classe de cohomologie $a \in \mathrm{H}^2_{L^2}(M)$. Notons ω_j la suite de ses représentants g_j-harmoniques. On rappelle que pour une telle suite, $\|\omega_j\|_{L^2(g_j)}$ est uniformément bornée. Alors

$$(b^+ - b^{+_j}).a = [(\gamma^+)_j - \gamma_j^{+_j}].[\omega_j] \leq \|(\gamma^+)_j - \gamma_j^{+_j}\|_{L^2(g_j)} \|\omega_j\|_{L^2(g_j)},$$

et d'après (II.18),

$$\|(\gamma^+)_j - \gamma_j^{+_j}\|_{L^2(g_j)} \to \|\gamma^+ - \gamma^+\|_{L^2(g)} = 0.$$

On en déduit que $(b^+ - b^{+_j}).a \to 0$, pour toute classe de cohomologie $a \in \mathrm{H}^2_{L^2}(M)$. Puisque le cusp produit est une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel de dimension finie, ceci implique que $b^+ - b^{+_j}$ tend vers 0 dans $\mathrm{H}^2_{L^2}(M)$, d'où le corollaire. □

Chapitre III

Équations de Seiberg-Witten

III.1 Rappels

Nous nous contenterons d'énoncer les résultat important de la théorie pour un orbifold X en insistant sur le cas où $b_2^+ = 1$, puisque c'est le cas des surfaces complexes réglées. Lorsque $b_2^+ > 1$ l'invariant de Seiberg-Witten est indépendant de la métrique tandis que pour $b_2^+ = 1$ un problème de «chambres» se pose et on peut définir un invariant à condition d'éviter les phénomènes de «Wall-Crossing» (cf. proposition III.1.7).

III.1.1 Structure $spin^c$ et opérateur de Dirac

Soit X une orbivariété orientée de dimension réelle 4. Il sera sous-entendu par la suite que les fibrés considérés sur X sont en fait des orbifibrés : en une singularité orbifold, un orbifibré pourra être vu comme un fibré sur le revêtement local de X muni d'une action du groupe fini associé à la singularité ; les sections d'un orbifibré seront alors les sections lisses du fibré défini sur le revêtement local, invariantes sous l'action du groupe fini. Les constructions de théories de jauge faites sur les variétés lisses s'étendent ainsi de façon triviale au cadre orbifold (cf. exemple de la cohomologie de De Rham orbifold). Nous ferons tout de même attention au théorème de l'indice qui est toujours valable dans le cas orbifold mais qui se calcule différemment sur les orbivariétés (cf. [Ka]).

Soit g une métrique riemannienne sur X. Notons $P_{SO}(X)$ le fibré des repères orthonormés orientés de X. Rappelons que nous on disposons d'un revêtement à deux feuillets

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin^c(4) \xrightarrow{\rho} SO(4) \times S^1 \to 0.$$

Une structure *spin*^{c} sur X est la donnée d'un *spin*^{c}-fibré principal $Q \to X$ et d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Spin^c(4) & \xrightarrow{\rho} & SO(4) \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \longrightarrow & P_{SO}(X) \times Q_{S^1} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

où $Q_{S^1} \to X$ est le S^1-fibré principal obtenu à partir de Q et du morphisme de groupes $Spin^c(4) \to S^1$. Autrement dit Q est un revêtement à deux feuillets fibres à fibres de $P_{SO}(X) \times Q_{S^1}$. Le fibré hermitien en droites complexes L associé à Q_{S^1} est appelé *fibré déterminant* de la structure *spin*^{c}.

Via l'isomorphisme $Spin^c(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ et sa représentation standard dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, on en déduit un fibré hermitien de *spineurs* $W = W^+ \oplus W^-$ et une *action de Clifford* de TX sur W. La métrique g induit une connexion de Levi-Civita sur $P_{SO}(X)$; si nous choisissons de plus une connexion unitaire A sur Q_{S^1}, on en déduit une connexion sur Q, d'où une connexion sur ∇^A sur le fibré des spineurs et un opérateur de Dirac donné par

$$D_A\psi = \sum_i e_i.\nabla^A_{e_i}\psi,$$

où $\psi \in W$ et (e_i) est une base orthonormée d'une fibre de TX qu'on fait agir par produit de Clifford. L'opérateur de Dirac est elliptique, formellement autoadjoint et s'écrit suivant la décomposition $W^+ \oplus W^-$

$$D_A = \begin{pmatrix} 0 & D_A^- \\ D_A^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a la propriété pour toute 1-forme imaginaire pure a,

$$D_{A+a}\psi = D_A\psi + \frac{1}{2}a.\psi.$$

Les 2-formes autoduales imaginaires pures agissent sur W^+ comme des endomorphismes hermitiens sans trace, on pose alors les équations de Seiberg-Witten non perturbées pour des couples (A, ψ) de *l'espace des configurations* $\mathcal{B} = Conn(Q_{S^1}) \times \Gamma(W^+)$

$$\begin{aligned} D_A\psi &= 0 \\ F_A^+ &= q(\psi), \end{aligned} \tag{III.1}$$

où F_A est la courbure de la connexion A et $q(\psi)$ l'endomorphisme hermitien sans trace de W^+ défini par

$$q(\psi) = \{\psi^* \otimes \psi\}_0 = \psi^* \otimes \psi - \frac{1}{2}|\psi|^2 \mathrm{Id}.$$

En même temps, on a un groupe de jauge, $\mathcal{G} = Map(X, S^1)$ qui agit sur $\mathcal{B}$ par

$$f.(A, \psi) = (A - 2\frac{df}{f}, f\psi), \text{ pour tout } f \in \mathcal{G}.$$

On remarque que l'espace des solutions des équations de Seiberg-Witten est stable par $\mathcal{G}$. En effet, il est clair que la deuxième équation est invariante par changement de jauge. Pour la deuxième équation, on a

$$D_{A-2\frac{df}{f}} f\psi = -df.\psi + D_A f\psi = -df.\psi + df.\psi + fD_A\psi = fD_A\psi,$$

d'où le résultat.

L'action de $\mathcal{G}$ est libre sauf en des configurations de la forme $(A, 0)$ appelées *configurations réductibles*. On note alors

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \setminus \{\text{configurations réductibles}\}$$

l'espace des configurations irréductibles.

Remarque : on peut doter $\mathcal{B}^*/\mathcal{G}$ (en utilisant les bons espaces de Sobolev) d'une structure de variété Hilbertienne (cf. [Mo]). Ces hypothèses techniques seront sous-entendues par la suite.

On obtient également un quotient un *espace des modules*

$$\mathcal{M}(g) = \{ \text{ solutions de (III.1)}\}/\mathcal{G},$$

et un *espace des modules de solutions irréductibles*

$$\mathcal{M}^*(g) = \{ \text{ solutions irréductibles de (III.1)}\}/\mathcal{G} \subset B^*/\mathcal{G}.$$

De même, on définit les équations de Seiberg-Witten perturbées par

$$\begin{aligned} D_A\psi &= 0 \\ F_A^+ &= q(\psi) + \varpi^+, \end{aligned} \tag{III.2}$$

où ϖ est une 2-forme à valeurs imaginaires pures, un *espace des modules perturbé* $\mathcal{M}(g, \varpi)$ et $\mathcal{M}^*(g, \varpi)$. Une propriété essentielle pour définir un invariant associé à ces espaces de modules est la compacité

Proposition III.1.1 *L'espaces des modules $\mathcal{M}(g, \varpi)$ est compact.*

III.1.2 Structures *spin*^{c} de type presque complexe

Si nous supposons X munie d'une structure presque complexe J et d'une métrique g compatible, on peut lui associer un U(2)-fibré des repère. Dans ce cas, le morphisme $\mathrm{U}(2) \to SO(4) \times S^1$ donné par l'inclusion $\mathrm{U}(2) \subset SO(4)$ et le déterminant se relève en un morphisme $\mathrm{U}(2) \to Spin^c(4)$. On en déduit une structure *spin*^{c} sur X qu'on dit *de type presque complexe* qu'on va expliciter dans la suite de cette section.

Notons que la complexification de J nous permet d'obtenir classiquement une décomposition de $T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes \mathbb{C}$ suivant les valeurs propres $\pm i$ de J, en

$$T_{\mathbb{C}}X = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X.$$

On a alors une inclusion canonique $TX \hookrightarrow T_{\mathbb{C}}X$ et l'on note $U^{1,0}$ et $U^{0,1}$ les projections de $U \in T_{\mathbb{C}}X$ sur chacun des facteurs. Comme J opère également sur les 1-formes, on en déduit de même une décomposition

$$T^*X \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}X \oplus \Lambda^{0,1}X,$$

puis une graduation de l'algèbre $\Lambda_{\mathbb{C}}X = \Lambda T^*X \otimes \mathbb{C}$

$$\Lambda_{\mathbb{C}}X = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}X.$$

La complexification de g nous donne un isomorphisme noté

$$\begin{array}{ccc} TX \otimes \mathbb{C} & \to & \Lambda X \otimes \mathbb{C} \\ U & \mapsto & U^* \end{array}$$

tel que $(U^{1,0})^* = (U^*)^{0,1}$ et $(U^{0,1})^* = (U^*)^{1,0}$ ce qui entraîne que $(T^{0,1}X)^* \simeq \Lambda^{1,0}$ et $(T^{1,0}X)^* \simeq \Lambda^{0,1}$ via cet isomorphisme.

Alors la structure *spin*^{c} de type presque complexe associée à J se matérialise par un fibré de spineurs,

$$W = W^+ \oplus W^-,$$

avec

$$W^+ = \Lambda^{0,0}(X) \oplus \Lambda^{0,2}(X), \quad W^- = \Lambda^{0,1}(X),$$

et d'une *action de Clifford* de TX sur $W = \Lambda^{0,*}X$ définie par

$$v.(\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k) = \sqrt{2}((v^{1,0})^* \wedge \cdot - i_{v^{0,1}})\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k,$$

Le fibré déterminant de la structure *spin*^{c} de type presque complexe est égal à

$$L = \det W^+ = \det W^- = \Lambda^{0,2}X = K_X^{-1}.$$

Remarque : dans la suite nous ne nous intéresserons plus qu'à des structures *spin*^{c} de type presque complexe.

III.1.3 Le cas kählérien

Dans toute la fin du §III.1, X sera supposée compacte. Si J est intégrable et si g est kählérienne relativement à J, elle induit sur le fibré déterminant $L = K^{-1}$ une connexion unitaire A_0 égale à la connexion de Chern. Alors pour un spineur $\psi = (\beta, \gamma) \in \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2} = W^+$, l'opérateur de Dirac associé à g et A_0 s'écrit

$$D_{A_0}\psi = \sqrt{2}(\overline{\partial}\beta + \overline{\partial}^*\gamma);$$

on écrit $D_A\psi = \sqrt{2}(\overline{\partial}_a\beta + \overline{\partial}_a^*\gamma)$ l'opérateur de Dirac obtenu en couplant $\overline{\partial}$ et $\overline{\partial}^*$ avec la connexion a sur le fibré trivial.

On s'intéresse maintenant aux équations de Seiberg-Witten perturbées avec perturbation $\varpi = F_B$, où B est une connexion unitaire sur un fibré en droites complexes $D \to \Sigma$. On suppose en outre que B définit une structure holomorphe sur D, c'est à dire que $F_B^{0,2} = 0$.

Les équations de Seiberg-Witten perturbées s'écrivent avec le formalisme complexe comme notant $\psi = (\beta, \gamma)$,

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_a\beta + \overline{\partial}_a^*\gamma &= 0 \\ \Lambda F_{A\otimes B^{-1}} &= \frac{i}{2}(|\beta|^2 - |\gamma|^2) \\ F_A^{0,2} &= \frac{\bar{\beta}\gamma}{2}. \end{aligned} \tag{III.3}$$

Dans le cas où $X = \overline{M}$, si g est une métrique kählérienne de courbure scalaire constante $s < 0$, alors le couple donné par le spineur $(\sqrt{-s}, 0)$ et la connexion de Chern A^g induite par g sur K_M^{-1} est une solution des équations de Seiberg-Witten non perturbées pour la métrique g car dans ce cas, on a la formule

$$\Lambda F_{A^g} = \frac{-is}{2}.$$

Lemme III.1.2 *Sous l'hypothèse* $\deg_\omega K_X^{-1} \otimes [D]^{-1} < 0$, *les solutions de (III.3) sont données par les couples* (A, ψ), *tels que* A *définit une structure holomorphe sur* K_X^{-1} *(d'où une structure holomorphe induite sur* $\Lambda^{0,0}X = K_X^{-1} \otimes K_X$*) et* $\psi = (\beta, 0)$ *avec* β *une section holomorphe de* $\Lambda^{0,0}X$ *solution de l'équation vortex*

$$\Lambda F_{A\otimes B^{-1}} = \frac{i}{2}|\beta|^2.$$

Démonstration : Soit (A, ψ) une solution des équations (III.3) avec $A = A_0 + a$ et $\psi = (\beta, \gamma)$. En appliquant l'opérateur $\overline{\partial}_a$ à la première équation on a

$$\overline{\partial}_a^2\beta + \overline{\partial}_a\overline{\partial}_a^*\gamma = 0.$$

La structure holomorphe $\overline{\partial}_a$ est intégrable si et seulement si sa courbure $\overline{\partial}_a^2 = \frac{1}{2}F_A^{0,2}$ est nulle. En utilisant les équations on a $\overline{\partial}_a^2\beta = \frac{1}{4}|\beta|^2\gamma$; alors en intégrant contre γ, il vient

$$\frac{1}{4}\|\bar{\beta}\gamma\| + \|\overline{\partial}_a^*\gamma\|^2 = 0.$$

On en déduit que $\bar{\beta}\gamma = 0$, d'où $F_A^{0,2} = 0$ et que A définit donc une structure holomorphe sur K_X^{-1}. Puis on a $\overline{\partial}_a^*\gamma = -\overline{\partial}_a\beta = 0$ ce qui signifie que β et $\bar{\gamma}$ sont holomorphes. Puisque $\bar{\beta}\gamma = 0$, on en déduit qu'une au moins des deux sections holomorphes est identiquement nulle.

Puis par un argument sur le degré de $K_X^{-1} \otimes D^{-1}$,

$$0 > \deg_\omega K_X^{-1} \otimes [D]^{-1} = \int c_1(K_X^{-1} \otimes [D]^{-1}) \wedge \omega = \frac{1}{8\pi}\int |\gamma|^2 - |\beta|^2 \, \mathrm{vol}^g,$$

on en déduit que $\gamma = 0$. □

Réciproquement nous retrouvons tous les points de l'espace des modules des équations de Seiberg-Witten en résolvant l'équation vortex :

Lemme III.1.3 *Etant données une structure holomorphe sur K_X^{-1} et une section holomorphe β de $\Lambda^{0,0}X$ (pour la structure holomorphe induite par $L \otimes K_X^{-1}$) non identiquement nulle, il existe une unique métrique hermitienne h sur L telle que la connexion de Chern associée A vérifie l'équation vortex*

$$\Lambda F_{A\otimes B^{-1}} = \frac{i}{2}|\beta|^2.$$

Corollaire III.1.4 *Les équations de Seiberg-Witten perturbées (III.3) associées à la structure spin^c induite par la structure complexe de X sous l'hypothèse* $\deg_\omega K_X^{-1} \otimes [D]^{-1} < 0$ *ont une unique solution modulo l'action du groupe de jauge $\mathcal{G}$.*

Démonstration : D'après le lemme L'espace des modules des solutions vortex est donné comme nous l'avons vu formé de couples $(\beta, \partial_{K^{-1}})$, avec $\partial_{K^{-1}}$ une structure holomorphe sur K_X^{-1}, dont on déduit une structure holomorphe sur $\Lambda^{0,0}$ pour laquelle β est une section holomorphe. On a également une action du groupe de jauge $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = Map(X, \mathbb{C})$ de sorte que par le lemme III.1.3 on en déduit que l'espace des solution de III.3 modulo $\mathcal{G}$ s'identifie à l'espace des modules des solutions des équation vortex

$$\mathcal{M}(g) \simeq (\beta, \partial_{K^{-1}}) \mod \mathcal{G}_{\mathbb{C}};$$

il en résulte que $\mathcal{M}(g)$ possède un unique point. □

III.1.4 Invariant de Seiberg-Witten

Nous revenons maintenant au équations de Seiberg-Witten perturbées (III.2) pour une métrique g quelconque et une structure $spin^c$ de type presque complexe. Bien que les équation de Seiberg-Witten ne soient pas elliptique, elle le deviennent modulo l'action du groupe de jauge, et on obtient le complexe elliptique des équations linéarisées en une solution (A, Ψ)

$$0 \longrightarrow i\Omega^0(X) \xrightarrow{d_0} i\Omega^1(X) \oplus \Gamma(W^+) \xrightarrow{d_1} \Gamma(W^-) \oplus i\Omega^+(X) \longrightarrow 0, \quad \text{(III.4)}$$

avec

$$\begin{aligned} d_0 u &= (-2du, u\Psi) \\ d_1(a,\psi) &= (D_A\psi + \frac{a}{2}.\Psi, d^+a + (D_\Psi q)\psi) \end{aligned}$$

La caractéristique d'Euler du complexe elliptique $d = \dim H^1 - \dim H^2 - \dim H^0$ est appelée *dimension virtuelle* de l'espace des modules.

On peut déformer ce complexe par une homotopie faisant disparaître les termes d'ordre 0 ; cette opération ne change pas la caractéristique d'Euler du complexe (puisque l'indice ne dépend que du symbole principal des opérateurs) qui se scinde alors en deux complexes

$$0 \longrightarrow i\Omega^0(X) \xrightarrow{-2d} i\Omega^1(X) \xrightarrow{d^+} i\Omega^+(X) \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow \Gamma(W^+) \xrightarrow{D_A} \Gamma(W^-) \longrightarrow 0.$$

On en déduit que la dimension virtuelle de $\mathcal{M}$ est égale à la différence des indices des opérateurs elliptiques

$$D_A : \Gamma(W^+) \to \Gamma(W^-) \quad \text{et} \quad d \oplus d^* : \Omega^1(X) \to \Omega^2(X) \oplus \Omega^0(X).$$

Mais nous devons faire attention à la formule de l'indice qui est différente sur les orbifolds (cf. [Ka]). Nous calculerons plus loin cet indice dans le cas où nous disposons d'une métrique de Kähler sur X.

Nous allons maintenant énoncer la proposition qui fonde la théorie de l'invariant. :

Proposition III.1.5 *L'espace des modules paramétré*

$$\mathcal{M}^*_{\text{par}}(g) = \bigcup_{\varpi \in i\Omega^+(X)} \mathcal{M}^*(g,\varpi) \times \{\varpi\}$$

est une sous variété de $\mathcal{B}^*/\mathcal{G} \times i\Omega^+(X)$. La différentielle de la projection canonique $\pi : \mathcal{M}^*_{\text{par}} \to i\Omega^+(X)$ est de Fredholm ; son noyau est égal à l'espace tangent de Zariski de $\mathcal{M}^*(g,\varpi)$ et son indice est égal à la dimension virtuelle d de l'espace des modules.

On en déduit par le théorème de Sard-Smale que pour une perturbation générique ϖ, la différentielle de π est surjective, et l'espace des modules $\mathcal{M}^*(g,\varpi)$ est une sous-variété lisse de $\mathcal{B}^*/\mathcal{G}$.

Supposons que X admette une métrique de Kähler relativement à une structure complexe compatible avec la structure *spin*^{c} ; on voit qu'en perturbant les équations par un fibré D de degré suffisamment négatif, on obtient un espace des modules réduit à un point (cf. corollaire III.1.4). Par ailleurs, il est connu par un calcul explicite des opérateurs linéarisés du complexe elliptique, que pour une métrique kählérienne, $d\pi$ est surjective et l'espace des modules obtenu est lisse (cf. [Mo] p. 119-120) ; nous avons ainsi trouvé un moyen de calculer la dimension virtuelle de l'espace des modules :

Corollaire III.1.6 *Supposons que X admet une métrique de Kähler g et que* $\deg K_X^{-1}\otimes[D]^{-1}<0$. *Alors la dimension virtuelle de l'espace des modules des équation de Seiberg-Witten perturbées associées à la structure spin*^{c} *induite par la structure complexe et la métrique g est nulle.*

Nous faisons maintenant l'hypothèse $b_2^+(X)=1$. Soit g_0 une métrique kählérienne relativement à une structure complexe compatible avec la structure *spin*^{c} sur X ; notons ω sa forme de Kähler. Soit g_1 une métriques riemanniennes sur X et ϖ une perturbation des équations par un fibré D (cf. cas kählérien). Supposons que

$$c_1(K_X^{-1}\otimes D^{-1}).[\omega]^{+_{g_j}}<0,\ \text{pour } i=0,1.$$

On dit que g_0 et g_1 sont dans la même *chambre*.

Cette hypothèse implique que les équations de Seiberg-Witten perturbées par ϖ, associées à g_0 et g_1 n'ont pas de solutions réductibles à cause de l'équation $(F_A-\varpi)^+=q(\psi)$.

Soit $(g_t)_{0\le t\le 1}$ un chemin de métriques reliant g_0 et g_1. Alors on peut définir une famille de perturbations $\varpi(t)=\varpi-f(t)2i\pi\omega$ avec $f(0)=f(1)=0$ et $f(t)$ éventuellement très positive pour $0<t<1$ de sorte que

$$(c_1(K_X^{-1}\otimes D^{-1})-f(t)[\omega]).[\omega]^{+_{g_j}}<0\ ;$$

ce qui entraîne que les équations de Seiberg-Witten perturbées par $\varpi(t)$ associées à la métrique g_t n'ont pas de solutions réductibles. On en déduit de même que dans la proposition III.1.5 que quitte à modifier $\varpi(t)$ par un chemin de perturbations génériques $\varpi_0(t)\in\Omega^{+_t}(X)$ en $\varpi_1(t)=\varpi(t)+\varpi_0(t)$, l'espace des modules paramétré défini par

$$\mathcal{M}_{\text{par}}((g_t),\varpi_1)=\bigcup\mathcal{M}(g_t,\varpi_1(t))\times\{t\}$$

est une sous variété compacte lisse de $\mathcal{B}^*/\mathcal{G}\times[0,1]$ avec un bord qui est l'union disjointe de $\mathcal{M}(g_0,\varpi_1(0))$ et $\mathcal{M}(g_1,\varpi_1(1))$. Comme g_0 est kählérienne, on

peut même supposer que $\varpi_1(0) = \varpi$. On voit que les espaces des modules sont des variétés cobordantes de dimension 0 et compactes. Le nombre de points de ces espaces des modules compté algébriquement est un invariant de cobordisme et on définit l'invariant de Seiberg-Witten par

$$\mathrm{SW}(g, \varpi) = \sharp\mathcal{M}(g, \varpi).$$

On en déduit la proposition

Proposition III.1.7 *Dans le cas où $b_2^+(X) = 1$, supposons que X admette une métrique kählérienne g_0 relativement à une structure complexe compatible avec la structure spin^c de X telle que pour un fibré en droites complexes $[D]$, on ait*

$$\deg_\omega K_X^{-1} \otimes D^{-1} = c_1(K_X^{-1} \otimes D^{-1}).[\omega] < 0.$$

Alors pour toute métrique g_1 telle que

$$c_1(K_X^{-1} \otimes D^{-1}).[\omega]^{+_{g_1}} < 0,$$

l'invariant de Seiberg-Witten associé aux équations perturbées par le fibré D et la structure spin^c induite par la structure complexe vérifie

$$\mathrm{SW}(g_1, \varpi) = \mathrm{SW}(g_0, \varpi) = 1.$$

Remarque : en particulier les équations de Seiberg-Witten perturbées associées à une métrique vérifiant les hypothèses de cette proposition admettent une solution irréductible.

III.2 Uniformisation et solutions des équations de Seiberg-Witten

Dans cette section, nous revenons au cas où $M = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \Sigma$ est une surface complexe réglée obtenue à partir d'un fibré parabolique holomorphe $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma} = \Sigma \cup \{P_i\}$. Soit $\hat{g}$ un modèle local de métrique sur les bouts paraboliques de M qui ne vérifie pas nécessairement la condition de rationalité. *Remarque* : nous aurons besoin dans cette section de la théorie de Hodge L^2 sur M même dans le cas où M a des bouts paraboliques avec poids irrationnels. Pour cela il faut démontrer une inégalité de Poincaré, ce qui sera fait au §III.4.

Nous supposons maintenant de plus M dotée d'une métrique g^{K} kählérienne à courbure scalaire constante $s < 0$, asymptotique au modèle local. Nous allons voir maintenant comment l'existence de solutions non réductibles aux équations de Seiberg-Witten permet de démontrer le théorème I.3.5. Afin d'assurer l'existence de telles solutions, nous serons obligé de supposer $s < 0$. C'est une des limitations de la théorie de Seiberg-Witten.

III.2.1 Équations de Seiberg-Witten sur M

La variété complexe M est munie d'une structure *spin*^{c} dont le fibré déterminant est le fibré anti-canonique de M, $L = K_M^{-1}$. Soit g une métrique asymptotique au modèle local sur M. Les équations de Seiberg-Witten associées à la métrique g. s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_A\psi &= 0, \\ F_A^{+_g} &= q(\psi), \end{aligned} \tag{III.5}$$

où ψ est un spineur positif et A une connexion hermitienne sur L.

Connexions L_1^2 sur le fibré anti-canonique. Sur les bouts paraboliques de M, le modèle local de métrique kählérienne $\hat{g}$ induit une connexion $\hat{A}$ sur le fibré anti-canonique K_M^{-1} que l'on étend par partition de l'unité au fibré tout entier.

On définit *la classe de Chern* L^2 du fibré anti-canonique de M comme la classe de cohomologie de $\mathrm{H}^2_{L^2}(M)$

$$\mathrm{L}^2c_1 = \frac{i}{2\pi}\,[F_{\hat{A}}]\,.$$

Si A est une connexion sur K_M^{-1} telle que $A = \hat{A} + a$ avec $a, da \in L^2$, alors $\mathrm{L}^2c_1 = \frac{i}{2\pi}[F_A]$. En particulier si g est une métrique de Kähler asymptotique au modèle local sur les bouts paraboliques de M, elle induit alors une connexion A^g sur K_M^{-1} telle que $A^g - \hat{A} \in L_1^2$ d'où $\mathrm{L}^2c_1 = \frac{i}{2\pi}[F_{A^g}]$.

III.2.2 Un lemme clef

Nous vérifions maintenant que l'argument donné par LeBrun dans [L] s'applique à notre cadre de volume fini. Supposons que nous ayons trouvé une solution (A, ψ) des équations de Seiberg-Witten (III.5) associées à une métrique g asymptotique au modèle local, telle que

- $A = \hat{A} + a$, avec $a \in L_1^2(g)$,
- $\psi \not\equiv 0$, et $\psi \in L_1^2(g)$ relativement à $\nabla_{\hat{A}}$,

En particulier $[F_{\hat{A}}] = [F_A]$.

La formule de Lichnerowicz appliquée à (A, ψ) nous donne

$$0 = \mathrm{D}_A^2\psi = \nabla_A^*\nabla_A\psi_j + \frac{s_g}{4}\psi + \frac{1}{2}F_A^+.\psi,$$

or par hypothèse, $F_A^+.\psi = q(\psi)\psi$, d'où

$$0 = \nabla_A^*\nabla_A\psi + \frac{s_g}{4}\psi + \frac{1}{2}q(\psi)\psi. \tag{III.6}$$

Un simple calcul nous montre que

$$\langle q(\psi)\psi, \psi\rangle = \langle(\psi^* \otimes \psi - \frac{|\psi|^2}{2}\mathrm{Id})\psi, \psi\rangle = \frac{1}{2}|\psi|^4 \ ;$$

on en déduit en intégrant (III.6) contre ψ, puis en faisant une intégration par parties (ce qui est possible puisque a et ψ sont dans L^2_1) que

$$0 = \int_M 4|\nabla_A\psi|^2 + s_g|\psi|^2 + |\psi|^4 \mathrm{vol}^g;$$

alors

$$\int_M -s_g|\psi|^2\mathrm{vol}^g \geq \int_M |\psi|^4\mathrm{vol}^g,$$

avec égalité si et seulement si $\nabla_A\psi = 0$.

Remarque : on ne peut donc pas avoir $s_g \geq 0$ en tout point de M, sinon cela impliquerait que $\psi \equiv 0$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, et puisque $\psi \not\equiv 0$, il vient

$$\int_M s_g^2\mathrm{vol}^g \geq \frac{\left(\int_M -s|\psi|^2\mathrm{vol}^g\right)^2}{\int_M |\psi|^4\mathrm{vol}^g} \geq \int_M |\psi|^4\mathrm{vol}^g.$$

De plus, notons que la première inégalité devient une égalité si et seulement si s_g est constante et strictement négative (par la remarque précédente).

En utilisant le fait que $2|F_A^+|^2 = |q(\psi)|^2 = \frac{1}{4}|\psi|^4$, soit $|\psi|^4 = 8|F_A^+|^2$, on a donc

$$\int_M s_g^2\mathrm{vol}^g \geq \int_M |\psi|^4\mathrm{vol}^g = 8\int_M |F_A^+|^2\mathrm{vol}^g,$$

avec égalité si et seulement si $s_g = cste < 0$ et $\nabla_A\psi = 0$. De plus, on voit que dans le cas d'égalité, on a également $\int_M s_g^2\mathrm{vol}^g = \int_M |\psi|^4\mathrm{vol}^g$, et comme ψ est parallèle, $|\psi|$ est constante, d'où $|\psi| = \sqrt{-s_g}$.

Par hypothèse, $A = \hat{A} + a$, avec $a \in L^2_1(g)$, donc

$$\frac{i}{2\pi}[F_A] = \mathrm{L}^2 c_1.$$

Soit γ le représentant L^2, g-harmonique de la classe de cohomologie L^2c_1. Alors γ minimise la norme L^2 dans sa classe de cohomologie, et on a

$$\begin{aligned} 2\int_M |F_A^+|^2\mathrm{vol}^g &= \int_M |F_A|^2\mathrm{vol}^g + F_A \wedge F_A \\ &\geq \int_M |\gamma|^2\mathrm{vol}^g + \gamma\wedge\gamma \\ &\geq 2\int_M |\gamma^+|^2\mathrm{vol}^g = 8\pi^2(\mathrm{L}^2c_1^+)^2, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si F_A est harmonique. Finalement, on a démontré que

$$\frac{1}{32\pi^2}\int_M s_g^2 \mathrm{vol}^g \geq \left(\mathrm{L}^2 c_1^{+g}\right)^2.$$

Plaçons nous maintenant dans le cas d'égalité : en remontant toutes les majorations que nous avons faites, on a $s^g = cste < 0$, $\nabla_A \psi = 0$, $|\psi|^2 = -s_g$ et F_A harmonique. On peut définir une structure presque complexe J sur M, compatible avec g, à l'aide du spineur φ en prenant le pull-back de la multiplication par i sur W^- via l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} TM & \to & W^- \\ X & \mapsto & \dfrac{1}{|\psi|} X.\psi. \end{array}$$

De plus, la forme de Kähler associée à (g, J) vérifie alors

$$\omega.\psi = -2i\psi,$$

et J induit sur M une structure *spin*^{c} isomorphe à la structure *spin*^{c} que l'on avait fixée au départ.

Puisque $\nabla_A \psi = 0$, on en déduit que $\nabla J = 0$ et que J est par conséquent une structure complexe sur M. Les 2-formes autoduales agissent par produit de Clifford sur W^+ comme les endomorphismes anti-hermitiens sans trace. Alors la condition $\omega.\psi = -2i\psi$, soit $\frac{i\omega}{4}\psi = \frac{\psi}{2}$, implique que

$$\frac{i\omega}{4} = q(\psi/|\psi|).$$

Comme ψ est parallèle, on en déduit que ω est parallèle, d'où $d\omega = 0$. Finalement on a démontré que g est une métrique de Kähler relativement à la structure complexe J.

Reformulons cette discussion dans le lemme suivant.

Lemme III.2.1 *Soit (A, ψ) une solution des équations de Seiberg-Witten non perturbées (III.5) sur M, pour une métrique g asymptotique au modèle local, et une structure spin^c fixée, telle que*

- $\psi \not\equiv 0$
- $A = \hat{A} + a$, *avec* $a \in L^2_1$,
- $\psi \in L^2_1$,

Alors

$$\frac{1}{32\pi^2}\int_M s_g^2 \mathrm{vol}^g \geq \left(\mathrm{L}^2 c_1^{+g}\right)^2.$$

Si nous nous trouvons dans le cas d'égalité, alors (A, ψ) vérifie nécessairement

$$\nabla_A \varphi = 0, \quad \nabla F_A^+ = 0, \qquad s = cste < 0,$$

et F_A est harmonique. De plus, g est une métrique de Kähler relativement à une structure complexe J, induisant sur M une structure spin^c isomorphe à celle que l'on s'était donnée au départ.

III.2.3 Démonstration du théorème I.3.5

Une involution sur M. Pour construire la métrique modèle $\hat{g}$ sur les bout paraboliques de M, nous avons déjà choisi sur $\mathcal{E} \to \Sigma$ une métrique hermitienne h, adaptée à la structure parabolique (voir I.2.2). Cette métrique hermitienne, comme nous l'avons vu, induit une métrique de Fubini-Study sur chaque fibre de $M \to \Sigma$. On peut donc voir chacune des fibres de M comme une sphère «ronde» et définir une application

$$\xi : M \to \Sigma,$$

qui à chaque point d'une fibre de M associe le point diamétralement opposé. Dans la suite ξ sera appelée *l'antipodie* de M. Il est clair que ξ est une involution du fibré $M \to \Sigma$ renversant l'orientation. Dans le revêtement $p : I_a \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$, le pull-back de ξ est égal à l'antipodie standard sur le facteur $\mathbb{CP}^1$, et l'on voit ainsi que ξ est une isométrie pour le modèle local de métrique $\hat{g}$ sur le bout parabolique ; notons que puisque $\xi^*\hat{g} = \hat{g}$, si g est asymptotique au modèle local, alors ξ^*g est également asymptotique au modèle local.

Le fait que ξ soit une isométrie pour la métrique $\hat{g}$ sur les bouts paraboliques de M implique que le pull-back par ξ d'une forme L^2 est encore une forme L^2. On en déduit que ξ induit une involution sur la cohomologie L^2 de M.

Lemme III.2.2 *L'involution ξ agit sur M en échangeant les facteurs de la décomposition*

$$\mathrm{H}^2_{L^2}(M) = \mathrm{H}^+_{L^2}(M) \oplus \mathrm{H}^-_{L^2}(M).$$

Démonstration : Comme ξ est un difféomorphisme qui renverse l'orientation de M, on en déduit que pour des 2-formes L^2, γ_1 et γ_2,

$$\int_M \xi^*\gamma_1 \wedge \xi^*\gamma_2 = -\int_M \gamma_1 \wedge \gamma_2.$$

Alors on en déduit que pour des classe de cohomologie $a, b \in \mathrm{H}^2_{L^2}(M)$,

$$\xi^*a \wedge \xi^*b = -a \wedge b\ ;$$

autrement dit ξ ne fait que changer le signe de la forme d'intersection. En utilisant en plus le fait que ξ est une involution, il vient

$$a \wedge \xi^*a = -\xi^*a \wedge (\xi^*)^2 a = -\xi^*a \wedge a = -a \wedge \xi^*a,$$

d'où

$$a \wedge \xi^* a = 0, \tag{III.7}$$

et puisque nous somme dans la situation $b_2^+ = b_2^- = 1$, cette dernière identité implique le lemme. □

Corollaire III.2.3 *Les métrique g et $\xi^* g$ définissent la mêmes décomposition*

$$\mathrm{H}^2_{L^2}(M) = \mathrm{H}^+_{L^2}(M) \oplus \mathrm{H}^-_{L^2}(M).$$

Démonstration : Soit une classe de cohomologie $a \in \mathrm{H}^{+_g}_{L^2}(M)$. D'après le lemme III.2.2, $\xi^* a \in \mathrm{H}^{-_g}_{L^2}(M)$; soit γ le représentant L^2, g-harmonique, g-anti-autodual de $\xi^* a$. Alors $\xi^*\gamma$ représente a et c'est une forme L^2, $\xi^* g$-harmonique, $\xi^* g$-autoduale d'où $a \in \mathrm{H}^{+_{\xi^* g}}_{L^2}(M)$.

On a démontré que $\mathrm{H}^{+_g}_{L^2}(M) \subset \mathrm{H}^{+_{\xi^* g}}_{L^2}(M)$, mais ces espaces vectoriels sont tous les deux de dimension 1 : ils sont donc égaux. De même on démontre facilement l'égalité $\mathrm{H}^{-_g}_{L^2}(M) = \mathrm{H}^{-_{\xi^* g}}_{L^2}(M)$. □

Fin de la preuve. Voici maintenant la proposition essentielle dans la démonstration du théorème I.3.5.

Proposition III.2.4 *Sous les hypothèses du théorème I.3.5, le revêtement universel holomorphe riemannien de (M, g^{K}) est isomorphe à $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$, muni de sa métrique kählérienne standard à courbure scalaire constante $s^{g^{\mathrm{K}}} = 2(c-1)$.*

Démonstration dans le cas où $s^{g^{\mathrm{K}}} = 0$: on définit le nombre caractéristique

$$\sigma = \int_M \gamma,$$

où γ est la classe de cohomologie L^2 donnée par

$$\gamma = -\frac{1}{24\pi^2}\left[\mathrm{tr}(R^{g^{\mathrm{K}}} \wedge R^{g^{\mathrm{K}}})\right].$$

Comme nous sommes en dimension 4, on en déduit que (cf. [Be] p.161, 6.34)

$$\sigma = \frac{1}{12\pi^2}\int_M |W^+|^2 - |W^-|^2 \,\mathrm{vol}^{g^{\mathrm{K}}}, \tag{III.8}$$

où $W^{\pm}$ sont les parties autoduales et anti-autoduales du tenseur de Weyl W. Une surface kählérienne est anti-autoduale si et seulement si $s^{g^{\mathrm{K}}}$ est identiquement nulle ; on en déduit que $W^+ = 0$. Maintenant, il est facile de calculer σ : pour cela, on peut quitte à changer la structure holomorphe du

fibré parabolique $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$ supposer que c'est un fibré paraboliquement stable. On en déduit une métrique de Kähler g' obtenue par construction standard à courbure scalaire $s = 0$. Or σ ne dépend que de la classe de cohomologie L^2 de γ ; d'après la formule de transgression, on en déduit que

$$\sigma = \int_M \gamma = \int_M \gamma'$$

où

$$\gamma' = -\frac{1}{24\pi^2}\left[\mathrm{tr}(R^{g'} \wedge R^{g'})\right].$$

Maintenant, il est facile de voir que puisque g' est un produit local de deux métriques de Kähler sur des courbes, on a $\gamma' = 0$, d'où $\sigma = 0$. Finalement, on en déduit d'après (III.8) que $W^- = 0$. Par conséquent, (M, g^{K}) est kählérienne conformément plate, ce qui entraîne que le revêtement universel riemannien de (M, g^{K}) est un produit de deux courbes munies de métriques kählériennes à courbures scalaires constantes opposées $(X_1, g_1) \times (X_2, g_2)$ (cf. [Be] p. 78 rq. 2.69).

Il est clair, en raison du comportement asymptotique de g^{K}, que l'un des facteurs doit être $\mathbb{H}^2$ et l'autre $\mathbb{CP}^1$ (muni de la métrique à courbure sectionnelle $c = -1$) ce qui démontre la proposition pour $s^{g^{\mathrm{K}}} = 0$. □

Démonstration dans le cas où $s^{g^{\mathrm{K}}} < 0$: On commence par le lemme

Lemme III.2.5 *Sous les hypothèses du théorème I.3.5, et en supposant que les équations de Seiberg-Witten non perturbées associées à la métrique $g = \xi^* g^{\mathrm{K}}$ ont une solution (A, ψ) de la forme*

- *$A = \hat{A} + a$, avec $d^* a = 0$ et $a \in L^2_1$,*
- *$|\psi|$ borné et $\psi \in L^2_1$ relativement à la connexion $\nabla_{\hat{A}}$.*

Alors le revêtement holomorphe riemannien de M est égal à $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ muni de sa métrique standard.

Remarque : nous admettons dans pour l'instant l'existence de la solution dans ce lemme ; la fin de la thèse aura pour but de la démontrer (cf. corollaires III.3.6 et III.4.12).

Pour une métrique de Kähler à courbure scalaire constante, la courbure de la connexion induite sur le fibré anti-canonique A^{K} est harmonique et vérifie

$$F^{+_{g^{\mathrm{K}}}}_{A^{\mathrm{K}}} = -\frac{is\omega}{4},$$

où ω est la forme de Kähler associée à la métrique g^{K}, et s sa courbure scalaire ; on en déduit que $\mathrm{L}^2 c_1^{+_{g^{\mathrm{K}}}} = \frac{s}{8\pi}[\omega]$ d'où

$$(\mathrm{L}^2 c_1^{+_{g^{\mathrm{K}}}})^2 = \frac{1}{32\pi^2}\int_M s^2 \mathrm{vol}^{g^{\mathrm{K}}}.$$

Comme par définition $g = \xi^* g^{\mathrm{K}}$, on en déduit que

$$\frac{1}{32\pi^2}\int_M s_g^2 \mathrm{vol}^g = \frac{1}{32\pi^2}\int_M s^2 \mathrm{vol}^{g^{\mathrm{K}}} ;$$

d'après le corollaire III.2.3

$$(\mathrm{L}^2 c_1^{+_g})^2 = (\mathrm{L}^2 c_1^{+_{g^{\mathrm{K}}}})^2,$$

donc

$$(\mathrm{L}^2 c_1^{+_g})^2 = \frac{1}{32\pi^2}\int_M s_g^2 \mathrm{vol}^g.$$

On peut donc appliquer le lemme III.2.1 pour lequel nous sommes dans le cas d'égalité. On en déduit que g est de Kähler relativement à une structure complexe J compatible avec l'orientation de M. En prenant l'image réciproque de ces structures via ξ, on en déduit que $g^{\mathrm{K}} = \xi^* g$ est kählérienne relativement à une structure complexe $J_1 = \xi^* J$ compatible avec l'orientation inverse de M. Autrement dit, $g^{\mathrm{K}}(J_1 ., .)$ est g^{K}-anti-autoduale. Par ailleurs, en notant J_0 la structure complexe que nous avions au départ sur M, on a évidemment $\omega = g^{\mathrm{K}}(J_0 ., .)$ qui est autoduale.

Plus généralement, la métrique g^{K} induit un isomorphisme entre $\Omega^2(M)$ et le fibré des endomorphismes antisymétriques $A(M)$. Il est bien connu que via cette identification, la décomposition $\Omega^2(M) = \Omega^+ \oplus \Omega^-$ est en fait une décomposition en algèbres de Lie de $A(M)$. En particulier, des endomorphismes correspondant à Ω^+ et Ω^- commutent. C'est justement le cas de J_0 et J_1. On en déduit que l'automorphisme $J_0 J_1$ de TM est de carré 1, et qu'il est donc diagonalisable avec valeurs propres ± 1. Par conséquent, le fibré tangent à M admet une décomposition en espaces propres de $J_0 J_1$, stables par J_0 et J_1

$$TM = L_1 \oplus L_2.$$

Comme J_0 et J_1 sont parallèles relativement à la métrique g, ceci implique que la décomposition de TM en $L_0 \oplus L_1$ est parallèle et finalement que le revêtement universel holomorphe riemannien de (M, g) est un produit riemannien de deux surfaces $(X_1, g_1) \times (X_2, g_2)$. Comme la courbure scalaire de g^{K} est constante et que sur un produit riemannien elle s'écrit

$$s(x_1, x_2) = s_1(x_1) + s_2(x_2),$$

on en déduit que s_1 et s_2 sont constantes. Maintenant, en raison du comportement asymptotique de g^{K} et comme le modèle local $\hat{g}$ a une courbure sectionnelle comprise entre -1 et c, nécessairement l'un des deux facteurs

X_1, X_2 doit être de courbure sectionnelle -1 et l'autre de courbure sectionnelle c. Il en résulte que M a un revêtement universel holomorphe riemannien de la forme $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$, ce qui démontre le lemme (et la proposition à condition d'admettre pour l'instant l'existence de (A, ψ)). □

Maintenant il n'est pas difficile de démontrer le théorème I.3.5 :

Lemme III.2.6 *Sous les hypothèse du théorème I.3.5, en supposant ou bien que $s^{g^K} = 0$ ou bien qu'il existe une solution aux équations de Seiberg-Witten satisfaisant aux hypothèses du lemme III.2.5, le fibré $\mathcal{E}$ est paraboliquement polystable.*

Démonstration : Remarquons que les seules courbes rationnelles de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ sont de la forme $\{\xi\} \times \mathbb{CP}^1$: il s'agit d'une simple application du principe du maximum. Le groupe fondamental $\pi_1(M) \simeq \pi_1(\Sigma)$ agit par isométries holomorphes sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$. Il envoie donc une courbe rationnelle $\{\xi\} \times \mathbb{CP}^1$ sur une courbe rationnelle $\{\xi'\} \times \mathbb{CP}^1$; comme l'action de $\pi_1(\Sigma)$ sur le revêtement $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$ est libre, et puisque les isométries de $\mathbb{CP}^1$ admettent au moins 1 point fixe, on en déduit que $\xi \neq \xi'$, d'où une action libre de $\pi_1(\Sigma)$ sur $\mathbb{H}^2$. Comme de plus $\mathbb{CP}^1$ est compact, l'action induite sur $\mathbb{H}^2$ est également propre. Finalement l'action de $\pi_1(\Sigma)$ nous donne au quotient une surface de Riemann $\widetilde{\Sigma} = \mathbb{H}^2/\pi_1(\Sigma)$ et une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PU}(2)$, de sorte que $M \simeq \widetilde{\Sigma} \times_\rho \mathbb{CP}^1$. En utilisant le fait que les seules courbes rationnelles de M sont données par les fibres de $M \to \Sigma$, on en déduit un diagramme holomorphe commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma} \times_\rho \mathbb{CP}^1 & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\Sigma} & \longrightarrow & \Sigma, \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des isométries.

On en déduit que $\mathcal{E}$ et paraboliquement polystable par le théorème de Mehta-Seshadri. □

III.3 Convergence des solutions pour les métriques g_j

Notre objectif est avant tout d'obtenir une solution non réductible aux équations de Seiberg-Witten (III.5) pour une surface complexe réglée à bouts paraboliques, car c'est l'outil central de la démonstration du théorème I.3.5.

Dans cette optique nous commençons par montrer que l'on sait faire converger des solutions aux équations de Seiberg-Witten perturbées pour les métriques g_j, vers une solutions des équations pour la métrique g. Néanmoins, tout ce que nous dirons concernant la convergence de ces solutions s'applique également au cas d'une variété complexe M à bouts paraboliques munie d'une métrique g asymptotique au modèle local.

Dans un deuxième temps, nous calculerons l'invariant de Seiberg-Witten sur une surface complexe réglée à bouts paraboliques munie afin d'assurer l'existence de solutions non réductible dans le cas où il existe une métrique de Kähler à courbure scalaire constante négative, asymptotique au modèle local.

Nous supposerons pour l'instant que $\alpha_2 - \alpha_1 \in \mathbb{Q}$. Nous expliquerons dans la partie III.4 comment se passer de cette hypothèse. Pour simplifier nous supposons en outre que M possède exactement un bout parabolique, les démonstrations s'étendant trivialement au cas de plusieurs bouts. Dans cette partie g désigne une métrique dont la seule propriété est d'être asymptotique au modèle local, et les g_j sont ses approximations lisses sur la compactification holomorphe orbifold $\overline{M} = M \cup D$.

III.3.1 Compactification du fibré K_M^{-1}

Le fibré associé au diviseur à l'infini. La compactification holomorphe $\overline{M}$ de M est définie en rajoutant un diviseur à l'infini de la forme $D = \mathbb{CP}^1/\mathbb{Z}_q$: rappelons que dans le cas rationnel, le bout parabolique admet un revêtement riemannien (pour le modèle local de métrique) et holomorphe à q feuillets donné par

$$\begin{array}{rcl} p^q : I_a/\langle\tau^q\rangle \times \mathbb{CP}^1 & \to & I_a/\langle\tau\rangle \times \mathbb{CP}^1 \\ (x+iy, [\tilde{u} : \tilde{v}]) & \mapsto & (x+iy, [\tilde{u}e^{-i\alpha_1 x} : \tilde{v}e^{-i\alpha_2 x}]), \end{array}$$

que l'on étend en un revêtement holomorphe ramifié $p^q : \Delta_{a/q} \times \mathbb{CP}^1 \to \overline{\mathcal{B}}$ tel que $p^q(\{0\} \times \mathbb{CP}^1) = D$.

Le fibré en droites complexes $[D]$ associé au diviseur D tel que $c_1([D])$ est le dual de Poincaré de D, est défini classiquement (même dans le cadre orbifold) à l'aide de deux ouverts de trivialisation. Dans le cas des orbifolds, il faut bien sûr se placer sur le revêtement local ramifié pour que la construction ait un sens.

On définit deux ouverts de trivialisations, l'un au dessus de M, l'autre au dessus du voisinage $I_a/\langle\tau^q\rangle \times \mathbb{CP}^1$ de D. En utilisant les coordonnées $(\xi = x + iy, [\tilde{u} : \tilde{v}])$, on recolle ces deux trivialisations par la fonction de transition $\rho = e^{ix}$ qui est invariante sous l'action de $\mathbb{Z}_q$ et définit ainsi un

orbifibré sur $\overline{M}$. Notons au passage que le fibré $[D]$ restreint à M devient évidemment trivial.

On construit alors sur $[D]$ des connexions définies explicitement par le procédé suivant : soit $\chi(t)$ une fonction valant 1 au voisinage de D et 0 loin de D. Définissons la connexion

$$B = d + i\chi d\theta$$

sur le fibré en droites complexes trivial au dessus de M. Alors cette connexion est singulière sur le fibré trivial au dessus de $\overline{M}$, mais elle est lisse sur le fibré $[D]$. En effet si on regarde la connexion induite par B dans la trivialisation de $[D]$ définie au voisinage de D, on constate que $\rho B \rho^{-1} = d$ si on se place suffisamment proche du diviseur. On en déduit que B s'étend de façon lisse au fibré $[D]$ tout entier.

De cette façon, on définit pour chaque j, en utilisant les notations de la partie II.1, une connexion sur $[D]$ donnée par

$$B_j = d - i\chi_j(\partial_t \varphi_j)d\theta. \tag{III.9}$$

Ceci définit bien d'une connexion lisse sur $[D]$ puisque $\partial_t \varphi_j = -1$ près de $[D]$. Alors la 2-forme $\varpi_j = \frac{i}{2\pi} F_{B_j}$ représente $c_1([D])$ c'est à dire le dual de Poincaré de D. On remarque que par construction, la suite de connexions B_j converge sur tout compact de M vers la connexion triviale.

Lemme III.3.1 *Via l'identification* $\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(\overline{M}) \simeq H(M) \simeq \mathrm{H}_{L^2}(M)$, *on peut décomposer la classe de Chern* L^2 *du fibré* K_M^{-1} *en*

$$\mathrm{L}^2 c_1 = c_1(K_{\overline{M}}^{-1}) + c_1([D]^{-1}).$$

Plus précisément, la connexion $\hat{A}$ *sur* K_M^{-1} *peut être décomposée en*

$$\hat{A} = C + a,$$

où

- a *est une* 1*-forme sur* M, *telle que* $a \in L_1^2(g)$.
- C *est une connexion lisse sur le fibré* $L = K_{\overline{M}}^{-1} \otimes [D]^{-1} \to \overline{M}$ *telle que sa courbure vérifie près du diviseur à l'infini sur le bout parabolique*

$$F_C = -ic\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1},$$

où c *est la courbure de la métrique de Fubini-Study sur* $\mathbb{CP}^1$.

Démonstration : Reprenons le modèle local du bout parabolique : dans le revêtement holomorphe $p^q : \Delta^*_{a/q} \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{B}$, on a $(p^q)^*\hat{g} = g^{\Delta^*} + g^{\mathrm{FS}}$, donc la connexion de Chern sur le fibré anti-canonique de $\mathcal{B}$ se décompose en $A^{\Delta^*} \otimes A^{\mathrm{FS}}$ avec A^{Δ^*} et A^{FS} les connexions associées aux métriques standard sur les fibrés tangents de $\Delta^*_{a/q}$ et $\mathbb{CP}^1$. La connexion A^{Δ^*} est singulière au point parabolique. Elle est donnée dans la trivialisation holomorphe standard de Δ^* par

$$A^{\Delta^*} = d - \partial \ln(|dz|^2) = d - \partial \ln(|z|^2 \ln^2 |z|) ;$$

on décompose cette connexion de la façon suivante

$$A^{\Delta^*} = d - \partial \ln(|z|^2) - \partial \ln((\ln |z|)^2).$$

Or

$$\partial \ln((\ln |z|)^2) = \frac{dz}{z \ln |z|}, \quad \bar{\partial}\partial \ln((\ln |z|)^2) = 2\frac{d\bar{z} \wedge dz}{|z|^2 (\ln |z|)^4},$$

et ces termes sont bornés en norme C^0 au voisinage de 0, donc L^2 car la métrique est de volume fini. On fqcilement que $\partial \ln((\ln |z|)^2) \in L^2_1$.

Comme la connexion $\hat{A}$ est égale par définition au modèle local $A^{\Delta^*} \otimes A^{\mathrm{FS}}$ près du diviseur à l'infini, nous construisons à partir de $\hat{A}$ une connexion C, en modifiant le facteur A^{Δ^*} de la façon suivante : soit χ, une fonction cut-off sur Δ valant 1 sur un petit voisinage de 0 et 1 loin de 0. Posons

$$a = -\partial\big(\chi \ln(\ln^2 |z|)\big)$$

et

$$C = \hat{A} - a ;$$

par définition $a \in L^2_1$, d'où

$$\mathrm{L}^2 c_1 = \frac{i}{2\pi}[F_C],$$

et près du diviseur au dessus du point parabolique

$$C = (d - \partial \ln(|z|^2)) \otimes A^{\mathrm{FS}}.$$

On calcule maintenant $\partial \ln(|z|^2) = \frac{dz}{z}$ et $\bar{\partial}\partial \ln(|z|^2) = 0$. Si on utilise la trivialisation unitaire de $T\Delta^*$ définie par ∂_t et $e^t \partial_\theta$, à la place de la trivialisation holomorphe, on obtient alors

$$C = (d - d\theta) \otimes A^{\mathrm{FS}}.$$

On voit ainsi que la connexion C singulière sur $K^{-1}_{\overline{M}}$ est en fait une connexion lisse sur $L = K^{-1}_{\overline{M}} \otimes [D]^{-1}$, d'où le lemme. □

III.3.2 Équations perturbées pour les métriques g_j

Nous allons montrer qu'on peut faire converger une suite de solutions des équations de Seiberg-Witten (A_j, ψ_j) sur $\overline{M}$ pour les métriques g_j vers une solution des équations de Seiberg-Witten (A, ψ) sur (M, g) avec $A, \psi \in L^2_1(g)$. Mais comme le suggère le lemme III.3.1, afin d'obtenir à la limite une connexion vérifiant $i/2\pi[F_A] = \mathrm{L}^2 c_1$, nous devons perturber les équations à l'aide du fibré $[D]$.

La compactification $\overline{M}$ de M est une variété complexe; elle est donc munie d'une structure *spin*^{c} privilégiée, dont le fibré déterminant est le fibré anti-canonique de $\overline{M}$, $L_0 = K_{\overline{M}}^{-1}$.

Pour chaque métrique g_j sur $\overline{M}$ approximant g, on définit les équations de Seiberg-Witten perturbées pour cette structure *spin*^{c} par :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_A\psi &= 0 \\ (F_A - F_{B_j})^{+_{g_j}} &= q(\psi), \end{aligned} \tag{III.10}$$

où ψ est un spineur positif, et A une connexion sur L_0. Notons que d'après le lemme III.3.1

$$[F_A - F_{B_j}] = [F_{A\otimes B_j^{-1}}] = -2i\pi c_1(L_0 \otimes [D]^{-1}) = -2i\pi \mathrm{L}^2 c_1.$$

Contrôle C^0 sur le spineur. Afin de développer la théorie de l'invariant associé aux équations de Seiberg-Witten, on commence généralement par montrer que les solutions des équations sont bornées en norme C^0 grâce à la formule de Lichnerowicz. Nous démontrons ici qu'un tel contrôle peut être obtenu uniformément pour toutes les métriques g_j. Pour cela, nous commençons par analyser la courbure des connexions B_j.

Lemme III.3.2 *La courbure de la connexion B_j vérifie*

$$F_{B_j} = -i\chi_j \frac{{\partial_t}^2 \varphi_j}{\varphi_j} dt \wedge \varphi_j d\theta + F_j^b,$$

avec $|F_j^b|$ bornée indépendamment de j.

Démonstration : On calcule facilement $F_j^b = -i(\partial_t \chi_j)\left(\frac{\partial_t \varphi_j}{\varphi_j}\right) dt \wedge \varphi_j d\theta$, or le terme $(\partial_t \chi_j)\left(\frac{\partial_t \varphi_j}{\varphi_j}\right)$ est uniformément borné par construction. □

Théorème III.3.3 *Soit g, une métrique asymptotique au modèle local sur M, et soit g_j les métriques sur $\overline{M}$ qui approximent g. Soit C, la connexion de référence sur $L = L_0 \otimes [D]^{-1} \to \overline{M}$ déduite de la connexion $\hat{A}$ à l'aide du*

lemme III.3.1. Supposons que nous nous soyons donné une suite (A_j, ψ_j) de solutions des équations de Seiberg-Witten perturbées (III.10) associées aux métriques g_j. Alors, quitte à extraire une sous-suite et à faire des changements de jauge, les (A_j, ψ_j) convergent au sens C^∞ sur tout compact de M vers une solution (A, ψ) des équations de Seiberg-Witten non perturbées (III.5) sur (M, g) telle que :

- *$A = C + a$, où a est une 1-forme dans $L^2_1(g)$, vérifiant $d^{*_g} a = 0$.*
- *$|\psi|$ est bornée et dans $L^2_1(g)$.*

Le premier pas dans la démonstration de ce théorème est un résultat de contrôle C^0 uniforme sur ψ_j.

Lemme III.3.4 *Pour toute suite de solutions (A_j, ψ_j) des équations de Seiberg-Witten perturbées associées aux métriques g_j, on a une borne C^0 uniforme sur ψ_j.*

Démonstration : En utilisant la formule de Lichnerowicz et les équations de Seiberg-Witten, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2_{A_j}\psi_j &= \nabla^*_{A_j}\nabla_{A_j}\psi_j + \frac{s^{g_j}}{4}\psi_j + \frac{1}{2}F^+_{A_j}.\psi_j \quad \Rightarrow \\ 0 &= \nabla^*_{A_j}\nabla_{A_j}\psi_j + \frac{s^{g_j}}{4}\psi_j + \frac{1}{2}F^+_{B_j}.\psi_j + \frac{1}{2}q(\psi_j)\psi_j. \qquad \text{(III.11)} \end{aligned}$$

Rappelons que d'après les lemmes II.1.1 et III.3.2,

$$s^{g_j} = s^{g_j}_b - 2\chi_j \frac{{\partial_t}^2\varphi_j}{\varphi_j}, \quad F_{B_j} = -i\chi_j \frac{{\partial_t}^2\varphi_j}{\varphi_j} dt \wedge \varphi_j d\theta + F^b_j,$$

avec $s^{g_j}_b$ et $|F^b_j|$ uniformément bornées. Par ailleurs $(dt \wedge \varphi_j d\theta)^{+_j}$ agit par produit de Clifford sur W^+ avec des valeurs propres $\pm i$ et $\frac{{\partial_t}^2\varphi_j}{\varphi_j}$ reste bornée supérieurement mais pas inférieurement. On en déduit que l'équation (III.11) peut être réécrite sous la forme

$$0 = \nabla^*_{A_j}\nabla_{A_j}\psi_j + P_j\psi_j + P^b_j\psi_j + \frac{1}{2}q(\psi_j)\psi_j,$$

où sur le bout parabolique,

$$P_j = -\frac{1}{2}\chi_j \frac{{\partial_t}^2\varphi_j}{\varphi_j}\psi_j - \frac{i}{2}\chi_j \frac{{\partial_t}^2\varphi_j}{\varphi_j}(dt \wedge \varphi_j d\theta)^{+_j}\psi_j$$

est un opérateur dont les valeurs propres sont 0 et $-\chi_j {\partial_t}^2\varphi_j/\varphi_j$ et où P^b_j est un opérateur linéaire uniformément borné. Il en résulte que la partie négative de ses valeurs propres de $P_j + P^b_j$ reste bornée inférieurement .

On peut maintenant démontrer le lemme en utilisant le principe du maximum : si $x_0 \in \overline{M}$ un maximum local de $|\psi_j|^2$, alors $\Delta^{g_j}(|\psi_j|^2)(x_0) \geq 0$. Or d'après l'identité

$$\Delta^{g_j}(|\psi_j|^2) = 2\mathrm{Re}\langle \nabla^*_{A_j}\nabla_{A_j}\psi_j, \psi_j\rangle - 2|\nabla_{A_j}\psi_j|^2$$

et le contrôle sur la partie négative de ses valeurs propres de $P_j + P_j^b$, on en déduit qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que

$$0 \geq -\kappa|\psi_j(x_0)|^2 + \frac{1}{2}\langle q(\psi_j)\psi_j(x_0), \psi_j(x_0)\rangle = -\kappa|\psi_j(x_0)|^2 + \frac{1}{4}|\psi_j(x_0)|^4,$$

d'où $|\psi_j(x_0)|^2 \leq 4\kappa$. □

Démonstration du théorème III.3.3: Une fois la connexion de référence C fixée à l'aide du lemme III.3.1, nous notons $C_j = A_j \otimes B_j^{-1}$ la suite de connexions définies sur L, où B_j est la suite de connexions définie par (III.9) qui converge vers un courant concentré sur le diviseur D à l'infini ; on utilise la jauge donnée par C, et on écrit

$$C_j = C + \beta_j + \mu_j,$$

où μ_j est une 1-forme g_j-harmonique, et β_j, une 1-forme orthogonale aux formes g_j-harmoniques.

Convergence de la partie harmonique. Pour un espace X assez général, comme un $CW-$complexe par exemple, le théorème des coefficients universels nous indique que pour un groupe abélien G,

$$H_q(X, G) \simeq H_q(X, \mathbb{Z}) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(X, \mathbb{Z}), G),$$

et que

$$H^q(X, G) \simeq \mathrm{Hom}(H_q(X, \mathbb{Z}), G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{q-1}(X, \mathbb{Z}), G).$$

On applique ces résultats en particulier à notre orbifold connexe $\overline{M}$, avec $q = 1$; puisque $H_0(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, on en déduit automatiquement que

$$\mathrm{Ext}(H_0(\overline{M}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0 \text{ et que } \mathrm{Tor}(H_0(\overline{M}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0.$$

On a donc

$$H_1(\overline{M}, \mathbb{R}) \simeq H_1(\overline{M}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R},$$
$$H^1(\overline{M}, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(\overline{M}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}),$$

et

$$H^1(\overline{M}, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(\overline{M}, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \simeq H^1(\overline{M}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R},$$

ce qui a pour conséquence que $H^1(\overline{M},\mathbb{Z})$ est un groupe libre, et qu'il s'agit d'un réseau de $H^1(\overline{M},\mathbb{R})$. Finalement, le résultat important de cette discussion est que le quotient $H^1(\overline{M},\mathbb{R})/H^1(\overline{M},\mathbb{Z})$ est compact (même dans le cas orbifold). Par ailleurs, les composantes connexes du groupe de jauge $Map(\overline{M},S^1)$ agissent comme le réseau $iH^1(\overline{M},\mathbb{Z})$ sur les classes de cohomologie de $iH^1(\overline{M},\mathbb{R})$, via l'action de $f\in Map(\overline{M},S^1)$ sur les 1-formes :

$$f.\beta=\beta+2\frac{df}{f}.$$

Pour le voir, on représente les éléments de $iH^1(\overline{M},\mathbb{Z})$ par des 1-formes fermées β dont l'intégrale est entière sur les cycles de $\overline{M}$. Il n'est pas difficile, en intégrant β sur des chemins, de définir une fonction u sur le revêtement universel de $\overline{M}$ telle que $\exp u$ passe au quotient et $\beta=d\exp u$.

On en déduit que quitte à faire agir le groupe de jauge sur les solutions des équations de Seiberg-Witten (A_j,ψ_j), on peut supposer que la classe de cohomologie définie par μ_j reste bornée dans $iH^1(\overline{M},\mathbb{R})$.

Remarque : afin de contrôler la partie orthogonales aux formes harmoniques β_j (cf paragraphe suivant), nous prenons le soin de faire des changements de jauge de sorte que l'on ait également $d^{*_j}\beta_j=0$, c'est à dire des *jauges de Hodge*. Ceci est toujours possible en faisant agir une transformation de jauge dans la composante connexe de l'identité de $Map(\overline{M},S^1)$ (voir par exemple [Mo] p 80 lemme 5.3.1) et ne change donc pas notre argument pour le contrôle de μ_j.

On peut alors quitte à extraire une sous-suite de (A_j,ψ_j) supposer que que μ_j converge en cohomologie, ce qui entraîne que μ_j converge au sens C^∞ sur tout compact de M, vers une 1-forme L^2 g-harmonique μ d'après II.3.1.

Convergence de la partie orthogonale aux formes harmoniques. Il nous reste à faire converger la partie β_j des connexions C_j. En utilisant le fait que (A_j,ψ_j) est solution des équations de Seiberg-Witten, on obtient

$$F_{C_j}^{+_j}=(F_C+d\beta_j)^{+_j}=q(\psi_j),$$

d'où

$$d^{+_j}\beta_j=q(\psi_j)-F_C^{+_j}.$$

D'après le lemme III.3.4, on a une borne uniforme C^0 sur ψ_j, d'où une borne uniforme C^0 sur $q(\psi_j)$. On en déduit une borne uniforme sur $\|q(\psi_j)\|_{L^2(g_j)}=\frac{1}{4}\int_M|\psi_j|^4\mathrm{vol}^{g_j}$, car d'après le corollaire II.1.3, le volume des métriques g_j est uniformément borné. Comme nous avons de plus choisi une connexion de référence C, telle que $F_C=\lambda\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ sur le bout parabolique de M, on en

déduit d'après II.3.8 une borne uniforme sur $\|F_C\|_{L^2(g_j)}$ et donc également sur $\|F_C^{+_j}\|_{L^2(g_j)}$.

Alors $\|d^{+_j}\beta_j\|_{L^2(g_j)}$ est uniformément borné. Par une simple intégration par parties, on constate que

$$\|d^{+_j}\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} = \int_M d\beta_j \wedge d\beta_j + \|d^{-_j}\beta_j\|^2_{L^2(g_j)}$$
$$= \int_M d(\beta_j \wedge d\beta_j) + \|d^{-_j}\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} = \|d^{-_j}\beta_j\|^2_{L^2(g_j)},$$

d'où

$$\|d\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} = \|d^{+_j}\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} + \|d^{-_j}\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} = 2\|d^{+_j}\beta_j\|^2_{L^2(g_j)}.$$

On a donc obtenu une borne uniforme sur $\|d\beta_j\|^2_{L^2(g_j)}$, et puisque nous nous sommes placés en jauge de Coulomb, on en déduit d'après II.3.3 :

$$c\|\beta_j\|^2_{L^2(g_j)} \leq \|d\beta_j\|^2_{L^2(g_j)}$$

d'où une borne uniforme sur $\|\beta_j\|_{L^2(g_j)}$.

Finalement, nous avons une borne uniforme sur $\|\beta_j\|_{L^2_1(g_j)}$. Comme d'habitude, si on se restreint à un compact K de M, les métrique g_j coïncident avec g, dès que j est suffisamment grand. Ceci a donc un sens de parler de borne L^2_1 uniforme sur un tel compact. Par compacité de la boule unité en topologie faible, on peut donc quitte à extraire une sous-suite, supposer que β_j converge au sens faible sur tout compact de M vers une limite $\beta \in L^2_1(g)$ vérifiant $d^{*_g}\beta = 0$.

Convergence de la partie spineur. Nous venons de montrer que les connexions C_j (quitte à extraire une sous-suite) convergent pour la topologie L^2_1-faible sur tout compact de M, vers une connexion $A = C + a$, où $a = \mu + \beta \in L^2_1(g)$.

Comme dans la démonstration du lemme III.3.4, on écrit la formule de Lichnerowicz sous la forme

$$0 = D_{A_j}\psi_j = \nabla^*_{A_j}\nabla_{A_j}\psi_j + (P^b_j + P_j)\psi_j + \frac{1}{2}q(\psi_j)\psi_j, \qquad \text{(III.12)}$$

où P^b_j est un opérateur uniformément borné, et P^b_j un opérateur dont la partie négative des valeurs propres est uniformément minorée. Alors, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $-\langle (P^b_j + P_j)\psi_j, \psi_j\rangle \leq \kappa|\psi_j|^2$; en intégrant sur M la formule (III.12) contre ψ_j, on obtient le contrôle

$$\|\nabla_{A_j}\psi_j\|^2_{L^2(g_j)} \leq \kappa\|\psi_j\|^2_{L^2(g_j)} - \frac{1}{4}\int_M |\psi_j|^4 \mathrm{vol}^{g_j} \leq \kappa\|\psi_j\|^2_{L^2(g_j)}.$$

Comme ψ_j est uniformément borné en norme C^0 et que le volume des métriques g_j est uniformément borné, on en déduit une borne uniforme sur $\|\nabla_{A_j}\psi_j\|_{L^2(g_j)}$.

Plaçons nous maintenant sur M : le fibré $[D]$ devient trivial et les connexions B_j convergent au sens C^∞ sur tout compact de M vers la connexion triviale ; on a alors $L_{|M} = K_M^{-1}$, et les connexions A_j, C_j et $A = C + \mu + \beta$ sont toutes définies sur le même fibré en droites complexes.

Restreignons nous à un compact K de M : dès que j est suffisamment grand, la connexion B_j est égale sur ce compact à la connexion triviale et on a donc

$$A_j = C + \mu_j + \beta_j.$$

Puisque μ_j et β_j sont uniformément bornées en norme L^2 (voir les deux paragraphes précédents), on en déduit une borne uniforme sur $\int_K |\nabla_C \psi_j|^2 \mathrm{vol}^{g_j}$.

Comme pour les connexion A_j, on peut donc extraire une sous-suite de ψ_j pour la faire converger sur tout compact de M au sens L^2_1-faible, vers une limite $\psi \in L^2_1(g)$.

Finalement, (A, ψ) est obtenue comme une limite faible sur tout compact de solutions des équations de Seiberg-Witten perturbées (A_j, ψ_j). Comme la perturbation de ces équations est donnée par la courbure des connexions B_j qui convergent sur tout compact vers une connexion plate, il en résulte que (A, ψ) est solution à la limite des équations de Seiberg-Witten non perturbées

$$\begin{aligned} D_A\psi &= 0 \\ F_A^{+_g} &= q(\psi). \end{aligned}$$

Convergence C^∞ sur tout compact. Nous vérifions maintenant que les contrôles de type L^2_1 que nous avons obtenus, suffisent par un procédé classique de bootstraping à faire converger les solutions de façon C^∞ sur tout compact de M. Soit K un compact de M. Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons toujours j suffisamment grand, afin que les métrique g et g_j coïncident sur K. Les espaces L^p_k désigneront les espaces de Sobolev avec les normes prises sur K.

Tout d'abord, remarquons que nous avons une borne uniforme L^2_2 sur $a_j = \beta_j + \mu_j$. En effet : $F^+_{A_j} = q(\psi_j)$, donc la borne uniforme C^0 sur ψ_j nous donne une borne L^2 sur $F^+_{A_j}$. Par ailleurs,

$$\nabla F^+_{A_j} = 2q(\psi_j, \nabla_{A_j}\psi_j),$$

or nous savons déjà que $\nabla_{A_j}\psi_j$ est borné dans L^2 ; comme ψ_j admet également une borne C^0, on en déduit que $\nabla F^+_{A_j}$ admet une borne L^2. Finalement on

a trouvé une borne uniforme L^2_1 sur $F^+_{A_j}$. On en déduit une borne L^2_1 sur $d^+a_j = d^+\beta_j$. Comme $d^+ \oplus d^*$ est un opérateur elliptique d'ordre 1,

$$c\|a_j\|_{L^2_2} \leq \|a_j\|_{L^2} + \|(d^+ \oplus d^*)a_j\|_{L^2_1},$$

mais $d^*a_j = 0$, donc on obtient un contrôle L^2_2 sur a_j.

Maintenant, on utilise l'équation $D_{A_j}\psi_j = 0$ qui s'écrit également

$$D_C\psi_j = -\frac{1}{2}a_j.\psi_j.$$

La multiplication de Sobolev $L^2_2 \otimes C^0 \to L^4$ nous donne une borne L^4 sur $D_C\psi_j$, et comme l'opérateur de Dirac est elliptique d'ordre 1, on a un contrôle

$$c'\|\psi_j\|_{L^4_1} \leq \|\psi_j\|_{L^4} + \|D_C\psi_j\|_{L^4},$$

d'où un contrôle L^4_1 sur ψ.

En recommençant cette manipulation avec la multiplication de Sobolev $L^2_2 \otimes L^4_1 \to L^3_1$, on obtient une borne L^3_2 sur ψ_j, et en recommençant encore une fois avec la multiplication $L^2_2 \times L^3_2 \to L^2_2$, on a une borne L^2_3 sur ψ_j.

La multiplication de Sobolev $L^2_3 \times L^2_3 \to L^2_3$ nous donne une borne L^2_3 sur $F^+_{A_j}$. Puis en utilisant le fait que $d^*a_j = 0$ et l'ellipticité de $d^+ \oplus d^*$, on obtient un contrôle L^2_4, donc L^2_3 sur a_j.

A partir de maintenant, on peut procéder par récurrence. Pour $k \geq 3$, on a une multiplication de Sobolev $L^2_k \times L^2_k \to L^2_k$. On sait que ψ_j et a_j sont bornés dans L^2_k ; en utilisant la multiplication de Sobolev, on obtient une borne L^2_k sur $D_C\psi_j$, puis une borne L^2_{k+1} sur ψ_j en utilisant l'ellipticité de l'opérateur de Dirac. Puis en utilisant la jauge de Coulomb $d^*a_j = 0$ et l'ellipticité de $d^+ \oplus d^*$, on en déduit une borne L^2_{k+1} sur a_j. Finalement nous avons obtenu des bornes L^2_k de tous ordres sur (A_j, ψ_j), ce qui montre que la convergence est en fait C^∞ sur le compact K. □

III.3.3 Calcul de l'invariant de Seiberg-Witten

construction d'une métrique standard sur M. Revenons maintenant au cas où M est est une surface complexe réglée à bouts paraboliques munie d'une métrique de Kähler à courbure scalaire constante négative g^{K}.

Alors M provient d'un fibré parabolique holomorphe $\mathcal{E} \to \overline{\Sigma}$. Ce fibré n'est pas nécessairement paraboliquement stable ; néanmoins, la propriété de stabilité est *générique*. Plus précisément, les fibrés stables forment un ouvert non vide de Zariski dans l'espace des modules des fibrés holomorphes paraboliques (avec structure parabolique fixée) sur $\overline{\Sigma}$. (cf [MS], [S]) En particulier,

si l'on «oublie» la structure holomorphe de $\mathcal{E}$, nous obtenons un fibré parabolique lisse E. Alors il existe une structure holomorphe $\mathcal{E}'$ faisant de E un fibré stable (voir [S], th.38 p.91)).

Notons de la même façon ∇ la connexion de Chern sur $\mathcal{E}$ et la connexion induite sur M.

Comme $\mathcal{E}'$ est stable, on peut lui associer une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PU}(2)$ telle que M soit difféomorphe à $\Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1$. On peut même supposer que ce difféomorphisme respecte la structure complexe sur les bouts paraboliques de M. Soit ∇' la connexion plate associée à la représentation ρ. Via le difféomorphisme, nous pouvons maintenant que ∇' vit également sur M et est égale à ∇ près sur les bouts paraboliques de M.

On déduit de la connexion ∇', une métrique kählérienne g' sur M relativement à la structure complexe J', et à courbure scalaire constante qui de plus est égale au modèle local $\hat{g}$ près du diviseur à l'infini sur le bout parabolique de M.

Les structures complexes sur J et J' de M et M' peuvent être reconstruites à l'aide des distributions horizontales de ∇ et ∇'. Puisque les connexions $\mathbb{C}-$linéaires sur E ont une structure d'espace affine, on en déduit une homotopie J_s entre les structures complexes J et J'. De plus, comme $\nabla = \nabla'$ près du point parabolique, on en déduit que $J = J'$ près du point parabolique et qu'on peut réaliser une homotopie de sorte que pour tout s, $J = J_s = J'$ au voisinage du point parabolique. On en déduit que topologiquement

$$K_J^{-1} = K_{J'}^{-1},$$

et que leur classe de Chern L^2 sont égales.

Nous allons maintenant montrer que les classes de Kähler des métriques g' et g^{K} sont égales. Soit ω' la forme de Kähler associée à (g', J') et ω^{K} la forme de Kähler associée à (g^{K}, J). Notons ω^Σ le pull-back sur M de la forme de Kähler de la métrique à courbure -1 g^Σ sur Σ.

Alors, $([\omega'], [\omega^\Sigma])$ est une base de $\mathrm{H}^2_{L^2}(M)$: elle est libre d'après les identités

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega' = \mathrm{vol}^{\mathrm{FS}}(\mathbb{CP}^1), \quad \int_{\mathbb{CP}^1} \omega^\Sigma = 0, \quad [\omega'].[\omega^\Sigma] = \mathrm{vol}^{g'}(M),$$

et elle est génératrice, car $b_2 = 2$. Maintenant, en raison de son comportement asymptotique, g^{K} vérifie

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega^{\mathrm{K}} = \mathrm{vol}^{\mathrm{FS}}(\mathbb{CP}^1).$$

ce qui entraîne que $[\omega^{\mathrm{K}}] - [\omega'] = \lambda[\omega^\sigma]$.

Par ailleurs, un résultat classique est que la courbure des connexions induite des métriques de Kähler à courbure scalaire constante sur le fibré anti-canonique est harmonique, et vérifie

$$F_A \wedge \omega = -\frac{is}{4}\omega \wedge \omega.$$

On en déduit que

$$\frac{s}{8\pi} = \frac{\mathrm{L}^2 c_1 \cdot [\omega']}{[\omega']^2} = \frac{\mathrm{L}^2 c_1 \cdot [\omega^{\mathrm{K}}]}{[\omega^{\mathrm{K}}]^2},$$

ce qui implique $\lambda = 0$. On a donc démontré que

$$[\omega'] = [\omega^{\mathrm{K}}].$$

Calcul de l'invariant de Seiberg-Witten pour la métrique standard. Puisque g' est obtenue par construction standard, ses approximations successives g'_j sur $\overline{M}$ sont kählériennes et via l'isomorphisme entre $\mathrm{H}^2_{L^2}(M)$ et $\mathrm{H}^2_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$, on a

$$[\omega'_j] = [\omega'].$$

En fait nous avons seulement d'une de ces compactifications, par exemple $j = 0$. De l'identité $\mathrm{L}^2 c_1 \cdot [\omega'] = \frac{s}{8\pi}[\omega']^2$, on déduit que $\mathrm{L}^2 c_1 \cdot [\omega'_0] = \frac{s}{8\pi}[\omega'_0]^2$, or d'après le lemme III.3.1, $\mathrm{L}^2 c_1 = c_1(K^{-1}_{\overline{M}} \otimes [D]^{-1})$, ce qui entraîne

$$\deg(K^{-1}_{\overline{M}} \otimes [D]^{-1}) = c_1(K^{-1}_{\overline{M}} \otimes [D]^{-1}) \cdot [\omega'_0] = \frac{s}{8\pi}[\omega'_0]^2.$$

On voit donc que la condition $s < 0$ est nécessaire et suffisante pour que l'invariant de Seiberg-Witten associé aux équations perturbées (III.10) soit non nul.

On en déduit le lemme suivant

Lemme III.3.5 *Soit g^{K} une métrique kählérienne à courbure scalaire constante négative, asymptotique au modèle local sur la surface complexe réglée à bouts parabolique M. Soit la métrique $g = \xi^* g^{\mathrm{K}}$, où ξ désigne l'antipodie sur M et g_j ses approximations par des métriques lisses. Alors, pour j suffisamment grand, l'invariant de Seiberg-Witten associé aux équations de Seiberg-Witten perturbées (III.10) est non nul.*

Démonstration : D'après les corollaires II.3.10 et III.2.3, on déduit que

$$\mathrm{L}^2 c_1^{+_{g_j}} \to \mathrm{L}^2 c_1^{+_g} = \mathrm{L}^2 c_1^{+_{g^{\mathrm{K}}}},$$

ce qui entraîne que pour j suffisamment grand,

$$\mathrm{L}^2 c_1^{+_{g_j}} . [\omega] < 0.$$

Ceci signifie que les métriques g_j et g'_0 sont dans la même chambre ; par conséquent, elles ont le même invariant de Seiberg-Witten, d'où le lemme. □

A l'aide du théorème de convergence III.3.3, on obtient le résultat qui nous intéresse :

Corollaire III.3.6 *Les équations de Seiberg-Witten non perturbées (III.5) associées à la métrique $g = \xi^* g^{\mathrm{K}}$ admettent une solution (A, ψ) de la forme*
- *$A = C + a$, avec $a \in L^2_1(g)$ et $d^{*_g} a = 0$,*
- *$|\psi|$ bornée et $\psi \in L^2_1(g)$,*

où C est la connexion construite dans le lemme III.3.1.

III.4 Le cas du bout parabolique irrationnel

Nous allons maintenant expliquer comment on généralise le théorème I.3.5 au cas d'une métrique asymptotique à un modèle $\hat{g}$ provenant d'un bout parabolique $\mathcal{B}_a^{\alpha_1,\alpha_2}$ dont les poids vérifient $\alpha_2 - \alpha_1 \notin \mathbb{Q}$.

Maintenant, nous n'avons plus d'approximation «raisonnable» de la métrique modèle $\hat{g}$ par des métriques kählériennes définies sur une compactification du bout parabolique : en effet, le revêtement $p : I_a \times \mathbb{CP} \to \mathcal{B}$ ne se factorise plus (cf. lemme I.3.2 et corollaire I.3.3) ; la compactification naturelle du bout parabolique qui semble s'imposer serait alors un quotient par l'action de $\mathbb{Z}$, mais nous n'avons pas de théorème de l'indice satisfaisant sur un tel objet qui nous permettrait de développer la théorie des invariants de Seiberg-Witten.

Pour éviter ce problème, nous allons faire «bouger» les poids du bout parabolique afin d'obtenir des modèles $\hat{g}^j$ dont les poids vérifient la condition de rationalité et tendent vers les poids de $\mathcal{B}$. En recollant g au différents modèles $\hat{g}^j$, nous en déduirons ensuite des approximations par des métriques g^j ; par ce qui précède nous pourrons extraire des solutions des équations de Seiberg-Witten pour les métriques g^j, que nous ferons converger vers une solution des équations pour la métrique g.

III.4.1 Approximation d'une métrique asymptotique au modèle local dans le cas irrationnel

Nous revenons au cas où (M, J) est une variété complexe non compacte possédant exactement un bout muni d' un isomorphisme avec un bout parabolique $\mathcal{B}_a^{\alpha_1,\alpha_2}$ tel que $\alpha_2 - \alpha_1 \notin \mathbb{Q}$. Soit g une métrique sur M asymptotique au modèle local $\hat{g}$.

Rappelons la définition du bout parabolique. On part du fibré holomorphe trivial $\Delta_a \times \mathbb{C}^2 \stackrel{\pi}{\to} \Delta_a$ sur lequel on définit la métrique hermitienne singulière

$$h = \begin{pmatrix} |z|^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & |z|^{\alpha_2} \end{pmatrix} ;$$

on en déduit une connexion de Chern plate

$$\nabla^h = d + i \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \frac{dz}{z}$$

sur le fibré $\Delta_a^* \times \mathbb{C}^2$. Cette connexion induit une connexion projective unitaire plate sur le $\mathbb{CP}^1$-fibré trivial $\Delta_a^* \times \mathbb{CP}^1 \stackrel{\pi}{\to} \Delta_a^*$. On en déduit une distribution horizontale H_x telle que

$$T_x(\Delta^* \times \mathbb{CP}^1) = H_x \oplus T_x(\{\pi(x)\} \times \mathbb{CP}^1) ;$$

en choisissant l'image réciproque de la métrique de cusp parabolique g^{Δ^*} sur H et la métrique de Fubini-Study associée à h sur la fibre $\mathbb{CP}^1$, on obtient par définition la métrique $\hat{g}$ sur $\Delta_a^* \times \mathbb{CP}^1 = \mathcal{B}$. Il est clair que sur un compact de $\Delta_a^* \times \mathbb{CP}^1$, cette construction dépend de façon C^∞ du choix des poids α_1, α_2.

Soit une suite de poids (α_1^j, α_2^j) telle que $\alpha_2^j - \alpha_1^j \in \mathbb{Q}$. On obtient ainsi une suite de modèles locaux de métriques $\hat{g}^j$ associées aux bouts paraboliques $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}_a^{\alpha_1^j, \alpha_2^j}$, et en reprenant les notations de II.1.2, on pose

$$g^j = (1 - \chi_j) g + \chi_j \hat{g}^j .$$

On choisit bien sûr des poids tels que

$$\alpha_2^j \to \alpha_2, \quad \text{et} \quad \alpha_1^j \to \alpha_1,$$

suffisamment vite, de sorte que g et $\hat{g}^j$ soient très proches au sens C^2 pour $j \leq t \leq j+1$.

Remarque : la métrique g^j est évidemment asymptotique au modèle local $\hat{g}^j$ et tout ce que nous avons démontré en ce qui concerne le cas rationnel s'applique à elle.

III.4.2 Cohomologie L^2 des métriques g^j

Des quasi-isomorphismes compatibles avec la norme L^2. Bien que les métriques g^j ne soient pas quasi-isométriques sur M, on a tout de même des isomorphismes entre leurs cohomologies L^2 : pour $\mathrm{H}^0_{L^2(g_j)}(M)$, c'est clair.

Soit $f = cte \in \mathrm{H}^0_{L^2(g)}(M)$, alors nous remarquons que

$$\|f\|_{L^2(g^j)} \to \|f\|_{L^2(g)} \ ;$$

pour le voir, il suffit de vérifier que le lemme II.1.2 reste valable pour cette nouvelle suite de métriques g^j ce qui n'est pas difficile.

Dans le cas des 1-formes, d'après le lemme de Poincaré L^2 à l'infini II.2.6, on sait que toute classe de cohomologie $b \in \mathrm{H}^1_{L^2(g)}(M)$ admet un représentant à support compact β sur M. On en déduit ainsi un isomorphisme avec les $\mathrm{H}^2_{L^2(g_j)}(M)$. En outre

$$\|\beta\|_{L^2(g^j)} = \|\beta\|_{L^2(g)},$$

dès que j est suffisamment grand.

Soit une classe de cohomologie $b \in \mathrm{H}^2_{L^2(g)}(M)$. En utilisant à nouveau le lemme de Poincaré, on en déduit un représentant γ de b égal à $\lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ près du diviseur parabolique à l'infini. Ici, nous devons faire attention car la définition de $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ dépend du modèle local de métrique choisi. Nous noterons $\mathrm{vol}_j^{\mathbb{CP}^1}$ la 2-forme correspondant au modèle local $\hat{g}^j$ (cf page 25 pour la définition). Maintenant,

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} - \mathrm{vol}_j^{\mathbb{CP}^1} = 0,$$

d'où $\mathrm{vol}_j^{\mathbb{CP}^1} = \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1} + \pi^* d\beta_j$, où β_j est une 1-forme sur Δ_a^* (a priori, β_j n'est pas nécessairement L^2). Posons

$$\gamma_j = \gamma + \lambda d(\chi_j \beta_j) \ ;$$

alors $\gamma_j = \lambda \mathrm{vol}_j^{\mathbb{CP}^1}$ près du diviseur parabolique à l'infini, d'où $\gamma_j \in L^2(g^j)$, et γ_j définit une classe de cohomologie de $\mathrm{H}^2_{L^2(g_j)}(M)$. A condition de choisir des poids α_1^j, α_2^j suffisamment proches de α_1 et α_2, on peut rendre $\mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ et $\mathrm{vol}_j^{\mathbb{CP}^1}$ arbitrairement proches de sorte que

$$\|\gamma_j\|_{L^2(g^j)} \to \|\gamma\|_{L^2(g)}.$$

Finalement, nous venons de voir que les espaces $\mathrm{H}^*_{L^2(g_j)}(M)$ et $\mathrm{H}^*_{L^2(g)}(M)$ sont isomorphes. Ceci permet de les identifier et nous les noterons $H^*(M)$ dans tous les cas. Nous résumons notre discussion en ce qui concerne la norme L^2 des représentants d'une classe de cohomologie dans le lemme suivant :

Lemme III.4.1 *Soit une classe $b \in H^*(M)$. Alors b admet des représentants $\beta \in L^2(g)$ et $\beta_j \in L^2(g^j)$ tels que*

$$\|\beta_j\|_{L^2(g^j)} \to \|\beta\|_{L^2(g)}.$$

III.4.3 Convergence des 1-formes harmoniques

On a une inégalité de Poincaré uniforme pour les fonctions qui est l'analogue du lemme II.2.3 :

Lemme III.4.2 *Il existe une constante $c > 0$, indépendante de j, telle que pour toute fonction $f \in L^2_1(g^j)$ vérifiant $\int_M f \mathrm{vol}^{g^j} = 0$, on ait*

$$\int_M |df|^2 \mathrm{vol}^{g^j} \geq c \int_M |f|^2 \mathrm{vol}^{g^j},$$

les normes étant prises par rapport à la métrique g^j.

Démonstration : On refait la démonstration du corollaire à l'identique. Il n'y a que deux points à vérifier pour que les arguments fonctionnent bien :

- Le lemme II.1.2 est valable pour les métriques g^j.
- Les constantes qui interviennent dans le lemme II.2.2 ne dépendent que de la constante h_0 qui est la même pour toutes les métriques modèle $\hat{g}^j$,

mais ces faits sont évidents. □

On en déduit que la constante c qui apparaît dans la proposition II.3.1 ne dépend pas du modèle local de métrique $\hat{g}^j$ considéré. On peut donc d'après cette proposition étant donnée une classe de cohomologie $b \in H^1(M)$, écrire les représentants $\gamma_j \in L^2(g^j)$, g^j-harmoniques de b sous la forme

$$\gamma_j = \beta + df_j,$$

où β est un représentant à support compact de b et $f_j \in L^2_1(g^j)$ est telle que

$$\int_M f_j \mathrm{vol}^{g^j} = 0, \quad \|f_j\|_{L^2_1(g^j)} \leq c\|\beta\|_{L^2(g^j)}.$$

On vérifie que la démonstration de la proposition II.3.1 s'adapte sans difficulté aux métriques g^j en :

Proposition III.4.3 *La suite γ_j converge au sens C^∞ sur tout compact de M, vers un représentant $\gamma \in L^2(g)$, g-harmonique de b.*

Plus précisément, avec les notations précédentes, f_j converge vers sur tout compact de M vers une fonction f dans $L^2_1(g)$ telle que $\gamma = \beta + df$ soit g-harmonique,

$$\int_M f \mathrm{vol}^g = 0, \text{ et } \|f\|_{L^2_1(g)} \leq c\|\beta\|_{L^2(g)}.$$

Il en est de même pour le lemme II.3.2 dont la démonstration est rigoureusement identique.

III.4.4 Inégalité de Poincaré pour les 1-formes

Nous allons démontrer comme dans le cas des fonctions que la constante c intervenant dans la proposition II.3.3 peut être choisie de façon indépendante de la métrique g^j. Pour cela, on commence par montrer que la constante T du lemme II.3.4 peut être choisie indépendamment de la métrique $\hat{g}^j$; notons $\hat{g}^j_k$ les approximations successives suivant la méthode exposée au §II.1.1 de chaque métrique $\hat{g}^j$, on ainsi on énonce le lemme

Lemme III.4.4 *Il existe une constante T suffisamment grande telle que le lemme II.3.4 soit vérifié pour toutes les métriques $g = \hat{g}, \hat{g}^j$ ou $\hat{g}^j_k$.*

Démonstration : La seule modification à apporter dans la démonstration du lemme II.3.4 concerne l'argument utilisant les séries de Fourrier : comme

$$(\alpha_2^j - \alpha_1^j) = \frac{r_j}{q_j} \to (\alpha_2 - \alpha_1) \notin \mathbb{Q},$$

ceci entraîne que q_j explose ; à la limite les orbites de $\mathcal{X}_\theta$ pour la métrique g ne se referment pas et s'enroulent sur un tore. Il faut donc raffiner l'argument en utilisant les séries de Fourrier sur le tore pour pouvoir fixer un T uniforme.

Nous rappelons des coordonnées homogènes adaptées $(t, \theta, [u : v])$ sur $\mathcal{B} \simeq \Delta_a^* \times \mathbb{CP}^1$, en choisissant la coordonnée de projection stéréographique $v = 1$, on rappelle que la métrique g s'écrit

$$g = dt^2 + \varphi^2(t)d\theta^2 + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2}|du - i\alpha u d\theta|^2, \text{ où } \alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Réécrivons cette métrique en utilisant les coordonnées polaires $u = \rho e^{i\theta_2}$. On calcule

$$g = dt^2 + e^{-2t}d\theta^2 + \frac{4/c}{(1+\rho^2)^2}\left(|d\rho|^2 + \rho^2|d\theta_2 - \alpha d\theta|^2\right) ;$$

on en déduit que dans ces coordonnées, $\mathcal{X}_\theta = \partial_\theta + \alpha\partial_{\theta_2}$ et l'on constate que les orbites de $\mathcal{X}_\theta$ sont les droites de pente α dans le tore

$$T(t_0, \rho_0) = \{(t, \rho, \theta, \theta_2)/t = t_0 \text{ et } \rho = \rho_0\}.$$

De plus, on vérifie que $(d\theta, d\rho, d\theta_2)$ est une base duale de $(\mathcal{X}_\theta, \partial_\rho, \partial_{\theta_2})$.

On écrit alors la série de Fourrier sur le tore $T(t, \rho)$,

$$f = \sum_{k,l} c_{k,l}(t, \rho)e^{i(k\theta + l\theta_2)},$$

on en déduit que

$$\mathcal{X}_\theta \cdot f = (\partial_\theta + \alpha\partial_{\theta_2}) \cdot f = \sum_{k,l} ic_{k,l}(k+\alpha l)e^{i(k\theta+l\theta_2)}.$$

La difficulté dans le cas où α est irrationnel provient du fait que l'ensemble des valeurs prises par $k+l\alpha$ s'accumule en 0. Mais nous obtenons un contrôle supplémentaire en remarquant que dans ce cas,

$$l \to \infty \text{ et } k \to \infty \text{ lorsque } k + l\alpha \to 0,$$

et que

$$\partial_{\theta_2} \cdot f = \sum_{k,l} ilc_{k,l}e^{i(k\theta+l\theta_2)}.$$

Puisque $d^N f = \mathcal{X}_\theta \cdot f d\theta + \partial_{\theta_2} \cdot f(d\theta_2 - \alpha d\theta) + \partial_\rho \cdot f d\rho$; il s'agit d'une somme de termes orthogonaux, on en déduit que que $d^{\mathbb{CP}^1}$

$$|d^N f|^2 \geq \varphi^{-2}|\mathcal{X}_\theta \cdot f|^2 + 4/c(\rho+1/\rho)^2|\partial_{\theta_2} \cdot f|^2 \geq \varphi^{-2}|\mathcal{X}_\theta \cdot f|^2 + 4/c|\partial_{\theta_2} \cdot f|^2.$$

On décompose l'espace des fonctions sur le tore en deux sous-espaces orthogonaux : l'espace des fonctions presque invariantes suivant $\mathcal{X}_\theta$ noté

$$\mathrm{Inv}_\epsilon = \langle e^{i(k\theta_1+l\theta_2)} \ / \ |k+\alpha l|^2 \leq \epsilon \rangle,$$

et son orthogonal

$$\mathrm{Inv}_\epsilon^\perp = \langle e^{i(k\theta_1+l\theta_2)} \ / \ \epsilon < |k+\alpha l|^2 \rangle.$$

Pour tout K aussi grand que voulu il existe un ϵ suffisamment petit, tel que la décomposition de $f \in \mathrm{Inv}_\epsilon$ en série de Fourrier s'écrive

$$f = \sum_{k,l \geq K} c_{k,l}e^{i(k\theta+l\theta_2)}.$$

On en déduit que

$$\int_N |\partial_{\theta_2} \cdot f|^2 \mathrm{vol}^{g_t} \geq K^2 \int_N |f|^2 \mathrm{vol}^{g_t}.$$

Revenons à l'inégalité (II.11) de la démonstration du lemme II.3.4, qu'on peut réécrire :

$$|\nabla\beta|^2 + \mathrm{Ric}^g(\beta,\beta) \geq |\nabla_{\partial_t}\beta|^2 + |\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f|^2 + |\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f_2|^2 \\ - 4\langle f, \varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f_2\rangle + |d^{\mathbb{CP}^1} f|^2 + |d^{\mathbb{CP}^1} f_2|^2 \ ;$$

on voit que le terme mixte est contrôlé par ce qui précède à l'aide des termes en $|d^{\mathbb{CP}^1} f|^2 \geq 4/c|\partial_{\theta_2} \cdot f|^2$ et $|\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f_2|^2$.

Pour $f \in \mathrm{Inv}_\epsilon^\perp$, on a

$$\int_N |\mathcal{X}_\theta \cdot f| \mathrm{vol}^{g_t} \geq \epsilon \int_N |f|^2 \mathrm{vol}^{g_t},$$

d'où

$$\int_N |\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f| \mathrm{vol}^{g_t} \geq \epsilon\varphi^{-2} \int_N |f|^2 \mathrm{vol}^{g_t}.$$

Puisque $\varphi^{-2}(t) \leq e^{2t} \to \infty$, on en déduit que pour $t \geq T$, suffisamment grand, le terme mixte $\int -4\langle f, \varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f_2\rangle \mathrm{vol}^{g_t} = 4\int_N \langle \varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f, f_2\rangle \mathrm{vol}^{g_t}$, est contrôlé par $|\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f|^2$ et $|\varphi^{-1}\mathcal{X}_\theta \cdot f_2|^2$. Il en résulte que le lemme II.3.4 est vrai pour la métrique $\hat{g}$.

Remarque : la métrique $\hat{g}^j$ est une métrique modèle de bout parabolique, dont les poids vérifient par construction

$$\alpha_2^j - \alpha_1^j = \alpha^j = \frac{r_j}{q_j} \to \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

On en déduit que pour tout K, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour j suffisamment grand, on ait $|k + \alpha^j l|^2 \leq \epsilon \Rightarrow k, l \geq K$. En effet, si cette assertion était fausse, ceci impliquerait $\alpha \in \mathbb{Q}$, ce qui est contradictoire.

Cette dernière remarque entraîne que l'on peut choisir un T uniforme, tel que le lemme II.3.4 soit également vérifié pour les métriques $\hat{g}^j$ et $\hat{g}^j_k$. □

On en déduit une généralisation du corollaire II.3.5 en

Corollaire III.4.5 *Soit g une métrique asymptotique au modèle local $\hat{g}$, dont les poids vérifient la condition $\alpha_2 - \alpha_1 \notin \mathbb{Q}$. Soit g^j la suite d'approximations de g par des métriques asymptotique au modèle local $\hat{g}^j$, et g^j_k, la suite d'approximations de g^j donnée au §II.1.1.*

Il existe un T suffisamment grand et $c > 0$ tels que pour toutes les métriques g, g^j, g^j_k, et pour toute 1-forme β sur $[t_1, t_2] \times N$ avec $t_1, t_2 \geq T$, on ait :

$$h_0^2 \int_{[t_1,t_2]\times N} |\beta|^2 \ \mathrm{vol} + h_0 \int_{\partial[t_1,t_2]\times N} |\beta|^2 \ \mathrm{vol}^N \leq c \int_{[t_1,t_2]\times N} |\nabla\beta|^2 + \mathrm{Ric}(\beta,\beta) \ \mathrm{vol}.$$

d'où le corollaire

Corollaire III.4.6 *Il existe une constante $c > 0$ et T suffisamment grand, tels que pour toute 1-forme $\beta \in L^2_1(g^j)$ sur le bout parabolique nulle en $t = T$ on ait*

$$\int_{t\geq T} |d\beta|^2 + |d^{*_{g^j}}\beta|^2 \ \mathrm{vol}^{g^j} \geq c \int_{t\geq T} |\beta|^2 \mathrm{vol}^{g^j}, \qquad \text{(III.13)}$$

Du corollaire III.4.6, on déduit l'analogue de la proposition II.3.3, la démonstration étant pratiquement identique :

Proposition III.4.7 *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour toutes les métriques g^j, et toute 1-forme $\beta \in L^2_1(g^j)$, orthogonale aux formes g_j-harmoniques L^2, on ait :*

$$\int_M |d\beta|^2 + |d^{*_j}\beta|^2 \, \mathrm{vol}^{g^j} \geq c \int_M |\beta|^2 \mathrm{vol}^{g^j},$$

III.4.5 Convergence des 2-formes harmoniques

Soit une classe de cohomologie $b \in H^2(M)$. D'après le §III.4.2, on peut choisir des représentants $\gamma \in L^2(g)$ et $\gamma_j \in L^2(g^j)$ de b tels qu'on ait $\gamma = \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$, $\gamma_j = \lambda \mathrm{vol}_j^{\mathbb{CP}^1}$ près de l'infini sur le bout parabolique, et

$$\|\gamma_j\|_{L^2(g^j)} \to \|\gamma\|_{L^2(g)} \ ;$$

en outre γ_j converge vers γ au sens C^∞ sur tout compact.

D'après la proposition II.3.7, on peut écrire le représentant g^j-harmonique $\Omega_j \in L^2(g^j)$ de b sous la forme

$$\Omega_j = \gamma_j + d\beta_j,$$

où $\beta_j \in L^2_1(g^j)$ est une 1-forme orthogonale aux formes g^j-harmoniques L^2 qui vérifie $d^{*_{g^j}}\beta_j = 0$.

Grâce à l'inégalité de Poincaré de la proposition III.4.7, on en déduit par une démonstration similaire à celle de la proposition II.3.7 :

Proposition III.4.8 *Soit une classe de cohomologie $b \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{DR}}(\overline{M})$. Soit Ω_j la suite de ses représentants g_j-harmoniques $L^2(g^j)$ sur M. Alors Ω_j converge au sens C^∞ sur tout compact de M vers un représentant g-harmonique $L^2(g)$ de b.*

Plus précisément : en utilisant les notation précédentes, β_j converge sur tout compact de M vers une 1-forme β dans $L^2_1(g)$, orthogonale aux 1-formes g-harmoniques L^2, telle que $\Omega = \gamma + d\beta$ soit g-harmonique,

$$d^{*_g}\beta = 0 \quad et \quad \|\beta\|_{L^2_1(g)} \leq c\|\gamma\|_{L^2(g)}.$$

Maintenant, chaque métrique g^j induit une décomposition des formes g^j-harmoniques L^2 en une partie autoduale et une partie anti-autoduale, d'où la suite de décompositions

$$H^2(M) = H^{+_{g^j}}(M) \oplus H^{-_{g^j}}(M).$$

Nous continuons l'adaptation des résultats dans le cas rationnel par l'analogue du corollaire II.3.10

Corollaire III.4.9 *Soit une classe de cohomologie $b \in H^2(M)$. Notons $\pm_j$ les projecteurs de $H(M)$ associés au métriques g^j et $\pm$ ceux associés à g. Alors*

$$b^{+_j} \to b^+ \quad et \quad b^{-_j} \to b^-,$$

pour j tendant vers l'infini.

III.4.6 Convergence des solutions des équations de Seiberg-Witten pour les métriques g^j

Soit $\hat{A}$ la connexion induite sur K_M^{-1} par la métrique kählérienne $\hat{g}$ près de l'infini sur le bout parabolique. Notons $\hat{A}_j$, celles induites par les métriques $\hat{g}^j$.

En reprenant le lemme III.3.1, on remarque que $\partial \ln \ln^2 |z|$ est dans L^2_1 pour toutes les métriques g et g^j. On définit alors

$$C = \hat{A} + \partial \ln \ln^2 |z|, \quad C^j = \hat{A}_j + \partial \ln \ln^2 |z|,$$

de sorte que $F_C = \lambda \mathrm{vol}^{\mathbb{CP}^1}$ et $F_{C^j} = \lambda \mathrm{vol}_j^{\mathbb{CP}^1}$. On décide de prolonger C en une connexion sur K_M^{-1} tout entier ; on prolonge également les connexions C^j en les recollant à C : notons $C^j = C + a_j$ et posons (avec les notations de II.1.2)

$$\tilde{C}^j = C^j + \chi_j a_j.$$

Nous noterons désormais C^j la connexion $\tilde{C}^j$. Les connexions C^j sont en fait, par le lemme III.3.1, des connexions lisses sur $L^j = K_{\overline{M}^j}^{-1} \otimes [D_j]^{-1}$. Il est clair par construction que C^j converge vers C au sens C^∞ sur tout compact de M et que

$$\|F_{C^j}\|_{L^2(g^j)} \to \|F_C\|_{L^2(g)}.$$

De cette construction ne change pas la classe de cohomologie de F_C : en effet, via l'isomorphisme construit au §III.4.2, on constate que

$$[F_C] = [F_{C^j}],$$

d'où le lemme

Lemme III.4.10 *Via l'isomorphisme entre les espaces de cohomologie L^2 (cf. §III.4.2), on a*

$$\mathrm{L}^2 c_1(M, g) = \mathrm{L}^2 c_1(M, g_j).$$

On démontre alors le théorème de convergence suivant :

Théorème III.4.11 *Soit (A^j, ψ^j), une suite de solutions des équations de Seiberg-Witten non perturbées associées aux métriques g^j et à la structure spin^c induite par la structure complexe de M de fibré déterminant K_M^{-1} telles que*

- *$A^j = C^j + a^j$, où $a^j \in L^2_1(g^j)$ est en jauge de Hodge $d^{*_j} a^j = 0$. De plus a^j se décompose en une partie β^j orthogonales aux formes g^j-harmoniques L^2, et une partie g^j-harmonique μ^j qu'on supposera uniformément bornée en cohomologie dans $H^1(M)$.*
- *$\psi^j \in L^2_1(g^j)$ relativement à la connexion C^j.*
- *ψ^j est uniformément bornée en norme C^0.*

Alors, quitte à extraire une sous suite, (A^j, ψ^j) converge au sens C^∞ sur tout compact de M vers une solution (A, ψ) des équations de Seiberg-Witten non perturbées pour la métrique g telle que

- *$A = C + a$, avec $d^* a = 0$ et $a \in L^2_1(g)$.*
- *$\psi \in L^2_1(g)$ relativement à C, et $|\psi|$ est bornée.*

Remarque : les hypothèses sur les (A^j, ψ^j) sont celles qu'on peut faire si (A^j, ψ^j) a été obtenue en faisant converger une suite de solutions (A^j_k, ψ^j_k) des équations de Seiberg-Witten perturbées pour les métriques g^j_k (cf. th. III.3.3). Notons que la borne C^0 est uniforme car la courbure scalaire des métriques g^j_k est uniformément bornée. Par ailleurs on a une borne uniforme sur $[\mu^j]$ car on s'est ramené à un domaine fondamental du tore $H^1(\overline{M}^j, \mathbb{R})/H^1(\overline{M}^j, \mathbb{Z})$ afin de faire converger μ^j_k.

Démonstration : Puisque μ^j est bornée en cohomologie, on peut quitte à extraire une sous-suite supposer que $[\mu^j]$ converge. On en déduit que μ^j lui-même grâce à la proposition III.4.8. Il est facile de faire converger β^j et ψ^j maintenant que nous disposons d'une inégalité de Poincaré (cf. prop. II.3.3) et de connexions de référence C^j convenables (cf. démonstration de la prop. III.3.3). □

III.4.7 Calcul de l'invariant

Nous revenons maintenant au cas où M est une surface complexe réglée munie d'une métrique g^{K} kählérienne à courbure scalaire constante $s < 0$ asymptotique au modèle local $\hat{g}$, dans le cas où $\hat{g}$ est la métrique d'un bout parabolique dont les poids vérifient la condition $\alpha_2 - \alpha_1 \notin \mathbb{Q}$. Notons $g = \xi^* g^{\mathrm{K}}$, où ξ est l'antipodie sur M définie au §III.2.3 et g^j la suite d'approximations de g.

D'après les corollaires III.4.9 et III.2.3

$$\mathrm{L}^2 c_1^{+_{g^j}} \to \mathrm{L}^2 c_1^{+_g} = \mathrm{L}^2 c_1^{+_{g^{\mathrm{K}}}}.$$

En notant ω la forme de Kähler associée à g^{K}, on en déduit que pour j et k suffisamment grands,

$$\mathrm{L}^2 c_1^{+_{g_k^j}}.[\omega] < 0 \ ;$$

Alors, d'après la proposition III.1.7 ceci entraîne que l'invariant de Seiberg-Witten associé aux équations perturbées pour la métrique g_k^j est non nul dès que j et k sont suffisamment grands. On en déduit d'après le théorème III.3.3 une solution des équations non perturbées (A^j, ψ^j) pour chaque métrique g^j vérifiant les hypothèses du théorème III.4.11, dont on peut par conséquent extraire une sous-suite convergente. La limite obtenue (A, ψ) est une solution des équations de Seiberg-Witten non perturbées pour la métrique g ; on en déduit que le corollaire III.3.6 est également vrai dans le cas du bout parabolique irrationnel :

Corollaire III.4.12 *Les équations de Seiberg-Witten non perturbées (III.5) associées à la métrique $g = \xi^* g^{\mathrm{K}}$ admettent une solution (A, ψ) de la forme*

- *$A = C + a$, avec $a \in L_1^2(g)$ et $d^{*_g} a = 0$,*
- *$|\psi|$ bornée et $\psi \in L_1^2(g)$,*

où C est la connexion construite au début du §III.4.6.

Bibliographie

[A] T. Aubin, *Équations de type Mong-Ampère sur les variétés kählériennes compactes,* C. R. Acad. Sci. Paris **283**, 119–121 (1976).

[BB] D. Burns, P. de Bartolomeis, *Stability of vector bundles and extremal metrics,* Invent. Math. **92**, 403–407 (1988).

[Be] A.L. Besse, *Einstein manifolds,* Ergebnisse Math. (3) **10**, Springer-Verlag (1987).

[Bv] A. Beauville , *Surfaces algébriques complexes,* Astérisque **54**, Soc. Math. Fr. (1978).

[Bi] O. Biquard, *Fibrés paraboliques stables et connexions singulières plates,* Bull. Soc. Math. Fr. **119**, 231–257 (1991).

[Bi2] O. Biquard, *Métriques d'Einstein à cusps et équations de Seiberg-Witten,* J. Reine Angew. Math. **490**, 129–154 (1997).

[BT] R. Bott, L.W. Tu, *Differential forms in algebraic topology,* Graduate Texts in Mathematics **82**, Springer-Verlag (1982).

[C] X. Chen, *The space of Kähler metrics,* Preprint. (1999).

[CG] D. Cerveau, E. Ghys, N. Sibony, J-C. Yoccoz, *Complex dynamics and geometry,* Panoramas et synthèses **8** Soc. Math. Fr. 1999.

[D] S.K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasihman and Seshadri,* J. Diff. Geom. **18**, 269–277 (1983).

[D2] S.K. Donaldson, *Symmetric spaces, Kähler geometry and hamiltonian dynamics,* Northern California Symplectic Geometry Seminar, 13–33, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Fo] O. Forster, *Lecture on Riemann Surfaces,* Graduate Texts in Mathematics **81**, Springer-Verlag (1981).

[Fu] A. Futaki, *An obtruction to the existence of Kähler-Einstein metrics,* Invent. Math. **73**, 437–443 (1983).

[Ka] T. Kawasaki, *The index of elliptic operators over V-manifolds,* Nagoya Math. **84**, 135–157 (1981).

[KM] P.B. Kroheimer, T.S. Mrowka, *Monopoles and contact structures,* Invent. Math. **130**, 209–255 (1997).

[L] C. Le Brun, *Polarized 4-manifolds, extremal Kähler metrics, and Seiberg-Witten theory,* Math. Res. Lett. **2**, 653–662 (1995).

[L2] C. Le Brun, *Scalar flat Kähler metrics on blown-up ruled surfaces,* J. Reine Angew. Math. **420**, 161–177 (1991).

[LS] C. Le Brun, M. Singer *Existence and deformation theory for scalar flat Kähler metrics on compact complex surfaces,* Invent. Math. **112**, 273–313 (1993).

[Mo] J.W. Morgan, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth 4-manifolds,* Mathematical Notes **44**, Princeton University Press (1996).

[MS] V.B. Mehta, C.S. Seshadri, *Moduli of vector bundles of curves with parabolic structures,* Math. Ann. **248**, 205–239 (1980).

[NS] M.S. Narasimhan, C.S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface,* Ann. Math. (2) **82**, 540–564 (1965).

[S] C.S. Seshadri, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques,* Astérisque **96**, Soc. Math. Fr. (1982).

[T] G. Tian, *On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive fisrt Chern class,* Invent. Math. **101**, 101–172 (1990).

[T2] G. Tian, *Canonical metrics in Kähler geometry,* Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkäuser Verlag (2000).

[Y] S.T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I**. Comm. Pure Apll. Math. **31**, 339–441 (1978).

[Z] S. Zucker, *Hodge theory with degenerating coefficients : L^2 cohomology in the Poincaré metric,* Ann. of Math. **109**, 415–476 (1979).