

Les transferts orbitaux à faible poussée : optimalité et stabilisation

Alex Bombrun

▶ **To cite this version:**

Alex Bombrun. Les transferts orbitaux à faible poussée : optimalité et stabilisation. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2007. Français. NNT : . tel-00261156

HAL Id: tel-00261156
https://pastel.hal.science/tel-00261156

Submitted on 6 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



collège doctoral

ED n°... : ...

N° attribué par la bibliothèque

THESE

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole des Mines de Paris
Spécialité "informatique temps réel, robotique, automatique"

présenté et soutenue publiquement par

Alex BOMBRUN

le 12 mars 2007

Les transferts orbitaux à faible poussée
Optimalité et stabilisation

Directeurs de thèse: ***Jean-Baptiste*** **Pomet** ***et Laurent*** **Baratchart**

Jury

Pierre Bernhard	Président
Bernard Bonnard	Rapporteur
Ludovic Rifford	Rapporteur
Josep Masdemont	Examinateur
Richard Epenoy	Examinateur
Thierry Dargent	Examinateur

Préface

Le développement de moteurs à faible poussée arrive à maturité aussi bien sur le plan technique que dans les esprits. Plusieurs missions d'exploration spatiale utilisant des moteurs plasmiques se sont achevées avec succès, d'autres sont planifiées. Ces nouveaux moteurs présentent la caractéristique d'avoir une vitesse d'éjection beaucoup plus élevée que les fusées classiques, ainsi la masse de carburant nécessaire pour produire une accélération donnée est moindre avec cette nouvelle technologie. Ils permettent d'augmenter sensiblement la masse utile des véhicules spatiaux et de réduire les coûts de mise en orbite. Cependant ils présentent l'inconvénient d'avoir un module de poussée beaucoup plus faible. Par conséquent les temps de transferts orbitaux sont beaucoup plus longs : comparer les quelques heures de la première mission d'exploration spatiale extraterrestre Lunik 1 (expulsée hors d'une orbite terrestre par un moteur chimique, cette sonde passa au voisinage de la Lune le 2 janvier 1959) aux trois années de transfert de la mission Smart-1 (mise en orbite terrestre le 21 septembre 2003 par une fusée Ariane 5).

Ces nouvelles caractéristiques impliquent de revoir les stratégies de mises à poste. Pour l'industrie spatiale il est impératif de pouvoir réaliser des mises à poste au moindre coût. Outre de calculer les trajectoires optimales (problèmes de transfert en temps minimum ou en masse finale maximale), il est nécessaire de renforcer l'autonomie des véhicules spatiaux afin d'augmenter leur indépendance par rapport au sol. Pour réaliser cet objectif il nous semble opportun de rechercher des lois de commandes stabilisantes et robustes aux perturbations.

Il faut remarquer qu'il existe de nombreuses lois de commande stabilisant une orbite keplerienne. Nous avons voulu comparer l'efficacité de ces lois de commande par rapport à certains coûts optimaux, en particulier le temps minimum de transfert. La conclusion de nos simulations est que des lois de commande stabilisantes, simples à calculer, s'avèrent particulièrement efficaces pour réaliser des transferts à faible poussée. Ces résultats ont motivé une étude rigoureuse du système à deux corps contrôlé, avec le secret espoir que les propriétés remarquables du mouvement keplerien se transmettent et permettent une compréhension géométrique des transferts optimaux.

Ce programme est en partie réussi. Nous pouvons ainsi caractériser le comportement asymptotique de certains coûts optimaux quand le module maximal de poussée tend vers zéro et montrer l'efficacité de quelques lois de commande stabilisantes. La diversité des résultats exposés témoigne de la richesse

du système de Kepler contrôlé. Cette thèse ne peut être qu'une étape vers une compréhension plus globale de ce système ; en effet, de nombreux points ne sont que partiellement analysés et demandent à être approfondis.

Remerciements

Je suis sincèrement reconnaissant à Jean-Baptiste Pomet de la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet de thèse. Ces trois années passées à l'INRIA ont été riches de fructueux échanges constructifs. J'espère que nous aurons à nouveau la possibilité de poursuivre cette collaboration initiée au printemps 2002.

Laurent Baratchart m'a accueilli au sein du projet Apics, je l'en remercie vivement. Je ne sais comment exprimer ma gratitude à l'ensemble des membres de ce projet. Leurs encouragements m'ont aidé tous les jours à poursuivre mes recherches. Le soutien constant de France, Juliette, Stéphanie, Martine, Fabien, José, Vincent, Mario, m'a permis de traverser les moments de doute et de trouver la sérénité nécessaire à l'aboutissement de ma thèse.

Je n'oublie pas ma dette envers Thierry Dargent et Joël Amalric. Ils ont suivi ma thèse chez Alcatel Space, avec un regard critique, défendant le point de vue de l'industriel, aussi ont-ils apporté une autre perspective à mon travail de recherche.

Je remercie Bernard Bonnard et Ludovic Rifford pour leur lectures critiques de mon manuscrit. Je sais gré à Pierre Bernhard, qui a présidé avec rigueur et dignité, à Josep Masdemont et à Richard Epenoy d'avoir siégé dans le jury ma soutenance.

Finalement, je souhaite rendre hommage à Jonathan Chetboun et Youssef El Fassy Fihry avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer.

Sommaire

Préface **i**

Remerciements **iii**

Résumé **ix**

Abstract **xiii**

1 Les systèmes de Kepler contrôlés **1**
1.1 Le mouvement keplerien 1
1.1.1 Un système hamiltonien 1
1.1.2 Les orbites kepleriennes non-dégénérées 3
1.1.3 Les orbites képlériennes elliptiques 4
1.2 Le système à deux corps contrôlé 6
1.2.1 Le choix des coordonnées 6
1.2.2 Le sous-système plan 8
1.3 Contrôlabilité 9
1.3.1 Transfert et rendez-vous 10
1.3.2 Sur le domaine des orbites non-dégénérées 12
1.3.3 Masse variable 15
1.4 Les systèmes de Kepler contrôlés 16
1.4.1 Changement d'échelle de temps 17
1.4.2 Choix de la variable libre, temps ou longitude ? 17
1.4.3 Contrôlabilité 18

2 Optimalité et stabilisation **21**
2.1 Contrôle optimal 21
2.1.1 Les problèmes optimaux 22
2.1.2 Trajectoires optimales 22
2.1.3 Les problèmes de transferts optimaux 24
2.2 Stabilisation 25
2.2.1 Stabilité asymptotique uniforme 25
2.2.2 Stabilisation de Jurdjevic-Quinn 28
2.3 L'oscillateur harmonique en poussée faible 30

2.3.1 Synthèse optimale 30
2.3.2 Commande Jurdjevic-Quinn 32
2.3.3 Optimalité et stabilisation 33

3 Le système contrôlé moyen 35
3.1 Dynamiques lentes et rapides 35
3.2 Le système contrôlé moyen 38
3.2.1 Définition 38
3.2.2 Théorème de convergence 40
3.2.3 Propriétés du système moyen 43
3.2.4 Extrémales temps minimum 46
3.3 Conséquences pour les transferts optimaux 48
3.3.1 Temps minimum à masse constante 49
3.3.2 Temps minimum à masse variable 50
3.3.3 Masse finale maximale et énergie minimale 53
3.4 Les transferts coplanaires 54
3.4.1 Le système moyen 54
3.4.2 Temps minimum 56
3.4.3 Analyse du système moyen 57

4 Autour de Jurdjevic-Quinn 65
4.1 Stabilisation exponentielle des systèmes de Kepler 65
4.2 A propos du contrôle saturé 69
4.2.1 Une commande en boucle fermée discontinue 69
4.2.2 Inclusion différentielle et principe d'invariance 70
4.2.3 Propriété de stabilité de la commande discontinue 72
4.3 L'interpolation de Lyapunov 75
4.3.1 Définitions 75
4.3.2 Interpolation exacte 76
4.4 Maximiser la masse 78

5 Etudes numériques 79
5.1 Cas particuliers 79
5.1.1 Deux transferts de référence 79
5.1.2 Estimation du temps de transfert du feedback 81
5.1.3 Analyse de robustesse 83
5.2 Interpolation de Lyapunov 83
5.3 Un algorithme naïf 87
5.3.1 Le cas plan 91
5.3.2 Des transferts en 3 dimensions 97

6 Rendez-vous 99
6.1 Par rapport au transfert 99
6.2 A propos du rendez-vous par feedback 100
6.2.1 Condition nécessaire 100
6.2.2 Existence, le contrôle Kellett-Praly 101

6.3 Une stratégie de rendez-vous hybride 104
6.3.1 Pour des systèmes kepleriens quelconques 104
6.3.2 Application au problème de Kepler contrôlé 105

Postface **109**

Résumé

Chapitre 1

On présente le système à deux corps contrôlé à faible poussée : un satellite muni d'un moteur plasmique soumis au champs gravitationnel d'un astre central. On étudie ses propriétés de contrôlabilité, la possibilité de réaliser un transfert ou un rendez-vous entre deux orbites kepleriennes. On démontre la contrôlabilité globale de ce système pour toute contrainte sur le module maximal de poussée [13]. Puis on propose une classe de systèmes appelée "systèmes de Kepler contrôlés" à masse constante et à masse variable. Elle est une abstraction du système étudié dans le domaine des énergies négatives. L'étude de cette classe de systèmes permet de traiter le cas plan, ou en trois dimensions, de manière unifiée, et de s'affranchir d'un choix précis de coordonnées.

– Contrôlabilité, système à deux corps contrôlé, transfert orbital, rendez-vous.

Chapitre 2

On présente les problèmes de contrôle en temps minimum, énergie minimale et masse maximale, et les problématiques de stabilisation, en particulier la méthode de Jurdjevic-Quinn pour un système affine. L'oscillateur harmonique, avec de faibles poussées, est un cas simple de système de Kepler contrôlé, qui illustre le lien entre contrôle optimal et stabilisation Jurdjevic-Quinn pour ces systèmes. La commande optimale et la commande stabilisante convergent vers une limite commune quand le module maximal du contrôle tend vers zéro.

– Commande temps minimum, feedback Jurdjevic-Quinn, oscillateur harmonique contrôlé.

Chapitre 3

Le module maximal de poussée est un petit paramètre ε qui appelle une étude asymptotique. Ce chapitre est dédié à la "moyennisation" qui rend compte du comportement limite quand le module maximal de poussée ε tend vers 0. On définit le système moyen associé à un système contrôlé linéaire avec des champs de vecteurs périodiques [12]. Cette construction permet d'étudier les propriétés

asymptotiques des coûts optimaux de transfert en temps minimum, énergie minimale et masse maximale, pour les systèmes de Kepler contrôlés, quand le module maximal du contrôle tend vers zéro. Nous montrons en particulier une conjecture proposée dans [17]. On démontre aussi la complétude des solutions minimisantes des problèmes de transfert en temps minimum, pour le système moyen à deux corps contrôlé plan, réduit au demi-grand axe et à l'excentricité.

- Système moyen contrôlé.
- Développement asymptotique des coûts de transferts optimaux.
- Transferts orbitaux en demi-grand axe et excentricité, complétude des trajectoires minimisantes.

Chapitre 4

On démontre la convergence exponentielle des contrôles en boucle fermée de type Jurdjevic-Quinn pour les systèmes de Kepler contrôlés à masse variable [11]. On s'intéresse au comportement de la commande saturée pour un système affine satisfaisant les conditions de Jurdjevic-Quinn. Les solutions de Fillipov ne sont pas pénalisantes et ces contrôles assurent une stabilisation pratique. Puis on introduit le concept d'interpolation de Lyapunov pour les systèmes contrôlés linéaires [8]. Pour chaque contrôle en boucle ouverte régulier et une solution associée, il existe un contrôle, stabilisant au sens de Lyapunov le point final, qui étend la boucle ouverte à un voisinage. Enfin, on propose une loi de commande en boucle fermée hybride basée sur les contrôles de type Jurdjevic-Quinn afin d'améliorer la consommation de masse.

- Convergence exponentielle des feedbacks Jurdjevic-Quinn pour les systèmes de Kepler contrôlés à masse variable.
- Commande Jurdjevic-Quinn saturée, solutions de Fillipov.
- Interpolation de Lyapunov.
- Feedback hybride pour maximiser la masse.

Chapitre 5

On compare l'efficacité des lois de commande stabilisantes à la commande de transfert en temps minimum pour le système à deux corps contrôlé. Les simulations numériques montrent que ces lois de commande sont très performantes. Simples à calculer, robustes aux perturbations et efficaces par rapport au coût optimal elle peuvent contribuer de façon positive à l'autonomie des satellites pendant les transferts orbitaux.

- Etude numérique de l'efficacité des feedbacks Jurdjevic-Quinn.
- Logiciel pour Alcatel Space.

Chapitre 6

On étudie la particularité des problèmes de rendez-vous par rapport au problème de transfert orbital. On commence par rappeler un résultat d'existence

de loi de commande stabilisant une orbite keplerienne et on étudie l'efficacité de cette commande : contrairement aux transferts orbitaux avec les feedbacks Jurdjevic-Quinn le temps de transfert est très sensible à la longitude sur l'orbite initiale. Cette propriété peut s'expliquer par un autre résultat : chaque fonction de Lyapunov pour un rendez-vous doit dépendre du module maximal de poussée. Puis, nous proposons une méthode de rendez-vous basée sur les feedbacks Jurdjevic-Quinn réalisant un transfert. Nous soulignons la nécessité d'estimer l'ensemble des perturbations pour achever un rendez-vous effectif dans un environnement perturbé en un temps proche du temps optimal sans perturbations.

– Stratégie de rendez-vous utilisant les feedbacks Jurdjevic-Quinn.

Autres

Mentionnons deux rapports de recherche sur des sujets indirectement liés à cette thèse fruits de deux collaborations différentes :

– Une étude de la mission Smart-1 modélisée par le système à trois corps réduit où le satellite est contrôlé à l'aide des lois de commandes hybrides de types Jurdjevic-Quinn préservant la masse du satellite [9].
– Une étude théorique du vol en formation, un premier pas vers une caractérisation géométrique du domaine de viabilité de n-corps inertiels contrôlés sphériques contraints de rester dans une boule en évitant les collisions, une caractérisation du bord du domaine de viabilité par des problèmes de temps maximal [10].

Abstract

Chapter 1

We present the low thrust control 2-body system : a satellite equipped with a plasmic engine subject to the gravitational field of a central body. We study its controllability properties, the possibility to achieve a transfer or a rendez-vous between two Keplerrian orbits. We prove the global controllability of this system for all constraints on the maximal thrust [13]. Then we propose a class of systems, called "control Keplerrian system", an abstraction of the satellite system in the domain of negative mechanical energies.

– Controllability, control 2-body system, orbital transfer, rendez-vous.

Chapter 2

We present the problems of transfers in minimum time, minimal energy or mass maximal, and the problem of stabilization, in particular the Jurdjevic-Quinn's method for an affine system. Hence we illustrate the relationship between these two different problems on the control harmonic oscillator, a simple control Keplerrian system. For this particular system, the time optimal control and the Jurdjevic-Quinn's control have somehow the same limit when the thrust tends toward zero.

– Time optimal control, Jurdjevic-Quinn's feedback, control harmonic oscillator.

Chapter 3

The maximal thrust is a small parameter ε that motivates an asymptotic study. We define the average system associated to a control system linear in control with periodic vector fields [12]. This construction provide a tool to study the asymptotic properties of the transfer in minimal time, minimal energy and mass maximal for a control Keplerrian systems. We prove in particular a conjecture exposed in [17].

– Average control system.
– Asymptotic development of optimal transfer costs.

– Orbital transfers in semi-major axis and eccentricity for the averaged system associated to the time optimal transfer problem of the control 2-body system.

Chapter 4

We prove the exponential convergence of the Jurdjevic-Quinn's control for the control Keplerrian system [11]. We focus on the behavior of the saturated discontinuous control for a system satisfying to the Jurdjevic-Quinn's conditions. The Fillipov's solutions are not penalizing, the saturated discontinuous control insures a practical stabilization. We introduce the concept of Lyapunov's interpolation for the linear control systems [8]. Finally we propose an hybrid feedback based on Jurdjevic-Quinn's control to improve mass consumption.

– Exponential convergence of Jurdjevic-Quinn's feedbacks for control Keplerrian systems.
– Study of the saturated discontinuous Jurdjevic-Quinn's control, Fillipov's solutions.
– Lyapunov's interpolation.
– Hybrid feedback to spare propellent.

Chapitre 5

We compare the efficiency of the Jurdjevic-Quinns control in regards to the transfer time for the control 2-body system. Numerical simulations show that these commands can achieve a transfer in a time very close to the optimal, even in a perturbed environment.

– Numerical study of the efficiency of the Jurdjevic-Quinn's feedbacks.

Chapitre 6

We study the particularities of the rendez-vous problem in comparison with the transfer problem. We remind the reader the existence of stabilizing feedbacks of Keplerrian trajectories. Contrary to the Jurdjevic-Quinn's control for orbital transfers, the transfer time of these feedbacks is very sensitive to the initial longitude, hence to eclipses. This property may be explain by another result. Indeed the Jurdjevic-Quinn's method admits Lyapunov functions independent of the thrust, whereas each Lyapunov function for a feedback achieving a rendez-vous must depend on the thrust constraint. Finally we propose a shooting method to achieve a rendez-vous using the Jurdjevic-Quinn's control. However it is necessary to estimate properly all the major perturbations in a perturbed environment to achieve a rendez-vous within a time close to the optimal.

– Rendez-vous strategy using Jurdjevic-Quinn's controls.

Other

Two research reports on subjects indirectly related to this manuscript, fruits of two collaborations :

- A study of the Smart-1 mission modeled by the restricted planar 3-body system and controlled by hybrid feedback laws [9].
- A theoretical study of formation flying, a first step toward the geometrical characterization of the viability domain of control inertial bodies, a characterization associated to time maximal problems [10].

Chapitre 1

Les systèmes de Kepler contrôlés

Dans ce chapitre nous commençons par présenter le mouvement keplerien et nous introduisons le système à deux corps contrôlé. Nous discutons ensuite des propriétés de contrôlabilité satisfaites par ce système et nous proposons la notion plus générale de systèmes de Kepler contrôlés, notion qui généralise le problème à deux corps contrôlé dans le domaine elliptique en conservant et en accentuant certaines de ses caractéristiques fondamentales.

1.1 Le mouvement keplerien

1.1.1 Un système hamiltonien

Le système constitué d'un satellite de masse m soumis à l'attraction d'un astre se réduit classiquement à un point de vecteur position $\mathbf{r}$ et de vecteur vitesse $\mathbf{v}$. Soit $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; l'espace des phases est le fibré tangent $T\mathbb{R}^3_*$, identifié à $\mathbb{R}^3_* \times \mathbb{R}^3$, et la dynamique est régie par les équations différentielles,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{r}} & = & \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} & = & -\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \end{array} \right. , (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3_* \times \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

avec μ une constante positive. Nous faisons de plus l'hypothèse que la masse de l'astre central est prépondérante devant la masse du satellite et que l'astre central est positionné à l'origine.

Le système de Kepler (1.1) peut s'écrire de manière abstraite et compacte en utilisant le formalisme de la géométrie différentielle. Soit f_0 le champ de vecteurs sur $T\mathbb{R}^3_*$ défini dans les coordonnées cartésiennes par

$$f_0 = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial r_i} - \mu \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \frac{\partial}{\partial v_i}. \tag{1.2}$$

Nous noterons e^{tf_0} le flot du champ de vecteur f_0. Etant donnée une condition initiale $q(0) = q_0 \in T\mathbb{R}^3_*$, nous noterons $e^{tf_0}(q_0)$, ou plus brièvement $q(t)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la condition initiale, la solution du problème de Cauchy,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{q} & = & f_0(q)\,, \\ q(0) & = & q_0\,. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ l'intervalle de définition maximale de la solution $q(t)$, nous appelons orbite keplerienne O_{q_0} l'ensemble des points de cette solution,

$$O_{q_0} = \left\{ e^{tf_0}(q_0),\, t \in \mathcal{I} \right\}. \tag{1.4}$$

C'est le grand succès de la théorie de Newton [40] qui marque le début de la science moderne. Cette formulation dynamique vérifie les trois lois énoncées par Kepler [33] [34] pour décrire le mouvement des planètes du système solaire :

- Les planètes parcourent des orbites planes, elliptiques, paraboliques ou hyberboliques dont le Soleil occupe l'un des foyers.
- En des durées égales, une planète balaye des aires égales.
- Pour les orbites elliptiques, le rapport du carré de la période de rotation au cube du demi-grand axe est identique pour toutes les planètes du système solaire.

Ces propriétés se résument par le fait que le système à deux corps est hamiltonien avec cinq intégrales premières indépendantes, que toutes les orbites du mouvement keplerien induit par la fonction énergie (1.5) sont des sous-variétés différentielles plongées dans $\mathbb{R}^6$ qui forment un feuilletage de $T\mathbb{R}^3_*$.

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|}. \tag{1.5}$$

En effet. la fonction H, appelée aussi énergie mécanique, est invariante le long des trajectoires $q(t)$ de (1.1) ;

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{d}{dt} H(q(t)) && (1.6)\\ &= \langle dH, f_0 \rangle && (1.7)\\ &= \langle \sum_{i=1}^{3} v_i dv_i + \mu \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} dr_i, f_0 \rangle && (1.8)\\ &= 0 && (1.9) \end{aligned}$$

De même le vecteur moment cinétique

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}\,, \tag{1.10}$$

et le vecteur excentricité

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{c}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{1.11}$$

sont des intégrales premières du système (1.1).

Ces fonctions ne sont pas indépendantes mais liées par différentes relations,

$$\mathbf{c}.\mathbf{e} = 0, \tag{1.12}$$

et si $H < 0$,

$$e^2 = 1 + 2\frac{H}{\mu^2}c^2, \tag{1.13}$$

avec $c = \|\mathbf{c}\|$, le moment cinétique, et $e = \|\mathbf{e}\|$, l'excentricité.

Remarque 1. Si le moment cinétique c, ou l'énergie H, est nul alors l'excentricité e vaut 1. Aussi quand le moment cinétique c est non nul, il est possible de retrouver la valeur de l'énergie H connaissant l'excentricité e, alors que quand le moment cinétique s'annule ce changement de variable devient singulier. Les trajectoires du mouvement keplerien ne sont pas *complètes*, définies pour tous les temps, mais sortent de la variété $T\mathbb{R}^3_*$ quand le moment cinétique est nul. Quand $c = 0$, les trajectoires sont rectilignes et il existe un temps fini pour lequel la distance à l'astre central s'annulle, $\|\mathbf{r}\| = 0$, et la vitesse infinie, $\|\mathbf{v}\| = +\infty$. Ces trajectoires dégénérées sont les *chocs*.

1.1.2 Les orbites kepleriennes non-dégénérées

Considérons la variété $\mathcal{C}$ des points de $T\mathbb{R}^3_*$ ayant un moment cinétique non nul,

$$\mathcal{C} = \left\{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3_* \times \mathbb{R}^3, \mathbf{c} \neq 0\right\}.$$

Proposition 2. *Les orbites keplerienne définies sur $\mathcal{C}$ sont complètes, non-dégénérées, c'est-à-dire définies pour tous les temps, et la variété $\mathcal{C}$ est feuilletée par des coniques.*

Démonstration: Cette présentation des orbites keplériennes est basée sur l'article de John Milnor [38]. Introduisons un repére cartésien, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, tel que le vecteur moment cinétique $\mathbf{c}$ pointe dans la direction z. La relation $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = (0, 0, c)$ implique que le vecteur $\mathbf{r}$ appartient au plan (x, y). En introduisant les coordonnées polaires dans ce plan $\mathbf{r}(t) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$, un calcul rapide montre que

$$c = r^2\dot{\theta}. \tag{1.14}$$

L'invariance de cette expression $r^2\dot{\theta}$ traduit simplement la seconde loi de Kepler en terme moderne : le vecteur $\mathbf{r}(t)$ balaye des aires égales en des durées égales [1].

Ecrivons l'équation de Newton, $\dot{v} = -\mu(\cos\theta, \sin\theta, 0)/r^2$ et divisons par $\dot{\theta}$.

$$\frac{d}{d\theta}\mathbf{v} = -\frac{\mu}{c}(\cos\theta, \sin\theta, 0), \tag{1.15}$$

[1] "Il est intéressant de remarquer que l'interprétation de Kepler était différente de l'interprétation newtonienenne. En effet en l'absence du concept d'inertie, il croyait que le Soleil exerçait une force de répulsion inversement proportionnelle à la distance qui repousserait les planètes sur leur orbite." [38]

en intégrant on obtient

$$\mathbf{v} = \frac{\mu}{c}(-\sin\theta, \cos\theta, 0) + \mathbf{b}, \tag{1.16}$$

où $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0)$ est une constante d'intégration, une intégrale première.

L'équation 1.16 implique que le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ parcoure le cercle centré en $\mathbf{b}$ et de rayon μ/c. Le vecteur $\mathbf{b}$ est un invariant dynamique qui est relié aux vecteurs moment cinétique et excentricité par la relation

$$\mathbf{b} = \frac{\mu}{c^2}\mathbf{c} \times \mathbf{e}. \tag{1.17}$$

ll est intéressant de remarquer que le vecteur $\mathbf{v} - \mathbf{b}$ est toujours orthogonal au vecteur position $\mathbf{r}$.

Soit des coordonnées (x, y) telles que $\mathbf{b}$ soit sur l'axe des y positif. Avec cette convention on a

$$\mathbf{v} = \frac{\mu}{c}(-\sin\theta, e + \cos\theta, 0). \tag{1.18}$$

En substituant cette expression dans $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, on obtient la formule $c^2 = \mu r(1 + e\cos\theta)$,

$$r = \frac{c^2}{\mu(1 + e\cos\theta)}. \tag{1.19}$$

C'est précisément l'équation, en coordonnée polaire, d'une conique d'excentricité e ayant l'origine pour foyer. Cette conique est un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que, respectivement, $e = 0$, $0 < e < 1$, $e = 1$ ou $e > 1$.□

Remarques 3.

Soit $\mathcal{K}$ le domaine des vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^3_* \times \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{K} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3_* \times \mathbb{R}^3,\ \mathbf{x}.\mathbf{y} = 0\right\},$$

soit l'application $J : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$ définie par $J(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\mathbf{c}, \mathbf{e})$. Pour tout point $(\tau, \rho) \in \mathbb{K}$ il existe une unique orbite $O \subset \mathcal{C}$ telle que pour tout point $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in O$, $J(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\tau, \rho)$.

La variété $\mathcal{C} \subset T\mathbb{R}^3_*$ est feuilletée par une famille de courbes qui se projètent selon des coniques non-dégénérées sur $\mathbb{R}^3_*$ et des cercles sur $\mathbb{R}^3$. Il n'est pas possible de choisir la conique et le cercle indépendamment l'un de l'autre. Plus précisément étant donnée une conique de $\mathbb{R}^3_*$, il existe deux cercles de vitesses admissibles, en effet la conique peut être parcourue dans deux sens distincts, deux sens de rotations qui correpsondent à des vecteurs moment cinétique opposés.

1.1.3 Les orbites képlériennes elliptiques

Définissons $\mathcal{C}_-$, l'ouvert de $T\mathbb{R}^3_*$ des orbites elliptiques non dégénérées,

$$\mathcal{C}_- = \left\{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3_* \times \mathbb{R}^3, \mathbf{c} \neq 0, H < 0\right\}. \tag{1.20}$$

Corollaire 4. *Sur $\mathcal{C}_-$ les orbites keplériennes sont compactes et les trajectoires périodiques*[2].

Pour les applications il est utile d'introduire un repère orthonormé $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ orienté selon une direction particulière. Par exemple l'astre central, un solide, admet généralement une dynamique propre et il peut-être intéressant alors de choisir son axe de précession comme direction privilégiée. Soit (c_x, c_y, c_z) les coordonnées du vecteur moment cinétique $\mathbf{c}$ dans ce repère. On définit le vecteur $(h_x, h_y) = (\frac{-c_y}{c+c_z}, \frac{c_x}{c+c_z})$. On définit le vecteur (e_x, e_y) comme l'image du vecteur excentricité $\mathbf{e}$ dans le plan $\mathbf{XY}$ par la rotation définie par le vecteur $\frac{\mathbf{c}}{c} \times \mathbf{Z}$ qui envoie $\mathbf{c}$ sur $\mathbf{Z}$. Ce changement de variable devient singulier pour les orbites dégénérées.

Soient

$$\mathcal{Z} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathcal{C}_-,\, \mathbf{c} \times \mathbf{Z} = 0, \mathbf{c}.\mathbf{Z} < 0\}\,, \tag{1.21}$$

$$\mathbb{E} = \{(c, (e_x, e_y), (h_x, h_y)) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}\}, \tag{1.22}$$

avec $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| < 1\}$. L'application $J : \mathcal{C}_- \setminus \mathcal{Z} \to \mathbb{E} \times [0, 2\pi[$ définie par $J(r, v) = (c, e_x, e_y, h_x, h_y, L)$ est un difféomorphisme.

Il est possible de paramétrer la famille d'orbite $\mathcal{C}_-$, avec d'autres intégrales premières. Ainsi, pour les orbites elliptiques non circulaires n'appartenant pas au plan équatorial XY, on utilise classiquement les coordonnées $(a, e, i, \Omega, \omega, \nu)$ (voir [18] page 186) ;

- Le demi-grand axe ($a = c^2/\mu\sqrt{1-e^2}$),
- L'excentricité ($e^2 = e_x^2 + e_y^2$),
- L'inclinaison i (l'angle de la rotation qui envoie $\mathbf{c}$ sur Z),
- L'ascension droite Ω (l'angle entre le vecteur X et le nœud ascendant),
- L'argument du péricentre ω (l'angle entre le nœud ascendant et le périgée),
- L'anomalie vraie ($\nu = \theta$), ($L = \Omega + \omega + \nu$).

Notons que $h_x = 2\cos\Omega \tan i/2$ et $h_y = 2\sin\Omega \tan i/2$.

Remarque 5. Etant donné I un jeu d'intégrales premières indépendantes paramétrant un sous-domaine des orbites elliptiques $\mathcal{C}_-$ il est tentant de vouloir mesurer la distance entre les orbites par une distance sur $\mathbb{R}^5$. A toute matrice Q définie positive on peut associer une distance entre les orbites elliptiques du domaine $\mathcal{C}_-$,

$$d_Q(I^0, I^1) = (I^0 - I^1)^T Q (I^0 - I^1)\,,$$

qui dépend de Q et des coordonnées choisies. Dans le chapitre 4 on montre comment à partir de chacune de ces distances on peut construire un contrôle en boucle fermée stabilisant localement une orbite cible.

[2] Toutes les solutions du problème à deux corps d'énergie négative et de moment cinétique non nul sont périodiques. Parmis les potentiels en r^α, cette propriété n'est partagé que par le mouvement élastique $\alpha = 2$. Pour toutes les valeur de $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ les trajectoires peuvent être animées d'un mouvement de précession, elles sont périodiques ou quasi-périodiques selon les valeurs de l'énergie. Notons d'autre part que cette propriété n'est pas conservée pour les petites variations du champs de dérive f_0, même quand la variation est une perturbation hamiltonienne, seule une infime partie des orbites périodiques sont transformées en orbites périodiques [39].

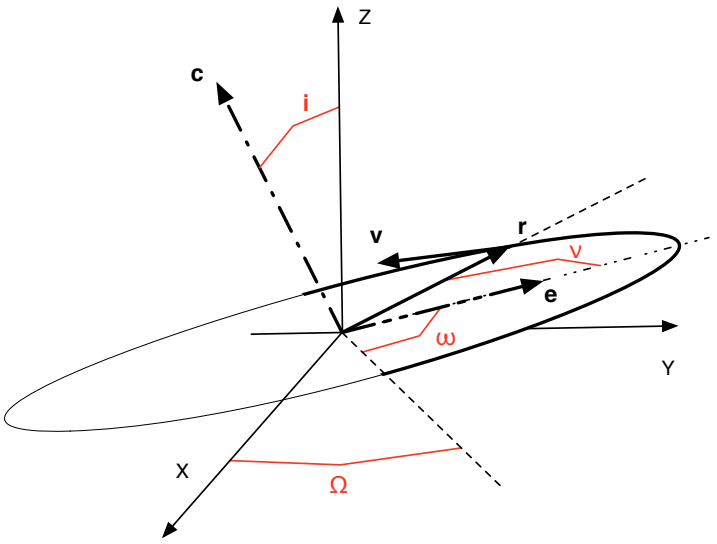


FIG. 1.1 – Coordonnées cartésiennes et coordonnées de Gauss

1.2 Le système à deux corps contrôlé

Dans cette section nous présentons le problème de Kepler contrôlé en coordonnées cartésiennes et coordonnées orbitales.

1.2.1 Le choix des coordonnées

Nous appelons système à deux corps contrôlé le système constitué d'un satellite soumis à la force gravitationnelle d'un astre central et équipé d'une fusée ; le modèle d'un tel satellite s'obtient en ajoutant une force de contrôle $\mathbf{u}$ aux équations (1.1),

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{r}} & = & \mathbf{v}\,, \\ \dot{\mathbf{v}} & = & -\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{\mathbf{u}}{m}\,. \end{array} \right. \tag{1.23}$$

Chaque moteur présente des limitations intrinsèques à sa conception technique. En particulier la force de contrôle est bornée, on appelle ε le module maximal de la force de poussée,

$$\|\mathbf{u}\| \leq \varepsilon. \tag{1.24}$$

Notons que si le mouvement Keplerien (1.1) est indépendant de la masse du satellite m, le système à deux corps contrôlé en dépend. Ces moteurs sont régis par le principe de la conservation du mouvement. Ainsi, la masse du satellite décroît quand le moteur est allumé et pour obtenir une modélisation précise du système de Kepler contrôlé il est nécessaire d'inclure aux équations (1.1) et

(1.24) la dynamique de la masse,

$$\dot{m} = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{g_0 I_{sp}} \tag{1.25}$$

avec g_0 l'accélération de la pesanteur à l'équateur et I_{sp} l'impulsion spécifique du moteur. La quantité $\frac{\epsilon}{g_0 I_{sp}}$ est le débit massique maximal de notre moteur, ainsi, plus l'impulsion spécifique du moteur est grande, plus le moteur est efficace, éjecte la matière à une vitesse élevée, consomme moins de masse pour accélérer. Pour résumer donnons les équations du système à deux corps contrôlé associées à la borne ϵ,

$$K_\epsilon \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{r}} & = & \mathbf{v}\,, \\ \dot{\mathbf{v}} & = & -\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{\mathbf{u}}{m}\,, \end{array} \right. \qquad \dot{m} = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{g_0 I_{sp}}, \quad \|\mathbf{u}\| \leq \epsilon. \tag{1.26}$$

Le système à deux corps contrôlé évolue comme le système à deux corps lorsque le contrôle u est nul. Ainsi, quand le contrôle u est petit, les solutions du système à deux corps contrôlé sont proches des solutions du mouvement keplerien. En particulier la dynamique des intégrales premières est lente quand le contrôle est petit,

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{u}}{m}\,, \tag{1.27}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{c}}{m\mu} + \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{c}}}{\mu} \tag{1.28}$$

Soit (ξ, η, ζ) une base ortho normée, soient (u_ξ, u_η, u_ζ) les composantes dans cette base du vecteur de contrôle, soit (f_ξ, f_η, f_ζ) les champs de vecteurs de contrôles associés à cette base ; le système (1.26) s'écrit de manière synthétique sous la forme suivante

$$\frac{dq}{dt} = f_0 + \frac{u_\xi}{m} f_\xi + \frac{u_\eta}{m} f_\eta + \frac{u_\zeta}{m} f_\zeta. \tag{1.29}$$

Le champ de vecteur f_0, appelé *dérive*, correspond au champs de vecteur du mouvement keplerien. Dans la base XYZ associée à l'astre central, la dérive f_0 est définie par l'équation (1.2) et les champs de vecteurs de contrôle

$$f_i = \frac{\partial}{\partial v_i},\ i \in \{X, Y, Z\}. \tag{1.30}$$

Si nous choisissons de travailler avec les intégrales premières (c, e_x, e_y, h_x, h_y) et la longitude cumulée L, que nous décomposons le contrôle u dans le repère QSW associé au satellite, où Q désigne la direction radiale, S la direction orthoradiale dans le plan orbital et W la direction normale au plan orbital (voir

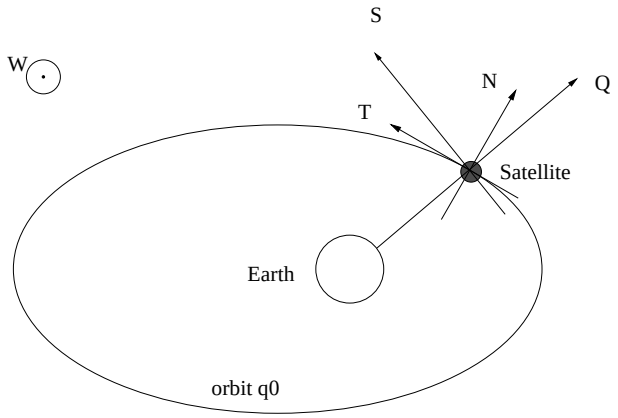


FIG. 1.2 – Les repères othonormés QSW et NTW

la figure 1.2), alors

$$f_0 = \frac{\mu^2 Z^2}{c^3}\frac{\partial}{\partial L}, \tag{1.31}$$

$$f_S = \frac{c^2}{\mu Z}\frac{\partial}{\partial c} + \frac{cA}{\mu Z}\frac{\partial}{\partial e_x} + \frac{cB}{\mu Z}\frac{\partial}{\partial e_y}, \tag{1.32}$$

$$f_Q = \frac{c}{\mu}\sin L\frac{\partial}{\partial e_x} - \frac{c}{\mu}\cos L\frac{\partial}{\partial e_y}, \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned} f_W = & -\frac{cY}{\mu Z}e_y\frac{\partial}{\partial e_x} + \frac{cY}{\mu Z}e_x\frac{\partial}{\partial e_y} \\ & + \frac{cX}{2\mu Z}\cos L\frac{\partial}{\partial h_x} + \frac{cX}{2\mu Z}\sin L\frac{\partial}{\partial h_y} \\ & + \frac{cY}{\mu Z}\frac{\partial}{\partial L}, \end{aligned} \tag{1.34}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} Z & = & 1 + e_x\cos L + e_y\sin L\,, \\ A & = & e_x + (1+Z)\cos L\,, \\ B & = & e_y + (1+Z)\sin L\,, \\ X & = & 1 + h_x^2 + h_y^2\,, \\ Y & = & h_x\sin L - h_y\cos L\,. \end{array}\right.$$

Ces formules ont été établies d'abord pour traiter les perturbations d'orbite [18], ce n'est que plus tard avec l'apparition des moteurs à faible poussée que l'on s'est intéressé à ces équations en tant que système contrôlé [15].

1.2.2 Le sous-système plan

Avec le contrôle u exprimé dans le repère tangentiel-normal TN, le système à deux corps contrôlé plan est défini dans le domaine des orbites elliptiques avec

les coordonnées

$$(a, e, \omega, \theta) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0, 1[\times[0, 2\pi] \times \mathbb{R}\,,$$

par les équations :

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{dt} \\ \frac{de}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} w(e,\nu) \end{pmatrix} + u_t \begin{pmatrix} 2\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\alpha_a(e,\nu) \\ 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\alpha_e(e,\nu) \\ 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\alpha_\omega(e,\nu) \\ 0 \end{pmatrix} + u_n \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{a}{\mu}}\beta_e(e,\nu) \\ \sqrt{\frac{a}{\mu}}\beta_\omega(e,\nu) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.35}$$

avec la longitude orbitale $\theta = \nu + \omega$ et la contrainte $\|u\| \leq \epsilon$.

Les fonctions α_i, β_i et w dépendent uniquement des variables e et ν et sont 2π-périodiques par rapport à ν.

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \frac{\sqrt{1+2e\cos\nu+e^2}}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \alpha_e &= \frac{\sqrt{1-e^2}(e+\cos\nu)}{\sqrt{1+2e\cos\nu+e^2}}, \\ \alpha_\omega &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\sin\nu}{\sqrt{1+2e\cos\nu+e^2}}, \end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} \beta_e &= -\frac{(1-e^2)^{3/2}\sin\nu}{(1+e\cos\nu)\sqrt{1+2e\cos\nu+e^2}}, \\ \beta_\omega &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{2e+(1+e^2)\cos\nu}{(1+e\cos\nu)\sqrt{1+2e\cos\nu+e^2}}, \end{aligned} \tag{1.37}$$

et

$$w = \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}. \tag{1.38}$$

1.3 Contrôlabilité

Dans cette section nous présentons quelques notions de contrôlabilité. Outre la contrôlabilité globale et les ensembles accessibles, nous définissons les notions de transfert et de rendez-vous ainsi que la notion de contrôlabilité inconditionnelle. Ces notions de contrôlabilité se focalisent sur les orbites de la dérive au lieu des points de l'espace des phases. La notion de contrôlabilité inconditionnelle souligne qu'une propriété ne dépend pas du module maximal du contrôle. Puis, nous nous intéressons aux propriétés de contrôlabilité satisfaites par le système à deux corps contrôlé, à masse constante puis à masse variable.

1.3.1 Transfert et rendez-vous

Avant de définir les notions de transfert et de rendez-vous rappelons quelques définitions essentielles associées à un système contrôlé (voir [26] et [30]).

Soit un système contrôlé,

$$\dot{q} = f(q,u), \quad q \in M, \quad , u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{1.39}$$

avec M une variété différentielle lisse.On suppose que le membre de droite satisfait aux hypothèses suivantes :

- Pour chaque point $u \in U$, l'application $q \mapsto f(q,u)$ est un champ de vecteurs réguliers.
- L'application $(q,u) \mapsto f(q,u)$ est continue sur $M \times \overline{U}$.
- Dans des coordonnées locales sur M, l'application $(q,u) \mapsto \frac{\partial f}{\partial q}(q,u)$ est continue sur $M \times \overline{U}$.

Les *contrôles admissibles* sont les applications mesurables localement bornées, $u(.) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, U)$. En substituant un tel contrôle $u = u(t)$ dans le système (1.39), on obtient une équation différentielle non autonome $\dot{q} = f(q, u(t))$. Le théorème de Carathéodory implique que pour chaque point $q_0 \in M$ le problème de Cauchy

$$\dot{q} = f(q,u(t)), \quad q(t_0) = q_0,$$

admet une unique solution. On notera par $q_0 \exp \int_{t_0}^{t} f_u$, ou plus brièvement par $q_u(t)$, cette solution.

Définition 6 (Ensembles accessibles)**.** L'ensemble accessible du système (1.39) au temps t à partir de $q_0 \in M$ est défini par

$$\mathcal{A}_{q_0}(t) = \left\{ q_u(t) \,|\, u \in L^1_{\text{loc}}([0,t], U) \right\}.$$

De la même façon on définit l'ensemble accessible pour les temps inférieurs à t

$$\mathcal{A}^t_{q_0} = \bigcup_{0 \leq \tau \leq t} \mathcal{A}_{q_0}(\tau).$$

et pour tous les temps positifs

$$\mathcal{A}_{q_0} = \bigcup_{0 \leq \tau} \mathcal{A}_{q_0}(\tau).$$

Définition 7. Le système S est globalement contrôlable si et seulement si $\forall q_0 \in M$, $\mathcal{A}_{q_0} = M$.

C'est-à-dire que pour chaque couple $(q_0, q_1) \in M^2$, il existe un contrôle admissible tel que la solution du système (1.39) $q_u : [0,T] \to M$ relie ces deux points, $q(0) = q_0$ et $q(T) = q_1$.

Contrôlabilité en rendez-vous

Supposons que $0 \in U$, on appelle dérive le champ de vecteur à contrôle nul,

$$f_0 = f(.,0). \tag{1.40}$$

Une notion de contrôlabilité qui se focalise sur les orbites de la dérive plutôt que sur les points de M est introduite par les définitions suivantes.

Définition 8. Soit q_0 et q_1 deux points de M,

1. Un *transfert à partir de* q_0 *vers* q_1 est une trajectoire admissible qui relie le point q_0 à l'orbite de la dérive associée à q_1, $O_{q_1} = \{e^{tf_0}(q_1),\, t \in \mathbb{R}\}$.
2. Un *rendez-vous à partir de* q_0 *vers* q_1 est une trajectoire admissible $q_u(t)$ initialisée en q_0 telle qu'il existe un instant $T \geq 0$, $q_u(T) = e^{Tf_0}(q_1)$.

Le rendez-vous est un transfert synchronisé avec la solution de la dérive initialisée à q_1. Considérons l'exemple d'un bateau sans inertie équipé d'un moteur trop faible pour remonter le courant,

$$\dot{q} = 1 + u, \quad |u| \leq 1/2, \quad q \in \mathbb{R}. \tag{1.41}$$

La dérive du système (1.41) n'admet qu'une orbite $\mathbb{R}$, ainsi toutes les lois de contrôle admissibles réalisent le transfert. Par contre supposons que notre bateau démarre à 0 et veuille rejoindre un radeau à la dérive situé à l'instant initial à une distance 1, il faudra en poussant au maximum un temps 2 pour rejoindre le radeau.

Définition 9. Le système (1.39) est contrôlable en rendez-vous si pour chaque couple $(q_0, q_1) \in M^2$, il existe un *rendez-vous*.

La contrôlabilité en rendez-vous n'implique pas la contrôlabilité complète. Un contre exemple est donné par le système (1.41). De même, la contrôlabilité complète n'implique pas la contrôlabilité en rendez-vous. Un contre-exemple est donné par le système constitué d'un point tournant à vitesse constante sur un cercle,

$$\dot{q} = 1, \quad q \in \mathbb{S}. \tag{1.42}$$

Le point atteint tous les points du cercles en un temps fini mais ne peut jamais en rattraper un autre, tournant à la même vitesse que lui.

Contrôlabilité inconditionnelle

Considérons une famille de systèmes indexée par $\epsilon > 0$,

$$S_\epsilon : \quad \dot{q} = f(q,u), \quad \|u\| \leq \epsilon$$

où l'état du système q appartient à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et le contrôle u appartient à la boule dans $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine, de rayon ϵ, B^n_ϵ.

Définition 10. La famille de systèmes $\{S_\epsilon\}_\epsilon$ est inconditionnellement globalement contrôlable (IGC) si pour tout ϵ positif, le système S_ϵ est complètement contrôlable.

Cette notion caractérise les systèmes dont la contrôlabilité ne dépend pas de la "force" disponible. Ce phénomène conduit à la notion de contrôlabilité en rendez-vous inconditionnelle, analogue à la notion correspondante de contrôlabilité complète inconditionnelle introduite par Y.Chitour et M. Sigalotti.

Définition 11. La famille de systèmes $\{S_\epsilon\}_\epsilon$ est inconditionnellement rendez-vous contrôlable (IRVC) si pour tout ϵ positif, le système S_ϵ est contrôlable en rendez-vous.

1.3.2 Sur le domaine des orbites non-dégénérées

Une condition nécessaire pour la contrôlabilité d'un système affine sur une variété différentielle est que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteur de ce système soit de dimension pleine en chaque point de la variété. La condition de Rachevsky-Chow correspond à la généralisation aux systèmes non linéaires de la condition de contrôlabilité de Kalman pour les systèmes linéaires.

De bref calculs montrent que les champs de vecteur du système K_ϵ en coordonnées cartésiennes sont de rang plein pour chaque point $q \in T\mathbb{R}^3_*$,

$$\dim\ \{f_X, f_Y, [f_X, f_0], [f_Z, f_0]\} = 4\,, \tag{1.43}$$

et

$$\dim\ \{f_X, f_Y, f_Z, [f_X, f_0], [f_Z, f_0], [f_Z, f_0]\} = 6\,. \tag{1.44}$$

Comme le rang d'une algèbre de Lie ne dépend pas du choix de coordonnées le système K_ϵ est totalement non-holonome. Par ailleurs le flot de dérive, étant périodique, est récurrent, stable au sens de Poisson, sur le domaine $\mathcal{C}_-$ des orbites elliptiques non dégénérées. J.-B. Caillau, dans son mémoire de thèse [16], remarque que le théorème 5 du chapitre 4 de [30], implique la contrôlabilité complète de (K_ϵ) restreint à $\mathcal{C}_-$. La famille de système $\{K_\epsilon\}_\epsilon$ est inconditionnellement complètement contrôlable. L'égalité (1.44) est une condition d'accessibilité forte, elle implique que pour chaque $q_0 \in T\mathbb{R}^3_*$ l'ensemble accessible $\mathcal{A}^t_{q_0}$ contient un ouvert de $T\mathbb{R}^3_*$ pour tout $t > 0$.

Remarquons que sur $\mathcal{C}$ le champ de dérive est complet, c'est à dire que le flot keplerien est défini pour tous les temps $t \in \mathbb{R}$. C'est une condition nécessaire pour être IRVC.

Proposition 12 ([13])**.** *Le système de Kepler contrôlé $\epsilon \mapsto K_\epsilon$ sur $\mathcal{C}_-$ est IRVC.*

Démonstration: Soit q_0 et q_1 dans $\mathcal{C}_-$. Soit τ_1 la période de l'orbite q_1. On étend les champs f_0, f_x, f_y et f_z du système (K_ϵ) définie sur $\mathcal{C}_-$ en des

champs de vecteurs X_0,X_x,X_y et X_z définie sur $\mathbb{S}^1 \times \mathcal{C}_-$ simplement par $X_0 = \frac{\partial}{\partial\theta} + f_0$ et $X_i = f_i$ pour $i \in \{x, y, z\}$. Comme l'égalité (1.44) est vérifiée en tout point de $\mathcal{C}_-$, l'algèbre de Lie engendrée par (X_0, X_x, X_y, X_z) est de rang plein dim Lie$(X_0, X_1, ..., X_m) = 7$. Comme X_0 est récurrent, le théorème 5 du chapitre 4 de [30] implique que le système étendu est complètement contrôlable. Ce résultat implique la contrôlabilité en rendez-vous du système K_ϵ sur $\mathcal{C}_-$. □

Proposition 13 ([13]). *Pour tout $\epsilon > 0$, le système de Kepler contrôlé K_ϵ sur $\mathcal{C}$ est complètement contrôlable.*

Démonstration: Soit $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ et $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ dans $\mathcal{C}$. Nous voulons montrer qu'il existe une trajectoire admissible $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) : [0, T] \to \mathcal{C}$ telle que $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(0) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ et $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(T) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$.

Commençons par le cas où $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \in \mathcal{C}_-$. Comme le système (K_ϵ) est complètement contrôlable sur $\mathcal{C}_-$, il suffit de montrer qu'il existe une trajectoire admissible $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) : [0, T] \to \Omega$ telle que $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(0) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ et $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(T) \in \mathcal{C}_-$.

L'idée est d'appliquer le contrôle en boucle fermée

$$u = -\epsilon \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \tag{1.45}$$

pour lequel on a les égalités suivantes :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{v})(t) = -\epsilon \frac{\mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{v})(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \tag{1.46}$$

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{r}, \mathbf{v})(t) = -\epsilon\|\mathbf{v}(t)\|, \tag{1.47}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}H(\mathbf{r}, \mathbf{v})(t) = -\epsilon \frac{\mathbf{v}(t).\dot{\mathbf{v}}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \tag{1.48}$$

$$= \epsilon \frac{\mathbf{r}(t).\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3\|\mathbf{v}(t)\|} - \epsilon^2. \tag{1.49}$$

Appelons $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(.)$ la trajectoire dans $\mathcal{C}$ associée au contrôle (1.45) et telle que $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(.) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. Soit $[0, T)$ le plus large intervalle de définition de $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(.)$, $T \in (0, +\infty]$.

Si T est fini alors $\mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{v})(t)$ tend vers 0 quand t tend vers T parce que $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(.)$ ne peut pas exploser en temps fini. L'équation (1.46) implique que $\mathbf{v}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers T. Donc, pour les temps assez proches de T, $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(t)$ appartient à $\mathcal{C}_-$.

Pour le cas $T = +\infty$, raisonnons par contradiction et supposons que $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(t)$ n'appartienne jamais à $\mathcal{C}_-$, $H \geq 0$. Comme $\dot{H} \leq 0$ (1.47), H admet une limite positive quand t tends vers l'infini. Donc $\liminf_{t\to+\infty} \|\mathbf{v}(t)\| = 0$. Mais si $\|\mathbf{v}(t)\| \ll \epsilon$ alors $H \ll \epsilon$, $1/\|\mathbf{r}\| \ll \epsilon$ et $\frac{d^2}{dt^2}H \ - \epsilon^2$, en contradiction avec le fait que H est décroissante et admet une limite finie positive.

Enfin remarquons que si $t \mapsto (\mathbf{r}, \mathbf{v})(t)$ est une trajectoire admissible de (K_ϵ) alors la trajectoire $t \mapsto (\mathbf{r}, \mathbf{v})(-t)$ est aussi une trajectoire admissible. Ainsi

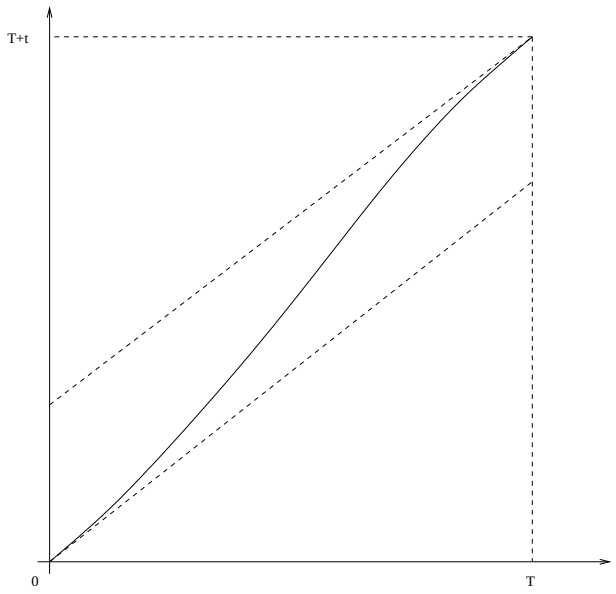


FIG. 1.3 – Un exemple de fonction λ satisfaisant les équations (1.52) et(1.53)

en renversant le temps dans l'argumentation précédente nous concluons que le système de Kepler contrôlé (K_ϵ) est contrôlable de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_-$ et donc en fixant un point intermédiaire dans $\mathcal{C}_-$, globalement contrôlable dans $\mathcal{C}$. □

Proposition 14 ([13])**.** *Pour tout $\epsilon > 0$, le système de Kepler contrôlé K_ϵ sur $\mathcal{C}$ est contrôlable en rendez-vous, IRVC.*

Démonstration: Soit $\epsilon > 0, t > 0$ et $q_0, q_1 \in \mathcal{C}$, nous allons montrer que pour T assez grand, il existe une trajectoire $q : [0, T] \to \mathcal{C}$ qui réalise le rendez-vous,

$$q(0) = q_0 \,, \tag{1.50}$$
$$q(T) = q_1 e^{(T+t)f_0} \,. \tag{1.51}$$

Si $q_1 \in \mathcal{C}_-$, la propriété 12 implique l'existence d'une telle trajectoire. Considérons le cas d'une orbite hyperbolique ou parabolique, soit $q_1 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_-$, sur de telles orbites la composante de la dérive (1.31) sur $\mathbf{v}$, $\psi = -\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, tend vers 0 quand le rayon tend vers l'infini. Donc pour tout $q_0 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_-$ il existe $c_1 > 0$, $\|\psi(q_0 e^{\tau f_0})\| \leq c_1$ pour tout temps τ positif.

Soit $\delta > 0$, on peut choisir $T > 0$ et une fonction $\lambda \in C^\infty([0, T+t])$ tels que

$$\begin{array}{ll} \lambda(0) = 0 \,, & \dot\lambda(0) = 1 \,, \\ \lambda(T+t) = t \,, & \dot\lambda(T+t) = 1 \,, \end{array} \tag{1.52}$$

$$\begin{array}{ll} \forall \tau \in [0, T+t] \,, & |\dot\lambda(\tau) - 1| \leq \delta \,, \\ \forall \tau \in [0, T+t] \,, & |\ddot\lambda(\tau)| \leq \delta \,, \end{array} \tag{1.53}$$

Soit $(\mathbf{r}, \mathbf{v})(.)$ la solution $q_0 e^{\tau f_0}$ du système à deux corps contrôlé dans les coordonnées cartésiennes

$$(\mathbf{r}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) = q_0 e^{\tau f_0},\ \tau \in [0, T+t]. \tag{1.54}$$

La trajectoire $\tilde{q}(\tau) = (r(\tau), \dot{\lambda}(\tau) v(\lambda(\tau))$ est une solution du problème à deux corps contrôlé.

En effet,

$$\dot{\tilde{q}} = (\dot{\lambda} v(\lambda)), \ddot{\lambda} v(\lambda) + \dot{\lambda}^2 \psi(\tilde{q}), \tag{1.55}$$

de plus, soit $c_2 = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|v\|$, alors

$$\begin{array}{rcl} \|\psi(\tilde{q})(1-\dot{\lambda}^2) - \ddot{\lambda} v(\lambda)\| & \leq & c_1 |1+\dot{\lambda}||1-\dot{\lambda}| + c_2 |\ddot{\lambda}|, \\ & \leq & (c_1(2+\delta) + c_2)\delta, \end{array} \tag{1.56}$$

et donc pour δ assez petit,

$$\|\psi(\tilde{q})(1-\dot{\lambda}^2) - \ddot{\lambda} v(\lambda))\| \leq \varepsilon\,. \tag{1.57}$$

Par construction cette trajectoire admissible réalise le rendez-vous,

$$\tilde{q}(0) = q_0\,, \tag{1.58}$$

$$\tilde{q}(T) = q_1 e^{(T+t) f_0}\,. \tag{1.59}$$

□

1.3.3 Masse variable

Les démonstrations précédentes ont été effectuées à masse constante. La contrôlabilité à masse constante implique la contrôlabilité à masse variable [16].

Proposition 15 ([16])**.** *S'il existe un chemin accessible qui relie q_0 à q_1 à masse constante, alors pour toute masse initiale $m_0 > 0$ il existe un chemin admissible qui relie ces deux points à masse variable.*

Démonstration: En effet considérons l'accélération de contrôle Γ à la place de la force de contrôle u.

$$\Gamma = \frac{u}{m}. \tag{1.60}$$

Soit $\overline{\Gamma}$ un contrôle en accélération admissible qui conduit le satellite d'une position q_0 à une position q_1 en un temps T.

$$\|\Gamma\| \leq \frac{\epsilon}{m_0}, \tag{1.61}$$

Alors en considérant le facteur $\overline{m}$

$$\overline{m} = m_0 \exp\left(-\frac{1}{g_0 I_{sp}} \int_0^t \|\overline{\Gamma}(s)\| ds\right). \tag{1.62}$$

et le contrôle en poussée

$$u(t) = \overline{m}(t)\overline{\Gamma}(t) \tag{1.63}$$

en masse variable, la masse du satellite

$$\begin{aligned} m(t) &= \overline{m}(t), && (1.64)\\ \|u\| &\leq \epsilon, && (1.65)\\ \frac{u(t)}{m(t)} &= \Gamma(t). && (1.66) \end{aligned}$$

Le contrôle u est donc un contrôle admissible qui conduit le satellite de q_0 à q_1, pour le système à masse variable ayant pour masse initiale m_0. □

1.4 Les systèmes de Kepler contrôlés

Par la suite notre étude se focalise essentiellement sur le système de Kepler contrôlé dans le domaine $\mathcal{C}_-$ des orbites kepleriennes elliptiques non-dégénérées. Il est souvent plus simple d'étudier un système générique d'une certaine classe qu'un système particulier écrit dans un jeu de coordonnées précis. On introduit maintenant la classe des *systèmes de Kepler contrôlés* dont l'état (I, θ, m) est de dimension $n + 2$ et le contrôle u de dimension l. Cette classe de systèmes généralise le système à deux corps contrôlé (1.29) (1.31) sur le domaine des orbites elliptiques en conservant la propriété si caractéristique et si singulière que toutes les solutions de la dérive soient périodiques.

Définition 16. Soit $\sigma > 0$ et $(I, \theta, m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$, un système de Kepler contrôlé est de la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{I} &= F(I,\theta)\, u/m\,, \\ \dot{\theta} &= w(I,\theta) + g(I,\theta)\, u/m\,, \qquad u \in B_\varepsilon^l\,. \\ \dot{m} &= -\sigma\, \|u\|\,, \end{aligned} \tag{1.67}$$

où $F(I,\theta)\, u = \sum_{i=1}^{l} u_i f_i(I,\theta)$ et $g(I,\theta)\, u = \sum_{i=1}^{l} u_i g_i(I,\theta)$ avec f_i et g_i des champs de vecteurs réguliers, dans $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, et 2π-périodique par rapport à la variable θ. On suppose que la fréquence w est strictement positive sur $\mathbb{K} \times [0, 2\pi]$, avec $\mathbb{K}$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Cette hypothèse implique que θ est strictement croissant pour les petits modules maximales de poussée ε.

Les équations (1.67) définissent une abstraction du système à deux corps contrôlé (1.29) ainsi que du cas plan (1.35). En effet, les champs de vecteurs (1.31), (1.32), (1.33) et (1.34) constituent sur $\mathcal{C}_- \setminus \mathcal{Z}$ un système de la forme (1.67) avec $n = 5$, $m = 3$, $I = (c, e_x, e_y, h_x, h_y)$, $\theta = L$ et $\sigma = 1/(g_0\, I_{sp})$ (voir la section 1.1.3).

1.4.1 Changement d'échelle de temps

Le changement de variables

$$\begin{aligned} \theta &= \phi/\varepsilon\,, \\ u &= \varepsilon\, v\,, \\ t &= \tau/\varepsilon\,, \end{aligned} \tag{1.68}$$

transforme le système (1.67) en

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= F(I,\phi/\varepsilon)\, v/m\,, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= w(I,\phi/\varepsilon) + \varepsilon\, g(I,\phi/\varepsilon) v/m\,, \qquad v \in B_1\,. \\ \frac{dm}{d\tau} &= -\sigma\|v\|\,, \end{aligned} \tag{1.69}$$

Ainsi l'inverse du module maximum de poussée ε peut-être interprété comme une fréquence, une fréquence qui devient infinie quand ε tend vers 0.

Pour comprendre le comportement du système à masse variable (1.69) il peut-être utile de considérer le système avec la variation de masse maximale,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= F\, v\,, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= w + \varepsilon\, g\, v\,, \quad v \in \frac{B_1^m}{m}\,. \\ \frac{dm}{d\tau} &= -\sigma\,, \end{aligned} \tag{1.70}$$

Remarquons que ce système n'est défini que sur l'intervalle des temps $[0, 1/\sigma[$.

1.4.2 Choix de la variable libre, temps ou longitude ?

Naturellement on désire exploiter la remarque précédente, exclure le mouvement rapide et s'intéresser au mouvement lent. Pour cela il nous semble plus aisé de changer la variable libre en inversant le temps τ et l'angle ϕ. On obtient alors des systèmes contrôlés dépendant linéairement des contrôles avec des champs de vecteurs périodiques par rapport à la variable libre de fréquence inversement proportionnelle à ε,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\phi} &= \frac{F\, v}{w + \varepsilon\, g\, v}\,, \\ \frac{d\tau}{d\phi} &= \frac{1}{w + \varepsilon\, g\, v}\,, \qquad v \in B_1/m\,. \\ \frac{dm}{d\phi} &= -\frac{\sigma\, \|v\|}{w + \varepsilon\, g\, v}\,, \end{aligned} \tag{1.71}$$

Au chapitre 3 nous construisons un système contrôlé moyen, le système limite de ces systèmes originaux, quand le module maximal de poussée tend vers zéro.

Pour comprendre le comportement du système à masse variable (1.71) nous considérerons le système limite des systèmes à masse constante m_0,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\phi} &= \frac{F\,v}{w+\varepsilon\,g\,v}\,, \\ \frac{d\tau}{d\phi} &= \frac{1}{w+\varepsilon\,g\,v}\,, \\ v &\in \frac{B_1^m}{m_0}\,, \end{aligned} \tag{1.72}$$

et nous utiliserons le systèmes avec variations de masse maximale (1.70), transformé par ce changement de variable en

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\phi} &= \frac{F\,v}{w+\varepsilon\,g\,v}\,, \\ \frac{d\tau}{d\phi} &= \frac{1}{w+\varepsilon\,g\,v}\,, \qquad v \in B_1/m\,. \\ \frac{dm}{d\phi} &= -\frac{\sigma}{w+\varepsilon\,g\,v}\,, \end{aligned} \tag{1.73}$$

1.4.3 Contrôlabilité

Considérons un système affine aux champs de vecteurs autonomes,

$$\dot{q} = f_0(q) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(q)\,, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.74}$$

Soit $\overline{q}(t)$ une trajectoire de la dérive f_0. Le système linéarisé le long de $\overline{q}$ est le système contrôlé linéaire dépendant du temps ayant pour état $z \in T_{\overline{q}(t)}M$ et pour contrôle u,

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u \tag{1.75}$$

avec

$$A(t) = \frac{\partial f_0}{\partial q}(\overline{q}(t)) \tag{1.76}$$

$$B(t)u = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\overline{q}(t)) \tag{1.77}$$

Proposition 17 (théorème 1 p. 57 dans [47])**.** *Soit u un contrôle admissible défini sur $[0,T]$, et soit la trajectoire $q_{u,\delta}$ la solution de (1.74) associée au contrôle u et initialisée à $q_{u,\delta}(0) = q_0 + \delta$. Alors*

$$q_{u,\delta}(t) = \overline{q}(t) + z_{u,\delta}(t) + o(\|u\|, \|\delta\|) \tag{1.78}$$

où $z_{u,\delta}$ est la solution du système linéraire non-autonome (1.75) associée au contrôle u et initialisé à $z_{u,\delta}(0) = \delta$.

On définit $a \subset T_qM$, la famille de vecteurs

$$a = \text{ Span } \left\{(\text{ad } f_0)^k f_i(q),\, k \geq 0,\, i \in [0,m]\right\}. \tag{1.79}$$

avec les notations usuelles $(\text{ad } f_0)^0 f_i = f_i$ et $(\text{ad } f_0)^k f_i = [f_0, (\text{ad } f_0)^{k-1} f_i]$. Un calcul montre que [3]

$$a = \text{ Span } \left\{ \left(\left(\frac{d}{dt} - A(t) \right)^i B(t) \right)_{t=0} u,\, u \in \mathbb{R}^m, i \geq 0 \right\}. \tag{1.80}$$

Proposition 18. *Si* $\dim a = n$ *alors l'ensemble accessible est d'interieur non-vide et* $q(t)$ *appartient à l'interieur de* $\mathcal{A}_{q_0}(t)$ *pour tout* $t > 0$.

Il est important de remarquer que les systèmes de Kepler contrôlé sont des systèmes affines très particuliers pour lesquels la dérive est simplement égale au champ de vecteur constant $f_0 = \frac{\partial}{\partial \phi}$. Pour de tels systèmes l'équation (1.79) est équivalente à

$$a = \text{ Span } \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} F(I,\theta),\, k \in \mathbb{N}. \right\} \tag{1.81}$$

Nous supposons que l'hypothèse de la proposition 18 est satisfaite,

$$\dim a = n\,. \tag{1.82}$$

Soient $I_0 \in \mathbb{R}^n$ et $m_0 > 0$, on dénote par

- $\mathfrak{A}^\tau_{I_0}$ la restriction à la composante I de $\mathcal{A}^\tau_{(I_0,0,m_0)}$ l'ensemble accessible du système (1.69),
- $\mathtt{A}^\tau_{I_0}$ la restriction à la composante I de $\mathcal{A}^\tau_{(I_0,0)}$ l'ensemble accessible du système (1.70),
- $\mathcal{A}^\phi_{I_0}$ la restriction à la composante I de l'ensemble accessible $\mathcal{A}^\phi_{(I_0,0,m_0)}$ du système à masse variable (1.71).

Proposition 19. *Quelques propriétés de ces ensembles accessibles*

1. *Des restrictions croissantes,*

$$\forall \tau_0, \tau_1, \quad 0 < \tau_0 < \tau_1, \quad \mathfrak{A}^{\tau_0}_{I_0} \subset \mathfrak{A}^{\tau_1}_{I_0}\,, \tag{1.83}$$

$$\forall \phi_0, \phi_1, \quad 0 < \phi_0 < \phi_1, \quad \mathcal{A}^{\phi_0}_{I_0} \subset \mathcal{A}^{\phi_1}_{I_0}\,. \tag{1.84}$$

2. *Pour tous les temps* $\tau \in [0, 1/\sigma[$, $\mathfrak{A}^\tau_{I_0} = \mathtt{A}^\tau_{I_0}$, *et si* $\tau > 0$, *il n'existe aucune longitude* ϕ *telle que* $\mathfrak{A}^\tau_{I_0} = \mathcal{A}^\phi_{I_0}$.
3. *Pour tout ensemble compact* $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$, *il existe* $\tau_{\mathbb{K}} < 1/\sigma$, *pour tout* $I_0 \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \subset \mathtt{A}^{\tau_{\mathbb{K}}}_{I_0}$.

[3] Le membre de droite de l'équation (1.80) est l'algèbre d'accessibilité forte évaluée à $t = 0$ pour le système linéaire (1.75).

Démonstration: Le contrôle constant égal à zéro implique pour tout $I \in \mathbb{R}^n$, $I \in \mathcal{A}_I^\phi$ pour tout $\phi > 0$, donc $\mathcal{A}_{I_0}^{\phi_0} \subset \mathcal{A}_{I_0}^{\phi_1}$, idem pour $\mathfrak{A}_{I_0}^\tau$. □

Lemme 20. *Pour tout $\rho_0 > 0$ il existe une constante $c_2 > 0$ tel que pour tout $\rho \leq \rho_0$,*

$$B_{c_1\,\rho} \subset \mathfrak{A}_{I_1}^{c_2\rho} \tag{1.85}$$

Démonstration: Cette propriété découle de la contrôlabilité du système linéarisé le long du contrôle nul, la trajectoire $I(t) = I_1$. Considérons l'application point final $Pf : L^1_{\rm loc}([0,1],U) \to \mathbb{R}^n$ qui à un contrôle u associe le point $I(1)$ de la trajectoire $I(t)$ solution de l'inclusion différentielle (3.11) initialisée à $I(0) = I_1$.

Cette application est continûment dérivable en $u = 0$ et sa dérivée est donnée par la solution du système linéarisé (voir le théorème 1 p. 57 dans [47]). Comme le système linéarisé est contrôlable, la différentielle est de rang plein. Le théorème du rang (voir le théorème 52 p 464 dans [47]), implique l'existence d'une application inverse continûment dérivable. Ainsi il existe un voisinage $\mathcal{V}_{I_1}$ du point I_1 et une application continuement différentiable $\Upsilon : \mathcal{V}_{I_1} \to L^1_{\rm loc}([0,1],U)$ telle que $\Upsilon(I_1) = 0$ et $Pf(\Upsilon(I)) = I$ pour tous points $I \in \mathcal{V}_{I_1}$.

La constante c_2 peut-être choisie égale à la constante de Lipschitz de Υ sur un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}_{I_1}$ de I_1 compact inclu dans $\mathcal{V}_{I_1}$ et la constante ρ_0 peut être choisi tel que $B_{c_1\,\rho_0}$ soit incluse dans le voisinage compact $\tilde{\mathcal{V}}^c_{I_1}$. □

Chapitre 2

Optimalité et stabilisation

Soit un système contrôlé, on distingue classiquement deux problématiques, les problèmes de contrôle optimal et les problèmes de stabilisation. Ces deux problématiques sont souvent considérées comme antagonistes, chacune conduisant à un type de loi de commande différent : la boucle ouverte, c'est à dire une fonction du temps pour le contrôle optimale, et la boucle fermée, une fonction de l'état pour la stabilisation. L'objet de ce chapitre est de faire un bref rappel des différentes notions et outils mathématiques associées à ces deux problématiques. Puis, nous considérons un cas simple qui illustre la corrélation possible entre optimalité et stabilisation pour les systèmes de Kepler contrôlés.

Soulignons, sans prétendre à une liste exhaustive, les recherches fructueuses conduites ces dernières années, qui ont contribué à améliorer la compréhension de la nature des transferts optimaux en poussée faible [28], [16], [29] et [14]. Par ailleurs il faut aussi mentionner les travaux de stabilisation concernant le système à deux corps contrôlé, stabilisation d'une orbite elliptique [23], [21] et stabilisation du mouvement keplerien [32].

Dans la section 2.1 nous présentons les problèmes de transferts optimaux dans un cadre général. Dans la section 2.2 nous présentons la notion de stabilité asymptotique pour un système périodique, et nous rappelons la propriété de robustesse qui lui est associée. Dans la section 2.3 nous présentons un problème simple qui présente de nombreuses similitudes avec les transferts orbitaux en poussée faible, le transfert en temps minimum pour l'oscillateur harmonique à petit contrôle

2.1 Contrôle optimal

Dans cette section nous présentons les problèmes de contrôle optimal dans un cadre plus générale que celui de Kepler.

2.1.1 Les problèmes optimaux

Soit un système contrôlé affine,

$$\dot{q} = f_0(q) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(q)\,, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m\,. \tag{2.1}$$

On suppose que le membre de droite satisfait aux hypothèses du système (1.39).

Soit $t_1 > 0$, pour chaque loi de commande $t \mapsto u(t)$ et trajectoire associée q_u définie sur $[0, t_1]$, on définit le coût,

$$J(u(.)) = \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t))\,\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

On suppose que l'intégrante φ satisfait aux mêmes hypothèses de régularité que f.

Par la suite on s'intéressera en particulier aux coûts suivants :

- Temps minimal : t_1 libre, $\varphi = 1$,
- Masse ou énergie : t_1 fixé, $\varphi = \|u\|$ ou $\varphi = \|u\|^2$,

avec l'ensemble des contrôles admissibles U valant simplement la boule de rayon ε centrée sur 0, $B_\varepsilon^m = \{u \in \mathbb{R}^m, \|u\| \leq \varepsilon\}$.

Définition 21 (Problème optimal)**.** Soit $q_0, q_1 \in M$ et $t_1 > 0$ le problème optimal, t_1 libre,

$$P : \qquad (2.1)\,, q(0) = q_0,\, q(t_1) = q_1, \min J. \tag{2.3}$$

consiste à chercher le minimum de la fonction coût J parmi l'ensemble des solutions $q(.)$ du système (2.1) reliant q_0 à q_1.

2.1.2 Trajectoires optimales

Une remarque fondamentale est que l'étude des trajectoires optimales est très liée à l'étude de l'ensemble accessible (voir la définition à la section 1.3) d'un système étendu, constitué du système (1.39) et du coût (2.2).

Soient $\hat{q} = (q, y)$ et $\hat{M} = M \times \mathbb{R}$, le système étendu est défini par

$$\dot{\hat{q}} = \hat{f}_u(\hat{q})\,, \qquad \hat{q} \in \hat{M},\, u \in U\,, \tag{2.4}$$

avec

$$\hat{f}_u = \begin{pmatrix} f_u(q) \\ \varphi(q, u) \end{pmatrix},$$

où φ est l'intégrante de la fonction coût J, voir (2.2). On dénote par $\hat{q}_u$ la solution du système étendu (2.4) associée à une loi de commande u et initialisée à

$$\hat{q}_u(0) = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 22 ([1]). *Soit $\tilde{u}$ une loi de commande admissible, si la trajectoire $q_{\tilde{u}}$ définie sur $[0,T]$ est une solution du problème optimal (2.3), alors la solution correspondante $\hat{q}_{\tilde{u}}(s)$ appartient pour tout $s \in [0,T]$ au bord de l'ensemble accessible du système contrôlé étendu :*

$$\hat{q}_{\tilde{u}}(\tau) \in \partial \hat{A}_{(I_0,0)}(\tau). \tag{2.5}$$

Ainsi l'étude des trajectoires optimales se ramène à l'étude du bord d'un ensemble accessible. Le théorème de Fillipov donne des conditions suffisantes pour l'existence d'une trajectoire optimale.

Théorème 23 (Fillipov, [1]). *Si l'ensemble des contrôles admissibles $U \subset \mathbb{R}^n$ est compact, s'il existe un compacte $\mathbb{K} \subset M$ tel que $f_u(q) = 0$ pour tout $q \notin \mathbb{K}$, si de plus l'ensemble des vitesses*

$$f_U(q) = \{f_u(q) \,|\, u \in U\} \subset T_qM, \qquad q \in M,$$

est convexe, alors les ensembles accessibles $\mathcal{A}_{q_0}(t)$ et $\mathcal{A}^t_{q_0}$ sont compacts pour tout $q_0 \in M$ et $t > 0$.

Remarque 24. Pour appliquer ce théorème il est souvent nécessaire de restreindre la dynamique à un compacte $\mathbb{K} \subset M$. On appelle *restriction à un compact* $\mathbb{K}$ la multiplication des champs de vecteurs par une fonction plateau régulière qui s'annulle à l'extérieur du compacte $\mathbb{K}$.

D'autre part le principe du maximum de Pontryagin caractérise les trajectoires appartenant au bord d'un ensemble accessible. Rappelons que la première version de ce théorème a été obtenu par L.S. Pontryagin et ses collaborateurs [42]. C'est un outil très efficace pour réduire la famille des trajectoires parmi lesquelles rechercher une trajectoire optimale.

Soit le pseudo hamiltonien[1] $h : T^*M \times U \to \mathbb{R}$ défini par

$$h(p,q,u) = \langle p, f(q,u) \rangle . \tag{2.6}$$

Théorème 25 ([1]). *Soit $\tilde{u}(.)$ un contrôle admissible tel que $\tilde{q}(.)$ soit la solution de (1.39) initialisée à q_0. Si*

$$\tilde{q}(t_1) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1),$$

alors il existe une courbe lipschitzienne $p(t)$ dans le fibré cotangent,

$$p(t) \in T^*_{\tilde{q}(t)}M,\ 0 \leq t \leq t_1,$$

[1] Si le maximum (2.10) est atteint pour un unique $u^*(p,q)$, alors la fonction $h^* = h((p,q),u^*(p,q))$ définit un flot hamiltonien sur la variété cotangente T^*M.

telle que

$$\begin{aligned} p(t) &\neq 0, && (2.7)\\ \dot{p} &= -\langle p.\frac{\partial f}{\partial q}(\tilde{q},\tilde{u})\rangle\,, && (2.8)\\ \dot{\tilde{q}} &= f(\tilde{q},\tilde{u})\,. && (2.9)\\ h_{\tilde{u}(t)}(\lambda) &= \max_{u\in U} h_u(\lambda). && (2.10) \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in [0, t_1]$.

2.1.3 Les problèmes de transferts optimaux

Pour l'industrie spatiale, étant donné une valeur de la poussée maximale ε, il est très intéressant de connaître le temps minimal nécessaire pour joindre deux orbites, ainsi qu'une loi de contrôle qui réalise le transfert optimal, une solution du problème,

$$P_T^\varepsilon : K_\varepsilon, q(0) = q_0, q(T) = q_1, \min T \tag{2.11}$$

Etant donnée deux orbites dans $\mathcal{C}_-$, l'existence d'une trajectoire optimale reste à ce jour un problème sans réponse. En effet il se pourrait que la "trajectoire optimale" passe par les chocs, les orbites dégénérées ou même par l'origine. Par contre, si on se restreint à un domaine compacte connexe par arc $\mathbb{K}$ de $\mathcal{C}_-$, strictement à l'intérieur de l'ensemble des orbites elliptiques, alors le théorème de Fillipov implique l'existence d'une trajectoire optimale solution du problème P_T^ε.

La connaissance du temps minimal permet de définir un autre problème important pour l'industrie spatiale, les transferts à temps final fixé maximisant la masse finale du satellite. Pour une durée de transfert plus grande que le temps minimal, les lois de l'économie donnent toute la priorité à une commande qui consomme le moins de carburant, c'est-à-dire qui maximise la masse final du satellite, en réalisant un transfert, dans le temps imparti, vers l'orbite cible, permettant ainsi de multiples économies, que ce soit pour prolonger la durée de vie du satellite à poste, ou de réduire le coût du lancement en réduisant sa masse initiale... La particularité essentielle des nouveaux moteurs fusée à faible poussée est que la constante ε est petite. Ainsi l'approximation par des commandes impulsionnelles nécessaire pour réaliser un transfert de Hohman (voir la section 7.4 "Optimal Guidance between Planetary Orbits" dans [36]) avec des moteurs à forte puissance n'est plus valide et il nécessaire de considérer des lois de commande dépendantes du temps.

Soit T_0^ε la solution du problème P_t^ε restreint à l'ensemble compact $\mathbb{K}$. Soit $T_1 \geq T_0$ un temps plus grand que le temps de transfert minimal. Comme la masse du satellite décroît proportionnellement à la norme euclidienne du contrôle, le problème de maximisation de la masse finale est équivalent au problème d'optimiser le coût

$$J_m = \int_0^{T_1} \|u\|\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.12}$$

On définit le problème de maximisation de la masse finale par les équations suivantes,

$$P_m^\varepsilon : K_\varepsilon, q(0) = q_0, q(T_1) = q_1, \min J_m \,. \tag{2.13}$$

L'étude des trajectoires optimales du problème de maximisation de la masse est rendu encore plus délicate que celle du temps minimum, car les extrémales solutions du principe du maximum présentent alors de nombreuses discontinuités. Il est donc plus difficile de trouver une approximation numérique d'une solution du problème P_m^ε qu'une au problème P_T^ε. Néanmoins par des méthodes de continuation entre problème de maximisation de l'énergie

$$J_E = \int_0^{T_1} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t \,. \tag{2.14}$$

plus régulier défini par les équations suivantes

$$P_E^\varepsilon : K_\varepsilon, q(0) = q_0, q(T_1) = q_1, \min J_E \,, \tag{2.15}$$

et le problème de maximisation de la masse finale, il est aujourd'hui possible de calculer très efficacement des approximations aux trajectoires optimales solutions du problème P_m^ε [29].

2.2 Stabilisation

Dans cette section on rappelle les notions de stabilité associées à un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire et on présente la méthode de Jurdjevic-Quinn qui permet de renforcer la stabilité d'un point d'équilibre pour les systèmes contrôlés affines. Pour une présentation plus complète nous renvoyons le lecteur à l'ouvrages de référence [6].

2.2.1 Stabilité asymptotique uniforme

Soit $f(x,t)$ un champs de vecteur sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, 2π-périodique par rapport à t. Nous supposons que ce champs de vecteur appartient à la classe des fonction $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. On peut décrire un tel champ par un champ autonome sur $\mathbb{R}^n \times S^1$, avec $S^1 = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,\theta) \,, \\ \dot{\theta} & = & 1 \,. \end{array} \right.$$

Ainsi le champ de vecteur f est localement lipschitz en x, uniformément en t, et sur tout compact de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $c > 0$ tel que $\|f(x,t)\| \leq c(1 + \|x\|)$. Ces hypothèses garantissent l'existence et l'unicité de la solution $x(t, t_0, x_0)$ au problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0 \,. \tag{2.16}$$

Soit $x^\star$, un point d'équilibre de ce champs de vecteur,

$$f(x^\star, t) = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Définition 26 (Stabilité de Lyapunov)**.** Le point $x^\star$ est uniformément *stable* au sens de Lyapunov si pour tout voisinage $\mathcal{O}^1_{x^\star}$ du point $x^\star$, il existe un voisinage $\mathcal{O}^2_{x^\star}$ tel que pour tout point $x_0 \in \mathcal{O}^2_{x^\star}$ et tout instant $t_0 \in \mathbb{R}$, alors $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{O}^1_{x^\star}$ pour $t \geq t_0$.

Définition 27 (Attractivité)**.** Le point $x^\star$ est uniformément *attractif* si il existe un voisinage $\mathcal{O}_{x^\star}$ du point $x^\star$, tel que pour tout point $x_0 \in \mathcal{O}_{x^\star}$ et tout instant $t_0 \in \mathbb{R}$, la trajectoire $x(t, t_0, x_0)$ tend vers $x^\star$ quand t tend vers $+\infty$. Le plus grand $\mathcal{O}_{x^\star}$ est le bassin d'attraction de $x^\star$.

Définition 28 (Stabilité asymptotique)**.** Le point $x^\star$ est uniformément *asymptotiquement stable* si il est uniformément stable et uniformément attractif.

Définition 29 (Stabilité exponentielle)**.** Le point $x^\star$ est uniformément *exponentiellement stable* si il existe un voisinage $\mathcal{O}_{x^\star}$ et $K > 0$ et $\tau > 0$, telle que toutes les solutions x initialisée à $x_0 \in \mathcal{O}_{x^\star}$ satisfont l'inégalité,

$$\|x(t, t_0, x_0) - x^\star\| \leq K\, e^{-t/\tau}\,. \tag{2.17}$$

Dans chacune des définitions précédentes on peut remplacer le point équilibre $x^\star$ par une solution particulière $x^\star(.)$ de $\dot{x} = f(x, t)$ initialisée à $t = 0$,

Définition 30 (Stabilité de Lyapunov)**.** Une solution $x^\star(.)$ est uniformément *stable* au sens de Lyapunov si pour tout instant $t_0 \geq 0$ et tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\|y_0 - x^\star(t_0)\| \leq \delta$ alors pour tout $t \geq t_0$, $\|x(t, t_0, x_0) - x^\star(t_0)\| \leq \epsilon$.

La méthode de Lyapunov directe

Pour les systèmes non-linéaires, la méthode de Lyapunov directe est souvent très efficace pour établir la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre. L'idée intuitive derrière cette méthode est que s'il existe une sorte de "mesure énergétique" des états du système, telle que cette énergie décroisse le long de certains chemins, alors le système doit converger vers un minimum de l'énergie, tel un pendule convergeant vers son point d'équilibre. Cette fonction "énergie" est aussi appelée fonction de Lyapunov.

Soit $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de (x, t) continûment dérivable, on appelle $L_f V$ la dérivé de Lie le long du champ de vecteur f,

$$L_f V(x, t) = dV.f(x, t)\,. \tag{2.18}$$

Définition 31. Une fonction $V(x, t)$ régulière, propre, C^∞ et 2π-périodique

par rapport à t est une *fonction de Lyapunov forte (faible)* pour le champs de vecteur $f(.,.)$ et le point d'équilibre $x^\star$ si elle satisfait aux conditions suivantes

$$V(x,t) \quad \geq \quad 0\,, \tag{2.19}$$
$$V(x,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x^\star\,, \tag{2.20}$$
$$L_f V(x,t) \quad < \ (\leq) \quad 0\,, \forall x \neq x^\star\,. \tag{2.21}$$

Les qualificatifs "fort" ou "faible" accolés à l'expression "fonction de Lyapunov" mettent l'accent sur le caractère de l'inégalité (2.21) stricte ou simple. L'existence d'une fonction de Lyapunov forte permet de conclure à la stabilité asymptotique uniforme du point d'équilibre sans devoir faire appel aux trajectoires du système,

Théorème 32. *Si il existe une fonction de Lyapunov forte (relativement au champs de vecteurs f) alors le point d'équilibre $x^\star$ est uniformément asymptotiquement stable.*

Dans le cas d'une fonction de Lyapunov faible le principe d'invariance de LaSalle permet néanmoins une caractérisation du comportement asymptotique des trajectoires engendrées par le champs de vecteur f,

Théorème 33. *Soit V une fonction de Lyapunov faible, alors $x^\star$ est stable au sens de Lyapunov et les solutions de $\dot{x} = f(x,t)$ converge vers le plus grand ensemble invariant contenu dans*

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall\, t \in \mathbb{R},\ L_f V(x,t) = 0\}\,.$$

L'inconvénient de la méthode directe de Lyapunov est de devoir trouver une fonction de Lyapunov stricte. Néanmoins elle est méthodologiquement fondée car le théorème 32 admet une réciproque,

Théorème 34 (Kurzweil [35], théorème 3.4 dans [6])**.** *Si un point d'équilibre $x^\star \in \mathbb{R}^n$ est localement (globalement) uniformément asymptotiquement stable, alors il existe une fonction de Lyapunov C^∞ stricte périodique définie sur un voisinage de $x^\star$ (sur $\mathbb{R}^n$).*

Robustesse

Le problème de stabilisation est intrinsèquement lié au concept de robustesse, on cherche à préserver le comportement du système en présence de perturbations. Il existe de nombreuses notions de stabilité et de robustesse ; la notion de stabilité asymptotique uniforme pour un système périodique permettra de garantir la robustesse des contrôles, en boucles fermées, utilisés dans nos simulations numériques.

En effet l'existence d'une fonction de Lyapunov forte est une propriété puissante qui garantit une stabilisation pratique en présence de perturbations. Soit V une fonction de Lyapunov forte (relativement au champ de vecteur f et au point d'équilibre $x^\star$) définie sur un compact V^α. Pour toutes constantes $\rho > 0$ assez petites, il existe un voisinage $\mathcal{O}_{x^\star}$ tel que pour toutes perturbations e continues par rapport à x, intégrables par rapport à t et bornées $\|e\| \leq \rho$,

$$dV.f + dV.e < 0, \qquad \forall x \notin \mathcal{O}_{x^\star}, t \in [0, 2\pi].$$

Le principe d'invariance de LaSalle implique que les trajectoires de $f + e$ initialisées en $x_0 \in V^\alpha$ convergent en un temps fini vers $\mathcal{O}_{x^\star}$.

2.2.2 Stabilisation de Jurdjevic-Quinn

Stabilisation

Pour un système contrôlé, on appelle stabilisation, la recherche de lois de commande en boucle fermée, qui induisent des propriétés de stabilité et de robustesse pour le système bouclé.

La méthode de Jurdjevic-Quinn

Pour les systèmes affines, dont la dérive admet une intégrale première V qui est minimale dans la configuration désirée, propriété qui implique la stabilité de cet état, au sens de Lyapunov, la stratégie de Jurdjevic-Quinn permet d'obtenir la stabilité asymptotique de cet état, par l'utilisation d'un contrôle en boucle fermée, qui rend décroissante la fonction V en chaque point [31]. Cette méthode, aussi appelée "damping control", permet de renforcer la stabilité de l'état désiré, d'une stabilité de Lyapunov on passe à une stabilité asymptotique de l'état cible.

Les théorèmes dit de Jurdjevic-Quinn donnent des conditions suffisantes sur les champs de vecteurs d'un système contrôlé affine,

$$\dot{q} = f_0(q) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(q)\,, \tag{2.22}$$

et sur une fonction de Lyapunov associée, conditions qui garantissent l'existence, et proposent une construction possible d'un contrôle continu, stabilisant un point d'équilibre de la dérive. Le théorème suivant donne des conditions suffisantes assurant la stabilisation d'une orbite périodique de la dérive f_0 par un feedback continu.

Théorème 35. *Supposons qu'il existe Γ, une orbite compacte de la dérive f, et, V, une fonction réelle, continûment dérivable sur M et vérifiant les conditions suivantes :*

1. $L_{f_0} V = 0$.
2. *V est propre, les ensembles $V_\alpha = \{q \in M, V(q) \leq \alpha\}$ sont compactes et en particulier il existe un domaine V_α qui contient l'orbite Γ.*

3. *La famille de vecteurs* $\mathcal{F}(q) = \{f_0(q), (\text{ad } f_0)^k f_i(q), i \in [1, 2, \ldots, m], k \in \mathbb{N}\}$ *est de rang* $n = dim(M)$ *en tout point* q *de* M.

4. *L'égalité* $dV(q) = 0$ *implique* $q \in \Gamma$.

Alors toute commande en boucle fermée (feedback) continue $q \mapsto u(q) = (u_1(q), ..., u_m(q))$ *tel que pour tout* q,

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(q) L_{f_i} V(q) \quad \leq \quad 0\,, \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(q) L_{f_i} V(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{f_1} V(q) = \cdots = L_{f_m} V(q) = 0\,, \tag{2.24}$$

stabilise asymptotiquement l'orbite périodique Γ.

Démonstration: L'application V est une fonction de Lyapunov relativement au champs de vecteurs

$$h(q) = f_0(q) + \sum_{i=1}^{m} u_i(q) f_i(q), \tag{2.25}$$

en effet $L_h V = \sum_{i=1}^{m} u_i(x) L_{f_i} V(x)$ avec

$$|L_f V| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} L_{f_i} V^2}\,. \tag{2.26}$$

Ainsi selon le principe d'invariance de LaSalle, les solutions partant d'un point $q_0 \in V_\alpha$ convergent vers le plus grand ensemble $h-$invariant $\mathcal{I}$ inclus dans

$$W = \{q \in M,\, L_{f_i} V(q) = 0\,, \forall i \in [1, \ldots, m]\}\ .$$

Notons que l'orbite compacte Γ est incluse dans $\mathcal{I}$. Les hypothèses 3-4 impliquent que $\mathcal{I}$ est réduit à l'orbite compacte Γ.

En effet, soit un point $q_0 \in \mathcal{I} \setminus \Gamma$, comme $\mathcal{I}$ est positivement $h-$invariant, alors $e^{th} q_0 \in I\ \forall t \geq 0$, et comme $\mathcal{I} \subset W$, $e^{th} q_0 = e^{tf_0} q_0$, $L_{f_i} V(e^{th} q_0) = 0$, $\forall t \geq 0$. Par récurrence, $\forall k \geq 0$, $\forall i \in [0..m]$,

$$\frac{d^k}{dt^k}(L_{f_i} V(e^{tf_0} q_0)) = L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V(e^{tf_0} q_0) = 0\,. \tag{2.27}$$

Comme la famille de vecteurs $\mathcal{F}(q_0)$ est de rang plein d'après l'hypothèse 3, ces égalités impliquent que la différentielle de V s'annule au point q_0, contredisant l'hypothèse 4. □

2.3 L'oscillateur harmonique en poussée faible

L'oscillateur harmonique contrôlé est un système de Kepler contrôlé au sens de la section 1.4 simple. Ce système permet d'analyser le rapport entre stabilisation et optimalité dans le cadre des petits contrôles.

L'oscillateur harmonique est un système hamiltonien.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & x_2 \\ \dot{x_2} & = & -x_1 \end{array} \right. \tag{2.28}$$

En effet l'énergie $V = x_1^2 + x_2^2$ est invariante le long d'une trajectoire $(x, y)(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ solution de l'équation (2.28). De la même façon que pour le système à deux corps, on peut construire l'oscillateur harmonique contrôlé par une commande à faible poussée (2.29).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & x_2 \\ \dot{x_2} & = & -x_1 + u \end{array} \right. , |u| \leq \varepsilon \tag{2.29}$$

2.3.1 Synthèse optimale

Considérons le problème du temps minimal pour joindre l'origine,

$$P_0' : (2.29), (x_1, x_2)(0) = (x_1^0, x_2^0), (x_1, x_2)(T) = (0, 0), \min \to T. \tag{2.30}$$

Pour ce système très simple les équations nécessaires du principe du maximum de Pontryagin permettent d'obtenir la synthèse optimale du problème P_0'.

La fonction hamiltonienne associée à ce problème,

$$h_u(p, x) = p_1 x_1 - p_2 x_2 + p_2 u, (p, x) \in T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2*} \times \mathbb{R}^2,$$

et le système hamiltonien

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & x_2, \\ \dot{x_2} & = & -x_1 + u, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{p_1} & = & p_2, \\ \dot{p_2} & = & -p_1, \end{array} \right.$$

La maximisation de h_u, condition imposée par le principe du maximum, implique

$$p_2(t)\tilde{u}(t) = \max_{|u| \leq \varepsilon} h_u$$

ainsi le contrôle satisfait à la condition

$$\tilde{u}(t) = \text{ sgn } p_2(t) \text{ si } p_2(t) \neq 0.$$

La variable p_2 satisfait à l'équation différentielle ordinaire

$$\ddot{p_2} = -p_2,$$

donc

$$p_2 = \alpha \sin(t + \beta),\ \alpha, \beta = \text{const.}$$

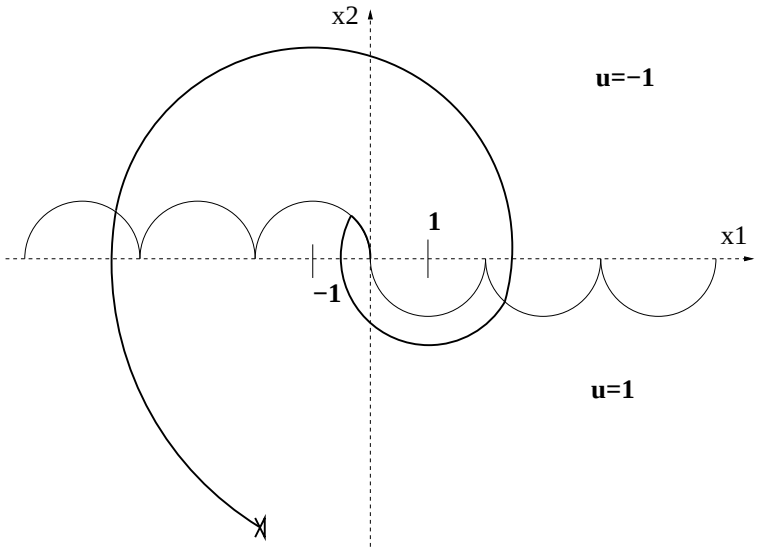


FIG. 2.1 – La synthèse optimale, $\varepsilon = 1$

Comme d'après le PMP, le covecteur p ne peut s'annuler $\alpha \neq 0$,

$$\tilde{u}(t) = \text{ sgn } (\alpha \sin(t + \beta)).$$

Cette dernière égalité permet de décrire totalement la structure du contrôle optimal. L'intervalle entre deux points de commutation de $\tilde{u}(t)$ a une longueur π. Soit $\tau \in [0, \pi)$ le premier point de commutation de $\tilde{u}(t)$. Alors

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \varepsilon \text{ sgn } \tilde{u}(0), & t \in [0, \tau) \cup [\tau + \pi, \tau + 2\pi) \cup [\tau + 3\pi, \tau + 4\pi) \cup ... \\ -\varepsilon \text{ sgn } \tilde{u}(0), & t \in [\tau, \tau + \pi) \cup [\tau + 2\pi, \tau + 3\pi) \cup ... \end{cases}$$

C'est à dire que le contrôle $\tilde{u}(t)$ est paramétré par deux nombres : le premier temps de commutation $\tau \in [0, \pi)$ et le signe initial sgn $\tilde{u}(0) \in \{\pm\varepsilon\}$.

Le contrôle optimal $\tilde{u}$ est bang-bang, il ne prend que les valeurs extrémales $\pm\varepsilon$. Ainsi une trajectoire optimale $(x_1(t), x_2(t))$ se divise en morceaux qui satisfont le système

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -x_1 \pm \varepsilon, \end{cases} , \tag{2.31}$$

c'est à dire des arcs de cercles centrés en $(\pm\varepsilon, 0)$ parcourus dans le sens des aiguilles d'une montre.

Maintenant nous décrivons les trajectoires optimales qui rejoignent l'origine. Soit γ une telle trajectoire. Si γ ne présente pas de commutations, alors c'est un arc appartenant à l'un des demi-cercles

$$(x_1 - \varepsilon)^2 + x_2^2 = \varepsilon^2, \qquad x_2 \leq 0 \tag{2.32}$$

$$(x_1 + \varepsilon)^2 + x_2^2 = \varepsilon^2, \qquad x_2 \geq 0 \tag{2.33}$$

Si γ a des commutations alors la dernière commutation peut apparaître sur tous les points, sauf l'origine, de ces demi-cercles. Supposons que γ a sa dernière commutation sur le cercle (2.32). Alors la partie de γ entre cette commutation et la possible précédente est un demi-cercle $(x_1 - \varepsilon)^2 + x_2^2 = R^2$ passant par le dernier point de commutation. La commutation précédant la dernière apparaît sur la courbe obtenue par la rotation du plan (x_1, x_2) centrée en $(-epsilon, 0)$ et d'angle π du demi cercle (2.32) ; c'est à dire sur le demi-cercle

$$(x_1 + 3\,\varepsilon)^2 + x_2^1 = \varepsilon^2,\ x_2 \geq 0. \tag{2.34}$$

De même on obtient le lieu géométrique de la commutation précédente par la rotation centrée sur $(\varepsilon, 0)$ et d'angle π du demi-cercle (2.34), soit le demi-cercle

$$(x_1 - 5\,\varepsilon)^2 + x_2^1 = \varepsilon^2,\ x_2 \leq 0. \tag{2.35}$$

Par itérations on construit ainsi la courbe de commutation dans le plan (x_1, x_2) :

$$\begin{array}{l} (x_1 - (2k-1)\varepsilon)^2 + x_2^2 = \varepsilon^2, \quad x_2 \leq 0,\ k \in \mathbb{N}, \\ (x_1 + (2k-1)\varepsilon)^2 + x_2^2 = \varepsilon^2, \quad x_2 \geq 0,\ k \in \mathbb{N}, \end{array} \tag{2.36}$$

La courbe de commutation sépare le plan (x_1, x_2) en deux parties. Chaque solution des équations différentielles (2.31) avec $-\varepsilon$ dans la partie supérieure et ε dans la partie inférieure est une trajectoire extrémale. De plus pour chaque point du plan (x_1, x_2) il existe une unique solution partant de ce point qui joint l'origine. Cette solution a la forme d'une spirale avec un nombre fini de commutations (voir la figure 2.1). Comme la trajectoire optimale existe, la courbe ainsi construite est la trajectoire optimale.

2.3.2 Commande Jurdjevic-Quinn

Le contrôle qui maximise la dérivée $\dot{V}$ sous la contrainte $|u| \leq \varepsilon$ est donné par la loi de commande $u^* = -\varepsilon \text{ sgn } x_2$. Ce contrôle n'est pas défini sur l'axe des abscisses, $\{x_2 = 0\}$, et est discontinu le long de chaque trajectoire qui traverse cette droite. Néanmoins on peut étudier les solutions du système en boucle fermée avec une dynamique discontinue en (x_1, x_2),

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & x_2 \\ \dot{x_2} & = & -x_1 - \varepsilon \text{ sgn } x_2 \end{array} \right. , \tag{2.37}$$

Au sens de Fillipov, les solutions du système (2.37) sont les solutions de l'inclusion différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & x_2\,, \\ \dot{x_2} & \in & \left\{ \begin{array}{ll} \{-x_1 - \varepsilon \text{ sgn } x_2\} & \text{if } x_2 \neq 0 \\ [-x_1 - \varepsilon, -x_1 + \varepsilon] & \text{if } x_2 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{2.38}$$

L'ensemble des points d'équilibre de ce système discontinu (2.37) est égal au segment sur l'axe $y = 0$ formé des points $x_1 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Toutes les trajectoires de ce système convergent vers l'ensemble des points d'équilibre ; à la section 4.2 nous généralisons ce résultat à l'ensemble des systèmes affines satisfaisant les conditions de Jurdjevic-Quinn.

2.3.3 Optimalité et stabilisation

La courbe de commutation du contrôle optimal γ_ε est constituée de demi-cercles de rayon ε de part et d'autre de l'axe $x_2 = 0$. Quand le module maximal du contrôle ε tend vers 0, la courbe γ_ε converge vers l'axe $x_2 = 0$. Or cet axe est égal à l'axe de commutation du contrôle en boucle fermée discontinu qui sature le module du contrôle à ε. Ainsi la commande optimale tend vers la commande en boucle fermée quand ε tend vers 0. Au chapitre suivant nous introduisons un système contrôlé moyen pour l'ensemble des systèmes de Kepler contrôlé. L'ensemble des solutions du système moyen est égal à l'ensemble des valeurs limites des suites de solutions des systèmes originaux.

Pour l'oscillateur harmonique le système moyen vaut simplement, après le changement de l'échelle de temps $\tau = \varepsilon t$ et un passage en coordonnée polaire,

$$\frac{dr}{d\theta} \in [-1, 1]\,. \tag{2.39}$$

La commande en boucle fermée est donc optimale pour le système moyen. Remarquons que pour l'oscillateur harmonique le système moyen est de dimension 1, il n'y a qu'un chemin possible, que toutes les fonctions de Lyapunov possibles sont équivalentes.

Il est possible que cette propriété soit valable pour d'autres systèmes satisfaisant les conditions de Jurdjevic-Quinn : que les transferts temps optimaux entre deux surfaces de niveaux de la fonction V convergent vers la commande Jurdjevic-Quinn quand le module maximal du contrôle tend vers zéros.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer la théorie du contrôle présente historiquement deux objectifs aux sensibilités opposées. Etant donné un système contrôlé, une problématique est de rechercher un chemin admissible optimal entre deux états d'un système, une autre est de stabiliser le système dans un état précis. Il existe d'autres problématiques qui relient des problèmes de contrôle optimal à des problèmes de stabilisation.

Par exemple ces problèmes n'en forment plus qu'un quand on désire suivre une trajectoire admissible qui relie deux états du systèmes. La technique classiquement employée consiste à linéariser le système la long de cette trajectoire (voire la section 1.4.3). Si le système linéarisé est contrôlable il est alors possible de suivre la trajectoire. Cette technique a été exploitée pour stabiliser une trajectoire de rentrée dans l'atmosphère d'une navette spatiale [7]. Lorsque la trajectoire désirée est une trajectoire temps minimale alors le système linéarisé n'est pas contrôlable et la technique précédente doit être adaptée en fractionnant le module maximal de poussée en deux, une partie principale pour construire une trajectoire sous-optimal, et la fraction complémentaire pour stabiliser cette trajectoire.

D'autre part le contrôle optimal conduit implicitement à un contrôle qui, bien que donné comme une fonction du temps par le principe du maximum, ne dépend en réalité que de l'état. La synthèse optimale est la réalisation du contrôle optimal par une commande en boucle fermée. Le contrôle en boucle fermée ainsi défini présente généralement de nombreuses discontinuités et n'est

pas stabilisant. Dans [43] les auteurs construisent une commande stabilisante quasi-optimale à partir d'une synthèse non stabilisante. Pour la plupart des problèmes on ne sait pas calculer les trajectoires optimales, et, a fortiori, une synthèse. On doit se contenter de calculer des approximations numériques.

Pour le problème quadratique linéaire la commande optimale est réalisée par un contrôle linéaire stabilisant ; cette propriété ce généralise aux systèmes non-linéaires qui satisfont aux conditions de Jurdjevic-Quinn. Le feedback Jurdjevic-Quinn réalise la commande optimale d'un certain coût quadratique (voir la section 3.5 "Inverse Optimal Design" dans [45]).

Chapitre 3

Le système contrôlé moyen

On a vu dans la section 1.4 que la faible poussée induit naturellement, sur les systèmes de Kepler contrôlés, une dynamique rapide, celle de la variable angulaire, et une dynamique lente, celle des intégrales premières. Les systèmes de Kepler contrôlés, définis dans cette même section, constituent une famille de systèmes dépendant linéairement des contrôles, avec des champs de vecteurs périodiques par rapport à la variable libre, de fréquence inversement proportionnelle au paramètre ε. Pour cette famille de systèmes contrôlés, nous construisons un système contrôlé moyen. L'ensemble accessible du système moyen est une approximation des ensembles accessibles des systèmes originaux, quand le paramètre ε tend vers 0. Nous utilisons cette construction, pour étudier le comportement asymptotique des coûts optimaux, associés aux systèmes de Kepler contrôlés.

3.1 Dynamiques lentes et rapides

Equations différentielles ordinaires

Les méthodes de "moyennisation", dénommées "averaging" dans la littérature scientifique internationale, sont utilisées depuis de nombreuses années pour étudier les petites perturbations d'équations différentielles qui admettent des trajectoires périodiques, ou quasi-périodiques [2]. L'idée est qu'on obtient une bonne estimation du mouvement perturbé en considérant une moyenne de la perturbation sur tous les points visités par la solution du système non perturbé. Le mouvement sur cette trajectoire est souvent appelé dynamique rapide, et le mouvement relativement à cette trajectoire, dû à la perturbation, désigné sous l'appellation mouvement lent. En général, il est possible de choisir des coordonnées telles que la dynamique soit rapide sur une composante et lente sur les autres. Sans vouloir faire un historique exhaustif rappelons quelques résultats intéressants des techniques dîtes de "moyennisation".

Dynamiques lentes et rapides

Soit une équation différentielle autonome $\dot{q} = F(q)$, $q \in \mathbb{R}^d$. Supposons que toutes les solutions sont périodiques, et considérons une perturbation de cette équation différentielle, $\dot{q} = F(q) + \varepsilon\, G(q)$. Sous de bonnes hypothèses de régularité, on peut choisir, au voisinage de l'une de ces orbites périodiques, des coordonnées (x, θ) avec $\theta \in \mathbb{S}^1$ (scalaire modulo 2π) et x de dimension $d-1$, telles que $F = a\,\partial/\partial\theta$. La fonction a ne s'annulant pas, l'équation "perturbée" s'écrit

$$\dot{x} = \varepsilon\, g(x, \theta)\ , \quad \dot{\theta} = a(x, \theta) + \varepsilon\, g_2(x, \theta)\ , \tag{3.1}$$

où a, g et g_2 sont 2π-périodiques par rapport à θ. Il est clair que x varie lentement lorsque ε est petit alors que ça n'est pas le cas de θ. Comme la fonction a ne s'annule pas, elle est minorée et la vitesse de θ est de l'ordre de a quand ε est petit. On dit que les coordonnées x portent la dynamique lente et θ la dynamique rapide.

Pour observer des variations de x qui restent "du même ordre" lorsque ε tend vers 0, il faut considérer les solutions de l'équation différentielle (3.1) sur un intervalle de temps de longueur inversement proportionnelle à ε ; on peut procéder à un changement d'échelle de temps qui nous ramène, avec ce nouveau temps, à un intervalle fixe, en prenant comme nouveau temps $\varepsilon\theta$ (où θ n'est plus compté modulo 2π). En supposant, pour simplifier, *sans justification*, que $a = 1$ et $g_2 = 0$, on a $\theta(t) = \theta(0) + t$ et l'équation (3.1) se normalise en

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \frac{t}{\varepsilon}) \tag{3.2}$$

avec $f(x, \tau) = g(x, \theta(0) + \tau)$. On peut considérer cette équation sur un intervalle de temps de longueur fixe. Plus le paramètre ε devient petit, plus le second argument de f, t/ε, varie rapidement alors que la variation du premier argument x reste modérée puisque la vitesse $\dot{x}$ de x reste bornée. La variable rapide est t/ε et x est la variable lente.

Un résultat classique

Le résultat de moyennisation le plus simple peut être donné sur une équation différentielle non stationnaire du type (3.2) :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \frac{t}{\varepsilon})\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.3}$$

où f est continûment différentiable et 2π-périodique par rapport à son second argument. Pour appréhender le comportement de la dynamique lente x quand le paramètre ε tend vers 0, on introduit la dynamique moyenne définie par $\overline{f}$ le champs de vecteur moyen du membre de droite de (3.3) :

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \theta)\, d\theta\ . \tag{3.4}$$

Les solutions de (3.3) sont proches des solutions du système moyen

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \overline{f}(\bar{x}). \tag{3.5}$$

Plus précisément,

Théorème 36 ([2])**.** *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et f définie et de classe C^1 sur un ouvert contenant $K \times \mathbb{R}$. Si $t \mapsto \bar{x}(t)$ est une solution du système moyen (3.5) définie sur l'intervalle de temps $[0,1]$, et qui reste dans l'intérieur de K, alors il existe une constante k telle que la solution x^ε de (3.3) partant de $x^\varepsilon(0) = \bar{x}(0)$ satisfait $\|x^\varepsilon(t) - \bar{x}(t)\| < k\varepsilon$, pour ε assez petits. La constante k dépend seulement de l'application f sur le compact K.*

Ce principe a été appliqué à de nombreux systèmes dynamiques, notamment en mécanique céleste pour étudier les systèmes hamiltoniens intégrables faiblement perturbés [3].

Utilisation en théorie du contrôle

Cette technique puissante pour décrire la dynamique des systèmes présentant des variations lentes et rapides a bien-sûr été utilisé en théorie du contrôle. En effet il existe de nombreux systèmes qui présentent des oscillations rapides autour d'un comportement lent. Parmi les diverses publications concernant l'application de cette technique à la théorie du contrôle, il faut souligner l'étude de François Chaplais [22].

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t, t/\varepsilon)\, u \in U \subset \mathbb{R}^m \\ \min \int_0^T \phi(x,u)dt \quad , \end{cases} \tag{3.6}$$

Sous réserve de quelques hypothèses, en particulier que les contrôles ne soient soumis à aucune contrainte, $U = \mathbb{R}^m$, et que l'hamiltonien maximisé du principe du maximum soit très régulier, coercitif (H5), François Chaplais a démontré que les solutions du problème (3.6), présentant des variations rapides, sont proches à ε près en norme L^∞ des solutions du système limite (3.7) défini ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(x, u(t,\theta), t, \theta)d\theta \\ \min \int_0^T \left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \phi(x, u(t,\theta))d\theta\right) dt \end{cases} \tag{3.7}$$

Ce résultat demande non seulement d'appliquer le théorème 36 aux équations résultant du principe du maximum, mais aussi de vérifier l'optimalité des solutions.

Applications au système de Kepler contrôlé

Les hypothèses de régularité exigées par le théorème principal de [22] ne sont pas satisfaites pour les problèmes de transferts orbitaux en temps minimum ainsi

que pour les transferts en masse maximale. Néanmoins, en s'appuyant sur cette publication, Richard Epenoy et Sophie Geffroy ont eu l'idée de construire un système moyen pour étudier les problèmes de transferts orbitaux en temps minimum. Ils ont développé un logiciel de résolution du principe du maximum pour les problèmes temps minimum de transferts orbitaux en poussée faible en estimant numériquement un système moyen [27]. Ce logiciel donne des résultats très satisfaisants. L'intérêt du système moyen est d'éviter le mauvais conditionnement dû à la présence d'une dynamique rapide. Par ailleurs, en utilisant cette approche, Bernard Bonnard et Jean-Baptiste Caillau ont calculé le système moyen associé aux extrémales du problème de minimisation de la norme L^2 du contrôle en relaxant la contrainte sur le contrôle [14]. Dans ces deux approches, la variation du contrôle, en particulier ses variations rapides et lentes par rapport au temps ou à l'état, voir même un état étendu comme dans le cas du principe du maximum, ont été prescrites a priori, satisfaisant le principe du maximum, le système moyen calculé ensuite. On voudrait pouvoir moyenner sans choisir a priori une loi de commande.

3.2 Le système contrôlé moyen

Dans cette section nous définissons le système contrôlé moyen et nous démontrons un théorème de comparaison entre les trajectoires des systèmes avec variations rapides et celles du système moyen quand la fréquence devient de plus en plus rapide, quand le paramètre ε tend vers zéro. Ce concept de système moyen contrôlé s'apparente à une simplification de la notion de "chaterring system" appliqué à un système périodique [4].

3.2.1 Définition

Considérons la famille des systèmes originaux indexés par le paramètre ε définis sur $\mathbb{R}^n$ par les équations suivantes,

$$\frac{dI}{ds} \quad = \quad \mathcal{F}(I, s/\varepsilon)\, u \,+ \varepsilon\, \mathcal{R}(I, s, \varepsilon, u)\,, \quad u \in U\ . \tag{3.8}$$

avec U un compact convexe de $\mathbb{R}^m$. La fonction $(I, \theta) \mapsto \mathcal{F}(I, \theta)$ est C^∞, 2π-périodique par rapport à la variable θ (rappelons que $\mathcal{F}(I, s/\varepsilon)\, u$ est une écriture condensée de $\sum_{i=1}^{m} u_i f_i(I, s/\varepsilon)$), et la fonction $\mathcal{R}$ est continue et bornée. Les systèmes de Kepler contrôlés à masse constante (1.72) appartiennent cette classe de système.

Soit un point I dans $\mathbb{R}^n$, on définit l'application $\mathcal{E}(I, .) : L^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^m) \to T_I\mathbb{R}^n$ qui à une variation possible de u sur une période associe le vecteur $\mathcal{E}(I, u)$ défini par

$$\mathcal{E}(I, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I, \theta)\, u(\theta) \mathrm{d}\theta. \tag{3.9}$$

De même, étant donnée la contrainte U on définit le sous-ensemble de $T_I\mathbb{R}^n$ constitué de toutes les valeurs moyennes possibles,

$$\mathcal{E}_U(I) = \left\{\mathcal{E}(I,u),\ u(.) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{S}^1, U)\right\} . \tag{3.10}$$

Le système contrôlé moyen associé à la famille des systèmes originaux (3.8) est défini par l'inclusion différentielle sur $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{I} \ \in \ \mathcal{E}_U(I) . \tag{3.11}$$

Le système moyen est écrit comme une inclusion différentielle. Il existe des théorèmes généraux pour analyser ces systèmes. Mais, en tenant compte de la structure de ce système, on peut caractériser simplement ses solutions. Le lemme 37 caractérise les solutions de cette inclusion différentielle particulière. L'idéal serait de pouvoir écrire un véritable système contrôlé $\dot{I} = g(I, v)$, $v \in V$ avec g suffisament régulière et V un domaine d'un espace vectoriel de dimension finie tel que $g(I, V) = \mathcal{E}_U(I)$. Nous verrons à la section 3.2.3 que celà est possible si U est strictement convexe et son bord lisse.

Une solution de (3.11) sur l'intervalle $[0, T]$ est une fonction absolument continue $I : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, où l'application mesurable $\dot{I}$ satisfait $\dot{I}(t) \in \mathcal{E}(I(t))$ pour presque tous les temps t. Par définition de (3.10), pour presque tout temps t il existe une application mesurable $\tilde{u}_t : \mathbb{S}^1 \to U$ telle que

$$\dot{I}(t) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I,\theta)\,\widetilde{u}_t(\theta)\,\mathrm{d}\theta .$$

Le membre de droite est mesurable par rapport à la variable t mais a priori le contrôle $\widetilde{u}_t(\theta)$ n'est pas mesurable par rapport à t ; cependant il est toujours possible d'en choisir un mesurable.

Lemme 37. *Une application $I : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ est une solution de (3.11) si, et seulement si, il existe $\widehat{u} \in L^1_{\text{loc}}([0, T] \times \mathbb{S}^1, U)$ telle que*

$$I(t) = I(0) + \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I(t),\theta)\,\widehat{u}(t,\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau \tag{3.12}$$

pour tout temps t dans $[0, T]$.

Démonstration: Soit $I(t) \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ une solution de (3.11) définie sur $[0, T]$, $I(t) = I(0) + \int_0^t \dot{I}(s)\,\mathrm{d}s$ avec $\dot{I}(.)$ une fonction intégrable appartenant à $\mathcal{E}(I)$ pour presque tout $t \in [0, T]$. Soit $\phi : L^\infty\left([0, T] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^m\right) \to L^2\left([0, T], \mathbb{R}^n\right)$, l'opérateur linéaire continu défini par

$$\phi(u)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I(t),\theta_1)\,u(t,\theta_1)\,\mathrm{d}\theta_1.$$

Considérons l'application $\Psi : L^\infty\left([0, T] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^m\right) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(u) = \|\dot{I} - \phi(u)\|^2_{L^2}.$$

Comme $U \subset \mathbb{R}^m$ est compact, donc borné, $L^1_{\text{loc}}([0,T]\times\mathbb{S}^1, U)$ est inclus dans une boule de $L^\infty([0,T]\times\mathbb{S}^1, U)$ pour rayon ρ assez grand. Donc l'image par ϕ de $L^1_{\text{loc}}([0,T]\times\mathbb{S}^1, U)$ est compacte dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ et la borne inférieure des valeurs de Ψ est atteinte. De plus, l'application Ψ est quadratique, et ainsi différentiable ; soit $h \in L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^m\right)$,

$$\begin{aligned} D\Psi(u)(h) &= \int_0^T \left(\dot{I}(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I(t),\theta_1)u(t,\theta_1)\,\mathrm{d}\theta_1\right)^\top \\ &\qquad \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I(t),\theta_2)h(t,\theta_2)\mathrm{d}\theta_2\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En choisissant pour u un point de $L^1_{\text{loc}}([0,T]\times\mathbb{S}^1, U)$ qui réalise le minimum et en choisissant

$$h(t,\theta_2) = \left(\dot{I}(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I(t),\theta_1)u(t,\theta_1)\,\mathrm{d}\theta_1\right)^\top \mathcal{F}(I(t),\theta_2)\,,$$

comme par définition pour presque tous t, $\dot{I}(t) \in$ Span $\{\mathcal{F}(I(t),\theta),\ \theta\in[0,2\pi]\}$, $D\Psi(u)(h) = 0$ implique que pour presque tous $t \in [0,T]$,

$$\dot{I}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I(t),\theta_1)u(t,\theta_1)\,\mathrm{d}\theta_1\,.$$

□

3.2.2 Théorème de convergence

Nous allons maintenant énoncer le théorème de comparaison entre les trajectoires des systèmes originaux et les trajectoires du système moyen. Les trajectoires de ces systèmes se rapprochent quand ε tend vers zéro.

Théorème 38. *Soit $I_0 \in \mathbb{R}^n$, une condition initiale. Soit $\mathbb{K}$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ contenant I_0 tel que pour tout $\varepsilon > 0$, chaque solution I_ε de (3.8) initialisée à $I_\varepsilon(0) = I_0$ reste dans $\mathbb{K}$ pour tous les temps $t \in [0,T]$.*

1. *Soit $I_0(t)$ une solution de (3.11) définie sur $t \in [0,T]$ et initialisé à $I_0(0) = I_0$. Il existe une famille, indexée par ϵ, de contrôles mesurables, $\overline{u}_\varepsilon(.) \in L^1_{\text{loc}}([0,T],U)$, telle que la famille de solutions $I_\varepsilon(t)$ de (3.8) avec $u = \overline{u}_\varepsilon(t)$ et $I_\varepsilon(0) = I(0)$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers $I_0(.)$ lorsque ε tend vers zéro.*
2. *Réciproquement, soit $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs convergeant vers zéro et une suite de contrôles $u_n(.) \in L^1([0,T],B_1)$. Soit $I_n(.)$ la suite des solutions du système (3.8) avec $\varepsilon = \varepsilon_n$, $u = u_n(t)$ et $I_n(0) = I_0$. Si $I_n(.)$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers $I^\star(.)$, alors $I^\star$ est une solution de (3.11).*

Démonstration: Soit $\mathrm{Lip}\,\mathcal{F}$ la constante de Lipschitz de la fonction $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{K}$ et $\sup\mathcal{F}$ et $\sup\mathcal{R}$ une borne supérieure de $\|\mathcal{F}\|$ et de $\|\mathcal{R}\|$ sur $\mathbb{K}\times[0,T]\times\mathbb{S}^1\times U$.

Montrons d'abord le point 1 :

Soit $I:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ une solution de (3.11), d'après le lemme 37 il existe une loi de commande mesurable $u_0\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,T]\times[0,2\pi[,U)$ telle que l'équation (3.12) soit satisfaite pour presque tous les temps $t\in[0,T]$. Pour chaque $\varepsilon>0$ on définit à partir de u_0 le contrôle $u_\varepsilon(t,\theta)$ par

$$u_\varepsilon(t,\theta)=u_0(t+\varepsilon\,\phi,\frac{t}{\varepsilon})\,,\phi\in[0,2\pi[,\phi\equiv\theta\,. \tag{3.13}$$

Par convention, et pour donner un sens à u_ε pour tout t, on prolonge u_0 de façon périodique en dehors de $t\in[0,T]$,

$$u_0(t+T,\theta)=u_0(t,\theta)\,.$$

Chaque fonction $u_\varepsilon(s,.)$ est donc 2π-périodique.

on définit le contrôle moyen $\overline{u}_\varepsilon(t)$ par

$$\overline{u}_\varepsilon(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_\varepsilon(t,\theta)\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{3.14}$$

auquel on associe la trajectoire I_ε la solution de (3.8) avec $\overline{u}_\varepsilon(t)$ pour contrôle initialisée à $I_\varepsilon(0)=I_0$. Par définition,

$$I_\varepsilon(t) = I_0(0)+\int_0^t\mathcal{F}(I_\varepsilon(s),s/\varepsilon)\,\overline{u}_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s\,+o(\varepsilon)\,, \tag{3.15}$$

$$I_0(t) = I_0(0)+\int_0^t\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}(I_0(s),\theta)\,u_0(s,\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s\,, \tag{3.16}$$

Utilisons la définition de $\overline{u}_\varepsilon$; les intégrales sur s et θ commutent et

$$I_\varepsilon(t)-I_0(t)+o(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\substack{\theta\in[0,2\pi]\\ s\in[0,t]}}\Big(\mathcal{F}(I_\varepsilon(s),\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon-\mathcal{F}(I_0(s),\theta)\,u_0\Big)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s\,, \tag{3.17}$$

avec u_ε et u_0 des fonctions de s et θ. En prolongeant les trajectoires I_ε par 0 à l'extérieur de $[0,T]$, et en introduisant le terme décalé, $\mathcal{F}(I_\varepsilon(s+\varepsilon\,\theta),\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon$, l'intégrande se découpe en,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(I_\varepsilon,\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon-\mathcal{F}(I_0,\theta)\,u_0 &= \mathcal{F}(I_\varepsilon,\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon-\mathcal{F}(I_\varepsilon(s+\varepsilon\,\theta),\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon\\ &+ \mathcal{F}(I_\varepsilon(s+\varepsilon\,\theta),\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon-\mathcal{F}(I_0,\theta)\,u_0\,,\end{aligned}$$

Or

$$\|\mathcal{F}(I_\varepsilon,\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon-\mathcal{F}(I_\varepsilon(s+\varepsilon\,\theta),\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon\| \le \mathrm{Lip}\,\mathcal{F}\,\|I_\varepsilon(s)-I_\varepsilon(s+\theta\varepsilon)\| \tag{3.18}$$

$$\le 2\pi\ \mathrm{Lip}\,\mathcal{F}\ \sup\mathcal{F}\,\varepsilon\,, \tag{3.19}$$

de plus

$$\begin{array}{l} \| \iint_{\substack{\theta\in[0,2\pi]\\ s\in[0,t]}} \mathcal{F}(I_\varepsilon(s+\varepsilon\,\theta),\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon - \mathcal{F}(I_0(s+\varepsilon\,\theta),\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s\ \| \\ \quad \leq 2\pi\ \sup\mathcal{F}\,\varepsilon + \mathrm{Lip}\,\mathcal{F}\int_0^t \|I_\varepsilon(s)-I_0(s)\|\,\mathrm{d}s\,, \end{array} \tag{3.20}$$

et

$$\begin{array}{l} \| \iint_{\substack{\theta\in[0,2\pi]\\ s\in[0,t]}} \mathcal{F}(I_0(s+\varepsilon\,\theta),\frac{s}{\varepsilon})\,u_\varepsilon - \mathcal{F}(I_0(s),\theta)\,u_0(s,\theta) \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s\ \| \\ \quad \leq 2\pi\ \sup\mathcal{F}\,\varepsilon\,, \end{array} \tag{3.21}$$

ainsi

$$\|I_\varepsilon(t)-I_0(t)\| \leq k_1\varepsilon + k_2\int_0^t \|I_\varepsilon(t)-I_0(t)\|\,, \tag{3.22}$$

avec $k_1 = \sup\mathcal{R} + (8\pi + 2\pi\ \mathrm{Lip}\,\mathcal{F})\ \sup\mathcal{F}$ et $k_2 = \mathrm{Lip}\,\mathcal{F}$. Finalement, le lemme de Gronwall implique la première partie du théorème,

$$\forall t\in[0,T], \|I_\varepsilon(t)-I(t)\| \leq k\,\varepsilon \quad \text{avec} \quad k = k_1\,T\left(e^{\mathrm{Lip}\,\mathcal{F}}-1\right)\,. \tag{3.23}$$

Montrons la réciproque 2 :

Soit u_n une suite de contrôles appartenant à $L^1_{\mathrm{loc}}([0,T],U)$ telle que la suite des trajectoires $I_n(.)$ converge uniformément sur $[0,T]$. Il existe une suite ε_n de réels positifs convergeant vers 0 telle que pour tous $t\in[0,T]$,

$$\|I_n(t)-I^*(t)\| \leq \varepsilon_n.$$

Comme pour la démonstration précédente on fait un peu de découpage,

$$\begin{array}{rcl} I_n(t)-I_0 & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^t \mathcal{F}(I_n(s),\frac{s}{\varepsilon})\,u_n(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta \\ & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{-\varepsilon_n\theta}^{t-\varepsilon_n\theta} \mathcal{F}(I_n(\tau+\varepsilon_n\theta),\frac{\tau}{\varepsilon_n}+\theta)\,u_n(\tau+\varepsilon_n\theta)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\theta\,, \\ & = & \displaystyle\int_0^t \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}(I_n(\tau+\varepsilon_n\theta),\frac{\tau}{\varepsilon_n}+\theta)\,u_n(\tau+\varepsilon_n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau\ +\Delta_n\,, \end{array} \tag{3.24}$$

avec Δ_n de taille ε_n. Soit $\kappa(\tau)\in[0,2\pi[$ définit par

$$\frac{\tau}{\varepsilon}+\kappa(s)\equiv 0\,[2\pi].$$

Soit

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}(I_n(\tau+\varepsilon_n\theta),\frac{\tau}{\varepsilon_n}+\theta)\,u_n(\tau+\varepsilon_n\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{3.25}$$

Posons $\phi=\theta-\kappa(s)$ comme $\mathcal{F}(I,.)$ est 2π-périodique,

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\kappa(s)}^{2\pi-\kappa(s)}\mathcal{F}(I_n(\tau+\varepsilon_n(\phi+\kappa(s))),\phi)\,u_n(\tau+\varepsilon_n(\phi+\kappa(s)))\,\mathrm{d}\phi\,, \tag{3.26}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}(I_n(\tau+\varepsilon_n(\phi+\kappa(s))),\phi)\,\hat{u}_n(\tau,\phi)\,\mathrm{d}\phi\,. \tag{3.27}$$

avec $\hat{u}_n \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, 2\pi[, U)$ définit par

$$\hat{u}_n(s,\phi) = \begin{cases} u_n(\tau + \varepsilon_n(\phi + \kappa(s))) & \phi < \kappa(s) \\ u_n(\tau + \varepsilon_n(\phi + \kappa(s) + 2\pi)) & \phi < \kappa(s) \end{cases} \tag{3.28}$$

Il existe une sous-suite de $\hat{u}_n$ convergeant faiblement vers une fonction $\hat{u}^\star \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times [0, 2\pi[, U)$; $\hat{u}_n$ dénote cette sous-suite.

$$I_n(t) - I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I_n(\tau + \varepsilon_n(\phi + \kappa(s)), \varphi)\, \widehat{u}_n(\tau, \varphi)\, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\tau + \Delta_n, \tag{3.29}$$

Comme I_n converge uniformément sur $[0, T]$ vers $I^\star$, la linéarité de l'intégrale par rapport à $\widehat{u}_n$ et la convergence faible de cette suite impliquent que pour tous les temps $t \in [0, T]$,

$$I^\star(t) - I_0 = \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I^\star(\tau), \theta)\, \widehat{u}^\star(\tau, \theta) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\tau \ . \tag{3.30}$$

Cette égalité implique que $I^\star$ est une solution de (3.11). □

Soient A et B, deux compacts de $\mathbb{R}^n$, on définit la distance entre ces deux ensembles par

$$d(A, B) = \max\left(\max_{a\in A} \min_{b\in B} \|a - b\|, \max_{b\in B} \min_{a\in A} \|a - b\| \right).$$

Soit $\mathcal{A}^\epsilon_{I_0,\tau}$ les ensembles accessibles des systèmes originaux (3.8), soit $\mathcal{A}^0_{I_0,\tau}$ l'ensemble accessible du système (3.11), le théorème précédent implique la proposition suivante.

Corollaire 39. *Si les ensembles accessibles $\mathcal{A}^\epsilon_{I_0,\tau}$ sont uniformément bornés par rapport à ϵ, alors il existe $k > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$d(\mathcal{A}^\epsilon_{I_0,\tau}, \mathcal{A}^0_{I_0,\tau}) \quad \leq \quad k\,\epsilon \tag{3.31}$$

3.2.3 Propriétés du système moyen

Après avoir établi des propriétés de convergence entre les solutions des systèmes originaux (3.8) et celles du système moyen (3.11) quand le paramètre ε tend vers 0, nous étudions maintenant le système moyen par lui-même.

Compacte convexe symétrique

Nous avons défini le système moyen par une inclusion différentielle (3.11) avec l'ensemble $\mathcal{E}_U(I)$ défini par (3.10). Cet ensemble présente quelques propriétés remarquables.

Proposition 40. *Si U est compact, convexe, symétrique par rapport à l'origine alors, pour tout $I \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\mathcal{E}_U(I)$ est compact, convexe, symétrique par rapport à l'origine.*

Démonstration: L'application linéaire $u \mapsto \mathcal{E}(I,u)$, définie par l'équation (3.9), de $L^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$, est continue. Comme U est compact, $L^1_{\rm loc}((\mathbb{S}^1,U)$ est un sous ensemble compact de $L^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^m)$ donc $\mathcal{E}_U(I)$, la convexité et la symétrie sont des conséquence de la linéarité. □

Plaçons nous dans le cadre des hypothèses de la propriété 40. Sous réserve d'une condition supplémentaire la contrôlabilité du système moyen devient triviale, toutes les directions de l'espace tangent sont admissibles.

Proposition 41. *Soit $I \in \mathbb{R}^n$, si U est compact, convexe, symétrique par rapport à l'origine, d'intérieur non-vide, et si*

$$\text{Rang}\left\{\frac{\partial^j \mathcal{F}}{\partial \theta^j}(I,\theta),\, j \in \mathbb{N}\right\} \;=\; n \tag{3.32}$$

pour tout θ, alors l'intérieur de $\mathcal{E}_U(I)$ est non vide.

Si la dimension k de la famille de vecteurs $\left\{\frac{\partial^j \mathcal{F}}{\partial \theta^j}(I,\theta),\, j \in \mathbb{N}\right\}$ est constante pour tout θ et inférieur à n alors $\mathcal{E}(I)$ est un convexe d'interieur non vide dans un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

Démonstration: Supposons le contraire, alors il existe $p \in T^*_I\mathbb{R}^n$, une forme linéaire non-triviale ($p \neq 0$) sur $T_I\mathbb{R}^n$ telle que

$$\langle p, v\rangle = 0,\ \forall v \in \mathcal{E}_U(I),$$

en choisissant le contrôle $u \in L_1(\mathbb{S}^1,U)$ défini par $u_i(\theta) = \langle p, f_i(I,\theta)\rangle$ (prendre p de norme plus petite pour que $u(\theta) \in U$),

$$\langle p, f_i(I,\theta)\rangle = 0$$

et en considérant les dérivées successives par rapport à θ on obtient une contradiction avec l'hypothèse de rang plein (3.32).

Pour la seconde proposition il suffit de se restreindre au sous espace vectoriel engendré par la famille $\left\{\frac{\partial^j \mathcal{F}}{\partial \theta^j}(I,\theta),\, j \in \mathbb{N}\right\}$ et d'appliquer le résultat précédent. □

La condition (3.32) est équivalente à la condition de contrôlabilité du système linéarisé autour de la trajectoire I_0 obtenue à contrôle nul (voir l'équation (1.80) dans la section 1.4.3).

Proposition 42. *Si les hypothèses de la proposition 41 sont vérifiées en tous points de $\mathbb{R}^n$ alors le système (3.11) est globalement contrôlable.*

De plus pour chaque courbe γ absolument continue de $\mathbb{R}^n$ qui relie deux points de $\mathbb{K}$ en restant dans le compact $\mathbb{K}$, il existe un paramétrage tel que $\gamma(.)$ soit solution de (3.11) et $\dot{\gamma}(t) \in \partial\mathcal{E}_U(\gamma(t))$ pour presque tout temps.

Démonstration: Soit une courbe γ absolument continue qui relie deux points I_0 et I_1 en restant dans le compact $\mathbb{K}$. Il existe $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\gamma(s) = I_0 + \int_0^s f(s')\mathrm{d}s' \,. \tag{3.33}$$

Il existe $\lambda \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que presque partout,

$$\lambda(s) f(s) \in \partial\mathcal{E}(\gamma(s)) \,. \tag{3.34}$$

Ainsi, la courbe γ paramétrée par $t = \int 1/\lambda(s)\mathrm{d}s$ est une solution du système (3.11). □

Une norme sur chaque espace tangent

Supposons que l'hypothèse de contrôlabilité (3.32) soit vérifiée. Convexe, compacte, d'intérieur non-vide, $\mathcal{E}_U(I)$ présentent toutes les propriétés de la boule unité d'une norme. Pour tout $I \in \mathbb{R}^n$ et $v \in T_I\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ il existe un unique nombre positif $\psi(I, v)$ tel que

$$v/\psi(I, v) \in \partial\mathcal{E}(I) \,.$$

Si on pose de plus que $\psi(I, 0) = 0$, alors $\psi(I, .)$ définit une norme sur $T_I\mathbb{R}^n$. L'inclusion différentielle $\dot{I} \in \mathcal{E}_U(I)$ est donc équivalente à $\psi(I, \dot{I}) \leq 1$ et si l'application ψ est assez régulière alors on obtient ainsi une géométrie de Finsler sur $T\mathbb{R}^n$ [46].

Caractérisation du bord de $\mathcal{E}_{B_1^m}(I)$

Proposition 43. *Soit $B_1^m = \{u \in \mathbb{R}^m, \|u\| \leq 1\}$, le bord de $\mathcal{E}_{B_1^m}(I)$ est couvert par la famille de vecteurs*

$$\mathcal{E}(I, u^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(I, \theta)\, u^\star \,\mathrm{d}\theta \,,$$

avec les contrôles $u^\star(p, I, \theta)$ sont définis par

$$u_i^\star(p, I, \theta) = \frac{\langle p.f_i \rangle}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \langle p.f_j \rangle^2}}. \tag{3.35}$$

avec $p \in T_I^*\mathbb{R}^n$, forme linéaire non-triviale sur $T_I\mathbb{R}^n$.

Démonstration: Le vecteur $\mathcal{E}(I, u^\star(p))$ appartient au bord de $\mathcal{E}_{B_1^m}(I)$, en effet le contrôle $u^\star(p, I, .)$ maximise la forme linéaire $p : u \mapsto \langle p, \mathcal{E}_u(I)\rangle$.

Inversement comme $\mathcal{E}_{B_1^m}(I)$ est convexe, pour chaque vecteur $v^\star$ appartenant au bord de $\mathcal{E}_{B_1^m}(I)$ il existe une forme linéaire p qui sépare l'espace : $\forall v \in \mathcal{E}_{B_1^m}(I)$, $\langle p, v\rangle \geq \langle p, v^\star\rangle$, de plus $v^\star = \mathcal{E}(I, u^*(p))$. □

Une inclusion différentielle est un système contrôlé : en chaque point on a le choix entre plusieurs champs de vecteurs. Avec $U = B_1^m$, l'inclusion différentielle (3.11) est équivalente à l'équation

$$\dot{I} = \mathcal{E}(I, u)\,, u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{S}^1, B_1^m)\,, \tag{3.36}$$

bien-sûr, le paramétrage de $\mathcal{E}_{B_1^m}$ par toutes les fonctions mesurables de $\mathbb{S}^1$ dans B_1^m, les contrôles, est redondant. Définissons l'application $v \mapsto \mathcal{G}(I, v)$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec

$$\mathcal{G}(I, v) = \|v\|\, \mathcal{E}(I, u^\star(v))\,. \tag{3.37}$$

D'après la proposition 43 le système $\dot{I} \in \mathcal{E}$ est équivalent à $\dot{I} = \mathcal{G}(I, v)$, $v \in B_1^n$.

Exemple

Considérons l'exemple académique d'un système contrôlé avec un champs de vecteur périodique (3.8). Soit $(m, n) = (1, 2)$ et une constante φ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix}\,, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{\varepsilon}\,, \quad |u| \leq 1\,.$$

Pour ce système simple nous pouvons décrire l'ensemble $\mathcal{E}(x_1, x_2)$. Il ne dépend pas de l'état du système (x_1, x_2). Nous pouvons montrer que $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ appartient à $\mathcal{E}(x_1, x_2)$ si et seulement si $\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_2 - \cos\varphi\, \dot{x}_1)^2 / \sin^2\varphi \leq 4/\pi^2$. De plus nous pouvons écrire l'inclusion différentielle (3.11) comme un système contrôlé. Si φ est un multiple entier de π, l'hypothèse (3.32) n'est pas satisfaite et on obtient un système moyen non contrôlable :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{2\,v}{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}\,, \quad |v| \leq 1\,.$$

Si φ n'est pas un multiple entier de π, on obtient un système contrôlé avec deux champs de vecteurs indépendants,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{2\,v_1}{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\varphi \end{pmatrix} + \frac{2\,v_2}{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

avec la contrainte ${v_1}^2 + {v_2}^2 \leq 1$. Dans ce cas la contrainte est quadratique, la métrique est non seulement de Finsler, mais riemannienne et même triviale, une métrique qui préserve la structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

3.2.4 Extrémales temps minimum

Pour les petits contrôles

Considérons les extrémales des problèmes de transfert en temps minimum pour les systèmes originaux (3.8) avec $\mathcal{R} = 0$ et $U = B_1^m$. Pour ces problèmes,

le pseudo-hamiltonien induit par le principe du maximum est défini par

$$H_{t/\varepsilon}(I,p,u) = \langle p, \mathcal{F}(I,\frac{t}{\varepsilon})\rangle\, u = \sum_{i=1}^{m} u_i \langle p, f_i(I,\frac{t}{\varepsilon})\rangle,\ p \in T^*_I\mathbb{R}^n\,,$$

et le contrôle $\tilde{u}(I,p,t/\varepsilon)$ qui maximise $H_{t/\varepsilon}$ est défini pour presque tout t par

$$\tilde{u}_i = \frac{\langle p, f_i(I,\frac{t}{\varepsilon})\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\langle p, f_i(I,\frac{t}{\varepsilon})\rangle^2}}\,, i \in [1,m]\,.$$

Remarquons que si les champs de vecteurs sont analytiques alors les points $\theta \in [0,2\pi]$ où $\langle p, f_i(I,\theta)\rangle = 0, \forall i \in [1,m]$ sont en nombre fini, remarquons aussi que le contrôle $\tilde{u}(I,p,.)$ est 2π-périodique. Les extrémales des systèmes originaux sont les solutions de

$$\begin{array}{rcl} \dot{p}_{I_j} & = & -\langle p, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I_j}(I,p)\rangle\, \tilde{u}\,, \\ \dot{I}_j & = & \mathcal{F}_j(I,p)\, \tilde{u}\,, \end{array} \quad j \in [1,n]\,. \tag{3.38}$$

Pour le système moyen

Supposons que l'application $\mathcal{G}(I,v)$ soit dérivable par rapport à v et que $\mathcal{G}(I,B_1^n)$ soit strictement convexe. Alors il est aisé de définir les extrémales du système moyen. Soit le pseudo-hamiltonien,

$$\mathcal{H}(I,p,v) = \langle p, \mathcal{G}(I,v)\rangle\,, \tag{3.39}$$

le contrôle qui maximise $\mathcal{H}$ est simplement $v = \frac{p}{\|p\|}$. Les extrémales du système moyen sont donc les solutions de la dynamique,

$$\begin{array}{rcl} \dot{p}_{I_j} & = & -\langle p, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_j}(I,p)\rangle, \\ \dot{I}_j & = & \mathcal{G}_j(I,p), \end{array} \quad j \in [1,n]\,. \tag{3.40}$$

Les opérations "écriture du principe du maximum" et "moyennisation" commutent, la moyenne du système des équations différentielles ordinaires obtenues par le PMP étant égale au système des équations obtenues en appliquant le PMP au système moyen.

Théorème 44. *Les équations* (3.40) *sont formellement équivalentes à la dynamique moyenne des équations des extrémales pour les systèmes originaux* (3.38).

Démonstration: Montrons que

$$\langle p, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_j}(I,p)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle p. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I_j}(I,p)\rangle\, \tilde{u}(I,p,\theta)\,\mathrm{d}\theta\,,$$

or

$$\langle p, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_j}(I,v)\rangle = \frac{\sum_{i=1}^m \langle v, f_i\rangle\langle p, \frac{\partial f_i}{\partial I_j}\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \langle v, f_i\rangle^2}} \tag{3.41}$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^m \langle v, \frac{\partial f_i}{\partial I_j}\rangle\langle p, f_i\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \langle v, f_i\rangle^2}} \tag{3.42}$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^m \langle v, f_i\rangle\langle p, f_i\rangle}{(\sum_{i=1}^m \langle v, f_i\rangle^2)^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^m \langle v, f_i\rangle\langle p, \frac{\partial f_i}{\partial I_j}\rangle\right) \tag{3.43}$$

et évalué à $v = p$

$$\langle p, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_j}(I,p)\rangle = \frac{\sum_{i=1}^m \langle p, \frac{\partial f_i}{\partial I_j}\rangle\langle p, f_i\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \langle p, f_i\rangle^2}}\,. \tag{3.44}$$

□

3.3 Conséquences pour les transferts optimaux

Dans cette section nous analysons comment le système moyen défini dans la section précédente permet d'étudier le comportement asymptotique des trajectoires optimales, pour les différents coûts temps minimum, norme L^1 ou L^2 du contrôle, des systèmes de Kepler contrôlés originaux quand le paramètre ε devient petit.

Dans ce chapitre nous proposons une démonstration du théorème suivant, conjecture énoncée dans [17] et observée expérimentalement dans [27], [28],

Considérons un problème de transfert entre deux orbites elliptiques restreint à un domaine compact connexe par arc $\mathbb{K} \subset \mathcal{C}_-$. Soit $\varepsilon > 0$ on désigne par T_ε la solution du problème en temps minimum P_T^ε défini par les équations (2.11) page 24,

Théorème 45. *Le produit $\varepsilon T_\varepsilon$ admets une limite finie positive τ_0 quand ε tend vers zéro.*

Soit $\tau_1 \geq \tau_0$, posons $T_1 = \tau_1/\varepsilon$, m_ε et E_ε les solutions respectives des problèmes optimaux P_m^ε (2.13) et P_E^ε (2.15) : les quantitées m_ε et $E_\varepsilon/\varepsilon$ convergent vers des limites finies positives quand ε tend vers zéro.

Pour montrer ce résultat nous utilisons la construction précédente : extraire le mouvement lent des variations rapides en moyennant. En effet cette procédure est valable pour la famille des systèmes de Kepler contrôlé introduit à la section 1.4 et permet de démontrer le théorème 45.

3.3.1 Temps minimum à masse constante

Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ un compact connexe par arc tel que pour tous points $I \in \mathbb{K}$ et tous $\theta \in [0, 2\pi]$, $\omega(I, \theta) \geq \omega_0 > 0$. Le système moyen associé aux équations (1.72), la forme normale du problème de Kepler contrôlé définie dans la section 1.4, est défini par

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\phi} &= \mathcal{E}(I, u)/m_0\,, \quad u \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{S}^1, B_1^m)\,, \\ \frac{d\tau}{d\phi} &= \overline{1/\omega}(I)\,, \end{aligned} \tag{3.45}$$

avec $\overline{1/\omega}(I) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1/\omega(I,\theta)\mathrm{d}\theta$.

Considèrons les problèmes de transfert optimal à masse constante pour les sytèmes originaux (1.72) avec $\varepsilon > 0$ restreint au compact $\mathbb{K}$,

$$(1.72), \quad I(0) = I_0,\, I(\phi_1) = I_1, \quad \min \tau(\phi_1)\,, \tag{3.46}$$

et le système moyen (3.45) aussi restreint au compact $\mathbb{K}$ connexe par arcs,

$$(3.45), \quad I(0) = I_0,\, I(\phi_1) = I_1, \quad \min \tau(\phi_1)\,. \tag{3.47}$$

Théorème 46. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour chaque $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ il existe une solution minimisante au problème (3.46) qui réalise le temps minimum τ_ε^{min}. Soit τ_0^{min} la solution du problème (3.47), τ_ε^{min} converge vers τ_0^{min} quand ε tend vers 0.*

Démonstration: Pour ε assez petit, le théorème 23 implique l'existence de solutions minimisantes aux problèmes (3.46) et (3.47).

Soit $(\tilde{I}, \tilde{\tau})$ une solution minimisante du problème moyen (3.47) définie sur $[0, \tilde{\phi}_1]$, la proposition 2 du théorème 38 implique qu'il existe une famille de solutions $\{(\tilde{I}_\varepsilon, \tilde{\tau}_\varepsilon)\}$ solutions des systèmes originaux (1.72) définies sur $[0, \tilde{\phi}_\varepsilon]$ telles que

$$\lim_{\varepsilon=0^+} \tilde{\phi}_\varepsilon = \tilde{\phi}_1\,, \tag{3.48}$$

$$\|\tilde{I}_\varepsilon(\tilde{\phi}_\varepsilon) - I_1\| \leq k\,\varepsilon\,. \tag{3.49}$$

Le lemme 20 implique que ces solutions peuvent être complétées uniformément avec des solutions joignant l'orbite cible I^1 pour les contraintes ε assez petites sans altérer la convergence. Plus précisément il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour chaque $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ il existe une trajectoire qui joint le point $\tilde{I}_\varepsilon(\tilde{\phi}_\varepsilon)$ au point I_1 en une longitude inférieure à $c_1\,\varepsilon$. On conserve la notation $\{(\tilde{I}_\varepsilon, \tilde{\tau}_\varepsilon)\}$ pour désigner la famille des solutions complétées définies sur un interval étendu $[0, \tilde{\phi}_\varepsilon]$ et il existe $c_2 > 0$ telle que $\tilde{\phi}_\varepsilon \leq \tilde{\phi}_1 + c_2\varepsilon$. Par définition de τ_ε^{min},

$$\tilde{\tau}_\varepsilon(\tilde{\phi}_\varepsilon) \geq \tau_\varepsilon^{min}\,. \tag{3.50}$$

Soit $\{(I_\varepsilon, \tau_\varepsilon^{min})\}$ une famille de solutions des problèmes originaux (3.46). Comme la famille des solutions $\{(\tilde{I}_\varepsilon, \tilde{\tau}_\varepsilon)\}$ convergent uniformément, l'inégalité (3.50) implique que les temps optimaux τ_ε^{min} sont uniformément bornés pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Comme par hypothèse, les vitesses admissibles sont uniformément bornées, cette famille de fonctions est equi-continue. Le théorème d'Arzelà-Ascoli implique qu'il existe une sous-suite uniformément convergente

$$\{(I_{\varepsilon_n}, \tau_{\varepsilon_n}^{min})\}$$

définie sur $[0, \phi_\varepsilon]$. Soit $(\overline{I}, \overline{\tau})$ la trajectoire limite définie sur $[0, \overline{\phi}]$. D'après la proposition 1 du théorème 38, $\overline{I}$ est une solution admissible du système moyen (3.45) telle que $\overline{I}(0) = I_0$ et $\overline{I}(\overline{\phi}) = I_1$; donc par optimalité de τ_0^{min},

$$\overline{\tau}(\overline{\phi}) \geq \tau_0^{min}\,. \tag{3.51}$$

Comme les suites $\tilde{\tau}_\varepsilon(\tilde{\phi}_\varepsilon)$ et τ_ε^{min} convergent respectivement vers τ_0^{min} et $\overline{\tau}(\overline{\phi})$, les inégalités (3.51) et (3.50) impliquent

$$\lim_{\varepsilon=0^+} \tau_\varepsilon^{min} = \tau_0^{min}\,. \tag{3.52}$$

□

3.3.2 Temps minimum à masse variable

A la section 1.2 nous avons précisé qu'une modélisation précise du système de Kepler contrôlé se devait de tenir compte de la variation de la masse du satellite. Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times]0, m_0]$ un compact connexe par arc tel que pour tous points $(I, \tau, m) \in \mathbb{K}$ et tous $\theta \in [0, 2\pi]$, $\omega(I, \theta) > 0$. Considérons le système moyen associé aux équations (1.71), la forme normale du problème de Kepler contrôlé définie dans la section 1.4,

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\phi} &= \mathcal{E}(I,u)/m\,, \quad u \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{S}^1, B_1^m)\,,\\
\frac{d\tau}{d\phi} &= \overline{1/\omega}(I)\,,\\
\frac{dm}{d\phi} &\in -[\inf_{\left\{v \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{S}^1, B_1^m),\, \mathcal{E}(I,v) = \mathcal{E}(I,u)\right\}} \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\|v(\theta)\|}{w(I,\theta)} {\rm d}\theta, \overline{1/\omega}(I)]\,.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

avec $\overline{1/\omega}(I) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1/\omega(I,\theta){\rm d}\theta$.

Considèrons les problèmes de transfert optimal pour les sytèmes originaux (1.71) et le système moyen (3.53) restreint à un compact $I \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ connexe par arcs, défini respectivement par les équations suivantes où $\phi_1 > 0$ est libre,

$$(1.71), \quad I(0) = I_0,\, m(0) = m_0,\, I(\phi_1) = I_1, \quad \min \tau(\phi_1)\,, \tag{3.54}$$

$$(3.53), \quad I(0) = I_0,\, m(0) = m_0,\, I(\phi_1) = I_1, \quad \min \tau(\phi_1)\,. \tag{3.55}$$

Théorème 47. *Il exite une masse $m_f > 0$ et il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour chaque $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ il existe une solution minimisante τ_ε^{min} au problème (3.54) tel que la masse finale reste positive $m \geq m_f$.*

Soit τ_0^{min} la solution du problème (3.55), τ_ε^{min} converge vers τ_0^{min} quand ε tend vers 0.

Démonstration: Le système moyen, ainsi que les systèmes orginaux, ne sont pas complets : il existe des trajectoires telles que la masse tend vers 0 en une longitude ϕ fini. Pour établir l'existence de trajectoires minimisantes, solutions du problème 3.55, il faut remarquer que la masse ne peut pas décroître plus vide que $-\alpha$ et donc reste bornée inférieurement par rapport à τ,

$$m(\phi) \geq m_0 - \alpha\, \tau(\phi)\,. \tag{3.56}$$

Les conditions de controlabilité impliquent l'existence d'une solution reliant I_0 à I_1 avec une masse finale strictement positive. D'autre part il existe une solution qui parcourt cette trajectoire avec une vitesse en chaque point appartenant au bord du convexe compact d'intérieure non vide $\left(m.\overline{1/\omega}(I)\right)^{-1} \mathcal{E}(I,u)$, réalisée par un contrôle de norme maximale tel que la masse décroisse à sa vitesse maximale. Cette solution relie donc I_0 à I_1 en un temps τ_f avec la masse finale $m_f = m_0 - \alpha\,\tau_f$. Cette solution implique l'existence d'une solution du problème en temps minimum pour le système moyen et on peut restreindre l'ensemble $\mathbb{K}$ au sous ensemble compact $\{(I,\tau,m) \in \mathbb{K}, m \geq m_f/2\}$. Soit $(\tilde{I},\tilde{\tau},\tilde{m})$ une solution du problème moyen (3.55) définie sur $[0,\tilde{\phi}_1]$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}(\tilde{\phi}_1) &\leq \tau_f\,, &(3.57)\\
\tilde{m}(\tilde{\phi}_1) &\geq m_f\,, &(3.58)\\
\tilde{m}(\tilde{\phi}_1) &= m_0 - \alpha\,\tilde{\tau}(\tilde{\phi}_1)\,. &(3.59)
\end{aligned}$$

Le théorème 38 s'applique au système à masse variable (1.71) en introduisant le système convexifié, ou "relaxed control", comme système intermédiare (pour un développement de la notion de "relaxed control" voir [37] et le chapitre 8.2 "Compatible vector fields and relaxation" dans [1]),

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\phi} &= F(I,\phi/\varepsilon)\,u/m\,, \quad u \in B_1^m\,,\\
\frac{d\tau}{d\phi} &= 1/\omega(I,\phi/\varepsilon)\,, &(3.60)\\
\frac{dm}{d\phi} &= -1/\omega(I,\phi/\varepsilon)v\,, \quad v \in [\|u\|,1]\,.
\end{aligned}$$

Sur tout intervalle compact, chaque solution du système à masse variable (1.71) peut être approchée uniformément par une suite de solutions du système (3.60)

et réciproquement. Ainsi il existe une famille de solutions des systèmes originaux (1.71) $\{(\tilde{I}_\varepsilon, \tilde{\tau}_\varepsilon, \tilde{m}_\varepsilon)\}$ définies sur $[0, \tilde{\phi}_1]$ telles que

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}_\varepsilon(\tilde{\phi}_1) - I_1\| &\leq k\varepsilon\,, & (3.61)\\ |\tilde{\tau}_\varepsilon(\tilde{\phi}_1) - \tilde{\tau}(\tilde{\phi}_1)| &\leq k\varepsilon\,, & (3.62)\\ |\tilde{m}_\varepsilon(\tilde{\phi}_1) - \tilde{m}(\tilde{\phi}_1)| &\leq k\varepsilon\,, & (3.63) \end{aligned}$$

et

$$\tilde{m}_\varepsilon(\tilde{\phi}_1) = m_0 - \alpha\,\tilde{\tau}(\tilde{\phi}_1) + o(\varepsilon)\,. \tag{3.64}$$

Le lemme 20 implique que ces solutions peuvent être complétées de manière uniforme avec des solutions joignant l'orbite cible I^1 pour les contraintes ε assez petites sans altérer la convergence. Plus précisément il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour chaque $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ il existe une trajectoire qui joint le point $\tilde{I}_\varepsilon(\tilde{\phi}_\varepsilon)$ au point I_1 en une longitude inférieure à $c_1\,\varepsilon$. On conserve la notation $\{(\tilde{I}_\varepsilon, \tilde{\tau}_\varepsilon)\}$ pour désigner la famille des solutions complétées définies sur un interval étendu $[0, \tilde{\phi}_\varepsilon]$ et il existe $c_2 > 0$ telle que $\tilde{\phi}_\varepsilon \leq \tilde{\phi}_1 + c_2\varepsilon$. Par définition de τ_ε^{min},

$$\tilde{\tau}(\tilde{\phi}_\varepsilon) \geq \tau_\varepsilon^{min}\,. \tag{3.65}$$

Ces solutions impliquent l'existence des solutions τ_ε^{min} des problèmes optimaux originaux (3.54) et par hyptothèse d'optimalité de τ_ε^{min},

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon^{min} &\leq \tilde{\tau}_\varepsilon(\tilde{\phi}_\varepsilon)\,, & (3.66)\\ m_\varepsilon &\geq \tilde{m}_\varepsilon(\tilde{\phi}_\varepsilon)\,. & (3.67) \end{aligned}$$

Soit $\{(I_\varepsilon, \tau_\varepsilon^{min}, m_\varepsilon)\}$ une famille de solutions des problèmes originaux (3.54). D'après l'inégalité (3.66), les temps optimaux sont uniformément bornés pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, et, les vitesses admissibles étant uniformément bornée, cette suite de fonstions est equi-continue. Le théorème d'Arzelà-Ascoli implique qu'il existe une sous-suite uniformément convergente $\{(I_{\varepsilon_n}, \tau_{\varepsilon_n}^{min}, m_{\varepsilon_n})\}$ définie sur $[0, \phi_{\varepsilon_n}]$. Soit $(\overline{I}, \overline{\tau}, \overline{m})$ la trajectoire limite définie sur $[0, \overline{\phi}]$. D'après la proposition 1 du théorème 38, $\overline{I}$ est une solution admissible du système moyen (3.45) telle que $\overline{I}(0) = I_0$ et $\overline{I}(\overline{\phi}) = I_1$; donc par optimalité de τ_0^{min},

$$\overline{\tau}(\overline{\phi}) \geq \tau_0^{min}\,. \tag{3.68}$$

Comme les suites $\tilde{\tau}_\varepsilon(\tilde{\phi}_\varepsilon)$ et τ_ε^{min} convergent respectivement vers τ_0^{min} et $\overline{\tau}(\overline{\phi})$, les inégalités (3.68) et (3.65) impliquent

$$\lim_{\varepsilon=0^+} \tau_\varepsilon^{min} = \tau_0^{min}\,. \tag{3.69}$$

□

3.3.3 Masse finale maximale et énergie minimale

Fixons un temps de transfert supérieur au temps de transfert optimal, soit $\tau_1 \geq \tau_0^{min}$, les coûts masse ou énergie sont définis par

$$y = \int_0^{\tau_1/\varepsilon} \varphi(u)dt,$$

avec $\varphi(u) = \|u\|$ pour la masse ou $\varphi(u) = \|u\|^2$ pour l'énergie.

Nous avons défini un système moyen pour les systèmes linéaires périodiques. Pour définir un système moyen associé à d'autres coûts que le temps minimum, il est nécessaire de considérer les systèmes étendus (2.4) et d'utiliser le principe de relaxation pour les sytèmes contrôlés (voir chapitre 8.2 de [1]) : seule l'enveloppe convexe des vitesses admissibles détermine l'ensemble accessible. En effet, si $\varphi(u) = \|u\|$ ou $\varphi(u) = \|u\|^2$, l'ensemble accesible du système étendu

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{I} & = & F\,u\,,\ u \in B_1^m\,, \\ \dot{y} & = & \varphi(u)\,, \end{array} \right. \tag{3.70}$$

est égal à l'ensemble accessible du système relaxé, linéaire convexe,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{I} & = & F\,u\,, u \in B_1^m\,, \\ \dot{y} & = & v\,, v \in [\varphi(u), 1]\,. \end{array} \right. \tag{3.71}$$

D'autre part si l'objectif de l'optimisation est la masse finale du satellite, $\varphi(u) = \|u\|$, alors l'extension du changement d'échelle (1.68) à la variable y est trivial,

$$Y = y\,.$$

Par contre si l'objectif de l'optimisation est l'énergie, $\varphi(u) = \|u\|^2$, alors l'extension du changement d'échelle (1.68) à la variable y est défini par

$$Y = \varepsilon\, y\,.$$

Comme pour définir le système moyen du système de Kepler contrôlé à masse variable, il est nécessaire de modifier les équations (3.53) pour tenir compte de la variable supplémentaire Y qui compte le coût à optimiser,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dI}{d\phi} & \in & \mathcal{E}(I,u)/m\,, u \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{S}^1, B_1^m)\,, \\ \dfrac{dm}{d\phi} & \in & -\left[\inf\limits_{\left\{v \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{S}^1, B_1^m), \mathcal{E}(I,v) = \mathcal{E}(I,u)\right\}} \dfrac{\alpha}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\|v(\theta)\|}{w(I,\theta)} {\rm d}\theta, \overline{1/\omega}(I) \right] \\ \dfrac{dY}{d\phi} & \in & \left[\inf\limits_{\left\{v \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{S}^1, B_1^m), \mathcal{E}(I,v) = \mathcal{E}(I,u)\right\}} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(v(\theta))}{w(I,\theta)} {\rm d}\theta, \overline{1/\omega}(I) \right]. \end{array} \tag{3.72}$$

Considèrons maintenant les problèmes de transfert optimal pour les sytèmes originaux (1.71) et le système moyen (3.53) restreint au compact $\mathbb{K}$ connexe par arcs, défini respectivement par les équations

$$(1.71), \quad I(0) = I_0,\, m(0) = m_0,\, I(\phi_1) = I_1, \quad \min Y(\phi_1)\,, \tag{3.73}$$

$$(3.72), \quad I(0) = I_0,\, m(0) = m_0,\, I(\phi_1) = I_1, \quad \min Y(\phi_1)\,. \tag{3.74}$$

Théorème 48. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que pour chaque $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ il existe une unique solution Y_ε au problème (3.73). Soit Y_0 la solution du problème (3.74), Y_ε converge vers Y_0 quand ε tend vers 0.*

Démonstration: Reprendre la preuve du théorème 47 en changeant τ par Y. □

Pour une métrique de Finsler, comme pour les métriques riemanienne, la longueur d'une courbe ne dépend pas de la paramétrisation choisie. Ainsi on peut définir l'énergie d'une courbe et rechercher les géodésiques en minimisant l'énergie. Il est important de noter que ce problème n'est pas équivalent au problème de minimisation de la norme L^2 du contrôle sous la contrainte d'effectuer un transfert pour les systèmes originaux. Par ailleurs, si on calcule le système moyen, associé au système relaxé pour l'énergie, avec des temps τ_1 assez grand et pour des orbites assez proches, on retrouve le système étudié dans [14].

3.4 Les transferts coplanaires

Dans ce chapitre nous considérons le cas particulier des transferts à masse constante entre deux orbites elliptiques coplanaires. Nous étudions les transferts en demi-grand axe et excentricité, l'orientation des ellipses étant laissée libre. Pour les transferts plan en demi-grand axe et excentricité le système moyen associé au temps minimum est géodésiquement complet.

Dans [14] les auteurs ont construit un système moyen associé aux extrémales du problème P_E^ε en relâchant la contrainte sur le module de poussée. Ils ont mis en évidence que le système moyen ainsi construit est associé à une métrique riemannienne sur $\mathcal{C}_-$, mais que cette métrique n'est pas géodésiquement complète : étant donnée deux points de $\mathcal{C}_-$ il n'existe pas toujours une géodésique restant à l'intérieur de $\mathcal{C}_-$ qui les relie.

3.4.1 Le système moyen

Commençons par écrire le système (1.35) à masse constante sous sa forme normale définie à la section 1.4, $\frac{d\theta}{dt}$ est strictement positif pour tout $e \in [0, 1[$. Après changement d'échelle et inversion du temps et de l'angle, on obtient la dynamique des intégrales premières (a, e, ω) par rapport à θ,

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{d\theta} \\ \frac{de}{d\theta} \\ \frac{d\omega}{d\theta} \end{pmatrix} = \left[u_t \begin{pmatrix} 2\frac{a^3}{\mu}\alpha_a/w \\ 2\frac{a^2}{\mu}\alpha_e/w \\ 2\frac{a^2}{\mu}\alpha_\omega/w \end{pmatrix} + u_n \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a^2}{\mu}\beta_e/w \\ \frac{a^2}{\mu}\beta_\omega/w \end{pmatrix} \right], \|u\| \leq 1\,, \tag{3.75}$$

où α_a, α_e, α_ω, β_e, β_ω sont les fonctions de (a, e, θ) définies par les équations (1.36), (1.37) et (1.38). La dynamique du temps,

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{w}. \tag{3.76}$$

Le système moyen par rapport à la variable d'angle θ,

$$\frac{dI}{d\theta} \in \tilde{\mathcal{E}}, \tag{3.77}$$

avec

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{a^2}{2\pi\mu}\left\{\int_0^{2\pi} u_t(v)\begin{pmatrix} 2a\frac{\alpha_a}{w} \\ 2\frac{\alpha_e}{w} \\ 2\frac{\alpha_\omega}{w}\end{pmatrix} + u_n(v)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta_e}{w} \\ \frac{\beta_\omega}{w}\end{pmatrix} dv,\ u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{S}^1, B_1^2)\right\} \tag{3.78}$$

Et en utilisant la propriété classique de l'anomalie excentrique moyenne,

$$\forall e \in [0,1[,\ \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+e\cos\nu)^2}d\nu = 1, \tag{3.79}$$

le système moyen peut se réécire en utilisant comme variable libre τ,

$$\frac{dI}{d\tau} \in \mathcal{E}, \tag{3.80}$$

avec

$$\mathcal{E}(a,e,\omega) \quad = \quad \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}\tilde{\mathcal{E}}\,, \tag{3.81}$$

Pour tout $a > 0$, $e \in]0,1[$ et $\omega \in S^1$, l'ensemble $\mathcal{E}(a,e,\omega)$ est un compact convexe d'intérieur non vide, symétrique par rapport à l'origine.

Le membre de droite dans l'équation (3.81) ne dépend pas de la variable ω, on peut donc considérer les transferts en demi-grand axe et excentricité $(a,e) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0,1[$ dont la dynamique moyenne est donnée par

$$\frac{d(a,e)}{d\tau} \in \mathcal{E}(a,e)\,, \tag{3.82}$$

avec

$$\mathcal{E}(a,e) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{\mu}}\left\{\int_0^{2\pi} u_t\begin{pmatrix} 2a\frac{\alpha_a}{w} \\ 2\frac{\alpha_e}{w}\end{pmatrix} + u_n\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta_e}{w}\end{pmatrix} dv,\ u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{S}^1, B^1)\right\} \tag{3.83}$$

D'après la propriété 40, l'ensemble $\mathcal{E}(a,e)$ est un compact convexe symétrique par rapport à l'origine et d'interieur non-vide pour tous les points $(a,e) \in]0,\infty[\times[0,1[$. Le système moyen est défini sur la bande semi ouverte

$$\mathcal{B} =]0,+\infty[\times[0,1[\,. \tag{3.84}$$

D'après la proposition 43, les vecteurs vitesse v appartenant à $\partial\mathcal{E}$, le bord de $\mathcal{E}$, sont entiérement couverts par les vecteurs $v(p_a,p_e) = \mathcal{E}((a,e),u^\star(p_a,p_e))$ avec $(p_a,p_e) \in \mathbb{R}_*^2$ et les contrôles $u^\star(p_a,p_e)$ définis par

$$u_t^\star = \frac{2a\alpha_a p_a + 2\alpha_e p_e}{\sqrt{(2a\alpha_a p_a + 2\alpha_e p_e)^2 + (\beta_e p_e)^2}}, \tag{3.85}$$

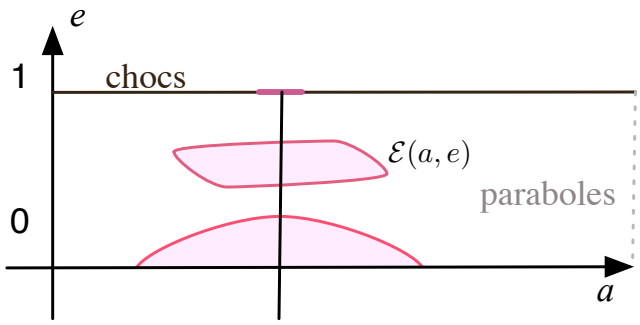


FIG. 3.1 – Le système moyen contrôlé en (a, e)

et

$$u_n^\star = \frac{\beta_e p_e}{\sqrt{(2a\alpha_a p_a + 2\alpha_e p_e)^2 + (\beta_e p_e)^2}}. \tag{3.86}$$

Remarque 49. Contrairement à l'oscillateur harmonique contrôlé (voir la section 2.3 le système à deux corps contrôlé admet de nombreuses fonctions de Lyapunov possibles, l'état du système moyen est de dimension supérieure à 1, il existe de nombreux chemins qui relient deux orbites.

3.4.2 Temps minimum

Dans cette sous-section on utilisera la variable I pour désigner le couple demi grand axe excentricité (a, e). Considérerons le problème de transfert entre deux points $I_0 = (a_0, e_0)$ et $I_1 = (a_1, e_1)$ appartenant à $\mathcal{B}$,

$$\begin{array}{l} \frac{dI}{d\tau} \in \mathcal{E}(I)\,, \\ \forall\, \tau \in [0, \tau_1],\, I(\tau) \in \mathcal{B}\,, \\ I(0) = I_0\,,\, I(\tau_1) = I_1\,. \end{array} \tag{3.87}$$

La condition de contrôlabilité (1.43) implique qu'il existe une trajectoire qui relie (a_0, e_0) à (a_1, e_1) en un temps fini, c'est à dire qu'il existe au moins une solution aux équations (3.87). Comme tous ces temps de transfert sont des réels positifs, il existe une borne inférieure

$$\tau_0 = \inf\{\tau_1,\, \gamma \text{ solution de (3.87) définie sur } [0, \tau_1]\}\,. \tag{3.88}$$

Théorème 50. *Il existe une solution minimisante du système* (3.87)*, solution qui relie* I_0 *à* I_1 *en un temps* τ_0*.*

Démonstration: Nous allons montrer qu'il existe un compact $\mathbb{K} \subset \mathcal{B}$, tel que toutes les suites de trajectoires minimisantes du problème (3.87) restent dans $\mathbb{K}$ à partir d'un certain rang.

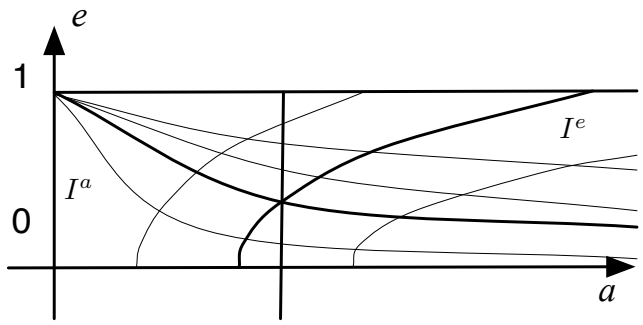


FIG. 3.2 – Feuilletage du domaine par les familles de solutions I^a et I^e

Pour constuire ce domaine compact $\mathbb{K}$, on utilise les familles $\{I^a\}$, $\{I^e\}$ solutions particulières du système (3.82) qui respectivement maximisent localement $\dot{a}$ (3.97) et $\dot{e}$ (3.92). Chacune des deux familles $\{I^a\}$, $\{I^e\}$ définit un feuilletage de la bande $\mathcal{B}$, l'une par des courbes strictement décroissantes, en fonction de a, l'autre par des courbes strictement croissantes, en fonction de a. On conserve la notation I^a (I^e) pour désigner la courbe engendrée par une trajectoire $I^a(.)$ ($I^e(.)$) appartenant à la famille $\{I^a\}$ ($\{I^e\}$). Selon le context on choisira de paramétrer ces courbes par le temps, le demi-grand axe, ou l'excentricité.

Les propriétés 51 et 53 impliquent qu'il existe un point $A \in \mathcal{B}$ tel que

$$I_0, I_1 \in \{(a,e) \in \mathcal{B},\, a \geq I_A^e(e),\, e \leq I_A^a(a)\}\,, \tag{3.89}$$

où I_A^e et I_A^a sont les courbes de $\{I^a\}$, $\{I^e\}$ initialisées à A.

Les propriétés 52, 54 et 58 impliquent qu'il existe $\tilde{a} < +\infty$ et n_1 tels que pour tout $n > n_1$ chaque trajectoire γ_n appartient à l'ensemble compact $\mathbb{K}$ contenu dans $\mathcal{B}$ défini par

$$\mathbb{K} = \{(a,e) \in \mathcal{B},\, a \geq I_A^e(e),\, e \leq I_A^a(a),\, a \leq \tilde{a}\}\,, \tag{3.90}$$

car chaque solution de (3.87) qui sort de $\mathbb{K}$ peut être remplacée par une solution plus rapide qui reste dans $\mathbb{K}$. □

3.4.3 Analyse du système moyen

Deux types de solutions sont importantes pour décrire qualitativement le comportement du système moyen (3.82) : les solutions $\{I^e\}$ obtenues en maximisant localement $\dot{e}$ données par le contrôle $u^\star(0,1)$ et les solutions $\{I^a\}$ obtenues en maximisant localement $\dot{a}$ données par le contrôle $u^\star(1,0)$.

Maximisation locale de $\dot{e}$

Nous analysons maintenant la dynamique résultant de la maximisation locale de $\dot{e}$, décrite par les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{d\tau} \\ \frac{de}{d\tau} \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} a\,\mathcal{I}_a^e(e) \\ \mathcal{I}_e^e(e) \end{pmatrix}, \tag{3.91}$$

avec

$$\mathcal{I}_a^e(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{4\alpha_a\alpha_e}{w\sqrt{(2\alpha_e)^2+\beta_e^2}}\,d\theta,$$

et

$$\mathcal{I}_e^e(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{(2\alpha_e)^2+\beta_e^2}}{w}\,d\theta\,.$$

Proposition 51. *Soit $(\tilde{a},\tilde{e})\in\mathcal{B}$, il existe une unique solution maximale I^e de la dynamique (3.91) initialisée à $I^e(0)=(\tilde{a},\tilde{e})$ définie sur $[\tau_0,\tau_1[$ et il existe $a_0\in]0,+\infty[$, $a_1\in]0,+\infty]$, $a_0<a_1$ tels que $I^e(\tau_0)=(a_0,0)$ et $\lim_{\tau\to\tau_1^-} I^e = (a_1,1)$.*

De plus le graphe de cette solution est aussi le graphe d'une fonction croissante de e définie sur $[0,1[$ et le graphe d'une fonction croissante de a définie sur $[a_0,a_1[$.

Démonstration:
Clairement $\mathcal{I}_a^e(0)=0$, et pour tout $e\in]0,1[$, $\mathcal{I}_a^e(e)>0$. En effet, soit $e\in]0,1[$,

$$\mathcal{I}_a^e = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{A}{\sqrt{1-e^2}\sqrt{B}}\,d\nu\,,$$

avec

$$\begin{aligned} A &= (1+e\cos\nu)(e+\cos\nu)\sqrt{1+e^2+2e\cos\nu}\,,\\ B &= 4(e+\cos\nu)^2(1+e\cos\nu)^2+(1-e^2)^2\sin^2\nu\,. \end{aligned}$$

Utilisons le changement de variable $\nu=\tan t/2$, $\cos\nu=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\nu=\frac{2t}{1+t^2}$, $d\nu=\frac{2}{1+t^2}$ et $\kappa=\frac{1-e}{1+e}$; de bref calculs conduisent à

$$A=\frac{(1+e)^3}{(1+t^2)^{5/2}}(1-\kappa\,t^2)(1+\kappa\,t^2)\sqrt{1+\kappa^2t^2}\,,$$

et

$$B=4\frac{(1+e)^4}{(1+t^2)^4}\left((1-\kappa\,t^2)^2(1+\kappa\,t^2)^2+\kappa^2t^2\right)\,.$$

Ainsi

$$\mathcal{I}_a^e=\frac{(1+e)}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathcal{A}(t)\,dt\,,$$

avec

$$\mathcal{A}(t)=\frac{(1-\kappa t^2)(1+\kappa t^2)\sqrt{1+\kappa^2t^2}}{(1+t^2)^{1/2}\sqrt{(1-\kappa t^2)^2(1+\kappa t^2)^2+\kappa^2t^2}}\,,$$

or

$$\mathcal{A}(\frac{1}{\kappa t})\frac{1}{\kappa t^2} = -\mathcal{A}(t)\left(\kappa\frac{1+t^2}{1+\kappa^2t^2}\right)^3,$$

donc $\forall e \in]0,1[$, $\mathcal{I}_a^e(e) > 0$.

D'autre part $\mathcal{I}_e^e(a) = 1$ et la fonction $\mathcal{I}_e^e(.)$ est strictement positive sur $[0,1[$ et tend vers 0 quand e tend vers 1 par valeurs inférieures. En effet,

$$\frac{\frac{\sqrt{(2\alpha_e)^2+\beta_e^2}}{w} = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\nu)^2}}{\sqrt{\frac{2(1-e^2)(e+\cos\nu)^2}{(e+\cos\nu)^2+\sin^2\nu} + \frac{(1-e^2)^3\sin^2\nu}{(1+e\cos\nu)^2((e+\cos\nu)^2+\sin^2\nu)}}}$$

donc

$$0 < \frac{\sqrt{(2\alpha_e)^2+\beta_e^2}}{w} \leq 6\sqrt{3}\sqrt{1-e},\ \forall e \in [0,1[\,.$$

Ainsi pour tout $e \in [0,1[$, $a\,\mathcal{I}_a^e(e)/\mathcal{I}_e^e(e) \geq 0$, donc la solution I^e de (3.97) initialisée à $(\tilde{a},\tilde{e})$ peut être paramétrée par e et est la solution du problème de Cauchy,

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}e} = a\frac{\mathcal{I}_a^e}{\mathcal{I}_e^e}, \qquad a(\tilde{e}) = \tilde{a}\,. \tag{3.92}$$

C'est à dire,

$$I^e(e) = \tilde{a}\exp\int_{\tilde{e}}^{e}\mathcal{I}_a^e(s)/\mathcal{I}_e^e(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{3.93}$$

□

Proposition 52. *Pour chaque solution $\gamma = (\gamma_a, \gamma_e)$ du système (3.82) qui passe à gauche d'une solution I^e du système (3.91),*

$$\gamma_a \geq I^e(\gamma_e)\,. \tag{3.94}$$

il existe une solution plus rapide qui reste à droite de la trajectoire I^e.

Démonstration: Cette propriété est une conséquence de la dilatation des vitesses admissibles $\mathcal{E}$ quand a augmente

$$\forall\, e \in [0,1[,\ a_0 < a_1,\ \mathcal{E}(a_0,e) \subset \mathcal{E}(a_1,e)\,. \tag{3.95}$$

Soit $\gamma = (a_\gamma(s), e_\gamma(s))$, une solution de (3.82), on définit sa projection à droite sur I^e par

$$\Pi_{I^e}^{\gamma}(s) = (\max(I^e(\,e_\gamma(s)), a_\gamma(s))\ ,\ e_\gamma(s))\ . \tag{3.96}$$

Cette courbe étant absolument continue[1], la propriété 42 implique qu'il existe une solution de (3.82) qui la parcourt en maximisant la norme de la vitesse presque partout. La dilatation (3.95) implique que cette solution joint les points I_0 et I_1 en un temps plus court que la solution γ. □

[1]Une fonction f est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$ implique $\sum_{i=1}^N |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$, pour toute famille de segments disjoints $]a_1,b_1[,\ldots,]a_N,b_N[$ (voir [44]) ; or $|\min(a,0) - \min(b,0)| \leq |a-b|$.

Maximisation locale de $\dot{a}$

Nous analysons maintenant le contrôle qui maximise localement la croissance du demi grand axe a, soit la dynamique :

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{d\tau} \\ \frac{de}{d\tau} \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} a\,\mathcal{I}_a^a(e) \\ \mathcal{I}_e^a(e) \end{pmatrix}, \tag{3.97}$$

avec

$$\mathcal{I}_a^a(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_a/w\, d\theta\,, \tag{3.98}$$

$$\mathcal{I}_e^a(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_e/w\, d\theta\,. \tag{3.99}$$

Proposition 53. *Soit $(\tilde{a},\tilde{e}) \in \mathcal{B}$. Il existe une unique solution maximale I^a de la dynamique (3.97) initialisée à $I^a(0) = (\tilde{a},\tilde{e})$. Cette solution est définie sur $]-\infty,\tau_1[$, $\lim_{\tau\to-\infty} I^a = (0,1)$ et $\lim_{\tau\to\tau_1^-} I^a = (+\infty, 0)$.*

Démonstration: Pour caractériser les fonctions $\mathcal{I}_a^a$ et $\mathcal{I}_e^a$ il est très pratique d'utiliser l'anomalie excentrique moyenne ψ défini par

$$\cos\nu = \frac{\cos\psi - e}{1 - e\,\cos\psi}\,, \tag{3.100}$$

$$\sin\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\,\cos\psi}\,, \tag{3.101}$$

et

$$\mathrm{d}\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\,\cos\psi}\mathrm{d}\psi\,. \tag{3.102}$$

En utilisant ce changement de variable, ces intégrales peuvent s'exprimer à partir des fonctions elliptiques

$$\mathcal{I}_a^a(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2\,\cos^2\psi}\,\mathrm{d}\psi\,, \tag{3.103}$$

et

$$\mathcal{I}_e^a(e) = \frac{(1-e^2)}{2\pi\, e}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2\,\cos^2\psi}\left(\frac{1}{1 + e\,\cos\psi} - 1\right)\mathrm{d}\psi\,, \tag{3.104}$$

$$= -\frac{e(1-e^2)}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\psi}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi}}\,\mathrm{d}\psi\,, \tag{3.105}$$

$$= -\frac{1-e^2}{e}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi}} - \mathcal{I}_e^a\right]. \tag{3.106}$$

En particulier $\forall e \in]0,1[$, $\mathcal{I}_e^a(e) < 0$, les solutions de (3.97) après un reparamètrage par e sont les solutions du système intégrable

$$\frac{da}{de} = \frac{a\,\mathcal{I}_a^a(e)}{\mathcal{I}_e^a(e)}\,. \tag{3.107}$$

Soit I^a, la solution initialisée à $a(\tilde{e}) = \tilde{a}$,

$$I^a(e) = \tilde{a} \exp\left(- \int_{\tilde{e}}^{e} \frac{\mathcal{I}_a^a(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\frac{1-\xi^2}{\xi}(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\xi^2\cos^2\psi}} - \mathcal{I}_a^a(\xi))} \right) \tag{3.108}$$

L'égalité (3.105) implique que I^a est une fonction décroissante de e. L'intégrale dans l'exponentielle diverge en $e = 1$. En effet, posons $\xi = 1-\epsilon$, comme $\sin\psi \geq \frac{2}{\pi}\psi$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2\cos^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(2-\epsilon)+(1-\epsilon)^2\sin^2\psi}}\,, \tag{3.109}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon(2-\epsilon)+\frac{4(1-\epsilon)^2}{\pi^2}\psi^2}}\,, \tag{3.110}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-(1-\epsilon)^2\cos^2\psi}} \leq \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\epsilon(2-\epsilon)}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1+(\frac{4(1-\epsilon)^2}{\pi\epsilon(2-\epsilon)}\psi^2)}}\,,$$

$$\leq \frac{1}{1-\epsilon}\ \mathrm{Argsh}\ \frac{1-\epsilon}{\sqrt{\epsilon(2-\epsilon)}}\,. \tag{3.111}$$

Donc au voisinage de $e = 1^-$, c'est à dire au voisinage de $\epsilon = 0^+$, l'intégrante est supérieure à $-\frac{1}{\epsilon\log 1/\epsilon}$ dont l'intégrale diverge en $\epsilon = 0^+$. Ainsi $\lim_{e=1_-} I^a(e) = 0$. □

Proposition 54. *Pour chaque solution $\gamma = (\gamma_a, \gamma_e)$ du système (3.82) qui passe au dessus d'une solution I^a du système (3.97),*

$$\gamma_e \geq I^a(\gamma_a)\,, \tag{3.112}$$

il existe une solution du système (3.82) plus rapide qui reste en dessous de la trajectoire I^a. Soit $a_1 > a_0$.

Démonstration: Cette propriété est une conséquence de la contraction des vitesses admissibles $\mathcal{E}$ quand e augmente ; en effet la fonction $e \mapsto \mathcal{I}_a^a(e)$ définie par l'équation (3.103) est décroissante sur $[0,1]$. Soit $\gamma = (a_\gamma(s), e_\gamma(s))$, une solution de (3.82), on définit sa projection à droite sur I^a par

$$\Pi_{I^a}^\gamma(s) = (a_\gamma(s)\,,\, \max\,(I^a(a_\gamma(s)), e_\gamma(s)))\ . \tag{3.113}$$

Cette courbe étant absolument continue, la propriété 42 implique qu'il existe une solution de (3.82) qui la parcourt en maximisant la norme de la vitesse presque partout. La décroissance (3.103) implique que cette solution joint les points I_0 et I_1 en un temps plus court que la solution γ. □

Les transferts entre niveaux d'énergie

Rappellons que pour les orbites elliptiques l'énergie est inversement proportionnelle au demi-grand axe

$$H = -\frac{\mu}{2\,a}\,. \tag{3.114}$$

Dans les coordonnées $(a, e) \in \mathcal{B}$ les niveaux d'énergie, les ensembles d'orbites elliptiques de même énergie (1.5) sont définis par les segments verticaux,

$$E_{a_0} = \{(a, e) \in \mathcal{B}, a = a_0\}. \tag{3.115}$$

Proposition 55. *Soit $0 < a_0 < a_1 < +\infty$, le temps optimal pour joindre les deux niveaux d'énergie E_{a_0} et E_{a_1} vaut*

$$\tau_{a_0,a_1} = |\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a_0}} - \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a_1}}|\,, \tag{3.116}$$

et la droite des orbites circulaire ($e = 0$) est le chemin le plus rapide pour joindre deux niveaux d'énergie.

Démonstration: L'équation (3.103) implique qu'à demi-grand axe fixé la vitesse maximum possible pour faire croître a est atteinte pour $e = 0$ et est telle que

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{2\,a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\,, \tag{3.117}$$

$$\frac{de}{d\tau} = 0\,. \tag{3.118}$$

□

La propriété 55 implique qu'il faut un temps fini pour atteindre les orbites paraboliques $H = 0$, $a = +\infty$ et un temps infini pour atteindre l'énergie $H = -\infty$, $a = 0$.

Soit $(a_0, e_0) \in \mathcal{B}$ et $a_1 \in]a_0, +\infty[$. Considérons le problème de transfert en temps minimum entre le point (a_0, e_0) et le niveau d'énergie E_{a_1},

$$\begin{array}{l} \frac{dI}{d\tau} \in \mathcal{E}(I)\,, \\ \forall\, \tau \in [0, \tau_1],\, I(\tau) \in \mathcal{B}\,, \\ I(0) = I_0\,,\, I(\tau_1) = I_1\,. \end{array} \tag{3.119}$$

Proposition 56. *Soit $(a_0, e_0) \in \mathcal{B}$ et $a_1 \in]a_0, +\infty[$, pour chaque suite $\{\gamma_n\}$ de solutions minimisantes pour le problème (3.119) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$*

$$\gamma_n \in \left\{(a, e) \in \mathcal{B}, a \in [I^e_{(a_0,e_0)}(e), a_1], e \in [0, I^a_{(a_0,e_0)(a)}]\right\}. \tag{3.120}$$

Démonstration: C'est une conséquence des propriétés 52 et 54. □

Changement d'échelle

Soit $k > 0$, considérons l'application suivante :

$$\mathcal{R}_k : (t, a, e) \to (t\sqrt{k},\, k\,a,\, e). \tag{3.121}$$

Proposition 57. *Soit $(a, e) \in \mathcal{B}$. Pour tout $k > 0$, l'application $\mathcal{R}_k$ est une bijection des solutions du système contrôlé défini par (3.82). De plus*

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{A}^{\tau}_{(a,e)} = \mathcal{A}^{\tau/\sqrt{k}}_{(k\,a,e)}\,. \tag{3.122}$$

Démonstration:
Soit $(a, e)(t)$ une solution de (3.82) définit sur l'intervalle $[0, T]$, il existe une application $u \in L^1_{\text{loc}}([0, T] \times \mathbb{S}^1, B^1)$ tel que pour presque tout $t \in [0, T]$, $(\dot{a}, \dot{e}) = \mathcal{E}(a, e, u)$. Soit $(\hat{a}, \hat{e})(t) = (k\,a, e)(t)$, en choisissant le contrôle $\hat{u}(t, v) = u(\sqrt{k}t, v)$, on a pour presque tout $t \in [0, \frac{T}{\sqrt{k}}]$, $(\dot{\hat{a}}, \dot{\hat{e}}) = \mathcal{E}(\hat{a}, \hat{e}, \hat{u})$. □

Proposition 58. *Pour tous $e \in [0, 1[$ et $a \in]0, +\infty[$ il existe $\tilde{a} < +\infty$ tels que pour tous $e_0, e_1 \in [0, e]$ chaque solution qui relie (a, e_0) à (a, e_1) et qui dépasse le niveau d'énergie $\tilde{a}$ peut être remplacée par une solution plus rapide qui reste dans $\{(a, e) \in \mathcal{B}, a \leq \tilde{a}\}$.*

Démonstration: Soient $e_0, e_1 \in [0, e]$, supposons $e_0 < e_1$. Soit γ_0 une trajectoire temps minimum qui joint (a, e_0) à $a = +\infty$ et γ_1 qui joint en temps minimum (a, e_1) à $a = +\infty$. La propriété 56 implique qu'une trajectoire $I^{+\infty}$ qui joint (a, e_0) à $a = +\infty$ en temps minimum converge vers l'axe $e = 0$ quand a devient grand. La propriété 57 implique qu'il existe un point $(\tilde{a}_0, \tilde{e}_0)$ appartenant à la trajectoire γ_0 et un temps $\tilde{\tau} > 0$ tels que

$$\mathcal{A}^{\tilde{\tau}}_{(\tilde{a}_0, \tilde{e}_0)} \subset \mathcal{B}\,, \tag{3.123}$$

$$\mathcal{A}^{\tilde{\tau}}_{(\tilde{a}_0, \tilde{e}_0)} \cap \gamma_1 \neq \emptyset\,, \tag{3.124}$$

et donc une valeur maximale du demi-grand axe qu'il n'est pas nécesaire de dépasser pour joindre les points (a, e_0) et (a, e_1).

La compacité du segment $[0, e]$ implique l'existence une valeur maximale du demi-grand axe,$\tilde{a}$, qu'il n'est pas nécessaire de dépasser, pour joindre tous les points (a, e_0) et (a, e_1) avec $e_0, e_1 \in [0, e]$. □

Chapitre 4

Autour de Jurdjevic-Quinn

Dans ce chapitre on démontre la convergence exponentielle des contrôles en boucle fermée, de type Jurdjevic-Quinn, pour les systèmes de Kepler contrôlés à masse variable. On s'intéresse au comportement de la commande saturée pour un système contrôlé affine satisfaisant les conditions de Jurdjevic-Quinn. On démontre qu'il n'existe pas de solutions de Fillipov pénalisantes pour assurer une stabilisation pratique quand le module maximal du contrôle est petit. Puis on introduit le concept d'interpolation de Lyapunov pour les sytèmes contrôlés linéaires dans les contrôles avec des champs de vecteurs périodiques par rapport à la variable libre : on étudie la possibilité, connaissant une loi de commande en boucle ourverte et sa trajectoire associée, d'étendre à un voisinage de la trajectoire cette commande par une loi de commande en boucle fermée stabilisant au sens de Lyapunov le point final de cette trajectoire. Enfin on propose une loi de commande en boucle fermée hybride afin de réduire la consommation de carburant.

4.1 Stabilisation exponentielle des systèmes de Kepler

Dans [23] J.-M. Coron souligne que le système à deux corps contrôlés à masse constante satisfait aux conditions de la méthode Jurdjevic-Quinn. Bien sûr les systèmes de Kepler contrôlés (1.69)

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= F(I,\phi/\varepsilon)\, v/m\,, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= w(I,\phi/\varepsilon) + \varepsilon\, g(I,\phi/\varepsilon) v/m\,, \qquad v \in B_1\,. \\ \frac{dm}{d\tau} &= -\alpha\|v\|\,, \end{aligned}$$

satisfont aux hypothèses du théorème de Jurdjevic-Quinn.

Soit I^1 une orbite cible, considérons la famille de fonctions définies positives

$$\mathcal{V} = \left\{ V_k(I) = \sum_{i=1}^{m} k_i (I_i - I_i^1)^2, k_i > 0 \right\}. \tag{4.1}$$

Soit V_k une fonction appartenant à $\mathcal{V}$, V_k est une *intégrale première de la dérive*.

$$L_{f_0} V_k = 0. \tag{4.2}$$

La fonction V_k est *propre*,

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, V_k^\beta = \{(q,\phi), V_k(q,\phi) \leq \beta\} \text{ est compacte,} \tag{4.3}$$

et n'a pas de point critique en dehors de l'orbite cible,

$$dV_k(I,\phi) = 0 \Rightarrow I = I^1. \tag{4.4}$$

Ces deux conditions impliquent que V_k atteint son minimum en I^1. Ainsi qu'il est développé dans la section 1.4.3, la condition de contrôlabilité forte, nécessaire au théorème de Jurdjevic-Quinn, est remplie. La distribution :

$$\mathcal{F}(q,\phi) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{d^k F}{d\phi^k},\ k \in \mathbb{N} \right\}, \tag{4.5}$$

est par hypothèse de rang plein en chaque point. Donc les conditions 1, 2, 3 et 4 du théorème 35 sont satisfaites. Mais à cause de la masse variable il est nécessaire d'adapter ce théorème.

Nous allons montrer directement la convergence exponentielle de ces lois de commande comme une conséquence du caractère quadratique des fonctions appartenant à la famille $\mathcal{V}$. En effet, en posant $X = I - I^1$ et à un changement de coordonnées linéaire près on peut supposer que

$$V = \|X\|^2. \tag{4.6}$$

Théorème 59. *Soit $\delta > 0$, la commande continue u^δ définie par*

$$\begin{cases} \|F^T X\| > \delta, & u_i^\delta = -\frac{F^T X}{\|F^T X\|}, \\ \|F^T X\| \leq \delta, & u_i^\delta = -\frac{F^T X}{\delta}, \end{cases} \tag{4.7}$$

stabilise exponentiellement le point d'équilibre $X = 0$ et la masse m converge vers une limite strictement positive.

Démonstration: Dans un voisinage de I^1, le contrôle en boucle fermée, u^δ, vaut simplement

$$u^\delta = -\frac{F^T X}{\delta}. \tag{4.8}$$

On suppose pour clarifier les notations que $\delta = 1$. Il est utile alors de considérer la dynamique en utilisant ϕ comme variable libre,

$$\frac{dX}{d\phi} = -\frac{F\,F^T\,X/m}{w - \varepsilon\, gF^T\,X/m}\,, \tag{4.9}$$

$$\frac{dm}{d\phi} = -\frac{\alpha\,\|F^T\,X\|}{w - \varepsilon\, gF^T\,X/m}\,. \tag{4.10}$$

Sur un voisinage compact de 0 et pour $m \geq 2\,m' > 0$, le dénominateur $w - \varepsilon\, gF^T\,X/m$ est borné inférieurement par $w_0 > 0$ et supérieurement par w_1. Comme

$$\dot{V} = -\frac{\|F^T\,X\|^2/m}{w - \varepsilon\, gF^T\,X/m}\,, \tag{4.11}$$

le lemme 60 implique que pour un point initial X^0 proche de 0, les suites $V_k = V(X(2k\,\pi))$ et $m_k = m(2k\,\pi)$ satisfont les inégalités

$$V_k - V_{k+1} \geq \frac{2\pi\,\beta}{w_1}\frac{V_k}{m_k}\,, \tag{4.12}$$

$$m_k - m_{k+1} \leq \frac{2\pi\,\alpha}{w_0}\sqrt{V_k}\,, \tag{4.13}$$

tant que $m_k > 2\,m'$.

Ainsi soit $\beta' \in]0,1[$, $\beta' < 1 - \frac{2\pi\,\beta}{w_1\,m_0}$ et $\alpha' = \frac{2\pi\,\alpha}{w_0}\sqrt{V_0}$,

$$V_k \leq \beta'^k\,V_0\,, \tag{4.14}$$

$$m_k \geq \alpha' \sum_{i=0}^{k} \sqrt{\beta'}^{\,i}\,, \tag{4.15}$$

$$\geq m_0 - \frac{\alpha'}{1-\sqrt{\beta'}}\,. \tag{4.16}$$

Comme α' est proportionnel à $\|X^0\|$, pour X^0 assez proche de 0, V, et donc X converge exponentiellement vers 0 et la masse m tend vers une limite supérieure à $m_0 - \frac{\alpha'}{1-\sqrt{\beta'}}$. □

Lemme 60. *Si les conditions de contrôlabilité sont satisfaites alors pour tout $m' > 0$ il existe $\beta > 0$ et un voisinage de l'origine compacte, $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$, tel que pour tous les points initiaux appartenant à ce voisinage, $X^0 \in \mathcal{W}$, et toutes masses initiales assez grandes, $m^0 \geq 2\,m'$,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\|F^T X\|^2}{m}\,\mathrm{d}\phi \geq \beta \int_0^{2\pi} \frac{\|X\|^2}{m}\,\mathrm{d}\phi\,, \tag{4.17}$$

où X et m sont les solutions des équations (4.9) et (4.10) initialisées à X^0 et m^0.

Démonstration: Remarquons tout d'abord qu'il existe $\beta' > 0$,

$$\frac{dm}{d\phi} \geq -\beta' \|X^0\| \,. \tag{4.18}$$

Donc si $\|X^0\| \leq \frac{m'}{2\pi\,\beta'}$, la masse m ne peut s'annuler sur une période,

$$m(2\pi) \geq m' \,. \tag{4.19}$$

Soit $\mathcal{W}$ un voisinage compact de l'origine satisfaisant cette condition.

Supposons la contraposée de la proposition que nous souhaitons démontrer : il existe une suite de conditions initiales $X_n^0 \in \mathcal{W}$ et $m_n^0 \geq 2\,m'$ telle que les solutions X_n et m_n correspondantes satisfont l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} \frac{\|F^T\,X_n\|^2}{m_n}\,\mathrm{d}\phi < \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \frac{\|X_n\|^2}{m_n}\,\mathrm{d}\phi \,. \tag{4.20}$$

Considérons la suite des solutions normalisées, $Y_n(t) = X_n(t)/\|X_n^0\|$, solutions des équations

$$\frac{dY_n}{d\phi} = -FF^TY_n/m_n \,, \quad Y_n(0) = \frac{X_n^0}{\|X_n^0\|} \,, \tag{4.21}$$

$$\frac{dm_n}{d\phi} = -\alpha\|X_n^0\|\|F^TY_n\| \,, \quad m_n(0) = m^0 \,. \tag{4.22}$$

Il existe une sous suite convergeant uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers une fonction (Y, m) continûment dérivable solution de

$$\frac{dY}{d\phi} = -FF^TY/m \,, \quad \|Y(0)\| = 1 \,, \tag{4.23}$$

$$\frac{dm}{d\phi} = -\alpha'\|F^TY\| \,, \quad m(0) = m^0 \,. \tag{4.24}$$

telle que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\|F^TY\|^2}{m} = 0 \,. \tag{4.25}$$

Donc $F^T\,Y = 0$ pour tous $\phi \in [0, T]$, c'est à dire que la fonction $Y(\phi)$ est constante, égale à $Y(0)$. En dérivant $F^T\,Y$ par rapport à ϕ on arrive à une contradiction avec l'hypothèse de contrôlabilité forte,

$$\text{Rang}\ \mathcal{F} = n \,. \tag{4.26}$$

□

Ces contrôles u^δ respectent la contrainte 1.24. S'ils convergent en un temps infini vers l'orbite désirée I^1, ils entrent dans chaque voisinage compacte de la cible en un temps fini. Au chapitre 5 nous comparons le temps de ces transferts aux temps de transferts optimaux pour le système de Kepler contrôlé.

Remarquons de plus que si l'orbite I^1 appartient au domaine des orbites elliptiques non-dégénérées $\mathcal{C}_-$ défini par l'équation (1.20) alors il existe $\beta_0 > 0$ telle que $V_k^{\beta_0} \subset \mathcal{C}_-$.

4.2 A propos du contrôle saturé

Dans cette section nous étudions les trajectoires d'un système contrôlé satisfaisant les hypothèses du théorème de Jurdjevic-Quinn quand la commande est choisie saturée et donc discontinue. Notez cependant que la fonction de Lyapunov V est toujours supposée lisse. Cette commande discontinue est le contrôle limite obtenu en prenant $\delta = 0$ dans (4.7). Cette étude s'écarte quelques peu du sujet principal, dans la pratique on ne choisira pas ces lois de commande. Néanmoins c'est un premier pas pour essayer de comprendre les transferts optimaux entre niveaux d'énergie, pour les systèmes satisfaisant les conditions de Jurdjevic-Quinn, et d'étendre les résultats obtenus pour les systèmes de Kepler contrôlés. D'autre part le résultat principal de cette section, le théorème 64, explique en quelque sorte qu'il n'y pas de mauvaise région, en terme d'efficacité, pour les contrôles Jurdjevic-Quinn.

4.2.1 Une commande en boucle fermée discontinue

Considérons un système contrôlé affine

$$\dot{q} = f_0(q) + \sum_{i=1}^{m} u_i \, f_i(q). \tag{4.27}$$

avec une contrainte sur le contrôle

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2} \leq \epsilon. \tag{4.28}$$

Nous supposons que ce système satisfait les hypothèses $1-4$ du théorème 35. Quand on veut tenir compte d'une contrainte telle que (4.28) et rendre $\dot{V}$ négative il est naturel de choisir le contrôle en boucle fermée u^ϵ qui minimise en chaque point la dérivée $\dot{V}$,

$$u_i^\epsilon(q) = -\varepsilon \frac{L_{f_i} V}{|L_f V|}(q),\ 1 \leq i \leq m,\ q \notin W\,, \tag{4.29}$$

avec $|L_f V| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} L_{f_i} V^2}$ et

$$W = \{q \in \mathbb{R}^n, L_{f_i} V(q) = 0,\ i \in \{1..m\}\}\,. \tag{4.30}$$

Ce contrôle est continu en dehors de l'ensemble W mais il est discontinu le long de chaque courbe qui traverse W.

Ainsi le système (1.74) bouclé avec le contrôle discontinu (4.29) est une équation différentielle ordinaire avec un membre de droite discontinu, $\dot{q} = h^\epsilon(q)$ où le champs de vecteur h^ϵ est défini par

$$h^\epsilon(q) = f_0(q) + \sum_{i=1}^{m} u_i^\epsilon(q) f_i(q)\,. \tag{4.31}$$

De tels contrôles, aussi appellés “sliding control”, sont parfois utilisés pour des applications particulières, mais il n'est bien sûr pas raisonnable de vouloir les implémenter pour commander un satellite. D'une part ils demanderaient un design particulier pour pouvoir changer très rapidement la direction de poussée en son opposé ; et d'autre part ils engendreraient de trop nombreuses vibrations, a priori indésirables, voire destructrices, pour les différents composants embarqués à son bord.

4.2.2 Inclusion différentielle et principe d'invariance

Il existe diverses notions de solutions pour un tel système, les solutions de Fillipov ou les solutions de Krasovskii [19]. Nous avons choisi d'étudier les solutions de Fillipov, car contrairement aux solutions de Krasovskii, les solutions de Fillipov sont robustes aux perturbations ; en particulier on peut les observer en intégrant numériquement des équations différentielles discontinues. Ces solutions ne sont pas uniques et des points d'équilibres nouveaux peuvent apparaître dans l'ensemble W ; des points où les solutions connaissent de brusques variations, mais malgré leurs efforts ne peuvent se dégager et restent prisonnières de l'ensemble W au lieu de converger vers la cible. Les solutions de Fillipov ne sont pas des curiosités mathématiques, ces solutions apparaissent autour de l'ensemble W.

Les solutions de Filippov d'une équation différentielle ordinaire $\dot{x} = f(x)$ avec un membre de droite discontinu sont les solutions de l'inclusion différentielle

$$\dot{x} \in Kf(x)\,, \tag{4.32}$$

avec

$$Kf(x) = \bigcap_{\rho>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{\text{co}}\,\{f(B(x,\rho) \setminus N)\}\ , \tag{4.33}$$

où $B(x,\rho)$ dénote la boule de centre x et de rayon ρ, $\overline{\text{co}}$ dénote la fermeture convexe d'un ensemble et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{R}^n$. Si la fonction f appartient à l'espace des fonctions intégrables, essentiellement bornées L^∞_{loc}, il est démontré que l'application multi valuée Kf est semi continue supérieurement, et localement bornée avec des valeurs non-vides, compactes et convexes. Ainsi pour chaque x_0 il existe au moins une solution au problème de Cauchy $\dot{x} \in Kf(x), x(0) = x_0$ [24]. Dans sa définition de l'inclusion différentielle associée à l'équation différentielle avec membre de droite discontinu, contrairement à la définition proposé par Krakovskii, Filippov retire les ensembles de mesures nulles des voisinages du point x. Ainsi l'inclusion différentielle Kf est bien définie pour un champ de vecteur f discontinu sur un ensemble de mesure nulle.

Comme exemple considérons l'oscillateur harmonique contrôlé.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& y \\ \dot{y} &=& -x+u \end{array} \right. , |u| \leq \epsilon.$$

Il admet l'intégrale première $V = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Le contrôle qui maximise la dérivée V sous la contrainte $|u| \leq \epsilon$ est donné par la loi de commande $u^* = -\epsilon \text{ sgn } y$.

Ce contrôle n'est pas défini sur l'axe des abscisses, $\{y = 0\}$, et est discontinu le long de chaque trajectoire qui traverse cette droite. Le système bouclé avec ce contrôle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x - \epsilon \text{ sgn } y \end{array} \right. , \tag{4.34}$$

admet comme solution de Filippov les solutions de l'inclusion différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y, \\ \dot{y} & \in & \left\{ \begin{array}{ll} \{-x - \epsilon \text{ sgn } y\} & \text{if } y \neq 0 \\ [-x - \epsilon, -x + \epsilon] & \text{if } y = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{4.35}$$

L'ensemble des points d'équilibre de ce système discontinu est égal au segment $\{(x, y), x \in [-\epsilon, \epsilon], y = 0\}$. Toutes les trajectoires de ce système convergent vers l'ensemble des points d'équilibre.

Dans cette section nous rappelons le principe d'invariance pour les inclusions différentielles dû à Andrea Bacciotti et Francesca Ceragioli. Dans [5] ce principe est énoncé, pour des fonctions de Lyapunov seulement Lipstchiz et la preuve utilise des notions de différentiation d'analyse non lisse. Nous énonçons un théorème plus faible qui nous suffira pour notre étude. Pour énoncer ce résultat nous avons besoin de quelques notions de la théorie des inclusions différentielles [24].

Soit $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}}$ une application multi valuée semi-continue supérieurement avec des valeurs non-vide, compactes et convexes. Une solution de l'inclusion différentielle,

$$\dot{x} \in F(x). \tag{4.36}$$

sur un intervalle non dégénéré $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction absolument continue de I dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\dot{\phi}(t) \in F(\phi(t))$ pour presque tout les temps $t \in I$. On dénote S_{x_0} l'ensemble des solutions du problème de Cauchy solution de la dynamique (4.36) initialisée à l'instant $t = 0$ à x_0, $\phi(0) = x_0$. On dit qu'une solution est maximale si $I = [0, +\infty[$.

La dérivée multi valuée d'une fonction régulière $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par rapport à F est définie par

$$\dot{V}(x) = \{dV(x).v, v \in F(x)\}. \tag{4.37}$$

Définition 61. Une fonction de Lyapunov régulière V pour F est une application définie positive, continûment différentiable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \dot{V}(x) \subset]-\infty, 0]. \tag{4.38}$$

Définition 62. Un ensemble $\mathcal{W}$ est dit faiblement invariant pour F si par chaque point $x_0 \in \mathcal{W}$ il passe une solution maximale de (4.36) incluse dans $\mathcal{W}$.

On dit faiblement car on ne demande pas que toutes les solutions de (4.36) initialisées en x_0 restent dans $\mathcal{W}$.

Théorème 63. *Soit $V : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov régulière pour F, soit ϕ une solution de (4.36) initialisé à $x_0 \in V_\alpha$. Soit*

$$\mathbb{W} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, 0 \in \dot{V}(x) \right\}, \tag{4.39}$$

et soit $\mathcal{W}$ le plus grand ensemble faiblement invariant inclus dans $\overline{\mathbb{W}} \cap V_\alpha$, alors

$$\lim_{t=+\infty} d(\phi(t), \mathcal{W}) = 0\,. \tag{4.40}$$

4.2.3 Propriété de stabilité de la commande discontinue

On suppose que l'ensemble Γ des points où la fonction V s'annule est un compact de $\mathbb{R}^n$, Γ peut être par exemple une orbite compacte de la dérive f_0. Le contrôle u^ϵ défini par (4.29) stabilise Γ au sens de Lyapunov car pour chaque $\alpha > 0$, l'ensemble $\{V \leq \alpha\}$ est invariant. De plus le résultat suivant de stabilisation pratique est vérifié,

Théorème 64. *Soit h^ϵ défini par (4.31).*

- *Pour tout $\epsilon \geq 0$, l'ensemble Γ est stable pour le système en boucle fermée $\dot{q} = h^\epsilon(q)$.*
- *Pour chaque ensemble compact K et chaque voisinage $\mathcal{O}_\delta\Gamma$ de l'ensemble Γ, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour chaque système en boucle fermée $\dot{q} = h^\epsilon(q)$ avec $\epsilon \leq \epsilon_0$:*
  Chaque solution ϕ, au sens de Fillipov, telle que $\phi(0) \in K$, rentre dans $\mathcal{O}_\delta\Gamma$ en temps fini et y reste pour les temps plus grands.

où $\mathcal{O}_\delta\Gamma = \{q \in M, d(q, \Gamma) < \delta\}$ désigne l'ensemble ouvert des points à une distance strictement inférieure à δ de la courbe Γ.

Démonstration: Comme la fonction V est propre, les ensembles $V_\alpha = \{q, V(q) \leq \alpha\}$ sont compacts et il existe $\alpha > 0$ tel que $K \subset V_\alpha$.

L'inclusion différentielle

$$\dot{q} \in Kh^\varepsilon(q), \tag{4.41}$$

avec $Kh^\varepsilon(q)$ défini par 4.33, peut-être caractérisée en utilisant la structure de h^ε. En effet,

$$h^\epsilon = f_0 + \psi^\epsilon, \tag{4.42}$$

avec

$$\psi^\epsilon(q) = \sum_{i=1}^{m} u_i^\epsilon(q) f_i(q)\,. \tag{4.43}$$

Comme f_0 est continue et ψ^ϵ localement bornée,

$$Kh^\epsilon(q) = f_0(q) + K(\psi)(q). \tag{4.44}$$

Redéfinissons l'ensemble W, l'ensemble des points où la fonction h^ϵ n'est pas définie, en le restreignant à V_α et en supprimant le voisinage de l'orbite $\mathcal{O}_\delta\Gamma$,

$$W = \{q \in V_\alpha \setminus \mathcal{O}_\delta\Gamma, L_{f_i} V = 0\}. \tag{4.45}$$

Cet ensemble est de mesure nulle. Il est aisé alors d'estimer $K\psi^\varepsilon$ défini par 4.33 :

– Si $q \in W$, $K\psi^\varepsilon(q) = \bigcap_{\rho\in\mathbb{N}} \overline{\text{co}}\,\{(\sum_{i=1}^m u_i^\varepsilon f_i)(B(q, 1/\rho) \setminus W)\}$,

$$K\psi^\varepsilon(q) \quad \subset \quad \left\{ \sum_{i=1}^m u_i f_i(q), \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2} \leq \varepsilon \right\}, \tag{4.46}$$

et $\dot{V}^\varepsilon$ défini par (4.37) est réduit au singleton $\{0\}$.

– Si $q \notin W$, alors $\psi^\epsilon(.)$ est continu en q et $K\psi^\epsilon(q) = \{\psi^\epsilon(q)\}$.

Ainsi l'ensemble des points de discontinuité W (4.30) du champs de vecteur h^ε (4.31) et l'ensemble $\mathbb{W}$, des points où $\dot{V}^\varepsilon$ s'annule défini par (4.39), restreint à $V_\alpha \setminus \mathcal{O}_\delta\Gamma$, sont donc égaux,

$$W = \mathbb{W} \cap V_\alpha \setminus \mathcal{O}_\delta\Gamma \tag{4.47}$$

D'après le théorème 63, si $\phi(0) \in V_\alpha$, alors la solution $\phi(.)$ est maximale, pour chaque $t \geq 0$, $\phi(t) \in V_\alpha$, et de plus la distance entre la solution et le plus grand ensemble faiblement invariant $\mathcal{W}$ inclus dans $W \cap V_\alpha$ tends vers zéros. Le lemme 65 implique qu'il n'y a pas d'ensemble faiblement invariant dans $V_\alpha \setminus \mathcal{O}_\delta\Gamma$. □

Lemme 65. *Supposons que les conditions* $1-4$ *du théorème 35 soient satisfaites, alors, pour chaque ensemble compact* K*, il existe* ϵ_0 *tel que pour tous* $\epsilon \leq \epsilon_0$*, le plus grand ensemble invariant pour la dynamique (4.41) soit inclus dans l'ouvert* $\mathcal{O}_\delta\Gamma$*.*

Démonstration: Si l'ensemble W est vide, alors le lemme est trivial. Supposons que W soit non vide. Afin de démontrer le lemme nous allons diviser l'ensemble $V_\alpha \cap W \setminus \mathcal{O}_\delta\Gamma$ en sous ensembles, sur lesquels la dérive f_0 est transversale. Notez que sur l'orbite Γ la différentielle de V s'annule (4.4).

Soit W_k (4.48) le sous ensemble de $V_\alpha \setminus \mathcal{O}_\delta\Gamma$, où tous les crochets de Lie de longueur inférieure à k sont dans le noyau de la différentielle de la fonction V.

$$W_k = \left\{q \in V_\alpha \setminus \mathcal{O}_\delta\Gamma,\, L_{(\text{ad } f_0)^s f_i} V(q) = 0,\, 0 \leq s \leq k\right\}, \tag{4.48}$$

Remarquez que $W_0 = W \cap V_\alpha \setminus \mathcal{O}_\delta\Gamma$ de plus la condition de contrôlabilité (hypothèse 3 du théorème 35) implique qu'il existe un entier l tel que $W_l = \varnothing$.

Ensuite nous définissons l'ensemble W_k^τ (4.49) , sous ensemble de W_k, où le vecteur f_0 est transversal.

$$W_k^\tau = \left\{q \in W_k, |L_{(\text{ad } f_0)^{k+1} f_i} V(q)| \geq \tau\right\}. \tag{4.49}$$

Comme $W_l = \varnothing$, $\exists s < l$, $\exists \tau_s > 0$, $W_s^{\tau_s} = W_s$ et $W_s \neq \varnothing$.

Par induction le lemme 66 implique que pour les petits ε il existe $\gamma_i \geq 0$, $i \in [0..s]$ tel que en un temps fini inférieur à $(\gamma_0 + ... + \gamma_s)$, toutes les trajectoires de l'inclusion différentielle (4.41) débutant à W_0 sortent de W_0. Il n'existe pas d'ensemble faiblement invariant dans W_0. □

Remarquons que la régularité de V et des champs de vecteurs f_i, implique l'existence $M > 0$, tel que pour tout $q \in V_\alpha \cap \mathcal{O}_\delta\Gamma$, $k \in [0..l]$ and $i \in [1..m]$, $|L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V(q)| \leq M$, de plus M devient de plus en plus grand quand δ tends vers zéro.

Lemme 66. *Soit $k \geq 0$ et $\delta_{k-1} = (\tau_k - m\epsilon M)/2M$. Soit $\phi(.)$ une solution de la dynamique (4.41) initialisée dans $W_k^{\tau_k}$. Si $0 < \epsilon < \min(\tau_k/(Mm), 1/m)$ alors*

- *$\forall t \in]0, 2\delta_{k-1}[$, $\phi(t) \notin W_k$.*
- *si $k \geq 1$ alors $\forall \tau_{k-1} \in]0, M\delta_{k-1}^2[$, $\exists \gamma_{k-1} \in]0, \delta_{k-1}[$, tel que*

$$\forall t \in [\gamma_{k-1}, \delta_{k-1} - \gamma_{k-1}],\ \textit{soit } \phi(t) \notin W_{k-1} \textit{ soit } \phi(t) \in W_{k-1}^{\tau_{k-1}}.$$

Démonstration: La k^{iem} dérivée de Lie de la fonction $L_{f_i} V$ le long de la dérive f_0,

$$t \mapsto L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V(\phi(t)), \tag{4.50}$$

est absolument continue et dérivable pour presque tout temps, car $L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\phi(.) \in \text{A.C.}(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt} L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V(\phi(t)) \\ \quad \in \{ L_{(\text{ad } f_0)^{k+1} f_i} V(\phi(t)) + d(L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V)(\phi(t)).v, v \in K\psi(\phi(t)) \}. \end{array} \tag{4.51}$$

L'égalité (4.44) implique,

$$|\frac{d}{dt} L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V(\phi(t))| \leq (1 + m\epsilon)M \leq 2M. \tag{4.52}$$

Comme $\phi(0) \in W_k^{\tau_k}$, $|L_{(\text{ad } f_0)^{k+1} f_i} V(\phi(0))| \geq \tau_k$ et $|L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V(\phi(0))| = 0$, pour tous $t \geq 0$,

$$|L_{(\text{ad } f_0)^{k+1} f_i} V(\phi(t))| \geq \tau_k - 2Mt, \tag{4.53}$$

en particulier,

$$\forall t \in [0, \tau_k/2M[,\ |L_{(\text{ad } f_0)^{k+1} f_i} V(\phi(t))| > 0. \tag{4.54}$$

De plus si $k \geq 1$, pour tout $t \geq 0$, $|\frac{d}{dt} L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V(\phi(t))| \geq \tau_k - 2Mt - m\epsilon M$, donc

$$|L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V(\phi(t))| \geq ((\tau_k - m\epsilon M) - Mt)\, t,$$

et finalement

$$\forall t \in [\gamma_{k-1}, \delta_{k-1} - \gamma_{k-1}],\ |L_{(\text{ad } f_0)^k f_i} V(\phi(t))| > 0. \tag{4.55}$$

□

Remarque 67. La condition de contrôlabilité 1.44 implique qu'il n'existe pas de mode glissant loin de l'orbite cible pour le système de Kepler bouclé avec un contrôle discontinu u^ε.

4.3 L'interpolation de Lyapunov

4.3.1 Définitions

Soit un système contrôlé affine satisfaisant aux conditions du théorème de Carathéodory et soit $\Xi \in L_1([0,T],U)$ une commande en boucle ouverte. Le système conduit par le contrôle Ξ admet une unique solution $\gamma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(0) = q_0$, $\gamma(T) = q_1$.

Définition 68. Soit $\rho > 0$, une interpolation feedback d'ordre ρ de Γ le long de γ est une fonction u_ρ de l'état q, telle que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|u_\rho(\gamma(t)) - \Xi(t)\|^2 dt \leq \rho. \tag{4.56}$$

On dit que l'interpolation est exacte quand ρ est égal à zéro.

Cette définition est pertinente. Le contrôle en boucle fermée u étend la commande en boucle ouverte Ξ dans un voisinage de la solution de référence γ et la distance entre la trajectoire générée par le feedback u et la trajectoire de référence γ tend vers zéro quand ρ tend vers zéro. La notion de *interpolation feedback* s'introduit naturellement, mais reste trop générale. En effet il existe de nombreuses lois de commande en boucle fermée $u(q)$ telle que $u(q^\Xi(t)) = \Xi(t)$. Une question non-triviale est de considérer les interpolations de Lyapunov. Existe-t-il une interpolation feedback qui stabilise q_1 au sens de Lyapunov ?

Nous restreignons notre étude aux systèmes affines périodiques par rapport au temps t, la forme normale du système de Kepler contrôlé (voir la section 1.4),

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(q,t),\ q \in \mathbb{R}^n. \tag{4.57}$$

Les champs de vecteurs g_i sont des fonctions 2π périodiques en temps. Soit $\Xi \in C^1([0,T],U)$ une loi de commande en boucle ouverte régulière et $\gamma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sa trajectoire associée initialisée à l'état q_0. Soit $q_1 = \gamma(T)$ et $\mathcal{O}_\gamma$, l'ensemble des voisinages de $\gamma \setminus q_1$. Nous considérons la famille $\mathcal{V}$ des fonctions définies positives sur un élément de $\mathcal{O}_\gamma$,

$$\mathcal{V} = \left\{ V \mid \exists\, O \in \mathcal{O}_\gamma, V \in C^\infty(O), V(q) \geq 0, \lim_{\substack{q\in O \\ q\to\tilde{q}}} V(q) = 0 \Rightarrow \tilde{q} = q_1. \right\} \tag{4.58}$$

A une fonction V on associe le contrôle en boucle fermée,

$$u_i = -L_{g_i} V(q,t). \tag{4.59}$$

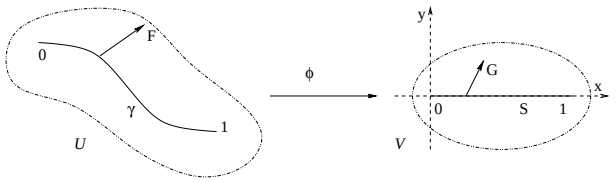


FIG. 4.1 – Redressement

Définition 69. Soit $\epsilon > 0$, une interpolation de Lyapunov d'ordre ϵ du contrôle Ξ, le long de la trajectoire γ, est une interpolation en boucle fermée, d'ordre ϵ, dérivé d'une fonction $V \in \mathcal{V}$ selon l'équation (4.59).

4.3.2 Interpolation exacte

Théorème 70. *Supposons que pour chaque couple (q,t), les vecteurs $g_i(q,t)$, $i \in [0,m]$ sont linéairement indépendants, que le contrôle en boucle ouverte $\Xi(t)$ est une fonction régulière $\Xi \in C^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$, que la trajectoire associée γ est une sous-variété différentielle plongée dans $\mathbb{R}^n$ et que la vitesse est strictement positive $\dot{\gamma}(t) > 0\ \forall t \in [0,T[$. Alors il existe une interpolation exacte u qui dérive d'une fonction de Lyapunov V centrée en $\gamma(T)$,*

$$u_i = -L_{g_i} V.$$

Démonstration: La trajectoire γ étant injective et les champs de vecteurs linéairement indépendants il existe une application $F \in C([0,1], T^*_\gamma \mathbb{R}^n)$ telle que $< F(t), g_i(\gamma(t)) >= \Xi_i(t)$. Ainsi il est suffisant de chercher une fonction de Lyapunov V solution de

$$dV(\gamma(t)) = -F(t). \tag{4.60}$$

Rappelons que

$$L_{g_i} V =< dV, g_i >= \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, V \cdot g_i.$$

La trajectoire γ étant un difféomorphisme, soit O un voisinage de $\gamma \subset \mathbb{R}^5$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de $S \subset \mathbb{R}^5$ il existe une application $\Phi : O \to \overline{O}$ qui envoie γ sur le segment $S = \{x \in [0,1]\}$.

Ce difféomorphisme implique que le problème (4.60) est équivalent à chercher une fonction $\tilde{V}$ solution de l'équation

$$d\tilde{V} = G, \tag{4.61}$$

avec

$$G = -(\Phi^{-1})^* F. \tag{4.62}$$

En effet si $\tilde{V}$ est solution de l'équation précédente alors la fonction $V = \tilde{V} \circ \Phi$ est une solution du problème original.

Notons que G_1 est une fonction strictement positive sur $[0\,1[$.

$$\begin{array}{rcc} G_1 & = & < G, \frac{\partial}{\partial x} > \\ & = & < F, \tau > \\ & = & < F, \frac{(F.g_i)g_i}{v} > \\ & = & v. \end{array}$$

Le vecteur τ est le vecteur orienté unitaire tangent à la trajectoire γ. Par hypothèse sur γ, la vitesse v est strictement positive.

Nous utilisons maintenant la symétrie du segment S en fixant une structure, a priori, de la fonction candidate à être solution,

$$\tilde{V} = Q(x, y_i)^2, \tag{4.63}$$

$$Q(x, y) = P(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{P_i(x)}{P(x)}. \tag{4.64}$$

Cette structure implique quelques propriétés topologiques sur les courbes de niveaux de $\tilde{V}$, en particulier au point 1, voir la figure 4.2.

Par cette construction on transforme un problème en dimension m en m problème indépendant unidimensionnel. Le calcul des dérivées partielles de $\tilde{V}$ le long du segment S

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} & = & 2Q(P' + y_i \frac{P_i' P - P_i P'}{P^2}), \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y_i} & = & 2Q \frac{P_i}{P}, \end{array} \right. \tag{4.65}$$

nous conduit à m équations indépendantes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,P(x)\,P'(x) & = & G_1(x), \\ 2P_i(x) & = & G_i(x). \end{array} \right|_{x \in [0\,1]} \tag{4.66}$$

Une extension de Ξ est donc donnée par une extension de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(x) & = & \sqrt{\int_x^1 G_1(s) ds}, \\ P_i(x) & = & \frac{G_i(x)}{2}, \end{array} \right|_{x \in [0\,1]}$$

dans un voisinage du segment $S \subset \mathbb{R}^n$. □

L'intérêt pratique du théroème 70 est limité. En effet les propriétés de stabilité de ces feedback d'interpolation sont très réduites. Si V est la fonction de Lyapunov centrée au point q_1 pour le système ayant la précédente extension pour feedback. Mais la dérivée temporelle de V n'est pas strictement négative, elle peut s'annuler et nous ne sommes pas en mesure de caractériser le plus grand ensemble invariant des point qui annule $\dot{V}$. A priori, le système en boucle fermée n'est donc pas asymptotiquement stable. Il ne nous a pas semblé intéressant d'approfondire cette approche car les contrôles que nous souhaitons approcher se limitent aux contrôles optimaux.

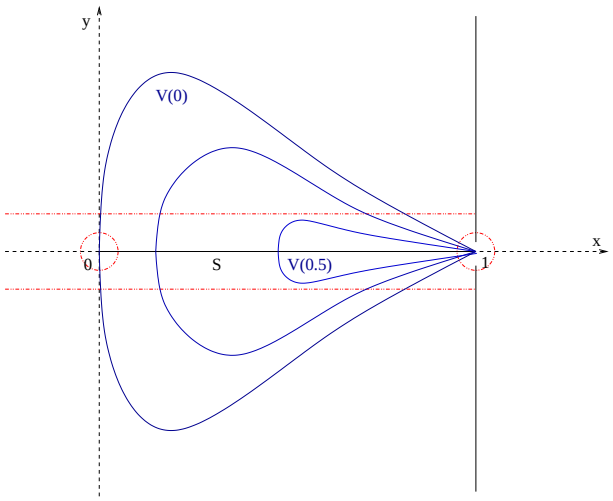


FIG. 4.2 – Illustration des courbes de niveaux de $\tilde{V}$

4.4 Maximiser la masse

Pour le système à deux corps contrôlé, les fonctions $L_{f_i}V$ sont 2π périodiques par rapport à une variable d'angle, telle que l'anomalie vraie, la quantité (4.67) n'est pas constante le long des orbites d'excentricité non nulle.

$$|L_f V| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} L_{f_i} V^2} \tag{4.67}$$

L'idée de cette section est d'utiliser cette propriété pour mesurer l'efficacité d'un contrôle. Divisons l'espace des longitudes en intervalles de longueur 2π, $[2i\pi, 2(i+1)\pi]$. En effet, on peut fixer un seuil s_i, pour chaque intervalle $[2i\pi, 2(i+1)\pi]$, tel que si $|L_f V| \geq s_i$ alors le moteur est allumé ; sinon il reste éteint.

Soit M_i et m_i le maximum et le minimum de $|L_f V|$ sur l'intervalle i. Soit $0 \leq p \leq 1$

$$\hat{M}_i = 2M_{i-1} - M_{i-2}, \tag{4.68}$$
$$\hat{m}_i = 2m_{i-1} - m_{i-2}, \tag{4.69}$$
$$s_i = \hat{m}_i + p\,(\hat{M}_i - \hat{m}_i). \tag{4.70}$$

Soit $\delta > 0$, la

$$\begin{cases} |L_f V| \geq s > \delta, & u_i = -\epsilon \frac{L_{f_i} V}{|L_f V|}, \\ \delta < |L_f V| < s, & u_i = 0, \\ |L_f V| \leq \delta, & u_i = -\epsilon \frac{L_{f_i} V}{\delta}, \end{cases} \tag{4.71}$$

Chapitre 5

Des contrôles stabilisants, robustes et rapides

Dans ce chapitre nous étudions à nouveau le système de Kepler contrôlé à masse variable. Nous comparons numériquement les temps des transferts par les contrôles en boucle fermée introduits à la section 4.1 aux temps de transferts optimaux : des temps de références issus d'une publication scientifique ou calculés par le logiciel MIPELEC. De cette étude il ressort qu'il existe certaines lois de commande en boucle fermée, très simples, qui permettent de réaliser des transferts en des temps très proches des temps optimaux[1]. A la section 5.1 nous analysons quelques transferts particuliers. A la section 5.3 nous présentons une méthode naïve pour sélectionner une loi de commande efficace parmi un ensemble de contrôles en boucle fermée. A la section 5.2 nous appliquons la méthode d'*interpolation de Lyapunov* pour sélectionner parmi une famille de feedback la loi de commande la plus proche de la commande optimale associée au transfert orbital de référence.

5.1 Cas particuliers

5.1.1 Deux transferts de référence

Dans cette section nous considérons deux cas de transferts entre une orbite d'injection du lanceur Ariane 4 et l'orbite géostationnaire équatoriale. Le tableau 5.1 contient les caractéristiques précises de ces transferts, le demi-grand

[1]Le Jet Space Laboratory étudie depuis l'année 2003 des lois de commande en boucle fermée sous l'acronyme "Q-law" [41]. Ces lois de commande sont calculées à partir de fonctions positives appelées quotient de proximité. Les quotients de proximité sont des formes quadratiques sur les intégrales premières dont les coefficients dépendent eux aussi de la valeur des paramètres orbitaux. Donc leur différentielle peut a priori s'annuler en d'autres points que l'orbite cible, et aucun résultat de stabilité asymptotique ne peut être déduit. Si on choisit des coefficients constants on obtient la famille de commande présentée au chapitre 4.

Cas	1 [25]	2 [16]
a_0 (m)	24505900	2.458e7
e_0	0.725	0.75
i_0 (deg)	5.2	7
m_0 (kg)	2000	1500
Isp (s)	2000	1994.75
ϵ (N)	0.35	0.2

TAB. 5.1 – Les caractéristiques des deux transferts.

axe et l'excentricité de l'orbite initiale, l'impulsion spécifique et la poussée maximale des moteurs et la masse initiale des satellites. Notons que les deux orbites initiales sont proches l'une de l'autre, mais qu'au contraire les caractéristiques des satellites diffèrent sensiblement. En particulier l'accélération maximale, le ratio ϵ/m_0, vaut $1.75e^{-4}ms^{-2}$ dans le cas 1 et $1.33e^{-4}ms^{-2}$ dans le cas 2. En quelques mots le satellite 2 est moins "puissant" que le satellite 1 ce qui explique que le temps optimal du transfert 2 est plus long que le temps optimal du transfert 2, 177 jours contre 137 (voir le tableau 5.2). Chacun de ces deux transferts a fait l'objet, respectivement dans [25] et [16], d'une étude particulière pour montrer l'efficacité de deux logiciels, MIPELEC et TFMIN.

Nous voulons montrer l'efficacité des contrôles Jurjevic-Quinn introduits dans la section 4.1. Comme l'orbite cible est une orbite circulaire d'inclinaison nulle nous pouvons faire le choix particulier d'une fonction de Lyapunov V qui ne dépende que du demi-grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison.

$$V(q) = 4(\frac{a}{a_{geo}} - 1)^2 + 3e^2 + 10i^2. \tag{5.1}$$

Soit $\delta = 10^{-5}$ le seuil de saturation de la loi de commande en boucle fermée u^δ, défini par l'équation (4.7), le théorème 59 implique que le contrôle u^δ est un contrôle en boucle fermée stabilisant asymptotiquement l'orbite cible géostationnaire ($a = a_{geo}, e = 0, i = 0$). Afin d'obtenir un transfert en temps fini nous appliquons le contrôle en boucle fermée u^δ tant que $|L_f V| > \delta$; puis nous résolvons le problème de transfert en temps minimum pour joindre l'orbite courante à l'orbite cible géostationnaire. Il faut remarquer que le long des tranferts en boucle fermée on ne passe pas proche d'une région où $|L_f V|$ s'annule avant d'être proche de la trajectoire cible. Ainsi ces problèmes de transferts optimaux ne sont plus à *faible poussée*. On appelle temps de transfert du feedback, le temps passé avec la commande en boucle fermée, plus le temps du transfert temps minimum pour joindre l'orbite cible.

Quand on compare sur le tableau 5.2 les temps de transferts du feedback aux temps optimaux calculé par MIPELEC et TFMIN la conclusion s'impose d'elle même : ils sont singulièrement proches. Dans le cas 1 le transfert feedback est même plus rapide de près d'un jour que le transfert de référence. Cette anomalie provient sans doute du fait que MIPELEC calcule des trajectoires moyennes. Les contrôles en boucle fermée, basés sur la fonction V (5.1), pourraient donc

Cas	1	2
Temps de référence (en jours)	137.38 [25]	177.36 [16]
Fonction de Lyapunov	V (5.1)	V (5.1)
Temps total de transfert (feedback+fin)	136.45	177.41
Temps passé avec le feedback	134	175

TAB. 5.2 – Comparaison des temps de transfert entre la boucle fermée et les temps optimaux. Pour estimer le temps de transfert avec le feedback on remplace à la fin, proche de l'orbite cible, la loi de commande en boucle fermée par une commande optimale.

approcher, de manière très efficace et très simple, la commande optimale pour les transferts partant d'une orbite "proche" de GTO, vers l'orbite GEO. Il est remarquable que cette fonction ne dépende aucunement des caractéristiques des satellites, mais seulement de l'orbite finale ; bien sûr le contrôle qui en découle selon (4.7) lui, en dépend.

Bien sûr le choix des coefficients $k_a = 4, k_e = 3, k_i = 10$ est important. Par exemple, si on considère $k_a = 1, k_e = 1, k_i = 1$ les temps de transferts des feebacks sont plus élevés de quelques dizaines de jours. Nous sommes arrivés au choix de $4 - 3 - 10$ par tâtonnement, à la section 5.3 nous formalisons cette méthode en un algorithme simple, et à la section 5.2 nous proposons la méthode d'*interpolation de Lyapunov*, qui utilise la connaissance de la commande et de la trajectoire optimale.

5.1.2 Estimation du temps de transfert du feedback

Dans les deux simulations précédentes nous avons réalisé un transfert effectif vers l'orbite cible en juxtaposant une commande en boucle fermée et une commande optimale. Pour calculer le temps de transfert de la commande en boucle fermée nous avons calculé des trajectoires temps optimales, car les trajectoire en boucle fermée convergent en un temps infini vers l'orbite cible.

Cependant ce calcul n'est pas nécessaire pour estimer la durée du transfert feedback T_f^ε. En effet si δ est choisi proportionnel à ε,

$$\delta = \alpha\,\varepsilon\,,$$

les lois de commandes $u^{\alpha\,\varepsilon}$ engendrent une trajectoire limite sur le système moyen. En particulier la masse du satellite admet une limite finie m_f et

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\, T_f^\varepsilon = g_0\, I_{sp}\, (m_0 - m_f). \tag{5.2}$$

Par conséquent on utilisera ce développement asymptotique pour estimer le temps de transfert du feedback T_f^ε. Sur les figures 5.1 et 5.2 on peut observer que la différence est très faible entre l'estimation asymptotique du temps de transfert avec la formule précédente et le calcul du temps de transfert effectif par une réalisation de la fin avec une commande optimale.

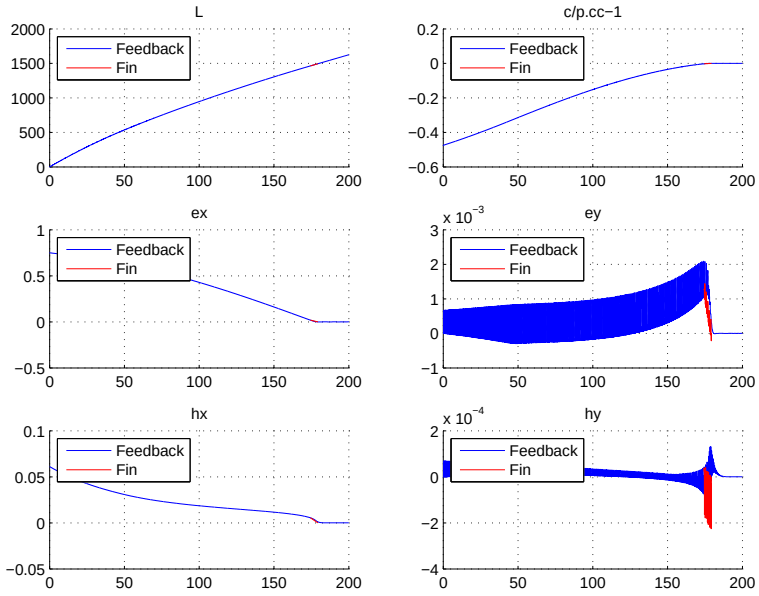


FIG. 5.1 – Evolution des paramètres orbitaux pour le transfert 1

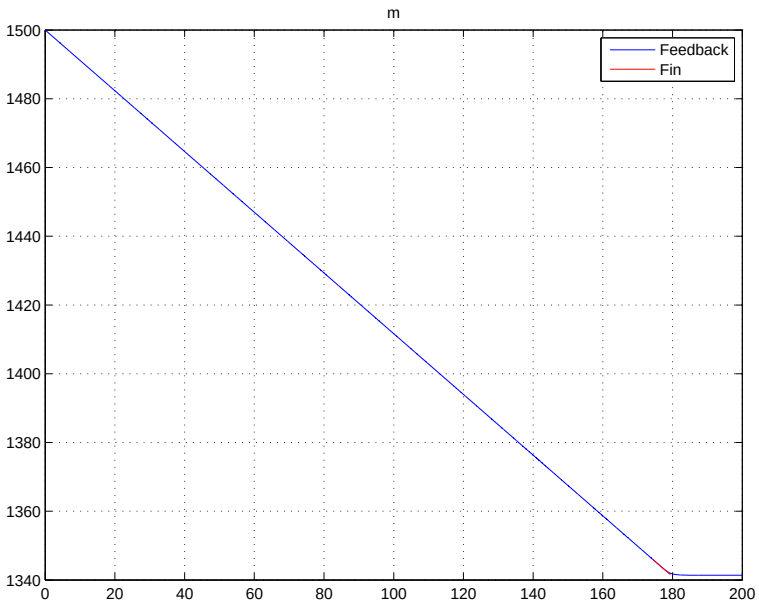


FIG. 5.2 – Evolution de la masse pour le transfert 1

5.1.3 Analyse de robustesse

Nous avons procédé à quelques simulations pour mettre en évidence la robustesse des commandes en boucle fermée évoquée à la section 2.2 du chapitre 2. En parallèle de ces simulations nous présentons les trajectoires optimales de références sans perturbations, ainsi que l'interpolation en longitude des ces lois de commandes avec les perturbations. Pour calculer la dynamique du système en boucle ouverte en présence d'éclipses il est plus judicieux d'utiliser une commande qui dépend de la longitude plutôt que du temps. Ces lois de commande ne sont plus définies lorsque la trajectoire a atteint la longitude finale de la trajectoire de référence. Bien sûr ces courbes ne joignent pas l'orbite cible, néanmoins elles n'en sont pas trop éloignées à la fin quand le contrôle n'est plus défini. Pour réaliser le transfert il serait nécessaire d'estimer les perturbations et de relancer un calcul de trajectoire optimale après chaque interruption moteur imprévue.

Sur les figure 5.4 et 5.3 (la figure 5.3 étant un zoom autour de l'orbite cible) on peut observer le comportement des différentes lois de commande dans différents contextes :

- sans perturbations,
- avec des éclipses (la chronologie des éclipses est la même dans tous les cas),
- avec des éclipses et un biais de quelques degrés dans la direction de poussée,

La courbe bleue représente la trajectoire de référence calculée sans perturbation. Les courbes jaune et vertes représentent l'interpolation en longitude de la trajectoire de référence en présence respectivement d'éclipses et d'éclipses plus biais moteur.

La courbe noire représente la trajectoire feedback sans perturbation, la courbe rouge et bleu ciel avec les perturbations. Ces trajectoires convergent vers l'orbite cible. On peut observer la robustesse d'un contrôle en boucle fermée par rapport à un contrôle en boucle ouverte tout le long d'un transfert soumis à diverses perturbations. .

Sur les figures 5.5 et 5.6 on peut observer l'influence d'un biais de $+10\%$ et -10% sur le module maximal de poussée ε pour les différentes lois de commande interpolation en longitude et boucle fermée. Le temps de transfert optimal est sensible à une telle erreur avec le même ratio. Au chapitre 3 nous avons montré que $\varepsilon\, T_\varepsilon$ converge vers une limite finie quand le module maximal de poussée converge vers 0. On peut observer que le temps de transfert en boucle fermée est dans une certaine mesure inversement proportionnel à ε.

5.2 Interpolation de Lyapunov

Dans l'étude de la section 4.3 nous avons cherché à étendre un contrôle en boucle ouverte par un contrôle en boucle fermée. Nous avons démontré un résultat d'existence, mais sur une classe de contrôle aux propriétés de stabilisation très faible. On se pose maintenant une question qui est sans doute plus

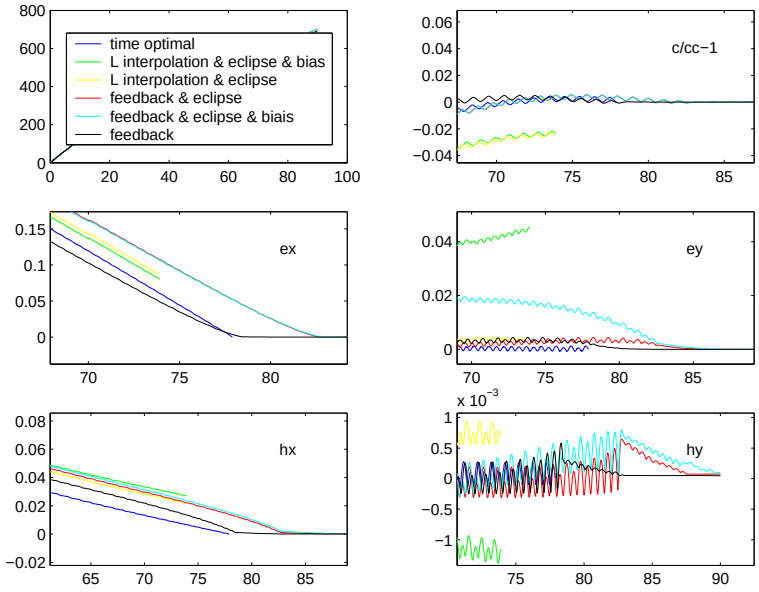


FIG. 5.3 – Contrôle optimal contre contrôle stabilisant, un transfert Proton-GTO vers GEO, masse initiale 3000kg, module maximal de poussée 1N, détail de la fin

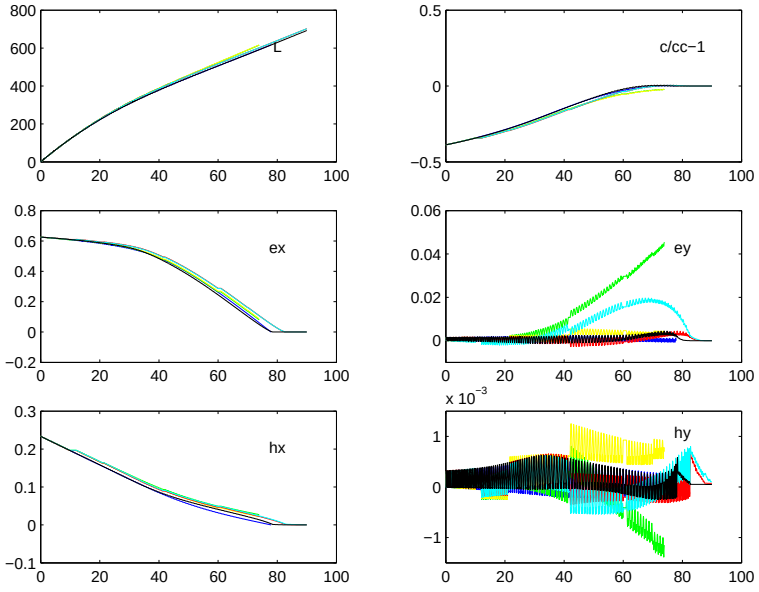


FIG. 5.4 – Contrôle optimal contre contrôle stabilisant, un transfert Proton-GTO vers GEO, masse initiale 3000kg, module maximal de poussée 1N

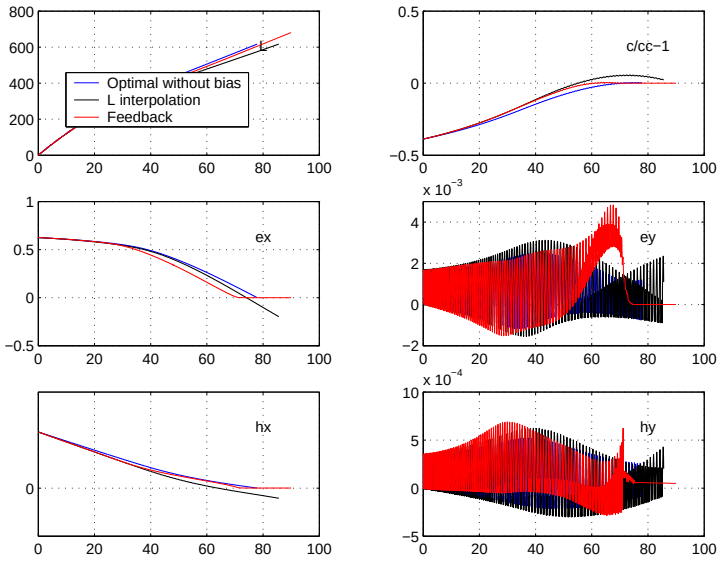


FIG. 5.5 – Biais sur le module maximal de poussée de +10%, Proton GTO vers GEO, 3000kg 1N

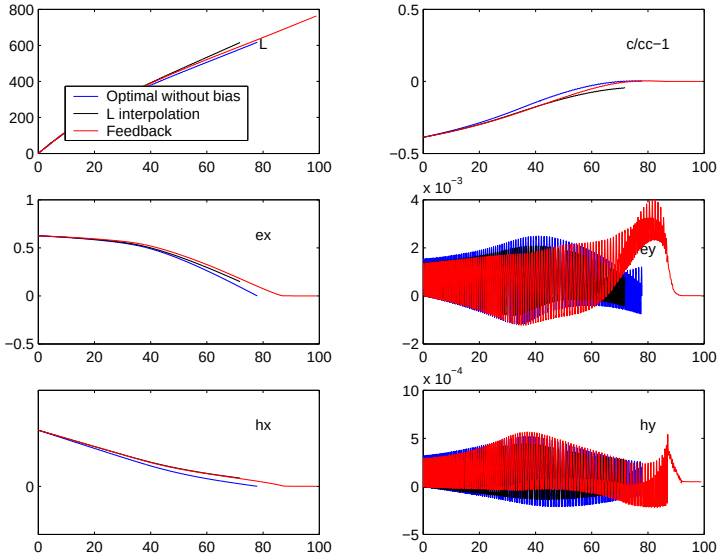


FIG. 5.6 – Biais sur le module maximal de poussée -10%, Proton GTO vers GEO, 3000kg 1N

intéressante en pratique, et , que le résultat de la section 4.3 rend extrémement légitime. On se donne une trajectoire en boucle ouverte calculée par ailleurs, et une famille de fonction de Lyapunov $\mathcal{V}_k$ (dépendant du paramètre k de dimention finie), et les contrôles feedback associés selon (4.7) qui ont tous de très bonnes propriétés de stabilisation. On recherche parmi ces lois de commandes celle qui est la plus proche de la commande en boucle ouverte le long de la trajectoire de référence. Par exemple on peut choisir de minimiser sur k un critère moindre carrés sur l'écart entre un contrôle de la famille $\mathcal{V}_k$ et le contrôle de référence.

Appliquons cette technique au système de Kepler contrôlé pour la classe de contrôle, et les trajectoires temps optimal calculées par le logiciel MIPELEC [25]. Soient Γ une loi de commande en boucle ouverte et γ sa trajectoire associée. Soit T, le temps où le trajectoire de référence γ atteint la cible. Nous pouvons rechercher une fonction V_k qui minimise le critère,

$$J = \min_{u \in \mathcal{V}_k} \int_0^T \|u(\gamma(t) - \Gamma(t)\| dt, \tag{5.3}$$

où u est le contrôle en boucle fermée

$$u_i = -\epsilon \frac{L_{g_i} V_k}{|L_g V_k|},\ i \in \{s, q, w\} \tag{5.4}$$

avec $|L_g V_k| = \sqrt{L_{g_1} V_k^2 + L_{g_2} V_k^2 + L_{g_3} V_k^2}$ (voir la section 4.1).

Nous considérons plus précisément les transferts plans vers l'orbite géostationnaire. On paramètre les orbites par l'altitude du périgée, le point d'une orbite elliptique le plus rapproché de la Terre, h_p et de l'apogée, le point d'une orbite elliptique le plus éloigné de la Terre h_a. Si R_T est le rayon terrestre, ces altitudes sont reliées au demi grand axe et à l'excentricité par les relations suivantes

$$h_a = (1+e)a - R_T\,, \tag{5.5}$$
$$h_p = (1-e)a - R_T\,. \tag{5.6}$$

Quand $h_a = h_p$ l'orbite est circulaire. L'orbite géostationnaire a donc pour coordonnée $ha = hp = 36\,000\,km$.

Le satellite est caractérisé par une masse initiale m_0 de $1000kg$, une impulsion spécifique I_{sp} de $1500\,s$ et un module maximal de poussée ε de $0.1\,N$. L'ensemble des orbites initiales est le domaine des orbites elliptiques ayant une altitude de périgée h_p comprise entre $10\,000\,km$ et $90\,000\,km$ et une altitude d'apogée h_a inférieure à $90\,000\,km$. Les contrôles et trajectoires de références Γ et γ sont calculées par le logiciel Mipelec. Le temps de référence est dénoté par T_f^{mip} (voir la figure 5.7).

On recherche la meilleure interpolation de Lyapunov parmi, la famille de loi de commande en boucle fermée u^δ induite par les fonctions définies positives

$$V_\theta = \cos\theta\,(\frac{a}{a_{geo}} - 1)^2 + \sin\theta\, e^2, \tag{5.7}$$

où $\theta \in [0, \pi]$.

Sur la figure 5.8 on a tracé les temps de transferts des meilleures interpolations de Lyapunov, estimés en utilisant la valeur limite de la masse (5.2).

Le résultat principal se résume simplement comme suit : l'erreur relative entre le temps optimal et le temps de l'interpolation Lyapunov est inférieur à 1% loin de l'orbite cible $ha = hp = 36\,,000\,km$ (voir la figure 5.9). Sur la figure 5.11 on observe que le coût (5.3) des meilleures interpolations de Lyapunov est corrélé avec l'erreur relative. Néanmoins on peut observer que l'erreur relative présente deux droites de discontinuité : au niveau des orbites de même énergie, de même demi-grand axe que l'orbite géostationnaire,

$$\frac{h_a + h_p}{2} = a_{geo} - R_T,$$

avec R_T le rayon de la Terre, et au niveau des orbites circulaires $e = 0$,

$$h_a = h_p.$$

La valeur de θ pour les meilleures interpolations de Lyapunov présente les mêmes droites de discontinuité (voir la figure 5.10). Une faiblesse dans notre algorithme pour rechercher la meilleure interpolation de Lyapunov pourrait expliquer la présence de ces solutions de continuité. Notons que par ailleurs on retrouve que la meilleure loi de commande pour un transfert entre deux orbites circulaires consiste à pousser au maximum dans la direction de la vitesse (voir la section 3.4)

5.3 Un algorithme naïf

Dans la section précédente nous avons présenté une méthode pour trouver une loi de commande en boucle fermée efficace en connaissant une trajectoire optimale. Nous proposons maintenant un algorithme qui implémente de façon systématique la méthode par tâtonnement, qui sans aucune connaissance a priori d'une trajectoire optimale nous a conduit à la fonction (5.1). L'idée naïve est simplement d'appliquer une recherche dichotomique sur les coefficients de la famille de fonction considérée pour générer les contrôles en boucle fermée.

Soit V_k une fonction appartenant à la famille $\mathcal{V}$ définie par l'équation (4.1) à la section 4.1. Nous voulons minimiser le temps T mis par le satellite pour entrer dans une boule carrée $\mathbb{B}$ de rayon ρ centrée sur l'orbite cible I^1. Pour remplir cet objectif on définit les temps partiels T_{I_i}. Pour chaque intégrale première I_i il existe un temps T_{I_i} tel que pour tous les temps t supérieure à T_{I_i}, la distance entre la valeur de l'intégrale première $I_i(t)$ à la cible I_i^1 reste petite

$$|I_i(t) - I_i^1| < \rho \tag{5.8}$$

Remarquons que les temps T_{I_i} peuvent être des fonctions discontinues des paramètres k_j.

L'algorithme suivant modélise notre méthode de recherche à tâtons. Soit h une constante positive paramétrant le pas de notre algorithme, initialisons les paramètres de la fonction V, $k^{old} = k^0$, par exemple $k_i^{old} = 10$,

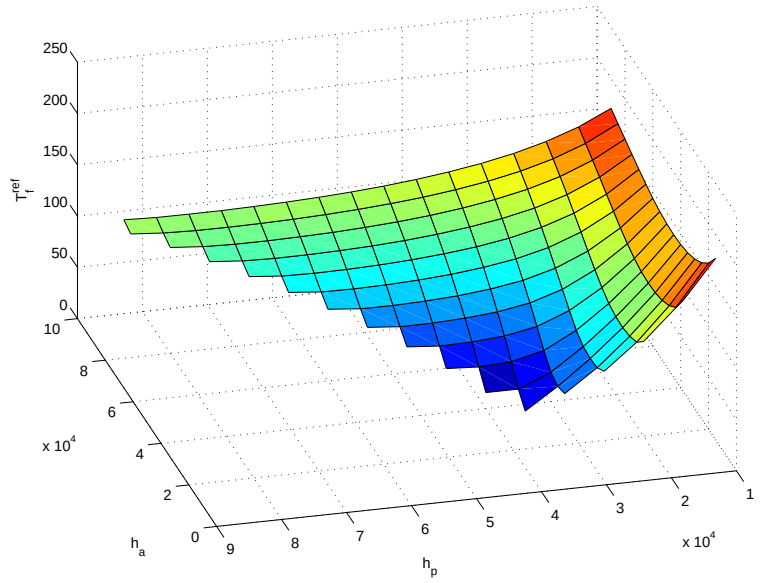


FIG. 5.7 – Temps de référence calculé avec MIPELEC

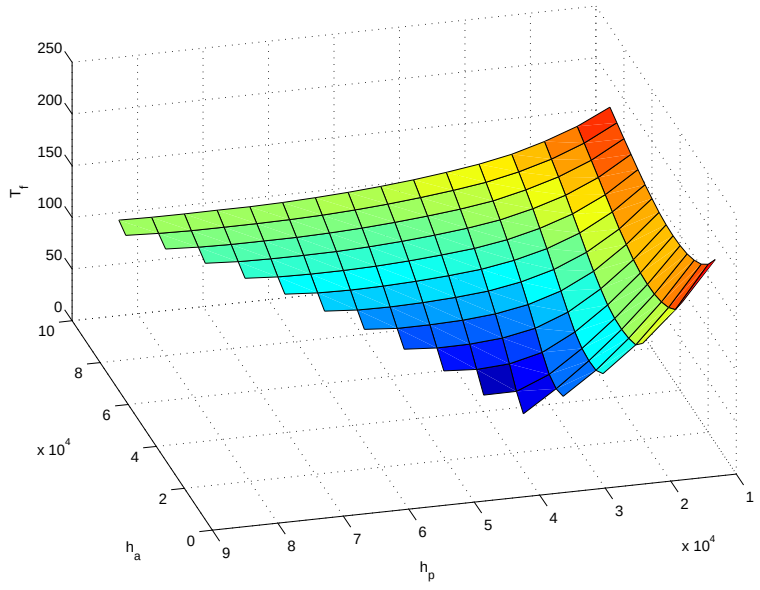


FIG. 5.8 – Temps de transfert de la meilleurs interpolation en fonction de l'orbite initiale.

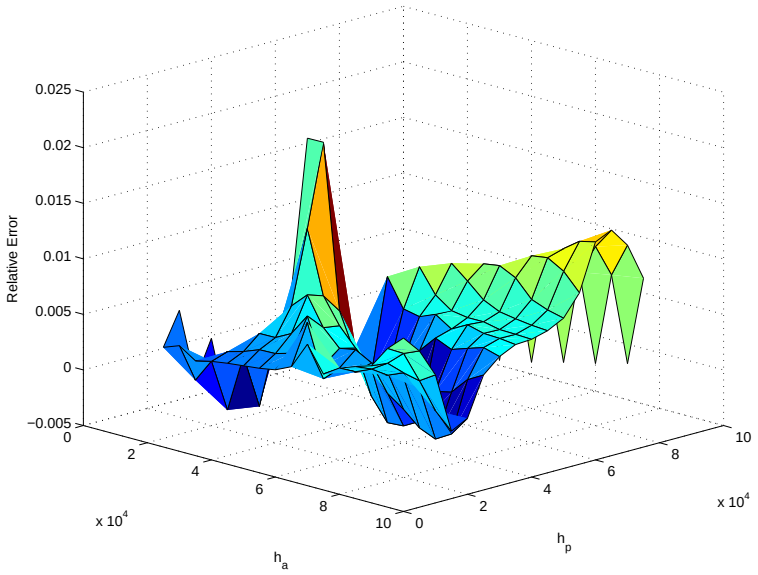


FIG. 5.9 – Erreur relative

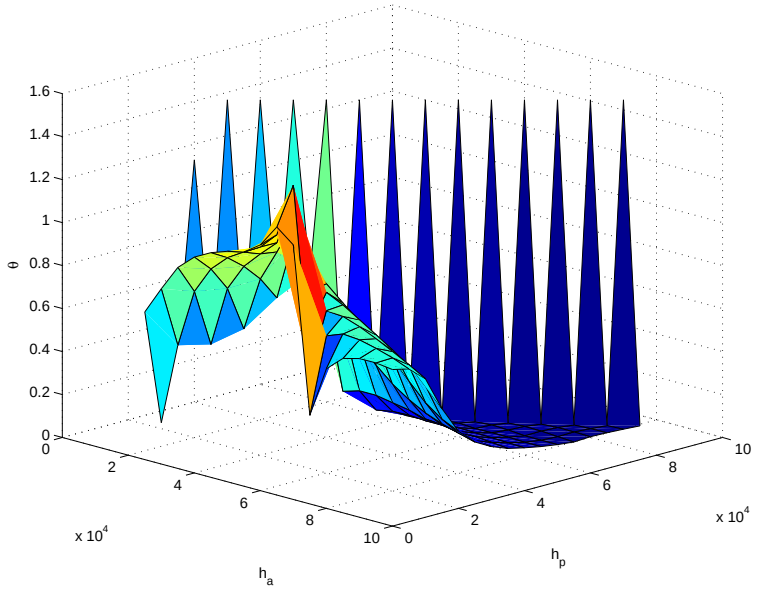


FIG. 5.10 – Meilleur interpolation de Lyapunov

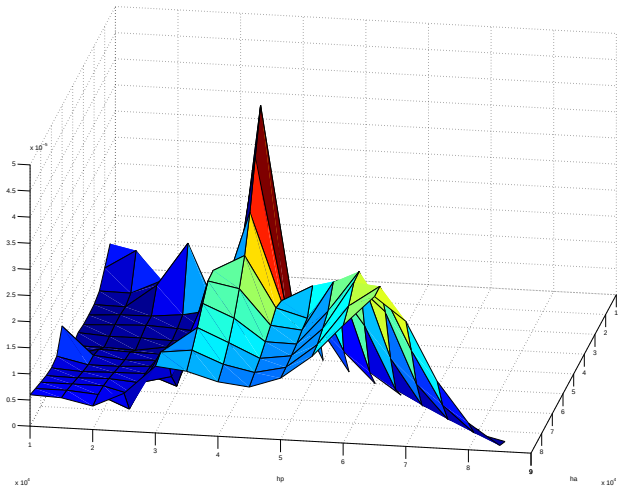


FIG. 5.11 – Le coût d'interpolation

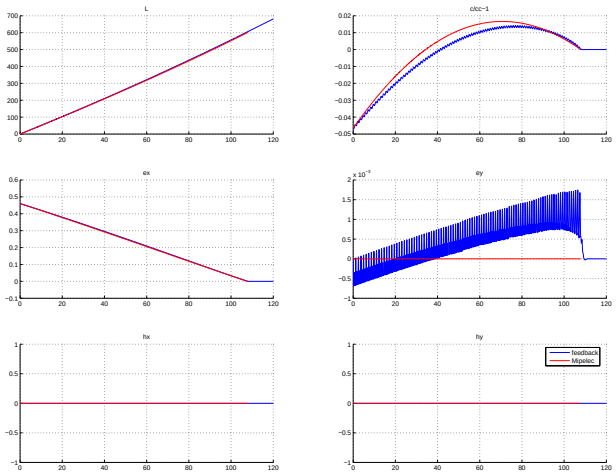


FIG. 5.12 – Evolution des paramètres orbitaux pour le transfert ha=60000 hp=20000

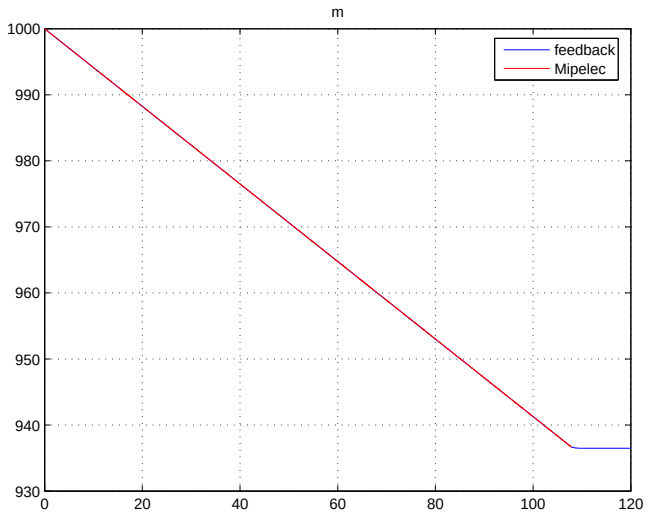


FIG. 5.13 – Evolution de la masse pour le transfert ha=60000 hp=20000

1. `Calculer la trajectoire avec` V_k^{old},
2. `Estimer les temps` $T_{k_i^{old}}$, `soit` $T^{old} = \max_i T_{k_i^{old}}$ `leur maximum`,
3. `Choisir` l `tel que` $T_{k_l^{old}}$ `soit minimal`,
4. `Faire décroître` k_l, `si` $k_l^{old} < h$ `alors` $k_l^{new} = 0$ `sinon` $k_l^{new} = k_l^{old} - h$,
5. `Estimer les nouveaux temps` $T_{k_i^{new}}$,
6. `Soit` $T^{new} = \max_i T_{k_i^{new}}$ `leur maximum`,
7. `Si` $T^{new} < T^{old}$ `alors set` $k^{old} = k^{new}$ `et aller à 4`,
8. `Stop.`

A chaque itération de boucle cet algorithme fait décroître un des paramètres. L'algorithme se termine en un nombre fini de pas. Nous pouvons définir l'application

$$\Phi_-(k^0, h, \rho) \tag{5.9}$$

qui retourne le dernier k^{old}. De façon similaire nous pouvons définir un algorithme dual qui essaye de faire augmenter un paramètre k_l correspondant au maximum des temps T_{k_l} et nous pouvons définir l'application

$$\Phi_+(k^0, h, \rho) \tag{5.10}$$

associée à cet algorithme.

5.3.1 Le cas plan

A priori l'algorithme défini à la section précédente ne converge certainement pas vers une trajectoire optimale. Néanmoins pour quelques familles d'intégrales

premières indépendantes les simulations numériques donnent des résultats surprenants.

Nous étudions les transferts plan vers l'orbite géostationnaire pour un satellite de masse initiale $m_0 = 1000\,kg$, d'impulsion spécifique $I_{sp} = 1500\,s$ et de poussée maximale $\epsilon = 0.1\,N$. Les orbites initiales appartiennent à l'ensemble des orbites elliptiques ayant une altitude de périgée h_p comprise entre $10\,000\,km$ et $90\,000\,km$ et une altitude d'apogée h_a supérieure à h_p et inférieure à $90\,000\,km$. Nous avons utilisé le logiciel MIPELEC pour estimer le transfert optimal et disposer ainsi d'un temps de référence T_f^{ref}. Le temps de référence est tracé sur la figure 5.14. Les orbites circulaires sont obtenues pour $h_a = h_p$ et que les orbites géo-synchrones pour $\frac{h_a+h_p}{2} = h_{geo}$ avec $h_{geo} = 36\,000\,km$ l'altitude de l'orbite géostationnaire. Il est commode de distinguer parmi l'ensemble des orbites initiales, les orbites pré-synchrones ayant une période plus rapide que la période de l'orbite géostationnaire $\frac{h_a+h_p}{2} < h_{geo}$ et les orbites post-synchrones ayant une période plus grande $\frac{h_a+h_p}{2} > h_{geo}$.

Nous avons calculé $\Phi_+([11], 1, 10^{-3})$, où Φ_+ est l'application (5.10), pour deux sous classes de fonctions de Lyapuonv : la classe V_k^c dépendante du moment cinétique et de l'excentricité et la classe V_k^a dépendante du demi-grand axe et de l'excentricité,

$$V_k^c = k_c(\frac{c}{c_{geo}} - 1)^2 + k_e e^2\,, \tag{5.11}$$

$$V_k^a = k_a(\frac{a}{a_g eo} - 1)^2 + k_e e^2\,. \tag{5.12}$$

Les temps de transfert feedback estimés avec la formulle (5.2) sont dénotés respectivement par T_f^c et T_f^a. Sur les figures 5.15 et 5.19. Le résultat principal, qui ressort de ces simulations, est la proximité des temps des transferts feedback de meilleure interpolation avec les temps de transferts optimaux.

On remarque sur les figures 5.17 et 5.16 que la famille V_k^c est efficace pour effectuer un transfert des orbites post-synchrones vers l'orbite géostationnaire (les erreurs négatives avec les temps de référence doivent être interprétées comme un artefact de la formulle (5.2)) . Alors que sur les figures 5.21 et 5.20 on constate que la famille V_k^a est efficace pour effectuer un transfert entre des orbites pré-synchrones vers l'orbite géostationnaire.

Comme les trajectoires finales ne dépendent que des rapports entre les coefficients k_i, on définit les paramètres

$$\theta_c = \arctan\frac{k_e}{k_c}\,, \tag{5.13}$$

$$\theta_a = \arctan\frac{k_e}{k_a}\,, \tag{5.14}$$

qui permettent de comprendre l'évolution de la fonction de Lyapunov retournée par l'algorithme $\Phi_+([11], 1, 10^{-3})$ en fonction de l'orbite initiale. Sur les figures 5.18 et5.22 on observe que cette optimisation simple ne dépend que faiblement de l'orbite initiale, les paramètres θ_c et θ_a sont en effet presque constants.

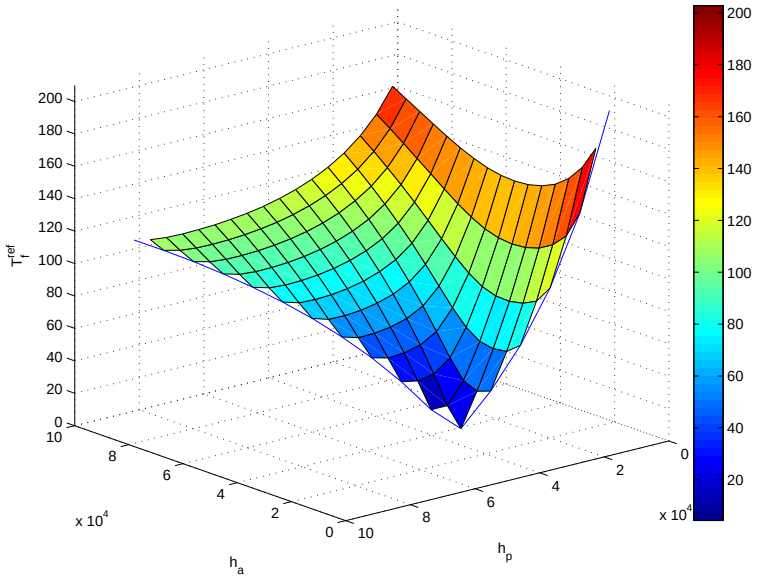


FIG. 5.14 – Temps de référence T_f^{ref} (en jours)

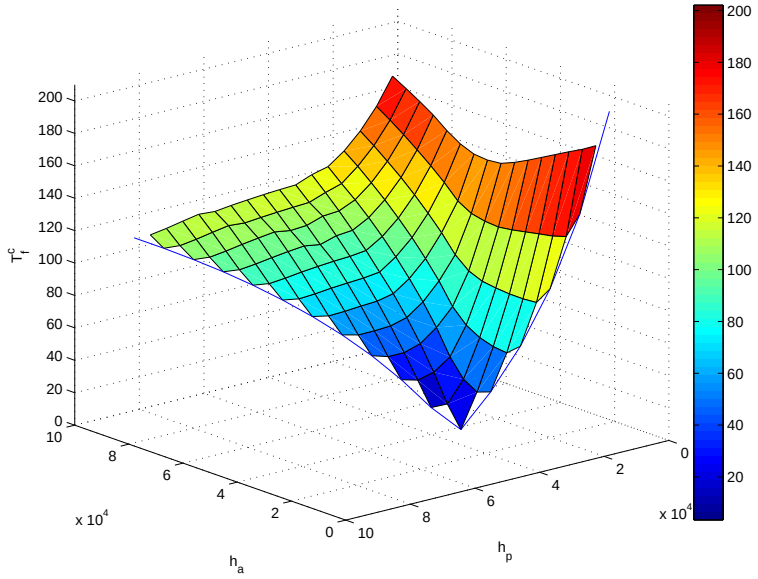


FIG. 5.15 – Temps T_f^c (en jours)

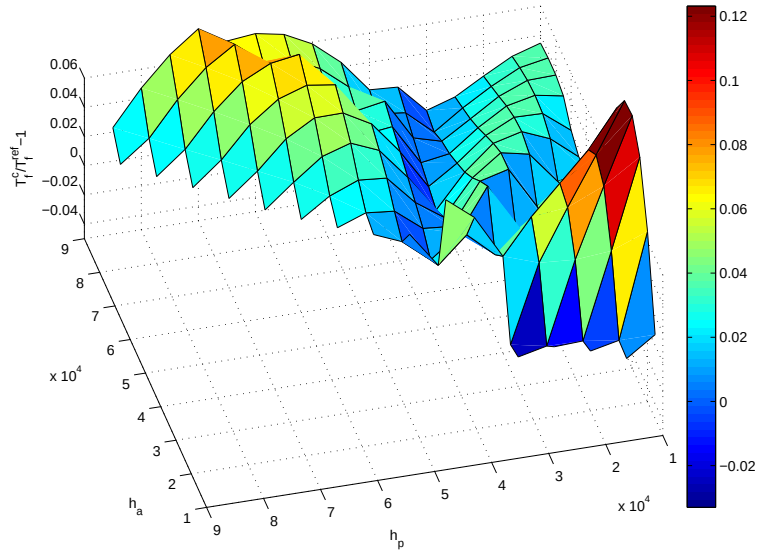


FIG. 5.16 – Erreur relative $\frac{T_f^c}{T_f^{ref}} - 1$

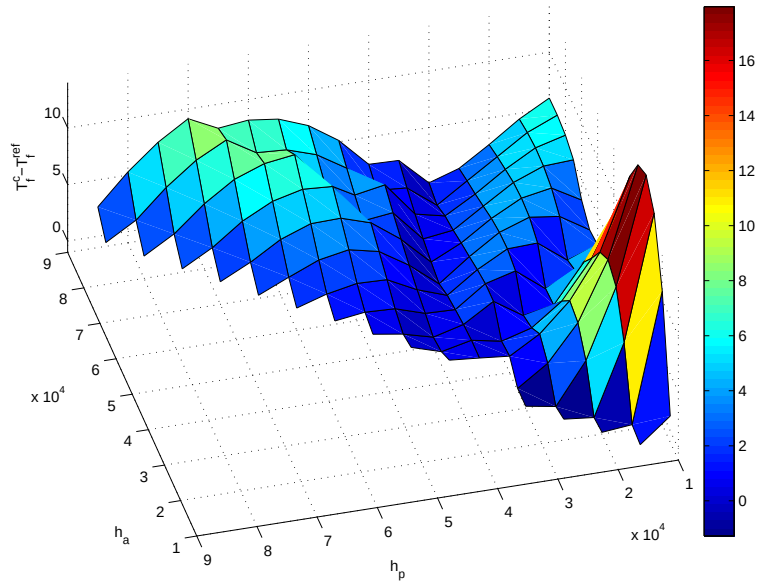


FIG. 5.17 – Erreur absolue $T_f^c - T_f^{ref}$

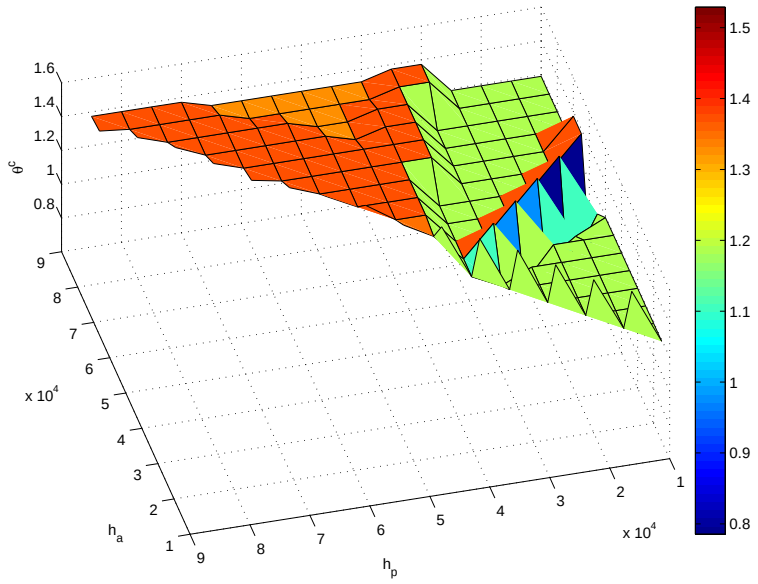


FIG. 5.18 – L'argument de l'optimisation naïve : θ_c

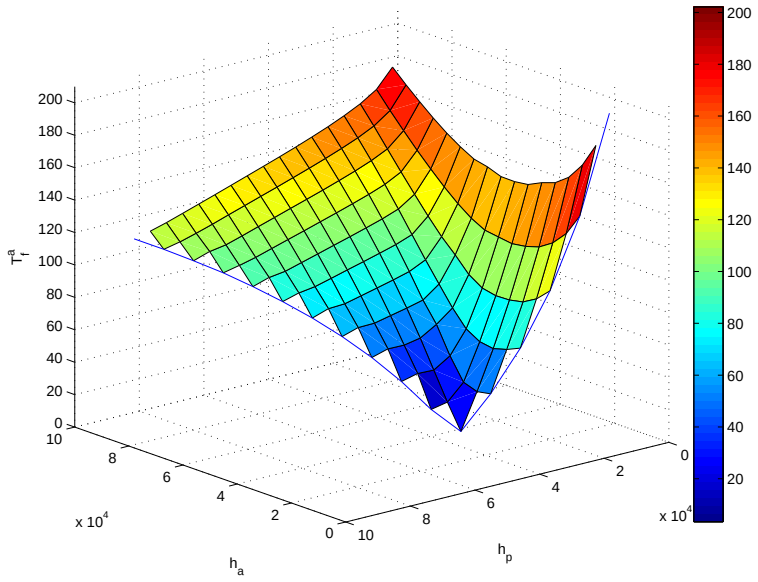


FIG. 5.19 – Temps T_f^a (en jours)

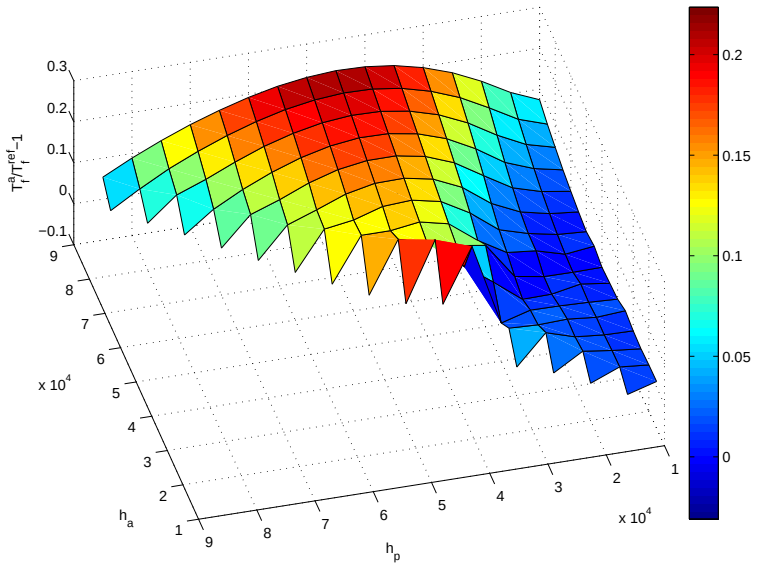


FIG. 5.20 – Erreur relative $\frac{T_f^a}{T_f^{ref}} - 1$

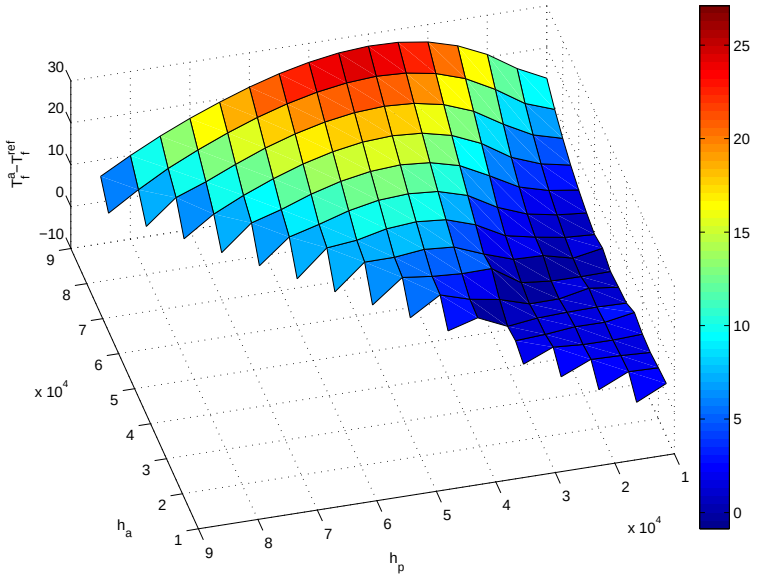


FIG. 5.21 – Erreur absolue $T_f^a - T_f^{ref}$

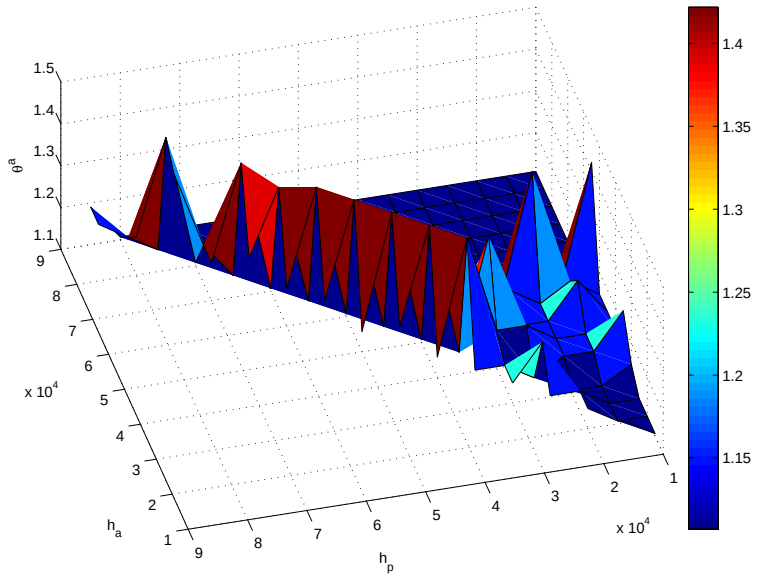


FIG. 5.22 – Argument de l'optimisation naïve θ_a

5.3.2 Des transferts en 3 dimensions

Considérons le satellite PPS 1350 ($Isp = 1630\,s$, $\epsilon = 0.088\,N$), divers types d'orbites initiales, soit h_a l'altitude de l'apogée, h_p celle du périgée et d_h la variation d'altitude.

- GSO (ha=hs+dh, hp=hs-dh) ,
- SPTO (ha=hs+dh, hp=hs),
- MEO (ha=hp=hs-dh) ,
- HCEO (ha=hp=hs+dh) ,

et appliquons l'algorithme

$$\Phi_-(\Phi_+([111], 1, 10^{-3}), 0.1, 10^{-3})\,, \tag{5.15}$$

pour rechercher un transfert efficace vers l'orbite géostationnaire. Sur la figure 5.23 page 98 nous avons tracé le ΔV des transferts de références, données qui nous ont étés fournies par Alcatel Space, et ceux résultant de l'algorithme. Le "delta V" est une quantité fort prisée dans le monde de l'astronautique. Il représente un critère simple qui permet d'évaluer la masse de carburant nécessaire à la réalisation d'une mission spatiale. En effet pour une fusée en mouvement libre dans l'espace, éjectant de la masse à une vitesse constante v, la différence entre la vitesse finale et la vitesse initiale est proportionnelle au ratio des masses finale et initiale,

$$\Delta V = v \log \frac{m_0}{m_1}. \tag{5.16}$$

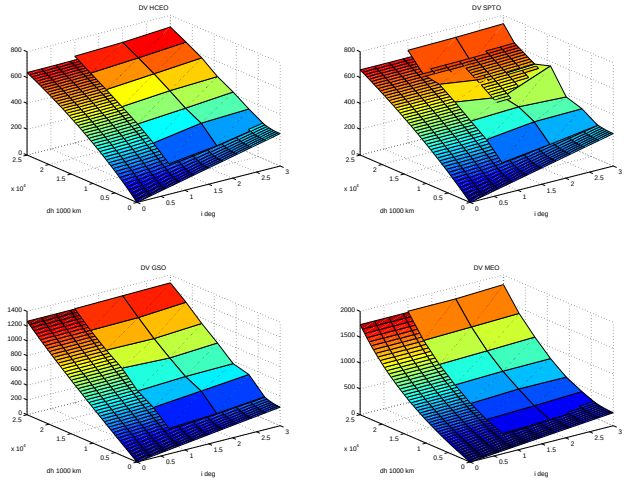


FIG. 5.23 – ΔV : grille fine transferts optimaux, grille large algorithme naïf Φ.

Comme pour un transfert en temps minimum le temps de transfert est proportionnel à la différence entre la masse intiale et la masse finale, le “delta V” continue d'être une mesure pertinente de l'efficacité des transferts orbitaux à faible poussée. De plus comme cette proportionalité entre temps de transferts et différences des masses continue d'être vérifiée pour les transferts en boucle fermée u^δ (voir la relation (5.2) à la section 5.1.2), le critère “delta V” est valable pour estimer l'efficacité d'un transfert feedback u^δ.

Chapitre 6

Rendez-vous

Dans ce chapitre nous voulons analyser la spécificité des contrôles stabilisant un rendez-vous, et expliquer pourquoi nous n'avons pu trouver de feedback stabilisant un rendez-vous de façon efficace. Dans la section 6.2.1 nous présentons un résultat dû à Antoine Chaillet et Jean-Baptiste Pomet, qui ont analysé la dépendance par rapport au module maximal de poussée, ε, des fonctions Lyapunov associée aux lois de commande continue stabilisant asymptotiquement une trajectoire keplerienne périodique. Dans la section 6.2.2 nous analysons le temps nécessaire pour effectuer un rendez-vous à l'aide des lois de commandes développées dans [32] qui assurent une stabilisation asymptotique locale d'une trajectoire keplerienne. Pour les transferts, la méthode de Jurdjevic-Quinn implique qu'il existe des fonctions de Lyapunov indépendantes du module maximal de poussée ε, mais pour les rendez-vous chaque fonction de Lyapunov doit dépendre de ε. Enfin, dans la section 6.3, nous présentons une méthode de synchronisation hybride, une boucle ouverte basée sur la famille des contrôles réalisant un transfert, et nous analysons ses performances en présence de perturbations.

6.1 Par rapport au transfert

Dans le chapitre 1 nous avons distingué la notion de rendez-vous de la notion de transfert. Considérons un système de Kepler contrôlé (section 1.4), un système affine avec un champs de dérive périodique,

$$\dot{I} = F(I,\theta)\,u\,, \tag{6.1}$$
$$\dot{\theta} = w(I,\theta) + g(I,\theta)\,u\,, \quad u \in B_\varepsilon^m\,, \tag{6.2}$$

avec $(I,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$.

Soit une orbite cible $I_c \in \mathbb{R}^n$, dans le chapitre 4 nous avons proposé une classe de lois de commande $u(I - I_c, \theta)$ stabilisant asymptotiquement cette orbite I_c, réalisant donc des transferts vers cette orbite. Il est remarquable que pour toutes les valeurs du module maximal de poussée ε, il existe une fonction de Lyapunov

commune à chacun des systèmes ainsi bouclé. Dans le chapitre précédant nous avons de plus observé que ces contrôles en boucle fermée peuvent être très proches des commandes optimales.

Mais un rendez-vous c'est non seulement se donner une orbite cible I_c, mais aussi une longitude finale $\theta_c(.)$, une fonction du temps, solution des équations

$$\dot{I}_c = 0\,, \tag{6.3}$$
$$\dot{\theta}_c = w(I_c, \theta_c)\,, \quad \theta_c(0) = \theta_c^0\,, \tag{6.4}$$

le rendez-vous est réalisé quand

$$I = I_c\,, \tag{6.5}$$
$$\theta = \theta_c\,[2\pi]\,. \tag{6.6}$$

Soient $(I_0, \theta_0(.))$ la solution d'origine et $(I_c, \theta_c(.))$ la solution cible, on définit $T_t(\varepsilon, \theta_0)$ le temps minimum de transfert et $T_r(\varepsilon, \theta_0, \theta_c)$ le temps minimum de rendez-vous. Les temps optimaux de transfert dépendent peu de la longitude initiale $\theta_0(0)$ et beaucoup du module maximal de poussée ε. Soit deux longitudes initiales, la différence entre $T_t(\varepsilon, \theta_0)$ et $T_t(\varepsilon, \tilde{\theta}_0)$ est d'au plus une période

$$1/2\pi \int_0^{2\pi} 1/w(I_c, \theta) \mathrm{d}\theta\,. \tag{6.7}$$

D'autre part d'après le théorème 46 ces temps sont équivalents à τ/ε quand ε tend vers 0. Remarquons aussi qu'un transfert optimal réalise aussi un rendez-vous pour une valeur particulière de θ_c^0. Par contre, si $I_0 = I_c$, le temps optimal de transfert T_t est nul, alors que le temps optimal de rendez-vous est non nul dès que $\theta_0 \neq \theta_c$. Un rendez-vous n'est possible que si il existe un point I tel que $w(I, \theta) \neq w(I_c, \theta)$. Ces remarques constituent autant d'obstacles à la réalisation d'un feedback stabilisant un rendez-vous de façon efficace, en une durée proche du temps optimal de transfert.

6.2 A propos du rendez-vous par feedback

6.2.1 Condition nécessaire

A la section 6.2.2 nous avons présenté un résultat qui établit l'existence d'un contrôle en boucle fermée stabilisant asymptotiquement une orbite cible I_c pour le système de Kepler contrôlé. Le contrôle et le système bouclé dépendent explicitement du module maximal de poussée ε, mais la stabilité est démontrée en utilisant une fonction de Lyapunov indépendante du module maximal de poussée. Nous allons voir qu'il est moins aisé de construire un feedback qui stabilise une solution cible $(I_c, \theta_c(.))$. Nous reformulons dans cette section un résultat qui établit la non-existence d'une fonction de Lyapunov valable pour toutes constante $\varepsilon > 0$ [20].

Soit une trajectoire cible (I_c, θ_c), considérons le système étendu en $(I, \theta, \theta_c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,

$$\begin{aligned} \dot{I} &= F(I,\theta)\, u\,, \\ \dot{\theta} &= w(I) + g(I,\theta)\, u\,, \quad u \in B_\varepsilon^m\,, \\ \dot{\theta}_c &= w(I_c)\,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Théorème 71. *Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs convergeant vers zéro, et pour chaque n soit $u_n \in C(\mathbb{R}^n, B_{\varepsilon_n}^m)$ un feedback continu stabilisant asymptotiquement $(I_c, \theta_c(.))$ pour le système (6.8) avec $\varepsilon = \varepsilon_n$. Il n'existe pas de fonction de Lyapunov V continûment différentiable commune à tous les systèmes en boucle fermée.*

Démonstration: Supposons qu'il existe $V(I, \theta, \theta_c)$ une fonction de Lyapunov continûment différentiable valable pour tous les systèmes bouclés avec u_n ; pour tout (I, θ, θ_c),

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial I}.F(I,\theta)u_n + \frac{\partial V}{\partial \theta}(w(I) + g(I,\theta)u_n) + \frac{\partial V}{\partial \theta_c}w(I_c) \tag{6.9}$$

$$\leq 0\,. \tag{6.10}$$

donc pour tout I, θ et θ_c,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}w(I) + \frac{\partial V}{\partial \theta_c}w(I_c) \leq 0\,. \tag{6.11}$$

Cette inégalité ne peut être vérifiée que si V est une intégrale première sur le tore $(\theta, \theta_c) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ de la dynamique

$$\dot{\theta} = w(I)\,, \tag{6.12}$$

$$\dot{\theta}_c = w(I_c)\,. \tag{6.13}$$

Or pour presque tout $I \in \mathbb{R}^n$, le rapport de pulsation $w(I)/w(I_c)$ est irrationnelle donc les trajectoires de (6.12) sont dense dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Ainsi pour presque tout I et par continuité pour tous les points I, la fonction V ne dépend ni de θ ni de θ_c. Donc V, contrairement à notre supposition, ne peut pas atteindre son minimum seulement si $I = I_c$ et $\theta = \theta_c$. □

6.2.2 Existence, le contrôle Kellett-Praly

Laurent Praly et Christopher M. Kellett ont construit, à l'aide des méthodes de "backstepping" et de "feedforwarding", un feedback assurant théoriquement la stabilisation asymptotique locale d'une trajectoire keplerienne, un rendez-vous en respectant la contrainte de poussée sur un domaine compact des orbites elliptiques [32].

Cette famille de contrôle en boucle fermée réalise d'abord le transfert vers l'orbite cible puis dans voisinage de l'orbite cible, dépendant de la taille du module maximal de poussée, commence à synchroniser la longitude avec la longitude de la trajectoire désirée. Ce contrôle permet de stabiliser une trajectoire keplerienne, mais malheureusement, de part sa construction, cette loi de commande demande un réglage fin et difficile à réaliser pour équilibrer la puissance disponible ε entre la fraction du contrôle, qui essaye de synchroniser, et l'autre fraction qui essaye d'effectuer le transfert. Nous avons effectué quelques simulations pour comprendre l'efficacité de ce contrôle.

Les auteurs montrent, tout d'abord que le rendez-vous est réalisable par un feedback, pour la famille des orbites elliptiques coplanaires et de moment cinétique constant égal au moment cinétique de l'orbite cible, géostationnaire. Pour cette famille d'orbites le contrôle satisfait à la contrainte de poussée. Puis, ils étendent ce contrôle à l'ensemble des orbites elliptiques, en ajoutant des termes, qui restent petits sur un compact, et tendent à ramener l'orbite courante vers la famille des orbites elliptiques coplanaires de moment cinétique constant. Notons que la convergence asymptotique locale est démontrée en exhibant une fonction de Lyapunonv qui dépend du module maximale de poussée ε contrairement aux contrôles assurant un transfert basés sur la méthode de Jurdjevic-Quinn développée dans le chapitre 4.

Laurent Praly et Christopher M. Kellett ont construit cette famille de lois de commande en boucle fermée en utilisant les coordonnées suivantes,

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & L - L_c \\ x_2 & = & \frac{c_c^2}{c^2}(1 + e_x \cos L + e_y \sin L) - 1 \\ x_3 & = & \frac{c_c}{c}(e_x \sin L - e_y \cos L) \\ x_4 & = & \frac{c}{c_c} - 1 \end{array}$$

Dans ces coordonnées avec $x_4 = 0$ la dynamique devient

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & (2 + x_2)\, x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -(1 + x_2)^2\, x_3 \\ \dot{x}_3 & = & (1 + x_2)^2\, x_2 + u_q \end{array} \tag{6.14}$$

Il s'avère, tout au moins pour le réglage des simulations représentées à la figure 6.1, que le temps pour effectuer le rendez-vous avec ce feedback dépend fortement de la longitude initiale. Pour ces simulations nous n'avons pas cherché à imposer une contrainte sur le module maximal de poussée, on vérifie simplement, a posteriori, que la loi de commande reste bornée le long de la trajectoire (voir la figure 6.2). Sur cette figure on remarque aussi que la norme du contrôle varie fortement le long de la trajectoire. Si ε/m_0 est la valeur maximale de la norme du contrôle, cette trajectoire n'est certainement pas la trajectoire de rendez-vous, en temps minimum, avec la contrainte sur le module maximale de poussée ε.

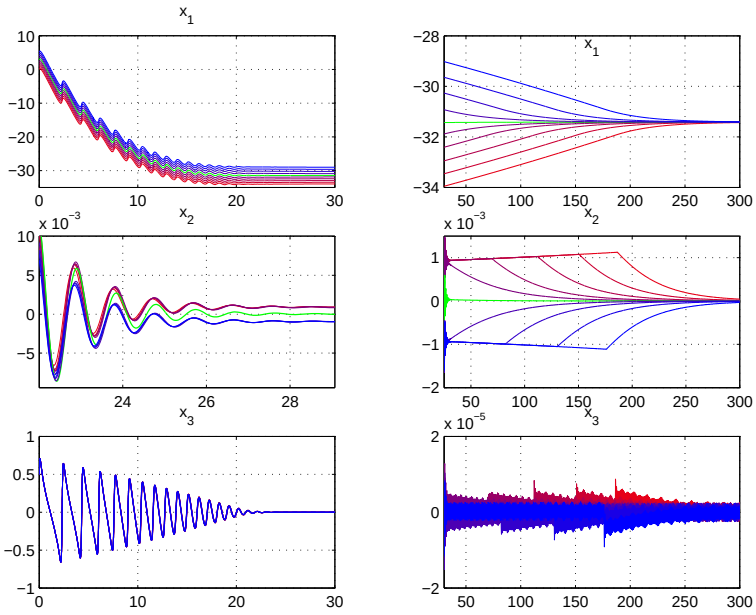


FIG. 6.1 – Sensibilité du feedback Kellett Praly à la longitude initiale

- Condition initiale $x_1(0) \in [0\ 2\,\pi]$, $x_2(0) = 0.5$, $x_3(0) = 0.5$,
- Pour toutes les conditions initiales x_1 se stabilise à la valeur $-10\,\pi \sim 31.4$,
- Le temps du rendez-vous vers $(0\,[2\pi], 0, 0)$ dépend de la valeur initiale de x_1
- Pour la valeur de la condition initiale $x_1 = 2.87$ le rendez-vous se fait en moins de 50 jours, pour les autres conditions initiales la durées est bien plus longue !

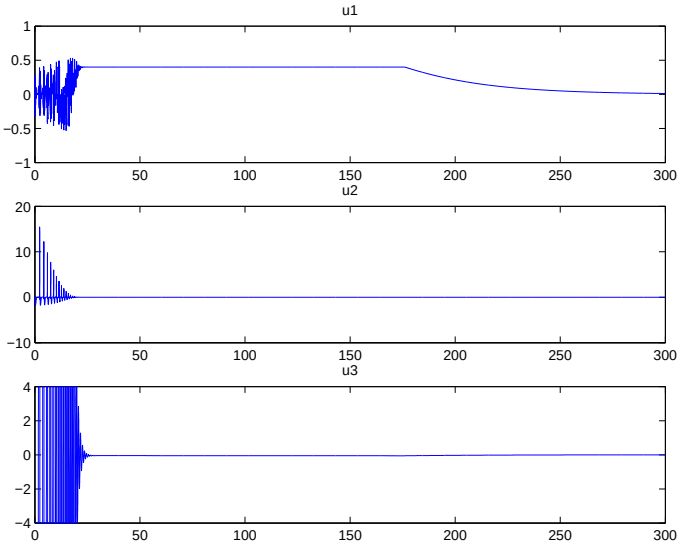


FIG. 6.2 – Un exemple de loi de commande Kellett-Praly

– Le contrôle u_q est la somme de trois contrôles $u_q = u_1 + u_2 + u_3$.
– La partie u_1 du contrôle assure le rendez-vous, les parties u_2 et u_3 le transfert.
– Condition initiale $x_1(0) = 5.17$, $x_2(0) = 0.5$, $x_3(0) = 0.5$.

6.3 Une stratégie de rendez-vous hybride

Faute de pouvoir construire un feedback nous décrivons une stratégie qui est une modification "boucle ouverte" du feeback présenté dans le chapitre 4.

6.3.1 Pour des systèmes kepleriens quelconques

Soit à nouveau un système de Kepler contrôlé (1.69),

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= F(I,\phi/\varepsilon)\, v/m\,, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= w(I,\phi/\varepsilon) + \varepsilon\, g(I,\phi/\varepsilon) v/m\,, \qquad v \in B_1\,. \\ \frac{dm}{d\tau} &= -\alpha\|v\|\,, \end{aligned}$$

et une orbite cible I_c. On a vu à la section 2.2.2, qu'il existe de nombreuses familles de feedback, dépendant continûment d'un vecteur k positif et de dimension finie, qui permettent de stabiliser asymptotiquement l'orbite cible. On note $u(k, I, \phi/\varepsilon)$ cette famille de contrôles.

Soit $(I(I_0,\theta_0,k,t), \theta(I_0,\theta_0,k,t), m(I_0,\theta_0,k,t))$ la solution de l'équation dif-

férentielle ordinaire dépendant du paramètre k,

$$\frac{dI}{d\tau} = F(I,\phi/\varepsilon)\,u(k,I,\phi/\varepsilon)/m\,, \tag{6.15}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = w(I,\phi/\varepsilon) + \varepsilon\, g(I,\phi/\varepsilon)\,u(k,I,\phi/\varepsilon)/m\,, \tag{6.16}$$

$$\frac{dm}{d\tau} = -\alpha\|u(k,I,\phi/\varepsilon)\|\,. \tag{6.17}$$

Cette fonction $(I_0,\theta_0,k) \to (I(t),\theta(t),m(t))$ est continûment différentiable par rapport aux conditions initiales (I_0,θ_0,m_0) et au paramètre k.

Proposition 72. *Le déphasage $\theta(t)-\theta_c(t)$ entre la longitude courante et celle de l'orbite cible admet une limite finie quand t tend vers l'infini,*

$$\phi(I_0,I_c,\theta_0(0),\theta_c(0),k) = \lim_{t\to+\infty} \theta(t)-\theta_c(t)\,. \tag{6.18}$$

Démonstration: Le caractère stabilisant se traduit par

$$\lim_{t\to+\infty} I(I_0,\theta_0,k,t) = I_c\,, \quad \forall I_0\in\Omega, k>0\,, \tag{6.19}$$

et la convergence exponentielle de $I(t)$ vers I_c (voir le théorème 59) implique que le déphasage

$$\theta(t)-\theta_c(t) = \theta(0)-\theta_c(0)\,, \tag{6.20}$$

$$+ \int_0^t [w(I(s),\theta(s)) - w((I_c,\theta_c(s))]\mathrm{d}s\,, \tag{6.21}$$

$$+ \int_0^t g(I(s),\theta(s))\,u(k,I(s),\theta(s))/m\mathrm{d}s\,, \tag{6.22}$$

admet une limite finie ϕ quand t tend vers l'infini, □

Si on savait calculer ϕ, qui est une intégrale première du système bouclé, (6.15) on pourrait essayer de construire une loi de commande en boucle fermée pour stabiliser ϕ à $0\,[2\pi]$. Malheureusement la valeur de ϕ ne nous est accessible que par intégration numérique. Néanmoins on peut espérer pouvoir ajuster la valeur de ϕ en modifiant la valeur de k.

6.3.2 Application au problème de Kepler contrôlé

La trajectoire d'un système dynamique régulier dépend continûment de sa condition initiale. D'autre part notre feedback, basé sur les intégrales premières converge assez vite vers l'orbite cible, de telle sorte que le déphasage $\phi = L - L_c$ admet une limite finie, qui dépend régulièrement de la condition initiale. La valeur de ce déphasage dépend très fortement de la trajectoire suivie. Contrairement aux lois de commande de type Jurdjevic-Quinn réalisant un transfert, il

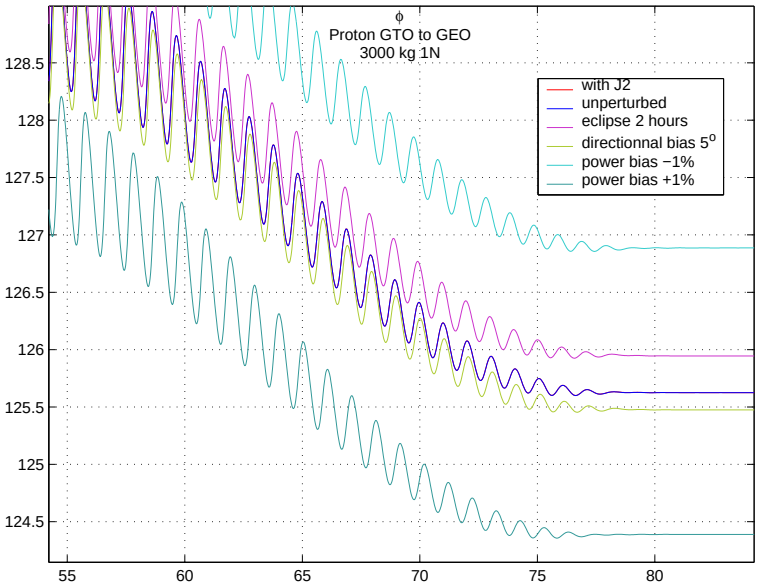


FIG. 6.3 – Sensibilité du déphasage ϕ à diverse perturbations sur un transfert GTO-GEO

est nécessaire, pour construire une commande réalisant un rendez-vous efficace, avec un temps de transfert proche du temps optimal, d'estimer précisément toutes les perturbations, et, en particulier le biais sur le module maximal de poussée, les éclipses et autres interruptions de poussée, les imprécisions sur la dérive, champs gravitationnels et autres forces, telles les pressions solaire et atmosphérique (pour une description de l'ensemble de ces perturbations voir [18]).

Une méthode pour synchroniser consiste à modifier légèrement une loi de commande en boucle fermée réalisant un transfert. Nous allons voir aux travers des simulations que deux méthodes sont possibles : soit de substituer au feedback une autre loi de commande pendant une durée limitée, soit de changer légèrement un paramètre du feedback. Ne connaissant pas, sous une formule simple, la dépendance du déphasage par rapport à une modification de la loi de commande, la seule méthode envisageable, pour estimer les variations du déphasage final, est une méthode de tir. Cette une méthode de tir est monodimentionnelle, et donc, numériquement bien plus stable et légère, que une recherche de la condition initiale du vecteur adjoint pour le calcul de la commande optimale. Sur la figure 6.4 on peut observer qu'il est possible de corriger une erreur de 0.75 radian deux semaine avant la fin du transfert.

Il faut noter en effet que la synchronisation est modulo $[2\pi]$ et donc les erreurs ne s'additionnent pas toujours, mais peuvent se compenser. Pour chaque transfert il convient donc de déterminer le moment où il devient intéressant et important de synchroniser ; synchroniser à la fin du transfert permet d'oublier

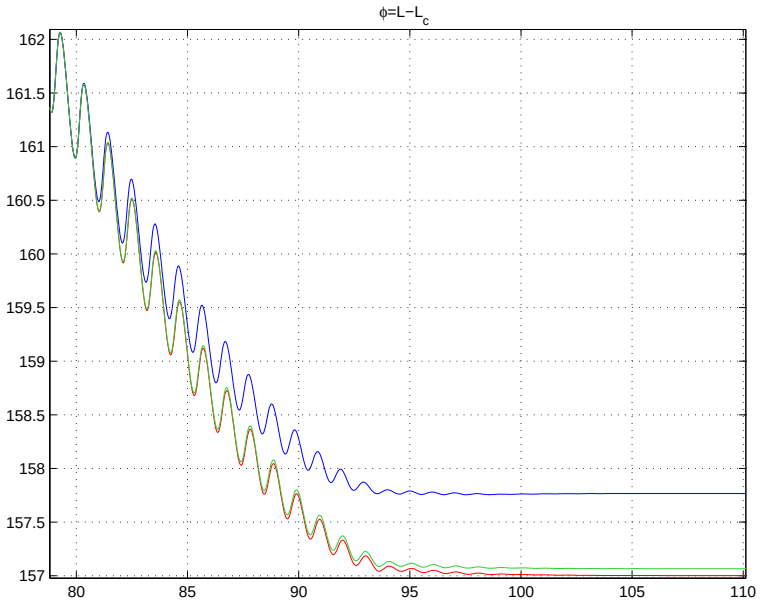


FIG. 6.4 – Synchronisation par changement de condition initiale

- En bleu le déphasage $L - L_c$ sans synchronisation,
- A 80 jours on décide de synchroniser $L - L_c \rightarrow 0\,[2\,pi]$
- En vert on pousse à puissance maximale dans la direction u_s pendant 0.19 jour avant de remettre le feedback, la valeur limite du déphasage vaut 157.06. L'erreur relative en longitude modulo $2\,\pi$ est de 0.002.
- En rouge on a poussé pendant 0.2 jour, c'est trop long.

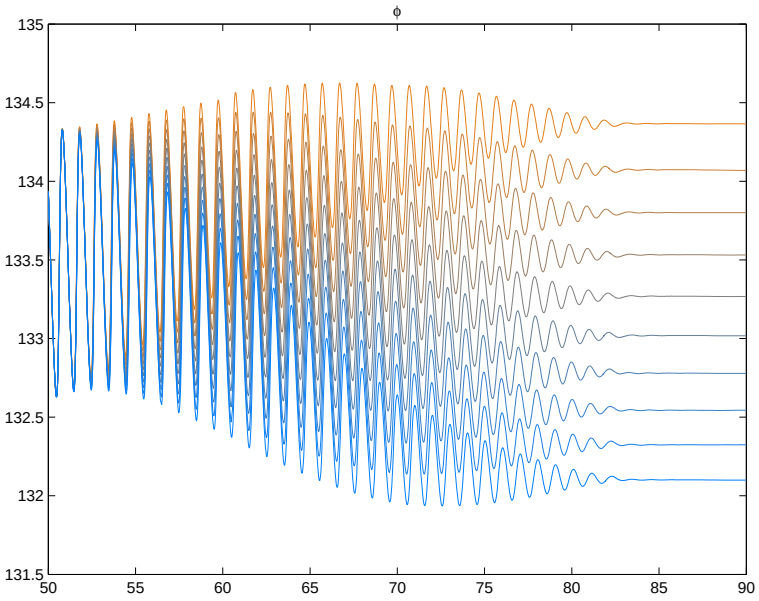


FIG. 6.5 – Sensibilité du déphasage ϕ au paramètre k_a

toutes les perturbations qui ont eu lieu avant. Notons que la période T d'une orbite elliptique dépend uniquement de son niveau d'énergie, soit a le demi-grand axe,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,. \tag{6.23}$$

Il est donc naturel d'analyser la variation du déphasage final en fonction du paramètre k_a. L'étude de sensibilité sur un transfert GTO-GEO nous montre que le déphasage est très sensible aux variations de ce paramètre alors que le temps de transfert reste pratiquement inchangé (voir la figure 6.5).

Postface

En conclusion de cette thèse nous présentons brièvement une stratégie de mise à poste, simple et efficace pour une utilisation effective des moteurs à faible poussée. Les lanceurs proposent classiquement deux types d'orbites d'injection, les orbites basses et les orbites de transferts géostationnaires (première phase d'un transfert de GTO-GEO). Veuillez noter que le prix de lancement d'un kilogramme sur une orbite basse est près du tiers du coût pour atteindre une orbite de transfert géostationnaire. A la section 3.4 nous avons vu que, quand le module de poussée est petit, la trajectoire optimale entre deux orbites circulaires coplannaires suit les orbites circulaires. D'autre part les commandes, en boucle fermée stabilisantes, de type Jurdjevic-Quinn, avec des fonctions de Lyapunov quadratiques 4.1, suivent aussi le chemin des orbites circulaires quand le module de poussée est petit. La commande optimale est donc parfaitement approchée par ces commandes stabilisantes, simples à calculer, pour les transferts entre deux orbites circulaires coplanaires.

Cette simplicité et cette robustesse permettent d'envisager des mises à poste à moindre coût. C'est-à-dire tirer partie de l'efficacité des moteurs à faible poussée par rapport aux moteurs chimiques. En effet ses commandes renforcent sensiblement l'autonomie des véhicules spatiaux et permettraient ainsi de conserver des coûts de suivi de mission, entre l'orbite d'injection et l'orbite de fonctionnement, similaires aux missions actuelles, tout en augmentant la masse utile des véhicules spatiaux. Cependant, pour pouvoir utiliser effectivement ces lois de commande en boucle fermées, il est nécessaire de disposer d'un observateur fiable de la position du satellite. C'est nous semble-t-il un facteur limitant, déterminant, pour une utilisation des moteurs à faible poussée lors de transferts d'orbites.

Bibliographie

[1] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Control Theory and Optimization, II.

[2] V. I. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires*. MIR, 1980.

[3] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1989. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.

[4] Z. Artstein. Rapid oscillation, chaterring systems, and relaxed controls. *SIAM J. Control and Optimization*, 27(5) :940–948, September 1989.

[5] A. Bacciotti and F. Ceragioli. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth lyapunov functions. *ESIAM*, 4 :361–376, 1999.

[6] A. Baciotti and L. Rosier. *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Number 267 in Lecture Notes in Control and Inform. Sci. Springer, 1997.

[7] S. Bharadwaj, A. V. Rao, and K. D. Mease. Entry trajectory tracking law via feedback linearization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(5), 1998.

[8] A. Bombrun. Lyapunov interpolation. In *Proceedings of the 17th MTNS*, Kyoto, Japan, 2006.

[9] A. Bombrun, J. Chetboun, and J.-B. Pomet. Transferts terre-lune en poussée faible par contrôle feedback. la mission smart-1. Technical Report RR-5955, INRIA, 2006. https ://hal.inria.fr/inria-00087927.

[10] A. Bombrun, Y. El Fassy Fihry, and J.-B. Pomet. Etudes préliminaires d'ensembles accessibles pour des problèmes d'anti-collision. Technical report, INRIA, 2006.

[11] A. Bombrun and J.-B. Pomet. Jurdjevic-quinn conditions and discontinuous bounded control. In *Proceedings of the CTS-HYCON workshop*, Paris, France, 2006.

[12] A. Bombrun and J.-B. Pomet. On the averaged control system. In *Proceedings of the 17th MTNS*, 2006.

[13] A. Bombrun, J.-B. Pomet, and M. Sigalloti. Mechanical systems and rendez-vous controllability. In *Proceedings of 44th IEEE CDC-ECC'05*, 2005.

[14] B. Bonnard and J.-B. Caillau. Riemannian metric of the averaged energy minimization problem in orbital transfer with low thrust. *Annales de l'Institut Henry Poincaré*, 2006.

[15] B. Bonnard, L. Faubourg, and E. Trélat. *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*, volume 51 of *Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag, 2006.

[16] J.-B. Caillau. *Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal des transferts orbitaux*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Toulouse, 2000.

[17] J.-B. Caillau, J. Gergaud, and J. Noailles. Minimum time control of the kepler equation. In Vincent D. Blondel and Alexandre Megretski, editors, *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Princeton University Press, 2004.

[18] J.-P. Carrou. *Mécanique spatiale Tome 1*. CNES, 1995.

[19] F. Ceragioli. *Discontinuous ordinary differential equations and stabilization*. PhD thesis, Università di Firenze, 2000.

[20] A. Chaillet. Fonction de lyapuov contrôlée pour le transfert d'orbite avec rendez-vous en poussée faible. Master's thesis, DEA ATS - Orsay, 2003.

[21] D. H. Chang, D. F. Chichka, and J. E. Marsden. Lyapunov-based transfer between elliptic keplerian orbits. *Discrete and continous dynamical systems-series B*, 2002.

[22] F. Chaplais. Averaging and deterministic optimal control. *SIAM J. Control And Optimization*, 1987.

[23] J. M. Coron. On the stabilization of some nonlinear control systems : results, tools, and applications. In *Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998)*, pages 307–367. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[24] V.V. Filippov. *Differential Equation with Discontinuous Righthandside*. Kluwer Academic Publishers, 1988.

[25] J. Fourcade, S. Geffroy, and R. Epenoy. An averaging optimal control tool for low-thrust minimum-time transfers. In CNES, editor, *Low thurst trajectory optimization*, March 2000.

[26] J.-P. Gautier. *Structure des systèmes non-linéaires*. CNRS, 1984.

[27] S. Geffroy. *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal- Application aux problèmes de transfert et rendez-vous orbitaux à poussée faible*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997.

[28] S. Geffroy and R. Epenoy. Optimal low-thrust transfers with constraints-generalization of averaging technics. *Acta Astronautica*, 41(3) :133–149, 1997.

[29] T. Haberkorn. *Transfert orbital a poussee faible avec minimisation de la consommation : resolution par homotopie differentielle* . Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, France, octobre 2004.

[30] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory*, volume 51 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge Univ. Press, 1997.

[31] V. Jurjevic and J. P. Quinn. Controllability and stability. *J. of Diff. Equations*, 28 :381–389, 1978.

[32] C. M. Kellett and L. Praly. Nonlinear control tools for low thrust orbital transfer. In *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2004.

[33] J. Kepler. *Astronomia Nova*. 1609.

[34] J. Kepler. *Harmonice Mundi*. 1619.

[35] J. Kurzweil. On the inversion of liapunov's second theorem on stability of motion. *Translations of American Mathematical Society*, 24, 1963. (originally appeared on Czechoslovak Mathematical Journal, (81) (1956), 217-259).

[36] E.B. Lee and L. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory*. SIAM, 1968.

[37] E. J. MacShane. Relaxed controls and variational problems. *SIAM J. Control*, 5(3) :438–485, 1967.

[38] J. Milnor. On the geometry of the kepler problem.

[39] J. Moser. Regularization of kepler's problem and the averaging methode on a manifold. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXIII :609–636, 1970.

[40] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Londres, 1687.

[41] A. E. Petropoulos. Simple control laws for low-thrust orbit transfers. In *Advances In the Astronautical Sciences*, 2003.

[42] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskij, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal process*. Pergamon Press, 1964.

[43] C. Prieur and E. Trélat. Robust optimal stabilization of the brockett integrator via a hybrid feedback. *Math. Control Signals Systems*, 17(3) :201–216, 2005.

[44] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1966.

[45] R. Sepulchre, M. Janković, and P. Kokotović. *Constructive Nonlinear Control*. Communications and Control Engineering. Springer, 1997.

[46] Z. Shen. *Lectures on Finsler Geometry*. World Scientific, 2001.

[47] E. D. Sontag. *Mathematical control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer, 1998.

Résumé : Cette thèse présente une étude du système à deux corps contrôlé en poussée faible, et en particulier, des problèmes de transferts orbitaux. Après une étude de contrôlabilité, nous nous focalisons sur le lien entre la commande optimale en temps minimum et les contrôles en boucle fermée construits à partir de la méthode de JurdjevicQuinn. Des simulations numériques montrent que les commandes JurdjevicQuinn peuvent être proches de la commande temps minimum. Pour comprendre cette propriété nous étudions un système contrôlé moyen dont les trajectoires approchent celles des systèmes à faible poussée. Cette technique nous permet de répondre à une conjecture concernant le comportement asymptotique du temps minimum quand la poussée tends vers zéro. D'autre part elle constitue une piste prometteuse pour construire une fonction de Lyapunov associée la méthode de Jurdjevic-Quinn efficace : un contrôle en boucle fermée proche de la commande optimale.

Mots clés : système à deux corps contrôlé, transfert orbital, poussée faible, Jurdjevic-Quinn, stabilisation, commande optimale, temps minimum.

Summary : This thesis presents a study of the low thrust two body control system and in particular orbital transfer problems. After a controllability study, we focus on the link between the optimal control in minimum time and the feedbacks built from the Jurdjevic-Quinn method. Numerical simulations show that the Jurdjevic-Quinn feedbacks can be close to the optimal command. In order to understand this property we study an average control system whose trajectories approximate these of low thrust systems. This technique allows us to give a positive answer to a conjecture on the asymptotic behavior of the minimum time. Moreover it is a promising way to build an efficient Lyapunov function associated to the Jurdjevic-Quinn method : a feedback close to the optimal control.

Key words : two body control system, orbital transfer, low thrust, Jurdjevic-Quinn, stabilization, optimal control, minimal time.