ECOLE DES MINES
DE PARIS

Ecole Doctorale 364 : Sciences Fondamentales et Appliquées

N°attribué par la bibliothèque

|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

T H E S E

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole des Mines de Paris
Spécialité «Mécanique Numérique»

présentée et soutenue publiquement par

M. Cédric CHAMPIN

Soutenue le 21 décembre 2007

MODELISATION 3D DU CHAUFFAGE PAR RAYONNEMENT INFRAROUGE ET DE L'ETIRAGE SOUFFLAGE DE CORPS CREUX EN P.E.T.

Directeur de thèse : Michel Bellet / Fabrice Schmidt

Jury :

Prof.	Luc CHEVALIER	Président du jury
Prof.	Martin RAYNAUD	Rapporteur
Dr.	Erwan VERRON	Rapporteur
Dr.	Yannick LE MAOULT	Examinateur
M.	Cédric BOULAY	Examinateur
Prof.	Jean-François AGASSANT	Membre invité

Remerciements

Enfin la voici cette fameuse page ! Celle par laquelle toute thèse commence et qui paradoxalement marque le point final aux travaux accomplis.

C'est pour ma part, cinq ans de ma vie qui s'achève sur ces quelques mots. Trois années passées dans le berceau de la science puis deux dans celui de l'industrie, à prendre des jours de congés par ci, par là, pour essayer de boucler ce manuscrit ! C'est éreintant et pourtant le jeu en vaut la chandelle. Merci mille fois à tous ceux qui m'ont soutenus jusqu'à cette page…

Je voudrai dans un premier temps, remercier les différents membres du jury qui m'ont fait l'honneur trois jours avant le réveillon de Noël, de venir assister à ma soutenance. Je remercie ainsi Erwan Verron et Martin Raynaud, rapporteurs de ma thèse, pour la lecture et la discussion qu'ils ont su apporter à mes travaux. Je remercie également Luc Chevalier pour avoir présidé mon jury.

Ce projet a été financé par la société Nestlé Waters. Deux de mes responsables industriels durant ces trois années auront marqué ces travaux.

Tout d'abord, Gérard Denis. Initiateur de cette thèse mais retraité au bout d'un an. Tu as toujours été présent pour moi, ta collaboration fut un véritable plaisir. J'espère que tu pourras toi aussi soutenir ta thèse prochainement.

Je tenais ensuite à remercier Cédric Boulay, représentant de la société Nestlé depuis la première réunion, jusqu'à cette soutenance. Bon courage à toi pour la suite.

Cette thèse en cotutelle entre Sophia et Albi m'a donnée la chance d'avoir quatre directeurs de thèse.

Je tenais à vous remercier Michel, notamment pour votre aide précieuse lors de la prise en main de Forge3®. Je n'oublierai pas cette après-midi passée dans votre bureau à disséquer les boucles permettant de calculer les différents termes de la matrice hessienne pour une loi hyperélastique… Merci également pour tous ces brouillons sur lesquels vous jetiez ces quelques équations avec facilité mais qui pour moi et l'ensemble de vos thésards (les discussions avec eux ont confirmé mes impressions) étaient de véritables chef d'œuvres de propreté, de limpidité et de clarté !

Merci également à Jean-François Agassant, à l'origine du projet, vous vous êtes effacé du quotidien de mes travaux tout en sachant être présent à chaque tournant plus ou moins facile à négocier durant ces trois années.

Je tenais enfin à remercier Noëlle Billon, même si votre nom n'apparaissait pas officiellement dans ma thèse, vous avez su être présente depuis le début jusqu'à cette répétition de thèse, cinq années plus tard. Merci pour toutes ces discussions. Merci pour vos encouragements.

Mon année de thèse passée à Albi fut pour moi un rayonnement de bonheur !

Mes premiers remerciements iront à Fabrice. Scientifique passionné des équations et des modèles analytiques, tu as été pour moi plus qu'un tuteur, un père scientifique. Je n'oublierai jamais tout les bons moments que nous avons passés ensemble devant ton tableau Velleda à Albi, devant un pupitre de conférence à la PPS d'Akron sur les genoux de Ronald Mc Donald à Bucarest ! Merci également pour ta sincérité de tous les instants et pour avoir cru en moi jusqu'au bout. J'espère avoir de nouveau l'occasion de croiser ton chemin ainsi que celui de Yannick.

Yannick justement. Merci à toi qui a su m'initier aux joies du rayonnement. Ta détermination et ton aisance sur la thermique et le rayonnement m'ont toujours convaincu que nous étions sur le droit chemin. Merci également pour toutes ces discussions sur notre passion commune, je veux parler de la randonnée haute montagne. Enfin, comme pour Fabrice, merci d'avoir cru en moi jusqu'au bout.

Ces trois années ont également été le lieu de rencontres de nombreux thésards, permanents ou autres mais qui tous, resteront en gravés en moi. Comment oublier toutes ces bouffes avec vous, amis du Cemef, Carole, Poh, Suceur, Popa, Geeky, Pakini. Merci à toi Audrey pour m'avoir emmené durant mes premières semaines au labo et pour les discussions que nous avons pu avoir sur Forge, les éléments finis ou encore ton pote Colonna. Merci à toi Elise (M'dame Deloï) pour ta gentillesse, ta sincérité et d'une manière générale, tout ce qui fait de toi que tu es quelqu'un de bien. J'espère ne pas te perdre de vue. Merci à toi Manu pour ton aide de tous les instants, l'image du bad boy que tu te donnes est à l'image de ta gentillesse. Bonne continuation à toi et plein de bonheur avec tes petits affreux. Merci à vous les membres du bureau des loosers ! Merci à toi le gros de la repro. Ta rencontre a été pour moi une joie immense. Je sais que nous nous reverrons. Merci à toi Loupiotte pour ton stage et tous les moments de franche rigolade que nous avons eu. Encore pardon pour le plaquage, un mètre avant la ligne de ton premier essai de rugbyman. Merci à toi Omar pour toutes les discussions que nous avons eu sur l'OM et les filles du labo !

Et vous mes amis d'Albi, comment oublier les Latino, Manico, Cristal, les soirées à la Meuh, l'apprentissage de la langue française pour Chan à la cafet devant un bon café d'Annie, le déménagement de Christine en sortant de boîte de nuit, les « toutoutou » de vis ma vie qui résonnait entre les bureaux, les carpes pêchées par Gilles dans l'étang derrière la cantine, Tyson, et … j'en oublie. Cette année fut pour moi 365 jours de pur bonheur merci à tous ceux qui y ont contribués. Merci à toi Fofos et aux serveuses du Cristal, à toi Pich et à Pizza'Allo, à Gillou, à Eric, à Vincent, à Esther, à Coco, à Annie et à tous ceux que j'oublie, mille pardon mais ma mémoire flanche…

Mes derniers remerciements iront à mes proches.

Tout d'abord mes parents. Merci à vous pour m'avoir toujours soutenu dans mes études et poussé à achever mon travail. Ce manuscrit je vous le dois, il est avant tout pour vous ! Et oui Maman, ton Tanguy a fini sa thèse. Merci pour m'avoir soutenu jusqu'au bout. Merci également à toi frèro, ta scolarité sans embuche a été pour moi un exemple et une véritable source de motivation. Merci Papa pour les 1000 km que tu t'es paluché pour venir écouter ton fils raconter trois années incompréhensible de sa vie.

Mon dernier remerciement ira à toi Alesc, merci pour ton soutien, pour être ce que tu es, à mes côtés, et pour longtemps j'espère…

A mes grands parents, ouvriers de la terre et de l’industrie.

Remerciements ... **3**

Introduction ... **9**

1. Présentation du contexte ... *9*

2. Présentation du procédé de mise en forme ... *10*

3. Les problèmes rencontrés ... *12*

4. Approches numériques ... *13*

5. Objectifs de la thèse ... *17*

Chapitre 1 Description du problème thermique et formulation numérique ... **19**

1. Etude de l'interaction entre le four et la matière ... *21*

1.1. Principe du chauffage par rayonnement infrarouge ... 21

1.2. Description du four ... 25

1.3. Analyse des propriétés thermo-physiques et thermo-optiques du P.E.T ... 30

2. Implantation numérique d'un modèle convecto-radiatif ... *39*

2.1. Principe du lancer de rayon ... 40

2.2. La loi de Beer-Lambert ... 46

2.3. Formulation numérique du problème thermique dans Forge3® ... 47

2.4. Optimisation du calcul radiatif ... 51

2.5. Rotation et translation numérique de la préforme dans le four ... 54

3. Conclusions partielles ... *59*

Chapitre 2 Simulation des transferts convecto-radiatifs ... **63**

1. Validation du calcul de l'éclairement ... *65*

1.1. Validation du calcul géométrique des facteurs de forme ... 65

1.2. Validation du calcul physique de l'interaction lampe / objet ... 70

2. Simulation du chauffage de plaques en P.E.T. ... *73*

2.1. Etude du chauffage d'une plaque par une lampe claire ... 74

2.2. Etude du chauffage d'une plaque par une lampe avec réflecteur céramique ... 82

2.3. Etude du chauffage d'une plaque par un four complexe ... 84

3. Simulation du chauffage de préformes en P.E.T. ... *87*

3.1. Etude du chauffage d'une préforme statique dans un four ... 88

3.2. Etude du chauffage d'une préforme en mouvement dans un four ... 94

3.3. Influence des modules précédent et suivant sur le chauffage d'une préforme ... 96

4. Conclusions partielles ... *98*

Chapitre 3 Description du problème mécanique et formulation numérique 101

1. Etude de la rhéologie du P.E.T. 104

2. Formulation numérique du problème mécanique dans Forge3® 106

2.1. Approche mécanique du problème 106

2.2. Discrétisation du problème mécanique 106

2.3. Résolution numérique du problème discret 109

3. Utilisation des lois de comportement hyperélastique 110

3.1. Formulation analytique générale d'une loi hyperélastique 110

3.2. Etude d'une loi hyperélastique simple et formulation analytique 113

3.3. Adaptation de la loi de Mooney-Rivlin à la formulation vitesse/pression 115

3.4. Validation de l'implantation 118

3.5. Instabilités et traitement numérique 128

3.6. Bilan sur l'utilisation des lois hyperélastiques 135

4. Utilisation de lois de comportement viscoplastique 138

4.1. Etude d'un modèle phénoménologique viscoplastique basé sur une loi de G'Sell 140

4.2. Bilan sur l'utilisation des lois viscoplastiques 148

5. Conclusions partielles 150

Chapitre 4 Modélisation numérique de l'étirage / soufflage des préformes en P.E.T. 153

1. Etude de l'étirage d'une préforme 155

1.1. Mesure expérimentale de la force exercée en tête de canne 155

1.2. Présentation du modèle numérique 161

1.3. Comparaison entre simulation et expérience 164

2. Etude du soufflage libre d'une préforme 165

2.1. Etude expérimentale des déformations lors du gonflage libre 165

2.2. Etude numérique du soufflage libre 167

2.3. Etude d'une loi viscoplastique basée sur les déformations maximales 169

2.4. Soufflage d'une bouteille avec approche en déformation maximale 171

3. Etude du soufflage confiné et sensibilité par rapport au modèle rhéologique 174

3.1. Présentation du modèle étudié 174

3.2. Modélisation du soufflage confiné 175

4. Conclusions partielles 178

Conclusions générales et perspectives 181

1. Bilan de l'étude 181

2. Axes d'amélioration et développements futurs 183

Annexes 185

1. Bibliographie 186

2. Nomenclature 191

3. Calcul analytique de la contrainte d'un cube ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une traction uniaxiale 192

4. Calcul analytique de l'évolution du rayon interne d'un tube ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une pression sur sa paroi interne 195

5. Calcul analytique de l'évolution du rayon interne d'une sphère ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une pression sur sa paroi interne 198

6. Calcul du taux de déformation longitudinale d'un cube 202

7. Calcul du taux de déformation radial d'un tube 203

8. Calcul du taux de déformation d'une plaque 204

9. Géométrie de la préforme utilisée pour les simulations d'étirage et de soufflage 205

10. Article issu de la PPS20 [CHA-2004] 206

Introduction

1. Présentation du contexte

L'emballage est actuellement un élément clé de la société moderne. En effet, le consommateur achète de nos jours un produit tout aussi bien pour son contenu, que pour son contenant et ce pour plusieurs raisons. La fonction initiale de l'emballage est la facilité qu'il donne à un fabricant de produit de consommation pour le transporter depuis sa production, jusqu'à son lieu final d'utilisation chez le client. Il vient alors la nécessité d'avoir des propriétés fondamentales comme la maniabilité, la robustesse mais également la protection ainsi que la conservation du contenu. Depuis quelques décennies, la vente d'un produit n'est plus seulement liée à sa fonctionnalité mais elle est également en relation directe avec le côté attractif que son emballage dégage comme le montre la figure ci-dessous. Pour toutes ces raisons, ce dernier a constamment évolué au cours du temps avec comme objectif permanent, le bon équilibre entre sa fonction initiale (le transport) et sa fonction finale (la vente).



Figure 1 : Evolution de la conception des bouteilles Vittel au cours du temps.

De ces deux fonctions découlent des propriétés intrinsèques aux matériaux qui sont les suivantes :

Transport	Vente
Résistance à la manutention Résistance aux chocs Propriétés barrières (chaleur, lumière) Résistance à la palettisation …	Etanchéité Aspect attractif (forme, transparence, …) Peu coûteux Adapté à l'utilisation …

Tableau 1 : Propriétés des matériaux liés à l'emballage.

Afin d'optimiser le contenant final, le marketing, la recherche et le développement se doivent de travailler en étroite collaboration. C'est dans cette démarche que s'inscrit cette thèse. En effet, la faisabilité d'un nouveau produit est aujourd'hui testée de manière empirique et grâce au savoir faire développé depuis de nombreuses années au sein des entreprises. Cette phase est donc longue, fastidieuse, coûteuse et ne permet pas toujours de parvenir à son objectif final. L'objectif de Nestlé à travers ce travail de thèse est donc de développer un outil de calcul numérique qui permet de simuler la fabrication d'une bouteille afin de faciliter la mise en production de nouveaux produits. De plus, une modélisation facilitera la maîtrise du profil thermique et de l'évolution de la déformation au cours du procédé d'injection soufflage et permettra éventuellement à terme de réduire la masse des préformes. Ceci engendrerait bien évidemment, au regard du nombre de bouteilles fabriquées quotidiennement, un intérêt financier important.

Le remplissage des bouteilles ainsi que le mode de stockage sont les étapes les plus contraignantes au niveau de la structure du produit fini. Comme il est dit précédemment, les bouteilles sont empilées sur des palettes, et celles placées à la base même supportent donc le poids de celles qui sont placées dessus. Le procédé d'injection soufflage mettant en œuvre des phénomènes mécanique et thermique, il va de soi qu'en sortie de production, le corps creux a un état de contraintes résiduelles lié à la mise en forme du polymère qui est non nul. La modélisation du soufflage doit ainsi permettre de mieux appréhender cet état final et d'obtenir une base solide pour une modélisation structurale du conditionnement.

2. Présentation du procédé de mise en forme

Le matériau choisi par les industriels pour ce type d'application est généralement le polyéthylène téréphtalate (P.E.T.). Il a été choisi pour ses diverses propriétés de mise en forme. D'autre part, le PET est transparent dans le visible. Il est également robuste et léger, mais surtout il devient caoutchoutique une fois chauffé au delà de sa température de transition vitreuse, ce qui va faciliter sa mise en forme.

Il existe aujourd'hui divers procédés de fabrication pour les corps creux [DEN-1989], chacun ayant ses propres spécificités. La fabrication des bouteilles d'eau est principalement basée sur l'injection soufflage avec bi-orientation en cycle froid. Ce procédé permet en effet d'importantes cadences de fabrication (environ 50 000 bouteilles/heure). Il est composé de deux parties distinctes. Dans un premier temps, la préforme est fabriquée par injection. Elle est ensuite conditionnée à température ambiante de manière à pouvoir être stockée.



Figure 2 : Injection et stockage de la préforme [DEN-1989].

Dans un deuxième temps, la préforme est chauffée par rayonnement infrarouge (IR) au-delà de 80°C puis étirée à l'aide d'une canne et soufflée par injection d'air comprimé. C'est le moule dans lequel elle est placée qui donne la géométrie finale propre à la bouteille désirée.

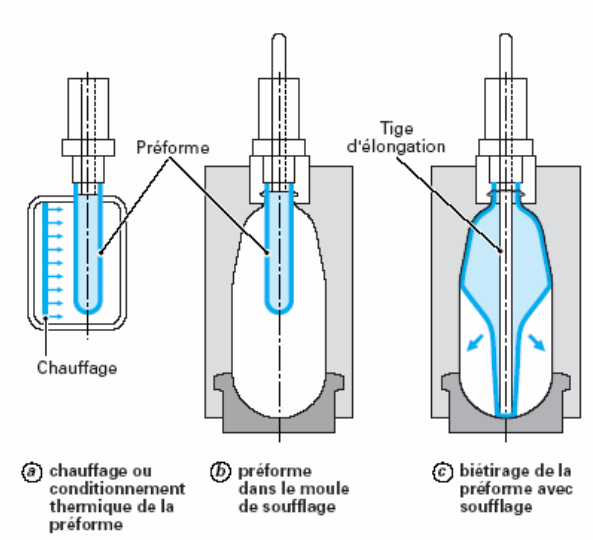


Figure 3 : Réchauffage et étirage-soufflage de la préforme [DEN-1989].

Ce procédé a pour intérêt principal le découplage parfait entre la fabrication de la préforme et son utilisation pour la fabrication des corps creux. Cela permet une meilleure gestion des flux et surtout des pannes pour l'industriel. Cependant, un tel procédé engendre des difficultés telles que le stockage, l'humidité, la préservation de l'état des préformes mais surtout le réchauffage de la préforme avant la mise en forme.

3. Les problèmes rencontrés

La bouteille doit répondre avec satisfaction à de multiples critères de qualité. L'un des plus importants est sans aucun doute la répartition de matière finale dans l'épaisseur tout le long de la hauteur de la bouteille fabriquée. Lorsqu'il est sollicité en étirage uni ou biaxial, le P.E.T. manifeste un fort durcissement structural. Le procédé de fabrication doit donc permettre à la matière de dépasser le durcissement structural garantissant ainsi le renforcement des propriétés mécaniques. Ce phénomène influence ainsi directement la répartition d'épaisseur qui se crée lors de la déformation de la matière. Concrètement, une disparité à ce niveau est susceptible d'entraîner une zone à risque en termes de rupture et de déformation. En effet, la bouteille remplie sera soumise à des conditions de stockage et d'utilisation sévères, telles que l'empilement sur palettes, les chocs des bouteilles entre elles sur la chaîne de fabrication…

Avant d'être produite à grande échelle, une bouteille subit différents tests de qualification. L'objectif de cette phase est de définir de manière optimale la zone critique d'utilisation du produit. La qualité première de la bouteille concerne sa répartition d'épaisseur qui doit être la plus homogène possible afin de limiter des zones faibles et avoir une structure d'ensemble rigide. Pour y parvenir, plusieurs essais sont effectués comme le poids par zone (découpe de la bouteille en 4 parties, chacune ayant une tolérance en masse à respecter), la mesure d'épaisseur le long de la bouteille et enfin les essais de top-load (écrasement par le goulot d'une bouteille jusqu'à fissuration du matériau). L'enjeu majeur de l'étirage soufflage sera donc de parvenir à cette répartition homogène d'épaisseur. Pour cela, de nombreux paramètres sont à prendre en compte ce qui révèle toute la complexité du procédé comme le montre le tableau suivant :

Paramètres physiques	Paramètres technologiques	Conséquences sur la matière
Four halogène	- Puissance des lampes - Position des lampes - Puissance du ventilateur - Cinématique du support	Modifie le gradient thermique radial et longitudinal.
Etirage lié à la canne	- Vitesse de la canne - Forme de la canne	Permet d'emmener la matière vers le fond de la bouteille.
Présoufflage	- Pression de présoufflage - Retard au présoufflage	Limite les problèmes d'adhérence entre la canne et la préforme et gonfle la préforme.
Soufflage	- Pression de soufflage	Plaque la préforme contre le moule.
Thermique du moule et de la canne	- Moule et canne thermo-régulé ou non	Refroidit la matière à son contact

Tableau 2 : Paramètres machine influents.

Aujourd'hui, l'objectif industriel est simple. Il s'agit de produire des bouteilles plus complexes, plus légères et avec des cadences les plus rapides possibles !

4. Approches numériques

Les récentes études [MON-2001] ont permis de montrer à quel point l'état thermomécanique de la préforme à l'instant précédant le soufflage-biétirage était prépondérant sur le reste du procédé et influençait directement l'état final de la bouteille. Ainsi, une modélisation de la phase de chauffage IR requiert le plus de précisions possible afin de déterminer avec exactitude la cartographie de la température de la préforme à la sortie de four (i.e., la maîtrise du gradient radial et longitudinal).

Cette phase est pourtant peu étudiée dans la littérature. S. Monteix [MON-2001] a étudié la distribution 3D des températures, et plus particulièrement des gradients de température établis dans l'épaisseur des préformes en fonction de la puissance électrique des lampes halogènes, des réflecteurs de rayonnement et de l'influence du système aéraulique. Ce système de chauffage a été modélisé en développant un logiciel baptisé « PLASTIRAD », basé sur la méthode des volumes de contrôle et appliqué sur des maillages non-orthogonaux.

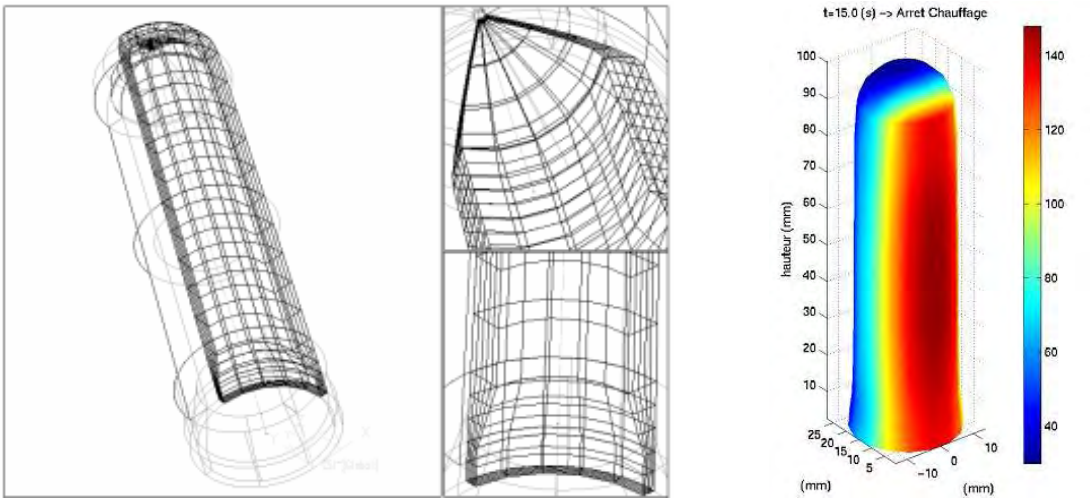


Figure 4 : Maillage et thermogramme caractéristique du chauffage d'une préforme [MON-2001].

H.-X. Huang [HUA-2005] utilise les éléments finis pour modéliser le chauffage de la préforme. Son modèle est basé sur le calcul d'un terme radiatif surfacique reçu par la préforme et diffusé ensuite dans le matériau par conduction. Considérant l'hypothèse du corps gris pour le P.E.T., il établit un comparatif entre son modèle et des mesures expérimentales, réalisées à l'aide de thermocouples implantés dans l'épaisseur de la préforme. La rotation de la préforme, permettant un chauffage homogène sur l'ensemble de la préforme, est intégrée à travers une modélisation des lampes par des tubes circulaires.

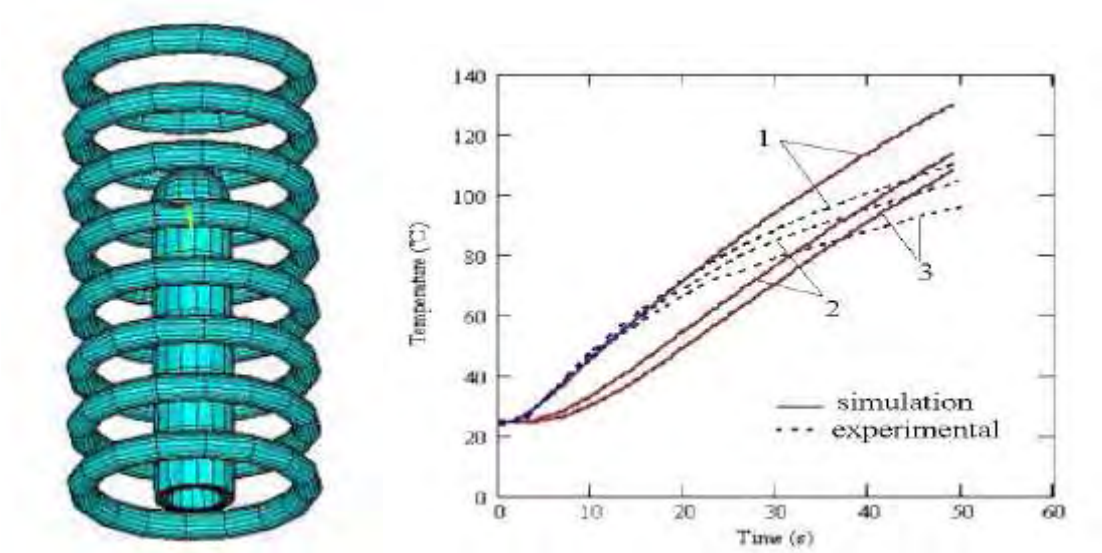


Figure 5 : Maillage et comparaison de l'épaisseur obtenue entre simulation et expérience [HUA-2005].

A. Yousefi utilise une approche par éléments finis pour modéliser les échanges thermiques entre la préforme mobile et le four infrarouge [YOU-2001]. Prenant en considération la rotation et la translation de la préforme, les phénomènes de convection et l'hypothèse d'un corps gris pour le PET, elle parvient à recalculer le profil de température de la préforme chauffée.

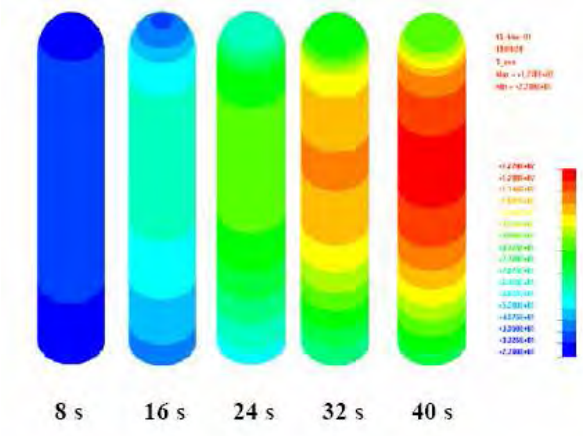


Figure 6 : Prédiction de la température d'une préforme en mouvement [YOU-2001].

Cette approche ne permet pas de prendre en compte le gradient dans l'épaisseur de la préforme.

En ce qui concerne la phase d'étirage et de soufflage des préformes, la littérature est beaucoup plus riche et ce pour des raisons d'une part purement mécaniques et d'autre part purement numériques.

La grande diversité des approches existantes à l'heure actuelle pour la rhéologie du P.E.T. est la preuve qu'il n'existe pas une loi unique fiable et apte à modéliser son comportement pour différentes gammes de vitesse de sollicitation ou de température. De nombreuses études ont été réalisées avec comme objectif la caractérisation rhéologique du P.E.T. Parmi elles N. Billon [BIL-2002], après analyse d'essais de traction uniaxiaux, conclut que le comportement du P.E.T. évolue autour de trois modes de comportement pouvant être qualitativement décrits comme hybride « viscoélastique, hyperélastique » à basse température ou haute vitesse, « hyperélastique » pour des valeurs intermédiaires et enfin « fluide » à haute température ou basse vitesse.

Ainsi, F. Schmidt [SCH-1992] utilise la viscoélasticité pour modéliser l'étirage soufflage des préformes. Il montre en effet que l'allure d'une courbe force d'étirage en fonction du temps obtenue avec la loi de Johnson-Segalman représente mieux l'allure de la courbe expérimentale que les modèles rhéologiques de Newton ou élastique linéaire [SCH-1995]. Il affirme ainsi que si la cinématique n'est pas forcément meilleure avec une loi viscoélastique, l'état de contrainte dans le matériau sera lui mieux décrit.

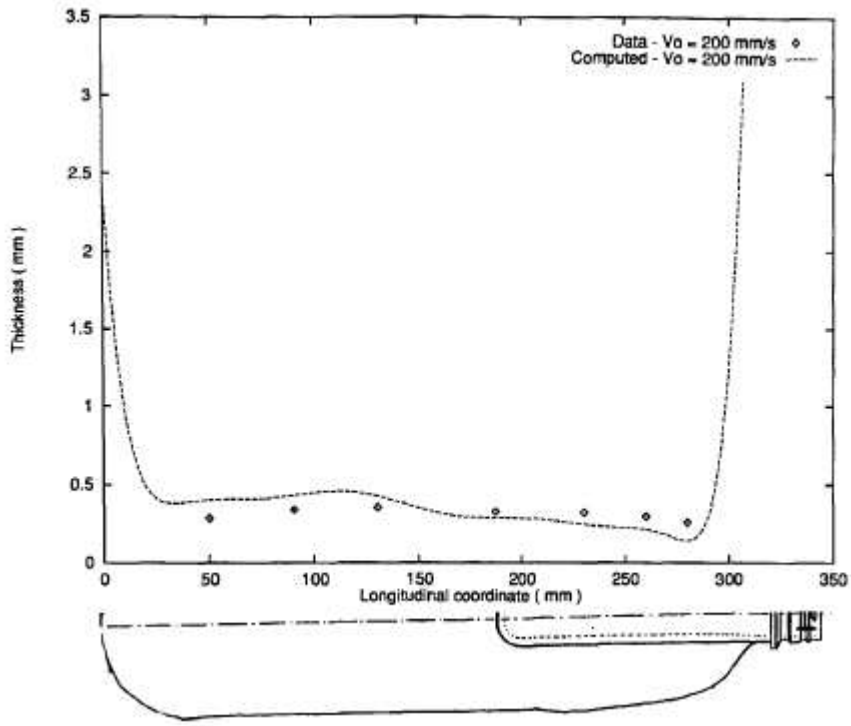


Figure 7 : Distribution d'épaisseur en fin de process [SCH-1996].

S. Wang utilise une loi de comportement viscoplastique [WAN-1998]. Elle permet de conserver la notion de viscosité et de travailler ainsi avec une base temporelle proche de celle du temps de mise en forme. De plus, cette loi autorise l'introduction plus aisée de l'anisotropie. Elle est d'ailleurs étudiée par L. Chevalier [CHE-2005] dans le cadre de l'analyse d'essais uniaxiaux et bi-axiaux qui montre ainsi l'influence du durcissement structural sur l'évolution de la forme de la préforme lors du gonflage. Enfin, E. Gorlier [GOR-2001] montre également qu'en utilisant une loi phénoménologique viscoplastique, isotrope, homogène et obéissant à la loi d'écoulement de Von Mises, il est possible par analyse inverse de trouver un jeu de paramètres permettant de représenter le P.E.T. dans certaines gammes de vitesse et de température. Cette loi est inspirée de celle de C. G'Sell [GSE-1979]. Z.J. Yang [YAN-2004] utilise lui un modèle 3D viscoélastique non-linéaire de Buckley basé physiquement sur les réseaux moléculaires.

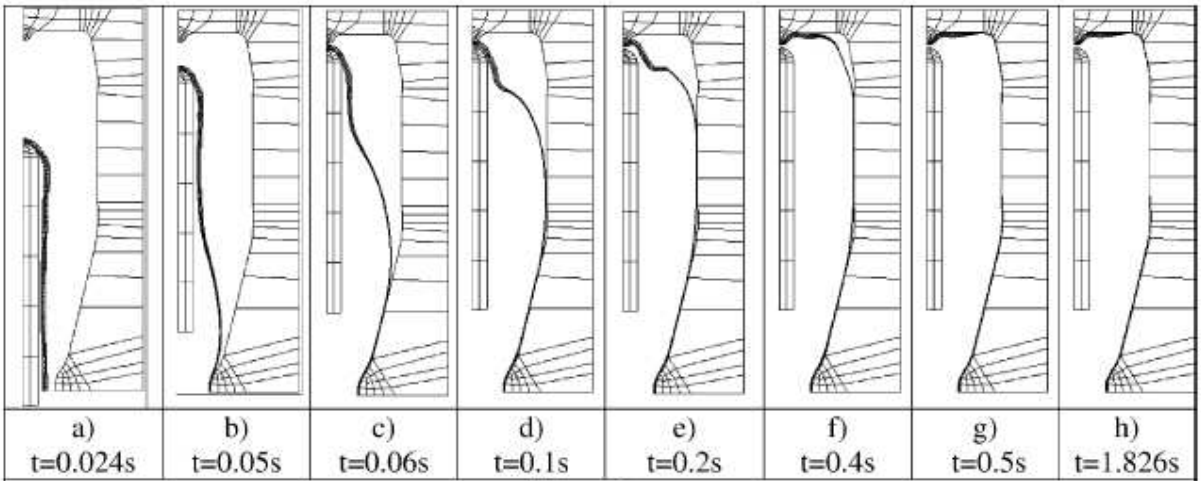


Figure 8 : Modélisation 2D du soufflage-étirage d'une préforme avec le modèle rhéologique de Buckley [YAN-2004].

Enfin, depuis quelques décennies, les modèles hyperélastiques ont été largement développés sous différentes formes. La plupart d'entre eux sont des modèles de type néo-hookéen [TRE-1943] à une variable ou de type Mooney-Rivlin [MOO-1940], Ogden [OGD-1972] à deux variables. Si leurs formulations sont assez simples, ils ne prennent pas en compte la vitesse de sollicitation. D'autres, plus complexes, ont récemment été abordés. Ainsi le modèle conformationnel d'Edwards et Vilgis [EDE-1986], établi dans le cadre de polymères enchevêtrés contraints par un certain nombre de nœuds de réticulation, peut reproduire dans certaines situations de façon très satisfaisante le comportement du PET comme le montre Y. Marco [MAR-2003]. Il ne prendra néanmoins pas en compte non plus la vitesse de sollicitation.

D'un point de vue numérique, les approches sont tout aussi diversifiées et vont des modèles membrane ou coque, au 2D voire 2D axi. Devant la complexité de plus en plus grande des formes des bouteilles, les modèles de coque ou de membrane montrent leur limite. F. Schmidt montre ainsi que l'hypothèse de coque mince n'est pas valable dans le cadre de la loi newtonienne ou de Maxwell pour les dimensions de préformes considérées [SCH-1995] (i.e. un ratio entre épaisseur et rayon initiaux de l'ordre de 0.4). Enfin, l'utilisation de modèles d'éléments finis 2D est rendue difficile en raison du caractère non symétrique du chauffage radiatif et des formes de plus en plus non axisymétriques des bouteilles soufflées…

5. Objectifs de la thèse

L'objectif de cette thèse financée par le groupe Nestlé Waters est de développer un outil intégré de modélisation du procédé permettant d'aboutir à une simulation thermomécanique 3D efficace d'un point de vue numérique et représentative de l'ensemble du cycle : chauffage - soufflage-biétirage des bouteilles en P.E.T.

Il s'agit donc, à l'aide de la simulation numérique, de pouvoir prédire dans un premier temps la cartographie tridimensionnelle en température de la préforme à la fin de la phase de chauffage. Dans un second temps, il s'agit de modéliser avec précision (grâce au couplage thermomécanique notamment) la phase d'étirage puis de soufflage de la préforme afin de prédire la répartition finale d'épaisseur ainsi que l'état de contraintes final. Le procédé de soufflage mettant en œuvre des phénomènes mécanique et thermique, il va de soi qu'en sortie de production, le corps creux a un état de contrainte résiduelle lié à la mise en forme du P.E.T. qui est non nul. La modélisation du soufflage doit ainsi permettre de mieux appréhender cet état final, d'obtenir une base solide pour une modélisation structurale du stockage et surtout, de maîtriser la répartition d'épaisseur.

Pour ce faire, la phase de chauffage devra prendre en compte les éléments suivants (cf. chapitres I et II) :

- une modélisation des lampes halogènes,
- l'interaction entre lampes et préforme,
- le déplacement de la préforme dans le four (i.e. rotation et translation)
- la prise en considération des réflecteurs,
- un modèle d'absorption radiatif,
- des phénomènes de convection,
- des paramètres thermiques propres au matériau thermiquement et optiquement dépendants.

De même, la phase d'étirage et de soufflage devra considérer (cf. chapitres III et IV) :

- une loi de comportement adéquate au matériau,
- des paramètres mécaniques proches du procédé de fabrication,
- l'utilisation d'un remaillage adaptatif.

Chapitre 1

Description du problème thermique et formulation numérique

Le four infrarouge a pour objectif de chauffer la préforme au-delà de sa température de transition vitreuse soit environ 80°C pour le P.E.T. Concrètement au niveau industriel, il est composé d'une succession de modules simples (figure ci-dessous) ayant chacun pour longueur celle d'une lampe halogène. La préforme passe devant chacun des modules avec une vitesse d'avance et une vitesse de rotation données, permettant ainsi, après réglage, le chauffage de la préforme suivant les critères désirés.

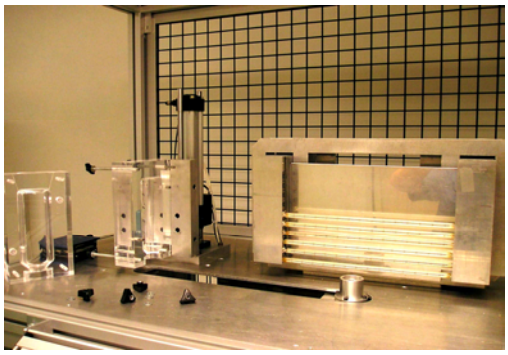


Figure 9 : Module simple de four infrarouge (CROMeP, Ecole des Mines d'Albi).

Ces modules sont composés de divers éléments, chacun ayant une fonctionnalité prépondérante sur les transferts thermiques entre les lampes et la préforme. Il en résulte un problème thermique complexe où se mêlent échanges radiatifs et convectifs. L'objet de ce chapitre est d'établir les bases d'une modélisation robuste de ce problème. La base de nos travaux sera en lien étroit avec la thèse de S. Monteix [MON-2001], notamment pour l'utilisation des données expérimentales servant de cas d'étude et de validation à nos développements numériques.

Chapitre 1 Description du problème thermique et formulation numérique..... 19

1. Etude de l'interaction entre le four et la matière..... 21

1.1. Principe du chauffage par rayonnement infrarouge..... 21

1.2. Description du four..... 25

1.2.1. Les lampes halogènes..... 25

1.2.2. Les réflecteurs..... 28

1.2.3. Le système de ventilation..... 29

1.3. Analyse des propriétés thermo-physiques et thermo-optiques du P.E.T..... 30

1.3.1. Paramètres caractéristiques thermo-physiques..... 30

1.3.2. Paramètres caractéristiques thermo-optiques..... 33

2. Implantation numérique d'un modèle convecto-radiatif..... 39

2.1. Principe du lancer de rayon..... 40

2.1.1. Méthode et algorithme..... 40

2.1.2. Application au chauffage radiatif..... 41

2.1.3. Résolution mathématique du problème..... 42

2.2. La loi de Beer-Lambert..... 46

2.3. Formulation numérique du problème thermique dans Forge3®..... 47

2.3.1. Résolution standard de l'équation de la chaleur..... 47

2.3.2. Introduction d'un terme de source volumique de rayonnement dans l'équation de la chaleur..... 50

2.4. Optimisation du calcul radiatif..... 51

2.4.1. La méthode des boîtes englobantes..... 51

2.4.2. Etude du scalaire entre la normale aux facettes et la direction du rayon..... 52

2.5. Rotation et translation numérique de la préforme dans le four..... 54

2.5.1. Calcul de la rotation par interpolation..... 55

2.5.2. Calcul de la translation par pondération..... 57

3. Conclusions partielles..... 59

1. Etude de l'interaction entre le four et la matière

1.1. Principe du chauffage par rayonnement infrarouge

Tous les corps émettent un rayonnement électromagnétique. Il s'agit d'un flux de chaleur émis par le corps qui perd donc de ce fait une partie de son énergie interne. Ce rayonnement est composé de longueurs d'ondes différentes dont l'intensité dépend de la température du corps. Il se propage en ligne droite dans le vide, à la vitesse de la lumière, sans atténuation de l'énergie transportée : le vide est dit parfaitement transparent.

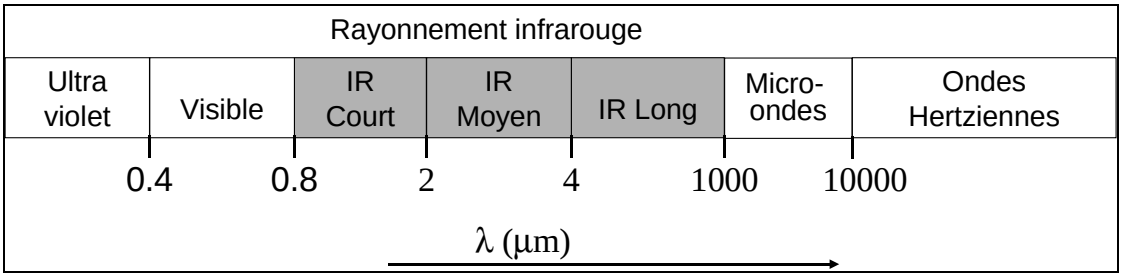


Figure 10 : Spectre d'émission du rayonnement [MON-2001].

La grande majorité des liquides et des solides est « opaque » : la propagation du rayonnement est stoppée dès la surface. Certains liquides et solides comme le verre ou certains plastiques sont semi transparents, la propagation du rayonnement en leur sein s'accompagne d'une diminution de l'énergie transportée (d'où une augmentation de l'énergie interne du milieu traversé). Cependant, il est nécessaire de réaliser un bilan radiatif complet afin de déterminer quelle fraction d'énergie émise par les lampes sera reçue par la préforme.

Le flux incident émis par la lampe se décompose en trois parties :

- le flux réfléchi caractérisé par le facteur de réflexion ρ_λ (compris entre 0 et 1),
- le flux absorbé caractérisé par le facteur d'absorption α_λ (compris entre 0 et 1),
- le flux transmis caractérisé par le coefficient de transmission τ_λ.

Le bilan, autrement appelé loi de Kirchhoff, donne la relation entre ces facteurs :

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1 \qquad (1)$$

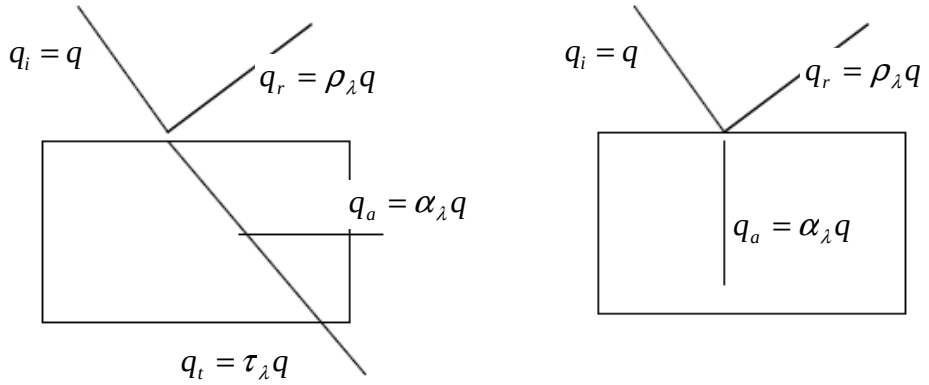


Figure 11 : Schéma de diffusion d'un rayon incident [IN2-2000].

Le flux réfléchi peut être diffus (le même dans toutes les directions de l'espace), spéculaire (une seule direction de réflexion, symétrique de la direction incidente) ou quelconque.

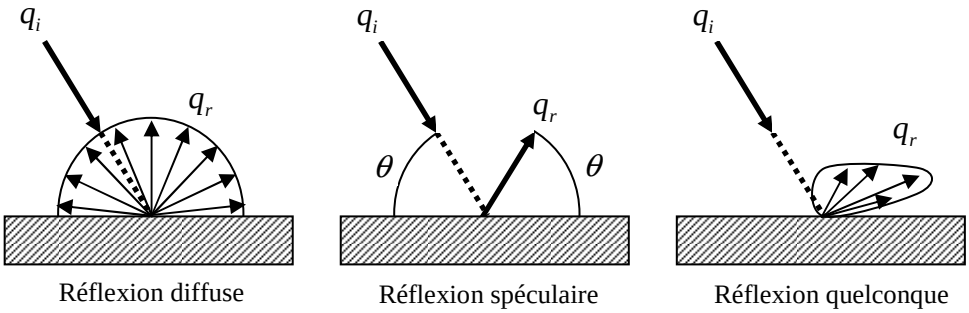


Figure 12 : Schéma de réflexion d'un rayon incident.

De plus, tout corps doit être considéré de deux façons :

- c'est un récepteur qui reçoit des rayonnements émis ou réfléchis par les autres corps,
- c'est un émetteur car il émet en propre un rayonnement dépendant de sa température.

L'étude thermodynamique des corps montre qu'un corps qui absorberait totalement toutes les radiations, quelles que soient leur longueur d'onde et leur direction, serait aussi celui qui rayonnerait le maximum d'énergie thermique. Ce corps idéal appelé corps noir, est considéré comme un étalon de rayonnement.

La luminance monochromatique L_λ^0 est la grandeur fondamentale qui caractérise le rayonnement d'un corps noir en fonction de sa température d'équilibre. Elle définit la quantité d'énergie rayonnée à la longueur d'onde λ en fonction de la température T, par unité de temps, par unité d'angle solide centré sur une direction déterminée et par unité de surface projetée.

$$L_\lambda^0 = \frac{2hc^2\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k_B\lambda T}} - 1} \tag{2}$$

où h représente la constante de Planck égale à $6{,}6255.10^{-32}\ J.s$, k_B représente la constante de Boltzmann égale à $1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$ et c la vitesse de la lumière dans le vide à laquelle se déplace les ondes.

Il est possible à partir du coefficient d'émissivité ε_λ et de la luminance du corps noir de définir l'énergie émise par les différents corps appelés corps gris.

$$L_\lambda = \varepsilon_\lambda L_\lambda^0 \tag{3}$$

En considérant la luminance comme isotrope, il est possible de définir l'émittance monochromatique du corps noir afin d'évaluer les rayonnements émis sur l'ensemble des directions de l'espace.

$$M_\lambda^0 = \pi L_\lambda^0 \tag{4}$$

Si l'on intègre la dépendance en longueur d'onde sur la totalité du spectre de l'émittance spectrale du corps noir, il en découle la relation de Stefan-Boltzmann pour un corps gris.

$$M^0 = \int_0^\infty M_\lambda^0 d\lambda = \sigma T^4 \tag{5}$$

$$M = \varepsilon\sigma_{SB} T^4 \tag{6}$$

où σ_{SB} représente la constante de Stefan-Boltzmann égale à $5{,}67.10^{-8}\ J.K^{-4}.m^{-2}.s^{-1}$.

Les échanges radiatifs peuvent être de deux natures. Dans un premier temps, un matériau considéré comme source, émet un rayonnement et son énergie va être reçue par un autre corps. On parle de transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps. Dans un deuxième temps, une partie du corps de la source peut être en vis-à-vis d'une autre partie de ce même corps, générant ainsi un échange de chaleur au sein d'une même entité par le biais du rayonnement. On parle alors d'autorayonnement.

Afin de connaître la fraction d'énergie émise depuis la facette S_1 d'un corps A et reçue par une facette S_2 d'un corps B (ou par une autre facette de ce même corps A), il convient de calculer un coefficient appelé facteur de forme (voir figure ci-dessous), utilisable dans le cadre des surfaces diffuses.

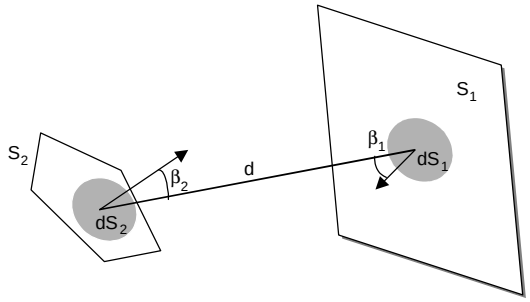


Figure 13 : Représentation du calcul de facteur de forme.

où d est la distance entre les éléments de surface, β_1 est l'angle entre la normale à la facette dS_1 et la direction qui joint les centres des facettes en regard. β_2 est l'angle entre la normale à la facette dS_2 et la direction qui joint les centres des facettes en vis à vis.

Il est défini comme suit :

$$F_{12} = \frac{Flux\ émis\ par\ S_1\ et\ reçu\ par\ S_2}{Flux\ émis\ par\ S_1}$$
$$F_{12} = \frac{1}{\pi S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{d^2} dS_1 dS_2 \qquad (7)$$

F_{12} est une quantité sans dimension qui ne dépend que de la forme et de la position relative des deux surfaces. F_{12} s'appelle le facteur de forme sous lequel la surface S_1 voit la surface S_2.

D'un point de vue numérique, la difficulté principale réside dans la détermination de ces facteurs de forme car une surface fermée constituée d'un ensemble de N facettes implique (du fait de la symétrie) le calcul de $N^2/2$ facteurs de forme ! Il existe donc de nombreuses méthodes numériques [EME-1991] pour le calcul de ces grandeurs, qui dépendent de la taille des facettes en regard, de leur distance, de leur visibilité (possibilité d'écran total ou partiel).

1.2. Description du four

Le four halogène est composé de 3 parties distinctes (voir figure ci-dessous).

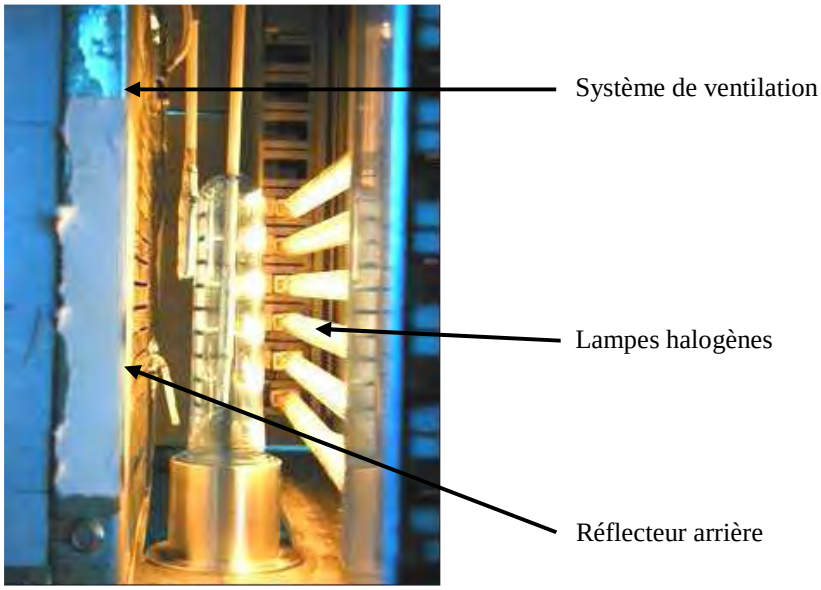


Figure 14 : Description d'un module de four infrarouge.

1.2.1. *Les lampes halogènes*

Elles sont la source du rayonnement. Leur nombre peut varier entre 1 et 9, et leur distance par rapport à la préforme évolue en fonction de la hauteur à laquelle elles se situent. Celles utilisées dans le cadre de cette étude sont des lampes Philips 1000W-235V.

Leurs propriétés sont les suivantes :

- Chauffage instantané : puissance maximale 1 seconde après allumage,
- Economique : plus de 85% de l'énergie consommée est transformée en chaleur infrarouge,
- Possibilité d'atténuation complète : les lampes à infrarouge peuvent être contrôlées avec précision (de 0% à 100%),
- La chaleur peut être focalisée : les lampes à infrarouge ont les mêmes propriétés optiques que les lampes d'éclairage, c'est-à-dire que la chaleur peut être orientée par des réflecteurs,
- Source de chaleur compacte : les lampes à infrarouge ont un faible diamètre (de l'ordre du centimètre).



Figure 15 : Lampe halogène 1000W.

Une lampe peut se décomposer en 4 parties :

- Un filament de tungstène doublement spiralé. Il sert à transformer la puissance électrique en une puissance calorifique dissipée dans son milieu environnant. Le tungstène va donc élever sa température en fonction de la puissance qu'il reçoit et ainsi devenir source de rayonnement.
- Un tube en quartz. Son rôle majeur est d'isoler thermiquement et physiquement le filament de tungstène et d'empêcher son oxydation. Il est de plus transparent (i.e. non absorbant) au regard des longueurs d'onde infrarouge courtes (IRC) du rayonnement émis par le filament.
- L'argon. Contenu dans le tube en quartz, il limite l'évaporation du tungstène à haute température.
- L'halogène. Mélangé à l'argon en faible quantité, il favorise la formation d'un dépôt à partir de la sublimation du tungstène sur les parties les plus chaudes du filament.

Les dimensions caractéristiques sont données dans le tableau suivant [PHI-1990] :

Eléments	**Longueur (en mm)**	**Diamètre (en mm)**
Filament de tungstène	275	1.45 (cylindre équivalent)
Tube en quartz	300	9.9

Tableau 3 : Dimensions caractéristiques des éléments constituants la lampe halogène.

D'un point de vue radiatif, l'émissivité spectrale du tungstène est dépendante de sa température. Elle a été caractérisée par F. Desvignes [DES-1997] sur les courtes longueurs d'onde. Pour celles plus élevées, un couplage avec le modèle de Hagen-Rubens [SIE-1992] décrivant l'émission des métaux purs a permis à S. Monteix [MON-2001] de reconstituer la courbe d'émissivité spectrale du tungstène en fonction de sa température comme le montre la figure suivante.

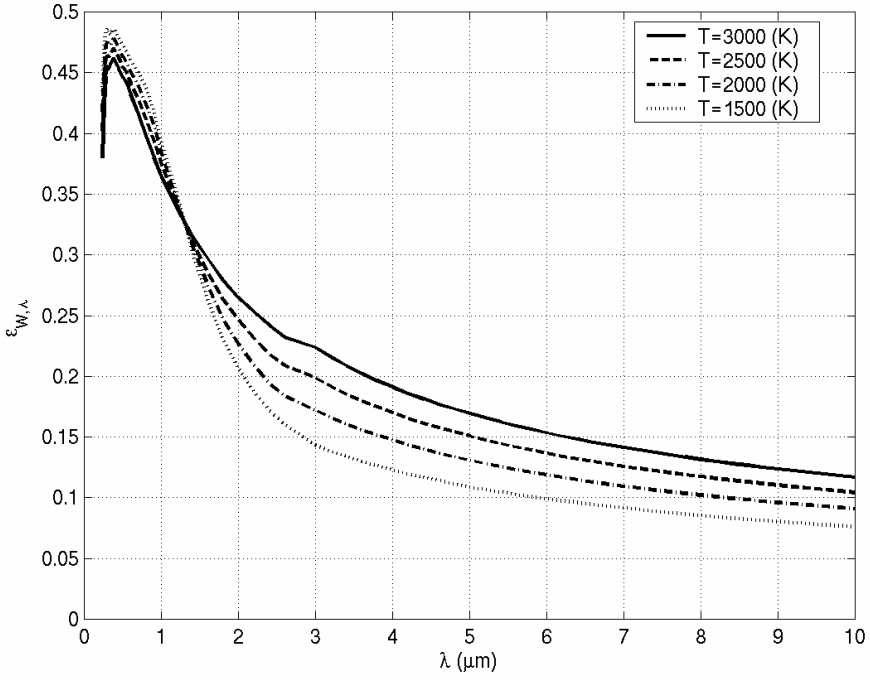


Figure 16 : Emissivité spectrale du tungstène [MON-2001].

Le quartz est utilisé dans les lampes pour ses propriétés spectrales. En effet, L. R. Holland [HOL-1980] montre que cet élément est pratiquement transparent pour des longueurs d'onde inférieures à 4µm, mais qu'il devient opaque au-delà de 5µm. S. Monteix confirme que la transmittivité entre 0.3µm et 3µm est comprise entre 0.93 et 0.95. Complétant ces mesures par spectrométrie infrarouge entre 3µm et 20µm, il défini complètement les propriétés spectrales du quartz en utilisant les mesures de réflectivité issues de la littérature [MON-2001].

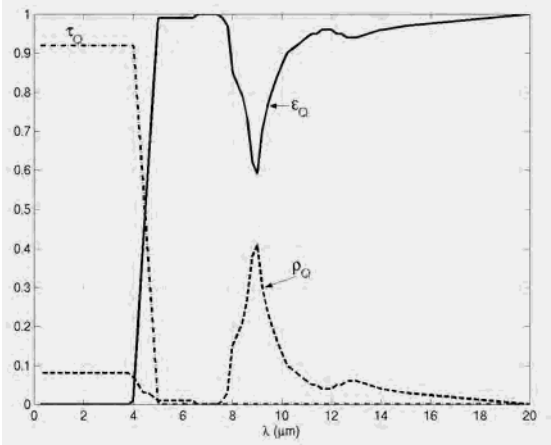


Figure 17 : Emissivité, absorptivité et transmittivité du quartz [MON-2001].

Cependant, si le quartz devient opaque dès 5µm, son action spectrale ne doit pas être négligée. En effet, le rayonnement qu'il absorbe sur des longueurs d'onde élevées va engendrer une élévation de sa température aux environs de 730K. Il devient alors une source émettrice apportant 9% de la densité de flux du tungstène de par son diamètre nettement supérieur (voir figure ci-dessous).

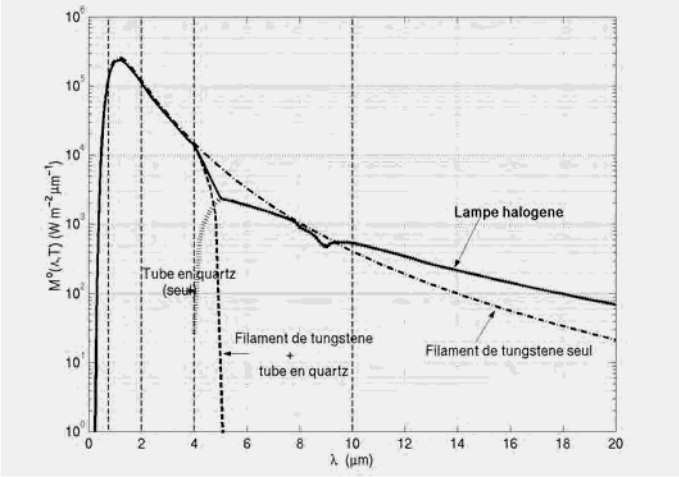


Figure 18 : Emittance spectrale des lampes halogènes à la puissance nominale (1000 W) [MON-2001].

Dans la suite de l'étude, la notion de « lampe » sera distinguée de celle de « lampe claire ». La lampe claire est celle décrite ci-dessus. Le terme de lampe désignera la lampe halogène tel qu'elle est le plus souvent utilisée, dotée d'un revêtement céramique sur sa face arrière lui permettant de réémettre une partie du rayonnement émis du côté arrière de la lampe vers l'objet à chauffer.

1.2.2. *Les réflecteurs*

Le rendement d'un four utilisant des lampes halogènes est faible [MON-1998]. En effet, le rapport entre l'énergie calorifique emmagasinée par les préformes sur la durée du chauffage et la puissance électrique consommée par les fours de rayonnement est comprise entre 15 et 17%. Il s'avère néanmoins être le plus efficace pour ce procédé. Afin de l'optimiser au maximum, des sociétés comme Sidel ou Philips Eclairage n'ont de cesse de vouloir focaliser le rayonnement émis par le tungstène en direction de la préforme à chauffer. Elles ont toutes les deux permis d'aboutir à deux types de réflecteur.

Le premier est un réflecteur en céramique. Appliqué comme un dépôt sur la moitié arrière du tube en quartz, il permet de venir réémettre directement vers la préforme l'ensemble du rayonnement émis du côté opposé. Son efficacité a été étudiée et montre que la réflexion créée est de type diffus de par la rugosité du dépôt. De plus, son efficacité est une fonction croissante de la température.

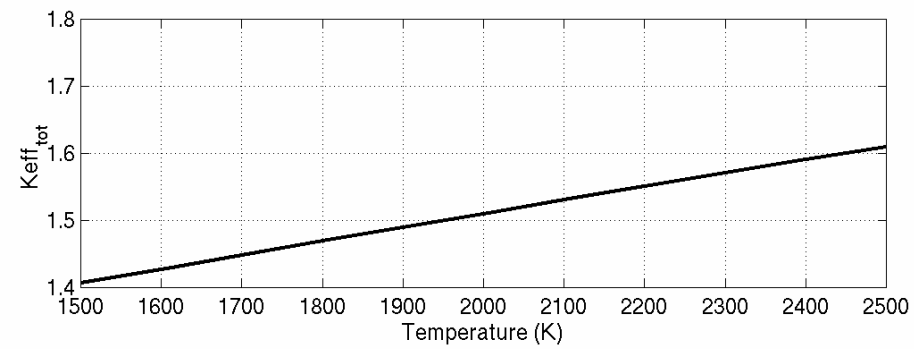


Figure 19 : Efficacité totale du réflecteur diffus en fonction de la température [MON-2001].

Le second type est un duo de réflecteurs en aluminium. Constitués de deux plaques d'aluminium poli situées à l'arrière des lampes et de l'autre côté de la préforme, ces deux réflecteurs sont considérés comme spéculaires. S. Monteix montre que l'efficacité augmente en moyenne de 68% à 80% pour une puissance d'alimentation égale à 80%.

1.2.3. *Le système de ventilation*

Chaque module de four possède un système de ventilation dont la puissance est régulée par un potentiomètre. Les pales sont situées derrière la plaque en aluminium servant de réflecteur du côté de la préforme, de manière à être protégées par cette dernière. Ainsi, comme il est visible sur la photo du four (cf. figure 14), cette plaque est percée afin de pouvoir laisser passer le flux d'air généré par le ventilateur.

Ce système a diverses fonctionnalités.

Il permet dans un premier temps de refroidir l'ensemble des éléments situés dans le four et qui pourraient se dégrader si leur température devenait trop élevée. On peut compter notamment les réflecteurs aluminium, les connexions entre les lampes et le four, les plaques de jonction des différents modules, l'ensemble de protection de la chaîne qui fondent vers 660°C …

Concernant le matériau chauffé, le système de ventilation va avoir un double emploi. Tout d'abord, la convection forcée générée par l'air du ventilateur limite une surchauffe superficielle de la préforme qui engendrerait une cristallisation lors du passage devant l'ensemble des modules que constitue le four. Ensuite, le refroidissement superficiel créé par la convection permet une homogénéisation de la cartographie thermique dans l'épaisseur de la préforme qui sera utilisée pour le soufflage.

D'un point de vue numérique, le système de ventilation est modélisé par un coefficient de convection forcé. Les mesures thermiques sont difficiles à réaliser. Néanmoins, Y. Le Maoult [MON-2004] estime l'apport de la convection dans un environnement confiné par l'intermédiaire de deux essais expérimentaux : mesures par thermographie infrarouge, et mesures par contrôle anémométrique. La valeur de ce coefficient dépend de la hauteur de la préforme, fait résultant des circulations d'air dans le four, comme le montre la figure ci-dessous.

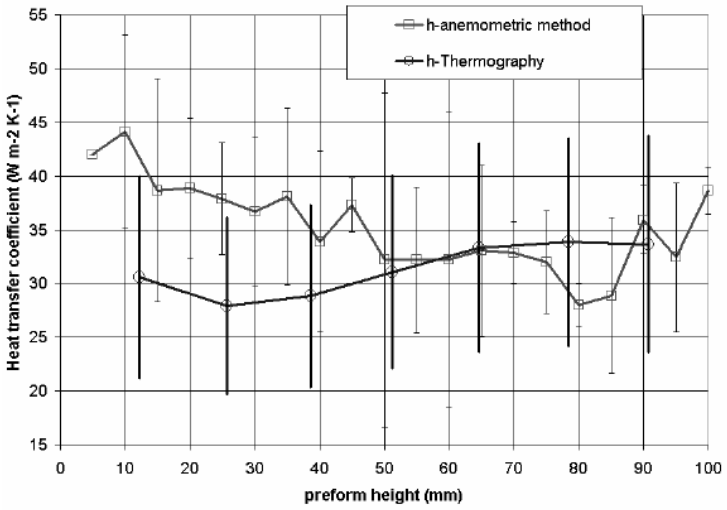


Figure 20 : Mesure du coefficient de convection en fonction de la hauteur de la préforme [MON-2004].

1.3. Analyse des propriétés thermo-physiques et thermo-optiques du P.E.T.

Physiquement, l'utilisation du P.E.T. pour la fabrication de bouteilles repose sur la capacité de ce polymère thermoplastique à développer sous l'action de la déformation, une phase cristalline induite née de l'orientation moléculaire. Cette phase cristalline est à l'origine du renforcement considérable des propriétés mécaniques des corps soufflés, garantissant leur capacité à soutenir les 3 bars de pression imposés par les boissons carbonatées, leur résistance à la compression et au fluage intervenant lorsque les bouteilles sont empilées sur palettes. La taille et la morphologie des cristaux formés par étirage constituent une autre caractéristique essentielle de ce couple procédé - matériau. Contrairement aux sphérolites qui correspondent généralement à la croissance cristalline du P.E.T. lorsqu'elle est activée thermiquement, la cristallisation induite par la déformation s'effectue sous forme de cristaux élancés de petite taille, de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres. Ainsi, leurs dimensions restent suffisamment inférieures à la gamme de longueur d'onde du spectre de lumière visible. Les interactions lumière – cristaux sont alors limitées et les bouteilles, bien que semi cristallines, conservent leur excellente qualité optique [GOR-2001].

Cette phase de mise en œuvre dépend intégralement, dans le procédé de soufflage en cycle froid, de la qualité de la phase de chauffage de la préforme qui la précède. En effet, les propriétés rhéologiques du P.E.T. vont être fortement dépendantes des gradients thermiques transversaux et longitudinaux qui résultent du passage de la matière dans le four infrarouge. Dans l'objectif d'une modélisation de cette phase, il est primordial de connaître les caractéristiques thermo-physiques et thermo-optiques servant de données initiales à la résolution du problème thermique.

L'objet de notre étude n'est pas de définir de manière expérimentale les valeurs liées à ces paramètres. Il s'agit de trouver dans la littérature un support suffisamment fiable permettant de définir une base de données d'entrée à notre modèle. Le polymère étudié dans l'ensemble de la thèse est le T74F9, un P.E.T. fabriqué et commercialisé par la société Tergal Fibres qui est utilisé communément pour la fabrication de bouteilles d'eau plate, minérale ou de source. Ce P.E.T. a fait l'objet de plusieurs études. Il a été caractérisé d'un point de vue thermo-optique dans le cadre de la thèse de S. Monteix [MON-2001] et, dans le cadre d'une étude mécanique, au cours des travaux de thèse d'E. Gorlier [GOR-2001] et d'E. Deloye [DEL-2006].

1.3.1. *Paramètres caractéristiques thermo-physiques*

Ces paramètres sont principalement ceux nécessités dans la partie conductive de l'équation de la chaleur sous sa forme la plus simple :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot \left(k \nabla T \right) \tag{8}$$

Ces paramètres caractéristiques sont :

- la masse volumique ρ en $kg.m^{-3}$,
- la capacité calorifique C_p en $J.kg^{-1}.K^{-1}$,
- la conductivité thermique k en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

Il existe à ce jour peu de travaux concernant la simulation du chauffage des préformes dans un four IRC (InfraRouge Court) [HAR-1996], [YOU-2001]. La modélisation du soufflage est elle plus répandue mais elle ne nécessite pas forcément une étude approfondie des paramètres thermiques. En effet, les phénomènes de conduction lorsque la bouteille touche le moule sont brutaux et permettent un refroidissement quasi instantané de la préforme soufflée. Dans ce cas, la majorité des simulations considèrent des paramètres mécanique et thermique non thermo-dépendants.

En ce qui concerne le chauffage, la température de la préforme va croître depuis la température ambiante jusqu'à une température souhaitée au-delà de la température de transition vitreuse. Généralement, les bouteilles sont soufflées aux environs de 100°C. L'élévation de température au cours du temps est donc rapide. Il devient dès lors nécessaire de connaître avec précision l'évolution des paramètres thermo-physiques en fonction de la température de la matière à un instant donné. Il faut noter que certains fabricants de matière première donnent accès à certains paramètres thermomécaniques de leur produit.

La masse volumique est un paramètre simple à mesurer et de nombreuses valeurs sont facilement identifiables dans la littérature.

Température ($°C$)	**Masse volumique ($kg.m^{-3}$)**	**Source**
Tamb	1334	[MAY-1965]
Tamb	1335	[DET-1984]
Tamb	1336	[BOU-1992]

Tableau 4 : Valeurs de la masse volumique issues de la littérature.

K. G. Mayan n'enregistre pas de variations pour des températures comprises entre l'ambiante et 90°C. Par contre, la masse volumique augmente entre 90°C et 100°C pour passer de 1330 $kg.m^{-3}$ à 1337 $kg.m^{-3}$. Comme semble le montrer la littérature, il est possible de considérer une valeur moyenne fixe pour la masse volumique. Dans nos travaux, elle sera considérée comme égale à la moyenne des valeurs trouvées soit 1335 $kg.m^{-3}$.

La détermination de la chaleur spécifique peut être réalisée par DSC (Differential Scanning Calorimetry) pour différentes températures. Ce type de mesure a l'avantage de fournir de bons résultats et surtout d'avoir une bonne répétabilité.

Martin et Laroche [MAR-1999] ainsi que Yang [YAN-2004-b] considèrent un Cp fixe. Cette approximation reste grossière et A. Yousefi montre que l'utilisation du Cp variable modifie pleinement la cartographie finale en température de la préforme en sortie de moule [YOU-2001].

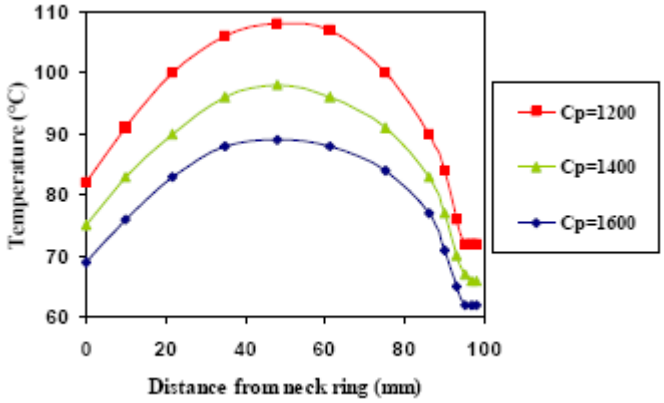


Figure 21 : Influence de la chaleur spécifique sur la température finale de la préforme [YOU-2001].

Ainsi, K. Hartwig se base sur une chaleur spécifique thermo-dépendante [HAR-1996], résultant des essais de DSC réalisés par Piry [PIR-1996] entre 260K et 500K avec une montée en température de 200 K/min. Ils montrent que la valeur de ce paramètre augmente de 75% entre la température ambiante et celle de mise en forme.

A. Yousefi [YOU-2001] a recours à une fonction polynomiale non communiquée pour interpoler ses valeurs de Cp entre deux valeurs extrêmes déterminées pour 25°C et 180°C.

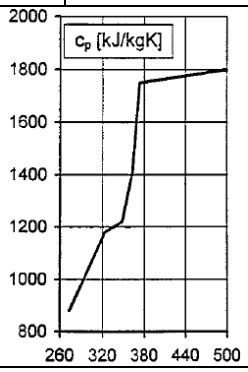
Température (°C)	**Chaleur spécifique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)**	**Source**
Cst	1557.5	[MAR-1999]
Cst	1050	[YAN-2004-b]
25 °C 180 °C	927 1852	[YOU-2001]
23 °C 80 °C 100 °C 200 °C	1100 1300 1400 1900	[EAS-2005]
		[PIR-1996] [HAR-1996]

Tableau 5 : Valeurs de la chaleur spécifique issues de la littérature.

Les valeurs que nous choisissons dans cette étude sont celles données par K. Hartwig. Elles offrent une thermo-dépendance satisfaisante sur la plage de température qui nous concerne et sont en accord avec d'autres mesures ponctuelles trouvées dans la littérature.

La conductivité thermique du P.E.T. est faible. De nombreuses sources issues de la littérature la quantifie car elle est utilisée pour la modélisation du chauffage de la préforme, mais également du soufflage si la résolution utilise un couplage thermomécanique.

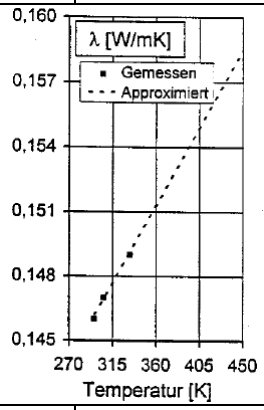
Température (°C)	**Conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)**	**Source**
Cste	0.25292	[MAR-1999]
Cste	0.253	[YOU-2001]
		[HAR- 1996]
Cste	0.24	[YAN-2004-b]
23 °C	Entre 0.15 et 0.4	[GOO-2005]
23 °C	0.25	[SCH-1995]

Tableau 6 : Valeurs de la conductivité thermique issues de la littérature.

Dans le cadre de notre étude, nous choisissons finalement de travailler avec une valeur de conductivité thermique constante (0.25 $W.m^{-1}.K^{-1}$).

1.3.2. *Paramètres caractéristiques thermo-optiques*

Les paramètres thermo-optiques permettent de caractériser la réflexion, l'absorption, la transmission et l'émission du matériau, lorsque celui-ci est soumis à un rayonnement. L'émission, la réflexion et la transmission vont être des phénomènes générateurs d'énergie pour l'environnement de la préforme. Au contraire, l'absorption va caractériser la fraction d'énergie permettant de chauffer la matière. Il est donc primordial dans le cadre de cette étude de définir avec précision ces différentes fractions énergétiques qui serviront de base pour la modélisation.

Ce travail a fait l'objet d'une partie expérimentale sur le T74F9 durant la thèse de S. Monteix [MON-2001]. Ses travaux sont basés sur des mesures de transmission et de réflexion à l'aide d'un spectromètre infrarouge à transformée de Fourier. La gamme d'étude spectrale autorisée par le « Spectrum 2000 – Perkin Elmer » utilisé s'étend de 1 à 25µm et couvre ainsi la quasi-totalité du spectre d'émission des lampes dont la longueur d'onde maximum correspondant à la température nominale d'émission des lampes s'étend de 0.6 à 6µm pour une température de filament proche de 2400K.

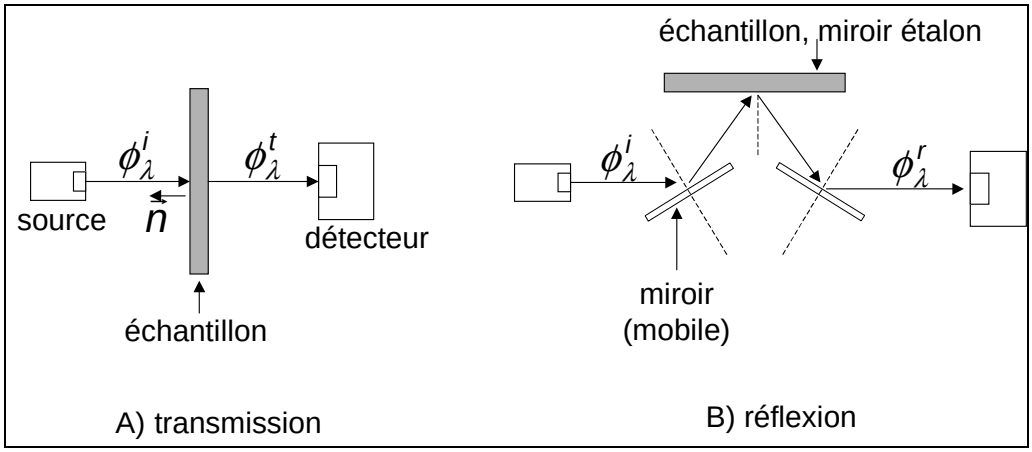


Figure 22 : Dispositifs expérimentaux en transmission et réflexion [MON-2001].

Ces mesures ont été réalisées à température ambiante et S. Monteix les considère comme constantes pour des températures plus élevées. Cette hypothèse est démontrée comme étant valable par Esser [ESS-1987] et Weinand [WEI-1998] pour le P.E.T. car celui-ci ne donne pas lieu à des modifications structurales durant la phase de chauffage tant que la température reste inférieure à celle de cristallisation (environ 130°C pour le P.E.T.).

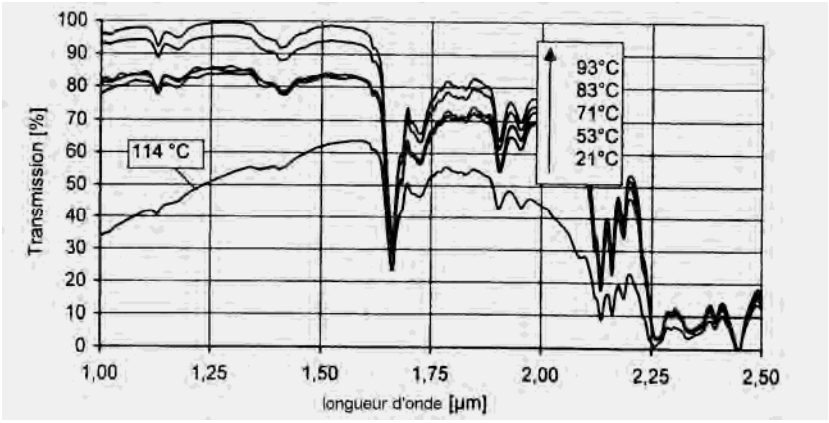


Figure 23 : Evolution de la transmittivité spectrale du P.E.T. en fonction de la température [WEI-1987].

L'utilisation du spectromètre infrarouge dans le cadre de la première manipulation par transmission permet l'obtention de la transmittivité spectrale apparente.

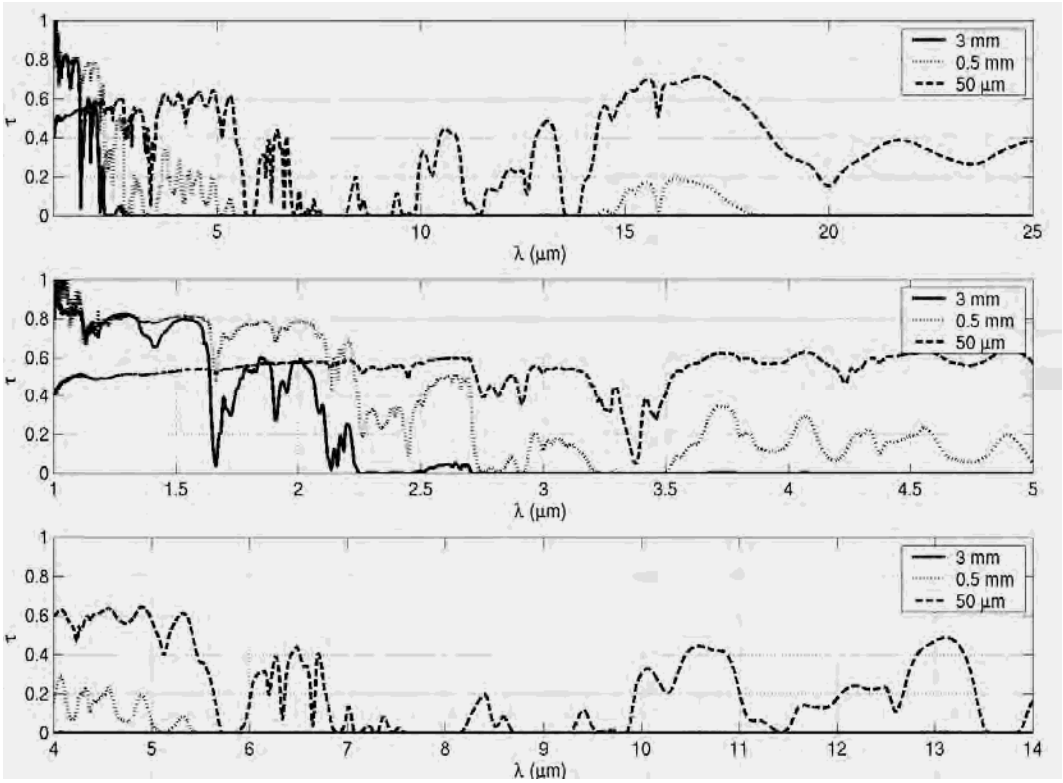


Figure 24 : Transmittivité du P.E.T. en fonction de l'épaisseur des échantillons [MON-2001].

Il se déduit de ces courbes que :

- Entre [1 ; 2.5] µm, la transmittivité est maximale et indépendante de l'épaisseur,
- Entre [2.5 ; 5] µm, la transmittivité diminue jusqu'à devenir nulle pour les échantillons épais (supérieur à 3 mm),
- Entre [5 ; 25] µm, la transmittivité est nulle pour les échantillons supérieurs à 0.5mm.

Ces résultats expérimentaux sont difficiles à comparer avec ceux obtenus par Klaus Hartwig [HAR-1996], la taille des échantillons de ce dernier n'étant pas connue. Néanmoins, une certaine similitude est remarquable d'un point de vue qualitatif.

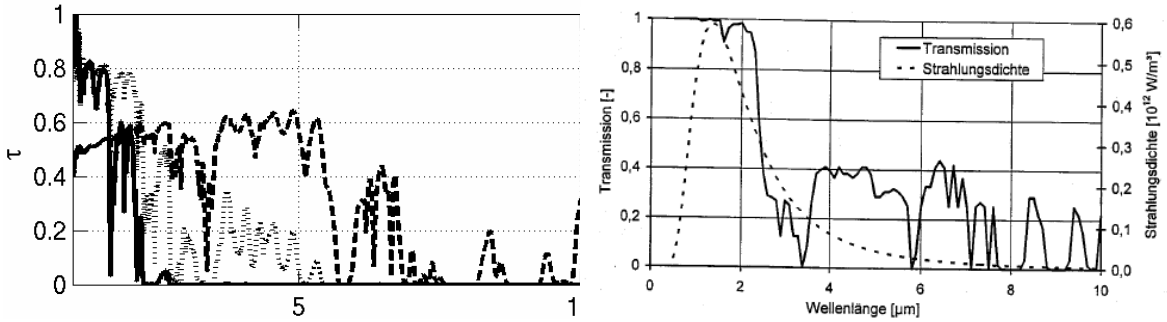


Figure 25 : Comparaison entre les mesures de transmittivité tirées de [MON-2001] et [HAR-1996].

Dans la seconde configuration, le spectromètre permet l'obtention de la réflectivité du P.E.T. amorphe et les résultats montrent qu'elle ne dépend pas de l'épaisseur de l'échantillon.

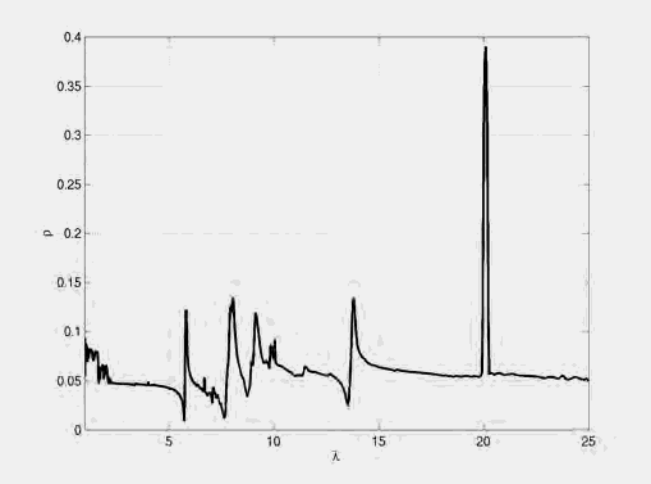


Figure 26 : Réflectivité spéculaire du P.E.T. amorphe [MON-2001].

Ce coefficient reste faible dans la gamme de longueur d'onde étudiée. Le coefficient de réflexion moyen varie peu en fonction de la température du rayonnement incident (entre 5 et 7%). Il sera donc considéré constant dans la suite de notre étude et égal en moyenne à 6%.

Le calcul de l'absorption spectrale est issu des mesures de transmittivité auquel s'ajoute une hypothèse d'absorption. Cette dernière est celle de Beer-Lambert et décrit l'absorption spectrale A_λ comme une fonction exponentielle décroissante de la distance d parcourue au sein du matériau.

$$L_\lambda(d) = L_\lambda(d=0)e^{-A_\lambda d} \tag{9}$$

Cette hypothèse communément admise [ESS-1987] est démontrée par M. Bordival [BOR-2005] à partir de l'hypothèse du milieu froid et de ses conséquences sur l'équation de transfert radiatif. En effet, un milieu est dit froid si la luminance induite par sa température est négligeable devant la luminance du milieu extérieur en l'occurrence ici, la lampe.

M. Bordival montre ainsi que le rapport entre la luminance du corps noir à la température de la lampe (environ 2500K) et celle du corps noir à la température de la préforme (environ 400K) est d'environ 1/740. Il en déduit alors que le terme de transmission devient prédominant devant celui d'émission de l'équation de transfert radiatif, et par simplification que sa solution est celle de Beer-Lambert.

Cette hypothèse permet donc de déduire des mesures de transmittivité le coefficient d'absorption spectrale [MON-2001].

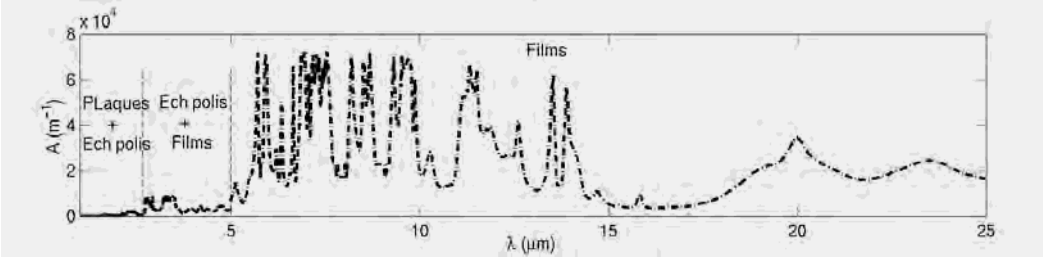


Figure 27 : Spectre d'absorption du PET [MON-2001].

Il est dès lors possible de calculer un coefficient moyen d'absorption sur une bande spectrale donnée en fonction de la température de la source émettrice par l'intermédiaire de la relation suivante :

$$\overline{A} = \frac{\int_{\Delta\lambda} A_\lambda L_\lambda^0(T) d\lambda}{\int_{\Delta\lambda} L_\lambda^0(T) d\lambda} \tag{10}$$

Il est alors intéressant de calculer à l'aide de ce coefficient d'absorption moyen $\overline{A}$, la profondeur de pénétration moyenne du rayonnement $\overline{E}$ en fonction de la température.

$$\overline{E} = \frac{1}{\overline{A}} \tag{11}$$

Ce terme peut ainsi être comparé à l'épaisseur e de la préforme :

- $\overline{E} << e$ le milieu sera optiquement épais ou « opaque »,
- $\overline{E} \approx e$ le milieu sera optiquement mince ou « transparent ».

On peut ainsi déterminer, de la même manière que pour le coefficient d'absorption, une estimation de l'épaisseur moyenne de pénétration en fonction de la température de la source et de la bande spectrale considérée.

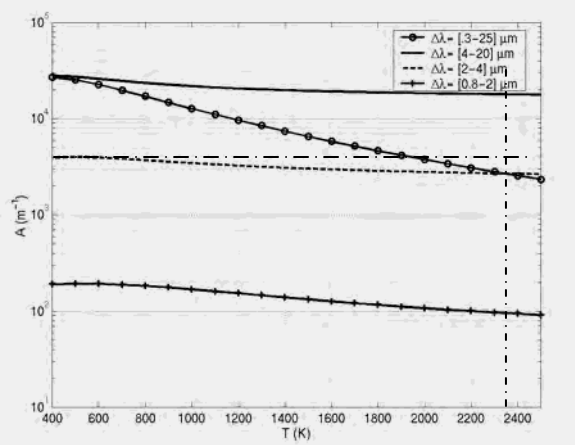


Figure 28 : Variation du coefficient d'absorption moyen en fonction de la température de la source d'émission et d'une bande spectrale [MON-2001].

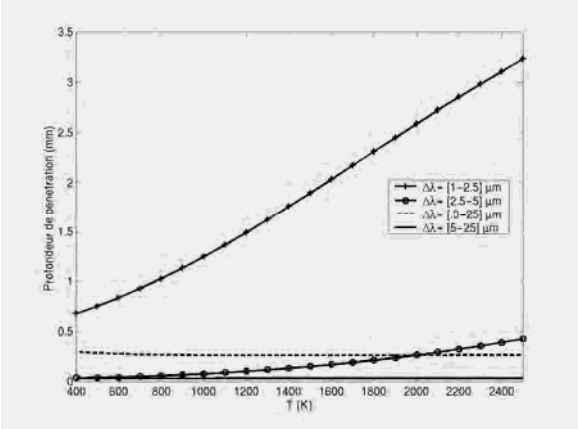


Figure 29 : Variation de la profondeur de pénétration du rayonnement en fonction de la température de la source d'émission et d'une bande spectrale [MON-2001].

Les variations de la profondeur de pénétration du rayonnement montrent clairement que les infrarouges courts vont chauffer le matériau sur toute son épaisseur (entre 2 et 4mm). Par contre, les infrarouges moyens et longs auront un effet purement superficiel (de l'ordre de 0.4mm pour une source à 2400K).

A. Yousefi utilise un coefficient d'absorption moyen [YOU-2001] de 1300 m^{-1}, ce qui correspond à la valeur tracée par les traits mixtes sur le graphe précédent pour une température de lampe de 2360K.

Dans le cadre de notre étude, nous nous attacherons à utiliser une absorption spectrale définie entre 0 et 20 µm. En effet, au-delà de 20 µm, l'émission spectrale de la lampe liée au tube en quartz devient négligeable au regard de l'émission du tungstène dans les infrarouges courts (rapport supérieur à 1000).

Enfin, si les surfaces émettrices de la préforme sont supposées diffuses, l'émissivité spectrale ou totale est indépendante de la direction d'émission. Elle peut alors être déduite des mesures de réflectivité ρ_λ et de transmittivité τ_λ par la relation de Kirchhoff.

S. Monteix déduit de ses mesures que l'émission du P.E.T. est centrée sur un intervalle spectral caractérisé par une forte absorption et que la participation propre du rayonnement de la matière amorphe peut être négligée par rapport à celui reçu depuis la lampe halogène.

2. Implantation numérique d'un modèle convecto-radiatif

Le logiciel Plastirad évoqué en début de chapitre a permis d'aboutir à la simulation des échanges radiatifs entre les lampes halogènes et la préforme éclairée. Il a été validé à l'aide de cas expérimentaux. Néanmoins, deux approximations ont été réalisées au cours de cette étude. En effet, pour conserver les avantages en terme d'assemblage matriciel de la méthode des volumes de contrôle, on considère une propagation du rayonnement dans l'épaisseur de la matière *selon la direction orthogonale à la surface extérieure*. Cela engendre un effet de bord, illustré sur le schéma suivant.

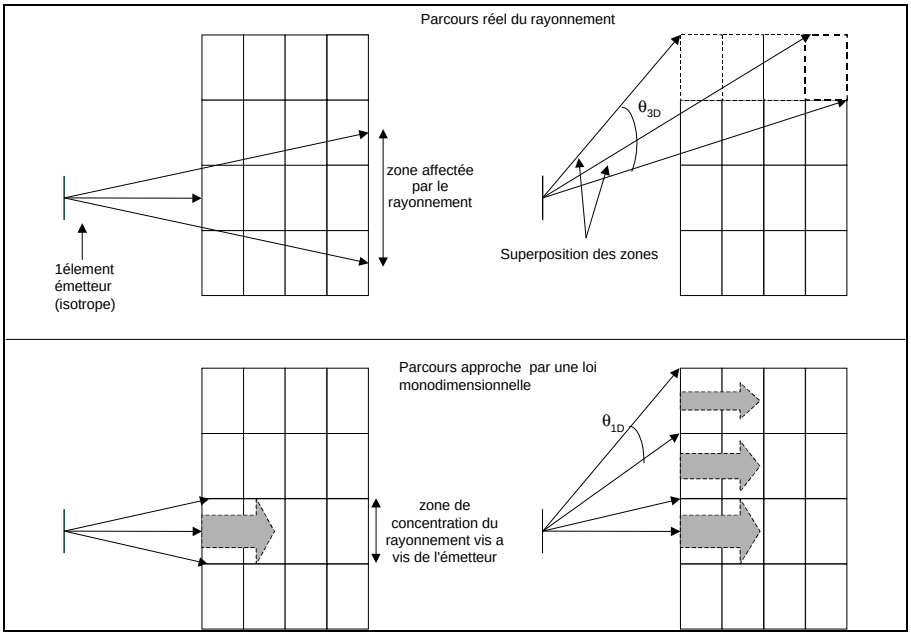


Figure 30 : Description des trajets du rayonnement à travers le matériau [MON-2001].

De plus, la méthode de calcul des facteurs de forme entre les surfaces diffuses est limitative et ne permet pas de prendre en compte de manière directe et efficace les différents réflecteurs présents dans le four. Ainsi, S. Monteix les considère à travers un coefficient de pondération du flux d'énergie arrivant sur la surface externe de la préforme.

Afin de s'affranchir de ces deux hypothèses, il a été nécessaire de développer une méthode « plus physique » permettant de tenir compte du chemin réellement suivi par le rayonnement. La méthode choisie dans notre étude est celle du *lancer ou suivi de rayons*. Cette technique développée dans le cadre de l'imagerie de synthèse, consiste à suivre le trajet d'un photon émis depuis une source de manière à connaître les zones éclairées dans son environnement. Elle est basée sur des algorithmes mathématiques d'intersection de surfaces (objets éclairés) avec des droites de l'espace (trajets des photons). Appliquée dans le cadre des calculs radiatifs pour la première fois en 1883 par Christiansen [CHR-1883], cette méthode a été reprise plus récemment par W. Cai [CAI-1992] pour modéliser des systèmes d'émetteurs infrarouge tel que le brûleur à gaz. Son intérêt principal réside dans la modélisation de l'interaction avec la matière, notamment pour des *géométries complexes*.

2.1. Principe du lancer de rayon

2.1.1. *Méthode et algorithme*

Le lancer de rayons consiste à suivre des quanta d'énergie obtenus par la discrétisation spatiale des flux radiatifs. Le flux partant de chaque point émetteur est discrétisé par des rayons dont les directions sont déterminées en fonction des propriétés de l'émetteur. La trajectoire de chaque rayon est mémorisée : les obstacles rencontrés, les distances parcourues… Le suivi de rayons est un modèle physique fin car il prend en compte les phénomènes optiques (réfraction, réflexion, absorption…).

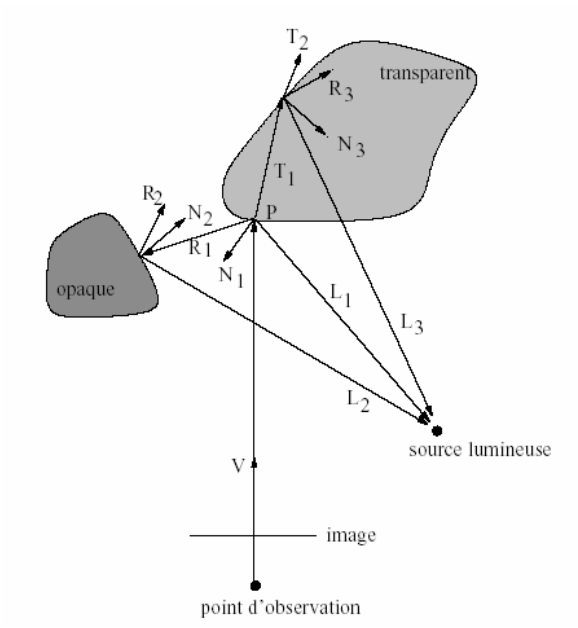


Figure 31 : Schéma de principe du lancer de rayons.

L'algorithme du suivi de rayons est le suivant :

Pour chaque source lumineuse :

Discrétiser la source en flux discrets

Définir les rayons qui représentent ces flux

Pour chaque rayon

Chercher l'intersection du rayon avec l'obstacle, la mémoriser

Si l'obstacle renvoi le rayon alors

On continue de suivre le rayon après réflexion

Si l'obstacle absorbe le rayon alors

On continue de suivre le rayon dans la matière

2.1.2. *Application au chauffage radiatif*

L'algorithme développé précédemment peut s'appliquer à l'interaction entre la lampe et la préforme de la manière suivante.

Pour chaque lampe halogène :

1) Discrétisation du filament de tungstène en flux discrets

2) Définition d'un hémisphère d'émission de rayons représentant ces flux

Pour chaque rayon

3) Recherche de l'intersection du rayon avec le réflecteur céramique

Si le réflecteur reçoit le rayon alors

4) Calcul de la trajectoire du rayon après réflexion

Si le réflecteur ne reçoit pas le rayon alors

5) Recherche de l'intersection du rayon avec la matière

Si le rayon intercepte la matière

6) Recherche de la propagation du rayon dans la matière

7) Calcul de l'absorption

8) Intégration de l'absorption dans l'équation de la chaleur

Si le rayon ressort de la matière

Si le rayon n'intercepte pas la matière

Fin de l'algorithme pour le rayon considéré

Récemment, Sylvia Andrieu [AND-2005] a utilisé le lancer de rayons dans le cadre du thermoformage afin de calculer l'interaction entre les lampes halogènes et une plaque. Ce calcul ne prend pas en compte l'absorption dans la matière et s'arrête donc à la détermination de l'éclairement reçu. En effet, la propagation dans le cas du polypropylène ou de l'A.B.S. se fait par l'approximation de Rosseland [ROS-1936] (i.e. propagation du rayonnement dans la matière par l'intermédiaire d'une conductivité équivalente). Cette approximation est fréquemment utilisée dans le cadre du verre [KLA-2005].

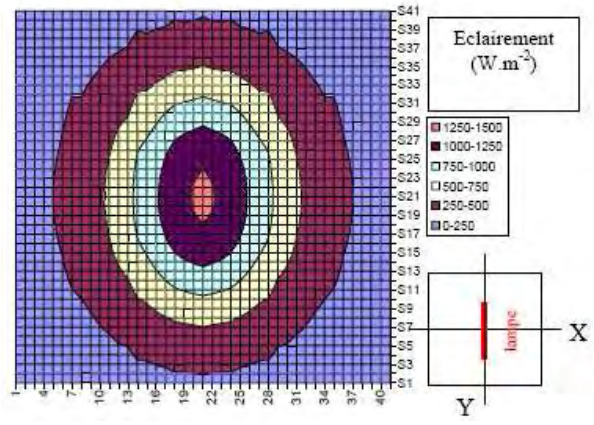


Figure 32 : Exemple de cartographie d'éclairement calculée par Thermoray [AND-2005].

2.1.3. *Résolution mathématique du problème*

Le développement d'un module de lancer de rayon se compose de deux grandes parties. La première est mathématique. Elle consiste à réaliser une analyse géométrique du problème et étudier sa résolution. C'est l'objet de ce paragraphe. La deuxième partie est purement physique. Son objectif est d'adapter la physique du rayonnement à la méthode du lancer de rayon. Elle fera l'objet des paragraphes à venir.

L'approche mathématique du problème se rapporte aux points suivants de l'algorithme précédemment abordé (numérotation en référence) :

- 2) Définition d'un hémisphère d'émission de rayons et discrétisation de l'objet,
- 3) Recherche de l'intersection de chaque rayon avec le réflecteur céramique,
- 5) Recherche de l'intersection de chaque rayon avec la matière,
- 6) Recherche de la propagation des rayons dans la matière.

Phase 2). La définition d'un hémisphère d'émission de rayons est primordiale pour représenter l'hypothèse d'isotropie du rayonnement émis par le filament de tungstène. En effet, si les rayons ne sont pas tous équidistants en projection sur une sphère unitaire englobant la source, alors certaines zones de l'objet éclairé seront plus atteintes par les rayons que d'autres. Cette discrétisation est la garante de l'isotropie d'émission comme le montre B.-W. Li [LI-1997].

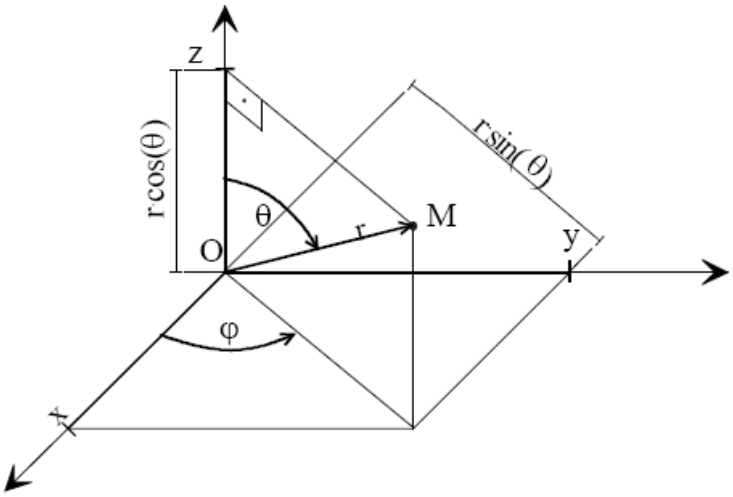


Figure 33 : Système de coordonnées sphériques.

L'objectif est donc que les angles solides représentés par les rayons soit égaux et que leur somme totale vaille 4π pour une sphère complète. Pour cela W. Cai [CAI-1992] définit l'angle solide élémentaire $d\omega$ entre $d\varphi$ et $d\theta$ sur une sphère de rayon r par :

$$d\omega = \frac{ds}{r^2} = \frac{r.d\theta.r\sin\theta.d\varphi}{r^2} = \sin\theta.d\varphi.d\theta = -d\varphi.d(\cos\theta) \qquad (12)$$

La discrétisation est donc linéaire selon φ entre [0 , 2π] et selon $\cos\theta$ entre [-1 , 1]. Pour des nombres de rayons n_φ et n_θ, les valeurs discrétisées sont donc :

$$\varphi_i = \frac{\pi(2i-1)}{n_\varphi} \qquad i = 1,...,n_\varphi \tag{13}$$

$$\cos\theta_j = -1 + \frac{2j-1}{n_\theta} \qquad j = 1,...,n_\theta \tag{14}$$

Phase 3) et 5). La recherche de l'intersection entre un rayon et la matière ou entre le rayon et un réflecteur est en fait le même problème. L'objectif va être de déterminer si le rayon intercepte une facette appartenant à la surface externe de la pièce chauffée par rayonnement ou une facette appartenant à un réflecteur. C'est la partie la plus délicate de l'algorithme. En effet, ce calcul doit être le plus rapide possible et en même temps robuste. Exprimé sous forme mathématique, le rayon va être considéré comme une droite en coordonnées paramétriques. Ainsi, le problème peut se décomposer en deux phases :

- Rechercher l'intersection entre une droite de l'espace et un plan de l'espace défini par la facette,
- Vérifier que l'interception trouvée appartient à la facette définissant le plan.

Soit un point R, origine du rayon, défini par ses coordonnées dans le repère global $\left(O/\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$

$$\overrightarrow{OR} = X_R\vec{x} + Y_R\vec{y} + Z_R\vec{z} \tag{15}$$

Soit un vecteur $\vec{V}$, direction et sens du rayon, défini dans le repère global par :

$$\vec{V} = V_x\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z} \tag{16}$$

L'équation paramétrée en t de la droite est ainsi donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x = X_R + tV_x \\ y = Y_R + tV_y \\ z = Z_R + tV_z \end{cases} \tag{17}$$

Dans le cadre de notre étude, les facettes servant de surface externe à la préforme seront des triangles. Elles peuvent donc être définies chacune par trois points A, B et C définis dans le repère global par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} + Z_A\vec{z} \\ \overrightarrow{OB} &= X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} + Z_B\vec{z} \\ \overrightarrow{OC} &= X_C\vec{x} + Y_C\vec{y} + Z_C\vec{z} \end{aligned} \tag{18}$$

Soit un point M quelconque de coordonnées x, y et z appartenant au plan défini par les points A, B et C.

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} \tag{19}$$

L'équation paramétrée en u et v du plan est alors :

$$\begin{cases} x = u(X_B - X_A) + v(X_C - X_A) + X_A \\ y = u(Y_B - Y_A) + v(Y_C - Y_A) + Y_A \\ z = u(Z_B - Z_A) + v(Z_C - Z_A) + Z_A \end{cases} \tag{20}$$

Le calcul de l'intersection se fera donc par la résolution du système formé par la droite précédente et l'équation du plan de l'élément soit :

$$\begin{cases} u(X_B - X_A) + v(X_C - X_A) - tV_x = X_R - X_A \\ u(Y_B - Y_A) + v(Y_C - Y_A) - tV_y = Y_R - Y_A \\ u(Z_B - Z_A) + v(Z_C - Z_A) - tV_z = Z_R - Z_A \end{cases} \tag{21}$$

Ce système de Cramer sera résolu par la méthode des déterminants. Il permet l'obtention, s'il y a interception, du vecteur aux coordonnées paramétriques (u, v, t). Ainsi, la première phase de recherche de l'intersection de la droite définie par le rayon avec le plan défini par la facette est résolue.

Il s'agit alors de déterminer si l'interception trouvée appartient à la facette définissant le plan.

Une première condition nécessaire mais insuffisante porte sur le paramètre t, directement lié à l'équation du rayon. Ce paramètre devra toujours être strictement positif afin de s'assurer que l'interception du plan avec la droite est bien dans le sens du rayon et non en sens inverse. En effet, le rayon ne suit pas dans la réalité une droite, mais une demi-droite ayant comme origine, la source d'émission du rayonnement.

Différentes situations d'interception peuvent être obtenues.

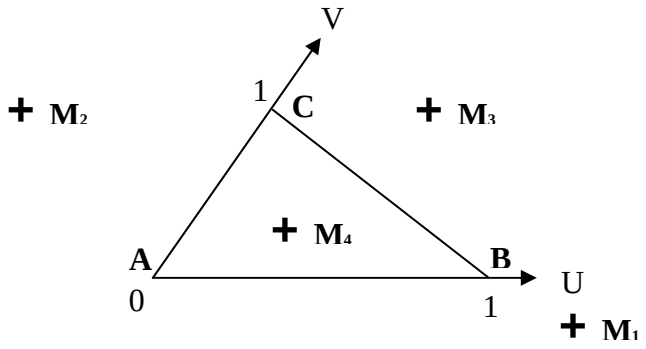


Figure 34 : Analyse de l'interception d'un rayon avec un élément surfacique triangulaire.

Les points M_1 et M_2 montrent tout d'abord que les coordonnées u et v doivent être positives mais inférieures à l'unité. Ensuite, le point M_4 indique que, pour se trouver dans le triangle ABC, la somme des coordonnées u et v doit être elle aussi inférieure à l'unité. Quatre conditions sont donc nécessaires pour que l'interception du rayon avec le plan soit comprise dans l'élément concerné.

$$\begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \\ 0 \le u+v \le 1 \\ 0 < t \end{cases} \tag{22}$$

Phase 6). En utilisant les éléments finis, la phase de propagation du rayon dans la matière n'est pas une difficulté. Elle va suivre le même processus que pour les phases 3 et 5. En effet, connaissant l'intersection initiale du rayon avec la facette triangulaire extérieure, la recherche de la propagation du rayon concernera les 3 autres facettes du tétraèdre. L'algorithme précédent sera donc réutilisé jusqu'à la sortie du rayon hors de la matière.

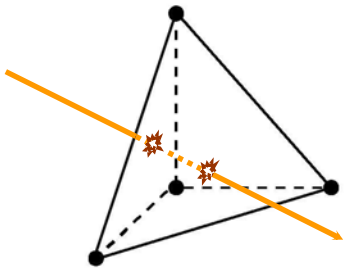


Figure 35 : Analyse de la propagation du rayon dans la matière.

Cette phase de l'algorithme sera fortement favorisée dans le cadre des éléments finis et notamment dans le logiciel Forge3® où la structure de données permet, pour un tétraèdre, de connaître directement ses 4 tétraèdres connexes.

2.2. La loi de Beer-Lambert

Comme il a été vu précédemment, la loi de Beer-Lambert est communément admise et utilisée pour calculer la propagation d'un flux radiatif dans les milieux semi transparents et plus particulièrement des milieux froids. Elle consiste à considérer l'absorption comme étant une fonction exponentielle décroissante de la distance parcourue dans la matière. Cette loi est monodimensionnelle et a donc l'avantage d'être facilement adaptée au lancer de rayon, comme le montre la figure suivante. En effet, il suffit de considérer l'absorption pour chaque rayon traversant le milieu pour connaître ainsi l'énergie transmise à la matière. De plus, dans la mesure où le rayonnement émis est considéré comme isotrope, il est possible d'exprimer la loi de Beer-Lambert dans une direction donnée sous la forme d'une densité de flux radiatif qui sera l'émittance. Soit un vecteur $\overrightarrow{M_\lambda^i}(0)$, représentant la densité de flux radiatif initial d'un rayon i arrivant sur la préforme défini de manière spectrale par :

$$\overrightarrow{M_\lambda^i}(0) = M_\lambda^i(0)\vec{n} \tag{23}$$

avec $\vec{n}$ le vecteur directeur unitaire de ce flux.

Soit un point R origine du rayon avec l'élément et un point Q intersection du rayon avec l'élément, tous deux définis par leurs coordonnées dans le repère global.

$$\overrightarrow{M_\lambda^i}(R) = M_\lambda^i(0)\vec{n} \qquad \vec{n} = \frac{\overrightarrow{RQ}}{\left\|\overrightarrow{RQ}\right\|} \tag{24}$$

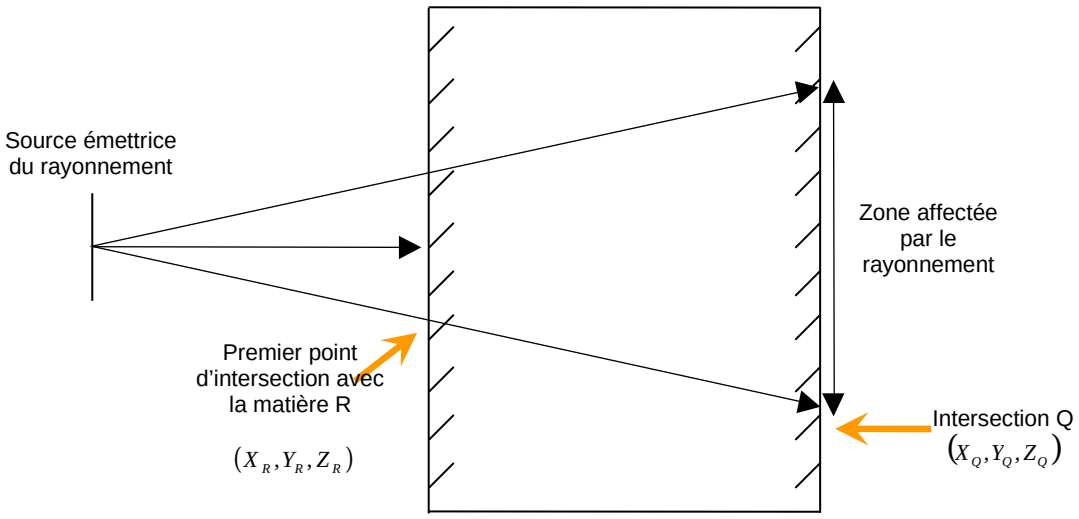


Figure 36 : Application de la loi de Beer-Lambert au lancer de rayons.

L'application de la loi de Beer-Lambert entre ces 2 points donne :

$$\overrightarrow{M_\lambda^i}(Q) = \overrightarrow{M_\lambda^i}(R)e^{-A_\lambda\left\|\overrightarrow{RQ}\right\|} \tag{25}$$

Ce flux transmis peut ainsi être inséré comme un terme source dans l'équation de la chaleur.

2.3. Formulation numérique du problème thermique dans Forge3®

2.3.1. *Résolution standard de l'équation de la chaleur*

Le logiciel Forge3® a été choisi comme source de développement à nos travaux. C'est un logiciel basé sur la méthode des éléments finis avec une formulation lagrangienne réactualisée.

L'équation de la chaleur peut s'écrire sous la forme :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \dot{\omega} \tag{26}$$

Où ρ est la masse volumique, C_p est la capacité calorifique, $\vec{q}$ est le champ de vecteur flux de chaleur et $\dot{\omega}$ est le terme de couplage (en première approche, la puissance dissipée).

A cette équation thermique s'ajoutent différentes conditions aux limites :

- $T(x,0) = T_0$ représente une température initiale,
- $T = T_{imp}$ représente une condition de type Dirichlet (i.e. température imposée),
- $\vec{q}.\vec{n} = \phi_{imp}$ représente une condition de type Neumann (i.e. flux sortant imposé),
- $\vec{q}.\vec{n} = h_{cd}(T - T_c)$ représente une condition de conduction par contact,
- $\vec{q}.\vec{n} = h_{cv}(T - T_{ext})$ représente une condition de convection.

La partie conductive est exprimée à l'aide de la loi de Fourier :

- $\vec{q} = -k\nabla T$

La partie rayonnement d'un problème thermique est traitée généralement en utilisant l'hypothèse du corps gris. Il en résulte ainsi une condition aux limites supplémentaire :

- $\vec{q}.\vec{n} = \varepsilon\sigma(T^4 - T_{ext}^4)$ souvent linéarisée sous la forme :

$$\vec{q}.\vec{n} = \varepsilon\sigma(T - T_{ext})(T + T_{ext})(T^2 + T_{ext}^2) = h_{ray}(T - T_{ext})$$

La mise en forme nécessaire à la résolution numérique de l'équation de la chaleur est basée sur la méthode de Galerkin. Elle permet d'écrire $\forall T^*$ appelée fonction test :

$$\int_\Omega \rho C_p \frac{dT}{dt} T^* d\Omega - \int_\Omega \nabla \cdot (k\nabla T) T^* d\Omega - \int_\Omega \dot{\omega} T^* d\Omega = 0 \tag{27}$$

Et après intégration du deuxième terme et ajout des conditions aux limites, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho C_p \frac{dT}{dt} T^* d\Omega - \int_\Omega k\nabla T.\nabla T^* d\Omega - \int_\Omega \dot{\omega} T^* d\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega} \phi_{imp} T^* d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} h(T - T_{ext}) T^* d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} h_{cd}(T - T_{cd}) T^* d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} h_{cv}(T - T_{ext}) T^* d\partial\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega} h_{ray}(T - T_{ext}) T^* d\partial\Omega = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

La formulation éléments finis permet de connaître la température en tout point de la pièce à partir des valeurs qui sont calculées aux nœuds du maillage. Dans le cadre du logiciel Forge3®, les éléments utilisés sont des tétraèdres et la température sera calculée à chacun des sommets. L'interpolation sera donc du type :

$$T(x) = \sum_{i=1}^{Nbnoe} N_i(x) T_i \tag{29}$$

Où N_i est la fonction d'interpolation linéaire sur l'élément tétraédrique.

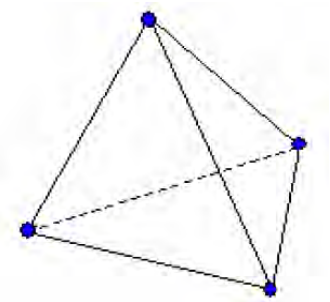


Figure 37 : Elément tétraédrique P1 utilisé pour le calcul du champ de température.

A partir de cette interpolation, la formulation précédemment obtenue peut donc s'exprimer sous forme matricielle et donne :

$$[C]\frac{\partial(T)}{\partial t} + [K](T) = (Q) \tag{30}$$

Où (T) représente le vecteur solution des valeurs nodales du problème, $[C]$ est la matrice de capacité, $[K]$ est la matrice de conductivité et (Q) est le vecteur de chargement.

Avec

$$C_{ij} = \int_{\Omega} \rho C_p N_i N_j d\Omega \tag{31}$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} k\nabla(N_i).\nabla(N_j) d\Omega + \int_{\partial\Omega} h_{cd} N_i N_j d\partial\Omega + \int_{\Omega} h_{cv} N_i N_j d\partial\Omega + \int_{\Omega} h_{ray} N_i N_j d\partial\Omega \tag{32}$$

$$Q_i = \int_{\Omega} \dot{\omega} N_i d\Omega - \int_{\partial\Omega} \phi_{imp} N_i d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} h_{cd} T_{cd} N_i d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} h_{cv} T_{ext} N_i d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} h_{ray} T_{ext} N_i d\partial\Omega \tag{33}$$

La résolution de ce système nécessite un schéma d'intégration temporelle. Dans le cadre de Forge3®, le schéma choisi est un schéma aux différences finies à trois pas de temps développé par N. Soyris [SOY-1990]. Le système est ainsi discrétisé à l'instant t^* en :

$$t^* = \alpha_1 t_{n-1} + \alpha_2 t_n + \alpha_3 t_{n+1} \tag{34}$$

Le champ de température au temps t^* s'écrit alors

$$T^* = \alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n + \alpha_3 T_{n+1} \tag{35}$$

La dérivée donne ainsi

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{t_n - t_{n-1}} + \frac{\gamma_1 T_n + \gamma_2 T_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \tag{36}$$

Sous les hypothèses d'ordre, de stabilité et de consistance, N. Soyris montre que le schéma peut être caractérisé par uniquement deux des paramètres des équations précédentes. Cela permet d'écrire plusieurs schémas inconditionnellement stables. En particulier, un jeu de paramètres peut être

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\gamma_2 \\ \beta_1 &= -\beta_2 = \gamma_2 - 1 \end{aligned} \tag{37}$$

L'expression de la dérivée donne alors :

$$\frac{dT^*}{dt} = (1-\gamma_2)\frac{T_n - T_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + \gamma_2 \frac{T_{n+1} - T_n}{t_{n+1} - t_n} \tag{38}$$

Le système initialement exprimé en T peut alors être exprimé en T^* pour donner ainsi

$$\begin{aligned} &[C]\frac{d(T^*)}{dt} + [K](T^*) = (Q) \\ &[C]\left[(1-\gamma_2)\frac{T_n - T_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + \gamma_2 \frac{T_{n+1} - T_n}{t_{n+1} - t_n}\right] + [K](\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n + \alpha_3 T) = (Q) \end{aligned} \tag{39}$$

Ce système est ensuite linéarisé. Il peut alors être résolu pour permettre d'obtenir la température à l'instant t_{n+1} :

$$T_{n+1} = \frac{T^* - (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n)}{\alpha_3} \tag{40}$$

La dépendance en température des coefficients C_p et k est prise en compte à chaque incrément de temps de la manière suivante [SOY-1990] :

$$\begin{aligned} {C_p}^* &= (\alpha_1 - \alpha_3) C_{p\,n-1} + (\alpha_2 + 2\alpha_3) C_{p\,n} \\ k^* &= (\alpha_1 - \alpha_3) k_{n-1} + (\alpha_2 + 2\alpha_3) k_n \end{aligned} \tag{41}$$

Ces deux valeurs seront donc considérées comme constantes pour le calcul de la température à l'instant t_{n+1} et déterminées à partir de leurs valeurs aux 2 incréments de temps précédents.

2.3.2. *Introduction d'un terme de source volumique de rayonnement dans l'équation de la chaleur*

Comme il a été vu dans le chapitre précédent, l'absorption du rayonnement dans les milieux semi transparents ne peut être considérée par un terme de conduction dans l'équation de la chaleur. Il est donc nécessaire d'intégrer un terme source volumique tenant compte d'une absorption exponentielle décroissante propre au modèle de Beer-Lambert.

L'expression du flux transmis par un rayon i après avoir traversé le volume s'écrit

$$\overrightarrow{M_\lambda^i}(d_i) = \overrightarrow{M_\lambda^i}(d_i = 0)e^{-A_\lambda d_i} \tag{42}$$

Le flux absorbé à proprement parler entre un point d'origine et un point quelconque situé à une distance d_i s'obtient ainsi suivant une direction $\vec{n}$

$$\overrightarrow{M_\lambda^{d_i}} = \left\|\overrightarrow{M_\lambda^i}(d_i = 0)\right\|\left(e^{-A_\lambda d_i} - 1\right)\vec{n} \tag{43}$$

La divergence du flux radiatif peut alors être calculée

$$\nabla\left(\overrightarrow{M_\lambda^{d_i}}\right) = \nabla\left[\left\|\overrightarrow{M_\lambda^i}(d_i = 0)\right\|\left(e^{-A_\lambda d_i} - 1\right)\vec{n}\right] \tag{44}$$

$$\nabla\left(\overrightarrow{M_\lambda^{d_i}}\right) = -A_\lambda\left\|\overrightarrow{M_\lambda^i}(d_i = 0)\right\|e^{-A_\lambda d_i} \tag{45}$$

Ce terme radiatif correspond à l'apport d'énergie reçue pour un élément et pour un rayon émis. La contribution globale radiative pour chaque élément sera donc la somme des divergences calculées pour l'ensemble des rayons émis, soit :

$$\nabla\left(\overrightarrow{M_\lambda}\right) = -A_\lambda \sum_{i=1}^{Nbre\ de\ rayons}\left\|\overrightarrow{M_\lambda^i}(d_i = 0)\right\|e^{-A_\lambda d_i} \tag{46}$$

Ce qui reporté dans l'équation de la chaleur donne :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = -\nabla\cdot\vec{q} + \dot{\omega} - \nabla\cdot\overrightarrow{M_\lambda} \tag{47}$$

2.4. Optimisation du calcul radiatif

Comme il a été vu dans la partie sur la résolution mathématique du problème, les calculs à réaliser pour déterminer l'intersection entre un rayon et la matière ne sont pas compliqués, mais peuvent être longs. En effet, il s'agit pour chaque rayon émis de déterminer à l'aide d'une boucle sur l'ensemble des éléments surfaciques constituants l'objet chauffé, à quel endroit le rayon impacte. Ainsi, plus le maillage est raffiné et plus les calculs et tests d'interception sont nombreux. Afin de réduire au maximum cette phase de calcul, deux techniques d'optimisation ont été développées.

2.4.1. *La méthode des boîtes englobantes*

Chaque lampe est maillée avec un nombre tri de facettes. Chacune de ces facettes émet un nombre niv de rayons. L'objet chauffé est composé de elt éléments surfaciques. Ainsi, dans l'absolu, la résolution du problème mathématique posé précédemment donne lieu à un nombre important de calculs. En effet, le nombre de rayons émis est $tri.niv$ et pour chacun d'eux, il faut tester elt interceptions correspondant à chacun des éléments susceptibles de recevoir le rayon émis. Le problème est donc composé de $tri.niv.elt$ tests au maximum.

Cependant, un grand nombre de rayons n'atteint pas la préforme et, en utilisant l'algorithme précédent, chacun de ces rayons « inutiles » va donner lieu à elt calculs d'interception. Afin de réduire au maximum cette phase de calcul qui peut concerner plus de 75% des rayons émis, la méthode des boîtes englobantes a été développée. Il s'agit de créer virtuellement une boîte de taille minimale contenant l'ensemble du maillage de la pièce chauffée. Cette boîte est un parallélépipède à 6 faces. Ainsi, un calcul préliminaire sur chacune des faces, soit 6 tests pour chaque rayon, permet de savoir rapidement si ce dernier a une forte probabilité d'atteindre l'objet à chauffer ou non. Le problème devient alors le suivant :

- Si le rayon ne touche pas la boîte, alors il est abandonné pour la suite,
- Si le rayon touche la boîte, l'interception va être testée avec le maillage de l'objet.

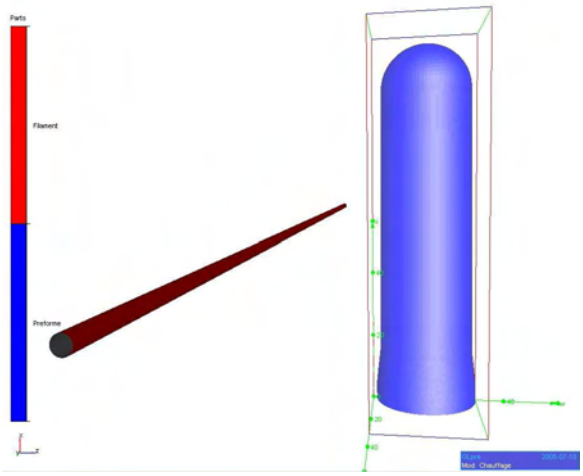


Figure 38 : Boîte englobant l'élément chauffé.

2.4.2. *Etude du scalaire entre la normale aux facettes et la direction du rayon*

La résolution du problème mathématique posé précédemment comporte des cas particuliers qu'il est nécessaire d'expliciter. En effet, lorsqu'un rayon atteint la boîte englobante, il est alors susceptible d'atteindre l'objet. Pour ce faire, une boucle sur l'ensemble des facettes va être réalisée de manière à connaître l'endroit exact de l'impact.

Comme le montre le schéma suivant, la géométrie des préformes fait que, pour un rayon atteignant la boîte, il existe 4 solutions au problème mathématique nommées ci-dessous A, B, C et D correspondant chacune à une facette externe. Le premier impact recherché correspondant au trajet réel d'un photon est donc celui lié au point A.

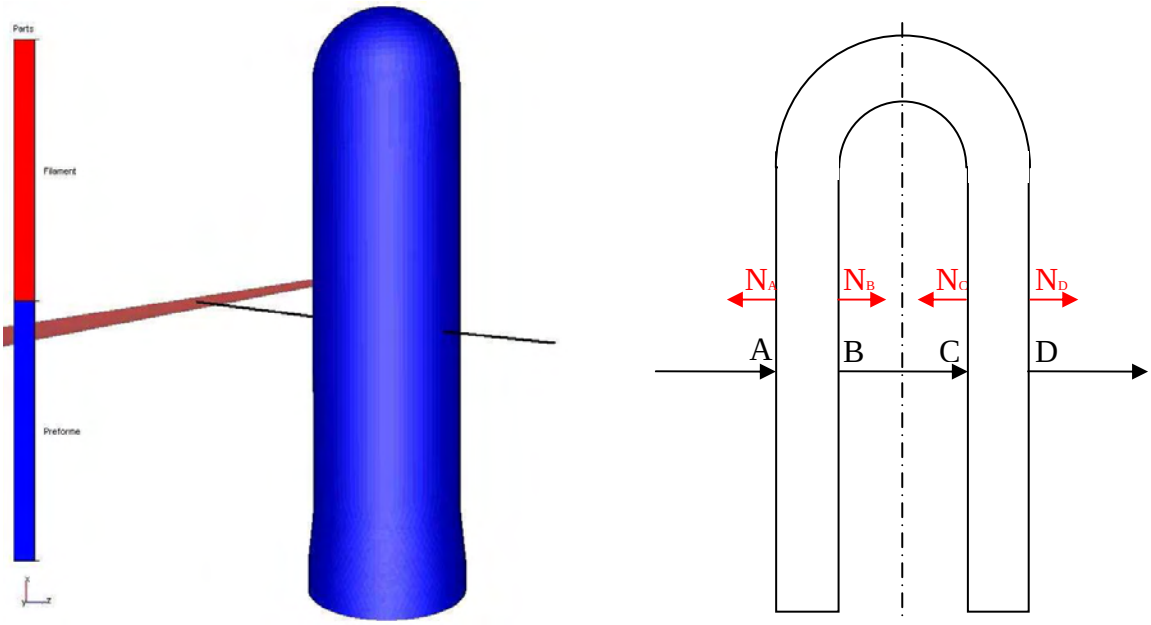


Figure 39 : Test des normales et solutions multiples.

Dans un premier temps, il est nécessaire de définir un critère permettant de déterminer la surface externe de la préforme. Le problème à 4 solutions sera ainsi réduit à 2 (les points A et D). Pour ce faire, la méthode est la suivante. Lorsqu'un rayon intercepte un élément, la distance le séparant de l'axe de rotation de la préforme est calculée. Ensuite, l'intersection entre le rayon et l'élément est décalée d'une distance faible suivant la normale à l'élément. La nouvelle distance séparant ce nouveau point avec l'axe de rotation est calculée. Dans la mesure où un élément appartenant à la surface externe aura toujours une normale sortante, la distance à l'axe sera dans ce cas toujours plus grande que la précédente. Au contraire, si la normale est orientée vers l'axe de révolution, la distance entre le point et l'axe sera réduite….

Ainsi, ce premier test permet d'établir une liste de l'ensemble des éléments surfaciques externes. Les autres ne sont pas testés dans les calculs d'interception, ce qui permet de réduire environ de moitié, pour un rayon donné, le nombre de tests à effectuer.

Pour éliminer la dernière solution possible (la solution D), le critère de Shapiro est utilisé [SHA-1985]. Il consiste à déterminer les surfaces cachées à partir des produits scalaires entre les normales des facettes et de la direction du rayon considéré. Dans notre cas, seule la deuxième partie du critère ($\overrightarrow{G_j G_i}.\overrightarrow{N_j} > 0$) est nécessaire étant donné le développement précédent.

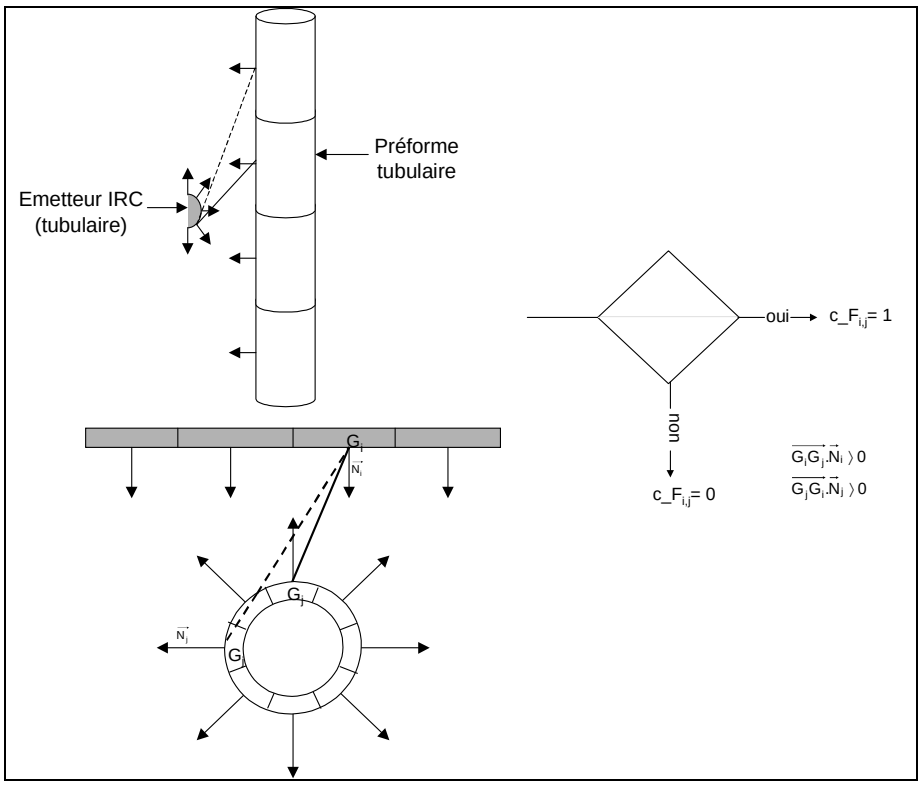


Figure 40 : Schématisation du critère d'identification des surfaces cachées [MON-2001].

Ce critère permet ainsi de ne pas tester l'interception avec l'ensemble des facettes n'étant pas en vis-à-vis des lampes. Il permet donc de diviser par deux le nombre de tests effectués.

Cette hypothèse implique dès lors que le flux transmis, après avoir traversé la paroi entre les points A et B, soit négligé.

2.5. Rotation et translation numérique de la préforme dans le four

Malgré les différentes optimisations effectuées pour la recherche des interceptions entre les rayons et la matière, le calcul de la divergence du flux radiatif reste coûteux en terme de temps CPU. De plus, il est valable dans le cadre d'une hypothèse statique mais il est nécessaire de l'effectuer de nouveau pour tout changement de configuration de la préforme dans le four. Aussi, la prise en compte de la rotation ainsi que de la translation doivent faire l'objet de développements spécifiques.

Afin de modéliser les déplacements, S. Monteix [MON-2001] considère le mouvement relatif des émetteurs autour de la préforme qu'il intègre comme une source de rayonnement temporelle. Ce choix lui permet de s'affranchir de l'introduction d'un terme de convection dans l'équation de la chaleur qui la rendrait non linéaire. Ayant actualisé la position des lampes, il peut alors recalculer les facteurs de forme et donc le terme source.

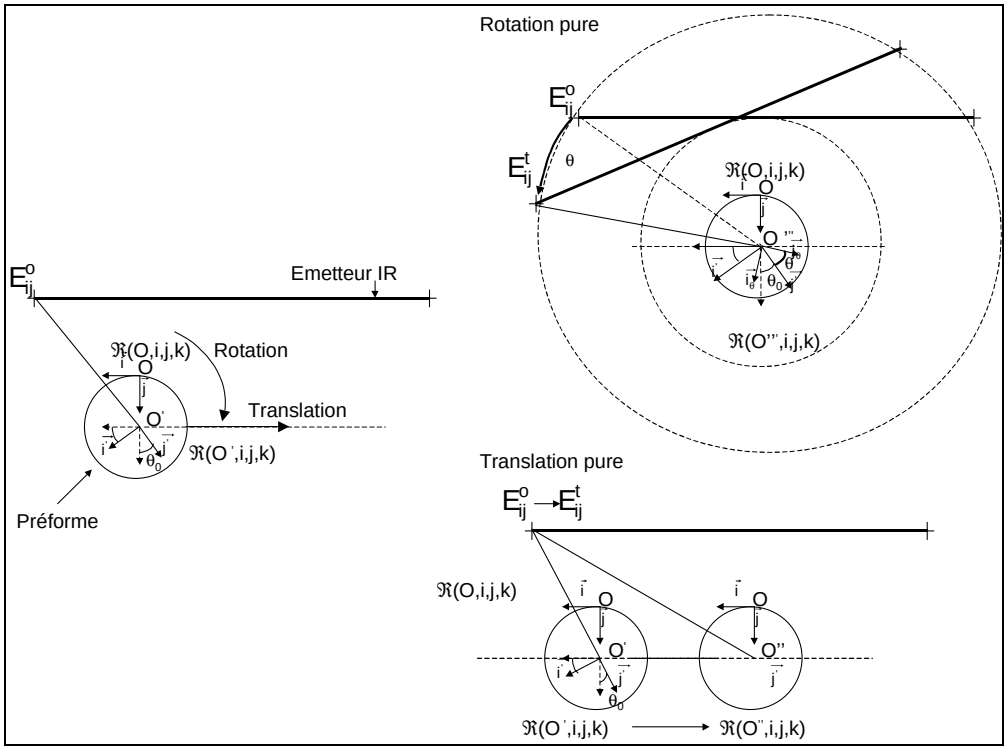


Figure 41 : Décomposition des mouvements de la préforme au sein des fours [MON-2001].

Afin de réduire les temps de calcul, l'ensemble des termes sources est déterminé pour une période de manière à ne pas les recalculer à chaque incrément.

A. Yousefi [YOU-2001] utilise une approche plus simplifiée où le flux réel obtenu en un point de la préforme va être approximé par un flux moyen au cours de la rotation et de la translation.

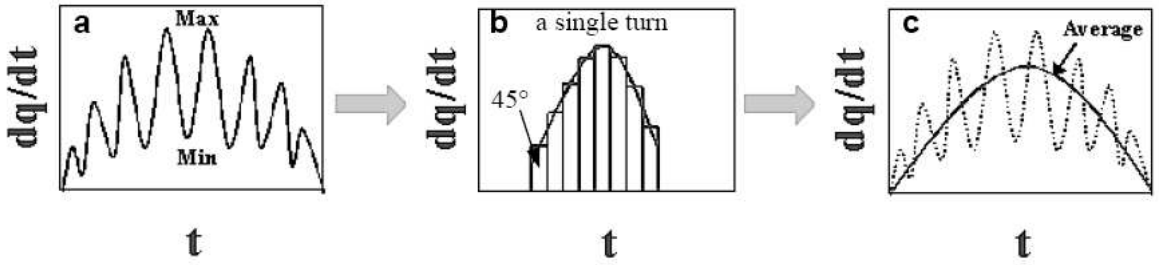


Figure 42 : Modélisation du flux reçu par la préforme en un point à l'intérieur du four [YOU-2001].

Ces deux techniques sont recevables mais ne sont pas adaptables au lancer de rayon, la propagation du flux dans la matière n'étant pas unidirectionnelle. La prise en compte des mouvements relatifs de la préforme par rapport aux émetteurs infrarouge court (IRC) passe donc par d'autres méthodes de calcul.

2.5.1. *Calcul de la rotation par interpolation*

Afin de ne pas recalculer la divergence du flux radiatif après rotation de la préforme, il est possible d'interpoler les valeurs obtenues dans la configuration initiale vers la situation à un instant donné. En effet, si la préforme est considérée comme étant fixe en translation, il est alors possible pour chaque élément de la configuration courante (tournée d'un certain angle par rapport à l'initiale) de définir qu'elle était l'élément correspondant dans cette même position mais à l'instant initial.

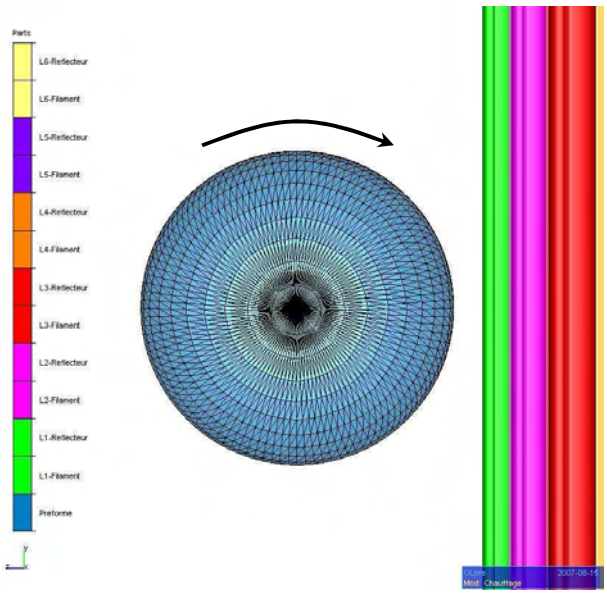


Figure 43 : Rotation de la préforme sans translation devant le four en vue de dessus.

Dès lors, la divergence du flux radiatif initiale peut être interpolée dans la configuration finale (voir figure ci-dessous).

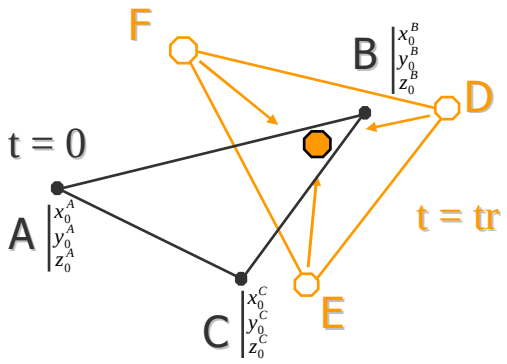


Figure 44 : Principe d'interpolation du flux radiatif entre la configuration initiale et celle d'arrivée.

Cette hypothèse est valide si la préforme est parfaitement axisymétrique, ce qui est le cas - à ce jour - dans le cadre du procédé d'injection soufflage.

D'un point de vue numérique, la divergence du flux radiatif va être interpolée pour chaque élément par rapport à la configuration à l'instant t=0. Les coordonnées barycentriques des éléments du nouveau maillage sont localisées dans celui du maillage initial. La valeur de la divergence du flux radiatif dans laquelle se trouve le barycentre est alors définie comme étant celle de l'élément à l'instant t.

Ainsi dans l'exemple 2D de la figure précédente, le barycentre du triangle DEF appartenant au maillage après rotation est déterminé à partir des coordonnées des nœuds. Il est alors localisé dans le maillage initial comme appartenant au triangle ABC. La divergence après rotation dans l'élément DEF, est celle calculée initialement au cours du ray-tracing pour l'élément ABC.

Il semble alors évident que le pas de temps choisi pour le calcul devra être étroitement lié à la vitesse de rotation de la préforme. En effet, un pas de temps trop important pourrait entraîner des zones non chauffées au niveau de la simulation. Ainsi, si le pas de temps est égal au temps nécessaire à la préforme pour effectuer un tour sur elle-même, l'arrière de la préforme ne sera jamais calculé comme étant en vis-à-vis avec les lampes et sa température restera la température initiale.

2.5.2. *Calcul de la translation par pondération*

Comme il a été vu précédemment, afin d'obtenir un chauffage uniforme de la préforme, cette dernière tourne tout en avançant devant les différents modules qui constituent le four. Ces derniers sont composés d'un support permettant de fixer les lampes et reliés entre eux par des plaques de protection en aluminium pour préserver les connexions électriques du rayonnement.

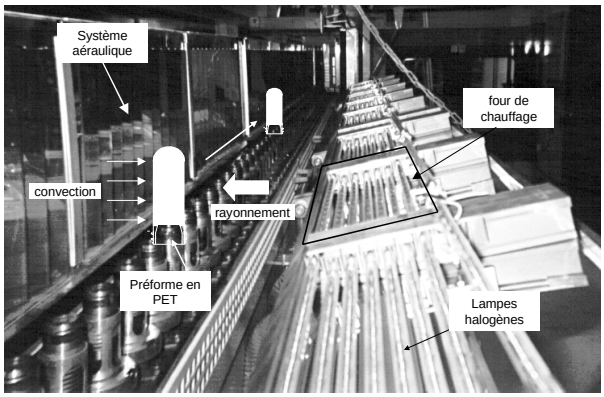


Figure 45 : Vue d'ensemble d'une installation de chauffage industrielle [MON-2001].

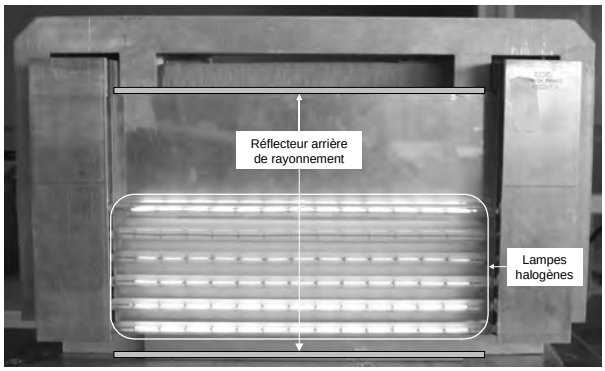


Figure 46 : Vue détaillée d'un four industriel [MON-2001].

Dans notre étude, les lampes mesurent 280mm de longueur et les plaques de séparation entre modules mesurent 60mm. Ainsi, lorsque la préforme passe devant un module de four, elle reste en réalité 60 / (280+60) x 100 = 18% du temps de passage devant une zone morte où l'émission ne provient que des côtés extrêmes des lampes. Il est donc nécessaire de la prendre en considération.

Haberstroh [HAB-1999] montre que le flux reçu par la préforme en un point est une fonction sinusoïdale croissante depuis le bord du four vers son milieu, puis sinusoïdale décroissante pour la fin de la translation. La sinusoïde reflète ainsi le mouvement de rotation de la préforme sur elle-même.

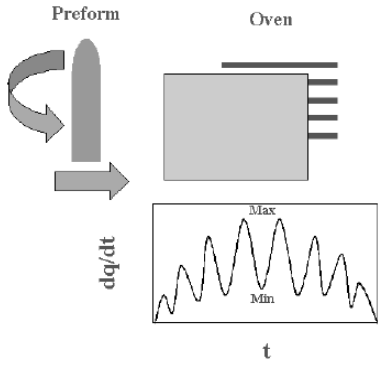


Figure 47 : Flux reçu par un point de la préforme au cours de son déplacement dans un module de four [HAB-1999].

Ainsi sur la figure précédente représentant l'évolution du flux en un point au cours de la traversée d'un module, la préforme effectue 8 rotations.

L'atténuation de l'intensité du flux reçu sur le bord du module est liée à la présence des plaques inter-modulaires. La prise en considération de ces plaques peut donc être effectuée en utilisant un coefficient pondérateur ayant une valeur de 1 lorsque la préforme est située au centre du four et décroissant sur les bords. Ce coefficient ne fera pas l'objet d'une étude poussée dans le cadre de nos travaux. Il pourra cependant être déterminé avec précision dans diverses simulations où la position de la préforme évoluera au sein du four.

Dans ce qui suit le coefficient au bord sera choisi de façon arbitraire comme étant égal à 0.8 aux bords du module.

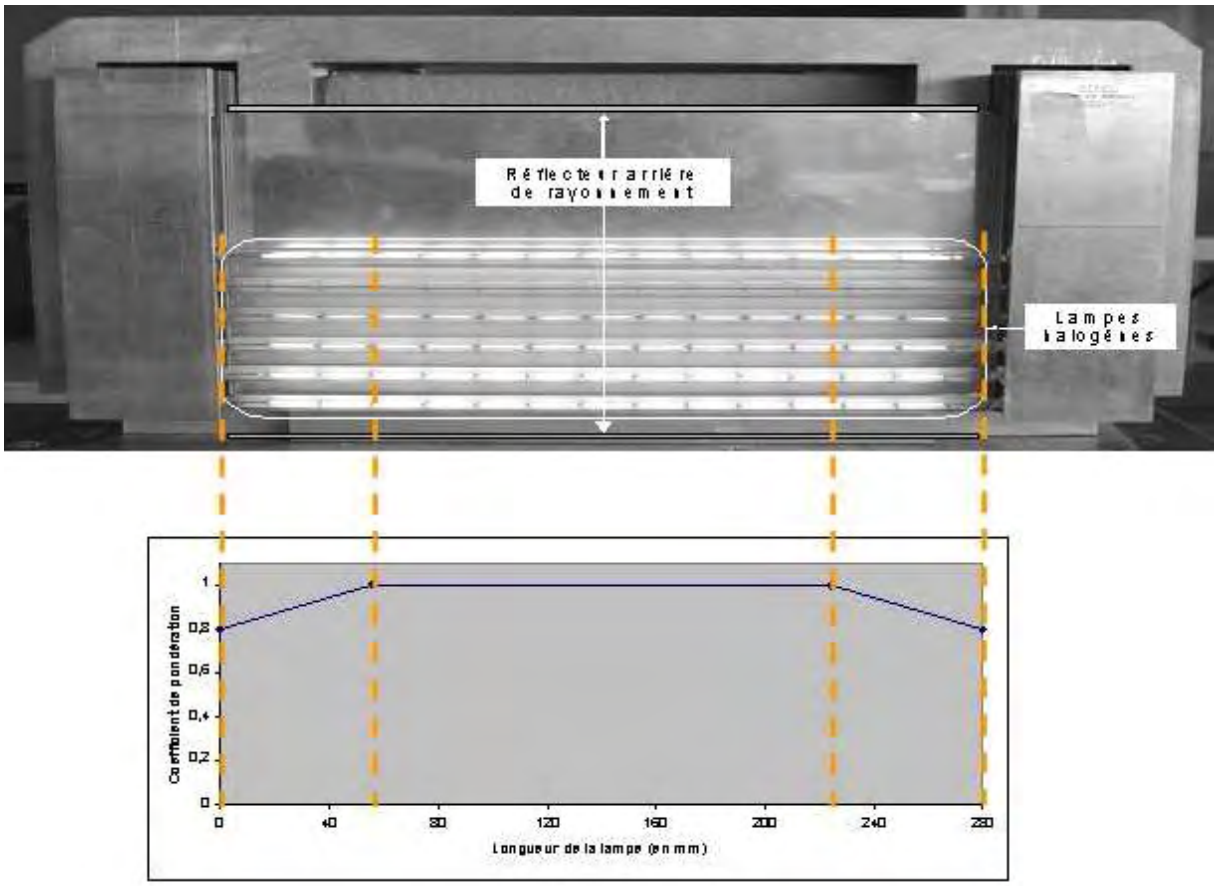


Figure 48 : Evolution du coefficient de pondération en fonction de la position de la préforme dans le four.

3. Conclusions partielles

Le chauffage de la préforme au sein du four est un problème thermo-cinématique complexe. En effet, en plus des différents modes de transfert thermique présents (rayonnement, convection et conduction), la préforme se déplace dans l'enceinte avec un mouvement combiné de rotation et de translation. Il en résulte une cartographie thermique qui va dépendre directement des propriétés thermiques du matériau et de son environnement.

La simulation du chauffage des préformes par rayonnement infrarouge est un problème peu étudié dans sa globalité. L'hypothèse de corps gris est souvent favorisée, bien que les différents spectres d'absorption et d'émission montrent que les données du problème varient énormément en fonction de la longueur d'onde.

Concernant la caractérisation du P.E.T., les travaux de S. Monteix constituent une base solide car cette étude est récente et a été réalisée sur le T74F9. Une approche bibliographique montre clairement la thermo dépendance de certains paramètres mécaniques et thermiques, et la dépendance spectrale de certains paramètres optiques.

Les données que nous utiliserons pour la suite de nos travaux sont donc les suivantes :

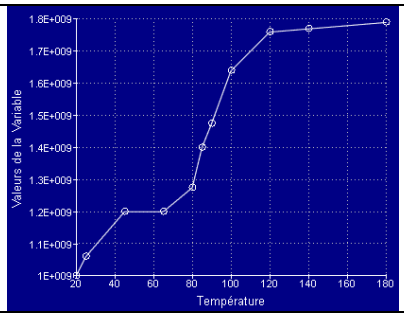
Paramètre	**Symbole**	**Dépendance**	**Valeur**	**Source**
Masse volumique	ρ	Constante	1335 $kg.m^{-3}$	[DET-1984]
Chaleur spécifique	C_p	Thermique		[PIR-1996] [HAR-1996]
Conductivité thermique	k	Constante	0.25 $W.m^{-1}.K^{-1}$	[SCH-1995]

Tableau 7 : Valeurs des paramètres thermo-physiques choisies dans le cadre de l'étude.

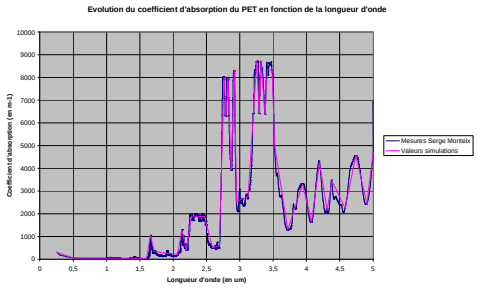
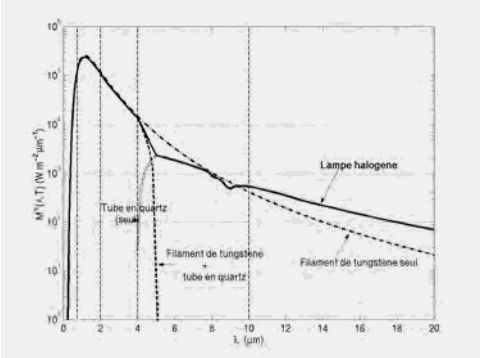
Paramètre	Symbole	Dépendance	Valeur	Source
Absorption du P.E.T.	A_λ	Spectrale [0 , 20] µm		[MON-2001]
Emissivité du P.E.T.	ε_λ	Négligée		[MON-2001]
Réflectivité du P.E.T.	ρ_λ	Constante	6 %	[MON-2001]
Emittance de la lampe	M_λ	Spectrale [0 , 20] µm		[MON-2001]

Tableau 8 : Valeurs des paramètres thermo-optiques choisis dans l'étude.

D'un point de vue numérique, le modèle radiatif a été développé dans le logiciel Forge3®. Etant développé en partenariat entre le Cemef et Transvalor, l'ensemble des sources nécessaires aux développements était disponible. Déjà muni d'un solveur thermique, il a fallu implémenter un terme source de rayonnement dans l'équation de la chaleur.

Ce terme source volumique a été calculé par la méthode du lancer de rayons, couplée avec une loi d'absorption spectrale de Beer-Lambert. Cette approche permet une prise en compte efficace des réflecteurs en céramique situés sur les lampes halogènes. Les réflecteurs aluminium arrières ne sont pas pris en compte dans notre étude

Cette technique étant extrêmement coûteuse en temps de calcul, la méthode des boîtes englobantes et celle de Shapiro sont développées de manière à réduire au maximum la recherche de l'interception entre les rayons émis et le maillage de la préforme.

Enfin, la rotation de la préforme dans le four est prise en considération par interpolation du terme source après déplacement et la translation par l'intermédiaire d'un coefficient de pondération.

Chapitre 2

Simulation des transferts convecto-radiatifs

Le modèle présenté dans le chapitre précédent établit les bases d'un module servant à la simulation du chauffage par rayonnement infrarouge des préformes en P.E.T. Ce chapitre a pour objectif la validation des travaux développés et de s'assurer de la qualité des hypothèses établies. Les validations seront progressives et s'appuieront principalement sur les travaux obtenus par le biais de la simulation à l'aide du logiciel Plastirad mais également en utilisant les résultats de campagnes expérimentales.

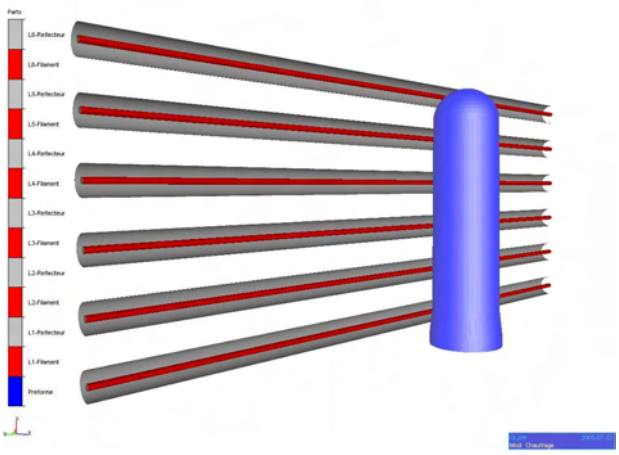


Figure 49 : Cas du chauffage d'une préforme dans un module à 6 lampes.

Ainsi, dans un premier temps, le calcul des facteurs de forme sera validé en utilisant un modèle plaque / tube. Puis, dans un second temps, le calcul d'une carte d'éclairement d'une lampe claire sur une plaque en vis-à-vis sera validé avec l'aide de mesures expérimentales. Cette phase permettra donc la validation des échanges radiatifs entre les lampes halogènes et la surface du matériau chauffé.

Ensuite, l'absorption du rayonnement reçu dans la matière sera validée sur des cas simples comme le chauffage d'une plaque en P.E.T. par une ou plusieurs lampes claires ou avec réflecteurs. Le cas du chauffage d'une préforme statique dans le four sera alors abordé et finalement, celui d'une préforme mobile (i.e. en rotation et translation). Ces cas seront comparés avec les mesures expérimentales par pyromètres ou caméra infrarouge effectuées au CROMeP.

Chapitre 2 Simulation des transferts convecto-radiatifs 63

1. Validation du calcul de l'éclairement 65

1.1. Validation du calcul géométrique des facteurs de forme 65

1.2. Validation du calcul physique de l'interaction lampe / objet 70

2. Simulation du chauffage de plaques en P.E.T. 73

2.1. Etude du chauffage d'une plaque par une lampe claire 74

2.1.1. Influence de la taille de maille dans l'épaisseur sur la température finale de la plaque 75

2.1.2. Influence du coefficient d'absorption sur la température finale de la plaque 78

2.1.3. Simulation de l'équilibre thermique lors du refroidissement 80

2.2. Etude du chauffage d'une plaque par une lampe avec réflecteur céramique 82

2.3. Etude du chauffage d'une plaque par un four complexe 84

3. Simulation du chauffage de préformes en P.E.T. 87

3.1. Etude du chauffage d'une préforme statique dans un four 88

3.2. Etude du chauffage d'une préforme en mouvement dans un four 94

3.3. Influence des modules précédent et suivant sur le chauffage d'une préforme 96

4. Conclusions partielles 98

1. Validation du calcul de l'éclairement

1.1. Validation du calcul géométrique des facteurs de forme

Les facteurs sont issus d'un calcul géométrique. Ils donnent la fraction de flux intercepté par une surface, le flux étant émis par une autre surface. La valeur d'un facteur se situe donc entre 0 et 1. De nombreuses expressions analytiques de facteurs de forme sont données en fonction des configurations entre les objets concernés dans R. Siegel et J. Howell [SIE-1992]. Dans notre étude, la configuration retenue pour le calcul analytique sera celle d'un élément de plan parallèle à un cylindre fini.

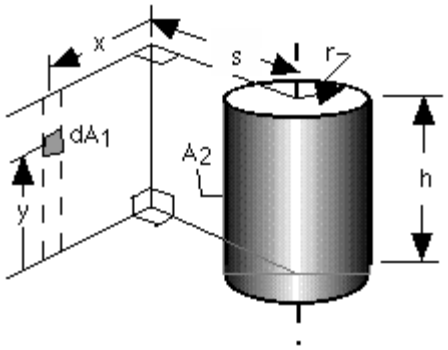


Figure 50 : Situation géométrique d'un élément de plan parallèle à un cylindre fini [SIE-1992].

Dans cette configuration, H. Leuenberger et R.A. Person [LEU-1956] montrent que le facteur de forme s'écrit :

$$F_{12} = \frac{S}{B} - \frac{S}{2B\pi}\left\{\begin{array}{l} \cos^{-1}\left(\dfrac{Y^2 - B + 1}{A - 1}\right) + \cos^{-1}\left(\dfrac{C - B + 1}{C + B - 1}\right) \\ -Y\dfrac{A+1}{\sqrt{(A-1)^2 + 4Y^2}}\cos^{-1}\left(\dfrac{Y^2 - B + 1}{\sqrt{B}(A-1)}\right) \\ -\sqrt{C}\dfrac{C+B+1}{\sqrt{(C+B-1)^2 + 4C}}\cos^{-1}\left(\dfrac{C - B + 1}{\sqrt{B}(C - B + 1)}\right) + H\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{B}}\right) \end{array}\right\} \quad (48)$$

Avec

$$S = \frac{s}{r} \quad X = \frac{x}{r} \quad Y = \frac{y}{r} \quad H = \frac{h}{r} \quad A = X^2 + Y^2 + S^2 \quad B = S^2 + X^2 \quad C = (H - Y)^2$$

Il est alors possible, en faisant varier la position de l'élément dA1 sur la surface d'une plaque de connaître le calcul global analytique du facteur de forme entre cette plaque et le tube représentant la lampe.

Le cas étudié est celui d'une plaque carrée de 350 mm de côté, située à 100 mm d'un tube de 0.8 mm de diamètre et 350 mm de longueur. Afin d'obtenir une carte d'éclairement, la valeur choisie pour l'émittance est de 521 240 W/m² (référence Philips pour un filament à 2 415 K), mais cette valeur n'a aucune incidence sur la précision du calcul mathématique des facteurs de forme.

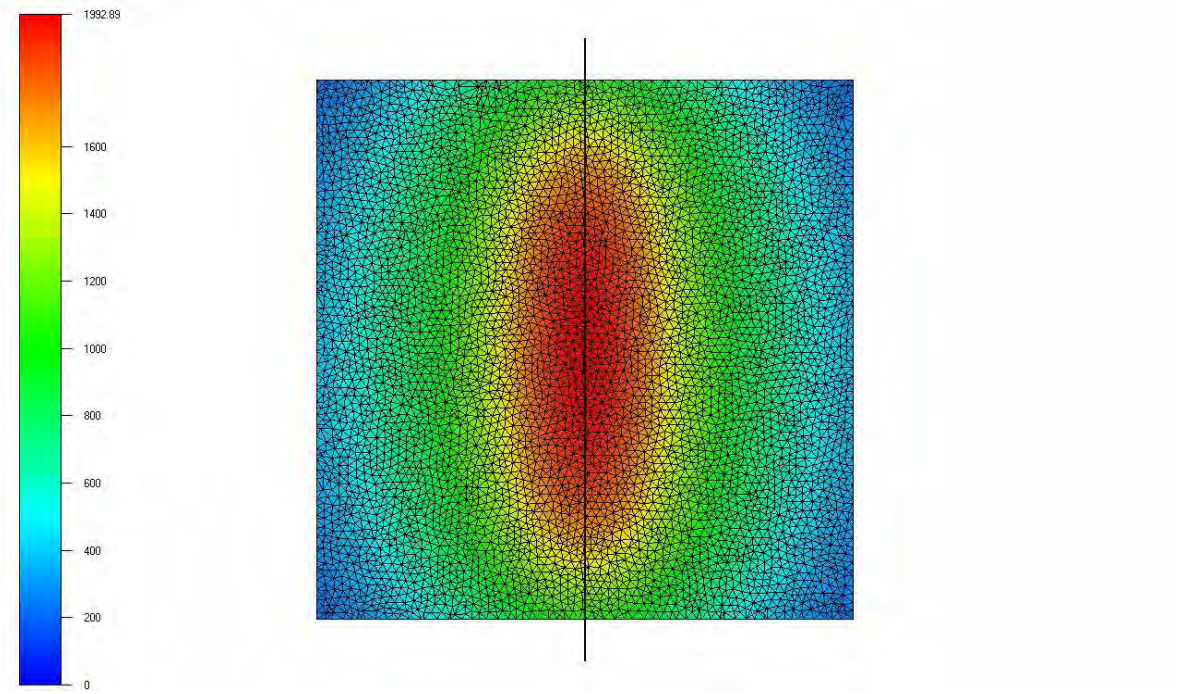


Figure 51 : Cartographie du facteur de forme entre une plaque et un tube calculée de manière analytique, selon la formulation de H. Leunberger et R.A. Person.

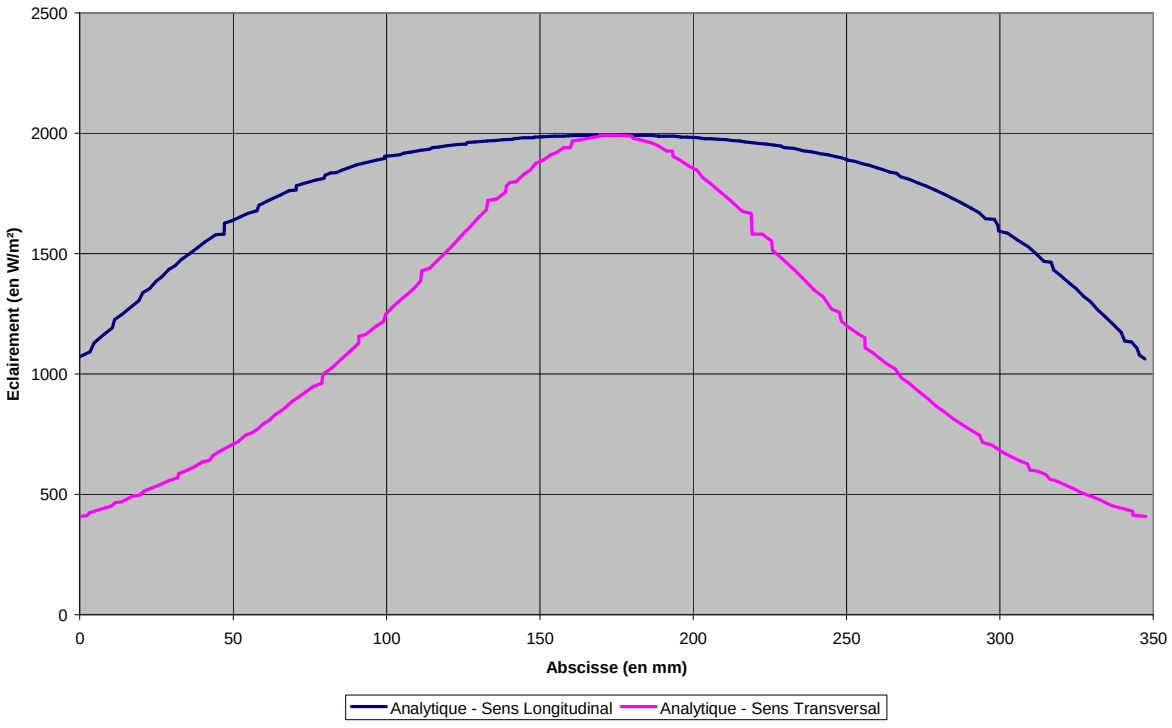


Figure 52 : Facteur de forme longitudinal et transversal d'une plaque calculé de manière analytique.

Les tracés selon des coupes longitudinales et transversales permettent d'obtenir une valeur maximale au centre de la plaque, ce qui est en accord avec la définition des facteurs de forme. De la même manière, la valeur aux bords dans le sens transversal sera moins importante que celle aux bords dans le sens longitudinal dans la mesure où cette dernière reste en vis-à-vis du tube émetteur sur toute la longueur de la coupe.

Ces deux profils théoriques permettent donc d'établir une base de comparaison avec le calcul des facteurs de forme pouvant être obtenu par approximation dans le cadre du lancer de rayons. En effet, cette méthode n'est pas faite pour calculer des cartes d'éclairement. Son but est surtout de pouvoir suivre le trajet réel des photons dans la matière. Néanmoins, en calculant le nombre de rayons arrivant à la surface d'un élément de plaque, il est possible d'en déduire un éclairement cumulé par rayon. Ainsi, plus le nombre de rayons envoyés par le tube sera important, et meilleur sera le calcul local de l'éclairement sur la plaque.

Le tube du cas étudié est composé de 13 216 triangles et 6 629 nœuds.

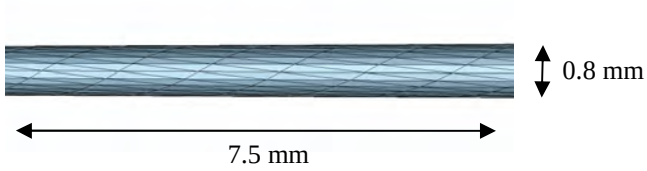


Figure 53 : Maillage du tube émetteur (représentation partielle).

3 discrétisations angulaires vont être testées.

Discrétisation en Pi/2 (Niv)	Nombre de rayons par triangle émetteur	Nombre total de rayons émis
5	49	647 584
10	224	2 960 384
20	961	12 700 576

Tableau 9 : Nombre de rayons envoyés en fonction de la discrétisation.

La discrétisation la plus faible donne des résultats très disparates avec d'importantes hétérogénéités locales liées au nombre peu important de rayons envoyés. Par contre, la discrétisation la plus importante permet d'obtenir une cartographie globalement et macroscopiquement homogène.

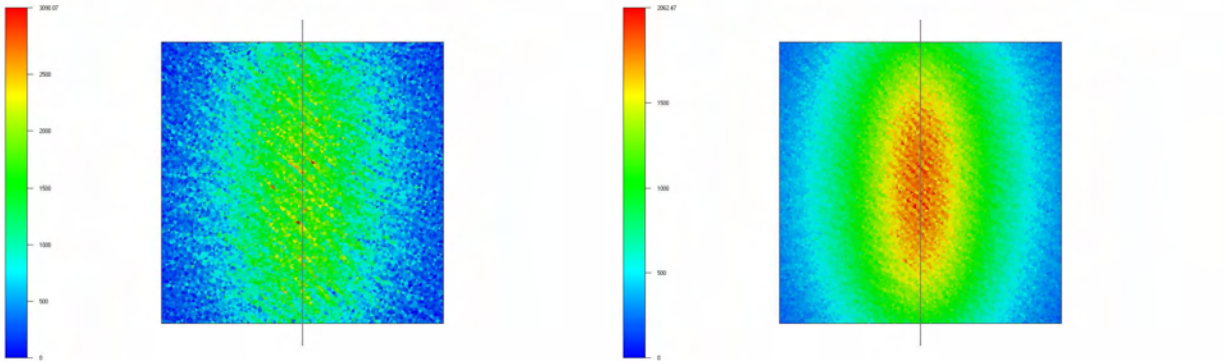


Figure 54 : Variation du facteur de forme entre tube et plaque avec une discrétisation de Niv=5 et Niv=20.

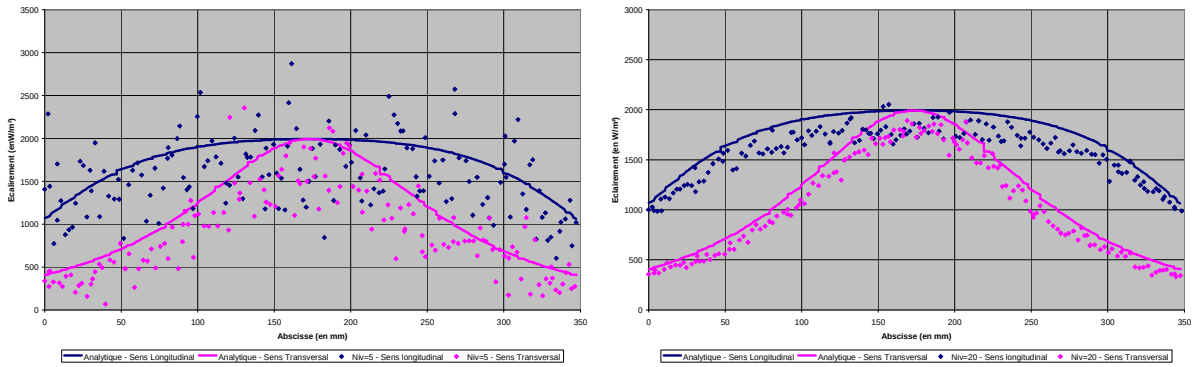


Figure 55 : Facteur de forme longitudinal et transversal avec une discrétisation de Niv=5 et Niv=20.

L'ensemble des résultats pour les 3 niveaux de discrétisation est donné dans les deux tableaux suivants.

Discrétisation en π/2 (niv)	**Nombre de rayons par triangle émetteur**	**Nombre total de rayons émis**	**Temps CPU**	**Erreur moyenne** $\frac{\sum_{i=1}^{nb\ points}\left(\lvert FF\ Analytique_i - FF\ Mesuré_i\rvert / FF\ Analytique_i\right)*100}{nb\ points}$	
				Longitudinale	**Transversale**
5	49	647 584	14min	21 %	28 %
10	224	2 960 384	1h 5min	12 %	16 %
20	961	12 700 576	4h 51min	10 %	14 %

Tableau 10 : Bilan sur le calcul des facteurs de forme en fonction de la discrétisation.

En plus d'améliorer la précision moyenne, l'augmentation de la discrétisation angulaire permet d'améliorer fortement l'écart type sur l'erreur. Cela se traduit sur la cartographie en éclairement par une forte baisse des hétérogénéités locales.

Discrétisation en Pi/2 (niv)	**Ecart type sur l'erreur** $\sqrt{\frac{nb\ points \sum_{i=1}^{nb\ points} Erreur^2 - \left(\sum_{i=1}^{nb\ points} Erreur\right)^2}{nb\ points(nb\ points-1)}}$	
	Longitudinal	**Transversal**
5	15 %	19 %
10	8 %	11 %
20	4 %	10 %

Tableau 11 : Ecart type sur l'erreur.

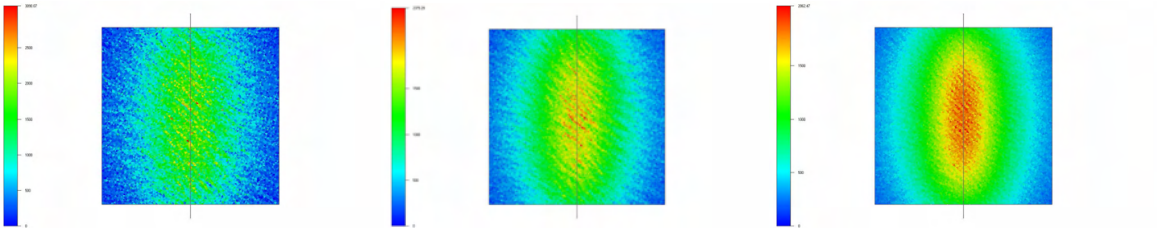


Figure 56 : Variation des cartographies d'éclairement en fonction du nombre de rayons émis.

En conclusion, il semble qu'une discrétisation minimale de *20 rayons* envoyés sur un angle de $\pi/2$ doit être utilisée pour une bonne estimation de l'éclairement sur la plaque. Il est à noter que dans le cas d'une préforme, cette discrétisation pourra être augmentée sans augmentation du temps de calcul. En effet dans ce cas, la boîte englobant la préforme étant de taille inférieure, le nombre de rayons interceptés puis testés sera plus faible…

1.2. Validation du calcul physique de l'interaction lampe / objet

La partie précédente a permis de définir une discrétisation minimale à partir de laquelle, le calcul mathématique des facteurs de forme pouvait être considéré comme acceptable. L'objectif de cette partie est d'insérer une notion physique en considérant désormais non plus un tube quelconque, mais un modèle du filament tungstène aussi bien au niveau géométrique qu'en terme de propriétés thermo-optiques. Pour ce faire, nous utilisons des données mesurées au sein de la société Philips. Elles ont été réalisées sur un banc XY avec une lampe 235V de 1000W et à 10 cm d'une plaque carrée de 400 mm de côté. La lampe est une lampe claire (sans réflecteur céramique). L'erreur sur la mesure expérimentale liée au fluxmètre est de +/- 3%.

Le filament de tungstène est modélisé par un cylindre considéré comme étant l'élément émetteur. Comme il a été vu dans le premier chapitre, le filament de tungstène est en fait constitué de deux spirales enchevêtrées. Il a été montré dans [MON-2001] qu'il est possible de calculer la surface émettrice de rayonnement cumulée pour les deux spirales et d'obtenir ainsi un diamètre équivalent pour le modèle égal à 1.5 fois le diamètre externe du filament soit in fine 2.15mm.

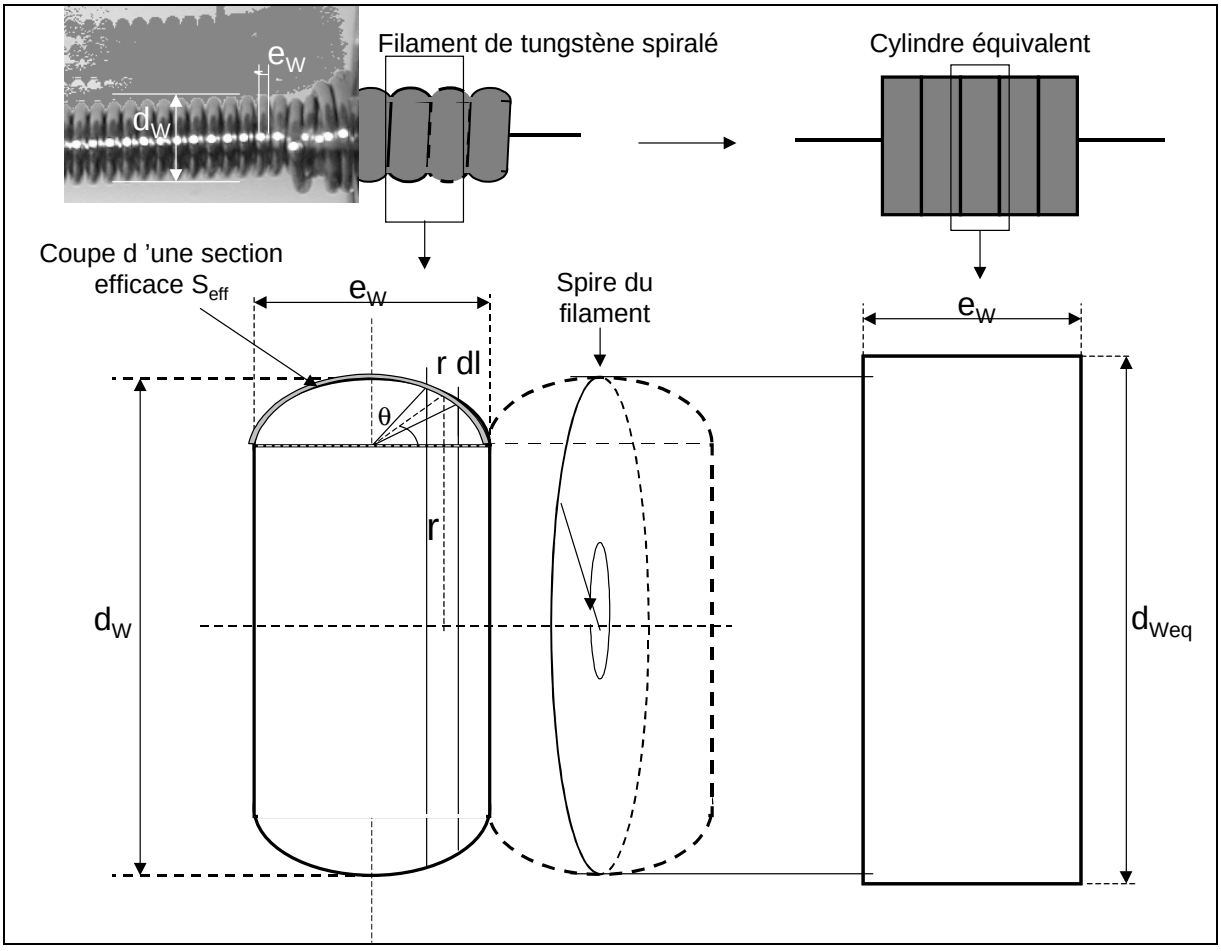


Figure 57 : Coupe d'une spire du filament de tungstène [MON-2001].

Le filament sera donc modélisé comme un tube de diamètre 2.15 mm et de 280 mm de longueur. Il est composé de 10 000 éléments triangulaires émetteurs.

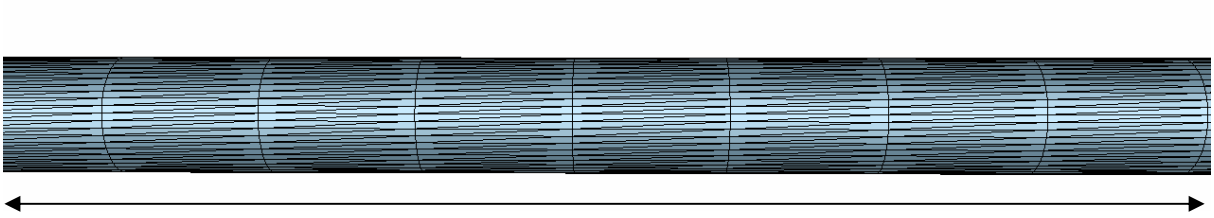


Figure 58 : Maillage du tube émetteur.

La plaque quant à elle est composée de 20 992 triangles surfacique soit environ 10 000 pour la face réceptrice du rayonnement.



Figure 59 : Maillage de la plaque réceptrice.

Comme pour le calcul précédent des facteurs de forme, l'homogénéité de l'éclairement augmente avec le nombre de rayons émis.

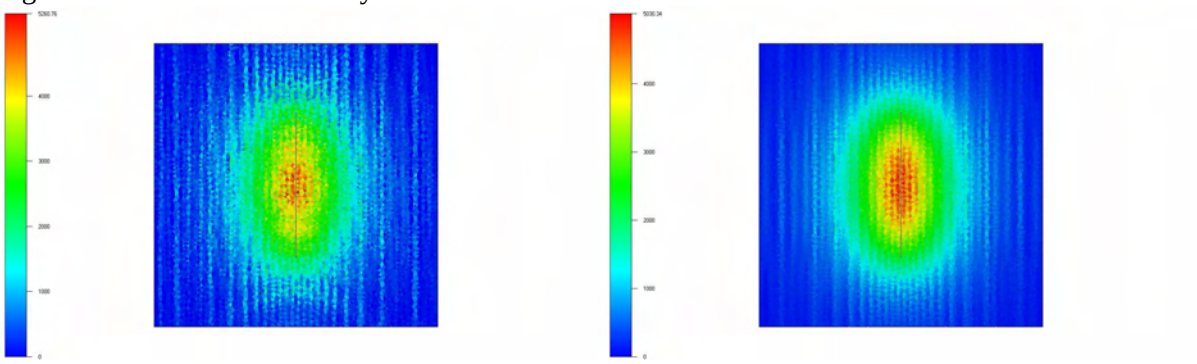


Figure 60 : Cartographie d'éclairement d'une plaque avec une discrétisation de Niv=5 et Niv=20.

La cartographie calculée fait apparaître des bandes d'erreur parallèles à la direction du filament. Ces écarts sont liés au maillage du filament en éléments linéaires.

L'erreur quant à elle est plus difficile à estimer. En effet, si l'incertitude sur la mesure réalisée de l'éclairement est d'environ 3%, le balayage de la plaque étant réalisé à l'aide d'une table XY, l'erreur commise n'est pas la même en tous points.

Une comparaison pour la discrétisation suivant Niv=5 avec le cas précédent (validation du facteur de forme) montre que la dispersion est bien plus faible. Cela est dû vraisemblablement à la qualité du maillage réalisé, où la discrétisation circonférentielle est maintenant bien plus importante qu'elle ne l'était auparavant, mais au détriment de la discrétisation longitudinale

.

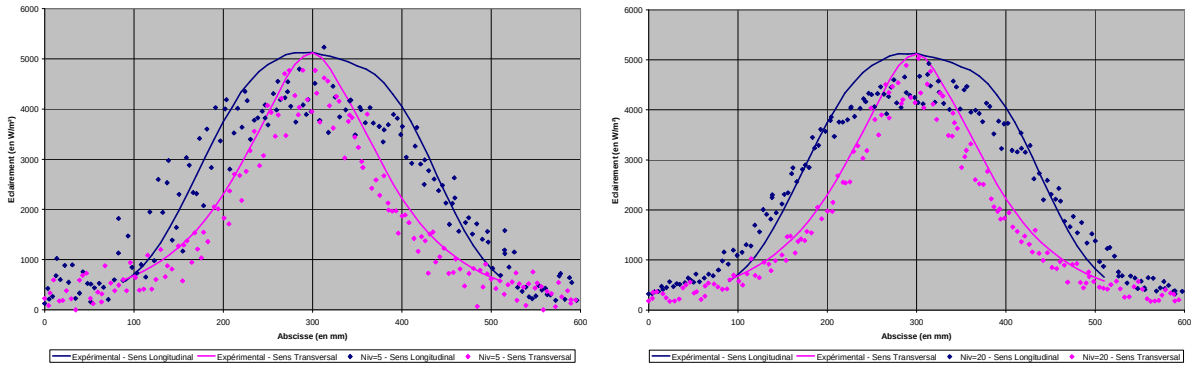


Figure 61 : Eclairement longitudinal et transversal avec une discrétisation de Niv=5 et Niv=20.

Cependant il apparaît que la différence entre la simulation et l'expérience est maximale au centre de la plaque et qu'elle est comprise entre 10% et 15%. L'ensemble des résultats pour les 3 niveaux de discrétisation est donné dans le tableau suivant.

Discrétisation en π/2 (niv)	**Nombre de rayons par triangle émetteur**	**Nombre total de rayons émis**	**Temps CPU**	**Erreur moyenne**	
				Longitudinal	**Transversal**
5	49	49 000	15min	21 %	19 %
10	224	224 000	1h 4min	19 %	17 %
20	961	961 000		16 %	15 %

Tableau 12 : Bilan sur l'éclairement d'une plaque en fonction de la discrétisation.

2. Simulation du chauffage de plaques en P.E.T.

La partie précédente a permis de calculer des cartographies en éclairement sur des cas simples et de réaliser une confrontation avec l'expérience. La méthode du lancer de rayons prend tout son intérêt si le rayonnement est considéré dans le volume car elle permet de suivre le trajet exact des photons émis par le tungstène.

S. Monteix [MON-2001] a effectué dans sa thèse des mesures de température sur des plaques en P.E.T. chauffées par un four infra rouge. Ces mesures ont été réalisées à l'aide d'une caméra infrarouge, comme le montre la figure suivante. Pour des problèmes de protection du matériel et d'aménagement de l'expérimentation, elles ne permettent pas de mesurer la température de la plaque sur la face en vis-à-vis des lampes au cours du chauffage.

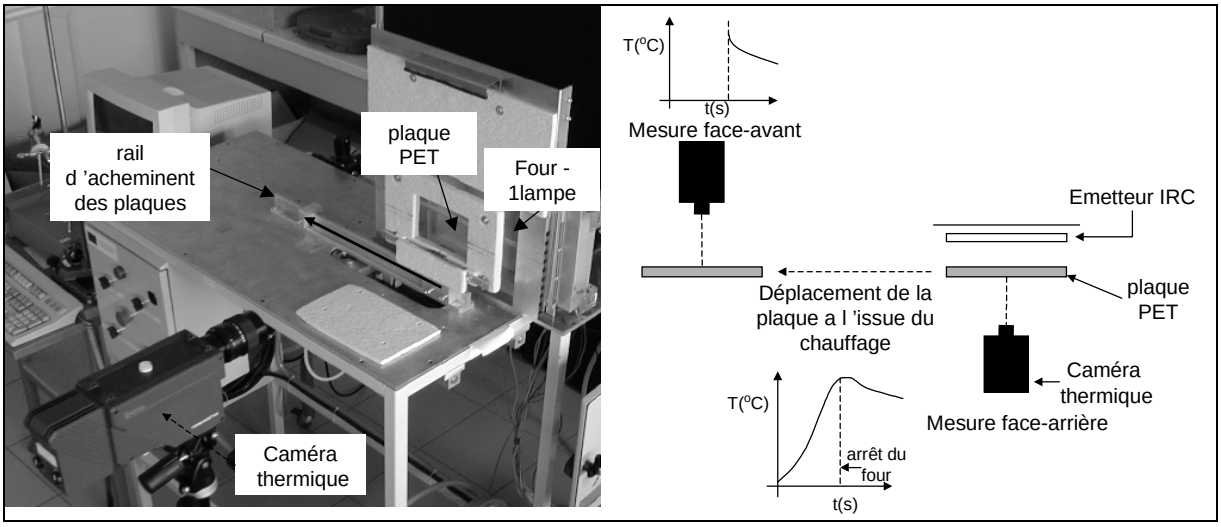
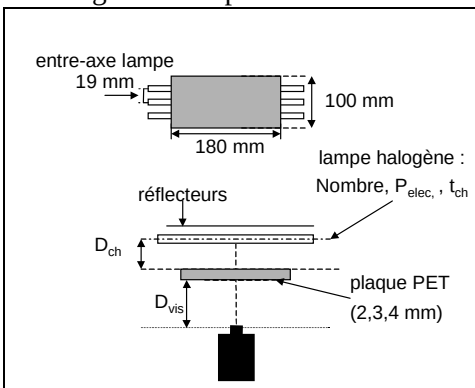


Figure 62 : Dispositif de mesure de la température sur les surfaces avant et arrière des plaques en P.E.T. [MON-2001].

La configuration expérimentale choisie est la suivante.



Paramètre	Valeurs
Nb_L	1-3
P_{elec} (W)	945 ±4
t_{ch} (s)	25-65
D_{ch} (mm)	40
D_{vis} (mm)	500

Figure 63 : Paramètres de contrôle et de mesure du chauffage des plaques en P.E.T. [MON-2001]

Dans notre validation, trois cas sont étudiés. Tous trois sont effectués sur une unique géométrie de plaque (180mm x 100mm x 3mm) située à 40mm des émetteurs

- Le premier cas concerne le chauffage avec une seule lampe claire (i.e. sans réflecteur céramique),
- Le deuxième est celui du chauffage avec une lampe munie d'un réflecteur céramique,
- Le troisième, celui du chauffage de la plaque dans un four doté de 3 lampes identiques au deuxième cas.

D'un point de vue numérique, le niveau de discrétisation est de 20 rayons envoyés par triangle émetteur sur un angle de $\pi/2$ correspondant au cas « optimal » défini précédemment.

Seule la convection sera prise en compte. Elle sera du type « régime naturelle » avec les coefficients d'échange du tableau suivant. Celui de la face avant sera légèrement supérieur en raison des mouvements de l'air en contact (la face arrière étant confinée).

	Face avant	**Face arrière**
Température de l'air	25 °C	25 °C
Coefficient de convection	12 W/m²/K	9 W/m²/K

Tableau 13 : Paramètres de convection.

2.1. Etude du chauffage d'une plaque par une lampe claire

Les valeurs expérimentales obtenues dans cette situation sont données ci-dessous.

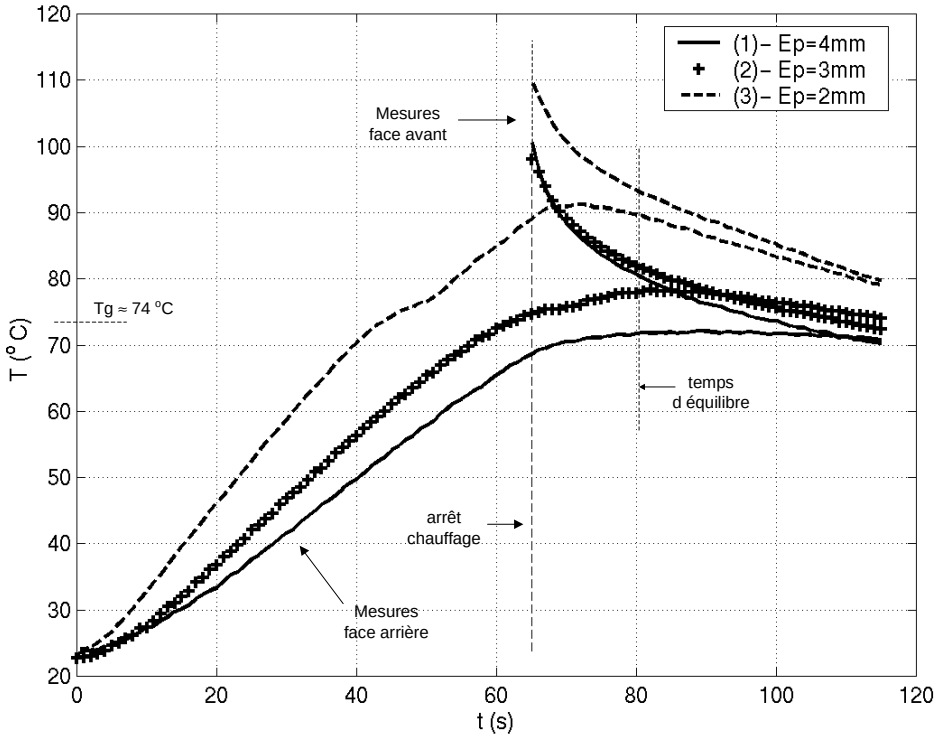


Figure 64 : Variation temporelle de la température des plaques en P.E.T. [MON-2001]

Ainsi, dans notre étude avec une plaque de 3mm d'épaisseur, la température au bout de 65s s'élève à environ 97°C en face avant, contre 75°C en face arrière.

Pour étalonner notre modèle, plusieurs simulations sont réalisées. Ainsi, dans un premier temps, notre étude utilise un coefficient d'absorption spectrale et la loi de Beer-Lambert est intégrée sur la longueur d'onde pour chaque rayon et pour chaque élément traversé. L'objectif au travers des calculs réalisés avec différents maillages, est de définir un nombre optimal d'éléments dans l'épaisseur du matériau. Ensuite, un autre calcul est réalisé avec absorption spectrale utilisant un coefficient d'absorption moyen calculé sur différentes bandes spectrales afin de quantifier les répercussions de ce paramètre sur la cartographie en température.

2.1.1. *Influence de la taille de maille dans l'épaisseur sur la température finale de la plaque*

Trois différentes tailles de maille ont été testées. Ces 3 cas correspondent à 3 plaques de taille identique mais possédant un nombre différent d'éléments dans l'épaisseur.

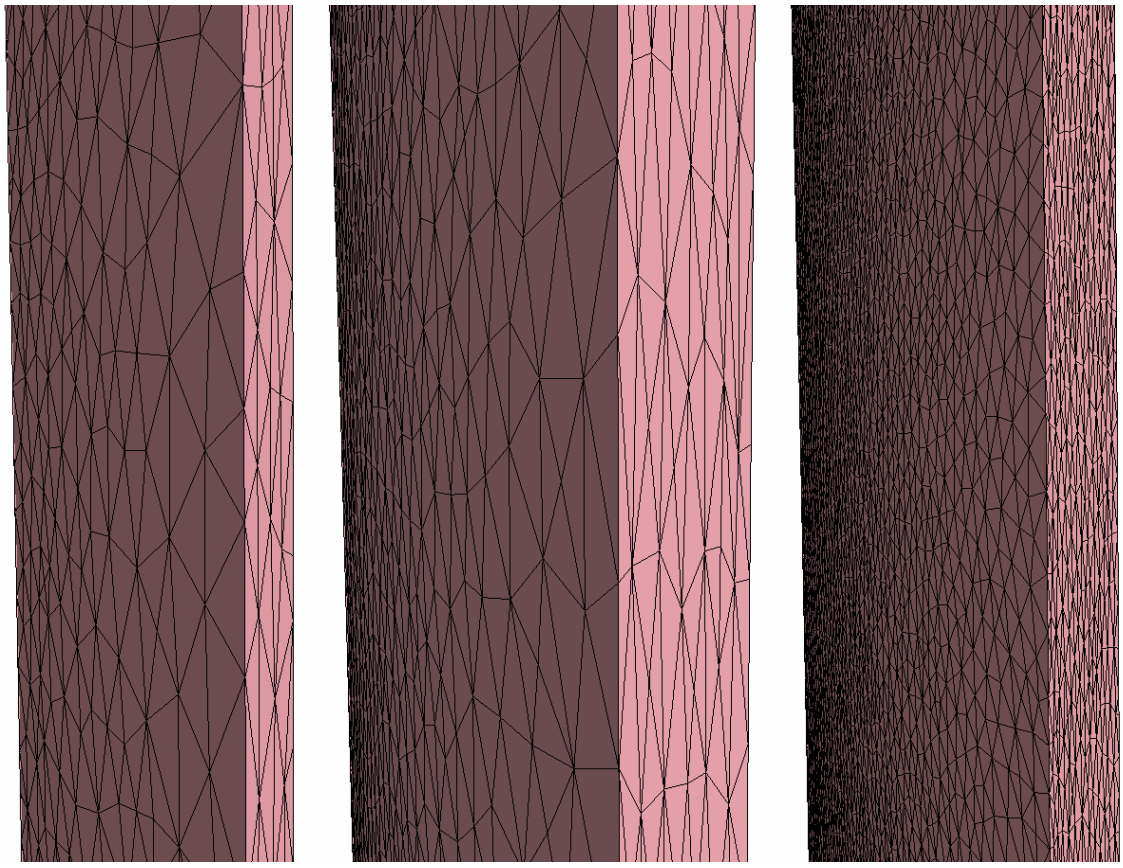


Figure 65 : Variation du maillage de la plaque en P.E.T. (environ 3, 6, 12 éléments dans l'épaisseur)

L'absorption est considérée comme spectrale et le niveau de discrétisation du lancer de rayons est de 20. Les paramètres thermo-physiques du P.E.T. sont ceux définis en conclusion du chapitre précédent.

	Nombre d'éléments dans l'épaisseur	Nombre total d'éléments
Plaque 1	~ 3	6 753
Plaque 2	~ 6	45 816
Plaque 3	~ 12	284 540

Tableau 14 : Description du maillage des 3 plaques utilisées.

La température obtenue dans les différentes configurations est tracée sur le graphique suivant.

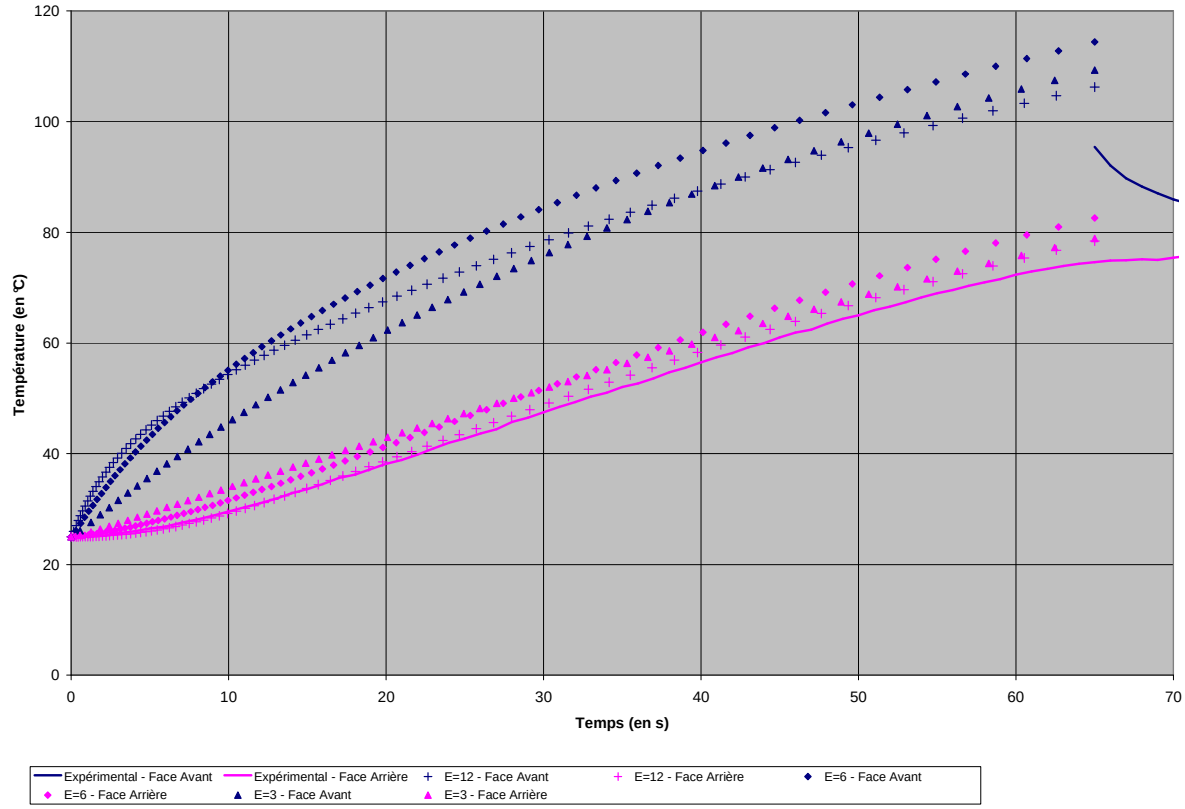


Figure 66 : Evolution de la température de la plaque de 3mm d'épaisseur au centre des faces avant et arrière en fonction du nombre d'éléments dans l'épaisseur.

Il apparaît de manière claire que le maillage le plus fin permet de se rapprocher avec plus de précision des courbes expérimentales en face arrière, mais également en face avant sur la mesure finale.

Concernant la température en face avant, les différences les plus notables sont tout d'abord sur la tangente à l'origine qui est beaucoup plus prononcée avec un maillage fin, et ensuite sur la pente de montée en température au cours du temps qui est plus élevée dans le cadre d'un maillage grossier que pour un maillage fin.

Pour la courbe en face arrière, il en va de même. Même si l'erreur augmente au cours du temps sur un maillage raffiné, il n'empêche que celui-ci représente de manière plus efficace la réalité physique du chauffage avec une pente à l'origine quasi nulle puis une montée en température constante. L'erreur finale commise en face arrière au centre de la plaque est d'environ 5%.

Concernant l'erreur sur la face avant, elle est plus difficile à estimer pour plusieurs raisons. D'un point de vue expérimental, la coupure du chauffage engendre une chute brutale de la température avec une asymptote verticale qui montre que le premier point de mesure obtenu pourrait aisément être plus important. De même, l'interface et le changement généré entre la caméra servant à prendre la mesure et les lampes, engendrent certainement une erreur sur le premier point enregistré sur la face avant. Néanmoins, une comparaison en fin de chauffage sur la face avant fait apparaître une différence d'environ 10°C, ce qui reste raisonnable.

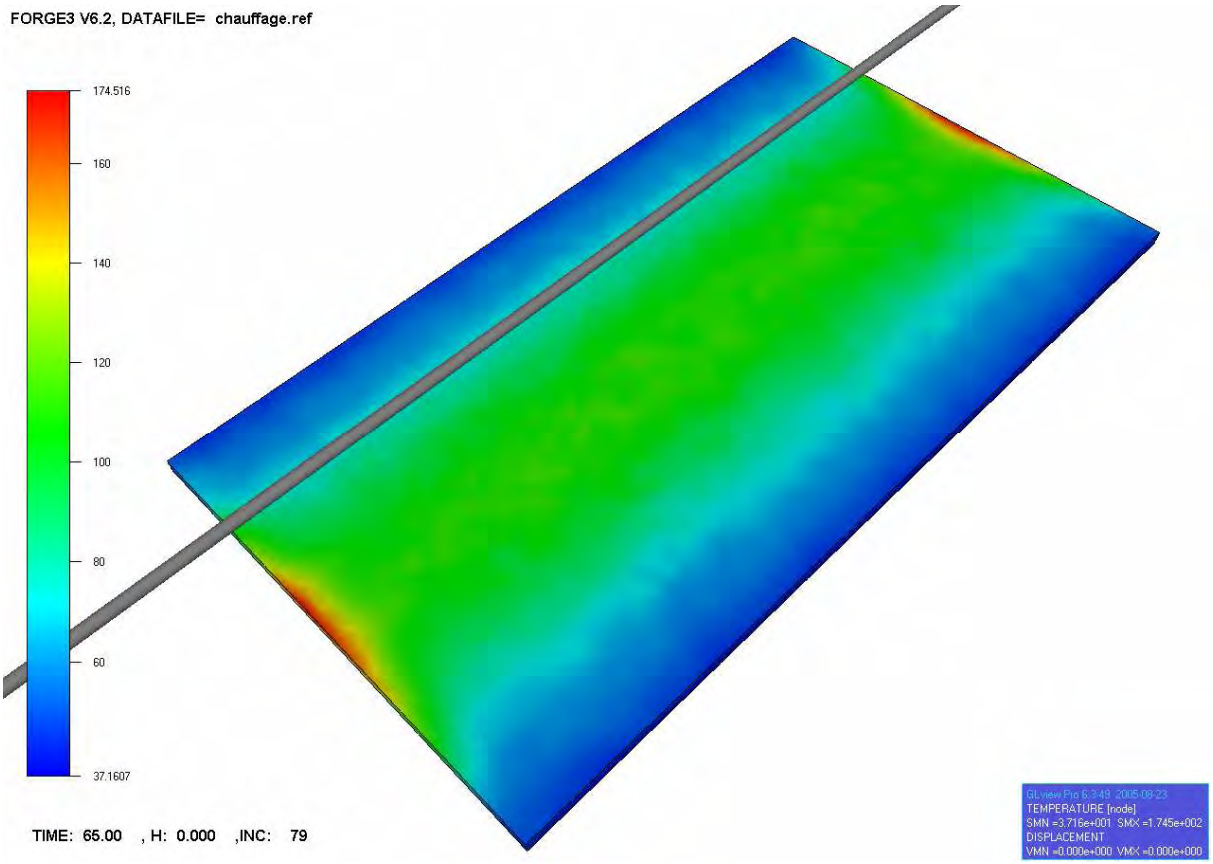


Figure 67 : Température en face avant au bout de 65s avec une absorption spectrale et 12 éléments dans l'épaisseur.

2.1.2. *Influence du coefficient d'absorption sur la température finale de la plaque*

Comme il a été vu au chapitre précédent, il est possible de déterminer un coefficient d'absorption moyen du matériau pour une bande spectrale considérée. Trois cas sont étudiés pour une température de lampe optimale, soit 2 400 K.

Bande spectrale (en µm)	**Coefficient d'absorption moyen (en m^{-1})**	**Profondeur de pénétration équivalente (en mm)**
[0.25 – 27.027]	2 554	0,4
[0.25 – 5]	1 027	1
[0.8 – 2]	95	10,5

Tableau 15 : Variation du coefficient d'absorption moyen en fonction de la bande spectrale considérée.

La plaque dans le cadre de cette étude est celle définie précédemment possédant 12 éléments dans l'épaisseur.

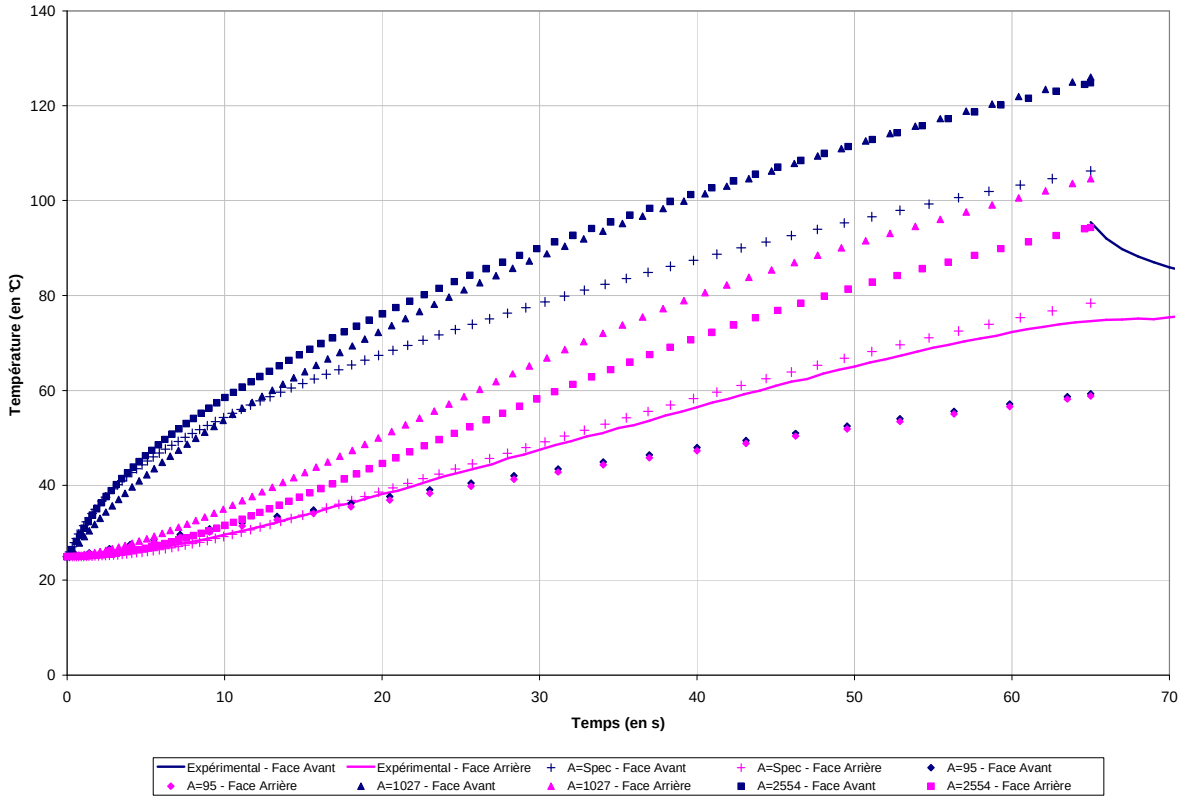


Figure 68 : Evolution de la température de la plaque au centre des faces avant et arrière en fonction du nombre d'éléments dans l'épaisseur.

Les températures obtenues pour les différents coefficients d'absorption peuvent être interprétées à l'aide des profondeurs de pénétration équivalente (voir tableau précédent). Ainsi, la plaque chauffée avec un coefficient d'absorption élevé (2 554 m^{-1}) va avoir une température de surface

extrêmement élevée, la majeure partie de l'énergie étant absorbée par la face supérieure (0.4 mm) et un gradient transversal important puisque l'on peut supposer que la face inférieure va être principalement chauffée par conduction.

Ainsi, pour la plaque chauffée avec un coefficient d'absorption de 1 027 m^{-1}, l'écart entre la face avant et la face arrière diminue fortement car dans cette configuration, une partie de l'énergie des photons est absorbée sur le tiers de l'épaisseur de la plaque (1 mm).

Enfin, pour un coefficient d'absorption faible (95 m^{-1} soit 10.5mm de profondeur de pénétration) le rayonnement va traverser la plaque en étant très peu absorbé en dépit de la distance parcourue dans l'épaisseur ce qui va engendrer un faible gradient thermique (1 à 2°C) et une température de plaque très inférieure à la réalité.

Coefficient d'absorption	**Température (en °C)**		**Erreur générée**	
	Face Avant	**Face Arrière**	**Face Avant**	**Face Arrière**
2 554 m^{-1}	125	94	31 %	27 %
1 027 m^{-1}	126	105	32 %	40 %
95 m^{-1}	59	59	38 %	21 %
Spectral	106	78	11 %	5 %

Tableau 16 : Température à t = 65s en face avant et arrière d'une plaque en fonction de l'absorption.

Il apparaît donc que seule la prise en compte complète du spectre d'absorption permet de saisir avec précision les différences d'absorption par la matière dans la profondeur du matériau au cours du déplacement des photons. Cela permet l'obtention d'un gradient thermique transversal représentatif ce dont ne rend pas compte le recours à un coefficient d'absorption moyen. L'hypothèse de corps gris semble donc difficilement exploitable dans le cadre du chauffage de P.E.T.

Cependant, le fait de considérer le côté spectral uniquement à travers l'absorption du P.E.T. en ayant recours à une émission moyenne engendre un terme de divergence du flux radiatif exclusivement surfacique. Dans ce cas en effet, la température seule n'est pas suffisante pour valider le calcul de l'absorption. Ainsi, les résultats obtenus montrent que la divergence du flux radiatif calculée par intégration spectrale, engendre une absorption exclusivement surfacique. La face inférieure est alors, comme dans les cas précédents avec des coefficients moyens, chauffée par conduction.

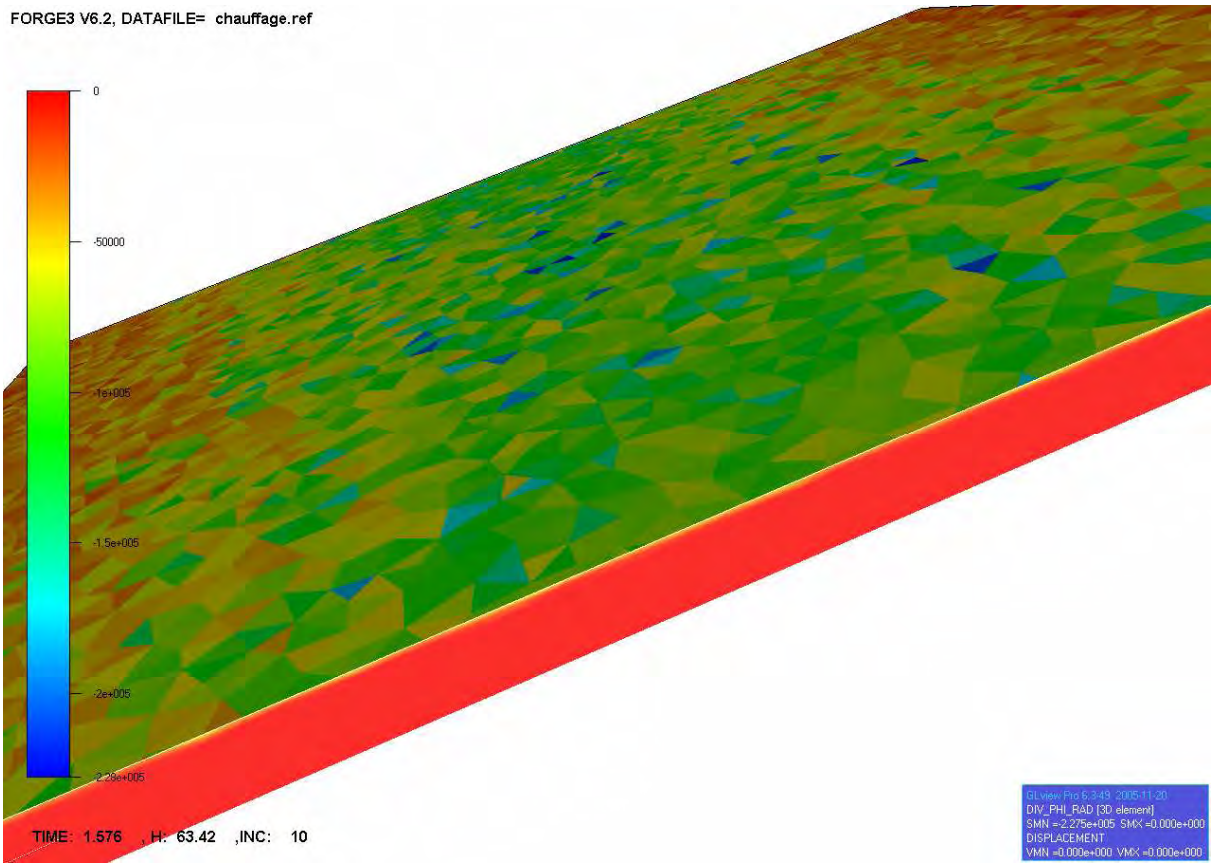


Figure 69 : Divergence du flux radiatif visualisée à l'aide d'une coupe transversale médiane de la plaque.

Dans cette configuration de chauffage sans réflecteurs avant ou arrière, il apparait que le calcul de la température à l'aide d'une divergence de flux radiatif spectrale soit satisfaisant grâce à la conduction qui se soustrait à une partie radiative en face inférieure.

Néanmoins, cette hypothèse ne sera plus valable avec utilisation d'un réflecteur arrière. En effet, il est avéré [MON-2001] que le P.E.T., dans un matériau de 3 mm d'épaisseur avec ce genre de lampe, n'absorbe pas tout le rayonnement et donc qu'une partie non négligeable est transmise.

2.1.3. *Simulation de l'équilibre thermique lors du refroidissement*

Lors du refroidissement de la plaque, les essais expérimentaux montrent une annulation du gradient thermique transversal au cours du temps autrement appelé « temps d'inversion ». En effet, en fin de chauffage la face avant exposée directement au rayonnement est plus chaude que la face arrière d'environ 20°C. La convection et la conduction génèrent un refroidissement avec une diffusion de l'énergie thermique emmagasinée à travers l'épaisseur.

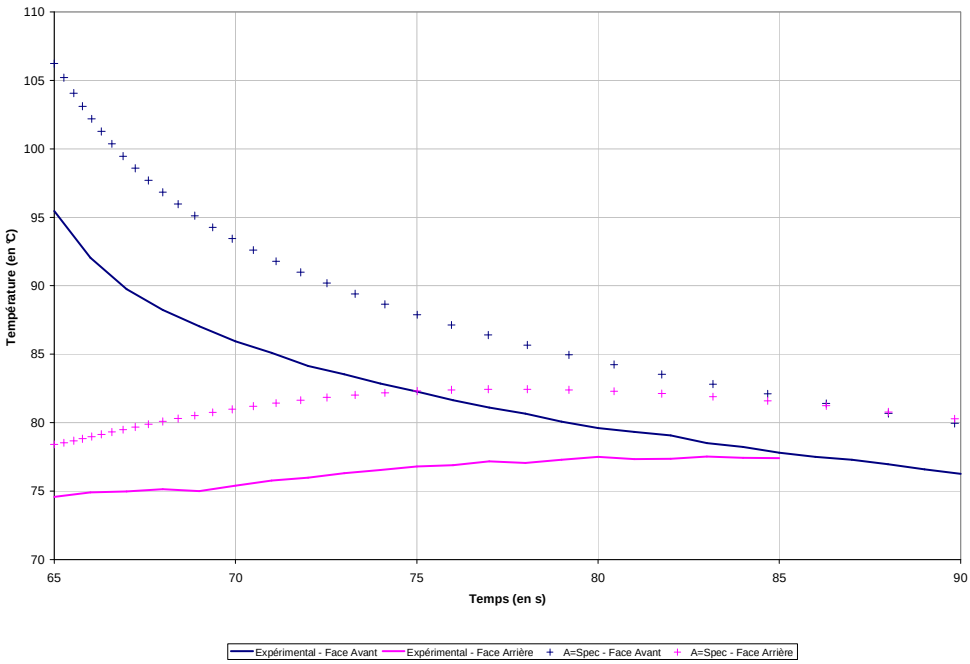


Figure 70 : Evolution de la température au cours du refroidissement.

Les tendances observées lors de la simulation du refroidissement à l'air libre de la plaque sont en parfaite adéquation avec les mesures expérimentales à l'erreur initiale près en fin de chauffage. Le temps nécessaire à l'homogénéisation de la température est parfaitement obtenu par la simulation et cette dernière a une erreur relative vis-à-vis de l'expérience de l'ordre de 5%.

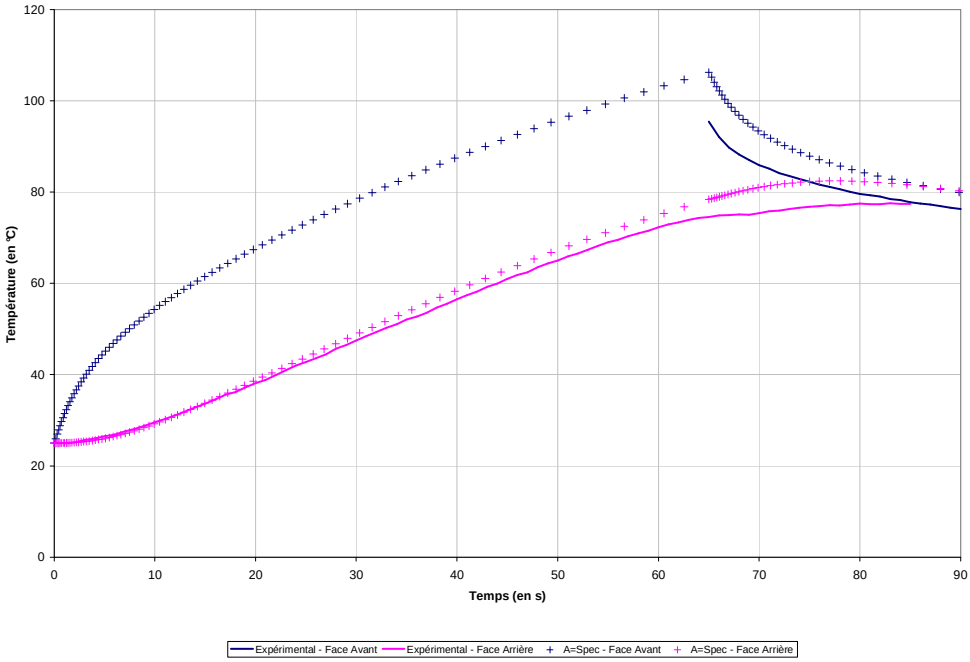


Figure 71 : Evolution de la température au cours du chauffage et du refroidissement.

2.2. Etude du chauffage d'une plaque par une lampe avec réflecteur céramique

Le réflecteur céramique a pour objectif d'optimiser le chauffage radiatif en réorientant une partie du rayonnement émis du côté opposé de la plaque par rapport au filament. Il est modélisé par un demi-cylindre englobant le filament de tungstène.



Figure 72 : Maillage du réflecteur céramique appliqué sur la lampe.

La réflexion est de type diffus dans la réalité, de par la nature et la rugosité du dépôt de céramique. Dans notre étude, et afin de limiter les temps de calcul, elle sera de type spéculaire et le flux réémis après réflexion sera pondéré par un coefficient permettant de prendre en compte la diffusion thermique, et l'absorption de la céramique.

D'un point de vue numérique, la variation de température entre le chauffage par une lampe claire et celui réalisé avec une lampe industrielle est significative. En effet, toute la partie du rayonnement émise en direction du réflecteur va se trouver réorientée vers la plaque de par sa géométrie hémi cylindrique. Ainsi, sans coefficient pondérateur du flux réémis, l'éclairement sur la plaque serait quasiment doublé, ce qui engendrerait une forte hausse de la température de la plaque, non justifiée car ne prenant pas en compte l'absorption spectrale de la céramique.

S. Monteix caractérise le coefficient d'efficacité directionnelle des réflecteurs diffus et obtient une valeur moyenne de l'ordre de 1.35.

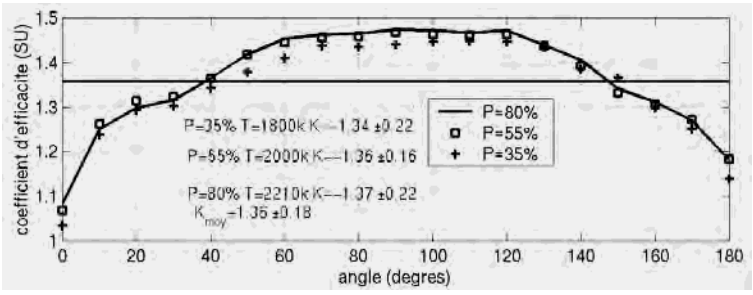


Figure 73 : Coefficient d'efficacité directionnelle des réflecteurs diffus [MON-2001].

Dans le cadre d'une réflexion spéculaire, ce coefficient doit être recalculé. En effet le côté spéculaire de la réflexion jumelé à la géométrie du réflecteur va focaliser le rayonnement en direction de la plaque engendrant ainsi une hausse de l'éclairement non justifiée. Pour notre étude, l'effet du réflecteur ne doit pas augmenter l'erreur créée par le modèle radiatif de l'interaction entre la lampe et la plaque étudiée précédemment. Le coefficient de pondération sera donc considéré comme constant et égal à 0.1.

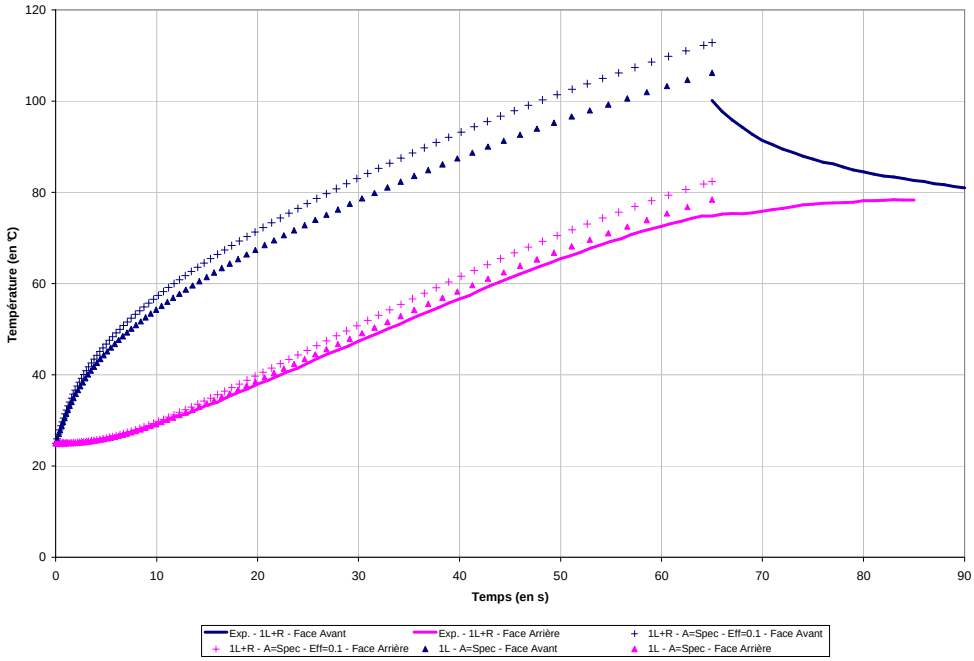


Figure 74 : Evolution de la température au cours du chauffage par une lampe industrielle.

L'erreur ainsi créée au bout de 65 secondes de chauffage est de 12.6% en face avant et de 10.2% en face arrière.

Il est important de noter que, contrairement à l'expérience, la simulation du chauffage de la plaque par une lampe industrielle engendre une légère augmentation de la face arrière par rapport à la simulation avec une lampe claire, fait non avéré dans les mesures réalisées par S. Monteix. Cela signifie qu'une étude plus approfondie sur l'absorption spectrale de la céramique pourrait mettre en évidence les différences spectrales entre le flux émis par le filament de tungstène et celui qui est réorienté par le réflecteur en céramique. En effet, la différence entre le chauffage par une lampe industrielle et celui par une lampe claire montre que le réflecteur réémet majoritairement les longueurs d'onde plus élevées engendrant ainsi cette différence finale sur la plaque.

2.3. Etude du chauffage d'une plaque par un four complexe

Le dernier cas de validation concerne le chauffage d'une plaque par 3 lampes industrielles. La simulation diffère de l'expérience par l'absence du réflecteur avant en aluminium. La plaque est chauffée durant 15 secondes avant d'être refroidie à l'air libre par convection naturelle.

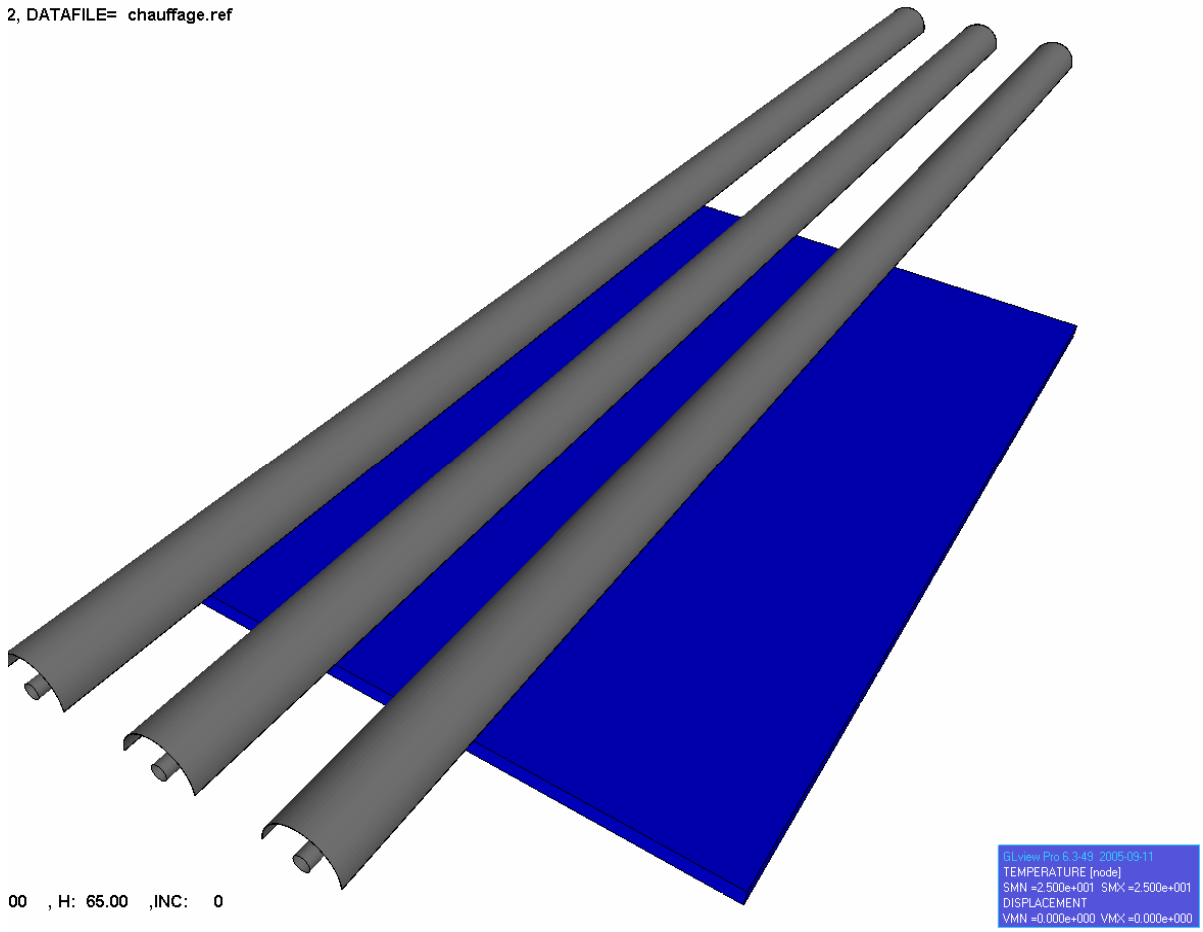


Figure 75 : Chauffage d'une plaque dans un four constitué de 3 lampes industrielles.

D'un point de vue expérimental, la présence de deux lampes supplémentaires permet de réduire fortement le temps de chauffage même si ces dernières ne sont pas situées au centre de la plaque mais décalée de part et d'autre. Ainsi, il fallait 65 secondes pour chauffer la plaque avec une lampe industrielle à plus de 100°C alors qu'il ne faut que 15 secondes pour la chauffer à plus de 120°C avec trois lampes.

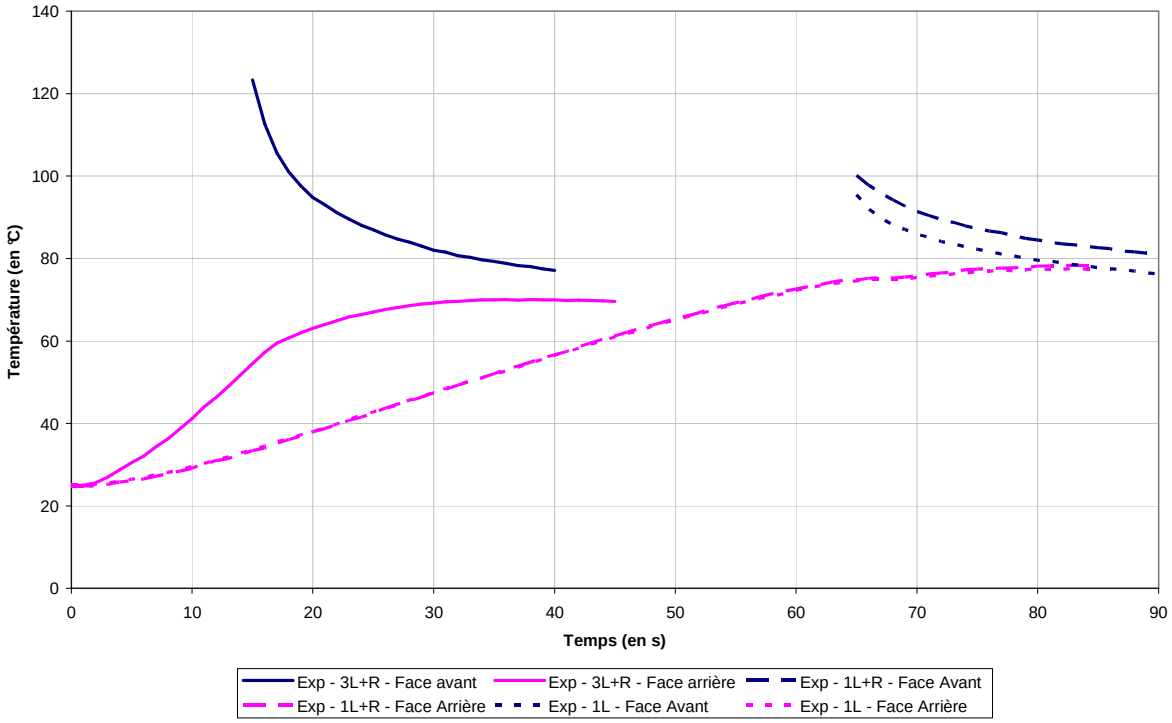


Figure 76 : Mesures expérimentales d'une plaque chauffée dans un four constitué de 1 ou 3 lampes de type claires ou industrielles (i.e. avec réflecteur).

Ceci met en évidence le fait que la plaque chauffe non seulement grâce à la présence des lampes supplémentaires, mais également par conduction. En effet, les deux lampes latérales vont permettre d'homogénéiser dans le sens transversal la température de la plaque et ainsi de limiter le fort gradient thermique présent avec une seule lampe, source de refroidissement.

De plus, le réflecteur avant en aluminium joue ici un rôle prépondérant. En effet, en réémettant le flux transmis par la plaque vers sa face arrière, celui-ci peut être considéré comme une nouvelle source de rayonnement pour la plaque. Il va ainsi permettre de réduire les écarts de température entre les deux faces.

D'un point de vue numérique, le résultat confirme la tendance obtenue avec une seule lampe à savoir la surestimation de 17% de la température en face avant engendrée pour un temps de chauffe donné.

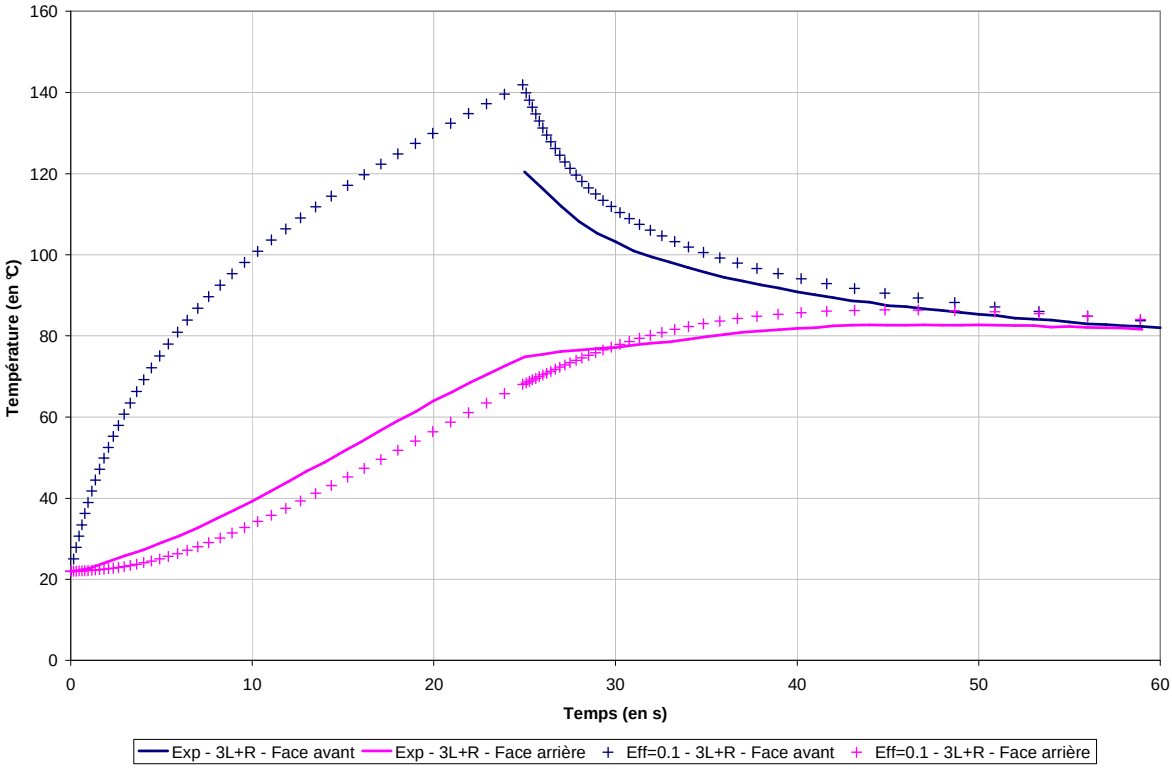


Figure 77 : Comparaison expérimentale et numérique du point central d'une plaque chauffée dans un four constitué de 3 lampes industrielles.

Par contre en face arrière, la multiplicité des sources engendre une sous estimation de la température de 9% pour deux raisons :

- Notre modèle d'absorption spectrale transmettant peu le rayonnement, la carence en énergie en face arrière est multipliée par le nombre des lampes
- L'absence de réflecteur arrière dans la simulation supprime la réémission du rayonnement transmis par la plaque en direction de sa face arrière.

Il est important de noter que l'inertie de l'allumage des lampes est également la cause d'une erreur entre l'expérience et la simulation. En effet, lors de l'allumage du four, les lampes n'arrivent à leur puissance nominale qu'au bout de 2 ou 3 secondes alors que dans la simulation ce temps de latence n'existe pas.

3. Simulation du chauffage de préformes en P.E.T.

Contrairement au thermoformage où les plaques chauffées sont des géométries simples parallélépipédiques [AND-2005], les préformes utilisées dans le soufflage des bouteilles en P.E.T. ont des géométries cylindriques. De plus, pour l'injection soufflage, la matière chauffée est en mouvement continu à l'intérieur même du four, ce qui engendre un changement de position indispensable à l'homogénéisation de la température, mais surtout nécessite la prise en considération du déplacement dans le modèle numérique. Les algorithmes nécessaires à la simulation du chauffage doivent donc être généralistes et pouvoir s'adapter à des formes quelconques ayant des mouvements prédéfinis, comme il a été vu au chapitre précédent.

Afin de valider les développements réalisés, différentes études sont menées dans cette partie. Le premier cas étudié est celui du chauffage d'une préforme statique dans un four. Le but de ce travail est d'évaluer en statique, le modèle numérique de lancer de rayons dans le cadre d'une géométrie complexe.

Le deuxième cas étudié est semblable au précédent avec l'introduction du déplacement de la préforme au sein d'un module de four.

Enfin, un cas original de calculs mettant en évidence l'intérêt de la simulation numérique dans le chauffage des préformes est présenté.

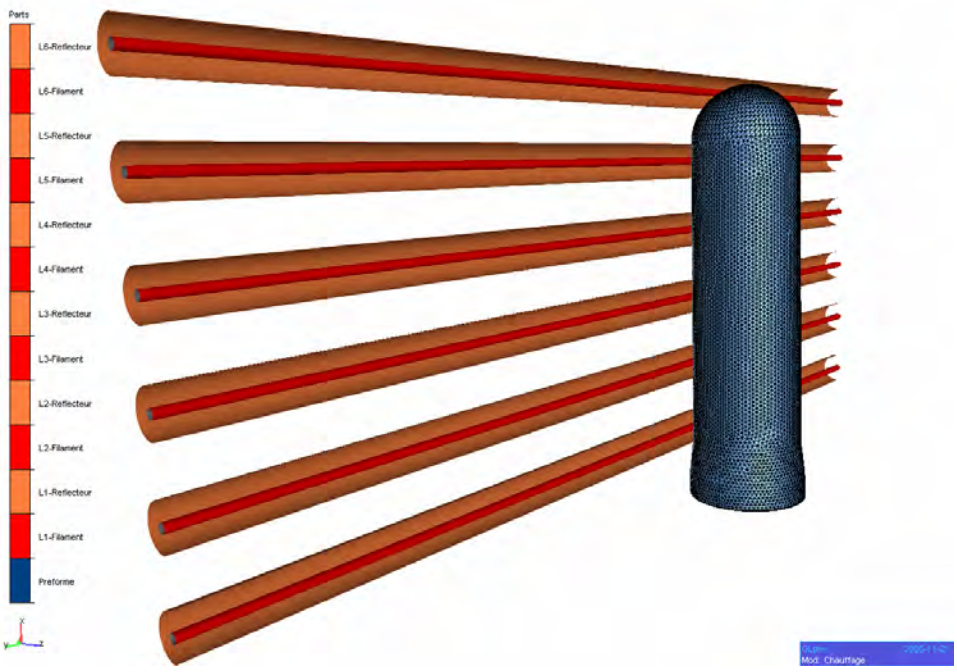


Figure 78 : Configuration du chauffage d'une préforme dans un module de four industriel composé de 6 lampes.

3.1. Etude du chauffage d'une préforme statique dans un four

Ce cas a été traité dans le cadre du chauffage devant un module de four composé de 6 lampes industrielles 1000W dont seuls le filament et le réflecteur céramique arrière ont été modélisés. La préforme se situe au centre du module à une distance de 20 mm entre l'axe du filament de tungstène et la surface extérieure de la préforme.

Nbre de lampes	Tps de chauffage	Distance de chauffage	Réflecteurs	Convection	Maillage lampes	Nbre de rayons
6	15 s	20 mm	Céramique Arrière	Nulle	Circonf. Hauteur Epaisseur 96 108 10	961 / triangle

Tableau 17 : Paramètres imposés pour la simulation du chauffage d'une préforme statique dans le four.

Afin d'optimiser la précision du calcul, le maillage de la préforme est anisotrope de manière à définir un nombre d'éléments dans l'épaisseur important : 10 éléments pour 3 mm contre 108 pour 100 mm dans la hauteur.

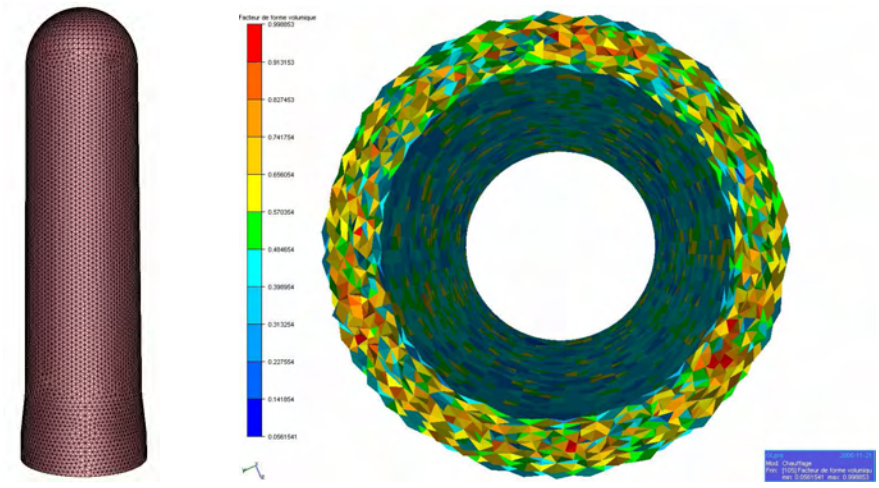


Figure 79 : Maillage extérieur d'une préforme et facteur de forme volumique des éléments sur une coupe transversale (=Constante de normalisation * Volume de l'élément / longueur moyenne des arêtes ^{3})

Les résultats obtenus peuvent être analysés sous différentes approches : nombre et localisation des rayons reçus, homogénéité de l'éclairement sur la préforme, qualité de l'absorption à travers la divergence du flux radiatif et enfin, cartographie en température.

L'accès à des mécanismes fins d'interaction entre le rayonnement et la matière (absorption, diffusion, …) est *rendu ainsi possible grâce au couplage du lancer de rayon et des éléments finis*.

En considérant l'origine de la circonférence au point central en vis-à-vis des lampes, les 3 valeurs tracées précédemment sont donc maximales à l'origine ainsi qu'au point final (confondu avec l'origine). Comme il était prévisible, les données enregistrées sur la face opposée de la préforme sont quasi nulles, excepté pour le nombre de rayons, provenant des extrémités latérales des lampes.

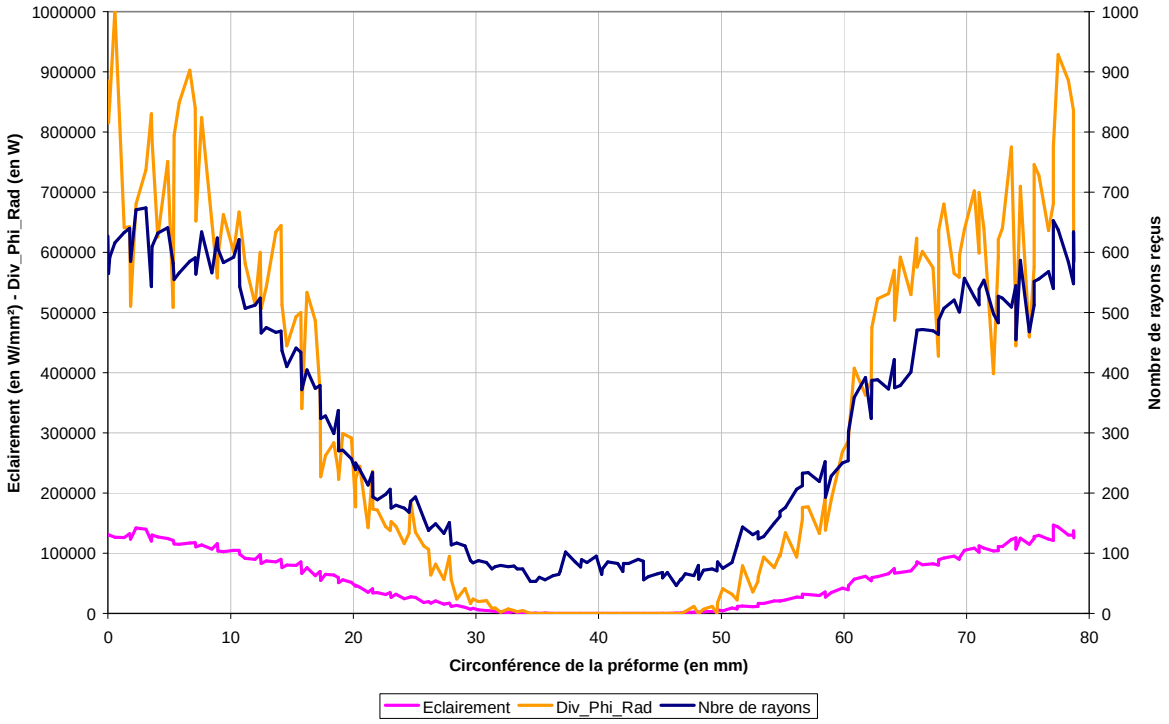


Figure 80 : Evolution à mi-hauteur de la préforme du nombre de rayons reçus, de l'éclairement et de la divergence du flux radiatif en fonction de la circonférence.

Il est important de remarquer l'hétérogénéité qui apparaît pour chacune des iso-valeurs. En effet, afin de limiter le temps des calculs, la discrétisation angulaire pour le lancer de rayon a été de 20 en $\pi/2$ soit 961 rayons envoyés par triangle émetteurs de lampe. Pour réduire cet effet, il serait nécessaire de paralléliser les calculs de manière à pouvoir augmenter le seuil de cette discrétisation.

Ces fluctuations ponctuelles ont une répercussion sur les thermogrammes obtenus, mais les écarts apparaissant en terme de température vont être liés au modèle d'absorption spectral. En effet, dans la mesure où l'ensemble du rayonnement émis est absorbé sur une très faible épaisseur la conduction n'est pas assez efficace pour lisser la température surfacique comme le montre la figure suivante.

Les préformes étudiées ayant une épaisseur moyenne de 3 mm, un coefficient moyen d'absorption permettant d'absorber l'ensemble du rayonnement émis serait de 300 m^{-1}. La figure suivante montre ainsi qu'avec cette valeur, le rayonnement absorbé dans l'épaisseur tend à homogénéiser la température surfacique de manière significative.

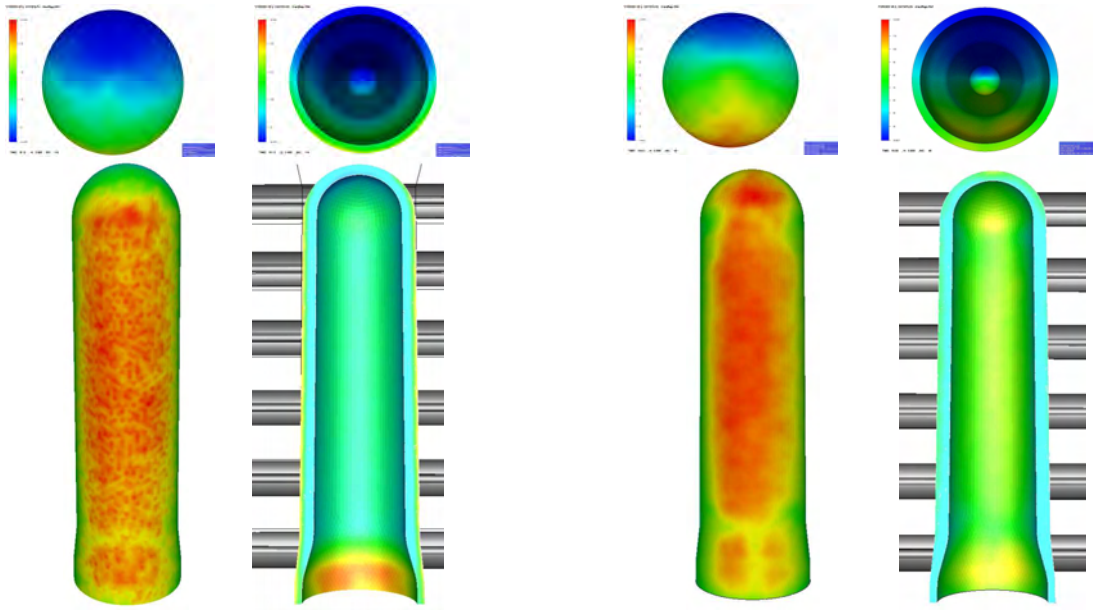


Figure 81 : Thermogramme du chauffage de préforme statique dans le module de four à gauche avec une absorption spectrale et à droite avec une absorption moyenne de 300 m^{-1}.

Dans sa validation, S. Monteix mesure de manière expérimentale les températures en face interne de sa préforme côté lampes et en face externe côté opposé, dans l'axe médian des lampes [MON-2001]. Ces mesures permettent de valider d'une part l'absorption réalisée par le P.E.T. lorsque la première épaisseur est traversée par le rayonnement, mais également la quantité d'énergie transmise et absorbée par la deuxième épaisseur.

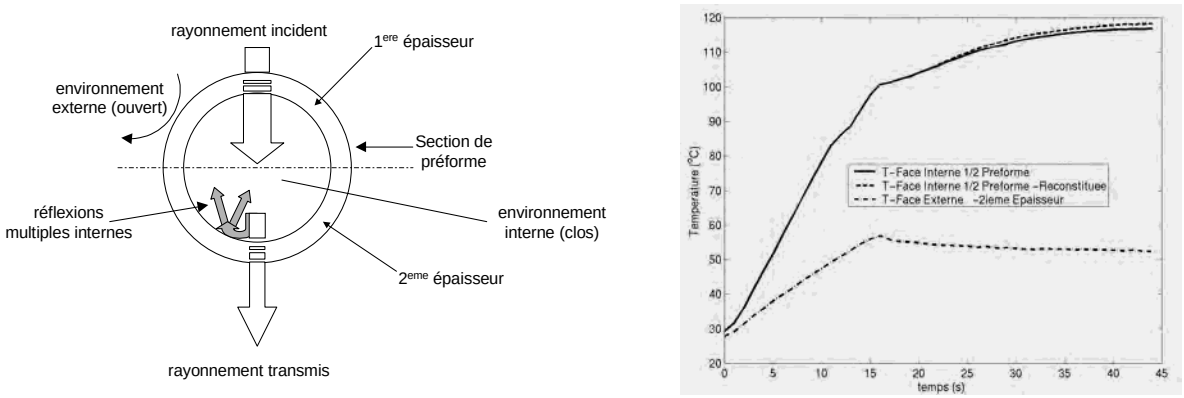


Figure 82 : Suivi temporel des températures sur les surfaces internes et externes des préformes immobiles devant les lampes [MON-2001].

Dans nos travaux, la transmission après la traversée de la première épaisseur n'a pas été étudiée. Le parcours des rayons suivis s'arrête donc après la sortie de leur trajectoire par un élément surfacique, qu'il soit en face interne ou en face externe. Il est important de souligner que ce développement n'est pas fastidieux à mettre en œuvre, que son effet n'a pas été négligé, mais qu'il a été choisi de borner les développements à ce stade pour ne pas complexifier les validations nécessaires.

La validation s'effectue donc à partir de la température en face interne sur la première partie de la préforme. Ainsi, différentes évolutions sont obtenues en fonction de l'approche utilisée pour définir le coefficient d'absorption.

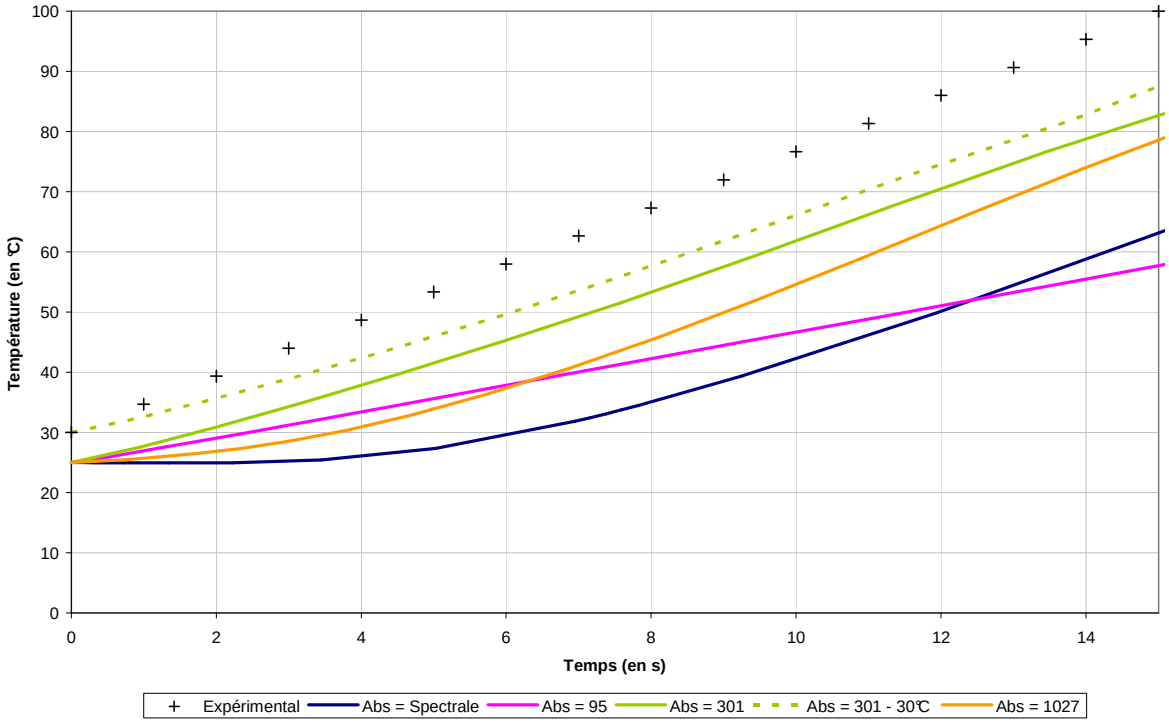


Figure 83 : Evolution de la température à mi-hauteur de la préforme en face interne côté lampes.

L'approche spectrale et celle avec un coefficient d'absorption moyen élevé (1027 m^{-1}) génère une absorption complète du terme source en surface de la préforme, ce qui entraîne une température de surface externe très élevée dès les premiers instants du chauffage. Au contraire, la température en surface interne va être caractérisée par une première partie asymptotique horizontale ou retard, liée à la conduction propre du matériau.

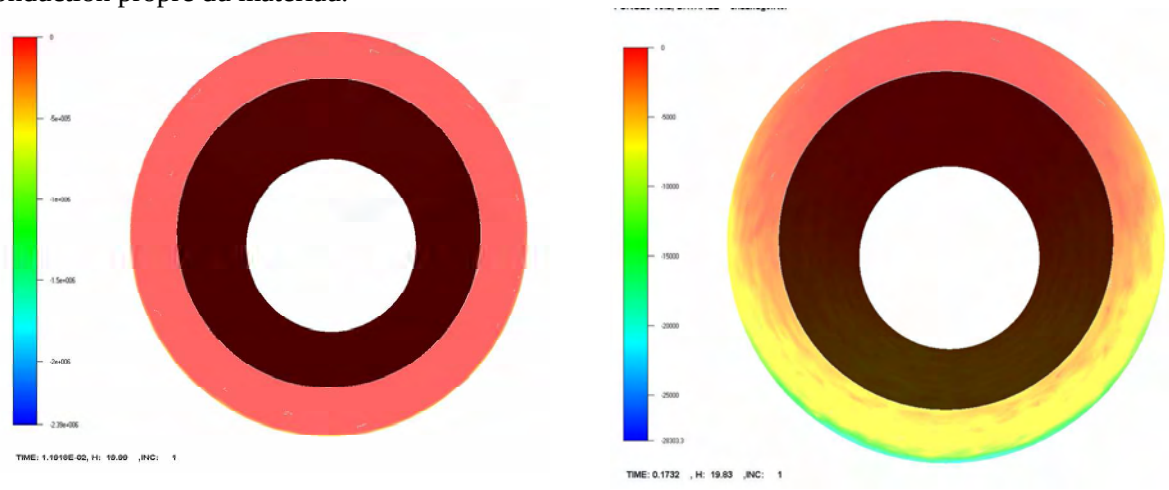


Figure 84 : Divergence du flux radiatif calculé avec une absorption spectrale à gauche et à droite avec une absorption moyenne de 300 m^{-1}.

Le tracé en fonction de la circonférence interne et externe des termes source calculés avec une absorption spectrale ou moyenne de 300 m^{-1} montre clairement les différences d'absorption générées par le matériau, et justifie donc, les écarts de température finaux.

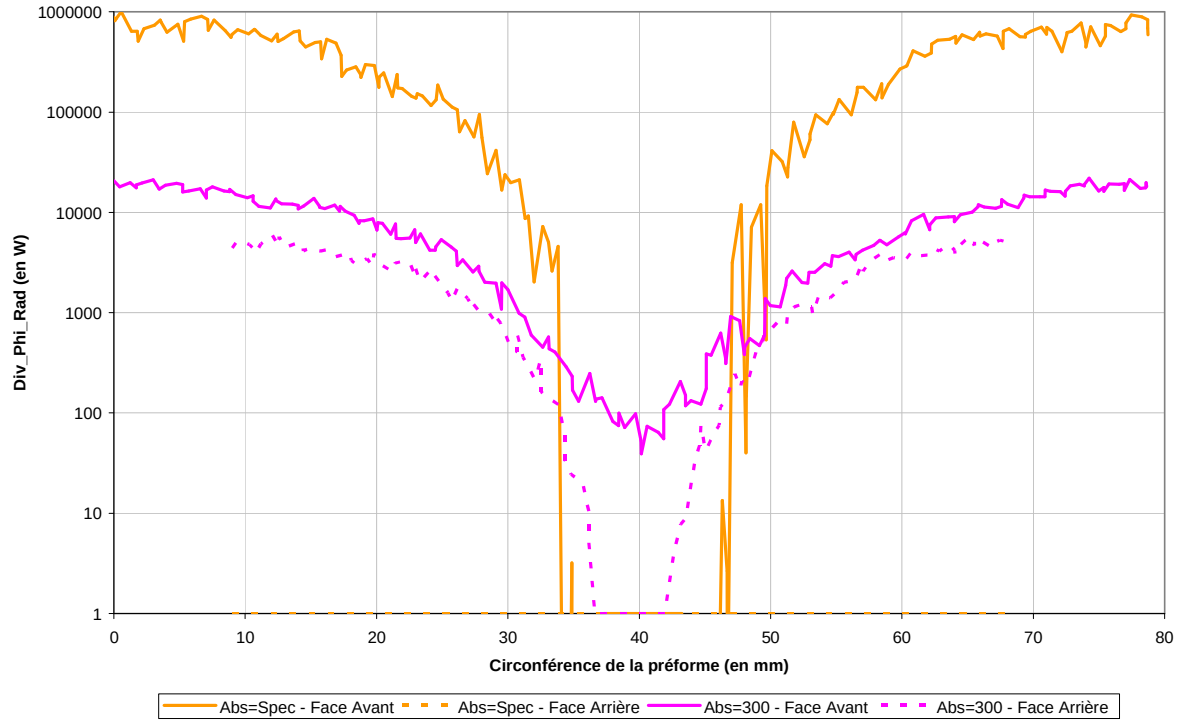


Figure 85 : Evolution à mi-hauteur de la préforme de la valeur de la divergence du flux radiatif en surface externe ou interne pour une absorption spectrale ou moyenne de 300 m^{-1}.

La courbe obtenue pour un coefficient d'absorption moyen de 300 m^{-1} semble donc être la mieux appropriée pour calculer la température de la préforme : plus d'homogénéité, faible erreur. En effet au bout de 15 secondes de chauffage, le graphique montre une erreur relative avec l'expérimental d'environ 15% (88°C au lieu de 100°C).

Cependant, il faut garder en tête que le modèle développé ne tient pas compte de la transmission après le passage de la première épaisseur et donc par conséquence, ne calcule la réflexion occasionnée par la deuxième paroi interne, en direction de la première. Ce phénomène non négligé par S. Monteix lui a permis d'accroître sa température de 10% en moyenne. Ainsi, si la température obtenue dans le cadre d'une absorption moyenne de 300 m^{-1} est pondérée par un coefficient de cette valeur, elle s'élève alors en 15 secondes à plus de 96°C, soit 5% d'écart par rapport à celle mesurée de manière expérimental comme le montre le graphique suivant.

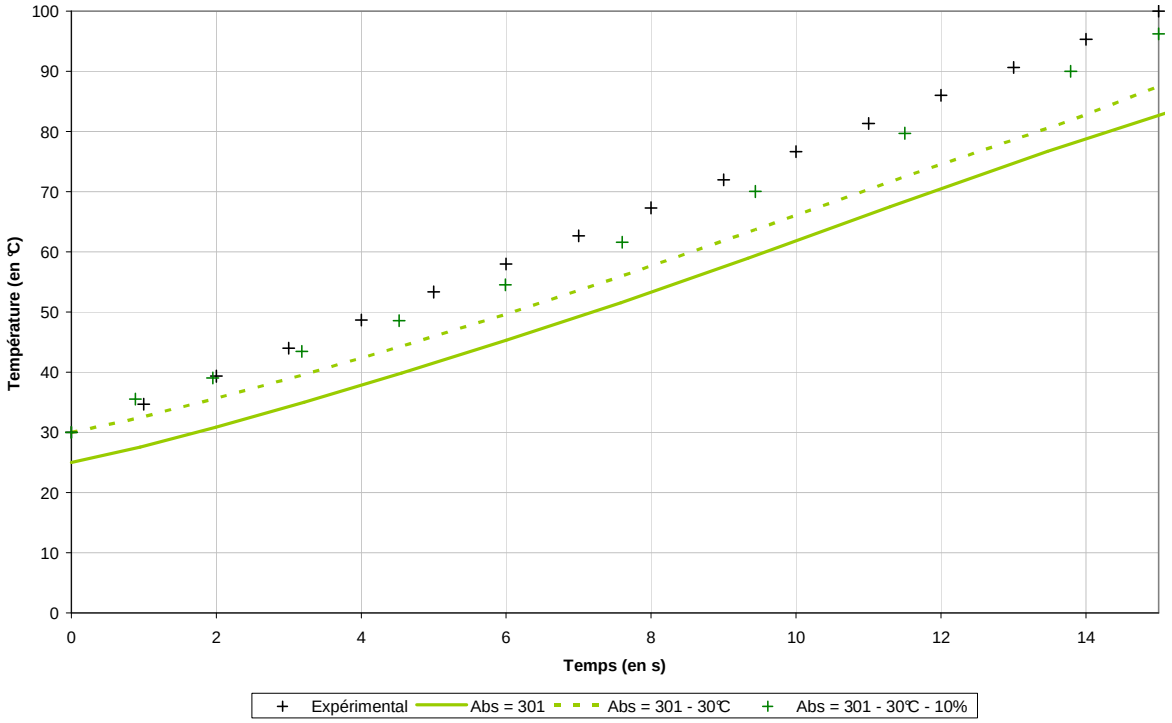


Figure 86 : Evolution à mi-hauteur de la préforme de la température en face interne côté lampe pour un coefficient d'absorption moyen de 300 /m et pondéré de 10% pour la réflexion.

3.2. Etude du chauffage d'une préforme en mouvement dans un four

Dans le cas industriel, la préforme est animée d'un mouvement composé d'une rotation autour de son axe de révolution est d'une translation parallèle aux différents modules composant le four. Afin de ne pas recalculer la divergence du flux radiatif à chaque incrément de calcul par la méthode du lancer de rayon, le terme source volumique de rayonnement a été interpolé depuis la configuration initiale, vers la configuration après rotation.

Ainsi, le cas suivant a été réalisé dans ces conditions :

Nbre de lampes	Tps de chauffage	Distance de chauffage	Réflecteurs	Absorption	Vitesse de rotation	Pas de temps
6	12 s	20 mm	Céramique Arrière	90 m^{-1}	1 tour / sec	0.1 sec

Tableau 18 : Paramètres imposés pour la simulation du chauffage d'une préforme en rotation dans le four.

Ce cas de faisabilité permet donc de comparer l'évolution de la température de la préforme à mi-hauteur sur un point initialement positionné en vis à vis du module. Le pas de temps de la simulation étant dix fois inférieur à celui de la vitesse de rotation, dix divergences de flux radiatif sont calculées par rotation.

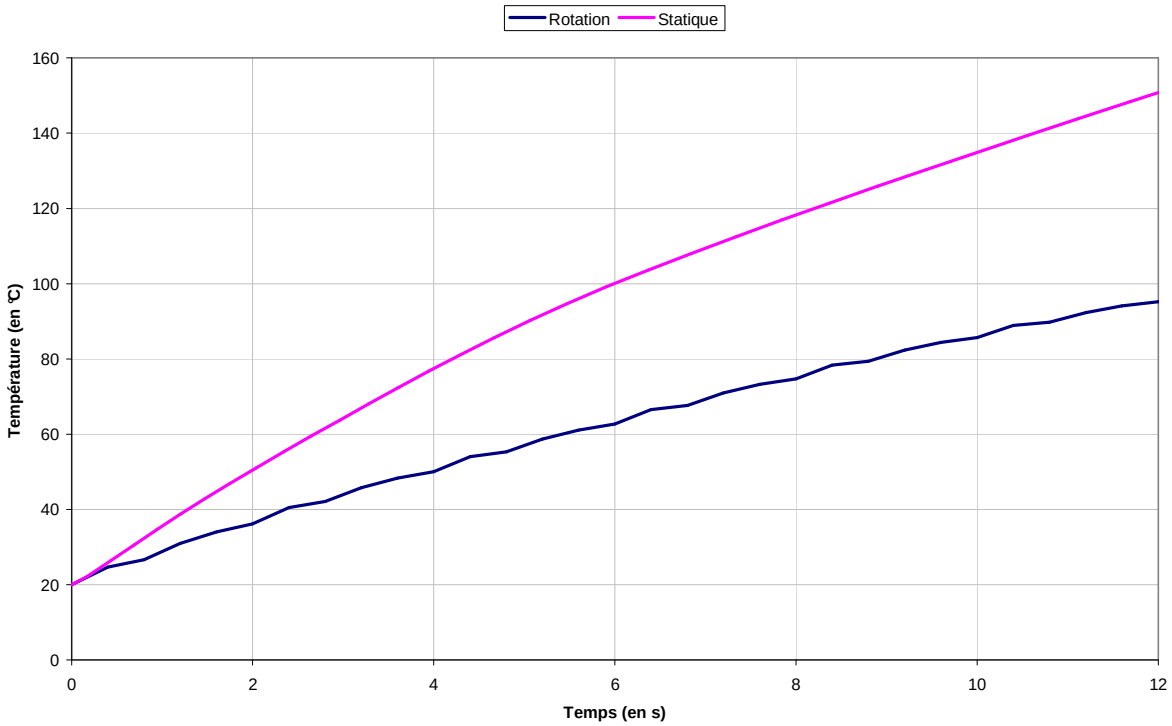


Figure 87 : Evolution à mi-hauteur de la préforme statique ou en rotation, de la température en un point situé initialement face au module.

Les paliers visibles sur le graphique correspondent aux incréments au cours desquels le point a réalisé un demi-tour par rapport à sa position initiale en vis à vis des lampes. Ainsi, un zoom sur les premières secondes de la simulation montre clairement la stabilisation de la température puis la hausse lorsque le point concerné se rapproche de sa configuration initiale en vis à vis des lampes.

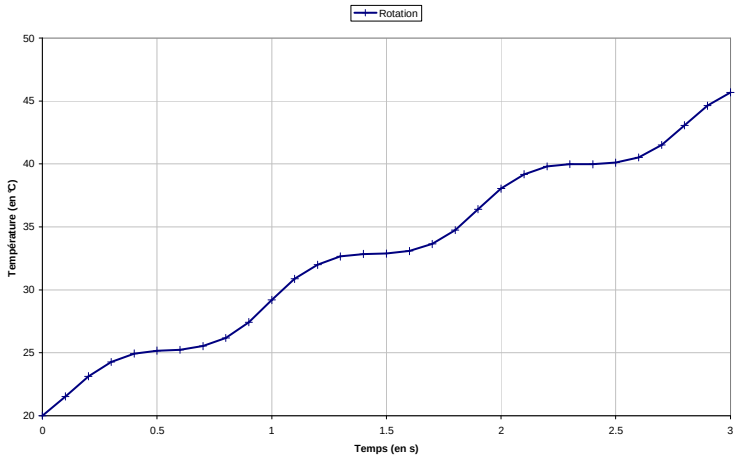


Figure 88 : Evolution à mi-hauteur de la préforme statique ou en rotation, de la température en un point situé initialement face au module.

La simulation numérique permet alors de réaliser une cartographie complète de température de la préforme à tout instant du chauffage comme le montrent les figures suivantes sur des coupes longitudinales ou transversales.

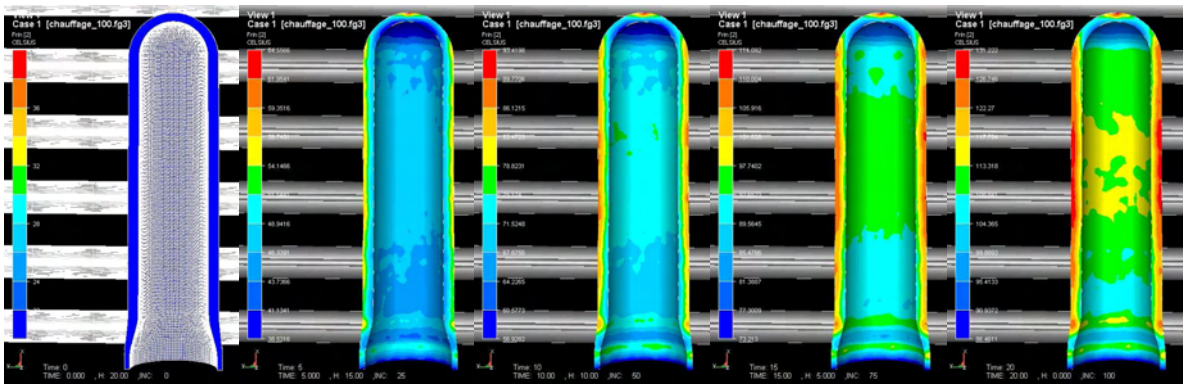


Figure 89 : Température sur une coupe longitudinale à t=0s, t=5s, t=10s, t=15s, t=20s.

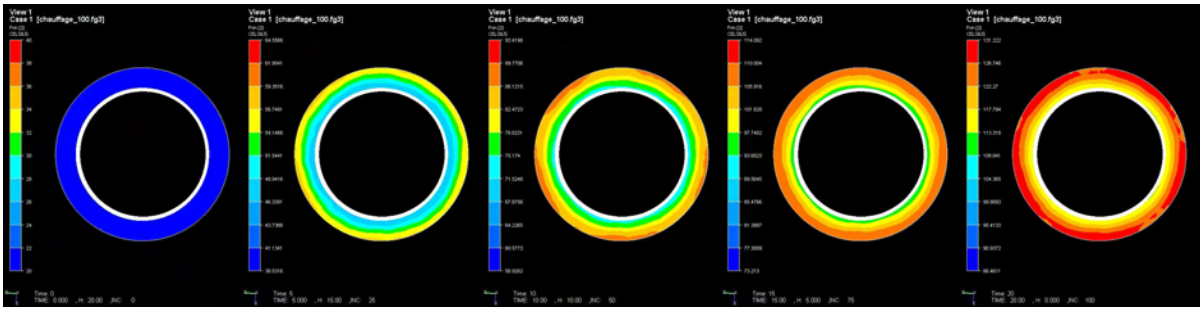


Figure 90 : Température sur une coupe transversale à t=0s, t=5s, t=10s, t=15s, t=20s.

3.3. Influence des modules précédent et suivant sur le chauffage d'une préforme

Comme il a été montré dans l'introduction, un four industriel est composé d'une succession de modules simples alignés les uns avec les autres. La préforme est ainsi chauffée tandis qu'elle se déplace suivant les mouvements définis précédemment. La modélisation permet de quantifier l'apport énergétique des modules situés non pas en en vis à vis de la préforme à un instant donné, mais de ceux situés avant ou après.

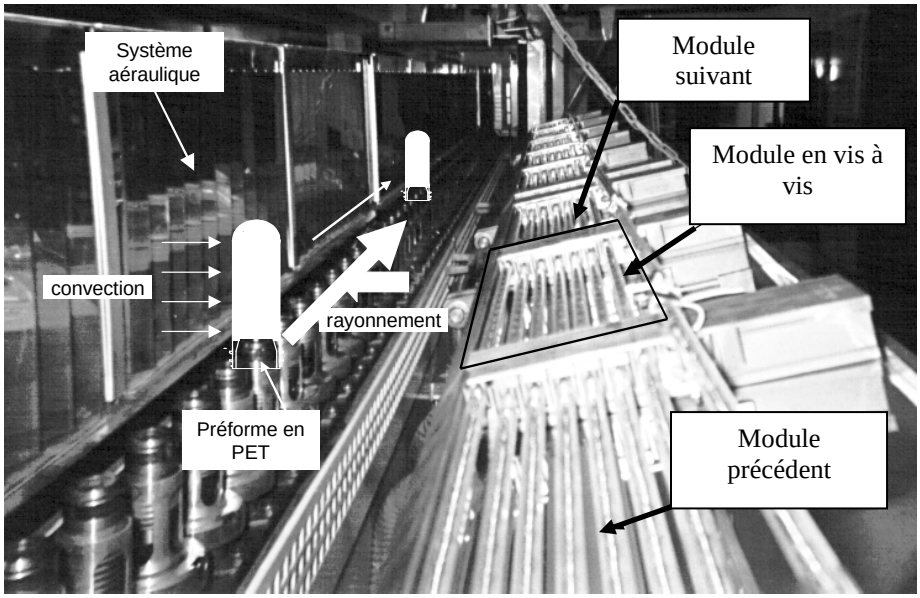


Figure 91 : Visualisation des modules successifs devant lesquels passe la préforme.

En effet, le rayonnement étant considéré comme diffus et les réflecteurs nombreux dans le four, les modules environnant ont une influence non négligeable sur le chauffage de la préforme. Ainsi, dans le cas étudié au préalable d'une préforme centrée par rapport à un module, l'éclairement en fonction de la circonférence de la préforme évolue entre 0 et 160 000 W/m².

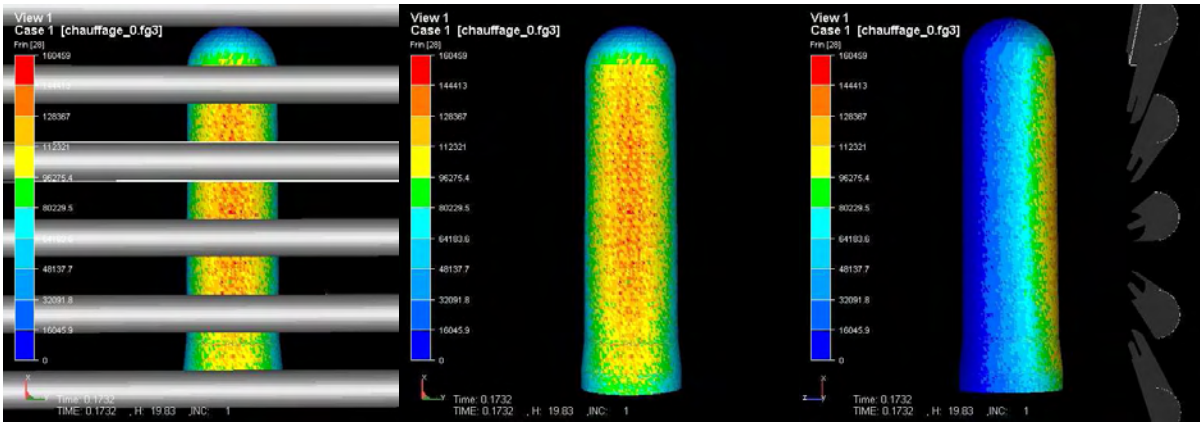


Figure 92 : Eclairement de la préforme situé au milieu d'un module.

La simulation de ce même cas mais avec la préforme cette fois éclairée par le module situé juste avant permet de montrer que l'apport énergétique du milieu environnant n'est pas à négliger. En effet dans ce cas, le module précédent procure un éclairement de 16 000 W/m² sur la face latérale en vis à vis, soit environ 10% de la valeur du module principal à l'instant donné.

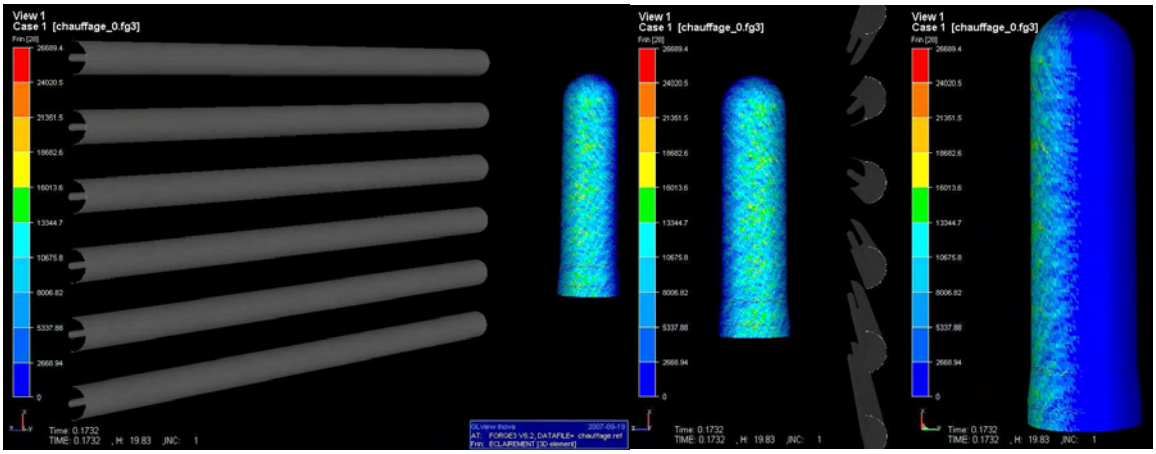


Figure 93 : Eclairement de la préforme par un module précédant la position actuelle.

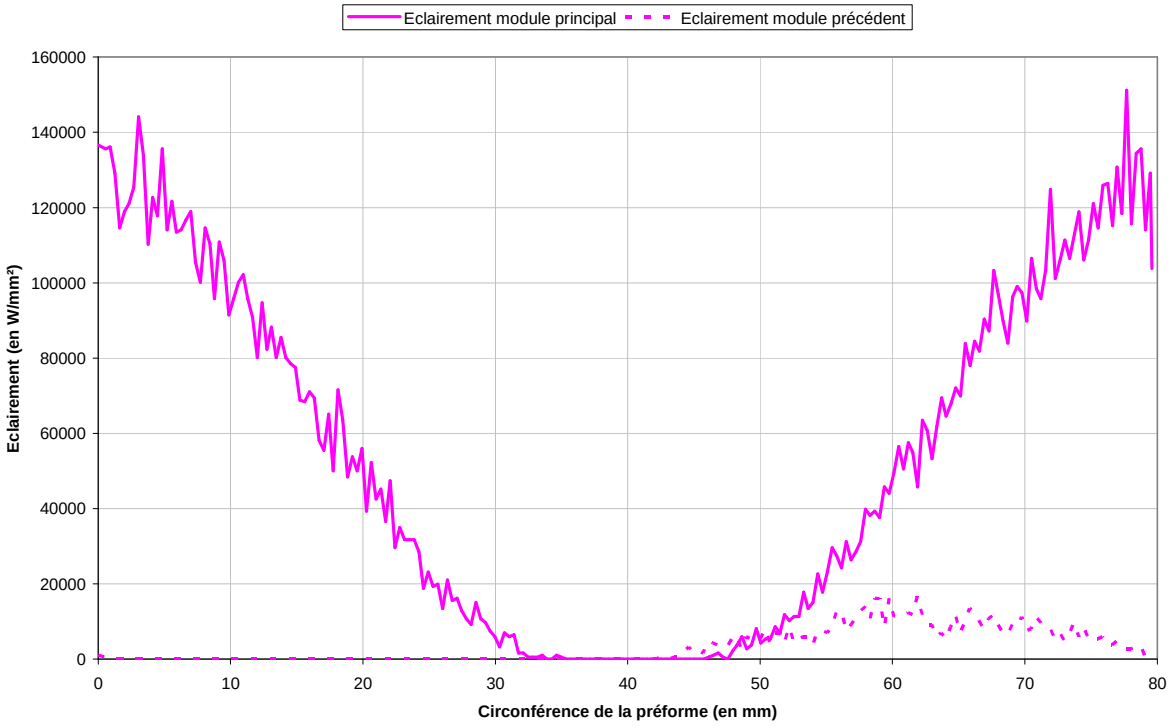


Figure 94 : Eclairement de la préforme par un module en vis à vis et par un module précédent la position actuelle.

4. Conclusions partielles

La simulation du chauffage par rayonnement pour les applications industrielles et surtout dans le domaine de la plasturgie est peu évoquée dans la littérature.

Pourtant, ce chapitre a permis de montrer que la modélisation du chauffage par rayonnement est possible, notamment en utilisant une approche par éléments finis couplée avec du lancer de rayon. Ces méthodes ont ainsi été développées dans notre application, tout en restant *générique et flexible pour des utilisations futures*.

En effet, l'approche progressive suivie a permis de valider successivement :

- Le calcul des facteurs de forme,
- L'éclairement sur une plaque en P.E.T.,
- L'absorption du rayonnement dans la matière,
- Le chauffage d'une préforme tubulaire statique,
- Le chauffage d'une préforme tubulaire en rotation et translation dans un four industriel.

La simulation numérique du rayonnement prend ainsi tout son intérêt à travers différents aspects comme :

- L'analyse de résultats locaux difficilement accessibles par l'expérimental, notamment à l'aide des outils de coupe disponibles dans le post processeur, c'est à dire la cartographie complète de la température de la préforme, le gradient thermique dans l'épaisseur, …
- La flexibilité des paramètres utilisés,
- La modélisation de formes génériques quelconques pouvant être développées dans le futur,
- La quantification de phénomènes difficilement mesurables tels que l'influence des modules de four environnants ou celle de la convection.

Cependant, des difficultés subsistent. Cette approche numérique de l'interaction entre le rayonnement et la matière n'est qu'une première étape d'une modélisation industrielle du chauffage des préformes. Le manque de temps a principalement été un frein à l'aboutissement de nos travaux. A ce jour, certains points restent à aborder, à développer tels que :

- L'étude de sensibilité à de multiples paramètres utilisés pour la simulation comme le pas de temps du calcul thermique, la vitesse de rotation de la préforme, le maillage de la préforme et des réflecteurs, …
- L'étude énergétique et géométrique de la lampe. Un modèle plus performant est envisageable compte tenu des éléments mis en jeu comme le filament de tungstène, le tube de quartz, …
- Une étude expérimentale plus fournie de manière à valider avec davantage de précision certains aspects de la simulation comme la température au cœur de la préforme, …
- La prise en compte de la réfraction,
- La transmission du rayonnement après la première épaisseur de la préforme,
- La modélisation des réflecteurs en aluminium arrière et avant.

Chapitre 3

Description du problème mécanique et formulation numérique

Le procédé d'injection soufflage met en jeu des déformations importantes pour la matière pouvant aller jusqu'à 400% dans le sens radial, avec des diminutions d'épaisseur d'un facteur 10 et des vitesses de déformation élevées. La présence de grandes déformations avec d'importantes vitesses de sollicitation comme le montre la figure ci-dessous et un fort couplage thermomécanique (d'où l'influence de la phase de chauffage), font que ce procédé est difficile à modéliser dans son intégralité.

De plus, comme semblent le montrer de récentes études [DEL-2006], le comportement du P.E.T. peut varier de manière très significative entre différentes résines et ce pour des conditions de sollicitation identiques.

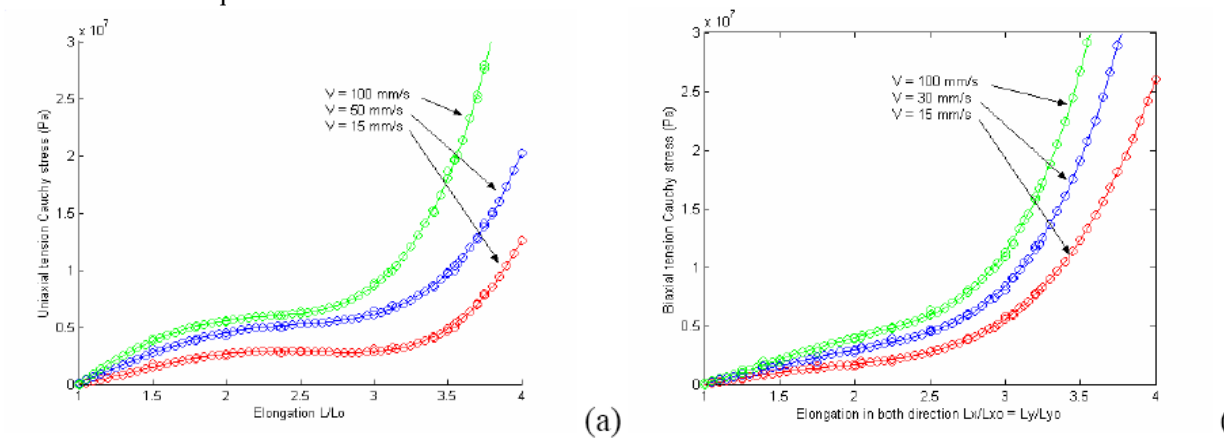


Figure 95 : Comportement en traction uniaxiale (a) et biaxiale (b) mesuré sur des éprouvettes en P.E.T. chauffées par lampes IR, régulées en température à 90°C [CHE-2005].

L'élasticité, la viscosité et la thermo dépendance de ce matériau donnent lieu à des approches variées au sein de la littérature en terme de loi de comportement (hyperélasticité, viscoélasticité, viscoplasticité, ….).

Par ailleurs, le côté produit mince de la bouteille mêlé à la complexité des taux de déformation et l'importance des gradients thermiques, a de la même manière engendré des études numériques 2D, 2D axisymétrique, coque ou membranaire.

Dans la mesure où le gradient thermique longitudinal est primordial sur la répartition finale d'épaisseur, que de plus en plus de bouteilles sont non axisymétriques et que la diminution d'épaisseur entre la préforme et la bouteille est élevée, une modélisation 3D a été préférée dans notre étude.

L'objet de ce chapitre est donc d'évaluer les lois de comportement les plus utilisées dans la littérature, de les intégrer dans le logiciel de calcul Forge3® et de définir celle la plus appropriée à la simulation de soufflage.

Chapitre 3 Description du problème mécanique et formulation numérique 101

1. Etude de la rhéologie du P.E.T. 104

2. Formulation numérique du problème mécanique dans Forge3® 106

2.1. Approche mécanique du problème 106

2.2. Discrétisation du problème mécanique 106

2.2.1. Discrétisation spatiale 107

2.2.2. Discrétisation temporelle 108

2.3. Résolution numérique du problème discret 109

3. Utilisation des lois de comportement hyperélastique 110

3.1. Formulation analytique générale d'une loi hyperélastique 110

3.2. Etude d'une loi hyperélastique simple et formulation analytique 113

3.3. Adaptation de la loi de Mooney-Rivlin à la formulation vitesse/pression 115

3.3.1. Décomposition adaptée à la propriété d'orthogonalité 115

3.3.2. Calcul de la matrice de raideur 117

3.4. Validation de l'implantation 118

3.4.1. Modélisation de la traction ou compression uniaxiale 119

3.4.2. Gonflage d'un tube 121

3.4.3. Gonflage d'une sphère 125

3.5. Instabilités et traitement numérique 128

3.5.1. Points d'instabilité et de bifurcation 129

3.5.2. Présentation des méthodes de continuation 131

3.5.3. Gonflage d'un tube 132

3.5.4. Gonflage d'une sphère 133

3.6. Bilan sur l'utilisation des lois hyperélastiques 135

3.6.1. Les difficultés liées à l'hyperélasticité dans un logiciel de calcul 3D 135

3.6.2. Les limites de l'hyperélasticité dans le cadre d'une utilisation industrielle 137

4. Utilisation de lois de comportement viscoplastique 138

4.1. Etude d'un modèle phénoménologique viscoplastique basé sur une loi de G'Sell 140

4.1.1. Formulation analytique 141

4.1.2. Modélisation de la traction uniaxiale 142

4.1.3. Simulation d'essais de traction sur éprouvettes sablier 143

4.2. Bilan sur l'utilisation des lois viscoplastiques 148

5. Conclusions partielles 150

1. Etude de la rhéologie du P.E.T.

La grande diversité des approches existantes à l'heure actuelle pour définir le comportement rhéologique du P.E.T. semble indiquer qu'il n'existe pas une loi unique, fiable et apte à modéliser son comportement pour différents spectres de vitesses de sollicitation ou de température. De nombreuses études ont été réalisées avec comme objectif la caractérisation rhéologique du P.E.T. Parmi elles, N. Billon [BIL-2002] après analyse d'essais de traction uniaxiaux, conclut que le comportement du P.E.T. évolue autour de trois modes de comportement pouvant être qualitativement décrits comme :

- un comportement hybride « viscoélastique, hyperélastique » à basse température ou haute vitesse caractérisé par une rigidité initiale relativement élevée et un durcissement structural précoce,
- un comportement « hyperélastique » pour des valeurs de température et de vitesse intermédiaires,
- un comportement de type « fluide » caractérisé par un durcissement structural tardif à haute température ou basse vitesse.

Ainsi, F. Schmidt [SCH-1992] utilise dans Forge2® une loi de comportement viscoélastique pour modéliser l'étirage soufflage des préformes en deux dimensions, axisymétrique (cf. figure suivante). Il montre en effet que l'allure d'une courbe force d'étirage en fonction du temps obtenue avec la loi de Johnson-Segalman représente mieux l'allure de la courbe expérimentale que les modèles rhéologiques de Newton ou élastique linéaire [SCH-1995]. Il affirme ainsi que, si la cinématique n'est pas forcément meilleure avec une loi viscoélastique, l'état de contrainte dans le matériau sera quant à lui mieux décrit.

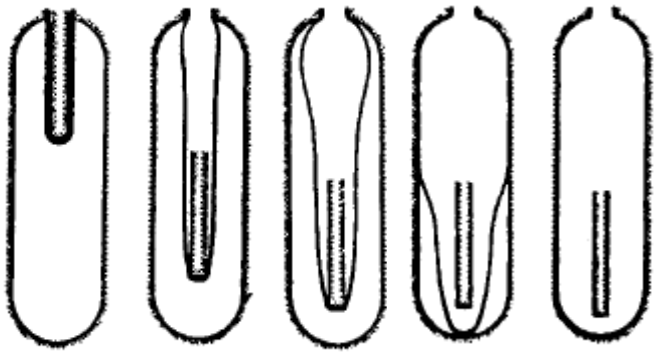


Figure 96 : Modélisation 2D de l'étirage soufflage avec une loi viscoélastique implantée dans le logiciel Forge2® [SCH-1996].

S. Wang utilise une loi de comportement viscoplastique [WAN-1998]. Elle permet de conserver la notion de viscosité. De plus, cette loi autorise l'introduction plus aisée de l'anisotropie. Elle est d'ailleurs étudiée par L. Chevalier [CHE-2005] dans le cadre de l'analyse d'essais uniaxiaux et bi-axiaux, montrant ainsi l'influence du durcissement structural sur l'évolution de la forme de la préforme lors du gonflage.

E. Gorlier montre également [GOR-2001] qu'en utilisant une loi phénoménologique viscoplastique, isotrope, homogène et obéissant à la loi d'écoulement de Von Mises, il est possible par analyse inverse de trouver un jeu de paramètres permettant de représenter le P.E.T. dans certaines gammes de vitesse et de température. Cette loi dans son étude est inspirée de la loi de C. G'Sell [GSE-1979].

Enfin, depuis quelques décennies, les modèles hyperélastiques ont été largement développés sous différentes formes. La plupart d'entre eux sont des modèles de type néo-hookéen [TRE-1943] à une variable ou de type Mooney-Rivlin [MOO-1940] ou Ogden [OGD-1972] à deux variables (voir figure suivante). Si leurs formulations sont assez simples, ils ne prennent pas en compte la vitesse de sollicitation. D'autres modèles plus complexes ont récemment été proposés. Ainsi, le modèle conformationnel d'Edwards et Vilgis [EDE-1986], établi dans le cadre de polymères enchevêtrés contraints par un certain nombre de nœuds de réticulation, peut reproduire dans certaines situations, de façon très satisfaisante, le comportement du P.E.T. comme le montrent E. Gorlier [GOR-2001] et Y. Marco [MAR-2003].

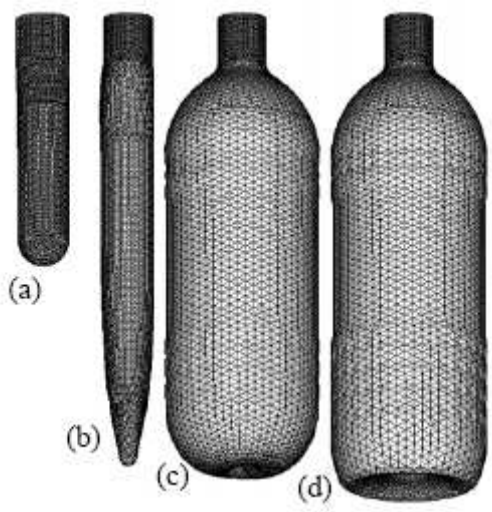


Figure 97 : Modélisation membranaire de l'étirage soufflage avec une loi d'Ogden [MAR-1999].

Dans nos travaux, différentes approches seront testées. Dans un premier temps, les modèles hyperélastiques néo-hookéen et Mooney-Rivlin seront implantés, puis un modèle viscoplastique et enfin, une loi phénoménologique issue des travaux récents de N. Billon [BIL-2005].

2. Formulation numérique du problème mécanique dans Forge3®

2.1. Approche mécanique du problème

Le problème mécanique est basé sur plusieurs équations. La résolution du système qu'elles forment permet de connaître les déplacements et déformations de la matière au cours du temps lorsque cette dernière est soumise à diverses sollicitations.

Le système étudié doit tout d'abord répondre à la condition d'équilibre dynamique (ou conservation de la quantité de mouvement). Elle peut s'écrire en négligeant les forces d'inertie et de gravité sous la forme :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \tag{49}$$

Avec $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes.

La conservation de la masse doit également être satisfaite :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \tag{50}$$

Avec ρ la masse volumique du matériau, v le champ de vitesse dans le matériau et t le temps.

Le système ainsi formé peut alors être simplifié grâce à l'hypothèse d'incompressibilité pour donner finalement :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases} \tag{51}$$

2.2. Discrétisation du problème mécanique

Le principe des puissances virtuelles, forme faible de la conservation de la quantité de mouvement, appliqué au domaine Ω occupé par la matière à un instant donné et associé à la forme faible de la condition d'incompressibilité, donne la formulation faible mixte en vitesse et pression du problème mécanique. Elle consiste à trouver le couple (v, p) tel que pour tout (v^*, p^*) le système suivant soit résolu :

$$\begin{cases} \int_\Omega \underline{\underline{S}}(v) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(v^*) d\Omega - \int_\Omega p \nabla \cdot (v^*) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \tau(v) \cdot v^* d\partial\Omega = 0 \\ \int_\Omega p^* \nabla \cdot (v) d\Omega = 0 \end{cases} \tag{52}$$

Avec τ représentant les densités surfaciques des efforts extérieurs exercés sur la matière et $\dot{\varepsilon}$ la vitesse de déformation.

La décomposition du tenseur des contraintes en une partie sphérique et une partie déviatorique $\underline{\underline{S}}$ permet d'introduire la pression hydrostatique p comme variable primaire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}} \tag{53}$$

2.2.1. *Discrétisation spatiale*

Forge3® est un logiciel commercial développé par le CEMEF et Transvalor, basé sur la méthode des éléments finis dans une formulation en vitesse/pression.

La méthode des éléments finis consiste à décomposer le domaine global Ω en un ensemble de sous domaines appelés éléments. Pour cela, le domaine Ω va être approximé en un domaine Ω_h. Ω_h^e est alors noté comme étant l'élément e du maillage T_h tel que :

$$\Omega_h = \bigcup_{e \in T_h} \Omega_h^e \tag{54}$$

Les éléments utilisés dans ce logiciel de calcul sont du type P1+/P1.

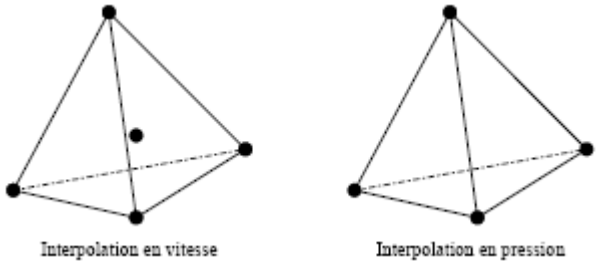


Figure 98 : Schéma de principe de l'élément P1+/P1.

L'élément P1+/P1 a la particularité de posséder des degrés de liberté additionnels en vitesse supplémentaire en son centre appelée « bulle ». La fonction bulle est linéaire continue sur les sous tétraèdres et s'annule sur les faces du tétraèdre. Les champs de vitesse et de pression discrets s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} v &= v^l + v^b = \sum_{i=1}^{nbnoe} v_i^l N_i^l + v^b N^b \\ p &= \sum_{i=1}^{nbnoe} p_i N_i^l \end{aligned} \tag{55}$$

Avec $Nbnoe$ le nombre de nœuds. N_i^l est la fonction d'interpolation d'ordre 1 associée au nœud i et N^b est la fonction d'interpolation de type bulle, linéaire sur chacun des 4 sous-tétraèdres valant 1 au centre et 0 sur les faces extérieures.

De plus, la formulation faible mixte posée précédemment est simplifiée par la propriété d'orthogonalité des éléments P1+/P1 [COU-1996]. En effet pour un tenseur constant $\underline{\underline{C}}$ dans l'élément et pour tout champ de type bulle, il vient :

$$\int_{\Omega^{élément}} \underline{\underline{C}} : \nabla v^b \, d\Omega = 0 \tag{56}$$

En particulier, on a :

$$\int_{\Omega^{élément}} \nabla v^l : \nabla v^b \, d\Omega = 0 \tag{57}$$

En supposant alors que le tenseur déviateur des contraintes peut se décomposer de la manière suivante :

$$\underline{\underline{S}}\left(v^l + v^b\right) = \underline{\underline{S}}^l\left(v^l\right) + \underline{\underline{S}}^b\left(v^l, v^b\right) \tag{58}$$

Avec $\underline{\underline{S}}^l\left(v^l\right)$ non linéaire par rapport à v^l et qui ne dépend que de ∇v^l donc est constant sur l'élément, et $\underline{\underline{S}}^b\left(v^b\right)$ linéaire par rapport à v^b (du type $\varphi\left(v^l\right)\nabla\left(v^b\right)$).

Alors, il vient dans le cadre de la formulation vitesse/pression:

$$\int_\Omega \underline{\underline{S}}^l\left(v^l\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\underline{v}_b^*\right) d\Omega = 0 \qquad \int_\Omega \underline{\underline{S}}^b\left(v^l, v^b\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\underline{v}_l^*\right) d\Omega = 0 \tag{59}$$

D'où il est possible d'écrire en adoptant une notation allégée pour les deux parties du déviateur :

$$\int_\Omega \underline{\underline{S}}\left(v^l + v^b\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\underline{v}_l^*\right) d\Omega = \int_\Omega \underline{\underline{S}}\left(v^l\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\underline{v}_l^*\right) d\Omega \tag{60}$$

$$\int_\Omega \underline{\underline{S}}\left(v^l + v^b\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\underline{v}_b^*\right) d\Omega = \int_\Omega \underline{\underline{S}}\left(v^b\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\underline{v}_b^*\right) d\Omega \tag{61}$$

Le principe des puissances virtuelles appliqué au champ de vitesse ainsi décomposé donne, après prise en compte de la propriété d'orthogonalité, le système :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{S}}\left(v^l\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\underline{v}_l^*\right) d\Omega - \int_\Omega p\, div\left(\underline{v}_l^*\right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \tau\left(v^l\right) : v_l^*\, d\partial\Omega = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{S}}\left(v^b\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\left(\underline{v}_b^*\right) d\Omega - \int_\Omega p\, div\left(\underline{v}_b^*\right) d\Omega = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega p^*\, div\left(v^l + v^b\right) d\Omega = 0 \end{cases} \tag{62}$$

2.2.2. *Discrétisation temporelle*

Le système précédent issu de la formulation faible doit être satisfait à chaque instant de la discrétisation dans le schéma retenu. Le temps va donc être discrétisé en N incréments définis par le pas de temps. L'évolution de la matière au cours du temps sera du type lagrangien réactualisé et la configuration $\Omega^{t+\Delta t}$ à l'instant $t + \Delta t$ sera directement déduite de celle à l'instant t à partir d'un schéma d'Euler explicite :

$$\begin{aligned} x^{t+\Delta t} &= x^t + v^t \Delta t \\ \Omega^{t+\Delta t} &= \Omega^t + v^t \Delta t \end{aligned} \tag{63}$$

Où x représente les coordonnées d'un point matériel.

2.3. Résolution numérique du problème discret

Le système obtenu grâce aux principes des puissances virtuelles peut s'écrire sous forme matricielle.

$$\begin{cases} R^l = 0 \\ R^b = 0 \\ R^p = 0 \end{cases} \tag{64}$$

Le problème est non linéaire et résolu par la méthode de Newton-Raphson. A chaque itération, le système à résoudre est alors linéaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} H^{ll} & 0 & H^{lp} \\ 0 & H^{bb} & H^{bp} \\ H^{pl} & H^{pb} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta v^l \\ \Delta v^b \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^l \\ R^b \\ R^p \end{pmatrix} \tag{65}$$

Où les Δv^l, Δv^b et Δp sont les corrections apportées à la solution de l'itération précédente et H est la matrice hessienne définie par :

$$H^{ij} = \frac{\partial R^i}{\partial x^j} \qquad \left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(v_h^l, v_h^b, p_h\right) \tag{66}$$

Les degrés de liberté additionnels en vitesse (de type bulle) étant internes à chaque élément tétraèdres, ils peuvent être éliminés en écrivant la satisfaction de la seconde équation du système non linéaire dans chaque tétraèdre et en l'injectant dans les deux autres équations. Cette étape de condensation des degrés de liberté bulle est effectuée au cours de l'assemblage du système et permet d'exprimer un système linéaire dont les seules inconnues sont les corrections en vitesse (partie P1) et en pression.

$$\left[H^{cond}\right] \begin{pmatrix} \Delta v^l \\ \Delta p \end{pmatrix} = -\left(R^{cond}\right) \tag{67}$$

3. Utilisation des lois de comportement hyperélastique

Les lois de comportement hyperélastique sont exprimées en variables lagrangiennes. L'état de contrainte à un instant donné dépend seulement de l'état de déformation à cet instant et non du chemin suivi par cette dernière.

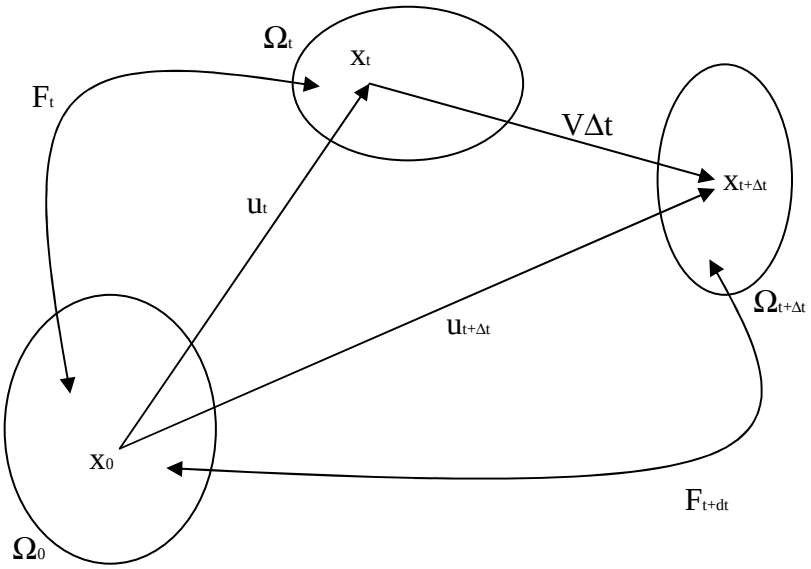


Figure 99 : Schéma de principe de l'hyperélasticité.

3.1. Formulation analytique générale d'une loi hyperélastique

Soit un solide en cours de déformation occupant dans sa configuration courante C un domaine Ω dans lequel est isolée une partie Ω_A. Les forces agissant sur Ω_A sont :

- celles présentes dans Ω_A, dues au changement de position relative des points matériels,
- celles exercées sur Ω_A par le reste du volume qui ont provoqué la déformation de Ω_A.

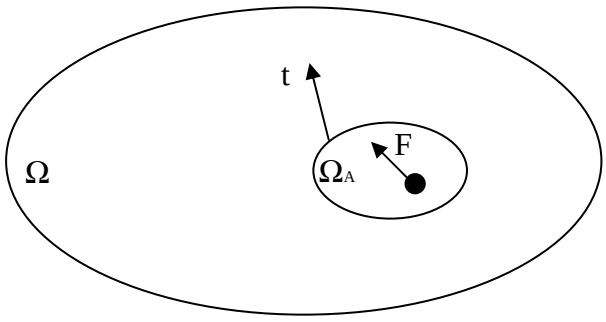


Figure 100 : Schéma d'application des forces sur un solide.

Sur un élément de surface déformé ds de la frontière Ω_A, il s'exerce un élément de force $\vec{df}$, qui caractérise les efforts internes de cohésion. Le vecteur contrainte τ (forces de cohésion par unité de surface) en un point P est alors défini par :

$$\tau(P,n) = \lim_{ds\to 0} \frac{\vec{df}}{ds} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n} \tag{68}$$

En notant $\vec{ds} = \vec{n}\,ds$, il résulte

$$\vec{df} = \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{ds} \tag{69}$$

La définition du tenseur gradient de transformation $\underline{\underline{F}}$ permet de passer de $\vec{df}$ et $\vec{ds}$ dans C à $\vec{df_0}$ et $\vec{dS}_0$ dans C_0 (sa configuration initiale) ainsi :

$$\vec{df} = \underline{\underline{F}}\,\vec{df_0} \tag{70}$$

$$\vec{ds} = J^T.\left(\underline{\underline{F}}^{-1}\right)\vec{dS} \qquad J = \det \underline{\underline{F}} \tag{71}$$

Il découle un tenseur des contraintes lagrangien et symétrique, appelé tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{K}}$ défini de la façon suivante :

$$\vec{df_0} = \underline{\underline{K}}\,\vec{dS} \qquad \underline{\underline{K}} = J\,\underline{\underline{F}}^{-1}\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{\underline{F}}^{-1}\right)^T \tag{72}$$

Les matériaux hyperélastiques sont caractérisés par l'existence d'une énergie de déformation W ne dépendant que de la déformation courante $\underline{\underline{F}}$. En écrivant cette énergie comme une fonction du tenseur des dilatations de Cauchy Green droit, Beatty [BEA-1987] montre que W satisfait le principe d'objectivité.

Les deux tenseurs de Cauchy-Green s'expriment en fonction du gradient de la transformation :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^T \qquad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T\,\underline{\underline{F}} \tag{73}$$

Pour les matériaux isotropes, W est fonction des invariants principaux de $\underline{\underline{C}}$:

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad et \quad \begin{cases} I_1 = tr\left(\underline{\underline{C}}\right) \\ I_2 = \frac{1}{2}\left[\left(tr\left(\underline{\underline{C}}\right)\right)^2 - tr\left(\underline{\underline{C}}^2\right)\right] \\ I_3 = \det\left(\underline{\underline{C}}\right) \end{cases} \tag{74}$$

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff s'obtient alors en dérivant l'énergie de déformation par rapport au tenseur de Cauchy Green droit :

$$\underline{\underline{K}} = 2\frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial W}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad avec \quad \begin{cases} \dfrac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{I}} \\ \dfrac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} = I_1\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}} \\ \dfrac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{C}}} = I_3\underline{\underline{C}}^{-1} \end{cases} \tag{75}$$

Il en résulte que :

$$\underline{\underline{K}} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\underline{\underline{I}} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\left(I_1\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}\right) + 2\frac{\partial W}{\partial I_3}I_3\underline{\underline{C}}^{-1} \tag{76}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy s'exprime en inversant l'expression permettant de calculer le tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J}\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{F}}^{T} \tag{77}$$

Il en découle :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{2}{J}\underline{\underline{F}}\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\underline{\underline{I}} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\left(I_1\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}\right) + \frac{\partial W}{\partial I_3}I_3\underline{\underline{C}}^{-1}\right)\underline{\underline{F}}^{T}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{2}{J}\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^{T} + \frac{\partial W}{\partial I_2}I_1\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^{T} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{F}}^{T} + \frac{\partial W}{\partial I_3}I_3\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{F}}^{T}\right) \tag{78}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{2}{J}\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\underline{\underline{B}} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\left(I_1\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}^{2}\right) + \frac{\partial W}{\partial I_3}I_3\underline{\underline{I}}\right] \tag{79}$$

L'inégalité de Cayley-Hamilton permet d'écrire que :

$$I_3\underline{\underline{I}} = I_2\underline{\underline{B}} - I_1\underline{\underline{B}}^{2} + \underline{\underline{B}}^{3} \quad \Leftrightarrow \quad I_3\underline{\underline{B}}^{-1} = I_2\underline{\underline{I}} - I_1\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}^{2} \tag{80}$$

Il vient donc finalement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{2}{J}\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\underline{\underline{B}} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\left(I_3\underline{\underline{B}}^{-1} - I_2\underline{\underline{I}}\right) + \frac{\partial W}{\partial I_3}I_3\underline{\underline{I}}\right] \tag{81}$$

3.2. Etude d'une loi hyperélastique simple et formulation analytique

De nombreux potentiels hyperélastiques ont été développés dans la littérature. Leur complexité varie en fonction du matériau modélisé et de la fiabilité désirée par son auteur. E. Verron effectue un récapitulatif [VER-1997] des principaux modèles (tableau ci-dessous).

Nom du modèle	***Année***	***Origine***	***Forme de W***
Modèle de Mooney	1940	Phénoménologique	$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$
Modèle Néo-Hookéen	1943	Statistique (W est élaboré à partir de constats stat. / l'arrangt des chaînes polymériques et des mécanis. Micro. de déf.)	$W = \frac{1}{2} G(I_1 - 3)$
Formulation générale de Rivlin	1948	Phénoménologique	$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$
Modèle à trois termes	1951	Statistique	$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_1 - 3)^i + C_3(I_2 - 3)$
Modèle de Biderman	1958	Phénoménologique	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3)$
Modèle de Carmichael et Holdaway	1961	Phénoménologique (modéliser le comportement global macroscopique à partir de considérations mathématiques et de résultats expérimentaux)	$W = \sum_{i=1}^{3} \left[\phi(\lambda_i^{\,2}) - \phi(1)\right]$ avec $\frac{d\phi(u)}{du} = \frac{1}{4u}\left[A e^{\beta\left(\sqrt{u} - \sqrt{u^{-2}}\right)} - 2B\left(u + u^{-1} - 2\right)\right]$
Modèle de Hart-Smith	1966	Empirique	$W = G\left\{\int e^{k_1 (I_1 - 3)^2} dI_1 + k_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)\right\}$
Hypothèse de Valanis et Landel	1967	Phénoménologique	$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3)$
Modèle d'Ogden	1972	Phénoménologique	$W = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{\alpha_n}\left(\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3\right)$
Modèle de Blatz, Sharda et Tschoegl	1974	Phénoménologique	$W = \frac{2G}{\alpha} I_{E_\alpha} + B I_{E_\alpha}^{\ \beta}$

Tableau 19 : Récapitulatif des modèles hyperélastiques les plus courants.

Un modèle de comportement doit pouvoir approcher tous les types de déformation, c'est ce qui peut justifier la complexité de certaines formulations. Cependant, le choix du potentiel doit être basé sur des critères réalistes tels que :

- la simplicité du modèle (nombre de paramètres et leur détermination),
- sa facilité d'implantation numérique,
- son aptitude à représenter au mieux le comportement du P.E.T. dans le cadre des déformations réalisées au cours du procédé.

Pour une première approche dans notre étude, le choix s'est porté sur le potentiel de Mooney-Rivlin. Ce modèle est le plus couramment répandu dans la littérature liée au soufflage-biétirage de corps creux et permet ainsi une comparaison aisée avec les autres logiciels de calcul. De plus, l'expression mathématique du potentiel hyperélastique s'avère être assez simple pour la mise en œuvre numérique. Enfin, sa formulation ne nécessite la connaissance que de deux paramètres liés aux matériaux, largement diffusées dans différents articles [VER-1997], [CHE-2002].

Le potentiel de Mooney-Rivlin prend la forme suivante :

$$W = C\left[(I_1 - 3) + \alpha(I_2 - 3)\right] \tag{82}$$

En remplaçant dans l'équation du tenseur des contraintes, il vient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{2}{J}\left[C\underline{\underline{B}} - C\alpha\left(I_3\underline{\underline{B}}^{-1} - I_2\underline{\underline{I}}\right)\right] \tag{83}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = C\alpha I_2\frac{2}{J}\underline{\underline{I}} + \frac{2}{J}\left(C\underline{\underline{B}} - C\alpha I_3\underline{\underline{B}}^{-1}\right) \tag{84}$$

Afin de simplifier la forme précédemment obtenue pour le calcul de la contrainte, il est nécessaire d'ajouter des hypothèses. Ainsi, les matériaux hyperélastiques sont supposés être incompressible [TRE-1975]. Il en résulte que :

$$I_3 = 1 \qquad J = 1 \tag{85}$$

C'est sous cette forme que Germain [GER-1973] conclut, que dans le cas de milieux incompressibles, le tenseur des contraintes n'est défini qu'à un tenseur sphérique près :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p'\underline{\underline{I}} + 2\left(C\underline{\underline{B}} - C\alpha\underline{\underline{B}}^{-1}\right) \tag{86}$$

où p' est une pression arbitraire, multiplicateur de Lagrange de la condition d'incompressibilité.

Il peut être décomposé en une partie sphérique et une partie déviatorique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}} \tag{87}$$

$$\underline{\underline{S}} = 2C\left[dev\left(\underline{\underline{B}}\right) - \alpha dev\left(\underline{\underline{B}}^{-1}\right)\right] \tag{88}$$

$$\underline{\underline{S}} = 2C\underline{\underline{B}} - \frac{2}{3}Ctr\left(\underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{I}} - 2C\alpha\underline{\underline{B}}^{-1} + \frac{2}{3}C\alpha tr\left(\underline{\underline{B}}^{-1}\right)\underline{\underline{I}} \tag{89}$$

$$\underline{\underline{S}} = 2\left(C\underline{\underline{B}} - C\alpha\underline{\underline{B}}^{-1}\right) - \frac{2}{3}\left[Ctr\left(\underline{\underline{B}}\right) - C\alpha tr\left(\underline{\underline{B}}^{-1}\right)\right]\underline{\underline{I}} \tag{90}$$

La pression hydrostatique p associée au tenseur des contraintes peut ainsi être reliée à la pression arbitraire p' par la relation :

$$p = -\frac{1}{3}tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) \tag{91}$$

$$p = p' + 2C\left[-\frac{1}{3}tr\left(\underline{\underline{B}}\right) + \frac{\alpha}{3}tr\left(\underline{\underline{B}}^{-1}\right)\right] \tag{92}$$

$$p = p' + 2\left(C\underline{\underline{B}} - C\alpha\underline{\underline{B}}^{-1}\right) - \frac{2}{3}\left[Ctr\left(\underline{\underline{B}}\right) - C\alpha tr\left(\underline{\underline{B}}^{-1}\right)\right] \tag{93}$$

3.3. Adaptation de la loi de Mooney-Rivlin à la formulation vitesse/pression

3.3.1. *Décomposition adaptée à la propriété d'orthogonalité*

Afin de tirer parti de la propriété d'orthogonalité, nous visons une décomposition du déviateur des contraintes du type :

$$\underline{\underline{S}}\left(v^l + v^b\right) = \underline{\underline{S}}\left(v^l\right) + \underline{\underline{S}}\left(v^b\right) \tag{94}$$

En vertu de l'expression précédemment obtenue, l'application à une loi hyperélastique de type Mooney-Rivlin nécessite donc que :

$$\underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b\right) = \underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}\left(v^l\right) + \underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}\left(v^b\right) \tag{95}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b\right) &= 2\left(C\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l\right) - C\alpha\underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^l\right)\right) - \frac{2}{3}\left[Ctr\left(\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l\right)\right) - C\alpha tr\left(\underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^l\right)\right)\right]\underline{\underline{I}} \\ &+ 2\left(C\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^b\right) - C\alpha\underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^b\right)\right) - \frac{2}{3}\left[Ctr\left(\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^b\right)\right) - C\alpha tr\left(\underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^b\right)\right)\right]\underline{\underline{I}}\end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b\right) &= 2\left(C\left(\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l\right) + \underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^b\right)\right) - C\alpha\left(\underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^l\right) + \underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^b\right)\right)\right) \\ &- \frac{2}{3}\left[C\left(tr\left(\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l\right)\right) + tr\left(\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^b\right)\right)\right) - C\alpha\left(tr\left(\underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^l\right)\right) + tr\left(\underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^b\right)\right)\right)\right]\underline{\underline{I}}\end{aligned} \tag{97}$$

Il faut donc démontrer que :

$$\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b\right) = \underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l\right) + \underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^b\right) \text{ et } \underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^l + v^b\right) = \underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^l\right) + \underline{\underline{B}}^{-1^{t+\Delta t}}\left(v^b\right) \tag{98}$$

Le tenseur gradient de la transformation à l'instant $t + \Delta t$ s'écrit :

$$\underline{\underline{F}}^{t+\Delta t} = \frac{\partial x^{t+\Delta t}}{\partial x^0} = \frac{\partial\left(x^t + v^t\Delta t\right)}{\partial x^0} = \frac{\partial\left[x^t + \left(v^l + v^b\right)\Delta t\right]}{\partial x^0} \tag{99}$$

Avec x^0 les coordonnées à l'instant initial et v^t la vitesse de déplacement de la matière.

Dans ce qui suit, les vecteurs vitesse v^l et v^b par convention d'écriture seront les vecteurs vitesse à l'instant t.

Le gradient précédent peut ainsi dans chacun des éléments tétraèdres se décomposer en :

$$\underline{\underline{F}}^{t+\Delta t} = \frac{\partial x^t}{\partial x^0} + \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} + \frac{\partial v^b}{\partial x^0} \right) \Delta t = \underline{\underline{F}}^{t} + \Delta t \frac{\partial v^l}{\partial x^0} + \Delta t \frac{\partial v^b}{\partial x^0} \tag{100}$$

Soit en composantes :

$$F_{ij}^{t+\Delta t} = F_{ij}^{t} + \Delta t \left[\frac{\partial \left(N_q v_{qi}^l \right)}{\partial x_j^0} \right] + \Delta t \left[\frac{\partial \left(N_b v_i^b \right)}{\partial x_j^0} \right] \tag{101}$$

avec $1 \le i, j \le 3$ les indices de direction, et $1 \le q \le 4$ l'indice désignant les nœuds.

Le tenseur de Cauchy-Green gauche est donc de la forme :

$$\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b \right) = \left(\underline{\underline{F}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b \right) \right) \left(\underline{\underline{F}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b \right) \right)^T \tag{102}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b \right) = {} & \underline{\underline{F}}^{t} \left(\underline{\underline{F}}^{t} \right)^T + \underline{\underline{F}}^{t} \Delta t \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} \right)^T + \underline{\underline{F}}^{t} \Delta t \left(\frac{\partial v^b}{\partial x^0} \right)^T + \Delta t \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \left(\underline{\underline{F}}^{t} \right)^T \\ & + \Delta t^2 \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} \right)^T + \Delta t^2 \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \left(\frac{\partial v^b}{\partial x^0} \right)^T \\ & + \Delta t \frac{\partial v^b}{\partial x^0} \left(\underline{\underline{F}}^{t} \right)^T + \Delta t^2 \frac{\partial v^b}{\partial x^0} \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} \right)^T + \Delta t^2 \frac{\partial v^b}{\partial x^0} \left(\frac{\partial v^b}{\partial x^0} \right)^T \end{aligned} \tag{103}$$

La partie bulle du champ de vitesse étant une correction de ce dernier (a priori $\left\| v^b \right\| << \left\| v^l \right\|$), il apparaît légitime de négliger les termes en Δt^2 associés à la partie bulle. On a alors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b \right) = {} & \underline{\underline{F}}^{t} \left(\underline{\underline{F}}^{t} \right)^T + \underline{\underline{F}}^{t} \Delta t \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} \right)^T + \Delta t \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \left(\underline{\underline{F}}^{t} \right)^T + \Delta t^2 \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} \right) \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} \right)^T \\ & + \underline{\underline{F}}^{t} \Delta t \left(\frac{\partial v^b}{\partial x^0} \right)^T + \Delta t \frac{\partial v^b}{\partial x^0} \left(\underline{\underline{F}}^{t} \right)^T \end{aligned} \tag{104}$$

Cette expression correspond alors à la décomposition visée :

$$\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}\left(v^l + v^b \right) = \underline{\underline{B}}_{(1)}^{t+\Delta t}\left(v^l \right) + \underline{\underline{B}}_{(2)}^{t+\Delta t}\left(v^b \right) \tag{105}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}_{(1)}^{t+\Delta t}\left(v^l \right) = {} & \underline{\underline{F}}^{t} \left(\underline{\underline{F}}^{t} \right)^T + \underline{\underline{F}}^{t} \Delta t \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} \right)^T + \Delta t \frac{\partial v^l}{\partial x^0} \left(\underline{\underline{F}}^{t} \right)^T + \Delta t^2 \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} \right) \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^0} \right)^T \\ \underline{\underline{B}}_{(2)}^{t+\Delta t}\left(v^b \right) = {} & \underline{\underline{F}}^{t} \Delta t \left(\frac{\partial v^b}{\partial x^0} \right)^T + \Delta t \frac{\partial v^b}{\partial x^0} \left(\underline{\underline{F}}^{t} \right)^T \end{aligned} \tag{106}$$

Dans ces conditions, la propriété d'orthogonalité permet une simplification de la mise en œuvre en supprimant les contributions bulle de la matrice de raideur.

Les composantes de $\underline{\underline{B}}^{t+\Delta t}$ s'écrivent ainsi

$$B_{ij}^{t+\Delta t} = F_{ip}^{t} F_{jp}^{t} + F_{ip}^{t}\Delta t \frac{\partial\left(N_q v_{qj}^{l}\right)}{\partial x_p^0} + \Delta t \frac{\partial\left(N_q v_{qi}^{l}\right)}{\partial x_p^0} F_{jp}^{t} + \Delta t^2 \frac{\partial\left(N_q v_{qi}^{l}\right)}{\partial x_p^0}\frac{\partial\left(N_q v_{qj}^{l}\right)}{\partial x_p^0} + F_{ip}^{t}\Delta t \frac{\partial\left(N_b v_j^{b}\right)}{\partial x_p^0} + \Delta t \frac{\partial\left(N_b v_i^{b}\right)}{\partial x_p^0} F_{jp}^{t} \tag{107}$$

Il est possible de montrer de la même manière qu'une décomposition pour $\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}^{-1\,t+\Delta t}\left(v^l + v^b\right)$ est de la forme :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}^{-1\,t+\Delta t}\left(v^l + v^b\right) = \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}_{(1)}^{-1\,t+\Delta t}\left(v^l\right) + \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}_{(2)}^{-1\,t+\Delta t}\left(v^b\right) \tag{108}$$

Cette décomposition est alors bien adaptée à la formulation mixte P1+/P1. En effet, nous retrouvons alors la formulation mixte donnée précédemment où :

$$\underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}(v) = \underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}\left(v^l\right) + \underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}\left(v^b\right) \tag{109}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}\left(v^l\right) = 2\left[C\underline{\underline{B}}_{(1)}^{t+\Delta t}\left(v^l\right) - C\alpha\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}_{(1)}^{-1\,t+\Delta t}\left(v^l\right)\right] - \frac{2}{3}\left[Ctr\left(\underline{\underline{B}}_{(1)}^{t+\Delta t}\left(v^l\right)\right) - C\alpha tr\left(\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}_{(1)}^{-1\,t+\Delta t}\left(v^l\right)\right)\right]\underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}\left(v^b\right) = 2\left[C\underline{\underline{B}}_{(2)}^{t+\Delta t}\left(v^b\right) - C\alpha\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}_{(2)}^{-1\,t+\Delta t}\left(v^b\right)\right] - \frac{2}{3}\left[Ctr\left(\underline{\underline{B}}_{(2)}^{t+\Delta t}\left(v^b\right)\right) - C\alpha tr\left(\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}_{(2)}^{-1\,t+\Delta t}\left(v^b\right)\right)\right]\underline{\underline{I}} \end{cases} \tag{110}$$

3.3.2. *Calcul de la matrice de raideur*

Comme il a été vu précédemment, le problème à résoudre dans le cadre d'une formulation en vitesse pression fait intervenir le calcul d'une matrice prenant la forme :

$$\begin{bmatrix} H^{ll} & 0 & H^{lp} \\ 0 & H^{bb} & H^{bp} \\ H^{pl} & H^{pb} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta v^l \\ \Delta v^b \\ \Delta p \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} R^l \\ R^b \\ R^p \end{pmatrix} \tag{111}$$

Dans le cadre du développement d'une nouvelle loi de comportement, les termes H^{ll} et H^{bb} vont devoir être recalculés. H^{ll} s'exprime de la façon suivante :

$$H^{ll} = \frac{\partial R^l}{\partial v^l} \tag{112}$$

Il s'agit donc d'une dérivée pouvant être calculée de manière analytique. Le système de résolution du principe des puissances virtuelles utilisé dans le logiciel Forge3®, calcule un résidu dont le terme associé au comportement considéré s'exprime de la façon suivante :

$$R_{nk}^{l} = \int_{\Omega^t} S_{ij}^{t+\Delta t}\left(v^{l}\right)\frac{\partial N_n}{\partial x_j}\delta_{ik} \tag{113}$$

Le solveur calcule alors une matrice de raideur 16 x 16 par élément de la manière suivante :

$$H_{nk,ml}^{ll} = \int_{\Omega}\frac{\partial S_{ij}^{t+\Delta t}\left(v^{l}\right)}{\partial v_{ml}^{l}}\frac{\partial N_n}{\partial x_j}\delta_{ik} = \int_{\Omega}\frac{\partial S_{kj}^{t+\Delta t}\left(v^{l}\right)}{\partial v_{ml}^{l}}\frac{\partial N_n}{\partial x_j} \tag{114}$$

avec $1 \le i, j, k, l \le 3$ les indices de direction spatiale, et $1 \le m, n \le 4$ les indices de nœuds.

Dans le cas du comportement de Mooney-Rivlin, nous pouvons donc écrire que :

$$S_{ij}^{t+\Delta t}\left(v^{l}\right) = 2\left[CB_{ij}^{t+\Delta t}{}_{(1)}\left(v^{l}\right) - C\alpha B_{ij}^{t+\Delta t\,-1}{}_{(1)}\left(v^{l}\right)\right] - \frac{2}{3}\left[CB_{mm}^{t+\Delta t}{}_{(1)}\left(v^{l}\right)_{mm}^{t+\Delta t} - C\alpha B_{mm}^{t+\Delta t\,-1}{}_{(1)}\left(v^{l}\right)\right]\delta_{ij} \tag{115}$$

$$S_{ij}^{t+\Delta t}\left(v^{b}\right) = 2\left[CB_{ij}^{t+\Delta t}{}_{(2)}\left(v^{b}\right) - C\alpha B_{ij}^{t+\Delta t\,-1}{}_{(2)}\left(v^{b}\right)\right] - \frac{2}{3}\left[CB_{mm}^{t+\Delta t}{}_{(2)}\left(v^{b}\right)_{mm}^{t+\Delta t} - C\alpha B_{mm}^{t+\Delta t\,-1}{}_{(2)}\left(v^{b}\right)\right]\delta_{ij} \tag{116}$$

Connaissant la formulation analytique complète de la partie déviatorique, il est alors possible de calculer la formulation analytique de la partie hessienne liée à la loi de comportement. Le détail de ce calcul ne figure pas dans le manuscrit.

3.4. Validation de l'implantation

Plusieurs cas de validation sont étudiés en comparaison avec des modèles analytiques simples mais néanmoins proches de la modélisation de l'étirage – soufflage :

- *Traction / compression uniaxiale d'un barreau.*

La phase d'étirage de la préforme engendre une déformation longitudinale pouvant être supérieure à 200%. La simulation d'un essai d'élongation simple comparée avec la solution analytique adaptée à l'hyperélasticité fournit une bonne base de comparaison.

- *Gonflage d'un tube.*

La phase de soufflage donne lieu à des déformations radiales dont le rayon final peut être 4 fois supérieur au rayon initial. La comparaison entre le modèle analytique du gonflage d'un tube hyperélastique et la simulation devrait permettre de vérifier la robustesse du logiciel de calcul pour ce genre de sollicitations.

- *Gonflage d'une sphère.*

Le fond de la préforme peut être assimilé à une demi-sphère et l'étude d'un modèle de gonflage de ce type peut permettre de révéler certaines difficultés liées à cette géométrie.

3.4.1. *Modélisation de la traction ou compression uniaxiale*

L'essai d'élongation simple est largement répandu dans la littérature. L'objectif est de connaître à partir du champ de vitesse et de la loi de comportement du matériau, l'évolution de la déformation et de la contrainte au cours du temps sous l'effet d'une sollicitation.

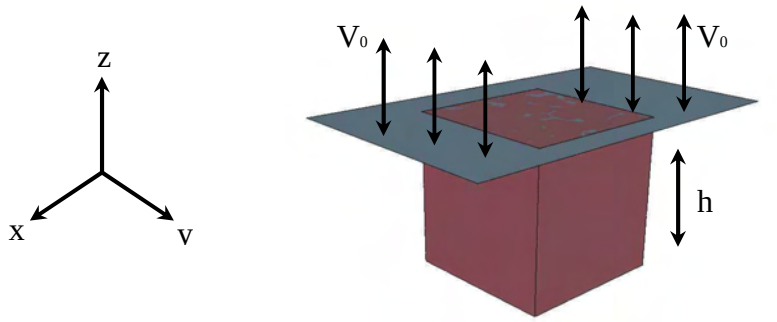


Figure 101 : Simulation de l'essai de traction/compression simple.

Un développement complet (voir annexe) sur le modèle de Mooney-Rivlin à deux paramètres permet de calculer la valeur de la contrainte de traction (compression) :

$$\sigma_{33} = 2C\left[\frac{h^2}{h_0^2} - \frac{h_0}{h}\right] - 2C\alpha\left[\frac{h_0^2}{h^2} - \frac{h}{h_0}\right] \tag{117}$$

Le modèle numérique considéré pour la validation est celui d'un cube ayant trois plans de symétrie et subissant une traction verticale. Sa hauteur initiale est de 5mm et la traction maximale sera de 25mm.

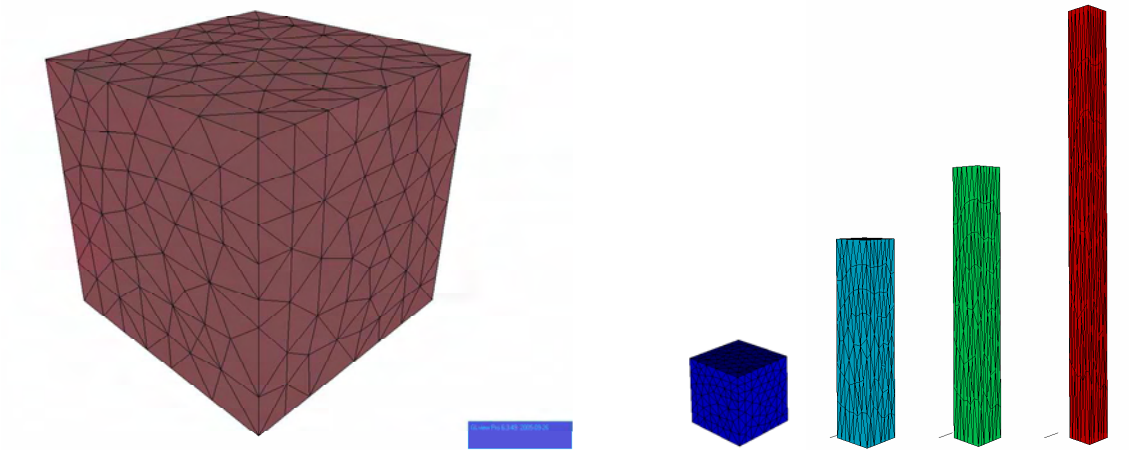


Figure 102 : Modèle numérique de l'essai de traction uniaxiale.

Le parfait accord pour un pas de temps peu élevé ($\Delta t = 1s$) entre la courbe analytique et le calcul numérique permet de conclure à une bonne implantation de la loi de comportement au sein du logiciel.

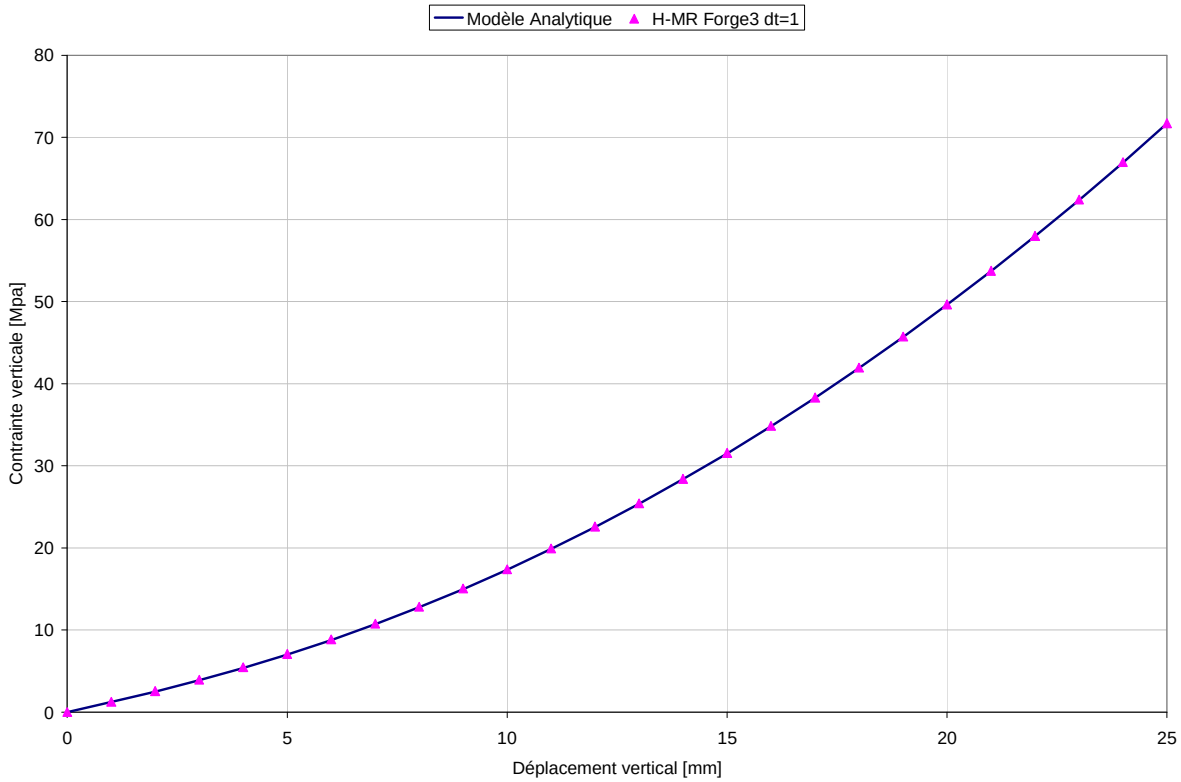


Figure 103 : Evolution de la contrainte en fonction de la hauteur de traction pour un modèle hyperélastique de type neo-hookéen (C=1MPa, α=0).

3.4.2. *Gonflage d'un tube*

Le gonflage de tube est un cas test proche de notre étude de par la géométrie des préformes. Il s'agit d'évaluer l'évolution du rayon interne d'un tube supposé infini en longueur et dans lequel est appliquée une pression sur la surface interne.

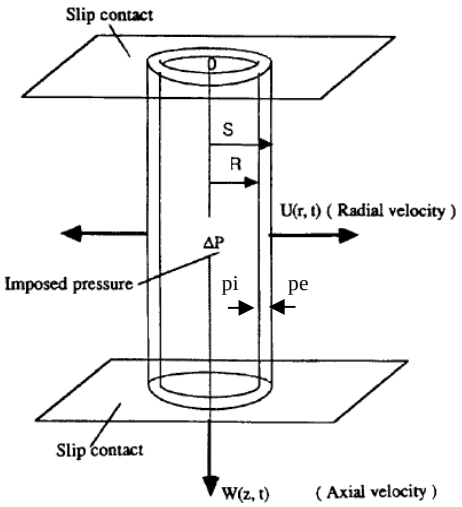


Figure 104 : Modèle de gonflage de tube [SCH-2000].

Un développement complet (voir annexe) sur le modèle de Mooney-Rivlin à deux paramètres permet de montrer que la relation entre pression interne et rayon est la suivante :

$$\frac{\Delta P(t)}{C(1+\alpha)} = \frac{S_o^2}{R^2 + S_o^2 - R_o^2} - \frac{R_o^2}{R^2} + \ln\left(\frac{S_o^2}{R_o^2}\frac{R^2}{R^2 + S_o^2 - R_o^2}\right) \tag{118}$$

avec R et R_o rayons internes du tube aux instants courant t et initial $t = 0$ respectivement.

Il vient de la même façon, mais en utilisant cette fois la notation :

$$\frac{S_o}{R_o} = 1 + \delta_o \tag{119}$$

$$\frac{\Delta P(t)}{C(1+\alpha)} = \frac{(1+\delta_o)^2}{\left(\frac{R}{R_o}\right)^2 + (1+\delta_o)^2 - 1} - \left(\frac{R_o}{R}\right)^2 + \ln\frac{(1+\delta_o)^2}{1 + \left(\frac{R_o}{R}\right)^2\left[(1+\delta_o)^2 - 1\right]} \tag{120}$$

On obtient ainsi une relation directe entre R et ΔP qui est illustrée figure suivante pour différentes valeurs des paramètres de la loi de Mooney-Rivlin.

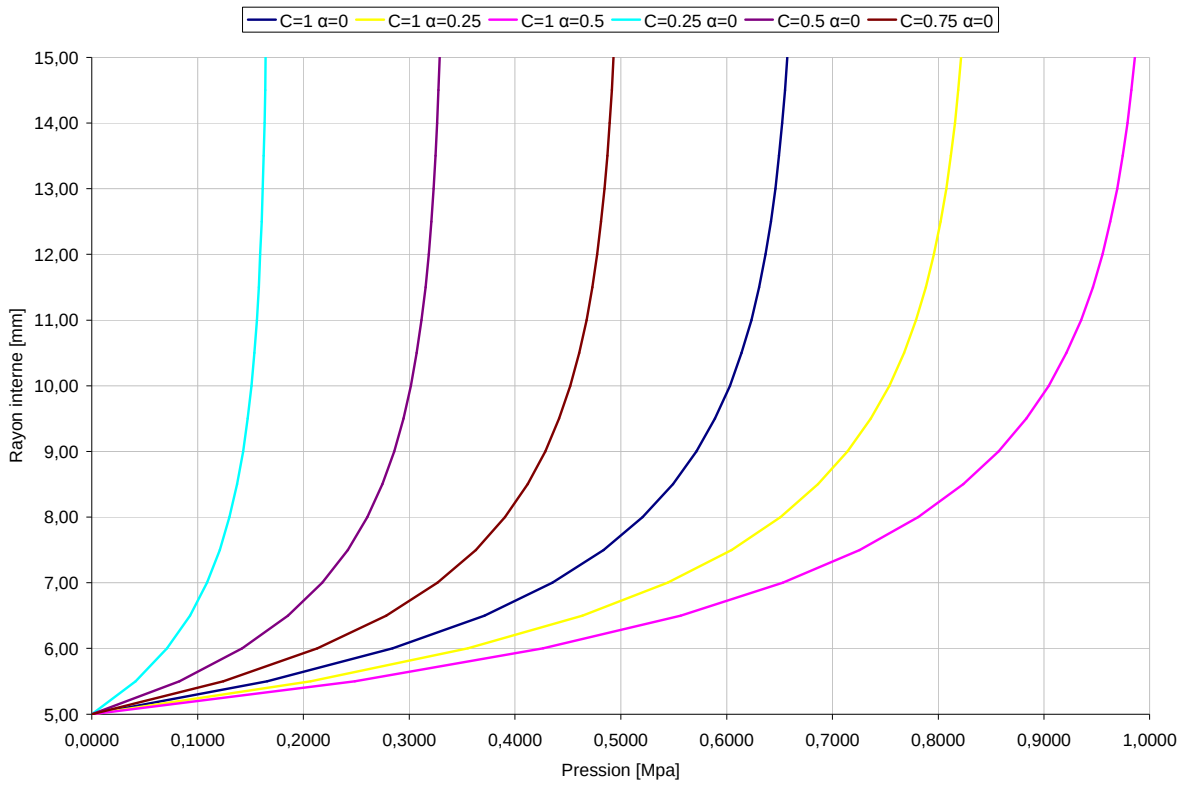


Figure 105 : Evolution du rayon d'un cylindre suivant le modèle analytique en fonction de la pression appliquée.

Ainsi, le tracé de l'évolution du rayon en fonction de la pression fait apparaître une limite en pression à partir de laquelle le rayon augmente de manière infinie, ce qui est une source de difficulté d'un point de vue numérique. Cette limite est définie par :

$$\lim_{R\to+\infty} \Delta P = 2C(1+\alpha)\ln\left(\frac{S_0}{R_0}\right) \tag{121}$$

En faisant varier les paramètres matériau propres à la loi de Mooney-Rivlin, il apparaît qu'une augmentation de C ou de α engendre un durcissement nécessitant donc une pression plus importante pour obtenir un même rayon final.

Une première comparaison peut être effectuée entre ce modèle de tube épais et le modèle basé sur l'hypothèse membranaire développé par N. Chevaugeon [CHE-2002] dans le cadre de la validation du développement d'un logiciel basé sur cette même hypothèse. L'expression de la pression est alors :

$$\Delta P = 2C\delta_o(1+\alpha)\left[1-\left(\frac{R_0}{R}\right)^4\right] \tag{122}$$

Le tracé de la relation $\Delta P(R)$ pour différentes valeurs du rapport épaisseur initiale / rayon initial montre que les modèles de type membrane sont adaptés pour des valeurs inférieures ou égales à 0.1. Par contre pour des valeurs supérieures, la différence entre un modèle membranaire et un modèle volumique est trop importante pour justifier l'hypothèse membranaire. Ainsi, pour la préforme utilisée dans le cadre de la fabrication des bouteilles Vittel 1.5l, ce rapport à l'état initial s'élève à environ 0.3

et justifie donc pleinement l'idée d'une modélisation volumique sans approximation membranaire du procédé de soufflage.

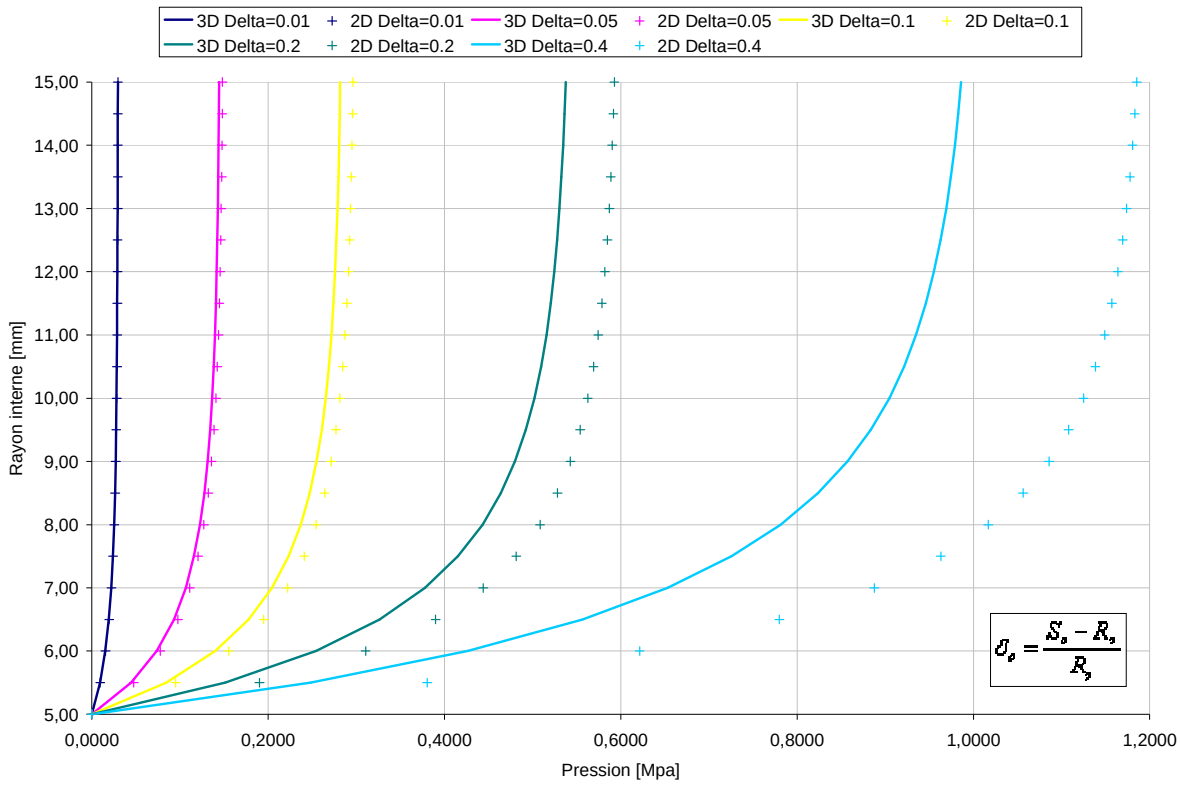


Figure 106 : Evolution analytique du rayon d'un cylindre en fonction de la pression appliquée pour différentes valeurs de δ_0 dans le cadre d'une loi de Mooney-Rivlin (C=1, α=0.5).

La comparaison avec le modèle numérique s'effectue sur 1/8ème de cylindre maillé possédant deux plans de symétrie inférieur et supérieur de manière à reproduire la condition de contact glissant, et deux plans de symétrie latéraux pour reproduire la circonférence du cylindre.

Géométrie		***Maillage***		***Loi de cpt***	***Conditions limites***	
Rayon interne	Epaisseur	Nombre de nœuds	Nombre d'éléments	Néo-Hookéen	Set de pression linéaire sur la face interne	
5 mm	2 mm	900	4 000	C=1 MPa	P=0 MPa à t=0 s	P=0.7 MPa pour t≥1s

Tableau 20 : Récapitulatif de modèle numérique de gonflage de tube.

La comparaison entre le modèle analytique 3D et les calculs Forge3® montre que plus la pression approche de la pression limite et plus l'erreur croît malgré une diminution du pas de temps. D'un point de vue numérique, cette asymptote verticale pour laquelle une pression implique un rayon infini se traduit par un problème de convergence lors de la résolution du système non linéaire.

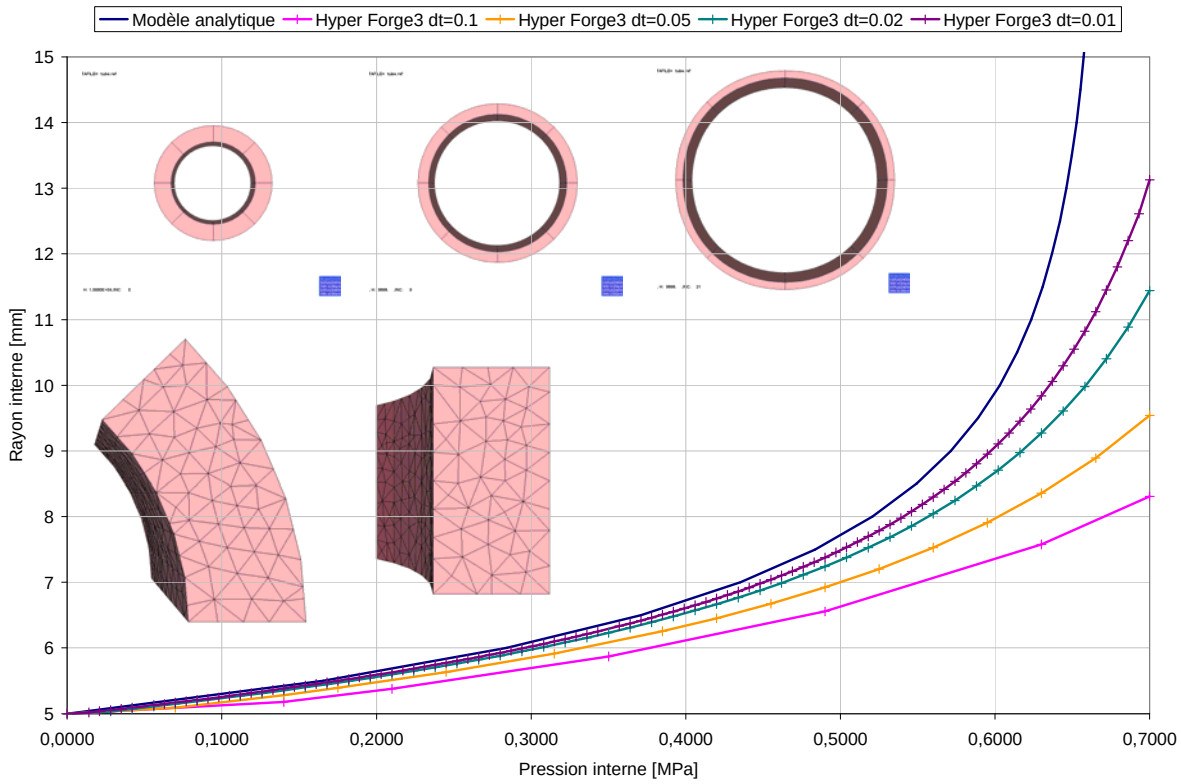


Figure 107 : Evolution du rayon interne d'un tube néo-hookéen (C=1MPa) en fonction de la pression appliquée sur la face interne du tube.

3.4.3. *Gonflage d'une sphère*

Le gonflage d'une sphère est souvent étudié en rhéologie élongationnelle [LI-2001]. En effet, il est possible à partir d'un essai de gonflage de disque marqué, de connaître le champ de déformation lié à la pression appliquée et au matériau utilisé et de se ramener ainsi à une identification paramétrique propre à la loi de comportement.

Il est possible de définir un modèle analytique appliqué à l'hyperélasticité pour le gonflage de sphère [SCH-2004].

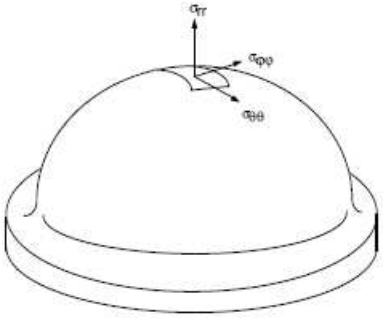


Figure 108 : Modèle de gonflage de sphère [SCH-2004].

Un développement complet (voir annexe) sur le modèle de Mooney-Rivlin à deux paramètres permet d'obtenir l'évolution du rayon interne de la sphère en fonction de la pression qui lui est appliquée et de ses dimensions initiales.

$$\left(\frac{S_0}{\sqrt[3]{S_o^3-R_o^3+R^3}}\right)^4-\left(\frac{R_0}{R}\right)^4+2\alpha\left[\left(\frac{S_0}{\sqrt[3]{S_o^3-R_o^3+R^3}}\right)^2-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]$$
$$+4\left(\frac{S_0}{\sqrt[3]{S_o^3-R_o^3+R^3}}-\frac{R_0}{R}\right)-4\alpha\left(\frac{\sqrt[3]{S_o^3-R_o^3+R^3}}{S_0}-\frac{R}{R_0}\right)=\frac{\Delta P}{C} \quad (123)$$

Il est dès lors possible de tracer pour différentes valeurs des paramètres de la loi de Mooney-Rivlin, l'évolution du rayon en fonction de la pression interne (voir figure suivante).

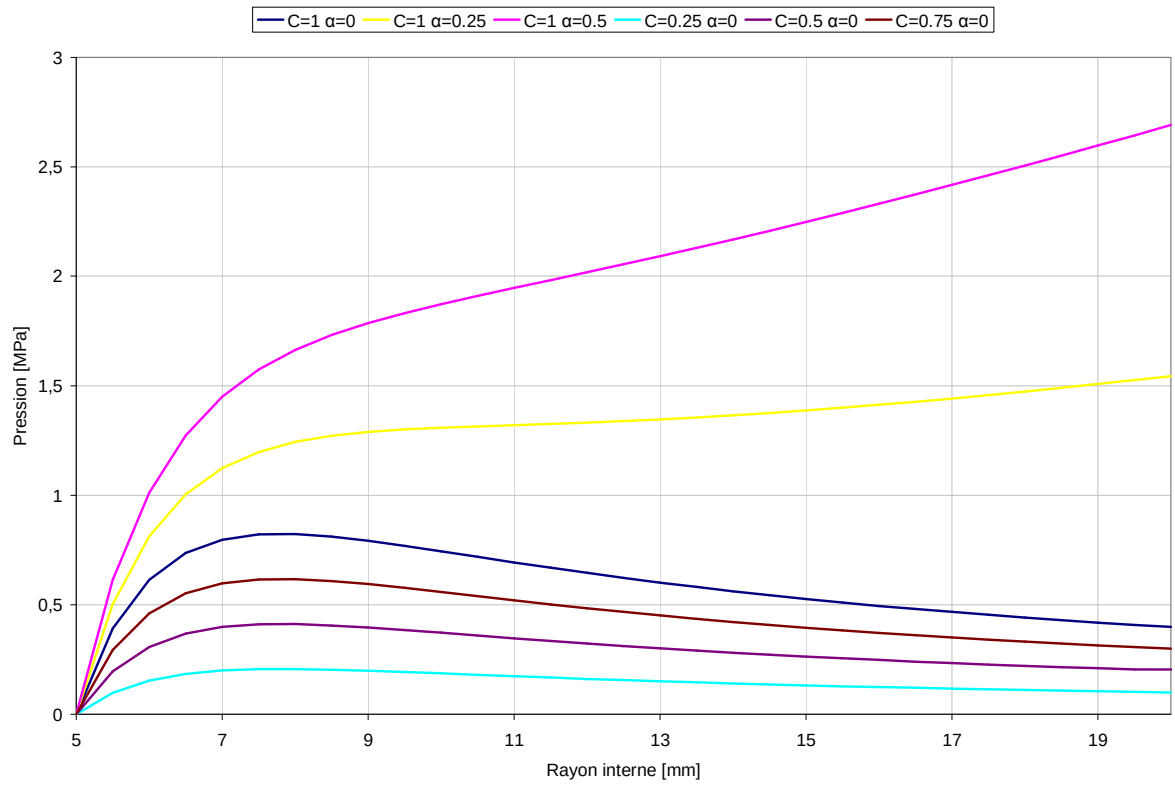


Figure 109 : Evolution du rayon d'une sphère en fonction de la pression appliquée.

Le tracé montre que cette loi permet de modéliser le durcissement structural accompagnant la matière lors de sa déformation. En effet, pour des taux de déformation élevés, la pression augmente malgré l'éventuelle diminution qu'elle avait pu connaître après le passage d'un seuil.

Ainsi, les différentes courbes montrent clairement que si le paramètre C influence directement la pression nécessaire au gonflage, c'est en revanche le paramètre α et lui seul qui va réguler le durcissement structural (inexistant quand $\alpha = 0$).

D'un point de vue numérique, comme pour le tube, le cas étudié représente 1/8ème de demi-sphère possédant un plan de symétrie inférieur et deux autres latéraux pour reconstituer par symétrie la sphère complète. La condition limite repose de nouveau sur l'application d'une pression linéaire au cours du temps sur la surface interne de la sphère ayant une loi de comportement de type néo-hookéen avec $C = 1MPa$.

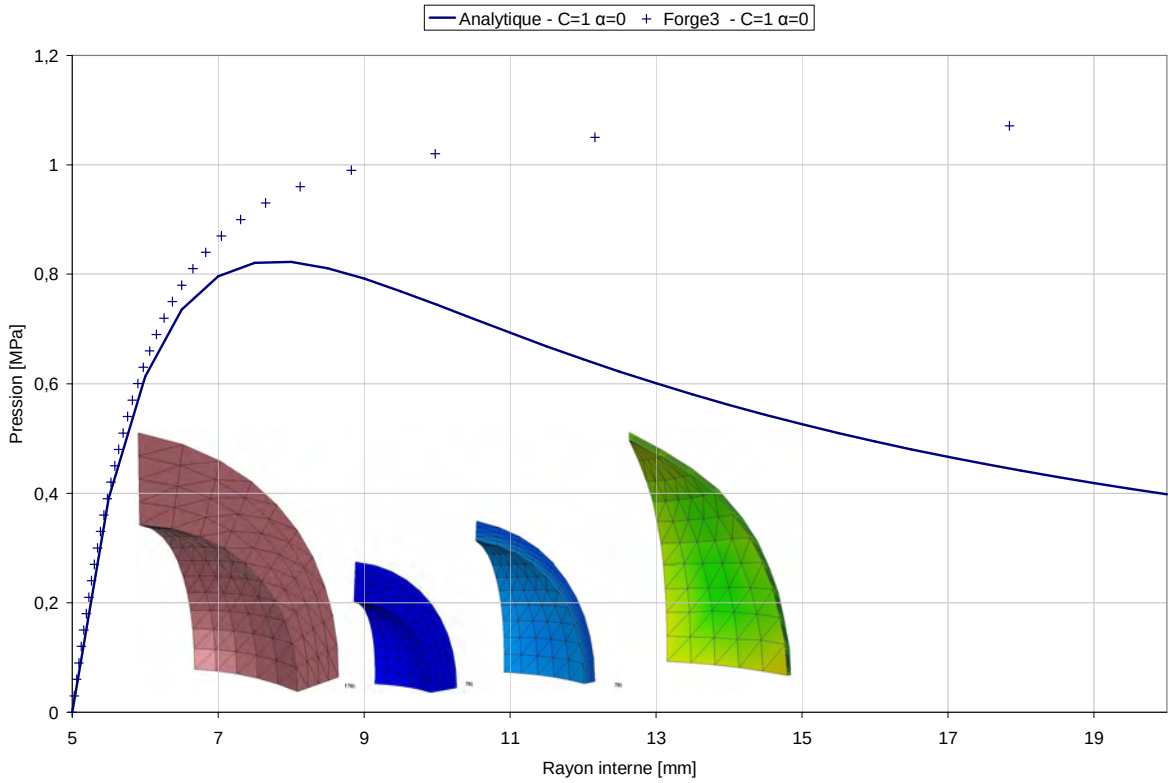


Figure 110 : Validation du calcul du gonflage d'une sphère hyperélastique.

L'erreur entre le modèle analytique et le modèle numérique augmente lors de la montée en pression jusqu'au sommet de la courbe de chargement révélé par l'équation de la croissance du rayon en fonction de la pression. Ce maximum local est un point limite à partir duquel la continuation du gonflement s'accompagne d'une décroissance de la pression. La simulation numérique en imposant une pression s'avère alors inapplicable pour dépasser ce point et simuler la phase instable. Cette méthode standard consiste à imposer une pression donnée et à résoudre ensuite les équations d'équilibre. Schématiquement, le problème revient à trouver le point d'intersection entre la courbe d'équilibre et la droite horizontale de chargement. L'intersection est garantie tant que l'effort imposé ne dépasse pas le maximum de la courbe de chargement [BEN-2005].

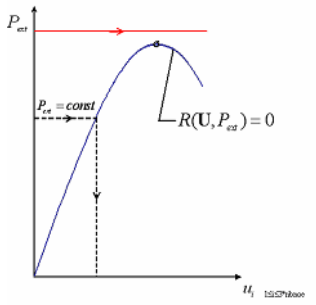


Figure 111 : Problématique de résolution liée à l'imposition d'une pression [BEN-2005].

Ce point limite nécessite donc une méthode de résolution plus complexe tenant compte de la relation entre le chargement et le déplacement. Les méthodes de continuation sont l'une d'entre elles.

3.5. Instabilités et traitement numérique

Les lois de comportement hyperélastique décrites et utilisées précédemment sont non linéaires. Ainsi, si le modèle analytique du gonflage de tube fait apparaître une pression limite à partir de laquelle le rayon augmente de manière infinie, le gonflage d'une sphère engendre lui l'apparition d'un point limite, générateur d'instabilités fortes en terme de résolution numérique. Il est concrètement possible de gonfler davantage une sphère, tout en diminuant la pression appliquée à l'instant précédent. Ce phénomène correspond à celui mesuré expérimentalement lors de notre étude dans le cadre du gonflage des corps creux. L'enregistrement de la pression en tête de canne lors du soufflage d'une préforme montre de façon claire un point limite à partir duquel la pression diminue et qui correspond au « cédage » de la matière.

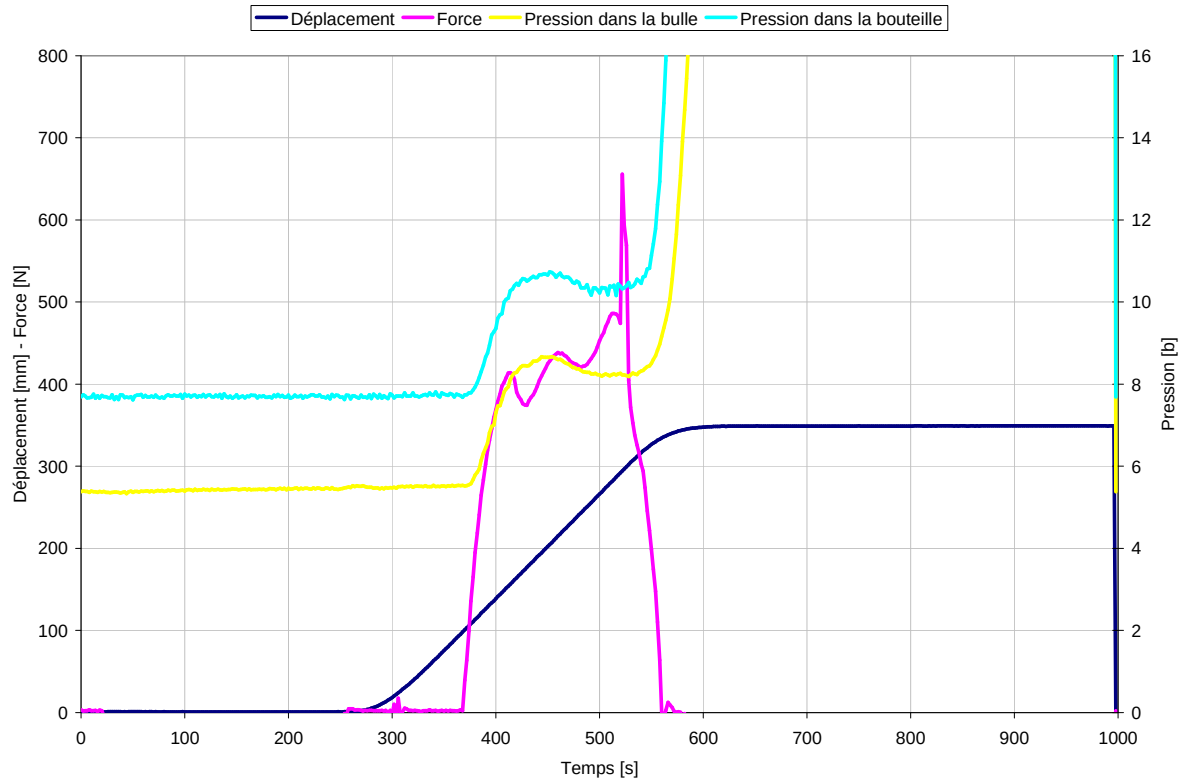


Figure 112 : Evolution du déplacement de la canne, de la force en tête de canne et de la pression enregistrée par 2 capteurs au cours de l'étirage soufflage d'une préforme.

Les problèmes liés à la mise en forme de matériaux à parois minces sont courants dans la littérature qu'elle soit métallurgique (problèmes de striction), plastiques (fabrication de gaines) ou même biomécanique [DEL-2004]. La plupart de ces difficultés sont liées aux géométries des pièces désirées, au procédé de fabrication ou encore aux caractéristiques thermo-physiques de la matière. Un problème de mise en forme peut être résolu après étude en jouant sur l'un ou plusieurs de ces paramètres. Néanmoins, certains problèmes sont plus difficiles à maîtriser, notamment lorsqu'ils sont liés à des phénomènes instables ou à des modes de bifurcation.

3.5.1. *Points d'instabilité et de bifurcation*

Les instabilités correspondent à un seuil où temporairement, la matière ne répond pas telle qu'elle le devrait si une logique de mise en forme existait. Ainsi, en soufflage de corps creux, plusieurs auteurs ont mis en évidence de manière expérimentale la présence de phénomènes instables et de modes de bifurcation. H. Alexander [ALE-1971] a isolé une configuration non sphérique lors du soufflage d'un ballon sphérique en néoprène. De même, S. Kyriakides et Y. Chang ont étudié l'apparition et la propagation d'une instabilité le long d'un tube en latex [KYR-1991]. D'un point de vue numérique, les phénomènes d'instabilités ont été largement abordés dans la littérature sur ces cas simples [KHA-1992].

Les modes de bifurcation des matériaux ont eux été étudiés à l'aide des méthodes de continuation par longueur d'arc par Shi et Mota [SHI-1996]. Plus récemment, N. Chevaugeon [CHE-2002] a présenté une étude sur les instabilités et bifurcations du soufflage de membranes hyperélastiques. La résolution du système algébrique est réalisée par couplage de l'algorithme de Newton-Raphson à la méthode de longueur d'arc et permet ainsi l'étude des points singuliers et des branches secondaires. L'auteur parvient à l'aide d'une formulation en éléments finis membranaires sur un matériau de type Mooney-Rivlin à reconstituer les différentes évolutions possibles du rayon d'un cylindre ou d'une sphère lors de l'application d'une pression.

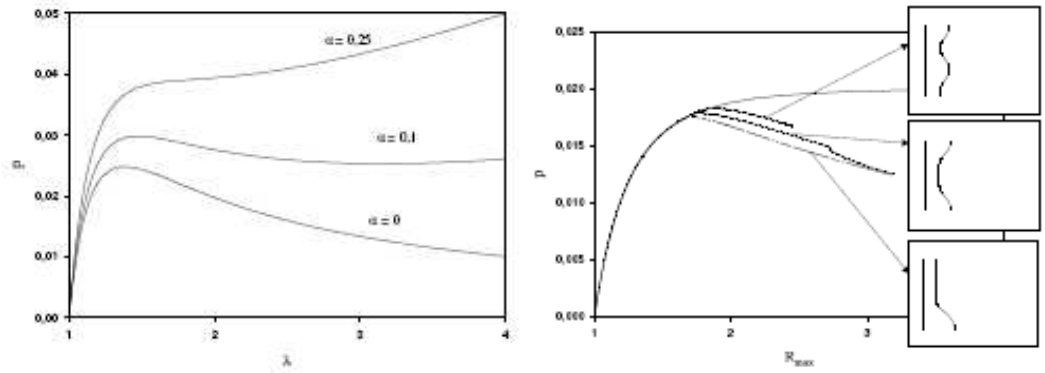


Figure 113 : Solution du soufflage d'une membrane sphérique et d'un cylindre infini [CHE-2002].

Le suivi de la géométrie en fonction des branches de bifurcation suivies permet à N. Chevaugeon de définir les formes finales d'un tore à terme de son soufflage.

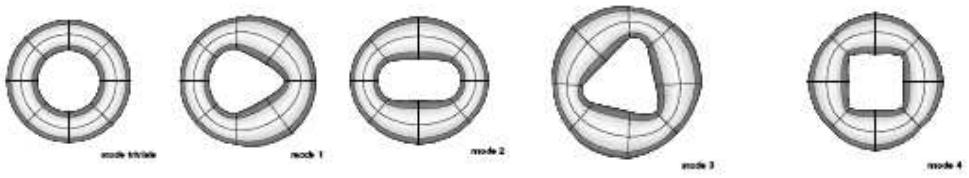


Figure 114 : Modes de bifurcation d'une membrane torique [CHE-2002].

Les méthodes de continuation semblent donc être un outil puissant pour l'étude des instabilités et des bifurcations -au moins dans le cadre membranaire- et la modélisation du soufflage jumelée aux

grandes déformations et à l'hyperélasticité. Nous allons donc nous attacher dans ce qui suit, à décrire une méthode de continuation et son utilisation dans le logiciel Forge3®.

3.5.2. *Présentation des méthodes de continuation*

Les méthodes dites de continuation consistent à suivre une courbe dans l'espace des inconnues du problème. Ainsi, il existe plusieurs types de suivi dans la littérature adaptés à la continuation :

- Continuation par contrôle d'effort,
- Continuation par déplacement [BAT-1979],
- Continuation par longueur d'arc [CRI-1991].

Pour une méthode de contrôle de déplacement, l'approche consiste à imposer le déplacement d'un nœud particulier et résoudre ensuite le problème d'équilibre. Schématiquement, ceci revient à trouver le point d'intersection entre la courbe d'équilibre et la droite de charge verticale. Même en présence d'un point limite, l'intersection est assurée aussi bien avant qu'après le pic de pression.

Une autre approche, dite de longueur d'arc, consiste à chercher l'intersection entre la courbe d'équilibre et une courbe de charge dont l'équation est connue à l'avance. La méthode assure la convergence du problème d'équilibre avant et après le point limite.

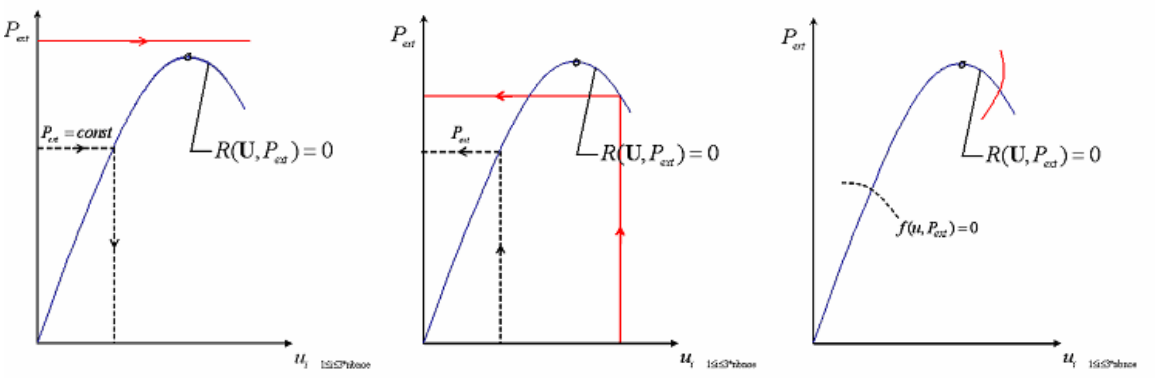


Figure 115 : Courbes charge/déplacement adapté aux 3 méthodes de continuation [BEN-2005].

Les 3 méthodes de continuation ont été implantées dans le logiciel Forge3® dans le cadre des travaux de M. Ben Tahar sur la modélisation du procédé d'hydroformage [BEN-2005] en utilisant des modèles rhéologiques de type élasto-viscoplastique.

Elles permettent le passage du point critique dans la simulation du gonflage circulaire de tôles par hydroformage (figure suivante).

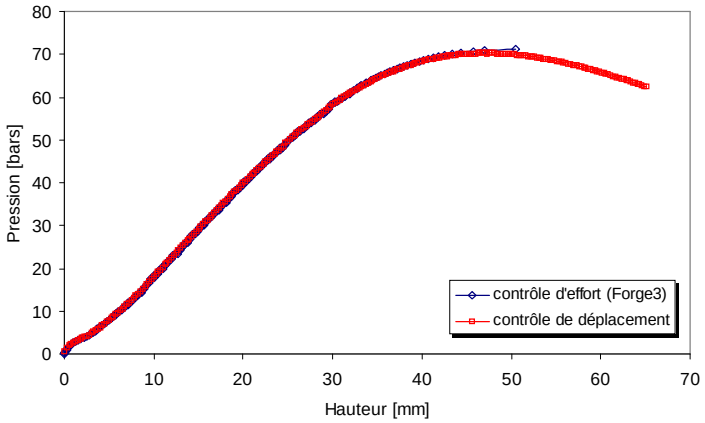


Figure 116 : Validation du contrôle de déplacement sur gonflage circulaire [BEN-2005].

Néanmoins, le contrôle du déplacement est basé sur le suivi de la trajectoire d'un seul nœud, ce qui pose un problème lorsque ce dernier entre en contact avec l'outil puisque la simulation s'arrête dès lors. Cette difficulté ne se pose pas pour les méthodes de longueur d'arc puisque ces méthodes contrôlent le déplacement de l'ensemble du maillage, d'où leur utilisation en cas de gonflage confiné.

Nous décrivons ci-après, les résultats de cette dernière méthode, obtenus dans le cadre de lois hyperélastiques.

3.5.3. *Gonflage d'un tube*

Appliquée aux cas du gonflage de tube précédemment étudié (géométrie initiale avec un rayon interne de 5mm et une épaisseur de 2mm), la continuation par longueur d'arc permet d'accroître au voisinage de la pression limite, la précision obtenue précédemment lors de la résolution classique avec la méthode de Newton-Raphson.

La différence entre le modèle analytique et le calcul numérique dans ce cas est quasi nulle pour des déformations allant jusqu'à 80%. L'erreur augmente ensuite progressivement en créant un décalage avec le modèle analytique. Il est important de noter que la méthode de longueur d'arc permet de dépasser largement les 200% de déformation difficilement atteints dans le cadre d'une résolution classique. En effet, même si un décalage apparaît avec le modèle analytique, cette méthode permet néanmoins d'atteindre des niveaux de déformation plus proches de ceux désirés dans le cadre de la fabrication des bouteilles P.E.T. (entre 300 et 400%).

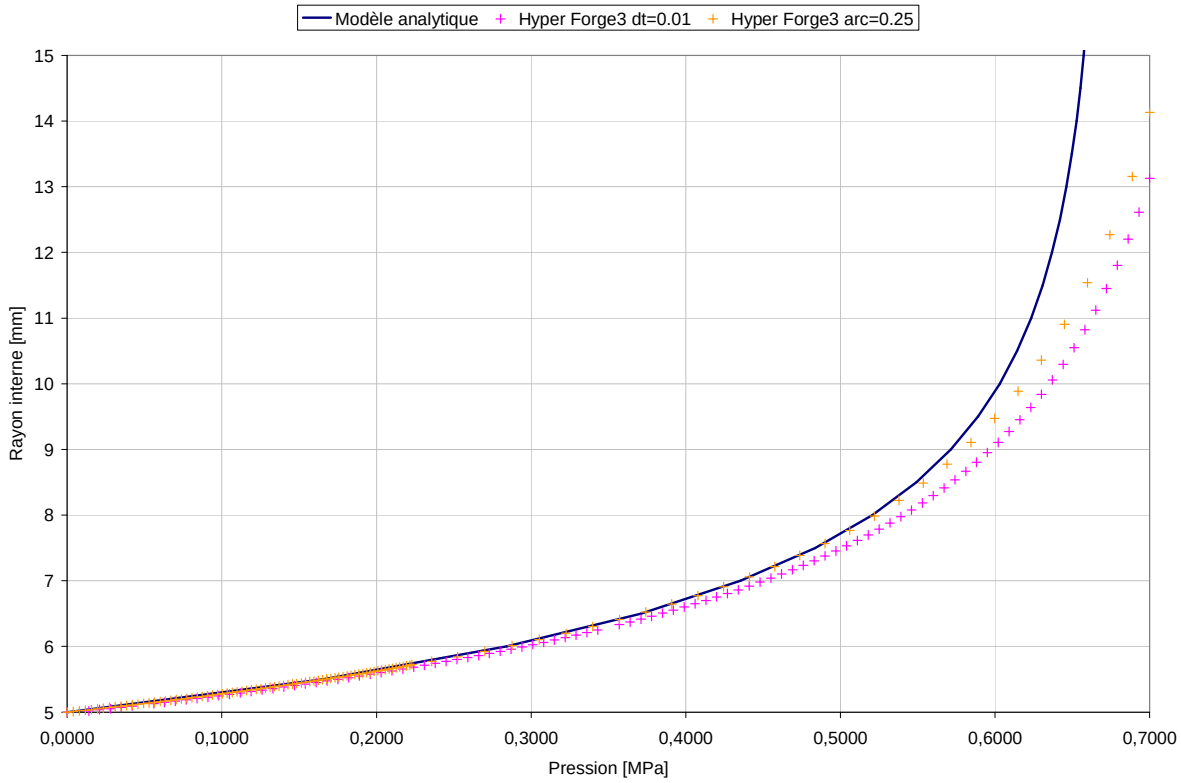


Figure 117 : Evolution du rayon interne d'un tube hyperélastique de type néo-hookéen (C=1MPa) en fonction de la pression imposée sur sa surface interne tracé dans le cadre du modèle analytique, d'une résolution en contrôle d'effort et d'une résolution par longueur d'arc.

3.5.4. *Gonflage d'une sphère*

Au-delà du gain en précision illustré précédemment, l'utilisation des méthodes de longueur d'arc est déterminante dans le cadre du gonflage de sphère. En effet, le modèle analytique fait apparaître un point limite caractérisé par un maximum local sur la courbe de l'évolution de la pression en fonction du rayon. La méthode classique utilisée dans Forge3® est inapte à reproduire ce genre de comportement et cela se traduit par le prolongement de la courbe après le point limite suivant une asymptote horizontale (figure suivante). Cette dernière s'explique par la formulation incrémentale en pression monotone croissante du logiciel qui tout en augmentant de façon moins significative la pression au cours du temps après ce point, va néanmoins déterminer l'évolution du rayon interne de la sphère.

Ce point limite au niveau numérique est matérialisé par l'apparition d'une valeur propre négative au sein de la matrice de rigidité qui la fait donc devenir singulière. Cette singularité entraîne alors une difficulté de résolution qui se traduit par la divergence du système itératif et l'éloignement de la courbe calculée par rapport au modèle analytique.

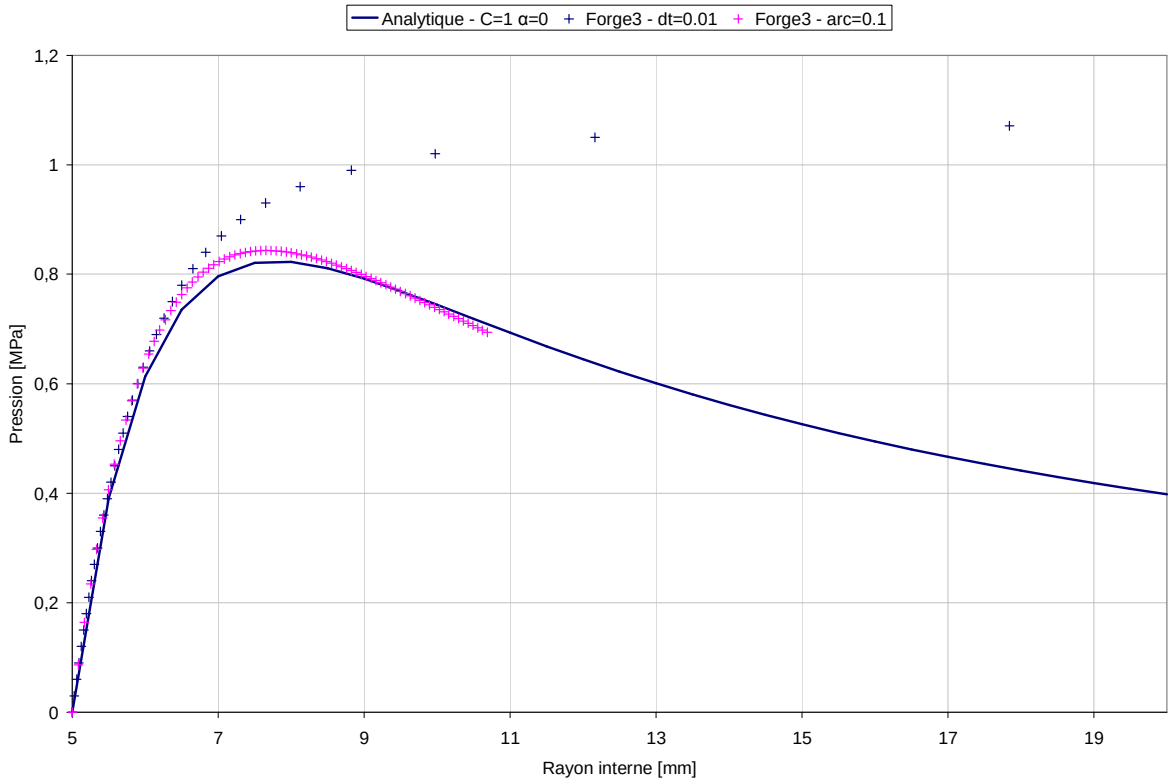


Figure 118 : Relation entre pression appliquée et rayon interne lors du gonflement d'une sphère hyperélastique de type néo-hookéen (C=1MPa) en fonction de la pression imposée sur sa surface interne.

La résolution à l'aide de la méthode de longueur d'arc étant complètement différente [BEN-2005], le point limite n'est plus problématique dans cette configuration. Ainsi, à l'approche du maximum local, la courbe numérique reste plus proche du modèle analytique que ce n'était le cas par la résolution avec un simple Newton-Raphson à pression imposée. De plus, le passage de l'instabilité vers la phase de pression descendante se fait sans difficultés mais la convergence du système s'arrête au cours de cette nouvelle phase. Cette rupture soudaine de la convergence dans une phase a priori non problématique peut s'expliquer par l'existence d'un point de bifurcation local dans cette configuration (i.e. dans cette géométrie et avec cette loi de comportement). Ce point serait synonyme d'une dualité dans le choix du chemin possible, engendrant alors un problème de convergence du système itératif.

Cependant, une autre cause pourrait être l'existence d'instabilités intrinsèques associées au comportement hyperélastique en grandes déformations (au moins dans le cadre d'éléments finis (v,p) P1+/P1).

3.6. Bilan sur l'utilisation des lois hyperélastiques

Comme l'a montré la bibliographie, il existe de nombreux potentiels hyperélastiques dont la complexité peut varier de manière importante. Notre étude basée sur deux des plus simples (néo-hookéen et Mooney-Rivlin) a néanmoins permis de mettre en évidence de nombreuses difficultés dans une implantation pour un logiciel de calcul 3D et de révéler ses limites pour l'application au P.E.T. dans un contexte industriel.

3.6.1. *Les difficultés liées à l'hyperélasticité dans un logiciel de calcul 3D*

Tout d'abord, l'utilisation de lois de comportement hyperélastiques engendre le calcul de termes non symétriques dans la matrice de raideur d'une formulation en vitesse/pression. Ces termes ne peuvent être négligés et ont donc nécessité l'implantation d'un solveur non symétrique au sein du logiciel. En effet, une résolution sans leur prise en compte provoque un arrêt prématuré de la convergence du calcul.

Ensuite, les différents modèles analytiques abordés dans notre étude ont montré, en accord avec la littérature, l'existence de pressions limites, d'instabilités et de points de bifurcation ne pouvant être approchés par des méthodes de résolution classique type Newton-Raphson en pression imposée.

Cette difficulté a nécessité l'utilisation des méthodes de continuation, plus adaptées à ce genre de calcul et développées dans le cadre des travaux de M. Ben Tahar. La longueur d'arc a ainsi permis de s'affranchir sans difficulté du passage du maximum local pouvant apparaître sur une courbe rayon/pression mais elle ne permet pas, en son état, le passage d'un point de bifurcation et le suivi d'une branche post-bifurcatoire.

Appliquée au cas du soufflage de tube, la méthode de résolution par longueur d'arc a également permis de diminuer la différence avec le modèle analytique développé comme le montre la figure suivante.

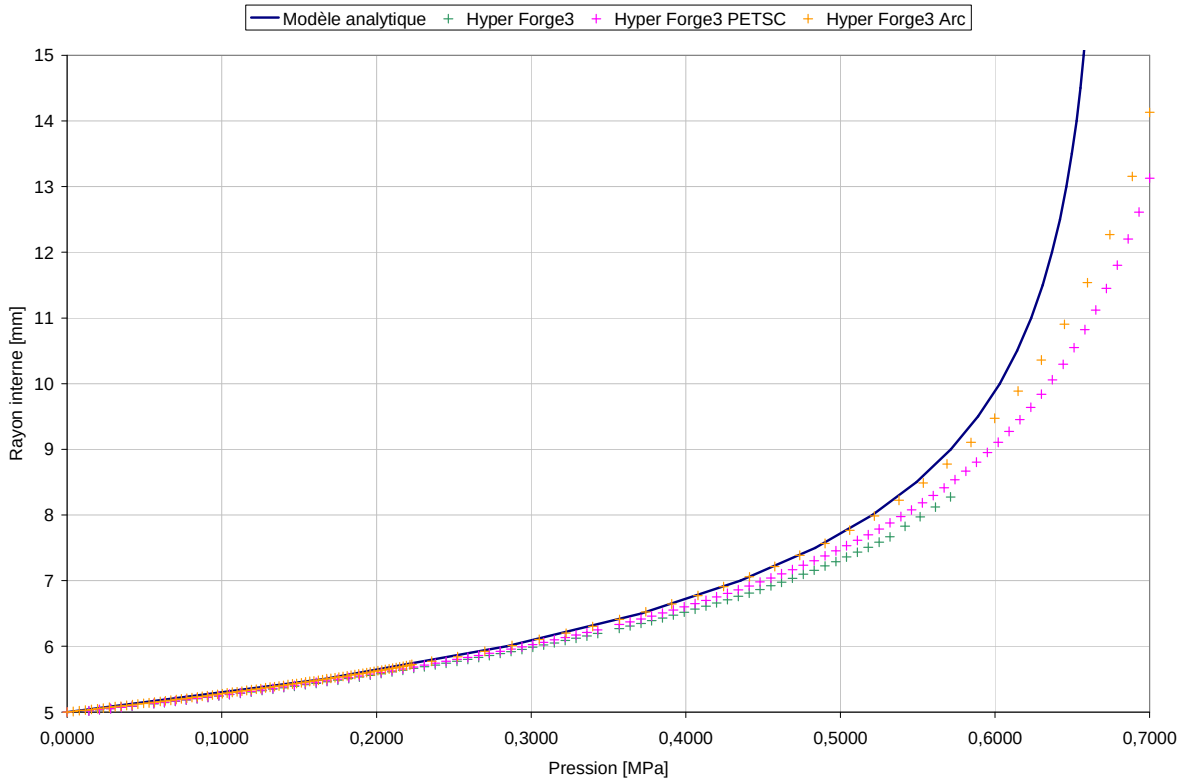


Figure 119 : Evolution du rayon interne d'un tube hyperélastique en fonction de la pression imposée sur sa surface interne avec les 3 types de résolution (classique, PETSC, arc [BEN-2005]).

Enfin, ces lois souvent utilisées dans le domaine des grandes déformations (supérieures à 300%) engendrent des problèmes numériques liés à la perte de la qualité initiale du maillage. Les distorsions pouvant apparaître localement à partir d'un certain seuil de déformation lié au fort taux d'étirage et de gonflage, nécessitent souvent l'utilisation d'un remaillage afin de pouvoir continuer les calculs avec une précision satisfaisante.

Dans le cadre d'une loi hyperélastique, l'état de contrainte du matériau ne dépend que de la différence entre sa configuration à un instant donné et celle de l'état initial. Ainsi, un remaillage nécessite une interpolation des nouveaux nœuds dans les coordonnées du maillage initial ce qui peut engendrer une perte de la convergence lors de la reprise du calcul.

3.6.2. *Les limites de l'hyperélasticité dans le cadre d'une utilisation industrielle*

Comme l'a montré N. Billon [BIL-2002], il n'existe pas à ce jour une loi universelle permettant de rendre compte du comportement du P.E.T. sur toute sa gamme de température et de vitesses de sollicitation.

Ainsi, l'un des principaux inconvénients de l'hyperélasticité vient de sa non prise en considération de la vitesse de sollicitation et donc du temps dans le procédé de mise en forme. Cette carence est problématique car, comme l'indique la littérature [CHE-2001], pour de simples essais de traction uniaxiaux, la contrainte évolue très différemment en fonction de la vitesse de sollicitation (figure suivante)

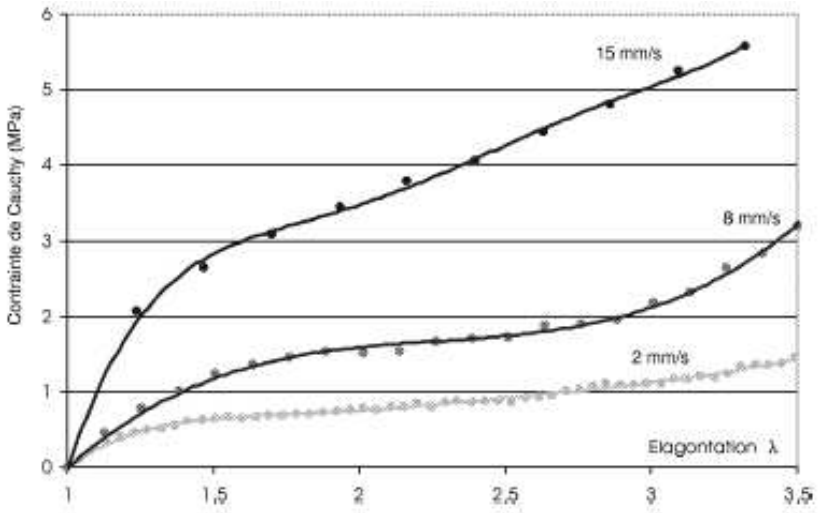


Figure 120 : Résultats caractéristiques de l'essai d'étirage à 100°C [CHE-2001].

Afin de palier les carences du modèle hyperélastique et de s'affranchir des limites qu'il impose au niveau numérique, nous nous sommes également intéressés à des lois de comportement viscoplastiques. En effet la viscoplasticité, contrairement à l'hyperélasticité, intègre naturellement la viscosité et donc la dépendance temporelle et laisse également la possibilité d'implantation de modèles anisotropes. De plus, le durcissement structural peut être rendu simplement par une approche phénoménologique.

4. Utilisation de lois de comportement viscoplastique

Le comportement des fluides pseudoplastiques traduit la décroissance de la viscosité en cisaillement en fonction du taux de cisaillement [AGA-1996]. De nombreuses lois semi empiriques sont proposées dans la littérature. Une des formes les plus simples issue de la théorie de la plasticité est celle de Norton-Hoff encore appelée loi puissance. Sa formulation unidimensionnelle est la suivante :

$$\eta = K\left(\dot{\bar{\gamma}}\right)^{m-1} \tag{124}$$

Avec $\dot{\bar{\gamma}} = \sqrt{2\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}$ le taux de cisaillement généralisé, m la sensibilité à la vitesse de déformation (comprise entre 0 et 1) et K la consistance.

Plusieurs variantes ont été testées à partir de ce modèle pour modéliser le comportement du P.E.T. au-delà de sa température de transition vitreuse.

S. Wang [WAN-1998] utilise un modèle défini par morceaux en fonction de la déformation ($\varepsilon < 1$ ou $\varepsilon > 1$), basé sur les deux tendances observées lors d'essais de traction.

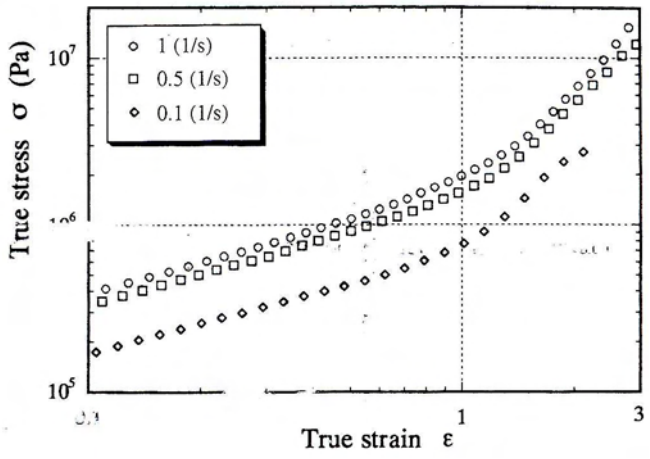


Figure 121 : Courbes contrainte vraie déformation vraie issues d'essais à 120°C [WAN-1998].

Chaque partie de la courbe (en deçà et au-delà de $\varepsilon = 1$) a été représentée par un modèle du type :

$$\sigma = k\varepsilon^{n'}\dot{\varepsilon}^{m'+w\log\varepsilon} \tag{125}$$

où $\dot{\varepsilon}$ est le taux d'élongation uni-axial (dl/(l.dt), l étant la longueur utile courante), n' est la pente de $\log\sigma - \log\varepsilon$ pour $\dot{\varepsilon} = 1$, m' est la pente de $\log\sigma - \log\dot{\varepsilon}$ pour $\varepsilon = 1$ et w découle de :

$$w = \frac{\left(\partial\log\sigma \big/ \partial\log\varepsilon\right)_{\dot{\varepsilon}=c} - n'}{\log c} \tag{126}$$

Avec $c \neq 1$.

Ainsi, le modèle finalement proposé par S. Wang est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{S1}(\varepsilon,\dot{\varepsilon},T) = k_1(T)\varepsilon^{n_1'(T)}\dot{\varepsilon}^{m_1'(T)+w_1(T)\log\varepsilon} \\ \sigma_{S2}(\varepsilon,\dot{\varepsilon},T) = k_2(T)\varepsilon^{n_2'(T)}\dot{\varepsilon}^{m_2'(T)+w_2(T)\log\varepsilon} \\ \sigma(\varepsilon,\dot{\varepsilon},T) = Max(\sigma_{S1}(\varepsilon,\dot{\varepsilon},T),\sigma_{S2}(\varepsilon,\dot{\varepsilon},T)) \end{cases} \quad (127)$$

Une autre approche consiste à définir de nouveaux coefficients afin d'affiner le calcul de la contrainte sur différentes parties de la courbe en fonction de la déformation. Cette approche est notamment celle utilisée par G'Sell [GSE-1979].

Par ailleurs, L. Chevalier et Y. Marco montrent par comparaison entre des essais de traction uniaxiaux et biaxiaux que l'anisotropie ne peut être négligée [CHE-2005]. En effet, la microstructure d'une bouteille plastique évolue suivant la hauteur mais également et surtout suivant son épaisseur. Le P.E.T. d'une bouteille obtenue par étirage-soufflage est un matériau cristallisé, donc composite, multi-orienté, et dont la taille et la morphologie des fibres varient [MAR-2003]. Des essais uniaxiaux et biaxiaux permettent de montrer que les cristaux générés par une traction biaxiale simultanée présentent une anisotropie moindre que ceux obtenus par une traction plane et sont de dimensions plus faibles.

Utilisant un modèle dérivé de la loi puissance, ces auteurs définissent deux modèles indépendants à l'aide d'une fonction consistance, identifiée à partir des résultats de traction. Ils définissent alors la plus grande des déformations principales comme étant la déformation équivalente :

$$\begin{cases} \sigma_{TS}(t) = 3^{\frac{m+1}{2}} K \dot{\varepsilon}^{m}(t) \\ \sigma_{BT}(t) = 2^{m} 3^{\frac{m+1}{2}} K \dot{\varepsilon}^{m}(t) \\ \bar{\varepsilon} = Max(\varepsilon_i) \end{cases} \quad (128)$$

Où σ_{TS} est la contrainte de Cauchy uniaxiale et σ_{BT} la contrainte de Cauchy biaxiale.

Dans notre étude, le modèle ayant retenu notre attention est un modèle phénoménologique tiré d'une loi de G'Sell [GSE-1979] et étudié dans le cadre d'essais de traction sur du P.E.T. par E. Gorlier [GOR-2001].

4.1. Etude d'un modèle phénoménologique viscoplastique basé sur une loi de G'Sell

E. Gorlier développe un modèle phénoménologique dérivé des travaux de C. G'Sell [GSE-1979] afin de modéliser des essais de traction réalisés sur éprouvettes de type sablier [GOR-2001]. Partant de l'hypothèse que la traction de ces éprouvettes consiste en un écoulement viscoplastique, isotrope, homogène et obéissant à la loi d'écoulement de Von Mises, il définit une contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ dépendante de la déformation cumulée $\bar{\varepsilon}$, de la vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\varepsilon}}$ et de la température T.

$$\bar{\sigma} = K\dot{\bar{\varepsilon}}^{m}\left\{k_0 e^{\frac{\beta}{T}}\left[1 - F^t e^{-W_1\bar{\varepsilon}} + \left(F^t - 1\right)e^{-W_2\bar{\varepsilon}}\right] + e^{\frac{\beta'}{T}}\sinh\left(h\bar{\varepsilon}^{a}\right)\right\} = K\dot{\bar{\varepsilon}}^{m}\, g\left(\bar{\varepsilon},T\right) \qquad (129)$$

avec (K,k_0) les paramètres définissant la consistance du matériau, m la sensibilité à la vitesse de déformation et :

$\begin{cases} F^t = e^{\frac{-1}{T-T_t}} & \forall T > T_t + 0.1 \\ F^t = 0 & \forall T \le T_t + 0.1 \end{cases}$ où T_t est la température de transition.

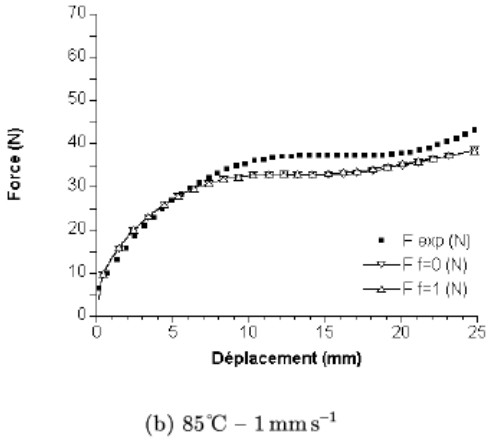
Ce modèle est régi par 3 modes de déformation indépendants :

- Aux faibles déformations : - Un régime de type entropique : $1 - e^{-W_1\bar{\varepsilon}}$
  - Un régime de type enthalpique : $1 - e^{-W_2\bar{\varepsilon}}$
- Aux fortes déformations : - Un durcissement structural : $\sinh\left(h\bar{\varepsilon}^{a}\right)$

Une étude paramétrique inverse menée sur des essais de traction a permis à E. Gorlier de définir un jeu de paramètres pour lequel cette loi phénoménologique reproduit de manière satisfaisante les essais expérimentaux.

Paramètres	f = 0	f = 1
K (kPa)	$0.03102 \times \sqrt{3}^{m+1}$	$0.03102 \times \sqrt{3}^{m+1}$
m	0.1178	0.1178
W_1	0.4951	0.4951
W_2	122	122
T_t (K)	*324*	*325*
k_0	2.42	2.41
β (K)	4285.9	4285.9
β' (K)	3537	3537
h	*0.4463*	*0.9892*
a	*5.784*	*3.324*

Tableau 21 : Paramètres rhéologiques décrivant le P.E.T. identifiés par E. Gorlier [GOR-2001].



(b) 85°C – 1 mm s^{-1}

Figure 122 : Reproduction par analyse inverse des courbes force-déplacement en traction uniaxiale sur éprouvettes sablier en P.E.T. amorphe [GOR-2001].

Avec f la proportion de travail convertie en chaleur. Dans note cas, nous prendrons $f = 0$, c'est à dire sans intégration de la dissipation, car l'efficacité ne conditionne que faiblement la qualité des solutions obtenues [GOR-2001].

4.1.1. *Formulation analytique*

Le modèle de G'Sell modifié est facilement implantable dans un logiciel de calcul sous deux formes : soit à partir de la contrainte équivalente (directement obtenue à partir de la formulation précédente) ou bien à partir du déviateur des contraintes.

Dans ce cas, partant du fait que :

$$S_{ij} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{130}$$

Il vient alors :

$$S_{ij} = \frac{2}{3}K\dot{\bar{\varepsilon}}^{m-1}g\left(\bar{\varepsilon},T\right)\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{131}$$

$$S_{ij} = \frac{2K}{\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}}\left(\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^{m-1}g\left(\bar{\varepsilon},T\right)\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{132}$$

La forme obtenue est proche de la forme générique de la loi de Norton-Hoff :

$$S_{ij} = 2K\left(\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^{m-1}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{133}$$

Elle possède un terme complémentaire mêlant la dépendance par rapport à la température ainsi que par rapport à la déformation généralisée.

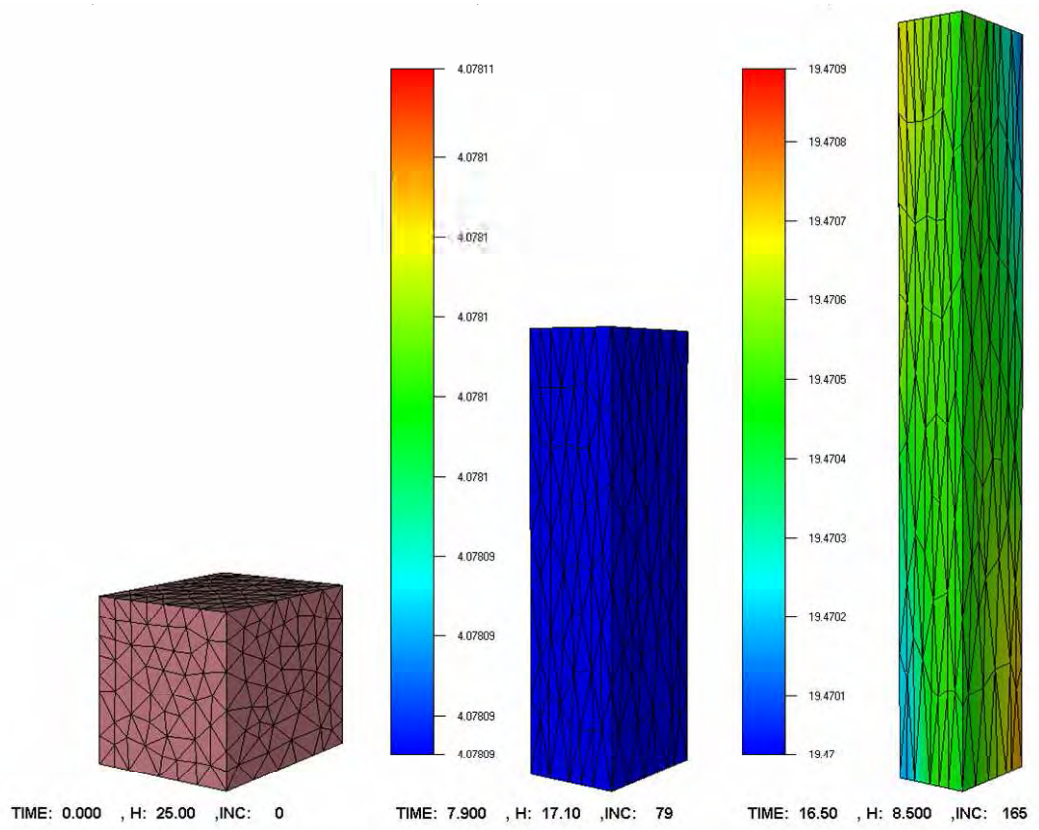
Cette forme a été implantée dans Forge3® au moyen d'une « routine utilisateur ». L'objet du paragraphe suivant est la validation de son implantation.

4.1.2. *Modélisation de la traction uniaxiale*

La validation de l'implantation de la loi de G'Sell se fait par comparaison avec un modèle analytique de traction uniaxiale. Considérons le cas d'un cube de polymère supposé avoir le comportement viscoplastique donné précédemment. Dans le cadre de la traction uniaxiale, il vient :

$$\sigma_{zz} = K\left(\frac{1}{l}\frac{dl}{dt}\right)^{m} g\left(\bar{\varepsilon}, T\right) \tag{134}$$

Le modèle numérique utilisé pour la validation est celui d'un cube ayant 3 plans de symétrie et subissant une traction verticale. Le contact avec les outils inférieurs et supérieurs est parfaitement glissant de manière à avoir une déformation uniforme dans l'éprouvette.



l = 5mm l = 7.9mm l = 16,5mm

Figure 123 : Modèle numérique de l'essai de traction uniaxiale (contrainte verticale).

Le parfait accord constaté à la figure suivante pour un pas de temps peu élevé entre la courbe analytique et le calcul numérique permet de conclure à une bonne implantation de la loi de comportement au sein du logiciel.

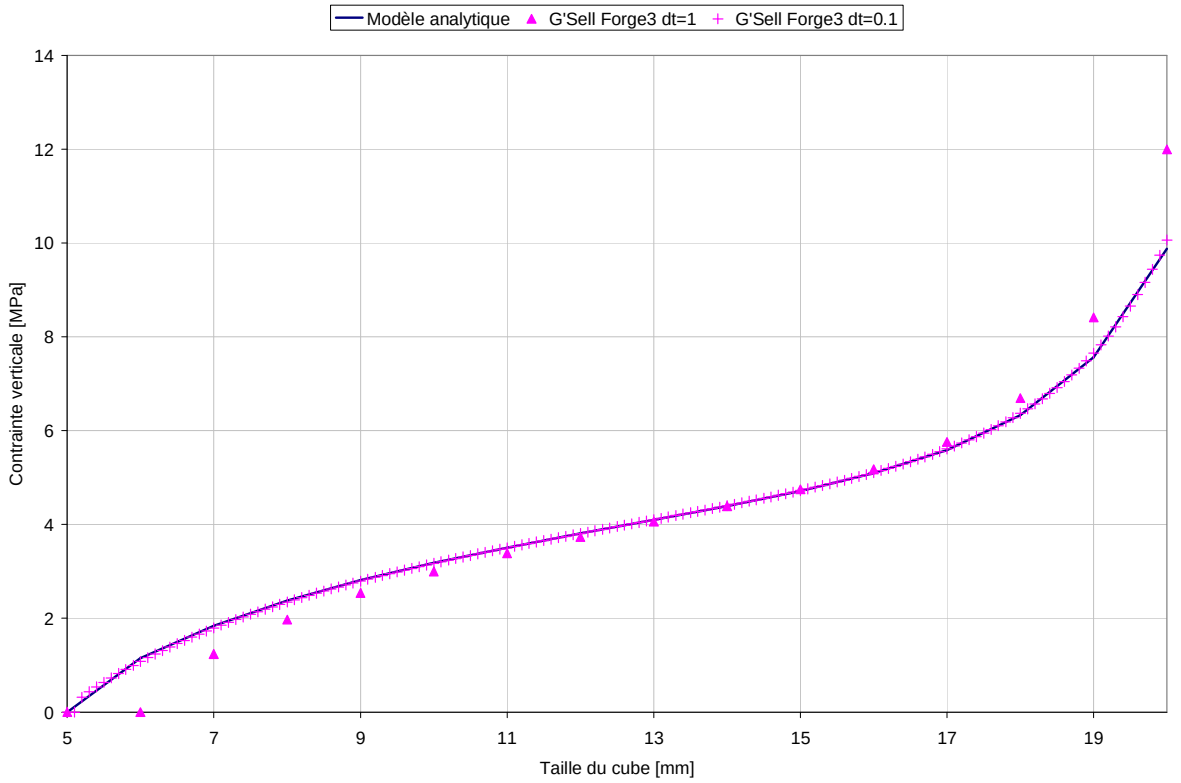


Figure 124 : Evolution de la contrainte en fonction de la hauteur de traction pour un modèle de G'Sell.

4.1.3. *Simulation d'essais de traction sur éprouvettes sablier*

E. Gorlier [GOR-2001] utilise pour ses essais de traction des éprouvettes massives de type sablier mises en forme par injection. L'objectif de la modélisation de ces essais est de tester l'aptitude du jeu de paramètres obtenus dans le cadre de la loi de G'Sell, à représenter un problème mécanique 3D. Plus précisément, le but est de calculer les courbes force-déplacement en utilisant les paramètres identifiés par E. Gorlier et de comparer ces courbes aux enregistrements expérimentaux.

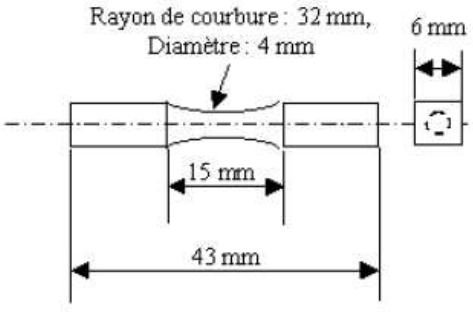


Figure 125 : Dimensions des éprouvettes utilisées par E. Gorlier en traction uniaxiale.

Ses essais ont été réalisés en étuve de manière à rester isotherme. Cependant, le caractère caoutchoutique du matériau a donné lieu à des glissements entre les mors et les têtes d'éprouvettes. Pour y remédier, E. Gorlier a du refroidir les zones d'emprise à l'aide d'un circuit hydraulique interne aux mors à 70°C, permettant ainsi de durcir les têtes des éprouvettes, mais induisant aussi un gradient thermique essentiellement longitudinal dans la partie utile des éprouvettes.

Pour la simulation, l'éprouvette est complètement maillée. L'extrémité inférieure est maintenue par un contact bilatéral collant avec deux plans fixes. L'extrémité supérieure est positionnée de la même manière entre deux plans modélisant les mors à l'aide d'un contact bilatéral collant mais pouvant se déplacer dans le sens de la traction à une vitesse imposée donnée.

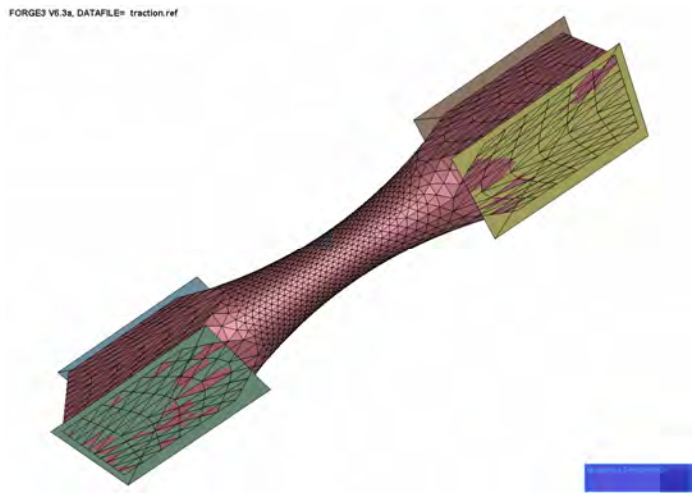


Figure 126 : Modèle complet de traction des éprouvettes sablier.

Dans un premier temps, une étude de sensibilité sur la température a été réalisée. Deux simulations ont été réalisées avec des mors à 20°C et à 70°C (conditions expérimentales).

Dans un deuxième temps, trois cas de comparaison ont été abordés. Il s'agit des essais à 85°C pour des vitesses de traction de 1 mm/s, 10 mm/s et un essai à 105°C pour une vitesse de traction de 150 mm/s.

Nbre d'éléments	40 000 éléments / 9 000 nœuds
Qualité	Isotrope
CL mécaniques	Contact bilatéral collant entre l'éprouvette et les mors. Les mors inférieurs sont fixes. Vitesse des mors supérieurs imposés : 1mm/s, 10mm/s, 150mm/s
CL thermiques	Eprouvette : 85°C, 105°C
	Mors : 20°C, 70°C
	Coefficient de transfert entre les mors et l'éprouvette de 5 000 $w.m^{-2}.K$
Loi de comportement	G'Sell modifié (cf. ch-III-4-1)

Tableau 22 : Caractéristiques du modèle numérique utilisé en soufflage libre.

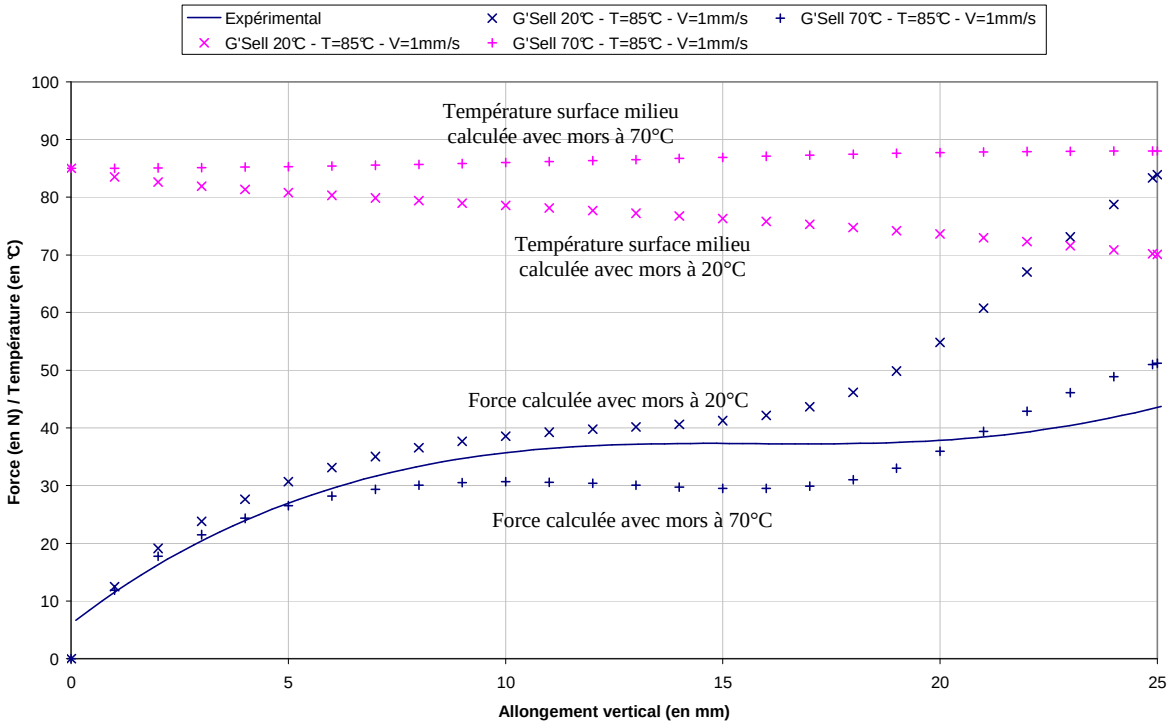


Figure 127 : Simulation d'un essai à T=85°C et V=1mm/s. Evolution de la force en fonction de l'allongement pour le modèle de G'Sell avec les paramètres identifiés par E. Gorlier pour des températures de mors de 20°C et 70°C. Evolution de la température au milieu de la préforme en surface.

Pour des conditions initiales identiques (85°C), la température calculée en surface au milieu de la préforme montre que la précision sur la température des mors est essentielle. En effet, contrairement à la simulation avec des mors à 70°C où la température de l'éprouvette va avoir tendance à augmenter grâce à la puissance dissipée, celle avec des mors froids entraîne une diminution de la température de l'éprouvette et donc une augmentation de la force et de l'écart par rapport aux mesures de l'effort.

Néanmoins, les deux simulations font apparaître une nette différence avec l'expérience dans la partie centrale de la courbe et dans la zone de durcissement. En effet, dans l'expérience, ce plateau est situé entre 12.5 et 20 mm de traction et engendre une force de 37.5 N. Dans la simulation, ce plateau apparaît plus tôt (entre avec 10 et 17 mm de traction) et donne lieu à une force moindre (32.5 N).

La figure suivante illustre les comparaisons effectuées pour les autres conditions de traction.

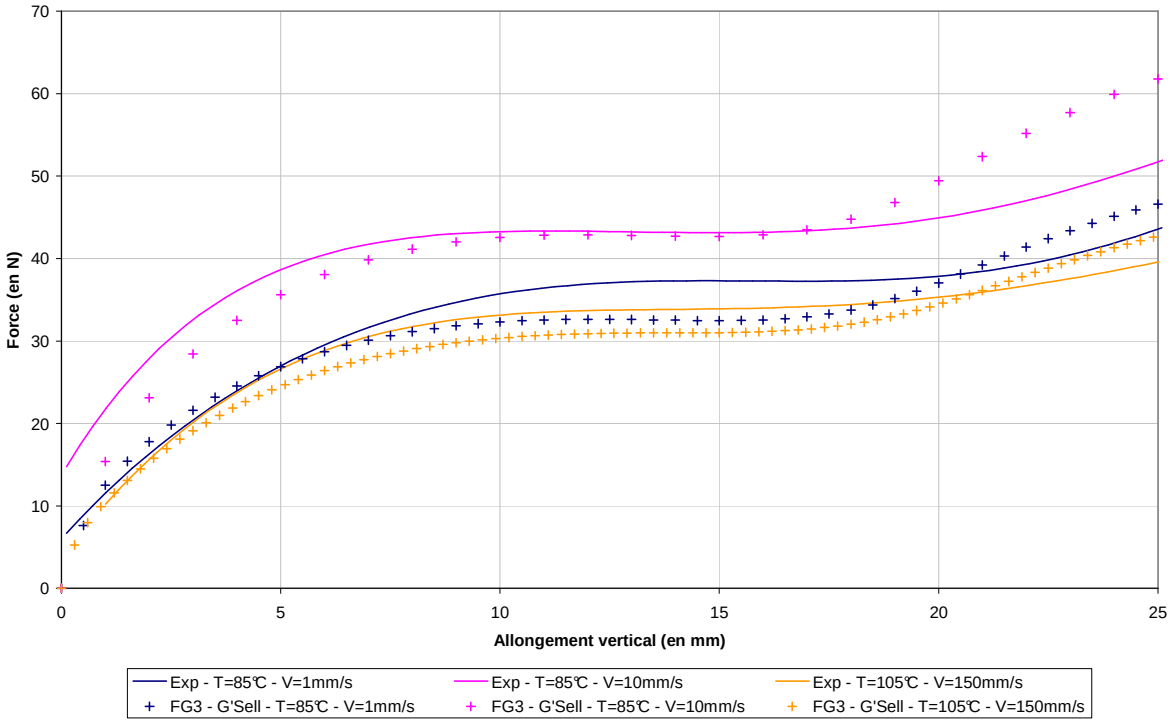


Figure 128 : Simulation d'un essai pour différentes températures et vitesses de sollicitation. Evolution de la force en fonction de l'allongement pour le modèle de G'Sell avec les paramètres identifiés par E. Gorlier pour l'approche éprouvette entière.

On constate que les tendances globales sont cohérentes :

- croissance de l'effort avec la vitesse,
- décroissance de l'effort avec la température.

De plus, l'ordre de grandeur des efforts est également conforme à l'expérience.

Il existe un certain décalage entre la simulation et l'expérience. Il est surprenant de constater que ce décalage est supérieur à celui obtenu par E. Gorlier lors de son identification.

Etant donné que la bonne implantation de la loi dans Forge3® est avérée par comparaison avec la solution analytique sur des essais idéalement homogènes, nous concluons que le modèle direct utilisé par E. Gorlier lors de son identification donne des résultats nécessairement différents de ceux de Forge3®.

Cet écart significatif est vraisemblablement lié à la négligence de l'effet biaxial lié à la traction qui engendre une traction verticale mais également une compression transversale. Le modèle utilisé par E. Gorlier est basé sur le calcul d'une contrainte équivalente à partir d'une hypothèse d'uniformité, vraisemblablement trop restrictive sur le jeu de paramètres qui s'en suit comme le montre la coupe transversale d'une éprouvette lors de la simulation.

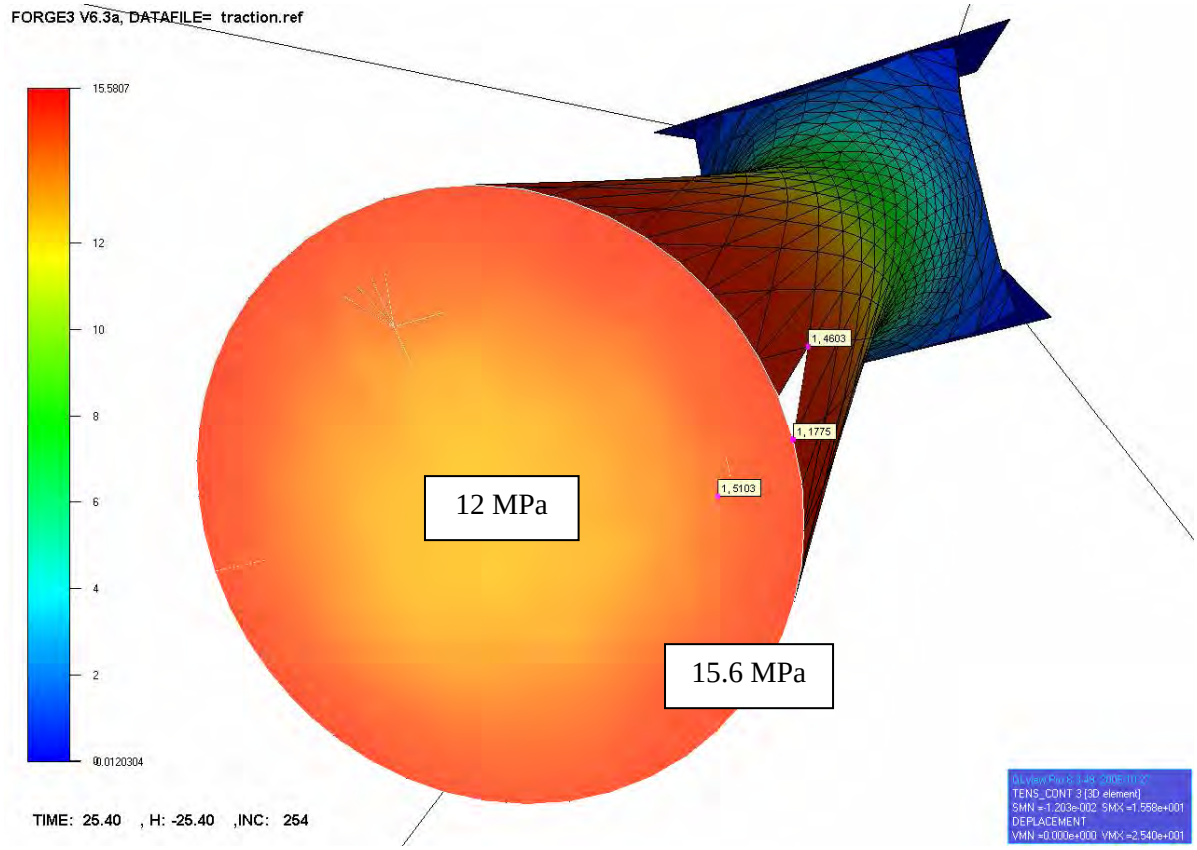


Figure 129 : Contrainte dans le sens de la traction dans la section transversale au milieu de l'éprouvette au cours d'un essai de traction à T=85°C et v=1mm/s.

Il apparaît de manière claire que la contrainte dans le sens de la traction n'est pas homogène à travers l'ensemble de la section, mais dépend directement du rayon. En effet, en périphérie la contrainte s'élève à 15.6 MPa alors qu'elle reste au cœur de l'éprouvette à 12 MPa. Cet écart significatif de près de 30% permet de remettre en cause l'hypothèse d'homogénéité réalisée dans le cadre du dépouillement des essais expérimentaux par E. Gorlier.

Il est donc normal que l'utilisation des paramètres obtenus expérimentalement dans Forge3® mène à une moins bonne corrélation avec l'expérience. En d'autres termes, il conviendrait de procéder à une nouvelle identification numérique, qui devrait aboutir à des paramètres légèrement différents de ceux proposés initialement.

4.2. Bilan sur l'utilisation des lois viscoplastiques

Comme le montre la bibliographie, les lois viscoplastiques permettent la prise en compte du durcissement structural à travers différentes formulations, souvent basées sur un terme phénoménologique introduit dans l'expression du tenseur des contraintes. Ce phénomène est indispensable dans le cadre de la modélisation du P.E.T. puisqu'il semble jouer une part importante dans la cinétique de gonflage. Ainsi, C. G'Sell insère dans l'expression de la contrainte équivalente un terme en sinh qui ne va prendre effet que pour des valeurs élevées des déformations. S. Wang quant à lui introduit cette augmentation soudaine de la contrainte pour un taux de déformation donné en découplant son modèle en deux parties distinctes, chacune ayant ses propres paramètres rhéologiques.

D'autre part, les lois viscoplastiques tiennent compte, par nature, de l'effet de la vitesse de déformation du polymère. C'est la raison pour laquelle, de nombreuses études utilisent ce type de loi de comportement. En effet, la dépendance temporelle est avérée concernant l'utilisation du P.E.T. Elle est rendue indispensable et joue un rôle prépondérant sur la cristallisation. Ainsi pour rendre compte de ces effets de vitesse avec une loi élastique, chaque paramètre de cette loi devrait être non seulement lié au matériau et/ou à sa température, mais également à la vitesse de sollicitation.

L'inconvénient des lois viscoplastiques, nous le rappelons ici, est bien sûr la disparition de toute contrainte interne avec la cessation des déformations.

Cependant, il est important de noter que si la viscoplasticité permet la prise en compte du durcissement structural, sa gestion qualitative et quantitative semble difficile avec les lois courantes étudiées. En effet, les résultats obtenus au niveau expérimental font apparaître une dépendance entre la loi et le type d'essais réalisés. Ainsi, dans le cadre des essais de traction uniaxiaux d'E. Gorlier, le durcissement structural apparaît de manière brutale avec une asymptote verticale pour une déformation cumulée d'environ 1.5 (soit $(l-l_0)/l_0$ proche de 3.5, cf. annexe : Calcul analytique de la contrainte d'un cube ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une traction uniaxiale).

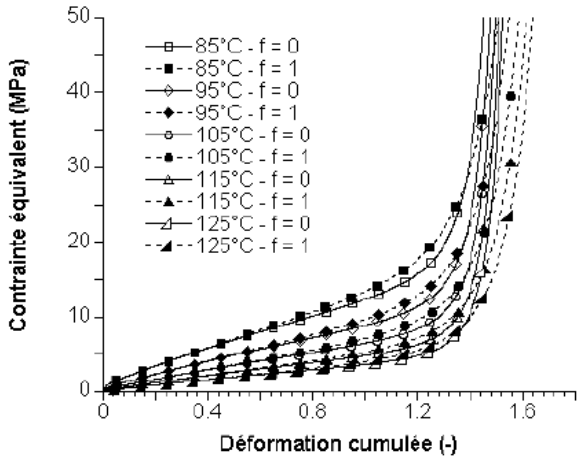


Figure 130 : Rhéologie pour une vitesse de déformation équivalente moyenne de 10/s [GOR-2001].

Il est intéressant de calculer les déformations attendues en soufflage de bouteille, afin de les situer par rapport à ces valeurs critiques pour le durcissement (cf. annexe : Calcul du taux de déformation radial d'un tube). On obtient la figure ci-dessous donnant la déformation à la surface interne du tube (rayon R) en fonction du rapport R/R_0.

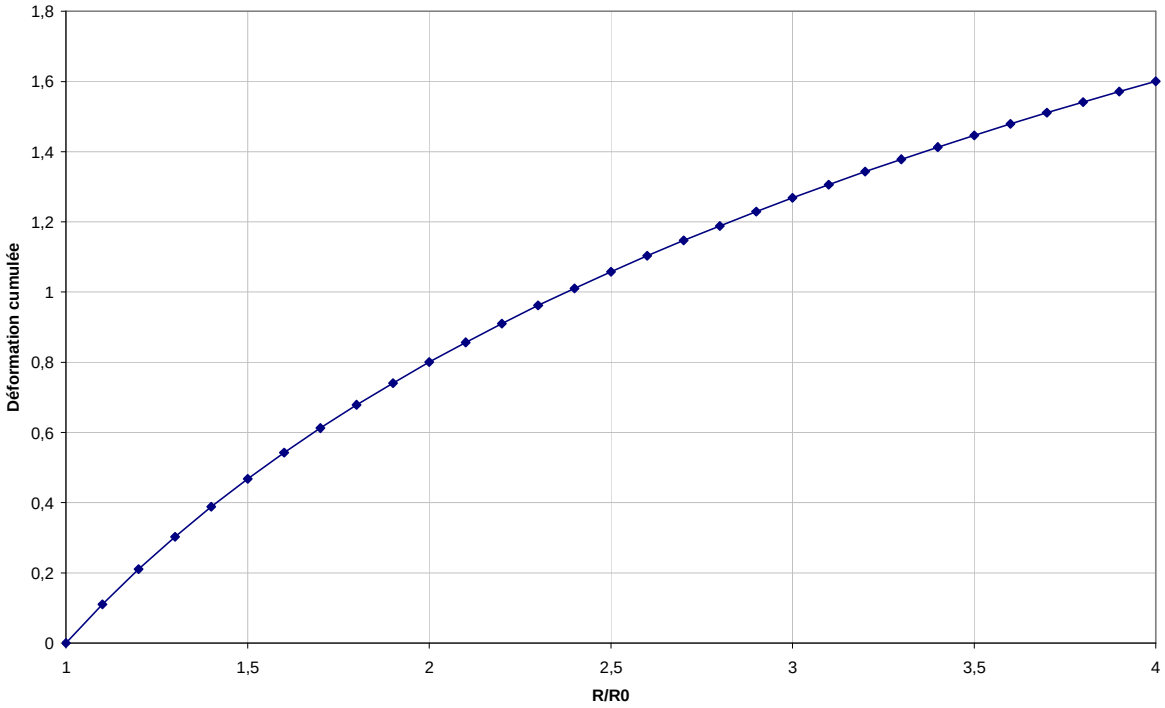


Figure 131 : Evolution de la déformation cumulée en fonction du taux de déformation pour un tube.

Il apparaît que pour un taux de déformation radial R/R_0 compris entre 3 et 4, ce qui correspond au cas des bouteilles, la déformation cumulée se situe entre 1.3 et 1.6. On constate alors en se référant à la figure de l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation cumulée, que l'on est précisément dans le domaine critique vis-à-vis du fort durcissement.

On peut donc concevoir par avance que de faibles variations sur les paramètres rhéologiques gouvernant le durcissement vont avoir une influence considérable sur les valeurs des pressions nécessaires pour gonfler les bouteilles…

5. Conclusions partielles

Le P.E.T. est une matière complexe à mettre en forme. Ainsi, diverses études ont été menées sur sa rhéologie mais à ce jour il n'existe pas de loi universelle permettant de modéliser le comportement de la matière sur toute la gamme de température et de vitesse de sollicitation nécessaires. Cependant, deux grandes familles de lois semblent prédominer dans la littérature : l'hyperélasticité et la viscoplasticité. Leurs avantages et inconvénients peuvent être résumés après notre étude sous la forme suivante.

	Hyperélasticité	***Viscoplasticité***
Avantages	- Nombreuses données matériau dans la littérature - Capacité de la loi à modéliser le retour élastique de la matière	- Facilité d'implantation dans un logiciel de calcul - Prise en compte de la dépendance temporelle - Possibilité de gérer l'anisotropie
Inconvénients	- Difficile à implanter dans un logiciel de calcul - Apparition d'instabilités et de branches bifurcatoires - Non prise en considération de la dépendance temporelle - Pas de prise en compte de la température en dehors des paramètres	- Difficulté à régler le durcissement structural par rapport à la réalité - Capacité à modéliser le comportement sur une large gamme de mise en œuvre - Incapacité à modéliser le retour élastique de la matière - Prévision des contraintes finales impossible

Tableau 23 : Récapitulatif des avantages et inconvénients des lois hyperélastique et viscoplastique.

Dans le cadre d'une étude post mise en forme ayant pour objectif un calcul structural, les lois viscoplastiques semblent problématiques. En effet, de par la formulation, une vitesse de déformation nulle en fin de soufflage engendre une contrainte égale à la pression hydrostatique car la partie déviatorique du tenseur des contraintes est nulle. Aussi, afin de pouvoir intégrer les effets de la vitesse et calculer des contraintes résiduelles, il serait nécessaire de développer et identifier des modèles élastoviscoplastiques thermodépendants. C'est un travail de rhéologie qui sort du contexte de nos travaux mais qui garde un intérêt pour les études à venir.

D'un point de vue global dans notre thèse, l'utilisation d'une loi viscoplastique semble plus aisée au regard de nos implantations et fera donc l'objet de nos modélisations futures.

Chapitre 4

Modélisation numérique de l'étirage / soufflage des préformes en P.E.T.

L'étirage soufflage de la préforme en P.E.T. est la partie la plus difficile à mettre en œuvre au niveau industriel. L'enjeu de cette phase est d'obtenir à partir d'un profil de température donné, une répartition d'épaisseur contrôlée pour la bouteille finale. Pour ce faire, la mise en forme est décomposée en deux types de sollicitations pouvant être soit distinctes soit couplées.

La première déformation exercée concerne l'étirage uniaxial de la préforme à l'aide d'une canne insérée dans le goulot et venant allonger la préforme sur une distance désirée allant d'une valeur faible à une hauteur finale équivalente à celle de la bouteille. Cette étape, reconnue comme étant indispensable pour le procédé d'injection soufflage, a pour objectif d'emmener un maximum de matière vers le fond de la bouteille. En effet, sans étirage, la bulle figerait par contact avec la paroi la matière au niveau du col, créant ainsi une zone de forte épaisseur et par conséquent une autre trop fine.

La seconde déformation concerne le soufflage de la préforme. L'injection d'air pressurisée permet en effet de venir plaquer la membrane soufflée contre le moule froid. Le durcissement structural créé par cette déformation jumelée au refroidissement par contact avec le moule, permet alors de solidifier la bouteille dans son état à un retour élastique près. Il est important de noter que le soufflage peut se décomposer en deux temps. Le premier appelé présoufflage est une injection d'air à basse pression (entre 6 et 10 bars) appliquée dès le contact de la canne avec la préforme (point 0) et qui a pour objectif d'éviter le contact entre la préforme étirée et la canne d'élongation. Le soufflage à forte pression (entre 30 et 40 bars) est déclenché lorsque la canne atteint sa position maximale proche du fond de la bouteille (point 10). Il permet alors de plaquer la préforme contre le moule et de lui faire prendre ainsi la géométrie finale désirée et les détails souhaités.

L'objet de ce chapitre est de tester la réponse des modèles rhéologiques implantés et validés précédemment sous l'effet des sollicitations industrielles dans le domaine de grandes déformations.

Chapitre 4 Modélisation numérique de l'étirage / soufflage des préformes en P.E.T. 153

1. Etude de l'étirage d'une préforme 155

1.1. Mesure expérimentale de la force exercée en tête de canne 155

1.1.1. Présentation du dispositif expérimental réalisé 155

1.1.2. Présentation du cas étudié dans le cadre de la campagne expérimentale 156

1.1.3. Analyse des résultats expérimentaux obtenus 158

1.2. Présentation du modèle numérique 161

1.3. Comparaison entre simulation et expérience 164

2. Etude du soufflage libre d'une préforme 165

2.1. Etude expérimentale des déformations lors du gonflage libre 165

2.2. Etude numérique du soufflage libre 167

2.3. Etude d'une loi viscoplastique basée sur les déformations maximales 169

2.4. Soufflage d'une bouteille avec approche en déformation maximale 171

3. Etude du soufflage confiné et sensibilité par rapport au modèle rhéologique 174

3.1. Présentation du modèle étudié 174

3.2. Modélisation du soufflage confiné 175

4. Conclusions partielles 178

1. Etude de l'étirage d'une préforme

Si l'étirage d'une préforme est indispensable à la fabrication des bouteilles en P.E.T., son étude est également un passage obligatoire dans le cadre d'une validation numérique. En effet, des dispositifs expérimentaux permettant de mesurer la force exercée par le matériau en tête de canne, offrent à la simulation un point de comparaison incontournable pour évaluer la qualité de la loi de comportement choisie au niveau numérique.

Ainsi, F. Schmidt [SCH-1995] évalue l'influence d'une loi newtonienne et d'une loi viscoélastique de type Oldroyd B sur la force en tête de canne. La comparaison avec les mesures expérimentales lui permet alors d'affiner son modèle en réévaluant les paramètres rhéologiques définis initialement comme le montre la figure ci-dessous.

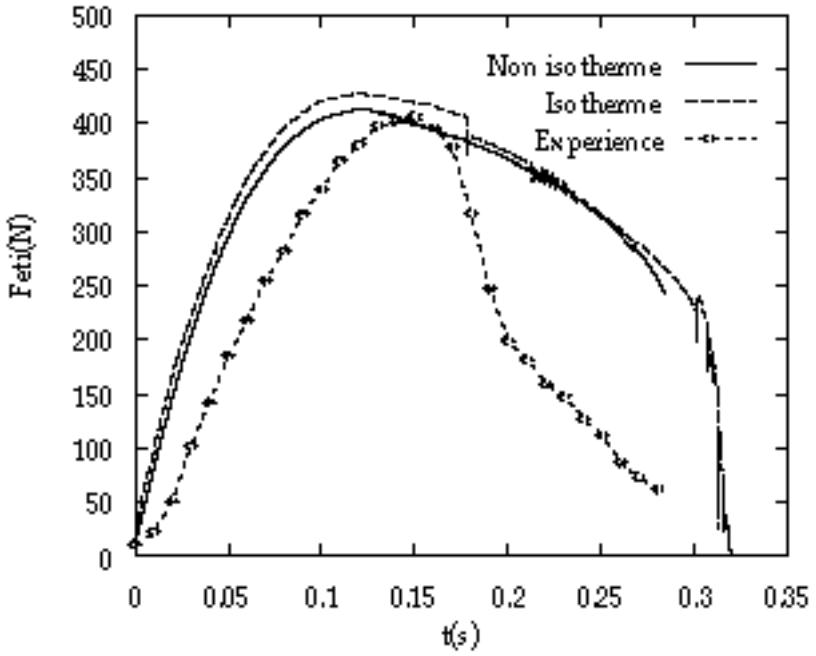


Figure 132 : Comparaison forces d'étirage mesurée / calculée [SCH-1995].

1.1. Mesure expérimentale de la force exercée en tête de canne

1.1.1. *Présentation du dispositif expérimental réalisé*

Dans notre étude, la mesure de la force exercée par la préforme en tête de la canne a nécessité une instrumentation spécifique. En effet, afin de s'affranchir de nombreuses difficultés lors de l'utilisation, le capteur de force a été vissé sous la tête de la canne (voir photo ci-dessous).



Figure 133 : Capteur de force positionné sous la tête de canne et capteur de pression.

Afin de corréler l'étude avec d'éventuelles relations entre la pression d'air dans la bulle et la force, un capteur de pression a été inséré dans la canne. Enfin, le troisième paramètre mesuré et nécessaire à l'analyse des données obtenues est la position de la canne. En effet, il permet de relier le taux d'étirage longitudinal à la force exercée par la préforme sur la canne. Ce dernier paramètre est mesuré par un capteur intrinsèque à la SBO ne pouvant être modifié. L'ensemble de cette instrumentation a été mise en œuvre lors des essais que nous avons effectués chez Nestlé Waters à Vittel en novembre 2004.

1.1.2. *Présentation du cas étudié dans le cadre de la campagne expérimentale*

Notre étude a porté sur la fabrication de bouteilles 1,5l avec moule axisymétrique et des préformes de 37g. La géométrie de la préforme utilisée se trouve en annexe et la géométrie du moule utilisé est donnée ci-dessous. La résine ayant servi à l'injection de la préforme est la Eastman 9921W.

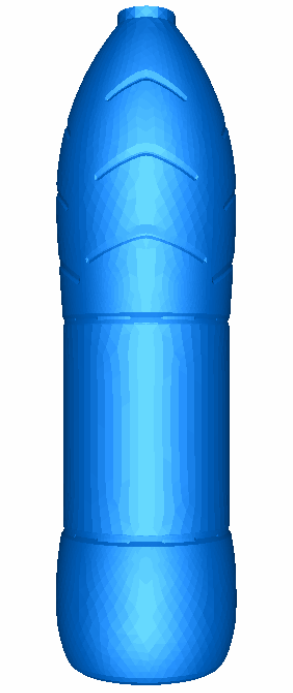


Figure 134 : Géométrie du moule utilisé.

Trois essais principaux ont été réalisés. Ils sont basés sur le réglage du procédé « optimal » - essai A -, les essais B et C permettant de voir l'influence de la température de la préforme sur la force en tête de canne. La température est mesurée à l'aide d'un pyromètre infrarouge en sortie de four à mi-hauteur de la préforme.

Test	Température	Vitesse de la canne	Pression de présoufflage
A	100 °C	2 m/s	0 bars
B	85 °C	2 m/s	0 bars
C	115 °C	2 m/s	0 bars

Tableau 24 : Paramètres principaux des essais d'étirage réalisés.

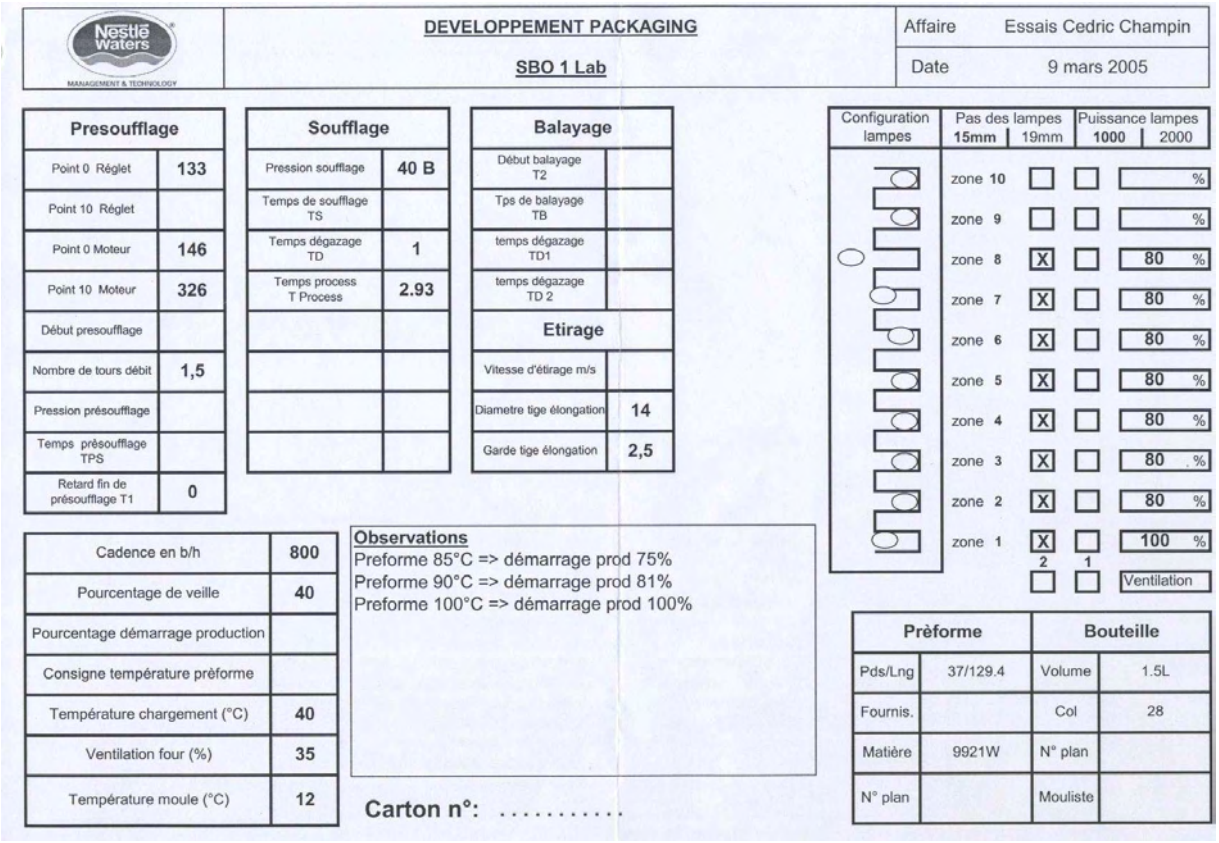


Figure 135 : Récapitulatif de l'ensemble des paramètres de réglage nécessaires à l'essai A de référence.

Les courbes de pression classiques remarquées dans la littérature peuvent se décomposer en plusieurs phases, à mettre en corrélation avec la position de la canne. En effet, le soufflage est régulé par deux points caractéristiques, définis en fonction de la géométrie de la préforme et de la bouteille soufflée (voir figure suivante) :

- Le point 0 définit la position de la canne d'étirage lorsque cette dernière entre en contact avec la préforme.
- Le point 10 définit la position maximale de la canne, soit en général à quelques millimètres de la surface du moule.

Le point 0 permet ainsi de définir l'instant auquel débute le présoufflage, permettant d'éviter tout contact entre la matière chaude et la canne, excepté en son sommet. Le point 10 permet de définir la limite maximale de présoufflage qui laissera alors place au soufflage à proprement parler.

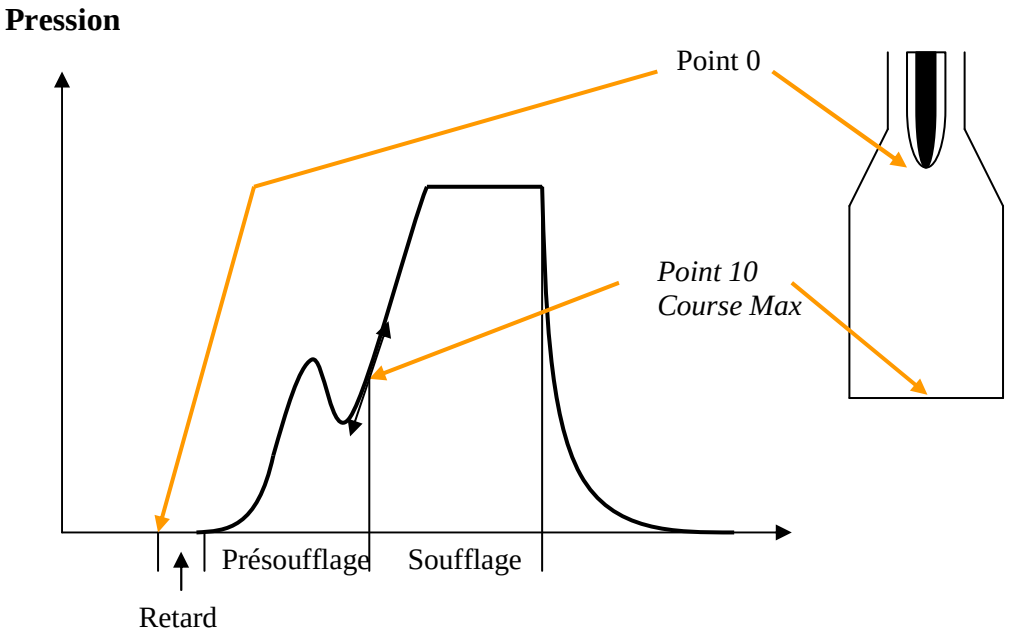


Figure 136 : Courbe de pression type pour une course de la canne donnée.

1.1.3. *Analyse des résultats expérimentaux obtenus*

Il est apparu dans un premier temps que l'indication du capteur de déplacement équipant la SBO ayant servi aux essais n'était pas correcte. En effet, selon les valeurs données par le capteur, le point 0 serait atteint pour un déplacement de 65mm contre 350mm pour le point 10. Ce qui signifie que la préforme subirait un allongement de 285mm. Or les données géométriques du moule et de la préforme montrent qu'il ne peut se limiter qu'à environ 200mm (la bouteille a une hauteur de 300mm et la préforme une hauteur de 107mm sous collerette). Ce capteur interne à la SBO ne peut en aucun cas être modifié par l'expérimentateur. Il sera donc une source d'erreur à prendre en considération pour la suite de nos travaux.

L'augmentation initiale de la force est soudaine et brutale mais ne débute pas en même temps que le déplacement de la canne. En effet, ce temps de latence correspond au temps nécessaire à la canne pour venir se placer en contact avec le fond de la préforme.

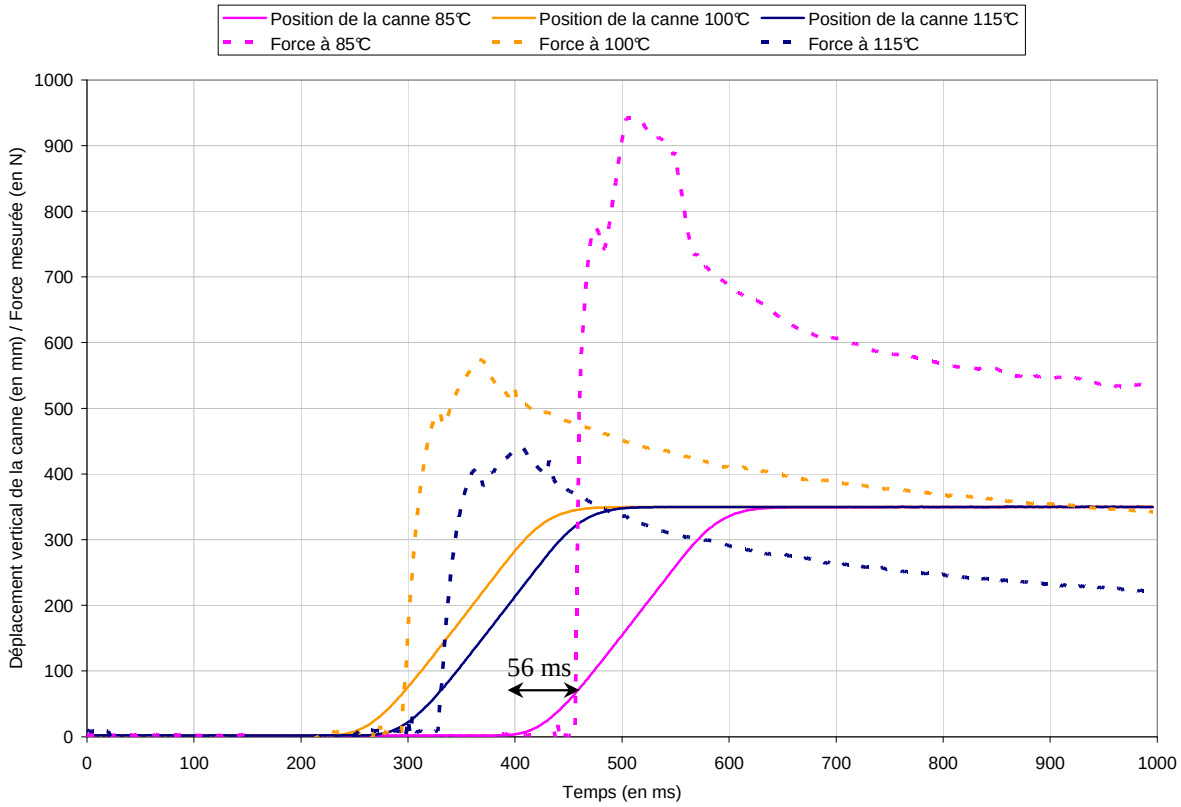


Figure 137 : Evolution de la force enregistrée en tête de canne en fonction de sa position pour des préformes à 85, 100, 115°C en sortie de four.

Ainsi, si la préforme mesure environ 130 mm, la vitesse de la canne étant de 2 m/s, le temps minimal pour venir au point 0 est de 65ms. Un zoom sur le graphique précédent réalisé pour 85°C montre un temps de réponse de 56ms.

Néanmoins, même si l'indication du capteur de déplacement est à considérer avec précaution, elle montre que la vitesse de la canne présente un transitoire en début et fin de mouvement, au cours duquel la vitesse n'est pas constante.

Une fois le point 0 atteint, la montée en force est alors extrêmement rapide puisque une première valeur maximale locale de la force est obtenue pour un allongement équivalent à 1/3 de l'allongement final (216 mm). Elle donne alors lieu à un léger relâchement de la force pour les trois températures, qui précède une nouvelle augmentation jusqu'au maximum global de la force atteint entre la moitié et les 2/3 du déplacement total. Cette évolution trouve son explication par l'évolution mesurée de la pression dans la bulle (figure suivante).

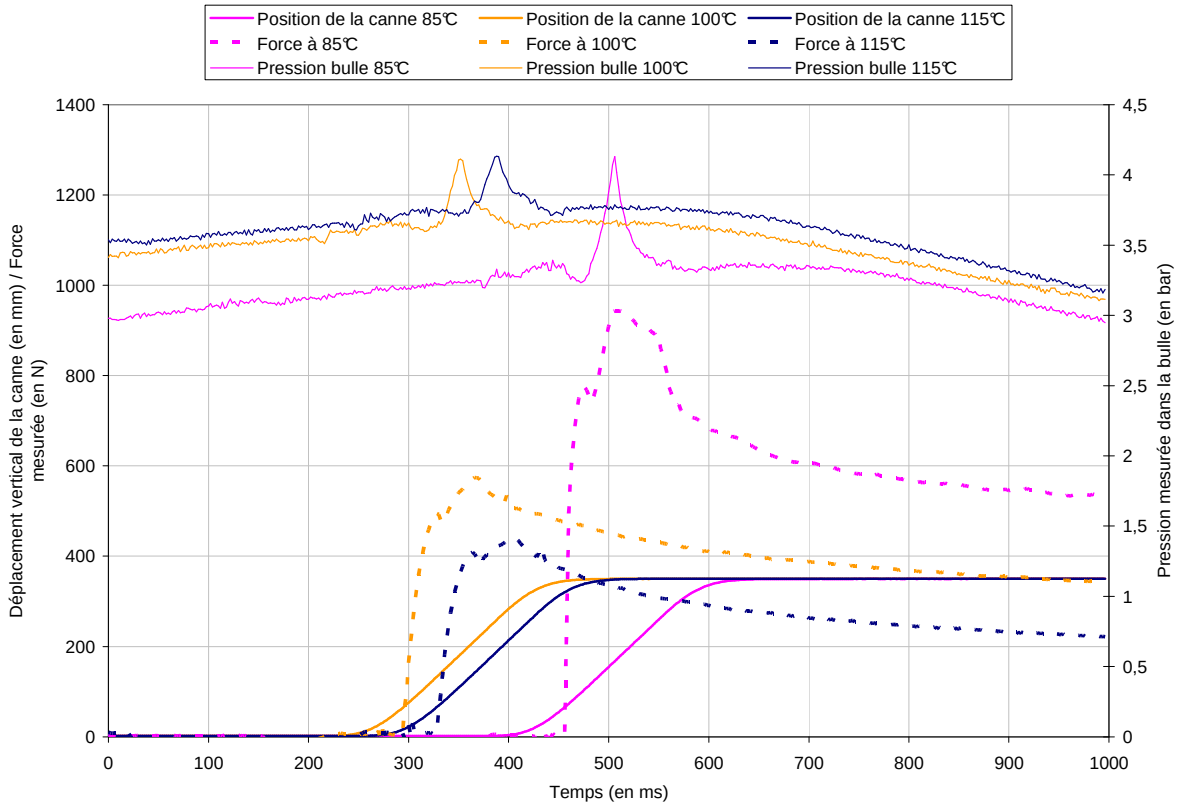


Figure 138 : Corrélation entre force et pression.

En effet, malgré la consigne de pression de présoufflage nulle, la pression mesurée par le capteur à l'intérieur de la canne, révèle un pic local qui survient en même temps que l'augmentation de la force. En effet, les 3 pics interviennent à chaque fois pour le maximum global de la force enregistrée. De plus, le pic ayant la plus grande amplitude (pour 85°C) engendre la plus grande différence entre le pic local et le pic global de la courbe de force. Ces variations de force et de pression peuvent s'expliquer par un phénomène d'adhésion / détachement entre la canne et la préforme. En effet, ce cas est fréquent lors d'un étirage prolongé sans présoufflage. Le collage engendre alors un volume local restreint et donc une augmentation de la pression (mais également de la force) qui va perdurer jusqu'à ce que la canne se détache de la matière, annulant ainsi la pression et créant alors une baisse de la force.

Il est important de noter que, comme il était prévisible, une augmentation de la température de la préforme en sortie de four, engendre une diminution de la force exercée en tête de la canne.

1.2. Présentation du modèle numérique

La simulation de l'étirage de la préforme a été réalisée sur un huitième de préforme de manière à pouvoir réduire les temps de calcul tout en conservant une taille de maille suffisante au cours de la simulation. Les faces latérales sont donc considérées comme des plans de symétrie.

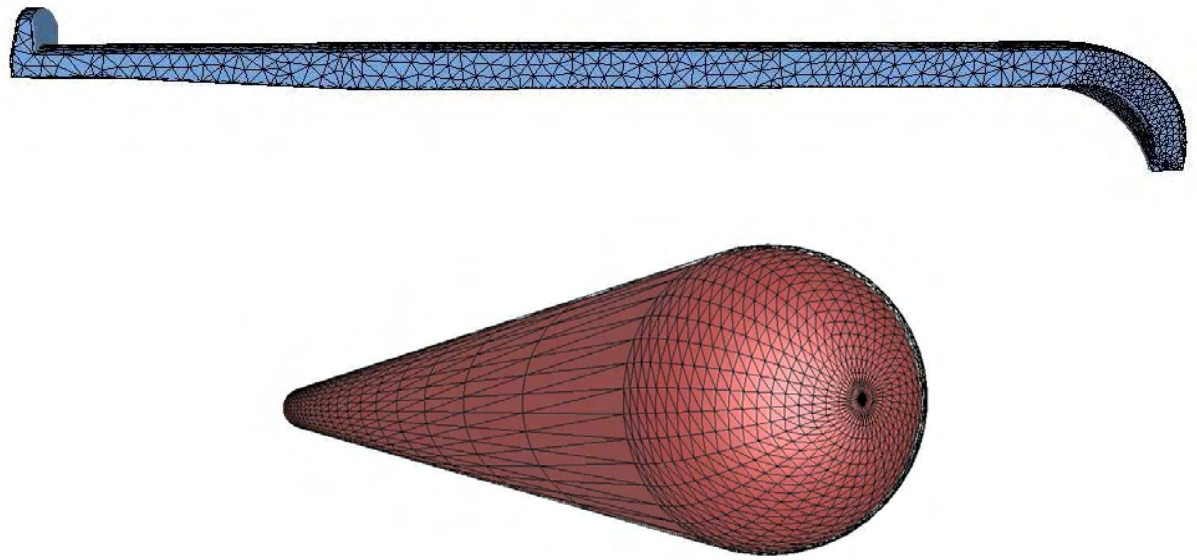


Figure 139 : Maillages de la préforme et de la canne d'étirage utilisés.

	Préforme	**Canne d'étirage**
Nbre d'éléments	23 000 elts / 5 400 nds	3 520 elts / 1 760 nds
Qualité	Anisotrope	Anisotrope
Contact	Glissant	
CL mécaniques	Vitesse nulle Des nœuds de la collerette	Vitesse uniforme de 2 m/s
CL thermiques	100°C - Adiabatique	Adiabatique
Loi de comportement	G'Sell modifié (cf. ch-III-4-1)	Indéformable

Tableau 25 : Caractéristiques du modèle numérique d'étirage.

A l'aide du calcul outillage sur Forge3®, il est possible d'obtenir la force engendrée par la préforme sur la canne (voir figure suivante). La simulation étant réalisée sur un huitième de préforme, la force calculée en tête de la canne doit donc être multipliée par un facteur huit.

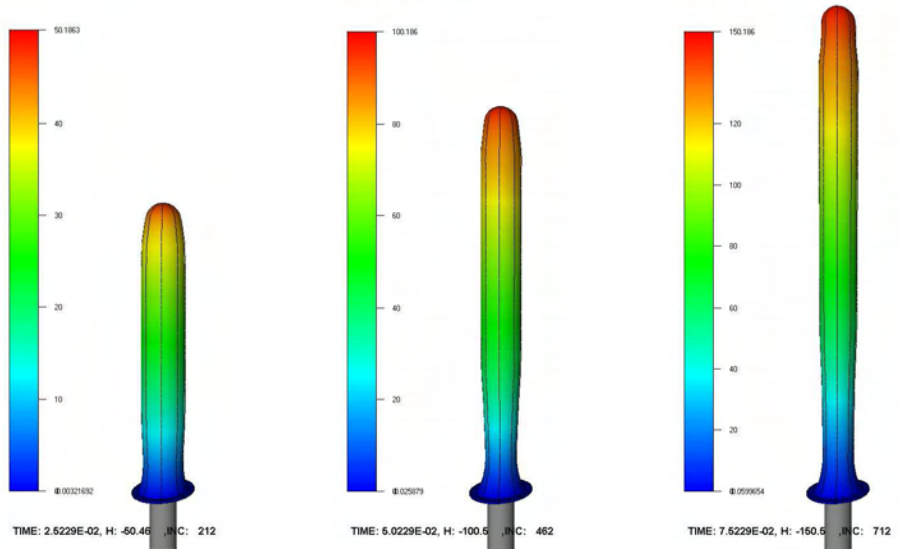


Figure 140 : Evolution du déplacement vertical sur 3 configurations successives à 25, 50 et 75 ms.

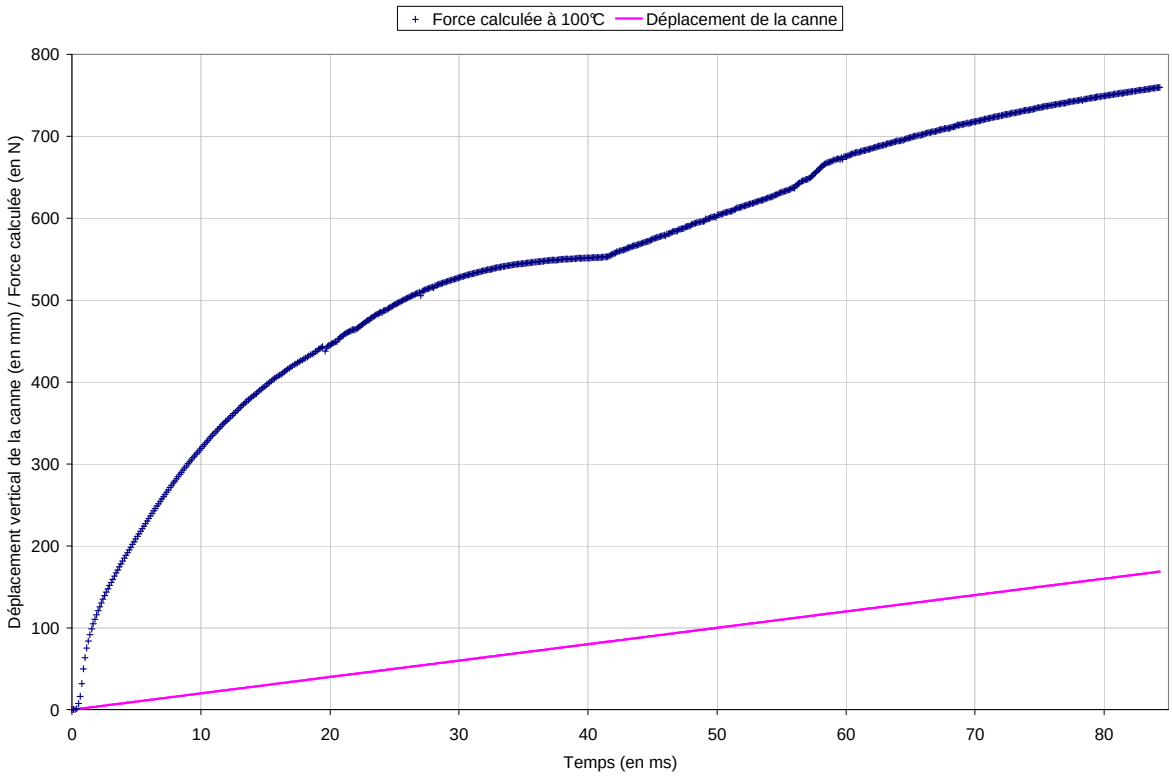


Figure 141 : Evolution du déplacement de la canne et de la force engendrée (température initiale de 100°C).

L'évolution de la force calculée numériquement en fonction du temps peut se décomposer en 3 phases nettement distinctes :

- une augmentation régulière de la force avec atténuation jusqu'à atteindre une valeur constante de 550N pour un déplacement de 90mm,
- un palier linéaire pour des valeurs de force comprises entre 550N et 650N,
- un nouveau palier disjoint du précédent pour des valeurs de déplacement supérieures à 115mm.

Ces 3 temps sont à mettre en relation directe avec l'évolution du contact entre la préforme et la canne lors de la simulation. En effet, dans cet essai purement élongationnel et sans soufflage, le contact entre l'outil et la matière va évoluer pour passer du ponctuel à l'état initial (un point en contact au sommet de la préforme) au longitudinal à l'état final (la canne étant en contact tout le long de la préforme).

Le calcul de la force étant directement proportionnel à la surface de contact, les deux discontinuités peuvent être identifiées comme l'apparition d'une nouvelle zone de contact au col de la préforme (liée à l'absence de présoufflage en l'état actuel) et sa propagation le long de la canne comme le montrent les figures suivantes.

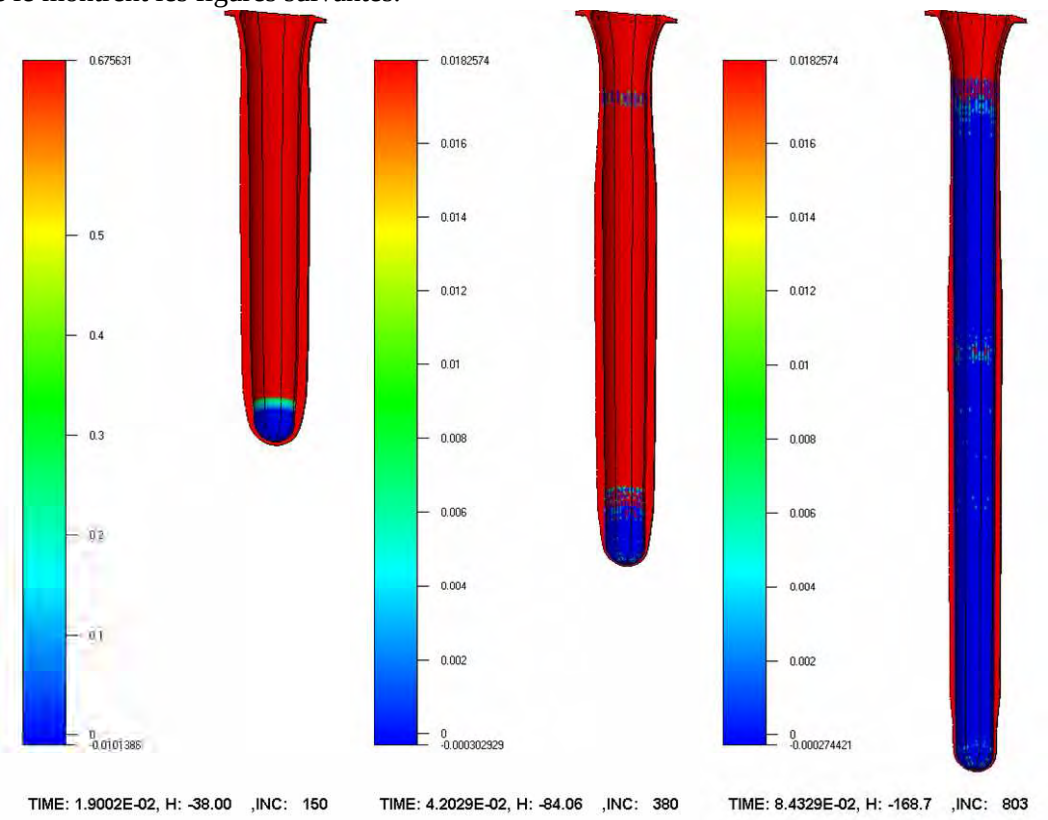


Figure 142 : Evolution du contact entre la canne et la préforme (profondeur de contact en mm) pour trois temps successifs à 19, 42 et 84 ms.

Ainsi, la fin de la première partie de la courbe à t = 42ms s'identifie comme étant l'instant où le contact apparaît au niveau du col de la préforme, lié à une épaisseur initiale plus faible (figure centrale précédente). Cette zone va alors s'étendre jusqu'à rejoindre la zone de contact initial, limitée à l'extrémité de la canne à t = 58 ms. A partir de cet instant, le contact entre la préforme et l'outil est parfaitement surfacique et permanent, d'où la 3ème zone de force identifiée sur le graphique précédent.

Il est également important de remarquer que, dans cette simulation, le contact a été parfaitement géré par le logiciel, comme le montrent les distributions de la profondeur de contact sur la figure précédente. En effet, les profondeurs de pénétration tout au long du calcul restent faibles et favorisent ainsi la convergence.

1.3. Comparaison entre simulation et expérience

En réalisant une synchronisation temporelle, il est possible d'effectuer une comparaison des courbes obtenues de manière expérimentale et numérique.

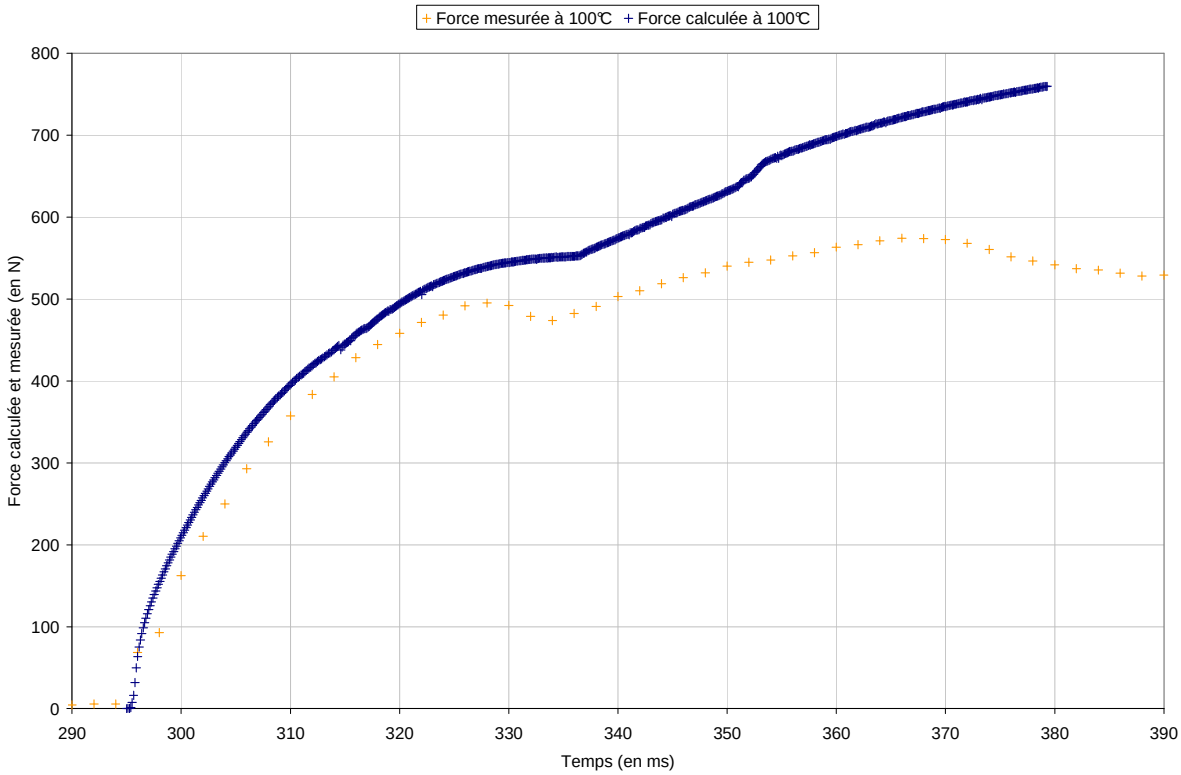


Figure 143 : Evolution de la force mesurée en tête de canne et de la force calculée (pour une température initiale de 100°C).

La différence obtenue entre les deux courbes reste proche de 15% tout au long de la première partie, jusqu'à l'obtention du plateau. A partir de cet instant, la deuxième zone de contact entre la préforme et la tige d'élongation modifie considérablement l'évolution de la force. De plus, le critère de contact est difficile à établir et toute comparaison entre un modèle numérique et un modèle expérimental demeure quasiment impossible.

Il est également important de rappeler que, dans un cadre industriel, cette deuxième zone de contact est inexistante en raison du présoufflage qui est pratiqué systématiquement. En effet, la pression d'air imposée dans la préforme, engendre un relâchement de la force mesurée en tête de canne. Ainsi, la zone intéressante en terme d'utilisation comparative et de validation industrielle reste la première.

Il s'avère donc que la loi de G'Sell modifiée, *utilisée dans le cadre de déformations uniaxiales*, permet avec une bonne précision de modéliser le comportement du P.E.T.

2. Etude du soufflage libre d'une préforme

2.1. Etude expérimentale des déformations lors du gonflage libre

Le gonflage libre d'une préforme chauffée au-delà de sa température de transition vitreuse permet de mettre en évidence, en simplifiant le phénomène, deux modes de déformation distincts. Le premier est principalement radial et permet l'apparition d'une bulle à la base de la préforme dont le rayon va croître jusqu'à atteindre une valeur limite. Cet instant engendre alors l'apparition du deuxième mode de déformation qui va être longitudinal et au cours duquel la bulle va s'étendre pour former la bouteille finale.

La courbe contrainte équivalente en fonction de la déformation cumulée obtenue dans des essais uniaxiaux permet une meilleure compréhension de ce comportement. En effet, elle met en évidence un seuil de déformation limite à partir duquel la contrainte augmente considérablement suivant une asymptote verticale, significative du fort durcissement structural apparaissant à cet instant.

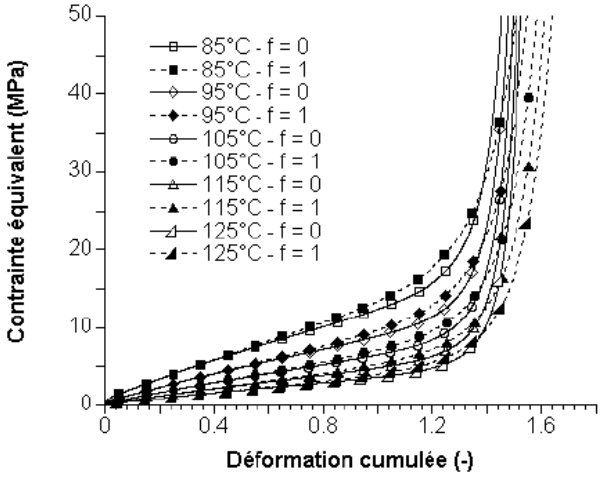


Figure 144 : Courbes contrainte-déformation en traction uniaxiale sur éprouvettes sablier [GOR-2001].

Cette déformation cumulée limite (aux alentours de 1.5 sur la courbe précédente) est la raison pour laquelle le soufflage libre se décompose en deux modes de déformation. En effet, la déformation du P.E.T. dans le procédé de soufflage est liée à *un décalage de l'équilibre entre 2 couples de paramètres primordiaux qui sont :*

- *l'épaisseur de la préforme et son gradient thermique longitudinal,*
- *la contrainte et la déformation.*

A l'état initial, le gradient de température étant le plus souvent faible dans la hauteur, et l'état de contrainte et de déformation en sortie de four pouvant être considéré comme nul, le critère guidant la déformation devient l'épaisseur de la matière.

En effet, si la bulle apparaît tout d'abord à la base de la préforme, c'est parce qu'il s'agit de la zone où l'épaisseur est la plus faible. Elle peut alors croître radialement car son apparition engendre une diminution de l'épaisseur là où son rayon est le plus important. Sa croissance est alors freinée lorsque la déformation cumulée atteint le seuil lié à l'asymptote verticale de la contrainte équivalente due au durcissement structural.

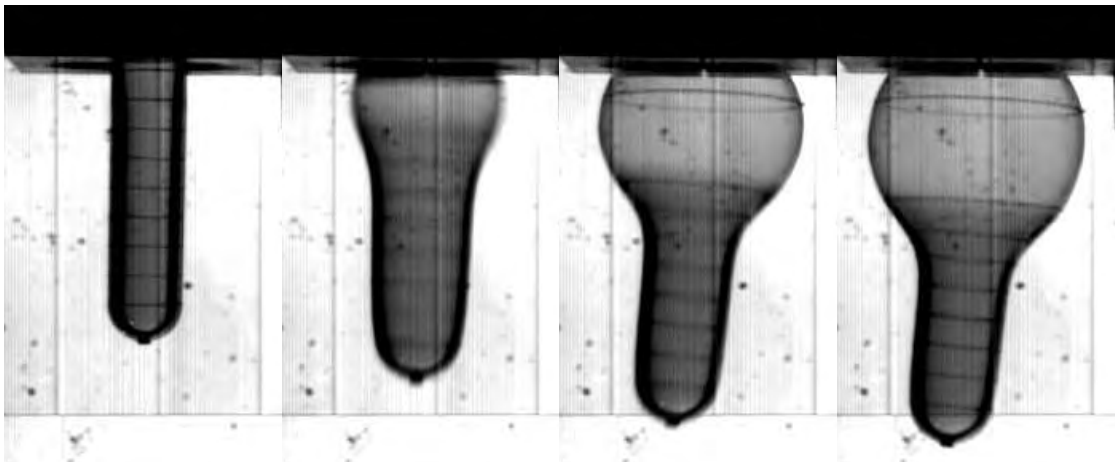


Figure 145 : Evolution de déformation suivant le premier mode radial.

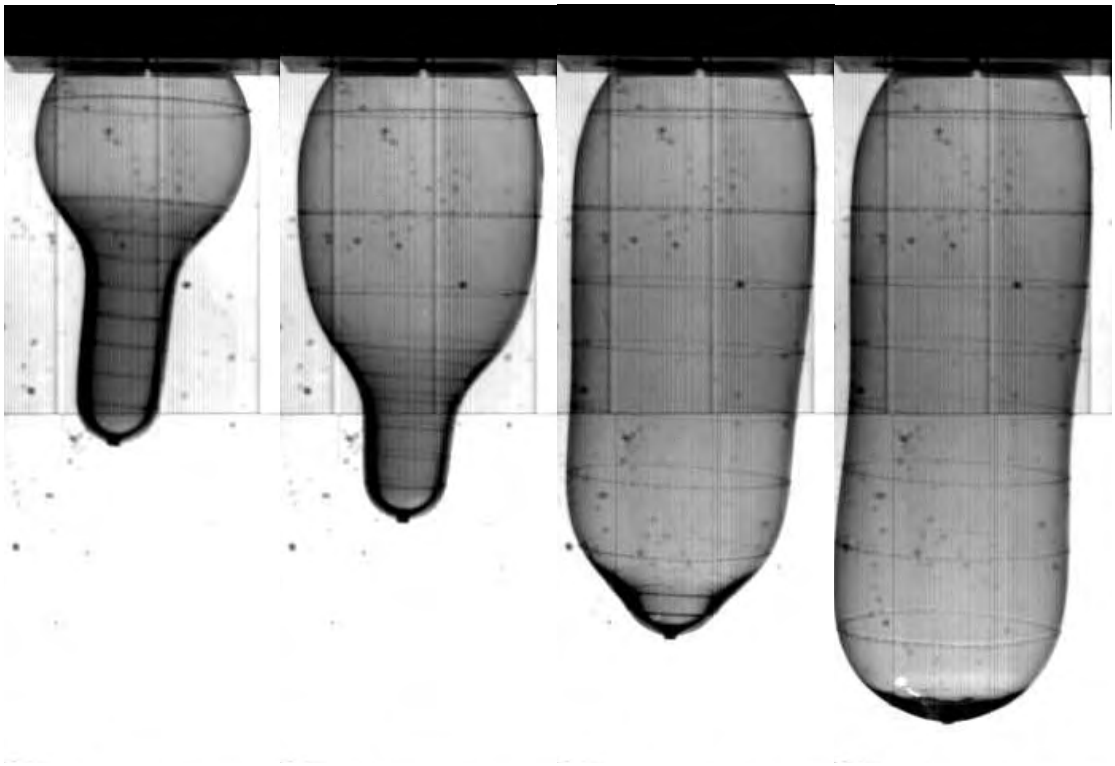


Figure 146 : Evolution de déformation suivant le deuxième mode longitudinal.

La pression étant toujours présente dans la préforme, elle va donc ensuite gonfler la zone où l'épaisseur reste la plus mince mais qui possède une déformation cumulée plus faible. Il s'agit de la jonction entre la bulle et le corps de la préforme non déformé. Cette zone va donc se gonfler sous l'effet de la pression jusqu'à atteindre de nouveau le seuil limite. C'est par propagation de la zone de faible épaisseur que la préforme va donc se déformer jusqu'à atteindre son volume final siège d'un équilibre entre température, épaisseur, contrainte, déformation et pression interne.

2.2. Etude numérique du soufflage libre

La simulation du soufflage libre de la préforme a été réalisée sur un huitième de préforme de manière à pouvoir réduire les temps de calcul tout en conservant une taille de maille suffisante au cours de la simulation. Les faces latérales sont considérées comme des plans de symétrie.

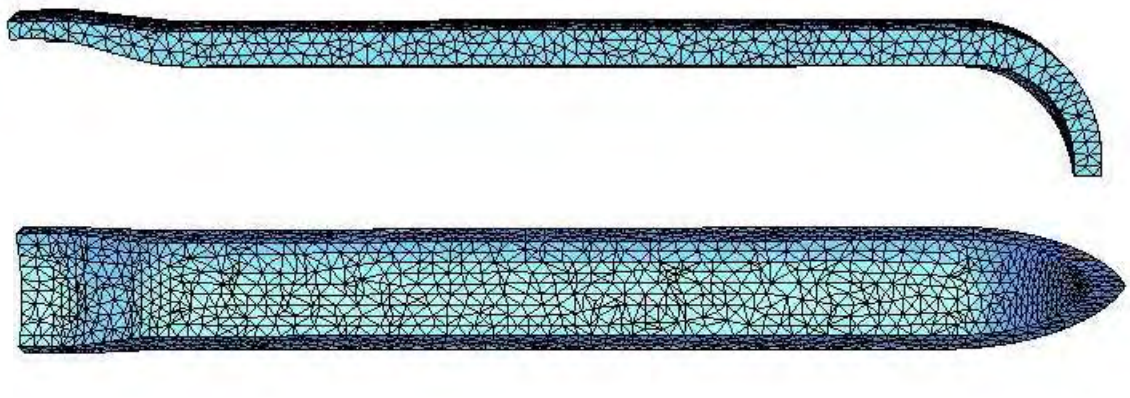


Figure 147 : Maillages de la préforme utilisée.

Nbre d'éléments	17 000 éléments / 4 000 nœuds
Qualité	Isotrope
CL mécaniques	Vitesse nulle des nœuds de la collerette Set de contrainte normale linéaire sur la face interne allant de 0 à 10 bars en 1 sec
CL thermiques	100°C – Adiabatique
Loi de comportement	G'Sell modifié (cf. ch-III-4-1)

Tableau 26 : Caractéristiques du modèle numérique utilisé en soufflage libre.

Les résultats suivants montrent l'évolution de la distribution de la déformation cumulée, calculée pour deux configurations déformées de la préforme. Leur examen permet de retrouver les modes de propagation de la bulle définis précédemment.

La simulation fait apparaître clairement une première étape de déformation purement radiale jusqu'à ce que la zone où le rayon est le plus important atteigne la limite de déformation, synonyme de contrainte équivalente très élevée. Cet état est représenté sur la figure centrale ci-après, avec une déformation qui atteint, au rayon maximal, une valeur de 1.4.

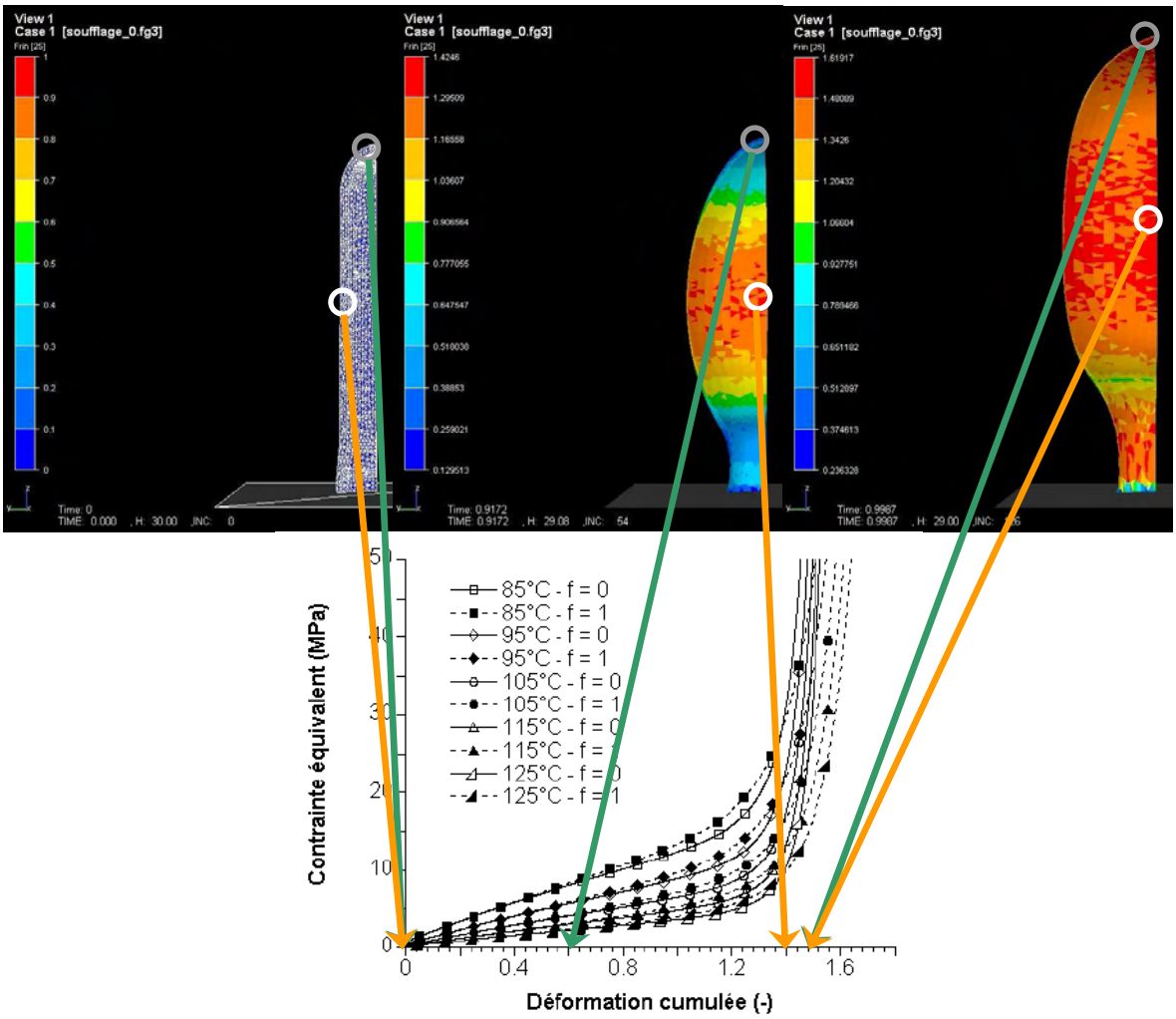


Figure 148 : Distributions de déformation sur la surface interne du 1/8ème de la préforme étudiée. Les déformations des points cerclés sont reportées sur l'abscisse de la courbe (σ,ε) du matériau pour comprendre le phénomène de gonflage de la préforme.

Le diamètre maximal étant ainsi atteint, la déformation de la préforme va donc se poursuivre par une propagation de l'augmentation du rayon dans le sens longitudinal, jusqu'à ce que la déformation cumulée globale dans la préforme soit la déformation limite définie par l'asymptote verticale de la courbe contrainte déformation aux alentours de 1.4, 1.5. Cet état final est celui représenté sur la figure de droite ci-dessus, pour lequel on trouve sur la hauteur de la préforme, des valeurs de déformation plus homogènes que dans l'état intermédiaire.

Il apparaît ainsi que le jeu de paramètres défini les travaux de thèse d'E. Gorlier et traduit par les courbes rhéologiques (σ, ε) de la figure ci-dessus, est valide dans le cadre de sollicitations uniaxiales (comme l'a montré l'étude de l'étirage) mais inadapté pour des sollicitations biaxiales.

En effet, cette rhéologie issue du dépouillement d'essais uniaxiaux néglige les effets biaxiaux et engendre ainsi une surestimation de la contrainte équivalente pour une déformation cumulée donnée. Elle ne permet donc pas une modélisation numérique correcte du gonflage des corps creux.

2.3. Etude d'une loi viscoplastique basée sur les déformations maximales

Cette différence de réponse rhéologique en fonction de la sollicitation est identifiée dans la littérature. Ainsi, pour s'affranchir d'un calcul de déformation cumulée en fonction des directions de sollicitations, L. Chevalier [CHE-2005] propose de remplacer la variable pilotant le terme de durcissement, soit $\bar{\varepsilon}$ (l'invariant au sens de Von Mises), par une autre mesure de déformation cumulée, basée sur l'intégration temporelle de la plus grande des vitesses de déformations principales :

$$\bar{\varepsilon}_{\max} = \int_o^t Max\left(\dot{\varepsilon}_I, \dot{\varepsilon}_{II}, \dot{\varepsilon}_{III}\right) dt \tag{135}$$

Dans le cadre d'un essai de traction uniaxiale sur une éprouvette de longueur courante *l*, la déformation cumulée peut être calculée à partir du tenseur des vitesses de déformation :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2l}\frac{dl}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2l}\frac{dl}{dt} \end{pmatrix} \tag{136}$$

La déformation cumulée s'obtient alors en intégrant dans le temps :

$$\bar{\varepsilon}_{monoaxial} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}\, dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}}\, dt = \int_{l_0}^{l} \frac{1}{l}\, dl \tag{137}$$

$$\bar{\varepsilon}_{monoaxial} = \ln\frac{l}{l_0} \tag{138}$$

Par contre, dans le cas d'un essai de traction biaxiale sur une éprouvette carrée de longueur courante du côté *l*, le tenseur des vitesses de déformation prend la forme :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{l}\frac{dl}{dt} \end{pmatrix} \tag{139}$$

Et la déformation cumulée s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}_{biaxial} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}\, dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}}\, dt = \int_0^t 2\frac{dl}{l} \tag{140}$$

$$\bar{\varepsilon}_{biaxial} = 2\ln\frac{l}{l_0} \tag{141}$$

Et donc finalement, pour un même allongement $l - l_0$:

$$\bar{\varepsilon}_{biaxial} = 2\bar{\varepsilon}_{monoaxial} \tag{142}$$

Ainsi dans le cadre d'une loi viscoplastique s'écrivant sous la forme :

$$\bar{\sigma} = K \dot{\bar{\varepsilon}}^{m} \, g\left(\bar{\varepsilon}, T\right) \tag{143}$$

pour une contrainte équivalente donnée, le niveau de déformation sera deux fois plus important avec un calcul de déformation cumulée biaxiale qu'avec une déformation cumulée uniaxiale.

La théorie proposée par L. Chevalier [CHE-2005] basée sur la plus grande des déformations principales a été implémentée et utilisée dans le logiciel Forge3® dans le cadre d'un stage effectué au Cemef par S. Charon [CHA-2007].

D'une manière générale, le tenseur des vitesses de déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} \tag{144}$$

Le calcul des valeurs propres s'obtient par la résolution de :

$$\left| \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \lambda \underline{\underline{I}} \right| = 0 \tag{145}$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 I_1 - \lambda I_2 + I_3 = 0 \tag{146}$$

avec :

$$\begin{cases} I_1 = \dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{xy} + \dot{\varepsilon}_{xz} \\ I_2 = -\dot{\varepsilon}_{xx}\dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{yy}\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon}_{zz}\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{xx}^2 + \dot{\varepsilon}_{yy}^2 + \dot{\varepsilon}_{zz}^2 \\ I_3 = -\dot{\varepsilon}_{xx}\dot{\varepsilon}_{yz}^2 - \dot{\varepsilon}_{yy}\dot{\varepsilon}_{zx}^2 - \dot{\varepsilon}_{zz}\dot{\varepsilon}_{xy}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{xy}\dot{\varepsilon}_{yz}\dot{\varepsilon}_{zx} + \dot{\varepsilon}_{xx}\dot{\varepsilon}_{yy}\dot{\varepsilon}_{zz} \end{cases} \tag{147}$$

On utilise alors la valeur maximale prise parmi les 3 solutions de cette équation pour définir une nouvelle variable $\bar{\varepsilon}_{\max}$.

Lors d'une simulation de traction biaxiale sur éprouvette rectangulaire, la comparaison des deux approches permet de vérifier le développement précédent. Pour une traction biaxiale donnée, nous obtenons bien (figure ci-après) dans la partie centrale de l'éprouvette, sollicitée en mode équibiaxial, $\bar{\varepsilon}_{\max} \approx \bar{\varepsilon}/2$. A courbe rhéologique (σ, ε) donnée (figure précédente), l'état de contrainte dans le second cas est donc moins élevé, ce qui semble se produire lors du soufflage d'une bouteille comme nous allons le montrer dans le paragraphe suivant.

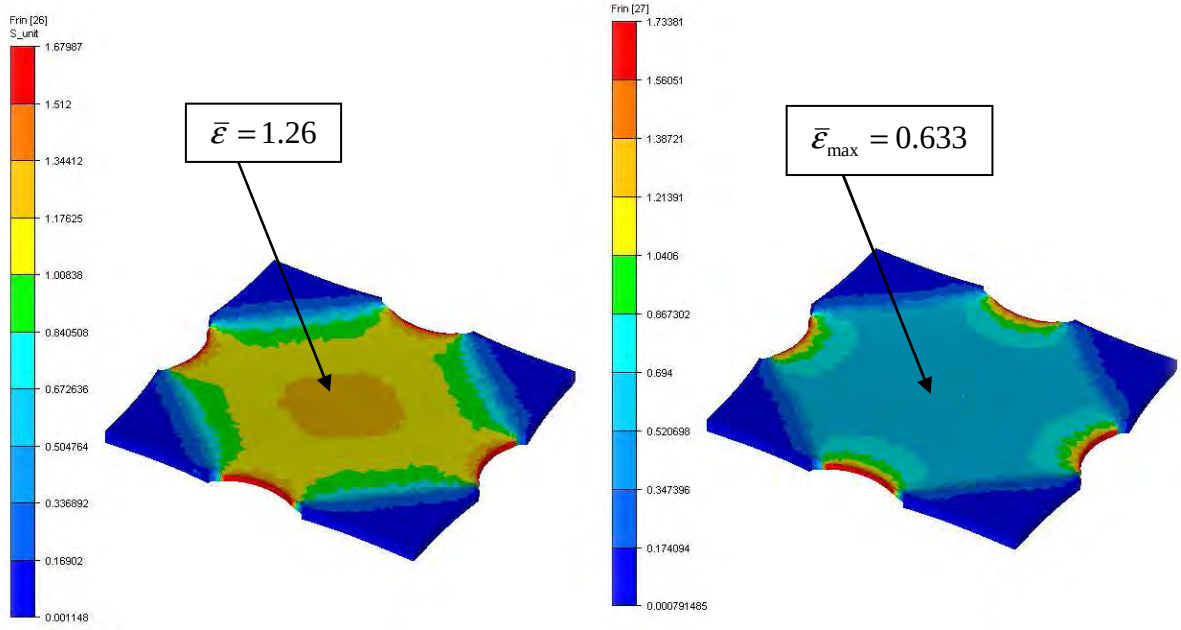


Figure 149 : Simulation d'un essai de traction biaxial [CHA-2007].

2.4. Soufflage d'une bouteille avec approche en déformation maximale

Le modèle utilisé par S. Charon est basé sur la géométrie de préforme vue précédemment. Le moule utilisé est celui développé dans le cadre du pilote de soufflage du CROMeP (voir figure suivante). Les maillages et conditions aux limites sont les suivants :

Nbre d'éléments	320 000 éléments / 63 000 nœuds pour la préforme
Qualité	Anisotrope
CL mécaniques	Vitesse nulle des nœuds de la collerette Set de contrainte normale linéaire sur la face interne allant de 0 à 6 bars en 0.1 sec puis est maintenu constant durant 0.2 sec
CL thermiques	100°C – Adiabatique
Loi de comportement	G'Sell modifié (cf. ch-III-4-1)
Loi de contact	Bilatéral collant entre la préforme et le moule

Tableau 27 : Caractéristiques du modèle numérique de soufflage.

Les figures suivantes permettent de visualiser à t=0.1sec et t=0.3sec, les différences de cinématique entre une approche de déformation cumulée classique et une approche telle qu'elle est définie par L. Chevalier, basée sur les déformations maximales.

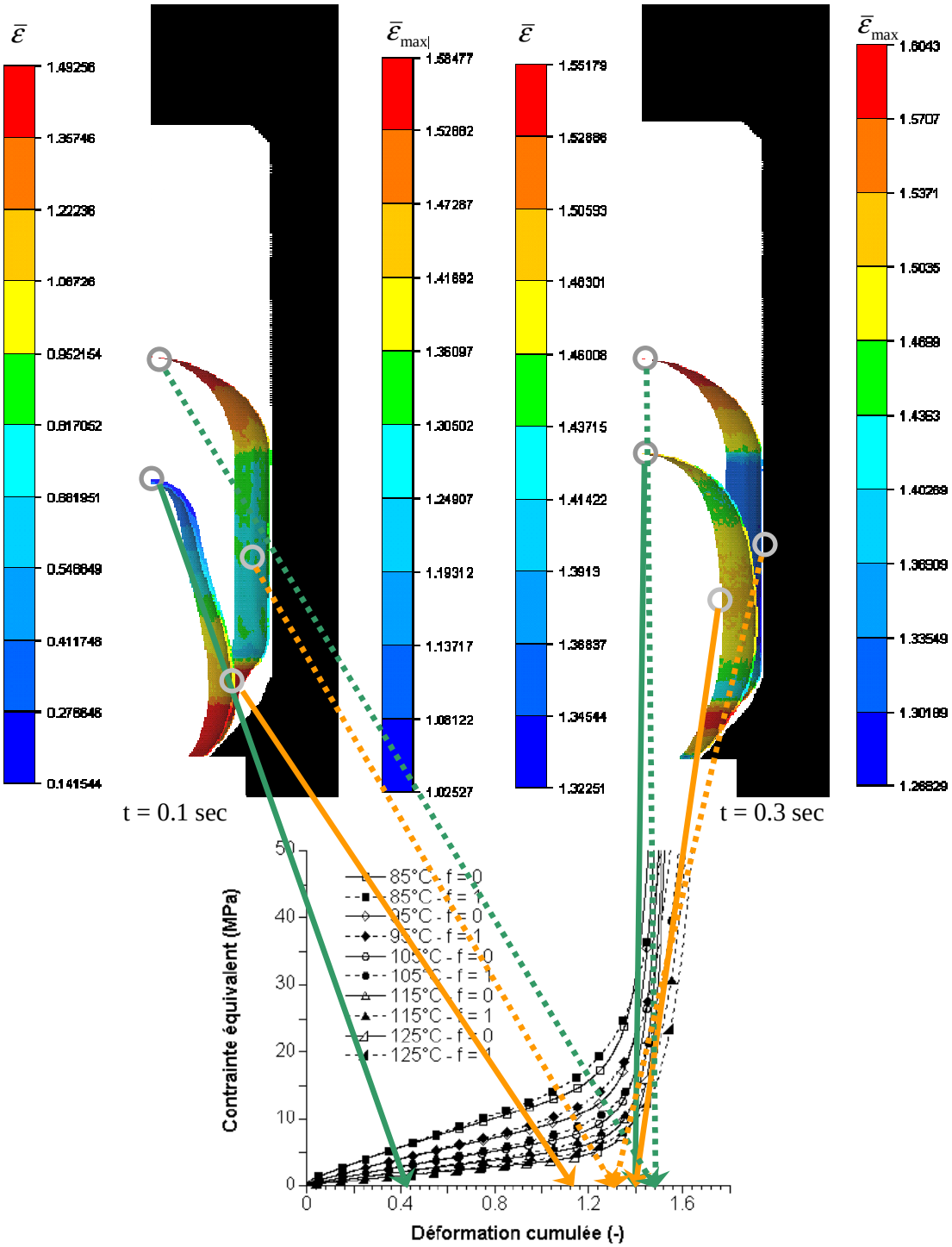


Figure 150 : Simulation d'un soufflage confiné avec une approche en déformation cumulée classique et une approche basée sur les déformations maximales [CHA-2007]. Les configurations de la préforme sont données aux temps 0.1 et 0.3 s. Pour chacun des ces temps, sont tracés la préforme déformée avec le durcissement exprimé en $\bar{\varepsilon}$ et en $\bar{\varepsilon}_{max}$.

Les résultats obtenus permettent d'améliorer de manière significative les résultats obtenus dans le cas du soufflage libre. En effet précédemment, la déformation radiale était insuffisante au point de ne pas permettre à la matière d'entrer en contact avec le moule. Avec l'approche en déformations maximales, la préforme rentre en contact avec le moule.

Cependant il apparaît clairement qu'une nouvelle fois la limite de déformation est atteinte de manière prématurée et stoppe ainsi le deuxième mode de propagation longitudinale, bien avant d'avoir atteint le fond du moule. Pourtant, comme le montre la figure suivante, la comparaison des iso-valeurs de déformation sur la géométrie finale montre que, comme dans le cas des essais de traction biaxiale, les déformations $\bar{\varepsilon}_{max}$ sont très sensiblement inférieures aux déformations de type von Mises, $\bar{\varepsilon}$.

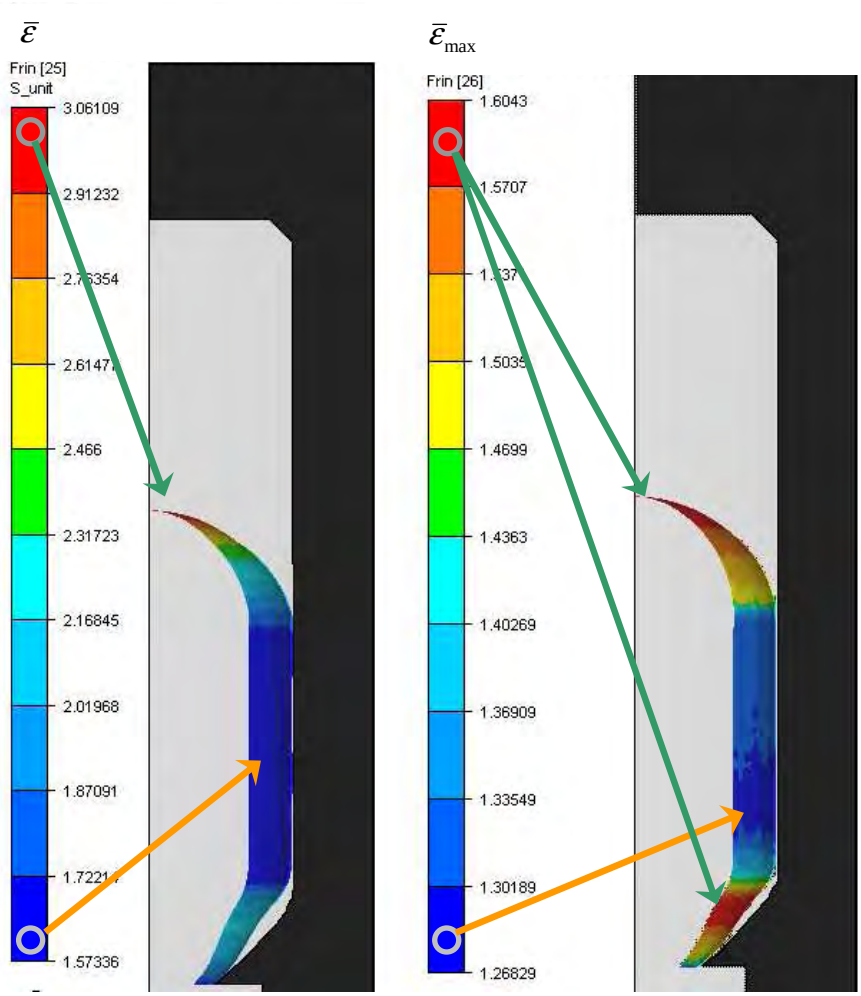


Figure 151 : Comparaison du calcul de la déformation cumulée avec une approche classique et avec une approche basée sur les déformations maximales [CHA-2007].

Nous en concluons que le fait d'atteindre la déformation limite longtemps avant que le moule soit parfaitement rempli, montre la limite de l'utilisation en soufflage des paramètres rhéologiques et des courbes contrainte-déformation obtenus par E. Gorlier dans le cadre d'essais de traction uniaxiaux. L'adjonction du formalisme proposé par L. Chevalier se révèle insuffisante pour que ces données rhéologiques soient exploitables en étirage soufflage de préforme.

Afin de s'affranchir de ces données matériaux, S. Charon a procédé à une analyse de sensibilité à la forme de la loi rhéologique pour confirmer la faisabilité d'un soufflage éléments finis en 3D que nous avions déjà montrée avec une loi newtonienne [CHA-2004].

3. Etude du soufflage confiné et sensibilité par rapport au modèle rhéologique

3.1. Présentation du modèle étudié

Partant de la définition du déviateur des contraintes pour une loi de Norton-Hoff :

$$S_{ij} = 2K\left(\sqrt{3}\,\bar{\dot{\varepsilon}}\right)^{m-1}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{148}$$

S. Charon définit une loi générique paramétrée permettant de recomposer les différentes parties (comme identifiées sur la figure ci-dessous) de la courbe contrainte déformation définie par la loi de G'Sell modifiée.

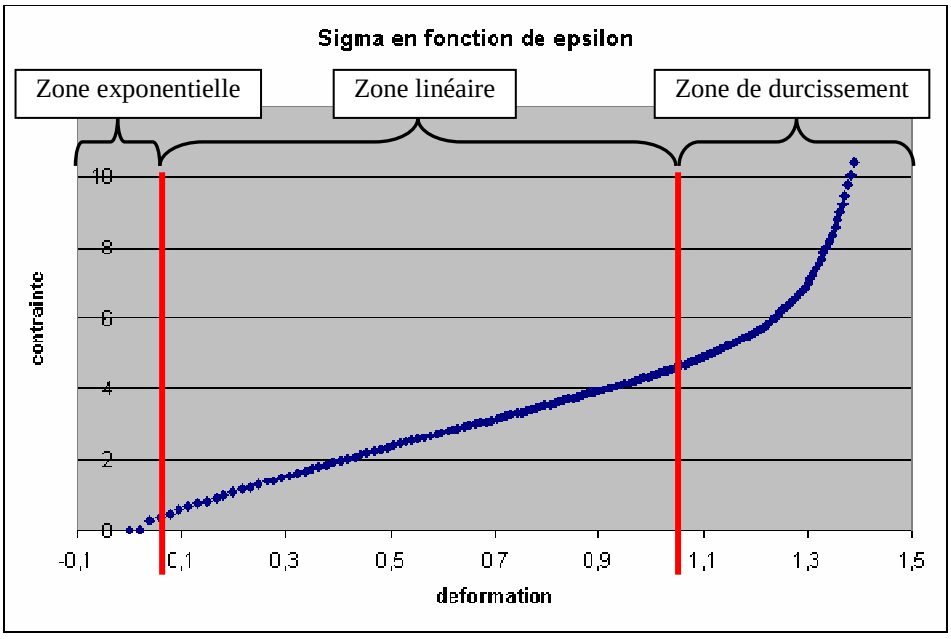


Figure 152 : Décomposition de la loi de G'Sell [CHA-2007].

Il définit ainsi sa fonction K sous la forme :

$$K\left(\bar{\varepsilon}\right) = -Ae^{B\left(-\bar{\varepsilon}+C\right)} + D\bar{\varepsilon} + E + Fe^{G\left(\bar{\varepsilon}+H\right)} \tag{149}$$

dépendante d'un jeu de 9 paramètres.

Les paramètres peuvent alors être définis de manière à modifier la forme de la courbe (σ, ε) pour un $\dot{\varepsilon}$ donné, en particulier les valeurs définissant l'amplitude et la pente de la zone linéaire, le niveau de contrainte en début de durcissement et la valeur asymptotique de la déformation maximale.

3.2. Modélisation du soufflage confiné

Le modèle proposé par S. Charon est le même que celui que nous avons étudié précédemment de manière à pouvoir effectuer une comparaison directe sur les formes des bouteilles en fin de soufflage.

Dans un premier temps, les résultats de simulation montrent qu'en s'affranchissant d'une loi matérielle dont les paramètres ne reflètent pas la réalité, la simulation permet de souffler une bouteille dans sa quasi-intégralité. Ainsi, en choisissant une valeur de déformation maximale proche de 3, on obtient la configuration déformée illustrée en partie droite de la figure ci-dessous, à comparer au résultat précédent figurant à gauche.

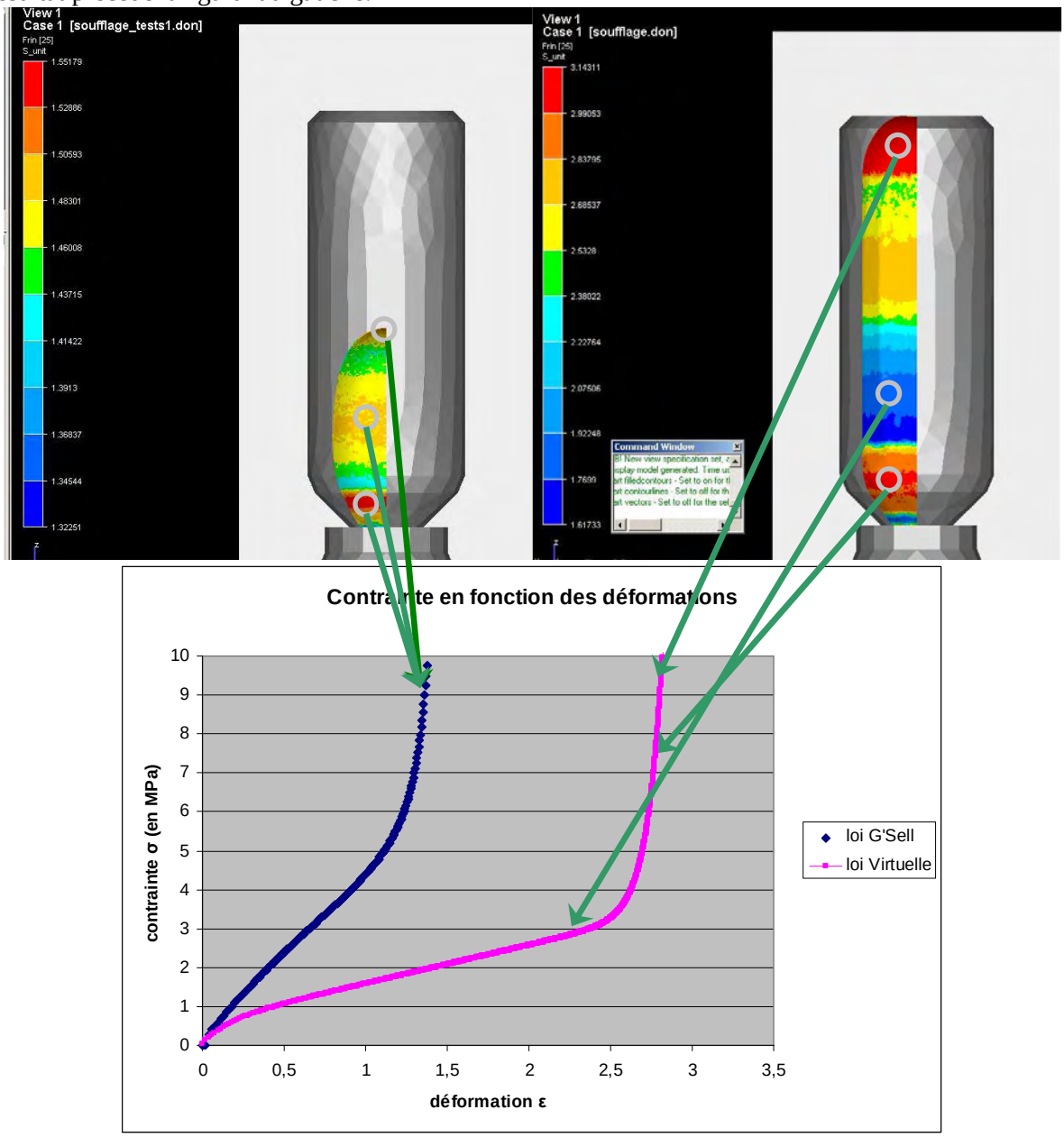


Figure 153 : Comparaison de fin de simulation des soufflages confinés dans le cadre d'une loi de G'Sell modifiée et d'une loi paramétrée [CHA-2007].

La bouteille finale obtenue avec la loi paramétrée conserve un défaut au fond où la matière n'a pu se plaquer contre le moule malgré une déformation cumulée proche de 3 dans cette zone. Ceci lève néanmoins les doutes quant à la faisabilité d'une simulation 3D du soufflage confiné.

S. Charon propose alors une étude de sensibilité sur le jeu de paramètres défini dans la loi afin de définir l'impact des 9 coefficients sur la propagation de la bulle et la forme finale de la bouteille soufflée. Il montre ainsi que si le décalage de la déformation cumulée limite est une condition nécessaire au soufflage, l'amorce de cette déformation est elle aussi primordiale puisqu'elle modifie l'apparition et la forme de la bulle initiale, changeant ainsi sa propagation longitudinale.

En faisant varier le coefficient B de la loi (décroissant de gauche à droite sur la figure suivante) et en faisant varier l'inflexion de la courbe à l'apparition du durcissement (décroissant de haut en bas sur la figure suivante), S. Charon obtient finalement une bouteille parfaitement soufflée.

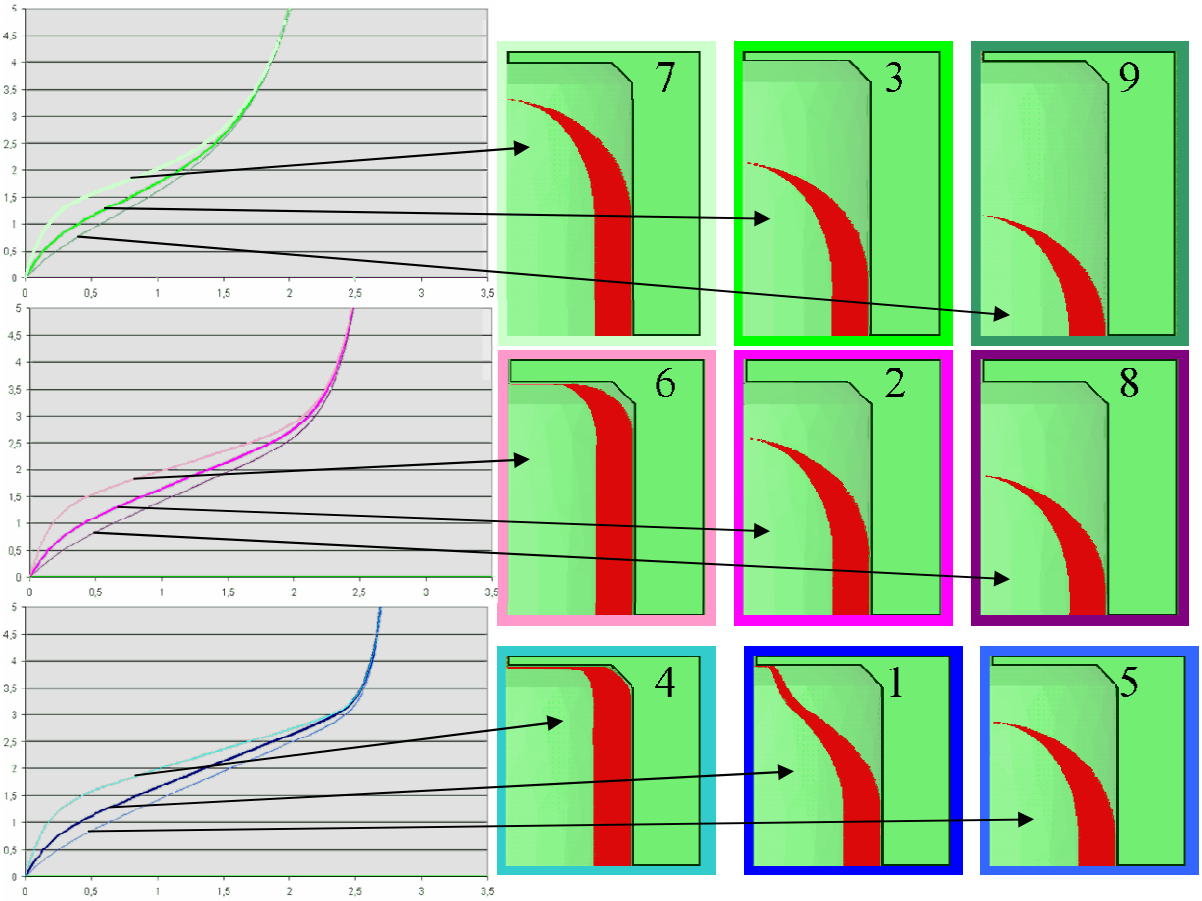


Figure 154 : Résultat de l'étude de sensibilité [CHA-2007].

S. Charon note ainsi que, si la fin de la courbe a une influence sur la forme de la bouteille, le début joue également un rôle important sur le comportement de la préforme. En effet, les faibles déformations correspondent à l'apparition de la bulle qui ne dépend, dans cette loi isotherme, que de l'épaisseur et de la rhéologie.

De plus, les formes finales des bouteilles montrent que la pente de la partie linéaire de la courbe va gouverner la facilité plus ou moins grande de la propagation du gonflement de la préforme. Plus la pente est faible, plus le mécanisme est facilité car plus la concentration de déformation est facile avant le durcissement.

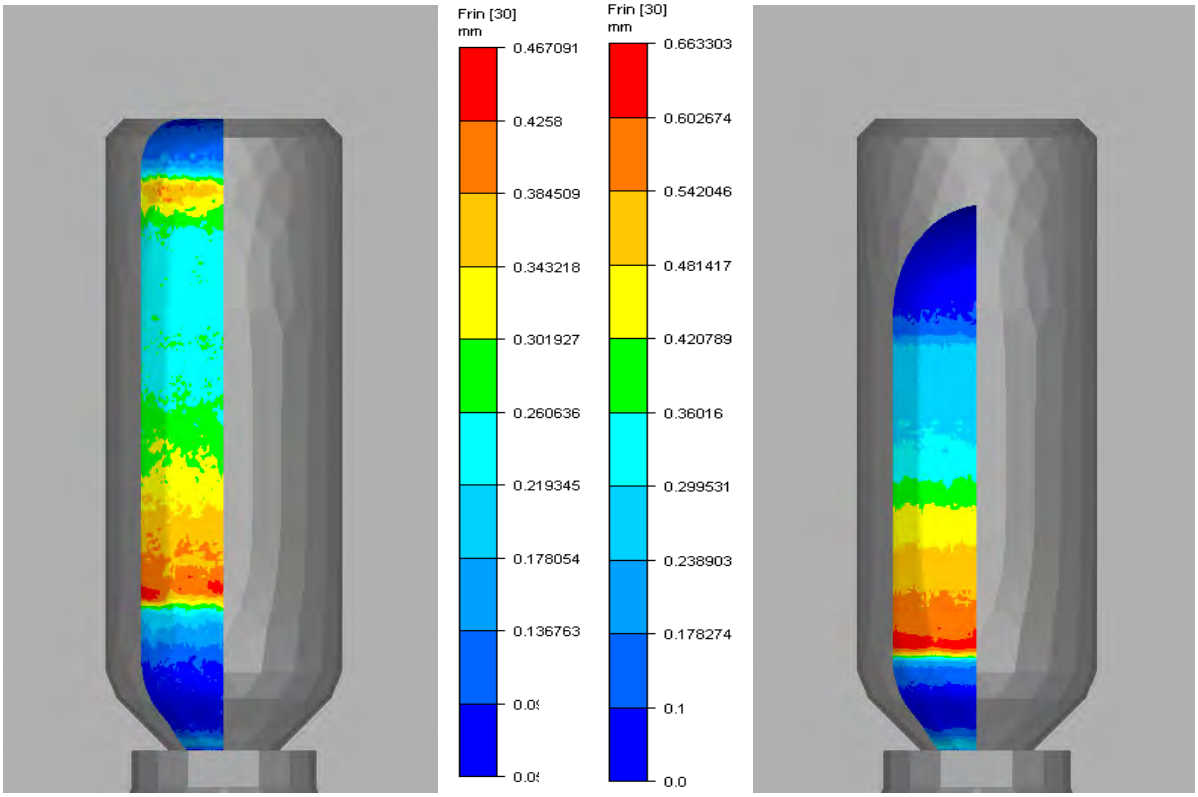


Figure 155 : Epaisseur de la bouteille soufflée en fonction de la bulle initiale correspondant au cas 6 et 8 de la figure 154 sur les résultats de l'analyse de sensibilité [CHA-2007].

4. Conclusions partielles

L'étude de la modélisation de l'étirage et du soufflage du P.E.T. a permis de mettre en valeur toute la complexité du procédé de fabrication des bouteilles en P.E.T.

Il n'existe pas à ce jour comme l'a montré N. Billon [BIL-2005], de loi universelle unique permettant de modéliser le comportement du P.E.T. sur toute sa gamme de mise en forme. Notre étude des lois hyperélastiques a confirmé les difficultés d'implantation dans un logiciel de simulation numérique, a fortiori dans le cadre de produits minces soumis à de grandes déformations.

Les lois de type viscoplastique ont l'avantage d'être plus flexibles, faciles à implanter. Cependant, il n'en reste pas moins le problème de la caractérisation, essentiel sur ce type de sollicitations.

Les travaux de L. Chevalier nous ont montré l'importance d'une approche multiaxiale pour la détermination des paramètres rhéologiques mais aussi pour le calcul de la déformation puisque le procédé n'est pas unidirectionnel comme le précise son nom « biétirage / soufflage ».

D'un point de vue numérique, le calcul en trois dimensions reste couteux en terme de maillage mais cette difficulté n'est pas infranchissable et devrait disparaître grâce au progrès de l'informatique. Il n'en reste pas moins que, compte tenu des vitesses de déformation liées au procédé, un remaillage semble indispensable pour palier aux difficultés des produits minces, des taux de déformations élevés mais aussi et surtout à une bonne gestion du contact entre le moule et la matière. Ainsi, nous avons pu à l'aide du logiciel Forge3® montrer la faisabilité d'une simulation complète de soufflage en 3 dimensions (annexe : article issue de la PPS20 [CHA-2004].

Conclusions générales et perspectives

1. Bilan de l'étude

Les bouteilles en P.E.T. sont issues d'un procédé de fabrication dont le savoir-faire a permis à la grande distribution une utilisation largement diffuse. L'objectif initial des industriels portés sur la garantie de l'efficacité de l'emballage se porte aujourd'hui sur un désir de rentabilité, d'économie d'énergie, tout en conservant la qualité du produit et en améliorant sa conception de manière à attirer toujours d'avantage, l'œil du client. Malheureusement pour l'industrie, ce procédé de fabrication repose sur une complexe adéquation entre de multiples paramètres, ne permettant pas la réalisation de tout et n'importe quoi dans n'importe quelles conditions.

Devant cette complexité de mise en œuvre, la modélisation s'est avérée être un outil scientifique indispensable à la compréhension des phénomènes mécaniques et thermiques mis en jeu. Notre ambitieuse étude avait pour objectif de modéliser en 3D l'ensemble de ces étapes afin de créer un outil d'amélioration à la compréhension, d'optimisation et d'aide à la conception pour l'industrie.

L'étude sur la modélisation du chauffage par rayonnement infrarouge des préformes, primordiale pour la répartition finale d'épaisseur, nous a amenés à développer un modèle radiatif basé sur la méthode du lancer de rayons au sein du logiciel éléments finis Forge3®. Les caractéristiques de ce module thermique sont :

- Le suivi des photons depuis leur émission jusqu'à leur absorption grâce au lancer de rayons,
- La prise en compte des réflecteurs céramiques présents sur les lampes,
- L'absorption du rayonnement dans la matière par une loi de Beer-Lambert,
- La rotation et la translation de la préforme dans le four.

Cette approche originale a été validée par confrontation avec des solutions analytiques, mais également avec des mesures thermographiques expérimentales.

L'approche numérique prend alors tout son intérêt dans la flexibilité qu'elle procure à l'industrie par rapport à l'expérimental. En effet ce module, tel qu'il a été réalisé, permet de prendre en compte des géométries quelconques de préformes, mais également de lampes et de réflecteurs.

De plus, notre étude a montré entre autres que la simulation pouvait permettre d'identifier et de quantifier des phénomènes physiques, ce qui serait presque impossible par l'expérience. Ainsi, la simulation du chauffage de la préforme par les modules non pas en vis à vis mais latéraux a pu montrer que leur influence est non négligeable puisque s'élevant à 10% de l'éclairement émis par le module principal.

D'un point de vue mécanique, nous avons passé en revue les différentes lois proposées à ce jour dans la littérature pour modéliser le comportement du P.E.T. au delà de sa température de transition vitreuse. Ainsi, les lois implémentées et testées ont été les suivantes :

- L'hyperélasticité de type Néo-Hookéen et Mooney-Rivlin,
- La viscoplasticité de type G'Sell modifié à caractère monodimensionnel,
- La viscoplasticité de type G'Sell modifié avec calcul de déformation cumulée basée sur la déformation maximale telle que suggérée par L. Chevalier.

L'implantation de ces lois dans le logiciel Forge3® a été validée grâce au développement de différents modèles analytiques plus ou moins complexes comme le gonflage de tube ou de sphère avec une loi de comportement hyperélastique.

Notre étude a permis de plus de confirmer d'un point de vue numérique l'absence à ce jour dans la littérature d'une loi universelle permettant de modéliser le P.E.T. sur l'ensemble de sa plage de mise en forme. De plus, les lois existantes créent des difficultés d'implémentation numérique et de résolution non négligeables.

Ainsi, le modèle isotrope dérivé d'une loi de G'Sell a permis de modéliser avec précision l'étirage de la préforme par la canne. Par contre, son utilisation dans le cadre de sollicitations multidirectionnelles est rapidement limitée.

Nous inspirant des travaux de L. Chevalier, nous avons montré qu'une approche basée sur l'intégration temporelle de la plus grande des vitesses de déformations principales est plus appropriée dans le cadre du soufflage de corps creux. L'utilisation de paramètres issus d'un dépouillement monoaxial ne nous a pas permis de valider un soufflage complet par cette approche.

Enfin, les difficultés de mise en forme du procédé d'injection soufflage sont liées au couplage thermomécanique, aux grandes déformations, à une approche produit mince et nécessitent l'utilisation d'outils numériques appropriés comme le remaillage adaptatif ou le passage d'instabilités. Ainsi, nos travaux ont montré que la modélisation 3D du chauffage et du soufflage des bouteilles en P.E.T. n'était plus utopique grâce à des moyens informatiques de plus en plus performants et des outils numériques adéquats.

2. Axes d'amélioration et développements futurs

L'étude du soufflage des bouteilles en P.E.T. est un sujet qui a été abordé à de nombreuses reprises lors des 30 dernières années, principalement pour la phase de mise en forme. Ainsi, ces travaux peuvent se classer dans 3 grandes catégories :

- La caractérisation du polyéthylène téréphtalate et l'étude des lois de comportement pouvant le modéliser,
- La modélisation du chauffage des préformes,
- La modélisation de l'étirage soufflage.

Nos travaux avaient ainsi pour objectif de rassembler les deux dernières catégories tout en s'appuyant sur les connaissances de la première.

Concernant le chauffage, le module développé est une première ébauche prometteuse. En effet, n'étant pas l'unique thématique de cette thèse, son utilisation et ses fonctions n'ont pu être validées pour une utilisation industrielle. Une étude de sensibilité aux divers paramètres tels que la vitesse de rotation de la préforme dans le four en fonction du pas de temps de calcul numérique permettrait de valider par comparaison avec l'expérimental de nombreux points abordés dans nos travaux.

De la même manière, certains éléments comme les réflecteurs avant et arrière n'ont pu être pris en considération par manque de temps. Leur modélisation pourrait apporter des éléments intéressants, notamment dans le calcul des pertes énergétiques.

Enfin, pour la partie thermique, la propagation du rayon après avoir franchi la paroi de la préforme n'est à l'heure actuelle pas prise en compte. Une étude intéressante pourrait être menée de manière à définir avec précision quel est l'impact de cette propagation sur la face arrière de la préforme.

D'un point de vue mécanique, la difficulté majeure repose sur l'utilisation d'une loi unique permettant de modéliser le comportement du P.E.T. sur l'ensemble de sa gamme de mise ne forme. Inexistante à ce jour sous une formulation simple, sa détermination nécessite encore des efforts significatifs en terme de développements d'outils rhéologiques (en biaxial) et d'outils d'identification.

Enfin, d'un point de vue numérique, l'avancée des techniques de modélisation numérique a montré qu'il était désormais possible de réaliser une simulation 3D du soufflage des corps creux. Les difficultés principales encore rencontrées concernent l'implémentation de lois sophistiquées mais surtout le fait que la paroi de la préforme au cours du soufflage diminue fortement de par le biétirage. Les techniques de remaillage actuelles restent couteuses en temps de calcul et devront permettre d'adapter le raffinement des géométries suivant des critères plus recherchés mêlant épaisseur, vitesse de déformation, gradient thermique mais aussi distance de contact de manière à mieux appréhender les géométries complexes imaginées par les industriels.

Annexes

Annexes 185

1. Bibliographie 186

2. Nomenclature 191

3. Calcul analytique de la contrainte d'un cube ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une traction uniaxiale 192

4. Calcul analytique de l'évolution du rayon interne d'un tube ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une pression sur sa paroi interne 195

5. Calcul analytique de l'évolution du rayon interne d'une sphère ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une pression sur sa paroi interne 198

6. Calcul du taux de déformation longitudinale d'un cube 202

7. Calcul du taux de déformation radial d'un tube 203

8. Calcul du taux de déformation d'une plaque 204

9. Géométrie de la préforme utilisée pour les simulations d'étirage et de soufflage 205

10. Article issue de la PPS20 [CHA-2004] 206

1. Bibliographie

[AGA-1996] J.-F. Agassant, P. Avenas, J.-P. Sergent, B. Vergnes, M. Vincent, " *Le mise en forme des matières plastiques* ". Technique & Documentation. ISBN : 2-7430-0016-3. Editions Lavoisier (1996).

[ALE-1971] H. Alexander, " *The tensile instability of initially spherical balloons* ". Int. J. Engng. Sci. Vol. 9, pp. 151-162 (1971).

[AND-2005] S. Andrieu, " *Etude expérimentale et numérique du chauffage infrarouge de plaques thermoplastiques pour le thermoformage* ". Thèse de Doctorat en Science et Génie des Matériaux. Ecole des Mines de Paris (2005).

[BAL-1981] R.C. Ball, M. Doi, S.F. Edwards, M. Warner, " *Elasticity of entangled networks* ". Polymer 22, pp. 1010-1018 (1981).

[BAT-1979] J.-L. Batoz, G. Dahatt, " *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems* ". Int. J. Num. Meth. Eng. Vol.14, pp. 1262-1267 (1979).

[BEA-1987] M. F. Beatty, " *Topics in finite elasticity : hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues – with examples* ". Appl. Mech. Rev. Vol. 40, pp 1699-1734 (1987).

[BEN-2005] M. Ben Tahar, " *Contribution à l'étude et la simulation du procédé d'hydroformage* ". Thèse de Doctorat en Mécanique Numérique. Ecole des Mines de Paris (2005).

[BEL-1998] M. Bellet, A. Rodriguez-Villa, J.-F. Agassant, " *Finite element and automatic remeshing methods for the simulation of complex blow molded polymer components* ". NUMIFORM'98, 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes. Twente, The Netherlands (1998).

[BEL-2002] M. Bellet, B. Monasse, J.-F. Agassant, " *Simulation numérique des procédés de soufflage* ". Techniques de l'ingénieur. Ref AM3705 (2002).

[BIL-2002] N. Billon, E. Gorlier , " *Comportement mécanique du P.E.T. amorphe au-dessus de sa transition vitreuse* ". Matériaux 2002. Tours, France. 21-25 octobre 2002, CM03002. ISBN : 2-914279-08-6 (2002).

[BIL-2005] N. Billon, " *Hyper Elasticity and Strain-Rate Dependence of Behaviour in Amorphous Polymer in Stretch-Blow Moulding and Thermoforming* ". ESAFORM 8. Cluj-Napoca, Roumania. April 27-29 (2005).

[BOR-2005] M. Bordival, " *Méthodes numériques pour les transferts radiatifs en milieu semi-transparent* ". Mémoire bibliographique de l'ENSMP (2005).

[BOU-1992] M. Boukined, " *Etude du vieillissement physique et de la cristallisation du poly(téréphtalate d'éthylène glycol) : influence de la cristallisation initiale* ". Thèse de doctorat à l'Université de Rouen (1992).

[CAI-1992] W. Cai, " *Développement et applications de modèles d'échanges radiatifs par suivi de rayons* ". Thèse de Doctorat en Energétique. Ecole des Mines de Paris (1992).

[CHA-2004] C. Champin, M. Bellet, F.M. Schmidt, J.-F. Agassant, Y. Le Maoult, G. Denis, " *3D finite element modeling of the stretch blow molding process* ". PPS20. Akron, USA. June 20-24 (2004).

[CHA-2007] S. Charon, " *Etude de la simulation numérique du formage de bouteilles plastique en P.E.T.* ". Stage de l'UTT (2007).

[CHE-2002] N. Chevaugeon, " *Contribution à l'étude des membranes hyperélastiques en grandes déformations* ". Thèse de Doctorat. Ecole Centrale de Nantes (2002).

[CHE-2005] L. Chevalier, Y. Marco, " *Modélisation du comportement du P.E.T. en étirage au voisinage de la température de transition vitreuse* ". 17ème Congrès Français de Mécanique, Troyes. 29 août (2005).

[CHR-1883] C. Christiansen, " *II. Absolute Bestimmung des Emissions und Absorptionsvermogens für Warmes* ". Ann. Phys. Wied. Vol 19, pp 267-283 (1883).

[COU-1996] T. Coupez, " *Stable stabilized finite element for 3D forming calculation* ". CEMEF. Rapport interne (1996).

[CRI-1991] M. A. Chrisfield, " *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures* ". Vol 1 et 2. John Wiley & Sons. New-York (1996).

[DEL-2004] S. Delorme, P. Debergue, " *Micro-blow moulding medical balloons : insights from simulation and experiment* ". IMI Conference 23 of september (2004).

[DEL-2006] Elise Deloye, " *Effet de l'architecture de chaîne sur le comportement en ijection soufflage de copolyesters P.E.T. – Etude expérimentale* - ". Thèse de Doctorat. Ecole des Mines de Paris (2006).

[DEN-1989] G. Denis, " *Extrusion-soufflage et injection-soufflage* ". Techniques de l'ingénieur. Ref AM3700 (1989).

[DES-1997] F. Desvignes, " *Propriétés des rayonnements optiques* ". Masson (1997).

[DET-1984] R. Deterre, " *Analyse du compactage lors de l'injection des thermoplastiques* ". Thèse de doctorat à l'Université de Strasbourg (1984).

[EAS-2005] Eastman Society, Technical data for Voridian PET 9921W. Disponible sur http://www.eastman.com/product_information/producthome.asp?product=1230.

[EDE-1986] S.F. Edwards, T. Vilgis, " *The effect of entanglements in rubber elasticity* ". Polymer. Vol 27, pp 483-492 (1986).

[EME1991] A.F. Emery, O. Johansson, M. Lobo, and A. Abrous, " *A comparative study of methods for computing the diffuse radiation viewfactors for complex structures* ". Journal of Heath Transfer. 113, pp 413-421. Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer. (1991)

[ESS-1987] K. Esser, E. Haberstroh, U. Husgen, D. Weinand, " *Infrared radiation in the processing of plastics: precise adjustment-the key to productivity* ". Advances in polymer technology. Vol. 7, n° 2, pp 89-128 (1987).

[GER-1973] P. Germain, " *Cours de mécanique des milieux continus* ". Théorie Générale. Tome 1. Masson et Cie Editeurs (1973).

[GOO-2005] Goodfellow Society, Technical data for PET. Disponible sur http://www.goodfellow.com/csp/active/gfMaterialInfo.csp?MATID=ES30&result=64.

[GOR-2001] E. Gorlier, " *Caractérisation rhéologique et structurale d'un PET. Application au procédé de bi-étirage soufflage de bouteilles* ". Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (2001).

[GSE-1979] C. G'Sell, J. Jonas, " *Determination of the plastic behaviour of solid polymers at constant true strain rate* ". Journal of Material Science. Vol. 14, pp. 583-591 (1979).

[HAB-1999] E. Haberstroh, C. Detrois, " *Capabilities and Limitations of Injection Blow Moulding Simulation* ". Personal communication. Institut für Kunststoffverarbeitung (IKV), RWTH Aachen (1999).

[HAR-1996] K. Hartwig, W. Michaeli, " *Simulation of the stretch blow molding process and characterization of the relevant material-behaviour* ". Ph.D. Dissertation. Institut für Kunststoffverarbeitung (IKV), RWTH Aachen. In German (1996).

[HOL-1980] L.R. Holland, " *A thermal transmission function of fused silica ampoulse* ". Journal of Crystal growth. Vol. 49 (1980).

[IN2-2000] Ecole IN2P3 de Calculs de Structures, " *Rayonnement* ". Disponible sur http://www.in2p3.fr/page/formation/calculs/doc-thermique/rayon.PDF.

[KHA-1992] R.E. Khayat, A. Derdouri, A. Garcia-Réjon, "*Inflation of an elastic cylindrical membrane : non-linear deformation and instability* ". Int. J. Solids Structures. Vol. 29, n°1, pp. 69-87 (1992).

[KLA-2005] A. Klar, J. Lang and M. Seaïd, "*Adaptive solutions of SPN-approximations to radiative heat transfer in glass* ". International Journal of Thermal Sciences (2005).

[KYR-1991] S. Kyriakides, Y. Chang, "*The initiation and propagation of a localized instability in an inflated elastic tube* ". Int. J. Solids. Struct. Vol. 27, n°9, pp. 1085-1111 (1991).

[LEU-1956] H. Leuenberger, R.A. Person, " *Compilation of radiation shape factors for cylindrical assemblies* ". ASME. Paper n°56-A-144, November (1956).

[LI-1997] B.-W. Li, W.-Q. Tao, R.-X. Liu, " *Ray effect in ray tracing method for radiative heat transfer* ". Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 40, n°14, pp. 3419-3426 (1997).

[LI-2001] Y. Li, J. A. Nemes, A. A. Derdouri, " *Membrane inflation of polymeric materials : experiments and finite element simulations* ". Polymer Engineering and Science. Vol. 41, n°8, pp. 1399-1412, august (2001).

[MAR-1999] L. Martin, D. Stracovsky, D. Laroche, A. Berdatti, R. Ben-Yedder, R. DiRaddo, " *Modeling and experimental validation of the stretch blow molding of P.E.T.* ". Polymer Proceeding Society 15. New-York, USA (1999).

[MAR-2003] Y. Marco, " *Caractérisation multi-axiale du comportement et de la micro-structure d'un semi-cristallin : application au cas du P.E.T.* ". Thèse de Doctorat en Mécanique. Ecole Normale Supérieure de Cachan (2003).

[MAY-1965] K. G. Mayhan, J.W. James, W. Bosch, " *Poly(ethylene Terephtalate).I. Study of Crystallization Kinetics*". Journal of Applied Polymer Science. Vol 9 (1965).

[MON-1998] S. Monteix, F. Schmidt, Y. Le Maoult, G. Denis, " *Mesure du rendement des installations de chauffage infrarouge des machines industrielles de soufflage de bouteilles en P.E.T. "*. Rapport interne. Ecole des Mines d'Albi Carmaux - CROMeP (1998).

[MON-2001] S. Monteix, " *Modélisation du chauffage convecto-radiatif de préformes en P.E.T. pour la réalisation de corps creux "*. Thèse de Doctorat en Science et Génie des Matériaux. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (2001).

[MON-2004] S. Monteix, Y. Le Maoult, F. Schmidt, J.-P. Arcens, " *Quantitative infrared thermography applied to blow moulding process : measurement of a heat transfer coefficient "*. QIRT'2004 7th International conference on quantitative infrared thermography proceedings. Rhode-St-Genèse, BELGIUM. July 5-8 (2004).

[MOO-1940] M. Mooney, " *A theory of large elastic deformation "*. J. Appl. Phys. Vol 11, pp 582-592 (1940).

[OGD-1972] R. W. Ogden, " *Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids "*. Proc. R. Soc. LonD. Vol A326, pp 565-584 (1972).

[PHI-1990] Philips Lighting, Engineering and Design, " *Information, technical support from Philips Lighting "*. Printed in the Netherland (1990).

[PIR-1996] M. Piry, " *Thermische Modellbildung und Simulation der Aufheizphase im zweistufigen Streckblasprozess "*. Unveröffentlich Diplomarbeit am IKV, RWTH Aachen (1996).

[ROS-1936] S. Rosseland, " *Theoretical Astrophysics "*. Atomic Theory and the Analysis of Stellar Atmospheres and Envelopes. Clarendon Press, Oxford (1936).

[SCH-1992] F. Schmidt, J.-F. Agassant, M. Bellet, G. Denis, " *Numerical simulation of polyester stretch-blow molding "*. Numerical methods in industrial forming processes. Balkema, Rotterdam. Pp 383 (1992).

[SCH-1995] F. Schmidt, " *Etude expérimentale et modélisation du procédé d'injection/soufflage bi-orientation en cycle froid de bouteilles en P.E.T. "*. Thèse de Doctorat en Science et Génie des Matériaux. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (1995).

[SCH-1996] F.M. Schmidt, J.F. Agassant, M. Bellet, L. Desoutter, " *Viscoelastic simulation of PET stretch/blow molding process "*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. N°64, pp 19-42 (1996).

[SCH-2000] F. Schmidt, A. Rodriguez-Villa, J.F. Agassant, M. Bellet " *Analytical models for the inflation of a polymeric tube "*. Eur. J. Mech. A/ Solids 19, pp 89-104 (2000).

[SCH-2004] F. Schmidt. CROMeP. Rapport interne (2004).

[SHA-1985] A. Shapiro, " *Computer implementation, accuracy and timin of radiation view factor algorithm "*. Journal of Heat Transfer. Vol. 107 (1985).

[SHI-1996] J. Shi, G.F. Moita, " *The post-critical analysis of axisymmetric hyper-elastic membranes by the finite element method* ". Comput. Methods. Appl. Mech. Engng. Vol. 135, pp. 265-281 (1996).

[SIE-1992] R. Siegel, J. Howel, " *Thermal radiation heat transfer* ". Third Ed Hemisphere publishing corporation (1992).

[SOY-1990] N. Soyris, " *Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage à chaud* ". Thèse de Doctorat Mécanique Numérique. Ecole des Mines de Paris (1990).

[TRE-1943] L. R. G. Treloar, " *The elasticity of a network of long chain molecules (I and II)* ". Trans. Faraday Soc. Vol 39, pp 36-64 & 241-246 (1943).

[TRE-1975] L. R. G. Treloar, " *The physics of Rubber Elasticity* ". Clarendon, Oxford (1975).

[WAN-1998] S.Wang, A.Makinouchi, and T.Nakagawa, " *3D Viscoplastic FEM Simulation of a Stretch Blow Molding Process* ". Advances in Polymer Technology. Vol 17, n°3, pp 189-202 (1998).

[YAN-2004-b] Z. J. Yang, E. Harkin-Jones, G. H. Menary and C. G. Armstrong, "*A Non-Isothermal Finite Element Model for Injection Stretch-Blow Molding of PET Bottles With Parametric Studies* ". Polymer Engineering and Science. Vol 44, n°7, pp 1379-1390. July (2004).

[YOU-2001] A. Yousefi, R. DiRaddo and A. Bendada, " *Simulation of the mobile preform reheat in injection stretch blow moulding process* ". Polymer Proceeding Society 17. Montreal, Canada. May 21-24 (2001).

[VER-1997] E. Verron, " *Contribution expérimentale et numérique aux procédés de moulage par soufflage et de thermoformage* ". Thèse de Docorat. Ecole Centrale de Nantes (1997).

2. Nomenclature

α_λ	Coefficient d'absorption.	$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes.
ρ_λ	Coefficient de réflexion.	v	Champ de vitesse.
τ_λ	Coefficient de transmission.	t	Temps.
L_λ^0	Luminance monochromatique.	p	Pression.
λ	Longueur d'onde.	$\underline{\underline{S}}$	Déviateur des contraintes.
T	Température.	v^l	Champ de vitesse linéaire.
h	Constante de Planck.	v^b	Champ de vitesse bulle.
k_B	Constante de Boltzmann.	N	Fonction d'interpolation.
c	Vitesse de la lumière dans le vide.	$\dot{\varepsilon}$	Vitesse de déformation.
ε	Coefficient d'émissivité.	$\underline{\underline{B}}$	Tenseur de Cauchy Green gauche.
L_λ	Luminance du corps gris.	$\underline{\underline{C}}$	Tenseur de Cauchy Green droit.
M_λ^0	Emittance monochromatique du corps noir.	$\underline{\underline{K}}$	Tenseur de Piola-Kirchhoff.
σ_{SB}	Constante de Stefan-Boltzman.	$\underline{\underline{F}}$	Tenseur gradient de la transformation.
S_1	Petit élément de surface.	W	Energie de déformation.
F_{12}	Facteur de forme entre S_1 et S_2.	I_i	Invariants principaux de $\underline{\underline{C}}$.
ρ	Masse volumique.	$\bar{\dot{\varepsilon}}$	Vitesse de déformation généralisée.
C_p	Chaleur spécifique.	$\bar{\varepsilon}$	Déformation cumulée.
k	Conductivité thermique.	$\bar{\sigma}$	Contrainte équivalente.
A_λ	Absorptivité spectrale.	H	Matrice hessienne.
$\bar{A}$	Coefficient moyen d'absorption.	R_0	Rayon interne initial.
$\bar{E}$	Epaisseur moyenne de pénétration.	R	Rayon interne à l'instant considéré.
e	Epaisseur de la préforme.	S_0	Rayon externe initial.
$\overrightarrow{M_\lambda^i}$	Densité de flux radiatif.	S	Rayon externe à l'instant considéré.
$\vec{q}$	Flux de chaleur.		
$\dot{\omega}$	Puissance dissipée.		
ϕ_{imp}	Flux imposé.		
h_{cd}	Coefficient de conduction.		
h_{cv}	Coefficient de convection.		

3. Calcul analytique de la contrainte d'un cube ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une traction uniaxiale

Le modèle d'élongation simple est largement répandu dans la littérature [AGA-1996]. L'objectif est de connaître à partir du champ de vitesse et de la loi de comportement du matériau, l'évolution de la déformation et de la contrainte au cours du temps sous l'effet d'une sollicitation.

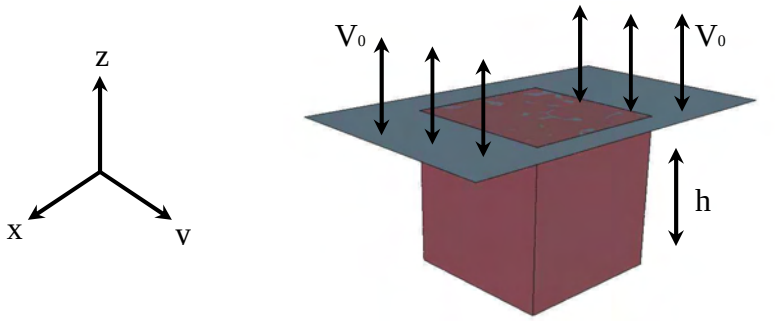


Figure 156 : Simulation d'essai de traction/compression simple.

Soit un champ de vitesse :

$$V = \left(V_x(x,y,z), V_y(x,y,z), V_z(x,y,z)\right) \tag{150}$$

En considérant $\dot{\varepsilon}$ comme uniforme avec comme axes principaux (x,y,z), on arrive facilement à :

$$V_x(x) = Ax \quad V_y(y) = Ay \quad V_z(z) = Cz \tag{151}$$

L'hypothèse d'incompressibilité communément établie dans le cadre du P.E.T. implique que :

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{152}$$

Soit en remplaçant :

$$2A + C = 0 \tag{153}$$

La vitesse verticale est connue sur la face supérieure où s'applique la condition limite de traction $(+V_0)$:

$$V_z(z=h) = V_0 \frac{z}{h} = Cz \tag{154}$$

Il vient alors :

$$C = \frac{V_0}{h} \text{ et } A = -\frac{V_0}{2h} \tag{155}$$

Ce qui permet ainsi de connaître le champ de vitesse en tout point :

$$V_x(x) = -\frac{V_0}{2h}x \quad V_y(y) = -\frac{V_0}{2h}y \quad V_z(z) = \frac{V_0}{h}z \tag{156}$$

Il est possible dès lors de calculer l'expression de la contrainte en fonction de la déformation en introduisant la loi hyperélastique. Pour la validation, la loi utilisée est du type néo-hookéen à savoir $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}} &= 2\left(C\underline{\underline{B}} - C\alpha\underline{\underline{B}}^{-1}\right) - \frac{2}{3}\left[Ctr\left(\underline{\underline{B}}\right) - C\alpha tr\left(\underline{\underline{B}}^{-1}\right)\right]\underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{S}} &= 2C\underline{\underline{B}} - \frac{2}{3}\left[Ctr\left(\underline{\underline{B}}\right)\right]\underline{\underline{I}} \end{aligned} \tag{157}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy devient alors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= -p\underline{\underline{I}} + 2C\underline{\underline{B}} - \frac{2}{3}\left[Ctr\left(\underline{\underline{B}}\right)\right]\underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\sigma}} &= -p'\underline{\underline{I}} + 2C\underline{\underline{B}} \end{aligned} \tag{158}$$

Dans la mesure où la composante i de la vitesse ne dépend que de la coordonnée i, le champ de déplacement de la matière est du type :

$$U_x(x) = Ix_0 \quad U_y(y) = Jy_0 \quad U_z(z) = Kz_0 \tag{159}$$

Si :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \nabla U = \begin{pmatrix} 1+I & 0 & 0 \\ 0 & 1+J & 0 \\ 0 & 0 & 1+K \end{pmatrix} \tag{160}$$

Ainsi :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} (1+I)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1+J)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1+K)^2 \end{pmatrix} \tag{161}$$

On sait que par symétrie et par définition :

$$I = J \qquad C_{zz} = \frac{h^2}{h_0^2} \tag{162}$$

Il vient alors :

$$(1+K)^2 = \frac{(h_0 + V_0 t)^2}{h_0^2} \qquad 1+K = \frac{h}{h_0} \tag{163}$$

L'hypothèse d'incompressibilité conduit à :

$$\begin{aligned} (1+I)^2(1+K) &= 1 \\ 1+I &= \sqrt{\frac{h_0}{h}} \end{aligned} \tag{164}$$

Le tenseur des contraintes s'exprime donc finalement sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p' + 2C\dfrac{h_0}{h} \\ \sigma_{zz} = -p' + 2C\dfrac{h^2}{h_0^2} \end{cases} \tag{165}$$

Comme les contraintes en x et y sont nulles, il vient :

$$p' = 2C\frac{h_0}{h} \tag{166}$$

$$\sigma_{zz} = 2C\left[\frac{h^2}{h_0^2} - \frac{h_0}{h}\right] \tag{167}$$

Un développement complet sur le modèle de Mooney-Rivlin à deux paramètres permet de montrer que ce modèle est en fait du type :

$$\sigma_{33} = 2C\left[\frac{h^2}{h_0^2} - \frac{h_0}{h}\right] - 2C\alpha\left[\frac{h_0^2}{h^2} - \frac{h}{h_0}\right] \tag{168}$$

4. Calcul analytique de l'évolution du rayon interne d'un tube ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une pression sur sa paroi interne

Le gonflage de tube est un cas test proche de notre étude de par la géométrie des préformes. Il s'agit d'évaluer l'évolution du rayon interne d'un tube supposé infini en longueur et dans lequel est appliquée une pression sur la surface interne.

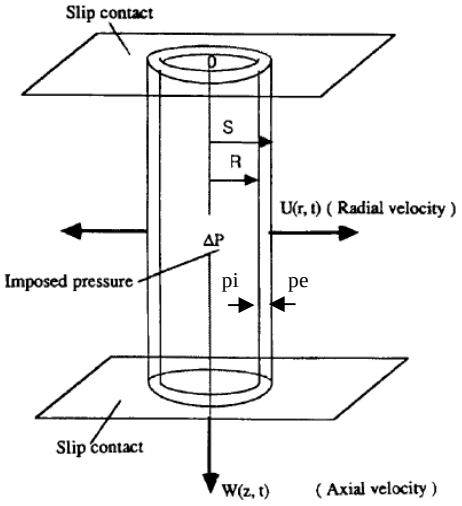


Figure 157 : Modèle de gonflage de tube.

Dans le cas du gonflage axisymétrique d'un tube de polymère de longueur constante et supposé incompressible, F. Schmidt [SCH-2000] montre qu'il existe la relation suivante entre les coordonnées radiales aux instants courant et initial :

$$r^2 - R^2 = r_o^2 - R_o^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{r_o^2 - R_o^2 + R^2} \tag{169}$$

avec R et R_o rayons internes du tube aux instants courant t et initial $t = 0$ respectivement.

Ainsi dans notre cas, la composante radiale du tenseur $\underline{\underline{F}}$ s'écrit :

$$F_{rr} = \frac{\partial r}{\partial r_o} = \frac{r_o}{r} \tag{170}$$

Comme $F_{zz} = 1$ et $\det\left(\underline{\underline{F}}\right) = 1$, de par l'hypothèse d'incompressibilité, il vient :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \frac{r_o}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{r_o} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(r,\theta,z)} \tag{171}$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r}{r_o}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(r,\theta,z)} \qquad \underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{r}{r_o}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(r,\theta,z)} \tag{172}$$

En considérant un comportement de type Mooney-Rivlin incompressible, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p'\underline{\underline{I}} + 2C\underline{\underline{B}} - 2C\alpha\underline{\underline{B}}^{-1} \tag{173}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p'+2C\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 2C\alpha\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -p'+2C\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2C\alpha\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -p'+2C-2C\alpha \end{pmatrix} \tag{174}$$

L'équation d'équilibre statique suivant r se réduit à :

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} = 2C(1+\alpha)\left(\frac{r}{{r_o}^2} - \frac{{r_o}^2}{r^3}\right) \tag{175}$$

La conservation du volume induit que :

$$r^2 - R^2 = r_o^2 - R_o^2 \tag{176}$$

Ce qui permet finalement d'obtenir :

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} = 2C(1+\alpha)\left(\frac{r}{r^2 - R^2 + R_o^2} + \frac{R^2 - R_o^2}{r^3} - \frac{1}{r}\right) \tag{177}$$

La dérivée de la contrainte s'intègre par rapport à r en :

$$\sigma_{rr}(r) = C(1+\alpha)\left[\frac{R_o^2 - R^2}{r^2} + \ln\left(\frac{r^2 - R^2 + R_o^2}{r^2}\right)\right] + A \tag{178}$$

L'expression des conditions aux limites en pression donne :

$$\sigma_{rr}(r=R)=-p_i \quad \Rightarrow \quad C(1+\alpha)\left[\frac{R_o^2-R^2}{R^2}+\ln\left(\frac{R_o^2}{R^2}\right)\right]+A=-p_i \tag{179}$$

$$\sigma_{rr}(r=S)=-p_e \quad \Rightarrow \quad C(1+\alpha)\left[\frac{R_o^2-R^2}{S^2}+\ln\left(\frac{S^2-R^2+R_o^2}{S^2}\right)\right]+A=-p_e \tag{180}$$

Avec p_i pression interne et p_e pression externe pouvant dépendre du temps.

La différence entre ces deux relations permet alors d'écrire :

$$\frac{\Delta P(t)}{C(1+\alpha)}=\frac{R_o^2-R^2}{S^2}+\ln\left(\frac{S^2-R^2+R_o^2}{S^2}\right)+1-\frac{R_o^2}{R^2}-\ln\frac{R_o^2}{R^2} \tag{181}$$

$$\frac{\Delta P(t)}{C(1+\alpha)}=\frac{R_o^2}{S^2}-\frac{R^2}{S^2}+1-\frac{R_o^2}{R^2}+\ln\frac{R^2S_o^2}{R_o^2S^2} \tag{182}$$

Or, la conservation du volume implique que :

$$S^2-R^2=S_o^2-R_o^2 \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{R^2}{S^2}=\frac{S_o^2}{S^2}-\frac{R_o^2}{S^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_o^2}{S^2}-\frac{R^2}{S^2}+1=\frac{S_o^2}{S^2} \tag{183}$$

On en déduit :

$$\frac{\Delta P(t)}{C(1+\alpha)}=\frac{S_o^2}{S^2}-\frac{R_o^2}{R^2}+2\ln\frac{S_oR}{SR_o} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta P(t)}{C(1+\alpha)}R^2=\frac{S_o^2R^2}{S^2}-R_o^2+R^2\ln\frac{R^2S_o^2}{S^2R_o^2} \tag{184}$$

Toujours par conservation du volume d'un tube de longueur constante, on a :

$$S^2-R^2=S_o^2-R_o^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{S}{R}\right)^2=1+\frac{S_o^2-R_o^2}{R^2} \tag{185}$$

D'où

$$\frac{\Delta P(t)}{C(1+\alpha)}R^2=\frac{S_o^2}{1+\frac{S_o^2-R_o^2}{R^2}}-R_o^2+R^2\ln\left(\frac{S_o^2}{R_o^2}\frac{1}{1+\frac{S_o^2-R_o^2}{R^2}}\right) \tag{186}$$

Et donc finalement :

$$\frac{\Delta P(t)}{C(1+\alpha)}=\frac{S_o^2}{R^2+S_o^2-R_o^2}-\frac{R_o^2}{R^2}+\ln\left(\frac{S_o^2}{R_o^2}\frac{R^2}{R^2+S_o^2-R_o^2}\right) \tag{187}$$

5. Calcul analytique de l'évolution du rayon interne d'une sphère ayant une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin soumis à une pression sur sa paroi interne

Le gonflage d'une sphère est souvent étudié dans le cadre de la rhéologie élongationnelle [LI-2001]. En effet, il est possible à partir d'un essai de gonflage de disque marqué, de connaître le champ de déformation lié à la pression appliquée et au matériau utilisé et de se ramener ainsi à une identification paramétrique propre à la loi de comportement.

Il est possible de définir un modèle analytique appliqué à l'hyperélasticité dans le cadre du gonflage de sphère [SCH-2004].

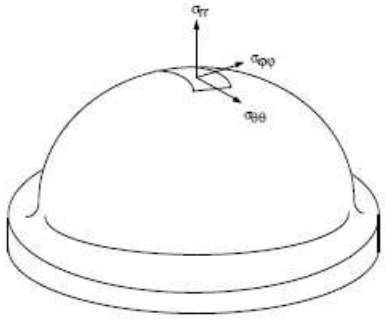


Figure 158 : Modèle de gonflage de sphère.

Soit un champ de vitesse quelconque :

$$V = \left(V_r(r,\theta,\varphi), V_\theta(r,\theta,\varphi), V_\varphi(r,\theta,\varphi)\right) \tag{188}$$

De par la symétrie sphérique, il vient :

$$V = \left(V_r, 0, 0\right) \tag{189}$$

L'hypothèse d'incompressibilité communément établie dans le cadre du P.E.T. implique que :

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{190}$$

Soit en remplaçant :

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + 2\frac{V_r}{r} = 0 = \frac{\partial\left(r^2 u\right)}{\partial r} \tag{191}$$

Cette expression peut s'intégrer en r pour donner :

$$V_r(r) = \frac{A}{r^2} \tag{192}$$

En remplaçant $V_r(r)$ par son expression littérale appliquée au rayon interne, il vient :

$$V_r(R) = \frac{dR}{dt} = \frac{A}{R^2} \qquad A = R^2\frac{dR}{dt} \tag{193}$$

In fine :

$$V_r(r) = \frac{dr}{dt} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{dR}{dt} \tag{194}$$

$$r^2 \frac{dr}{dt} - R^2 \frac{dR}{dt} = 0 \qquad \frac{1}{3}\frac{d\left(r^3 - R^3\right)}{dt} = 0 \tag{195}$$

La condition globale d'incompressibilité se traduit encore par :

$$r^3 - R^3 = r_0^3 - R_0^3 \tag{196}$$

Dans le cadre d'un gonflage isotrope, le tenseur $\underline{\underline{F}}$ peut s'écrire en coordonnées sphériques :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} F_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & F_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & F_{\theta\theta} \end{pmatrix}_{(r,\theta,\varphi)} \tag{197}$$

L'incompressibilité permet de déduire que :

$$F_{rr} = \frac{\partial r}{\partial r_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{198}$$

L'hypothèse d'incompressibilité donne alors les autres termes pour obtenir finalement :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{r_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{r_0} \end{pmatrix}_{(r,\theta,\varphi)} \tag{199}$$

D'après l'expression du tenseur des contraintes, il vient :

$$\begin{pmatrix} -p' + 2C\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^4 - \alpha\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\right] & 0 & 0 \\ 0 & -p' + 2C\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \alpha\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & -p' + 2C\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \alpha\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] \end{pmatrix} \tag{200}$$

L'équation d'équilibre statique suivant r se réduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \tag{201}$$

Soit en remplaçant :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{4C}{r}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^4 - \alpha\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \alpha\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] = 0 \tag{202}$$

Cette expression s'intègre à l'aide du changement de variable suivant :

$$\chi = \frac{r}{r_0} \tag{203}$$

Ce qui en remplaçant dans l'équation d'équilibre statique donne :

$$r_0\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 4C\left[\frac{1}{\chi^5} - \alpha\chi^3 - \chi + \frac{\alpha}{\chi^3}\right] = 0 \tag{204}$$

Pour calculer $d\chi / dr$, nous procédons de la manière suivante :

$$d\chi = \frac{dr}{r_0} + rd\left(\frac{1}{r_0}\right) \tag{205}$$

$$d\chi = \frac{dr}{r_0} + rd\left[\left(r^3 - R^3 + R_0^3\right)^{-\frac{1}{3}}\right] = \frac{dr}{r_0} - r\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\frac{dr}{r_0^2} = \frac{dr}{r_0}\left(1-\chi^3\right) \tag{206}$$

$$\frac{dr}{r_0} = \frac{d\chi}{1-\chi^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\chi}{dr} = \frac{1-\chi^3}{r_0} \tag{207}$$

Ce qui permet d'écrire l'équation d'équilibre sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \chi} + \frac{4C}{1-\chi^3}\left[\frac{1}{\chi^5} - \alpha\chi^3 - \chi + \frac{\alpha}{\chi^3}\right] = 0 \tag{208}$$

L'intégration se fait alors après décomposition en éléments simples :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \chi} + 4C\left[\frac{1}{\chi^5} + \frac{1}{\chi^2} + \frac{\chi}{1-\chi^3} - \frac{\alpha}{1-\chi^3} + \alpha - \frac{\chi}{1-\chi^3} + \frac{\chi}{\chi^3} + \frac{\alpha}{1-\chi^3}\right] = 0 \tag{209}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \chi} + 4C\left[\frac{1}{\chi^5} + \frac{1}{\chi^2} + \alpha + \frac{\alpha}{\chi^3}\right] = 0 \tag{210}$$

Cette dernière équation permet d'intégrer en :

$$\sigma_{rr} = C\left(\frac{1}{\chi^4} + \frac{4}{\chi} - 4\alpha\chi + \frac{2\alpha}{\chi^2}\right) + A \tag{211}$$

Les conditions aux limites en pression donnent alors :

$$\sigma_{rr}(r=R)=-p_i \quad \Rightarrow \quad C\left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^4+4\frac{R_0}{R}-4\alpha\frac{R}{R_0}+2\alpha\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]+A=-p_i \tag{212}$$

$$\sigma_{rr}(r=S)=-p_e \quad \Rightarrow \quad C\left[\left(\frac{S_0}{S}\right)^4+4\frac{S_0}{S}-4\alpha\frac{S}{S_0}+2\alpha\left(\frac{S_0}{S}\right)^2\right]+A=-p_e \tag{213}$$

Avec p_i pression interne et p_e pression externe pouvant dépendre du temps.

La différence donne :

$$\left(\frac{S_0}{S}\right)^4-\left(\frac{R_0}{R}\right)^4+2\alpha\left[\left(\frac{S_0}{S}\right)^2-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]+4\left(\frac{S_0}{S}-\frac{R_0}{R}\right)-4\alpha\left(\frac{S}{S_0}-\frac{R}{R_0}\right)=\frac{\Delta P}{C} \tag{214}$$

où $\Delta P(t)=p_i-p_e$

L'hypothèse de conservation du volume $S=\sqrt[3]{S_o^3-R_o^3+R^3}$ permet finalement d'obtenir l'évolution du rayon interne de la sphère en fonction de la pression qui lui est appliquée et de ses dimensions initiales.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{S_0}{\sqrt[3]{S_o^3-R_o^3+R^3}}\right)^4-\left(\frac{R_0}{R}\right)^4+2\alpha\left[\left(\frac{S_0}{\sqrt[3]{S_o^3-R_o^3+R^3}}\right)^2-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]\\&+4\left(\frac{S_0}{\sqrt[3]{S_o^3-R_o^3+R^3}}-\frac{R_0}{R}\right)-4\alpha\left(\frac{\sqrt[3]{S_o^3-R_o^3+R^3}}{S_0}-\frac{R}{R_0}\right)=\frac{\Delta P}{C}\end{aligned} \tag{215}$$

6. Calcul du taux de déformation longitudinale d'un cube

Considérons le cas d'un cube soumis à une traction uniaxiale pour lequel la déformation cumulée peut être calculée à partir du tenseur des vitesses de déformation :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2l}\frac{dl}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2l}\frac{dl}{dt} \end{pmatrix} \tag{216}$$

La déformation cumulée s'obtient alors en intégrant sur le temps :

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}\, dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}}\, dt \tag{217}$$

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l} \frac{1}{l}\, dl \tag{218}$$

$$\bar{\varepsilon} = \ln\frac{l}{l_0} \tag{219}$$

7. Calcul du taux de déformation radial d'un tube

Considérons le cas du gonflage de tube pour lequel la déformation cumulée peut être calculée à partir du tenseur des vitesses de déformation :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{220}$$

L'équation de continuité nous fournit :

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0 \tag{221}$$

Soit après intégration :

$$u = \frac{A}{r} \tag{222}$$

L'expression de la vitesse donne :

$$u(r) = \frac{dr}{dt} \tag{223}$$

Appliqué à R le rayon interne, il vient :

$$u(r = R) = \frac{A}{R} = \frac{dR}{dt} \tag{224}$$

$$A = R\frac{dR}{dt} \tag{225}$$

La déformation cumulée s'obtient alors en intégrant sur le temps :

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}\, dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}}\, dt \tag{226}$$

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{A}{r^2}\, dt \tag{227}$$

$$\bar{\varepsilon} = \int_{R_0}^{R} \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{R}{r^2}\, dR \tag{228}$$

Ainsi, pour $r = R$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \tag{229}$$

8. Calcul du taux de déformation d'une plaque

Considérons le cas d'une plaque soumise à une traction bi-axiale pour lequel la déformation cumulée peut être calculée à partir du tenseur des vitesses de déformation :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{l}\frac{dl}{dt} \end{pmatrix} \tag{230}$$

La déformation cumulée s'obtient alors en intégrant sur le temps :

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}\, dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}}\, dt \tag{231}$$

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t 2\frac{dl}{l} \tag{232}$$

$$\bar{\varepsilon} = 2\ln\frac{l}{l_0} \tag{233}$$

9. Géométrie de la préforme utilisée pour les simulations d'étirage et de soufflage

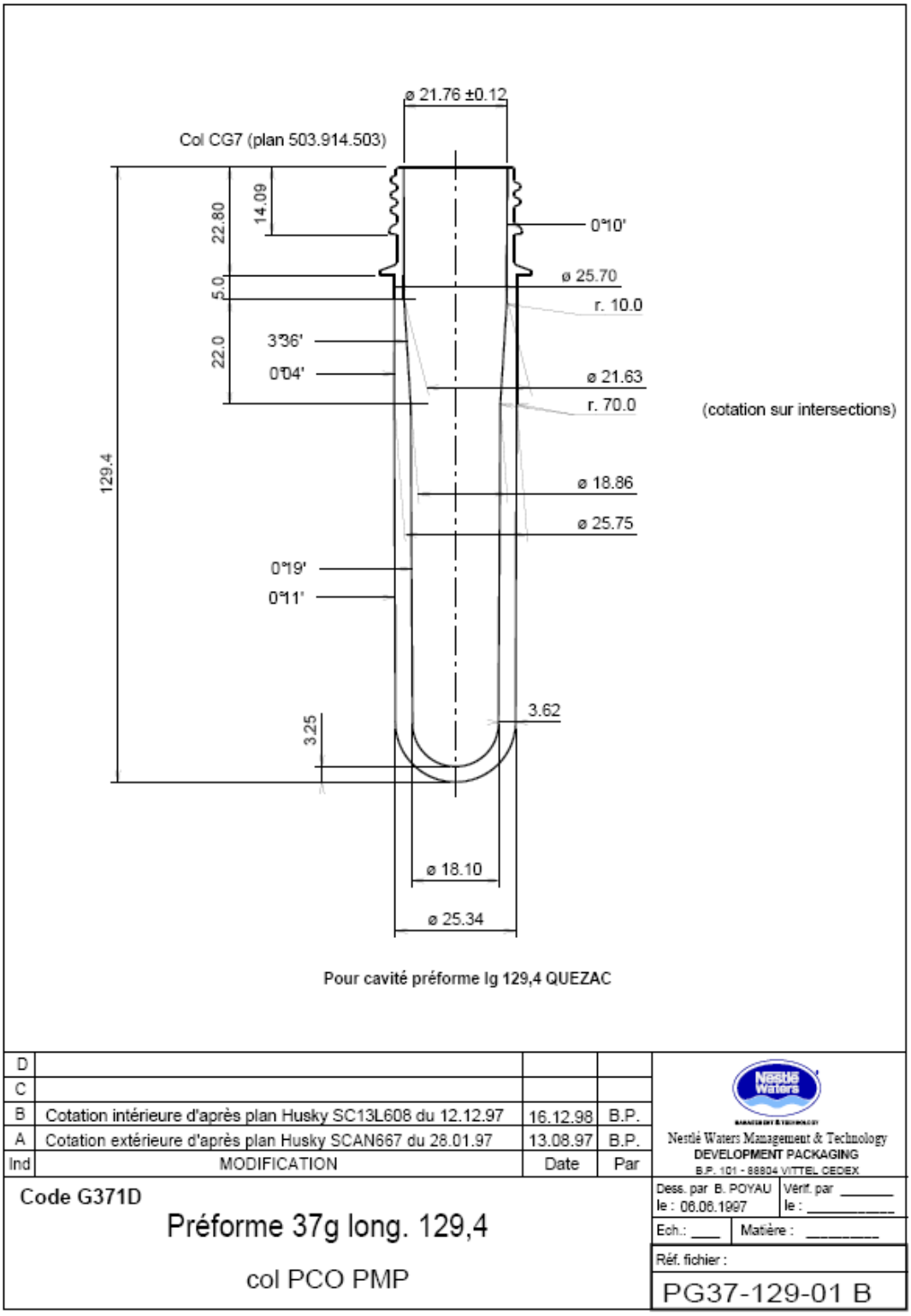


Figure 159 : Géométrie de la préforme utilisée.

10. Article issu de la PPS20 [CHA-2004]

3D FINITE ELEMENT MODELING OF THE STRETCH BLOW MOLDING PROCESS

Paper n° 148

C. Champin (a,b,c), M. Bellet (a), F.M. Schmidt (b), J.-F. Agassant (a), Y. Le Maoult (b), G. Denis (c).

(a) CEMEF, UMR CNRS 7035, Ecole des Mines de Paris, BP 207, 06904 Sophia-Antipolis Cedex, France.
(b) CROMeP, Ecole des Mines d'Albi Carmaux, Campus Jarlard, 81013 Albi Cedex 09, France.
(c) NESTLE Waters MT, BP 101, 88 804 Vittel Cedex, France.

Cedric.champin@ensmp.fr

Abstract

The stretch blow molding process of PET bottles is a two-step process. First, a cold tube-shape preform is heated using an infrared oven above PET glass transition temperature (about 80°C) in order to reach the forming temperature. The softened preform is then simultaneously stretched and inflated with a rod and air pressure. The final wall thickness of the bottle is both related to heating parameters as well as stretch blow molding ones. It leads to a complex thermo-mechanical problem for which specific numerical models must be developed. In this work, a complete 3D finite element modeling of the stretch blow molding process has been developed including both infrared heating and forming steps.

The energy transfer between the infrared oven and the surface of the preform is modeled using a ray tracing method. In the same time, the amount of radiation intensity absorbed by the polymer is approximated with a Rosseland model leading to an equivalent conductive heat transfer. All the thermal computations will be compared to the so-called PLASTIRAD control volume software [MON2001] and to a temperature analytical model.

Considering the deformation step, a Mooney-Rivlin hyperelastic model has been implemented in Forge3® software as a first approximation of the PET rheological behavior. The numerical model is developed using a velocity pressure formulation and P1+/P1 tetrahedral finite elements. In order to validate the numerical method, computations are compared to a Mooney-Rivlin analytical model of a free inflation tube. This model enables to obtain the tube internal radius versus the imposed pressure on the internal surface.

I- Introduction

The injection stretch-blow molding process is the most widely used in the P.E.T bottle production [ROS1989]. This process is segmented in two main stages. First, a cold preform is heated in an infrared oven above glass transition temperature (80°C for P.E.T.). Then, the softened preform is inflated and stretched with assistance of a rod in a mold which has the shape of the desired bottle (figure 1). The performance of P.E.T. bottles depends on many variables including the initial preform shape and several process parameters. It is well-known that those having major impact on mechanical properties are the initial preform temperature and the bi-axial elongation rates.

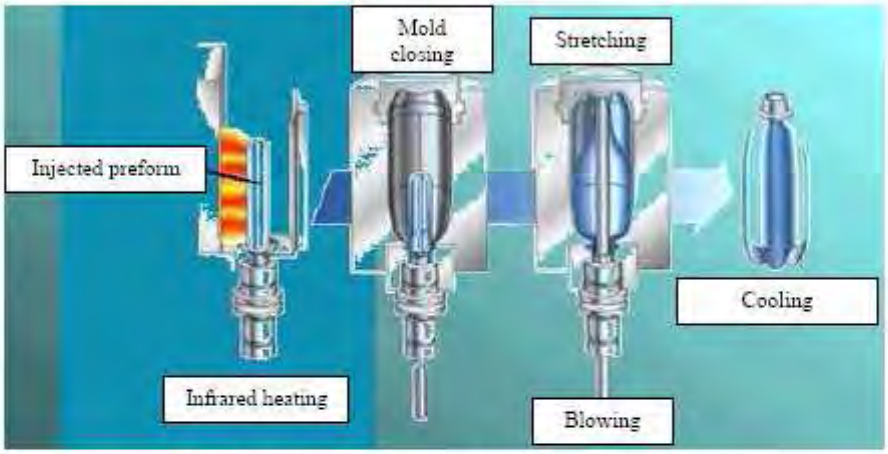


Figure 1 : Scheme of the injection blow molding process.

Since last decade, the reduction of weight becomes one of the main demands for the design of packaging. Therefore, process optimizing tends to produce bottles of minimum thickness having the best mechanical properties. But mechanical properties depend in turn on final thickness distribution and P.E.T. strain hardening resulting from stretching. In consequence, optimizing the process becomes a huge task when only based on experimental studies. For that reason, several numerical simulations for stretch-blow molding process optimization generally based on a 2D approximation have been developed to save time and provide more understanding of the process. However, in order to be accurate enough, the simulation necessitates a 3D numerical model taking into account both the heating and inflation stages.

As illustrated in figure 2 a typical infrared oven is constituted of a row of halogen tube lamps which allows a rapid heating (about 30 seconds), two kinds of reflectors (at the back and in front of the preform) and a cooling fan. The cooling fan is necessary to insure that the external preform surface does not burn but also to prevent surface temperature preform exceeding P.E.T. thermal crystallization temperature (about 135°C). The preforms are transported across the oven while they rotate continuously. The rotation allows to obtain an homogeneous temperature distribution in the angular direction. The threaded portion of the preform is protected by a heat shield in order to avoid heating. Once warmed, the preform exits from the oven and equilibrates thermally before being placed in the stretch-blow mold. Thus, there are several processing parameters to set (heating time, equilibrium time, rotation speed, heat transfer coefficient ...) in order to heat preforms.

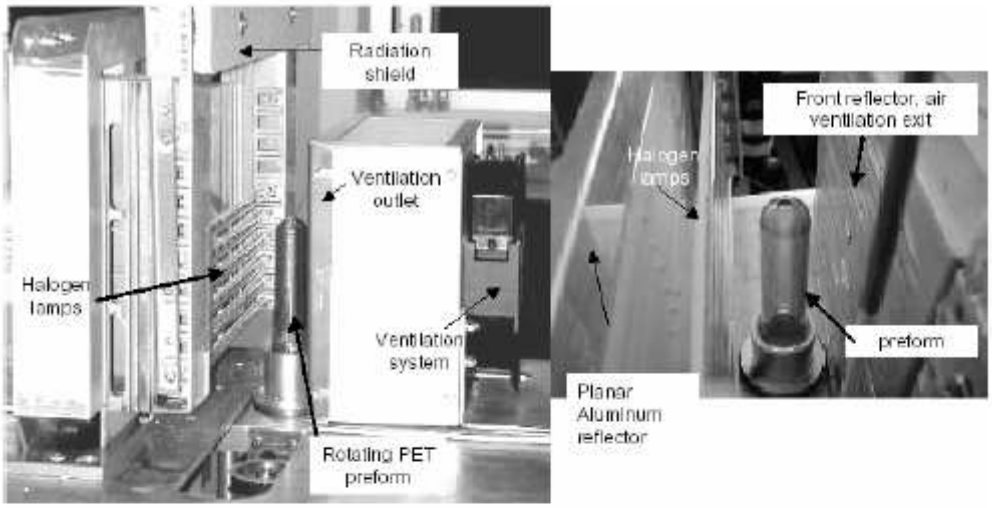


Figure 2 : Infrared heating experimental set-up.

A few models of the heat transfer inside an infrared oven have been developed. In 1992, Lebaudy [LEB1992] has developed a two-dimensional finite difference model in which the radiation flux is assumed to be uniform along the preform height. To account for the air forced convection due to the cooling fan, a constant value of the heat transfer coefficient between the air and the polymer has been assumed. Shelby [SHE1991] employed a simple numerical approach to determine the effect of infrared lamp temperature on reheat rate of PET. He predicted the transient one-dimensional temperature distribution. DiRaddo et al [DIR1993] proposed a two-dimensional approach using the finite element method where the fraction of energy leaving the heaters surface arriving at the preform surface (i.e. the view factor) is estimated analytically. Hartwig [HAR1996] includes the back and front reflectors and the complex displacement of the preform (translation and rotation). Venkateswaran et al [VEN1997] use an analytical approach to calculate the view factors too.

The blowing step has been also the subject of a lot of research this last two decades. 2D viscoelastic model [SCH1992] has allowed to understand the complexity of the thermo mechanical problem. Rapidly, some studies have been specifically focused on the PET behavior above its glass transition temperature. Thus, the Institute of Physical and Chemical of Research (RIKEN) developed a 3D shell finite element software using a viscoplastic behavior law [WAN1998]. But must of the papers use this hyperelastic behavior with Mooney-Rivlin or neo-Hookean potentials. For example, Santa Clara University (SCUDC) developed a software using membrane elements with a Lagrangian formulation and a Mooney-Rivlin potential. Queen's University of Belfast programmed a special Abaqus version dedicated to the blow molding simulation using Mooney-Rivlin, Ogden and more interesting, Buckley hyperelastic law [MEN2000]. Recently, Gorlier [GOR2001] or Marco [MAR2003] pointed out correlations between the Edwards Vilgis potential [EDW1986] and the deformation of PET subjected to multi-axial loads. Moreover, for a numerical point of view, the thin shell models proved their limits for the mechanical and for the thermal problems, regarding the more and more complex bottle shapes.

As a consequence, the two steps of the stretch blow molding process will be 3D modeled in this work, with a finite element method implemented in the Forge3® commercial software. First, a modeling approach capable of predicting the three-dimensional transient temperature profile in the preform during the conditioning step (reheating and equilibrating) is presented. Conduction and radiation heat transfer have to be taken into account. The mechanical problem is considered using a hyperelastic Mooney-Rivlin law implemented with a velocity/pressure formulation. Remeshing steps are activated during the calculations, if necessary.

II- Infrared heating model

In its classical form, the heat balance equation can be written :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot \left(\overrightarrow{q_r}\right) \qquad [1]$$

where $\overrightarrow{q_r}$ is the radiation heat flux (cf. nomenclature)

Using the following boundary conditions :

- $T(x,O) = T_0$ on Ω, initial temperature
- $\overrightarrow{q_r}.\vec{n} = \phi_{imp}$ on $\partial\Omega_{flux}$, ϕ_{imp} an imposed heat flux
- $(k \nabla T).\vec{n} = h_{conv}(T - T_{ext})$ on $\partial\Omega_{conv}$, for heat convection

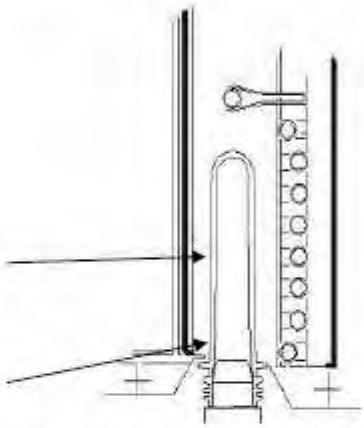


Figure 3 : Infrared heating of the perform.

Rosseland has developed a diffusion approximation of the radiation heat transfer in the case of large optical thickness [MOD1993]. This kind of approximation has been widely used for glass forming processes [LIN2002]. Numerical simulation using this method speeds up, because the radiation heat transfer is solved using a conductive heat transfer form. Thus, the radiation heat flux reduces to :

$$\nabla \cdot \left(\overrightarrow{q_r}\right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{16\sigma_{SB}}{3k_{ROSS}(T)} T^3\right) \vec{\nabla}(T)\right] \text{ where } \frac{1}{k_{ROSS}(T)} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB(T,\nu)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB(T,\nu)}{dT} d\nu} \qquad [2]$$

We have implemented this method in Forge3® in order to test the accuracy of this approximation. This software is based on the Galerkin weak formulation. As a consequence, the heat balance equation can be reformulated in a matrix form :

$$[C]\frac{dT}{dt} + [K]T = [Q] \qquad [3]$$

which is solved by a diagonal preconditioned conjugate gradient method. For more details, one can refer to [MAR1997].

The validation case is a semi infinite sheet in P.E.T. heated with a constant heat flux ϕ_{imp} of 20 000 W/m² (about three ovens with for each seven lamps) on its front face (fig. 4).

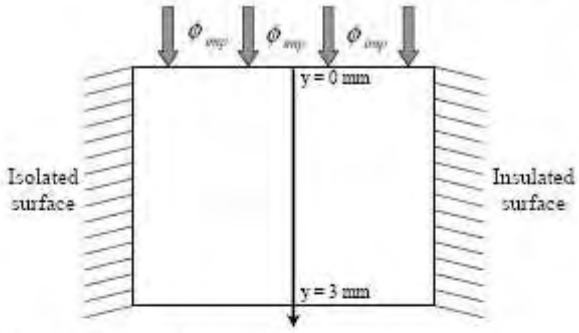


Figure 4 : Semi infinite sheet heated by a constant heat flux.

Taking into account the thermal conductivity and radiation absorption using Beer Lambert law [4], an analytical expression for temperature [5] can be calculated [MON2001] :

$$\phi = \phi_{imp} e^{-\kappa y} \qquad [4]$$

$$T(y,t) = T(y,t=0) - \frac{\phi_{imp} e^{-\kappa y}}{k\kappa^2} + \frac{\phi_{imp}}{k\kappa} 2\sqrt{\alpha_d t}\left[ierfc\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_d t}}\right)\right] \qquad [5]$$

$$+ \frac{\phi_{imp}}{2k\kappa^2} e^{\kappa^2\alpha_d t + \kappa y}\left[erf\left(\kappa\sqrt{\alpha_d t} + \frac{y}{2\sqrt{\alpha_d t}}\right)\right] + \frac{\phi_{imp}}{2k\kappa^2} e^{\kappa^2\alpha_d t - \kappa y}\left[erf\left(\kappa\sqrt{\alpha_d t} - \frac{y}{2\sqrt{\alpha_d t}}\right)\right]$$

Numerical simulations have been performed using the mesh depicted in figure 5 where every lateral face was considered as adiabatic. The mesh has 786 nodes, 3377 elements and the CPU time was less than one minute. The PET thermal properties are referenced below [MON2001]

$k = 0.29\ Wm^{-1}K^{-1}$ $\kappa = 1900\ m^{-1}$ $\alpha_d = 1.17\,10^{-7}\ m^2 s^{-1}$

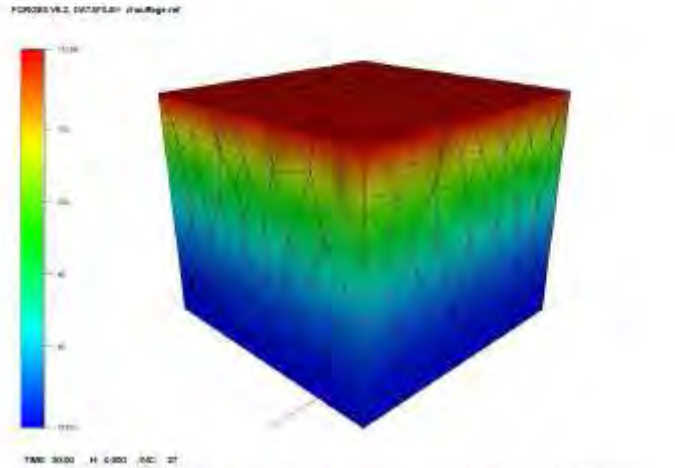


Figure 5 : Mesh used for the temperature calculation (°C).

In figure 6, the temperature evolution for the analytical and numerical solutions are plotted. The temperature computed on the front face is greater than the analytical one (maximum of 40%). This difference is due to the fact that the analytical model takes into account the radiative absorption (Beer-Lambert law) in the temperature calculation, whereas in the same time, the numerical model (i.e. the Rosseland approximation) assumes an equivalent conductivity representing only 1.5% of the thermal conductivity of the P.E.T. Consequently, the heat flux imposed on the front face is not diffused in the sheet thickness, but in a very thin layer (k_{ROSS}, and so the optical thickness is about 150 µm).

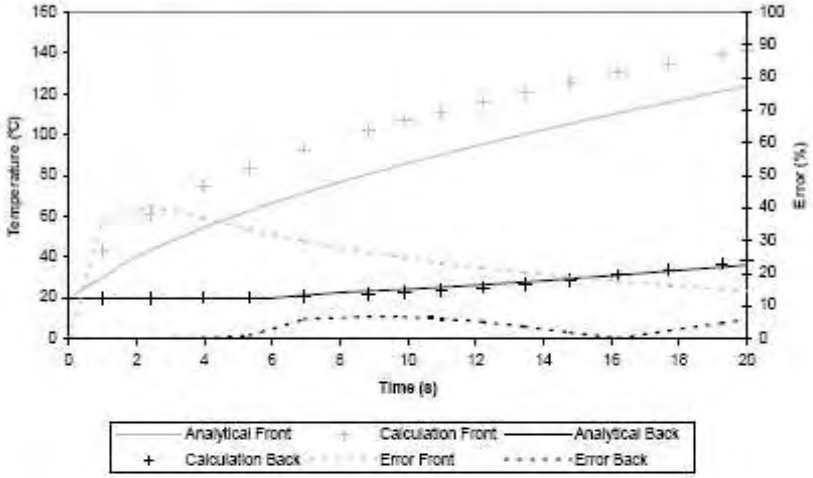


Figure 6 : Evolution of temperature in polyethylene sheet.

This comparison demonstrates the necessity to develop a new method in order to solve radiation heat transfer. Thus, a ray tracing method has been implemented to improve the numerical model. As a preliminary result (fig. 7), this technique allows us to compute the view factors between a preform and a punctual source.

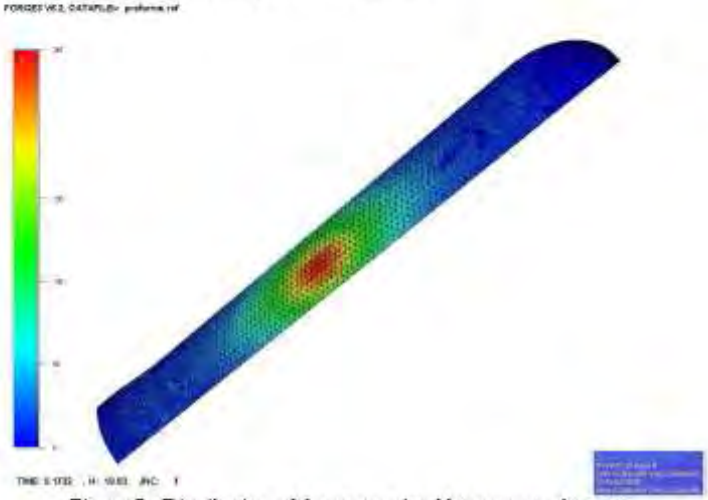


Figure 7 : Distribution of the rays emitted by a punctual source.

III- Mechanical model

As Gorlier [GOR2001] showed in his PhD, the PET is assumed to have a hyperelastic rheological behavior above its glass transition temperature. This is characterized by the existence of a deformation energy W function of the transformation gradient tensor $\underline{\underline{F}}$. The classical relationship for the Cauchy stress tensor versus W if we consider PET as an incompressible material is [GER1973] :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{I}} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\underline{\underline{B}} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\underline{\underline{B}}^{-1} \qquad [6]$$

As a first approach, the Mooney-Rivlin potential has been chosen for its simplicity :

$$W = C\left[(I_1 - 3) + \alpha(I_2 - 3)\right] \qquad [7]$$

Finally, the stress tensor is obtained by :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{I}} + 2C\underline{\underline{B}} - 2C\alpha\underline{\underline{B}}^{-1} = -p\,\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\sigma}}' \qquad [8]$$

This rheological model has been integrated into Forge3® using a velocity/pressure updated Lagrangian formulation together with tetrahedral elements. The Galerkin method could be written, neglecting gravity and inertia contributions :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{S}\cdot\underline{v}^*\,dS - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^*\,dV = 0 \qquad [9]$$

with $\underline{v}^*$ a virtual velocity field.

This formulation is discretized in space using P1+ / P1 tetrahedral finite elements. This element allows to calculate the velocity and the pressure in each node additional velocity degrees of freedom ("bubble" type degrees of freedom that are interpolated linearly in the four sub tetrahedral (fig.8)) in the middle of the element.

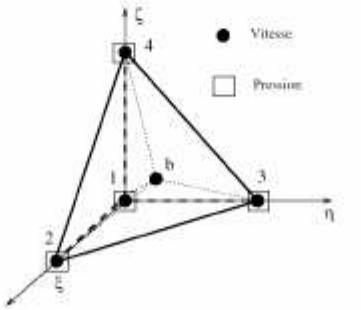


Figure 8 : P1+/P1 element.

In this case, the Galerkin method gives a second equation in the case of the bubble and finally, a third one for the incompressibility assumption

$$\int_{\Omega} p^* \, div(v + b)\,dV = 0 \qquad [10]$$

with v the node velocity and b the bubble one.

The discretization of [9] results in a set of non linear equations, the unknown of which are the nodal velocity field and the nodal pressure field. This set of equations is solved by a Newton-Raphson method, requiring an analytical form of the tangent matrix.

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}^{t+\Delta t}(v)}{\partial v_{mk}} = 2C\Delta t \frac{\partial N_m}{\partial x_p^0}\left(\delta_{ik}F_{jp}^{t+\Delta t} + \delta_{ij}F_{kp}^{t+\Delta t}\right) - C\alpha\Delta t\varepsilon_{pjq}^2\varepsilon_{krs}\varepsilon_{jrs}F_{jr}^{t+\Delta t}F_{qs}^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_r^0}\delta_{ij}F_{qs}^{t+\Delta t} + F_{jr}^{t+\Delta t}\frac{\partial N_m}{\partial x_s^0}\delta_{kq}\right) \quad [12]$$

$\underline{\underline{F}}$ is then computed using the following relationship :

$$F_{ij} = \left(\frac{\partial N_m}{\partial \xi_k}X_{oi}^m\right)^{-1}\frac{\partial N_n}{\partial \xi_k}X_i^n \quad [13]$$

For the validation, an analytical solution has been developed in order to assess the numerical model. An axi-symmetric thick tube is inflated using an imposed internal pressure (fig. 9). The lower and upper sections of the tube are supposed to slip freely in fixed horizontal planes (in other words, the height of the tube section is fixed). The polymeric tube is assumed to have a Mooney-Rivlin behavior.

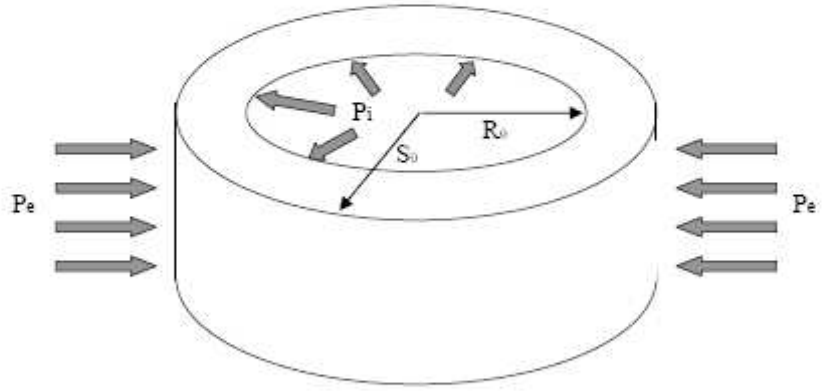


Figure 9 : Hyperelastic tube inflation.

The following relationship exists between the radial coordinate R at current time t and R_o the initial one t = 0 [SCH2000] :

$$r^2 - R^2 = r_o^2 - R_o^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{r_o^2 - R_o^2 + R^2} \quad [14]$$

Deriving [14], we calculate the gradient tensor $\underline{\underline{F}}$ [15] and then the Cauchy stress tensor $\underline{\underline{\sigma}}$.

$$F_{rr} = \frac{\partial r}{\partial r_o} = \frac{r_o}{r} \quad [15]$$

Using the pressure boundary conditions, this leads to

$$\frac{\Delta P(t)}{C(1+\alpha)} = \frac{S_0^2}{R^2+S_0^2-R_0^2} - \frac{R_0^2}{R^2} + \ln\left(\frac{S_0^2}{R_0^2}\frac{R^2}{R^2+S_0^2-R_0^2}\right) \qquad [16]$$

where $\Delta P(t) = p_i - p_e$ and S is the external radius at current time t.

This analytical model enables to obtain the internal radius versus the pressure.

The numerical computations have been processed using the neo-Hookean hyperelastic behavior (i.e. $\alpha = 0$ et $C = 1\,MPa$), with the following initial and boundary conditions :

- an inflation pressure is applied on the internal surface of the tube with a linear variation from 0 MPa at 0 second to 0.6 MPa at 1 second,
- the initial mesh has 42 nodes and 101 elements (figure 10),
- the initial internal radius is 5mm and the initial thickness is 2mm.

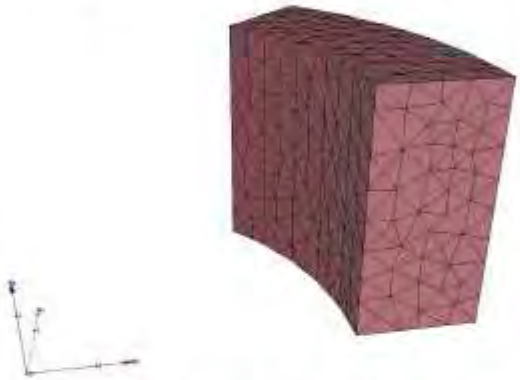


Figure 10 : Section of inflation tube mesh.

In figure 11, both numerical and analytical internal radius versus pressure are plotted as well as error. The agreement is good (maximum error 4%).

$$Error = \left|\frac{R_{Analytical} - R_{Calculation}}{R_{Analytical}}\right| \cdot 100$$

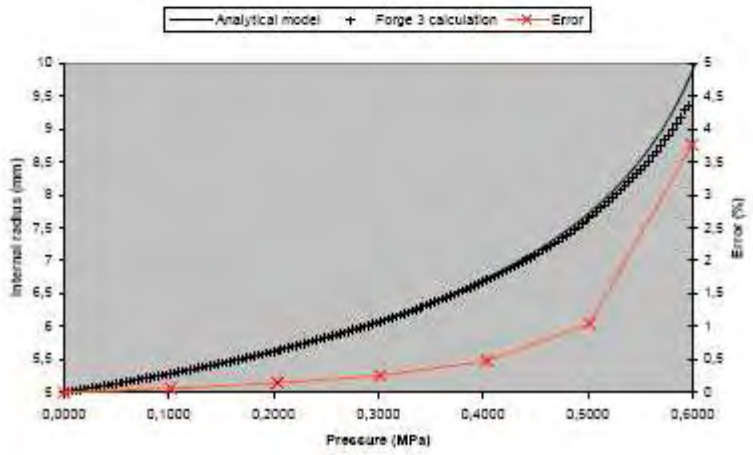


Figure 11 : Internal radius variation versus pressure.

IV- Blow molding computations

As a preliminary computation, an isothermal free inflation simulation of a preform has been performed using a neo-Hookean behavior. The parameters used for this calculations have been referenced in Table 1 and the mesh preform in figure 12.

Neo-Hookean parameters	$C = 1\ MPa$ $\alpha = 0\ MPa$
Set pressure	Linear $t = 0\ s \rightarrow P = 0\ MPa$ $t = 0.8\ s \rightarrow P = 0.8\ MPa$
Preform dimensions	Thickness $= 3\ mm$ Internal radius $= 10\ mm$ Length $= 101\ mm$

Table 1 : Calculations parameters.



Figure 12 : Mesh of the preform (44 403 nodes, 223 155 elements).

Figure 13 prevents successive steps of the free blow molding process. Moreover, the relaxation phase due to the hyperelastic behavior could be checked numerically. Indeed, if the pressure applied inside the preform decreases to zero, then, the preform relaxes to its initial shape. The shape of the preform during free inflation will be soon compared with experimental mesaurements realized using a fast CCD camera.

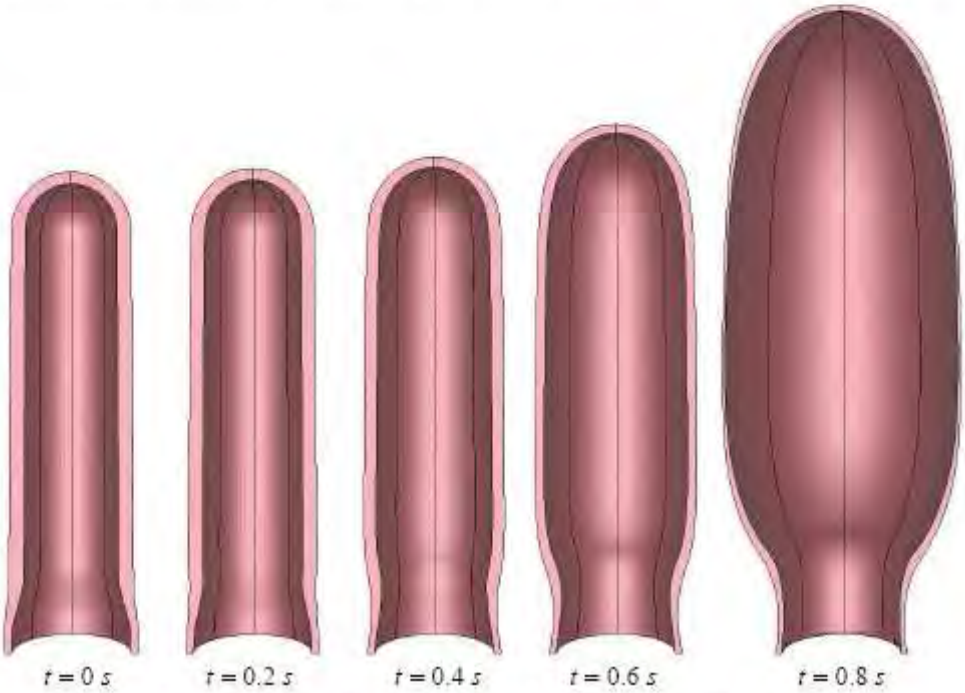


Figure 13 : Intermediate preform free inflation (CPU time = 6 hours).

As a second example, a confined blow molding simulation (without rod) has been done. We assume an isothermal Newtonian law which allows to reduce efficiently CPU time.

The mould used is a prototype one developed in the CROMeP (Table 2). It produces 50cl water bottle. As for the tube inflation in part III, just an eighth of the preform has been meshed (fig 14).

Newtonian parameter	$\eta = 0.2\ MPa.s$
Set pressure	Linear $t = 0\ s \rightarrow P = 0\ MPa$ $t = 1\ s \rightarrow P = 1\ MPa$
Preform dimensions	Thickness $= 2.35\ mm$ Internal radius $= 7.6\ mm$ Length $= 68.5\ mm$
Mold dimensions	Internal radius $= 64\ mm$ Length of the print $= 119\ mm$

Table 2 : Calculations parameters.



Figure 14 : Geometries of the preform and the mold.

Figure 15 shows the inflation of the preform as a function of time and especially the development of the contact between polymer and mold. Indeed, the calculations allowed to estimate with precision the evolution of the shape of the preform during the inflation. Moreover, the software defined perfectly the contact between the mold and the material at any moment of the calculations.

The future works will be to take into account a Mooney-Rivlin law for the P.E.T. material in order to obtain a numerical thickness distribution at the end of the process. This one could be then compared with experimental data. Moreover, the stretch step will be soon added to the model. The final purpose will be to find with the simulation of the stretch blow molding process, the influence on the thickness distribution of parameters like the speed of the rod or the value of the blowing pressure.

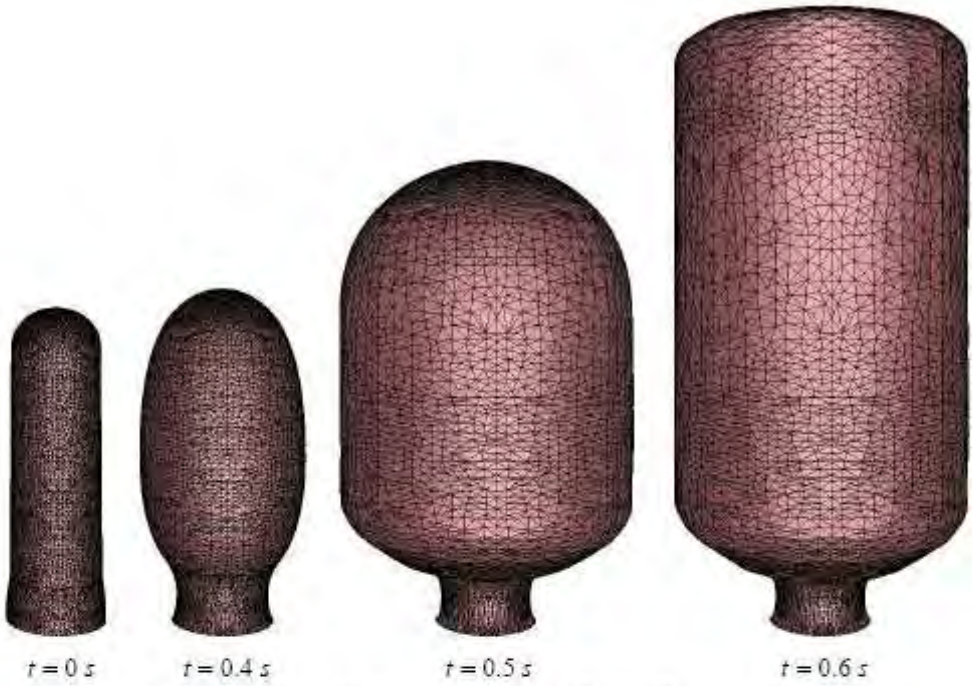


Figure 15 : Intermediate preform blow molding.

V- Conclusion

A numerical thermo-mechanical model has been developed using Forge3® velocity/pressure formulation and tetrahedral elements.
From a thermal point of view, the calculation lead proved that the Rosseland approximation is not adapted to estimate the amount of energy absorbed inside the P.E.T. plastic. To solve this problem, a complete ray tracing method is being implemented to calculate the irradiative flux value used for the heat balance equation. Both the exchange of energy between the infrared oven and the irradiative surface of the preform, and the amount of radiation energy absorbed inside the material will be thus accurately calculated.
From a mechanical point of view, a Mooney-Rivlin hyperelastic law behavior has been implemented with a complete finite element analytical formulation. The model has been validated by comparison with the analytical calculation of the thick tube inflation. The future works will be first to take into account a Mooney-Rivlin law for the P.E.T. material in order to obtain a numerical thickness distribution at the end of the process. This one could be then compared with experimental data. Moreover, the stretch step will be soon added to the model. The final purpose will be to find with the simulation of the stretch blow molding process, the influence on the thickness distribution of parameters like the speed of the rod or the value of the blowing pressure. Then, more accurate hyperelastic potentials of the PET behavior heated up to its glass transition temperature will be implemented.
Those next developments will enable us to model accurately the complete PET bottles fabrication process, namely, the infrared exchange in the oven and the stretching and blowing step.

Acknowledgements

Nestlé Waters supports this work. Special thanks go to L.G. for the English correction.

References

[EDW1986] S.F. Edwards, T. Vilgis, " The effect of entanglements in rubber elasticity ", Polymer 27 (1986), 483-492.

[DIR1993] R. DiRaddo, A. Garcia-Rejon, " Dynamic modeling of the preform reheating stage in injection blow molding ", Plastic Rubber and composites processing and applications, vol. 20, no 5, 1993.

[GER1973] P. Germain, " Cours de Mécanique des Milieux Continus ", Tome 1, Théorie Générale, Masson et Cie, Editeurs, 1973 (in french).

[GOR2001] E. Gorlier, J.F. Agassant, J.M. Haudin, N.Billon, " Experimental and theoretical study of uniaxial deformation of amorphous poly(ethylene terephthalate) above glass transition temperature ", Plastics, Rubber and Composites, vol. 30, pp 48-55, 2001.

[HAR1996] K. Hartwig, " Simulation of the stretch blow molding process and characterisation of the relevant material behaviour ", Ph. D. Dissertation, RWTH, Aachen, 1996.

[LEB1992] P. Lebaudy, J.M. Saiter, J. Grenet, C. Vautier, " Temperature distribution in poly(ethylene terephtalate) plate undergoing heat treatment ", Diffusion influence : 1, Theoretical approach, Polymer, vol. 33, no 9, 1992

[LIN2002] B. van der Linden, " Radiative heat transfer in glass : the algebraic ray trace method ", PhD, Eindhoven, 2002.

[MAR1997] S. Marie, " Un modèle de parallélisation SPMD pour la simulation des procédés de mise en forme des matériaux ", Ph. D. Thesis, Ecole des Mines de Paris, 1997 (in French).

[MAR2003] Y. Marco, " Caractérisation multi-axiale du comportement et de la micro-structure d'un semi-cristallin : application au cas du P.E.T. ", Thèse de Doctorat en Mécanique, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2003 (in french).

[MEN2000] G.H. Menary, C.G. Armonstrong, R.J. Crawford and J.P. McEvoy, " Modeling of Poly(ethylene terephtalate) in injection stretch blow molding ", Plastics, Rubber and Composites 2000, vol 29, n°7.

[MOD1993] M. Modest, " Radiative heat transfer ", McGraw-Hill, Inc., 1993.

[MON2001] S. Monteix, F. Schmidt, Y. Le Maoult, R. Ben Yedder, R.W. Diraddo, D. Laroche, " Experimental study and numerical simulation of preform or sheet exposed to infrared radiative heating ", Journal of Materials Processing Technology 119 (2001) 90-97.

[ROS1989] D. Rosato, " Blow molding handbook ", Hanser Publishers, 1989.

[SCH1992] F. Schmidt, J.F. Agassant, M. Bellet, G. Denis, " Numerical simulation of polyester stretch-blow molding ", in Numerical methods in industrial forming processes, Balkema, Rotterdam, pp383, 1992.

[SCH2000] F. Schmidt, A. Rodriguez-Villa, J.F. Agassant, M. Bellet, " Analytical models for the inflation of a polymeric tube ", Eur. J. Mech. A/ Solids 19 (2000) 89-104.

[SHE1991] M.D. Shelby, " Effects of infrared lamp temperature and other variable on the reheat rate of PET ", ANTEC'91, 1991.

[VEN1997] G. Venkateswaran, M.R. Cameron, S.A. Jabarin, " Effects of temperature profiles trough preform thickness on the properties of reheat blown PET containers ", ANTEC'97, 1997.

[WAN1998] S. Wang, A. Makinouchi, T. Nakagawa, " 3D viscoplastic FEM simulation of a stretch blow molding process ", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 48, n°4, pp501-521, 2000.

Nomenclature

ρ	Density	$\underline{\underline{\sigma}}$	Stress tensor
c_p	Specific heat	$\underline{\underline{\sigma}}'$	Extra-stress tensor
T	Temperature	p'	Arbitrary pressure
t	Time	$\underline{\underline{F}}$	Gradient tensor
$\vec{q}$	Density heat flux	$\underline{\underline{B}}$	Left Cauchy Green tensor
$\vec{q_r}$	Density radiative heat flux	W	Deformation energy
k	Thermal conductivity	C , α	Mooney-Rivlin variables
Ω	Field considered	I_1 , I_2	First two $\underline{\underline{B}}$ invariants
ϕ	Heat flux	$\underline{v}^*$	Virtual velocity
h_{conv}	Convection coefficient	$\underline{S}$	Stress vector
h_{cond}	Conduction coefficient	v	Node speed
T_{ext}	External temperature	b	Bubble speed
T_{front}	Tool temperature	$[H]$	Rigidity matrix
σ_{SB}	Stefan-Boltzmann constant	$[R]$	Residual matrix
k_{ROSS}	Rosseland mean coefficient	p	Pressure
ν	Frequency	N_i	Shape function
κ_ν , κ	Absorption coefficient	v^i	i-th node velocity
B	Planck function	X	Coordinate
$[C]$	Capacity matrix	δ , ε	Permittivity function
$[K]$	Conductivity matrix	R	Internal radius
$[Q]$	Load vector	S	External radius
α_d	Diffusivity		

Résumé :

Notre étude a porté sur la modélisation 3D du chauffage par rayonnement infrarouge et l'étirage soufflage des préformes utilisées dans le procédé de fabrication des bouteilles en P.E.T. L'objectif était de calculer sous une unique plateforme de simulation numérique par éléments finis, la cartographie thermique complète de la préforme en sortie du four, et la répartition finale d'épaisseur de la préforme en fin de soufflage. L'interaction entre les lampes halogènes et le matériau semi-transparent a été modélisée à l'aide de la méthode du lancer de rayons, permettant de prendre en compte les réflecteurs. Le terme source de rayonnement intégré dans l'équation de la chaleur a été calculé avec une loi de Beer-Lambert appliquée à chaque rayon émis par le filament de tungstène ou réfléchi par la céramique. La rotation de la préforme ainsi que son avance dans le four ont également été modélisées par interpolation de la divergence du flux radiatif calculée à l'instant initial vers celle de la configuration à l'instant considéré. L'étude de l'étirage et du soufflage de la préforme ont donné lieu à l'implantation d'une loi de comportement hyperélastique de type Mooney-Rivlin et une loi viscoplastique inspirée des travaux de G'Sell. Les développements numériques ont été validés par comparaison avec des modèles analytiques volumique de traction uniaxiale, de soufflage de tube et de sphère. Les techniques de remaillage nécessaire aux simulations des grandes déformations et la précision des algorithmes de contact intégrés dans le code de calcul par éléments finis Forge3® ont permis de montrer la faisabilité de la simulation de l'étirage-soufflage en 3D.

Mots clés :

Chauffage, rayonnement, infrarouge, lancer de rayons, éléments finis, préformes, étirage, soufflage, hyperélasticité, viscoplasticité, grandes déformations, bouteilles en P.E.T.

Summary :

Our study addressed the 3D modeling of the infrared radiation reheating step and the stretch blow molding of cold injected preforms used for P.E.T. bottles. The goal was to calculate the full temperature profile of the preform at the exit of the furnace and the final thickness of the bottle at the end of the blow molding, using a single finite element numerical tool. The interaction between the halogens lamps and the semi-transparent material has been modeled using a ray tracing method, taking into account reflectors. The volumetric source term arising from irradiation and inserted in the heat assumption has been calculated through a Beer-Lambert law applied to each ray emitted by the tungsten filament or reflected by the ceramic. The preform rotation and translation have been modeled thanks to a mapping of the irradiative heat flux divergence calculated initially onto the configuration at the time considered. The study of the stretching and blow molding of the preform have given rise to the implementation of Mooney-Rivlin hyperelastic and G'Sell viscoplastic behavior laws. Numerical developments have been validated by a comparison with tensile tests, a thick tube and a thick sphere blowing analytical models. The remeshing method necessary for large strain and the contact algorithms accuracies implemented in Forge3® software allowed to demonstrate the feasibility of the 3D numerical modeling of stretch-blowing of P.E.T. preforms.

Key words :

Reheating, radiation, infrared, ray tracing method, finite element, preforms, stretching, blow molding, hyperelasticity, viscoplasticity, high strain, P.E.T. bottles.