

Développement d'outils de conception de Machines polyphasées à aimants utilisant l'Approche multimachine.

Franck Scuiller

▶ **To cite this version:**

Franck Scuiller. Développement d'outils de conception de Machines polyphasées à aimants utilisant l'Approche multimachine.. Energie électrique. Arts et Métiers ParisTech, 2006. Français. NNT : 2006ENAM0052 . tel-00270448

HAL Id: tel-00270448
https://pastel.hal.science/tel-00270448

Submitted on 4 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N°: 2006 ENAM 52

Ecole doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

T H È S E

pour obtenir le grade de

Docteur

de

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité "Génie Electrique"

présentée et soutenue publiquement
par

Franck SCUILLER

le 13 décembre 2006

DÉVELOPPEMENT D'OUTILS DE CONCEPTION DE MACHINES POLYPHASÉES À AIMANTS UTILISANT L'APPROCHE MULTIMACHINE

Directeur de thèse : ***Stéphane CLÉNET***

Coencadrants : ***Jean-Frédéric CHARPENTIER et Eric SEMAIL***

Jury :

M. Jean-Paul LOUIS, Professeur, SATIE, ENS, Cachan ..... Président
M. Farid MEIBODY-TABAR, Professeur, GREEN, ENSEM, Nancy..... Rapporteur
M. El Hadi ZAIM, Professeur, IREENA, EPUN, Saint-Nazaire ..... Rapporteur
M. Mohamed BENBOUZID, Professeur, LIME, IUT, Brest ..... Examinateur
M. Philippe VIAROUGE, Professeur, LEEPCI, Université Laval, Québec ..... Examinateur
M. J-Frédéric CHARPENTIER, Maître de Conférences, IRENAV, EN, Brest.... Examinateur
M. Eric SEMAIL, Maître de Conférences, L2EP, ENSAM, Lille ..... Examinateur
M. Stéphane CLÉNET, Professeur, L2EP, ENSAM, Lille ..... Examinateur
M. Paul LETELLIER, Jeumont SA, AREVA ..... Invité

Institut de Recherche de l'Ecole Navale, EA 3634
Ecole Navale, Brest

L'ENSAM est un Grand Etablissement dépendant du Ministère de l'Education Nationale, composé de huit centres :
AIX-EN-PROVENCE ANGERS BORDEAUX CHÂLONS-EN-CHAMPAGNE CLUNY LILLE METZ PARIS

Remerciements

Financés par la Marine Nationale, ces travaux de thèse ont été réalisés à l'Institut de Recherche de l'Ecole Navale (IRENAV) situé à Brest. Ils s'inscrivent dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire d'Electrotechnique et de d'Electronique de Puissance de Lille (L2EP) portant sur la problématique de la propulsion électrique navale.

Je remercie tout d'abord mon encadrant principal, Jean-Frédéric Charpentier, Maître de Conférences à l'Ecole Navale. Initiateur de la collaboration avec le L2EP, Jean-Frédéric a su proposer un sujet réellement passionnant, me suggérer des pistes, contrôler avec pertinence mes initiatives puis me laisser l'autonomie nécessaire au bon appropriement du sujet. Il m'a fait confiance et je lui en suis sincèrement reconnaissant.

Je remercie également mon second encadrant Eric Semail, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Supérieure D'Arts et Métiers de Lille. Malgré la distance, il a toujours répondu très rapidement à mes sollicitations. Ses conseils ont été précieux et décisifs. Je considère que c'est une chance exceptionnelle d'avoir pu travailler avec lui.

Je remercie chaleureusement mon directeur de thèse, Stéphane Clénet, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure D'Arts et Métiers de Lille. En charge du suivi administratif, Stéphane m'a soutenu et a tout fait pour que les conditions nécessaires à la réalisation des objectifs fixés soient réunies. J'ai particulièrement apprécié son implication scientifique. Sa bienveillance à mon égard restera attachée aux souvenirs de cette période de doctorat.

Je remercie Monsieur Jean-Paul Louis, professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse. Je remercie également Messieurs El Hadi Zaïm, Professeur à l'Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes, et Farid Meibody-Tabar, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique de Nancy, d'avoir accepté de rapporter ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur Mohammed Benbouzhid, Professeur à l'Institut Universitaire Technologique de Brest pour avoir accepté la charge d'examinateur et à Monsieur Paul Letellier, Ingénieur chez Jeumont SA, pour avoir répondu favorablement à l'invitation qui lui a été adressée.

J'adresse des remerciements tout particuliers à Monsieur Philippe Viarouge, Professeur à l'Université Laval de Québec, pour avoir examiné ces travaux mais aussi pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire d'Electrotechnique, d'Electronique de Puissance et de Commande Industrielle (LEEPCI) de Québec pendant le mois de mars 2006. Cette expérience a été scientifiquement fructueuse et culturellement enrichissante.

Je remercie également Louis Marié, chercheur post-doctoral à l'IRENAV de septembre 2003 à août 2004 et, à ce jour, chercheur à l'Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer, pour les conversations que nous avons eues et ses suggestions ô combien pertinentes.

Qu'il trouve en ce mémoire toute l'estime que j'ai pour lui.

En parallèle de mon activité de doctorant, j'ai dispensé des enseignements aux élèves de l'Ecole Navale et du Groupe des Ecoles du Poulmic. Cette activité a été très agréable à mener en raison notamment de la disponibilité et de la sympathie des membres de l'équipe pédagogique de l'IRENAV. Je les en remercie. Et je remercie plus particulièrement les intervenants en Génie Electrique comme Joël Le Gall, Javier Rios-Quesada et Laurent Drouen.

A l'IRENAV, j'ai pu bénéficier de très bonnes conditions de travail. Tous les requêtes d'ordre matérielle et logistique ont été satisfaites. Particulièrement réactif et disponible, le service informatique m'a fourni tous les moyens nécessaires. J'ai pu apprécié l'implication du Service d'Etude et de Fabrication dans la construction du banc d'essai polyphasé. Je les en remercie. Je remercie aussi les différents services administratifs (secratariats, service achats, ...) pour l'attention qu'ils m'ont portée et leur sympathie.

Je remercie mes collègues doctorants pour les nécessaires moments de relâche intellectuelle : Eric, Rodéric, Sébastien, Jean-Christophe, Myriem, Christophe, Rachel, Mathieu... Je n'oublie pas les polyvalents qui savaient en plus donner des conseils sur LaTeX : Salem, David, Valérie...

Je remercie mes parents pour leur soutien et leur neutralité.

Cette thèse restera une période exceptionnelle durant laquelle nombre de mes choix auront gagné en cohérence.

Table des matières

Table des matières i

Liste des figures vii

Liste des tableaux xi

Glossaire xiii

Introduction 3

I Décomposition Multimachine d'une Machine polyphasée à Pôles lisses 9

I.1 Mise en équation de la Machine polyphasée 11

I.1.1 Hypothèses 11

I.1.1.1 Types de machines considérées 11

I.1.1.2 Linéarité 11

I.1.1.3 Environnement mathématiques et notations 12

I.1.2 Représentation vectorielle 14

I.1.2.1 Equations en flux et en tension 14

I.1.2.2 Matrice d'inductance statorique 15

I.1.3 Réduction de la matrice d'inductance statorique 16

I.1.3.1 Circularité et Transformée de *Fortescue* 16

I.1.3.2 Symétrie et Transformée de *Concordia* 18

I.1.3.3 Equations dans les bases de découplage 20

I.2 Décomposition Multimachine de la Machine polyphasée 22

I.2.1 Machine fictive : représentation physique de l'espace propre 22

I.2.1.1 Bilan de puissance 22

I.2.1.2 Répartition du couple électromagnétique 23

I.2.1.3 Schéma électrique d'une machine fictive 24

I.2.2 Familles d'harmoniques associées aux machines fictives 24

I.2.2.1 Inductances cycliques et groupes d'harmoniques 25

I.2.2.2 Projection d'un vecteur périodique dans les bases propres . . 26
I.2.2.3 Harmonique de rang minimal et machine fictive principale . 28
I.2.3 Puissance instantanée de machine fictive 29
I.2.3.1 Bilan de puissance de machines fictives 30
I.2.3.2 Calcul du couple instantanné de machines fictives 30
I.3 Conception polyphasée intégrant la décomposition multimachine dans le cadre de l'alimentation par onduleur de tension MLI 31
I.3.1 Commande multimachine de la machine polyphasée alimentée par onduleur de tension MLI 31
I.3.1.1 Analyse du comportement de la machine fictive dans le cadre de l'alimentation par onduleur de tension 31
I.3.1.2 Architecture de commande basée sur la décomposition multimachine 34
I.3.1.3 Impact de la commande multimachine sur le dimensionnement de l'alimentation 35
I.3.2 Adaptation de la conception de la machine à la commande multimachine 36
I.3.2.1 Stratégie de commande multimachine 36
I.3.2.2 Définition des forces électromotrices fictives 38
I.3.2.3 Critères sur les constantes de temps de machines fictives . . 39

II Modélisation de la Machine polyphasée à Pôles lisses 45
II.1 Description de la machine réelle 47
II.1.1 Géométrie et constitution des machines considérées 47
II.1.1.1 Topologie 47
II.1.1.2 Type d'aimants 48
II.1.2 Bobinages polyphasés considérés 49
II.1.2.1 Principe d'obtention d'un bobinage équilibré 49
II.1.2.2 Bobinages équilibrés réguliers 50
II.1.2.3 Bobinages équilibrés irréguliers 51
II.1.2.4 Périodicité et circularité d'un bobinage polyphasé équilibré . 52
II.1.3 Couches d'aimants considérées 54
II.1.3.1 Géométrie 54
II.1.3.2 Constitution d'un pôle 54
II.2 Représentation des termes sources 55
II.2.1 Fonctions d'aimantation 55
II.2.1.1 Construction 56
II.2.1.2 Propriétés 56
II.2.2 Fonctions de bobinage de phase 57
II.2.2.1 Définition de la fonction de bobinage de phase 57

II.2.2.2 Propriétés de la fonction de bobinage 59
II.2.2.3 Notion de bobinage convenablement réparti 59
II.2.3 Représentation matricielle du bobinage 60
II.2.3.1 Matrice de fonction de bobinage 60
II.2.3.2 Matrice de distribution de conducteurs 62
II.2.3.3 Lien entre la fonction de bobinage et la distribution de conducteurs 64
II.3 Méthode de calcul analytique du champ 66
II.3.1 Calcul analytique du champ pour une machine sans encoche à pôles lisses 67
II.3.1.1 Hypothèses nécessaires 67
II.3.1.2 Principe de la résolution 67
II.3.2 Correspondance entre une machine sans encoche et une machine encochée 68
II.3.2.1 Extension de l'entrefer 68
II.3.2.2 Calcul du champ 69
II.3.2.3 Prise en compte des effets locaux de denture 71
II.4 Calcul des grandeurs globales 72
II.4.1 Evaluation du flux à l'aide de la modélisation du bobinage 73
II.4.1.1 Variation du flux à partir de la densité de conducteurs 73
II.4.1.2 Variation du flux à partir de la fonction de bobinage 74
II.4.1.3 Calcul des coefficients de bobinage globaux à l'aide de la distribution 75
II.4.2 Calcul analytique de la force électromotrice 76
II.4.2.1 Evaluation à partir de la densité de conducteurs 76
II.4.2.2 Evaluation à partir de la fonction de bobinage 77
II.4.2.3 Validations 78
II.4.3 Calcul analytique des inductances de phase 80
II.4.3.1 Inductance d'entrefer en fonction de la densité de conducteurs 81
II.4.3.2 Inductance d'entrefer en fonction de la fonction de bobinage 82
II.4.3.3 Evaluation analytique des inductances de fuite 83
II.4.3.4 Validations 84

III Modélisation des Machines fictives 91

III.1 La Transformée de *Fourier* discrète : outil pour la caractérisation des Machines fictives 93
III.1.1 Des matrices de changement de base vers la Transformée de *Fourier* discrète 93
III.1.1.1 Matrice de *Fortescue* et Transformée de *Fourier* discrète . . 93
III.1.1.2 Matrice de *Concordia* et Transformée de *Fourier* discrète réelle 94
III.1.1.3 Synthèse et interprétation 95

III.1.1.4 Exemple illustratif 96
III.1.2 Lecture des composantes vectorielles comme éléments de suites périodiques 97
III.1.2.1 Transformée de *Fourier* discrète sur les vecteurs de phase . . 97
III.1.2.2 Ré-écriture du lien entre flux, inductance et courant 99
III.1.2.3 Découplage de la relation entre flux et courant 100
III.1.3 Caractérisation des machines fictives 100
III.1.3.1 Découplage des équations en tension 101
III.1.3.2 Répartition de la puissance et du couple 102
III.1.3.3 Détermination des familles d'harmoniques 103
III.1.3.4 Synthèse 104
III.2 Bobinage fictif 105
III.2.1 Construction 105
III.2.1.1 Définition des vecteurs de distribution et de bobinage fictifs . 105
III.2.1.2 Indice de circularité et propriétés sur les bobinages fictifs . . 107
III.2.2 Transformée de *Fourier* discrète des vecteurs de bobinage 108
III.2.2.1 Introduction des TFD de vecteurs de bobinage 109
III.2.2.2 Exemple d'utilisation de la TFD pour caractériser les bobinages fictifs 110
III.2.2.3 Familles étendues d'harmoniques de machines fictives 111
III.2.3 Vecteurs de bobinage fictif et grandeurs globales 114
III.2.3.1 Bobinage fictif et inductance fictive 114
III.2.3.2 Bobinage fictif et force électromotrice fictive 116
III.2.3.3 Synthèse 118
III.3 Fonction d'aimantation fictive 119
III.3.1 Construction 119
III.3.1.1 Analyse 119
III.3.1.2 Définition des fonctions d'aimantation fictive 120
III.3.2 Effet de segmentation de la fonction d'aimantation fictive 122
III.3.2.1 Origine de la segmentation 123
III.3.2.2 Réflexions sur la notion d'aimants fictifs 124

IV Conception basée sur la décomposition multimachine 129

IV.1 Optimisation du bobinage 131
IV.1.1 Analyse du problème 131
IV.1.1.1 Définition des objectifs 131
IV.1.1.2 Caractérisation des performances des bobinages diamétraux entiers vis à vis des objectifs multimachines 132

IV.1.1.3 Caractérisation des performances d'un bobinage fractionnaire vis à vis des objectifs multimachines 135
IV.1.1.4 Etude prospective sur le bobinage direct des machines fictives 137
IV.1.2 Démarche d'optimisation 143
IV.1.2.1 Principe de la méthode d'optimisation 143
IV.1.2.2 Procédure 144
IV.1.3 Exemples 145
IV.1.3.1 Recherche d'un bobinage heptaphasé facilitant la régulation de toutes les machines fictives 145
IV.1.3.2 Recherche d'un bobinage pentaphasé favorisant la machine secondaire en terme de régulation et de production de couple 148
IV.1.3.3 Aptitude du bobinage pentaphasé sélectionné à réduire les courants parasites 154
IV.2 Optimisation de la couche d'aimants 159
IV.2.1 Analyse du problème 159
IV.2.1.1 Isolation de l'influence de la couche d'aimant sur la force électromotrice élémentaire 160
IV.2.1.2 Définition des objectifs multimachines pour la couche d'aimants161
IV.2.2 Optimisation pour une couche d'aimants radiaux 162
IV.2.2.1 Définition de la fonction d'aimantation idéale 162
IV.2.2.2 Méthode de modulation de la fonction d'aimantation 163
IV.2.3 Optimisation pour une couche d'aimants parallèles 166
IV.2.3.1 Méthode de recherche de la fonction d'aimantation 166
IV.2.3.2 Exemple de mise en oeuvre 168
IV.2.3.3 Simulation de la solution à couche d'aimants optimisée . . . 172

Conclusion **179**

Annexes **182**

A Définition des coefficients de décomposition en série de *Fourier* **185**

B Eléments de calcul analytique du champ **187**
B.1 Coefficients de *Fourier* des fonctions d'aimantation 187
B.2 Expression du potentiel vecteur dû aux aimants à la frontière entrefer-culasse statorique 188

C Calcul du couple de détente **189**
C.1 Paramètres influençant le couple de détente 189
C.2 Méthode de calcul 190
C.3 Validations 191

C.4 Sensibilité paramétrique du calcul analytique 193

D Coefficients de bobinage d'un bobinage convenablement réparti 199

Bibliographie 203

Résumé 209

Liste des figures

I.1 Représentation des deux repères de calcul et de leur décalage instantanné . . 13

I.2 Schémas électriques des machines fictives (avec la base de Concordia comme support) 24

I.3 Principe de la mise sous tension des phases réelles dans le cadre de l'alimentation par onduleur de tension 32

I.4 Principe de la mise sous tension d'une machine fictive 32

I.5 Schéma de régulation du courant d'une machine fictive dans le cadre d'une alimentation par onduleur MLI 34

II.1 Modélisation des encoches et spécification des notations 48

II.2 Principe d'obtention d'un bobinage polyphasé équilibré 50

II.3 Exemple d'un bobinage équilibré régulier pour une machine à 5 phases, 20 encoches et 2 paires de poles ($s_{pp} = 1$) 51

II.4 Exemple d'un bobinage équilibré irrégulier à trou pour une machine à 5 phases, 20 encoches et 2 paires de poles ($s_{pp} = 1$) 52

II.5 Exemple d'un bobinage équilibré irrégulier fractionnaire pour une machine à 5 phases, 20 encoches et 3 paires de poles ($s_{pp} = 2/3$) 53

II.6 Géométrie d'aimants prise en compte 55

II.7 Exemple de modélisation complète d'une paire de pôles (pour $p = 10$). Les aimants sont à aimantation parallèle de norme M. Les fonctions d'aimantation sont normalisées par rapport à M. 56

II.8 Fonction de bobinage de deux bobinages pentaphasés sur 20 encoches 58

II.9 Illustration de la non prise en compte de la position relative des conducteurs dans l'encoche 64

II.10 Passage de la machine initiale vers la machine lisse correspondante permettant le calcul analytique du champ dans la couche d'aimant et l'entrefer mécanique 70

II.11 Trajet circulaire du champ au sein de l'encoche 71

II.12 Comparaison de la mesure de la force électromotrice élémentaire avec les estimations numériques et analytiques pour la machine *M5-L2EP* 79

II.13 Comparaison de la mesure de la force électromotrice élémentaire avec les estimations numériques et analytiques pour la machine *M5-IRENAV* 80

II.14 Modélisation des lignes de champ restant dans l'entrefer pour l'estimation du flux de fuite d'une encoche 83

II.15 Lignes de champ résultant de l'alimentation d'une phase selon *Difimedi* pour les deux machines pentaphasées ($\mu_{fer} = 2000$) 85

III.1 Représentation de la suite inductance et de sa Transformée de *Fourier* discrète réelle 97

III.2 Eléments de représentation des bobinages fictifs de la machine pentaphasée *M5-IRENAV* à bobinage fractionnaire 108

III.3 Représentation par histogramme des compoantes du vecteur TFDr des vecteurs de distribution de bobinage fictif 111

III.4 Visualisation du nombre de paires de pôles des bobinages des deux machines fictives diphasées (machine *M5-IRENAV*) 112

III.5 Transformée de *Fourier* discrète réelle des fonctions de bobinage fictif pour la machine pentaphasée à 20 encoches et 3 paires de pôle *M5-IRENAV* 114

III.6 Obtention des forces électromotrices fictives par utilisation des distributions fictives (pour la machine *M5-IRENAV*) 117

III.7 Caractérisation fréquentielle du bobinage d'une machine fictive à partir du bobinage de la phase 0 118

III.8 Fonction d'aimantation fictive radiale pour une machine à 5 phases avec rotor radial sans lacune 120

III.9 Fonction d'aimantation fictive radiale pour une machine à 5 phases : illustration de la définition explicite par intervalle de largeur 36 degrés électriques 121

III.10 Illustration de l'effet de segmentation de la fonction d'aimantation pour la construction des fonctions d'aimantation fictive 123

III.11 Illustration de l'effet de segmentation de la fonction d'aimantation pour des allures plus générales 124

III.12 Etude de la possibilité d'identifier des paramètres d'aimants fictifs pour une aimantation radiale et parallèle (machine à 5 phases) 125

IV.1 Origine sinusoïdale des distributions fictives pour la machine *M5-L2EP* 132

IV.2 Allure des forces électromotrices fictives pour la machine *M5-L2EP* à bobinage entier diamétral $n_{epp} = 1$ 133

IV.3 Transformée de *Fourier* discrète réelle des distributions et fonction de bobinage fictifs de la machine *M5-L2EP* à bobinage diamétral monocouche 134

IV.4 Evolution des coefficents de bobinages globaux et des inductances fictives en fonction du nombre d'encoches par pôle et par phase pour un bobinage pentaphasé diamétral 135

IV.5 Comparaison de l'origine échantillonnée des bobinages des machines fictives principales et secondaires pour les machines pentaphasées *M5-L2EP* et *M5-IRENAV* 136

IV.6 Comparaison des coefficients de bobinage globaux pour les machines *M5-L2EP* et *M5-IRENAV* 137

IV.7 Transformée de *Fourier* discrète des distributions fictives et fonction de bobinage fictif de la machine *M5-IRENAV* 138
IV.8 Coefficients de bobinage globaux des machines fictives de la machine *M5-L2EP* 139
IV.9 Calcul des distributions fictives idéales pour une machine pentaphasée à 20 encoches et 3 paires de pôles 140
IV.10 Comparaison des forces électromotrices fictives de la machine pentaphasée *M5-IRENAV* avec le bobinage existant et avec le bobinage idéal 141
IV.11 Fonctions de bobinage fictif issus de la distribution fictive idéale définie pour une structure à 20 encoches, 3 paires de pôle et 5 phases 141
IV.12 Représentation du bobinage pentaphasé 20 encoches et 6 poles, calculé par échantillonnage de distributions fictives continues 142
IV.13 Synoptique de la procédure de sélection du bobinage 144
IV.14 Bobinage solution pour la machine à 7 phases, 21 encoches et 16 pôles 147
IV.15 Machine *M7-HYB* : distributions fictives, les pôles des machines fictives secondaires et tertiaires n'apparaissent pas clairement 148
IV.16 Machine *M7-HYB* : coefficients de bobinages globaux des différentes machines fictives 149
IV.17 Machine *M7-HYB* : TFDr des fonctions de bobinage fictif avec indication du niveau d'énergie 149
IV.18 Machine *M7-HYB* : TFDr des distributions fictives avec indication du niveau d'énergie 150
IV.19 Représentation du meilleur bobinage pentaphasé trouvé pour le moteur à 80 encoches et 14 pôles 151
IV.20 Machine *M5-POD* : mise en évidence de la polarité des différents bobinages fictifs 152
IV.21 Machine *M5-POD* : coefficients de bobinages globaux des différentes machines fictives 153
IV.22 Machine *M5-POD* : allure des fonctions de bobinage fictif 153
IV.23 Machine *M5-POD* : TFDr des fonctions de bobinage fictif avec indication du niveau d'énergie 154
IV.24 Représentation du bobinage entier diamétral de la machine *M5-POD-ref* à 16 pôles et 80 encoches 155
IV.25 Comparaison des fem élémentaires et des couple électromagnétiques en alimentation sinusoïdale pour les machines *M5-POD* et *M5-POD-ref* 156
IV.26 Courants de phases obtenus sur les deux machines à 500 tr/min et 60 Nm ($f_{MLI} = 2000\,Hz$) 157
IV.27 Comparaison des courants de *Concordia* pour la machine secondaire (60 Nm @ 500 tr/min) 157
IV.28 Modulante de tension de phase pour les machines *M5-POD-ref* et *M5-POD* en régime permanent (60 Nm @ 500 tr/min) 158
IV.29 Caractérisation de la force électromotrice élémentaire par l'intermédiaire de gains harmoniques 160

IV.30 Fonctions d'aimantation radiale fictives et réelle idéales pour la machine *M5-POD* 163
IV.31 Principe de la méthode de modulation de la fonction idéale d'aimantation . . 164
IV.32 Résultat obtenu par la méthode de modulation de la fonction d'aimantation pour la machine *M5-POD* (porteuse de période $\pi_{elec}/4$) 165
IV.33 Analyse comparée des forces électromotrices de la machine *M5-POD* avec le rotor radial initial et le rotor radial segmenté calculé par modulation 165
IV.34 Comparaison des fonctions d'aimantation résultant d'un anneau de *Halbach* pour une machine à 7 pôles 167
IV.35 Gains $(\widehat{G_r^c})_h$ et $(\widehat{G_t^c})_h$ pour la machine *M5-POD* avec le bobinage fractionnaire 169
IV.36 Couche d'aimants à magnétisation parallèle solution 171
IV.37 Fonctions d'aimantation fictive avec la couche d'aimants à magnétisation parallèle optimale 171
IV.38 Machine *M5-POD* : comparaison des forces électromotrices élémentaires fictives obtenues avec le rotor initial et le rotor optimisé (calcul analytique *ANA-N*) . 172
IV.39 Comparaison des fem élémentaires et des couples électromagnétiques des machines *M5-POD-ref* et *M5-POD* 173
IV.40 Qualité du couple fournie par la machine *M5-POD-MM* et allure de son courant de phase en alimentation par onduleur MLI 174
IV.41 Machine *M5-POD-MM* ($60\,Nm@500\,tr/min$) : courants de *Concordia* pour les machines fictives diphasées 174

C.1 Principe d'intégration de la pression magnétique au sein de l'encoche numéro q pour une position $\theta_{R/S}$ du rotor 190
C.2 Machine M1 (5 encoches et 4 pôles) : ligne de champ selon *Difimedi* avec $\mu_{poudre} = 200$ 192
C.3 Machine M1 (5 encoches et 4 pôles) : couple de détente expérimental, analytique et numérique 193
C.4 Machines à tôles laminées : ligne de champ selon *Difimedi* avec $\mu_{fer} = 4000$. 194
C.5 Machine M2 (20 encoches et 4 pôles) : couple de détente expérimental, analytique et numérique 195
C.6 Machine M3 (3 encoches et 2 pôles) : couple de détente expérimental, analytique et numérique 196
C.7 Machines calculées numériquement et analytiquement 196
C.8 Test de la sensibilité au rapport entre largeur d'aimant et pas polaire. Importance de l'hypothèse de ligne de champ circulaire dans les encoches. 197
C.9 Test de la sensibilité aux valeurs d'entrefer mécanique et d'ouverture d'encoche. 198

Liste des tableaux

I.1 Exemples de passage de phases internes à phases externes 12

I.2 Famille d'harmoniques associées aux 2 machines fictives ($N_f = 2$) composant une machine triphasée ($N = 3$) 28

I.3 Famille d'harmoniques associées aux 3 machines fictives ($N_f = 3$) composant une machine pentaphasée ($N = 5$) 28

I.4 Famille d'harmoniques associées aux 4 machines fictives ($N_f = 4$) composant une machine hexaphasée ($N = 6$) 28

I.5 Famille d'harmoniques associées aux 4 machines fictives ($N_f = 4$) composant une machine 7-phases ($N = 7$) 29

I.6 Famille d'harmoniques associées aux 4 machines fictives ($N_f = 5$) composant une machine 9-phases ($N = 9$) 29

II.1 Notations adoptées pour les paramètres topologiques et géométriques de la machine 47

II.2 Quelques exemples de valeurs d'indice de circularité 54

II.3 Caractéristiques de la machine *M5-L2EP* : 5 phases, rotor interne à aimantation radiale et bobinage entier diamétral 78

II.4 Caractéristiques de la machine *M5-IRENAV* : 5 phases, rotor externe à aimantation radiale et bobinage fractionnaire 79

II.5 Comparaison des valeurs d'inductances obtenues pour la machine *M5-L2EP* . 85

II.6 Comparaison des valeurs d'inductances obtenues pour la machine *M5-IRENAV* 85

IV.1 Caractéristiques de la machine *M7-HYB* : 7 phases, rotor externe à aimantation radiale et bobinage fractionnaire à caractériser 146

IV.2 Calcul des inductances cycliques pour la machine *M7-HYB* selon les méthodes numérique et analytiques 148

IV.3 Caractéristiques de la machine *M5-POD* : 5 phases, rotor interne à aimantation radiale et bobinage fractionnaire à caractériser 150

IV.4 Estimation analytique de la résistance statorique et des inductances cycliques pour les machines *M5-POD-ref* et *M5-POD* (méthode *ANA-D*) 155

IV.5 Choix de la fréquence de MLI en fonction des caractéristiques électriques de la machine et de le fréquence de fonctionnement maximale 156

C.1 Caractéristiques influençant le couple de détente pour les machines à courant continu testées expérimentalement 192
C.2 Paramètres des machines simulées 195

Glossaire

Abrévations

fem	Force électromotrice
DSF	Décomposition en Série de *Fourier*
TFD	Transformée de *Fourier* discrète
TFDr	Transformée de *Fourier* discrète réelle
MLI	Modulation de Largeur d'Impulsion
ANA-D	Méthode de calcul analytique du flux basée sur l'intégration de la fonction de distribution
ANA-N	Méthode de calcul analytique du flux basé sur l'intégration de la fonction de bobinage

Notations liées à la topologie de la machine

N	Nombre de phases internes
N_{ext}	Nombre de phases externes
N_s	Nombre d'encoches
N_p	Nombre de pôles
p	Nombre de paires de pôles
N'_s	Nombre d'encoches réduit
p'	Nombre de paires de pôles réduit
i_c	Indice de circularité
d	Indice de circularité réduit

Notations liées à la géométrie de la machine

L_m	Longueur effective de la machine.
r_{st}	Rayon statorique.
e_{cs}	Epaisseur de culasse statorique.
r_{rt}	Rayon rotorique.
e_{cr}	Epaisseur de culasse rotorique.
g_m	Entrefer mécanique.
g_a	Epaisseur de couche d'aimants.

τ_s	Pas d'encoche (angle).
ω_s	Ouverture d'encoche (angle).
b_s	Epaisseur du bec d'encoche.
p_s	Profondeur d'encoche.

Notations liées aux repères de calcul

$\mathcal{R}_s(O_s, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_t})$	Repère fixe lié au stator dont l'origine est positionné sur un axe de phase de la phase 0
$\mathcal{R}_r(O_r, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_t})$	Repère tournant lié au rotor dont l'origine est positionné au centre d'un pôle
θ	Décalage instantané du repère rotorique par rapport au repère statorique
θ_s	Position angulaire d'un point P du stator dans le repère statorique
θ_r	Position angulaire d'un point P du rotor dans le repère rotorique
Ω	Vitesse de rotation instantanée
ω	Pulsation électrique
θ_0	Décalage initial du rotor par rapport au stator

Notations des grandeurs électromagnétiques

v_n	Tension de phase n
i_n	Courant dans la phase n
$\phi_{ss,n}$	Flux statorique du au stator capté par la phase n
$\phi_{sr,n}$	Flux statorique du au rotor capté par la phase n
m_n	Inductance mutuelle entre deux phases décalées de $n2\pi_{elec}/N$
m_n^e	Inductance mutuelle d'entrefer entre deux phases décalées de $n2\pi_{elec}/N$
m_n^{fer}	Inductance mutuelle de fuite entre deux phases décalées de $n2\pi_{elec}/N$
M_k	Inductance cyclique ou fictive de rang k
M_k^e	Inductance cyclique ou fictive d'entrefer de rang k
$\mathcal{R}_c$	Réluctance de correction d'entrefer
g_μ	Entrefer magnétique
g_e	Entrefer effectif
M_k^{fer}	Inductance cyclique ou fictive de fuite de rang k
$(\widehat{A_{1/R,r_{st}}})_h$	Coefficient de *Fourier* de rang h du potentiel vecteur dans la zone de l'entrefer mécanique indicée 1, en présence des termes sources aimants du rotor "R", calculé en $r = r_{st}$
$P(t)$	Puissance instantanée de la machine polyphasée
$T(t)$	Couple instantané de la machine polyphasée
$P_k(t)$	Puissance instantanée de la machine fictive d'inductance M_k
$T_k(t)$	Couple instantané de la machine machine fictive d'inductance M_k
$F^N(M_k)$	Famille d'harmoniques associés à la machine fictive d'inductance M_k
$f_{ar,n}(\theta_r)$, $f_{at,n}(\theta_r)$	Fonctions d'aimantation radiale et tangentielle de la phase n ($f_{ar,0} = f_{ar}$, $f_{at,0} = f_{at}$)
$F_{ar,k}(\theta_r)$, $F_{at,k}(\theta_r)$	Fonctions d'aimantation radiale et tangentielle de la machine fictive d'inductane M_k

h_k	Harmonique impair de rang minimal pour la famille d'harmoniques associés à la machine fictive d'inductance M_k
$F^{N,d}(M_k)$	Famille d'harmoniques de force magnétomotrice associés à la machine fictive d'inductance M_k
ξ_k	Angle de rotation de la machine fictive d'inductance M_k pour la commande dans le repère de *Park*

Notations liées à la modélisation vectorielle de la machine

E^N	Espace vectoriel hermitien de dimension N
$\mathcal{N}^N = \left\{\overrightarrow{n_0^N}, ..., \overrightarrow{n_{N-1}^N}\right\}$	Base naturelle de l'espace vectorielle hermitien de dimension N
$\mathcal{F}^N = \left\{\overrightarrow{f_0^N}, ..., \overrightarrow{f_{N-1}^N}\right\}$	Base orthonormale de *Fortescue* de dimension N
$\mathcal{C}^N = \left\{\overrightarrow{c_0^N}, ..., \overrightarrow{c_{N-1}^N}\right\}$	Base orthonormale de *Concordia* de dimension N
I_N	Matrice identité de dimension N
F_N	Matrice de transformée de *Fortescue*
C_N	Matrice de transformée de *Concordia*
$\overrightarrow{v^N}$	Vecteur tension de phase
$\overrightarrow{i^N}$	Vecteur courant de phase
$\overrightarrow{e^N}$	Vecteur force électromotrice
$\overrightarrow{\epsilon^N}$	Vecteur force électromotrice élémentaire (fem à 1 rad/s)
$\overrightarrow{\phi_{ss}^N}$	Vecteur flux statorique dû au stator
$\overrightarrow{\phi_{sr}^N}$	Vecteur flux statorique dû au rotor
M_{ss}	Matrice d'inductance statorique
Δ_{ss}	Matrice d'inductance diagonalisée
$x_{k,f}$, $x_{N-k,f}$	Composantes de *Fortescue* de la machine fictive diphasée d'inductance M_k
$x_{k,\alpha}$, $x_{k,\beta}$	Composantes de *Concordia* de la machine fictive diphasée d'inductance M_k

Notations liées à la modélisation vectorielle du bobinage

$D_n(\theta_s)$	Fonction densité de conducteurs pour la phase n
$N_n(\theta_s)$	Fonction de bobinage pour la phase n
D	Matrice de distribution de bobinage de dimension $N_s \times N$
B	Matrice de fonction de bobinage de dimension $N_s \times N$
$\overrightarrow{d_n^{N_s}}$, $\overrightarrow{d_n^{N'_s}}$	Vecteurs de distribution de bobinage de dimension N_s et N'_s de la phase n
$d_{g,n}$	Composantes numéro g du vecteur de distribution de la phase n
$\overrightarrow{b_n^{N_s}}$, $\overrightarrow{b_n^{N'_s}}$	Vecteurs de fonction de bobinage de dimension N_s et N'_s de la phase n
$b_{g,n}$	Composantes numéro g du vecteur de fonction de bobinage de la phase n
D_f	Matrice de distribution de bobinage de phases fictives de dimension $N_s \times N$
B_f	Matrice de fonction de bobinage de phases fictives de dimension $N_s \times N$
$\overrightarrow{d_k^{N'_s,f}}$	Vecteur de distribution de bobinage de dimension N'_s de la phase fictive k

$d_{g,k}^{f}$	Composantes numéro g du vecteur de distribution de la phase fictive k
$\overrightarrow{b_k^{N'_s,f}}$	Vecteur de fonction de bobinage de dimension N'_s de la phase fictive k
$b_{g,k}^{f}$	Composantes numéro g du vecteur de fonction de bobinage de la phase fictive k

Notations liées à la modélisation par suites périodiques

$\mathbb{S}^N(\mathbb{C})$	Ensemble de suites N-périodiques à valeurs complexes
$\mathbb{S}^N(\mathbb{R})$	Ensemble de suites N-périodiques à valeurs réelles
$\mathcal{F}_N$	Transformée de *Fourier* discrète d'ordre N
$\mathcal{C}_N$	Transformée de *Fourier* discrète réelle d'ordre N
$\overrightarrow{m^N}$	Vecteur des inductances mutuelles
$\overrightarrow{M^N}$	Vecteur TFD des inductances mutuelles (composé des inductances fictives)
$\overrightarrow{V^N}$	Vecteur TFD des courants de phase (composé des tensions fictives)
$\overrightarrow{I^N}$	Vecteur TFD des courants de phase (composé des courants fictifs)
$\overrightarrow{E^N}$	Vecteur TFD des fem (composé des fem fictives)
$\overrightarrow{\Phi_{ss}^N}$	Vecteur TFD des flux statoriques dûs au stator (composé des flux fictifs)
$\overrightarrow{D_n^{N'_s}} = \mathcal{C}_{N'_s}\left(\overrightarrow{d_n^{N'_s}}\right)$	Vecteurs TFDr de la distribution de bobinage de la phase n
$D_{h,n}$	Composante numéro h du vecteur TFDr de distribution de bobinage de la phase n, pondération fréquentielle sur harmonique discret de rang h
$\overrightarrow{B_n^{N'_s}} = \mathcal{C}_{N'_s}\left(\overrightarrow{b_n^{N'_s}}\right)$	Vecteurs TFDr de fonction de bobinage de la phase n
$B_{h,n}$	Composante numéro h du vecteur TFDr de fonction de bobinage de la phase n, pondération fréquentielle sur harmonique discret de rang h
$\overrightarrow{D_k^{N'_s,f}} = \mathcal{C}_{N'_s}\left(\overrightarrow{d_k^{N'_s,f}}\right)$	Vecteurs TFDr de la distribution de bobinage de la phase fictive k
$D_{h,k}^{f}$	Composante numéro h du vecteur TFDr de distribution de bobinage de la phase fictive k, pondération fréquentielle sur harmonique discret de rang h
$\overrightarrow{B_k^{N'_s,f}} = \mathcal{C}_{N'_s}\left(\overrightarrow{b_k^{N'_s,f}}\right)$	Vecteurs TFDr de fonction de bobinage de la phase fictive k
$B_{h,k}^{f}$	Composante numéro h du vecteur TFDr de fonction de bobinage de la phase fictive k, pondération fréquentielle sur harmonique discret de rang h

Introduction

Introduction

Pour des raisons historiques, les machines triphasées sont largement diffusées : leurs problématiques de conception et d'alimentation sont aujourd'hui bien maîtrisées. Néanmoins, les machines polyphasées (c'est-à-dire dont le nombre de phases est supérieur à trois) présentent en comparaison des caractéristiques particulièrement attractives. Tout d'abord, l'augmentation du nombre de phases implique une réduction des ondulations du couple électromagnétique (amplitude et période) [58, 39]. La machine polyphasée est donc une solution intéressante pour des applications exigeantes en terme de discrétion vibratoire ou accoustique. Ensuite, une structure à grand nombre de phases accroît les possibilités de fonctionnement en marche dégradée tout en préservant une qualité de couple acceptable (amplitude et ondulation). Cette problématique est fondamentale pour les applications devant garantir une excellente continuité de service. Enfin, la multiplication du nombre de phases implique un fractionnement de la puissance, ce qui diminue les contraintes de dimensionnement sur les composants d'électronique de puissance alimentant chaque phase. C'est pourquoi le choix de la structure polyphasée relève parfois de la nécessité pour les applications de très forte puissance. Pratiquement, les moteurs polyphasés sont utilisés dans les domaines de la traction ferroviaire, de la propulsion navale, de l'automobile et de l'aérospatiale.

Historiquement, c'est probablement la très bonne connaissance des moteurs triphasés et de leurs alimentations qui a conduit à mettre au point des machines polyphasées particulières. Dénommées "machines multi-étoiles", ces structures sont constituées d'un stator supportant plusieurs bobinages triphasées isolés et couplés en étoile. L'intérêt est de pouvoir alimenter chaque étoile par un convertisseur triphasé éprouvé. Destinés à la traction ferroviaire ou à la propulsion navale, les premiers ensembles utilisent des commutateurs de courant. Ces structures sont fiables mais présentent deux limitations principales. D'une part, le commutateur de courant génère des ondulations de couple, particulièrement fortes à basse vitesse. D'autre part, la redondance naturelle offerte par l'architecture polyphasée n'est pas idéalement exploitée : lors d'un défaut sur une phase, c'est l'ensemble de l'étoile concernée par le défaut qui est déconnecté, ce qui n'est pas optimal.

La première limitation est donc d'ordre technologique. Pour y remédier, il faut alimenter la machine par un onduleur de tension. L'apparition de nouveaux composants (comme les thyristors blocables type GTO [6]) a rendu possible la mise au point d'onduleurs de tension de forte puissance. Malheureusement, les fréquences de commutation de ces composants sont trop faibles pour obtenir une amélioration systématique [31]. Il faut donc choisir des composants plus rapides comme le transistor IGBT. La puissance transmise par un tel onduleur est alors réduite mais les formes des courants sont plus facilement imposées du fait d'une fréquence de commutation plus élevée. Les premiers essais de systèmes multi-étoiles alimentés par onduleur de tension ont mis en évidence des courants parasites inattendus [35, 36, 34]. Générateurs

d'échauffements et de pertes supplémentaires, ces courants parasites peuvent conduire à la destruction des interrupteurs [19].

Ces phénomènes nuisibles sont liés à la deuxième limitation qui est d'ordre conceptuelle. En effet, l'alimentation d'une machine multi-étoile par commutateur de courants masque le couplage magnétique existant entre les phases des différentes étoiles [39]. En effet, avec ce type d'alimentation, chaque commutateur peut être commandé comme si il alimentait une seule machine triphasée couplée en étoile. Par contre, dans le cadre de l'alimentation par onduleur de tension, cette approche découplée n'est plus possible : les couplages non pris en compte sont à l'origine des courants parasites. Dans une certaine mesure, la simplicité de contrôle qui a justifié le choix de la structure multi-étoile est perdue. Et le concepteur se doit donc d'aborder la machine non pas comme une superposition de stuctures triphasées mais bien comme une véritable structure polyphasée. De ce point de vue, plus rien n'impose de conserver des structures triphasées.

Pour la conception d'un ensemble convertisseur-machine, le nombre de phases apparaît donc comme un degré de liberté. D'ailleurs certains industriels commercialisent aujourd'hui des ensembles convertisseur-machine intégrés, ce qui facilite le choix d'une topologie polyphasée plus performante [60]. Mais le problème réside dans le fait que les machines polyphasés sont plus difficiles à appréhender : l'augmentation du nombre de couplages électromagnétiques entre les phases en complexifie la conception et la commande. Des outils d'étude générale performants et communicants sont donc nécessaires. A partir des travaux de *D.C. White et al.* [59], de *J. Lesenne et al.* [25], d'*E.A. Klingshirn* [20] et de *H.A. Toliyat et al.* [58], *Eric Semail* et *Xavier Kestelyn* introduisent le concept de machines fictives[51]. Basée sur une décomposition de la machine polyphasée en une somme de machines virtuelles monophasées et diphasées magnétiquement découplées, cette approche permet une déduction systématique de structures de commande pour systèmes polyphasés [5]. Elle permet aussi de déduire des règles de conception pour adapter la machine à l'onduleur [52].

Il existe donc un grand intérêt à mettre en oeuvre cette nouvelle approche de commande et de conception adaptée pour les applications de forte puissance pré-citées (propulsion navale notamment [55, 54]). Généralement embarquées, ces applications exigent une excellente densité de couple, un faible niveau vibratoire et une grande sureté de fonctionnement. Il est donc naturelle de s'orienter vers des moteurs polyphasés à aimants déposés : les aimants assurent de faibles pertes rotoriques et le caractère non saillant des pôles diminue les couples réluctants[26]. De plus, les progrès accomplis dans la technologie des aimants permanents rendent cette solution encore plus attractive. Par exemple, certains plasto-aimants isotropes associent une valeur d'aimantation rémanente élevée (plus de 0.9 *Tesla*) et une bonne rigidité. Leur caractère isotrope permet de les aimanter progressivement au sein d'une couche d'aimants. Ainsi sont réalisée les anneaux de *Halbach* [16] qui assurent une force électromotrice sinusoïdale et atténuent le couple de détente[30]. La magnétisation de la couche d'aimants apparaît donc comme un paramètre de conception qui doit permettre d'améliorer l'adaptation machine-onduleur au bénéfice de la densité de couple.

Cette thèse a pour but d'établir des règles de conception dédiées aux machines polyphasées à pôles lisses alimentées par onduleur de tension à modulation de largeurs d'impulsions (MLI). Les objectifs sont donc très classiques : il s'agit d'adapter au mieux la machine polyphasée à son onduleur afin de faciliter son alimentation et d'optimiser la qualité du couple (densité et ondulations). L'ambition est de contribuer à la résolution de ce problème complexe par une approche originale basée sur la décomposition multimachine et le concept de machines

fictives. Il s'agit de reporter les objectifs attribués au système polyphasé sur les machines fictives le composant afin de faciliter la résolution du problème considéré.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres.

Le chapitre I décrit la décomposition multimachine basée sur une représentation vetorielle de la machine polyphasée. L'introduction des machines fictives permet d'expliquer l'origine des courants parasites apparaissant lors de l'alimentation d'une machine polyphasée par onduleur de tensions MLI. Cette analyse permet, d'une part, de déduire une architecture de contrôle capable d'atténuer ces courants parasites et, d'autre part, de définir une stratégie d'alimentation plus performante que la classique alimentation sinusoïdale. Pour que cette stratégie soit efficace, le dimensionnement de la machine polyphasée doit être spécifiquement adaptée ; les objectifs concernant la série d'inductances mutuelles et la répartition harmonique de la force électromotrice sont explicités à la fin du chapitre.

Le chapitre II est consacré à la modélisation de la machine polyphasée à pôles lisses pour le calcul de ces deux grandeurs critiques : la série d'inductances mutuelles et la force électromotrice. Les spécificités géométriques de cette machine (entrefer régulier) et quelques hypothèses simplificatrices permettent de mettre en oeuvre une méthode de calul analytique du champ relativement précise. Afin de prendre en compte une large gamme de bobinages, un espace vectoriel de dimension égale au nombre d'encoches est associé à la machine : il permet de modéliser différents types de bobinages (notamment les configurations fractionnaires). La dernière partie de ce chapitre présente les éléments de calcul de flux et de validation.

Le chapitre III est dédié à la modélisation des machines fictives. Il vise à associer aux machines fictives un rotor et un bobinage fictifs qui sont des grandeurs signifiantes pour le concepteur. Pour ce faire, un nouvel outil de caractérisation des machines fictives est introduit : il s'agit de la Transformée de *Fourier* discrète. Son utilisation autorise une nouvelle lecture des tranformations matricielles définissant les machines fictives. Les aimantations et les bobinages fictifs peuvent être définis et leurs caractéristiques analysées à l'aide de la Transformée de *Fourier* discrète.

Le chapitre IV rassemble l'ensemble des travaux des chapitre précédents pour proposer une démarche de conception basée sur les machines fictives. Deux grandes procédures complémentaires sont détaillées et testées : l'une visant à optimiser le bobinage, l'autre visant à optimiser la couche d'aimants.

Chapitre I

CHAPITRE I

Décomposition Multimachine d'une Machine polyphasée à Pôles lisses

Sommaire

I.1 Mise en équation de la Machine polyphasée 11
I.1.1 Hypothèses 11
I.1.2 Représentation vectorielle 14
I.1.3 Réduction de la matrice d'inductance statorique 16
I.2 Décomposition Multimachine de la Machine polyphasée 22
I.2.1 Machine fictive : représentation physique de l'espace propre 22
I.2.2 Familles d'harmoniques associées aux machines fictives 24
I.2.3 Puissance instantanée de machine fictive 29
I.3 Conception polyphasée intégrant la décomposition multimachine dans le cadre de l'alimentation par onduleur de tension MLI . . 31
I.3.1 Commande multimachine de la machine polyphasée alimentée par onduleur de tension MLI 31
I.3.2 Adaptation de la conception de la machine à la commande multimachine 36

Le comportement d'un système à plusieurs variables fortement couplées est difficile à appréhender. La machine polyphasée appartient à cette catégorie de problèmes. Par exemple, les courants de phases se perturbent les uns les autres en raison des effets de mutualisation. Pour faciliter l'étude et la compréhension du comportement de tels systèmes, des méthodes de découplage sont recherchées. Ainsi, la décomposition multimachine est un outil permettant une réprésentation découplée de la machine polyphasée. L'objectif de ce chapitre est de décrire cette méthode et de montrer son intérêt pour définir des objectifs généraux concernant :

- l'adaptation de la conception de la machine à son onduleur de tension,

- l'amélioration de la qualité du couple électromagnétique.

Ce premier chapitre est divisé en trois parties. La première partie décrit les hypothèses nécessaires à la décomposition multimachine puis présente la modélisation vectorielle de la machine polyphasée. En particulier, la matrice d'inductance statorique est introduite puis diagonalisée par l'intermédiaire des Transformées de *Fortescue* et de *Concordia* généralisées. La deuxième partie définit le concept de machines fictives basé sur la réduction de la matrice d'inductance précédemment décrite. Les propriétés de découplage inhérentes aux machines fictives sont explicitées : répartition de puissance et notion de familles d'harmoniques. Enfin, la troisième partie aborde le problème de l'adaptation de la conception de la machine polyphasée à son onduleur à la lumière de la décomposition multimachine.

I.1 Mise en équation de la Machine polyphasée

Cette partie décrit la mise en équation des machines polyphasées étudiées. Les hypothèses relatives aux machines étudiées et à leur modélisation sont explicitées. Ensuite, la classique représentation vectorielle des équations en flux et en tension est présentée. Elle permet d'introduire la matrice d'inductance statorique. La diagonalisation de cette matrice est étudiée dans la dernière section, ce qui permet de mettre en évidence des systèmes d'équations découplés.

I.1.1 Hypothèses

Cette sous-partie présente les hypothèses relatives aux machines polyphasées étudiées. Ces hypothèses classiques sont celles que nécessite la décomposition multimachine.

I.1.1.1 Types de machines considérées

Les machines considérées dans ce mémoires sont des machines radiales à pôles lisses. Le rotor ne présente donc aucun effet de saillance. Les N phases de la machines sont supposées identiques et régulièrement décalées. Cette notion de régularité signifie que le décalage entre deux phases consécutives est $2\pi_{elec}/N$ avec $2\pi_{elec} = 2\pi/p$ (p, nombre de paires de pôles).

Selon [19, 20], le nombre de phases internes d'une machine polyphasée correspond schématiquement au nombre de bobines de la machine. Par définition, ces bobines sont régulièrement espacées au-dessus d'une paire de pôles : elles définissent donc des axes de phase régulièrement décalées. Par conséquent, dans ce mémoire, N désigne le nombre de phases internes de la machine. Selon la valeur de N, il est possible de connecter les phases internes entre elles de telle sorte à réduire le nombre de phases accessibles pour alimenter la machine. Nécessairement plus petit que le nombre de phases internes, ce nombre de phases accessibles est appelé nombre de phases externes N_{ext}.

Par exemple, si le nombre de phases internes N est pair, alors chaque phase interne est en opposition diamétrale d'une autre. Si les phases internes en opposition diamétrale sont couplées en anti-série, alors le nombre de phases externes est égale à la moitié du nombre de phases internes. Mais il faut bien noter que l'ensemble des phases externes obtenues ne forment pas nécessairement un système polyphasé regulièrement décalé. Le tableau I.1 illustre ceci en schématisant quelques exemples de passage de nombre de phases internes N à nombre de phases externes N_{ext}. En particulier, il apparaît que le système double-triphasé (6 phases externes à alimenter) dérive en fait d'un système régulier à 12 phases internes ($N = 12$). La même analyse peut être faite concernant le système double-pentaphasé qui dérive d'un système à 20 phases internes ($N = 20$) [48]. Ce tableau montre la possibilité d'étudier un système multi-étoiles à partir d'un système à phases régulièrement décalées. Dans la suite, N désigne systématiquement le nombre de phases internes qui peut être considérée comme le nombre effectif de phases de la machine.

I.1.1.2 Linéarité

Pour la mise en équation de la machine, les relations entre les champs sont supposées linéaires. En d'autres termes, les effets de peau, de saturation et de variation de réluctance du circuit magnétique ne sont pas prises en compte. Concrètement, la force électromotrice à

N	6	6	10	10	12	12	20	20
Schéma interne								
N_{ext}	6	3	10	5	12	6	20	10
Schéma externe								
Régularité	oui	oui	oui	oui	oui	non	oui	non
Remarque						2 x 3Φ		2 x 5Φ

Tableau I.1 — Exemples de passage de phases internes à phases externes

vide et en charge sont identiques. Tout particulièrement, la répartition harmonique de la force électromotrice est invariante et est donc considérée comme une caractéristique intrinsèque de la machine.

I.1.1.3 Environnement mathématiques et notations

La modélisation vectorielle consiste à regrouper N grandeurs de phase de même nature (courant, tension, ...) en un seul vecteur de dimension N, ce qui rend la mise en équation plus concise. Pour permettre cette modélisation vectorielle, la machine est associée à un espace vectoriel hermitien[1] (c'est-à-dire construit sur le corps de complexes $\mathbb{C}$) de dimension N noté E^N. La base orthonormée $\mathcal{N}^N$ correspond à la base naturelle, c'est-à-dire la base telle que les composantes du vecteur correspondent aux grandeurs mesurables des phases statoriques (courant, tension, flux) [50, 19]. Les vecteurs constituant cette base sont notés comme suit :

$$\mathcal{N}^N = \left\{ \overrightarrow{n_0^N}, \overrightarrow{n_1^N}, ..., \overrightarrow{n_{N-1}^N} \right\}$$

Afin de faciliter la lecture des calculs matriciels, il convient de définir une notation matricielle pour les vecteurs. Un même vecteur disposant d'autant de notation matricielle que de bases d'écriture, la convention suivante est adoptée :

- si le vecteur est écrit seul, il s'agit de la notation vectorielle ; par exemple, la notation vectorielle de la décomposition d'un vecteur $\overrightarrow{x^N}$ dans la base naturelle est

$$\overrightarrow{x^N} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overrightarrow{n_n^N}$$

- si le vecteur est écrit entre parenthèses avec en indice une base, il s'agit de la notation matricielle ; par exemple, la notation matricielle du vecteur $\overrightarrow{x^N}$ dans la base naturelle

[1] Un espace vectoriel euclidien (c'est-à-dire construit sur le corps des réels $\mathbb{R}$) serait suffisant puisque les grandeurs de phase sont réelles mais, pour des raisons pratiques, l'espace hermitien est choisi.

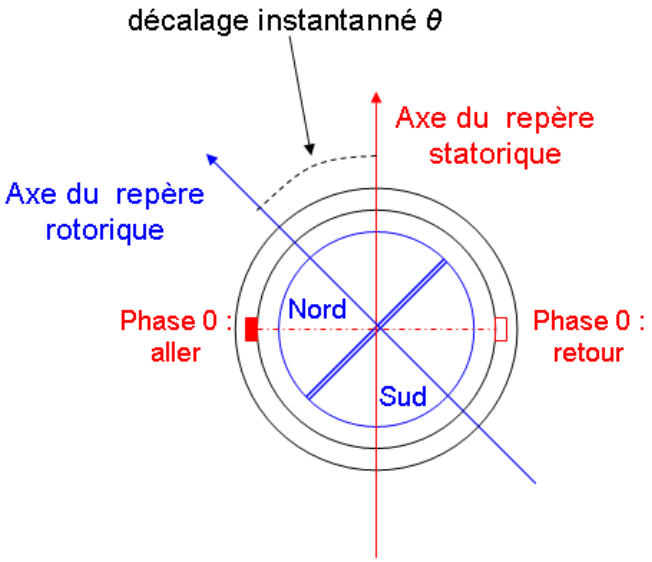


Figure I.1 — Représentation des deux repères de calcul et de leur décalage instantanné

est

$$(\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{N}^N} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}_{\mathcal{N}^N}$$

L'espace hermitien E^N est doté du produit scalaire canonique, noté ".". Le produit scalaire dépendant de la base d'expression des vecteurs, il faut préciser la base lorsqu'il est utilisé :

$$(\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{N}^N}.(\overrightarrow{y^N})_{\mathcal{N}^N} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n (y_n)^*$$

Par ailleurs, la machine est munie de deux repères de calcul, représentées sur la figure I.1 :

- un repère fixe lié au stator dont l'origine est positionné sur un axe de phase de la phase 0 ; ce repère est noté $\mathcal{R}_s(O_s, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_t})$,
- un repère tournant lié au rotor dont l'origine est positionné au centre d'un pôle ; ce repère est noté $\mathcal{R}_r(O_r, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_t})$.

Le décalage instantanné entre les deux repères correspond à la position instantannée du rotor. Cette position est notée :

$$\theta_{\mathcal{R}_r/\mathcal{R}_s} = \Omega t + \theta_0 = \theta \tag{I.1}$$

Dans cette relation (I.1), Ω est la vitesse instantannée de la machine et θ_0 est le décalage initial entre le rotor et le stator. Au synchronisme, la pulsation électrique est reliée à la vitesse par la relation $\omega = p\Omega$.

I.1.2 Représentation vectorielle

Cette sous-partie introduit la modélisation vectorielle de la machine polyphasée et définit la matrice d'inductance statorique représentant les couplages magnétiques entre les phases.

I.1.2.1 Equations en flux et en tension

Dans ce contexte, le flux $\varphi_{n,s}$ capté par la phase n de la machine s'exprime :

$$\varphi_{n,s} = \varphi_{n,ss} + \varphi_{n,sr}$$

où

- $\varphi_{n,ss}$ désigne la part de flux exclusivement dû aux courants statoriques,
- $\varphi_{n,sr}$ désigne la part de flux statorique dû au rotor.

L'ensemble des équations de flux de phase est regroupé dans l'expression vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{\varphi_s^N} = \overrightarrow{\varphi_{ss}^N} + \overrightarrow{\varphi_{sr}^N} \tag{I.2}$$

Dans la base naturelle, cette expression prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varphi_{0,s} \\ \dots \\ \varphi_{n,s} \\ \dots \\ \varphi_{N-1,s} \end{pmatrix}_{\mathcal{N}^N} = \begin{pmatrix} \varphi_{0,ss} \\ \dots \\ \varphi_{n,ss} \\ \dots \\ \varphi_{N-1,ss} \end{pmatrix}_{\mathcal{N}^N} + \begin{pmatrix} \varphi_{0,sr} \\ \dots \\ \varphi_{n,sr} \\ \dots \\ \varphi_{N-1,sr} \end{pmatrix}_{\mathcal{N}^N}$$

L'équation vectorielle en tension de la machine est déduite de l'équation régissant le flux statorique. En notant R_s la résistance d'une phase statorique, il vient :

$$\overrightarrow{v^N} = R_s \overrightarrow{i^N} + \left[\frac{\overrightarrow{d\varphi_s^N}}{dt}\right]_{/\mathcal{R}_s} = R_s \overrightarrow{i^N} + \left[\frac{\overrightarrow{d\varphi_{ss}^N}}{dt}\right]_{/\mathcal{R}_s} + \left[\frac{\overrightarrow{d\varphi_{sr}^N}}{dt}\right]_{/\mathcal{R}_s}$$

Cette relation précise le repère dans lequel s'effectuent les dérivées : il s'agit ici du repère statorique. Le flux statorique dû au rotor dépend de la postion instantannée du rotor par rapport au stator, représentée par θ (cf. relation (I.1)). La dérivée de θ par rapport au temps correspond à la vitesse Ω de la machine. L'équation vectorielle en tension est ainsi modifiée :

$$\overrightarrow{v^N} = R_s \overrightarrow{i^N} + \left[\frac{\overrightarrow{d\varphi_{ss}^N}}{dt}\right]_{/\mathcal{R}_s} + \Omega \left[\frac{\overrightarrow{d\varphi_{sr}^N}}{d\theta}\right]_{/\mathcal{R}_s} \tag{I.3}$$

La grandeur $\Omega\frac{\overrightarrow{d\varphi_{sr}^N}}{d\theta}$ correspond au vecteur force électromotrice $\overrightarrow{e^N}$. Par conséquent, le vecteur $\frac{\overrightarrow{d\varphi_{sr}^N}}{d\theta}$ représente la force électromotrice (fem) à la vitesse de 1 rad/s. Dans la suite, ce vecteur

est appelé force électromotrice élémentaire et est noté $\overrightarrow{\epsilon^N}$:

$$\overrightarrow{\epsilon^N} = \frac{\overrightarrow{d\varphi_{sr}^N}}{d\theta} = \frac{1}{\Omega}\overrightarrow{e^N} \tag{I.4}$$

I.1.2.2 Matrice d'inductance statorique

Le vecteur flux statorique dû au stator $\overrightarrow{\varphi_{ss}^N}$ traduit le couplage électromagnétique entre les phases : il est possible de définir une relation linéaire entre le vecteur $\overrightarrow{\varphi_{ss}^N}$ et le vecteur courant $\overrightarrow{i^N}$. L'application linéaire de E^N ainsi définie est notée Φ. Elle est décrite par l'intermédiaire de la matrice d'inductance statorique M_{ss}. Il faut noter que le caractère non saillant de la machine rend les coefficients de cette matrice indépendant de la position du rotor. Décomposés dans la base naturelle, les vecteurs $\overrightarrow{\varphi_{ss}^N}$ et courant $\overrightarrow{i^N}$ sont alors simplement liés par la relation :

$$(\overrightarrow{\varphi_{ss}^N})_{\mathcal{N}^N} = M_{ss}(\overrightarrow{i^N})_{\mathcal{N}^N} \quad avec \quad M_{ss} = mat(\Phi, \mathcal{N}^N, \mathcal{N}^N) \tag{I.5}$$

La matrice M_{ss} est précisée ci-dessous :

$$M_{ss} = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \cdots & m_{0,l} & \cdots & m_{0,N-1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \cdots & m_{1,l} & \cdots & m_{1,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{k,0} & m_{k,1} & \cdots & m_{k,l} & \cdots & m_{k,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{N-1,0} & m_{N-1,1} & \cdots & m_{N-1,l} & \cdots & m_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

Le coefficient $m_{g,h}$ de cette matrice désigne l'inductance mutuelle entre la phase numéro g et la phase numéro h. Si g est égal à h, il s'agit de l'inductance propre. La réciprocité du flux implique la symétrie de la matrice :

$$\forall (g,h) \in [0..N-1]^2 \quad m_{g,h} = m_{h,g}$$

D'après les hypothèses d'équivalence des phases et de régularité de construction, la connaissance de l'inductance propre d'une phase et de l'ensemble des inductances mutuelles induites suffit à caractériser totalement la matrice d'inductance. Autrement dit, la connaissance d'une seule colonne (ou d'une seule ligne) de la matrice d'inductance permet sa détermination complète. La matrice d'inductance est donc circulante :

$$\forall (g,h) \in [0..N-1]^2 \quad m_{g,h} = m_{mod(g-h,N),mod(h-g,N)}$$

Afin de mieux rendre compte de ces deux propriétés, les coefficients de la matrice d'inductance sont renotés comme suit :

$$M_{ss} = mat(\Phi, \mathcal{N}^N, \mathcal{N}^N) = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{N-1} \\ m_{N-1} & m_0 & \cdots & m_{N-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_0 \end{pmatrix} \tag{I.6}$$

Avec ces nouvelles notations, m_0 désigne l'inductance propre d'une phase. m_k (pour k compris entre 0 et $N-1$) désigne l'inductance mutuelle entre deux phases décalées d'un angle $k\frac{2\pi_{elec}}{N}$. Par ailleurs, la propriété de symétrie de la matrice s'écrit :

$$\forall n \in [0..N-1] \quad m_n = m_{N-n} \tag{I.7}$$

La prochaine sous-partie étudie la diagonalisation de la matrice d'inductance dont la faisabilité est assurée par les propriétés de circularité et de symétrie. L'objectif est d'obtenir des systèmes d'équation découplés, donc plus faciles à analyser.

I.1.3 Réduction de la matrice d'inductance statorique

Cette sous-partie exploite tout d'abord la propriété de circularité de la matrice d'inductance statorique. Une transformation diagonalisante à coefficients complexes est ainsi déterminée : la Transformée de *Fortescue*. Cette transformation décrit une nouvelle base orthonormée dans laquelle les composantes d'un vecteur quelconque sont calculées. Ensuite, l'hypothèse de symétrie de la matrice d'inductance est mise en avant pour présenter une transformation diagonalisante à coefficients réels : la Transformée de *Concordia*. Enfin, les équations en flux et en tension sont écrites dans ces bases propres, ce qui fait apparaître des systèmes d'équation en flux et en tension découplés.

I.1.3.1 Circularité et Transformée de *Fortescue*

Comme soulignée précédemment, la matrice d'inductance est circulante. Cet argument permet de prouver qu'elle est diagonalisable dans E^N et que l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre complexe est 1 (cf. [25]). La matrice de passage F_N de la base naturelle vers la base propre est connue sous le nom de Transformée de *Fortescue*[2] :

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}n} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}m} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}mn} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}m(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

La base propre d'arrivée est une base orthonormale appelée par la suite base de *Fortescue*. Elle est notée comme suit :

$$\mathcal{F}^N = \left\{ \overrightarrow{f_0^N}, \overrightarrow{f_1^N}, ..., \overrightarrow{f_{N-1}^N} \right\}$$

[2] Dans certains ouvrages, c'est la transposée de F_N qui est appelée Tranformée de *Fortescue*.

D'après la définition de $F_N = mat(id, \mathcal{F}^N, \mathcal{N}^N) = P_{\mathcal{N}^N \to \mathcal{F}^N}$, le vecteur de *Fortescue* $\overrightarrow{f_n^N}$ se projette de la façon suivante dans la base naturelle :

$$(\overrightarrow{f_n^N})_{\mathcal{N}^N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ e^{j\frac{2\pi}{N}mn} \\ \dots \\ e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n} \end{pmatrix}_{\mathcal{N}^N} \tag{I.8}$$

Le caractère orthonormale de F_N permet d'affirmer que sa transposée est égale à son inverse. La matrice d'inductance diagonalisée Δ_{ss} est appelée matrice d'inductance cyclique. Les termes constituant la diagonale de Δ_{ss} sont les inductances cycliques :

$$\begin{aligned} \Delta_{ss} &= mat(id, \mathcal{F}^N, \mathcal{F}^N) = F_N^T M_{ss} F_N \\ \Delta_{ss} &= \begin{pmatrix} M_0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & M_n & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & M_{N-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{I.9}$$

Les inductances cycliques sont les valeurs propres complexes de l'endomorphisme Φ. Elles s'expriment comme combinaison linéaire des inductances de phases définies dans (I.6).

$$\forall n \in [0..N-1] \quad M_n = \sum_{k=0}^{N-1} m_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \tag{I.10}$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre M_n est le vecteur $\overrightarrow{f_n^N}$. En raison du caractère réel des inductances, la relation de conjugaison suivante apparaît :

$$\forall n \in [0..N-1] \quad M_n = (M_{N-n})^*$$

Les composantes d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{x^N}$ dans la base de *Fortescue* sont notées comme suit :

$$(\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{F}^N} = \begin{pmatrix} x_{0,f} \\ \dots \\ x_{k,f} \\ \dots \\ x_{N-1,f} \end{pmatrix}_{\mathcal{F}^N}$$

Il s'agit de calculer ses composantes $x_{k,f}$ dans la base de *Fortescue* en fonction de ses composantes x_n dans la base naturelle. Il suffit d'effectuer le calcul suivant :

$$(\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{F}^N} = F_N^T (\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{N}^N}$$

Il conduit au résultat suivant :

$$\forall k \in [0..N-1] \quad x_{k,f} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \tag{I.11}$$

A partir de cette relation , il est possible de montrer que la transformée de *Fortescue* conserve le produit scalaire (par rapport à la base naturelle) :

$$(\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{F}^N}.(\overrightarrow{y^N})_{\mathcal{F}^N} = \sum_{k=0}^{N-1} x_{k,f}(y_{k,f})^* = \sum_{k=0}^{N-1} x_n(y_n)^* = (\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{N}^N}.(\overrightarrow{y^N})_{\mathcal{N}^N} \tag{I.12}$$

Cette propriété doit être vue comme une relation de conservation de puissance [25].

Il faut aussi noter que les composantes de *Fortescue* d'un vecteur quelconque sont *a priori* complexes. Cependant, si les composantes du vecteur $\overrightarrow{x^N}$ dans la base naturelle sont réelles (ce qui est le cas si ce vecteur représente des grandeurs de phase), alors la propriété suivante est établie :

$$\forall k \in [0..N-1] \quad x_{k,f} = (x_{N-k,f})^*$$

Cette dernière relation signifie que le calcul de la moitié des composantes est suffisant pour totalement caractériser la projection.

I.1.3.2 Symétrie et Transformée de *Concordia*

Alors que le paragraphe précédent exploitait exclusivement la circularité de la matrice d'inductance, ce paragraphe utilise la symétrie de cette matrice pour déterminer une base de découplage à coefficients réels : la transformée de *Concordia*. Cette transformée est caractérisée à partir de la transformée de *Fortescue*

L'utilisation du caractère réel et de la symétrie des inductances de phase, signifiée par la relation (I.7), permet d'affirmer que :

- l'application linéaire Φ admet des valeurs propres réelles,
- l'application linéaire Φ admet une base propre à coefficients réels.

Les inductances cycliques définies dans la relation (I.10) sont donc réelles :

$$M_n = M_{N-n} = \sum_{k=0}^{N-1} m_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \tag{I.13}$$

Le nombre d'inductances cycliques distinctes est ainsi réduit à $N_f = \frac{N+2-mod(N,2)}{2}$. Les espaces propres associés ont pour dimension 1 ou 2 et se construisent à partir des vecteurs propres de *Fortescue* comme suit :

$$\begin{cases} E(M_0) = vect\left\langle \overrightarrow{f_0^N} \right\rangle \\ E(M_n) = vect\left\langle \overrightarrow{f_n^N}, \overrightarrow{f_{N-n}^N} \right\rangle & \text{pour} \quad n \in \left[1..\dfrac{N-2+mod(N,2)}{2}\right] \\ E(M_{N/2}) = vect\left\langle \overrightarrow{f_{N/2}^N} \right\rangle & \text{si} \quad mod(N,2) = 0 \end{cases}$$

Dans la suite, évoquer la valeur propre M_n pré-suppose $n \in \left[0..\frac{N-mod(N,2)}{2}\right]$.

Il s'agit désormais de contruire à partir de la base de *Fortescue* une base propre à coefficients réels et ainsi définir la base de*Concordia*. Il est clair que les vecteurs de *Fortescue* contenus dans les espaces propres de dimension 1 ($\overrightarrow{f_0^N}$ et éventuellement $\overrightarrow{f_{N/2}^N}$) sont à coefficients réels. Seuls les espaces propres de dimension 2 contiennent des vecteur propres à coefficient complexe. Dans ce cas, il faut remarquer que les vecteurs de *Fortescue* $\overrightarrow{f_n^N}$ et $\overrightarrow{f_n^{N-n}}$ sont conjuguées, ce qui permet de constuire aisément une nouvelle base propre orthonormée à coefficients réels :

$$E(M_n) = vect\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{f_n^N} + \overrightarrow{f_{N-n}^N}), -\frac{j}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{f_n^N} - \overrightarrow{f_{N-n}^N}) \right\rangle = vect\left\langle \overrightarrow{c_n^N}, \overrightarrow{c_{N-n}^N} \right\rangle \tag{I.14}$$

La nouvelle base orthonormée ainsi constituée correspond à la base de *Concordia*. Elle est notée $\mathcal{C}^N = \left\{\overrightarrow{c_0^N}, ..., \overrightarrow{c_n^N}, ..., \overrightarrow{c_{N-1}^N}\right\}$. La matrice $C_N = mat(id, \mathcal{C}^N, \mathcal{N}^N)$ qui décompose les vecteurs de Concordia $\overrightarrow{c_n^N}$ dans la base naturelle correspond à la transformée de *Concordia*. Ses coefficients sont déterminés à partir des relations (I.14) et (I.8) :

$$C_N = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \frac{1}{\sqrt{N}} & \vdots & \frac{1}{\sqrt{N}} & \vdots & \frac{1}{\sqrt{N}} & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \vdots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{2\pi}{N}mn) & \vdots & \frac{(-1)^m}{\sqrt{N}} & \vdots & \sqrt{\frac{2}{N}}\sin(\frac{2\pi}{N}mn) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \vdots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{2\pi}{N}(N-1)n) & \vdots & \frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{N}} & \vdots & \sqrt{\frac{2}{N}}\sin(\frac{2\pi}{N}(N-1)n) & \vdots \end{array}\right) \tag{I.15}$$

Le vecteur propre en position centrale (composé de $1/\sqrt{N}$ et de $-1/\sqrt{N}$) n'existe que si N est pair (puisqu'il correspond à la valeur propre $M_{N/2}$). Par ailleurs, en raison de l'ordre choisi pour construire la base orthonormée de Concordia[3], la diagonalisation de la matrice d'inductance dans cette base permet de retrouver la matrice d'inductance cyclique Δ_{ss} définie dans (I.9) :

$$\Delta_{ss} = mat(id, \mathcal{C}^N, \mathcal{C}^N) = C_N^T M_{ss} C_N$$

Comme la transformée de *Fortescue*, la transformée de *Concordia* conserve le produit scalaire (propriété de conservation de puissance, cf. relation (I.12)).

La notation des composantes d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{x^N}$ dans la base de *Concordia* rend compte de l'existence de valeurs propres simples et doubles. Ainsi les projections sur les espaces propres de dimension 1 sont indicées h et les projections sur les espaces propres de

[3]Il est notamment possible de classer consécutivement les vecteurs propres, ce qui aboutit à une matrice d'inductance cyclique de la forme $diag(M_0, M_1, M_1, M_2, ...)$,

dimension 2 sont indicées α et β.

$$(\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{C}^N} = \begin{pmatrix} x_{0,h} \\ \vdots \\ x_{n,\alpha} \\ \vdots \\ x_{n,\beta} \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathcal{C}^N}$$

Le calcul des composantes dans la base de *Fortescue* peut être réalisé en utilisant la matrice de passage que définit la relation (I.14) :

$$(\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{C}^N} = P_{\mathcal{C}^N \to \mathcal{F}^N} (\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{F}^N}$$

Le résultat général est établi :

$$k \in \left\{0, \tfrac{N}{2}\right\} \cap \mathbb{N} \qquad x_{k,h} = x_{k,f}$$

$$\forall k \in \left[1..\tfrac{N-2+mod(N,2)}{2}\right] \quad \begin{cases} x_{k,\alpha} = \sqrt{\dfrac{2}{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \underbrace{= \sqrt{2}\Re(x_{k,f})}_{\text{si } x_n \in \mathbb{R}} \\ x_{k,\beta} = \sqrt{\dfrac{2}{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \underbrace{= \sqrt{2}\Im(x_{k,f})}_{\text{si } x_n \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

Ainsi, dès que les composantes du vecteur considéré dans la base naturelle sont réelles, alors les composantes de *Concordia* correspondent simplement aux parties réelles et imaginaires des $N/2$ premières composantes de *Fortescue*, ce qui d'après les remarques émises à la fin du paragraphe I.1.3.1 est suffisant pour totalement caractériser la projection du vecteur.

I.1.3.3 Equations dans les bases de découplage

L'objectif de ce paragraphe est de donner les expressions des équations vectorielles en flux en en tension dans les bases propres orthonormées de *Fortescue* puis de *Concordia*.

La base de Fortescue est une base propre pour l'endomorphisme Φ. La projection de l'équation (I.2) dans cette base aboutit à un système de N équations scalaires en flux découplées :

$$\forall n \in [0..N-1] \quad \varphi_{s,n,f} = M_n i_{n,f} + \varphi_{sr,n,f}$$

Les vecteurs flux et courant sont à coefficients réels dans la base naturelle. Afin de rendre compte des relations de conjugaison existantes entre les composantes de Fortescue et les inductances propres, la base de Fortescue restreinte $\mathcal{F}_k^N = \left\{\overrightarrow{f_k^N}, \overrightarrow{f_{N-k}^N}\right\}$ est introduite. Pour les valeurs de k différentes de 0 ou $N/2$, les bases des Fortescue restreintes définissent des plans (sinon, elles définissent des droites vectorielles). Les équations de flux sont alors regroupées

deux à deux :

$$\begin{pmatrix} \varphi_{s,k,f} \\ (\varphi_{s,k,f})^* \end{pmatrix}_{\mathcal{F}_k^N} = \begin{pmatrix} M_k & 0 \\ 0 & (M_k)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{k,f} \\ (i_{k,f})^* \end{pmatrix}_{\mathcal{F}_k^N} + \begin{pmatrix} \varphi_{sr,k,f} \\ (\varphi_{sr,k,f})^* \end{pmatrix}_{\mathcal{F}_k^N}$$

L'équation en tension correspondante est :

$$\begin{pmatrix} v_{k,f} \\ (v_{k,f})^* \end{pmatrix}_{\mathcal{F}_k^N} = R_s \begin{pmatrix} i_{k,f} \\ (i_{k,f})^* \end{pmatrix}_{\mathcal{F}_k^N} + \begin{pmatrix} M_k & 0 \\ 0 & (M_k)^* \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{k,f} \\ (i_{k,f})^* \end{pmatrix}_{\mathcal{F}_k^N} + \begin{pmatrix} e_{k,f} \\ (e_{k,f})^* \end{pmatrix}_{\mathcal{F}_k^N}$$

Il existe $N_f = \frac{N+2-mod(N,2)}{2}$ bases de Fortescue restreintes :

- $2 - mod(N,2)$ bases de dimension 1,
- $\frac{N-2+mod(N,2)}{2}$ bases de dimension 2.

La projection dans la base de *Fortescue* fait intervenir des composantes complexes. A l'inverse, comme souligné dans le paragraphe précédent, la projection dans la base de *Concordia* garantit l'obtention de composantes réelles.

Projetée dans la base de *Concordia*, l'équation des flux fait apparaître un nombre fini d'équations vectorielles découplées de dimension un ou deux. L'équation du flux statorique dans la base de Concordia s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \varphi_{s,0,h} \\ \vdots \\ \varphi_{s,n,\alpha} \\ \vdots \\ \varphi_{s,n,\beta} \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathcal{C}^N} = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & M_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & M_n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{0,h} \\ \vdots \\ i_{n,\alpha} \\ \vdots \\ i_{n,\beta} \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathcal{C}^N} + \begin{pmatrix} \varphi_{sr,0,h} \\ \vdots \\ \varphi_{sr,n,\alpha} \\ \vdots \\ \varphi_{sr,n,\beta} \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathcal{C}^N}$$

Afin de mettre en évidence le découplage entre les espaces propres, les bases de Concordia restreintes sont introduites : la base restreinte $\mathcal{C}_k^N$ est composée des vecteurs propres de M_k. Par exemple, pour les valeurs propres d'ordre 2, $\mathcal{C}_k^N = \left\{\overrightarrow{c_k^N}, \overrightarrow{c_{N-k}^N}\right\}$ et l'équation en flux associée est :

$$\begin{pmatrix} \varphi_{s,k,\alpha} \\ \varphi_{s,k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} = M_k \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} + \begin{pmatrix} \varphi_{sr,k,\alpha} \\ \varphi_{sr,k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N}$$

L'équation vectorielle en tension associée est :

$$\begin{pmatrix} v_{k,\alpha} \\ v_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} = R_s \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} + M_k \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} + \begin{pmatrix} e_{k,\alpha} \\ e_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} \tag{I.16}$$

En résumé, cette première partie met en avant les deux propriétés de la matrice d'inductance statorique supposée invariante :

- la circularité qui résulte de la régularité de construction de la machines,
- la symétrie qui résulte de la propriété de réciprocité de flux.

La propriété de circularité est suffisante pour pouvoir diagonaliser la matrice d'inductance dans un espace vectoriel hermitien : dans ce cas, les espaces propres sont des droites vecto-

rielles complexes. La propriété de symétrie permet de passer de l'espace vectoriel hermitien à l'espace vectoriel euclidien. Les espaces propres sont alors des plans ou des droites. La transformée de *Concordia* définit une base orthonormale de découplage à coefficients réels. Les équations en flux et en tension projetées dans les plans ou les droites propres (bases de *Concordia* restreintes) sont totalement découplées les unes des autres. La construction des machines fictives va s'appuyer sur ces propriétés de découplage.

I.2 Décomposition Multimachine de la Machine polyphasée

Le concept de Machines fictives est énoncé pour la première fois dans [51]. Il consiste à assimiler l'objet mathématique espace propre à une machine électrique. La machine polyphasée est ainsi vue comme une association de machines fictives magnétiquement découplées et mécaniquement couplées.

I.2.1 Machine fictive : représentation physique de l'espace propre

Cette sous-partie établit le bilan de puissance de la machine polyphasée pour faire apparaître les machines fictives. Les caractéristiques électromécaniques des machines fictives sont obtenues en utilisant leurs équations en flux et en tension respectives dans une base propre othonormale. C'est la base de *Concordia* qui est choisie[4]. Un schéma électrique équivalent peut ensuite leur être attribuée.

I.2.1.1 Bilan de puissance

La puissance instantanée de la machine est égale au produit scalaire du vecteur tension statorique $\overrightarrow{v^N}$ par le vecteur courant statorique $\overrightarrow{i^N}$.

$$P = (\overrightarrow{v^N})_{\mathcal{N}^N}.(\overrightarrow{i^N})_{\mathcal{N}^N} = \sum_{n=0}^{N-1} v_n(i_n)^* \tag{I.17}$$

Toutes les bases propres du morphisme Φ sont orthogonales. Donc, si le produit scalaire définissant la puissance est effectué dans une base orthonormale, alors la puissance apparaît répartie sur les différents espaces propres (propriété d'orthogonalité de la base orthonormale) et la somme des puissances des espaces propres est égale à la puissance totale de la machine polyphasée (propriété de normalité de la base orthonormale). Dans la base de Concordia, la puissance est distribuée sur N_f systèmes magnétiquement découplés comme suit :

$$mod(N,2) = 0 \quad \Rightarrow \quad P = v_{0,h}i_{0,h} + \sum_{k=1}^{N_f-2} (v_{k,\alpha}i_{k,\alpha} + v_{k,\beta}i_{k,\beta}) + v_{N/2,h}i_{N/2,h}$$

$$mod(N,2) = 1 \quad \Rightarrow \quad P = v_{0,h}i_{0,h} + \sum_{k=1}^{N_f-1} (v_{k,\alpha}i_{k,\alpha} + v_{k,\beta}i_{k,\beta})$$

[4]Bien entendu, toute base propre orthonormale convient.

Chaque sous-sytème produit donc une puissance P_k. Pour les systèmes de dimension 1, cette puissance s'exprime :

$$P_k = v_{k,h} i_{k,h} \text{ pour } k \in \left\{0, \frac{N}{2}\right\} \tag{I.18}$$

Pour les systèmes de dimension 2, la puissance est :

$$P_k = \begin{pmatrix} v_{k,\alpha} \\ v_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} . \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} \tag{I.19}$$

Ces systèmes découplés pourront être assimilés à des machines si leurs comportements thermique, magnétique et mécanique sont semblables à ceux d'une machine réelle. C'est l'étude du bilan de puissance des systèmes découplés qui justifie le concept de machine fictive.

I.2.1.2 Répartition du couple électromagnétique

Ce bilan est établi à partir de l'équation vectorielle en tension (I.3) écrite dans la base de *Concordia*. Pour les systèmes de dimension 2, l'utilisation de l'équation en tension dans la base de Concordia restreinte $\mathcal{C}_k^N$ (relation (I.16)) donne le bilan de puissance correspondant :

$$\begin{aligned} P_k \;=\; & R_s \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} . \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} \Bigg\} && \rightarrow P_{J,k} \\ + \; & M_k \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} . \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} \Bigg\} && \rightarrow P_{mag,k} \\ + \; & \Omega \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \varphi_{sr,k,\alpha} \\ \varphi_{sr,k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} . \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} \Bigg\} && \rightarrow P_{meca,k} \end{aligned}$$

Trois termes de puissance sont distingués : les pertes Joule $P_{J,k}$, la puissance magnétique $P_{mag,k}$ et la puissance mécanique $P_{meca,k}$. Chaque système magnétiquement découplé se comporte donc comme une machine dont le nombre de phases serait égal à la dimension de l'espace propre qui la définit. Les machines fictives sont ainsi introduites. Caractérisées par leur inductance M_k et leur force électromotrice respective, les machines fictives tournent à la même vitesse Ω : elles sont donc mécaniquement couplées. Le bilan de puissance montre que les pertes Joule, la puissance magnétique et la puissance mécanique de la machine réelle sont réparties sur les différentes machines fictives. Le couple électromagnétique total de la machine réelle correspond à la somme des couples électromagnétiques T_k produits par chacune des machines fictives. Le couple d'une machine fictive correspond au produit scalaire de la force électromotrice élémentaire fictive par le courant fictif. Pour les machines fictives diphasées, ce couple s'exprime :

$$T_k = \frac{P_{meca,k}}{\Omega} = \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \varphi_{sr,k,\alpha} \\ \varphi_{sr,k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} . \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} = \begin{pmatrix} \epsilon_{k,\alpha} \\ \epsilon_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N} . \begin{pmatrix} i_{k,\alpha} \\ i_{k,\beta} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}_k^N}$$

Etant donnée la quadrature des phases α et β, les machines fictives diphasées produisent un couple constant lorsque leurs fem élémentaires et leurs courants sont sinusoïdaux[5]. Par

[5]Cette condition de courants et de fem sinusoïdales est suffisante. Autrement dit, le couple constant peut être obtenu avec d'autres signaux (signaux carrés par exemple).

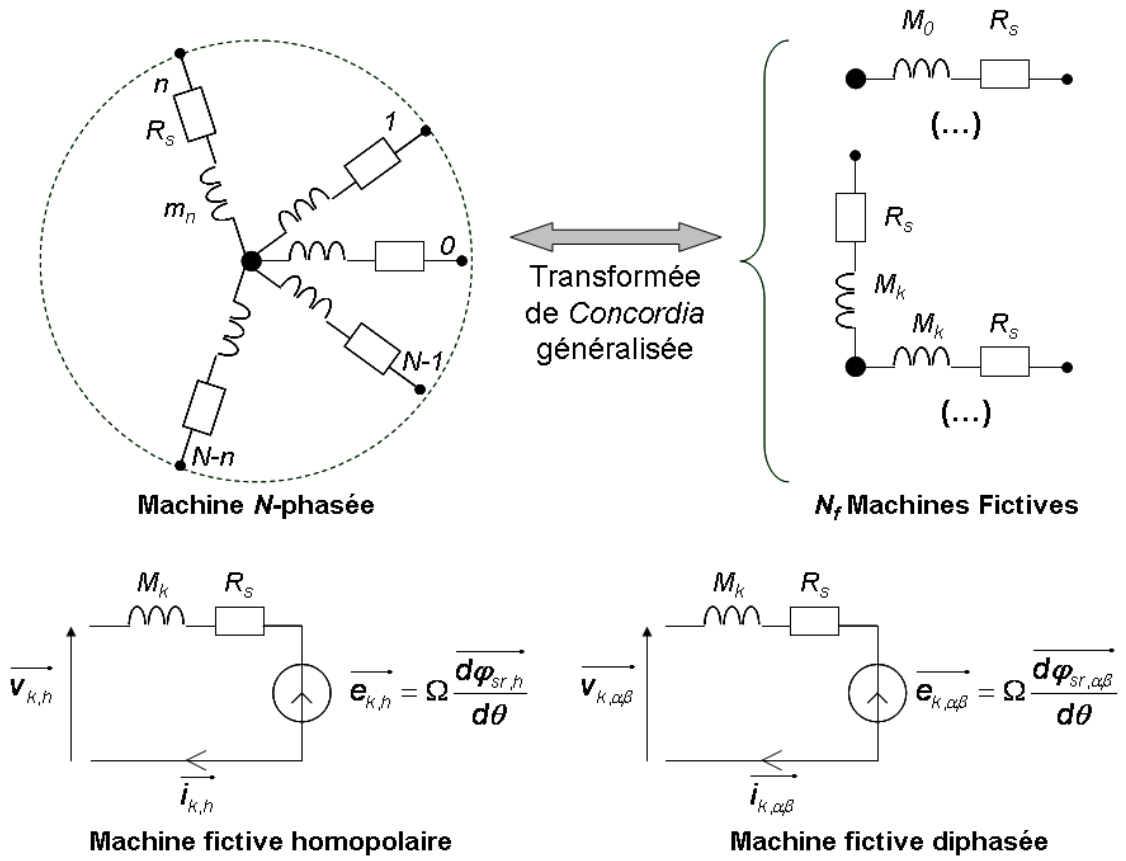


Figure I.2 — Schémas électriques des machines fictives (avec la base de Concordia comme support)

contre, dans une configuration semblable, les machines fictives monophasées sont incapables de produire un couple constant.

I.2.1.3 Schéma électrique d'une machine fictive

Les équations en tension dans la base de Concordia permettent d'établir un schéma électrique élémentaire pour les machines fictives. Sur la figure I.2, les vecteurs $\overrightarrow{x_{k,\alpha\beta}}$ regroupent les composantes α et β associées à la machine fictive d'inductance M_k. Une modélisation vectorielle est donc associée à chacune des machines fictives. Les dipôles de ce modèles sont connus : la résistance R_s correspond à la résistance statorique de phase de la machine polyphasée et l'inductance M_k résulte de la diagonalisation de la matrice d'inductance statorique. Cependant, les grandeurs variables que sont le courant, la tension et la force électromotrice ne sont pas *a priori* explicitement connues. Le formalisme les définit comme les projections instantanées dans la base propre définissant la machine fictive des vecteurs courant, tension et force életromotrice. La prochaine sous-partie montre qu'une autre caractérisation est possible.

I.2.2 Familles d'harmoniques associées aux machines fictives

Poursuivant les travaux d'*Eric Semail*, *Xavier Kestelyn* [19] introduit la notion de famille d'harmoniques ici présentée.

I.2.2.1 Inductances cycliques et groupes d'harmoniques

En étudiant l'alimentation de moteurs polyphasés par onduleur de tension pleine onde, *Eugène A. Klingshirn* met en évidence que l'impédance de la machine est la même pour des groupes d'harmoniques précis [20, 21]. Il est donc possible de faire apparaître les inductances cycliques obtenues par diagonalisation de la matrice d'inductance statorique à partir d'une décomposition harmonique de l'équation vectorielle en tension (I.3). C'est l'objet de ce paragraphe.

Les vecteurs courant, tension et force électromotrice possèdent deux propriétés essentielles. D'une part, en raison de l'hypothèse de régularité de la machine, les composantes de ces vecteurs sont régulièrement décalées les unes des autres. D'autre part, les composantes de ces vecteurs sont périodiques. Ces vecteurs périodiques peuvent donc être décomposés en série de *Fourier*.

Soit $\overrightarrow{x^N}$, un vecteur de phase dépendant de la variable θ. Il s'agit de calculer la Décomposition en Série de *Fourier* (DSF) de ce vecteur. Chaque composante x_n de ce vecteur est réel et décrit une fonction 2π-périodique de la variable θ. La DSF à coefficients complexes de chacune de ces fonctions s'écrit (cf. Annexe A pour les notations concernant les différents coefficients de *Fourier*) :

$$x_n(\theta) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_n)}_h e^{jh\theta} \tag{I.20}$$

La propriété de régularité entre les composantes du vecteur $\overrightarrow{x^N}$ s'écrit :

$$\forall n \in [0..N-1] \quad x_n(\theta) = x_0(\theta - (n-1)\frac{2\pi}{N}) \tag{I.21}$$

En associant les équation (I.20) et (I.21), le vecteur $\overrightarrow{x^N}$ prend la forme suivante :

$$\overrightarrow{x^N} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_h e^{jh\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}hn} \\ \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}h(N-1)} \end{pmatrix}_{\mathcal{N}^N} = \sqrt{N} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_h e^{jh\theta} \overrightarrow{f^N_{mod(-h,N)}} \tag{I.22}$$

La DSF de $\overrightarrow{x^N}$ apparaît clairement comme une combinaison linéaire de vecteurs de *Fortescue*. En d'autres termes, la DSF de $\overrightarrow{x^N}$ est une combinaison linéaire de vecteurs propres de l'application linéaire Φ. En appliquant la relation (I.22) aux vecteurs tension $\overrightarrow{v^N}$, courant $\overrightarrow{i^N}$ et force électromotrice $\overrightarrow{e^N}$, dans l'équation en tension (I.3), il vient en introduisant la matrice d'inductance (et en notant ω la pulsation) :

$$\widehat{(v_0)}_h = \left[R_s + jh\omega \left(\sum_{n=0}^{N-1} m_n e^{j\frac{2\pi}{N}nh} \right) \right] \widehat{(i_0)}_h + \Omega \widehat{(\epsilon_0)}_h$$

La relation (I.10) permet d'identifier l'inductance cyclique :

$$\widehat{(v_0)}_h = \left[R_s + jh\omega M_{mod(h,N)}\right] \widehat{(i_0)}_h + \Omega\widehat{(\epsilon_0)}_h \tag{I.23}$$

Cette relation (I.23) montre que l'inductance cyclique M_h définit le déphasage entre les harmoniques de rang $N\mathbb{Z} - h$ du courant et de la tension. Comme une inductance cyclique caractérise une machine fictive, une notion de groupes d'harmoniques par machine fictive est mise en évidence. Ces familles d'harmoniques peuvent aussi être calculées en évaluant la projection d'un vecteur périodique dans les bases propres de *Fortescue* et de *Concordia*.

I.2.2.2 Projection d'un vecteur périodique dans les bases propres

Concernant la base de *Fortescue*, il s'agit de calculer les composantes de *Fortescue* $x_{n,f}$ et $x_{N-n,f}$ du vecteur $\overrightarrow{x^N}$. La projection du vecteur sur la machine fictive diphasée d'inductance M_n est ainsi obtenue :

$$\forall n \in \left[1..\frac{N-2+mod(N,2)}{2}\right] \quad \begin{cases} x_{n,f} = \sqrt{N} \displaystyle\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_{qN+n} e^{j(qN+n)\theta} \\ x_{N-n,f} = \sqrt{N} \displaystyle\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_{qN-n} e^{j(qN-n)\theta} \end{cases}$$

Pour la machine fictive homopolaire d'inductance M_0 (construite sur la droite vectorielle $\overrightarrow{f_0^N}$), l'unique composante de *Fortescue* est :

$$x_{0,f} = \sqrt{N} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_{qN} e^{jqN\theta} = \sqrt{N}\widehat{(x_0)}_0 + 2\sqrt{N}\Re\left(\sum_{q=1}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_{qN} e^{jqN\theta}\right)$$

Si N est paire, il existe une seconde machine fictive homopolaire d'inductance $M_{N/2}$ (construite sur la droite vectorielle $\overrightarrow{f_{N/2}^N}$). Sa composante de *Fortescue* est :

$$x_{N/2,f} = \sqrt{N} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_{q\frac{N}{2}} e^{jq\frac{N}{2}\theta} = \sqrt{N}\widehat{(x_0)}_0 + 2\sqrt{N}\Re\left(\sum_{q=1}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_{q\frac{N}{2}} e^{jq\frac{N}{2}\theta}\right)$$

Dans ces expressions, il apparaît clairement que, si le signal périodique $x_0(\theta)$ a une valeur moyenne non nulle, alors cette valeur moyenne est récupérée par les machines fictives monophasées. Il faut noter que, dans la base de *Fortescue*, seules les composantes des machines homopolaires sont réelles. Celles des machines fictives diphasées sont *a priori* complexes. Par contre, dans la base de *Concordia*, toutes les composantes seront réelles.

En utilisant la relation (I.14) qui définit la matrice de passage de la base de *Concordia* restreinte $\mathcal{C}_n^N$ vers la base de *Fortescue* restreinte $\mathcal{C}_n^N$ les composantes de *Concordia* associées

à la machine fictive diphasée d'inductance M_n peuvent être évaluées :

$$\forall n \in \left[1..\frac{N-2+mod(N,2)}{2}\right] \quad \begin{cases} x_{n,\alpha} = \sqrt{\frac{N}{2}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} 2\Re\left(\widehat{(x_0)}_{qN+n} e^{j(qN+n)\theta}\right) \\ x_{n,\beta} = \sqrt{\frac{N}{2}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} 2\Im\left(\widehat{(x_0)}_{qN+n} e^{j(qN+n)\theta}\right) \end{cases} \tag{I.24}$$

Pour bien rendre compte du caractère réel des composantes du vecteur $\overrightarrow{x^N}$ dans la base de *Concordia* (qui est une base à coefficients réels), il est intéressant d'introduire les coefficients de *Fourier* réelles $\widehat{(x_0^c)}_h$ et $\widehat{(x_0^s)}_h$ (cf. Annexe A pour les définitions des coefficients de DSF). L'expression (I.24) se ré-écrit alors :

$$\begin{cases} x_{n,\alpha} = \sqrt{\frac{N}{2}} \Big[\widehat{(x_0^c)}_n \cos(n\theta) + \widehat{(x_0^s)}_n \sin(n\theta) \\ \quad + \sum_{q=1}^{+\infty} \Big(\widehat{(x_0^c)}_{qN-n} \cos((qN-n)\theta) + \widehat{(x_0^s)}_{qN-n} \sin((qN-n)\theta) \\ \quad + \widehat{(x_0^c)}_{qN+n} \cos((qN+n)\theta) + \widehat{(x_0^s)}_{qN+n} \sin((qN+n)\theta) \Big) \Big] \\ x_{n,\beta} = \sqrt{\frac{N}{2}} \Big[-\widehat{(x_0^s)}_n \cos(n\theta) + \widehat{(x_0^c)}_n \sin(n\theta) \\ \quad + \sum_{q=1}^{+\infty} \Big(\widehat{(x_0^s)}_{qN-n} \cos((qN-n)\theta) - \widehat{(x_0^c)}_{qN-n} \sin((qN-n)\theta) \\ \quad - \widehat{(x_0^s)}_{qN+n} \cos((qN+n)\theta) + \widehat{(x_0^c)}_{qN+n} \sin((qN+n)\theta) \Big) \Big] \end{cases} \tag{I.25}$$

Pour la machine fictive homopolaire d'inductance M_0, il vient :

$$x_{0,f} = \sqrt{N}\widehat{(x_0)}_0 + \sqrt{N} \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\widehat{(x_0^c)}_{qN} \cos(qN\theta) + \widehat{(x_0^s)}_{qN} \sin(qN\theta) \right) \tag{I.26}$$

Pour l'éventuelle machine fictive homopolaire d'inductance $M_{N/2}$, il vient :

$$x_{N/2,f} = \sqrt{N}\widehat{(x_0)}_0 + \sqrt{N} \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\widehat{(x_0^c)}_{q\frac{N}{2}} \cos(q\frac{N}{2}\theta) + \widehat{(x_0^s)}_{q\frac{N}{2}} \sin(q\frac{N}{2}\theta) \right) \tag{I.27}$$

L'ensemble des équations (I.25), (I.26) et (I.27) confirme la distribution des harmoniques sur les espaces propres. Ainsi, il est établi que les grandeurs électromagnétiques de machines fictives sont une composition bien précise d'harmoniques spatiaux. En résumé, la machine fictive d'inductance M_n est sensible à une famille spécifique d'harmoniques d'espace notée $F^N(M_n)$ définie comme suit :

$$F^N(M_n) = \{|qN-n|,\ q \in \mathbb{Z}\} \tag{I.28}$$

Il faut noter que si les signaux de phase sont anti-périodiques (i.e. à symétrie glissante), alors les harmoniques de rang pair sont théoriquement nuls.

Machine fictive	$F^N(M_n)$	$F^N(M_n) \cap \{2\mathbb{Z}+1\}$	h_n
Homopolaire M_0	3, 6, 9, 12, ... $3q$	3, 9, 15, 21, ...	3
Diphasée M_1	1, 2, 4, 5, ... $3q \pm 1$	1, 5, 7, 11, ...	1

Tableau I.2 — Famille d'harmoniques associées aux 2 machines fictives ($N_f = 2$) composant une machine triphasée ($N = 3$)

Machine fictive	$F^N(M_n)$	$F^N(M_n) \cap \{2\mathbb{Z}+1\}$	h_n
Homopolaire M_0	5, 10, 15,... $5h$	5, 15, 25, ...	5
Diphasée M_1	1, 4, 6, 9, ... $5h \pm 1$	1, 9, 11, 19, ...	1
Diphasée M_2	2, 3, 7, 8, ... $5h \pm 2$	3, 7, 13, 17, ...	3

Tableau I.3 — Famille d'harmoniques associées aux 3 machines fictives ($N_f = 3$) composant une machine pentaphasée ($N = 5$)

I.2.2.3 Harmonique de rang minimal et machine fictive principale

L'harmonique de rang minimal d'une machine fictive correspond au plus petit harmonique impair de sa famille :

$$h_n = \min\left\{F^N(M_n) \cap \{2\mathbb{Z}+1\}\right\} \tag{I.29}$$

Dans le cas où N est impair, h_n est défini pour toutes les machines fictives. Par contre, si N est pair, alors l'harmonique de rang minimal n'est pas défini pour les machines fictives basées sur l'espace propre de valeur propre M_n avec n pair. La machine fictive principale est celle qui est sensible à l'harmonique de rang 1, c'est-à-dire au fondamental des courant, tension et force électromotrice. Avec les notations adoptées dans ce mémoire, il s'agit de la machine fictive d'inductance M_1.

Les tableaux I.2, I.3, I.4, I.5 et I.6 donnent la composition des familles d'harmoniques pour des machines à 3, 5, 6, 7 et 9 phases respectivement. En troisième colonne de ces tableaux, la famille d'harmoniques de rang impair est précisée et, en quatrième colonne, apparait l'harmonique de rang minimal.

Le tableau I.2 donne la distribution des harmoniques pour la machine triphasée. La décomposition multimachine permet évidemment de retrouver le modèle classique de la machine triphasée : la machine fictive diphasée correspond à la machine (α, β) dans le repère de *Concordia* lié au stator ou à la machine (d, q) dans le repère de *Park* lié au rotor. Si la machine est couplée en étoile (respectivement triangle), alors la somme des courants de phase (respectivement tensions de phase) est nulle. La machine homopolaire n'est ainsi pas sollicitée.

Pour la machine pentaphasée les compositions des familles d'harmoniques sont données dans le tableau I.3. L'harmonique de rang minimal pour la machine d'inductance M_2 est 3.

Machine fictive	$F^N(M_n)$	$F^N(M_n) \cap \{2\mathbb{Z}+1\}$	h_n
Homopolaire M_0	6, 12, 18, $6h$	$\emptyset$	-
Diphasée M_1	1, 5, 7, 11, ... $6h \pm 1$	1, 5, 7, 11, ... $6h \pm 1$	1
Diphasée M_2	2, 4, 8, 10, ... $6h \pm 2$	$\emptyset$	-
Homopolaire M_3	3, 9, 12, 15, ... $6h \pm 3$	3, 9, 12, 15, ... $6h \pm 3$	3

Tableau I.4 — Famille d'harmoniques associées aux 4 machines fictives ($N_f = 4$) composant une machine hexaphasée ($N = 6$)

Machine fictive	$F^N(M_n)$	$F^N(M_n) \cap \{2\mathbb{Z}+1\}$	h_n
Homopolaire M_0	7, 14, 21, 28, ... $7h$	7, 21,...	7
Diphasée M_1	1, 6, 8, 13, ... $7h \pm 1$	1, 13, 15, 27, ...	1
Diphasée M_2	2, 5, 9, 12, ... $7h \pm 2$	5, 9, 19, 23, ...	5
Diphasée M_3	3, 4, 10, 11, ... $7h \pm 3$	3, 11, 17, 25 ...	3

Tableau I.5 — Famille d'harmoniques associées aux 4 machines fictives ($N_f = 4$) composant une machine 7-phases ($N = 7$)

Machine fictive	$F^N(M_n)$	$F^N(M_n) \cap \{2\mathbb{Z}+1\}$	h_n
Homopolaire M_0	9, 18, 27, ... $9h$	9, 27, ...	9
Diphasée M_1	1, 8, 10, 17, ... $9h \pm 1$	1, 17, 35, ...	1
Diphasée M_2	2, 7, 11, 16, ... $9h \pm 2$	7, 11, 25, ...	7
Diphasée M_3	3, 6, 12, 15, ... $9h \pm 3$	3, 15, 33, ...	3
Diphasée M_4	4, 5, 13, 14, ... $9h \pm 4$	5, 13, 23, ...	5

Tableau I.6 — Famille d'harmoniques associées aux 4 machines fictives ($N_f = 5$) composant une machine 9-phases ($N = 9$)

Si un nombre de paires de pôles était attribué à cette machine, il serait trois fois plus élevé que le nombre de paires de pôles de la machine pentaphasée. Dans l'optique du contrôle de cette machine dans un repère tournant, il sera judicieux d'effectuer une rotation de *Park* sur trois fois la position instantanée du rotor[6].

Le cas de la machine hexaphasée (cf. tableau I.4) est intéressant : la moitié des machines fictives ont leur famille d'harmoniques impairs vide. En fait, il s'agit d'une propriété générale concernant les machines à nombre pair de phases. En considérant l'équation (I.28), il est facilement prouvé que, dans l'hypothèse de signaux de courant et de force électromotrice anti-périodiques, la moitié des machines fictives ne peuvent être sollicitées. D'après les remarques du paragraphe I.1.1.1 (page 11) sur la distinction entre phases internes et externes, ces résultats étaient prévisibles. En particulier, le tableau I.1 montre bien qu'une machine à 6 phaes internes est en fait une machine à 3 phases externes régulièrement décalées. Il s'agit donc d'une machine triphasée : les compositions des familles d'harmoniques de la machine à 6 phases internes ($N = 6$, cf. tableau I.4) et de la machine à 3 phases ($N = 3$, cf. tableau I.2) sont identiques.

Les tableaux I.5 et I.6 concernant respectivement les machines à 7 phases et à 9 phases sont donnés à titre illustratif. Tous les tableaux présentés insistent sur les familles d'harmoniques impairs. Cependant, sur le plan pratique, des harmoniques pairs peuvent apparaître. Par exemple, les imperfections de la machine (mauvaise anti-symétrie entre un pôle Nord et un pôle Sud par exemple) peuvent générer des harmoniques pairs dans la force électromotrice. La tension d'alimentation peut également contenir des harmoniques pairs. Dans ce cas, ces machines fictives sont mises sous tension et répondent en courant. Ces phénomèmes peuvent provoquer des courants parasites et des couples pulsatoires.

I.2.3 Puissance instantanée de machine fictive

La notion de familles d'harmonique permet un calcul explicite de la tension, du courant et de la force électromotrice de machine fictive. La puissance instantanée peut donc être expli-

[6] Ce fait sera illustré dans le paragraphe I.3.1.2.

citement évaluée. Ce calcul permet de préciser la manière dont les harmoniques de machines fictives interagissent pour générer de la puissance fluctuante et des couples pulsatoires.

I.2.3.1 Bilan de puissance de machines fictives

En effet, la puissance instantanée de la machine polyphasée s'exprime à partir des expressions (I.17) et (I.22) :

$$P(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \underbrace{N \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(v_0)}_h \widehat{(i_0)}_{qN-h} \right)}_{=\widehat{(P)}_q} e^{jqN\omega t}$$

La puissance instantanée est un signal $\frac{2\pi}{N\omega}$-périodique dont les coefficients de *Fourier* $\widehat{(P)}_q$ résultent de l'interaction entre les harmoniques de tension et de courant. La relation (I.23) permet de distinguer les différentes natures de puissance :

$$\widehat{(P)}_q = N \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\underbrace{R_s \widehat{(i_0)}_h \widehat{(i_0)}_{qN-h}}_{\text{Nature résistive}} + \underbrace{jh\omega M_{mod(h,N)} \widehat{(i_0)}_h \widehat{(i_0)}_{qN-h}}_{\text{Nature magnétique}} + \underbrace{\Omega \widehat{(\epsilon_0)}_h \widehat{(i_0)}_{qN-h}}_{\text{Nature électromagnétique}} \right)$$

La puissance instantanée d'une machine fictive $P_n(t)$ est issue de l'interaction entre les harmoniques de tension et de courant appartenant à sa famille. Il vient :

$$P_n(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \underbrace{N \left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \widehat{(v_0)}_{rN+n} \widehat{(i_0)}_{(q-r)N-n} + \widehat{(v_0)}_{rN-n} \widehat{(i_0)}_{(q-r)N+n} \right)}_{=\widehat{(P_n)}_q} e^{jqN\omega t}$$

La puissance de nature magnétique (transitant dans les inductances fictives) conditionne la puissance réactive de la machine fictive et donc celle de la machine polyphasée.

I.2.3.2 Calcul du couple instantanné de machines fictives

La puissance électromagnétique permet de calculer le couple électromagnétique instantané $T_n(t)$ produit par la machine fictive d'inductance M_n :

$$T_n(t) = \sum_{q=\infty}^{+\infty} \left(N \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \widehat{(\epsilon_0)}_{rN+n} \widehat{(i_0)}_{(q-r)N-n} + \widehat{(\epsilon_0)}_{rN-n} \widehat{(i_0)}_{(q-r)N+n} \right) e^{jqN\omega t} \tag{I.30}$$

Le couple moyen résulte de l'interaction d'harmoniques de même rang :

$$\widehat{(T_n)}_0 = N \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \widehat{(\epsilon_0)}_{rN+n} (\widehat{(i_0)}_{rN+n})^* + \widehat{(\epsilon_0)}_{rN-n} (\widehat{(i_0)}_{rN-n})^* \tag{I.31}$$

Cette relation montre que le couple moyen d'une machine fictive est d'autant plus grand que le courant et la force électromotrice contiennent des harmoniques de sa famille. Cependant, si tel est le cas, alors les couples pulsatoires engendrés par une machine fictive sont *a priori* plus importants.

Au final, la décomposition multimachine permet de considérer la machine polyphasée comme une somme de machines fictives diphasées et monophasées magnétiquement indépendantes et mécaniquement couplées. Une machine fictive est caractérisée par une inductance cyclique et des courants, tensions et forces électromotrices fictifs composés d'une série d'harmoniques particuliers. Les machines fictive contribuent à la puissance et au couple totaux indépendamment les unes des autres. Cette dernière propriété est une conséquence de l'orthogonalité des espaces propres définissant les machines fictives. La notion de familles d'harmoniques résulte de la régularité de construction de la machine polyphasée. Cette notion de familles d'harmoniques est essentielle : elle va faciliter la prédiction du comportement des machines fictives et donc la prédiction du comportement global de la machine polyphasée.

I.3 Conception polyphasée intégrant la décomposition multimachine dans le cadre de l'alimentation par onduleur de tension MLI

L'alimentation par un onduleur de tension MLI d'une machine polyphasée ne peut s'aborder comme celle d'une machine triphasée. En particulier, l'approche au premier harmonique pour dimensionner la fréquence de commutation des interrupteurs n'est pas suffisante [5]. Dans cette partie, il est montré comment la décomposition multimachine permet d'adapter la conception de la machine polyphasée à son onduleur avec comme objectifs la réduction des courants parasites et l'augmentation de la densité de couple. Tout d'abord, la nécessité de réguler les machines fictives est explicitée. Puis il est souligné que cette nécessité de régulation constitue une opportunité pour définir une stratégie d'alimentation multimachine plus performante. Mais cette stratégie requiert une conception adaptée de la machine polyphasée.

I.3.1 Commande multimachine de la machine polyphasée alimentée par onduleur de tension MLI

Par hypothèse, la machine polyphasée est alimentée par un onduleur de tension à modulation de largeurs d'impulsions (MLI) à commande numérique [6]. Cette sous-partie analyse tout d'abord l'influence de cette alimentation sur le comportement des machines fictives. Ensuite, une architecture de commande capable de maîtriser ces comportements est proposée. Enfin, il est montré que la mise en oeuvre de cette architecture est dimensionnante pour le convertisseur et les performances du calculateur associé.

I.3.1.1 Analyse du comportement de la machine fictive dans le cadre de l'alimentation par onduleur de tension

La figure I.3 schématise la manière dont le courant de phase apparaît lorsque la machine polyphasée est alimentée par onduleur de tension MLI. Les états de commutation successifs

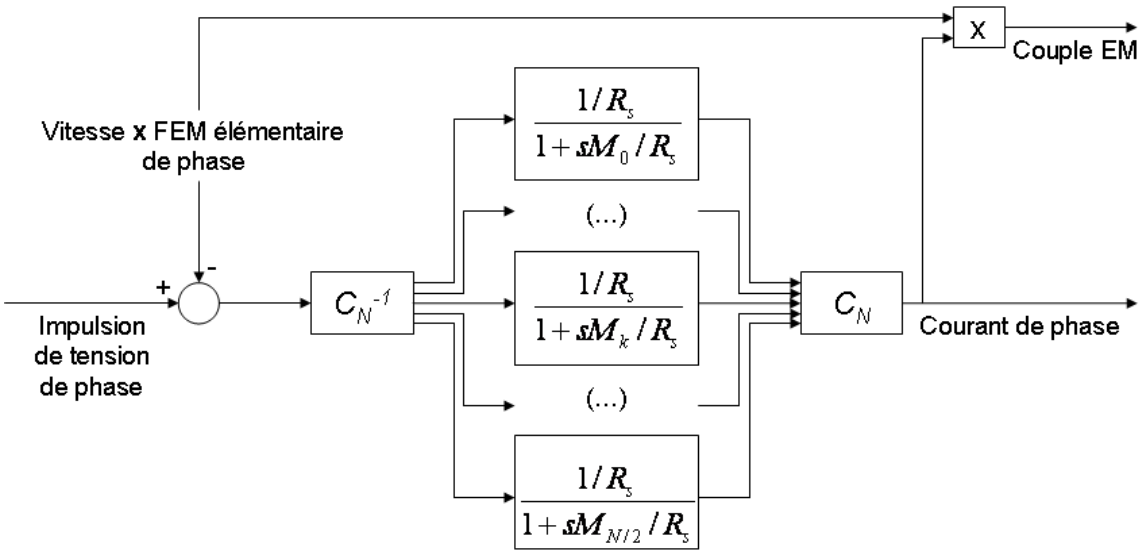


Figure I.3 — Principe de la mise sous tension des phases réelles dans le cadre de l'alimentation par onduleur de tension

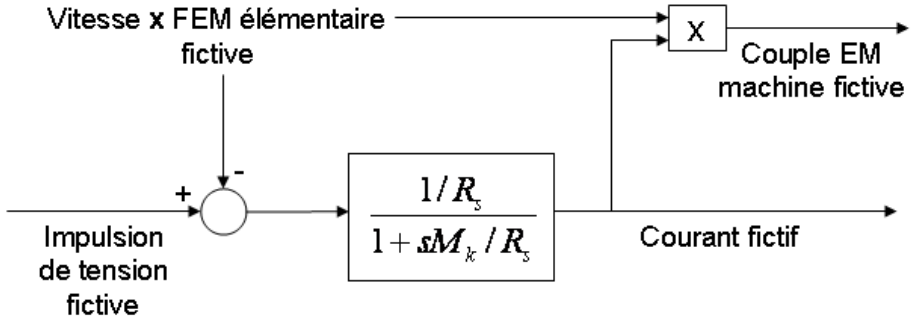


Figure I.4 — Principe de la mise sous tension d'une machine fictive

du convertisseur génère un train d'impulsions de tensions sur chaque phase. L'addition de ce signal de tension avec la force électromotrice instantanée constitue un signal de tension qui, au travers des résistances statoriques et de la matrice d'inductance statorique, va induire le courant de phase. Ce dernier inter-agit avec la force électromotrice pour générer le couple électromagnétique. En somme, les caractéristiques du courant de phase (amplitude et harmoniques) dépendent des caractéristiques du train d'impulsion de tension et de la force électromotrice.

La même analyse peut être menée pour les machines fictives. Une machine fictive est dite alimentée dès qu'elle est mise sous tension. La figure I.4 schématise le processus de mise sous tension d'une machine fictive. La machine fictive est représentée par un filtre passe-bas de gain statique $1/R_s$ et de constante de temps M_k/R_s. La mise sous tension dépend du train d'impulsions de tension de phase (qui dépend de la commande) et de la force électromotrice de phase (qui dépend de la conception). Si la projection de l'un de ces deux signaux dans l'espace propre définissant la machine fictive considérée est non nulle, alors la machine fictive est mise sous tension et répond en courant. Il faut bien noter que, si la force électromotrice de la machine fictive est non nulle, alors la réponse en courant est inévitable et ce courant inter-agit avec la force électromotrice pour générer un couple électromagnétique. En résumé,

- si la force électromotrice de la machine fictive est rigoureusement nulle, alors il apparaît des courants parasites dont l'amplitude dépend de la nature du train d'impulsions et de l'aptitude de filtrage de la machine considérée (définie par sa constante de temps M_k/R_s visible sur le schéma I.4),
- si la force électromotrice de la machine est non nulle, alors la machine fictive répond en courant et, de plus, ces courants vont inter-agir avec la force électromotrice pour générer un couple électromagnétique.

En régime permanent, la caractérisation des signaux par projection peut se faire à l'aide des familles d'harmoniques. Il faut noter que, concernant la machine homopolaire, un couplage des phases réelles en étoile (respectivement en "triangle") interdit l'apparition de courant (respectivement de tension) homopolaire : ce couplage garantit une projection nulle du courant (respectivement de la tension) sur la droite homopolaire. En quelque sorte, le couplage des phases réelles "paralyse" la machine homopolaire. Mais, pour les machines fictives diphasées, il n'existe pas de couplage "paralysant". Ainsi, des courants parasites vont s'y développer. La seule manière de réduire ces courants parasites est de les contrôler. En d'autres termes, il faut contrôler les courants de chaque machine fictive.

Ce contrôle est nécessaire car, en raison de la topologie de l'alimentation, les mises sous tension de machines fictives sont inévitables. Le train d'impulsion de tensions est l'image des ordres de commutation transmis aux interrupteurs par la commande. Pour rendre compte de l'état de commutation de l'onduleur, certains auteurs définissent un vecteur de commutation dont la dimension est égale aux nombres de phases de la machine alimentée [28, 50, 43]. Le nombre d'états de commutation de l'onduleur étant fini, il est possible de calculer la projection de chaque vecteur de commutation sur les différentes machines fictives. Ainsi, les tensions fictives résultant d'un état de commutation donné peuvent être évaluées. D'une certaine manière, chaque machine fictive est associée à un onduleur fictif. Ceci signifie que la structure discrète de l'alimentation rend inévitable la mise sous tension simultanée de plusieurs machines fictives. En d'autres termes, mis à part pour les machines fictives homopolaires, il n'existe pas de vecteurs commutation alimentant une et une seule machine fictive diphasée (autrement dit, il n'existe pas de vecteurs de commutation appartenant à un plan propre) [31].

L'exemple d'une machine à 5 phases couplée en étoile illustre bien ces aspects. Dans le cadre d'une alimentation sinusoïdale, le convertisseur est commandé de telle sorte à obtenir un courant de phase sinusoïdal. Intuitivement, si le principe de la commande sinusoïdale d'une machine triphasée couplée en étoile est repris, cela revient à réguler en courant la machine principale. En d'autres termes, les machines secondaires et hompolaires ne sont pas régulées. La question est donc de savoir si ces deux machines fictives sont alimentées ou non. Concernant la machine homopolaire, le couplage en étoile garantit que son courant est nul (un tel couplage interdit l'apparition d'harmoniques multiples de 5 dans le courant, c'est-à-dire d'harmoniques de la famille de la machine homopolaire). Par conséquent, il est inutile de réguler la machine homopolaire. Par contre, le cas de la machine secondaire est plus délicat. Tout d'abord, le train d'impulsions de tension, calculé pour générer une sinusoïde (c'est-à-dire pour alimenter la machine principale), est susceptible de venir aussi alimenter la machine secondaire. De plus, si la force électromotrice de phase contient des harmoniques de la famille de la machine secondaire (c'est-à-dire du 3, du 7, du 13, ...), alors la machine secondaire est alimentée et des courants incontrôlés s'y développent. Ces courants parasites vont engendrer des couples pulsatoires et des pertes Joule supplémentaire. Cet exemple montre la nécessité de réguler le courant de toutes les machines fictives alimentées.

Cette exigence va se traduire sur deux niveaux :

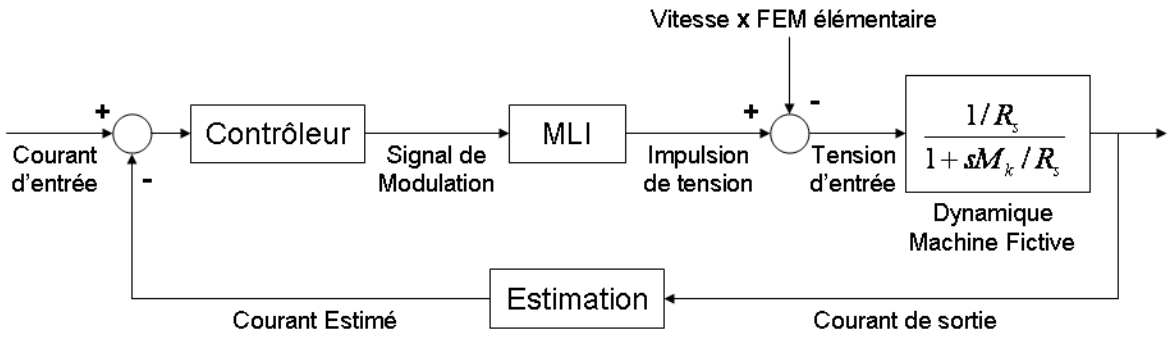


Figure I.5 — Schéma de régulation du courant d'une machine fictive dans le cadre d'une alimentation par onduleur MLI

- sur le plan logiciel, une architecture permettant le contrôle de tous les courants fictifs doit être implantée,
- sur le plan matériel, les caractéristiques des composants (fréquence de commutation notamment) doivent être définies pour rendre possible la régulation.

I.3.1.2 Architecture de commande basée sur la décomposition multimachine

La décomposition multimachine peut être utilisée pour déduire de manière systématique une architecture pertinente de contrôle de l'alimentation des machines polyphasées [53]. Cette topologie vise à contrôler le courant fondamental de toutes les machines fictives (à l'exception éventuelle de la machine homopolaire en cas de couplage). Pour faciliter la régulation de ce courant fictif sinusoïdal, la solution la plus couramment utilisée consiste à en effectuer le contrôle dans un repère tournant à la vitesse du fondamental de la machine fictive [19, 38]. Ainsi, le problème de la régulation d'un courant fictif devient formellement semblable à celui de la régulation du courant de *Park* dans une machine triphasée [28]. Les algorithmes de correction linéaire mis au point dans ce contexte peuvent donc être ré-utilisés. Pour la machine fictive d'inductance M_k, l'angle de rotation ξ_k choisi correspond au produit de l'angle électrique instantané par l'harmonique de rang minimal :

$$\xi_k = h_k p\theta$$

Le schéma de régulation est donné sur la figure I.5 : il s'agit donc de réguler un système passe-bas du premier ordre. Dans [27], des structures de correcteur avec leurs réglages sont proposés et leurs limites d'utilisation sont clairement précisées : le convertisseur alimentant la machine à courant alternatif doit être rapide par rapport à la constante de temps électrique du système régulé.

Le contrôleur produit un signal de modulation calculé pour minimiser l'écart entre le courant fictif estimé et le courant fictif de consigne. Dans le contexte d'une modulation intersective, ce signal de modulation est comparé à une porteuse triangulaire dans le but de déterminer les ordres de commutation permettant d'approcher au mieux la modulante [7]. Sur la figure I.5, le bloc "MLI" fait office d'actionneur. Il génère le train d'impulsions de tension

[7] En pratique, pour chaque machine fictive, les modulantes de correction sont calculées puis elles sont ramenées dans le repère statorique pour être sommées. Une modulante de correction de phase est ainsi obtenue et c'est ce signal qui est modulé pour établir les ordres de commutation. Ces ordres de commutation se manifestent sur les machines fictives par les trains d'impulsion de tension fictive représentés sur la figure I.5

fictive qui constitue le signal de commande.

Ce signal de commande est perturbée par la force électromotrice fictive. Dans le cas général, cette force électromotrice contient plusieurs harmoniques. Le repère tournant élimine naturellement le fondamental de la machine fictive (harmonique de rang minimal h_k), ce qui affaiblit la perturbation et facilite le travail des contrôleurs. Néanmoins, les autres harmoniques de la machine fictive subsistent et restent gênants.

Par exemple, sur une machine à 5 phases, la régulation de la machine secondaire s'effectue dans un repère tournant à $3p\theta$. L'harmonique 3 de la fem secondaire ne perturbe pas la régulation car cet harmonique est invariant dans le repère tournant. Par contre, l'harmonique 7 vient se combiner avec l'harmonique de rang 3 pour générer une perturbation de fréquence $10\omega/(2\pi)$. A vitesse donnée, cette perturbation sera d'autant plus importante que le rapport entre les amplitudes des harmoniques 7 et 3 de la fem élémentaire est élevé.

I.3.1.3 Impact de la commande multimachine sur le dimensionnement de l'alimentation

La commande multimachine, c'est-à-dire le contrôle des courants d'alimentation des machines fictives, est nécessaire pour lutter contre les courants parasites et éviter le développement de couples pulsatoires trop importants. Cette exigence se traduit en terme de dimensionnement sur les composants. En effet, pour que les régulateurs de courants fictifs puissent atteindre leurs objectifs, il faut que la fréquence de modulation de largeur d'impulsion soit suffisamment élevée. La fréquence de commutation des interrupteurs doit donc être adaptée à la plus petite constante de temps des machines fictives alimentées. Un rapport de 25 entre la fréquence de commutation et la fréquence de coupure assure un bon filtrage du bruit de commutations des interrupteurs. Bien entendu, la fréquence de commutation doit rester adaptée à la fréquence maximale de fonctionnement de la machine (souvent limitée par les performances des matériaux ferromagnétiques de la culasse statorique). Mais cette fréquence maximale de fonctionnement n'est pas aussi contraignante car, en pratique, à haute vitesse, les effets de filtrage mécanique permettent de tolérer davantage de couples pulsatoires et donc de courants parasites. Selon [55], un rapport de 10 entre la fréquence de commutation et la fréquence maximale de fonctionnement permet de maintenir un couple de qualité. De plus, pour un système à grand nombre de phases, le risque d'avoir de grandes disparités entre les constantes de temps des machines fictives est augmenté. Par conséquent, le choix de la fréquence de MLI sera vraisemblablement davantage contraint par les fréquences de coupure des machines fictives que par la fréquence maximale de fonctionnement de la machine.

En résumé, pour une machine à N phases et p pôles pouvant tourner à la vitesse maximale Ω_{max}, la fréquence de MLI peut être choisie à l'aide de la relation suivante :

$$f_{MLI} \geq \max\left\{\left\{10\frac{p\Omega_{max}}{2\pi}\right\} \cup \left\{25\frac{R_s}{2\pi M_k}\,|k \in [0\ldots N_f-1]\right\}\right\} \tag{I.32}$$

Cette relation (I.32) est indicative et doit être adaptée à la situation traitée. Par exemple, en cas de couplage des phases, la machine homopolaire n'est pas alimentée : sa fréquence de coupure n'est donc pas dimensionnante.

Pour une machine à 5 phases couplées en étoile, la fréquence de MLI doit être définie en fonction des valeurs des constantes de temps des machines fictives principale et secondaire. Pour assurer un filtrage correcte du bruit de commutation, la fréquence de MLI doit être

minorée comme suit :

$$f_{MLI} \geq \max\left\{10\frac{p\Omega_{max}}{2\pi}, 25\frac{R_s}{2\pi M_1}, 25\frac{R_s}{2\pi M_2}\right\}$$

Par ailleurs, le calculateur[8] chargé de traiter la comparaison entre la porteuse et la modulante doit être adapté à la fréquence de commutation des interrupteurs qu'il contrôle. Sur une période de MLI, le calculateur doit pouvoir analyser les écarts de courant pour chaque machine fictive et en calculer la correction. La fréquence de MLI minore la fréquence du calculateur. C'est un aspect à prendre en considération surtout pour un système à grand nombre de phases. En effet, plus le nombre de phases est élevé, plus le nombre de machines fictives à réguler est élevé et plus le calculateur doit faire d'opérations pendant une période de MLI.

En résumé, une machine polyphasée est d'autant plus difficile à alimenter par onduleur de tension MLI que son nombre de phases est élevé. Ce phénomème résulte du grand nombre de constantes de temps qui caractérise un tel système et, du fait, que ces constantes de temps ne sont généralement pas du même ordre. La décomposition multimachine est un outil qui permet de représenter et de séparer l'influence de ces différentes constantes de temps sur le comportement général de la machine polyphasée (en terme de courants consommés et de production de couples). L'analyse du fonctionnement d'une machine fictive dans le cadre de l'alimentation par onduleur de tension permet donc d'isoler son influence sur le comportement général du dispositif et d'en tenir compte pour définir une architecture de commande adaptée. Pour être efficace, cette architecture implique de nouvelles contraintes de dimensionnement au niveau du convertisseur.

I.3.2 Adaptation de la conception de la machine à la commande multimachine

Cette sous-partie définit des objectifs de conception pour la machine polyphasée dans le cadre de son alimentation par onduleur de tension MLI. Le but est double : d'une part, améliorer la qualité du couple fourni ; d'autre part, faciliter la nécessaire régulation des machines fictives. Le premier paragraphe décrit la stratégie de commande multimachine et le second paragraphe montre que cette stratégie permet de définir des forces électromotrices idéales pour chaque machine fictive. Enfin, le dernier paragraphe montre de quelles manières la régulation des machines fictives peut être facilitée.

I.3.2.1 Stratégie de commande multimachine

Si la sous-partie précédente montre la nécessité de réguler les courants des machines fictives, elle ne précise pas quelles amplitudes de courants fictifs doivent être imposées. Etant entendu que la machine fictive principale est toujours alimentée (car c'est elle qui correspond à l'alimentation sinusoïdale du stator), pour les autres machines fictives, deux options sont possibles :

- soit le courant de la machine fictive est régulé à zéro et, dans ce cas, d'après l'expression (I.31), son couple moyen est nul,

[8] La modulation de largeur d'impulsion intersective peut être implantée analogiquement. Mais aujourd'hui la commande numérique est majoritairement utilisée.

- soit le courant de la machine fictive est régulé à valeur non nulle et, dans ce cas, d'après l'expression (I.31), son couple moyen est non nul.

La première option correspond à une commande sinusoïdale de la machine polyphasée. Dans ce cas, tout le couple de la machine polyphasée est assuré par la machine principale. En comparaison, la deuxième option permet d'obtenir un couple moyen plus élevé. Le paragraphe I.2.3.2 (page 30) montre que, pour éviter que ce couple fictif soit trop fluctuant, il est recommandé de faire en sorte d'avoir un courant fictif sinusoïdal. Il reste donc à définir l'amplitude de ce courant ficitf sinusoïdal.

Pour ce faire, une machine N-phasée dont tous les courants fictifs sont parfaitement sinusoïdaux est considérée. Ceci signifie que le courant de phase est juste composé des premiers harmoniques de machines fictives :

$$i_0(t) = \sum_{k=0}^{N_f-1} \widehat{(i_0)}_{h_k} e^{jh_k\omega t}$$

La relation (I.31) permet alors d'évaluer le couple moyen de la machine fictive d'inductance M_k. Il vient :

$$\widehat{(T_k)}_0 = 2N\Re\left((\widehat{(\epsilon_0)}_{h_k})^*\widehat{(i_0)}_{h_k}\right)$$

Pour maximiser la puissance électromagnétique de la machine polyphasée, la force électromotrice élémentaire et le courant doivent être en phase dans la zone de fonctionnement comprise entre la vitesse nulle et la vitesse nominale [1]. Dans ce cas, le couple moyen $\widehat{(T_k)}_0$ peut s'exprimer :

$$\widehat{(T_k)}_0 = 2N\left|\widehat{(\epsilon_0)}_{h_k}\right|\left|\widehat{(i_0)}_{h_k}\right| \tag{I.33}$$

Le couple moyen total de la machine polyphasée est égal à la somme des couples moyens fictifs :

$$\begin{aligned}\widehat{(T)}_0 &= 2N\sum_{k=0}^{N_f-1}\left|\widehat{(\epsilon_0)}_{h_k}\right|\left|\widehat{(i_0)}_{h_k}\right| = N\overrightarrow{E_{MF}}.\overrightarrow{I_{MF}} \\ \text{avec } \overrightarrow{E_{MF}} &= \sqrt{2}\begin{pmatrix}\left|\widehat{(\epsilon_0)}_{h_0}\right| \\ \vdots \\ \left|\widehat{(\epsilon_0)}_{h_{N_f-1}}\right|\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{I_{MF}} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\left|\widehat{(i_0)}_{h_0}\right| \\ \vdots \\ \left|\widehat{(i_0)}_{h_{N_f-1}}\right|\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{I.34}$$

Ce couple total moyen apparaît comme le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{E_{MF}}$ et $\overrightarrow{I_{MF}}$ contenant les amplitudes des harmoniques de rang minimal de fem élémentaire et de courant des machines fictives. A couple moyen donné $\widehat{(T)}_0$ pour la machine polyphasée, l'objectif va être de commander les machines fictives de telle sorte à minimiser les pertes Joule. Autrement dit, il s'agit de définir une consigne de courant qui assure des pertes Joule minimales pour le couple moyen $\widehat{(T)}_0$ souhaité. Comme les pertes Joule sont proportionnelles à la norme du vecteur $\overrightarrow{I_{MF}}$, cet objectif sera atteint si la commande maintient en permanence les vecteurs $\overrightarrow{I_{MF}}$ et $\overrightarrow{E_{MF}}$ co-linéaires [49].

$$\overrightarrow{I_{MF}} = k_{I/E}\overrightarrow{E_{MF}} \tag{I.35}$$

Cette relation signifie que, en alimentation multimachine, le courant de phase doit avoir la même répartition d'harmoniques que la force électromotrice. Le coefficent de proportionnalité entre les vecteurs $\overrightarrow{I_{MF}}$ et $\overrightarrow{E_{MF}}$ peut être calculé en considérant le rapport d'amplitude de

la machine principale (caractérisée par l'harmonique de rang $h_1 = 1$). La relation (I.35) se ré-écrit alors :

$$\overrightarrow{I_{MF}} = \frac{\left|\widehat{(i_0)_1}\right|}{\left|\widehat{(\epsilon_0)_1}\right|}\overrightarrow{E_{MF}} \tag{I.36}$$

Par conséquent, si la machine fictive d'inductance M_k est alimentée pour produire un couple, l'amplitude de courant de consigne à appliquer est :

$$\left|\widehat{(i_0)_{h_k}}\right| = \frac{\left|\widehat{(\epsilon_0)_{h_k}}\right|}{\left|\widehat{(\epsilon_0)_1}\right|}\left|\widehat{(i_0)_1}\right| \tag{I.37}$$

Cette stratégie d'alimentation permet d'exploiter la machine fictive au maximum de sa faculté de production du couple [19]. La relation (I.37) permet de calculer le couple électromagnétique moyen $\widehat{(T_k)}_0$ fourni par la machine fictive d'inductance M_k. Il est d'intéressant de l'exprimer en fonction du couple moyen par la machine principale $\widehat{(T_1)}_0$ (c'est-à-dire celui qui correspond à la classique alimentation sinusoïdale de la machine) :

$$\widehat{(T_k)}_0 = \widehat{(T_1)}_0 \left(\frac{\left|\widehat{(\epsilon_0)_{h_k}}\right|}{\left|\widehat{(\epsilon_0)_1}\right|}\right)^2 \tag{I.38}$$

Finalement, la relation (I.38) montre bien que la capacité de production de couple d'une machine fictive dépend exclusivement du contenu harmonique de la force électromotrice élémentaire, c'est-à-dire de la conception de la machine.

I.3.2.2 Définition des forces électromotrices fictives

Il est donc judicieux d'orienter la conception de la machine polyphasée de telle sorte à rendre des machines fictives capables de produire un couple significatif et peu fluctuant. Cette orientation de conception permet de retirer un bénéfice maximal de la nécessaire régulation des courants fictifs. L'objectif de ce paragraphe est donc de spécifier un profil de force électromotrice (un gabarit) parfaitement adapté à l'alimentation des machines fictives.

Comme le couple résulte de l'interaction de la force électromotrice avec le courant, une bonne adaptation de ces deux signaux permet d'améliorer la densité de couple et d'en réduire les fluctuations. Il est d'ailleurs tout à fait possible de calculer, pour une forme de force électromotrice donnée, une forme de courant qui assure l'absence de pulsations [31]. La référence [18] montre que la situation idéale correspond à une force électromotrice carrée associée à un courant carré parfaitement phasé. Dans ce cas, le couple électromagnétique instantané est rigoureusement constant et la densité de couple est maximisée. Cette situation montre que la forme de force électromotrice permettant d'obtenir le maximum de couple est le carré. Ceci est tout à fait logique puisque, parmi les différents signaux alternatifs, le signal carré est celui qui présente la plus haute valeur efficace, donc la plus haute énergie. Cette considération permet de fixer une force électromotrice élémentaire idéale dans le cadre de la stratégie d'alimentation multimachine.

Pour un signal de force électromotrice élémentaire carré, les amplitudes des harmoniques

prennent la forme suivante :

$$\left|\widehat{(\epsilon_0)}_h\right| = \frac{\left|\widehat{(\epsilon_0)}_1\right|}{h}$$

Selon la stratégie d'alimentation multimachine définie, une machine fictive ne peut être alimentée que par son harmonique de rang minimal. Cet harmonique de courant h_k va inter-agir avec l'harmonique h_k de la fem pour produire le couple moyen utile $\widehat{(T_k)}_0$. Mais il va également inter-agir avec les autres harmoniques de la fem pour produire des couples pulsatoires. Il faut donc faire en sorte d'éliminer dans la force électromotrice tous ces harmoniques. Par conséquent, si la machine fictive d'inductance M_k est commandée pour produire un couple, la fem élémentaire fictive correspondante doit être sinusoïdale et d'amplitude déterminée comme suit :

$$\epsilon_k(t) = \frac{\widehat{(\epsilon_0)}_1}{h_k} e^{jh_k\omega t} \tag{I.39}$$

La fem élémentaire de phase est la somme des fem élémentaires fictives :

$$\epsilon_0(t) = \widehat{(\epsilon_0)}_1 \left(\sum_{k=0}^{N_f-1} \frac{e^{jh_k\omega t}}{h_k} \right)$$

Dans une telle configuration, d'après la relation (I.38), le rapport du couple fourni par la machine d'inductance M_k sur celui de la machine principale est $(1/h_k)^2$. En pratique, seule la machine sensible à l'harmonique de rang 3 est susceptible de fournir un couple significatif : environ 11 % du couple de la machine principale. Pour la machine d'harmonique de rang minimal 5, le ratio descend à 4 %. Par exemple, dans [31], le cas d'une machine à 13 phases est étudié. Pour cette machine à force électromotrice trapézoïdale, l'amplitude de l'harmonique de rang 3 est d'environ 20 % celle du fondamental : elle peut donc fournir un couple valant 4 % de celui de la machine principale. La stratégie retenue revient à alimenter la machine principale et la machine sensible à l'harmonique 3.

Evidemment, pour augmenter la capacité de production de couple de la machine fictive d'harmonique de rang minimal h_k, chercher à monter le rapport entre l'harmonique de rang h_k et le fondamental au-delà de $1/h_k$ est envisageable. Mais, concrètement, cette amélioration se ferait au détriment de la machine principale : la force électromotrice résultante serait anormalement creusée.

En somme, l'objectif de conception revient à faire en sorte que les machines fictives aient soit des forces électromotrices parfaitement sinusoïdales (situation de production de couple), soit des forces électromotrices rigoureusement nulles. Sur le plan du contrôle, une telle situation équivaut à une absence totale de perturbations pour les machines fictives, ce qui facilite leurs régulations.

I.3.2.3 Critères sur les constantes de temps de machines fictives

Volontairement alimentées ou non, les machines fictives doivent être régulées en courant. Comme l'a montré le paragraphe I.3.1.3, cette nécessaire régulation est dimensionnante pour la fréquence de commutation des interrupteurs. Régi par la relation (I.3.1.3), le choix de cette fréquence est directement relié à la valeur de la plus petite constante de temps des machines fictives. Par conséquent, si toutes les machines fictives avaient des constantes de

temps du même ordre, la fréquence de commutation nécessaire ne serait pas plus élevée que celle correspondant au cas de l'alimentation sinusoïdale. L'objectif est donc de concevoir la machine telle que les inductances fictives soient toutes très proches, idéalement égales. Ce paragraphe examine les moyens d'y parvenir.

Les valeurs des inductances fictives dépendent des valeurs des inductances mutuelles de phases (regroupées dans la matrice d'inductance statorique). A entrefer et épaisseur de la couche d'aimants fixés, ces inductances mutuelles sont principalement fonction de la géométrie de l'encoche et de la configuration du bobinage.

La géométrie de l'encoche détermine le flux de fuite, c'est-à-dire la part de flux qui, lors de l'alimentation d'une phase, n'est captée par aucune autre phase. Pour rendre compte de ce phénomène, l'inductance principale est classiquement scindée en deux termes : un terme d'inductance mutualisante m_0^{mut} et un terme d'inductance de fuite m_0^{fuite}. Soit :

$$m_0 = m_0^{mut} + m_0^{fuite}$$

Dans ce cas, d'après la relation (I.13) l'inductance fictive M_k peut être re-précisée :

$$M_k = m_0^{fuite} + m_0^{mut} + \sum_{n=1}^{N-1} m_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right)$$

Cette relation montre que l'inductance de fuite agit équivalemment sur chacune des inductances fictives. Par conséquent, plus l'inductance de fuite est grande, plus elle est prépondérante dans les inductances fictives et plus celles-ci sont proches les unes des autres. L'augmentation des inductances de fuite pour égaliser les constantes de temps des machines fictives est une solution proposée dans [19] et [43]. Ces deux références soulignent que, dans le cas d'une machine à répartition sinusoïdale de la force magnétomotrice, l'inductance de la machine secondaire est quasiment nulle en l'absence de fuite[9].

Comme l'augmentation des inductances de fuite se fait au détriment du flux mutualisant, une solution plus intéressante consiste à rechercher des configurations de bobinage favorisant naturellement l'obtention d'inductances fictives du même ordre. Diminuant les couplages entres les phases, les bobinages concentrés autour d'une dent sont un moyen efficace d'y parvenir [9, 12]. Malheureusement, à moins d'avoir un pas d'encoche proche en taille du pas polaire [47], ce résultat s'obtient au préjudice du facteur de bobinage. Evoquée dans [43], une autre possibilité consiste à réaliser des bobinages fractionnaires particuliers permettant d'obtenir des inductances fictives comparables tout en maintenant un bon facteur de bobinage.

[9] Ceci résulte de la réparition sinusoïdale de la force magnétomotrice que génère un tel bobinage. Les colonnes de la matrice d'inductance forment alors des vecteurs appartenant au plan de la machine principale, ce qui explique le résultat. Ceci est illustré au chapitre III, paragraphe III.1.1.4, page 96.

Sous hypothèse de linéarité, la décomposition multimachine peut s'appliquer à toutes les machines polyphasées régulières à entrefer lisse. Dans un tel contexte, la matrice d'inductance statorique est circulante et symétrique. Cette matrice de dimension égale au nombre de phases peut être diagonalisée par l'intermédiaire de tranformations orthonormales classiques (comme *Fortescue* ou *Concordia*) : les valeurs propres correspondent aux inductances cycliques et les espaces propres sont soit des droites, soit des plans. Projetées dans les espaces propres, les différentes équations en tension de la machine sont découplées et la propriété d'orthogonalité montre que la puissance de la machine polyphasée est distribuée sur chaque espace propre. Ces deux arguments motivent la construction des machines fictives. Une machine fictive est une réprésentation physique d'un espace propre :

- son inductance est égale à la valeur propre de l'espace considéré,
- son nombre de phase est égal à la dimension de l'espace (un ou deux),
- ses grandeurs de phase fictive (tension, courant, fem, ...) sont une composition particulière d'harmoniques de la phase réelle.

Lorsque la machine polyphasée est alimentée par onduleur de tension MLI, les machines fictives permettent d'expliquer l'origine des courants parasites et de définir des démarches correctrices. Tout d'abord, pour réduire les courants parasites, il faut réguler les courants des machines fictives. Ceci nécessite une adaptation de la fréquence de MLI à la plus petite constante de temps des machines fictives. Par conséquent, comme la régulation des courants fictifs est nécessaire, une stratégie de commande visant à faire produire du couple aux machines fictives n'est plus sur-dimensionnante pour l'onduleur. Concevoir la machine polyphasée pour rendre ses machines fictives capables de produire un couple significatif et peu fluctuant est donc une problématique pertinente.

Les objectifs pour l'adaptation ont été mis en avant. Pour faciliter le filtrage du bruit de MLI, il faut concevoir la machine polyphasée de telle sorte à égaliser ses inductances cycliques. Ainsi toutes les machines fictives auront les mêmes constantes de temps. Selon la stratégie d'alimentation multimachine choisie, pour une machine fictive diphasée donnée, un couple fictif constant peut être obtenu à condition que la force électromotrice soit sinusoïdale à la fréquence de l'harmonique de rang minimal de la machine considérée. Pour étudier la faisabilité de ces objectifs et en déduire des démarches de conception, il faut être en mesure de calculer les séries d'inductance mutuelles et la force électromotrice pour les machines polyphasées à pôles lisses. Une méthode de calcul rapide et adaptée à ce problème est détaillée dans le chapitre suivant.

Chapitre II

CHAPITRE II

Modélisation de la Machine polyphasée à Pôles lisses

Sommaire

II.1 Description de la machine réelle 47
II.1.1 Géométrie et constitution des machines considérées 47
II.1.2 Bobinages polyphasés considérés 49
II.1.3 Couches d'aimants considérées 54
II.2 Représentation des termes sources 55
II.2.1 Fonctions d'aimantation 55
II.2.2 Fonctions de bobinage de phase 57
II.2.3 Représentation matricielle du bobinage 60
II.3 Méthode de calcul analytique du champ 66
II.3.1 Calcul analytique du champ pour une machine sans encoche à pôles lisses 67
II.3.2 Correspondance entre une machine sans encoche et une machine encochée 68
II.4 Calcul des grandeurs globales 72
II.4.1 Evaluation du flux à l'aide de la modélisation du bobinage 73
II.4.2 Calcul analytique de la force électromotrice 76
II.4.3 Calcul analytique des inductances de phase 80

Les machines fictives n'existent qu'au travers de la machine polyphasée qu'elles représentent. Par conséquent, le problème visant à définir des règles de conception orientées sur les machines fictives ne peut se faire sans une modélisation préalable de la machine polyphasée. Le but de ce chapitre est donc de présenter une modélisation de la machine polyphasée à pôles lisses facilitant la caractérisation des machines fictives.

La décomposition multimachine montre que la machine fictive est caractérisée par une inductance cyclique et une force électromotrice composée d'une série d'harmoniques particuliers. Ainsi, pour la caractériser précisément, il faut connaître la série d'inductances mutuelles

et la force électromotrice de la machine polyphasée. Ces grandeurs peuvent être estimées à l'aide d'une méthode de calcul qui s'appuie sur une modélisation du champ dans la machine. Deux grandes méthodes de calcul co-habitent : le calcul numérique et le calcul analytique. Pour le problème de calcul des grandeurs électromagnétiques d'une machine, ces deux méthodes visent à résoudre les équations aux dérivées partielles régissant le champ : l'une par discrétisation (numérique), l'autre exactement (analytique). La méthode analytique n'est pas généralement applicable.

En règle générale, le calcul numérique permet d'estimer le champ avec une précision supérieure à celle obtenue avec le calcul analytique. Mais, dans le cadre d'une démarche de dimensionnement systématique des machines fictives, les procédures numériques peuvent être pénalisantes. En effet, elles sont caractérisées par des temps de calcul plus importants. De plus, pour de petites variations des paramètres géométriques, il devient difficile de déterminer si les variations sur les grandeurs étudiées résultent effectivement des variations sur les paramètres géométriques ou alors des variations sur le maillage. Pour pouvoir balayer une large gamme de machines et éventuellement optimiser certaines structures, il est souhaitable de disposer d'un outil de simulation rapide, robuste et relativement précis. Le choix d'une modélisation basée sur un calcul analytique est donc privilégié. Ce choix est d'autant plus acceptable que les machines radiales à aimants de surface disposent d'une géométrie relativement simple : sous certaines hypothèses simplificatrices, le champ peut y être analytiquement estimé avec une précision convenable.

La première partie est consacrée à la description de la machine polyphasée à pôles lisses en terme de géométrie et de caractéristiques magnétiques. Ensuite, la deuxième partie décrit la modélisation des termes sources d'induction de la machine : les aimants du rotor et les conducteurs du bobinage statorique. Comme le contenu harmonique de la force électromotrice et les valeurs de la série des inductances mutuelles dépendent considérablement du bobinage de la machine, celui-ci est modélisé précisément et le plus généralement possible (en deux dimensions). La troisième partie détaille la méthode de calcul analytique permettant une estimation correcte du champ pour les machines à pôles lisses et stator encoché. Enfin, la dernière partie propose un calcul analytique des grandeurs globales de la machine polyphasée : la force électromotrice et les inductances mutuelles.

Libellé	Variable	Unité	Remarque
Nombre de phases	N	-	
Nombre d'encoches	N_s	-	
Nombre de pôles	N_p	-	
Nombre de paires de pôles	p	-	$N_p = 2p$
Longueur effective	L_m	m	
Rayon Statorique	r_{st}	m	
Epaisseur Culasse Stator	e_{cs}	m	
Rayon Rotorique	r_{rt}	m	
Epaisseur Culasse Rotor	e_{cr}	m	
Entrefer Mécanique	g_m	m	
Epaisseur Couche d'Aimant	g_a	m	$r_{rt} = r_{st} \pm (g_a + g_m)$
Pas d'encoche	τ_s	rad	$\tau_s = 2\pi/N_s$
Ouverture d'encoche	ω_s	rad	
Largeur d'encoche	δ_s	rad	
Epaisseur de bec d'encoche	b_s	m	
Profondeur d'encoche	p_s	m	

Tableau II.1 — Notations adoptées pour les paramètres topologiques et géométriques de la machine

II.1 Description de la machine réelle

Cette partie précise tout d'abord la topologie des machines étudiées. Structurellement, c'est surtout par le bobinage que les machines polyphasées se distinguent des machines triphasées. C'est pourquoi la deuxième section est consacrée à la description des bobinages polyphasés envisagés. Enfin, une description du rotor à aimants déposés est donnée dans la dernière section.

II.1.1 Géométrie et constitution des machines considérées

Les machines considérées sont des machines radiales à aimants déposés. Dans cette section, la géométrie et les notations adoptées pour représenter la machine sont explicitées puis les propriétés magnétiques des aimants constituant les pôles sont détaillées.

II.1.1.1 Topologie

Les machines considérées sont des machines radiales à aimants déposés. Le rotor peut être interne ou externe. Les conducteurs de phase sont disposés dans des encoches statoriques de forme rectangulaire. La figure II.1 représente la géométrie d'encoche considérée ainsi que la structure générale de la machine. Les notations qui y sont précisées sont reprises dans le tableau II.1. Afin de faciliter la modélisation et le calcul du champ, comme dans le chapitre I, la machine est munie de deux repères de calcul :

- un repère fixe lié au stator dont l'origine est positionné sur un axe de phase de la phase 0 ; ce repère est noté $\mathcal{R}_s(O_s, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_t})$
- un repère tournant lié au rotor dont l'origine est positionné au centre d'un pôle ; ce repère est noté $\mathcal{R}_r(O_r, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_t})$

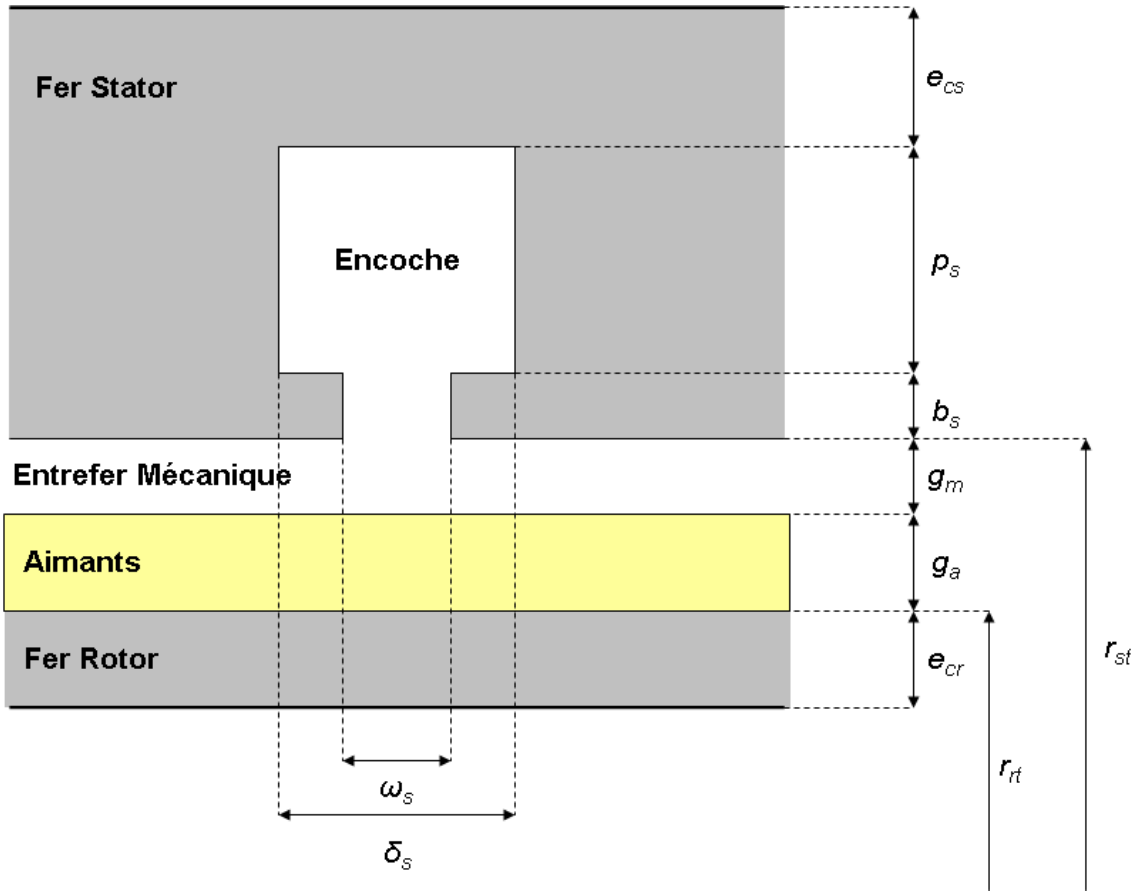


Figure II.1 — Modélisation des encoches et spécification des notations

Le décalage instantané entre les deux repères correspond à la position instantanée du rotor. Elle est notée $\theta_{\mathcal{R}_r/\mathcal{R}_s} = \theta$. L'angle correspondant à la position d'un point P du stator dans le repère statorique est noté $\theta_{P\in S/\mathcal{R}_s} = \theta_s$. L'angle correspondant à la position d'un point P du rotor dans le repère rotorique est noté $\theta_{P\in R/\mathcal{R}_r} = \theta_r$.

II.1.1.2 Type d'aimants

Le rotor de la machine est constitué d'aimants déposés, ce qui signifie que les pôles ne sont pas saillants. La culasse rotorique est à géométrie cylindrique et les aimants sont calés en surface. Les aimants considérés sont magnétiquement rigides. Dans un domaine de fonctionnement stabilisé, une caractéristique linéaire relie induction et champ magnétique :

$$\overrightarrow{B} = \mu_a \overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}$$

Dans cette expression, μ_a désigne la perméabilité de l'aimant et $\overrightarrow{M}$ est l'aimantation rémanente. Dans tout le volume d'aimant, la perméabilité est supposée constante et égale à la perméabilité de l'air :

$$\mu_a \approx \mu_0$$

Cette hypothèse est tout à fait acceptable pour des aimants à champ coercitif élevé (tels que les ferrites ou les composés terres rares) où, généralement, μ_a vaut environ $1.1\mu_0$. De même,

l'aimantation rémanente maintient sa norme constante dans tout le volume d'aimant quelque soient les conditions d'utilisation. En d'autres termes, le modèle proposé ne tient pas compte des effets liés à la démagnétisation[1].

Les aimants sont des matériaux *a priori* conducteurs. Donc ils peuvent être le siège de perte par courant de circulation. En effet, si la conductivité de l'aimant est notée σ_a, la loi d'*Ohm* relie le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ et la densité de courant $\overrightarrow{j}$ dans l'aimant :

$$\overrightarrow{j} = \sigma_a \overrightarrow{E}$$

Cependant, en régime permanent, l'induction vue par les aimants du rotor (qui résulte de la force magnétomotrice statorique) peut être considérée invariante en première approche. Donc le deuxième terme de l'équation de $Maxwell - Faraday$ relatif à la variation temporelle de l'induction peut être négligé :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t} \approx 0$$

Dans un tel contexte, les éventuelles pertes par courant de *Foucault* au rotor sont négligeables. Cette approximation est légitime pour les machines basse vitesse.

II.1.2 Bobinages polyphasés considérés

Le bobinage d'une machine polyphasée se conçoit comme l'extrapolation d'un bobinage triphasé. Les conditions d'obtention d'équilibre sont donc les mêmes qu'en triphasé. Aussi, la nature régulière ou irrégulière du bobinage se définit de la même manière. Et, quelque soit le nombre de phase, un bobinage équilibré doit répondre à des critères de périodicité et d'équivalence de phase bien précis. Tous ces aspects sont abordés dans les quatre paragraphes suivants.

II.1.2.1 Principe d'obtention d'un bobinage équilibré

Les références sur les techniques de bobinage concernent surtout les structures triphasées. L'ouvrage [8] étudie de manière exhaustive les techniques de bobinage des machines triphasées et la référence [17] donne les éléments pour la généralisation à un nombre quelconque de phases. L'analyse de l'ensemble bibliographique permet la synthèse suivante : le bobinage d'une machine polyphasée peut être vue comme la connexion de plusieurs bobines dont la répartition sur la circonférence de la machine doit être la plus régulière possible. En d'autres termes, l'ensemble des bobines constituant une phase doit générer des pôles Nord et Sud régulièrement espacés lorsque la phase est alimentée par un courant constant. Le bobinage est alors équilibré. Cette notion d'équilibre est illustrée par la figure II.2. Les axes de phases représentés sur la figure II.2 symbolisent les axes des bobines constituant la phase : le nombre d'axes d'une phase donnée est donc égal au nombre de paires de pôles de la machine. Pour obtenir un bobinage polyphasé équilibré, il faut maintenir cette disposition régulière des axes de phases le long de la machine. Concrètement, en cas de non respect de cette condition, les forces électromotrices de phase ne constituent plus un système régulièrement décalé en $\frac{2\pi}{N\omega}$ et la matrice d'inductance n'est plus circulante. En conséquence, la décomposition multimachine n'est plus utilisable.

[1] Dans [22], un modèle analytique intégrant les effets de la démagnétisation est proposé.

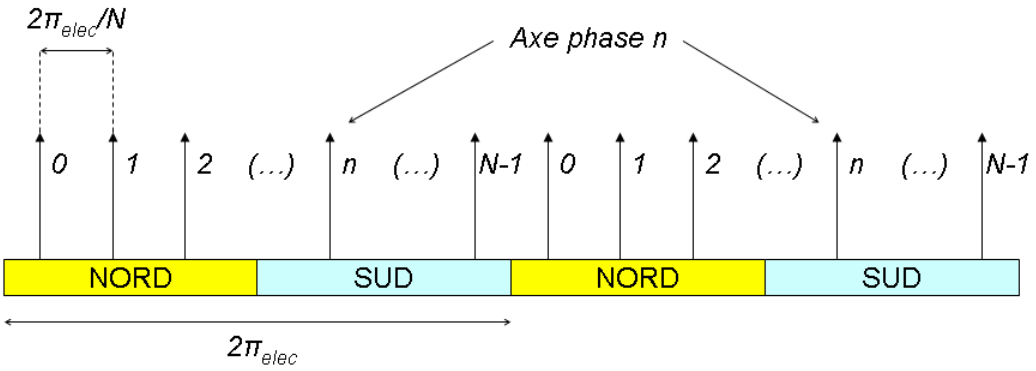


Figure II.2 — Principe d'obtention d'un bobinage polyphasé équilibré

Pratiquement, la synthèse[2] d'un bobinage polyphasé équilibré quelconque serait un problème trivial si les bobines constituant la phase pouvaient être disposées en n'importe quel endroit du stator. Malheureusement, il est physiquement nécessaire de disposer les conducteurs dans des encoches, ce qui revient à contraindre le positionnement des bobines.

Par hypothèse, les machines considérées dans ce mémoire sont à encoches régulièrement espacées. Dans ce contexte, pour bobiner de manière équilibrée une machine à N phases sur une structure à N_s encoches, il faut que N_s soit multiple de N. En fait, cette condition traduit la nécessité de pouvoir régulièrement décaler les phases. Si N_p est le nombre de pôles de la machine, il est courant pour caractériser la nature du bobinage de définir le nombre d'encoches par pôle et par phase noté s_{pp} :

$$s_{pp} = \frac{N_s}{N N_p} \tag{II.1}$$

Si s_{pp} est entier, il s'agit d'un bobinage entier. Sinon, le bobinage est qualifié de fractionnaire.

II.1.2.2 Bobinages équilibrés réguliers

Selon [45], les bobinages équilibrés réguliers désignent les bobinages dont le motif se répète à l'identique pour tous les pôles et toutes les phases. Pour cette famille de bobinage s_{pp} est nécessairement entier. La figure II.3 donne l'exemple d'un tel bobinage pour une machine pentaphasée à 20 encoches et 4 pôles : elle représente les positions des conducteurs aller et retour dans les encoches pour chacune des phases. Il s'agit d'un bobinage monocouche à pas diamétral : monocouche dans le sens où les conducteurs d'une encoche sont attribués à une et une seule phase ; pas diamétral dans le sens où les bobines constituant la phase ont un pas égal au pas polaire[3]. Les $2 \times 5 = 10$ axes de phase sont régulièrement décalés et correctement ordonnés. Cet exemple met bien en évidence la notion de régularité : il suffit de connaître le motif de distribution des conducteurs au-dessus d'un pôle pour totalement connaître la répartition du bobinage d'une phase.

[2]Le terme de synthèse désigne juste l'étape qui consiste à positionner les allers et les retours des bobines pour chaque phase. Le problème de la définition de la connexion des bobines entre elles et des éventuels croisements de têtes de bobine résultants n'est pas, à ce stade du mémoire, évoqué.

[3]Dans le cas d'une seule paire de pôles, l'aller et le retour sont diamétralement opposés ; d'où le terme de pas diamétral.

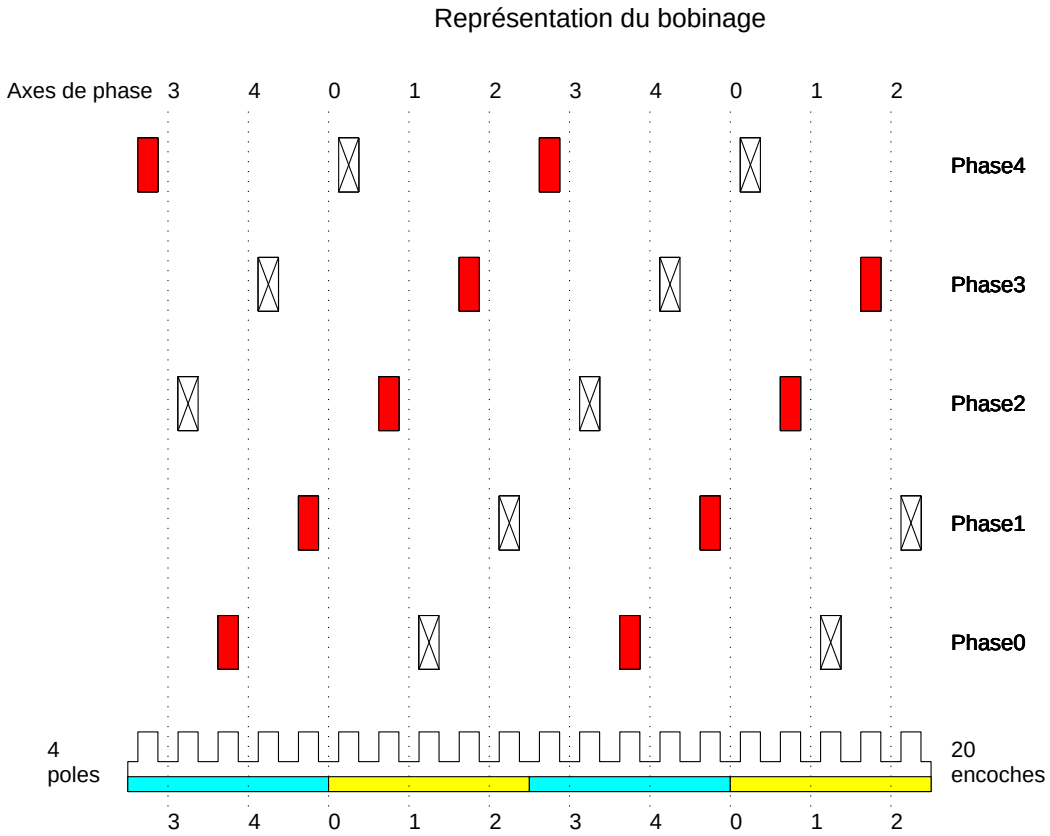


Figure II.3 — Exemple d'un bobinage équilibré régulier pour une machine à 5 phases, 20 encoches et 2 paires de poles ($s_{pp} = 1$)

II.1.2.3 Bobinages équilibrés irréguliers

Par opposition aux bobinages équilibrés réguliers, le motif de bobinage ne se répète pas à l'identique pour tous les pôles et toutes les phases. Cette configuration est possible pour un nombre d'encoches par pôle et par phase entier : il s'agit alors d'un bobinage équilibré à trous. La figure II.4 reprend la configuration à 5 phases, 20 encoches et 4 pôles de la figure II.3. Cette fois, il s'agit d'un bobinage deux couches : une encoche contient des conducteurs de deux phases différentes. Ce bobinage n'est pas régulier. En effet, si tel était le cas, la deuxième encoche au-dessus du deuxième pôle (c'est-à-dire la septième encoche en partant de la gauche sur la figure II.4) devrait être occupée par des conducteurs retour de la phase 0 car la deuxième encoche au-dessus du premier pôle (c'est-à-dire la deuxième encoche en partant de la gauche) est occupée par des conducteurs aller de la phase 0. Néanmoins, comme le nombre d'encoches par pôle et par phase est entier, la périodicité du bobinage est de deux pas polaires.

Lorsque le nombre d'encoches par pôle et par phase est fractionnaire, le bobinage est nécessairement irrégulier et il est alors dénommé bobinage équilibré fractionnaire. La figure II.5 décrit un exemple de bobinage fractionnaire pour une machine à 5 phases, 20 encoches et 3 paires de pôles. Le nombre d'encoches par pôle et par phase est donc de 2/3 et le bobinage est à deux couches. La position des différents axes de phase par rapport aux pôles met bien en évidence l'absence de motifs de bobinage sur un pôle ou même sur une paire de pôle. Dans l'exemple décrit, il faut observer la machine sur toute sa circonférence pour en déterminer le

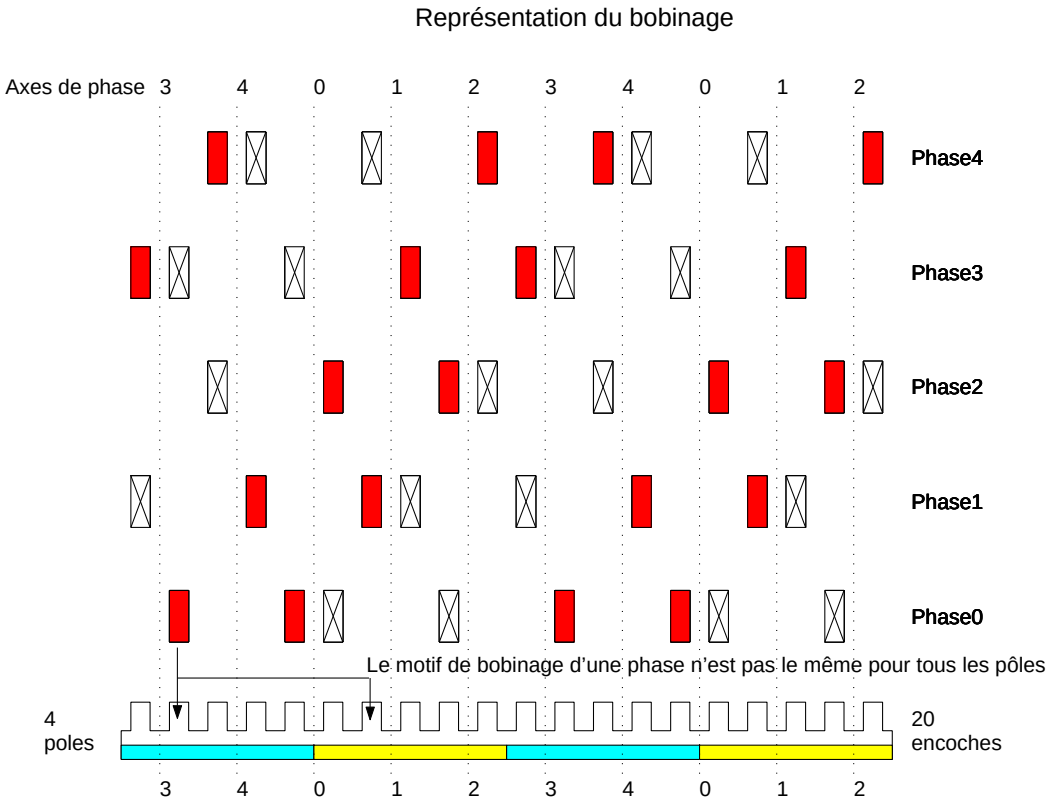


Figure II.4 — Exemple d'un bobinage équilibré irrégulier à trou pour une machine à 5 phases, 20 encoches et 2 paires de poles ($s_{pp} = 1$)

motif de bobinage.

II.1.2.4 Périodicité et circularité d'un bobinage polyphasé équilibré

Les paragraphes précédents illustrent la notion de motifs pour les bobinages polyphasés équilibrés. Ce motif correspond en fait à la périodicité du bobinage pour une phase donnée : cette périodicité correspond au nombre minimal d'encoches à parcourir pour totalement caractériser le bobinage. Sur les configurations où le nombre d'encoches par pôle et par phase est entier ($s_{pp} = 1$), cette période correspond simplement au nombre d'encoches par paire de pôles (puisque, comme le montrent les exemples des figures II.3 et II.4, les motifs se répètent à l'identique au-dessus de chaque paire de pôles). Sur les configurations à bobinage fractionnaire, pour définir le motif, il faut parcourir un nombre d'encoches correspondant à un nombre entier de pôles. Ce nombre d'encoches est notée N'_s et s'exprime :

$$N'_s = \frac{N_s}{pgcd(N_s, p)} \tag{II.2}$$

Apparaissant dans [17] et dans [2], cette relation définissant la période du bobinage est valable quelque soit le type de bobinage équilibré (s_{pp} entier ou non). Dans la suite, N'_s est appelé nombre réduit d'encoches. De façon analogue, le nombre réduit de paires de pôles est défini :

$$p' = \frac{p}{pgcd(N_s, p)} \tag{II.3}$$

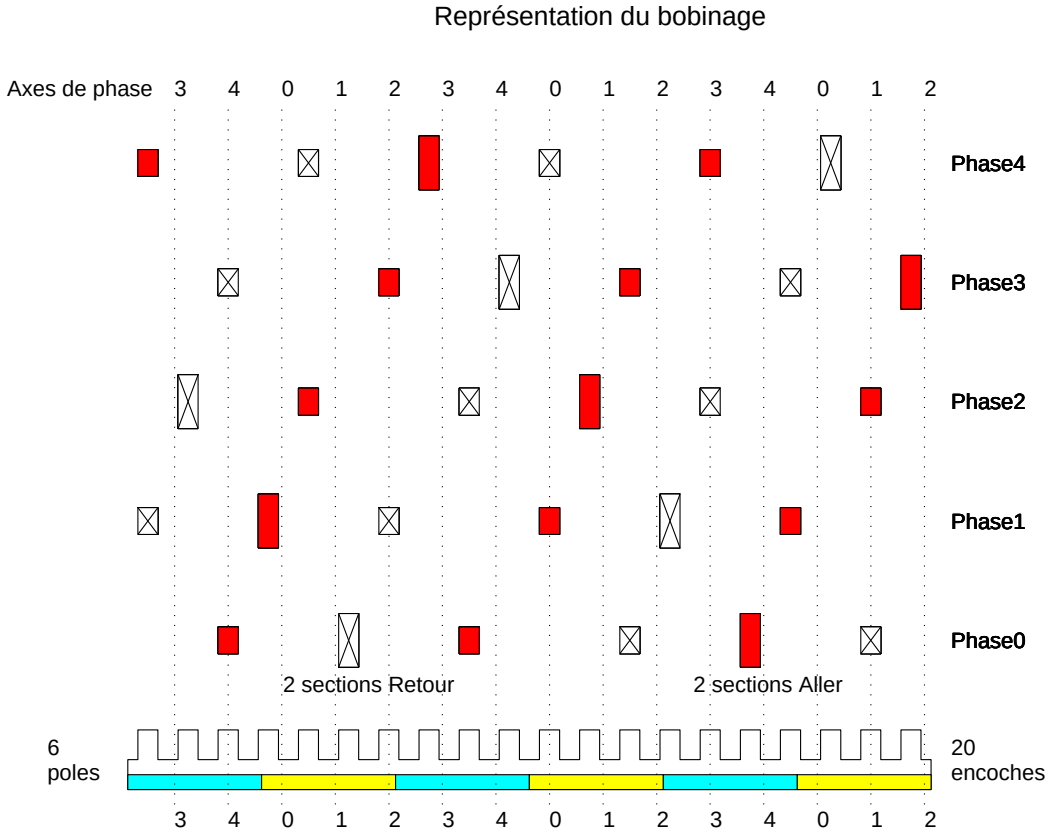


Figure II.5 — Exemple d'un bobinage équilibré irrégulier fractionnaire pour une machine à 5 phases, 20 encoches et 3 paires de poles ($s_{pp} = 2/3$)

Les bobinages polyphasés équilibrés possèdent une propriété de circularité qui est la conséquence directe de la régularité de construction de la machine. Cette propriété traduit simplement le fait que le bobinage de la phase n se déduit par décalage de celui de la phase $n-1$. Le nombre d'encoches correspondant au décalage entre deux phases consécutives est appelé indice de circularité. Cet indice de circularité est signé :

- il est compté positif si les phases sont ordonnés dans le sens direct,
- il est compté négatif si les phases sont ordonnés dans le sens indirect.

Pratiquement, l'indice de circularité attribue les $p'N$ axes de phases aux N phases de telle sorte que les forces électromotrices de phase soient $2\pi_{elec}/N$ décalées. Nécessairement, l'indice de circularité est un multiple de N'_s/N ; ce que traduit l'expression suivante :

$$i_c = d\frac{N'_s}{N} \tag{II.4}$$

Ainsi, sur les exemples de bobinages entiers des figures II.3 et II.4, l'ordre des phases est direct et l'indice de circularité est égal à 2 ($d = 1$). Sur l'exemple de bobinage fractionnaire de la figure II.5, l'indice de circularité est 8 ($d = 2$). Il est convenu que, pour un bobinage triphasé, la connaissance de l'indice de circularité présente peu d'intérêt : les phases sont ordonnées soit directement, soit indirectement. Le tableau II.2 donne les valeurs des indices de circularité pour les configurations étudiées dans ce mémoire.

N_s	N_p	N	N'_s	p'	N'_s/N	i_c	d
20	4	5	10	1	2	$\pm$ 2	$\pm$ 1
20	6	5	20	3	4	$\pm$ 8	$\pm$ 2
21	16	7	21	8	3	$\pm$ 3	$\pm$ 1
80	14	5	80	7	16	$\pm$ 32	$\pm$ 2

Tableau II.2 — Quelques exemples de valeurs d'indice de circularité

II.1.3 Couches d'aimants considérées

Les pôles de la machine sont constitués d'aimants dont les caractéristiques géométriques et magnétiques sont ici détaillées.

II.1.3.1 Géométrie

Les aimants modélisés appartiennent au rotor de la machine polyphasée. Par conséquent, leur forme est adaptée à la géométrie de la machine radiale : il s'agit d'une géométrie rectangulaire cintrée. Par ailleurs, la machine étant modélisée en deux dimensions, les aimants sont considérés comme des portions d'aimants infiniment longs. Deux arguments justifient de figer la géométrie d'aimant (et donc d'interdire *a priori* l'optimisation de leur forme) :

- sur le plan du calcul analytique du champ, cette hypothèse permet de fixer au préalable la position des termes sources, ce qui simplifie grandement la mise en équation ;
- sur le plan de l'optimisation, cette hypothèse garantit une solution pratiquement réalisable et évite donc de formuler des contraintes supplémentaires sur la géométrie des aimants.

Concernant le vecteur aimantation rémanente de l'aimant, deux configurations sont envisagées :

- aimantation radiale ; en tout point de l'aimant, la direction de $\overrightarrow{M}$ est radiale,
- aimantation parallèle ; la direction de l'aimantation $\overrightarrow{M}$ est fixée au centre de l'aimant et, en tout point de l'aimant, l'aimantation est parallèle à cette direction.

La figure II.6 illustre la géométrie d'aimant prise en compte et les deux types d'aimantation considérées.

II.1.3.2 Constitution d'un pôle

Le pôle de la machine est composé d'un nombre fini d'aimants. Tous les aimants ont la même hauteur radiale g_a. Par hypothèse, un pôle admet en son centre un axe de symétrie. L'un de ces axes de symétrie définit l'origine du repère rotorique $\mathcal{R}_r(O_r, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_t})$. La position d'un point M du rotor par rapport au repère rotorique est noté θ_r. Les pôles sont constitués de $2n_a$ aimants (n_a est donc le nombre d'aimant par demi-pôle). Chacun des n_a aimants est indicé k pour k variant de 0 à $n_a - 1$. L'aimant numéro k est caractérisé par le jeu de paramètres suivants :

- $l_{a,k}$ est la largeur de l'aimant,
- $c_{a,k}$ est la position du centre de l'aimant dans le repère $\mathcal{R}_r$,
- M_k est la norme de l'aimantation,
- $\alpha_{a,k}$, exclusivement définie pour une aimantation parallèle, désigne l'orientation du vecteur $\overrightarrow{M}$ dans le repère $\mathcal{R}_r$

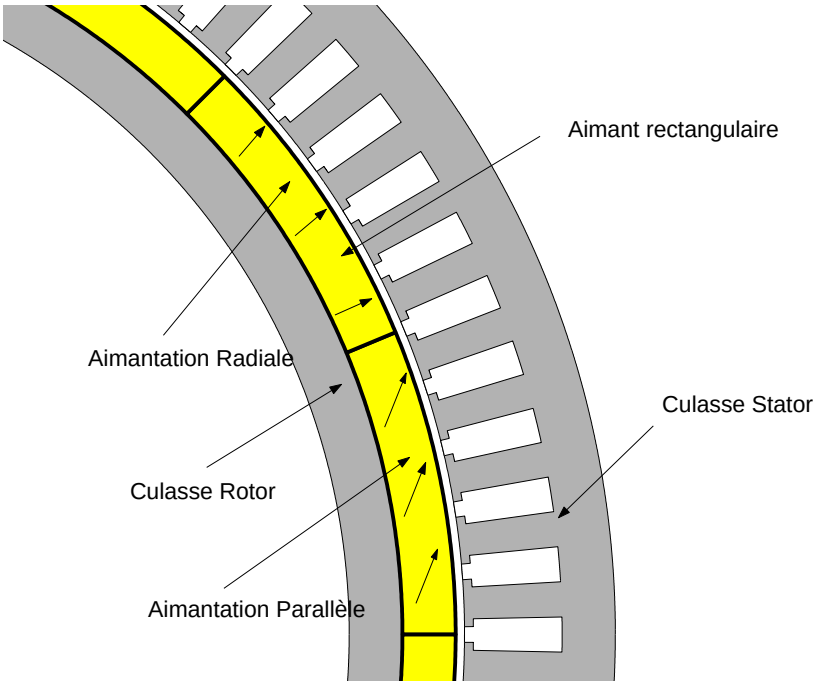


Figure II.6 — Géométrie d'aimants prise en compte

Ce paramétrage permet d'aborder tous les types d'aimantation et notamment l'aimantation progressive de *Halbach* conçue pour obtenir une force électromotrice sinusoïdale [16].

II.2 Représentation des termes sources

Cette partie est consacrée à la modélisation des termes sources de la machine, c'est-à-dire à la mise en équation des aimants du rotor et des conducteurs de phase. La première sous-partie présente la modélisation des aimants du rotor par l'intermédiaire des fonctions d'aimantation. Les deux sections suivantes sont consacrées à la modélisation des conducteurs de phase au travers d'une représentation mathématique du bobinage polyphasé. Assez utilisée, la méthode de représentation choisie est basée sur l'utilisation d'une fonction appelée "Fonction de bobinage" ("Winding Function" en anglais). Après un examen de l'origine et des propriétés de cet outil, une modélisation matricielle du bobinage est proposée afin de rendre compte de la nature discrète de la localisation des conducteurs sur la périphérie du stator. Cette modélisation matricielle s'appuie sur la discrétisation de la fonction de bobinage et sur l'introduction d'une nouvelle fonction appelée "Distribution de conducteurs".

II.2.1 Fonctions d'aimantation

Les fonctions d'aimantation représentent mathématiquement les caractéristiques des aimants constituant le pôle. Elles consistent à décrire dans le repère rotorique $\mathcal{R}_r$ l'évolution des deux composantes du vecteur aimantation. Ainsi, la fonction d'aimantation radiale f_{ar} donne l'évolution de la composante radiale de $\overrightarrow{M}$ en fonction de θ_r et la fonction d'aimantation tangentielle f_{at} donne l'évolution de la composante orthoradiale.

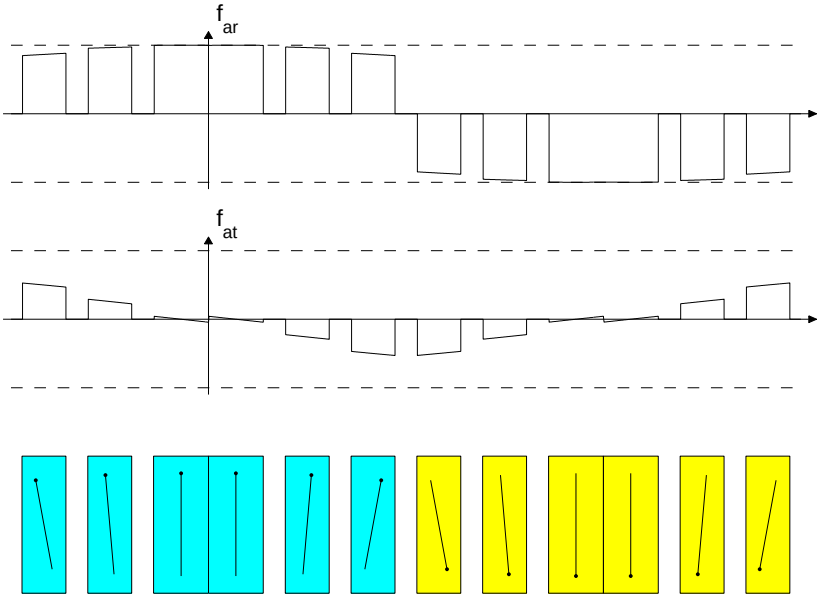


Figure II.7 — Exemple de modélisation complète d'une paire de pôles (pour $p = 10$). Les aimants sont à aimantation parallèle de norme M. Les fonctions d'aimantation sont normalisées par rapport à M.

II.2.1.1 Construction

Pour évaluer f_{ar} et f_{at}, il suffit de connaître les deux composantes de $\overrightarrow{M}$ en tout point du demi-pôle ; c'est-à-dire en tout point de chacun des n_a aimants constituant le demi-pôle :

- si l'aimant k est aimanté radialement,

$$\begin{cases} f_{ar}(\theta_r) = M_k \\ f_{at}(\theta_r) = 0 \end{cases}$$

- si l'aimant k est aimanté parallèlement,

$$\begin{cases} f_{ar}(\theta_r) = M_k \cos\left(\alpha_{a,k} - (\theta_r - c_{a,k})\right) \\ f_{at}(\theta_r) = M_k \sin\left(\alpha_{a,k} - (\theta_r - c_{a,k})\right) \end{cases}$$

Les valeurs des fonctions d'aimantation sont complétées par symétrie pour l'autre demi-pôle et par anti-périodicité pour le pôle opposé. A titre illustratif, la figure II.7 donne l'allure des fonctions d'aimantation d'une machine à 10 paires de pôles dont un demi-pôle est composé de 3 aimants à aimantation parallèle. Il faut noter que les fonctions d'aimantation présentent une discontinuité à chaque changement d'aimants.

II.2.1.2 Propriétés

Du fait de leurs propriétés de périodicité et de symétrie, les fonctions d'aimantation présentent l'intérêt de pouvoir être décomposées en série de *Fourier*, ce qui, dans le contexte de la décomposition multimachine, facilite le calcul des grandeurs de machines fictives.

Les fonctions f_{ar} et f_{at} sont anti-périodiques. Par conséquent, les harmoniques de rang pair sont nuls. Par construction du repère rotorique $\mathcal{R}_r$, la fonction d'aimantation radiale est

paire et la fonction d'aimantation tangentielle est impaire. Il vient :

$$\begin{cases} f_{ar}(\theta_r) = \sum_{h=0}^{+\infty} \widehat{(f_{ar}^c)}_{2h+1} \cos\left((2h+1)p\theta_r\right) \\ f_{at}(\theta_r) = \sum_{h=0}^{+\infty} \widehat{(f_{at}^s)}_{2h+1} \sin\left((2h+1)p\theta_r\right) \end{cases}$$

Les coefficients de *Fourier* réels $\widehat{(f_{ar}^c)}_{2h+1}$ et $\widehat{(f_{at}^s)}_{2h+1}$ sont calculés sur la période $2\pi_{elec}$ (et non pas sur le tour complet de la machine) : ils dépendent des paramètres des aimants composant le demi-pôle. Des coefficients de *Fourier* peuvent être calculés pour chacun des aimants : ils ont notés $\widehat{(f_{ar,k}^c)}_{2h+1}$ et $\widehat{(f_{at,k}^s)}_{2h+1}$ pour l'aimant numéro k. Il vient alors :

$$\begin{cases} \widehat{(f_{ar}^c)}_{2h+1} = \sum_{k=0}^{n_a-1} \widehat{(f_{ar,k}^c)}_{2h+1} \\ \widehat{(f_{at}^s)}_{2h+1} = \sum_{k=0}^{n_a-1} \widehat{(f_{at,k}^s)}_{2h+1} \end{cases} \tag{II.5}$$

Les différents coefficients de *Fourier* de l'équation (II.5) sont disponibles dans l'annexe B. Pratiquement, c'est la connaissance de ces coefficients qui va permettre le calcul de la force électromotrice.

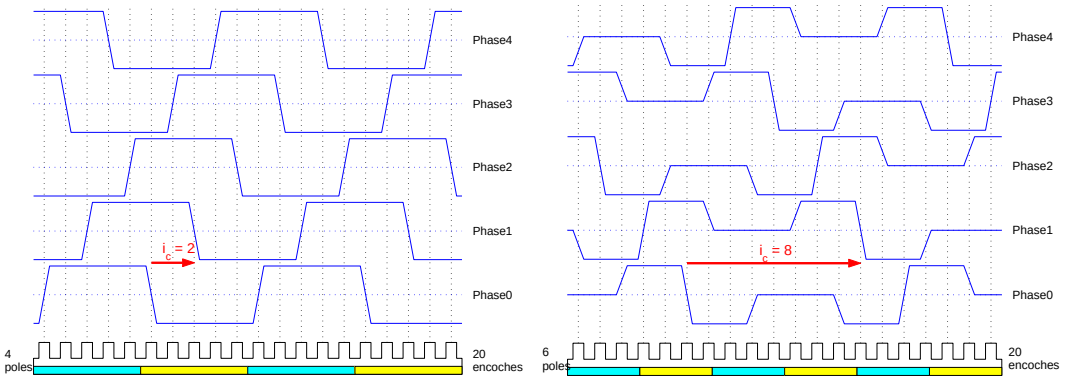
Cette modélisation par fonction d'aimantation est très intéressante. A géométrie de machine donnée, le problème visant à fixer la forme de l'induction rotorique au niveau du stator revient, par hypothèses de linéarité, à spécifier des fonctions d'aimantation radiale et tangentielle idéales. Il ne reste plus alors qu'à rechercher des séries de paramètres d'aimant dont l'association approche au mieux les fonctions d'aimantation idéales.

II.2.2 Fonctions de bobinage de phase

Utilisée dans [57] et [58], la fonction de bobinage est un outil chargé de représenter l'influence du bobinage de la machine sur le champ tournant statorique. Le grand intérêt de cette fonction est de séparer dans le champ tournant les contributions spatiales, c'est-à-dire liées aux caractéristiques intrinsèques de la machine, des contributions temporelles, c'est-à-dire liées à l'alimentation de la machine. Par conséquent, son utilisation permet d'aborder le problème de l'adaptation du profil de la distribution des bobines de phase dans les encoches en fonction du type d'alimentation.

II.2.2.1 Définition de la fonction de bobinage de phase

La définition de la fonction de bobinage s'appuie sur la notion d'onde de force magnétomotrice statorique. Cette onde correspond au champ tournant statorique et est comptée en Ampère-tours ($A.t$). Elle se représente en un instant t et en une position θ_s du stator. Les variations temporelles sont issues des courants de phase $i_n(t)$ et les variations spatiales résultent de la distribution des conducteurs de phase dans les encoches. C'est cette distribution qui est modélisée à l'aide de la fonction de bobinage, notée $N_n(\theta_s)$ pour la phase



(a) Bobinage régulier à pas diamétral (b) Bobinage fractionnaire $s_{pp} = 2/3$

Figure II.8 — Fonction de bobinage de deux bobinages pentaphasés sur 20 encoches

n. Dans ce contexte, l'onde de force magnétomotrice statorique s'exprime :

$$f_{mm}(\theta_s, t) = \sum_{n=0}^{N-1} i_n(t) N_n(\theta_s) \tag{II.6}$$

Concrètement, la fonction de bobinage en une position θ_s somme les conducteurs de la phase n compris dans la zone $[0, \theta_s]$ en comptant positivement les conducteurs aller et négativement les conducteurs retour. Elle correspond à la force magnétomotrice d'une phase alimentée par un courant constant de un Ampère. Son unité est le nombre de conducteurs.tours $[n_{cd}.tour]$. La figure II.8 donne les allures des fonctions de bobinage de phases correspondant aux bobinages 5 phases des figures II.3 et II.5. Les courbes représentent des fonctions de bobinage normalisées par rapport à leur maximum. Elles mettent en évidence que la fonction de bobinage présente une varation linéaire le long de l'ouverture d'encoche. Cette information rend compte de la largeur d'encoche supposée remplie uniformément. En conséquence, la dérivée de la fonction de bobinage est nulle partout sauf dans les zones de conducteurs. Donc cette dérivée permet de localiser les conducteurs de la phase.

La dérivée de la fonction de bobinage correspond à la fonction densité de conducteurs notée $D_n(\theta_s)$ pour la phase n :

$$D_n(\theta_s) = \frac{1}{r_{st}} \frac{dN_n}{d\theta_s} \tag{II.7}$$

Cette fonction indique le nombre de conducteurs de phase par mètre en fonction de la position d'un point de la périphérie statorique repéré par l'angle θ_s. La fonction de densité de conducteurs est un outil courammnent utilisé (dans [37], [22], [63] et [7] notamment). Mais elle n'est pas définie comme la dérivée de la fonction de bobinage.

L'observation des courbes de la figure II.8 met aussi en avant deux propriétés essentielles de la fonction de bobinage : la valeur moyenne nulle et la notion de circularité existant entre les fonctions des différentes phases ($i_c = 2$ pour le bobinage de la figure II.3 et $i_c = 8$ pour le bobinage de la figure II.5). Ces deux propriétés sont également vérifiées par sa dérivée.

II.2.2.2 Propriétés de la fonction de bobinage

Sur le tour complet, le nombre de conducteurs aller est égal au nombre de conducteurs retour. Par conséquent, la valeur moyenne de la fonction de bobinage $N_n(\theta_s)$ est nécessairement nulle :

$$\int_0^{2\pi} N_n(\theta_s) d\theta_s = 0$$

La période de la fonction de bobinage est au plus 2π (c'est-à-dire égal au tour complet de la machine). La relation (II.2) permet de préciser cette valeur : la période est $2\pi/pgcd(N_s, p)$. Par exemple, pour les bobinages entiers ($s_{pp} \in \mathbb{N}$), la période est $2\pi/p$ (comme visible sur les figures II.3 et II.4).

Le bobinage étant équilibré, les phases sont supposées équivalentes. Par conséquent, la propriété de circularité sur la période de bobinage décrite dans le paragraphe II.1.2.4 est re-transcrite dans la modélisation par fonction de bobinage de la manière suivante :

$$N_n(\theta) = N_0(\theta - ni_c\frac{2\pi}{N_s}) \tag{II.8}$$

Ces propriétés de valeur moyenne nulle et de circularité sont également valables pour la fonction densité de conducteurs $D_n(\theta_s)$.

II.2.2.3 Notion de bobinage convenablement réparti

Dans l'onde de force magnétomotrice statorique, la fonction de bobinage localise les termes sources courant. Il devient alors possible d'adapter le profil de la fonction spatiale de bobinage au signal temporel de courant afin d'obtenir une onde de force magnétomotrice spécifique. Ce paragraphe illustre ce point.

Par exemple, le champ tournant statorique est parfaitement sinusoïdal si l'onde de force magnétomotrice est progressive de la forme :

$$f_{mm}(\theta_s, t) = F\cos(p\theta_s - \omega t) \tag{II.9}$$

En supposant que les courants de phase sont sinusoïdaux de valeur efficace I_{eff}, l'onde de force magnétomotrice peut aussi s'exprimer à partir de la relation (II.6) :

$$f_{mm}(\theta_s, t) = \sum_{n=0}^{N-1} N_n(\theta_s)\sqrt{2}I_{eff}\cos\left(\omega t - n\frac{2\pi}{N}\right)$$

Et, en considérant la propriété de circularité (II.8) de la fonction de bobinage, il vient :

$$f_{mm}(\theta_s, t) = \sum_{n=0}^{N-1} N_0(\theta_s - ni_c\frac{2\pi}{N_s})\sqrt{2}I_{eff}\cos\left(\omega t - n\frac{2\pi}{N}\right) \tag{II.10}$$

Il s'agit maintenant de rechercher un profil de fonction de bobinage permettant d'obtenir la forme d'onde progressive décrite par (II.9). Décrit notamment dans [45], le bobinage convenablement réparti, c'est-à-dire à réparitition sinusoïdale des bobines, est une solution. En effet,

la fonction de bobinage correspondante est de la forme :

$$N_0(\theta_s) = N_{max} \cos(p\theta_s)$$

En injectant cette relation dans (II.10) et en utilisant le fait que l'indice de circularité ordonne correctement les phases, l'onde de force magnétomotrice se ré-écrit :

$$f_{mm}(\theta_s, t) = \sum_{n=0}^{N-1} N_{max} \cos(p\theta_s - n\frac{2\pi}{N})\sqrt{2}I_{eff} \cos(\omega t - n\frac{2\pi}{N}) \quad \text{(II.11)}$$

Cette relation (II.11) peut s'identifier à la relation (II.9). Donc, dans le cas d'une alimentation en courant parfaitement sinusoïdale, un bobinage convenablement réparti permet d'obtenir un champ tournant parfaitement sinusoïdal. Pour cet exemple, le bobinage convenablement réparti doit être vu comme un objectif de conception car il s'obtient par une répartition particulière des bobines. Cependant, en raison de la distribution discrète des bobines dans les encoches, il est pratiquement impossible de réaliser cette répartition sinusoïdale théorique.

II.2.3 Représentation matricielle du bobinage

Par construction, la fonction de bobinage résulte d'une force magnétomotrice. Par conséquent, cette fonction est continue. Cependant, la nature discrète du bobinage, imposée par les encoches, incite à opter pour une représentation discrète de celle-ci. Cette sous-partie propose donc une modélisation matricielle du bobinage au travers de la définition de deux matrices : une matrice de fonction de bobinage et une matrice de distribution de conducteurs. Une opération de dérivation ou d'intégration discrète permet de passer d'une matrice à l'autre.

II.2.3.1 Matrice de fonction de bobinage

La matrice de fonction de bobinage est constituée de N vecteur-colonnes à N_s composantes ; la composante k du vecteur n correspond à la valeur de la fonction de bobinage de la phase n à la droite de l'encoche numéro k. Les vecteurs correspondent donc à l'échantillonnage des fonctions de bobinage au niveau des encoches. L'échantillonnage est effectué sur la droite de l'encoche. Mathématiquement, deux espaces vectoriels hermitiens sont nécessaires pour formaliser cette modélisaion :

- le premier de dimension classiquement égal au nombre de phases, noté E^N, associé à la base naturelle orthonormée $\mathcal{N}^N = \left\{\overrightarrow{n_0^N}, \overrightarrow{n_1^N}, ..., \overrightarrow{n_{N-1}^N}\right\}$
- le second de dimension égal au nombre d'encoches, noté E^{N_s}, associé à une base naturelle orthonormée $\mathcal{N}^{N_s} = \left\{\overrightarrow{n_0^{N_s}}, \overrightarrow{n_1^{N_s}}, ..., \overrightarrow{n_{N_s'-1}^{N_s}}\right\}$

La matrice de fonction de bobinage est notée B. L'application linéaire qui la définit est $\mathbf{B}$. Il vient donc :

$$B = mat\left(\mathbf{B}, \mathcal{N}^N, \mathcal{N}^{N_s}\right) = (b_{m,n})_{(m,n)\in[0..N_s-1]\times[0..N-1]}$$

Les vecteur-colonnes de B correspondent aux fonctions de bobinage échantillonnées et sont notés comme suit :

$$B = \left(\begin{array}{cccc} \overrightarrow{b_0^{N_s}} & \dots & \overrightarrow{b_n^{N_s}} & \dots & \overrightarrow{b_{N-1}^{N_s}} \end{array} \right)$$

Puisqu'elle échantillonne la fonction de bobinage, cette matrice en reprend les propriétés :

- valeur moyenne nulle : $\sum_{m=0}^{N_s-1} b_{m,n} = 0$
- circularité sur les colonnes : $b_{m,n} = b_{m-ni_c,0}$

La connaissance du vecteur de bobinage de la phase n, $\overrightarrow{b_n^{N_s}}$ (autrement dit, des échantillons de la fonction de bobinage de la phase n) permet de reconstituer la fonction de bobinage de la phase n (à l'aide du signal porte $P_{2\pi/N_s}$ de largeur $2\pi/N_s$) :

$$N_n(\theta_s) \approx n_{cd} \sum_{m=0}^{N_s-1} b_{m,n} P_{2\pi/N_s}\left(\theta_s - m\frac{2\pi}{N_s}\right) \tag{II.12}$$

Le signal porte de largeur τ est défini de la manière suivante :

$$P_\tau(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [k2\pi, k2\pi + \tau], k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{II.13}$$

Dans la relation (II.12), l'opérateur $\approx$ notifie la perte d'informations inhérente à l'intégration discrète des échantillons du signal $N_n(\theta_s)$: en toute rigueur, sur l'ouverture d'encoche, la variation de la fonction de bobinage est linéaire. La reconstruction de $N_n(\theta_s)$ n'en rend pas compte. D'une certaine manière, il s'agit de l'information perdue par l'échantillonnage. Cette perte sera d'autant plus importante que l'ouverture d'encoche sera grande. Ce point est à prendre en considération lors de l'évaluation des flux avec cette expression de la fonction de bobinage.

Par exemple, la matrice de fonction de bobinage associée au bobinage fractionnaire de la figure II.5 prend la forme suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \tag{II.14}$$

Les propriétés de valeur moyenne nulle et de circularité ($i_c = 8$) sont clairement illustrées. Cet exemple met aussi en évidence que l'échantillonnage est effectué sur la droite de l'encoche[4], ce qui signifie que la pente liée à la sommation des conducteurs le long de l'ouverture d'encoche n'est pas prise en compte. Si la relation (II.12) est utilisée pour reconstruire $N_n(\theta_s)$, cette pente ne sera pas retrouvée (information perdue par l'échantillonnage).

II.2.3.2 Matrice de distribution de conducteurs

En sommant pour chaque phase le nombre de conducteurs sur le tour de la machine, la fonction de bobinage ne constitue pas une grandeur concrète de conception. En d'autres termes, la connaissance brute de la fonction de bobinage ne permet pas d'identifier directement le bobinage qui lui est associé. Dans un contexte de modélisation bi-dimensionnelle (où les connexions liées aux têtes de bobine ne sont pas directement prises en compte), identifier

[4]Un prélèvement sur la gauche est tout à fait possible. Il s'agit ici d'un choix arbitraire mais qui peut se justifier par le fait que les figures représentant les fonctions de bobinage s'observe plutôt de la droite vers la gauche.

le bobinage revient à attribuer à chaque conducteur d'encoche une phase. Dans ce but, une nouvelle grandeur est introduite : la matrice de distribution de conducteurs.

Chaque encoche contient un certain nombre de faisceaux de conducteurs qui peuvent faire circuler le courant soit dans le sens positif (conducteur aller), soit dans le sens négatif (conducteur retour). *A priori*, chaque encoche peut contenir un nombre différent de conducteurs. La fonction de distribution, notée $\mathbf{D}$, distribue les conducteurs de phase dans les encoches. Il s'agit donc d'une application linéaire opérant de l'espace E^N des phases vers l'espace E^{N_s} des encoches. Elle est représentée par la matrice D définie comme suit :

$$D = mat\left(\mathbf{D}, \mathcal{N}^N, \mathcal{N}^{N_s}\right) = (d_{m,n})_{(m,n)\in[0..N_s-1]\times[0..N-1]}$$

Les vecteur-colonnes de cette matrice constituent les vecteurs de distribution de phase. Ils sont notés de la manière suivante :

$$D = \left(\begin{array}{cccc} \overrightarrow{d_0^{N_s}} & \dots & \overrightarrow{d_n^{N_s}} & \dots & \overrightarrow{d_{N-1}^{N_s}} \end{array} \right)$$

Par construction de D, la proportion de conducteurs $d_{m,n}$ de l'encoche numéro m attribuée à la phase numéro n est orientée : si $d_{m,n}$ est positif, il s'agit d'une proportion de conducteurs aller ; si $d_{m,n}$ est négatif, il s'agit d'une proportion de conducteurs retour. Comme le nombre de conducteurs aller est égal au nombre de conducteurs retour, la somme des composantes des vecteur-colonnes est nulle :

$$\sum_{g=0}^{N_s-1} d_{g,n} = 0$$

De plus, la valeur absolue de la proportion de conducteurs d'encoche attribuée à une phase ne peut excéder 1. Mathématiquement, ceci se traduit par la double inégalité suivante :

$$\forall (m,n) \in [0..N_s-1]\times[0..N-1] \quad -1 \leq d_{m,n} \leq 1$$

Il faut noter que cette modélisation ne rend pas compte de la position relative des conducteurs au sein d'une encoche ; ce qui était déjà le cas pour la construction de la fonction de bobinage. Par exemple, pour une encoche contenant deux faisceaux de conducteurs de phase, les deux dispositions classiques des faisceaux représentées sur la figure II.9 se traduisent par les mêmes pondérations dans la matrice D. Cette simplification est indispensable dans le contexte du calcul analytique du champ sur un stator encoché [22]. Par ailleurs, si les conducteurs disponibles dans une encoche sont tous utilisés, alors la somme des valeurs absolues de proportions de conducteurs de l'encoche numéro m est nécessairement égale à 1 :

$$\forall m \in [0..N_s-1] \quad \sum_{n=0}^{N-1} |d_{m,n}| = 1 \tag{II.15}$$

Il est intéressant de préciser la signification de la fonction décrite par la matrice transposée de D. Mathématiquement, cette fonction est la fonction adjointe $\mathbf{D}'$ de la fonction de distribution $\mathbf{D}$:

$$D^T = mat\left(\mathbf{D}', \mathcal{N}^{N_s}, \mathcal{N}^N\right) = (d_{n,m})_{(n,m)\in[0..N-1]\times[0..N_s-1]}$$

Physiquement, cette fonction précise, pour chaque phase, les conducteurs d'encoche constituant son bobinage. Pour mieux cerner cette modélisation, quelques exemples de fonction de

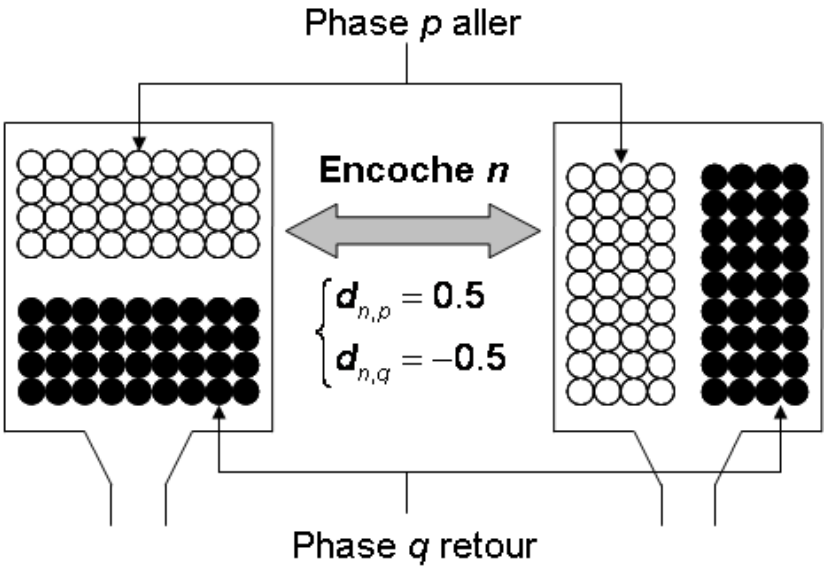


Figure II.9 — Illustration de la non prise en compte de la position relative des conducteurs dans l'encoche

distribution d'une machine à 6 encoches, 3 phases et 2 pôles sont présentés ci-dessous :

$$\underbrace{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Bobines courtes}}, \quad \underbrace{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Bobines longues}}, \quad \underbrace{D = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}}_{\text{Bobinage deux couches}}$$

La matrice de distribution est une image du bobinage de la machine : elle correspond à la lecture du bobinage tel qu'il est introduit dans la sous-partie II.1.2. Cependant, il faut rappeler qu'elle ne précise pas la manière dont les conducteurs sont connectés : sa donnée n'est donc pas suffisante pour bobiner la machine mais elle est nécessaire.

II.2.3.3 Lien entre la fonction de bobinage et la distribution de conducteurs

Dans la mesure où la fonction de bobinage discrète somme les conducteurs de phase et la distribution de conducteurs localise les conducteurs de phase, une opération de dérivation discrète permet de passer de B à D ; c'est-à-dire des vecteur-colonnes $\overrightarrow{b_n^{N_s}}$ aux vecteur-colonnes $\overrightarrow{d_n^{N_s}}$:

$$\forall m \in [1..N-1] \quad d_{m,n} = b_{m,n} - b_{m-1,n} \tag{II.16}$$

Si l'exemple de la figure II.5 est repris, la matrice D correspondante est obtenue à partir de l'équation (II.14). Il vient :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La concordance entre cette matrice D et la représentation de la figure II.5 est bien illustrée : pour la première encoche, la moitié des conducteurs constitue un retour pour la deuxième phase et l'autre moitié un aller pour la cinquième phase, ce qui est exactement conforme au schéma de bobinage.

Une opération d'intégration discrète permet de passer de la matrice de distribution à la matrice de fonction de bobinage : la constante d'intégration doit être choisie de telle sorte à garantir la valeur moyenne nulle des vecteur-colonnes de B. La relation suivante remplit cette condition :

$$\forall m \in [0..N_s - 1] \quad b_{m,n} = \sum_{g=0}^{m} d_{g,n} - \frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} \sum_{h=0}^{k} d_{h,n} \tag{II.17}$$

Les relations (II.16) et (II.17) sont valables pour un échantillonnage à droite de la fonction de bobinage. Autrement dit, elles doivent être revues pour un échantillonnage à gauche (il suffit de décaler les indices).

La relation de dérivation discrète pour passer de la matrice de bobinage à la matrice de distribution est analogue à la relation de dérivation permettant la définition de la fonction densité de conducteurs (cf. relation (II.7)). Il est en fait assez clair que la densité de conducteurs se reconstruit exactement par la donnée des vecteur-colonnes de la matrice de distribution :

$$D_n(\theta_s) = \frac{n_{cd}}{r_{st}\omega_s} \sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,n} P_{\omega_s}(\theta_s - \frac{\pi}{N_s} - m\frac{2\pi}{N_s}) \tag{II.18}$$

Contrairement à la relation (II.12) qui approxime légèrement la fonction de bobinage, la densité de conducteurs ainsi calculée est exacte. Ceci résulte du fait que, par construction, la densité de conducteurs est une combinaison linéaire de signaux créneaux de largeur égale à l'ouverture d'encoche. Et, finalement, la matrice D précise les jeux de coefficients pour chaque phase. En indiquant pour chaque encoche la proportion de conducteurs attribuée à une phase, la fonction de distribution est plus significative en terme de conception que la fonction de bobinage.

En résumé de cette partie, les termes source aimants sont représentés par les fonctions d'aimantation. Ces fonctions traduisent mathématiquement les différentes caractéristiques des aimants constituant le pôle. En particulier, les propriétés géométriques des pôles sont mises en avant par une décomposition en série de *Fourier* de ces fonctions, ce qui facilitera le lien avec les machines fictives caractérisées par des harmoniques particuliers. Concernant le bobinage, la modélisation proposée s'appuie sur l'introduction de la fonction de bobinage et de sa dérivée appelée fonction de densité de conducteurs. La fonction de bobinage est un outil de conception puissant : elle permet d'étudier l'adaptation de la distribution des bobines de phase au type d'alimentation pour améliorer la qualité du champ tournant statorique. Cependant, sur le plan de la conception, la fonction de densité de conducteurs est plus parlante dans la mesure où elle localise pour une phase les conducteurs aller et retour. Conséquence de la présence des encoches, la nature discrète du bobinage est traduite par deux matrices (de distribution et de fonction de bobinage) dont les propriétés de périodicité et de circularité rendent compte de la nature du bobinage qu'elles représentent. Ces deux matrices sont équivalentes dans la mesure où elles contiennent la même information : elles se déduisent l'une de l'autre par des opérations d'intégration ou de dérivation discrète. Les coefficients de la matrice de fonction de bobinage s'obtiennent par échantillonnage de la fonction de bobinage. Au final, l'ensemble de ces représentations rend possible le calcul analytique des forces électromotrices et des inductances mutuelles de la machine polyphasée, ce qui permettra de caractériser les performances des machines fictives.

II.3 Méthode de calcul analytique du champ

Cette partie présente la procédure permettant le calcul analytique du champ pour les machines à pôles lisses et à stator encoché. La première sous-partie va montrer la possibilité pour les machines à pôle lisses sans encoche (machine dite "lisse") d'utiliser une méthode analytique relativement précise. Comme ces machines ne différent des machines encochées que par leur stator, il est nécessaire d'estimer le champ sur la machine encochée à partir de celui calculé sur une machine lisse correspondante. Cette notion de correspondance va être exposée dans la deuxième sous-partie.

II.3.1 Calcul analytique du champ pour une machine sans encoche à pôles lisses

Détaillée dans de nombreuses publications (comme [4, 42, 37]), la méthode de calcul analytique pour les machines à pôles lisses sans encoche peut être mise en oeuvre sous réserve d'hypothèses qui sont explicitées dans le paragraphe II.3.1.1. Le principe de résolution des équations du champ, qui repose sur une méthode de séparation de variables, est décrit dans le paragraphe II.3.1.2.

II.3.1.1 Hypothèses nécessaires

La première hypothèse concerne les matériaux. Si la perméabilité des aimants est supposée égale à celle de l'air (ce qui constitue une approximation acceptable, cf. section II.1.1.2) et si tous les matériaux magnétiques sont de perméabilité homogène, alors les machines radiales sans encoche à pôles lisses peuvent être vues comme un ensemble de zones concentriques de perméabilité constante. Ces zones sont :

- la culasse statorique de perméablité μ_{fer},
- l'entrefer et la zone d'aimants qui constituent une cavité de perméabilité μ_0,
- la culasse rotorique de perméabilité μ_{fer}.

Par ailleurs, les matériaux sont supposés avoir un comportement linéaire.

La seconde hypothèse concerne la géométrie de la machine. La résolution analytique n'est possible qu'en deux dimensions. Donc le champ est supposé ne pas dépendre de la profondeur (z) (hypothèse 2D), ce qui revient à effectuer le calcul sur une section de la machine (en (r, θ)). Par conséquent, les effets de bord (fuites de flux dûes aux têtes de bobine par exemple) ne peuvent être directement pris en compte.

En approximation magnétostatique[5], ces deux hypothèses permettent de résoudre analytiquement les équations régissant le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ dans les zones concentriques de perméabilité constante. Sur chaque zone, des solutions explicites peuvent être calculées par méthode de séparation de variable (r et θ) et harmonique par harmonique.

II.3.1.2 Principe de la résolution

Le potentiel vecteur est relié à l'induction $\overrightarrow{B}$ par la relation suivante :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}$$

En calcul bi-dimensionnel, seule la composante de $\overrightarrow{A}$ selon la composante d'invariance (ici, la profondeur z) est non nulle. Cette composante est notée A. Pour une configuration à induit sans encoche [37], le calcul du potentiel A est mené dans les trois zones constitutives de la machine, à savoir :

[5] Des approches magnétodynamiques sont possibles (comme dans [44]). L'un des intérêts est de pouvoir décrire analytiquement l'évolution des résistances et des inductances en fonction de la fréquence. Mais il devient alors nécessaire de manipuler des expressions mathématiques non explicitement intégrables. En rapport aux objectifs du mémoire qui consistent à établir des règles de pré-dimensionnement basés sur le formalisme multimachine, le calcul magnétostatique est jugé suffisant.

- dans la zone des aimants de surface où l'équation à résoudre a pour forme :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}}{\mu_0}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{M}}{\mu_0}\right) \tag{II.19}$$

- dans la zone de l'entrefer mécanique où l'équation à résoudre a pour forme :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}}{\mu_0}\right) = \overrightarrow{0} \tag{II.20}$$

- dans la zone de l'induit où l'équation à résoudre a pour forme (avec $\overrightarrow{j}$, la densité surfacique de courant) :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}}{\mu_0}\right) = \overrightarrow{j}$$

Pratiquement, les équations régissant le champ sont résolues par séparation de variable harmonique par harmonique. Puis les conditions de passage sont utilisées pour fixer les constantes d'intégration. Mais cette méthode n'est pas directement applicable sur une machine à encoches.

II.3.2 Correspondance entre une machine sans encoche et une machine encochée

Dans une machine encochée, il n'existe pas de zone de perméabilité homogène contenant les conducteurs. La méthode de calcul précédemment décrite n'est donc pas directement applicable : une adaptation est donc nécessaire. Evoquée dans [37], détaillée dans [22, 7, 62, 63, 65, 64], elle consiste à associer à la machine encochée une machine lisse correspondante. Cette machine lisse correspondante diffère de la machine initiale par un ensemble de modifications géométriques qui vont être décrites dans le paragraphe II.3.2.1. Le paragraphe II.3.2.2 explicitera les étapes de calcul du champ. Enfin, le paragraphe II.3.2.3 va décrire une méthode permettant de re-constituer les effets liés à la variation de perméance qui sont masqués par la suppression des encoches sur la machine lisse correspondante.

II.3.2.1 Extension de l'entrefer

Pour que la correspondance entre une machine sans encoche et une machine encochée soit possible, le fer doit être considéré de perméabilité infinie. Cette hypothèse permet de modéliser les enroulements situés dans les encoches par des conducteurs surfaciques ramenés sur l'ouverture d'encoche. Chaque phase est alors représentée par sa fonction densité de conducteurs $D_n(\theta_s)$ qui précise le nombre de conducteurs par mètre en fonction de la position θ_s dans le repère statorique (cf. paragraphe II.2.2.1).

Il faut noter que la suppression des encoches pour définir la machine lisse correspondante interdit la prise en compte des fuites de flux dans les encoches (c'est-à-dire des lignes de champ ne passant pas par l'entrefer). Une modélisation analytique complémentaire, qui sera présentée dans le paragraphe II.4.3.3, permettra de contourner ce problème.

Pour la machine à encoches, si la perméabilité des aimants est considérée égale à celle de l'air, l'entrefer magnétique g_μ de la machine englobe l'entrefer mécanique g_m et l'épaisseur de la couche d'aimant g_a :

$$g_\mu = g_m + g_a \tag{II.21}$$

Pour la machine lisse correspondante, afin de prendre en compte la baisse du niveau d'induction provoquée par les encoches, l'entrefer magnétique de la machine est étendu dans une proportion déterminée par une réluctance correctrice $\mathcal{R}_c$. L'entrefer effectif g_e (c'est-à-dire l'entrefer de la machine lisse correspondante) est alors défini comme suit :

$$g_e = g_\mu + \mu_0 \mathcal{R}_c \tag{II.22}$$

Cette réluctance est estimée en effectuant des transformations conformes sur la géométrie d'une encoche supposée infiniment longue [10, 33]. Dans [32], deux expressions pour la réluctance correctrice sont distinguées : l'une adaptée aux machines à entrefer mince et l'autre adaptée aux machines à entrefer épais. La qualification de l'entrefer (mince ou épais) dépend du rapport entre l'entrefer magnétique g_μ et le pas dentaire (égal à $2\pi r_{st}/N_s$). D'après [32], si ce rapport est supérieur à 0.5, alors l'entrefer est épais ; si ce rapport est inférieur à 0.125, l'entrefer est mince. En ce qui concerne la zone d'indétermination (rapport compris entre 0.125 et 0.5), le calcul du rapport entre l'ouverture d'encoche ω_s et le pas dentaire permet de trancher : si ce rapport est supérieur à 0.5, l'entrefer est épais ; sinon, l'entrefer est mince. Une fois l'entrefer qualifié, l'expression de la réluctance peut être choisie :

- pour les machines à entrefer mince,

$$\mathcal{R}_c = \frac{g_\mu K_c \omega_s}{\mu_0 \left(\frac{2\pi}{N_s} - K_c \omega_s\right)} \quad \text{avec} \quad K_c = \frac{2}{\pi} arctan\left(\frac{r_{st}\omega_s}{2g_\mu}\right) - \frac{2}{\pi}\frac{g_\mu}{r_{st}\omega_s} ln\left(1 + \left(\frac{r_{st}\omega_s}{2g_\mu}\right)^2\right)$$

- pour les machines à entrefer épais,

$$\mathcal{R}_c = \frac{r_{st}}{\mu_0 N_s}\left[\left(1 + \frac{N_s\omega_s}{2\pi}\right) ln\left(1 + \frac{N_s\omega_s}{2\pi}\right) + \left(1 - \frac{N_s\omega_s}{2\pi}\right) ln\left(1 - \frac{N_s\omega_s}{2\pi}\right)\right]$$

Selon ces critères, les machines à aimant de surface ont généralement un entrefer épais. Une fois la machine lisse correspondante définie, étant donnée l'hypothèse de perméabilité infinie pour le fer, seul le champ dans l'entrefer étendu est à calculer. Pratiquement, cette zone est scindée en deux : la zone des aimants (qui contient les termes sources aimants) et la zone de l'entrefer mécanique.

II.3.2.2 Calcul du champ

Pour calculer le champ dans l'entrefer étendu, il faut évidemment prendre en compte les termes sources résultant des courants statoriques. Ces termes n'interviennent que dans les équations de passage. Les coefficients de *Fourier* de la décomposition spectrale de A sont explicitement calculés. Pour chacune des deux zones (aimants et entrefer mécanique), ils

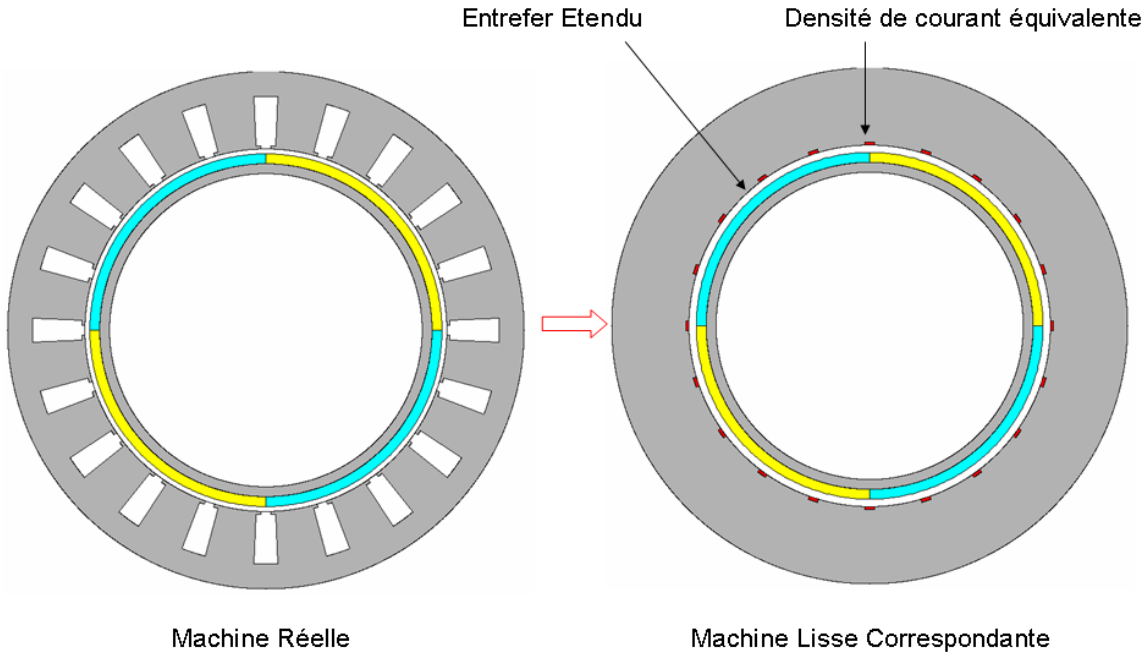


Figure II.10 — Passage de la machine initiale vers la machine lisse correspondante permettant le calcul analytique du champ dans la couche d'aimant et l'entrefer mécanique

prennent la forme suivante (pour un angle γ quelconque) :

$$A(r,\gamma) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\alpha_h r^{|h|} + \beta_h r^{-|h|} + f_h(r)\right)}_{=\widehat{(A)}_h} e^{jh\gamma}$$

Dans la zone d'aimant (milieu indicé 0), en considérant l'équation (II.19) et la $2\pi_{elec}$-périodicité de la distribution des aimants, l'expression générale du potentiel vecteur est :

$$A_0(r,\theta_s+\theta) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_{0,h} r^{p|h|} + \beta_{0,h} r^{-p|h|} + f_{0,h}(r)\right) e^{jph(\theta_s+\theta)}$$

$$\text{avec } f_{0,h}(r) = \begin{cases} \dfrac{jhp\widehat{(f_{ar}^c)}_h - \widehat{(f_{at}^s)}_h}{1-h^2p^2} r & \text{si } p \neq 1 \\ \dfrac{r\ln(r)}{2}\left(jhp\widehat{(f_{ar}^c)}_h - \widehat{(f_{at}^s)}_h\right) & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Dans l'entrefer mécanique (milieu indicé 1), en considérant l'équation (II.20), l'expression du potentiel vecteur est :

$$A_1(r,\theta_s) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_{1,h} r^{|h|} + \beta_{1,h} r^{-|h|}\right) e^{jh\theta_s}$$

Les coefficients $\alpha_{0,h}$, $\beta_{0,h}$, $\alpha_{1,h}$ et $\beta_{1,h}$ sont calculés en utilisant les conditions de passage aux trois interfaces séparant les différents milieux :

- à l'interface entre la culasse rotorique et la couche d'aimants ($r = r_{rt}$), annulation du

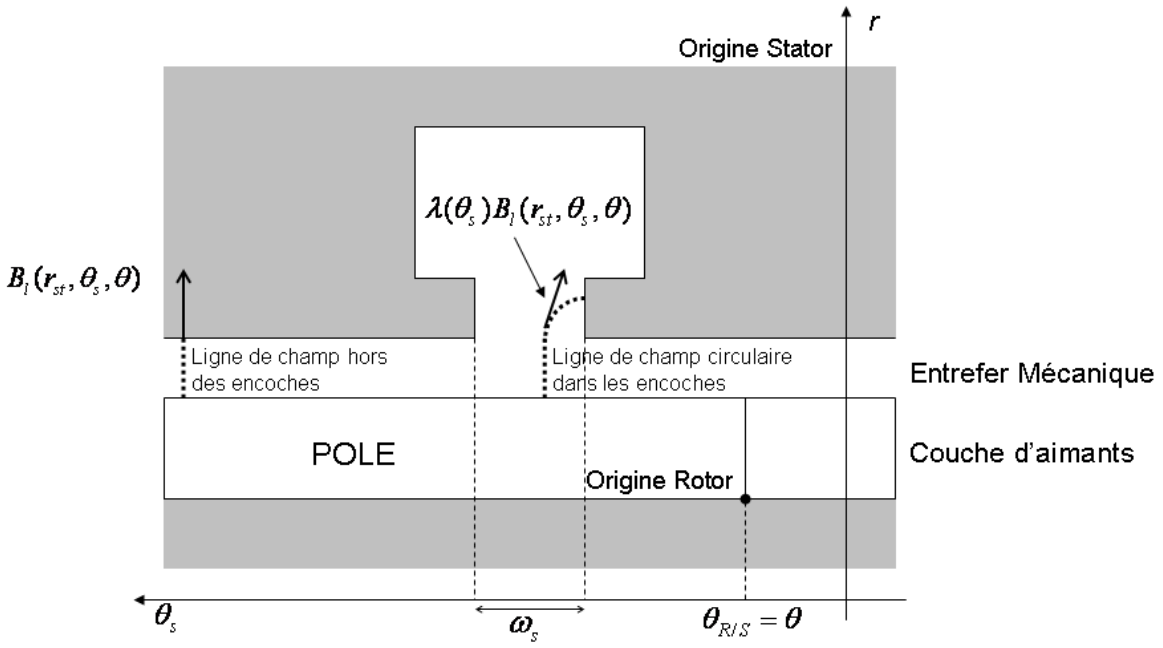


Figure II.11 — Trajet circulaire du champ au sein de l'encoche

champ tangentiel (hypothèse de perméabilité infinie)

- à l'interface entre la couche d'aimants et l'entrefer mécanique ($r = r_a$), conservation du champ tangentiel et de l'induction radiale
- à l'interface entre l'entrefer mécanique et la culasse statorique ($r = r_{st}$), annulation du champ tangentiel (hypothèse de perméabilité infinie)

Un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues apparaît. Le potentiel vecteur est ainsi connu en tout point de l'entrefer magnétique, ce qui permet d'évaluer les inductions radiale et tangentielle.

II.3.2.3 Prise en compte des effets locaux de denture

La réluctance correctrice ne fait que moyenner l'effet d'encochage en augmentant l'entrefer magnétique de la machine lisse correspondante par rapport à celui de la machine initiale. Par conséquent, les effets locaux de la denture sur le champ ne sont pas pris en compte. Ce défaut peut être atténué en ajoutant au modèle analytique une fonction de perméance correctrice.

Détaillée dans [61] et [65] notamment, mise en oeuvre de manière synthétique dans [40], la méthode complète le modèle de calcul analytique précédemment décrit en introduisant une fonction de perméance relative. Cette fonction de perméance est construite en supposant que les lignes de champ dans les encoches sont circulaires et centrées sur le côté de la dent adjacente (comme l'illustre la figure II.11). Cette adaptation pré-suppose que l'induction en tout point de la périphérie statorique ($r = r_{st}$) est parfaitement radiale, ce qui est naturellement imposée par le calcul de l'induction au travers de la machine lisse correspondante. Par ailleurs, il est implicitement supposé que le rapport entre l'ouverture d'encoche et le pas dentaire est suffisamment faible pour considérer que la ligne de champ traversant une encoche n'est pas perturbée par les encoches adjacentes. De plus, la norme de l'induction sur la partie extrapolée de la ligne de champ est supposée constante et égale à la valeur en $r = r_{st}$. La

fonction de perméance relative, notée $\lambda(\theta_s)$, est une fonction $2\pi/N_s$-périodique qui s'exprime comme suit :

$$\lambda(\theta_s) = \frac{g_\mu}{g_\mu + s(\theta_s)} \tag{II.23}$$

La fonction $s(\theta_s)$ représente la longueur du trajet circulaire du champ dans l'encoche. Sur une période, elle s'exprime :

$$\forall \theta_s \in \left[-\frac{\pi}{N_s}, \frac{\pi}{N_s}\right] \quad s(\theta_s) = \begin{cases} \dfrac{\pi r_{st}}{2}\left|\dfrac{\omega_s}{2} - \theta_s\right| & \text{si } |\theta_s| \leq \dfrac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{si } |\theta_s| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

L'induction calculée en $r = r_{st}$, notée $B(r_{st}, \theta_s, \theta)$ est alors le produit de l'induction obtenue en considérant la machine lisse correspondante, notée $B_l(r_{st}, \theta_s, \theta)$, par la fonction de perméance relative :

$$B(r_{st}, \theta_s, \theta) = \lambda(\theta_s) B_l(r_{st}, \theta_s, \theta) \tag{II.24}$$

La fonction de perméance ainsi définie dépend exclusivement de l'ouverture d'encoche ω_s, de l'entrefer magnétique g_μ et du pas dentaire $2\pi/N_s$. En d'autres termes, l'influence des autres paramètres caractéristiques de l'encoche (comme la profondeur et la largeur) n'est pas prise en compte.

Il faut noter que l'introduction de cette fonction de perméance autorise une estimation analytique du couple de détente. Bien que cette grandeur ne soit pas une grandeur de phase et que, par conséquent, il n'existe pas de couple de détente de machine fictive, la réduction de ce phénomène vibratoire peut être un problème critique pour les machines à aimant. A ce titre, il ne peut être ignoré. C'est pourquoi une méthode de calcul analytique est détaillée et testée dans l'annexe C.

Pour résumer, cette partie explicite la méthode de calcul analytique utilisée pour les machines encochées à pôle lisses. Le principe repose sur la notion de correspondance entre la machine à encoches et la machine lisse de calcul pour laquelle un calcul analytique du champ est possible. Autorisée par l'hypothèse de perméabilité infinie du fer, cette correspondance équivaut à homogénéiser l'interface entrefer-stator en augmentant l'entrefer dans des proportions définies par une réluctance correctrice. Cette approximation ne permet pas la prise en compte des variations locales de la perméance statorique. C'est pourquoi une onde de perméance correctrice est ajoutée au modèle. Replacée dans le contexte de la décomposition multimachine, cette méthode de calcul du champ harmonique par harmonique est très intéressante dans la mesure où les machines fictives sont caractérisées par des familles d'harmoniques. Il reste donc maintenant à évaluer les grandeurs globales de la machine polyphasée que sont la force électromotrice et la série d'inductances mutuelles. La caractérisation des machines fictives sera facilitée par ce calcul harmonique par harmonique.

II.4 Calcul des grandeurs globales

Tirant profit des modélisations de la structure magnétique et du bobinage précédemment décrites, cette partie détaille et valide les calculs analytiques des deux grandeurs électromagnétiques de phase déterminant les performances des machines fictives : la force électromotrice et la série des inductances mutuelles. Calculer ces deux grandeurs revient à calculer le flux capté par les enroulements d'une phase. La première sous-partie montre com-

ment le flux de phase peut être évalué dans le contexte de la modélisation matricielle du bobinage. La seconde sous-partie détaille les calculs de la force électromotrice élémentaire, c'est-à-dire le calcul de la variation du flux capté par une phase à vide. Plus précisément, c'est le contenu harmonique de la force électromotrice élémentaire qui est évalué : ce dernier conditionne l'aptitude d'une machine fictive à fournir un couple. La troisième sous-partie présente les calculs de la série des inductances mutuelles, c'est-à-dire le calcul du flux capté par une phase lorsqu'une seule phase est alimentée. Dans le contexte de l'alimentation de la machine par onduleur de tension, la connaissance de ces inductances est absolument nécessaire pour dimensionner correctement la fréquence de MLI.

II.4.1 Evaluation du flux à l'aide de la modélisation du bobinage

Le but essentiel de la procédure de calcul est l'évaluation des grandeurs électromagnétiques de phase conditionnant les performances de la machine : inductances de phase et force électromotrice. Le calcul de ces deux grandeurs revient à intégrer le flux brassé par une phase : la représentation du bobinage permet d'exprimer la variation du flux. Elle permet également de calculer les coefficients de bobinage.

II.4.1.1 Variation du flux à partir de la densité de conducteurs

Naturellement, le flux capté par une phase correspond à la somme des flux captés par l'ensemble des bobines constituant la phase. En reprenant la modélisation du bobinage décrite dans la sous-partie II.2.2.1, le flux de phase apparaît comme le produit de la fonction de bobinage par le flux coupé par un conducteur :

$$\phi_n = N_n \phi_{cd}$$

Une première manière d'exprimer la variation infinitésimale du flux consiste à considérer celui-ci comme résultant de la variation infinitésimale de la fonction de bobinage de phase. En utilisant la relation définissant la fonction de densité de conducteurs (II.7), il vient :

$$d\phi_n = \phi_{cd} D_n(\theta_s) r_{st} d\theta_s \tag{II.25}$$

Cette expression correspond à celle adoptée dans [37] et [22] pour intégrer le flux. D'un certain point de vue, elle apparaît comme la plus adaptée au modèle analytique mis en oeuvre ; le flux coupé par un conducteur ϕ_{cd} s'obtenant par intégration directe du potentiel vecteur A :

$$\phi_{cd} = \oint A(\theta_s, \theta) dz \underbrace{=}_{\text{hypothèse 2D}} A(\theta_s, \theta) L_m$$

En injectant cette dernière relation dans l'équation (II.25), la variation de flux s'écrit :

$$d\phi_n = \phi_{cd} dN_n = A(\theta_s, \theta) L_m D_n(\theta_s) r_{st} d\theta_s \tag{II.26}$$

La densité de conducteurs de la phase n peut s'exprimer à l'aide du vecteur-colonne numéro n de la matrice de distribution D, conformément à la relation (II.18). Il vient :

$$\phi_n(\theta) = \frac{L_m n_{cd}}{\omega_s} \sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,n} \int_{\theta_s=0}^{2\pi} A(\theta, \theta_s) P_{\omega_s}(\theta_s - \frac{\pi}{N_s} - m\frac{2\pi}{N_s}) d\theta_s \tag{II.27}$$

Cette relation constitue une première expression pour le calcul du flux. L'influence du bobinage est représentée par les termes de la matrice de distribution. Par contre, la variation de perméance liée aux encoches n'est pas prise en compte. C'est pourquoi une nouvelle expression utilisant les termes de la matrice de fonction de bobinage est recherchée.

II.4.1.2 Variation du flux à partir de la fonction de bobinage

Pour ce faire, il faut exprimer la variation de flux d'une phase à partir de la variation de flux coupé par un conducteur. Cette dernière variation est le produit de la surface élémentaire par l'induction captée :

$$d\phi_n = N_n(\theta_s) B(\theta_s, \theta) L_m r_{st} d\theta_s$$

Par rapport à l'expression (II.26), cette dernière expression fait apparaître l'induction $B(\theta, \theta_s)$. Elle permet donc une prise en compte de la fonction de perméance relative $\lambda(\theta_s)$:

$$d\Phi_n = N_n(\theta_s) \lambda(\theta_s) B_l(\theta_s, \theta) L_m r_{st} d\theta_s$$

En utilisant la relation (II.12) qui permet de reconstituer $N_n(\theta)$ à partir du vecteur-colonne $\overrightarrow{b_n^{N_s}}$ de la matrice de fonction de bobinage, il vient :

$$d\phi_n = \left(\sum_{m=0}^{N_s-1} n_{cd} b_{m,n} P_{2\pi/N_s}(\theta_s - m\frac{2\pi}{N_s}) \right) \lambda(\theta_s) B_l(\theta_s, \theta) L_m r_{st} d\theta_s$$

En intégrant cette relation, une nouvelle expression du flux est obtenue :

$$\phi_n(\theta) = r_{st} L_m n_{cd} \sum_{m=0}^{N_s-1} b_{m,n} \int_{\theta_s=0}^{2\pi} \lambda(\theta_s) B_l(\theta_s, \theta) P_{2\pi/N_s}(\theta_s - m\frac{2\pi}{N_s}) d\theta_s \tag{II.28}$$

Les expressions (II.27) et (II.28) permettent toutes deux d'évaluer le flux de phase dès que le potentiel vecteur et la fonction de bobinage sont connus. Basée sur la reconstitution de la fonction de bobinage à partir de ses échantillons contenus dans la matrice de fontion de bobinage, la relation (II.28) est *a priori* légèrement moins précise que la relation (II.27). En effet, l'information concernant la variation linéaire des conducteurs-tours le long de l'ouverture d'encoche n'est pas prise en compte dans (II.28) alors qu'elle l'est dans (II.27). Par conséquent, la différence entre les deux calculs sera d'autant plus marquée que l'ouverture d'encoche sera grande. Cependant, la relation (II.28) permet d'intégrer la fonction de perméance, ce qui constitue une caractéristique particulièrement intéressante.

II.4.1.3 Calcul des coefficients de bobinage globaux à l'aide de la distribution

Le coefficient de bobinage global d'un bobinage est défini pour un harmonique donné. Ce coefficient montre comment le bobinage agit sur le flux statorique dû au rotor pour constituer le flux de phase. D'un certain point de vue, il s'agit d'un coefficient de filtrage. Dans la littérature, ce coefficient de bobinage global apparaît souvent comme le produit d'un coefficient de raccourcissement et d'un coefficient de distribution [8, 45].

Concrètement, le flux capté par une phase dépend des bobines la constituant et de leur disposition. Par exemple, une bobine de pas diamétral brasse le flux sur une largeur égale au pas polaire. Par conséquent, elle ne filtre pas les harmoniques de l'induction rotorique. A l'inverse, une bobine de taille bien inférieure au pas polaire ne capte qu'une part réduite du fondamental de l'induction rotorique. C'est le coefficient de raccourcissement qui rend compte de ce phénomème. Dans [8] et [45], ce coefficient est défini à l'aide d'une méthode graphique dite vectorielle : le coefficient obtenu dépend du pas de bobinage de la bobine considérée, du pas d'encoche et du nombre de pôles. Le coefficient de distribution permet de normaliser le coefficient de raccourcissment par rapport à un bobinage diamétral équivalent : le coefficient de bobinage global est donc toujours inférieur à 1.

Utilisée pour la phase 0, la relation II.27 permet d'identifier les coefficients de bobinage :

$$\Phi_0(\theta) = \sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,0} \underbrace{\int_{\theta_s=0}^{2\pi} \frac{L_m n_{cd}}{\omega_s} A(\theta_s,\theta) P_{\omega_s}(\theta_s - \frac{\pi}{N_s} - m\frac{2\pi}{N_s}) d\theta_s}_{=\phi_{N_s}(\theta)}$$

Dans cette expression, la partie intégrée est homogène à un flux : il s'agit du potentiel-vecteur intégré le long de l'ouverture d'encoche. Ce flux coupé peut être vu comme un flux statorique non encore distribué sur les phases : ce flux est noté ϕ_{N_s} et est $\frac{2\pi}{p}$-périodique. En introduisant sa décomposition en série de *Fourier*, il vient :

$$\Phi_0(\theta) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(\phi_{N_s})}_h \left(\sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,0} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}mhp} \right) e^{jph\theta} \tag{II.29}$$

Le terme entre parenthèses décrit la manière dont la distribution pondère les différents harmoniques constituant le flux de phase. Il permet de retrouver le coefficient de raccourcissement. En effet, si le bobinage est seulement constitué d'une bobine de section aller située dans l'encoche numéro l_a et de section retour située dans l'encoche numéro l_r, il vient :

$$\sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,0} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}mhp} = 2j e^{-j\frac{2\pi}{N_s}ph\frac{l_a+l_r}{2}} \underbrace{sin\left(\frac{\pi}{N_s}(l_r-l_a)ph\right)}_{\text{coefficient de raccourcissement}}$$

Pour évaluer le coefficient de bobinage global $\widehat{(k_b)}_h$ sur l'harmonique de rang h, il faut normaliser par rapport à une configuration diamétrale équivalente. Après calcul, il vient :

$$\widehat{(k_b)}_h = \frac{N}{N_s} sin\left(\frac{\pi}{N_s}(l_r-l_a)ph\right)$$

La connaissance du vecteur de distribution d'une phase permet donc de calculer simplement

les coefficients de bobinage globaux. Dans le cadre de l'optimisation du comportement des machines fictives, ces coefficients vont jouer un rôle fondamental : ils conditionnent le contenu spectral de la force électromotrice et donc les forces électromotrices fictives.

II.4.2 Calcul analytique de la force électromotrice

Dans cette sous-partie, il s'agit d'évaluer la force électromotrice élémentaire (c'est-à-dire la variation du flux statorique dû au rotor par rapport à la position θ du rotor) :

$$\epsilon_n(\theta) = \frac{d\phi_{sr,n}}{d\theta}$$

Le calcul de la force électromotrice s'appuie sur l'ensemble des hypothèses de modélisation précédemment décrites. En particulier, en raison de l'hypothèse de linéarité, force électromotrice à vide ou en charge ne sont pas distinguées. Cette sous-partie propose deux estimations analytiques de la force électromotrice à vide obtenues à partir des variations élémentaires du flux exposées dans la section II.4.1. Ces expressions sont ensuite confrontées à des mesures expérimentales et à des simulations numériques correspondant à deux machines pentaphasées existantes : une machine à rotor interne et bobinage entier monocouche et une machine à rotor externe et bobinage fractionnaire à deux couches.

II.4.2.1 Evaluation à partir de la densité de conducteurs

Pour évaluer la fem élémentaire à partir de la relation (II.27), il suffit de calculer le potentiel vecteur dû aux termes sources aimants au niveau du rayon statorique. Le coefficient de *Fourier* de rang h de ce potentiel scalaire est noté $(\widehat{A_{1/R,r_{st}}})_h$ (potentiel vecteur dans la zone de l'entrefer mécanique indicée 1, en présence des termes sources aimants du rotor "R", calculé en $r = r_{st}$) et son expression est disponible dans [37]. Il vient :

$$\epsilon_n(\theta) = 2\pi \frac{L_m n_{cd}}{\omega_s} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} jhp\widehat{(P_{\omega_s})}_{hp} e^{-jhp\frac{\pi}{N_s}} (\widehat{A_{1/R,r_{st}}})_h \left(\sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,n} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}mph} \right) e^{jhp\theta} \quad \text{(II.30)}$$

Dans cette expression, le coefficient de *Fourier* du potentiel vecteur est défini sur la période $2\pi_{elec}$. Le coefficient de *Fourier* du signal porte de largeur égale à l'angle d'ouverture d'encoche ω_s peut être calculé par :

$$\widehat{(P_{\omega_s})}_{hp} = \frac{e^{jhp\frac{\pi}{N_s}}}{\pi hp} \sin\left(hp\frac{\omega_s}{2}\right)$$

En injectant cette relation dans (II.30), il vient :

$$\epsilon_n(\theta) = j\frac{2L_m n_{cd}}{\omega_s} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sin\left(hp\frac{\omega_s}{2}\right) (\widehat{A_{1/R,r_{st}}})_h \left(\sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,n} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}mph} \right) e^{jhp\theta} \quad \text{(II.31)}$$

En reprenant la notion de flux d'encoche introduite dans le paragraphe II.4.1.3, il est possible de définir une force électromotrice élémentaire d'encoche $\epsilon_{N_s}(\theta)$ dont les coefficients de *Fourier*

peuvent être identifiés dans (II.31) :

$$\epsilon_n(\theta) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(\epsilon_{N_s})}_h \left(\sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,n} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}mph} \right) e^{jhp\theta} \tag{II.32}$$

Une première expression de la force électromotrice est ainsi obtenue. Elle a la particularité de faire intervenir les composantes du vecteur-colonne $\overrightarrow{d_n^{N_s}}$ de la matrice de distribution D. Ce qui, d'après les résultats du paragraphe II.4.1.3, permet de remonter aux coefficients de bobinage globaux.

II.4.2.2 Evaluation à partir de la fonction de bobinage

Si la relation (II.28) est utilisée, la force électromotrice élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon_n(\theta) &= L_m n_{cd} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} j(hp)^2 I_{s,h} \widehat{(A_{1/R,r_{st}})}_h \left(\sum_{m=0}^{N_s-1} b_{m,n} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}mph} \right) e^{jhp\theta} \\ \text{avec } I_{s,h} &\approx \frac{2}{ph} \left[\left(\frac{\pi r_{st}\frac{\omega_s}{2}}{\pi r_{st}\omega_s + 4g_e} \right) \sin\left(hp\left(\frac{\pi}{N_s} - \frac{\omega_s}{2} \right) \right) + \sin\left(hp\frac{\pi}{N_s} \right) \right] \end{aligned} \tag{II.33}$$

Dans cette expression, $I_{s,h}$ correspond à l'intégrale approchée des coefficients de la décomposition spectrale de la fonction de perméance. Si la variation de perméance est négligée, alors l'intégrale $I_{s,h}$ peut être exactement calculée :

$$I_{s,h} = \frac{2}{hp} \sin\left(hp\frac{\pi}{N_s} \right)$$

Dans ce cas, il devient très clair que l'angle d'ouverture d'encoche ω_s n'est absolument plus pris en compte dans l'estimation de la force électromotrice. Finalement, la relation (II.33) constitue une deuxième expression pour la force électromotrice élémentaire qui se différencie de la précédente (II.31) sur deux points : d'une part, elle prend en compte la variation de perméance ; d'autre part, elle dépend des composantes du vecteur-colonne $\overrightarrow{b_n^{N_s}}$ de la matrice de fonction de bobinage B. Il est néanmoins rappelé que cette relation (II.33) sera moins précise que la relation (II.31) pour les grandes ouvertures d'encoche en raison de l'approximation liée à la reconstruction de la fonction de bobinage par ses échantillons.

Dans la suite, afin de bien isoler dans l'expression (II.33) l'influence du bobinage, la constante $K_{\epsilon,h}$ est introduite :

$$\epsilon_n(\theta) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} K_{\epsilon,h} \left(\sum_{m=0}^{N_s-1} b_{m,n} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}mph} \right) e^{jhp\theta} \tag{II.34}$$

Cette dernière relation constitue la deuxième expression de la force électromotrice élémentaire.

Nom	M5-L2EP
Puissance	1.5 kW
Couple	$\approx$ 10 Nm @ 1500 tr/min
Nombre de phases N	5
Nombre d'encoches N_s	20
Nombre de pôles N_p	4
Type Rotor	Interne
Longueur effective L_m	80 mm
Epaisseur Culasse Stator e_{cs}	15 mm
Rayon Statorique r_{st}	55 mm
Entrefer Mécanique g_m	1.5 mm
Epaisseur Couche d'Aimant g_a	3.4 mm
Aimantation B_r	1.07 T
Lacune Polaire	0 %
Epaisseur Culasse Rotor e_{cr}	30 mm
Largeur d'encoche δ_s	0.33 τ_s
Ouverture d'encoche ω_s	0.5 δ_s
Epaisseur de bec d'encoche b_s	1 mm
Profondeur d'encoche p_s	15 mm
Nombre de conducteurs n_{cd}	25
Section de conducteurs s_{cd}	1 mm^2

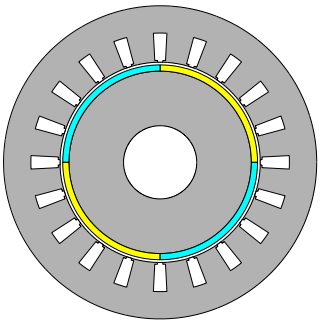


Tableau II.3 — Caractéristiques de la machine *M5-L2EP* : 5 phases, rotor interne à aimantation radiale et bobinage entier diamétral

II.4.2.3 Validations

Afin de valider les expressions de flux (II.32) et (II.34), les forces électromotrices à vide sont mesurées sur deux machines pentaphasées existantes dont les caractéristiques sont précisées dans les tableaux II.3 et II.4. La première machine, appelée *M5-L2EP*, est un démonstrateur dimensionné et expérimenté dans [19] : il s'agit d'une machine constituée de 20 encoches supportant un bobinage pentaphasé monocouche à pas diamétral. Le schéma de bobinage correspond à celui de la figure II.3. La seconde machine, appelé *M5-IRENAV*, a la particularité de présenter un bobinage fractionnaire deux couches sur 20 encoches autour de 3 paires de pôles. Le schéma de bobinage correspond à celui de la figure II.5. Les deux machines sont simulées à l'aide du code de calcul 2D par différences finies *Difimedi* [23].

La figure II.12 consigne les résultats obtenus pour la machine *M5-L2EP*. Sur ces courbes, le calcul analytique utilisant la densité de conducteurs est noté *ANA-D* et celui basé sur la fonction de bobinage *ANA-N*. Selon la règle de qualification définie dans le paragraphe II.3.2.1, l'entrefer de cette machine est mince. Tout d'abord, une surestimation des méthodes numériques et analytique par rapport à la mesure expérimentale[6] est constatée : l'amplitude calculée est environ 12 % supérieure à l'amplitude mesurée. Ce décalage peut provenir d'une valeur d'aimantation rémanente B_r plus faible que le 1.07 T annoncé. Sinon, les méthodes analytiques approchent très bien le calcul numérique. Tout particulièrement, l'onde de perméance est bien reconstituée lorsque la méthode *ANA-N* est employée. Seule une sur-estimation d'environ 10% par rapport au numérique est notée. Cette augmentation peut s'expliquer en comparant les résultats issus des deux méthodes analytiques. Le fait de

[6] Le fichier de mesure est fourni par le Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance (L2EP) de Lille.

Nom	M5-IRENAV
Puissance	0.3 kW
Couple	$\approx$ 0.9 Nm @ 3500 tr/min
Nombre de phases N	5
Nombre d'encoches N_s	20
Nombre de pôles N_p	6
Type Rotor	Externe
Longueur effective L_m	35 mm
Epaisseur Culasse Stator e_{cs}	6 mm
Rayon Statorique r_{st}	55 mm
Entrefer Mécanique g_m	1 mm
Epaisseur Couche d'Aimant g_a	4 mm
Aimantation B_r	0.35 T
Lacune Polaire	3 %
Epaisseur Culasse Rotor e_{cr}	3 mm
Largeur d'encoche δ_s	0.75 τ_s
Ouverture d'encoche ω_s	0.33 δ_s
Epaisseur de bec d'encoche b_s	1.5 mm
Profondeur d'encoche p_s	14 mm
Nombre de conducteurs n_{cd}	40
Section de conducteurs s_{cd}	0.5 mm^2

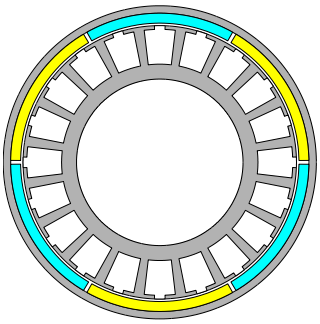
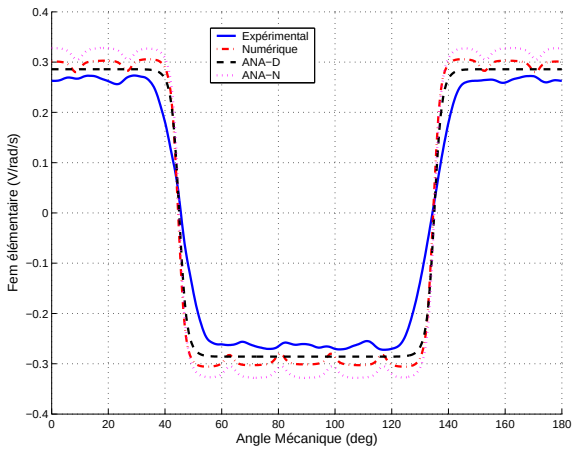
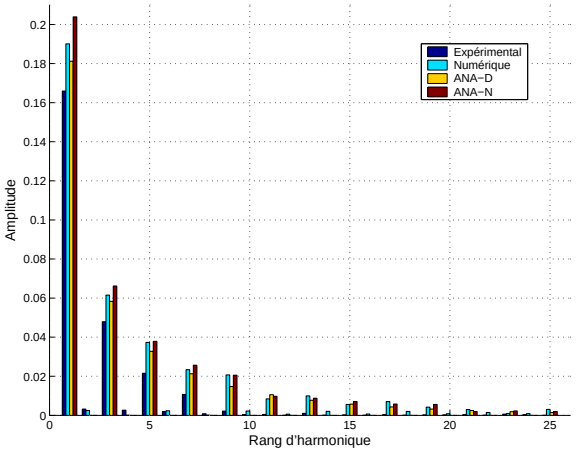


Tableau II.4 — Caractéristiques de la machine *M5-IRENAV* : 5 phases, rotor externe à aimantation radiale et bobinage fractionnaire



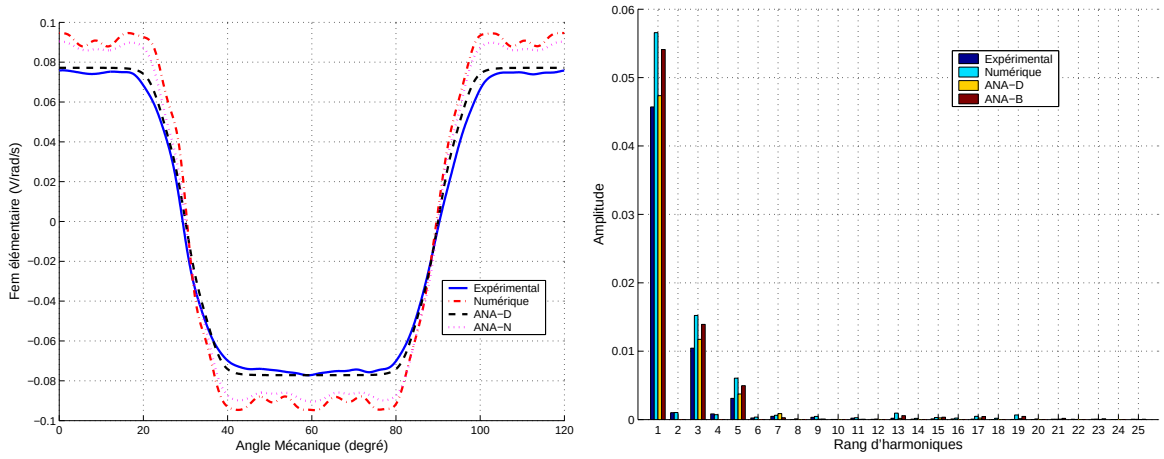
(a) Allure des forces électromotrices expérimentales, numériques et analytiques



(b) Décomposition spectrale des différents signaux de forces électromotrice

Figure II.12 — Comparaison de la mesure de la force électromotrice élémentaire avec les estimations numériques et analytiques pour la machine *M5-L2EP*

corriger l'onde d'induction en la multipliant par la perméance augmente la variation du flux. Or, comme celui-ci est ensuite dérivé pour obtenir la force électromotrice, ces variations se manifestent par un léger rélèvement de l'amplitude du signal.



(a) Allure des forces électromotrices expérimentales, numériques et analytiques

(b) Décomposition spectrale des différents signaux de forces électromotrice

Figure II.13 — Comparaison de la mesure de la force électromotrice élémentaire avec les estimations numériques et analytiques pour la machine *M5-IRENAV*

La figure II.13 présente la comparaison des fem élémentaires mesurée, numérique et analytiques obtenues pour la machine *M5-IRENAV*. L'entrefer de cette machine est également qualifié de mince. La différence entre les courbes expérimentales et les estimations numériques et analytiques provient probablement d'une géométrie d'encoche mal reconstituée. En effet, le paramétrage des calculs numériques et analytiques impose des encoches droites alors que, sur la machine réelle, celles-ci sont inclinées, ce qui conduit à une atténuation de la perméance. Sinon la comparaison entre les courbes numérique et analytiques confirme les comportements constatés précédemment pour la machine *M5-L2EP*. En particulier, la méthode *ANA-N* permet de reconstituer les ondulations dues à la perméance mais pas aussi fidèlement que *Difimedi*.

Au final, la précison obtenue par le calcul analytique est comparable à celle du logiciel de calcul numérique utilisé. Bien entendu, cette affirmation n'est pas exclusivement fondée sur les deux exemples ici traités. De nombreux autres tests ont été réalisés et certains d'entre eux seront détaillés dans les chapitres suivants. Dans le cadre de l'optimisation du comportement des machines fictives, la composition spectrale des signaux est ainsi correctement évaluée, ce qui permet une estimation correcte des forces électromotrices fictives.

II.4.3 Calcul analytique des inductances de phase

Les inductances mutuelles entre phases représentent la part de flux captée par une phase lorqu'une phase est alimentée. En conséquence, le calcul précis des inductances mutuelles exige une connaissance fine du trajet des lignes de champ entourant ou traversant tous les conducteurs d'une phase. Dans le cadre d'une machine à encoches, sous hypothèse de trajet bidimensionnel, l'alimentation d'une phase va engendrer deux grands types de lignes de champ : les lignes de champ passant par l'entrefer et les lignes de champ restant cantonnées dans le fer du stator. Sur la machine lisse permettant le calcul analytique, les conducteurs de phase sont ramenés sur l'ouverture d'encoche pour définir une densité de conducteurs

équivalente. Cette simplification implique que les lignes de champ résultant de l'alimentation d'une phase passent toutes par l'entrefer. Autrement dit, la modélisation ne peut inclure les éventuels effets mutualisants consécutifs à des lignes de champ restant cantonnées dans le fer mais traversant des conducteurs appartenant à une autre phase. Ces lignes de champ sont à l'origine des mutuelles de fuite. Dans le cadre d'un bobinage à une couche, elles sont normalement négligeables (et ceci d'autant plus que la perméabilité du fer est élevée). Par contre, dans le cadre d'un bobinage multicouche, elles ne sont généralement pas négligeables. Dans le contexte d'une conception basée sur le formalisme multimachine où les valeurs des inductances jouent un rôle fondamental, il est absolument nécessaire de mettre en oeuvre une méthode d'évaluation de ces inductances mutuelles de fuite. Pour ce faire, dans l'expression d'une inductance, les deux contributions liées au champ passant par l'entrefer et au champ restant dans le fer sont distinguées :

$$m_n = \underbrace{m_n^e}_{\text{inductance d'entrefer}} + \underbrace{m_n^{fer}}_{\text{inductance de fuite}}$$

La présente partie se propose tout d'abord de caluler analytiquement l'inductance dite d'entrefer m_n^e à l'aide des deux expressions d'intégration du flux établis précédemment. Ensuite, une méthode d'estimation de l'inductance de fuite m_n^{fer} est proposée. Ces expressions sont ensuite confrontées à des mesures expérimentales et des simulations numériques correspondant aux deux machines pentaphasées existantes présentées dans la partie précédente.

II.4.3.1 Inductance d'entrefer en fonction de la densité de conducteurs

Classiquement, pour calculer les inductances de la machine, la variation de flux de phase est intégrée en supposant une et une seule phase alimentée par un courant constant de un Ampère. Dans la suite, la phase 0 est alimentée par un constant I_0.

Si l'expression (II.27) est utilisée, il faut tout d'abord préciser le potentiel vecteur résultant de l'alimentation de la phase 0 par le courant constant. Les aimants sont supposés ne pas influencer les valeurs des inductances. Dans ce cas, le calcul du potentiel vecteur revient à intégrer l'équation $\Delta A = 0$ dans la zone de l'entrefer étendu (c'est-à-dire avec une aimantation nulle). Ce sont les conditions de passage en $r = r_{st}$ qui font intervenir les termes sources courant par l'intermédiaire de la fonction densité de conducteurs $D_0(\theta_s)$. Comme pour l'évaluation de la force électromotrice, c'est la connaissance du potentiel vecteur en $r = r_{st}$ qui permet le calcul du flux capté par une phase. $\left(\widehat{A_{1/S,r_{st}}}\right)_h$ désigne le coefficient de *Fourier* du signal $A_1(r_{st}, \theta_s)$ lorsque la phase 0 est alimentée par le courant constant I_0. Tout calcul fait, il vient :

$$\begin{aligned} A(r_{st}, \theta_s) &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{A_{1/S,r_{st}}}\right)_h e^{jh\theta_s} \\ \text{avec } \left(\widehat{A_{1/S,r_{st}}}\right)_h &= \underbrace{\frac{\mu_0 r_{st}}{|h|} \frac{\left(\frac{r_{st}}{r_{re}}\right)^{|h|} + \left(\frac{r_{st}}{r_{re}}\right)^{-|h|}}{\left(\frac{r_{st}}{r_{re}}\right)^{|h|} - \left(\frac{r_{st}}{r_{re}}\right)^{-|h|}}}_{=K_h} \widehat{(D_0)}_h I_0 \end{aligned} \tag{II.35}$$

Dans cette expression, r_{re} désigne le rayon rotorique effectif. Selon le type de rotor (interne

ou externe), $r_{re} = r_{st} \pm g_e$. L'expression (II.35) est injectée dans la relation (II.27). La densité de conducteurs $D_n(\theta_s)$ est alors décomposée en série *Fourier*. Les coefficients de *Fourier* de $D_0(\theta_s)$ et de $D_n(\theta_s)$ sont ensuite exprimés en fonction des composantes des vecteurs $\overrightarrow{d_0^{N_s}}$ et $\overrightarrow{d_n^{N_s}}$ respectivement. En exploitant la propriété d'i_c-circularité de la matrice D, l'expression suivante pour l'inductance mutuelle m_n apparaît :

$$m_n^e = 4\pi \frac{L_m}{r_{st}} \left(\frac{n_{cd}}{\omega_s}\right)^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left[K_h \left(\frac{\sin\left(h\frac{\omega_s}{2}\right)}{\pi h} \right)^2 \left| \sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,0} e^{j\frac{2\pi}{N_s}mh} \right|^2 \cos\left(\frac{2\pi}{N_s} h n i_c\right) \right] \quad \text{(II.36)}$$

Utilisant la décomposition spectrale de la fonction de densité de conducteurs, cette expression des inductances mutuelles est la plus précise que permet d'obtenir la modélisation analytique. Cependant, en raison de l'infinité des termes qui la compose, elle n'est pas facile à analyser pour déterminer des règles de pré-dimensionnement multimachine.

II.4.3.2 Inductance d'entrefer en fonction de la fonction de bobinage

L'utilisation de la relation (II.28) permet d'aboutir à une expression plus simple pour les inductances mutuelles. Pour ce faire, il suffit de calculer l'induction $B(\theta_s)$ résultant de l'alimentation de la phase 0 par un courant constant, d'injecter cette expression dans (II.28) puis de réaliser l'intégration. Pour évaluer $B(\theta_s)$, deux options sont possibles :

- un calcul précis (au sens analytique) qui consiste à dériver l'expression du potentiel vecteur (II.35),
- un calcul approché qui consiste à supposer que toutes les lignes de champ traversant l'entrefer sont radiales lorsqu'une phase est alimentée.

La première option est délaissée car elle aboutit à une expression des inductances semblable à (II.36) (c'est-à-dire avec une somme à nombre infini de termes). La seconde option, notamment utilisée dans [41], revient à exprimer l'induction en fonction de la fonction de bobinage :

$$B(\theta) \approx \frac{\mu_0}{g_e} N_0(\theta) I_0 \quad \text{(II.37)}$$

En injectant cette expression dans (II.28), l'expression suivante pour l'inductance m_n^e est trouvée :

$$m_n^e = \underbrace{\mu_0 \frac{2\pi}{N_s} \frac{L_m r_{st} n_{cd}^2}{g_e}}_{=K_{m^e}} \sum_{m=0}^{N_s-1} b_{m,0} b_{m,n} \quad \text{(II.38)}$$

Cette expression est plus simple que la précédente (II.36) dans la mesure où elle fait intervenir une somme finie de termes. Et ces termes sont d'autant plus faciles à interpréter qu'ils dépendent exclusivement de la grandeur fonction de bobinage. D'ailleurs, l'expression (II.38) peut être rendue encore plus concise : l'inductance mutuelle d'entrefer m_n^e peut être vue comme proportionnelle au produit scalaire des vecteurs de fonction de bobinage $\overrightarrow{b_0^{N_s}}$ et $\overrightarrow{b_n^{N_s}}$ (le coefficient de proportionnalité est noté K_{m^e}). C'est-à-dire :

$$m_n^e = K_{m^e} \overrightarrow{b_{m,0}^{N_s}} . \overrightarrow{b_{m,n}^{N_s}} \quad \text{(II.39)}$$

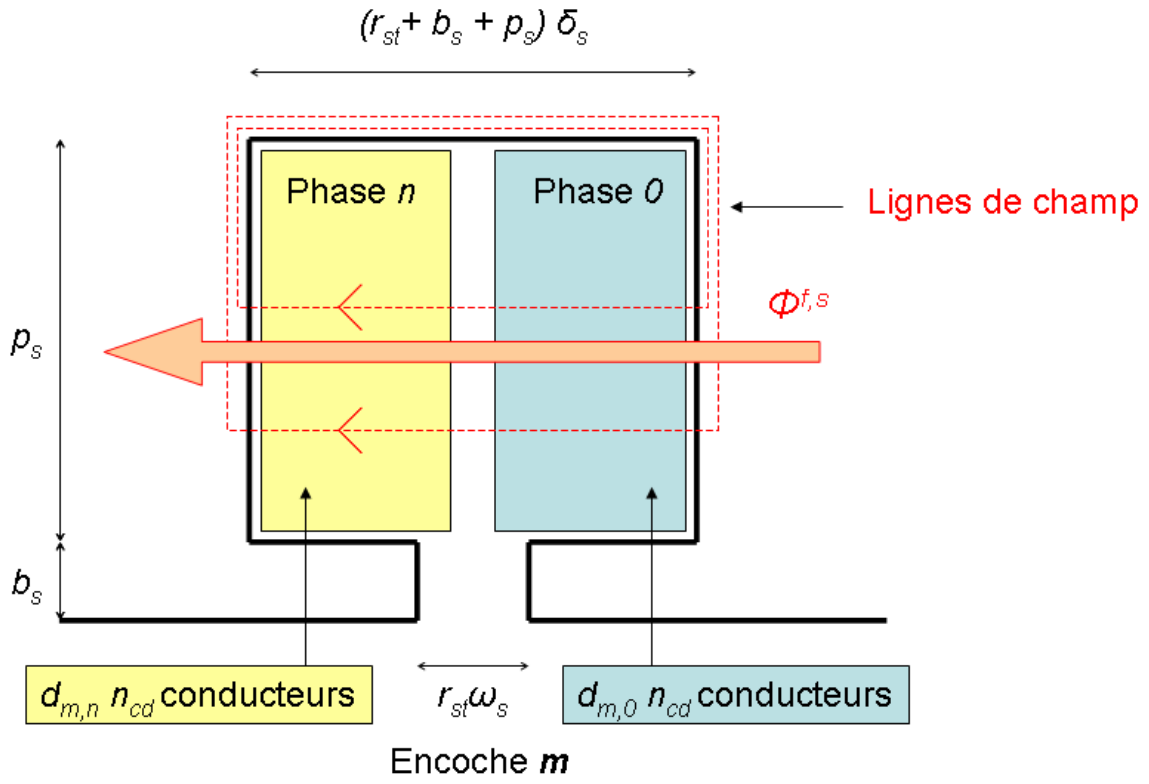


Figure II.14 — Modélisation des lignes de champ restant dans l'entrefer pour l'estimation du flux de fuite d'une encoche

Cependant, cette expression (II.38) est légèrement moins "précise" que (II.36) : ceci sera illustré dans la suite.

II.4.3.3 Evaluation analytique des inductances de fuite

L'inductance de fuite m_n^{fer} correspond à la part de flux mutualisant résultant de ligne de champ ne traversant pas l'entrefer. Comme précisé en introduction de cette sous-partie, la modélisation analytique ne permet pas de l'estimer. Par conséquent, un procédé de calcul complémentaire doit être mis en oeuvre. Dans [14], *Foggia* détaille plusieurs méthodes analytiques d'estimation du flux de fuite dans une encoche en fonction de sa géométrie. En supposant que les lignes de champ sont perpendiculaires aux faces de l'encoche et se referment dans le fer en formant un contour fermé entourant les conducteurs sources, il parvient à une formulation explicite de l'inductance de fuite d'une encoche trapézoïdale dite semi-fermée. Cette géométrie est celle qui approche le mieux les encoches des machines considérées dans ce mémoire. Malheureusement, *Foggia* traite exclusivement le cas où l'encoche contient une et une seule phase. Une adaptation de sa méthode pour l'appliquer aux bobinages multicouches est donc nécessaire. C'est ce que qui est proposé ici avec néanmoins la restriction suivante : seules les dispositions de conducteurs de la partie droite de la figure II.9 sont examinées. L'autre configuration n'est donc pas étudiée. Mais, pour celle-ci, il est tout à fait possible de mener une étude analogue à celle présentée dans la suite.

La figure II.14 illustre l'hypothèse concernant le trajet des lignes de champ dans l'entrefer. Sur cet exemple, l'encoche numéro m considérée contient deux zones de conducteurs : l'une

appartenant à la phase 0 et l'autre appartenant à la phase m. Les $d_{m,0}n_{cd}$ conducteurs de la phase 0 sont alimentés par le courant constant I_0 : ils constituent les termes sources et sont à l'origine du champ. Ces lignes de champ traversent l'encoche pour se reboucler dans le fer. Chaque conducteur de l'encoche, quelque soit sa phase d'appartenance, coupe donc un flux $\phi^{f,s}$. La méthode d'évaluation de ce flux consiste à estimer le champ H par théorème d'*Ampère* sur chacun des contours dessinés par une ligne de champ puis à intégrer l'induction correspondante sur la surface de conducteurs. Avec la géométrie d'encoche choisie, si la phase 0 constitue la source, le flux capté par un conducteur est :

$$\phi^{f,s} = \mu_0 d_{m,0} n_{cd} I_0 \left(\frac{p_s}{3(r_{st} + b_s + p_s)\delta_s} + \frac{b_s}{r_{st}\omega_s} \right)$$

Pour calculer le flux total coupé par les conducteurs de la phase n situés dans l'encoche numéro m, il suffit de multiplier ce flux $\phi^{f,s}$ par le nombre de conducteurs $d_{m,n}n_{cd}$:

$$\Phi_n^{f,s} = d_{m,n} n_{cd} \phi^{f,s} = \mu_0 d_{m,n} d_{m,0} n_{cd}^2 I_0 \left(\frac{p_s}{3(r_{st} + b_s + p_s)\delta_s} + \frac{b_s}{r_{st}\omega_s} \right)$$

L'inductance de fuite m_n^{fer} se déduit alors en sommant les flux de fuite $\Phi_n^{f,s}$ sur chaque encoche puis en divisant par le courant constant I_0. Il vient :

$$m_n^{fer} = \underbrace{\mu_0 n_{cd}^2 \left(\frac{p_s}{3(r_{st} + b_s + p_s)\delta_s} + \frac{b_s}{r_{st}\omega_s} \right)}_{=K_{mfer}} \sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,n} d_{m,0} \tag{II.40}$$

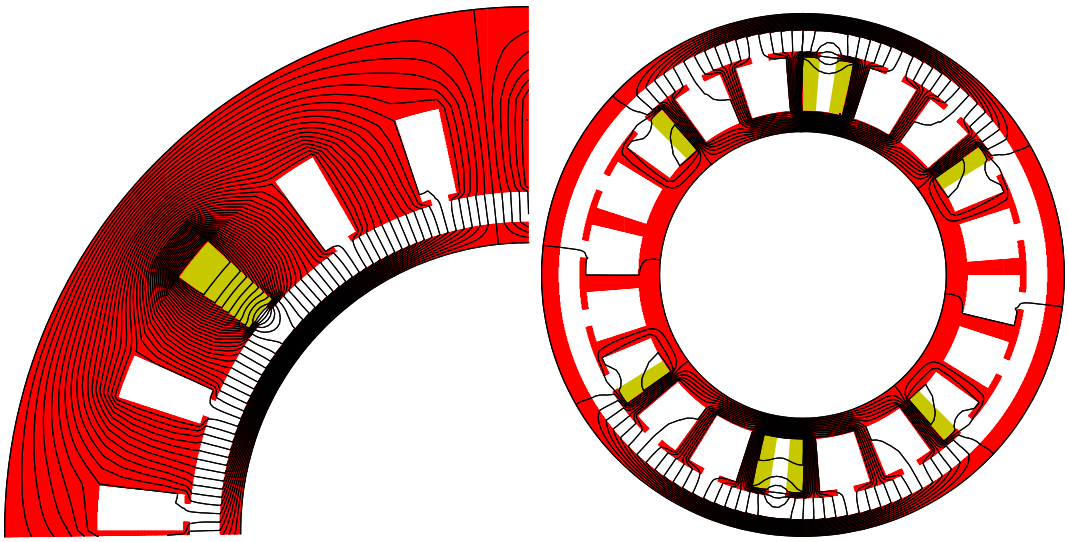
Dans cette expression, K_{mfer} est un coefficient homogène à une inductance et qui ne dépend que de la géométrie de l'encoche. En cas de changement de géométrie, il suffit donc de modifier ce coefficient qui résulte de l'intégration du champ dans l'encoche. La deuxième partie de l'expression (II.40) dépend exclusivement du bobinage. Comme pour l'expression (II.39) de l'inductance d'entrefer, il est possible de considérer l'inductance de fuite comme un produit scalaire :

$$m_n^{fer} = K_{mfer} \overrightarrow{d_n^{N_s}} . \overrightarrow{d_0^{N_s}} \tag{II.41}$$

Dans cette expression (II.41), ce sont les vecteurs de distribution de bobinage qui interviennent. Il est intéressant de noter que, pour un bobinage monocouche, comme les conducteurs d'une encoche sont attribués à une et une seule phase, alors les distributions de phase sont orthogonales. Donc, d'après la relation (II.41), pour une telle configuration de bobinage, il n'existe pas de mutualisation de fuite entre les phases.

II.4.3.4 Validations

Pour valider les expressions analytiques des inductances, les mesures et simulations numériques des deux machines pentaphasées *M5-L2EP* et *M5-IRENAV* sont reprises (cf. tableaux II.3 et II.4). Afin de contrôler la pertinence des hypothèses autorisant le calcul analytique, la figure II.15 représente les équiflux selon *Difimedi* pour les deux machines lorsqu'une phase est alimentée. Tout d'abord, dans les deux cas, les lignes de champ dans l'entrefer sont globalement radiales. Par conséquent, l'hypothèse permettant l'approximation de l'induction formulée par la relation (II.37) et utilisée dans l'expression (II.38) est légitime. Représentant



(a) Machine *M5-L2EP* à bobinage monocouche

(b) Machine *M5-IRENAV* à bobinage deux couches

Figure II.15 — Lignes de champ résultant de l'alimentation d'une phase selon *Difimedi* pour les deux machines pentaphasées ($\mu_{fer} = 2000$)

Méthode	Expérimentale [19]	Numérique	ANA-D	ANA-N
m_0 (mH)	1.76	1.37	1.30	1.28
m_1 (mH)	0.25	0.20	0.19	0.20
m_2 (mH)	-0.75	-0.60	-0.58	-0.61

Tableau II.5 — Comparaison des valeurs d'inductances obtenues pour la machine *M5-L2EP*

les équiflux pour la machine *M5-L2EP* à bobinage monocouche, la figure II.15-a montre que, pour l'encoche contenant les conducteurs alimentés, les lignes de champ circulant exclusivement dans l'entrefer n'atteignent pas d'autres encoches, donc n'atteignent pas d'autres conducteurs de phase. Donc, pour cette machine, la mutualisation de fuite est négligeable. A l'inverse, pour la machine à bobinage deux couches, la figure II.15-b montre l'existence de lignes de champ mutualisantes ne passant par l'entrefer : pour une encoche contenant des conducteurs de la phase alimentée, les lignes de champ traversent les conducteurs de l'autre phase situés dans la même encoche sans passer par l'entrefer. Donc, pour cette machine, la mutualisation de fuite est significative.

Les tableaux II.5 et II.6 consignent les résultats obtenus pour les séries d'inductance.

Méthode	Expérimentale	Numérique	ANA-D	ANA-N
m_0 (mH)	1.10	0.89	0.76	0.75
m_1 (mH)	0.03	0.01	0.00	0
m_2 (mH)	-0.21	-0.26	-0.23	-0.23

Tableau II.6 — Comparaison des valeurs d'inductances obtenues pour la machine *M5-IRENAV*

Comme pour les estimations de force électromotrice, des différences assez sensibles sont notées entre la mesure et l'estimation numérique. Des prises de côtes insuffisamment précises, les simplifications géométriques exigées par le paramétrage *Difimedi* (au niveau de la géométrie d'encoche notamment) et la non prise en compte des têtes de bobine peuvent expliquer ces écarts. En tous les cas, pour les deux machines, les estimations analytiques et numériques sont proches : les mutuelles sont correctement estimées. Par contre, l'inductance propre est toujours légèrement sous-évaluée. Cet écart résulte probablement d'un calcul insuffisamment précis de l'inductance m^f. Sa formulation pourrait donc être affinée.

Concernant la méthode de calcul des mutuelles de fuite, il faut noter que, si pour la machine *M5-IRENAV*, cette technique n'avait pas été utilisée, alors l'inductance m_2 aurait été sous-évaluée de 23 % au lieu des 13 % (correspondant aux valeurs affichées dans le tableau II.6). De tels écarts peuvent conduire à des erreurs considérables pour l'estimation des inductances fictives et surtout de leur rapport. Ce fait sera illustré dans le chapitre IV (section IV.1.3.1, page 145) lors de l'étude d'un bobinage fractionnaire deux couches pour une machine à 7 phases.

Au final, les méthodes de calcul analytique développées autorisent une estimation satisfaisante des séries d'inductances mutuelles et cycliques en comparaison au code de calcul numérique 2D *Difimedi*. Par rapport à ce dernier, les méthodes analytiques présentent l'avantage d'être nettement plus rapides. Cependant, les estimations analytiques ont tendance à sous-évaluer les inductances mesurées : les approximations géométriques nécessaires au calcul analytique en sont à l'origine (hypothèse 2D, encoches droites).

Ce chapitre présente des méthodes de calcul analytique dédié aux machines polyphasées à aimants déposés. Comme il a été souligné, ces machines sont assez bien adaptées au calcul analytique du champ sous hypothèse bidimensionnelle. Seule la présence des encoches au stator a exigé l'hypothèse assez forte qui consiste à assimiler le champ d'entrefer de la machine réelle à celui d'une machine correspondante à la culasse statorique homogénéisée. Très utilisée, cette technique de calcul moyenne en fait l'effet d'encochage. En l'état, elle ne permet pas la prise en compte des modifications locales du champ liées à la variation de perméance dûe aux encoches. Cependant, le fait d'ajouter une onde de perméance correctrice permet d'atténuer ce problème : elle rend notamment possible le calcul analytique du couple de détente et permet de rendre compte des effets de la perméance sur les coefficients harmoniques de la force électromotrice. Ces coefficients déterminent le potentiel de production de couple d'une machine fictive. Dans le cadre de l'optimisation de celle-ci, il était donc nécessaire de rechercher la meilleure précision analytique possible. Dans le même esprit, en ce qui concerne le calcul des inductances mutuelles, il a été jugé nécessaire de prendre en compte les éventuels effets de mutualisation externe à l'entrefer. Basée sur un calcul complémentaire s'appuyant sur la géométrie de l'encoche, la méthode proposée conduit à des résultats satisfaisants. Au final, les différents tests de validation effectués font état d'un degré de précision comparable entre le modèle analytique et le code numérique de référence *Difimedi*.

Dans ce chapitre, des expressions analytiques aussi explicites que possible ont été recherchées pour la force électromotrice et la série d'inductances mutuelles tout en maintenant une précision de calcul acceptable. La comparaison établie entre le calcul de flux par densité de conducteurs et celui par fonction de bobinage est réalisée dans le but de préparer le problème de l'optimisation multimachine. Ainsi, dans la suite, les caractéristiques de machine fictive seront analysées avec l'une ou l'autre des deux expressions analytiques du flux afin de rechercher des formulations d'objectifs aussi concises que possible. Par exemple, le fait d'approcher les inductances mutuelles par des produits scalaires de vecteurs de bobinage répond à cet objectif de concision et de simplification.

Les aspects liés à la description du bobinage ont été précisément étudiés dans ce chapitre. La présentation matricielle permet de distinguer dans l'expression du flux l'influence propre du bobinage. Cette modélisation permet en outre d'étudier toutes les configurations de bobinage équilibré (fractionnaire notamment). Par ailleurs, elle peut être utilisée pour n'importe quelle structure polyphasée à encoches régulièrement décalées (machine axiale par exemple). Il est tout de même rappelé que les effets de bord ne sont pas pris en compte par cette modélisation. Comme la matrice d'inductance, les matrices de distribution et de fonction de bobinage possèdent une propriété de circularité. Pour toutes ces matrices, la connaissance d'une seule colonne et de l'indice de circularité revient donc à totalement connaître la matrice. Cette propriété constitue le point de départ du Chapitre III consacré à la modélisation des machines fictives.

Chapitre III

CHAPITRE III

Modélisation des Machines fictives

Sommaire

III.1 La Transformée de *Fourier* discrète : outil pour la caractérisation des Machines fictives 93

III.1.1 Des matrices de changement de base vers la Transformée de *Fourier* discrète 93

III.1.2 Lecture des composantes vectorielles comme éléments de suites périodiques 97

III.1.3 Caractérisation des machines fictives 100

III.2 Bobinage fictif 105

III.2.1 Construction 105

III.2.2 Transformée de *Fourier* discrète des vecteurs de bobinage 108

III.2.3 Vecteurs de bobinage fictif et grandeurs globales 114

III.3 Fonction d'aimantation fictive 119

III.3.1 Construction 119

III.3.2 Effet de segmentation de la fonction d'aimantation fictive 122

La modélisation multimachine démontre toute sa pertinence lorsqu'il s'agit de définir une architecture de contrôle pour une machine à nombre de phases quelconque ([19], [11], [13]). Cette pertinence repose sur la règle systématique de découplage inhérente à la définition des machines fictives. Sur le plan de la conception de la machine polyphasée, ce découplage apparaît aussi particulièrement intéressant : en décomposant la machine polyphasée en une somme de machines fictives magnétiquement indépendantes, la modélisation multimachine suggère de ramener le dimensionnement de la machine globale à celui de ses machines fictives. Mais, pour ce faire, le concept de machines fictives n'est pas suffisamment abouti. En effet, pour pouvoir dimensionner une machine fictive comme une machine réelle, il faudrait la munir d'un rotor et d'un bobinage. Or, jusqu'ici, ces deux grandeurs n'ont pas été définies. Autrement dit, la machine fictive n'est pas suffisamment caractérisée pour pouvoir être assimilée à une machine réelle et donc être optimisée en tant que telle. L'ambition du présent chapitre est de remédier à cette situation : chercher à approfondir la modélisation des machines fictives dans le but de préparer leurs conceptions.

La conception optimale reste donc la finalité de la démarche. Aussi, afin de travailler avec la plus juste quantité d'informations, un nouvel outil de représentation des machines fictives est introduit : il s'agit de la Transformée de *Fourier* discrète (TFD). Cet opérateur élimine toutes les redondances d'informations, ce qui laisse espérer une résolution facilitée du problème inverse que constitue l'étape de conception. L'utilisation de cet opérateur est justifiée par la périodicité (c'est-à-dire la circularité) existant entre les colonnes des matrices d'inductance et des matrices de bobinage (distribution et fonction de bobinage). La première partie de ce chapitre est consacrée à la description de cet opérateur dans le contexte de la décomposition multimachine. La seconde partie s'attache à définir un bobinage fictif en s'appuyant sur la modélisation décrite au chapitre précédent. Enfin, la troisième partie est consacrée à la construction et à l'étude des propriétés des fonctions d'aimantation fictive qui, dans une certaine mesure, modélisent un rotor fictif.

III.1 La Transformée de *Fourier* discrète : outil pour la caractérisation des Machines fictives

Classiquement, les machines fictives sont mises en évidence à l'aide d'une représentation vectorielle des grandeurs de phase (cf. Chapitre I). Ce choix impose de représenter l'application linéaire décrivant le couplage des phases par une matrice. A elle seule, cette matrice contient les deux propriétés autorisant la décomposition multimachine : la symétrie et la circularité. Et, finalement, ces deux propriétés impliquent que la matrice d'inductance contient au maximum un nombre de termes distincts égal au nombre de machines fictives (c'est-à-dire égal au nombre d'espaces propres de l'application linéaire qui la définit). En d'autres termes, le nombre de coefficients utiles dans la matrice d'inductance est égal au nombre de machines fictives. Ainsi, la matrice d'inductance répète plusieurs fois la même information. Or, de manière générale, pour faciliter une procédure d'optimisation, il est judicieux de travailler avec la juste quantité d'informations. C'est pourquoi, dans cette partie, une présentation alternative de la décomposition multimachine est proposée. Elle est basée sur l'utilisation d'un outil très utilisé en traitement numérique du signal : la Transformée de *Fourier* discrète (TFD). Dans le domaine du traitement d'images et de la compression de données, il apparaît que la matrice de *Fortescue* est appelée matrice de Transformée de *Fourier* discrète : elle est utilisée pour calculer la TFD d'un vecteur dont les composantes correspondent aux échantillons d'un signal discret ou discrétisé.

La première sous-partie examine l'analogie formelle existant entre les matrices de découplage d'un système symétrique circulant et la Transformée de *Fourier* discrète. La deuxième sous-partie tire profit de cette analogie en proposant de considérer les composantes des vecteurs comme les éléments d'une suite périodique : ils sont alors vus comme les échantillons régulièrement prélevés d'un signal continu. Cette approche permet de condenser le lien existant entre les flux, les inductances mutuelles et les courants de phase. La troisième sous-partie montre que les propriétés de découplage et de conservation d'énergie de la TFD permettent une caractérisation originale des machines fictives.

III.1.1 Des matrices de changement de base vers la Transformée de *Fourier* discrète

Cette sous-partie examine l'analogie formelle existant entre l'expression des composantes d'un vecteur quelconque dans les bases de découplage (*Fortescue* et *Concordia*) et la Transformée de *Fourier* discrète d'une suite constituée des composantes du vecteur dans la base naturelle. Une nouvelle lecture des composantes de *Fortescue* et *Concordia* apparaît alors : cette caractérisation sera illustrée au travers d'un exemple simple.

III.1.1.1 Matrice de *Fortescue* et Transformée de *Fourier* discrète

D'après les résultats établis dans le chapitre I, les composantes $x_{k,f}$ d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{x^N}$ dans la base de *Fortescue* en fonction de ses composantes x_n dans la base naturelle sont :

$$x_{k,f} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

La composante $x_{k,f}$ apparaît formellement comme la Transformée de *Fourier* discrète de la suite N-périodique dont le terme numéro n est x_n. En effet, la Transformée de *Fourier* discrète est un opérateur bijectif qui agit sur l'ensemble des suites N-périodiques à valeur complexe [3], noté $\mathbb{S}^N(\mathbb{C})$.

$$\mathbb{S}^N(\mathbb{C}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ u_{n+N} = u_n \in \mathbb{C}\}$$

L'opérateur de TFD se définit comme suit[1] :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}_N : & \mathbb{S}^N(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{S}^N(\mathbb{C}) \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (U_k)_{k\in\mathbb{Z}} \\ & & & U_k = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \end{array} \tag{III.1}$$

Quant à l'opérateur réciproque, la TFD inverse, il se définit de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}_N^{-1} : & \mathbb{S}^N(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{S}^N(\mathbb{C}) \\ & (U_k)_{k\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \\ & & & u_n = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{array}$$

En traitement numérique du signal, $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ correspond aux échantillons régulièrement prélevés d'un signal périodique $u(t)$ sur une période. Le terme k de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ correspond alors au coefficient de Fourier de rang k du signal discret $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

L'analogie formelle constatée incite à définir une relation de correspondance entre l'espace vectoriel hermitien E^N et l'ensemble des suites N-périodiques $\mathbb{S}^N(\mathbb{C})$:

$$\begin{array}{ccc} E^N & \longleftrightarrow & \mathbb{S}^N(\mathbb{C}) \\ (\overrightarrow{x^N})_{\mathcal{N}^N} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} & \rightleftharpoons & (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

Dans ce contexte, multiplier un vecteur à droite par la transposée de la matrice de *Fortescue* F_N^T revient à calculer une TFD sur la suite définie par le vecteur.

III.1.1.2 Matrice de *Concordia* et Transformée de *Fourier* discrète réelle

Appliqué à un vecteur écrit dans la base naturelle, donc à composantes réelles, le changement de base de *Fortescue* aboutit à un vecteur à composantes complexes. Par contre, le changement de base de *Concordia* permet d'obtenir un vecteur à composantes réelles. Comme les grandeurs de phases sont des nombres réels, les suites correspondantes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont réelles.

[1] En fait, il existe plusieurs définitions qui dépendent de la valeur du terme constant placé devant la somme : ici, c'est $1/\sqrt{N}$ qui est choisi pour concorder avec la définition adoptée pour la matrice de *Fortescue* (pour celle-ci, le facteur $1/\sqrt{N}$ a été introduit pour la normaliser).

Leurs transformées répondent donc à la propriété de symétrie hermitienne décrites ci-dessous : cette propriété concerne les suites N-périodiques à valeurs réelles, qui appartiennent à un ensemble noté $\mathbb{S}^N(\mathbb{R})$:

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{S}^N(\mathbb{R}) \quad (U_{-k})_{k\in\mathbb{Z}} = (U_k)^*_{k\in\mathbb{Z}} \tag{III.2}$$

Cette propriété met en évidence que le calcul de la moitié des TFD est suffisant pour totalement caractériser la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Pratiquement, calculer la moitié des TFD revient à évaluer $N/2$ grandeurs complexes, c'est-à-dire N grandeurs réelles ($N/2$ parties réelles et $N/2$ parties imaginaires). Pour mettre en évidence cette propriété, un nouvel opérateur est défini : la Transformée de *Fourier* discrète réelle (TFDr).

La Transformée de *Fourier* discrète réelle opère sur l'ensemble des suites N-périodiques à coefficients réels $\mathbb{S}^N(\mathbb{R})$. Elle est notée comme suit :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{C}^N : & \mathbb{S}^N(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{S}^N(\mathbb{R}) \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (U^c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

Le calcul des termes de la suite $(U^c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ s'effectue à partir du calcul des $N/2$ premiers termes de $(U_k)_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$\begin{array}{ll} k \in \left[0, \frac{N}{2}\right] \cap \mathbb{N} & U^c_k = U_k \\ \forall k \in \left[1..\frac{N-2+mod(N,2)}{2}\right] & \left\{ \begin{array}{l} U^c_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \underbrace{= \sqrt{2}\Re(U_k)}_{\text{car } u_n\in\mathbb{R}} \\ U^c_{N-k} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u_n \sin\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \underbrace{= \sqrt{2}\Im(U_k)}_{\text{car } u_n\in\mathbb{R}} \end{array} \right. \end{array} \tag{III.3}$$

L'intérêt de la Transformée de *Fourier* discrète réelle réside dans le fait qu'elle transforme une grandeur réelle en une autre grandeur réelle. Elle est définie de telle sorte à obtenir l'analogie suivante : multiplier un vecteur à droite par la transposée de la matrice de *Concordia* C^T_N équivaut à calculer la TFD réelle sur la suite définie par le vecteur.

III.1.1.3 Synthèse et interprétation

Le schéma suivant résume les analogies constatées entre changement de base et calcul Tranformée de *Fourier* discrète :

$$\begin{array}{lccc} & \underline{\text{Espace vectoriel } E^N} & & \underline{\text{Espace suites N-périodiques } \mathbb{S}^N} \\ \underline{\text{Complexe } \mathbb{C}} & \text{Calculer } \textit{“Fortescue”}\ F^T_N \left(\overrightarrow{x^N_n}\right)_{\mathcal{N}^N} & \Longleftrightarrow & \text{Calculer TFD } \mathcal{F}_N\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) \\ & \updownarrow x_n \in \mathbb{R} & & \updownarrow x_n \in \mathbb{R} \\ \underline{\text{Réel } \mathbb{R}} & \text{Calculer } \textit{“Concordia”}\ C^T_N \left(\overrightarrow{x^N_n}\right)_{\mathcal{N}^N} & \Longleftrightarrow & \text{Calculer TFDr } \mathcal{C}_N\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) \end{array}$$

Il faut noter que les transformations de *Fourier* discrète et discrète réelle sont des opérateurs au comportement analogue à l'opérateur décomposition en série de *Fourier* d'un signal périodique (DSF).

- Si le signal périodique est à valeurs réelles, alors la symétrie hermitienne entre les

coefficients complexes d'harmoniques h et $-h$ permet de se contenter d'un seul calcul pour évaluer deux coefficients complexes. C'est cet argument qui justifie l'existence de la Décomposition en Série de *Fourier* à coefficients réels. Celle-ci consiste à seulement calculer les parties réelles et imaginaires des coefficients complexes de rang positif, ce qui est analogue au comportement de la TFD réelle (cf. relation (III.3)).
- Si le signal est à valeur complexe, l'absence de symétrie hermitienne ne permet de réduire le nombre de calcul.

L'intérêt de cette représentation par suites périodiques est le suivant : elle permet d'assimiler les composantes de *Fortescue* (ou de *Concordia*) à des coefficients complexes (ou réels) de *Fourier* sur des signaux discrets. En d'autres termes, pour un vecteur donné, une nouvelle lecture spectrale des composantes de *Fortescue* (ou de *Concordia*) peut être faite. Et cette lecture fréquentielle des composantes apparaît d'autant plus intéressante que les machines fictives sont caractérisées spectralement. Le paragraphe suivant illustre ces propos.

III.1.1.4 Exemple illustratif

Une machine à 7 phases à bobinage monocouche dont le couplage entre phases est parfaitement sinusoïdal est considérée. En notant m^{mut}, la partie mutualisée et m^{fuite}, la fuite, la première colonne de la matrice d'inductance s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^{mut} + m^{fuite} \\ m^{mut}\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ m^{mut}\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\ m^{mut}\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) \\ m^{mut}\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) \\ m^{mut}\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\ m^{mut}\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \end{pmatrix}$$

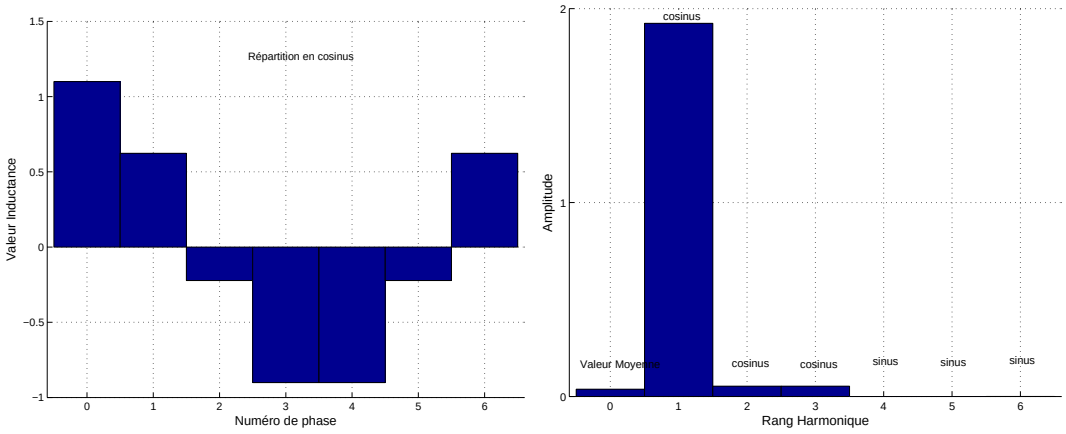
A ce vecteur, une suite d'inductance $(m_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{S}^7(\mathbb{R})$ peut être associée. Le calcul de la TFD de cette suite donne les résultats suivants :

$$\mathcal{F}_7\left((m_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) \longrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} \frac{m^{fuite}}{\sqrt{7}} & \underbrace{\frac{m^{fuite}}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{2}m^{mut}}_{\text{exponentielle en } 1+7\mathbb{Z}} & \frac{m^{fuite}}{\sqrt{7}} & \frac{m^{fuite}}{\sqrt{7}} & \frac{m^{fuite}}{\sqrt{7}} & \frac{m^{fuite}}{\sqrt{7}} & \underbrace{\frac{m^{fuite}}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{2}m^{mut}}_{\text{exponentielle en } 6+7\mathbb{Z}} \end{array}\right] \tag{III.4}$$

Le terme numéro k de la suite transformée correspond à la pondération fréquentielle sur les signaux harmoniques $e^{j\frac{2\pi}{7}(k+7q)}$ où $q \in \mathbb{Z}$. En particulier, si le terme de fuite m^{fuite} est négligé, seuls les harmoniques $1 + 7\mathbb{Z}$ et $6 + 7\mathbb{Z}$ subsistent. Pour la TFDr, les coefficients se lisent comme des pondérations sur des signaux cosinus et sinus échantillonnées tous les $2\pi/7$:

$$\mathcal{C}_7\left((m_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) \longrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} \frac{m^{fuite}}{\sqrt{7}} & \underbrace{\sqrt{\frac{2}{7}}m^{fuite} + \sqrt{\frac{7}{2}}m^{mut}}_{\text{cosinus en } 1\pm7\mathbb{Z}} & \sqrt{\frac{2}{7}}m^{fuite} & \sqrt{\frac{2}{7}}m^{fuite} & 0 & 0 & \underbrace{0}_{\text{sinus en } 1\pm7\mathbb{Z}} \end{array}\right]$$

La figure III.1 donne une représentation graphique de la suite inductance et de sa transformée de *Fourier* discrète réelle. Les inductances transformées apparaissent comme les coefficients



(a) Représentation des inductances de phase ($m^{mut} = 1$ et $m^{fuite} = 0.1$) : la répartition est en cosinus

(b) Représentation du spectre discret par TFDr

Figure III.1 — Représentation de la suite inductance et de sa Transformée de *Fourier* discrète réelle

du spectre de cette suite et, comme les harmoniques discrets sont définis à modulo N près, les familles d'harmonique sont implicitement associées à ces coefficients.

III.1.2 Lecture des composantes vectorielles comme éléments de suites périodiques

Une manière originale de caractériser les grandeurs de phase est ici proposée : elle consiste à assimiler les composantes des vecteurs de phase introduits dans la modélisation vectorielle du chapitre I comme les éléments d'une suite N-périodique. Ainsi, il est possible d'associer à chaque vecteur de phase un vecteur TFD, ce qui permet de supprimer la matrice d'inductance dans l'écriture de la relation entre flux et courant.

III.1.2.1 Transformée de *Fourier* discrète sur les vecteurs de phase

Dans la modélisation vectorielle, les grandeurs de phase sont regroupées dans un vecteur.

$$(x_0, \ldots, x_n, \ldots, x_{N-1}) \longmapsto \overrightarrow{x^N} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

Les composantes des vecteurs de phases peuvent être considérés comme les éléments définissant une suite N-périodique. Sur le plan des notations, ceci signifie que les composantes des vecteurs de phase peuvent être repérées sans précautions particulière sur les indices.

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad x_n = x_{mod(n,N)}$$

Dans ce contexte d'interprétation par suites N-périodiques du vecteur de phase, il lui est associé un vecteur dont les composantes correspondent aux termes de la TFD de la suite définie par le vecteur $\overrightarrow{x^N}$. Ce vecteur est noté $\overrightarrow{X^N}$ et son calcul par TFD à partir de $\overrightarrow{x^N}$ est noté[2] :

$$\overrightarrow{X^N} = \mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{x^N}\right) \quad \text{avec} \quad X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \tag{III.5}$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{X^N}$ ainsi obtenues sont les composantes de *Fortescue*[3]. Comme tous les vecteurs de phase sont à composantes réelles, les composantes de leurs vecteurs TFD vérifient la propriété de symétrie hermitienne (III.2). C'est-à-dire :

$$\forall k \in [0 \dots N-1] \quad X_{N-k} = (X_k)^* \tag{III.6}$$

Désormais, tous les vecteurs de phase introduits au chapitre I (section I.1.2, page 14) admettent une TFD et leurs composantes vérifient la propriété (III.6) :

- pour le vecteur tension, $\overrightarrow{V^N} = \mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{v^N}\right)$
- pour le vecteur courant, $\overrightarrow{I^N} = \mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{i^N}\right)$
- pour le vecteur force électromotrice, $\overrightarrow{E^N} = \mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{e^N}\right)$
- pour le vecteur flux statorique du au stator, $\overrightarrow{\Phi_{ss}^N} = \mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{\phi_{ss}^N}\right)$

La propriété de circularité de la matrice d'inductance statorique (qui justifie l'usage de la transformée de *Fortescue* pour la diagonalisation) permet de la représenter à l'aide d'un vecteur inductance statorique $\overrightarrow{m^N}$ constitué des N termes de la première colonne de la matrice inductance statorique M_{ss} (comme dans l'exemple du paragraphe III.1.1.4). Du fait de la symétrie de la matrice d'inductance, les composantes du vecteur inductance vérifient la propriété suivante :

$$\forall n \in [0 \dots N-1] \quad m_{N-n} = m_n \tag{III.7}$$

Exceptionnellement, le vecteur TFD du vecteur inductance est définie avec un facteur correcteur $\sqrt{N}$ par rapport à la définition de la TFD :

$$\overrightarrow{M^N} = \sqrt{N}\mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{m^N}\right) \tag{III.8}$$

Ce facteur correcteur permet d'avoir l'identité entre les termes M_k du vecteur transformé et les inductances cycliques définies dans la relation (I.10) (cf. page 17). La propriété de symétrie (III.7) permet de montrer que les termes M_k du vecteur transformé sont réels et de retrouver

[2] Il s'agit d'un abus de notation : *a priori* la TFD agit sur des suites et non pas sur des vecteurs. Mais ce choix va améliorer la lisibilité des développements ultérieurs.

[3] Il est également possible de définir des vecteurs TFDr. Dans les composantes de ces vecteurs TFDr sont les composantes de *Concordia.* du vecteur $\overrightarrow{x^N}$

l'expression (I.13) :

$$\forall k \in [0 \dots N-1] \quad M_{N-k} = M_k = \sum_{n=0}^{N-1} m_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \tag{III.9}$$

Le résultat concernant le nombre de valeurs propres distinctes est bien retrouvé : il existe au plus $N_f = \frac{N+2-mod(N,2)}{2}$ inductances cycliques distinctes.

Selon ces considérations, pour l'exemple de la machine à 7 phases du paragraphe III.1.1.4, le terme numéro k de la suite transformée $\mathcal{F}_7\left((m_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right)$ (relation (III.4)) correspond à l'inductance cyclique M_k :

$$\left[\mathcal{F}_7\left((m_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right)\right]_k = \frac{M_k}{\sqrt{7}}$$

En tant que TFD de rang k, le terme M_k est associé une famille d'harmoniques discrets de rang $\mathbb{Z}N \pm k$, ce qui signifie que cette interprétation par TFD des changements de base fait implicitement apparaître les familles d'harmoniques.

III.1.2.2 Ré-écriture du lien entre flux, inductance et courant

Dans la représentation vectorielle, les vecteurs $\overrightarrow{\phi_{ss}^N}$ et $\overrightarrow{i^N}$ sont liés par la matrice d'inductance M_{ss}. Lorsque les composantes d'un vecteur sont interprétées comme les termes d'une suite périodique, la matrice d'inductance est remplacée par un vecteur inductance. Par conséquent, dans le lien entre le vecteur $\overrightarrow{\phi_{ss}^N}$ et $\overrightarrow{i^N}$, il faut chercher à faire intervenir le vecteur inductance plutôt que la matrice inductance. La relation sera plus concise et la TFD pourra être utilisée.

L'examen de la relation matricielle entre $\overrightarrow{\phi_{ss}^N}$ et $\overrightarrow{i^N}$ permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \varphi_{ss,n} = \sum_{r=0}^{N-1} m_r i_{n+r} \tag{III.10}$$

Dans la représentation par suites périodiques, une relation comme (III.10) est interprétée comme un produit de convolution. Par définition, le produit de convolution de deux suites de $\mathbb{S}^N(\mathbb{C})$ est noté $*$.

$$\begin{array}{rccl} * : & (\mathbb{S}^N(\mathbb{C}))^2 & \to & \mathbb{S}^N(\mathbb{C}) \\ & ((u_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}) & \mapsto & ((u_n)_{n\in\mathbb{Z}} * (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}))_{n\in\mathbb{Z}} \\ & & & ((u_n)_{n\in\mathbb{Z}} * (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}))_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{N-1} u_p v_{n-p} \end{array}$$

Par commodité, un produit de convolution vectorielle est définie :

$$\overrightarrow{z^N} = \overrightarrow{x^N} * \overrightarrow{y^N} \quad \text{avec} \quad z_n = \sum_{r=0}^{N-1} x_r y_{n-r} \tag{III.11}$$

Ainsi, compte tenu de la propriété sur la symétrie des inductances mutuelles (III.7) et de la relation (III.10), le vecteur flux statorique est égale à la convolution du vecteur inductance

par le vecteur courant :

$$\overrightarrow{\phi_{ss}^N} = \overrightarrow{m^N} * \overrightarrow{i^N} \tag{III.12}$$

Traduisant le couplage électromagnétique existant entre les phases, cette relation (III.12) est valable dès que la matrice d'inductance est circulante et symétrique. En d'autres termes, lorsque la relation (III.12) est écrite, toutes les propriétés permettant la mise en évidence des machines fictives sont utilisées.

III.1.2.3 Découplage de la relation entre flux et courant

Dans la représentation vectorielle, c'est la matrice d'inductance qui traduit le couplage existant entre flux et courant. L'écriture des vecteurs dans la base propre de *Fortescue* ou *Concordia* permet de découpler cette relation. De façon analogue, dans la représentation par suites, la transformée d'une convolution apparaît comme une opération de découplage :

$$\mathcal{F}_N((u * v)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sqrt{N}(U_k)_{k\in\mathbb{Z}}(V_k)_{k\in\mathbb{Z}} \tag{III.13}$$

Ainsi, la transformée de *Fourier* discrète de la convolution de deux suites est le produit des transformées de chacune des deux suites. Pour pouvoir re-transcrire vectoriellement cette propriété, un produit de vecteur est défini :

$$\overrightarrow{z^N} = \overrightarrow{x^N} \times \overrightarrow{y^N} \quad \text{avec} \quad z_n = x_n y_n$$

Ainsi, l'utilisation de la propriété (III.13) sur la relation (III.12) donne le résultat suivant :

$$\mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{\phi_{ss}^N}\right) = \sqrt{N}\mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{m^N}\right) \times \mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{i^N}\right)$$

En utilisant la relation (III.8) qui définit la TFD pour le vecteur inductance, il vient :

$$\overrightarrow{\Phi_{ss}^N} = \overrightarrow{M^N} \times \overrightarrow{I^N} \quad \text{avec} \quad \Phi_{ss,k} = M_k I_k \tag{III.14}$$

Cette relation (III.14) fait apparaître le découplage entre le flux statorique et le courant exprimé dans la base de *Fortescue* : calculer les termes $\Phi_{ss,k}$ et I_k des vecteurs $\overrightarrow{\Phi_{ss}^N}$ ou $\overrightarrow{I^N}$ revient à calculer les composantes k des vecteurs correspondants dans la base de *Fortescue*. Le fait de voir le flux statorique comme la convolution des vecteurs courant et inductance permet par TFD de découpler les relations sans aucune étude de diagonalisation.

III.1.3 Caractérisation des machines fictives

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que l'approche par TFD permet de caractériser totalement les machines fictives et ceci sans aucune manipulation matricielle. Tout d'abord, il est montré comment la TFD agit sur l'équation en tension vectorielle pour faire apparaître des séries de systèmes d'équations en tension découplés. Ensuite, l'utilisation d'une propriété de conservation d'énergie (la relation de *Parseval*) permet de démontrer qu'à chacun de ces systèmes, il correspond effectivement une machine fictive. Enfin, les familles d'harmoniques spatiaux qui caractérisent une machine fictive sont calculées.

III.1.3.1 Découplage des équations en tension

Détaillée dans la section I.2 du chapitre I, la décomposition multimachine montre qu'une machine fictive est asociée à un espace propre : l'inductance de la machine correspond à la valeur propre de l'espace considéré et le nombre de phases est égal à la dimension de l'espace (qui vaut 1 ou 2 dans le cas général). Dans l'approche décrite ici, les équations des machines fictives peuvent être retrouvées en calculant simplement la Tranformée de *Fourier* discrète de l'équation en tension d'une phase. Il suffit d'injecter dans l'équation vectorielle en tension la relation (III.12) qui exprime le vecteur flux statorique dû au stator comme la convolution des vecteurs inductance et courant. Puis il reste à effectuer la TFD de l'équation en tension. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_N\left(\overrightarrow{v^N}\right) = \mathcal{F}_N\left(R_s\overrightarrow{i^N} + \dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{m^N} * \overrightarrow{i^N}) + \overrightarrow{e^N}\right) \\ \overrightarrow{V^N} = R_s\overrightarrow{I^N} + \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{M^N} \times \overrightarrow{I^N}\right) + \overrightarrow{E^N} \end{cases}$$

N équations en tension découplées apparaissent ainsi immédiatement. Les machines fictives monophasées et diphasées sont caractérisées par leurs inductances. Par conséquent, pour faire une analogie avec les équations en tension de telles machines, il faut regrouper les équations en tension régies par la même dynamique. Il suffit pour cela d'utiliser la relation (III.9) sur les valeurs des inductances cycliques. Il vient :

$$\forall k \in \left[1..\frac{N-2+mod(N,2)}{2}\right] \quad \begin{cases} V_k = R_s I_k + \dfrac{d}{dt}(M_k I_k) + E_k \\ V_{N-k} = R_s I_{N-k} + \dfrac{d}{dt}(M_k I_{N-k}) + E_{N-k} \end{cases}$$

En utilisant la symétrie hermitienne exprimée par la relation (III.6) pour chacune des grandeurs de phase, il vient :

$$\forall k \in \left[1..\frac{N-2+mod(N,2)}{2}\right] \quad \begin{cases} V_k = R_s I_k + \dfrac{d}{dt}(M_k I_k) + E_k \\ V_k^* = R_s I_k^* + \dfrac{d}{dt}(M_k I_k^*) + E_k^* \end{cases}$$

$N_f^2 = \frac{N-2+mod(N,2)}{2}$ systèmes d'équation en tension de machines diphasées sont ainsi dégagés. Comme prévu, ces équations correspondent aux équations en tension écrites dans les bases de *Fortescue* restreintes de dimension 2 (cf. section I.1.3.3, page 20).

$$\begin{pmatrix} V_k \\ V_k^* \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} I_k \\ I_k^* \end{pmatrix} + M_k \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_k \\ I_k^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_k \\ E_k^* \end{pmatrix}$$

Les $N_f^1 = 2 - mod(N,2)$ équations restantes décrivent un ou deux systèmes d'équations en tension de machines monophasées. En somme, $N_f = N_f^1 + N_f^2$ systèmes d'équation en tension découplés sont mis en évidence.

A ce stade, dans l'étude matricielle, ce sont l'établissement du bilan de puissance et le caractère orthonormal des bases de découplage qui ont permis de considérer les espaces propres comme des machines fictives. De manière analogue, pour montrer l'existence des machines fictives avec l'approche par TFD, il faut effectuer le bilan de puissance et vérifier que les N_f systèmes découplés contribuent de manière indépendante à produire la puissance

et le couple de la machine polyphasée.

III.1.3.2 Répartition de la puissance et du couple

Les machines fictives mises en évidence dans l'approche matricielle sont magnétiquement découplées. Elles contribuent indépendamment les unes des autres à la puissance électrique et au couple électromagnétique de la machine polyphasée qu'elles composent. Dans l'approche par TFD, la répartition de la puissance et du couple sur un nombre fini de systèmes indépendants est suggéré par la relation de *Parseval*. L'égalité de *Parseval* est une égalité entre le produit de deux suites et le produit de leurs transformées. En traitement du signal, cette propriété signifie que, quelque soit la représentation (temporelle ou fréquentielle), l'énergie du signal est la même[4] :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n = \sum_{n=0}^{N-1} X_k Y_{-k} \tag{III.15}$$

L'application de cette propriété sur les grandeurs puissance électrique P et couple électromagnétique T permet d'écrire :

$$\begin{cases} P = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} v_n i_n = \sum_{k=0}^{N-1} V_k I_{-k} \\ T = \dfrac{1}{\Omega} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} e_n i_n = \dfrac{1}{\Omega} \sum_{k=0}^{N-1} E_k I_{-k} \end{cases}$$

Les grandeurs désignées ci-dessus sont réelles. Par symétrie hermitienne, il vient :

$$\begin{cases} P = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} v_n i_n = \sum_{k=0}^{N-1} V_k I_k^* \\ T = \dfrac{1}{\Omega} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} e_n i_n = \dfrac{1}{\Omega} \sum_{k=0}^{N-1} E_k I_k^* \end{cases}$$

Puissance et couple sont donc distribués sur des produits de grandeurs transformées de même rang k (tension et courant d'une part, force électromotrice et courant d'autre part). En

[4] Il faut noter que cette égalité est vraie à un facteur multiplicatif près en fonction de la constante definissant la TFD. Ici, la constante $1/\sqrt{N}$ permet d'avoir l'égalité.

utilisant la symétrie hermitienne, les relations suivantes apparaissent :

$$\begin{cases} \text{si } N\text{est impair} & \begin{cases} P = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{N_f-1} 2\Re(V_k I_k^*) \\ T = \frac{E_0 I_0}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^{N_f-1} 2\Re(E_k I_k^*) \end{cases} \\ \text{si } N\text{est pair} & \begin{cases} P = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{N_f-2} 2\Re(V_k I_k^*) + V_{N_f-1} I_{N_f-1} \\ T = \frac{E_0 I_0}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^{N_f-2} 2\Re(E_k I_k^*) + \frac{E_{N_f-1} I_{N_f-1}}{\Omega} \end{cases} \end{cases} \quad \text{(III.16)}$$

D'une part, les grandeurs reliées par un système d'équations en tension donné définissent une puissance et un couple qui ne dépendent que d'elles. D'autre part, les sommes de ces puissances et couples sont respectivement égales à la puissance et au couple globaux. Il est ainsi mis en évidence qu'à un système d'équations en tension donné correspond une machine fictive. Le dénombrement des systèmes d'équations découplés permet d'affirmer qu'il existe N_f^1 machines fictives monophasées et N_f^2 machines fictives diphasées. Les relations (III.16) permettent d'isoler leur puissance et leur couple respectifs :

- si la machine est diphasée (cas $k \in \left[1..\frac{N-1}{2}\right] \cap \mathbb{N}$) $\quad \begin{cases} P_k = 2\Re(V_k I_k^*) \\ T_k = \frac{2\Re(E_k I_k^*)}{\Omega} \end{cases}$
- si la machine est monophasée (cas $k \in \left\{0, \frac{N}{2}\right\} \cap \mathbb{N}$) $\quad \begin{cases} P_k = V_k I_k \\ T_k = \frac{E_k I_k}{\Omega} \end{cases}$

Les machines fictives sont donc mises en évidence sans aucune étude matricielle. L'approche par TFD est donc plus directe mais les deux mises en évidences (étude matricielle et approche TFD) sont parfaitement équivalentes sur le plan formel.

III.1.3.3 Détermination des familles d'harmoniques

La modélisation vectorielle permet de montrer que les machines fictives sont sensibles à une famille d'harmoniques spécifiques. Autrement dit, un signal caractéristique de machine fictive (force électromotrice ou courant par exemple) est une composition d'harmoniques bien précis. Dans l'approche par TFD, cette propriété peut être retrouvée à partir de la décomposition en série de *Fourier* d'un signal de phase.

Soit $x_0(t)$, une grandeur électromagnétique associée à la phase numéro 0. La décomposition en série de *Fourier* de ce signal, de pulsation ω, s'écrit :

$$x_0(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_m e^{jm\omega t}$$

La régularité spatiale de construction de la machine permet d'exprimer les coefficients de

Fourier de la décomposition spectrale du signal $x_n(t)$ en fonction de ceux de $x_0(t)$:

$$x_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_n)}_m e^{jm\omega t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_m e^{-j\frac{2\pi}{N}nm} e^{jm\omega t}$$

La TFD du vecteur de phase $\overrightarrow{x^N}$ de cette suite peut donc être calculée selon la relation (III.5). Le terme numéro k s'exprime :

$$X_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n(t) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$
$$X_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_m e^{jm\omega t} \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+m)} \right)$$

Les familles d'harmoniques résultent du comportement de la somme discrète en exponentielle :

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+m)} = \begin{cases} N \text{ si } m+k \in N\mathbb{Z} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La composante numéro k de la $\overrightarrow{X^N}$ s'écrit alors :

$$X_k(t) = \sqrt{N} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x_0)}_{qN-k} e^{j(qN-k)\omega t} \tag{III.17}$$

Le signal $X_k(t)$ est donc composé des harmoniques $N\mathbb{Z} - k$. Quant au signal conjugué $X_k^*(t) = X_{N-k}(t)$ associé à la même machine fictive d'inductance M_k, il est composé des harmoniques $N\mathbb{Z} + k$. Il est ainsi prouvé que les grandeurs électromagnétiques (force électromotrice, courant...) de la machine fictive d'inductance M_k sont constitués d'une famille spécifique d'harmoniques. Cette famille correspond bien à celle établie lors de la modélisation vectorielle :

$$F^N(M_k) = \{qN \pm k,\ q \in \mathbb{Z}\}$$

Il faut noter que, d'après la relation (III.17), si une grandeur de machine fictive est calculée par TFD, la grandeur obtenue est $\sqrt{N}$ fois plus grande que la grandeur obtenue par prélèvement des harmoniques de la famille. Ce décalage résulte du facteur $1/\sqrt{N}$ choisi pour définir la Transformée de *Fourier* discrète (cf. relation (III.1)).

III.1.3.4 Synthèse

En résumé, modélisation vectorielle et modélisation par suites périodiques sont totalement équivalentes : écrire un vecteur dans la base de *Fortescue* (à partir de ses composantes dans la base naturelle) ou calculer la TFD de la suite constituée par les composantes du vecteur de phase (dans la base naturelle) sont deux opérations formellement identiques. En faisant apparaître le flux statorique dû au stator comme la convolution des inductances par le courant, l'approche par TFD permet une caractérisation originale des machines fictives. En fait, l'originalité de cette approche réside principalement dans la définition du vecteur inductance

de phase : il condense une information répétée plusieurs fois par la matrice d'inductance du fait des propriétés de circularité et de symétrie. En quelque sorte, écrire le vecteur inductance revient à mettre en avant les deux propriétés justifiant la décomposition multimachine. Mais au delà de ces considérations calculatoires, l'intérêt principal de l'approche par TFD réside dans la signification qu'elle donne aux composantes de *Fortescue* et de *Concordia* : ces composantes sont assimilées à des pondérations fréquentielles agissant sur des sinusoïdes discrétisées. Or ce sont ces composantes qui caractérisent les machines fictives.

En somme, l'approche par TFD apporte deux grandes contributions : d'une part, elle permet d'appréhender la machine fictive comme la transformée de *Fourier* de la structure régulière polyphasée ; d'autre part, sur le plan pratique, elle permet de condenser les opérations de changement de base, en donnant à celles-ci une signification autre qu'un simple changement de base découplant. Cette approche par TFD montre tout son intérêt dans le partie suivante consacrée à l'étude des bobinages fictifs.

III.2 Bobinage fictif

Dans le but de découpler le plus possible les démarches d'optimisation de machines fictives, cette partie cherche à construire une grandeur assimilable à un bobinage fictif. Le chapitre II montre bien le rôle essentiel joué par le bobinage de phase sur les grandeurs critiques de la machine polyphasée que sont les inductances mutuelles et la force électromotrice élémentaire. C'est dans ce contexte qu'il paraît très intéressant de construire un bobinage fictif : par analogie avec le bobinage de la machine polyphasée, le bobinage fictif devrait permettre le calcul de l'inductance cyclique et de la force électromotrice d'une machine fictive indépendamment des autres machines fictives. Le bobinage de la machine réelle serait alors obtenu par combinaison des bobinages des machines fictives. Un outil de dimensionnement attractif serait alors disponible.

III.2.1 Construction

Dans le chapitre II, la fonction de bobinage de phase est définie comme l'intégration discrète de la fonction de distribution de conducteurs. Il est souligné que la connaissance du bobinage d'une seule phase et de l'indice de circularité permet la caractérisation complète du bobinage de la machine réelle. En d'autres termes, la connaissance d'une seule colonne de ces matrices est suffisante pour calculer les inductances de la machine polyphasée et le filtrage de l'induction rotorique. Par conséquent, comme les définitions des fonctions de distribution et de bobinage de phase reposent initialement sur des descriptions matricielles, il est tout à fait naturel de chercher à définir une fonction de bobinage de machine fictive de manière analogue, c'est-à-dire par une description matricielle.

III.2.1.1 Définition des vecteurs de distribution et de bobinage fictifs

Par construction, la matrice de distribution D attribue des phases aux conducteurs d'encoches. Les phases sont modélisées par les vecteurs $\overrightarrow{n_n^N}$ de la base naturelle. Si, au lieu d'être distribués sur les vecteurs de la base naturelle, les conducteurs d'encoche sont distribués sur

les vecteurs d'une base propre de l'application linéaire Φ que représente la matrice d'inductance statorique (cf. relation (I.5), page 15), alors la distribution obtenue peut être assimilée à une distribution de conducteurs sur les phases de machines fictives (puisqu'un vecteur propre représente une phase de machine fictive). Il est évident que la distribution de conducteurs sur machine fictive ainsi définie n'est pas unique : il existe une infinité de bases propres donc il existe une infinité de distributions. Il convient de choisir une base propre bien précise pour définir univoquement la distribution de conducteurs sur machines fictives. Les deux bases naturellement candidates sont les bases de *Fortescue* et de *Concordia*. Dans le chapitre I, il est montré que les deux transformations sont équivalentes dès que les composantes naturelles du vecteur considéré sont réelles, ce qui est toujours le cas. Si la base de *Fortescue* est choisie, alors des pondérations complexes de conducteurs apparaissent, ce qui n'est pas facile à interpréter. A l'inverse, si la base de *Concordia* est choisie, alors les pondérations sont réelles. C'est pourquoi la matrice de distributions de conducteurs sur les phases de machines fictives, notée D_f, est définie par l'intermédiaire de la matrice de *Concordia* C_N :

$$D_f = DC_N = mat\left(\mathbf{D}, \mathcal{C}^N, \mathcal{N}^{N_s}\right) = (d^f_{m,n})_{(m,n)\in[0..N_s-1]\times[0..N-1]} \tag{III.18}$$

Les vecteur-colonnes de cette matrice permettent de définir les vecteurs de distribution de phase fictive. En raison de la N'_s-périodicité du bobinage (cf. section II.1.2.4, page 52), les vecteurs de distribution sont construits à partir des N'_s premières lignes de la matrice D_f (afin d'éviter des répétitions d'informations) :

$$\frac{1}{pgcd(N_s,p)} \underbrace{\left[I_{N'_s} \dots I_{N'_s}\right]}_{\times pgcd(N_s,p)} D_f = \left(\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{d_0^{N'_s,f}} & \dots & \overrightarrow{d_n^{N'_s,f}} & \dots & \overrightarrow{d_{N-1}^{N'_s,f}} \end{array} \right) \tag{III.19}$$

Plus précisément, le vecteur $\overrightarrow{d_n^{N'_s,f}}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{d_n^{N'_s,f}} = \begin{pmatrix} d^f_{0,n} \\ \vdots \\ d^f_{g,n} \\ \vdots \\ d^f_{N'_s-1,n} \end{pmatrix}$$

L'intégration discrète de la matrice de distribution fictive D_f définit la matrice de fonction de bobinage fictif B_f. Mais cette matrice peut aussi être directement obtenue par changement de base pour la matrice B (l'intégration étant linéaire) :

$$B_f = BC_N = mat\left(\mathbf{B}, \mathcal{C}^N, \mathcal{N}^{N_s}\right) = (b^f_{m,n})_{(m,n)\in[0..N_s-1]\times[0..N-1]} \tag{III.20}$$

De même que pour la matrice D_f, les vecteur-colonnes de B_f permettent de construire les vecteurs de fonction de bobinage fictif. Ils sont de dimension N'_s :

$$\frac{1}{pgcd(N_s,p)} \underbrace{\left[I_{N'_s} \dots I_{N'_s}\right]}_{\times pgcd(N_s,p)} B_f = \left(\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{b_0^{N'_s,f}} & \dots & \overrightarrow{b_n^{N'_s,f}} & \dots & \overrightarrow{b_{N-1}^{N'_s,f}} \end{array} \right) \tag{III.21}$$

Plus précisément, le vecteur $\overrightarrow{b_n^{N'_s,f}}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{b_n^{N'_s,f}} = \begin{pmatrix} b^f_{0,n} \\ \vdots \\ b^f_{g,n} \\ \vdots \\ b^f_{N'_s-1,n} \end{pmatrix}$$

Il faut noter que, par des relations analogues à (III.19) et (III.21), il est possible de définir des vecteurs de bobinage réel de dimension N'_s (c'est-à-dire représentant une période de bobinage) $\overrightarrow{d_n^{N'_s}}$ et $\overrightarrow{b_n^{N'_s}}$.

Les matrices D et B décrivent les vecteurs de distribution et de fonction de bobinage dans la base naturelle. Ces vecteurs se déduisent alors par i_c-circularité. En comparaison, les matrices D_f et B_f décrivent les vecteurs de distribution et de fonction de bobinage dans la base de *Concordia*. Il reste à déterminer le type de relation existant entre les différents vecteurs de bobinage fictif.

III.2.1.2 Indice de circularité et propriétés sur les bobinages fictifs

L'indice de circularité i_c est multiple de N'_s/N (cf. relation (II.2), page 52). Cet argument permet de montrer que les vecteurs de bobinage fictif sont orthogonaux entre eux[5]. Mathématiquement, cette propriété s'écrit :

$$\overrightarrow{b_m^{N'_s,f}} \cdot \overrightarrow{b_n^{N'_s,f}} = \sum_{g=0}^{N'_s-1} b^f_{g,m} b^f_{g,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \sum_{g=0}^{N_s-1} \left| b^f_{g,n} \right|^2 = \left\| \overrightarrow{b_n^f} \right\|^2 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(III.22)}$$

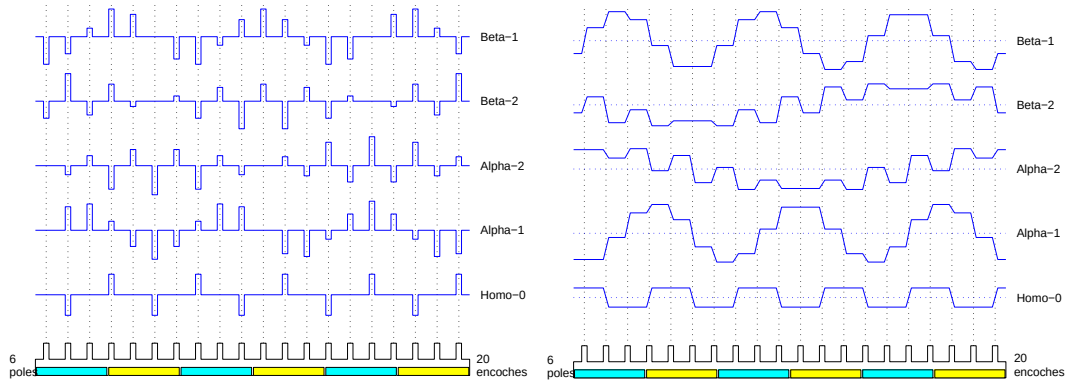
Il faut noter en outre que les deux vecteurs de bobinage d'une machine fictive diphasée $\overrightarrow{b_n^f}$ et $\overrightarrow{b^f_{N-n}}$ ont la même norme. De même, les vecteurs de distribution fictive possèdent ces propriétés d'orthogonalité.

Concrètement, l'information de circularité des fonctions de bobinage de phases réelles est transformée en information d'orthogonalité des vecteurs de bobinage de phases fictives. Autrement dit, la matrice B_f n'est pas circulante et, cette fois, il n'est pas évident de résumer toute l'information des bobinages fictifs par la donnée d'une seule colonne de B_f.

La figure III.2 illustre ces propos : elle représente les fonctions de distribution fictive et de bobinage fictif[6] pour la machine pentaphasée *M5-IRENAV* (dont le motif de bobinage est représenté sur la figure II.5, page 53 et la fonction de bobinage sur la figure II.8, page 58). Par

[5] Il faut noter que, quelque soit la base propre choisie pour définir les bobinages fictifs (*Fortescue* notamment), cette propriété d'orthogonalité est maintenue : elle résulte du fait que la matrice initiale (dans la base naturelle) est i_c-circulante avec i_c multiple de N'_s/N, c'est-à-dire multiple du nombre de lignes définissant un motif de bobinage sur le nombre de colonnes. Il faut donc bien noter que, sur une matrice $N_s \times N$ quelconque multipliée à droite par la matrice orthonormale de *Concordia* C_N, les vecteurs colonnes ne sont pas généralement orthogonaux deux à deux.

[6] Contrairement à ce qui est représenté sur la figure III.2-b, la matrice de fonction de bobinage fictif ne rend pas compte de la variation linéaire des conducteur-tours le long de l'ouverture d'encoche.



(a) Fonctions de distribution fictive de conducteurs (construite par la donnée de la matrice D_f)

(b) Fonctions de bobinage fictif (construite par la donnée de la matrice B_f)

Figure III.2 — Eléments de représentation des bobinages fictifs de la machine pentaphasée *M5-IRENAV* à bobinage fractionnaire

exemple, la fonction de bobinage fictif de la phase numéro 0 de la machine secondaire (repéré *alpha-2*) ne peut se déduire par décalage de la fonction de bobinage fictif de la phase numéro 0 de la machine principale (repéré *alpha-1*). La disparition de la propriété de circularité entre les différentes colonnes des matrices de distribution fictive et de fonction de bobinage fictif est ainsi clairement apparente. Par contre, les fonctions de bobinage *alpha-1* et *beta-1* (respectivement *alpha-2* et *beta-2*) sont approximativement en quadrature.

A posteriori ceci apparaît logique. Initialement, seule la machine polyphasée et ses N phases sont considérées. Par raison de régularité de la machine, il est tout à fait normal de déduire les bobinages de phase par simple décalage de l'un d'entre eux : en effet, dans ce cas, il n'existe qu'un seul motif de bobinage. Par contre, lorsque la machine polyphasée est décomposée en machines fictives, il existe autant de motifs de bobinage qu'il existe de machines fictives. Et, finalement, la matrice B_f (ou équivalemment D_f) ne fait que mettre en évidence ces différents motifs. La transformation de l'information de circularité en information d'orthogonalité confirme la notion d'indépendance magnétique des machines fictives. Pour le problème de l'optimisation des caractéristiques de machines fictives, ce résultat est très important : il signifie qu'il est possible de fixer les bobinages fictifs indépendamment les uns des autres puis de re-constituer le bobinage de phase réelle.

III.2.2 Transformée de *Fourier* discrète des vecteurs de bobinage

L'examen des fonctions de bobinage fictif en figure III.2-b suggère une composante harmonique principale pour chacune d'entre elles. Là encore, une analyse fréquentielle par TFD s'impose. Plus fondamentalement, la possibilité de décrire le formalisme multimachine par l'intermédiaire de suites N-périodiques résulte de la distribution régulière des phases au-dessus des paires de pôles. Et cette distribution régulière des phases s'appuie sur une autre distribution régulière, celles des encoches sur la périphérie de la machine. C'est cette régularité de dimension N_s qui justifie l'introduction de la TFD d'ordre N'_s pour caractériser l'information fréquentielle décrite par les vecteurs de bobinage.

III.2.2.1 Introduction des TFD de vecteurs de bobinage

Les vecteurs de distribution réelle et de fonction de bobinage réel de dimension N'_s admettent une Transformée de *Fourier* discrète réelle[7] :

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_n^{N'_s}} = \mathcal{C}_{N'_s}\left(\overrightarrow{d_n^{N'_s}}\right) \\ \overrightarrow{B_n^{N'_s}} = \mathcal{C}_{N'_s}\left(\overrightarrow{b_n^{N'_s}}\right) \end{cases}$$

Le composantes des vecteurs transformés sont notés comme suit :

$$\overrightarrow{D_n^{N'_s}} = \begin{pmatrix} D_{0,n} \\ \vdots \\ D_{h,n} \\ \vdots \\ d_{N'_s-1,n} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{B_n^{N'_s}} = \begin{pmatrix} B_{0,n} \\ \vdots \\ B_{h,n} \\ \vdots \\ B_{N'_s-1,n} \end{pmatrix}$$

Il en est de même pour les vecteurs de bobinage fictif :

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_n^{N'_s,f}} = \mathcal{C}_{N'_s}\left(\overrightarrow{d_n^{N'_s,f}}\right) \\ \overrightarrow{B_n^{N'_s,f}} = \mathcal{C}_{N'_s}\left(\overrightarrow{b_n^{N'_s,f}}\right) \end{cases}$$

Et les composantes des vecteurs transformés se notent :

$$\overrightarrow{D_n^{N'_s,f}} = \begin{pmatrix} D^f_{0,n} \\ \vdots \\ D^f_{h,n} \\ \vdots \\ D^f_{N'_s-1,n} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{B_n^{N'_s,f}} = \begin{pmatrix} B^f_{0,n} \\ \vdots \\ B^f_{h,n} \\ \vdots \\ B^f_{N'_s-1,n} \end{pmatrix}$$

D'après la description de l'opérateur TFD faite dans la partie III.1, $B_{h,n}$ correspond au coefficient de pondération de l'harmonique discret de rang h de la fonction de bobinage de la phase n représentée par le vecteur $\overrightarrow{b_n^{N'_s}}$. En d'autres termes, les composantes $b_{g,n}$ du vecteur $\overrightarrow{b_n^{N'_s}}$ correspondent à l'échantillonnage d'un signal périodique défini par les coefficients $B_{h,n}$ selon la relation suivante :

$$b_{g,n} = \left[\sqrt{\frac{2}{N'_s}} \sum_{h=1}^{\frac{N'_s+mod(N'_s,2)}{2}-2} \left(B_{h,n}\cos\left(h\frac{p}{p'}\theta\right) + B_{N'_s-h,n}\sin\left(h\frac{p}{p'}\theta\right)\right) \right]_{\theta=g\frac{2\pi}{N_s}}$$

[7] La TFDr est choisie pour obtenir des composantes réelles sur les vecteurs transformées, ce qui facilite les représentations graphiques.

Cette correspondance montre que les grandeurs discrètes de bobinage (composantes des vecteurs de distribution et de fonction de bobinage) peuvent être vues comme résultant de l'échantillonnage d'un signal continu. Il en est de même pour les bobinages fictifs. Les composantes $B^f_{h,k}$ du vecteur de fonction de bobinage définissent un signal périodique qui, par échantillonnage à la fréquence N_s, donne les composantes $b^f_{g,k}$ du vecteur de fonction de bobinage de la machine d'inductance M_k :

$$b^f_{g,n} = \left[\sqrt{\frac{2}{N'_s}} \sum_{h=1}^{\frac{N'_s+mod(N'_s,2)}{2}-2} \left(B^f_{h,n} \cos\left(h\frac{p}{p'}\theta\right) + B^f_{N'_s-h,n} \sin\left(h\frac{p}{p'}\theta\right) \right) \right]_{\theta=g\frac{2\pi}{N_s}} \quad \text{(III.23)}$$

Il en est de même pour les distributions fictives :

$$d^f_{g,n} = \left[\sqrt{\frac{2}{N'_s}} \sum_{h=1}^{\frac{N'_s+mod(N'_s,2)}{2}-2} \left(D^f_{h,n} \cos\left(h\frac{p}{p'}\theta\right) + D^f_{N'_s-h,n} \sin\left(h\frac{p}{p'}\theta\right) \right) \right]_{\theta=g\frac{2\pi}{N_s}} \quad \text{(III.24)}$$

L'observation de ces signaux continus permet de mettre en évidence des informations difficiles à percevoir par la simple lecture des composantes des vecteurs de distribution. Ces informations concernent le nombre de pôles et la régularité des bobinages fictifs. Par conséquent, pour examiner les propriétés des bobinages fictifs, l'utilisation de la TFD va se montrer particulièrement intéressante.

III.2.2.2 Exemple d'utilisation de la TFD pour caractériser les bobinages fictifs

Pour bien illustrer la signification de la TFD sur les grandeurs de bobinage fictif, l'exemple des fonctions de distributions fictives de la figure III.2-a est repris. Pour cet exemple, $N'_s = N_s = 20$ et $p = p' = 3$. Le calcul des TFD réels des vecteurs de distribution fictive *Homo-0* (vecteur $\overrightarrow{d_0^{N'_s,f}}$), *Alpha-1* (vecteur $\overrightarrow{d_1^{N'_s,f}}$) et *Alpha-2* (vecteur $\overrightarrow{d_2^{N'_s,f}}$) donne respectivement trois vecteurs :

- le vecteur $\overrightarrow{D_0^{N'_s,f}}$, de composantes $D^f_{h,0}$,
- le vecteur $\overrightarrow{D_1^{N'_s,f}}$, de composantes $D^f_{h,1}$,
- le vecteur $\overrightarrow{D_2^{N'_s,f}}$, de composantes $D^f_{h,2}$.

Les composantes sont représentées par l'histogramme de la figure III.3. D'après la théorie attachée à la TFD et représentée par l'équation (III.24), ces composantes correspondent à des pondérations sur des signaux cosinus et sinus discrets : comme $p = p'$, le cosinus de rang fondamental ($h = 1$) correspond à un cosinus de période 2π (c'est-à-dire sur le tour complet de la machine) échantillonné tous les $2\pi/N_s$ (c'est-à-dire tous les pas d'encoche). La relation (III.24) montre que le sinus fondamental correspond au coefficient de rang $h = N'_s - 1$ (c'est-à-dire à la dernière composante du vecteur transformé, celle indicée 19). Les annotations sur la figure III.3 donne la signification de chacunes des composantes non nulles des trois vecteurs transformés $\overrightarrow{D_0^{N'_s,f}}$, $\overrightarrow{D_1^{N'_s,f}}$ et $\overrightarrow{D_2^{N'_s,f}}$. Ainsi, il apparaît que la distribution de conducteurs de la machine fictive principale (repéré *alpha-1*) résulte de l'échantillonnage d'un sinus discret de rang 3 et d'un sinus discret de rang 7. La figure III.4-a confirme ceci en montrant que

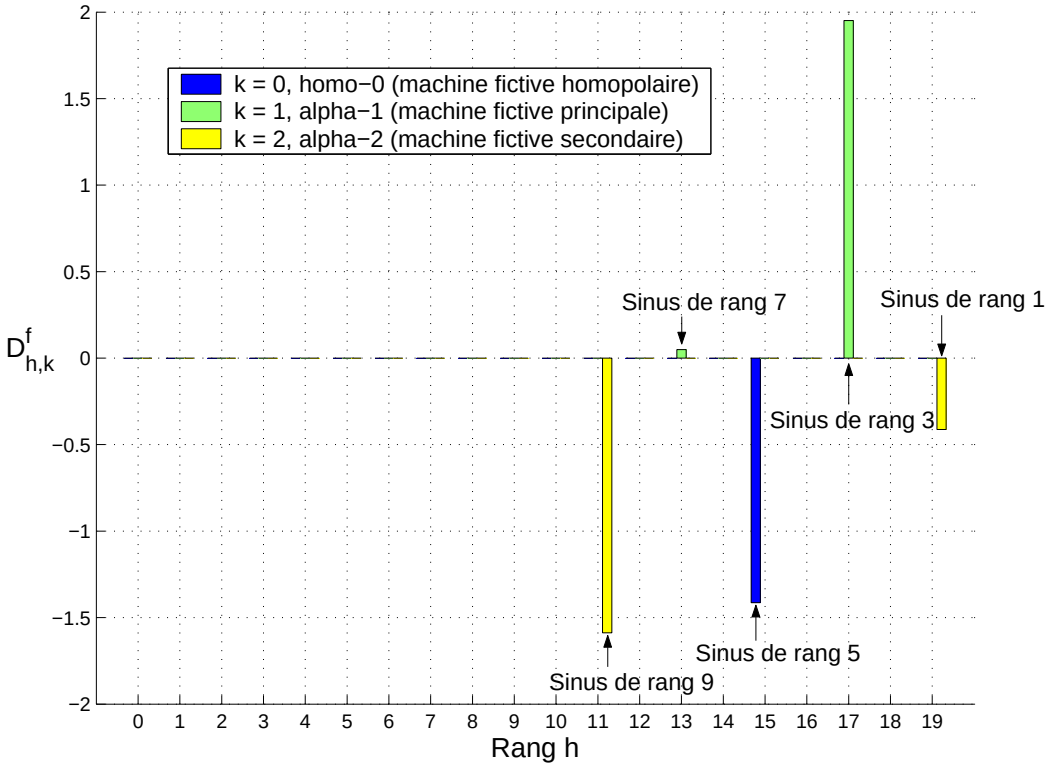


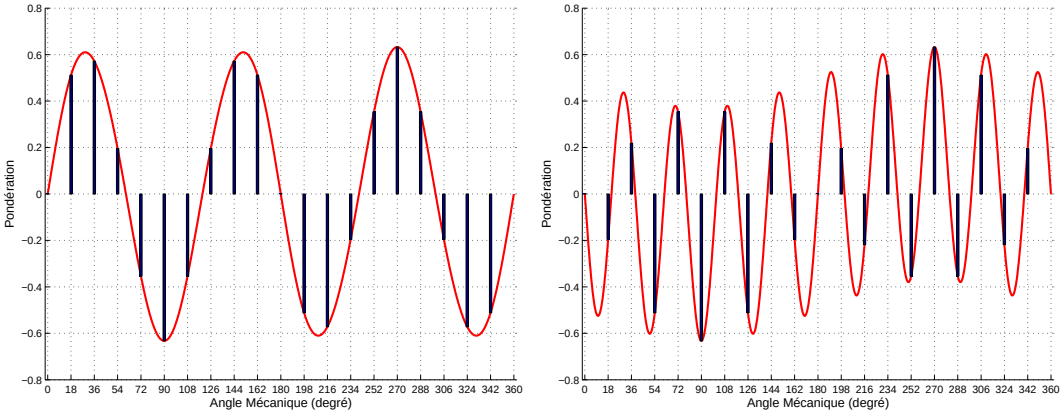
Figure III.3 — Représentation par histogramme des compoantes du vecteur TFDr des vecteurs de distribution de bobinage fictif

l'échantillonnage de ce signal permet de retrouver les composantes du vecteur de distribution fictive $\overrightarrow{d_1^{N'_s,f}}$ (ces composantes sont représentées sur la figure III.2-a). Physiquement, le fait d'avoir l'essentiel de l'énergie concentrée sur l'harmonique de rang 3 est rassurant : ceci signifie que la machine principale est "bobinée principalement" au-dessus des trois paires de pôle du rotor ($p = 3$ pour la machine *M5-IRENAV*).

Le cas de la machine secondaire (repérée *alpha-2*) est particulièrement intéressant : la distribution fictive de conducteurs résulte de l'échantillonnage d'un sinus de rang 1 et d'un sinus de rang 9, alors que l'observation de la figure III.2-a aurait pu faire croire pour cette machine fictive en une composante principale de rang 1 fortement perturbée. L'analyse spectrale par TFD montre bien la prédominance du rang 9 sur le rang 1. Au regard de la théorie des machines fictives, avoir la majorité de l'énergie sur le 9 est tout à fait logique : cela signifie que la machine fictive secondaire est "bobinée principalement" au-dessus de 9 paires de pôles, soit 3 fois plus que la machine principale. L'utilisation de la TFD montre ici tout son intérêt : elle permet de juger de la régularité des bobinages fictifs, ce qui constitue une information difficilement perceptible par la simple lecture des coefficients matriciels de distribution ou de bobinage fictif ou même par l'examen des fonctions de bobinage fictif.

III.2.2.3 Familles étendues d'harmoniques de machines fictives

L'introduction de la TFD d'ordre N'_s, c'est-à-dire d'un outil traduisant la disposition régulière des encoches statoriques, doit permettre d'associer aux machines fictives des harmoniques de force magnétomotrice et ainsi d'étendre la notion de familles d'harmoniques qui



(a) Origine échantillonnée de la distribution fictive de conducteurs de la machine principale : les 3 paires de pôles sont apparentes

(b) Origine échantillonnée de la distribution fictive de conducteurs de la machine secondaire : les 9 paires de pôles sont apparentes

Figure III.4 — Visualisation du nombre de paires de pôles des bobinages des deux machines fictives diphasées (machine *M5-IRENAV*)

ne concernent jusqu'à présent que les forces électromotrices et les inductances. C'est le but de ce paragraphe.

Classiquement, la décomposition en série de *Fourier* d'un signal de phase est réalisée en l'intégrant sur sa période, c'est-à-dire $2\pi_{elec}$. Pour évaluer le contenu harmonique de l'onde de force magnétomotrice, le signal représentant l'onde doit être intégré sur sa période spatiale qui est $2\pi/pgcd(N_s, p)$. Dans le cadre d'un bobinage à nombre entier d'encoches par pôle et par phase, les deux périodes sont égales ($pgcd(N_s, p) = p$). Par contre, dans le cadre d'un bobinage fractionnaire, les deux périodes ne concordent pas : il apparaît alors ce qui est classiquement appelé des sous-harmoniques de force magnétomotrice. Le terme de sous-harmonique se définit donc par rapport à la période de référence $2\pi_{elec}$. Physiquement, ce phénomène traduit des irrégularités dans le champ tournant statorique consécutives à la distribution non équivalente des bobines au-dessus des différentes paires de pôles. Evidemment, ces irrégularités influencent le comportement des machines fictives. Pour en évaluer leurs effets sur les machines fictives, la notion de famille d'harmoniques doit être étendue aux harmoniques de force magnétomotrice.

Les amplitudes des différents harmoniques de force magnétomotrice présents dans la machine polyphasée correspondent aux composantes, notées $B_{h,0}$, du vecteur $\overrightarrow{B_0^{N_s'}}$. En d'autres termes, $B_{h,0}$ est l'amplitude de l'harmonique discret de rang h pour la force magnétomotrice. Donc, pour évaluer quelles harmoniques de force magnétomotrice se projettent sur la machine fictive d'inductance M_k, il faut exprimer les composantes $B_{h,k}^f$ du vecteur $\overrightarrow{B_k^{N_s',f}}$ en fonction des composantes $B_{h,0}$ du vecteur $\overrightarrow{B_0^{N_s'}}$.

En utilisant la propriété de circularité entre les vecteurs de bobinage de phase réelle et en posant $i_c = dN_s'/N$, le terme $B_{h,k}^f$ s'exprime comme suit :

$$B_{h,k}^f = B_{k,0}\sqrt{\frac{1}{N}}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(dh+k)}$$

Cette relation met en évidence que la fonction de bobinage de la machine d'inductance fictive M_k est une composition d'harmoniques particuliers de la fonction de bobinage de phase de la machine polyphasée. Plus précisément, il vient :

$$B^f_{h,k} = \begin{cases} \sqrt{N} B_{k,0} & \text{si } h \in \frac{\mathbb{Z}N-k}{d} \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{III.25}$$

Ainsi, la connaissance de la TFDr de la fonction de bobinage réel de la phase 0 et de l'indice de circularité permet de construire les TFDr de chacune des fonctions de bobinage fictif par une règle de correspondance d'harmoniques. En d'autres termes, les N'_s harmoniques de la fonction de bobinage de la phase 0 se distribuent sur les différentes machines fictives selon une règle arithmétique conditionnée par l'indice i_c, c'est-à-dire par le nombre de phases et le nombre de pôles.

Ainsi sont mises en évidence les familles d'harmoniques de force magnétomotrice associées aux machines fictives. Elles sont notées comme suit (avec d, l'indice de circularité réduit défini par (II.4), page 53) :

$$F^{N,d}(M_k) = \left\{ \frac{\mathbb{Z}N \pm k}{d} \cap \mathbb{Z} \right\} \tag{III.26}$$

Cette relation (III.26) exprime le fait que la TFDr de la fonction de bobinage fictif de la machine fictive d'inductance M_k contient exclusivement les harmoniques de $F^{N,d}(M_k)$. La relation de correspondance entre les rangs d'harmoniques sur $2\pi_{elec}$ vers les rangs d'harmoniques $2\pi/pgcd(N_s, p)$ est simple à établir (avec p', le nombre de paires de pôles réduit défini par (II.3), page 52) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ h & \longmapsto & mod(p'h, N'_s) \end{array} \tag{III.27}$$

La figure III.5 donne les TFDr des fonctions de bobinage fictif de la machine *M5-IRENAV*. Elle illustre la notion de correspondance entre les harmoniques de force magnétomotrice qui sont calculés sur la période $2\pi/pgcd(N_s, p)$ et ceux calculés sur la période polaire $2\pi/p$. Par exemple, la machine fictive secondaire (repérée *Alpha-2*) est sensible aux harmoniques $2\pi_{elec}$ de rang -7, -3, 3 et 7 (par définition des familles d'harmoniques). D'après la relation (III.27), les harmoniques -7, -3, 3 et 7 correspondent respectivement aux harmoniques -1, -9, 9 et 1 ou encore, en exploitant la N'_s-périodicité, aux harmoniques 19, 11, 9 et 1. Ceci est clairement apparent sur la figure III.5.

Cette analyse par TFD des grandeurs de bobinage mène à la conclusion suivante : à nombre d'encoches, nombre de pôles et nombre de phases fixés, la connaissance de la suite de bobinage d'une phase permet par TFD de celle-ci de calculer les grandeurs de bobinage fictif (distribution et fonction) et de visualiser la répartition des pôles des bobinages fictifs. Les grandeurs d'optimisation des machines fictives étant les inductances et la force électromotrice, il serait maintenant intéressant de parvenir à exprimer ces deux grandeurs en fonction des TFD des distributions fictives et des fonctions de bobinage fictif. Alors, en ce qui concerne le bobinage, tous les calculs liés à l'optimisation des valeurs fictives se ramèneraient à l'étude de l'un des deux vecteurs de bobinage de phase : à savoir le vecteur de distribution $\overrightarrow{d_0^{N'_s}}$ ou le vecteur de fonction de bobinage $\overrightarrow{b_0^{N'_s}}$. Sachant que ces deux vecteurs contiennent exactement la même information (une simple opération d'intégration ou de dérivation discrète permet de passer de l'une à l'autre), une formulation concise des objectifs d'optimisation pourrait alors être obtenue. Le paragraphe suivant étudie cette possibilité.

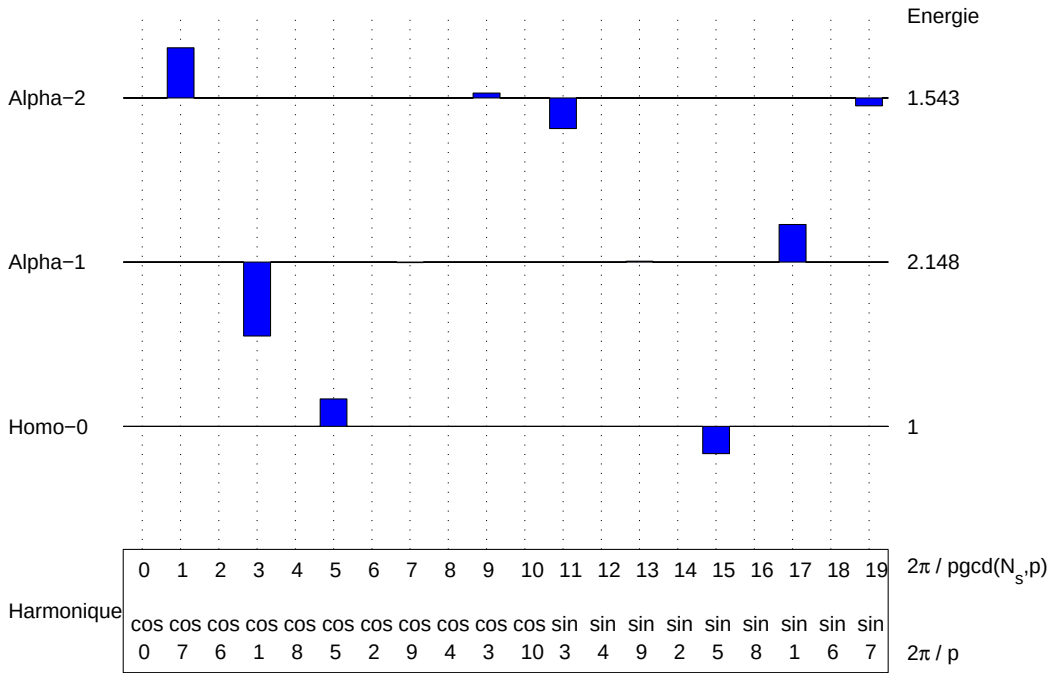


Figure III.5 — Transformée de *Fourier* discrète réelle des fonctions de bobinage fictif pour la machine pentaphasée à 20 encoches et 3 paires de pôle *M5-IRENAV*

III.2.3 Vecteurs de bobinage fictif et grandeurs globales

A paramètres géométriques de la machine fixés, la donnée d'un vecteur de bobinage de phase et de l'indice de circularité permet d'évaluer les inductances mutuelles et le filtrage de l'induction rotorique pour la machine polyphasée (c'est-à-dire les coefficients de bobinage globaux, cf. section II.4.1.3, page 75). Cette sous-partie montre que les vecteurs de bobinage fictif ont la même propriété : pour une machine fictive donnée, la connaissance d'un vecteur de bobinage fictif (distribution ou fonction de bobinage) permet de calculer l'inductance fictive et la force électromotrice fictive.

III.2.3.1 Bobinage fictif et inductance fictive

Le chapitre II (section II.4.3, page 80) propose un calcul analytique des inductances mutuelles de phase qui distingue la contribution du champ passant par l'entrefer (terme m_n^e pour inductance d'entrefer) de la contribution du champ restant dans le fer du stator (terme m_n^{fer} pour inductance de fuite). La relation suivante reprend les évaluations analytiques établies dans la sous-partie II.4.3 (cf. équations (II.38) et (II.40) pour la définition des constantes K_{m^e} et $K_{m^{fer}}$) :

$$\begin{aligned} & m_n = m_n^e + m_n^{fer} \\ & \text{avec} \begin{cases} m_n^e = K_{m^e} \sum_{r=0}^{N_s-1} b_{r,0} b_{r,n} = K_{m^e} \overrightarrow{b_0^{N_s}}.\overrightarrow{b_n^{N_s}} \\ m_n^{fer} = K_{m^{fer}} \sum_{r=0}^{N_s-1} d_{r,0} d_{r,n} = K_{m^{fer}} \overrightarrow{d_0^{N_s}}.\overrightarrow{d_n^{N_s}} \end{cases} \end{aligned} \tag{III.28}$$

L'inductance de fuite apparaît comme le produit scalaire des vecteurs distribution de conducteurs de la phase 0 et de la phase n (cf. paragraphe II.4.3.3). Quand à l'inductance mutuelle d'entrefer, sous l'hypothèse de ligne de champ droite dans l'entrefer, elle est proportionnelle au produit scalaire des fonctions de bobinage de la phase 0 et de la phase n (cf. paragraphe II.4.3.2). L'objectif est d'évaluer l'inductance fictive M_k à l'aide des distributions et des fonctions de bobinages fictifs.

Mathématiquement, l'existence de l'indice de circularité et sa multiplicité avec N'_s/N permet d'exprimer l'inductance fictive de la manière suivante :

$$M_k = M_k^e + M_k^{fer}$$
$$\text{avec} \begin{cases} M_k^e = pgcd(N_s,p)\sqrt{N}K_{m^e} \sum_{g=0}^{N'_s-1} \left|b_{g,k}^f\right|^2 = pgcd(N_s,p)K_{m^e} \left\|\overrightarrow{b_k^{N'_s,f}}\right\|^2 \\ M_k^{fer} = pgcd(N_s,p)\sqrt{N}K_{m^{fer}} \sum_{g=0}^{N'_s-1} \left|d_{g,k}^f\right|^2 = pgcd(N_s,p)K_{m^{fer}} \left\|\overrightarrow{d_k^{N'_s,f}}\right\|^2 \end{cases} \quad \text{(III.29)}$$

Selon l'expression (III.29), pour une phase fictive k donnée :

- l'inductance fictive d'entrefer M_k^e s'obtient par le carré de la norme du vecteur de fonction de bobinage de la phase fictive k,
- l'inductance fictive de fuite M_k^{fer} s'obtient par le carré de la norme du vecteur de distribution de la phase fictive k.

Avec la relation de *Parseval*, l'expression (III.29) peut être reformulée avec les TFD des vecteurs de bobinage fictif :

$$M_k = M_k^e + M_k^{fer}$$
$$\text{avec} \begin{cases} M_k^e = pgcd(N_s,p)K_{m^e} \sum_{h=0}^{N'_s-1} \left|B_{h,k}^f\right|^2 = pgcd(N_s,p)K_{m^e} \left\|\overrightarrow{B_k^{N'_s,f}}\right\|^2 \\ M_k^{fer} = pgcd(N_s,p)K_{m^{fer}} \sum_{h=0}^{N'_s-1} \left|D_{h,k}^f\right|^2 = pgcd(N_s,p)K_{m^e} \left\|\overrightarrow{D_k^{N'_s,f}}\right\|^2 \end{cases} \quad \text{(III.30)}$$

Pour une machine fictive donnée, c'est donc l'énergie de ses vecteurs de bobinage qui conditionnement la valeur de l'inductance fictive.

Il faut noter que ces propriétés sont confirmées par l'utilisation directe de la relation (III.28) sur une machine fictive. En remplaçant les vecteurs de distribution et de fonction de bobinage de phases réelles par ceux des phases fictives, la propriété d'orthogonalité des bobinages fictifs (III.22) permet de retrouver les expressions (III.29) et (III.30). En effet, cette propriété confirme que les machines fictives sont magnétiquement découplées mais, en plus, elle montre que les deux phases d'une machine fictive diphasée sont effectivement découplées (la mutuelle entre les deux phases fictives est nulle). De plus, comme souligné dans le paragraphe III.2.1.2, les deux vecteurs de bobinage d'une machine fictive diphasée $\overrightarrow{b_n^{N'_s,f}}$ et $\overrightarrow{b_{N-n}^{N'_s,f}}$ ont la même norme (tout comme les vecteurs $\overrightarrow{d_n^{N'_s,f}}$ et $\overrightarrow{d_{N-n}^{N'_s,f}}$), ce qui signifie que les inductances propres des deux phases d'une machine fictive diphasée sont égales.

Par ailleurs, la relation (III.29) rappelle l'effet bénéfique du terme de fuite M_k^{fer} sur les valeurs des inductances fictives (la fuite augmente l'inductance fictive). Au final, la concision des résultats obtenus est très intéressante :

- l'inductance fictive d'entrefer M_k^e est proportionnelle au carré de la norme du vecteur de fonction de bobinage fictif $\overrightarrow{b_k^f}$,
- l'inductance fictive de fuite M_k^{fer} est proportionnelle au carré de la norme du vecteur de distribution fictive $\overrightarrow{d_k^f}$.

Cette simplicité va faciliter la formulation du problème de conception concernant le choix des inductances fictives.

III.2.3.2 Bobinage fictif et force électromotrice fictive

Le calcul analytique de la force électromotrice élémentaire menée dans le chapitre II aboutit à deux expressions (cf. section (II.4.2), page 76) :

- une première relation (II.32) qui fait intervenir les termes de la matrice de distribution

$$\epsilon_n(\theta_r) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(\epsilon_{N_s})}_h \left(\sum_{m=0}^{N_s-1} d_{m,n} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}mph} \right) e^{jhp\theta_r}$$

- une deuxième relation (II.34) qui fait intervenir les termes de la matrice de fonction de bobinage

$$\epsilon_n(\theta_r) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} K_{e,h} \left(\sum_{m=0}^{N_s-1} b_{m,n} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}mph} \right) e^{jhp\theta_r}$$

En utilisant la définition de la distribution fictive (cf. équation (III.18)) et de la fonction de bobinage fictif (cf. équation (III.20)), le force électromotrice d'une phase fictive peut être évaluée de deux façons :

- à l'aide de la distribution fictive,

$$\begin{cases} E_k(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(\epsilon_{N_s})}_h \left(\sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{g=0}^{N_s-1} d_{g,k}^f e^{j\frac{2\pi}{N_s}ghp} \right) e^{jhp\theta_r} & \left(\text{homopolaires, } k \in \left\{ 0, \frac{N}{2} \right\} \right) \\ E_k(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(\epsilon_{N_s})}_h \left(\sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{g=0}^{N_s-1} d_{g,k}^f e^{j\frac{2\pi}{N_s}ghp} \right) e^{jhp\theta_r} & \text{(diphasées)} \end{cases} \tag{III.31}$$

- à l'aide de la fonction de bobinage fictif,

$$\begin{cases} E_k(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} K_{\epsilon,h} \left(\sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{g=0}^{N_s-1} b_{g,k}^f e^{j\frac{2\pi}{N_s}ghp} \right) e^{jhp\theta_r} & \left(\text{homopolaires, } k \in \left\{ 0, \frac{N}{2} \right\} \right) \\ E_k(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} K_{\epsilon,h} \left(\sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{g=0}^{N_s-1} b_{g,k}^f e^{j\frac{2\pi}{N_s}ghp} \right) e^{jhp\theta_r} & \text{(diphasées)} \end{cases} \tag{III.32}$$

Ces deux relations (III.31) et (III.32) sont donc formellement semblables aux relations (II.32) et (II.34) respectivement. Ainsi, le bobinage fictif agit sur les forces électromotrices fictives comme le bobinage réel agit sur les forces électromotrices de phase. En particulier, dans la relation (III.31), des coefficients de bobinage globaux (cf. section II.4.1.3, page 75) sur machine fictive peuvent être identifiés : les termes entre parenthèses (où la distribution fictive

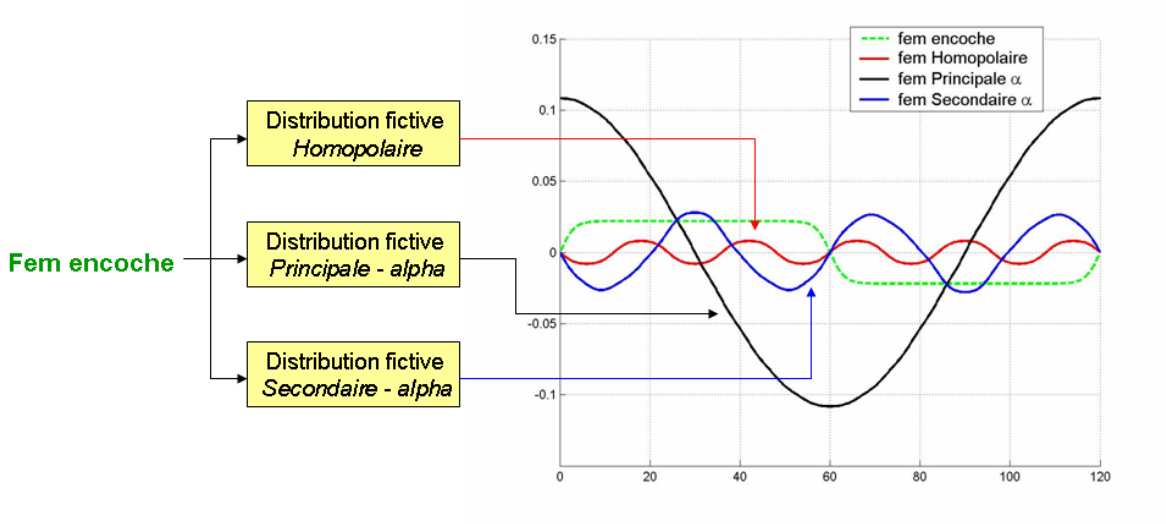


Figure III.6 — Obtention des forces électromotrices fictives par utilisation des distributions fictives (pour la machine *M5-IRENAV*)

intervient) filtrent la force électromotrice d'encoche.

Sur le plan pratique, ces relations montrent qu'il est possible de calculer les grandeurs de phases fictives sans passer par les grandeurs de phases réelles. Les vecteurs de bobinage fictif (distribution ou fonction de bobinage) déterminent implicitement les familles d'harmoniques : leur action sur les coefficients harmoniques représentant la géométrie de la machine ($\widehat{(e_{N_s})}_h$ pour la relation (II.32) et $K_{\epsilon,h}$ pour la relation (II.34)) se manifeste par un effet de filtrage qui reconstitue les familles d'harmoniques. La figure III.6 illustre ceci : la relation (III.31) est utilisée pour calculer les forces électromotrices élémentaires des différentes machines fictives de la machine pentaphasée $M5-IRENAV$.

Dans les relations (III.31) et (III.32), les coefficients réalisant la pondération des harmoniques sont les composantes des TFD de vecteurs de distribution fictive et de fonction de bobinage fictif. Par conséquent, les expressions de forces électromotrices fictives peuvent être reformulées avec les composantes des TFD :

- avec la TFDr du vecteur de distribution fictive

$$\begin{cases} E_k(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(e_{N_s})}_h \left(\sqrt{\frac{N_s}{N}} D^f_{ph,k}\right) e^{jph\theta_r} & \left(\text{homopolaires, } k \in \left\{0, \frac{N}{2}\right\}\right) \\ E_k(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(e_{N_s})}_h \left(\sqrt{\frac{2N_s}{N}} D^f_{ph,k}\right) e^{jph\theta_r} & \text{(diphasées)} \end{cases} \tag{III.33}$$

- avec la TFDr du vecteur de fonction de bobinage fictif

$$\begin{cases} E_k(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} K_{\epsilon,h} \left(\sqrt{\frac{N_s}{N}} B^f_{ph,k}\right) e^{jph\theta_r} & \left(\text{homopolaires, } k \in \left\{0, \frac{N}{2}\right\}\right) \\ E_k(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h=-\infty}^{+\infty} K_{\epsilon,h} \left(\sqrt{\frac{2N_s}{N}} B^f_{ph,k}\right) e^{jph\theta_r} & \text{(diphasées)} \end{cases} \tag{III.34}$$

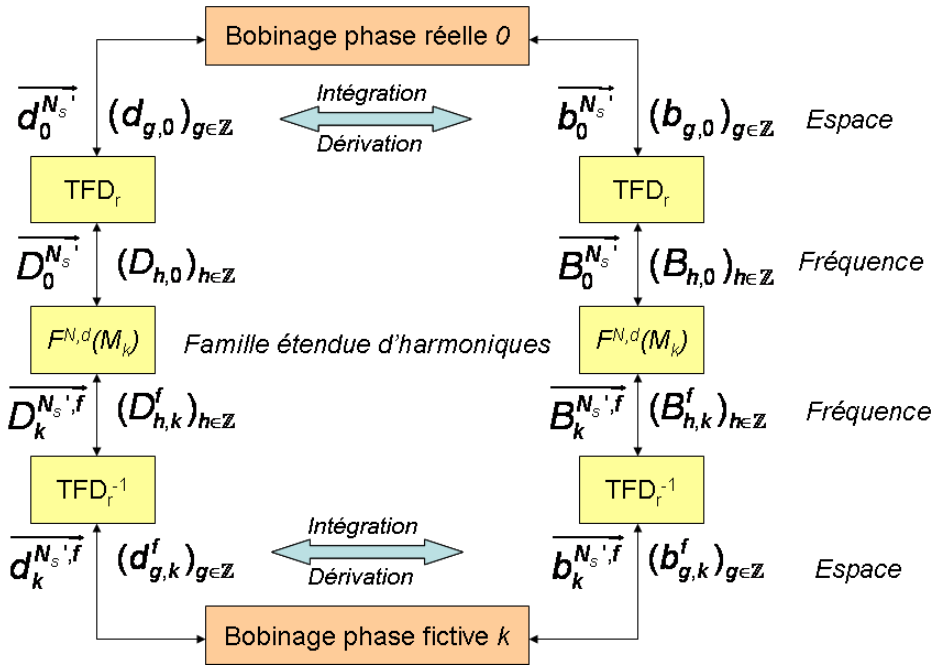


Figure III.7 — Caractérisation fréquentielle du bobinage d'une machine fictive à partir du bobinage de la phase 0

III.2.3.3 Synthèse

L'utilisation de la TFD des vecteurs de bobinage fictif permet de formuler simplement les objectifs liés à l'optimisation des grandeurs de machines fictives. Schématiquement, pour une géométrie de machine donnée et à topologie précisée, les deux arguments suivants apparaissent :

- fixer l'énergie des vecteurs de bobinage fictif revient à fixer la valeur des inductances fictives,
- fixer les termes de la TFD des vecteurs de bobinage fictif (distribution ou fonction de bobinage) revient à fixer les coefficients de bobinage globaux des machines fictives.

Toute l'information des bobinages fictifs est contenue dans le bobinage d'une phase réelle. A ce sujet, le schéma de la figure III.7 montre le cheminement pour passer du bobinage d'une phase réelle au bobinage d'une phase fictive. Tout d'abord, par son parallèlisme, cette figure rappelle que les modélisations du bobinage par vecteur de distribution ou vecteur de fonction de bobinage sont équivalentes. Le rôle central joué par la famille étendue d'harmoniques $F^{N,d}(M_k)$ est mis en avant : elle prélève des harmoniques du bobinage réel pour constituer le bobinage fictif. Il est donc possible de passer directement du vecteur de bobinage d'une phase réelle à celui d'une phase fictive sans aucun calcul matriciel. Pour bien mesurer l'apport de ce résultat, il faut se rappeler que les bobinages fictifs sont initialement construits à l'aide d'un calcul matriciel (cf. section III.2.1.1). Désormais, plus aucun calcul matriciel n'est nécessaire. La règle de passage ici décrite aurait été délicate à établir sans utiliser la TFD. Ce transfert est à la base du principe d'optimisation du bobinage décrit dans le chapitre suivant.

III.3 Fonction d'aimantation fictive

La partie précédente s'est attaché à définir pour les machines fictives des bobinages fictifs. De façon complémentaire, cette partie est consacrée à la définition de fonctions d'aimantation fictive. Sur le plan de la modélisation (décrite dans le chapitre précédent), le rotor de la machine polyphasée est représenté à l'aide des deux fonctions d'aimantation radiale et tangentielle. Naturellement, la construction des fonctions d'aimantation fictive va dépendre de ces deux fonctions d'aimantation réelle. La première sous-partie exposera la démarche permettant d'aboutir à une fonction d'aimantation fictive. La deuxième sous-partie mettra en évidence la propriété suivante : la répartition régulière des phases de la machine polyphasée se manifeste par un effet de segmentation naturelle de la fonction d'aimantation fictive.

III.3.1 Construction

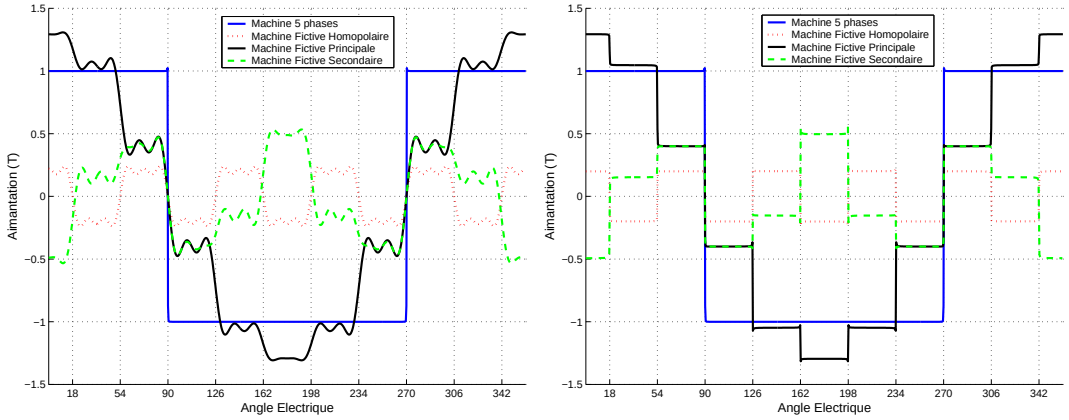
Introduites dans la sous-partie II.2.1 (page 55) pour modéliser les aimants du rotor de la machine polyphasée, les fonctions d'aimantation radiale et tangentielle présentent des propriétés de symétrie et d'anti-périodicité qui permettent de les décomposer en série de *Fourier* sans aucune perte d'informations (autre que celles liées à la non prise en compte de certains harmoniques). Ainsi, puisque les machines fictives sont caractérisées par une série d'harmoniques particuliers, la fonction d'aimantation fictive va correspondre au signal constitué de ces seuls harmoniques. Le premier paragraphe met en évidence la forme particulière de ces signaux (constatée par utilisation du code de calcul analytique) : une convergence de ceux-ci vers des signaux définis sur des largeurs bien précises est observée. Afin de mieux appréhender ce phénomème, le paragraphe suivant définit la fonction d'aimantation fictive sans utiliser les familles d'harmoniques.

III.3.1.1 Analyse

D'après la théorie multimachine, la machine fictive ne perçoit de la fonction d'aimantation que les harmoniques appartenant à sa famille. Ainsi, pour une machine à N phases, il est tout à fait naturel de construire les fonctions d'aimantation fictive radiale $F_{ar,k}$ et tangentielle $F_{at,k}$ de la machine d'inductance M_k à l'aide des harmoniques de la famille $F^N(M_k)$:

$$\begin{cases} F_{ar,k}(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h \in F^N(M_k)} \widehat{(f_{ar})}_h e^{jph\theta_r} \\ F_{at,k}(\theta_r) = \displaystyle\sum_{h \in F^N(M_k)} \widehat{(f_{at})}_h e^{jph\theta_r} \end{cases}$$

Pour obtenir l'image exacte de la fonction d'aimantation fictive, il est nécessaire de prendre en compte l'infinité des harmoniques de la famille $F^N(M_k)$, ce qui n'est pas possible lors d'une implantation informatique où la série est nécessairement tronquée. Cependant, l'allure du signal de convergence peut être très bien approchée à l'aide du code de calcul analytique. Pour une machine à 5 phases munie d'un rotor radial sans lacune (comme celui de la machine *M5-L2EP*, cf. tableau II.3, page 78), la figure III.8 représente l'allure des fonctions d'aimantation fictive pour un faible nombre d'harmoniques (partie -a) et pour un grand nombre d'hamoniques (partie -b). Il apparaît clairement que les fonctions d'aimantation convergent vers des signaux créneaux. Pour toutes les machines fictives, ces créneaux ont la même largeur :



(a) Allure des fonctions d'aimantation fictive pour un faible nombre d'harmoniques (25)

(b) Allure des fonctions d'aimantation fictive pour un grand nombre d'harmoniques (1000)

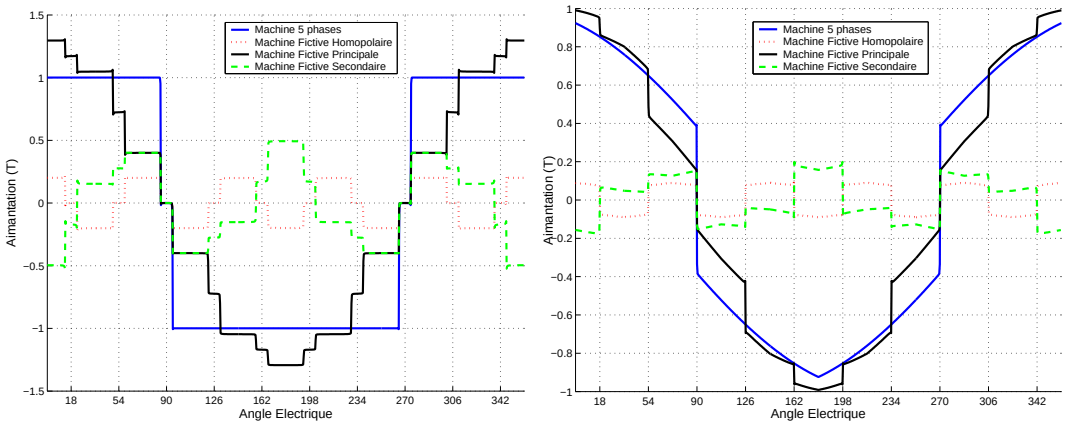
Figure III.8 — Fonction d'aimantation fictive radiale pour une machine à 5 phases avec rotor radial sans lacune

36 degrés électriques. En fait, pour une machine pentaphasée, il apparaît que les fonctions d'aimantation fictives admettent des sauts tous les 36 degrés electriques. L'allure de la fonction d'aimantation fictive à l'intérieur de ces intervalles de 36 degrés dépend de la fonction d'aimantation réelle. Sur l'exemple de la figure III.8, comme la fonction d'aimantation réelle est un créneau, les fonctions d'aimantation fictive sont constantes sur chacun des intervalles. Mais ce n'est pas généralement le cas : la figure III.9-a montre les fonctions d'aimantation fictive radiale dans le cas d'une pôle présentant une lacune de 5 % (c'est-à-dire dans le cas d'un pôle constitué d'un unique aimant occupant 95 % du pas polaire et à magnétisation radiale). Il est clair que cette lacune est reportée sur chacun des intervalles de largeur 36 degrés électriques. La partie -b de la figure présente le cas où le rotor est un anneau de *Halbach* [16] à deux aimants par pôle. La fonction d'aimantation radiale est alors fonction du cosinus de l'angle θ_r : le changement de définition des fonctions d'aimantation fictive tous les 36 degrés électriques apparaît clairement. En somme, ces simulations laissent supposer que les fonctions d'aimantation fictive admettent des formulations explicites sur des intervalles dont la largeur dépend du nombre de phases (pour la machine à 5 phases, 36 degrés électriques correspond à π_{elec}/N).

III.3.1.2 Définition des fonctions d'aimantation fictive

Les grandeurs de machines fictives (inductance, force électromotrice, courant, ...) sont initialement obtenues par changement de base d'écriture ou par transformée de *Fourier* discrète. Dans le paragraphe précédent, les fonctions d'aimantation fictive ont été construites à partir des familles d'harmoniques, ce qui qui a fait apparaître des propriétés intéressantes. Dans ce paragraphe, une nouvelle définition des fonctions d'aimantation fictive est proposée.

Pour définir les fonctions d'aimantation fictive de manière analogue aux autres grandeurs de machine fictive (courant fictif, fem fictive, ...), il faut les faire apparaître comme des transformées de grandeurs de phase. Il est donc nécessaire de définir des fonctions d'aimantation de phase (radiale et tangentielle). Par construction du bobinage, sur deux pas



(a) Allure des fonctions d'aimantation fictive pour un pôle à aimantation radiale avec une lacune de 5 %

(b) Allure des fonctions d'aimantation fictive pour un anneau de *Halbach* à deux aimants

Figure III.9 — Fonction d'aimantation fictive radiale pour une machine à 5 phases : illustration de la définition explicite par intervalle de largeur 36 degrés électriques

polaires (soit $2\pi_{elec}$), les N phases de la machine présentent des axes régulièrement espacés. Par conséquent, deux phases consécutives de la machine voient la même aimantation avec un décalage de $2\pi_{elec}/N$. Les fonctions d'aimantation de la phase n (radiale et tangentielle) se définissent donc comme suit :

$$\begin{cases} f_{ar,n}(\theta_r) = f_{ar}(\theta_r - n\dfrac{2\pi_{elec}}{N}) \\ f_{at,n}(\theta_r) = f_{at}(\theta_r - n\dfrac{2\pi_{elec}}{N}) \end{cases} \tag{III.35}$$

Une fois les fonctions d'aimantation de phase définies, il est possible de leur associer des fonctions d'aimantation fictive (par TFD ou changement de base, comme cela est fait pour les forces électromotrices, les courants, ...). Les fonctions d'aimantation fictives construites dans le paragraphe précédent résultent de la prise en compte de l'ensemble des harmoniques de la machine fictive considérée. Autrement dit, si la machine fictive est diphasée, la fonction d'aimantation fictive correspondante est la somme des transformées de rang k (harmoniques en $\mathbb{Z}N - k$) et de rang $N - k$ (harmoniques en $\mathbb{Z}N + k$). De cette manière, chaque machine fictive admet une fonction d'aimantation radiale et une fonction d'aimantation tangentielle ; ce qui permet de lui associer un rotor. Formellement, la fonction d'aimantation fictive radiale de la machine diphasée d'inductance M_k se définit comme suit :

$$F_{ar,k}(\theta_r) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_{ar,n}(\theta_r)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_{ar,n}(\theta_r)e^{-j\frac{2\pi}{N}n(N-k)}$$

$$F_{ar,k}(\theta_r) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_{ar,n}(\theta_r)cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right)$$

La fonction d'aimantation fictive tangentielle se définit de même :

$$F_{at,k}(\theta_r) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_{at,n}(\theta_r) cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right)$$

Pour une machine fictive monophasée, il vient :

$$\begin{aligned} &\text{radiale,} && F_{ar,k}(\theta_r) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_{ar,n}(\theta_r) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &\text{tangentielle,} && F_{at,k}(\theta_r) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_{at,n}(\theta_r) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned}$$

Ces résultats peuvent être condensés en utilisant la transformée de *Fourier* discrète réelle :

$$\begin{aligned} &k \in \left\{0, \frac{N}{2}\right\} \cap \mathbb{N} && \begin{cases} F_{ar,k}(\theta_r) = \sqrt{\frac{1}{N}}\left[\mathcal{C}^N\left(f_{ar,n}(\theta_r)\right)\right]_k \\ F_{at,k}(\theta_r) = \sqrt{\frac{1}{N}}\left[\mathcal{C}^N\left(f_{at,n}(\theta_r)\right)\right]_k \end{cases} \\ &\forall k \in \left[1..\frac{N-2+mod(N,2)}{2}\right] && \begin{cases} F_{ar,k}(\theta_r) = \sqrt{\frac{2}{N}}\left[\mathcal{C}^N\left(f_{ar,n}(\theta_r)\right)\right]_k \\ F_{at,k}(\theta_r) = \sqrt{\frac{2}{N}}\left[\mathcal{C}^N\left(f_{at,n}(\theta_r)\right)\right]_k \end{cases} \end{aligned} \tag{III.36}$$

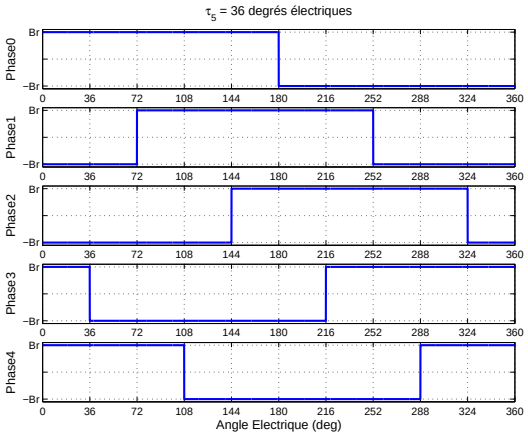
D'après cette relation (III.36), la fonction d'aimantation radiale (respectivement tangentielle) de la machine d'inductance M_k, $F_{ar,k}(\theta_r)$ (respectivement $F_{at,k}(\theta_r)$), est le terme numéro k de la TFDr de la fonction d'aimantation de phase $f_{ar,n}(\theta_r)$ (respectivement $f_{at,n}(\theta_r)$). Par construction, comme pour les courants et les forces électromotrices de machine fictive, la somme des fonctions d'aimantation fictive est égale à la fonction d'aimantation de la phase 0 $f_{a,0}(\theta_r) = f_a(\theta_r)$ (cf. relation (III.35)). Par exemple, pour les fonctions radiales :

$$f_{ar}(\theta_r) = \sum_{k=0}^{N_f-1} F_{ar,k}(\theta_r)$$

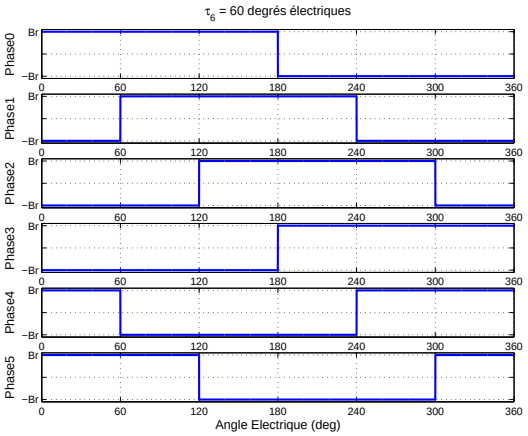
Cette propriété peut être vérifiée sur les figures III.8 et III.9.

III.3.2 Effet de segmentation de la fonction d'aimantation fictive

L'observation des allures des fonctions d'aimantation fictive laisse supposer qu'elles sont explicitement définies sur des intervalles de largeur dépendant du nombre de phases. Le premier paragraphe explique ce phénomème. Et le second paragraphe étudie la possibilité de définir des aimants fictifs, c'est-à-dire d'avoir pour chaque machine fictive une répartition d'aimants qui lui est propre.



(a) Système à 5 phases avec pôle totalement occupé par un aimant radial : représentation des 5 fonctions d'aimantation radiale de phase



(b) Système à 6 phases avec pôle totalement occupé par un aimant radial : représentation des 6 fonctions d'aimantation radiale de phase

Figure III.10 — Illustration de l'effet de segmentation de la fonction d'aimantation pour la construction des fonctions d'aimantation fictive

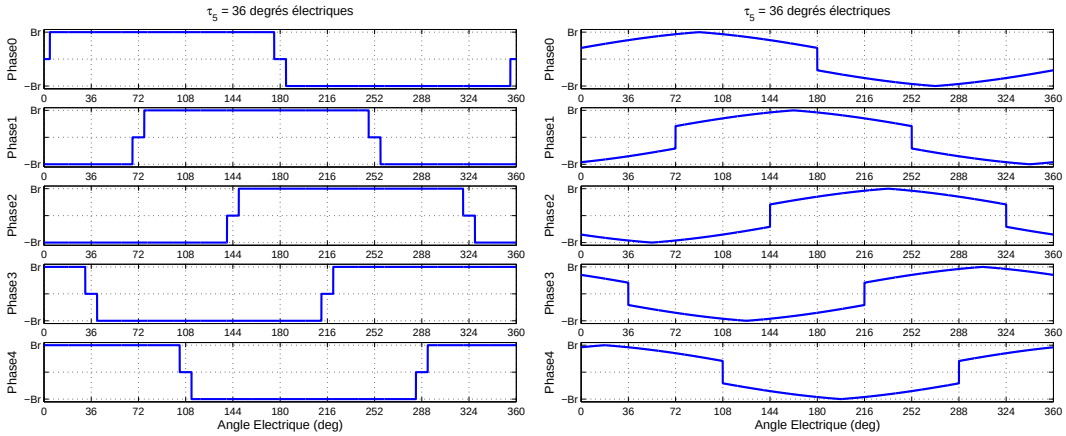
III.3.2.1 Origine de la segmentation

Par définition de la fonction d'aimantation fictive (cf. relation (III.36)), la fonction d'aimantation fictive est une somme pondérée en cosinus des N fonctions d'aimantation de phase. Ces fonctions d'aimantation de phase se déduisent les unes des autres par décalage de $2\pi_{elec}/N$. Comme l'illustre la figure III.10, ce décalage se manifeste par un effet de segmentation de la fonction d'aimantation réelle (la fonction est continue par morceaux) : les fonctions d'aimantation fictive se calculent sur chacun des intervalles définis entre les pointillés sur la figure. La figure III.10-a montre que la largeur de cet intervalle est π_{elec}/N pour un système à nombre de phase impair (5 sur l'exemple, soit 36 degrés électriques). La figure III.10-b montre que, pour un système à nombre de phases pair, la largeur vaut $2\pi_{elec}/N$ (6 sur l'exemple, soit 60 degrés électriques). Ceci explique l'allure de fonctions construites par morceau de largeur prédéfinie observées pour les fonctions d'aimantation radiale fictive. La largeur des zones de définition correspond à une période de segmentation naturelle de la fonction d'aimantation notée τ_N :

$$\tau_N = \frac{2\pi_{elec}}{(1 + mod(N, 2))N}$$

Il faut noter que, quelque soit la nature de la fonction d'aimantation (constante ou pas), cet effet de segmentation est maintenu. Sur chaque intervalle $[q\tau_N, (q+1)\tau_n]$ (avec q entier naturel), la fonction d'aimantation fictive s'obtient en sommant les morceaux de fonction d'aimantation réelle de largeur τ_N pondérés en cosinus (selon la relation (III.36)). Pour illustrer ceci, la figure III.11 reprend les deux exemples de fonction d'aimantation de la figure III.9 et montre comment cette fonction d'aimantation se traduit au niveau des de chacune des machines fictives.

Au final, il apparaît que la structure polyphasée régulière segmente la fonction d'aimantation. Sur chacun des segments (ou intervalles), les fonctions d'aimantation fictive peuvent



(a) Système à 5 phases avec pôle occupé par un aimant radial de largeur $0.95\pi_{elec}$: représentation des 5 fonctions d'aimantation radiale de phase

(b) Système à 5 phases avec anneau de *Halbach* à deux aimants par pôle : représentation des 5 fonctions d'aimantation radiale de phase

Figure III.11 — Illustration de l'effet de segmentation de la fonction d'aimantation pour des allures plus générales

alors être vues comme les transformées de *Fourier* discrètes de suites de segments de la fonction d'aimantation réelle.

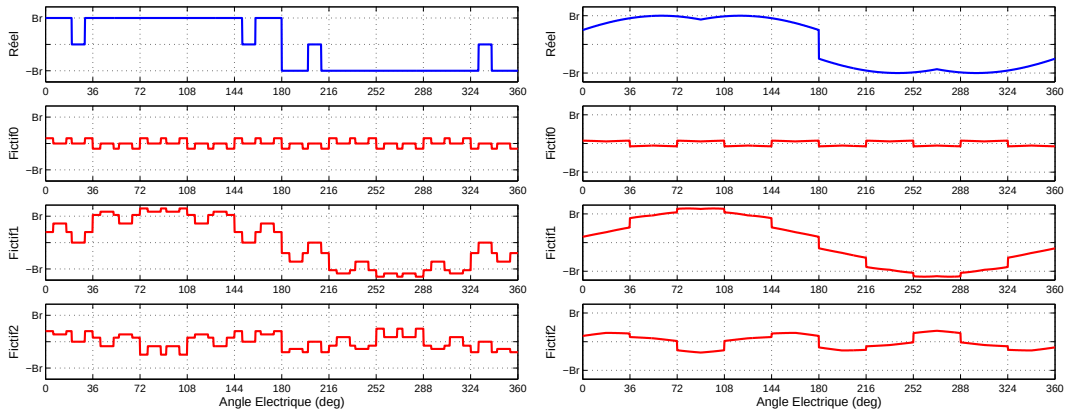
III.3.2.2 Réflexions sur la notion d'aimants fictifs

L'allure segmentée des fonctions d'aimantation fictive incite à vérifier si elle ne dérive pas d'une couche d'aimants fictifs. Ceci est possible à la condition suivante : la fonction d'aimantation fictive doit avoir une forme qui permet de considérer qu'elle résulte d'un rotor constitué d'aimants (fictifs) aux propriétés géométriques parfaitement identifiables, à savoir :

- pour un aimant radial, une largeur, une position et une valeur d'aimantation rémanente (signée),
- pour un aimant parallèle, une largeur, une position, une valeur d'aimantation (norme) et une orientation d'aimantation rémanente.

Par exemple, si une fonction d'aimantation fictive radiale est un créneau, il est assez naturel de considérer qu'elle résulte d'un aimant radial aux caractéristiques géométriques dépendant de la position et de la largeur du créneau.

Dans le cadre d'un rotor constitué d'une couche d'aimants radiaux, les fonctions d'aimantation fictive radiale sont toujours des fonctions en escalier. Dans ce cas, il est toujours possible d'identifier des caractéristiques d'aimants fictifs radiaux. Cependant, comme l'illustre la figure III.12-a (présentant les fonctions d'aimantation réelle et fictive pour une machine à 5 phases), cette identification peut être assez fastidieuse. La relation (III.36) permet de calculer les caractéristiques des 150 aimants fictifs (50 par machine fictive). Il faut bien noter que, dans ce cas, les aimants radiaux constituant les rotors fictifs ont des valeurs différentes d'aimantation rémanente. De manère générale, le nombre d'aimants fictifs constituant un rotor fictif dépend des caractéristiques de la couche d'aimants radiaux réels (nombre d'aimants et disposition).



(a) Fonction d'aimantation radiale fictive pour une couche d'aimants radiaux

(b) Fonction d'aimantation radiale fictive pour une couche d'aimants parallèles

Figure III.12 — Etude de la possibilité d'identifier des paramètres d'aimants fictifs pour une aimantation radiale et parallèle (machine à 5 phases)

Par contre, dans le cadre d'un rotor constitué d'une couche d'aimants parallèles, l'identification est beaucoup plus délicate. La figure III.12-b illustre cette difficulté pour une fonction d'aimantation radiale sur une machine à 5 phases. Pratiquement, tenter d'extraire des paramètres d'aimants fictifs à l'aide de la relation (III.36) est une opération très délicate et pas forcément réalisable.

Au final, l'identification de paramètres d'aimants fictifs est intéressante pour une interprétation visuelle des résultats. Mais, pratiquement, sur le plan de l'optimisation, cette recherche n'est pas nécessaire. C'est la forme de la fonction d'aimantation fictive qui agit sur la machine fictive : c'est donc celle-ci qu'il faut optimiser au travers des paramètres concrets de la couche d'aimants réels.

En résumé, cette partie propose une méthode de décomposition de la fonction d'aimantation sur les machines fictives. Comme pour les forces électromotrices ou les courants fictifs, la somme des fonctions d'aimantation fictive est égale à la fonction d'aimantation réelle. Le fait de définir la fonction d'aimantation fictive comme une transformée de fonction d'aimantation de phase a permis de mettre en évidence la propriété de segmentation : en raison de la distribution régulière des axes de phase au-dessus des différentes paires de pôles, les fonctions d'aimantations fictives présentent des discontinuités à intervalles réguliers. Dans le cadre d'un rotor constitué d'aimants radiaux, l'allure de fonctions en escalier pour les fonctions d'aimantation fictive permet de les relier à des rotors constitués d'aimants fictifs. Par contre, si le rotor est constitué d'aimants parallèles, la conclusion n'est pas évidente. En somme, l'ensemble des investigations menées dans cette partie vont permettre d'aborder méthodiquement le problème d'optimisation de la fonction d'aimantation de la machine polyphasée détaillée dans le chapitre suivant.

Ce chapitre établit les bases théoriques permettant de mieux exploiter le concept de machines fictives. Pour faciliter la résolution des problèmes d'optimisation, il est important de développer un formalisme sans information redondante et propice au traitement informatique. Les formalismes vectoriels et matriciels ne respectent pas ces deux critères simultanément. Par contre, le formalisme utilisant des suites périodiques et la transformée de *Fourier* discrète répond à cette double exigence. Utilisé pour caractériser ou construire les grandeurs de machines fictives, ce nouveau formalisme présente deux grands intérêts. D'une part, il condense l'information contenue dans les matrices d'inductance et de bobinage. D'autre part, il permet d'interpréter de manière fréquentielle les changements de base définissant les machines fictives.

Ainsi, les fonctions d'aimantation fictive peuvent être définies à l'aide de la Transformée de *Fourier* discrète. L'étude des fonctions d'aimantation fictive a permis de montrer que les machines fictives ont une perception segmentée du rotor de la machine polyphasée. Si l'ambition de définir des aimants fictifs n'a pu être vraiment concrétisée, les analyses menées donnent des indications utiles sur la manière d'optimiser la couche d'aimants pour définir la force électromotrice fictive.

A l'inverse, l'objectif de construction de bobinages fictifs est pleinement atteint. Il est possible d'associer à chaque machine fictive une distribution fictive et une fonction de bobinage fictif. Ces deux grandeurs de bobinage fictif influencent les inductances fictives et les forces électromotrices fictives exactement comme les grandeurs de bobinage réel influencent les inductances mutuelles et la force électromotrice de phase. La lecture des vecteurs de bobinage comme suites périodiques permet de résumer de façon concise ces résultats :

- l'énergie des vecteurs de distribution fictive et de fonction de bobinage fictif conditionnent l'inductance cyclique,
- la forme de la distribution fictive (équivalemment de la fonction de bobinage fictif) détermine les coefficients de bobinage fictif.

De plus, l'utilisation de la TFD se révèle réellement intéressante. D'une part, elle permet de visualiser le nombre de paires de pôles du bobinage fictif. D'autre part, elle permet de définir une procédure de calcul du bobinage fictif ne nécessitant aucun calcul matriciel. En effet, initialement définis par changement de base, les bobinages fictifs peuvent être calculés à l'aide de la TFD et de la notion de famille étendue d'harmoniques de machines fictives. Une méthode d'optimisation du bobinage avec objectifs directement ciblés sur les bobinages fictifs est ainsi suggérée.

Chapitre IV

CHAPITRE IV

Conception basée sur la décomposition multimachine

Sommaire

IV.1 Optimisation du bobinage 131
IV.1.1 Analyse du problème 131
IV.1.2 Démarche d'optimisation 143
IV.1.3 Exemples 145
IV.2 Optimisation de la couche d'aimants 159
IV.2.1 Analyse du problème 159
IV.2.2 Optimisation pour une couche d'aimants radiaux 162
IV.2.3 Optimisation pour une couche d'aimants parallèles 166

Ce dernier chapitre décrit des méthodes visant à adapter la conception de la machine polyphasée à ses machines fictives. L'aptitude d'une machine fictive à produire un couple élevé et non fluctuant est déterminée par les caractéristiques de sa force électromotrice élémentaire : idéalement, celle-ci doit être sinusoïdale et d'amplitude bien précisée (cf. chapitre I). Le premier objectif de conception multimachine concerne donc les forces électromotrices fictives. Pour adapter au mieux la fréquence de Modulation de Largeur d'Impulsions de l'onduleur à l'ensemble des machines fictives (et ainsi réduire les courants parasites, cf. chapitre I), il faut chercher à obtenir des inductances de machines fictives de valeurs aussi proches que possible. Le deuxième objectif de conception multimachine vise donc à égaliser les inductances fictives. Dans la suite, le terme "objectifs multimachines" désignent ces deux objectifs de conception.

A géométrie de machine fixée (alésages, épaisseur de la couche d'aimant, dimension des encoches, ...), les paramètres influençant les forces électromotrices et les inductances sont le bobinage et la couche d'aimant modélisée par les fonctions d'aimantation radiale et tangentielle. Ce sont les deux grands degrés de liberté pris en compte. La philosophie des démarches

d'optimisation est de reporter les objectifs multimachines sur les bobinages fictifs et sur les fonctions d'aimantation fictive (définis au Chapitre III).

La première partie de ce chapitre décrit le principe de l'optimisation du bobinage qui repose sur sa modélisation par suites périodiques. L'utilisation de la Transformée de *Fourier* discrète permet de caractériser les performances du bobinage en terme de filtrage et de valeurs des inductances cycliques. Les objectifs ciblés sur les bobinages fictifs sont ainsi définis. La seconde partie de ce chapitre propose des méthodes d'optimisation de la couche d'aimants. Les méthodes s'appuient sur l'hypothèse de linéarité qui permet d'assimiler la géométrie de la machine et son bobinage à un filtre avec, en entrée, les fonctions d'aimantation, et, en sortie, la force électromotrice élémentaire. Réversible, ce filtre permet de définir des profils idéaux pour les fonctions d'aimantation fictives et réelles, ce qui définit les objectifs. L'optimisation consiste alors à rechercher des couches d'aimant permettant d'approcher ces fonctions d'aimantation idéales.

IV.1 Optimisation du bobinage

Le chapitre II a modélisé l'influence du bobinage de phase sur la composition harmonique de la force électromotrice et sur les valeurs de la série d'inductances mutuelles. Le chapitre III a introduit les fonctions de bobinage fictif et leur représentation par suites périodiques. Ceci a permis de relier de façon concise les valeurs des inductances fictives et des coefficients de bobinage fictif aux tranformées de *Fourier* discrète des distributions et fonctions de bobinage fictif. Cette sous-partie exploite ce dernier résultat pour établir une procédure d'optimisation du bobinage. Le problème est tout d'abord analysé : les objectifs sont formulés et la possibilité de les atteindre est évaluée par l'étude de bobinages conventionnels. Ensuite, la procédure proprement dite est explicitée. Enfin, des exemples concrets d'optimisation du bobinage avec objectifs multimachines sont traités.

IV.1.1 Analyse du problème

Cette sous-section définit les objectifs d'optimisation du bobinage qui sont ciblés sur les bobinages fictifs. Caractérisées à l'aide de la Tranformée de *Fourier* discrète, les peformances multimachines de bobinages conventionnels sont examinées. Les cas du bobinage diamétral entier et du bobinage fractionnaire de la machine *M5-IRENAV* sont étudiés. L'ensemble des constatations réalisées incitent à étudier la possibilité de bobiner directement les machines fictives pour garantir leurs conformités aux objectifs multimachines.

IV.1.1.1 Définition des objectifs

Les analyses concernant le bobinage fictif menées au chapitre précédent ont conduit à la conclusion suivante :

- pour une géométrie de machine donnée, fixer les niveaux d'énergie des vecteurs de bobinage fictif revient à fixer la valeur des inductances fictives,
- fixer les termes de la TFD des vecteurs de bobinage fictif revient à fixer les coefficients de bobinage globaux des machines fictives.

Dans le cadre de l'alimentation de la machine polyphasée par onduleur de tension, le bobinage idéal est celui qui conduit à des ordres de grandeur identiques pour toutes les constantes de temps des machines fictives alimentées. Sur le plan des bobinages fictifs, cette exigence se traduit par la nécessité d'égaliser l'énergie des vecteurs de bobinage fictif.

Pour éviter le développement de couples pulsatoires importants et faciliter la régulation du courant des machines fictives, il est souhaitable d'avoir pour chaque machine fictive alimentée :

- soit une fem élémentaire nulle (machine fictive ne pouvant fournir un couple)

$$E_k(t) = 0$$

- soit une fem élémentaire purement sinusoïdale (machine fictive pouvant fournir un couple) qui, d'après le paragraphe I.3.2.2, doit s'écrire

$$E_k(t) = \frac{\widehat{(\epsilon_0)_1}}{h_k} e^{jh_k\omega t}$$

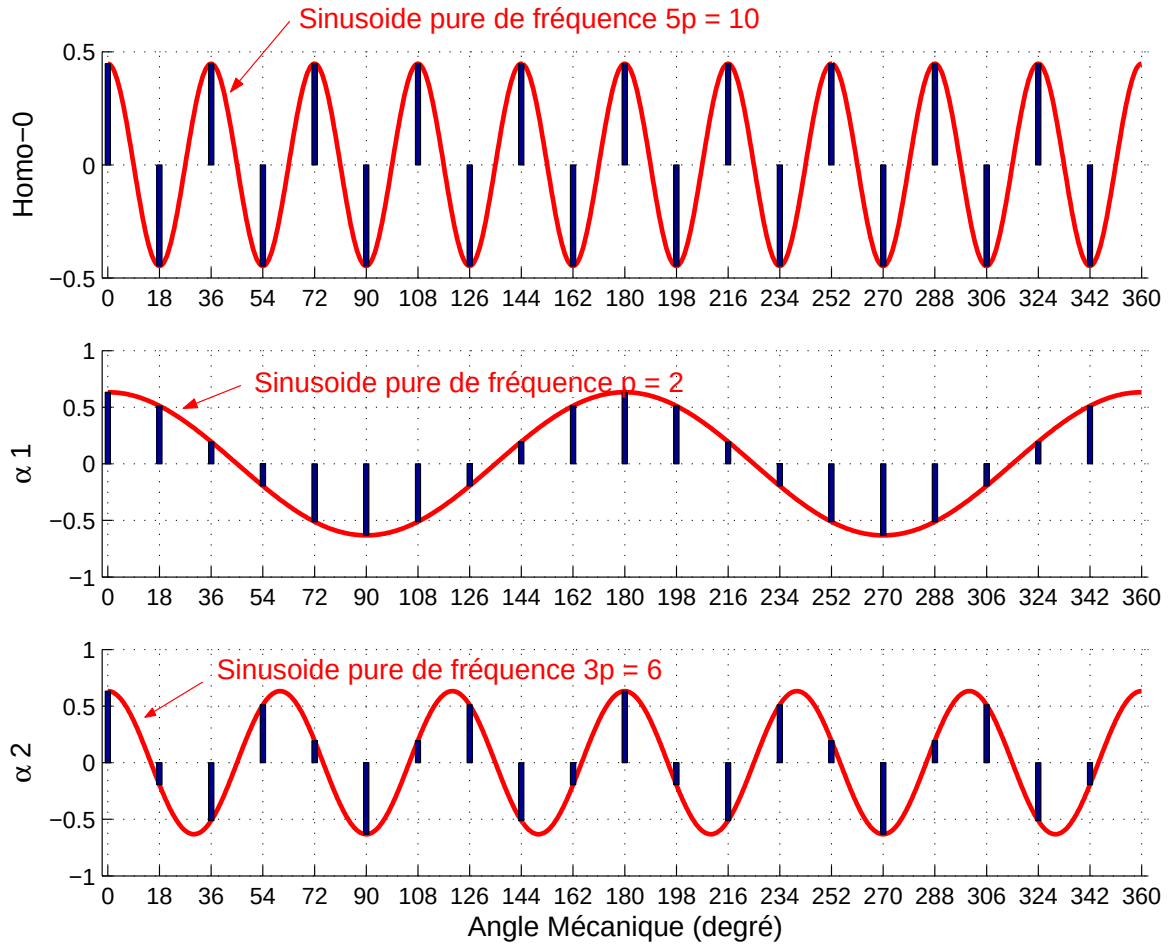


Figure IV.1 — Origine sinusoïdale des distributions fictives pour la machine *M5-L2EP*

D'après la relation (III.31), ces objectifs se traduisent directement sur les composantes des vecteurs de distribution fictive. Pour la machine fictive d'inductance M_k, la distribution $\overrightarrow{d_k^{N'_s,f}}$ idéale est celle dont toutes les composantes $(D^f_{h,k})_{h\in\mathbb{Z}}$ du vecteur TFD sont nuls sauf ceux de rang ph_k. Autrement dit, la distribution fictive doit avoir une allure sinusoïdale à la fréquence ph_k.

IV.1.1.2 Caractérisation des performances des bobinages diamétraux entiers vis à vis des objectifs multimachines

Il est intéressant de noter que les bobinages entiers monocouches à pas diamétral à une encoche par pôle et par phase respectent toujours ce critère. En effet, dans une telle configuration, les coefficients de bobinage globaux sont égaux à un pour tous les harmoniques impairs. Par conséquent, les distributions fictives sont des sinusoïdes discrètes : la figure IV.1 montre qu'elles résultent bien de l'échantillonnage de sinusoïdes pures de même amplitude (calculées selon la relation (III.24), page 110). Ces bobinages sont donc très intéressants pour obtenir des forces électromotrices fictives significatives. Néanmoins, ils présentent plusieurs défauts importants.

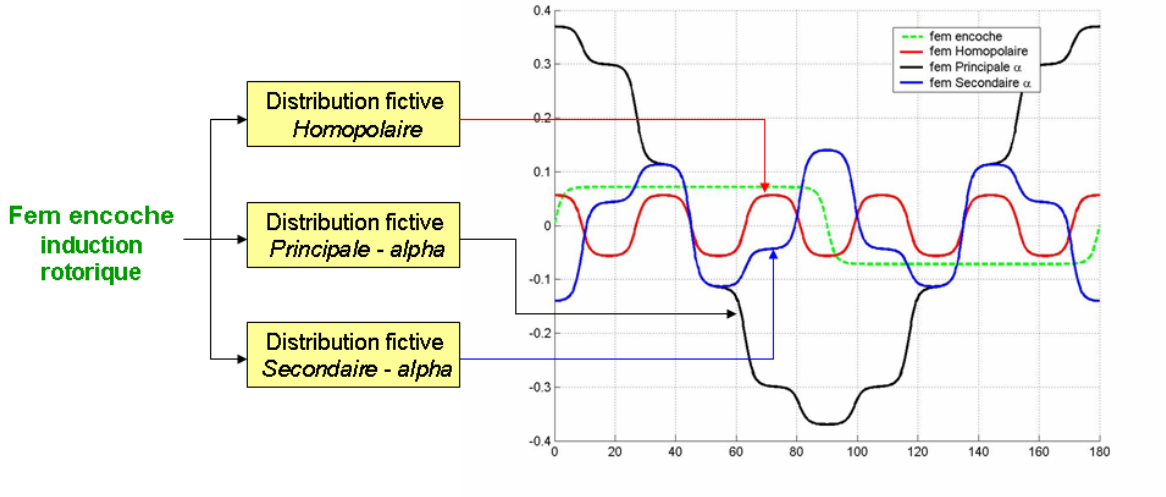


Figure IV.2 — Allure des forces électromotrices fictives pour la machine *M5-L2EP* à bobinage entier diamétral $n_{epp} = 1$

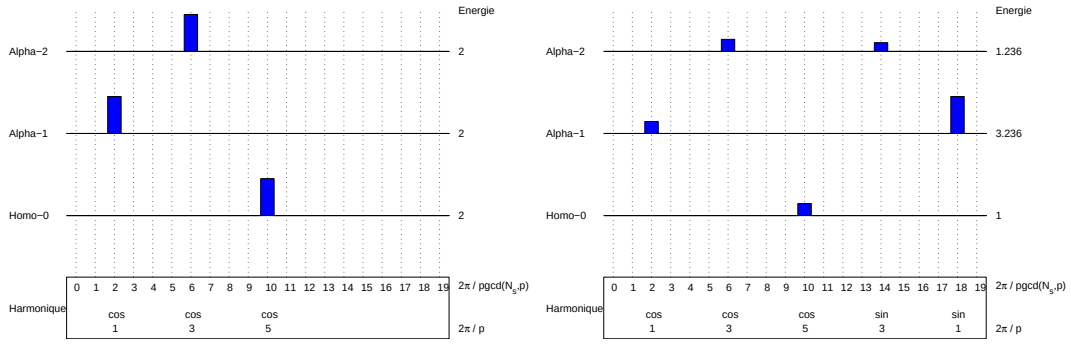
Tout d'abord, ces bobinages ne filtrent absolument pas l'induction rotorique. Ceci signifie que tous les harmoniques de celle-ci se retrouvent dans la force électromotrice sans aucune atténuation. Ainsi, à moins de définir une couche d'aimants particulière [49], les forces électromotrices ne seront pas sinusoïdales et des couples pulsatoires vont apparaître. Par exemple, pour la machine *M5-L2EP* aux pôles complètement occupés par des aimants radiaux, la force électromotrice de phase apparaît presque comme la recopie de la fonction d'aimantation (les différences étant essentiellement dûes à la largeur d'encoche et à l'entrefer). Par suite, les forces électromotrices fictives ne sont pas sinusoïdales. Ces propos sont illustrés par la figure IV.2.

De plus, ces bobinages ne permettent pas d'obtenir des inductances cycliques du même ordre. Pour une machine fictive, d'après la relation (III.30), ce sont les énergies des vecteurs de distribution fictive et de fonction de bobinage fictif qui conditionnent la valeur de l'inductance. Donc, les valeurs d'inductance fictive sont toutes égales si la double condition suivante est respectée :

- les différents vecteurs de distribution fictive ont la même énergie,
- les différents vecteurs de fonction de bobinage fictif ont la même énergie.

Dans le cadre d'un bobinage monocouche, en raison de l'absence de mutuelle de fuite entre les phases réelles (cf. paragraphe II.4.3.3, page 83), les inductances fictives de fuite M_k^{fer} sont les mêmes pour toutes les machines fictives, ce qui permet de montrer que les distributions fictives ont toutes la même énergie. Par contre, les énergies des fonctions de bobinage diffèrent, ce qui implique des disparités entre les valeurs des différents inductances fictives d'entrefer M_k^e. Ces différences vont alors se reporter sur les valeurs des inductances cycliques M_k avec un impact d'autant plus fort que, généralement, le terme M_k^e est prépondérant sur le terme de fuite M_k^{fer}.

En fait, ces bobinages monocouches illustrent l'impossibilité de fixer indépendamment les niveaux d'énergie sur les distributions fictives et sur les fonctions de bobinage fictif. Ceci est parfaitement logique dans la mesure où ces deux grandeurs sont liées par une relation linéaire très simple (intégration, dérivation). Cette impossibilité peut être quantifiée en utilisant le fait que le vecteur de distribution est la dérivée du vecteur de fonction de bobinage. Ainsi, quelque soit le bobinage, il est possible de montrer :



(a) TFDr de la distribution fictive : les machines fictives ont chacune la même énergie

(b) TFDr de la fonction de bobinage fictif : les machines fictives n'ont pas la même énergie

Figure IV.3 — Transformée de *Fourier* discrète réelle des distributions et fonction de bobinage fictifs de la machine *M5-L2EP* à bobinage diamétral monocouche

$$\sum_{h=0}^{N_s-1} \left|B^f_{h,k}\right|^2 = \sum_{h=0}^{N_s-1} \frac{\left|D^f_{h,k}\right|^2}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{N_s}h\right)} \tag{IV.1}$$

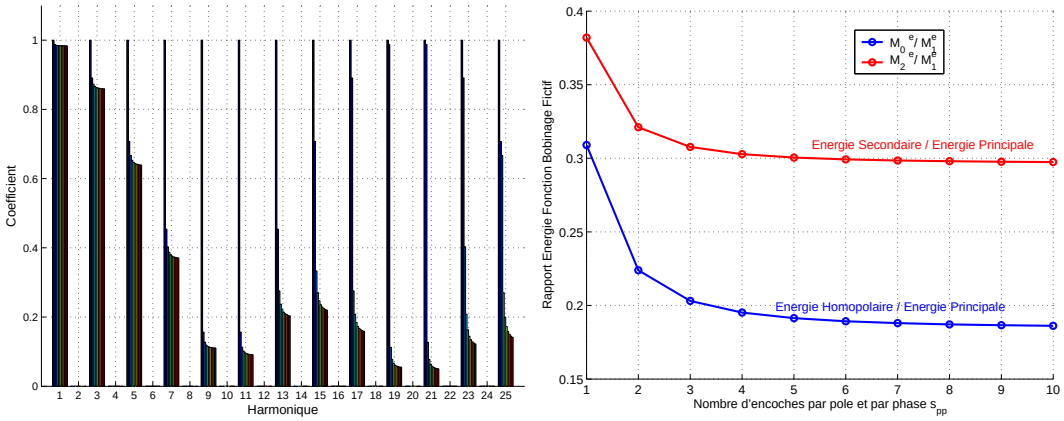
Cette relation permet la conclusion suivante : si le rapport entre l'énergie de deux vecteurs de distribution est unitaire (cas des bobinages monocouches), alors le rapport entre l'énergie des deux vecteurs de fonction de bobinage fictif coresspondants ne l'est pas généralement. Formellement, ceci peut se résumer comme suit :

$$\frac{\sum_{h=0}^{N_s-1} \left|D^f_{h,k'}\right|^2}{\sum_{h=0}^{N_s-1} \left|D^f_{h,k}\right|^2} = 1 \quad \text{n'implique pas} \quad \frac{\sum_{h=0}^{N_s-1} \left|B^f_{h,k'}\right|^2}{\sum_{h=0}^{N_s-1} \left|B^f_{h,k}\right|^2} = 1$$

Ainsi, à moins d'avoir une inductance de fuite forte, les bobinages monocouches diamétraux conduisent à des inductances fictives très différentes. Ces faits sont illustrés par la figure IV.3 qui réprésente les TFD des vecteurs de distribution et de fonction de bobinage fictif de la machine *M5-L2EP*. Il apparaît que toutes les machines fictives possèdent la même énergie de distribution mais que leurs énergies de fonction de bobinage sont sensiblement différentes. Il en résulte des inductances fictives d'ordre différent : les valeurs expérimentales en mH des inductances cycliques sont $M_0 = 0.80$, $M_1 = 3.17$ et $M_2 = 0.93$.

Enfin, les bobinages diamétraux entiers sont nécessairement supportés par des structures où le nombre d'encoches par pôle et par phase est entier. Cette configuration favorise le développement d'un important couple de détente si les encoches sont droites.

En somme, excepté en ce qui concerne l'objectif de filtrage des premiers harmoniques de machines fictives, les bobinages diamétraux à une encoche par pôle et par phase ($s_{pp} = 1$) ne répondent pas aux critères d'optimisation multimachine. Le fait d'augmenter le nombre



(a) Coefficients de bobinage globaux pour des bobinages pentaphasés diamétraux pour s_{pp} compris entre 1 et 10

(b) Estimation du rapport des inductances fictives d'entrefer M_k^e par rapport à l'inductance fictive d'entrefer principale M_1^e

Figure IV.4 — Evolution des coefficents de bobinages globaux et des inductances fictives en fonction du nombre d'encoches par pôle et par phase pour un bobinage pentaphasé diamétral

d'encoches par pôle et par phase n'améliore pas la situation. A ce sujet, la figure IV.4 montre l'influence du nombre d'encoches par pôle et par phase d'un bobinage pentaphasé diamétral sur les coefficients de bobinage globaux (partie -a) et sur les valeurs relatives des inductances fictives (partie -b). La partie -a de la figure montre que les coefficients de filtrage sur 1, 3 et, dans une moindre mesure 5, restent assez forts alors que ceux sur 7, 9, 11 s'affaiblissent lorsque s_{pp} augmente : une grande valeur de s_{pp} améliore quelque peu les qualités de filtrage du bobinage vis à vis des machines fictives. Malheureusement, les rapports des inductances fictives d'entrefer M_k^e sur l'inductance fictive d'entrefer principale M_1^e diminuent puis tendent vers une valeur limite : comme le montre la partie -b de la figure, la machine homopolaire tend à être environ 5 fois plus dynamique que la machine principale et la machine secondaire environ 3 fois plus dynamique. Si l'inductance de fuite est faible, l'objectif d'égalisation des constantes de temps est donc irréalisable.

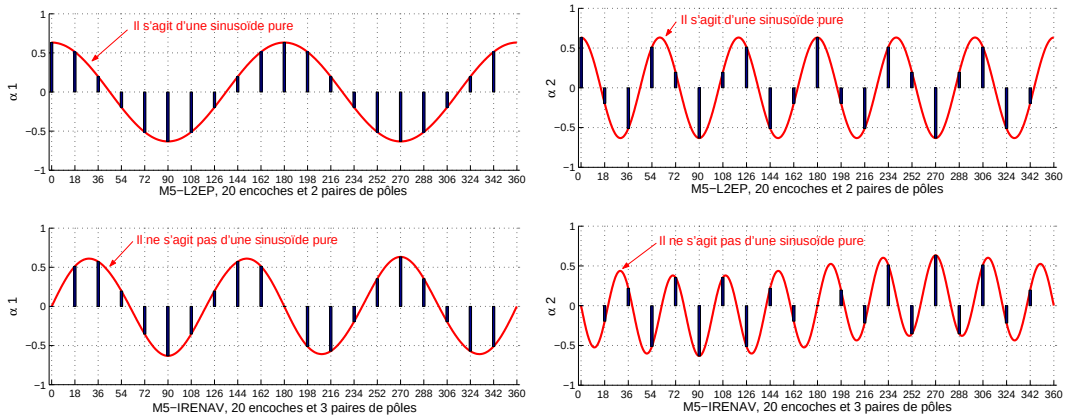
En résumé, les bobinages diamétraux entiers présentent des coefficients de bobinage globaux qui peuvent être intéressant du point de vue de l'optimisation de la force électromotrice des machines fictives. Mais ils ne peuvent respecter le critère d'égalisation des constantes de temps de machine fictive.

IV.1.1.3 Caractérisation des performances d'un bobinage fractionnaire vis à vis des objectifs multimachines

Avec les bobinages fractionnaires, il semble davantage possible de répondre aux objectifs multimachines. En effet, les calculs effectués sur la machine $M5-IRENAV$ montrent que :

- les fem élémentaires fictives sont assez sinusoïdales (cf. figure III.6, page 117),
- les valeurs des inductances fictives sont plus proches (le tableau II.6 (page 85) permet de calculer un rapport supérieur à 0.5 entre M_2 et M_1).

La TFD permet d'expliquer les performances de ce bobinage et de les comparer avec celles du bobinage diamétral de la machine *M5-L2EP*.



(a) Machine fictive principale (b) Machine fictive secondaire

Figure IV.5 — Comparaison de l'origine échantillonnée des bobinages des machines fictives principales et secondaires pour les machines pentaphasées *M5-L2EP* et *M5-IRENAV*

L'utilisation de la TFD permet de considérer les composantes des vecteurs de distribution fictive (ou de fonction de bobinage fictif) comme issues de l'échantillonnage à la fréquence $2\pi/N_s$ d'un signal continu (cf. relations (III.23) et (III.24), page 110). Le contenu harmonique de ce signal continu (c'est-à-dire sa forme) dépend du bobinage réel de la machine. La figure IV.5 illustre ce propos en comparant les bobinages fictifs des deux machines pentaphasées *M5-L2EP* à bobinage entier et *M5-IRENAV* à bobinage fractionnaire. Cette comparaison est particulièrement instructive car ces deux machines sont toutes deux bobinées sur 20 encoches ; ce qui signifie que les "instants" d'échantillonnage du bobinage sont les mêmes pour les deux machines. Par exemple, pour les machines fictives secondaires (figure IV.5-b), les signaux continus échantillonnés sont clairement différents pour les deux machines pentaphasées. D'une part, la fréquence fondamentale ($3p$) n'est pas la même ; ce qui est logique puisque le nombre de paires de pôles est différent. D'autre part, pour la machine *M5-IRENAV* à bobinage fractionnaire, le signal n'est pas parfaitement sinusoïdal. Il en résulte un coefficient de bobinage global inférieur à 1 pour l'harmonique de rang 3. De façon plus générale, ce bobinage fractionnaire présente des caractéristiques de filtrage de l'induction rotorique différentes de celle du bobinage entier diamétral. La figure IV.6 établit la comparaison des coefficients de bobinage globaux pour les deux machines *M5-L2EP* et *M5-IRENAV*. Deux enseignements peuvent en être retirés :

- le bobinage diamétral entier est plus performant que le bobinage fractionnaire vis à vis du fondamental des forces électromotrices des machines fictives (puisqu'il ne filtre aucun harmonique), ce qui permet d'obtenir des machines fictives capables de produire un couple significatif,
- le bobinage fractionnaire est plus performant que le bobinage diamétral vis à vis des harmoniques des forces électromotrices des machines fictives (puisqu'il filtre certains harmoniques), ce qui permet d'obtenir des machines fictives peu perturbées et donc plus facilement contrôlables.

Concernant les valeurs des inductances fictives, la figure IV.7 donne la TFD des distributions fictives et des fonctions de bobinage fictif et indique le niveau d'énergie pour chacune d'entre elles. La partie -b de cette figure montre que le rapport d'énergie entre les fonctions de

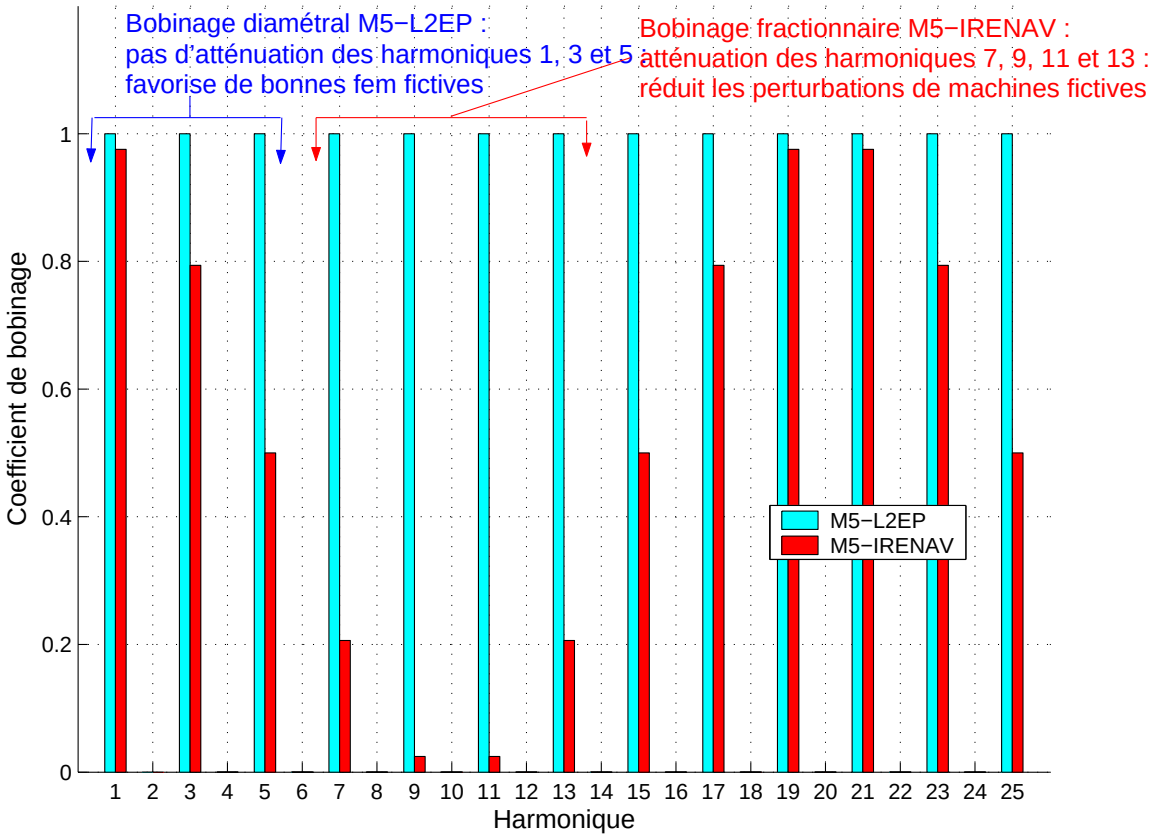


Figure IV.6 — Comparaison des coefficients de bobinage globaux pour les machines *M5-L2EP* et *M5-IRENAV*

bobinage fictif secondaire et principal est d'environ 0.72. Le rapport entre M_2^e et M_1^e est donc de 0.72. Ce sont les termes d'inductances fictives de fuite M_2^{fer} et M_1^{fer} qui diminuent le rapport entre les inductances M_2 et M_1 à environ 0.5. Cet effet négatif résulte des termes d'inductance fictive de fuite M_2^{fer} et M_1^{fer} qui sont différents (alors que pour le bobinage diamétral $s_{pp} = 1$ de la machine $M5 - L2EP$, ils sont égaux). Cette différence est visible sur la figure IV.7-a.

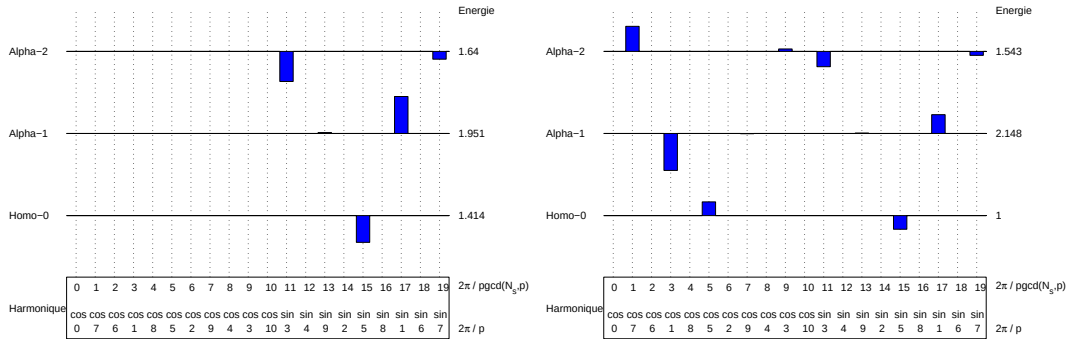
Globalement, le bobinage fractionnaire de la machine *M5-IRENAV* répond mieux aux objectifs multimachines que le bobinage de la machine *M5-L2EP* :

- le rapport des inductances fictives est plus favorable,
- les forces électromotrices sont plus sinusoïdales.

Cependant, même si elles sont meilleures, les performances de ce bobinage fractionnaire ne sont pas optimales. En fait, pour cerner dans quelle mesure un bobinage multimachine optimal est réalisable, il faut étudier la possibilité de construire d'abord un bobinage sur les machines fictives répondant parfaitement aux objectifs de conception multimachine. Ensuite, il faut constituer le bobinage polyphasé réel correspondant et examiner sa faisabilité. C'est l'objet du paragraphe suivant.

IV.1.1.4 Etude prospective sur le bobinage direct des machines fictives

Jusqu'ici, l'utilisation de la TFD a permis de caractériser directement les performances des bobinages fictifs mais *a posteriori*. En d'autres termes, le bobinage des phases réelles est



(a) TFDr des distributions fictives (b) TFDr des fonctions de bobinage fictif

Figure IV.7 — Transformée de *Fourier* discrète des distributions fictives et fonction de bobinage fictif de la machine *M5-IRENAV*

d'abord construit puis, à l'aide de la TFD, les bobinages fictifs correspondants sont calculés et leurs performances sont alors comparées aux objectifs multimachines. C'est exactement la démarche qui a été adoptée dans les deux paragraphes précédents consacrés à l'analyse de bobinages pentaphasés particuliers. Ici, c'est la démarche inverse qui est étudiée : toutes les machines fictives sont bobinées pour répondre aux objectifs multimachines et l'ensemble de ces bobinages sont sommés pour faire apparaître le bobinage réel correspondant.

Concernant les coefficients de bobinage globaux, les analyses menées dans les deux paragraphes précédents montrent bien que les coefficients de la distribution fictive peuvent être vus comme résultant de l'échantillonnage d'un signal continu (cf. figures IV.1 et IV.5). Ce signal continu est calculé à partir des composantes de la TFD $\overrightarrow{D_k^{N'_s,f}}$ du vecteur de distribution fictive $\overrightarrow{d_k^{N'_s,f}}$. Si le signal continu est purement sinusoïdal, alors la distribution fictive issue de l'échantillonnage de ce signal correspond à un bobinage "convenablement réparti" (cf. section II.2.2.3, page 59). Par exemple, pour la machine $M5-L2EP$ à bobinage diamétral $s_{pp}=1$, toutes les machines fictives sont à bobinage convenablement réparti puisque leurs distributions fictives résultent de l'échantillonnage d'une sinusoïde pure (cf. figure IV.1). Mathématiquement, en considérant la définition des coefficients de bobinage globaux donnée dans le paragraphe II.4.1.3 du chapitre II, la propriété suivante peut être démontrée (cf. Annexe D) : si une machine polyphasée à p pôles et N_s encoches admet un bobinage convenablement réparti au-dessus de $k \times p$ paires de pôles, alors les coefficients de bobinage globaux de rang $\mathbb{Z}N'_s \pm k$ sont égaux et tous les autres coefficients sont nuls. Cette propriété permet de relier la forme de la distribution continue du bobinage (c'est-à-dire la forme du signal échantillonné pour donner les composantes des vecteus de distribution) aux valeurs des différents coefficients de bobinage globaux des machines fictives.

Par exemple, pour la machine *M5-L2EP*, le bobinage de la machine secondaire résulte de l'échantillonnage d'une sinusoïde de fréquence $3p$. Donc son bobinage est convenablement réparti au-dessus de $3p$ paires de pôles. Donc ses coefficients globaux sont non nuls et de même valeur pour les harmoniques $10\mathbb{Z} \pm 3$ ($N'_s = 10$). La figure IV.8 le montre bien. Toutes les machines fictives ont les mêmes valeurs de coefficients de bobinage globaux car les sinusoïdes échantillonnées ont toutes la même amplitude.

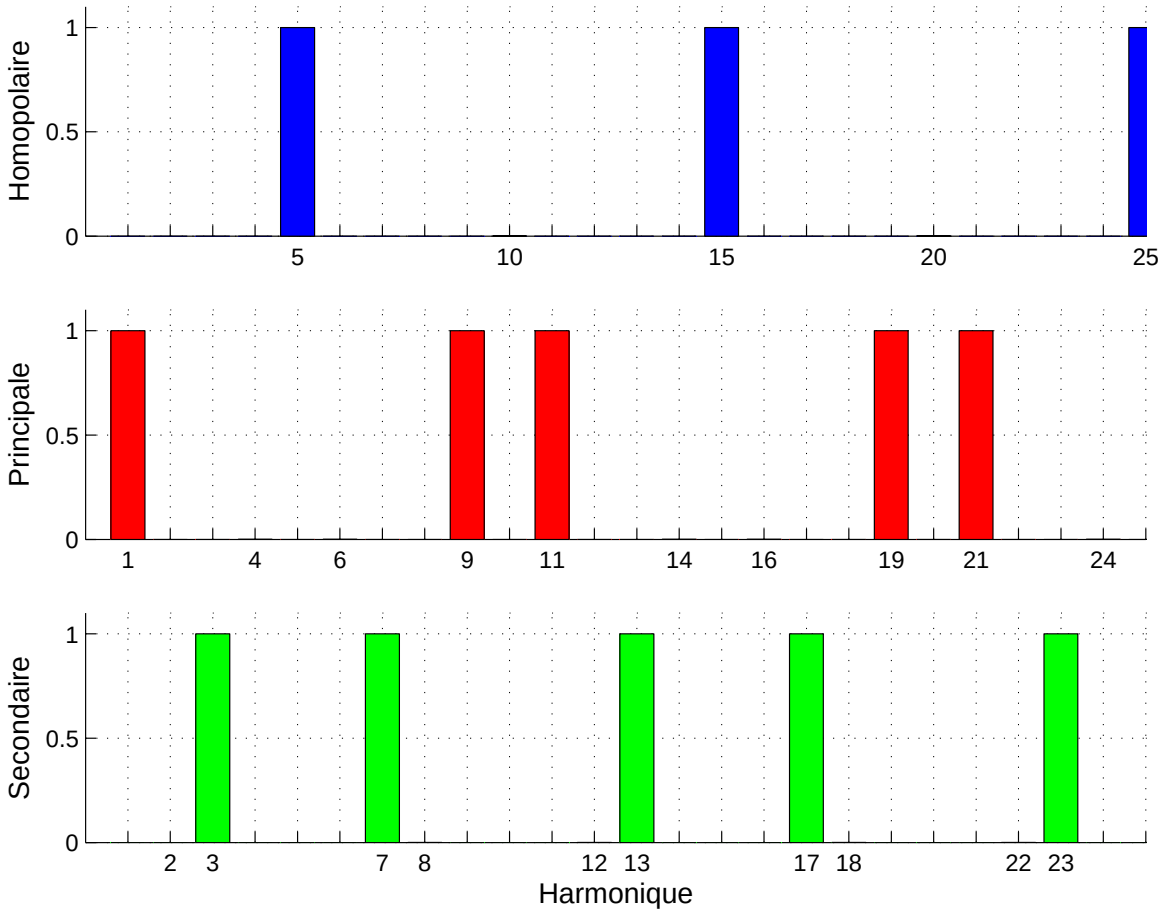
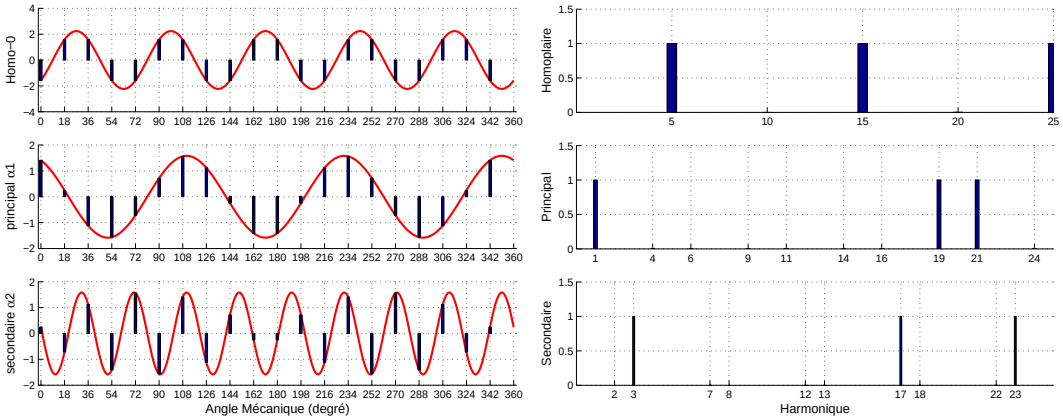


Figure IV.8 — Coefficients de bobinage globaux des machines fictives de la machine *M5-L2EP*

Ces considérations montrent bien que les coefficients de bobinage globaux sont conditionnés par le caractère sinusoïdal du signal continu échantillonné pour constituer la distribution. Le nombre d'encoches N_s intervient pour définir la fréquence d'échantillonnage : un inévitable effet de périodisation en N_s' à l'origine des effets "modulo" apparaît. Pour lutter contre cet effet "modulo" dans le cas d'un bobinage diamétral entier, il est intéressant de choisir un grande nombre d'encoches par pôle. Ceci ramène à une conclusion classique : plus le nombre d'encoches est élevé, meilleure est la répartition du bobinage ; à la limite (nombre d'encoches infini), seul le coefficient de bobinage du fondamental est non nul.

Une méthode de construction directe du bobinage fictif permettant de régler parfaitement les coefficients de bobinage fictif peut être déduite. A nombre d'encoches et nombre de paires de pôles donnés, pour la machine fictive d'inductance M_k et d'harmonique de rang minimal h_k, il s'agit de construire sa distribution fictive $(d^f_{g,f})_{g\in\mathbb{Z}}$ en échantillonnant le signal continu $\cos(ph_k\theta)$. Ainsi, le bobinage fictif est convenablement réparti au-dessus des ph_k paires de pôles. Le bobinage de la machine polyphasée est ensuite reconstruit en sommant chacune des distribution fictives.

Cette procédure est utilisée afin de proposer un nouveau bobinage pour la structure à 20 encoches, 3 paires de pôles et 5 phases de la machine $M5 - IRENAV$. Comme le montre la figure IV.9-a, les distributions des machines fictives principale, secondaire et homopolaire sont obtenues en échantillonnant respectivement une sinusoïde de fréquence p, une sinusoïde



(a) Obtention de distributions fictives idéales par échantillonage de sinusoïdes pures

(b) Coefficient de bobinage fictif correspondant au cas idéal

Figure IV.9 — Calcul des distributions fictives idéales pour une machine pentaphasée à 20 encoches et 3 paires de pôles

de fréquence $3p$ et une sinusoïde de fréquence $5p$. Comme prévu, la figure IV.9-b confirme que les coefficients de bobinage fictifs sont unitaires pour toutes les machines. De plus, les coefficients de bobinage de rang 9 et 11 sont nuls et ceux de rang 7 et 13 aussi. L'effet "modulo" lié à la valeur de N_s est apparent : les harmoniques 17, 23 et 19, 21 ne sont pas filtrés. Mais, comme l'amplitude de ces harmoniques dans l'induction rotorique est très faible, les forces électromotrices fictives obtenues ne seront pas perturbées et seront sinusoïdales. Si la distribution idéale est réalisée sur la machine *M5-IRENAV*, les forces électromotrices sont effectivement quasiment sinusoïdales. La figure IV.10 illustrent ce fait en proposant la comparaison des fem élémentaires initiales (celles résultant du bobinage existant) avec celles obtenues avec le bobinage idéal. La machine secondaire apparaît nettement plus exploitable : la fem est quasiment sinusoïdale et d'amplitude plus élevée.

Il convient maintenant d'analyser les effets de cette distribution idéale au niveau des fonctions de bobinage. Il faut bien noter que la distribution obtenue par échantillonnage est qualifiée d'idéale car elle garantit des coefficients de bobinage optimaux. C'est-à-dire que, pour chaque machine fictive, le coefficient de bobinage du fondamental h_k vaut 1 et les coefficients pour les autres hamoniques sont nuls sauf s'il s'agit d'un harmonique de rang $\mathbb{Z}N'_s \pm h_k$ (effet "modulo"). Le problème est maintenant de savoir comment cette distribution idéale se manifeste au niveau des fonctions de bobinage fictif et de leur énergie, le but final étant de déterminer les valeurs des inductances fictives.

Représentant respectivement les fonctions de bobinage fictif et leur TFD pour la distribution idéale, les figures IV.11-a et IV.11-b donnent les éléments de réponse. La figure IV.11-a montre clairement que les fonctions de bobinage fictif homopolaire et principal sont des sinusoïdes discrètes. L'observation de leur TFD sur la figure IV.11-b montre que c'est aussi le cas pour la machine secondaire (elle ne contient que l'harmonique 3). Mais cette figure montre aussi que les fonctions de bobinage fictif n'ont pas la même énergie : le critère relatif à l'égalisation des valeurs d'inductances fictives n'est donc pas vérifié. En fait, d'après les remarques émises dans le paragraphe IV.1.1.2 concernant le lien entre énergie de distribution et énergie de fonction de bobinage (cf. relation (IV.1)), ce résultat était prévisible : si toutes

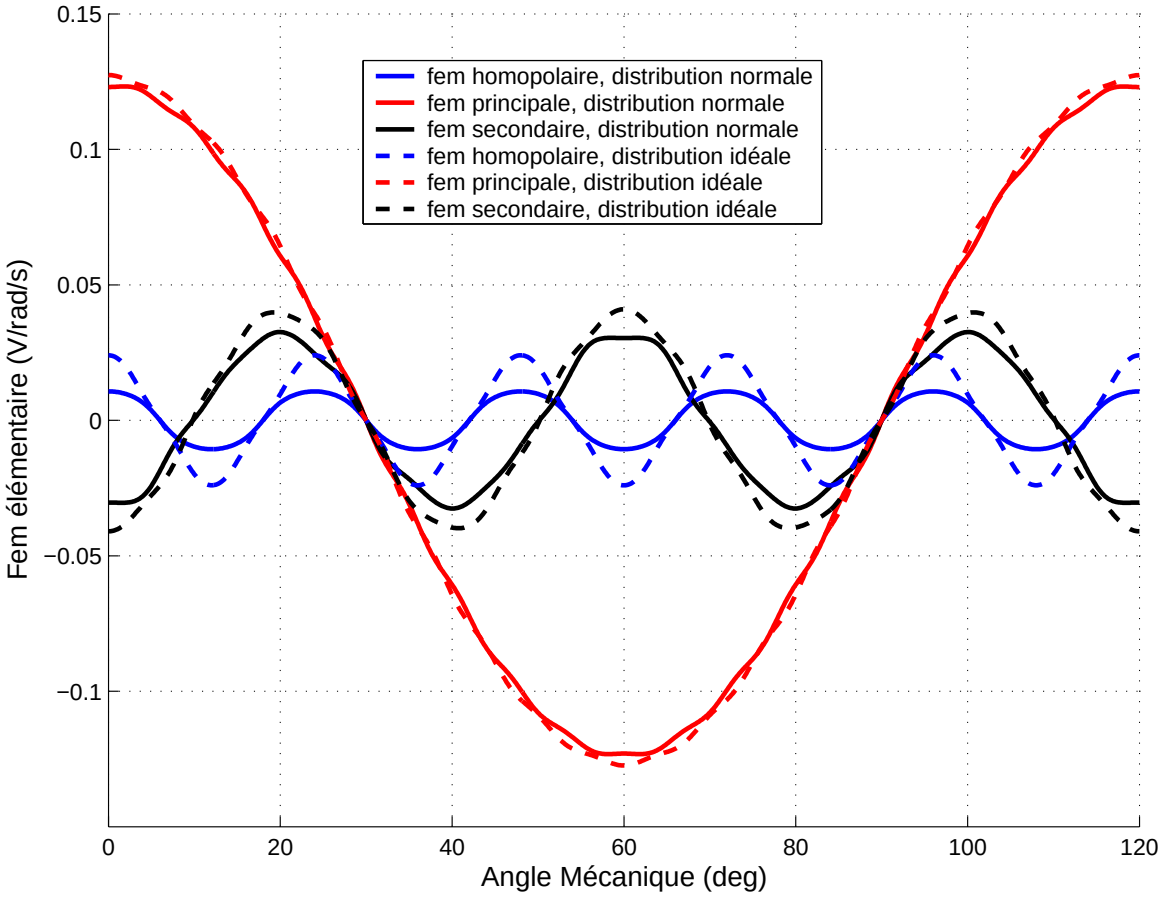
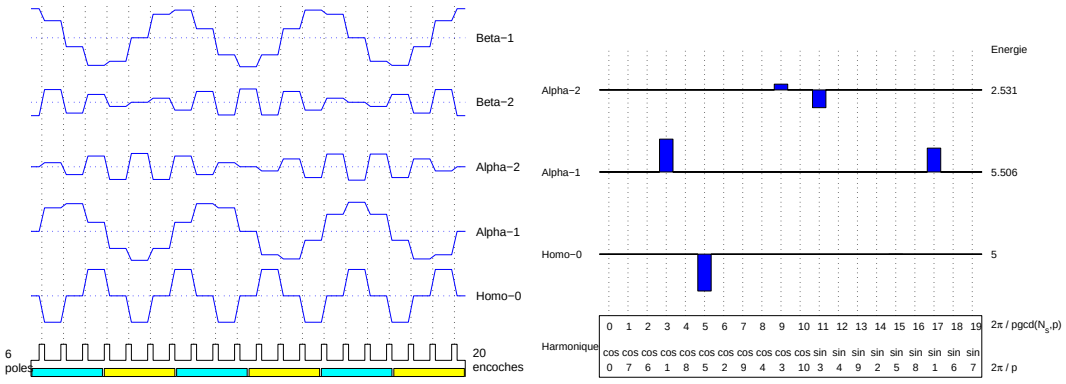


Figure IV.10 — Comparaison des forces électromotrices fictives de la machine pentaphasée *M5-IRENAV* avec le bobinage existant et avec le bobinage idéal



(a) Allure des fonctions de bobinage fictif

(b) TFDr des fonctions de bobinage fictif : les énergies ne sont pas égales

Figure IV.11 — Fonctions de bobinage fictif issus de la distribution fictive idéale définie pour une structure à 20 encoches, 3 paires de pôle et 5 phases

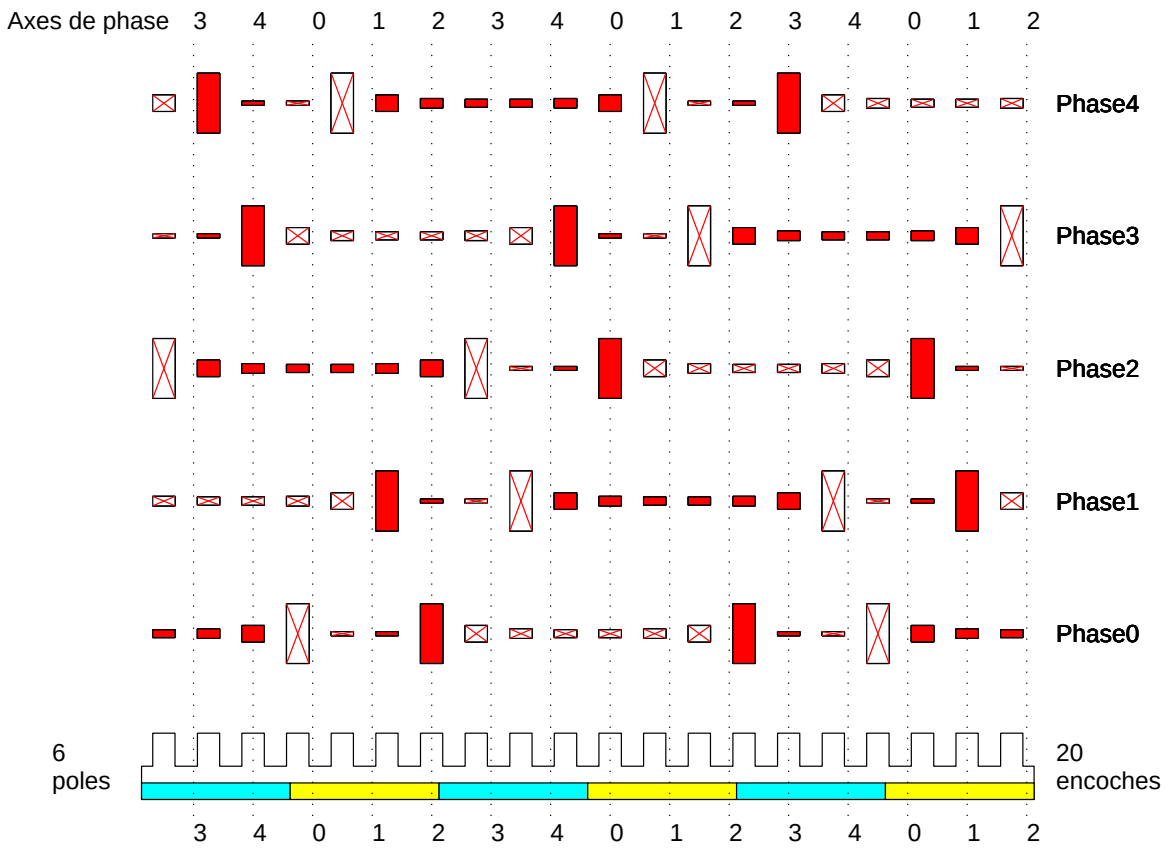


Figure IV.12 — Représentation du bobinage pentaphasé 20 encoches et 6 poles, calculé par échantillonnage de distributions fictives continues

les distributions fictives sont sinusoïdales de même amplitude, alors les fonctions de bobinage fictif sont aussi sinusoïdales mais pas de même amplitude. Par conséquent, un compromis est nécessaire entre performance de filtrage (forme de la distribution fictive) et valeurs relatives des inductances fictives (énergie des fonctions de bobinage fictif).

Enfin, et c'est sans doute le plus important, il faut évaluer dans quelle mesure ces bobinages calculés par échantillonnage sont réalisables. L'observation de la figure IV.12 qui représente le bobinage résultant de la distribution "idéale" pour la machine *M5-IRENAV* permet de trancher : ces bobinages ne sont pas raisonnablement réalisables. La figure montre un bobinage 5 couches avec, dans chaque encoche, des pourcentages de conducteurs attribués aux phases qui prennnent des valeurs de 5 %, 10 %, 12 %, 20 % ou 73 %. Même en imaginant qu'une telle répartition soit possible, il resterait à surmonter le problème délicat des croisements des tête de bobines.

Au final, la calcul d'un bobinage convenablement réparti pour les machines fictives aboutit à une solution très intéressante en terme de filtrage de l'induction rotorique. Les forces électromotrices seront d'autant plus sinusoïdales que le nombre d'encoches réduit sera grand (réduction de l'effet "modulo" lié à la fréquence d'échantillonnage, c'est-à-dire au nombre d'encoches). Malheureusement, deux éléments négatifs condamment la mise en oeuvre de cette procédure :

- sur le plan théorique, les niveaux d'énergie des fonctions de bobinage fictif ne peuvent satisfaire le critère visant à égaliser les inductances fictives,
- sur le plan pratique, le bobinage réel résultant est beaucoup trop complexe.

Le premier point montre qu'un compromis est nécessaire entre la forme de la distribution fictive et le niveau d'énergie des fonctions de bobinage fictif. Le second point suggère de définir une procédure d'optimisation du bobinage assurant la réalisabilité de celui-ci. Le risque d'obtenir des solutions pratiquement irréalisables est sinon bien trop grand.

IV.1.2 Démarche d'optimisation

Cette section décrit la démarche d'optimisation du bobinage mise en oeuvre. L'objectif est de satisfaire les critères multimachines concernant les formes des distributions fictives et les énergies des fonctions de bobinage fictif. Afin d'assurer une réalisabilité acceptable pour les bobinages solutions, la procédure d'optimisation agit sur des bobines réelles mais avec des objectifs ciblés sur des bobinages fictifs.

IV.1.2.1 Principe de la méthode d'optimisation

Les trois assertions suivantes décrivent le principe de la procédure d'optimisation du bobinage :

- le bobinage d'une phase résulte de la connexion de plusieurs bobines élémentaires,
- ces bobines doivent être choisies en fonction des objectifs formulés sur la TFD des vecteurs de bobinage,
- l'association choisie doit respecter les contraintes liées à la réalisabilité de la solution proposée et à la résistivité.

Formellement, le choix des bobines constitue la variable d'optimisation et les objectifs sont formulés par rapport à des fonctions de bobinage fictif idéal. La réalisabilité est assurée par la méthode de choix des bobines : ce sont des bobines réelles qui sont choisies. Cependant, les associations conduisant à des têtes de bobine trop importantes et à des croisements trop délicats doivent être éliminées. La résistance du bobinage proposé s'estime *a posteriori*.

En pratique, la procédure d'optimisation est une procédure de sélection. Les bobines sont à sélectionner parmi toutes les bobines que la structure à N_s encoches admet : une bobine étant constituée d'une section de conducteurs aller et d'une section de conducteurs retour, il existe environ N_s bobines possibles. Le nombre de bobines choisies dépend du nombre de phases N et du nombre de couches recherchées pour le bobinage. Pratiquement, pour des raisons de réalisabilité, seuls des bobinages monocouches ou deux couches sont explorés. Dans le cas d'un bobinage monocouche, il faut choisir $N_s/(2N)$ bobines par phase. Dans le cas d'un bobinage à deux couches, il faut choisir N_s/N bobines par phase.

Par exemple, pour la machine pentaphasée *M5-L2EP* à 20 encoches, le bobinage est monocouche : le bobinage d'une phase résulte de l'association de deux bobines. Ce nombre 2 correspond bien à $N_s/(2N)$. De même, pour la machine pentaphasée *M5-IRENAV* à 20 encoches, le bobinage est à deux couches : le bobinage d'une phase est constituée de quatre bobines, ce qui correspond bien à N_s/N bobines.

A une association de bobines données, il correspond un vecteur de distribution de conducteurs et un vecteur de fonction de bobinage. Donc, comme les objectifs de la procédure sont ciblés sur les fonctions de bobinage fictif, le meilleur choix est celui qui respecte au mieux les critères multimachines. C'est-à-dire :

- le critère lié aux forces électromotrices fictives ; il faut approcher au mieux les distributions fictives idéales,

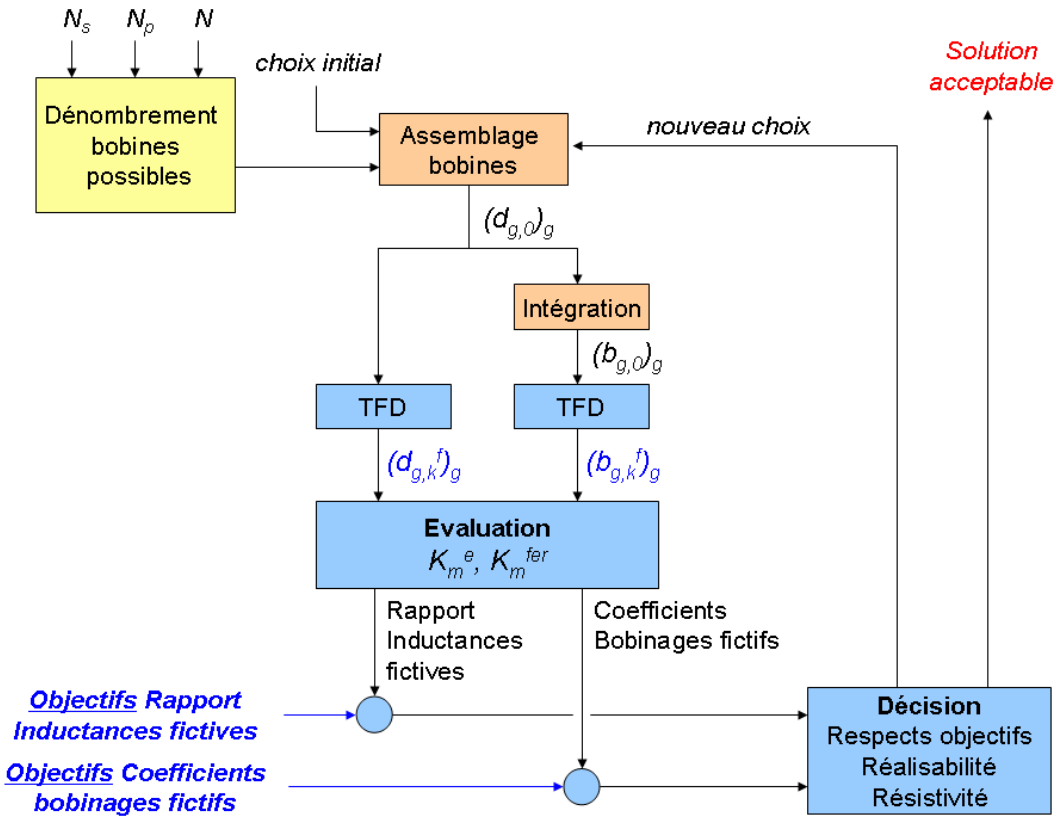


Figure IV.13 — Synoptique de la procédure de sélection du bobinage

- le critère lié aux valeurs d'inductances fictives ; il faut autant que possible égaliser les niveaux d'énergie des différentes fonctions de bobinage fictif.

Pour le second critère, si le bobinage recherché est à deux couches, il faut également tenir compte des inductances fictives de fuite M_k^{fer} : celles-ci dépendent de l'énergie des distributions fictives et de la géométrie de l'encoche. L'influence de ces inductances fictives de fuite sera donc d'autant plus importante que les énergies des distributions fictives seront fortes et que la géométrie de l'encoche favorisera la fuite (cf. définition du coefficient K_m^{fer} dans l'équation (II.40) du chapitre II, page 83).

IV.1.2.2 Procédure

La figure IV.13 résume la procédure de sélection du bobinage. La première étape consiste à dénombrer les bobines possibles pour construire l'ensemble dans lequel le choix de bobines va s'opérer. Le nombre d'encoches N_s, le nombre de pôles N_p et le nombre de phases N sont fixés *a priori*. En conséquence, le nombre d'encoches réduit N'_s, l'indice de circularité i_c et l'indice de circularité réduit d peuvent être évalués. Ceci signifie que les familles étendues d'harmoniques sont connues. La procédure décrite est itérative : elle nécessite donc une initialisation. Une fois que les bobines sont choisies, le vecteur de distribution de conducteurs $\overrightarrow{d_0^{N'_s}}$ de composantes $(d_{g,0})_{g\in\mathbb{Z}}$ est calculé. L'étape suivante consiste à en effectuer l'intégration discrète pour obtenir le vecteur de fonction de bobinage $\overrightarrow{b_0^{N'_s}}$ de composantes $(b_{g,0})_{g\in\mathbb{Z}}$.

Ensuite, la TFD intervient pour caractériser les machines fictives sur le plan fréquentiel :

les vecteurs de distribution fictive $\overrightarrow{d_k^{N'_s,f}}$ de composantes $(d_{g,k}^f)_{g\in\mathbb{Z}}$ et de fonction de bobinage fictif $\overrightarrow{b_0^{N'_s}}$ de composantes $(b_{g,k}^f)_{g\in\mathbb{Z}}$ sont obtenus en distribuant les harmoniques selon leur appartenance aux familles étendues d'harmoniques $F^{N,d}(M_k)$. Ensuite, les grandeurs ciblées de machines fictives (inductance et coefficients de bobinage) sont évaluées : à ce stade, les coefficients K_m^e et K_m^{fer} dépendant de la géométrie de la machine interviennent. Ces grandeurs sont comparées aux objectifs multimachines et les différences observées permettent de juger de la qualité du choix de bobines testé. La décision de refuser le choix de bobines ou de l'accepter repose sur trois critères : l'écart par rapport aux objectifs multimachines, la résistivité du bobinage (qui détermine les constantes de temps et conditionne les pertes Joule) et la réalisabilité du bobinage (en terme de croisement de têtes de bobine notamment). Si la solution est refusée, la procédure est relancée.

En pratique, en fonction de la combinaison (N_s, N_p, N), l'ensemble des choix possibles peut être restreint de telle sorte qu'il soit tout à fait raisonnable de tous les calculer puis de les comparer. Cependant, lorsque le nombre d'encoches réduit N'_s devient très grand, cette option n'est plus envisageable.

Enfin, le grand intérêt de cette procédure est le suivant : si la fuite n'est pas prise en compte, alors, dans l'expression (III.29) (page 115), le terme K_m^{fer} n'intervient plus et la procédure devient alors totalement arithmétique, ce qui est particulièrement commode.

IV.1.3 Exemples

Dans cette sous-section, la procédure d'optimisation est mise en oeuvre sur deux cas concrets. Pour une machine à 7 phases (premier paragraphe) puis pour une machine à 5 phases (second paragraphe), la procédure permet de mettre en évidence deux bobinages fractionnaires aux performances multimachines particulièrement intéressantes. Dans les deux cas, les bobinages sélectionnés facilitent l'alimentation des machines par onduleur de tension MLI. Pour la machine à 5 phases, ces améliorations sont mises en évidence par des simulations de l'ensemble convertisseur-machine dont les résultats sont reportés dans le dernier paragraphe.

IV.1.3.1 Recherche d'un bobinage heptaphasé facilitant la régulation de toutes les machines fictives

Ce paragraphe traite l'exemple d'une machine à 7 phases, 21 encoches et 16 pôles destinées à une application de propulsion automobile hybride. Les caractéristiques principales sont présentées dans le tableau IV.1. Pour cette application, le choix d'une structure à 7 phases plutôt qu'à 3 phases se justifie par la volonté de réduire les couples pulsatoires tout en cherchant à améliorer la densité de couple [47]. Dans la même logique, le bobinage recherché sera très fractionnaire $s_{pp} = 3/16$, ce qui va grandement atténuer le couple de détente. La stratégie de commande de l'onduleur de tension est sinusoïdale : seule la machine principale fournit du couple. Ce moteur heptaphasé étant couplé en étoile, la machine homopolaire n'est pas alimentée. Les deux autres machines fictives (secondaire et tertiaire) sont contrôlées. Il faut donc chercher une configuration de bobinage qui conduit à égaliser les énergies des fonctions de bobinage fictif des machines alimentées. Cependant, le bobinage est nécessairement à deux couches. Par conséquent, il faut aussi tenir compte de l'influence de l'énergie des distributions fictives sur les inductances mutuelles. Par ailleurs, comme la machine principale fournit la totalité du couple, il faut veiller à obtenir un coefficient de bobinage du fondamental

Nom	M7-HYB
Puissance	$\approx 32\ kW$
Couple	$\approx 150\ Nm$ @ $2000\ tr/min$
Nombre de phases N	7
Nombre d'encoches N_s	21
Nombre de pôles N_p	16
Type Rotor	Interne
Longueur effective L_m	$65\ mm$
Epaisseur Culasse Stator e_{cs}	$12.7\ mm$
Rayon Statorique R_s	$102\ mm$
Entrefer Mécanique g_m	$1.5\ mm$
Epaisseur Couche d'Aimant g_a	$4.4\ mm$
Aimantation B_r	$1.0\ T$
Lacune Polaire	33 %
Epaisseur Culasse Rotor e_{cr}	$12\ mm$
Largeur d'encoche δ_s	$0.5\ \tau_s$
Ouverture d'encoche ϵ_s	$0.13\ \delta_s$
Epaisseur de bec d'encoche b_s	$1\ mm$
Profondeur d'encoche p_s	$27.3\ mm$
Nombre de conducteurs n_{cd}	16
Section de conducteurs s_{cd}	$1\ mm^2$

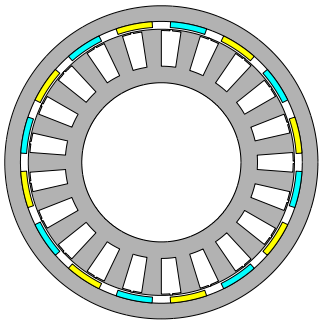


Tableau IV.1 — Caractéristiques de la machine *M7-HYB* : 7 phases, rotor externe à aimantation radiale et bobinage fractionnaire à caractériser

élevé. En termes d'objectifs sur les bobinages fictifs, ces exigences se traduisent de la manière suivante :

- la distribution fictive de la machine principale doit résulter de l'échantillonnage d'une sinusoïde d'amplitude la plus élevée possible et de fréquence $ph_1 = 8$ et les autres distributions fictives doivent être aussi faibles que possible,
- les énergies des fonctions de bobinage fictif doivent être très proches ; de plus, comme le bobinage est à deux couches, il faut également tenir compte de l'énergie des distributions fictives.

Pour cette configuration à 21 encoches, le nombre de bobines possibles est 10 (soit environ $N_s/2$). Comme le bobinage recherché est à deux couches, le nombre de bobines à choisir est $N_s/N = 3$. Les différentes combinaisons testées permettent de mettre en évidence la meilleure solution. Celle-ci est représentée sur la figure IV.14. Il s'agit d'un bobinage concentré donc facile à réaliser et peu consommateur de cuivre.

Les performances par rapport aux objectifs sur les distributions fictives sont reportées sur les figures IV.15 et IV.16. La figure IV.15 représente les distributions fictives et leurs supports d'échantillonnage, le bobinage de la machine principale apparaît très bien équilibré. Ce n'est pas le cas des machines secondaire et tertiaire pour lesquel les nombres de paires de pôles ne sont pas bien apparents. Ceci signifie que leur énergie n'est pas placée de façon prépondérante sur leur fondamental. Ces deux machines fictives doivent donc avoir des coefficients de bobinage faibles pour leur harmonique de rang minimal, ce que confirme la figure IV.16 (les coefficients de bobinage sur 3 et 5 sont inférieur à 0.4). Pour la machine tertiaire, étant donnée la faiblesse de ses coefficients de filtrage, sa fem élémentaire sera nécessairement faible. Les mêmes conclusions peuvent être établies concernant la machine secondaire. Quant à la machine principale, les résultats sont très satisfaisants : une fem élémentaire quasiment

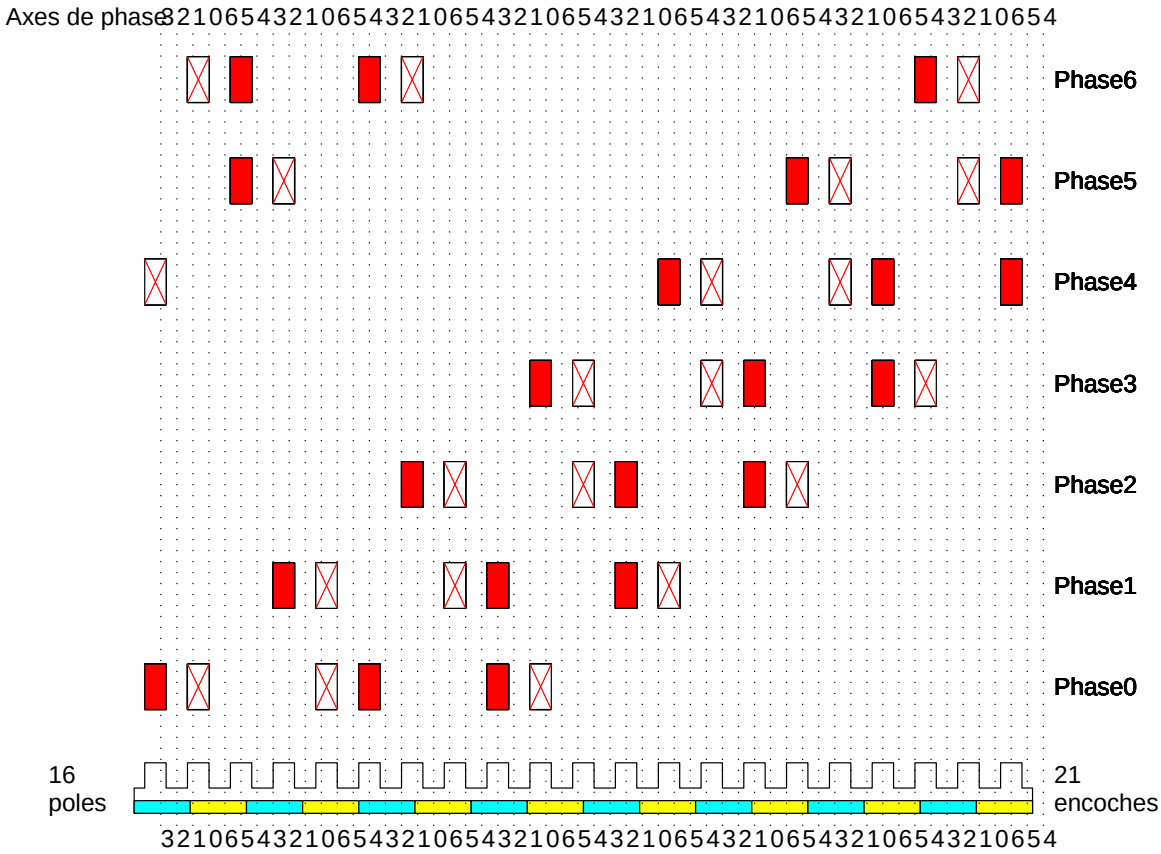


Figure IV.14 — Bobinage solution pour la machine à 7 phases, 21 encoches et 16 pôles

sinusoïdale et de bonne amplitude est attendue. Néanmoins, il faut souligner que le bobinage proposé ne filtre pas les harmoniques de rang pair. Ceci signifie que les éventuelles dissymétries de la couche d'aimants seront transmises dans la force électromotrice. C'est un point à prendre en considération lors de la phase de réalisation.

L'objectif sur l'énergie des fonctions de bobinage fictif est parfaitement atteint. Comme le montre la figure IV.17, les énergies des fonctions de bobinage des trois machines fictives diphasées sont égales. Cependant, comme le bobinage est à deux couches, cette information n'est pas suffisante pour conclure à l'égalité des inductances fictives. Il faut aussi tenir compte de l'énergie des distributions fictives, c'est-à-dire des effets de mutualisation liée au champ ne passant pas par l'entrefer. L'examen de la figure IV.18 permet de constater que la distribution de la machine principale a un niveau d'énergie assez supérieure à ceux des machines secondaire et tertiaire. Il en résulte des inductances fictives qui ne sont pas tout à fait égales mais qui, néanmoins, restent très proches. Il faut rappeler que c'est la géométrie de l'encoche qui, par l'intermédiaire du coefficient K_m^{fer}, va déterminer le poids que prend la correction de fuite dans le calcul des inductances fictives totales. Les résultats sont consignés dans le tableau IV.2 qui donne les résultats obtenus avec *Difimedi* et les deux calculs analytiques *ANA-D* et *ANA-N* avec prise en compte ou non de la mutuelle de fuite. Ce tableau souligne bien la nécessité de de prendre en compte la mutuelle de fuite pour évaluer correctement les inductances fictives[1] (surtout dans le cas des bobinages à plusieurs couches).

[1]Cet argument complète les remarques émises à la fin du paragraphe II.4.3.4 du chapitre II.

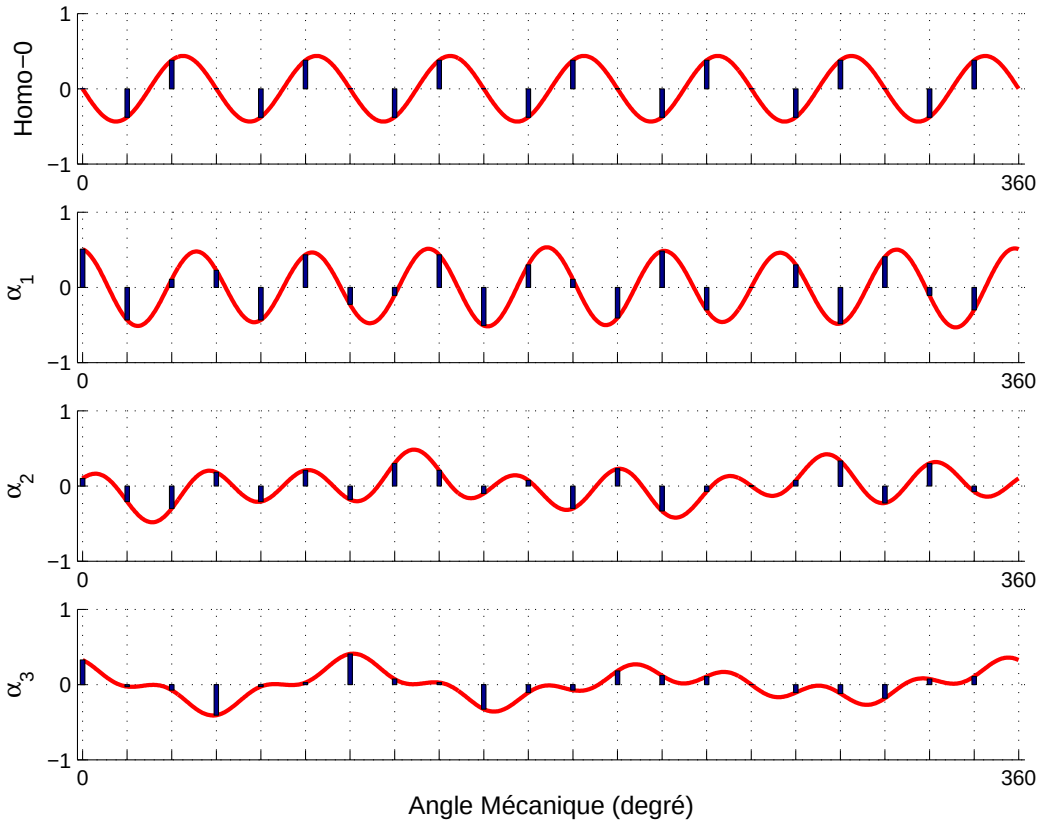


Figure IV.15 — Machine *M7-HYB* : distributions fictives, les pôles des machines fictives secondaires et tertiaires n'apparaissent pas clairement

Méthode	*Difimedi*	*ANA-D*		*ANA-N*	
		sans fuite	avec fuite	sans fuite	avec fuite
M_1 (mH)	167	95	147	78	130
M_0/M_1	0.83	0.87	0.83	0.89	0.84
M_2/M_1	0.67	0.87	0.69	1.00	0.75
M_3/M_1	0.63	0.85	0.64	1.00	0.71

Tableau IV.2 — Calcul des inductances cycliques pour la machine *M7-HYB* selon les méthodes numérique et analytiques

IV.1.3.2 Recherche d'un bobinage pentaphasé favorisant la machine secondaire en terme de régulation et de production de couple

Ce paragraphe utilise la procédure d'optimisation multimachine du bobinage sur un cas concret décrit dans [46]. Il s'agit de rechercher un bobinage pentaphasé monocouche sur une structure à 80 encoches et 14 pôles correspondant au cahier des charges d'un petit propulseur de pod dont les caractéristiques sont disponibles dans le tableau IV.3. Cette configuration à nombre d'encoches par pôle et par phase non entier est choisie pour réduire le couple de détente. Comme dans l'exemple précédent, le moteur est couplé en étoile. Donc la machine homopolaire n'est pas alimentée et il n'est pas nécessaire de fixer des objectifs sur ce bobinage fictif. Comme le moteur est alimenté par onduleur de tension, il est nécessaire de réguler les courants des machines principale et secondaire. Par conséquent, plutôt que de réguler le courant de la machine secondaire à zéro, il est plus profitable de dimensionner le bobinage

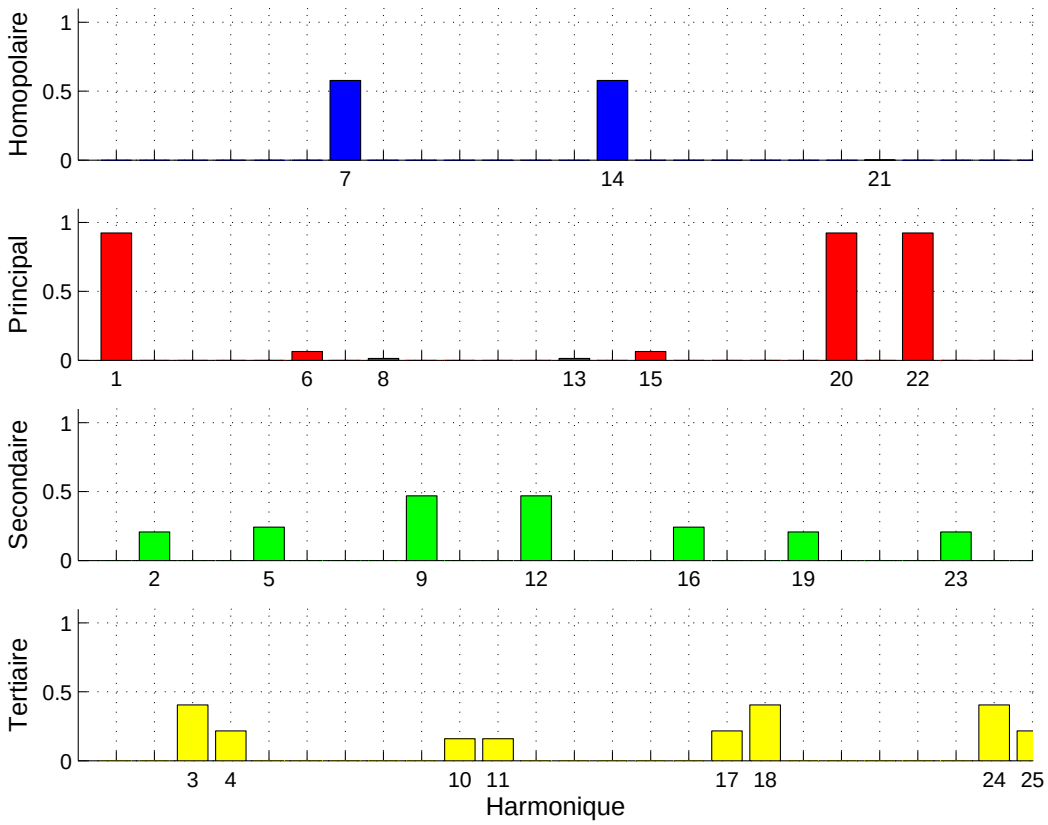


Figure IV.16 — Machine *M7-HYB* : coefficients de bobinages globaux des différentes machines fictives

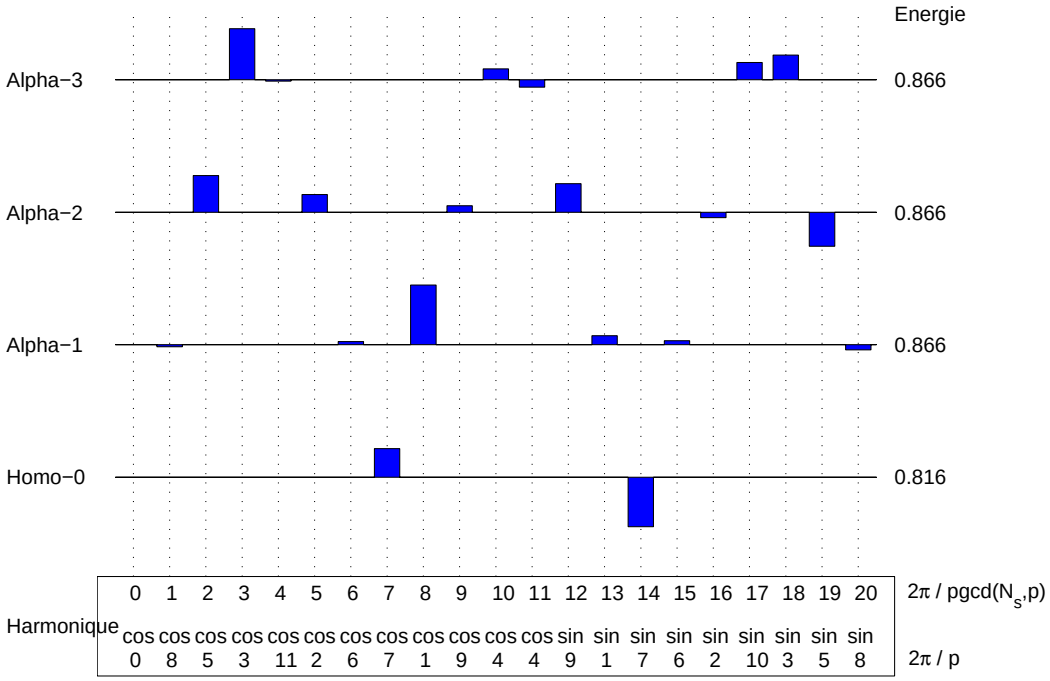


Figure IV.17 — Machine *M7-HYB* : TFDr des fonctions de bobinage fictif avec indication du niveau d'énergie

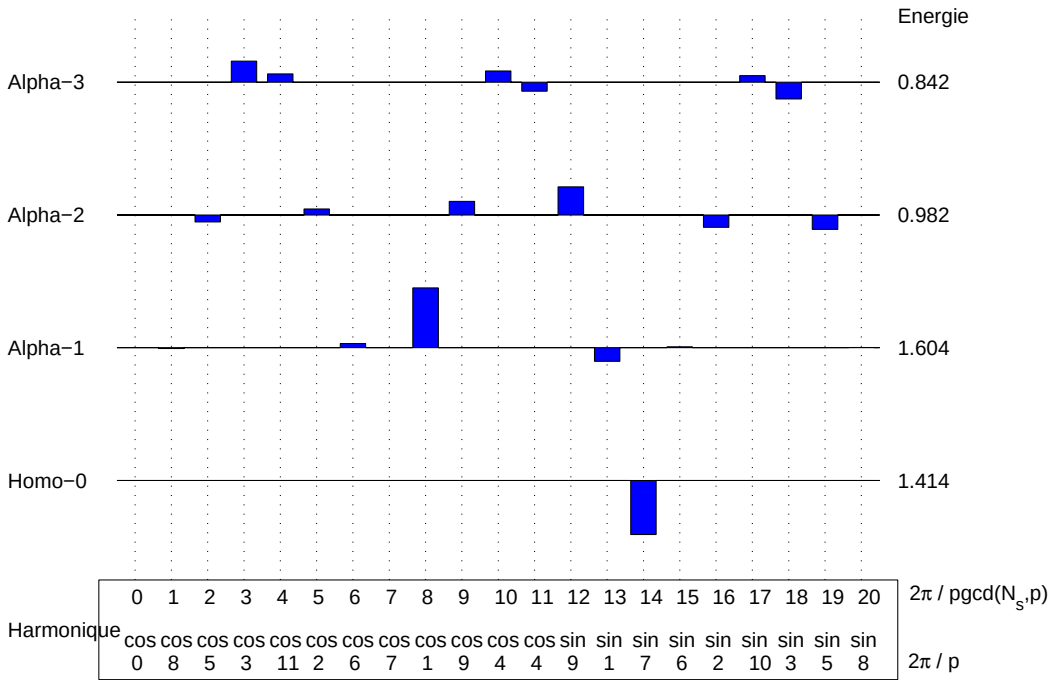


Figure IV.18 — Machine *M7-HYB* : TFDr des distributions fictives avec indication du niveau d'énergie

Nom	**M5-POD**
Puissance Couple	$\approx 3.2\ kW$ $\approx 60\ Nm$ @ $500\ tr/min$
Nombre de phases N Nombre d'encoches N_s Nombre de pôles N_p Type Rotor	5 80 14 Interne
Longueur effective L_m	$350\ mm$
Epaisseur Culasse Stator e_{cs} Rayon Statorique r_{st} Entrefer Mécanique g_m Epaisseur Couche d'Aimant g_a Aimantation B_r Lacune Polaire Epaisseur Culasse Rotor e_{cr}	$6\ mm$ $90\ mm$ $1\ mm$ $6\ mm$ $0.6\ T$ 0 % $6\ mm$
Largeur d'encoche δ_s Ouverture d'encoche ϵ_s Epaisseur de bec d'encoche b_s Profondeur d'encoche p_s Nombre de conducteurs n_{cd} Section de conducteurs s_{cd}	$0.5\ \tau_s$ $0.5\ \delta_s$ $1\ mm$ $10\ mm$ 10 $1.5\ mm^2$

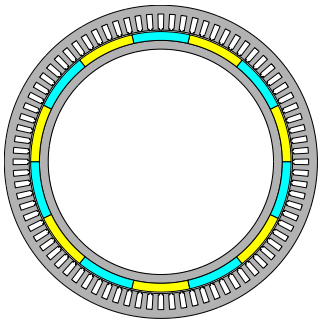


Tableau IV.3 — Caractéristiques de la machine *M5-POD* : 5 phases, rotor interne à aimantation radiale et bobinage fractionnaire à caractériser

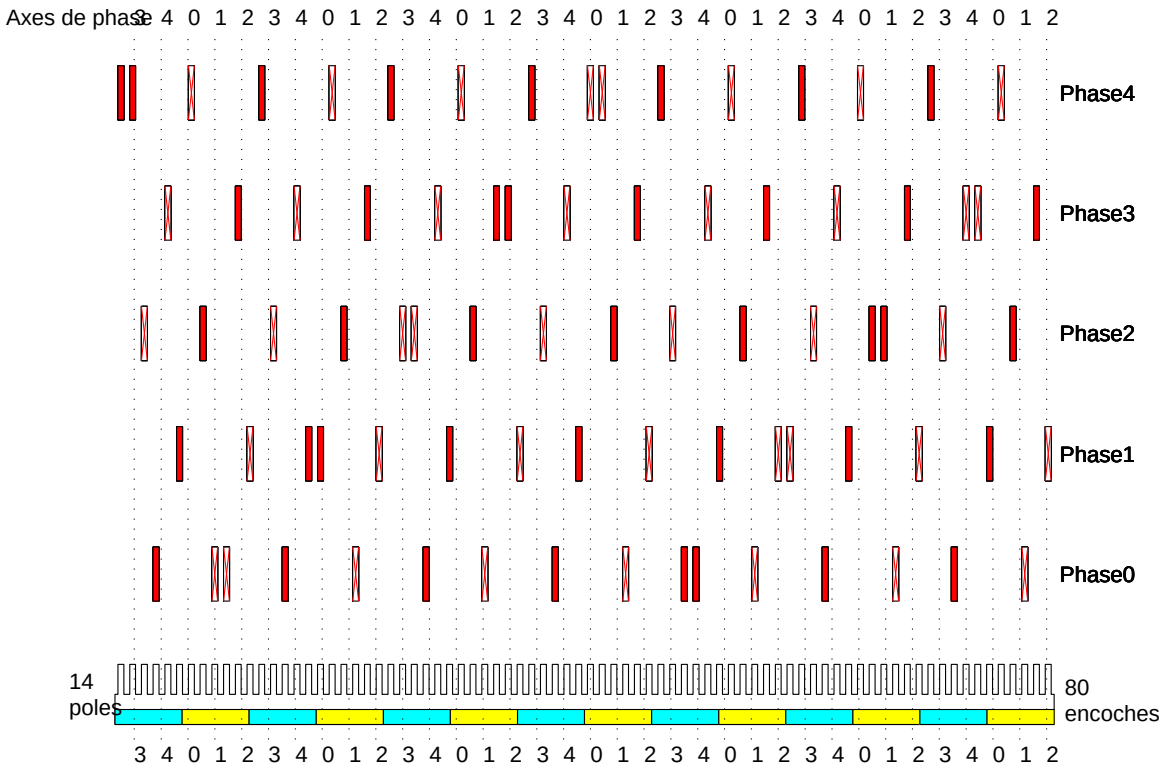


Figure IV.19 — Représentation du meilleur bobinage pentaphasé trouvé pour le moteur à 80 encoches et 14 pôles

pour la rendre capable de produire un couple significatif et peu fluctuant. De plus, pour avoir une bonne adaptation de la fréquence de MLI aux deux machines fictives, les constantes de temps des deux machines fictives doivent être aussi proches que possible. En termes d'objectifs sur bobinages fictifs, ces exigences se traduisent de la manière suivante :

- les distributions fictives des machines fictives principales et homopolaires doivent résulter de l'échantillonnage de deux sinusoïdes de même amplitude (respectivement, l'une de fréquence $ph_1 = 7$; l'autre de fréquence $ph_2 = 21$),
- les énergies des fonctions de bobinage fictif doivent être très proches.

En d'autres termes, la réalisation totale du premier objectif conduirait à des forces électromotrices parfaitement sinusoïdales pour les deux machines fictives diphasées ; la réalisation totale du deuxième objectif conduirait à des inductances fictives égales pour les deux machines fictives diphasées.

La première étape de la procédure d'optimisation décrite sur la figure IV.13 consiste à dénombrer les bobines possibles. Il en existe $N_s/2 = 40$. Le bobinage recherché est monocouche : il faut donc en choisir $N_s/(2N) = 8$. La meilleure configuration trouvée est représentée sur la figure IV.19.

Les performances vis à vis de l'objectif de filtrage de l'induction rotorique sont représentées par les figures IV.20 et IV.21. La figure IV.20 représente les distributions fictives et le support échantillonné correspondant, c'est-à-dire la polarité des bobinages fictifs. En particulier, le support de la machine secondaire comprend bien 21 alternances, ce qui signifie que la machine secondaire est effectivement bobiné au-dessus de 21 paires de pôles. En raison de la configuration fractionnaire, les pôles des bobinages ne sont pas tous équivalents mais la répartition apparaît correcte. La figure IV.21 représente les coefficients de bobinage globaux.

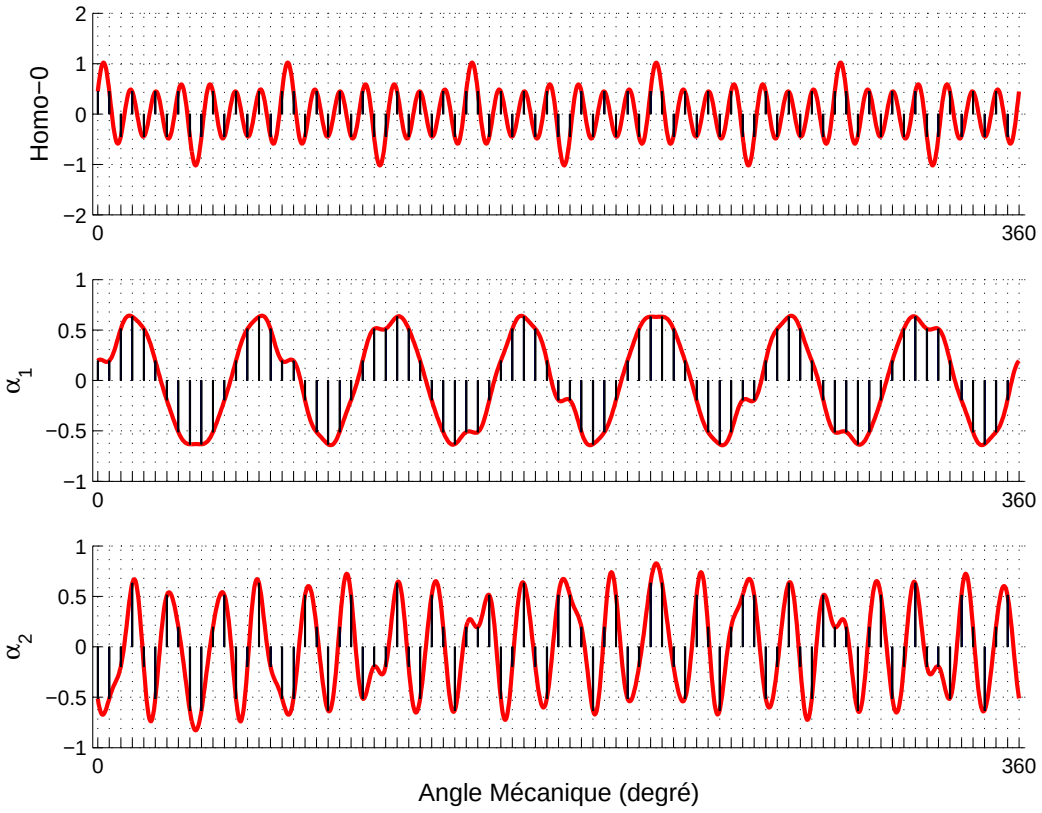


Figure IV.20 — Machine *M5-POD* : mise en évidence de la polarité des différents bobinages fictifs

Pour la machine principale, les résultats obtenus sont très satisfaisants : le coefficient sur le fondamental est supérieur à 0.98 alors que les autres harmoniques sont très atténués (moins de 11 % pour les harmoniques 9 et 11). De même, concernant la machine secondaire, les résultats sont corrects : l'harmonique de rang 3 (c'est-à-dire le fondamental de la machine secondaire) est faiblement atténué (coefficient à 0.86) alors que les harmoniques 7 et 13 sont atténués à 0.37 et 0.20 respectivement. Incontestablement, avec un tel bobinage, la machine secondaire sera moins difficile à contrôler que si le bobinage de départ avait été diamétral (solution naturellement adoptée si la machine avait 16 pôles, cf. [46]).

Contrairement à l'exemple précédent, le bobinage ici traité est monocouche. Donc les énergies des distributions fictives sont toutes égales. Par conséquent, les éventuelles différences entre les valeurs des inductances fictives sont exclusivement causées par des niveaux inégaux d'énergie pour les fonctions de bobinage fictif. Représentant ces fonctions, la figure IV.22 montre que les amplitudes des fonctions de bobinage fictif principal et secondaire sont très proches. Ceci signifie que leurs niveaux d'énergie doivent être du même ordre. La figure IV.23, qui représente leurs TFD et indique leurs niveaux d'énergie, le confirme. Par conséquent, les constantes de temps des deux machines fictives alimentées doivent être quasiment égales. Ces résultats sont confirmés par les calculs analytiques et le calcul numérique avec le logiciel *Difimedi*. Selon ce dernier, l'inductance principale M_1 est égale à 0.38 mH, l'inductance secondaire M_2 0.33 mH et l'inductance homopolaire M_0 0.18 mH.

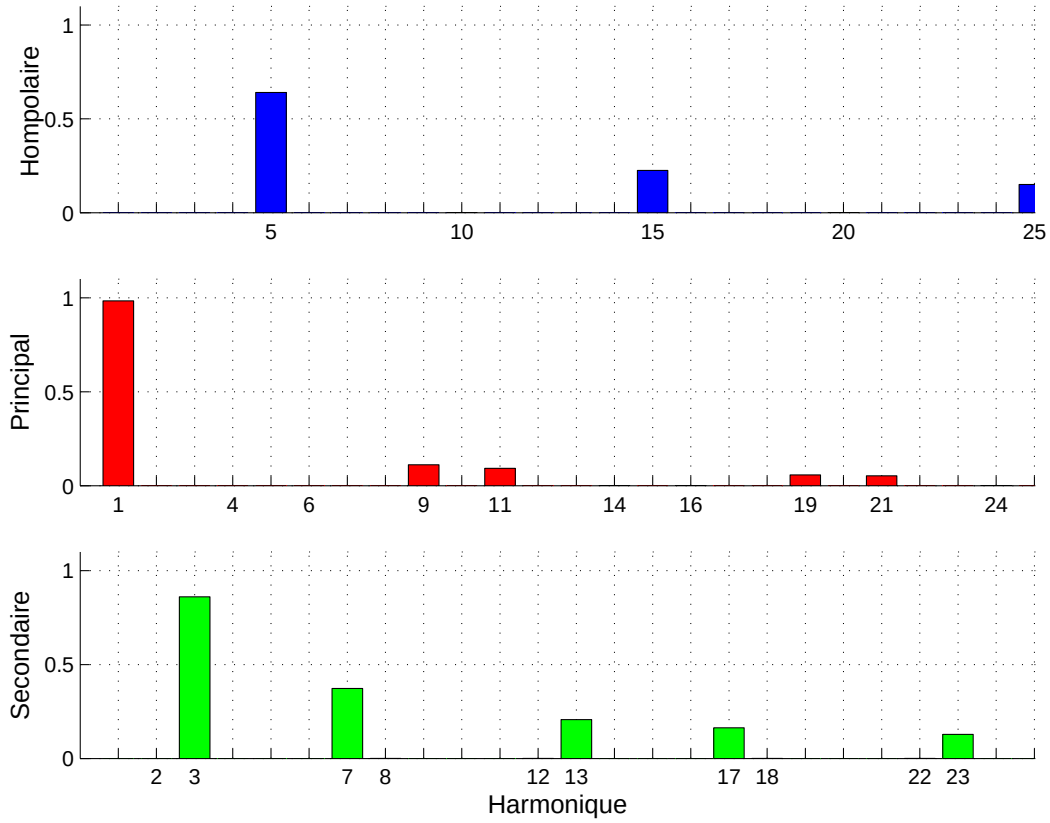


Figure IV.21 — Machine *M5-POD* : coefficients de bobinages globaux des différentes machines fictives

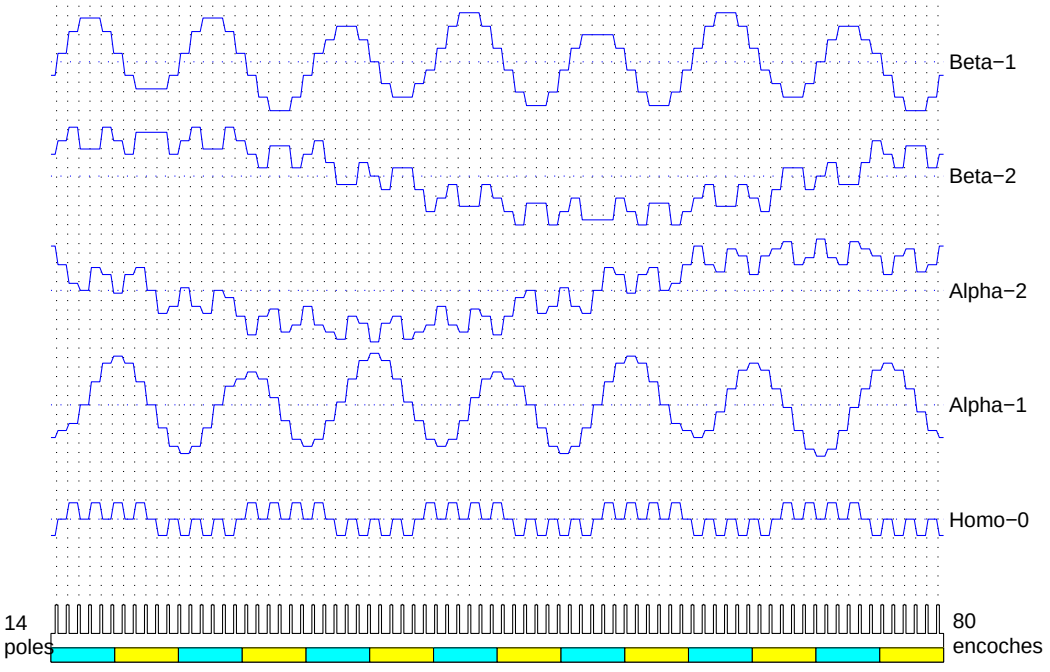


Figure IV.22 — Machine *M5-POD* : allure des fonctions de bobinage fictif

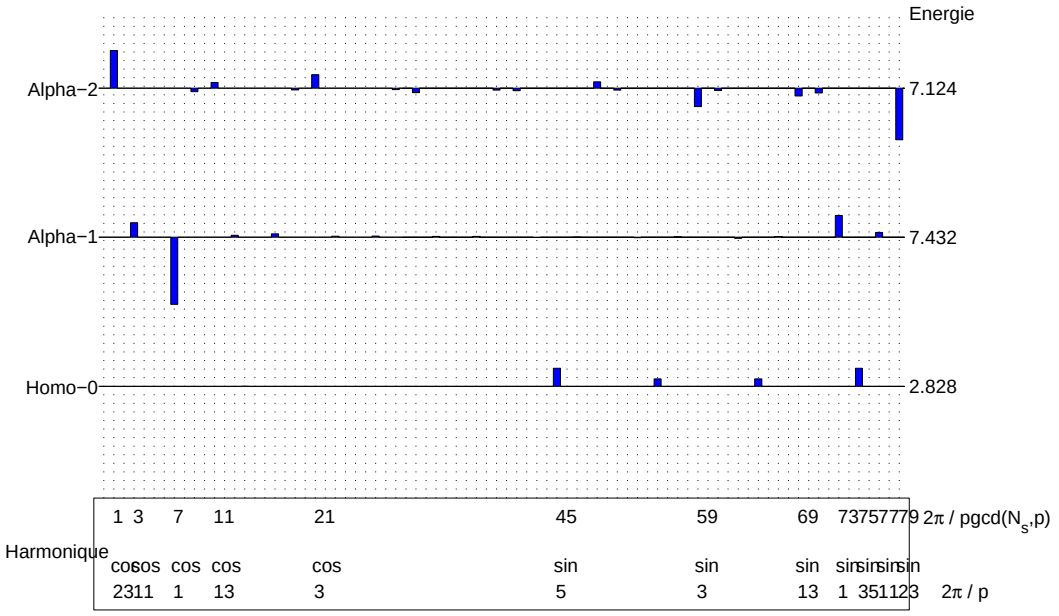


Figure IV.23 — Machine *M5-POD* : TFDr des fonctions de bobinage fictif avec indication du niveau d'énergie

IV.1.3.3 Aptitude du bobinage pentaphasé sélectionné à réduire les courants parasites

Sur la base de simulations de l'ensemble convertisseur-machine, ce paragraphe montre que le bobinage fractionnaire conduit à une réduction significative des courants parasites en comparaison à une configuration diamétrale équivalente alimentée par le même onduleur.

Ainsi, une machine pentaphasée *M5-POD-ref* est définie. Couplée en étoile, cette machine *M5-POD-ref* sert de référence pour le dimensionnement de l'onduleur et pour la critique des performances de la machine *M5-POD*. La machine *M5-POD-ref* reprend toutes les caractéristiques de la machine *M5-POD* énumérées dans le tableau IV.3 à l'exception du nombre de pôles : il est de 16 pour la machine *M5-POD-ref*. Le bobinage est donc entier ($s_{pp} = 1$) et il est choisi diamétral. La figure IV.24 représente le bobinage de cette machine de référence (qui peut être comparé au bobinage fractionnaire de la machine *M5-POD* en figure IV.19). Il faut noter que le volume d'aimants est le même pour les deux machines. De même, le volume de cuivre est presque identique : les changements au niveau des têtes de bobine engendrent une différence très faible. L'utilisation du code de calcul analytique permet de calculer les résistances statoriques et les inductances cycliques pour chacune des deux machines. Les résultats sont reportés dans le tableau IV.4. Ce tableau montre la très légère augmentation de la résistance statorique[2] pour la machine *M5-POD*, conséquence de têtes de bobine globalement plus importantes que pour la machine *M5-POD-ref*.

La figure IV.25-a compare les fem élémentaires des deux machines. En raison de la configuration fractionnaire, les oscillations liées à la perméance disparaissent sur la machine *M5-POD*. La figure IV.25-b donne les couples électromagnétiques par les deux machines en alimentation sinusoïdale parfaite : pour un niveau de pertes Joule légèrement augmentées (1%, conséquence de la résistance statorique légèrement accrue), la machine *M5-POD* fournit un

[2]En pratique, une telle différence serait probablement négligée. Mais, ici, elle est prise en compte pour bien illustrer l'intérêt de la démarche.

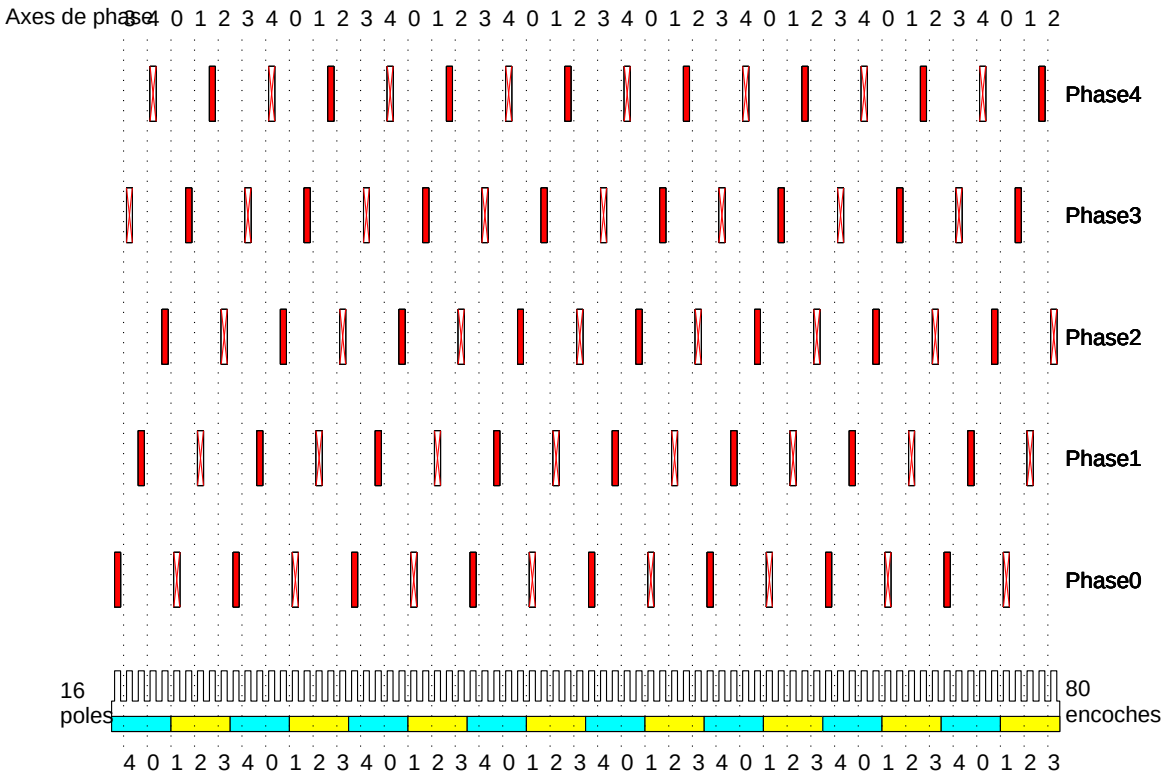


Figure IV.24 — Représentation du bobinage entier diamétral de la machine *M5-POD-ref* à 16 pôles et 80 encoches

Machine	R_s	M_0	M_1	M_2
M5-POD-ref	0.706 Ω	1.4 mH	3.1 mH	1.5 mH
M5-POD	0.714 Ω	1.6 mH	3.7 mH	3.4 mH

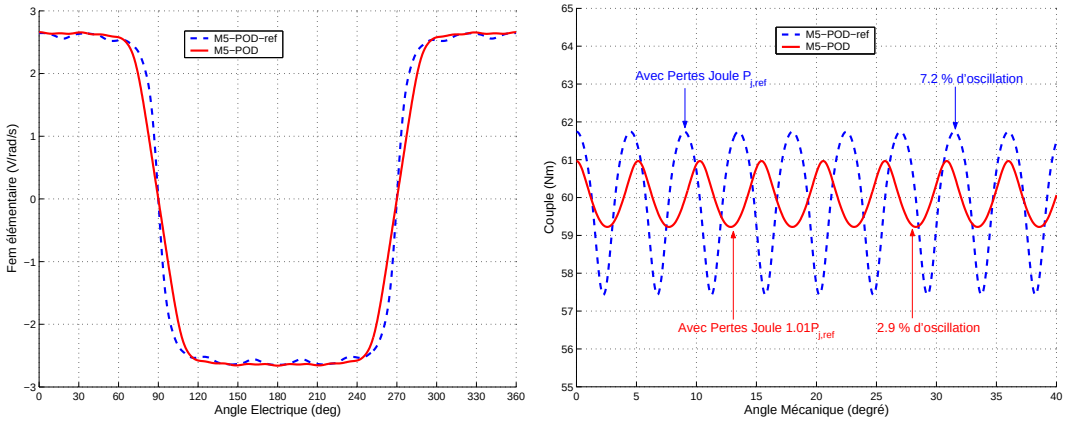
Tableau IV.4 — Estimation analytique de la résistance statorique et des inductances cycliques pour les machines *M5-POD-ref* et *M5-POD* (méthode *ANA-D*)

couple nettement moins fluctuant que celui de la machine *M5-POD* : les oscillations sont réduites de 7.2% à 2.9%. Cette amélioration provient des coefficients de bobinage filtrant les harmoniques 9 et 11 de l'induction rotorique (cf. figure IV.21, page 153). De plus, selon le code de calcul analytique, le couple de détente de la machine *M5-POD* est négligeable contrairement à celui de la machine *M5-POD-ref* qui est estimé à 4.5 Nm d'amplitude.

En alimentation sinusoïdale idéale, le bobinage fractionnaire permet donc une réduction significative des oscillations de couple. Par contre, il engendre théoriquement un très léger accroissement des pertes Joule. Mais la simulation du convertisseur va mettre en avant sa meilleure aptitude à atténuer les courants parasites.

Avant de simuler l'ensemble convertisseur-machine, il faut déterminer la fréquence de MLI requise. Le tableau IV.4 permet d'évaluer les constantes de temps des machines fictives diphasées principale et secondaire et donc de définir cette fréquence selon la relation (I.32) du chapitre I (page 35) :

$$f_{MLI} \geq f_{MLI,min} = \max\left\{10\frac{p\Omega_{max}}{2\pi}, 25\frac{R_s}{2\pi M_1}, 25\frac{R_s}{2\pi M_2}\right\}$$



(a) Fem élémentaires (b) Couple EM en alimentation sinusoïdale

Figure IV.25 — Comparaison des fem élémentaires et des couple électromagnétiques en alimentation sinusoïdale pour les machines *M5-POD* et *M5-POD-ref*

Machine	$\frac{p\Omega_{max}}{2\pi}$	$\frac{R_s}{2\pi M_1}$	$\frac{R_s}{2\pi M_2}$	$f_{MLI,min}$
M5-POD-ref	66.6 Hz	36.0 Hz	74.1 Hz	1853 Hz
M5-POD	58.3 Hz	30.9 Hz	33.3 Hz	833 Hz

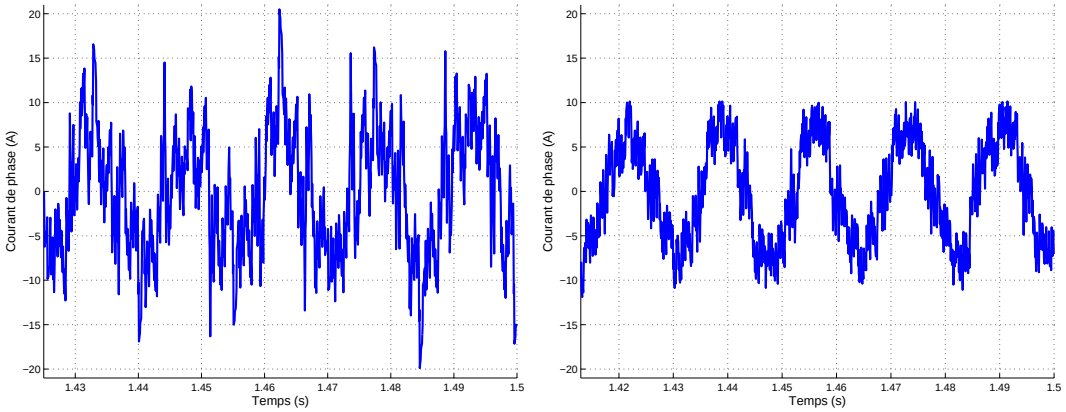
Tableau IV.5 — Choix de la fréquence de MLI en fonction des caractéristiques électriques de la machine et de le fréquence de fonctionnement maximale

Le tableau IV.5 donne le détail du calcul de la fréquence de MLI minimale pour les deux machines. L'adaptation du bobinage de la machine *M5-POD* permet de diviser par deux la fréquence minimale requise. Les deux machines vont être simulées avec la fréquence de MLI réclamée par la machine *M5-POD-ref*, soit 2000 Hz.

Directement interfacé avec les codes de calcul analytique, un environnement de simulation de l'ensemble convertisseur-machine est développé sous *Matlab/Simulink*. L'architecture de régulation implantée est celle décrite dans la section I.3.1.2 du chapitre I (page 34) : pour chaque machine fictive diphasée, le courant est régulé dans un repère tournant à la vitesse du fondamental de la machine fictive considérée. Les régulateurs de courant sont de type Proportionnels-Intégrateurs réglés selon le principe de l'optimum symétrique [27]. Une tension de bus de 400 V est suffisante.

La figure IV.26 compare les courants de phase des machines *M5-POD-ref* (-a) et *M5-POD* (-b) en régime permament au point de fonctionnement nominal. La machine *M5-POD* présente un courant d'allure nettement plus sinusoïdale que celui de la machine de référence. Par conséquent, les pertes Joule sont de 35% inférieures à celles obtenues avec le bobinage diamétral, alors qu'en régime parfaitement sinusoïdal, elles auraient du être supérieures d'environ 1%. De plus, la diminution des courants parasites améliore la qualité du couple électromagnétique (moins d'ondulations).

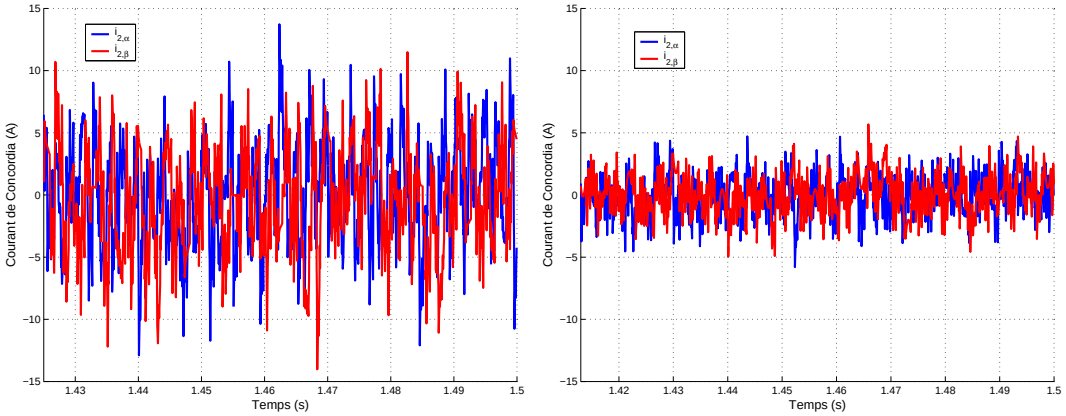
C'est la meilleure adaptation de la fréquence de MLI aux différentes constantes de temps des machines fictives qui explique cette amélioration. De plus, le bobinage fractionnaire diminue les perturbations sur la machine fictive principale et surtout sur la machine fictive secondaire. La figure IV.27 illustre ce dernier point en comparant les courants de *Concordia*



(a) Courant de phase de la machine *M5-POD-ref* à bobinage diamétral

(b) Courant de phase de la machine *M5-POD* à bobinage fractionnaire

Figure IV.26 — Courants de phases obtenus sur les deux machines à 500 tr/min et 60 Nm ($f_{MLI} = 2000\,Hz$)



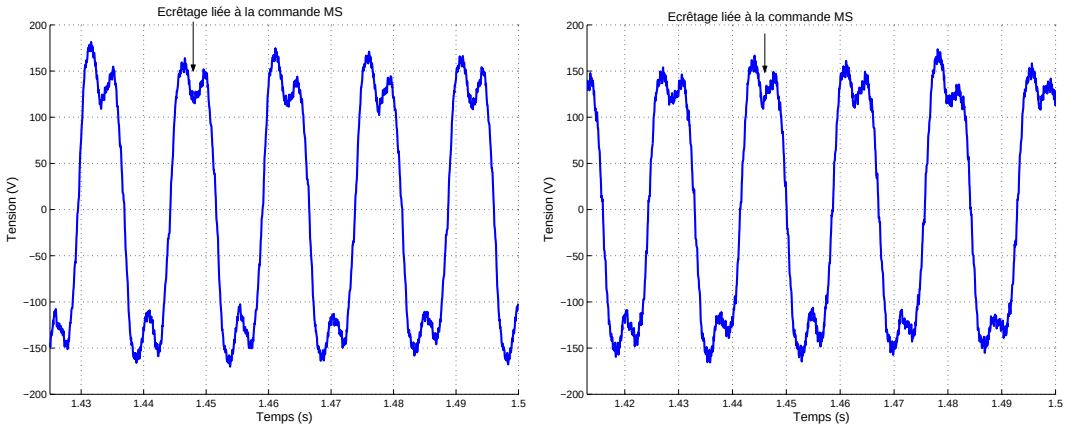
(a) Machine *M5-POD-ref* : courants secondaires de *Concordia*

(b) Machine *M5-POD* : courants secondaires de *Concordia*

Figure IV.27 — Comparaison des courants de *Concordia* pour la machine secondaire (60 Nm @ 500 tr/min)

des machines fictives secondaires pour les machines *M5-POD-ref* et *M5-POD*. La réduction des courants parasites observée est considérable. L'augmentation de la constante de temps de machine secondaire et la réduction des fem fictives de perturbation (harmoniques 7 et 13 notamment) facilitent le travail du régulateur de courant.

Par ailleurs, ces simulations permettent d'illustrer un aspect intéressant lié à la commande multimachine. La figure IV.28 représente les tensions d'alimentation modulées pour les deux machines *M5-POD-ref* (partie -a) et *M5-POD* (partie -b). Dans les deux cas, la régulation du courant de la machine secondaire est traduite par une tension visant à compenser la force électromotrice fictive secondaire. La fem de la machine secondaire est en opposition de phase



(a) Machine *M5-POD-ref* : tension de modulation en régime permanent

(b) Machine *M5-POD* : tension de modulation en régime permanent

Figure IV.28 — Modulante de tension de phase pour les machines *M5-POD-ref* et *M5-POD* en régime permanent (60 Nm @ 500 tr/min)

avec celle de la machine principale. Par conséquent, la commande de régulation en tension de la machine secondaire vient écrêter le fondamental, c'est-à-dire la commande de régulation en tension de la machine principale. Ainsi, la tension de saturation est moins rapidement atteinte ce qui doit permettre soit de diminuer la tension de bus, soit d'étendre la gamme de vitesse de la machine.

En conclusion de cette partie consacrée à l'optimisation du bobinage, il apparaît que l'adaptation du bobinage polyphasé à ses machines fictives est un problème délicat : les objectifs sur les distributions fictives (autrement dit, sur les coefficients de bobinage fictif) et les objectifs sur les niveaux d'énergie des fonctions de bobinage fictif (autrement dit, sur les inductances fictives d'entrefer) sont difficilement conciliables. En d'autres termes, si la distribution fictive est idéale, alors la fonction de bobinage fictif ne l'est pas nécessairement. En particulier, pour les bobinages diamétraux entiers, il est prouvé qu'une distribution fictive idéale (c'est-à-dire un bobinage fictif convenablement réparti) n'implique pas un niveau d'énergie optimal sur la fonction de bobinage fictif correspondante. Ainsi, pour ces structures, à moins d'augmenter les flux de fuite statorique, les objectifs d'égalisation des inductances fictives et de coefficients de bobinage globaux idéaux ne peuvent être conjointement atteints. De même, si les distributions fictives sont calculées par échantillonnage, seuls les coefficients de bobinage fictif sont idéaux : le problème de l'énergie est latent. En fait, il semble que seuls les bobinages fractionnaires permettent un compromis intéressant entre forme des distributions et énergie des fonctions de bobinage. Basée sur les propriétés des bobinages fictifs et de leurs transformées, la procédure d'optimisation proposée permet de détecter pour une configuration à nombres d'encoches, nombre de pôles et nombre de phases donnés le bobinage le plus adapté aux objectifs. Cette procédure s'est montrée efficace sur les deux exemples traités : deux bobinages fractionnaires particulièrement intéressants ont pu être calculés.

Les simulations de l'ensemble convertisseur-machine ont bien mis en évidence les avantages liés à la conception multimachine de la machine polyphasée. La machine est mieux adaptée à son convertisseur, ce qui permet soit de diminuer les contraintes de dimensionnement sur les

composants d'électronique de puissance (fréquence de commutation, tension de bus), soit de profiter de la réduction des courants parasites pour améliorer les performances de la machine (augmentation de la densité de couple avec éventuellement commande de plusieurs machines fictives, diminution des ondulations).

Ces bons résultats sont obtenus par l'intermédiaire de configurations de bobinage fractionnaire. Aussi prometteuses soient-elles dans le contexte de l'adaptation multimachine, ces solutions présentent deux inconvénienents majeurs. D'une part, les bobinages fractionnaires ne filtrent pas les harmoniques de rang pair. Ceci signifie que les éventuelles dissymétries de la couche d'aimants rotoriques seront transmises dans la force électromotrice. D'autre part, les bobinages fractionnaire sont susceptibles d'engendrer des efforts radiaux déséquilibrés, ce qui risque de solliciter des modes propres mécaniques [29]. Ces aspects restent à étudier.

IV.2 Optimisation de la couche d'aimants

Les deux critères d'optimisation des machines fictives sont les inductances et les forces électromotrices. Ces deux paramètres dépendent du bobinage. Mais les forces électromotrices dépendent aussi des caractéristiques de la couche d'aimants. La définition de couches d'aimants particulières est donc un moyen d'agir sur l'amplitude et la forme de la fem élémentaire. Par exemple, pour un rotor constitué d'un aimant à magnétisation radiale, le choix d'un rapport de 2/3 entre la taille d'aimants et la pas polaire permet d'éliminer l'harmonique de rang 3 dans la force électromotrice et ceci quelque soit le bobinage. Pour une couche d'aimants à magnétisation parallèle, un exemple classique est l'anneau de *Halbach* [16] où l'orientation progressive de la magnétisation des blocs d'aimant aboutit à une force électromotrice quasiment sinusoïdale, là encore indépendamment du bobinage. Le but de cette partie est donc de définir des démarches de calcul de couches d'aimants pour obtenir des forces électromotrices fictives élémentaires sinusoïdales et d'amplitudes spécifiées. Tout d'abord, le problème est analysé : les liens existant entre les harmoniques des fonctions d'aimantation et les décompositions de fem élémentaires sont exhibés et modélisés sous forme de filtres d'espace. Les objectifs sur les fem élémentaires fictives peuvent ainsi être traduits en terme d'objectifs sur les fonctions d'aimantation fictive. Deux grandes démarches d'optimisation sont alors distinguées puis explicitées : l'une recherche des couches d'aimants à magnétisation radiale ; l'autre des couches d'aimant à magnétisation parallèle.

IV.2.1 Analyse du problème

Cette sous-section prépare les procédures d'optimisation de la couche d'aimants. Tout d'abord, des éléments relatifs au calcul analytique de la force électromotrice sont repris afin d'isoler l'influence de la couche d'aimants sur la fem élémentaire : une relation linéaire existe entre les coefficients de *Fourier* des fonctions d'aimantation et ceux de la fem élémentaire. Ensuite, les objectifs multimachines sur les forces électromotrices sont introduits et, en renversant la relation linéaire précédemment établie, il est possible de leur faire correspondre des fonctions d'aimantation idéales. Ces fonctions vont constituer les objectifs des procédures d'optimisation.

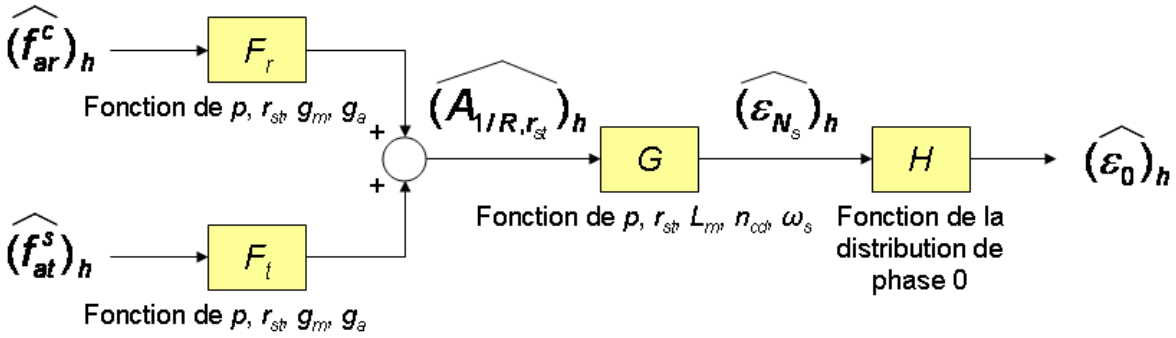


Figure IV.29 — Caractérisation de la force électromotrice élémentaire par l'intermédiaire de gains harmoniques

IV.2.1.1 Isolation de l'influence de la couche d'aimant sur la force électromotrice élémentaire

L'hypothèse de linéarité permet d'affirmer que, pour une géométrie de machine à pôles lisses et un bobinage fixés, la force électromotrice élémentaire dépend seulement des caractéristiques de la couche d'aimants. Cette couche d'aimants est modélisée par les fonctions d'aimantation radiale et tangentielle. D'après les calculs analytiques effectués dans le chapitre II, c'est la composition harmonique de ces deux fonctions qui conditionnent la composition harmonique de la force électromotrice. La figure IV.29 illustre ce fait en détaillant la manière dont les coefficients de *Fourier* des fonctions d'aimantation ($\widehat{(f_{ar}^{c})}_h$ et $\widehat{(f_{at}^{s})}_h$) interagissent avec les paramètres géométriques de la machine et le bobinage pour constituer les coefficients de *Fourier* de la force électromotrice élémentaire $\widehat{(\epsilon_0)}_h$. Ce schéma est en fait une représentation de l'équation de la force électromotrice évaluée à partir de la densité de conducteurs (cf. équations (II.31) et (II.32) dans la section II.4.2.1 du chapitre II, page 76) : le schéma fait en effet intervenir le coefficient de *Fourier* du potentiel vecteur dû au rotor en $r = r_{st}$, noté $\widehat{(A_{1/R,r_{st}})}_h$ (cf. equation (II.31)) puis le coefficient de *Fourier* de la force électromotrice d'encoche $\widehat{(\epsilon_{N_s})}_h$ (cf. equation (II.32)). Les paramètres liés à la géométrie et au bobinage interviennent sous forme de gains :

- les gains $\widehat{(F_r)}_h$ et $\widehat{(F_t)}_h$ représentent l'influence des paramètres liés à l'entrefer[3] de la machine (leurs expressions sont disponibles dans l'annexe B),
- le gain $\widehat{(G)}_h$ représente l'influence des paramètres liés à la géométrie de l'encoche,
- le gain $\widehat{(H)}_h$ représente l'influence des paramètres liés au bobinage et plus exactement à la distribution.

Ce schéma montre clairement que fixer des objectifs sur la force éléctromotrice élémentaire revient à définir des formes spécifiques pour les deux fonctions d'aimantation. Par conséquent, les objectifs sur les forces électromotrices fictives peuvent être ramenés sur les fonctions d'aimantation fictive (définies dans la section III.3.1 du chapitre III, page 119).

[3] Il s'agit de l'entrefer au sens large, c'est-à-dire de l'entrefer magnétique corrigé.

IV.2.1.2 Définition des objectifs multimachines pour la couche d'aimants

En notant $\widehat{(G_r)}_h = \widehat{(F_r)}_h\widehat{(G)}_h\widehat{(H)}_h$ et $\widehat{(G_t)}_h = \widehat{(F_t)}_h\widehat{(G)}_h\widehat{(H)}_h$, le coefficient de *Fourier* $\widehat{(\epsilon_0^c)}_h$ de la force électromotrice élémentaire peut s'écrire :

$$\widehat{(\epsilon_0^c)}_h = \widehat{(G_r^c)}_h\widehat{(f_{ar}^c)}_h + \widehat{(G_t^c)}_h\widehat{(f_{at}^s)}_h \tag{IV.2}$$

L'amplitude du fondamental de la fem élémentaire de phase (c'est-à-dire l'amplitude du fondamental de la machine principale) $\widehat{(\epsilon_0^c)}_1$ va donc dépendre des gains $\widehat{(G_r^c)}_1$ et $\widehat{(G_t^c)}_1$ (c'est-à-dire des paramètres géométriques de la machine et de la distribution) et des fonctions d'aimantation. A géométrie de machine et distribution fixées, c'est donc principalement l'amplitude de la magnétisation qui va conditionner la valeur de $\widehat{(\epsilon_0^c)}_1$.

Une fois l'amplitude de $\widehat{(\epsilon_0^c)}_1$ définie, les amplitudes des autres harmoniques de force électromotrice peuvent être calculées. Si la conception vise à rendre la machine d'inductance M_k capable de produire un couple significatif et non fluctuant, sa force électromotrice élémentaire idéale doit être une sinusoïde pure. Par linéarité de la relation (IV.2), cette machine fictive aura effectivement une force électromotrice sinusoïdale si ses fonctions d'aimantation sont sinusoïdales. De plus, d'après les considérations du chapitre I (paragraphe I.3.2.2, page 38), l'amplitude de cette force électromotrice idéale doit prendre la forme suivante (cf. relation (I.39)) :

$$\epsilon_k(t) = \frac{\widehat{(\epsilon_0^c)}_1}{h_k}\cos(h_k\omega t)$$

Donc le rapport idéal entre l'amplitude du fondamental de la fem élémentaire de la machine d'inductance M_k ($\widehat{(\epsilon_0^c)}_{h_k}$) et l'amplitude du fondamental de la fem élémentaire de la machine principale ($\widehat{(\epsilon_0^c)}_1$) est :

$$\frac{\widehat{(\epsilon_0^c)}_{h_k}}{\widehat{(\epsilon_0^c)}_1} = \frac{1}{h_k}$$

En injectant cette relation dans l'équation (IV.2), il vient :

$$\frac{1}{h_k} = \frac{\widehat{(G_r^c)}_{h_k}\widehat{(f_{ar}^c)}_{h_k} + \widehat{(G_t^c)}_{h_k}\widehat{(f_{at}^s)}_{h_k}}{\widehat{(G_r^c)}_1\widehat{(f_{ar}^c)}_1 + \widehat{(G_t^c)}_1\widehat{(f_{at}^s)}_1}$$

En somme, les objectifs d'obtention d'une force électromotrice sinusoïdale pour la machine d'inductance M_k se traduisent de la façon suivante sur les coefficients de *Fourier* des fonctions d'aimantation :

$$\begin{cases} h_k\left(\widehat{(G_r^c)}_{h_k}\widehat{(f_{ar}^c)}_{h_k} + \widehat{(G_t^c)}_{h_k}\widehat{(f_{at}^s)}_{h_k}\right) = \widehat{(G_r^c)}_1\widehat{(f_{ar}^c)}_1 + \widehat{(G_t^c)}_1\widehat{(f_{at}^s)}_1 \\ \widehat{(f_{ar}^c)}_h = \widehat{(f_{at}^s)}_h = 0 \text{ pour } h \in F^N(M_k)\backslash\{h_k\} \end{cases} \tag{IV.3}$$

Evidemment, si la conception vise à rendre la machine incapable de produire un couple, ce sont tous les harmoniques non filtrés de sa fonction d'aimantation qu'il faut annuler.

L'équation (IV.3) montre que, dans le cadre d'une couche d'aimants non radiaux, il est difficile de définir une unique fonction d'aimantation fictive idéale. En effet, dans une telle situation, pour l'objectif sur l'harmonique de rang h_k, le système est à deux inconnus ($\widehat{(f_{ar}^c)}_{h_k}$

et $\widehat{(f_{at}^s)}_{h_k}$) pour une équation. Par contre, dans le cadre d'une couche d'aimants radiaux, la fonction d'aimantation idéale d'une machine fictive est unique. Cette différence fondamentale suggère de traiter de manière différente ces deux problèmes.

IV.2.2 Optimisation pour une couche d'aimants radiaux

Cette sous-partie s'intéresse exclusivement à l'optimisation des couches d'aimants à magnétisation radiale. Ceci signifie que seule la fonction d'aimantation radiale est non nulle. Tout d'abord, la méthode de construction des fonctions d'aimantation radiale fictives idéales est explicitée. A ces fonctions d'aimantation fictive idéales correspond une fonction d'aimantation idéale continue. Le problème d'optimisation consiste à rechercher une couche réelle d'aimants approchant au mieux cette fonction d'aimantation idéale. La méthode proposée consiste à moduler la fonction d'aimantation idéale pour identifier des paramètres d'aimants de taille différente mais de magnétisation égale. Cette méthode prospective est illustrée à l'aide de l'exemple de la machine pentaphasée *M5-POD* à bobinage fractionnaire. Les résultats sont analysés et la faisabilité de la solution proposée est discutée.

IV.2.2.1 Définition de la fonction d'aimantation idéale

Si les aimants sont radiaux, alors la fonction d'aimantation tangentielle est nulle. Mathématiquement, ceci se traduit comme suit :

$$\widehat{(f_{at}^s)}_h = 0$$

Dans ce cas, l'équation (IV.3) explicitant l'objectif pour la fonction d'aimantation de la machine fictive d'inductance M_k se simplifie. Il vient :

$$\begin{cases} \widehat{(f_{ar}^c)}_{h_k} = \widehat{(f_{ar}^c)}_1 \dfrac{\widehat{(G_r^c)}_1}{h_k \widehat{(G_r^c)}_{h_h}} \\ \widehat{(f_{ar}^c)}_h = \widehat{(f_{at}^s)}_h = 0 \text{ pour } h \in F^N(M_k) \backslash \{h_k\} \end{cases} \tag{IV.4}$$

La fonction d'aimantation réelle est la somme des fonctions d'aimantation fictive. Idéalement, ces fonctions sont continues. La figure IV.30 illustre ceci : elle représente les fonctions d'aimantation fictives et réelle pour la machine *M5-POD* à bobinage fractionnaire (cf. paragaraphe IV.1.3.2, page 148). Ces fonctions idéales ont été calculées dans le but d'obtenir pour les deux machines fictives diphasées une force électromotrice aussi sinusoïdale que possible avec un rapport d'amplitude de 1/3 (cf. Chapitre I). La relation (IV.4) est utilisée pour déterminer le rapport idéal entre les amplitudes des fonctions d'aimantation fictive $\widehat{(f_{ar}^c)}_3$ et $\widehat{(f_{ar}^c)}_1$: comme le rapport entre $\widehat{(G_r)}_3$ et $\widehat{(G_r)}_1$ vaut 0.79, le rapport idéal entre $\widehat{(f_{ar}^c)}_3$ et $\widehat{(f_{ar}^c)}_1$ est $1/(3 \times 0.79) \approx 0.42$. La magnétisation maximale des aimants est restée à 0.6 T.

Pratiquement, l'obtention de fonctions d'aimantation continues n'est pas possible. Il faut donc mettre au point des méthodes pour définir une couche d'aimants permettant d'approcher correctement la fonction d'aimantation réelle. La démarche retenue basée sur la modulation de la fonction d'aimantation idéale est détaillée dans le paragraphe suivant.

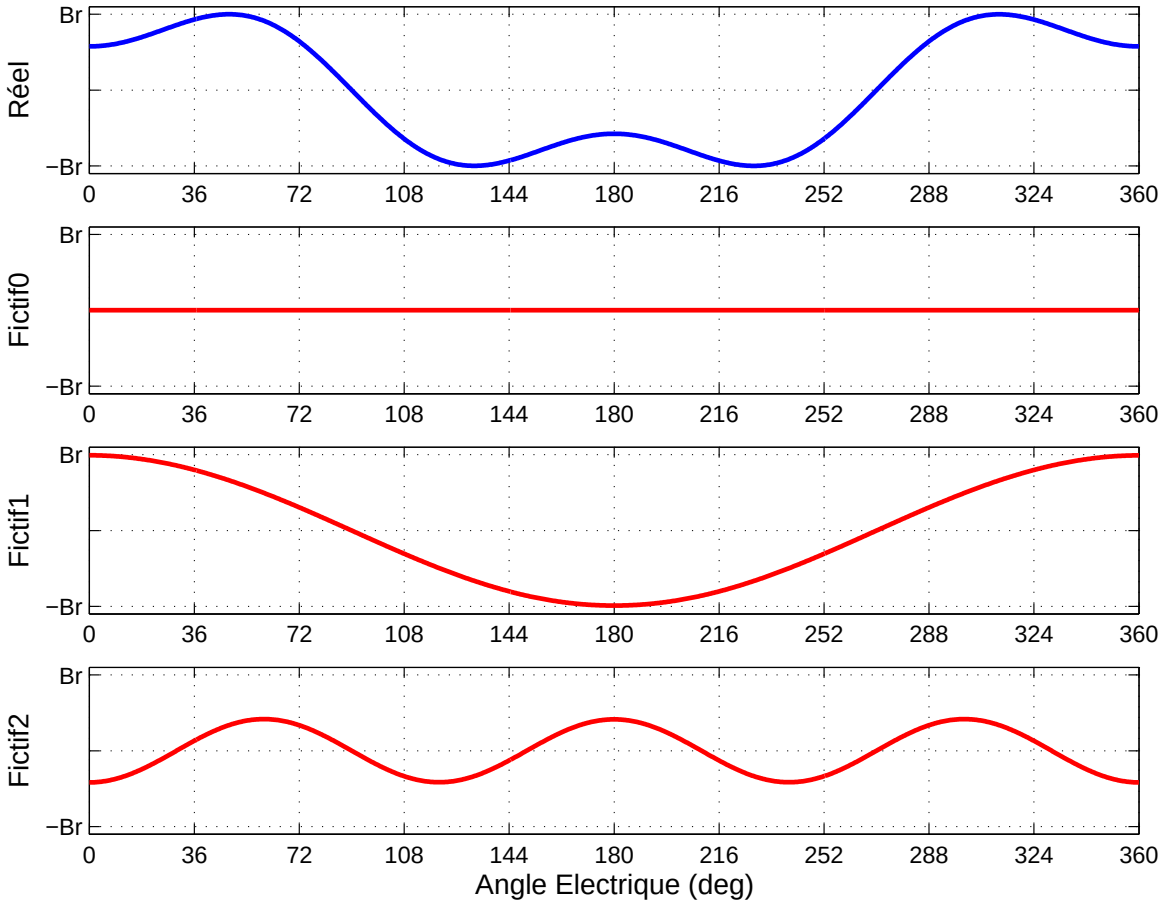


Figure IV.30 — Fonctions d'aimantation radiale fictives et réelle idéales pour la machine *M5-POD*

IV.2.2.2 Méthode de modulation de la fonction d'aimantation

Dans [24], une optimisation du contenu spectral de la fonction d'aimantation est réalisée en effectuant des trous dans la couche d'aimants : l'objectif est de réduire le couple de détente en concevant des rotors segmentés. La méthode présentée dans ce paragraphe s'inspire de ce travail.

L'objectif est de résoudre le problème en calculant un rotor segmenté solution, c'est-à-dire un rotor constitué d'aimants de taille différente mais de même valeur de magnétisation (afin de faciliter la réalisabilité de la solution). En d'autres termes, ce sont les différentes tailles des aimants qui vont conditionner le contenu spectral de la fonction d'aimantation. C'est ainsi que l'analogie avec le principe de commande des onduleurs de tension par modulation de largeur d'impulsion apparaît. Dans une certaine mesure, c'est une modulation de largeur d'aimants qui va être mise en oeuvre. Evidemment, si cette solution est envisagée, c'est parce que les gains $(\widehat{G_r})_h$ définissent un filtre passe-bas. Le principe de cette méthode est illustrée par la figure IV.31. Les différentes largeurs du signal de comparaison définissent les largeurs d'aimant. En pratique, l'identification des largeurs est faite en étudiant les intersections de la modulante (c'est-à-dire la fonction d'aimantation idéale normalisée) avec la porteuse triangulaire sur l'intervalle $[0, \pi_{elec}/2]$. La modulation choisie est à trois niveaux plutôt qu'à deux

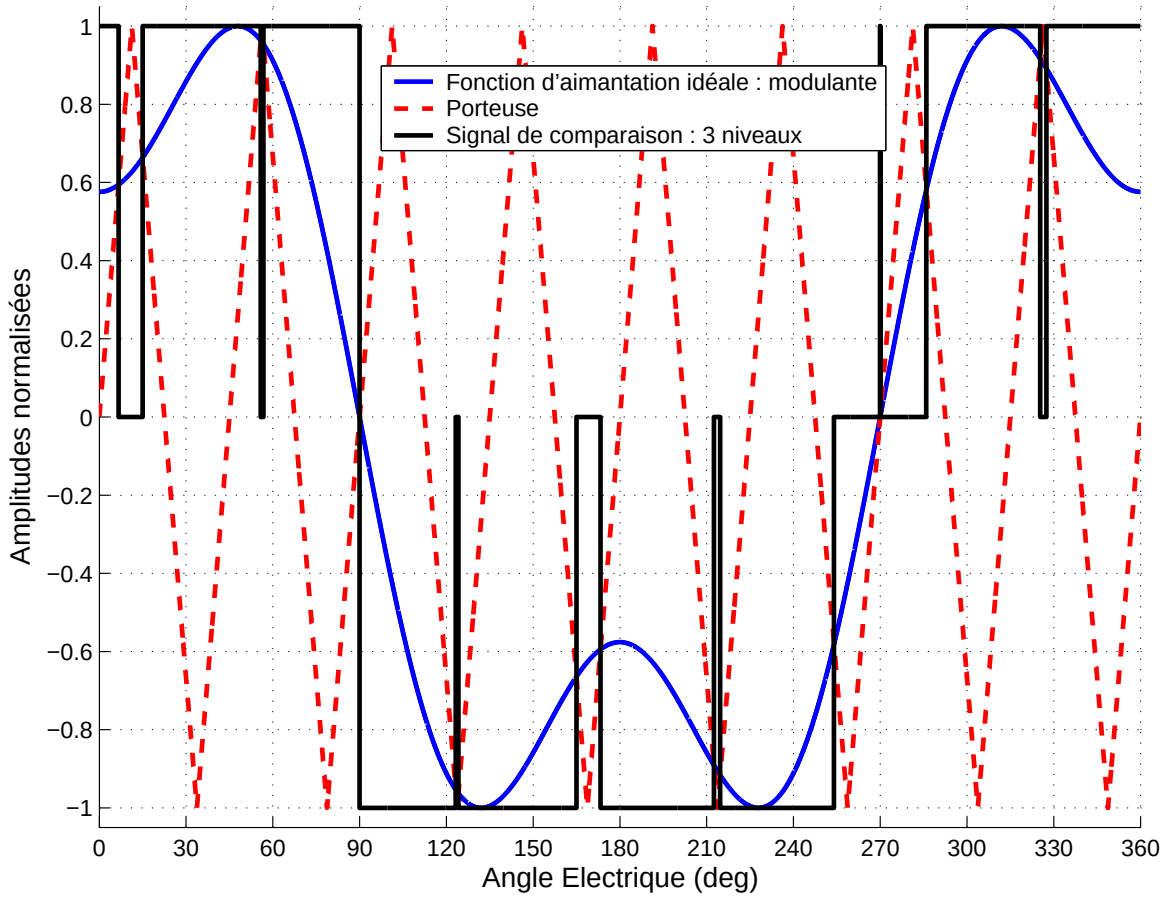
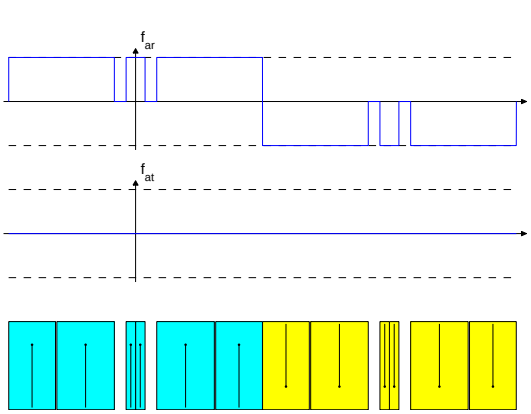


Figure IV.31 — Principe de la méthode de modulation de la fonction idéale d'aimantation

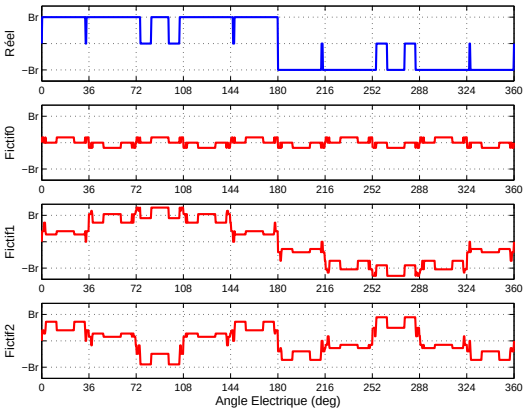
niveaux pour ne pas devoir insérer dans un pôle Nord des petits aimants Sud[4]. Par ailleurs, il est évident que le choix d'une fréquence trop élevée va conduire à une solution certes performante mais difficilement réalisable : certains aimants auront des tailles beaucoup trop faibles (d'où des problèmes de collage, de stabilité, d'usinage...).

Appliquée à la machine *M5-POD*, avec une période de porteuse $\pi_{elec}/4$, la solution obtenue correspond à la couche d'aimants représentée sur la figure IV.32-a. La couche d'aimants obtenus présente deux lacunes de largeur 8.5 et 1 degrés électriques. La faisabilité d'une telle solution doit être étudiée. La figure IV.32-b montre les fonctions d'aimantation fictive correspondant à cette solution : les paires de pôles sont bien apparentes mais les fonctions apparaissent heurtées, ce qui laisse augurer d'un contenu harmonique riche. La figure IV.33-a confirme ce résultat décevant. Par rapport à la situation initiale, les formes des fem élémentaires fictives ont assez peu évolué : seule l'amplitude de la fem secondaire est significativement remontée mais sans modification de forme. La figure IV.33-b compare les décompositions spectrales des forces électromotrices initiale et correspondant au rotor modulé : la répartition harmonique est assez peu modifiée si ce n'est que la machine secondaire a gagné en amplitude par rapport à la machine principale. Ce résultat aurait été intéressant si l'harmonique de rang 7 n'avait pas été relevé. En outre, la valeur maximale de la force électromotrice a baissé : ceci résulte d'une masse d'aimants moindre sur la machine modifiée.

[4]Ce choix est bien entendu tout à fait discutable. L'objectif de cette présentation est surtout de présenter le principe plutôt que rechercher la meilleure méthode de modulation.

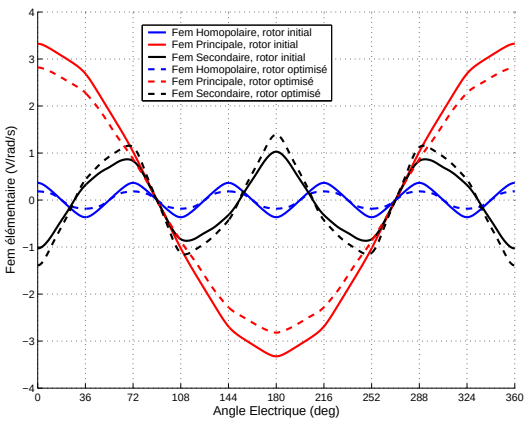


(a) Couche d'aimants calculée par la méthode de modulation de la fonction idéale d'aimantation

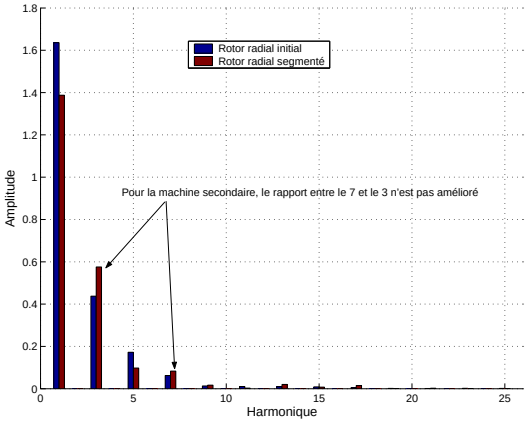


(b) Fontions d'aimantations réelles et fictives correspondant à la couche d'aimants de largeur variable

Figure IV.32 — Résultat obtenu par la méthode de modulation de la fonction d'aimantation pour la machine *M5-POD* (porteuse de période $\pi_{elec}/4$)



(a) Comparaison des forces électromotrices élémentaires fictives pour la machine *M5-POD* : rotor initial et rotor à couche d'aimants calculée par modulation



(b) Décomposition harmonique des fem élémentaires correspondantes

Figure IV.33 — Analyse comparée des forces électromotrices de la machine *M5-POD* avec le rotor radial initial et le rotor radial segmenté calculé par modulation

Au final, même si elle ne répond pas tout à fait aux attentes pour l'exemple traité, cette méthode d'optimisation basée sur la modulation de la fontion d'aimantation offre des perspectives intéressantes. En fonction des dimensions de la couche d'aimants et du nombre de pôles, en fonction de la technique de modulation choisie et des caractéristiques du filtre G_r, il est probable que des solutions performantes et techniquement réalisables apparaissent.

IV.2.3 Optimisation pour une couche d'aimants parallèles

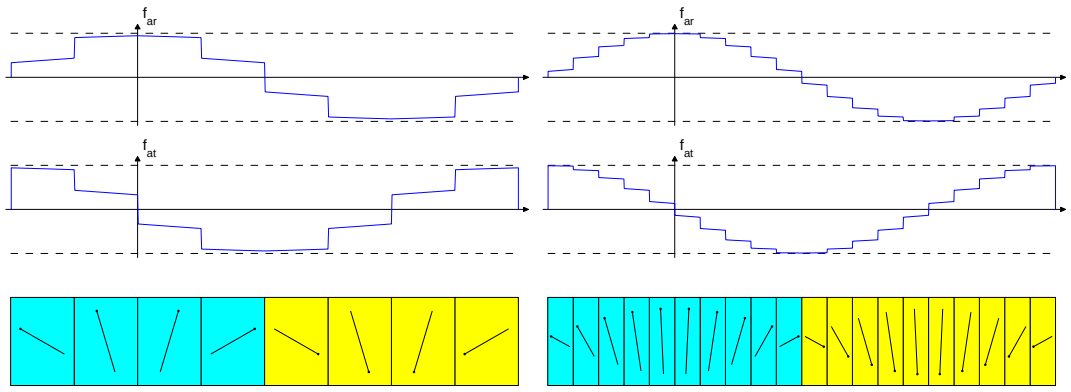
Cette sous-section propose une procédure d'optimisation conditionnée pour obtenir un rotor constitué d'aimants à magnétisation parallèle. Cette procédure assure la même valeur de magnétisation pour tous les aimants. Pour un aimant donné, les degrés de liberté sont l'orientation de la magnétisation et la largeur. Dans un premier temps, la manière de définir les objectifs multimachine est expliquée. Puis l'exemple de la machine *M5-POD* est repris : la procédure est appliquée pour calculer un rotor favorisant les deux machines fictives diphasées. Enfin, pour cet exemple, des simulations de l'ensemble convertisseur-machine sont réalisées afin de cerner plus précisément ce que cette démarche peut apporter.

IV.2.3.1 Méthode de recherche de la fonction d'aimantation

Basée sur l'examen de la relation (IV.3), la conclusion du paragraphe IV.2.1.2 (page 161) souligne la difficulté de définir des fonctions d'aimantation fictive radiale et tangentielle idéales dans le cadre d'une couche d'aimants à magnétisation parallèle. Cependant, une certitude apparaît : pour répondre correctement aux objectifs définis dans la relation (IV.3), les fonctions d'aimantation radiale et tangentielle de la machine fictive d'inductance M_k doivent être sinusoïdales à la fréquence h_k. C'est au niveau du rapport d'amplitude de ces deux fonctions d'aimantation radiale et tangentielle qu'il existe un degré de liberté. Et c'est l'existence de ce degré de liberté qui empêche de définir des profils idéaux uniques. Il n'est donc pas possible de procéder par modulation d'un signal idéal comme pour l'optimisation de la couche d'aimants radiaux.

Si seule la machine principale est ciblée, une solution au problème est connue : il s'agit de l'anneau de *Halbach*. L'analyse de cette solution apporte une information très intéressante. Les fonctions d'aimantation radiale et tangentielle correspondantes sont sinusoïdales et de même amplitude. La figure IV.34 illustre ceci : elle présente les fonctions d'aimantation radiale et tangentielle obtenues pour un anneau de *Halbach* à 4 aimants par pôle (partie -a) et pour un anneau de *Halbach* à 10 aimants par pôle (partie -b). Les fonctions d'aimantation sont de plus en plus sinusoïdales et présentent la même amplitude. En raison du choix particulier des différentes valeurs d'orientation de magnétisation, les fonctions radiales et tangentielles sont en quadrature, ce qui est exceptionnel. A la lumière du schéma de la figure IV.29, à géométrie de machine fixée, l'anneau de *Halbach* apparaît comme la meilleure solution pour obtenir une force électromotrice de phase sinusoïdale de grande amplitude (même si, en pratique, ce résultat se vérifie surtout pour de grandes épaisseurs d'aimants [30]). L'anneau de *Halbach* exploite au maximum les parties radiales (amplifiées par le gain G_r) et tangentielles (amplifiées par le gain G_t) de l'aimantation pour constituer l'induction rotorique.

L'idée de construire les fonctions d'aimantation fictives à l'aide d'anneaux de *Halbach* est donc tentante. Mais elle aboutirait à des solutions beaucoup trop complexes. Par exemple, dans le cadre d'une machine à 5 phases, pour obtenir une force électromotrice sinusoïdale sur les deux machines fictives diphasées, il faudrait calculer un anneau sur 1 paires de pôles puis



(a) Anneau de *Halbach* à 4 aimants par pôle (b) Anneau de *Halbach* à 10 aimants par pôle

Figure IV.34 — Comparaison des fonctions d'aimantation résultant d'un anneau de *Halbach* pour une machine à 7 pôles

un anneau sur 3 paires de pôles. Ensuite, il faudrait sommer les anneaux pour obtenir les aimants constituant le rotor. Mais cette méthode exigerait de définir un très grand nombre d'aimants par pôles. De plus, il est possible de montrer que ces aimants ne peuvent avoir la même magnétisation et ne sont pas généralement de la même taille.

Finalement, comme il n'est pas possible de définir des fonctions d'aimantation idéales, la démarche retenue consiste à définir les objectifs sur des harmoniques particuliers de la force électromotrice élémentaire. A géométrie de la machine et bobinage fixés, la force électromotrice élémentaire dépend des caractéristiques des aimants du rotor (largeurs d'aimants, orientations des magnétisations). Cet ensemble de caractéristiques constitue la variable d'optimisation notée x_a. Le problème visant à rendre sinusoïdales les forces électromotrices des machines fictives avec des rapports d'amplitudes fixés ne se formule pas de manière générale. Pour faciliter la procédure d'optimisation et définir des objectifs cohérents, la définition de la fonction objectif doit être adaptée au contexte. Par exemple, il est inutile de cibler l'annulation d'un harmonique de force électromotrice si cet harmonique est naturellement filtré par la géométrie et le bobinage de la machine.

La première étape consiste à examiner les valeurs de gains $\widehat{(G_r)}_h$ et $\widehat{(G_t)}_h$ pour déterminer les harmoniques de fonctions d'aimantation des machines fictives ciblées qui vont être naturellement filtrés. Pour ces harmoniques, il est inutile de spécifier des objectifs de minimisation (la géométrie de la machine de la machine et le bobinage les atténue naturellement). Les autres harmoniques devront être pris en compte par la fonction objectif.

La seconde étape consiste à définir les contraintes. Deux grands types de contrainte sont distingués :

- la contrainte de performance de la solution,
- les contraintes de réalisabilité de la solution.

Alors que la fonction objectif définit la forme de la force électromotrice, le rôle de la contrainte de performance est d'assurer une amplitude suffisante pour celle-ci vis à vis de critères de performances pour la machine (majoration des pertes Joule, minoration du couple électromagnétique, ...). Les contrainte de réalisabilité interdisent l'étude de solutions aberrantes (par exemple, deux aimants qui se chevauchent...). Parfois, certaines contraintes de

réalisabilité peuvent être automatiquement respectées par la manière de construire la variable d'optimisation.

La troisième étape est la résolution proprement dite du problème. Elle suppose le choix d'une méthode d'optimisation. Pratiquement, elle nécessite aussi de spécifier clairement la variable d'optimisation x_a : il faut bien préciser quels sont les degrés de liberté dans la couche d'aimants. Pour simplifier la procédure, il est parfois intéressant de préciser à l'avance le nombre d'aimants recherché dans la couche d'aimants solution.

Le paragraphe suivant met en oeuvre cette procédure en reprenant l'exemple de la machine *M5-POD*.

IV.2.3.2 Exemple de mise en oeuvre

Pour cette machine pentaphasée (cf. tableau IV.3), l'objectif est rappelé : il s'agit d'obtenir pour chacune des deux machines fictives diphasées une force électromotrice sinusoïdale avec un rapport d'amplitude de 1/3 entre ces deux forces électromotrices. Pour définir une fonction objectif, il faut examiner les valeurs des gains harmoniques représentant l'effet de la géométrie et du bobinage sur les fonctions d'aimantation pour constituer la force électromotrice élémentaire (cf. relation (IV.2)). La figure IV.35 donne les valeurs de ces coefficients. La lecture de ces valeurs permet de choisir les harmoniques de forces électromotrices à intégrer dans la fonction objectif. Tout d'abord, comme la force électromotrice de la machine homopolaire est libre, il est inutile de tenir compte des harmoniques de rang multiple de 5. Seuls les harmoniques des machines principale et secondaire sont intéressants. Les coefficients de filtrage pour la machine principale sont assez favorables à l'obtention d'une fem sinusoïdale. La perturbation principale viendra de l'harmonique 9 : la fonction objectif va donc chercher à annuler l'harmonique 9. Pour la machine secondaire, la situation est plus difficile : l'amplification de l'harmonique 7 par rapport à celle de l'harmonique 3 est significative. La fonction objectif doit donc annuler cet harmonique 7. De plus, comme l'amplification de l'harmonique 13 est assez forte (toujours relativement à celle de l'harmonique 3), l'annulation de cet harmonique dans la fem va aussi être recherchée. Evidemment, d'autres annulations d'harmoniques pourraient être visées. Mais, pour faciliter la convergence de la procédure d'optimisation, il est préférable de se focaliser sur les objectifs essentiels. C'est pour cela que l'harmonique de rang 11 n'est pas pris en compte : son poids vis à vis de l'harmonique de rang 1 est plus faible que celui de l'harmonique de rang 13 vis à vis de l'harmonique de rang 7. Mathématiquement, l'objectif va s'écrire :

$$\min_{x_a} \left\| \frac{1}{\widehat{(e_0^c)}_1} \begin{pmatrix} \widehat{(e_0^c)}_3 \\ \widehat{(e_0^c)}_7 \\ \widehat{(e_0^c)}_9 \\ \widehat{(e_0^c)}_{13} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \tag{IV.5}$$

Pour cet exemple (traité dans [46]), la contrainte de performance choisie concerne la densité de couple de la machine recherchée. A couple moyen $\langle T \rangle$ donné, en commande multimachine à couple maximal (déphasage nul entre force électromotrie et courant, cf. section I.3.2.1, page 36), il faut majorer les pertes Joule par un majorant noté P_{j0} de telle sorte à garantir une solution dont les pertes Joule correspondantes en commande multimachine

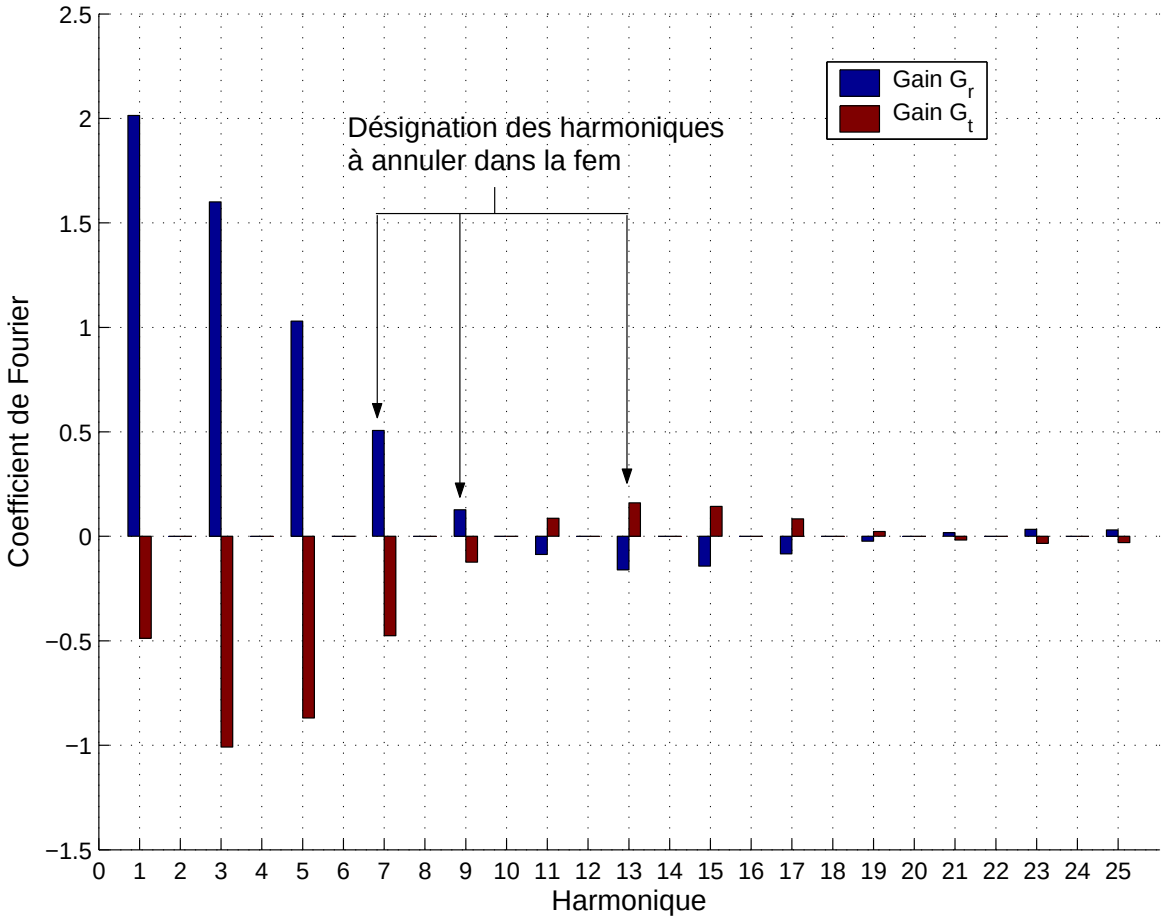


Figure IV.35 — Gains $\widehat{(G_r^c)}_h$ et $\widehat{(G_t^c)}_h$ pour la machine *M5-POD* avec le bobinage fractionnaire

n'excéderont pas P_{j0}. La densité de couple sera ainsi améliorée. Cette contrainte s'écrit :

$$\widehat{(e_0^c)}_1^2 + \widehat{(e_0^c)}_3^2 - \left(\langle T \rangle \frac{R_s}{5P_{j0}}\right)^2 \geq 0$$

La résistance statorique de phase R_s intervient dans cette contrainte. Sur l'exemple considéré, les pertes Joule P_{j0} correspondent aux pertes Joule de la machine *M5-POD* en commande multimachine pour atteindre le couple moyen nomimal de 60 Nm.

Les contraintes de réalisabilité dépendent du contenu de la variable d'optimisation x_a. Ici, afin d'obtenir une couche d'aimants d'une complexité acceptable, il est décidé de se limiter à deux aimants par demi-pôle, de remplir totalement le pas polaire et d'avoir la même valeur de magnétisation pour chacun des aimants. Dans un tel contexte, la procédure d'optimisation revient à optimiser les caractéristiques libres des deux aimants du demi-pôle, à savoir deux largeurs d'aimant et deux orientations de magnétisation. Concernant les largeurs d'aimant, il est choisi de les imposer au préalable à 45 degrés électriques : cette taille correspond à la position de l'extremum local sur $[0, \pi_{elec}/2]$ du signal idéal de force électromotrice composé d'un harmonique 1 et d'un harmonique 3 (l'allure de ce signal est donc semblable au signal idéal de fontion d'aimantation de la figure IV.30 ; l'extremum évoqué à 45 degrés électriques est apparent). Les deux degrés de liberté restant sont les orientations des magnétisations

notée $\alpha_{a,1}$ et $\alpha_{a,2}$. La variable d'optimisation s'écrit :

$$x_a = \left[\begin{array}{cc} \alpha_{a,1} & \alpha_{a,2} \end{array} \right]$$

Comme ces variables sont des angles, il n'est théoriquement pas nécessaire de les borner. Pratiquement, pour faciliter la convergence, des bornes sont définies :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_{a,1} \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha_{a,2} \leq 0 \end{array} \right.$$

Préciser ces bornes revient à préciser lequel des quatre demi-pôles est désigné par les variables $\alpha_{a,1}$ et $\alpha_{a,2}$.

Variables d'optimisation, objectifs et contraintes étant définis, il reste à choisir une méthode de calcul pour résoudre le problème. Etant donné la forme donnée à la fonction objectif et la nature des contraintes, une minimisation quadratique avec contrainte non linéaire est adaptée. Un algorithme de ce type est disponible sous *Matlab* (il s'intitule *"lsqnonlin"*). Son utilisation permet de résoudre le problème avec succès. Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{a,1} \approx 12 \text{ deg} \\ \alpha_{a,1} \approx -27 \text{ deg} \end{array} \right.$$

Concernant la contrainte, cette solution conduit à des pertes Joule 8 % sous la valeur maximale admissible P_{j0}. Ceci signifie qu'équipée de ce rotor optimisé, la machine *M5-POD* consommera moins de courant pour fournir le couple nominal : la densité de couple est donc améliorée.

Le rotor optimal avec les fonctions d'aimantations radiale et tangentielle correspondantes est représenté sur la figure IV.36. La réalisabilité de la solution proposée doit être étudiée tout particulièrement en ce qui concerne les éventuels effets de démagnétisation entre les différents aimants. Les allures des fonctions d'aimantations fictives radiales et tangentielles sont repectivement disponibles sur les figures IV.37-a et IV.37-b. Sur ces courbes, le nombre de paires de pôles de chaque machine fictive apparaît clairement. En particulier, la machine homopolaire possède des fonctions d'aimantation significative : il faut rappeler que ces fonctions se sont postionnées librement car elles n'étaient pas contraintes. Les fonctions d'aimantation tangentielle principales et secondaires ont des amplitudes assez élevées et proches l'une de l'autre. Ceci signifie que la solution exploite très bien la contribution des composantes parallèles de la magnétisation sur la force électromotrice élémentaire (modélisée par le gain G_t sur la figure IV.29). En comparaison, la démarche d'optimisation pour une couche radiale ne peut exploiter cette caractéristique (puisque la magnétisation tangentielle est forcément nulle).

La figure IV.38 compare les forces électromotrices fictives résultat du rotor initial (un unique aimant par pôle de magnétisation radiale et occupant tout le pas polaire) avec celles résultant du rotor optimisé. Concernant la force électromotrice principale, les évolutions sont quasiment négligeables : formes et amplitudes sont très proches (même si la fem principale issue du rotor optimisé est légèrement plus élevée, 2 %). Par contre, la force électromotrice secondaire est significativement améliorée tant en amplitude (20 %) qu'en réduction de perturbation : en particulier, le rapport entre l'harmonique de rang 7 et l'harmonique de rang 3 passe de 14 % à 8 %. Au final, les forces électromotrices fictives sont plus sinusoïdales et d'amplitudes plus élevées. Avec la stratégie de commande multimachine, il en résulte une

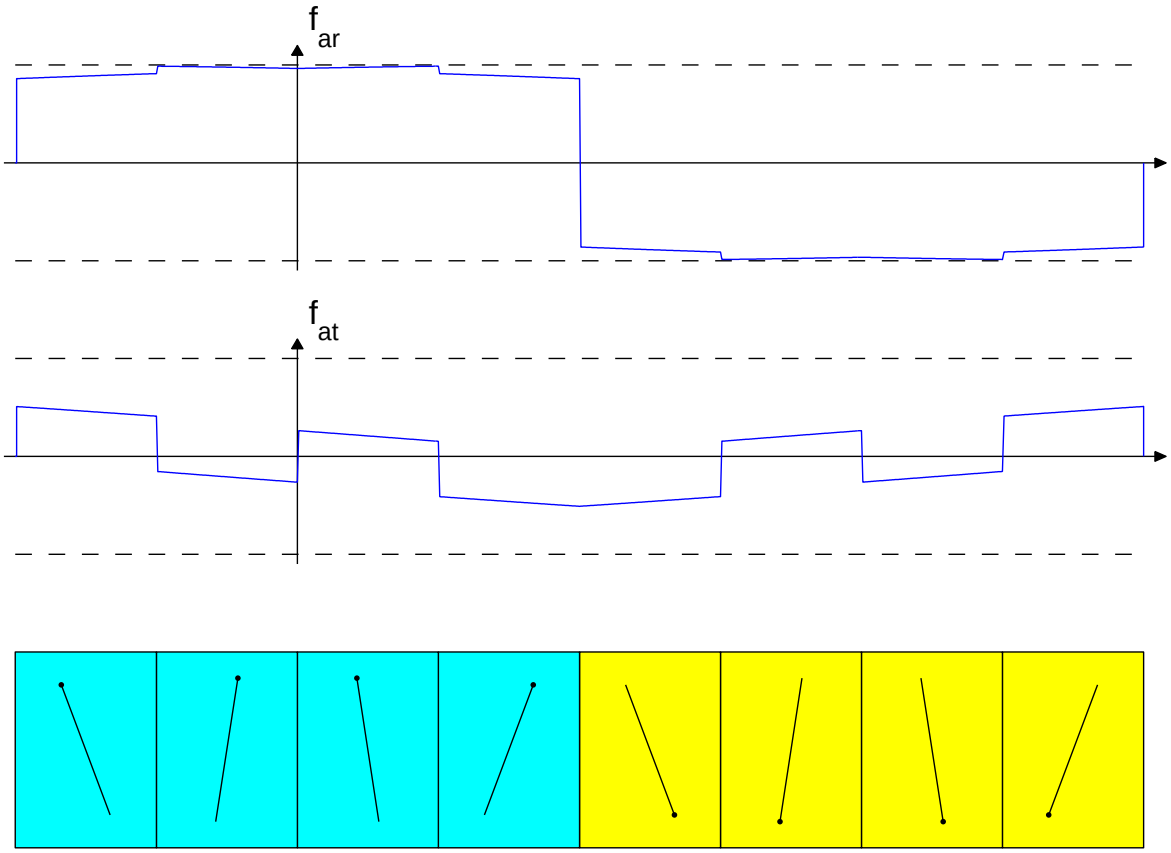
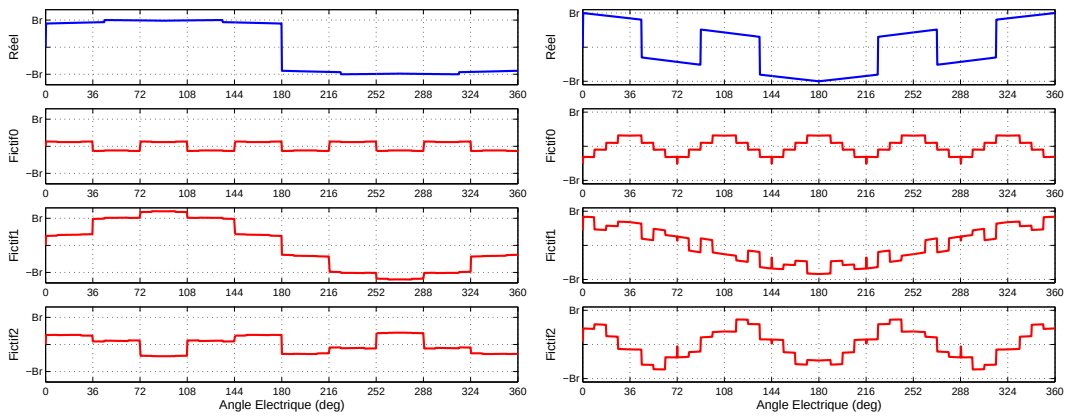


Figure IV.36 — Couche d'aimants à magnétisation parallèle solution



(a) Fonctions d'aimantation radiales fictives avec la couche d'aimants optimisée

(b) Fonctions d'aimantation tangentielles fictives avec la couche d'aimants optimisée

Figure IV.37 — Fonctions d'aimantation fictive avec la couche d'aimants à magnétisation parallèle optimale

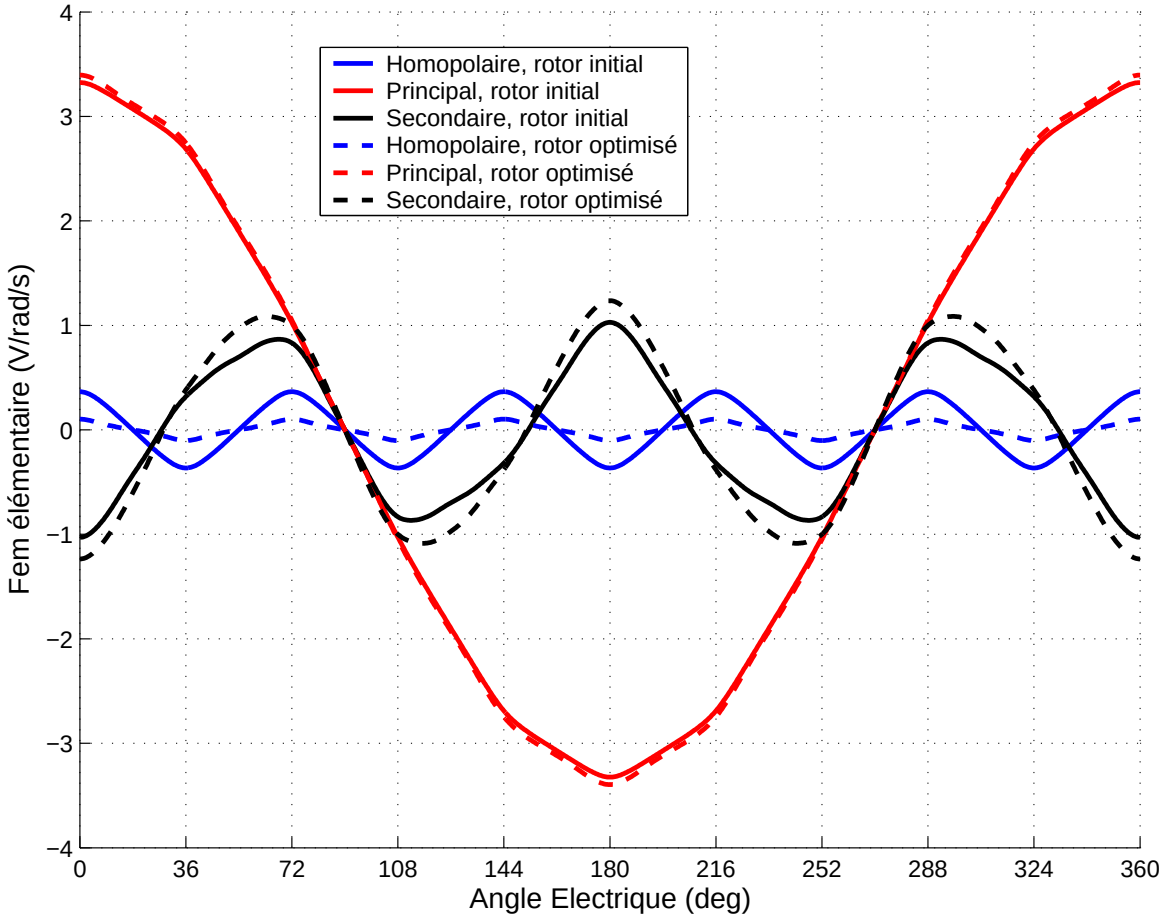


Figure IV.38 — Machine *M5-POD* : comparaison des forces électromotrices élémentaires fictives obtenues avec le rotor initial et le rotor optimisé (calcul analytique *ANA-N*)

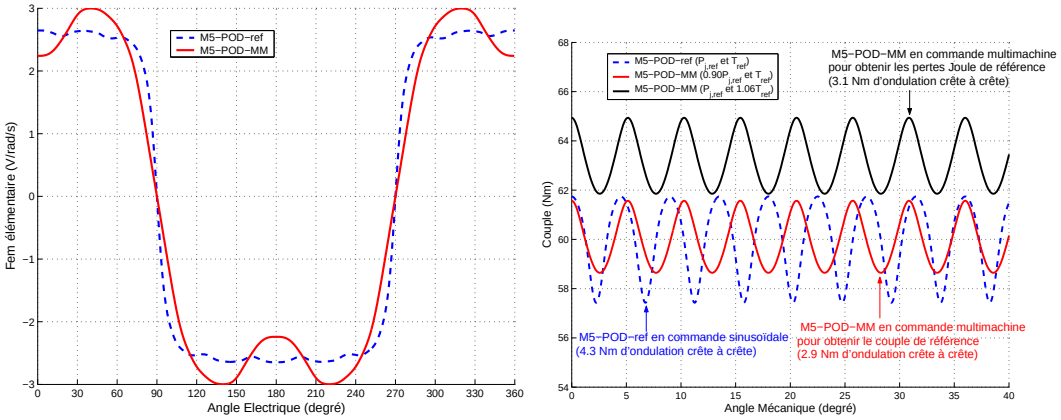
meilleure densité de couple et une commande facilitée. D'une certaine manière, la masse d'aimants est mieux exploitée : les paramètres des aimants sont optimisés pour réduire les harmoniques qui viennent écrêter les forces électromotrices fictives.

IV.2.3.3 Simulation de la solution à couche d'aimants optimisée

Comme pour l'exemple de l'optimisation du bobinage de la machine *M5-POD*, les améliorations sont illustrées par une comparaison avec la machine de référence *M5-POD-ref* à bobinage diamétral et rotor conventionnel (cf. paragraphe IV.1.3.3). Dans la suite, la machine *M5-POD*, à bobinage fractionnaire et à couche d'aimants optimisée, est appelée *M5-POD-MM*.

La figure IV.39-a compare les allures des fem élémentaires des deux machines. L'augmentation recherchée du poids de l'harmonique de rang 3 pour la machine *M5-POD-MM* est observable. La figure IV.39-b illustre les améliorations apportées par la machine *M5-POD-MM* alimentée en multimachine concernant la qualité du couple électromagnétique. Par rapport à la machine *M5-POD-ref* en alimentation sinusoïdale,

- pour la même valeur de couple électromagnétique ($T_{ref} = 60\,Nm$), la machine *M5-POD-MM* réduit les pertes Joule de 10% et diminue l'amplitude d'ondulation crête à



(a) Fem élémentaires

(b) Couples électromagnétiques

Figure IV.39 — Comparaison des fem élémentaires et des couples électromagnétiques des machines *M5-POD-ref* et *M5-POD*

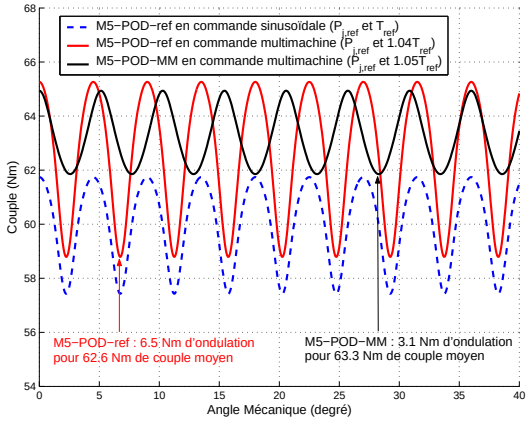
crête du couple de 33% (de 4.3 Nm à 2.9 Nm) ;

- pour la même valeur de pertes Joule ($P_{j,ref}$), la machine *M5-POD-MM* augmente la valeur moyenne du couple électromagnétique de 5.5% (63.3 Nm) et diminue l'amplitude d'ondulation crête à crête du couple de 28% (de 4.3 Nm à 3.1 Nm).

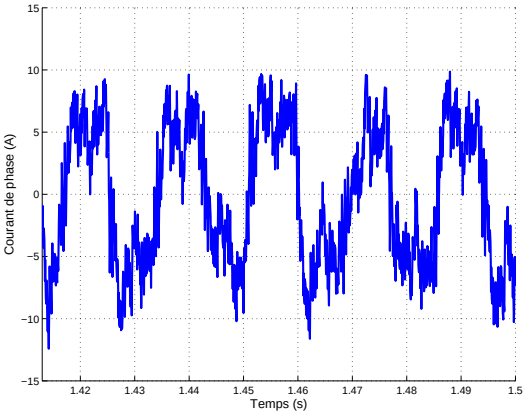
Il faut noter que, si la machine *M5-POD-ref* est commandée en multimachine avec les pertes Joule de référence, alors le couple moyen augmente de 4% (de 60 Nm à 62.6 Nm) mais l'amplitude d'ondulation crête à crête du couple est accentuée de 51% (de 4.3 Nm à 6.5 Nm). Ces couples pulsatoires supplémentaires résultent d'un contenu harmonique de fem inadapté à la commande multimachine, ce qui n'est pas le cas de la machine *M5-POD-MM* qui, pour le même niveau de pertes Joule, fournira un couple plus élevé (63.3 Nm contre 62.6 Nm) et des oscillations plus faibles (3.1 Nm contre 6.5 Nm). La figure IV.40-a illutre ce résultat.

La figure IV.40-b donne le courant de phase pour la machine *M5-POD-MM* obtenu par simulation de l'ensemble convertisseur-machine. Les paramètres de l'onduleur simulé sont les mêmes que ceux choisis dans le paragraphe IV.1.3.3. Comme la stratégie d'alimentation est multimachine, le courant de phase n'est pas sinusoïdale. Cette stratégie vise à obtenir des courants sinusoïdaux pour les deux machines fictives. Comme le montrent les figures IV.41-a et IV.41-b, qui donnent les courants de *Concordia* pour les machines principale et secondaire, cet objectif est atteint pour la machine principale. Pour la machine secondaire, le courant reste perturbé mais l'allure sinusoïdale est apparente. Avec cette alimentation, les pertes Joule sont réduites de 38% par rapport à celle évaluée lors de la simulation de l'onduleur alimentant la machine *M5-POD-ref*. Par rapport à la machine *M5-POD* avec un rotor conventionnel en alimentation sinusoïdale, la machine *M5-POD-MM* avec le rotor optimisé conduit à une réduction des pertes Joule de 4%. Ce dernier argument isole les améliorations propres à la couche d'aimants optimisée et permet de juger du bien-fondé de cette démarche d'optimisation.

Cette partie consacrée à l'optimisation de la couche d'aimants a conduit à mettre au point plusieurs procédures d'optimisation. Lorsque les aimants de la couche recherchée sont à magnétisation radiale, pour une géométrie de machine et un bobinage donnés, une unique

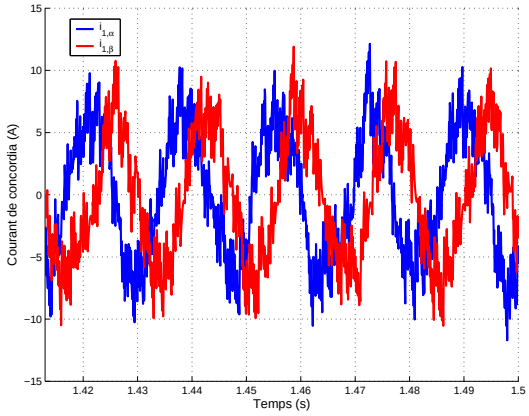


(a) Illustration de l'adaptation de la machine *M5-POD-MM* à la commande multimachine en comparaison à la machine conventionnelle *M5-POD-ref*

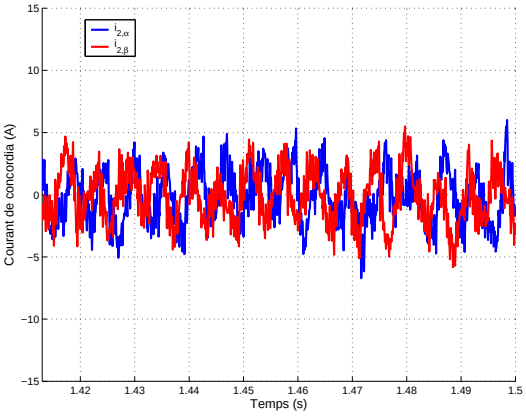


(b) Courant de phase pour la machine *M5-POD-MM* obtenue par simulation de l'onduleur

Figure IV.40 — Qualité du couple fournie par la machine *M5-POD-MM* et allure de son courant de phase en alimentation par onduleur MLI



(a) Machine Prinicpale



(b) Machine Secondaire

Figure IV.41 — Machine *M5-POD-MM* ($60\,Nm@500\,tr/min$) : courants de *Concordia* pour les machines fictives diphasées

fonction d'aimantation idéale existe. La méthode d'optimisation proposée, basée sur la modulation de la fonction d'aimantation, conduit à des résultats mitigés mais la couche d'aimants solution semble réalisable. Cette méthode gagnerait à être approfondie : il faut travailler sur le type de modulation et sur les paramètres du gain G_r. Concernant l'optimisation pour une couche d'aimants à magnétisation parallèle, la procédure proposée est plus conventionnelle : elle exige une définition claire (et experte) des objectifs, des contraintes et des variables d'optimisation. Sur l'exemple traité, cette méthode s'est montrée intéressante : la masse d'aimants est mieux exploitée (meilleure densité de couple) que pour un rotor radial totalement occupé et les forces électromotrices fictives sont plus sinusoïdales. Mais la réalisabilité de la solution proposée reste à étudier : la stabilité magnétique de la couche d'aimants n'est pas garantie.

En proposant des démarches d'optimisation ciblée sur les grandeurs de machines fictives, ce chapitre concrétise l'objectif initial du mémoire. La construction des bobnages fictifs et l'introduction de la TFD ont permis de simplifier grandement la définition des objectifs sur le bobinage, la procédure d'optimisation et la critique des solutions proposées. Pour atteindre les objectifs multimachines avec des bobinages conventionnels, les configurations fractionaires apparaissent comme les solutions permettant de réaliser le compromis entre formes des distributions fictives et énergies des fonctions de bobinage fictif. La procédure d'optimisation du bobinage développée permet de sélectionner pour un nombre d'encoches, un nombre de pôles et un nombre de phases fixés les meilleures configurations de bobinage pour des objectifs multimachines donnés. Cette procédure pourrait être améliorée : actuellement, elle étudie des configurations où le nombre d'encoches, le nombre de pôles et le nombre de phases sont pré-définis. Il est certains que laisser le nombre de phases ou le nombre d'encoches libre permettrait de trouver des bobinages plus performants. En ce qui concerne la couche d'aimants, la démarche d'optimisation sur des blocs à aimantation radiale offre des perspectives intéressantes mais pas aussi convaincantes que celle basée sur la recherche de blocs à aimantation parallèle. Néanmoins la faisabilité des solutions proposées doit être examinée tout particulièrement concernant la stabilité magnétique de la couche d'aimants. Au final, d'après les calculs analytiques et les simulations de l'ensemble convertisseur-machine, la machine *M5-POD*, bobinée selon la configuration fractionnaire calculée en multimachine et équipée du rotor à aimants parallèles optimisé, doit répondre correctement aux objectifs multimachines : les deux machines fictives contribueraient au couple total dans des proportions optimales et avec des pulsations très faibles. De plus, l'équivalence de leur constante de temps assurerait un niveau de courants parasites maîtrisé.

Conclusion

Conclusion

Consacré à la modélisation des machines polyphasées à pôles lisses, ce mémoire de thèse traite du problème complexe de l'adaptation d'une telle machine à une alimentation par onduleurs de tension MLI.

Un modèle électromagnétique de la machine a d'abord été développé dans le but de résoudre analytiquement les équations du champ magnétique. Ce modèle autorise la prise en compte de nombreuses configurations de bobinage. Cette caractéristique repose sur la représentation vectorielle des encoches qui est concrétisée par l'introduction des matrices de distributions de conducteurs et de fonctions de bobinage. Décrivant le motif de bobinage d'une phase, ces matrices contiennent la même information et permettent d'intégrer le champ de deux manières distinctes mais équivalentes. Au final, le modèle analytique fournit des ondes de forces électromotrices et des séries d'inductances mutuelles de phase avec une précision comparable à celle du logiciel de calcul numérique *DIFIMEDI*. Ces performances satisfaisantes résultent du fait que les machines à pôles lisses sont bien adaptées aux hypothèses que nécessite le calcul analytique. La réduction de temps de calcul obtenue permet d'explorer un grand nombre de machines polyphasées se différenciant par leur topologie (nombre d'encoches, nombre de pôles, nombre de phases), leurs dimensions (largeur d'aimant, entrefer, ...), leurs caractéristiques de couches d'aimants (aimantation radiale ou parallèle, lacune, ...) et leurs bobinages (entiers, à trous, fractionnaire, ...).

Ensuite, des fonctions de bobinage et des fonctions d'aimantations spécifiques à chaque machine fictive ont été définies. Ces deux grandeurs permettent d'appréhender les machines fictives au-delà de leurs simples schémas électriques équivalents : les bobinages et les rotors fictifs qu'elles modélisent sont des grandeurs signifiantes en terme de conception, ce qui facilite la définition d'objectifs de dimensionnement directement sur les machines fictives. Initialement construites par changement de base, les disributions fictives et les fonctions de bobinages fictives peuvent être directement utilisées dans les équations analytiques du flux : les forces électromotices et les inductances fictives sont ainsi retrouvées. Cette propriété est remarquable : elle montre qu'il n'est pas nécessaire de connaître la force électromotrice de phase ou la matrice d'inductance statorique pour calculer les grandeurs de machine fictive. Ce qui signifie que la modélisation proposée donne les moyens de fixer les grandeurs de phases fictives sans considérer les grandeurs de phases réelles.

Un nouvel outil de caractérisation des machines fictives a été introduit : la Transformée de *Fourier* discrète (TFD). Il est prouvé que les transformations définissant les machines fictives (*Fortescue* et *Concordia*) opèrent des TFD sur les vecteurs-colonnes. Sur la base de ce constat, une représentation par suites périodiques des vecteurs-colonnes des matrices de bobinage est proposée. Cette approche permet d'interprêter fréquentiellement les changements de base

définissant les machines fictives et ainsi de définir la manière dont les harmoniques de force magnétomotrice se projettent dans les machines fictives, ce qui permet d'introduire les familles étendues d'harmoniques. Pratiquement, les bobinages fictifs peuvent être évalués sans aucun calcul matriciel. Qualitativement, il devient possible de visualiser la répartition des pôles d'un bobinage fictif et de juger de son équilibre. Quantitativement, les objectifs de conception sur les valeurs des inductances fictives et sur les forces électromotrices peuvent être formulés à l'aide des TFD des distributions et des fonctions de bobinage fictifs. Schématiquement, l'énergie des suites de distribution fictive et de fonction de bobinage fictif conditionnent l'inductance cyclique ; la forme de la distribution fictive (ou équivalemment de la fonction de bobinage fictif) détermine les coefficients de bobinage fictif globaux.

Au final, l'ensemble de ces outils a permis de définir des procédures de conception optimale du bobinage et de la couche d'aimants. Leurs utilisations montrent la possibilité de concevoir des machines polyphasées tirant profit de la stratégie d'alimentation multimachine tout en maintenant un niveau de courants parasites acceptable. Les simulations des ensembles convertisseur-machine réalisées confortent cette idée.

Sur le plan de la modélisation, ce travail peut être prolongé dans plusieurs directions. La représentation du bobinage pourrait être précisée afin de prendre en compte les effets mutualisants liés aux têtes de bobine. Par ailleurs, pour conférer aux procédures de conception un véritable caractère opérationnel, la modélisation générale de la machine doit être affinée. Ainsi, il aparaît nécessaire de développer une modélisation permettant l'estimation des efforts radiaux engendrés par les configurations de bobinage fractionnaire. De plus, afin de bien mesurer l'impact de la stratégie d'alimentation multimachine sur les pertes, il serait utile de développer un modèle thermique et un modèle pour l'estimation des pertes fer. A terme, une méthode de prise en compte de la saturation pourrait aussi être introduite, ne serait-ce que pour cerner les limites des solutions proposées.

Sur le plan des méthodes de conception, plusieurs perspectives de travail se dégagent. Concernant la procédure d'optimisation du bobinage, il serait intéressant de libérer le nombre de spires par bobine : ces degrés de libertés supplémentaires permettraient d'approcher plus facilement les profils idéaux de distribution tout en maintenant un niveau de réalisabilité acceptable (le nombre de couches étant fixé à l'avance). Cette idée est inspirée de *Saint-Michel* [45]. Par ailleurs, la manière de paramétrer l'optimisation gagnerait à être modifiée : il serait judicieux de fixer au préalable les nombres d'encoches et de pôles puis de déterminer le nombre de phases permettant d'atteindre un certaine qualité de couple (valeur moyenne, pulsations, détente). Le nombre de phases deviendrait alors un véritable paramètre d'optimisation.

De manière plus générale, la faisabilité des solutions proposées doit être étudiée avec une attention particulière pour la stabilité magnétique de la couche d'aimants. La seule manière de véritablement mesurer la pertinence des approches ici proposées est l'expérimentation. Les procédures mises en oeuvre permettent de définir des solutions intéressantes (comme la machine *M5-POD*) que seules des mesures sur banc d'essai pourraient valider.

Enfin, les méthodes d'optimisation multimachine décrites dans ce mémoire peuvent être employées pour atteindre d'autres objectifs que ceux inhérents à la production de couple par plusieurs machines fictives (stratégie d'alimentation multimachine). Par exemple, lorsque le cahier des charges privilégie la continuité de fonctionnement par rapport à la valeur maximale du couple, il est intéressant de rendre des machines fictives structurellement inaptes à la production de couple : en cas de pertes de phases, il est alors possible de reconfigurer la commande de la machine pour maintenir un couple constant [19]. D'autres orientations de conception sont possibles comme celles concernant l'alimentation de plusieurs machines

polyphasées en série par le même onduleur [15, 5].

Annexes

ANNEXE

A Définition des coefficients de décomposition en série de *Fourier*

Cette annexe précise les notations adoptées dans ce mémoire concernant les coefficients de la décomposition en série de *Fourier* d'un signal périodique.

Soit $x(t)$, un signal $2\pi/\omega$-périodique à valeurs réelles. Ce signal peut être décomposé en série de *Fourier* à coefficients complexes ou réels. La décomposition à coefficients complexes s'écrit :

$$x(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \widehat{(x)}_h e^{jh\omega t}$$

Le coefficient complexe $\widehat{(x)}_h$ est défini comme suit :

$$\widehat{(x)}_h = \frac{\omega}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi/\omega} x(t) e^{-jh\omega t} dt$$

Comme le signal est réel, les coefficients de *Fourier* complexes vérifient la propriété de symétrie hermitienne :

$$\widehat{(x)}_{-h} = \left(\widehat{(x)}_h\right)^*$$

Cette propriété permet de passer à la décomposition à coefficients réels.

$$x(t) = \sum_{h=0}^{+\infty} \widehat{(x^c)}_h \cos(h\omega t) + \widehat{(x^s)}_h \sin(h\omega t)$$

Les coefficients réels sont définis comme suit :

$$
\begin{array}{ll}
h = 0 & \left\{ \begin{array}{l} \widehat{(x^c)}_0 = \dfrac{\omega}{2\pi} \displaystyle\int_{t=0}^{2\pi/\omega} x(t)dt \\ \widehat{(x^s)}_0 = 0 \end{array} \right. \\
h \geq 1 & \left\{ \begin{array}{l} \widehat{(x^c)}_h = \dfrac{\omega}{\pi} \displaystyle\int_{t=0}^{2\pi/\omega} x(t) \cos(h\omega t)\, dt = \widehat{(x)}_h + \widehat{(x)}_{-h} \\ \widehat{(x^s)}_h = \dfrac{\omega}{\pi} \displaystyle\int_{t=0}^{2\pi/\omega} x(t) \sin(h\omega t)\, dt = j\left(\widehat{(x)}_h - \widehat{(x)}_{-h}\right) \end{array} \right.
\end{array}
$$

ANNEXE B

Eléments de calcul analytique du champ

Sommaire

B.1 Coefficients de *Fourier* des fonctions d'aimantation 187

B.2 Expression du potentiel vecteur dû aux aimants à la frontière entrefer-culasse statorique 188

Cette annexe précise les coefficients des décompositions en série de *Fourier* des fonctions d'aimantation radiale et tangentielle puis donne les résultats relatifs à l'évaluation du potentiel-vecteur à l'interface entre l'entrefer mécanique et le stator en présence des termes sources aimants.

B.1 Coefficients de *Fourier* des fonctions d'aimantation

Pour mémoire, les coefficients de *Fourier* réels $\widehat{(f^c_{ar})}_{2h+1}$ et $\widehat{(f^s_{at})}_{2h+1}$ sont calculés sur la période $2\pi_{elec}$ (et non pas sur le tour complet de la machine) : ils dépendent des paramètres des aimants composant le demi-pôle. Des coefficients de *Fourier* peuvent être calculés pour chacun des aimants : ils ont notés $\widehat{(f^c_{ar,k})}_{2h+1}$ et $\widehat{(f^s_{at,k})}_{2h+1}$ pour l'aimant numéro k. Il vient alors :

$$\begin{cases} \widehat{(f^c_{ar})}_{2h+1} = \sum_{k=0}^{n_a-1} \widehat{(f^c_{ar,k})}_{2h+1} \\ \widehat{(f^s_{at})}_{2h+1} = \sum_{k=0}^{n_a-1} \widehat{(f^s_{at,k})}_{2h+1} \end{cases}$$

Disponibles dans [37], les expressions des coefficients de l'aimant k sont :

- cas radial

$$\begin{cases} \widehat{(f^c_{ar,k})}_{2h+1} = \dfrac{8M_k}{\pi(2h+1)} \sin\left(p(2h+1)\dfrac{l_{a,k}}{2}\right) \cos\left(p(2h+1)c_{a,k}\right) \\ \widehat{(f^s_{at,k})}_{2h+1} = 0 \end{cases}$$

- cas parallèle

$$
\begin{array}{l}
p=1 \\
\left\{\begin{array}{l}
\widehat{(f^c_{ar,k})}_{2h+1} = \dfrac{2pM_k}{\pi}\sin(l_{a,k})\cos(c_{a,k}-\alpha_{a,k}) + \dfrac{2pM_k}{\pi} l_{a,k}\cos(c_{a,k}+\alpha_{a,k}) \\
\widehat{(f^s_{at,k})}_{2h+1} = \dfrac{2M_k}{\pi(2h+1)}\sin(l_{a,k})\cos(c_{a,k}-\alpha_{a,k}) - \dfrac{2M_k}{\pi(2h+1)} l_{a,k}\cos(c_{a,k}-\alpha_{a,k})
\end{array}\right. \\
p\neq 1 \\
\left\{\begin{array}{l}
\widehat{(f^c_{ar,k})}_{2h+1} = \dfrac{4pM_k}{\pi((2h+1)p+1)}\sin\left(((2h+1)p+1)\dfrac{l_{a,k}}{2}\right)\cos((2h+1)pc_{a,k}-\alpha_{a,k}) \\
+\dfrac{4pM_k}{\pi((2h+1)p-1)}\sin\left(((2h+1)p-1)\dfrac{l_{a,k}}{2}\right)\cos((2h+1)pc_{a,k}+\alpha_{a,k}) \\
\widehat{(f^s_{at,k})}_{2h+1} = \dfrac{4pM_k}{\pi((2h+1)p+1)}\sin\left(((2h+1)p+1)\dfrac{l_{a,k}}{2}\right)\cos((2h+1)pc_{a,k}-\alpha_{a,k}) \\
-\dfrac{4pM_k}{\pi((2h+1)p-1)}\sin\left(((2h+1)p-1)\dfrac{l_{a,k}}{2}\right)\cos((2h+1)pc_{a,k}+\alpha_{a,k})
\end{array}\right.
\end{array}
$$

B.2 Expression du potentiel vecteur dû aux aimants à la frontière entrefer-culasse statorique

Le coefficient de *Fourier* de rang h du potentiel vecteur dû aux termes sources aimants au niveau du rayon statorique est noté $\widehat{(A_{1/R,r_{st}})}_h$ (potentiel vecteur dans la zone de l'entrefer mécanique indicée 1, en présence des termes sources aimants du rotor "R", calculé en $r = r_{st}$). Son calcul explicite est détaillée dans [37] et repose sur la résolution du système linéaire à 4 équations et 4 inconnues décrit dans le paragraphe II.3.2.2. Ce coefficient peut être mis sous la forme suivante :

$$\widehat{(A_{1/R,r_{st}})}_h = \widehat{(F_r)}_h\widehat{(f^c_{ar})}_h + \widehat{(F_t)}_h\widehat{(f^s_{at})}_h$$

Les coefficients $\widehat{(F_r)}_h$ et $\widehat{(F_t)}_h$ correspondent aux coefficients de *Fourier* des gains représentant l'influence de la géométrie de la machine sur le potentiel-vecteur. Ces gains sont introduits dans le paragraphe IV.2.1.1 (page 160). En notant k_r, le rapport entre le rayon rotorique et le rayon statorique et k_e, le rapport entre le rayon correspondant à la hauteur d'aimants et le rayon statorique, il vient :

$$
\left\{\begin{array}{l}
\widehat{(F_r)}_h = \dfrac{r_{st}}{(1-(hp)^2)}\dfrac{1}{1-k_r^{2hp}}\left[k_r^{hp+1} + \dfrac{hp-1}{2}k_e^{hp+1} - \dfrac{hp+1}{2}k_e^{-hp+1}k_r^{2hp}\right] \\
\widehat{(F_t)}_h = \dfrac{r_{st}}{(1-(hp)^2)}\dfrac{1}{1-k_r^{2hp}}\left[hpk_r^{hp+1} + \dfrac{1-hp}{2}k_e^{hp+1} - \dfrac{hp+1}{2}k_e^{-hp+1}k_r^{2hp}\right]
\end{array}\right.
$$

Ces résultats sont valables pour $p \neq 1$ et $h \geq 1$.

ANNEXE C

Calcul du couple de détente

Sommaire

C.1 Paramètres influençant le couple de détente 189
C.2 Méthode de calcul 190
C.3 Validations 191
C.4 Sensibilité paramétrique du calcul analytique 193

Pour le modèle de calcul analytique développé, l'un des intérêts de l'introduction de la fonction de perméance réside dans la possibilité d'évaluer le couple de détente. Résultant de l'interaction magnétique entre les aimants du rotor et les encoches, le couple de détente est susceptible d'engendrer des vibrations particulièrement gênantes à basse vitesse. Si le calcul précis de cette grandeur reste un problème délicat (que la méthode soit analytique ou numérique), il apparaît nécessaire de pouvoir l'estimer afin d'en tenir compte lors de la formulation des problèmes d'optimisation multimachine.

C.1 Paramètres influençant le couple de détente

Le couple de détente se manifeste par la tendance du rotor à s'aligner sur un ensemble de positions stables lorsque la machine n'est pas alimentée. En fonctionnement normal, il apparaît un couple vibratoire à valeur moyenne nulle qui ne contribue pas à la production du couple effectif. La référence [56] illustre très clairement ce propos en traitant l'exemple d'une machine à 18 encoches et 6 pôles. Des paramètres influençant le couple de détente sont énumérés et leurs effets sont illustrés à l'aide d'un code de calcul par éléments finis. Dans [66], une analyse des paramètres de conception agissant directement sur le couple de détente est effectuée.

En résumé, quatre grandes données de conception jouent un effet significatif sur le couple de détente :

- le rapport entre le nombre d'encoches et le nombre de pôles ; la période du couple de détente dépend directement de la valeur du plus petit multiple commun entre le nombre d'encoches et le nombre de pôles,
- les paramètres caractérisant la perméance (épaisseur couche d'aimant, entrefer

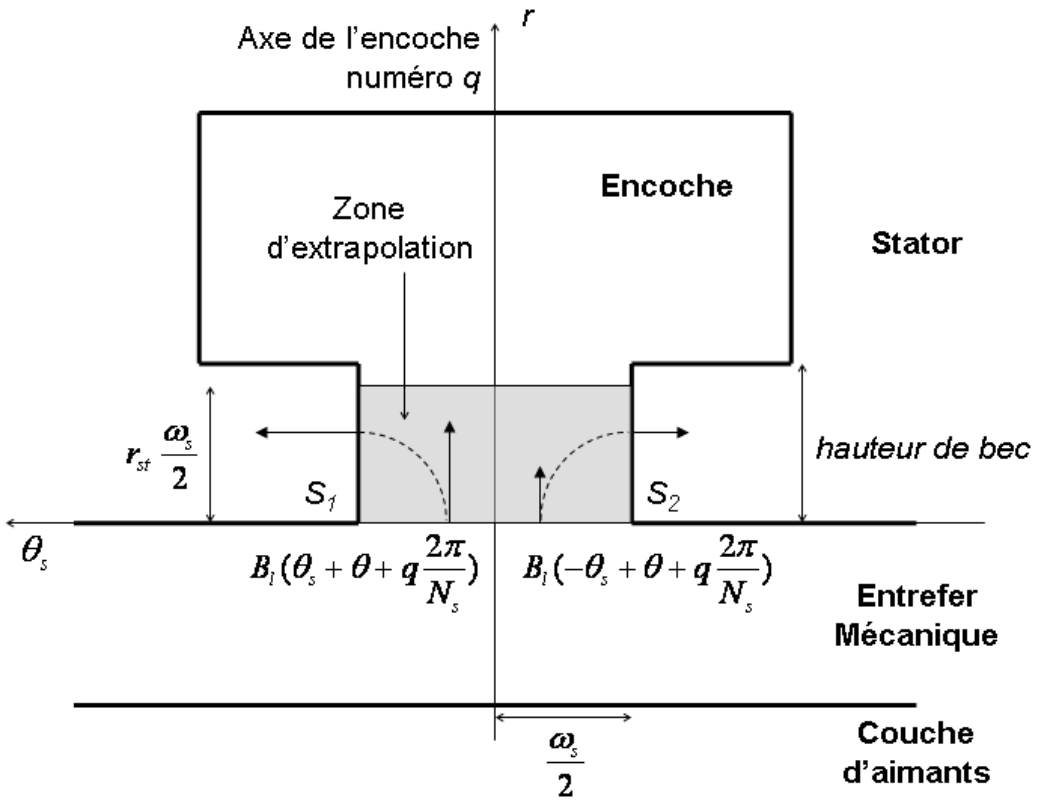


Figure C.1 — Principe d'intégration de la pression magnétique au sein de l'encoche numéro q pour une position $\theta_{R/S}$ du rotor

mécanique et ouverture d'encoche),
- les paramètres caractérisant le pôle (disposition des aimants sur le pôle, nombre d'aimants, magnétisation),
- l'inclinaison axiale des encoches ou de la couche d'aimant pour effacer les positions d'alignement stable entre rotor et stator.

L'objectif est donc de mettre en oeuvre un modèle analytique de calcul du couple de détente capable de retranscrire ces sensibilités.

C.2 Méthode de calcul

Pour calculer précisément le couple de détente, une des deux grandes méthodes de calcul du couple doit être employée : soit la dérivée de la co-énergie, soit l'intégration du tenseur de *Maxwell*. Ces deux méthodes sont délicates à utiliser sur le plan analytique : elles exigent de dériver ou d'intégrer les expressions du champ en tout point de l'entrefer magnétique. La complexité qui en résulte paraît disproportionnée par rapport aux hypothèses simplificatrices du modèle analytique et au simple objectif d'estimation recherché.

Employant un modèle de calcul similaire à celui décrit dans ce mémoire, *Zhu* [61] et *Proca* [40] parviennent à estimer le couple de détente par le postulat suivant : le couple de détente résulte exclusivement du différentiel de pression magnétique dans les encoches. Dans ce contexte, la fonction de perméance relative et les hypothèses qui lui sont associées permettent d'estimer cette différence de pression. Le couple de détente se calcule en intégrant

la pression magnétique sur les surfaces S_1 et S_2 reperées sur la figure C.1 pour chaque encoche. Le couple s'exerçant sur une encoche s'exprime alors :

$$T_{d/encoche} = \frac{L_m}{2\mu_0} \int_{r=0}^{r_{st}\frac{\omega_s}{2}} \left(B^2_{/S_1} - B^2_{/S_2} \right) (r_{st} + r)\, dr$$

Le couple de détente T_d s'obtient en sommant les couples $T_{d/encoche}$. En utilisant les équations (II.24) et (II.23), la perméance relative et l'induction de la machine lisse correspondante sont introduites. En exhibant la décomposition en série de *Fourier* de cette induction élevée au carré et en notant N_L le plus petit commun multiple entre N_s et N_p, il vient :

$$\begin{aligned} T_d(\theta) &= j \frac{N_s L_m r_{st}^2}{\mu_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{(B_l^2)}_{k\frac{N_L}{N_P}} C_k e^{jkN_L\theta} \\ \text{avec } C_k &= \int_{\theta_s=0}^{\frac{\omega_s}{2}} \frac{(1 + \frac{\omega_s}{2} - \theta_s)\sin(kN_L\theta_s)}{\left(1 + \frac{\pi r_{st}}{2g_\mu}(\frac{\omega_s}{2} - \theta_s)\right)^2} d\theta_s \end{aligned} \tag{C.1}$$

Cette expression met en évidence la périodicité du couple de détente : celui-ci est $2\pi/N_L$-périodique. L'influence du rapport entre le nombre d'encoches et le nombre de pôles est donc pris en compte. De même, les effets de la fonction d'aimantation sont inclus : ils sont décrits par la donnée de l'induction B_l. Les paramètres définissant la fonction de perméance (g_μ et ω_s) interviennent également. Au final, cette expression analytique doit permettre une estimation du couple de détente et rendre compte de sa sensibilité aux paramètres constitutifs de la machine.

C.3 Validations

Pour valider la méthode de calcul analytique du couple de détente, deux éléments sont disponibles :

- le code de calcul deux dimensions par différences finies *Difimedi* [23],
- des fichiers de mesure expérimentale du couple de détente sur trois machines à courant continu[1] à aimants permanents (donc magnétiquement identiques à une machine synchrone à aimants).

Le code de calcul *Difimedi* calcule le couple de détente par intégration du tenseur de *Maxwell*. Concernant les trois machines à courant continu, les paramètres critiques pour le couple de détente sont consignés dans le tableau C.1. Toutes ces machines sont constituées de pôles aimantés radialement à environ 0.4 T. C'est donc essentiellement la valeur de la lacune interpolaire qui, pour le calcul analytique, va conditionner le contenu spectral de l'induction en $r = R_s$. La lacune interpolaire correspond à la différence entre le pas polaire et la largeur angulaire de l'aimant radial constituant le pôle : elle est donnée en pourcentage du pas polaire. Les machines M2 et M3 sont en classique tôle laminée : pour un tel matériau, l'hypothèse de perméabilité infinie est légitime et, sous *Difimedi*, la perméabilité relative du milieu fer est fixée à 4000.

Il faut noter que la machine M1 est réalisée en poudre de fer : elle donne l'occasion de tester la pertinence de l'extrapolation circulaire des lignes de champ pour un matériau dont

[1] Ces fichiers sont fournis par le *Laboratoire d'Electrotechnique, d'Electronique de Puissance et de Commande Industrielle - LEEPCI* de l'Université Laval de Québec (Canada)

Caractéristiques	Machine M1	Machine M2	Machine M3
Matériau	Poudre	Tôle laminée	Tôle laminée
N_s	5	20	3
N_p	2	2	1
Lacune Polaire	22 %	22 %	30 %
$\omega_s/\frac{2\pi}{N_s}$	34 %	15 %	4 %

Tableau C.1 — Caractéristiques influençant le couple de détente pour les machines à courant continu testées expérimentalement

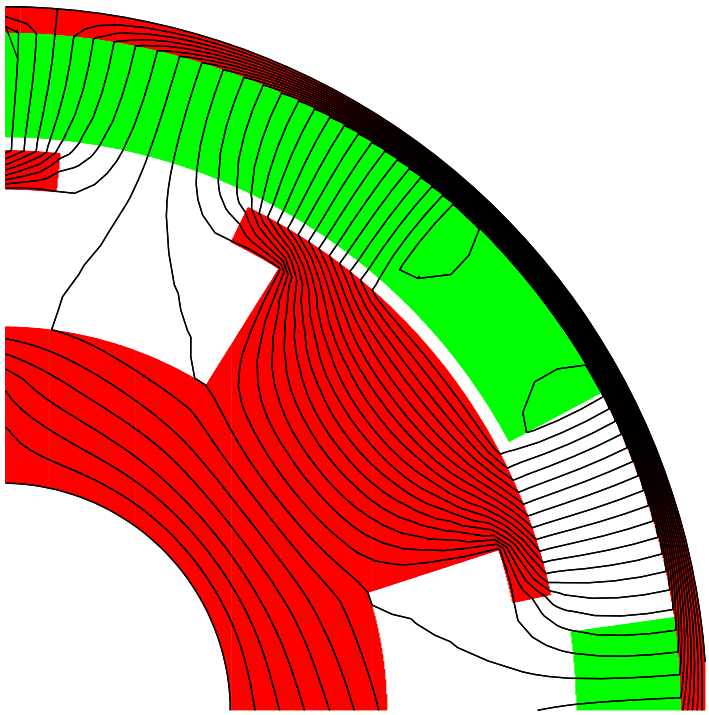


Figure C.2 — Machine M1 (5 encoches et 4 pôles) : ligne de champ selon *Difimedi* avec $\mu_{poudre} = 200$

la perméabilité relative est annoncée à 200 (valeur réglée sous *Difimedi*). Pour cette machine M1, le tracé des lignes de champ (visible sur la figure C.2) montre que l'extrapolation reste acceptable malgré la faible perméabilité de la culasse. La figure C.3 permet de constater une adéquation correcte entre les prédictions numérique et analytique. L'estimation analytique est assez proche de la mesure tant en amplitude qu'en forme.

Les résultats obtenus pour les machines en tôles laminées M2 et M3 sont illustrés respectivement par les figures C.4-a et C.4-b en ce qui concerne les lignes de champ et par les figures C.5 et C.6 pour les comparaisons des messures et des estimations. Pour ces deux machines, l'estimation analytique approche correctement la mesure et la prédiction numérique. Par contre, alors que pour la machine M2, le couple de détente est légèrement sur-estimé, il est à l'inverse sous-estimé pour la machine M3. D'après le tableau C.1, la différence principale entre ces deux machines réside dans le rapport entre ouverture d'encoche et pas dentaire. Selon la méthode de calcul analytique, plus l'ouverture d'encoche est petite, plus le couple de détente est faible. Cette tendance est exacte mais probablement exagérée par rapport à la réalité.

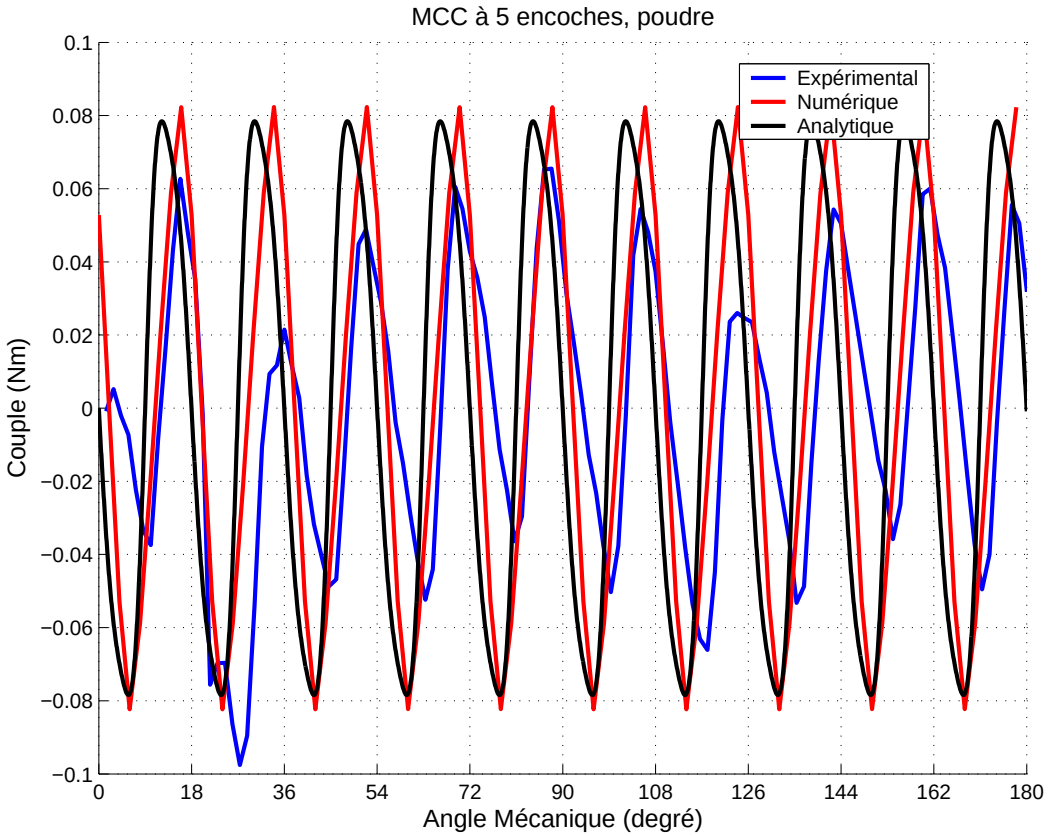
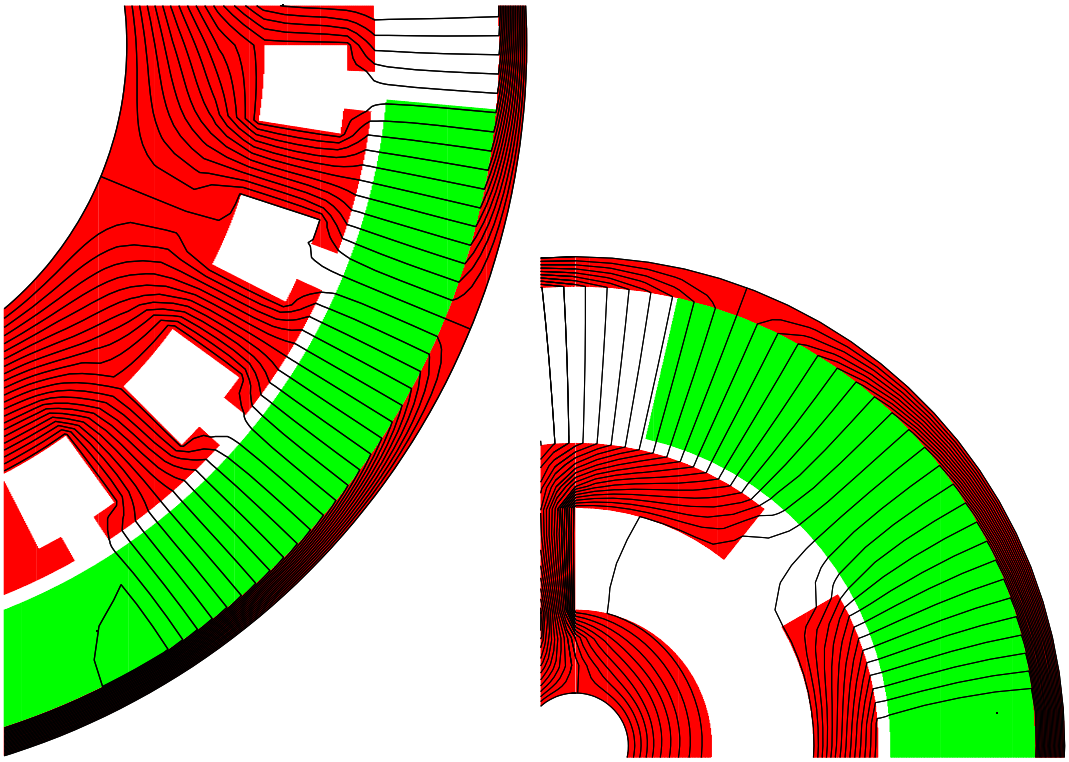


Figure C.3 — Machine M1 (5 encoches et 4 pôles) : couple de détente expérimental, analytique et numérique

Confrontées aux mesures, les estimations analytiques produisent des résultats encourageants. Il convient néanmoins de les modérer : la gamme des machines testées n'est pas suffisamment étendue pour conclure à une efficacité garantie du calcul analytique. Afin de cerner les limites de l'estimation analytique, il convient d'effectuer de la variation paramétrique.

C.4 Sensibilité paramétrique du calcul analytique

Afin d'évaluer la sensibilité du calcul analytique aux variations paramétriques, une machine de test est simulée sous *Difimedi*. Comme le montre le tableau C.2, cette machine à aimantation radiale est calculée à plusieurs reprises en modifiant les paramètres suivants : le rapport entre la taille d'aimant et le pas polaire, l'entrefer mécanique et l'ouverture d'encoche (cf. figure C.7). Leurs influences sur le calcul analytique peuvent ainsi être appréciées. Les prédictions analytiques et numériques sont comparées en relevant pour chaque simulation les amplitudes maximales du couple et en calculant la corrélation des deux signaux (comparaison



(a) Machine M2 (20 encoches et 4 pôles) (b) Machine M3 (3 encoches et 2 pôles)

Figure C.4 — Machines à tôles laminées : ligne de champ selon *Difimedi* avec $\mu_{fer} = 4000$

de la forme) selon l'expression :

$$c(s_1, s_2) = \frac{\langle s_1, s_2 \rangle}{\sqrt{\langle s_1, s_1 \rangle}\sqrt{\langle s_2, s_2 \rangle}}$$
$$\text{avec} \begin{cases} \langle s_1, s_2 \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_1(\theta) s_2(\theta)\, d\theta \\ s_1 \text{ et } s_2 \text{ sont T-périodiques} \end{cases}$$

Afin d'approcher la limite de l'hypothèse concernant l'extrapolation des lignes de champ dans les encoches, la perméabilité relative du fer est fixée à 1000 pour les simulations numériques.

La variation du rapport entre la largeur d'aimant et le pas polaire entre 0.5 et 1 modifie principalement le flux de fuite dans l'entrefer magnétique. Lorsque l'entrefer est fixé à 1 mm et le rapport d'ouverture d'encoche à 0.27, la figure C.8-a rend compte des similitudes de comportement entre les prédictions numériques et analytiques par rapport à cette variation. Particulièrement, la valeur d'environ 2/3 (0.7 sur le graphe) qui minimise le couple de détente est retrouvée par les deux estimations : cette valeur particulière correspond à une lacune polaire environ égale au pas d'encoche [66]. L'expression analytique (C.1) permet de retrouver ce résultat. Pour cette valeur optimale, les formes des signaux numérique et analytique ne correspondent pas. En fait, dans cette configuration, l'hypothèse de trajet circulaire du champ dans les encoches est trop forte. Comme le montre la figure C.8-b, si la perméabilité du fer

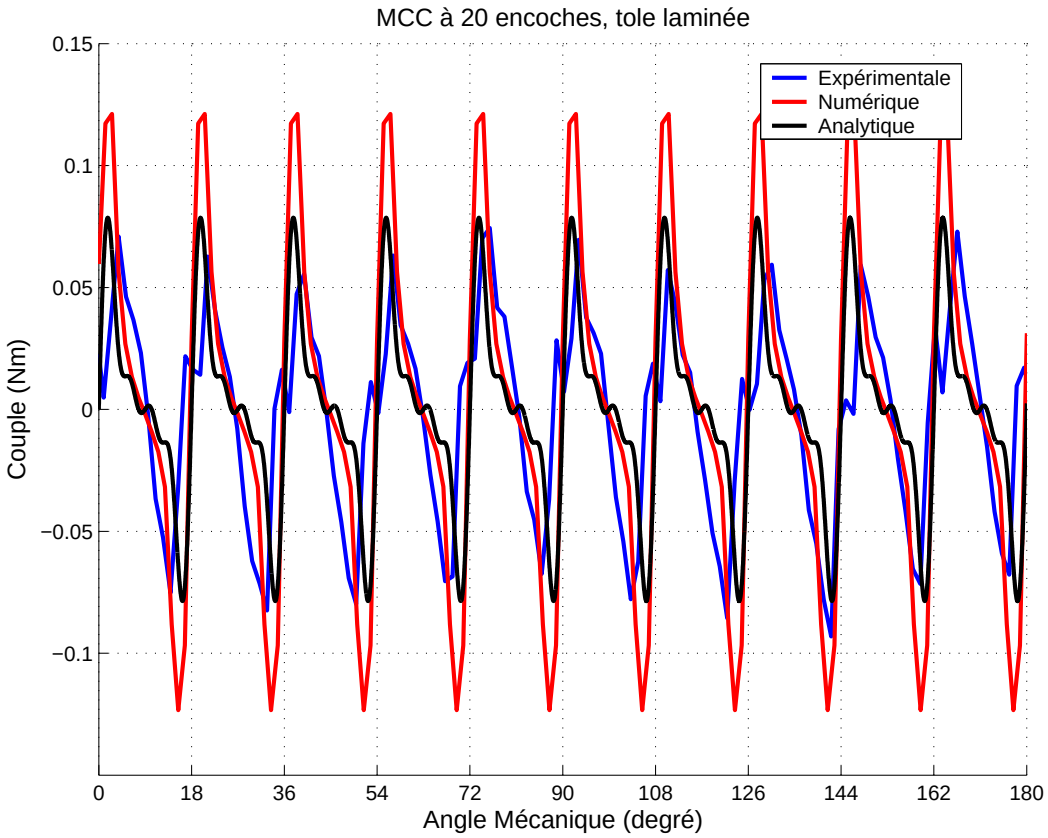


Figure C.5 — Machine M2 (20 encoches et 4 pôles) : couple de détente expérimental, analytique et numérique

Désignation	**Valeur**
Nombre de pôles	8
Nombre d'encoches	24
Longueur active (mm)	50
Rayon Statorique (mm)	25
Epaisseur de la couche d'aimants (mm)	5
Largeur de dent (deg)	6.75
Hauteur de bec (mm)	0.7
Largeur d'aimant sur pas polaire	de 0.5 à 1.0
Entrefer mécanique (mm)	de 0.25 à 1.5
Ouverture d'encoche sur largeur d'encoche	de 0.27 à 1.0

Tableau C.2 — Paramètres des machines simulées

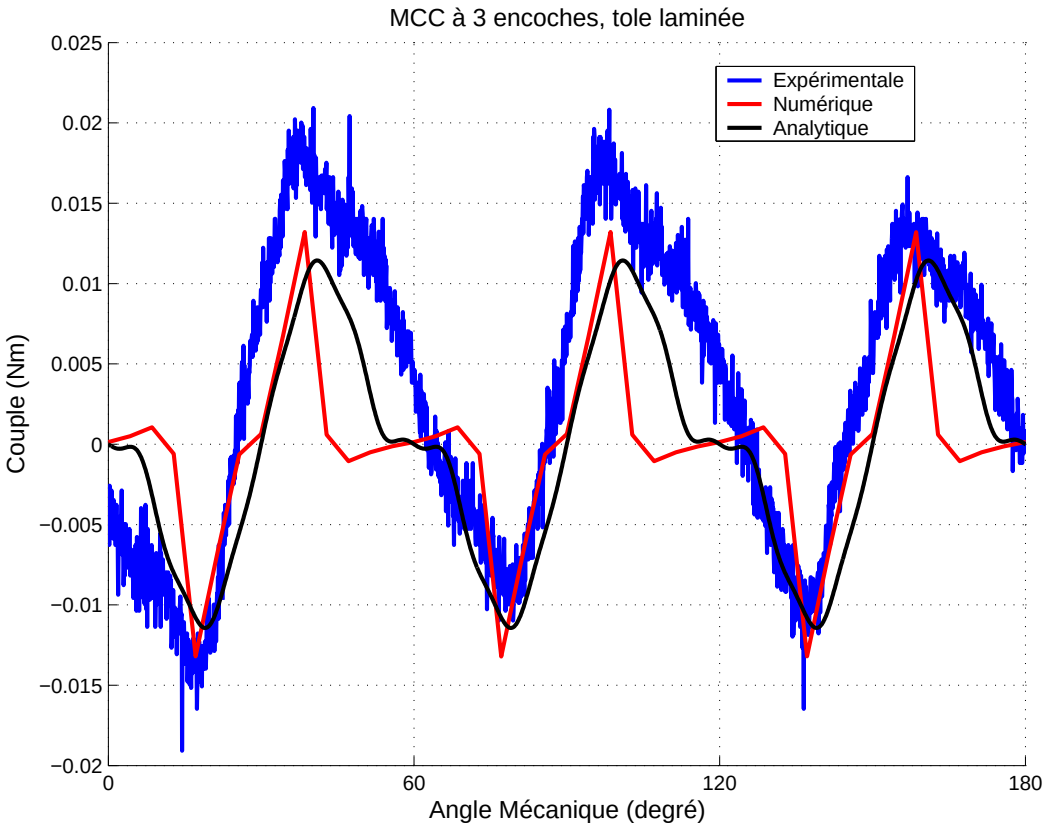
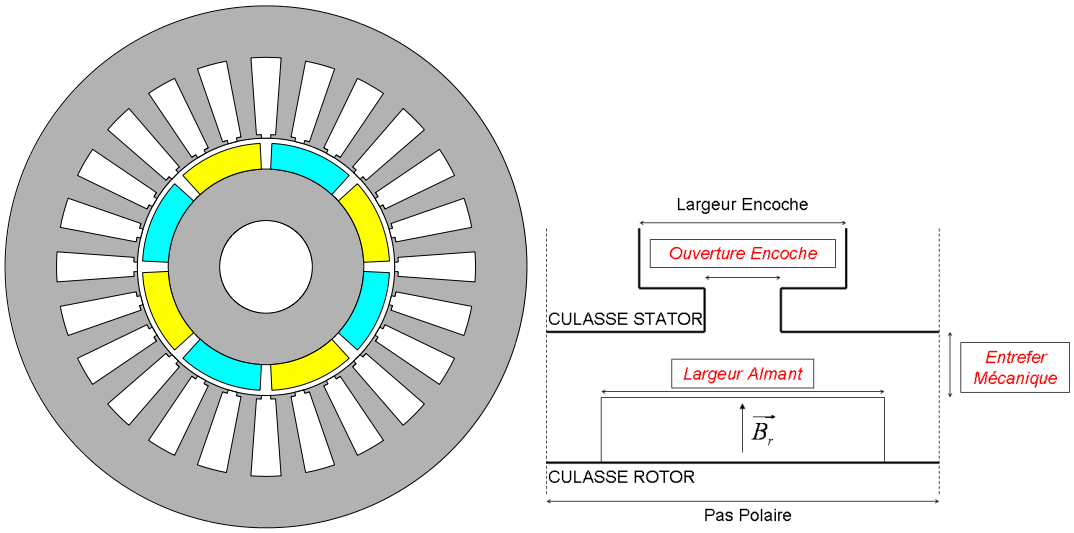


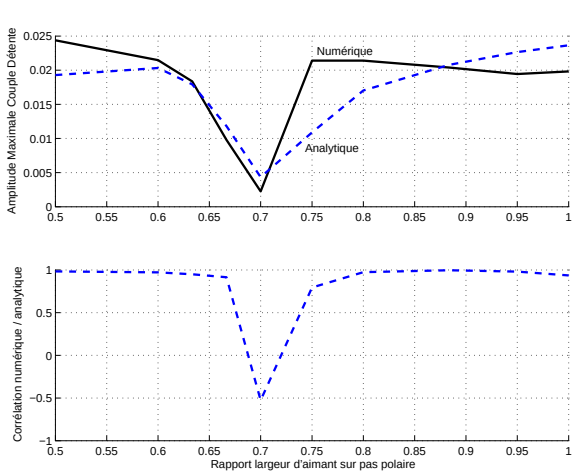
Figure C.6 — Machine M3 (3 encoches et 2 pôles) : couple de détente expérimental, analytique et numérique



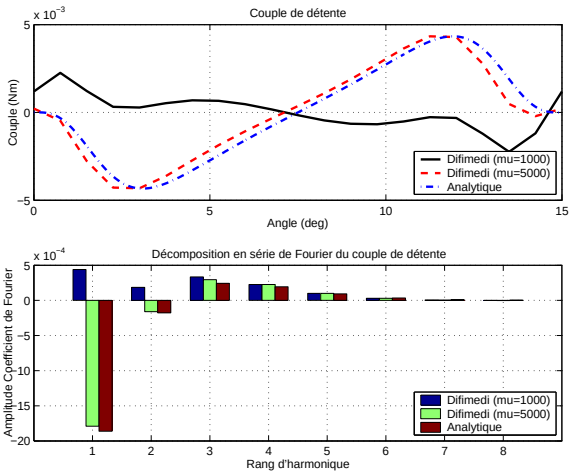
(a) Allure de la machine simulée

(b) Illustration des paramètres modifiés

Figure C.7 — Machines calculées numériquement et analytiquement



(a) Influence du rapport entre le largeur d'aimant et le pas polaire sur l'estimation analytique ($\mu_{fer} = 1000$ pour *Difimedi*)



(b) Illustration de l'influence de la valeur de la perméabilité du fer sur l'estimation numérique (pour le rapport largeur d'aimant sur pas polaire optimum)

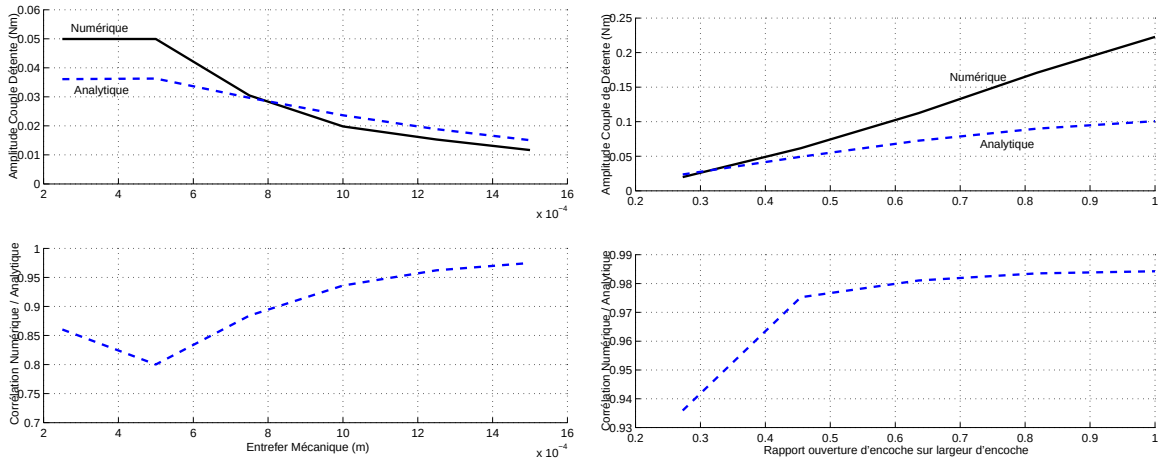
Figure C.8 — Test de la sensibilité au rapport entre largeur d'aimant et pas polaire. Importance de l'hypothèse de ligne de champ circulaire dans les encoches.

pour le calcul numérique est remontée de 1000 à 5000, les signaux deviennent cohérents.

Pour évaluer l'influence de l'entrefer mécanique sur le calcul analytique, plusieurs simulations pour différentes valeurs d'entrefer sont effectuées en fixant le rapport d'ouverture d'encoche à 0.27 et le rapport entre largeur d'aimant et pas polaire à 1 (pôle complet). Comme le montre la figure C.9-a, les prédictions numériques et analytiques ont un comportement similaire : les signaux sont cohérents (corrélation toujours supérieure à 0.8) et l'amplitude du couple de détente diminue lorsque l'entrefer augmente (ce qui était attendu).

Enfin, concernant la sensibilité à l'ouverture d'encoche, les simulations sont réalisées pour un rapport d'ouverture d'encoche à 0.27 et un pôle complet. La figure C.9-b met en évidence la bonne corrélation des deux estimations. Concernant l'amplitude, l'augmentation du couple avec l'ouverture d'encoche est retrouvée dans les deux cas. Cependant, la méthode analytique semble sous-estimer l'amplitude du couple pour les grandes ouvertures d'encoche.

En somme, pour les exemples considérés, amplitudes numérique et analytique évoluent dans la même direction lors des variations paramétriques testées. Les écarts entre les prédictions analytiques et la mesure ne sont pas plus importants que les écarts entre les prédictions numériques (selon *Difimedi*) et la mesure. Méthodes numérique et analytique font donc preuve d'une efficacité équivalente. Il est particulièrement rassurant de constater que l'amplitude est toujours correctement approchée. Néanmoins, cette similitude de comportement ne se maintient que dans le domaine de validité de l'extrapolation circulaire de ligne de champ dans les encoches. Bien entendu, ces tests ne sont pas suffisants pour postuler à une efficacité garantie de la prédiction analytique. Néanmoins, il est probable que l'utilisation de cette méthode analytique de calcul dans une procédure de pré-dimensionnement conduira à des résultats cohérents.



(a) Influence de la valeur de l'entrefer mécanique sur l'estimation analytique ($\mu_{fer} = 1000$ pour *Difimedi*)

(b) Influence de la valeur de l'ouverture d'encoche sur l'estimation analytique ($\mu_{fer} = 1000$ pour *Difimedi*)

Figure C.9 — Test de la sensibilité aux valeurs d'entrefer mécanique et d'ouverture d'encoche.

ANNEXE D

Coefficients de bobinage d'un bobinage convenablement réparti

Cette annexe montre que définir un bobinage convenablement réparti permet de régler précisément les valeurs des coefficients de bobinage.

Soit une machines à p pôles et N_s encoches qui admet un bobinage convenablement réparti au-dessus de $k \times p$ pôles (avec k un entier non nul quelconque). Ceci signifie que les composantes des vecteurs de distribution résultent de l'échantillonnage d'une sinusoïde de fréquence $k \times p$. Donc la composante g du vecteur de distribution de la phase 0 $\overrightarrow{d_0^{N_s}}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$d_{g,0} = \gamma e^{-j\frac{2\pi}{N_s}kpg} \text{ avec } \gamma \in \mathbb{C}$$

D'après le paragraphe II.4.1.3 (page 75) définissant les coefficients de bobinage, le coefficient de filtrage du bobinage dépend du terme entre parenthèses dans l'équation (II.29). Ce coefficient est noté $\widehat{(k_{bob})}_h$:

$$\widehat{(k_{bob})}_h = \sum_{g=0}^{N_s-1} d_{g,0} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}hpg}$$

Avec l'hypothèse de bobinage convenablement réparti, ce coefficient $\widehat{(k_{bob})}_h$ prend la forme suivante :

$$\widehat{(k_{bob})}_h = \gamma \sum_{g=0}^{N_s-1} e^{-j\frac{2\pi}{N_s}pg(g-h)}$$

En utilisant $N_s = pgcd(Ns, p)N'_s$ et $p = pgcd(Ns, p)p'$, il vient :

$$\widehat{(k_{bob})}_h = \gamma pgcd(N_s, p) \sum_{g=0}^{N'_s-1} e^{-j\frac{2\pi}{N'_s}p'g(g-h)}$$

La conclusion est alors évidente :

$$\widehat{(k_{bob})}_h = \begin{cases} \gamma N_s & \text{si } h \in \mathbb{Z}N'_s - k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc un bobinage convenablement réparti au-dessus de $k \times p$ paires de pôles garantit l'égalité des coefficients de bobinage de rang $h \in \mathbb{Z}N'_s \pm k$ et la nullité de tous les autres.

Bibliographie

Bibliographie

[1] Nicolas Bernard. Machine synchrone : de la boucle ouverte à l'autopilotage. *Revue EI*, 30 :24–39, septembre 2002. I.3.2.1

[2] F. Bernot. Alternateurs synchrones de grande puissance (partie 1). Techniques de l'Ingénieur, D3550. II.1.2.4

[3] G. Blanchet et M. Charbit. Traitement numérique du signal. Techniques de l'Ingénieur, E3087. III.1.1.1

[4] N. Boules. Two dimensionnal field analysis of cylindrical machines with permanent magnets excitation. *IEEE Transactions on Industry Applications*, IA-20(5), September/October 1984. II.3.1

[5] A. Bouscayrol, B. Davat, P. Escané, B. de Fornel, B. François, D. Hadiouche, J-P. Hautier, J.P. Martin, F. Meibody-Tabar, E. Monmasson, V. de Olivera, R. Pena-Eguiluz, J. Pierquin, M. Pietrzak-David, H. Razik, et E. Semail. Structures de commande des systèmes multi-machines multi-convertisseurs. *Revue Internationale de Génie Electrique (RIGE)*, 6(3-4) :307–324, 2003. (document), I.3, IV.2.3.3

[6] Hansruedi Buhler. *Convertisseurs statiques*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1991. ISBN 2-88074-230-7. (document), I.3.1

[7] J. P. Caron. Modélisation des machines electriques par le calcul analytique des champs. Notes de cours, http ://www.clubeea.org/documents/mediatheque/J-P _Caron_ Machines _electriques_par_les_Champs.pdf. II.2.2.1, II.3.2

[8] Charles Clément. *Construction des Bobinages électriques*. Dunod, 1960. II.1.2.1, II.4.1.3

[9] J. Cros et P. Viarouge. Synthesis of high performance pm motors with concentrated windings. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 17(2) :248–253, June 2002. I.3.2.3

[10] E. Durand. *Electrostatique et Magnétostatique*. Masson et Compagnie, 1953. II.3.2.1

[11] J. Figueroa, J. Cros, et P. Viarouge. Current control strategies for seven phase brushless dc motors. In *International Conference on Electrical Machine (ICEM)*, Bruges (Belgium), August 2002. III

[12] J. Figueroa, J. Cros, et P. Viarouge. Polyphase pm brushless dc motor for high reliability application. In *Conférence EPE*, Toulouse (France), 2003. I.3.2.3

[13] J. Figueroa, J. Cros, et P. Viarouge. Generalized transformations for polyphase phase-modulations motors. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 21(2) :1–10, June 2006. III

[14] A. Foggia. Méthode de calcul des inductances de fuite. Techniques de l'Ingénieur, D3440. II.4.3.3

[15] S. Gataric. A polyphase cartesian vector approach to control of polyphase ac machines. In *Proceedings of IEEE-IAS'00 (CD-ROM)*, Rome (Italy), 2000. IV.2.3.3

[16] K. Halbach. Design of permanent magnets multipole with oriented rare earth cobalt material. *Nucl. Instrum. Methods*, 169 :1–10, 1980. (document), II.1.3.2, III.3.1.1, IV.2

[17] J.R. Hendershot. *Design of brushless permanent magnet motors*. Clarendon Press Oxford, 1994. II.1.2.1, II.1.2.4

[18] Surong Huang, Jian Luo, Franco Leonardi, et Thomas A. Lipo. A general approach to sizing and power density equations for comparison of electrical machines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol.34(1) :92–97, January/February 1998. I.3.2.2

[19] X. Kestelyn. *Modélisation Vectorielle Multimachines pour la Commande des Ensembles Convertisseurs-Machines Polyphasées*. Thèse de Doctorat, Université de Lille I, 2003. (document), I.1.1.1, I.1.1.3, I.2.2, I.3.1.2, I.3.2.1, I.3.2.3, II.4.2.3, II.4.3.4, III, IV.2.3.3

[20] E.A. Klingshirn. High phase order induction motor, part i and ii. *IEEE Transactions Power Apparatus Systems*, PAS - 102 :47–59, 1983. (document), I.1.1.1, I.2.2.1

[21] E.A. Klingshirn. Harmonic filters for six-phase and other multiphase motors on voltage source inverters. *IEEE Transactions on Industry Applications*, IA-21(4) :588–594, May/June 1985. I.2.2.1

[22] A. D. Kone. *Contribution à la conception des actionneurs électriques par formulation en terme d'optimisation*. Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1993. 1, II.2.2.1, II.2.3.2, II.3.2, II.4.1.1

[23] M. Lajoie-Mazenc, H. Hector, et R. Carlson. Procédé d'analyse des champs électrostatiques et magnétostatiques dans les structures planes et de révolution : programme difimedi. In *in the Proceedings of Compumag*, Grenoble, France, September 1978. II.4.2.3, C.3

[24] Ramdane Lateb, Noureddine Takorabet, et Farid Meibody-Tabar. Effect of magnet segmentation on the cogging torque in surface-mounted permanent-magnet motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(3) :442–445, March 2006. IV.2.2.2

[25] J. Lesene, F. Notelet, et G. Séguier. *Introduction à l'électrotechnique approfondie*. ISBN 2-85206-089-2. Technique et Documentation, 1981. (document), I.1.3.1, I.1.3.1

[26] P. Letellier. Les entrainements directs de fortes puissances et à très basses vitesses. In *congrès SEE, La conversion électromécanique direct*, ENS Cachan (France), 4 février 1999. (document)

[27] Jean-Paul Louis et Claude Bergmann. Commande numérique. convertisseur-moteur à courant continu. Techniques de l'Ingénieur, D3641. I.3.1.2, IV.1.3.3

[28] Jean-Paul Louis et Claude Bergmann. Commande numérique des machines. systèmes triphasés : régime permanent. Techniques de l'Ingénieur, TI D3642. I.3.1.1, I.3.1.2

[29] F. Magnussen, D. Svechkarenko, P. Thelin, et C. Sadarangani. Analysis of a pm machine with concentrated fractional pitch windings. In *the proceedings of the Nordic Worshop on Power and Industrial Electronics (NORPIE)*, Trondheim (Norway), 14-15 June 2004. IV.1.3.3

[30] M. Marinescu et N. Marinescu. New concept of permanent magnet excitation for electrical machines. analytical and numerical computation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2) :1390–1393, March 1992. (document), IV.2.3.1

[31] J. P. Martin. *Contributions à l'alimentation en tensions de machines à aimants permanents et à nombre de phases élevé : fonctionnement normal et dégradé*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2003. (document), I.3.1.1, I.3.2.2, I.3.2.2

[32] E. Matagne. Cours elec 2311 : Physique interne des convertisseurs électromécaniques. milieux magnétiques composites. Notes de cours de l'Université Catholique de Louvains, Belgique, http ://www.lei.ucl.ac.be/ matagne/ELEC2311/SEM04/S04P12B.htm. II.3.2.1

[33] E. Matagne. *Contribution à la Modélisation des Dispositifs électrotechniques en vue de leur optimisation.* Thèse de Doctorat, Université Catholique de Louvains, 1991. II.3.2.1

[34] F. Menneron, M. F. Benkhoris, et A. Guéraud. Modélisation et simulation d'une machine asynchrone double-étoiles alimentée en tension pour la propulsion par pod. In *congré SEE, La conversion électromécanique directe*, ENS Cachan (France), 4 février 1999. (document)

[35] N. Moubayed, F. Meybody-Tabar, et B. Davat. Alimentation par deux onduleurs de tension d'une machine synchrone double-étoile. *Revue Internationale de Genie Electrique*, 1(4) :457–470, 1998. (document)

[36] N. Moubayed, F. Meybody-Tabar, et B. Davat. Study and simulation of magnetically coupled multi stator induction machine supplied by independent three phase voltage-source inverters. In *Electrimacs'99*, pages 59–64, Lisboa (Portugal), September 1999. (document)

[37] B. Nogarede. *Etude de moteurs sans encoches à aimants de forte puissance à basse vitesse.* Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1990. II.2.2.1, II.3.1, II.3.1.2, II.3.2, II.4.1.1, II.4.2.1, B.1, B.2

[38] L. Parsa et H.A. Toliyat. Multi-phase permanent magnet motor drives. In *Conference Record of the Industry Applications Conference, 2003. 38th IAS Annual Meeting*, volume 1, pages 401– 408, October 2003. I.3.1.2

[39] G. Pasqualini. Alimentation par convertisseurs statiques : régimes transitoires. Techniques de l'Ingénieur, D3562, Volume D6, 1997. (document)

[40] A. B. Proca, A. Keyhani, A. El-Antably, W. Lu, et M. Dai. Analytical model for permanent magnets motors with surface mounted magnets. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 18(3) :386–391, September 2003. II.3.2.3, C.2

[41] R. Qu et T. A. Lipo. General closed-form analytical expressions of air-gap inductances for surface-mounted permanent magnet and induction machines. In *Proceedings of IEMDC 2003*, 2003. II.4.3.2

[42] J. De La Ree et N. Boules. Induced voltage harmonic reduction of pm cylindrical machines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 28(3) :619–624, May-June 1992. II.3.1

[43] E. Robert-Dehault. *Modélisation dynamique, Commande et Conception de Machines pentaphasées alimentées par des Onduleurs MLI.* Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale Sciences et Technologie de l'Information et des Matériaux, Université de Nantes, 2005. I.3.1.1, I.3.2.3

[44] Hacène Rézine. *Méthodes d'étude et de modélisation des machines synchrones à rotor massif alimentées par onduleur de tension.* Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1983. 5

[45] J. Saint-Michel. Bobinage des machines tournantes à courant alternatif. Techniques de l'Ingénieur, D3420. II.1.2.2, II.2.2.3, II.4.1.3, IV.2.3.3

[46] F. Scuiller, J. F. Charpentier, E. Semail, et S. Clénet. A multiphase surface mounted permanent magnet design to reduce torque ripples and joule losses for naval applications. In *Proceedings of the All Electric Ship Symposium*, Versailles (France), October 2005. IV.1.3.2, IV.1.3.2, IV.2.3.2

[47] F. Scuiller, J.F. Charpentier, E. Semail, et S. Clénet. A global design strategy for multiphase machine applied to the design of a 7-phase fractional slot concentrated winding pm machine. In *Proceedings of the ICEM'06 conference*, Chania, Greece, September 2006. I.3.2.3, IV.1.3.1

[48] F. Scuiller, J.F. Charpentier, E. Semail, S. Clénet, et P. Letellier. Study of unconventional winding configuration of multiphase permanent magnet synchronous machine to improve reliability and torque quality for pod propulsion application. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Technological in podded propulsion, TPOD'2006*, Brest (France), 3-5 october 2006. I.1.1.1

[49] F. Scuiller, E. Semail, J.F. Charpentier, et S. Clénet. Comparison of conventional and unconventional 5-phase pm motor structures for naval applications. *IASME Transactions Issue 2*, 1 :365–370, 2004. I.3.2.1, IV.1.1.2

[50] E. Semail. *Outils et méthodologie d'étude des systèmes électriques polyphasés. Généralisation de la méthode des vecteurs d'espace.* Thèse de Doctorat, Université des Sciences et des Technologies de Lille, 2000. I.1.1.3, I.3.1.1

[51] Eric Semail et Xavier Kestelyn. Modélisation multi-machines d'une machine synchrone polyphasée. In *EF'2001 (Electrotechnique du Futur)*, Nancy (France), 14-15 novembre 2001. (document), I.2

[52] Eric Semail, Xavier Kestelyn, et Alain Bouscayrol. Right harmonic spectrum for the back-electromotive force of a n-phase synchronous motor. In *IEEE-IAS'04*, volume 1, pages 71–78, Seattle (USA), October 2004. (document)

[53] Eric Semail, Xavier Kestelyn, et Alain Bouscayrol. Sensitivity of a 5-phase brushless dc machine to the 7th harmonic of the back-electromotive force. In *IEEE-PESC'04*, Aachen (Germany), June 2004. I.3.1.2

[54] S. Siala, E. Guette, et J. L. Pouliquen. Multi-inverter pwm control : a new generation drives for cruise ship electric propulsion. In *Proceedings of EPE'2003, CD-ROM*, Toulouse (France), September 2003. (document)

[55] A.C. Smith, S. Williamson, et C.G. Hodge. High torque dense naval propulsion motors. In *Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03. IEEE*, volume 3, pages 1421–1427, June 2003. (document), I.3.1.3

[56] C. Studer, A. Keyhani, T. Sebastian, et S.K. Murthy. Study of cogging torque in permanent magnet machines. In *Proceedings of the IEEE IAS Annual Meeting*, pages 42–49, New Orleans, Louisiana, USA, October 1997. C.1

[57] H. A. Toliyat, T. A. Lipo, et J. C. White. Analysis of a concentrated winding induction machine for adjustable speed drive applications. part 1 (motor analysis). *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol.6(4) :679–683, December 1991. II.2.2

[58] H. A. Toliyat, T. A. Lipo, et J. C. White. Analysis of a concentrated winding induction machine for adjustable speed drive applications. part 2 (motor design and performance). *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 6(4) :684–692, December 1991. (document), II.2.2

[59] D.C. White et H.H. Woodson. *Electromechanical Energy Conversion.* John Wiley and Sons, 1959. (document)

[60] Steve Williamson et Sandy Smith. Pulsating torque and losses in multiphase induction machines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 39(4) :986–993, July/August 2003. (document)

[61] Z. Q. Zhu et D. Howe. Analytical prediction of the cogging torque in radial-field permanent magnet brushless motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2) :1371–1374, March 1992. II.3.2.3, C.2

[62] Z. Q. Zhu et D. Howe. Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, part i : Open-circuit field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(1) :124–135, January 1993. II.3.2

[63] Z. Q. Zhu et D. Howe. Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, part ii : Armature-reaction field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(1) :136–142, January 1993. II.2.2.1, II.3.2

[64] Z. Q. Zhu et D. Howe. Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, part ii : Magnetic field on load. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(1) :152–158, January 1993. II.3.2

[65] Z. Q. Zhu et D. Howe. Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, part iii : Effect of stator slotting. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(1) :143–151, January 1993. II.3.2, II.3.2.3

[66] Z. Q. Zhu et D. Howe. Influence of design parameters on cogging torque in permanent magnet machines. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 15(4) :407–412, December 2000. C.1, C.4

Résumé

Cette thèse a pour objet le développement d'outils de conception de machines polyphasées à pôles lisses alimentées par onduleur de tension à modulation de largeur d'impulsion. La démarche est basée sur l'utilisation de la décomposition multimachine.

Selon l'approche multimachine, une machine polyphasée peut être considérée comme l'association de plusieurs machines fictives monophasées et diphasées magnétiquement découplées et mécaniquement couplées. Une machine fictive est caractérisée par une inductance cyclique résultant de la diagonalisation de la matrice d'inductance et une famille d'harmoniques permettant de constituer ses grandeurs de phases (courants, tensions, forces électromotrices, ...). Chaque machine fictive est en mesure de fournir un couple électromagnétique. La somme des couples produits par les machines fictives est égale au couple total produit par la machine réelle. Cette décomposition multimachine permet ainsi de déterminer précisément l'origine des couples pulsatoires. De plus, dans le cadre de l'alimentation de la machine par onduleur de tension à modulation de largeurs d'impulsion, l'analyse du comportement des machines fictives permet d'expliquer l'origine des courants parasites observés lorsque l'onduleur est dimensionné par une approche au premier harmonique. Cette modélisation permet donc de proposer des critères permettant d'adapter au mieux la machine à son alimentation. Ainsi, pour filtrer les courants parasites sans devoir augmenter la fréquence de commutation des interrupteurs, il faut orienter la conception de telle sorte à égaliser les constantes de temps des machines fictives. Pour améliorer la qualité du couple électromagnétique (valeur moyenne et ondulations), la conception doit rendre les machines fictives capables de produire un couple significatif, ce qui spécifie une répartition optimale des harmoniques de force électromotrice (stratégie d'alimentation multimachine). Pour atteindre ces objectifs, deux principaux degrés de liberté sont étudiés : d'une part, le bobinage qui conditionne les valeurs des constantes de temps des machines fictives et la force électromotrice en filtrant les harmoniques de l'induction rotorique ; d'autre part, la couche d'aimants qui détermine l'induction rotorique.

Pour aborder ce problème d'adaptation, deux outils ont été développés et mis en oeuvre. Tout d'abord, afin d'explorer rapidement un grand nombre de machines polyphasées en terme de topologie, de dimension, de caractéristiques de couche d'aimants et de bobinage, un modèle basé sur la résolution analytique des équations vérifiées par le champ électromagnétique a été mis au point. Des comparaisons simulation expérience ont montré que ce modèle était d'une précision acceptable tout en conduisant à des temps de calcul très faibles. Dans ce modèle, le bobinage polyphasé est représenté de façon matricielle, ce qui permet de généraliser l'approche multimachine développée en définissant des bobinages de machines fictives. De plus, la connaissance des familles d'harmoniques permet de construire des fonctions d'aimantation fictive, image des rotors fictifs. Au delà des aspects calculatoires, l'intérêt de ce code est donc

de pouvoir représenter des bobinages et des rotors fictifs. Pour effectuer ces calculs, ce n'est pas la classique approche matricielle qui est utilisée mais plutôt la transformée de Fourier discrète (TFD). Cet approche permet d'interpréter fréquentiellement les changements de base définissant les machines fictives. Elle équivaut à représenter un bobinage fictif par des suites. Il est alors possible de montrer que les énergies de ces suites définissent la valeur de l'inductance fictive et que leurs TFD conditionnent les coefficients de bobinage fictifs. De plus, la TFD permet de visualiser la répartition des pôles d'un bobinage fictif et ainsi de juger de son équilibre.

L'utilisation de ces outils permet de ramener les objectifs de l'adaptation multimachine directement sur les machines fictives. Cette approche rend possible la conception directe des machines fictives, ce qui permet de déduire ensuite la machine réelle. Ainsi des analyses exploratoires sur le bobinage direct des machines fictives peuvent être conduites. La définition de fonctions d'aimantation optimale est facilitée. A titre d'exemple, des procédures d'optimisation du bobinage et de la couche d'aimant sont proposées et notamment utilisées pour adapter un moteur pentaphasé : des solutions tirant profit de la stratégie d'alimentation multimachine tout en maintenant un niveau de courant parasites acceptables sont ainsi obtenues. Elles sont testées par des simulations de l'ensemble convertisseur-machine.

Développement d'outils de conception de Machines polyphasées à aimants utilisant l'Approche multimachine

Mots clés : Machine polyphasée, Machine synchrone à aimants permanents, Conception, Calcul analytique, Bobinage, Pas fractionnaire, Multimachine, Machine fictive, Transformée de Fourier Discrète

Cette thèse a pour objet le développement d'outils de conception de machines polyphasées à pôles lisses alimentées par onduleur de tension à modulation de largeur d'impulsion. Basée sur la décomposition multimachine de la machine polyphasée en une somme de machines fictives magnétiquement découplées et mécaniquement couplées, l'approche adoptée consiste à étudier le problème de l'adaptation convertisseur-machine en reportant les objectifs sur les machines fictives. Une représentation matricielle du bobinage polyphasé, le développement d'un modèle de calcul analytique du champ et l'introduction de la Transformée de Fourier Discrète permettent d'associer aux machines fictives un bobinage et une couche d'aimants. Les objectifs et contraintes liés à la réduction des courants parasites et à l'amélioration de la qualité du couple peuvent alors être formulés directement sur des grandeurs fictives, ce qui permet de déduire des démarches de conception optimale.

Development of design tools for multiphase permanent magnet machines. Method based on the multi-machine approach.

Keywords: Multiphase machine, PM synchronous machine, Design approach, Analytical model, Winding, Fractional-slot pitch, Multi-machine, Fictitious machine, Discrete Fourier Transform

This thesis tackles with the development of design tools dedicated to Permanent Magnet multiphase machines with smooth airgap supplied by Pulse Width Modulation Voltage Source Inverter. Based on the multi-machine decomposition that splits the multiphase machine into several fictitious machines that are magnetically uncoupled and mechanically coupled, the chosen method consists in studying the converter-machine adaptation by putting the design goals on the fictitious machines. A matrix representation of the multiphase winding, the development of analytical field calculation method and the use of the Discrete Fourier Transform operator allow to define for each fictitious machine a winding and a magnet layer. Thereby the goals and the constraints related to parasitic current reduction and torque quality improvement can be directly formulated on the fictitious quantities, which allows to deduce optimised design approach.